Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Um Estudo Introdutório da Teoria de Grafos Através de Matrizes

Diego Rodrigues Gonçalves

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Thiago de Melo

2014

511.5 Gonçalves, Diego Rodrigues
G635e Um Estudo Introdutório da Teoria de Grafos Através de Matrizes/ Diego Rodrigues Gonçalves- Rio Claro: [s.n.], 2014.
50 f.: fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: Thiago de Melo

1. Teoria dos Grafos. 2. Grafo. 3. Matriz. 4. Álgebra Linear. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Câmpus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Diego Rodrigues Gonçalves

Um Estudo Introdutório da Teoria de Grafos Através de Matrizes

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Thiago de Melo
Orientador

Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli
Departamento de Matemática - UNESP

Prof. Dr. Tomas Edson de Barros
Departamento de Matemática - UFSCAR

Rio Claro, 31 de Março de 2014

Dedico esta dissertação
aos meus pais,
à minha companheira Talita,
aos meus irmãos e familiares.

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe, Delhaeunice, e ao meu pai, José Raimundo, que sempre buscaram, com muito esforço, propiciar o melhor para os filhos.

Agradeço à minha companheira Talita que, ao longo dos últimos 13 anos, tem me apoiado em todas as decisões.

Agradeço aos meus irmãos, Rafael, Ewerton e Thiago que me inspiraram a sempre fazer o melhor.

Agradeço à minha sogra Abigail (*in memoriam*) por todo auxilio prestado, especialmente nos primeiros anos de graduação.

Agradeço à todos os meus familiares e amigos, por sempre acreditarem em mim.

Agradeço à equipe gestora de da Escola Municipal Integração, de Vinhedo, pela enorme compreensão e apoio.

Agradeço especialmente ao meu professor orientador Thiago de Melo, pelo encorajamento e pelas valiosas horas dedicadas que culminaram em imprescindíveis contribuições acadêmicas.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar alguns resultados elementares de Álgebra Linear e relacioná-los com a Teoria de Grafos, por meio de exemplos, sempre que possível. A ferramenta básica para isso é a teoria de matrizes.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos, Grafo, Matriz, Álgebra Linear.

Abstract

The aim of this work is to present some elementary results from Linear Algebra and to relate them with Graph Theory, making use of examples if possible.

Keywords: Graph Theory, Grafo, Matrix, Linear Algebra.

Lista de Figuras

3.1 Exemplos de Grafos 23
3.2 Exemplo de Matrizes Adjacentes 25
3.3 Exemplo de um Grafo Orientado e sua matriz incidente 27
3.4 Exemplo de uma árvore geradora 29
3.5 Grafo com três componentes 31
3.6 Exemplo de corte 34
3.7 Exemplo de Ciclos Fundamentais de um Grafo 37
3.8 Exemplo de Cortes Fundamentais de um Grafo 38
3.9 Exemplo de *switching network* 42
3.10 Grafo solução para o problema *network switching* 43

Sumário

1 Introdução **8**

2 Matrizes e Transformações Lineares **9**

2.1 Matrizes 9

2.2 Transformações Lineares 14

3 Conceitos Elementares da Teoria de Grafos **21**

3.1 Grafos e Matrizes 24

3.2 Ciclos fundamentais e cortes fundamentais 35

4 Sugestão de Aulas **44**

4.1 Atividades 44

Referências **50**

1 Introdução

A proposta deste trabalho é apresentar alguns resultados básicos da Teoria de Grafos, bem como relacioná-los com Álgebra Linear.

O estudo começa com a introdução de conceitos relacionados à matrizes, partindo das mais simples definições, em direção a transformações lineares, não exigindo do leitor vasta experiência matemática para o acompanhamento do assunto apresentado. A ideia de se trabalhar com transformação linear tem como objetivo criar uma conexão entre os resultados apresentadas, válidos para transformações, e estendê-los para matrizes, tal como a relação entre o subespaço imagem de uma transformação linear e o subespaço coluna da matriz correspondente a essa transformação.

Após essa breve introdução direcionamos nosso estudo no sentido de definirmos os principais conceitos relacionados a grafos, optando em fazê-los de modo sucinto e simplificado. Uma característica desse trabalho foi o cuidado em tentar exemplificar resultados que fossem, em um primeiro momento, difíceis. Além disso, por se tratar de um texto básico, entendemos que o recurso dos exemplos constituem uma importante ferramenta para a didática do texto.

Finalmente temos a "conexão" dos conceitos de Álgebra Linear com a teoria de grafos, o que é possível com a definição de matriz de adjacência e matriz de incidência de um grafo. Muitos dos resultados, embora elementares, possuem grande importância na aplicação do estudo de Fluxo e Redes. A beleza desses resultados se encontra em sua simplicidade e na possibilidade de interpretações que surgem deles.

Esse texto não exige do leitor uma vasta experiência matemática sobre os assuntos abordados, pois trata-se de uma "primeira leitura" sobre o tema.

2 Matrizes e Transformações Lineares

A proposta deste capítulo é apresentar alguns resultados elementares relacionados aos conceitos de matrizes e transformações lineares. Muitos dos resultados que aqui serão apresentados podem ser encontrados em qualquer livro de Álgebra Linear, como por exemplo [1].

2.1 Matrizes

Chamamos matriz uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas. Podemos atribuir significado as linhas e colunas.

Representamos uma matriz de m linhas e n colunas por:

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

Definição 2.1. *Duas matrizes* $\mathbf{A}_{m\times n} = [a_{ij}]$ *e* $\mathbf{B}_{r\times s} = [b_{ij}]$ *são iguais,* $\mathbf{A} = \mathbf{B}$*, se estas têm o mesmo número de linhas* $(m = r)$ *e colunas* $(n = s)$ *e todos os seus elementos correspondentes são iguais* $(a_{ij} = b_{ij})$*.*

Por exemplo, as matrizes abaixo são iguais, porém com representações distintas.

$$\begin{bmatrix} 5^{-2} & 0 & \cos 45^\circ \\ \frac{1}{4} & e^{i\pi} & 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2^{-2} & -1 & 48 \end{bmatrix}$$

Tipos de Matrizes

Algumas matrizes apresentam tipos especiais de estruturas e propriedades que são fundamentais. É importante salientar que essas matrizes aparecem com frequência no estudo de grafos e, portanto, uma breve apresentação se faz necessária.

Nos casos a seguir considere a matriz $\mathbf{A}_{n\times m}$ com m linhas e n colunas.

Matriz Quadrada: é aquela em que $m = n$, ou seja, o número de linhas e colunas coincide. Uma matriz quadrada $\mathbf{A}_{n\times n}$ também é chamada de matriz de ordem n.

Matriz Nula: é aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j. Ao longo de nosso texto representaremos essa matriz por $\mathbf{0}_{n\times m}$, para deixar claro a ordem da matriz e, quando não houver ambiguidade, simplesmente por $\mathbf{0}$.

Matriz Coluna: é aquela que possui apenas uma coluna, ou seja $m = 1$. Também é comum nos referirmos a uma matriz coluna como um *vetor coluna*.

Matriz Linha: é aquela que possui apenas uma linha, ou seja, $n = 1$. Também é comum nos referirmos a uma matriz linha como um *vetor linha*.

Matriz Diagonal: é uma matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. A mais importante matriz diagonal é a *matriz identidade*, onde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para $i = j$. A matriz identidade de ordem n será representada por $\mathbf{I}_n$.

Matriz Triangular Superior: é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, ou seja, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$.

Matriz Triangular Inferior: é uma matriz quadrada na qual todos os elementos acima da diagonal são nulos, ou seja, $m = n$ e $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Matriz Simétrica: é uma matriz quadrada na qual $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i e j.

Matriz Antissimétrica: é uma matriz quadrada na qual $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i e j.

Operações com Matrizes

A seguir apresentaremos as principais operações envolvendo matrizes.

A **Adição** entre duas matrizes de mesma ordem, $\mathbf{A}_{n\times m} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{B}_{n\times m} = [b_{ij}]$ é uma matriz $n \times m$, que denotaremos por $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, cujos os elementos são somas dos elementos de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Ou seja,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{n\times m}$$

Propriedades: Dadas as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{0}$ de mesma ordem, temos:

- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ (comutatividade)
- $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (associatividade)
- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$.

Multiplicação por escalar: Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times m}$ e α um número real (ou complexo), então definimos $\alpha \cdot \mathbf{A}$ como uma nova matriz tal que:

$$\alpha \cdot \mathbf{A} = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m\times n}$$

Propriedades: Dadas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de mesma ordem $(n \times m)$ e α, $\beta \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) quaisquer:

- $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$
- $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$
- $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$
- $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$

Transposição: Dada uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, podemos obter uma outra matriz $\mathbf{A}^T = [b_{ij}]_{n\times m}$, na qual as linhas são as colunas de $\mathbf{A}$, ou seja $b_{ij} = a_{ji}$. A matriz $\mathbf{A}^T$ é chamada de *transposta* da matriz $\mathbf{A}$. Alguns textos também usam a notação $\mathbf{A}'$ para indicar a transposta de $\mathbf{A}$.

Propriedades:

- Uma matriz é simétrica se, e somente se, ela é igual a sua transposta $(\mathbf{A} = \mathbf{A}^T)$
- $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$. A transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$. A transposta de uma soma é igual a soma das transpostas.
- $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T$, onde α é um escalar qualquer.

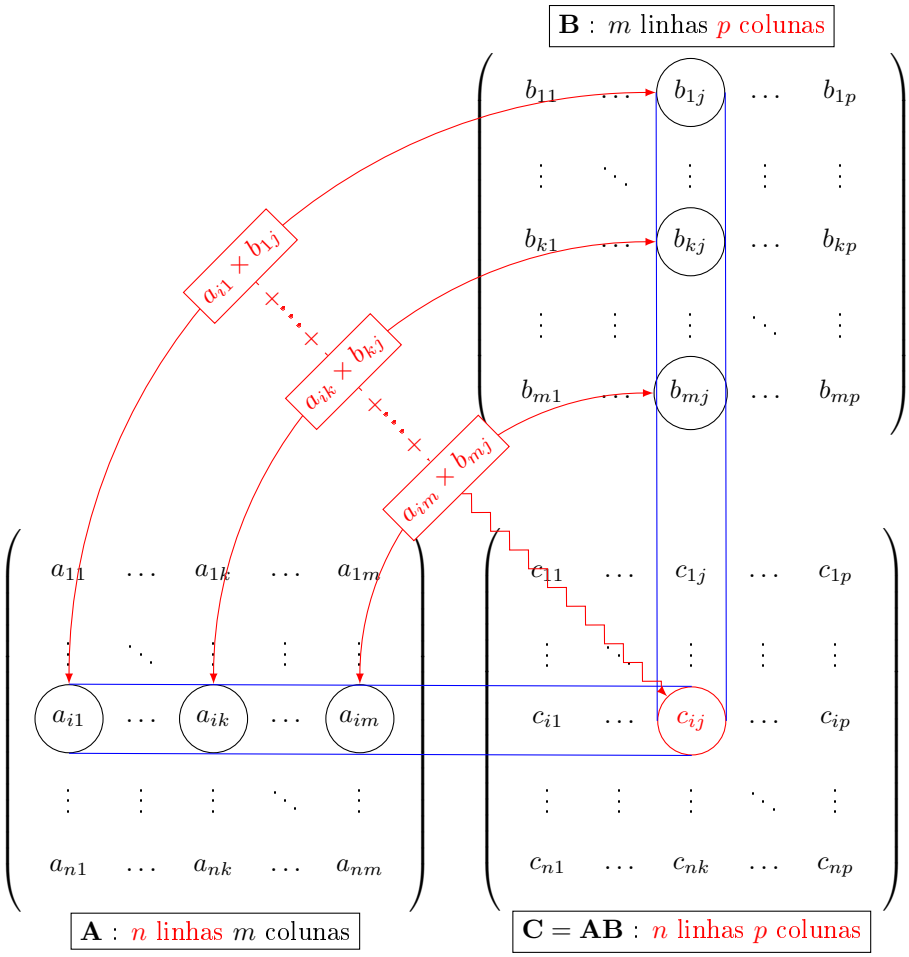
A seguir definiremos a operação mais importante envolvendo matrizes: a **Multiplicação de Matrizes**.

Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times m}$ e $\mathbf{B} = [b_{rs}]_{m\times p}$. Definimos $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = [c_{uv}]_{n\times p}$ onde

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^{m} a_{uk}b_{kv} = a_{u1}b_{1v} + a_{u2}b_{2v} + \cdots + a_{um}b_{mv}.$$

É importante notar que só podemos efetuar o produto de duas matrizes $\mathbf{A}_{n\times m}$ e $\mathbf{B}_{l\times p}$ se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, ou seja, se $m = l$. Também chamamos a atenção para o fato de que a matriz resultado $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ será de ordem $n \times p$. Além disso, o elemento c_{ij} (*i-ésima* linha e *j-ésima* coluna) é obtido multiplicando os elementos da *i-ésima* linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da *j-ésima* coluna da segunda matriz, e somando estes produtos.

A figura abaixo ilustra o produto **AB**.



Propriedades:

- Em geral $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (pois um pode estar definido e o outro não)
- $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ (distributiva à esquerda)
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ (distributiva à direita)
- $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (associatividade)
- $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
- $\mathbf{0A} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$

Determinante: é um número associado a uma matriz quadrada $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ e escrevemos $\det \mathbf{A}$, ou $|\mathbf{A}|$ ou $\det [a_{ij}]$. Mais precisamente,

$$\det [a_{ij}] = \sum_{\rho} \operatorname{sgn} \rho \; a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \cdots a_{n\rho(n)}$$

onde $\rho \in S_n$ é uma permutação de n elementos e $\operatorname{sgn}\rho = (-1)^k$, onde k é o número de inversões (ou transposições) de ρ. Portanto, a soma acima contém $n!$ parcelas.

As propriedades abaixo sobre o determinante de uma matriz ou de sua inversa, podem ser encontradas em [2].

Propriedades:

- Se todos os elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz $\mathbf{A}$ são nulos então $\det \mathbf{A} = \mathbf{0}$.
- $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$
- Se multiplicarmos uma linha da matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por esta constante.
- Uma vez trocada a posição de duas linhas, o determinante troca de sinal
- O determinante de uma matriz que tem duas linhas (colunas) iguais é zero
- $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$

Definição 2.2. *Dada uma matriz quadrada* $\mathbf{A}$ *de ordem* n*, chamamos de* ***inversa*** *de* $\mathbf{A}$ *a uma matriz* $\mathbf{B}$ *tal que* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$*. Usamos* $\mathbf{A}^{-1}$ *para a inversa de* $\mathbf{A}$*.*

- Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas inversíveis (isto é, existem $\mathbf{A}^{-1}$ e $\mathbf{B}^{-1}$), então $\mathbf{AB}$ é inversível e $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
- Se $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada e existe uma matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ então $\mathbf{A}$ é inversível, ou seja, $\mathbf{A}^{-1}$ existe e, além disso, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.
- Nem toda matriz tem inversa.

Uma interessante forma de saber se uma matriz possui, ou não, inversa é a partir do cálculo de seu determinante, ou seja, suponha que $\mathbf{A}_{n\times n}$ tenha inversa, isto é, existe $\mathbf{A}^{-1}$ tal que $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}_n$. Usando uma das propriedades do determinante temos: $\det(\mathbf{AA}^{-1}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^{-1}$ e $\det \mathbf{I}_n = 1$. Logo $\det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^{-1} = 1$. Desse produto podemos concluir que se $\mathbf{A}$ tem inversa então:

- $\det \mathbf{A} \neq 0$
- $\det \mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}}$

2.2 Transformações Lineares

Definição 2.3. *Um* ***espaço vetorial real*** *é um conjunto V, não vazio, com duas operações: $+ : V \times V \longrightarrow V$ (soma) e $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ (multiplicação por escalar) tal que para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ as propriedades a seguir são satisfeitas.*

- $(u + v) + w = u + (v + w)$
- $u + v = v + u$
- *Existe* $0 \in V$ *tal que* $u + 0 = u$ *(elemento nulo).*
- *Existe* $-u \in V$ *tal que* $u + (-u) = 0$
- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
- $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
- $1u = u$

Exemplo 2.4. O conjunto dos números reais, com soma e produto usuais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.5. O conjunto das matrizes quadradas de ordem 2, com entradas reais, denotado por $\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ com adição de matrizes e multiplicação por escalar, forma um espaço vetorial.

Dentre todos os subconjuntos possíveis de um espaço alguns se destacam por algumas de suas propriedades. Esses subconjuntos motivam a definição a seguir.

Definição 2.6. *Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, será um* ***subespaço vetorial*** *de V se:*

- *Para quaisquer* $u, v \in W$ *então* $u + v \in W$
- *Para quaisquer* $\alpha \in \mathbb{R},\ u \in W$ *então* $\alpha u \in W$

Vale a pena destacar que para que W seja um subespaço de vetorial de V ele deve conter o elemento nulo de V, aliás, o conjunto formando apenas elemento nulo de V é um subespaço.

Exemplo 2.7. Se $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ e $W = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ então W é um subespaço de V.

Definição 2.8. *Sejam V um espaço vetorial real (ou complexo), $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números reais (ou complexos). Então o vetor*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

é uma ***combinação linear*** *de $v_1, \cdots, v_n$*

Definição 2.9. *Fixados $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ chamamos de* ***subespaço gerado*** *ao conjunto*

$$W = \{v \in V; v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Notação: $W = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$.

No Exemplo 2.7 os elementos $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ geram o subespaço W. Portanto $W = [v_1, v_2] = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$.

Definição 2.10. *Sejam V um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é* ***linearmente independente (LI)*** *se*

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$$

somente quando $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Caso contrário, dizemos que o conjunto é ***linearmente dependentes (LD)****.*

Definição 2.11. *Um conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de vetores de V será uma* ***base*** *de V (e neste caso, diremos que V tem base finita) se:*

- *$\{v_1, \ldots, v_n\}$ é LI*
- *$[v_1, \ldots, v_n] = V$*

Exemplo 2.12. Seja $V = \mathbb{R}^2$ um espaço vetorial e $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (0, 1)$. Mostraremos que v_1 e v_2 é uma base de $\mathbb{R}^2$. Se $(0, 0) = \alpha(1, 1) + \beta(0, 1) = (\alpha, \alpha + \beta)$, então $\alpha = \beta = 0$, o que significa que v_1 e v_2 são LI.

Também temos que $[(1, 1), (0, 1)] = \mathbb{R}^2$, pois dado qualquer $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ podemos encontrar α e β reais tais que

$$(x, y) = \alpha(1, 1) + \beta(0, 1)$$

neste caso basta tomar $\alpha = x$ e $\beta = y - x$.

Teorema 2.13. *Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial V. Então dentre estes vetores podemos extrair uma base para V.*

Demonstração. Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes então não há nada a mostrar. Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes então existe algum coeficiente diferente de zero tal que

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = 0.$$

Sem perda de generalidade, suponha que $x_n \neq 0$. Então podemos escrever

$$v_n = \left(\frac{-x_1}{x_n}\right) v_1 + \left(\frac{-x_2}{x_n}\right) v_2 + \cdots \left(\frac{-x_{n-1}}{x_n}\right) v_{n-1}$$

ou seja, v_n é uma combinação linear de $v_1, \ldots, v_{n-1}$ e, consequentemente, $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ ainda geram V. Se $v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$ for LD, então existe uma combinação linear deles igual ao vetor nulo com algum coeficiente diferente de zero; desse modo, podemos extrair o vetor correspondente a esse coeficiente. Procedendo desta forma, após uma quantidade finita de passos, chegaremos um subconjunto de $\{v_1, \ldots v_n\}$, formado por r $(r \leq n)$ vetores LI que geram V, isto é, teremos uma base. □

Teorema 2.14. *Seja um espaço vetorial V gerado por um conjunto finito de vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Então qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente LD (e, portanto qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores).*

Demonstração. Como $[v_1, \ldots, v_n] = V$ pelo teorema 2.13 podemos extrair uma base para V de $v_1, \ldots, v_n$. Seja $v_1, \ldots v_r$, $r \leq n$, esta base. Consideremos agora $w_1, w_2, \ldots, w_m$, m vetores de V, com $m > n$. Logo, existem constantes a_{ij}, tais que

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1r}v_r \\ w_2 & = & a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2r}v_r \\ \vdots & & \ddots \\ w_m & = & a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mr}v_r \end{array} \tag{2.1}$$

Considere agora uma combinação linear de $w_1, \ldots, w_m$

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_m w_m = 0. \tag{2.2}$$

Substituindo as relações (2.1) em (2.2) e fazendo os agrupamentos necessários temos:

$$0 = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m)v_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m)v_2 + \cdots \\ \cdots + (a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + \cdots + a_{mr}x_m)v_r.$$

Como $v_1, v_2, \ldots, v_r$ são LI, então

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0 \\ \qquad\qquad \ddots \\ a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + \cdots + a_{mr}x_m = 0 \end{cases}$$

Temos então um sistema linear homogêneo com r equações e m incógnitas $x_1, \ldots, x_m$ e, como $r \leq n \leq m$ ele admite uma solução não trivial, ou seja, existe uma solução com algum x_i não nulo. Portanto $w_1, \ldots, w_m$ são LD. □

Corolário 2.15. *Qualquer base de um mesmo espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos, ou seja, dimensões iguais.*

Demonstração. Sejam $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\{w_1, \ldots, w_m\}$ duas bases de V. Uma vez que $v_1, \ldots, v_n$ geram V e $w_1, \ldots, w_m$ são LI, pelo teorema anterior, $m \leq n$.

Por outro lado, como $w_1, \ldots, w_m$ geram V e $v_1, \ldots, v_n$ são LI, ainda pelo teorema 2.14, $n \leq m$. Portanto $n = m$. □

Definição 2.16. *Seja V um espaço vetorial possuindo uma base finita. O número de elementos desta base (e portanto, de qualquer outra) é chamado de* ***dimensão*** *de V e denotado por* $\dim V$. *Se $V = \{0\}$ convenciona-se* $\dim V = 0$.

Definição 2.17 (Transformação Linear)**.** *Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma* ***transformação linear*** *é uma função de V em W, $F : V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:*

i) Quaisquer que sejam $u,\ v \in V$,

$$F(u + v) = F(u) + F(v)$$

ii) Quaisquer que sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$,

$$F(\alpha v) = \alpha F(v)$$

Um importante exemplo é que toda matriz $n \times m$ está associada a uma transformação linear de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$. Podemos dizer que uma matriz produz uma transformação linear. A implicação inversa também é verdadeira pois, uma transformação linear de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$ pode ser representada por uma matriz $n \times m$. A saber seja $\mathbf{A}$ uma matriz $n \times m$. Definimos

$$\begin{array}{rccc} L_{\mathbf{A}}: & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & v & \longmapsto & \mathbf{A} \cdot v \end{array}$$

onde $v \in \mathbb{R}^m$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$

$$L_{\mathbf{A}}(v) = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Dados $u,\ v \in \mathbb{R}^m$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ da propriedade da adição de matrizes segue que: $L_{\mathbf{A}}(u+v) = \mathbf{A}(u+v) = \mathbf{A}u + \mathbf{A}v = L_{\mathbf{A}}(u) + L_{\mathbf{A}}(v)$ e da propriedade da multiplicação de uma matriz por um escalar temos: $L_{\mathbf{A}}(\alpha v) = \mathbf{A}(\alpha v) = \alpha \mathbf{A}(v) = \alpha L_{\mathbf{A}}(v)$ e portanto $L_{\mathbf{A}}$ é uma transformação linear.

Imagem e Núcleo. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. A *imagem* de T é o conjunto dos vetores $w \in W$ tais que existe um vetor $v \in V$, que satisfaz $T(v) = w$. Ou seja,

$$\text{im}(T) = \{w \in W;\ T(v) = w \text{ para algum } v \in V\}.$$

O conjunto de todos os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = 0$ é chamado de *núcleo* de T, sendo denotado por $\ker(T)$. Isto é

$$\ker(T) = \{v \in V;\ T(v) = 0\}.$$

Vale ressaltar que tanto $\text{im}(T) \subset W$ quanto $\ker(T) \subset V$ são subespaços vetoriais. Chamamos de *posto* (T), denotado por $\text{rk}\, T$, a dimensão da imagem de T.

Teorema 2.18. *Se $T : V \to W$ é uma transformação linear então $\ker(T) = 0$ se, e somente se, T é injetora.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $u,\ v \in V$ tais que $T(u) = T(v)$. Então $T(u) - T(v) = T(u - v) = 0$, ou seja, $u - v \in \ker(T)$. Como por hipótese o único elemento do núcleo é 0, então $u - v = 0$, ou seja, $u = v$.

($\Leftarrow$) Seja $v \in \ker(T)$, isto é, $T(v) = 0$. Como necessariamente $T(0) = 0$, $T(v) = T(0)$. Logo $v = 0$, pois T é injetora. Portanto o único elemento do núcleo é 0, ou seja, $\ker(T) = \{0\}$ □

Agora apresentaremos um importante resultado que relaciona as dimensões do núcleo e imagem de uma transformação linear.

Teorema 2.19 (do Núcleo e da Imagem)**.** *Seja V e W espaços vetoriais de dimensão finita e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então*

$$\dim \ker(T) + \dim \text{im}(T) = \dim V.$$

Demonstração. Considere $v_1, \ldots, v_n$ uma base de *ker*(T). Como $\ker(T) \subset V$ é subespaço de V, podemos completar este conjunto de modo a obter uma base de V.

Seja então $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\}$ a base de V. Queremos mostrar que $T(w_1), \ldots, T(w_m)$ é uma base de $\text{im}(T)$, isto é,

i) $[T(w_1), \ldots, T(w_m)] = \text{im}(T)$

ii) $\{[T(w_1), \ldots, T(w_m)\}$ é LI

Prova de i): Dado $w \in \text{im}(T)$ existe $u \in V$ tal que $T(u) = w$. Se $u \in V$, então $u = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n + b_1w_1 + \cdots + b_mw_m$. Mas,

$$\begin{aligned} w &= T(u) = T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n + b_1w_1 + \cdots + b_mw_m) \\ &= a_1T(v_1) + \cdots + a_nT(v_n) + b_1T(w_1) + \cdots + b_mT(w_m) \end{aligned}.$$

Como $v_1, \ldots, v_n \in \ker(T)$, $T(v_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Desse modo,

$$w = b_1 T(w_1) + \cdots + b_m T(w_m)$$

e a imagem de T é gerada pelos vetores $T(w_1), \ldots, T(w_m)$.
Prova de ii): Consideremos agora a combinação linear $\alpha_1 T(w_1) + \alpha_2 T(w_2) + \cdots + \alpha_m T(w_m) = 0$. Mostraremos que todos os α_i são nulos.

Como T é uma transformação linear $T(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_m w_m) = 0$. Portanto $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_m w_m \in \ker(T)$. Consequentemente $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_m w_m$ pode ser escrito como uma combinação linear da base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\ker(T)$, isto é, existem $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tais que

$$\begin{aligned} \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_m w_m &= \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n \\ \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_m w_m - \beta_1 v_1 - \cdots - \beta_n v_n &= 0 \end{aligned} .$$

Mas $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\}$ é uma base de V então temos $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$.

Note que $\dim \ker(T) = n$, $\dim \operatorname{im}(T) = m$ e $\dim V = n + m$. □

Subespaços Fundamentais de uma Matriz. Finalizamos este capítulo definindo dois *subespaços fundamentais* de uma matriz e os relacionando com o teorema do núcleo e imagem. Esses conceitos serão utilizados principalmente no Capítulo 3 deste trabalho.

Para as definições a seguir considere $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, isto é, $\mathbf{A}$ é uma matriz de ordem $n \times m$ com entradas reais.

Espaço Coluna de A: é o subconjunto do $\mathbb{R}^n$ definido por

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = \mathbf{A}x; x \in \mathbb{R}^m\}.$$

Observe que $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas colunas da matriz $\mathbf{A}$. Utilizando a notação $\mathbf{A} = [c_1, \ldots, c_m]$ para $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, onde $c_j \in \mathbb{R}^n$ é a *j-ésima* coluna da matriz, temos que todo elemento $z \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ pode ser escrito como:

$$z = \mathbf{A}x \;=\; \sum_{j=1}^{m} x_j c_j \;;\; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Espaço Nulo de A: é o subconjunto de $\mathbb{R}^m$ definido por

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{A}x = 0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

Note que $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ é um subespaço de $\mathbb{R}^m$, constituído pelas soluções do sistema linear homogêneo $\mathbf{A}x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Também é possível definir o *espaço coluna de* $\mathbf{A}^T$ como o subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas linhas da matriz $\mathbf{A}$, que as vezes é denominado de *espaço linha* de $\mathbf{A}$ e o *espaço*

nulo de $\mathbf{A}^T$ que é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Em algumas ocasiões o espaço nulo de $\mathbf{A}^T$ é chamado de *espaço nulo esquerdo* de $\mathbf{A}$, isso se deve ao seguinte fato: se o elemento $z \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$ então $\mathbf{A}^T z = 0_{\mathbb{R}^m} \Leftrightarrow z^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T_{\mathbb{R}^m}$.

O subespaço coluna e o subespaço nulo possuem uma forte relação com, respectivamente, o subespaço imagem e o subespaço núcleo de uma transformação linear. Isso se deve especialmente pelo fato de que uma transformação linear sempre está, ou pode ser, associada a uma matriz. A dimensão do espaço coluna de uma matriz $\mathbf{A}$ também é chamada de posto de $\mathbf{A}$ e também denotado por $\operatorname{rk} \mathbf{A}$.

Tendo em vista esse fato podemos escrever o teorema 2.19 em termos do subespaço coluna e subespaço nulo de uma matriz. Seja $\mathbf{A}_{n\times m}$ uma matriz de ordem $(n \times m)$. Nesse caso temos:

$$\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = m.$$

3 Conceitos Elementares da Teoria de Grafos

Neste capítulo, definiremos *grafos* e apresentaremos alguns resultados elementares. Para isso, faremos uso da noção de *família* que, a partir daqui, será um conjunto cujos elementos são conjuntos.

Definição 3.1. *Um grafo G é formado por um par $(V(G), E(G))$ onde $V(G)$ é um conjunto não vazio e $E(G)$ uma família de pares não ordenados de elementos, não necessariamente distintos, de $V(G)$.*

Denominaremos de *grafo simples* G, como um grafo G no qual não existe repetições nos elementos de $E(G)$, além disso, cada elemento de $E(G)$ é um par de elementos distintos e não ordenados de $V(G)$. Ao longo desse trabalho o nosso foco estará em grafos simples, nos quais o conjunto de vértices é finito. Note que a intenção da definição de grafo é a de ser a mais abrangente possível, mostrando a essência da estrutura definida como grafo.

Os elementos de $V(G)$ serão chamados de *vértices* e os elementos de $E(G)$ de *arestas*. Quando não houver risco de confusão denotaremos $V(G)$ e $E(G)$ simplesmente por V e E. Uma aresta de $E(G)$, por exemplo $\{a, b\}$ será denotada por ab, e nesse caso os vértices a e b são *adjacentes*. Também dizemos que duas arestas são adjacentes quando possuírem um vértice em comum, por exemplo dadas $ab, cd \in E(G)$ então ou $a = b$ ou d, ou $b = c$ ou d. Uma aresta é *incidente* ao vértice a quando ele for uma de suas extremidades. Definimos como *aresta múltipla* uma que aresta aparece mais de uma vez no grafo G; o número de ocorrência desta aresta é chamado de *multiplicidade*. Uma aresta é um *laço* se para $v \in V(G), vv \in E(G)$. O *grau* de um vértice v é o número de arestas que contêm v, denotado por $g(v)$. Caso existam laços incidentes no vértice v, cada laço contribuirá em duas unidades para o grau de v. Um *vértice ímpar* é um vértice com grau ímpar.

O *grau máximo* de um grafo G, denotado por $\Delta(G)$, é definido por: $\Delta(G) = \max\{g(v) \mid v \in V(G)\}$, ou seja, dentre todos os vértices do grafo aquele que possui o maior número de arestas. Por outro lado o *grau mínimo*, denotado por $\delta(G)$ é definido como $\delta(G) = \min\{g(v) \mid v \in V(G)\}$.

Lema 3.2. *Seja G um grafo com $V = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, cujos graus são dados por $g(a_1), g(a_2), ..., g(a_n)$. O número m de arestas em G é dado por:*

$$m = \left(\frac{g(a_1) + g(a_2) + \cdots + g(a_n)}{2} \right).$$

Em particular, a soma dos graus de G é um número par.

Demonstração. De fato, cada vértice a_i fornece $g(a_i)$ e como cada aresta contém exatamente dois vértices, devemos então tomar a metade da soma dos graus. □

Como consequência deste Lema temos:

Teorema 3.3. *Todo grafo G tem um número par de vértices ímpares*

Demonstração. Seja G um grafo com $V = \{w_1, \ldots, w_j, v_1, \ldots, v_n\}$, suponha que $g(w_i) = 2k'_{i=1,\ldots,j} \in \mathbb{N}$ e $g(v_i) = 2k_i + 1$ para $k_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{gathered} g(w_1) + \cdots + g(w_j) + g(v_1) \cdots + g(v_n) = \\ (2k'_1) + \cdots + (2k'_j) + (2k_1 + 1) + \cdots + (2k_n + 1) = \\ 2 \cdot (k'_1 + \cdots + k'_j + k_1 + \cdots + k_n) + n \end{gathered}$$

Mas, pelo lema anterior, a soma deve ser um número par, portanto n (que é o número de vértices de grau ímpar) deve ser um número par. □

A *ordem* de um grafo G é a cardinalidade do conjunto V, denotado por $|V|$, e a *dimensão* de G é a cardinalidade do conjunto E, denotado por $|E|$. Dizemos que um grafo H é *subgrafo* de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$.

Considere o grafo $G = (V(G), E(G))$ com subgrafos $H_1, \ldots, H_p$ onde: $V(H_i) \cap V(H_j) = \emptyset$ para $i \neq j$, $V(H_1) \cup \cdots \cup V(H_p) = V(G)$ e $E(H_1) \cup \cdots \cup E(H_p) = E(G)$. Os subgrafos nesse caso são chamados de *componentes conexas* de G, e assim dizemos que G tem p *componentes conexas*.

Um grafo é dito *conexo* quando possui apenas uma componente conexa. Caso contrário, é dito desconexo. Vale observar que, em um grafo conexo, sempre é possível conectar dois vértices por meio de uma sequência de arestas adjacentes.

Um grafo com n vértices será *regular de grau k* ou *k-regular*, quando o grau de cada um de seus vértices for igual a k. Pode-se verificar facilmente pelo Lema 3.2 que número de arestas será $m = \frac{1}{2}nk$. Um *grafo ciclo*, de n vértices e denotado por C_n é um grafo 2-regular conexo.

Um grafo G sem laços e sem arestas múltiplas é *completo* se para quaisquer $a, b \in V$ temos $ab \in E$. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n e dizemos que um grafo é *nulo* quando $E(G) = \emptyset$, e o denotamos por $\overline{K}_n$.

Dois grafos $H_1 = (V(H), E(H_1))$ e $H_2 = (V(H), E(H_2))$ (com o mesmo conjunto de vértices) são chamados de *complementares* quando:

1. $E(H_1) \cap E(H_2) = \emptyset$;

2. o grafo $H = (V(H), E(H_1) \cup E(H_2))$ é completo.

Denotamos os complementares por $\overline{H}_1 = H_2$ (e, consequentemente, $\overline{H}_2 = H_1$).

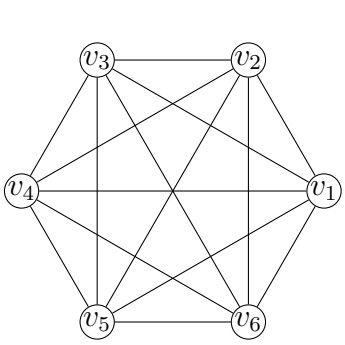
Corolário 3.4. *O número de arestas em um grafo simples completo K_n é $\frac{n(n-1)}{2}$.*

Demonstração. Basta considerar o fato que K_n é um grafo regular de grau $(n-1)$. Pelo Lema 3.2 temos que o número de arestas será $\frac{n(n-1)}{2}$.

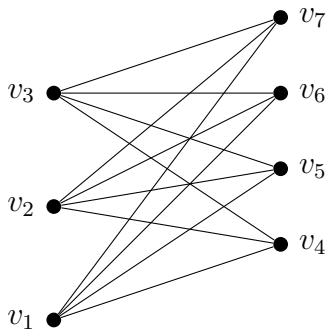
Uma demonstração alternativa pode ser por indução em n. Para $n = 1$ o resultado é imediato. Suponha válido para um grafo com n vértices. Por fim, se o grafo tem um vértice a mais, ou seja, $n+1$ vértices, teremos n arestas adicionais. Então o número de arestas será $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2-n+2n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{(n+1)((n+1)-1)}{2}$. □

Chamaremos de *grafo bipartido* G quando o conjunto de vértices $V(G)$ puder ser particionado em dois subconjuntos disjuntos $V_1(G)$ e $V_2(G)$ de modo que toda aresta do grafo tem um extremidade em $V_1(G)$ e a outra em $V_2(G)$.

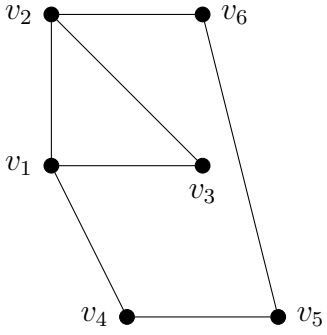
Um grafo simples e conexo com n vértices e $n-1$ arestas será denominado de *árvore*. Claramente temos que, em uma árvore, não existem laços, arestas múltiplas nem "ciclos". Uma *floresta* é um grafo simples e desconexo, sendo que cada componente conexa é uma árvore. Uma *árvore geradora* do grafo conexo G é uma árvore $T = (V(T), E(T))$onde $V(T) = V(G)$ e $E(T) \subset E(G)$, ou seja, é uma árvore com o mesmo conjunto de vértices que G e com arestas em um subconjunto das arestas de G.



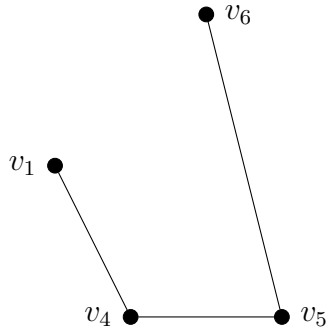
(a) Grafo Completo K_5



(b) Grafo Bipartido



(c) Grafo G



(d) Subgrafo de G (árvore)

Figura 3.1: Exemplos de Grafos

Um *percurso* $v_{\alpha_1}v_{\alpha_2}\dots v_{\alpha_k}$ em G é uma sequência qualquer de vértices adjacentes, onde $v_{\alpha 1}$ e $v_{\alpha k}$ são, respectivamente, o ponto inicial e o ponto final do percurso. Um percurso é chamado de *caminho* quando não há repetição na sequência de vértices. Quando, em um caminho, temos $v_{\alpha_1} = v_{\alpha_k}$, denominamos *ciclo*. Um laço é um ciclo que contém apenas um vértice e, consequentemente, somente uma aresta.

Definição 3.5. *Sejam dois grafos $G = (V(G), E(G))$ e $H = (V(H), E(H))$. Dizemos que G e H são isomorfos se existir uma bijeção $\varphi : V(G) \to V(H)$ tal que $ab \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(a)\varphi(b) \in E(H)$.*

Grafos Orientados. A definição de grafo orientado tem como intuito essencialmente estabelecer uma orientação em cada uma das arestas de um grafo qualquer. De modo formal temos:

Definição 3.6. *Um grafo orientado (digrafo) D é formado por um par $(V(D), E(D))$ onde $V(D)$ é um conjunto finito e não-vazio de elementos e $E(D)$ um conjunto finito de pares ordenados distintos.*

Neste caso, é comum denominar os elementos do conjunto $E(D)$ de *arcos*, e quando não houver nenhum risco de confusão também podemos denominá-los de arestas. Note que muitas das notações estabelecidas para grafos também serão utilizadas em grafos orientados, obviamente levando-se em consideração algumas peculiaridades, a mais importante referente à orientação da aresta.

Para um arco (u, v) o primeiro vértice u é chamado de *cauda* ou *ponta inicial* e o segundo vértice v é chamado de *cabeça* ou *ponta final*. Também podemos dizer que o arco (u, v) *deixa* u e *chega em* v. A cabeça e a cauda de um arco são *adjacentes* (ou vizinhos) e *incidem* nesse arco. Podemos denotar o arco $e = (x, y)$ por xy ou simplesmente por e.

O grau de um vértice em um grafo orientado é a quantidade de arestas incidentes nesse vértice. Quando for necessário usaremos *grau de entrada (grau de saída)* do vértice v para nos referir aos arcos com ponta final (ponta inicial) em v.

3.1 Grafos e Matrizes

Matriz de Adjacência e de Incidência

A forma mais prática de se trabalhar com grafos é "traduzindo" as suas estruturas em matrizes. Tendo em vista o grande número de informações que um grafo pode conter e a necessidade de se extrair dados de suas propriedades, um estudo que relacione uma matriz e um grafo é um campo muito profícuo. Além do mais, a Álgebra Linear dá um suporte para o desenvolvimento do estudo.

Certamente a maior parte desses estudos estão no campo da computação, uma vez que a representação de um grafo para um computador é essencialmente uma matriz.

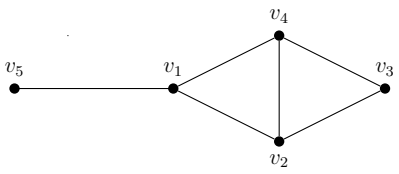
A seguir definiremos as principais formas de representação de um grafo e adiante estudaremos algumas de suas propriedades, tentando fazer uma conexão com os conceitos básicos apresentados até agora.

Definição 3.7. *Seja G um grafo com vértices rotulados $v_1, v_2, \ldots, v_n$. A* ***matriz de adjacência*** $\mathbf{A}(G)$ *de G é a matriz $n \times n$ na qual cada entrada a_{ij} corresponde ao número de arestas incidindo em v_i e v_j.*

A matriz de adjacência de um grafo é simétrica com relação à diagonal principal. Também, para um grafo sem laços, cada entrada da diagonal é igual a 0. A soma das entradas em qualquer linha (coluna) é o grau do vértice correspondente naquela linha (coluna).

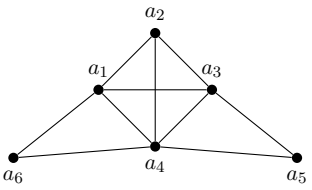
As matrizes de adjacência $\mathbf{A}(G)$ e $\mathbf{A}(H)$ abaixo representam, respectivamente, os grafos G e H das figuras 3.2a e 3.2b. Para uma melhor clareza, indexamos as linhas e as colunas das matrizes aos vértices correspondentes. Deixamos claro que a matriz é composta apenas pelos números "dentro" dos parênteses. Faremos o uso desse recurso ao longo das páginas seguintes.

$$\mathbf{A}(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



(a) Grafo G

$$\mathbf{A}(H) = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



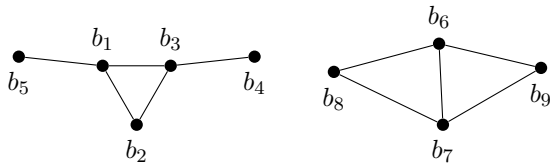
(b) Grafo H

Figura 3.2: Matrizes adjacentes dos grafos G e H

Para grafos desconexos, vale notar que a matriz de adjacência é uma matriz em composta por blocos, onde cada bloco é uma matriz adjacência de cada componente. Por exemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{array}{cccc} b_6 & b_7 & b_8 & b_9 \end{array} \\ \\ \end{array}$$

corresponde ao grafo



Lema 3.8. *Dado um grafo simples conexo G, com n vértices e sua matriz adjacência $\mathbf{A}$, então a componente c_{ij} de $\mathbf{A}^k$, para algum k inteiro e positivo, é o número de caminhos de comprimento k que liga o vértice v_i ao vértice v_j.*

Demonstração. Para $k = 1$ a afirmação é óbvia, pela definição de matriz adjacência existe $a_{ij} = a_{ji} = 1$ se v_i e v_j são adjacentes. Para $k = 2$ o elemento c_{ij} de $\mathbf{A}^2$ sera dado, pela definição de multiplicação de matrizes, por $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}a_{lj}$ note que as parcelas serão não nulas somente quando um vértice v_l, $l = 1, \ldots, n$, for simultaneamente adjacente ao vértice v_i e o vértice v_j. Também vale notar que o elemento c_{ii} de $\mathbf{A}^2$ vértice é o grau do vértice v_i. Para $k = 3$ basta observar que $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A}$, implicitamente temos os caminhos de comprimento 2 mais os caminhos (que são adjacentes) de comprimento 1. Podemos então estender essa linha de raciocínio para $\mathbf{A}^k$. □

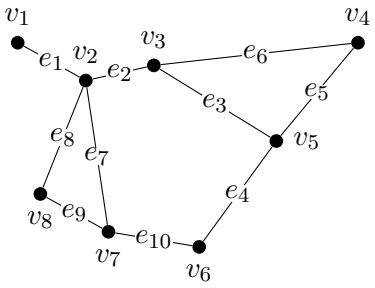
Definição 3.9. *Seja G um grafo simples, com n vértices rotulados $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e m arestas rotuladas $e_1, e_2, \ldots, e_m$. A matriz de incidência $\mathbf{Q}(G)$ é a matriz $n \times m$ na qual cada entrada é:*

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o vértice } v_i \text{ é incidente a aresta } e_j, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em uma matriz de incidência de um grafo sem laços, cada coluna contém exatamente dois 1's, pois cada aresta contém dois vértices; a soma dos números em uma linha é o grau do vértice correspondente naquela linha.

Abaixo, a matriz de incidência para o grafo correspondente.

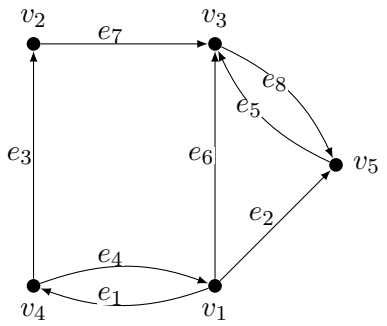
$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$



Definição 3.10. *Seja D um grafo orientado sem laços com n vértices rotulados como $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e m arestas rotuladas de $e_1, e_2, \ldots, e_m$. A* ***matriz de incidência*** $\mathbf{Q}(D)$ *é a matriz $n \times m$ na qual cada entrada é:*

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta } e_j \text{ sai do vétice } v_i, \\ -1 & \text{se a aresta } e_j \text{ chega no vétice } v_i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A figura 3.3 mostra um grafo orientado e sua matriz incidente.



$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \end{array}$$

Figura 3.3: Grafo Orientado

Suponha que temos um circuito elétrico, representado por um grafo orientado. Analisando sua matriz de incidência, é possível obtermos informações desse circuito, verificando, por exemplo, a quantidade de "carga" (vista como a diferença entre o grau de entrada e o grau de saída) nos vértices e a "corrente", interpretada como o "peso" da aresta.

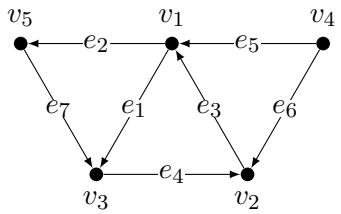
Dado um grafo G, definimos uma transformação linear aplicando um conjunto de arestas em um conjunto de vértices, por meio da matriz de incidência.

Mais precisamente, abusando da notação, seja $\mathbf{Q} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ a transformação linear determinada pela matriz $\mathbf{Q}$. Assim, dado $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$, onde ε_i representa a corrente na aresta e_i, obtemos $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ por meio de $\nu = \mathbf{Q} \cdot \varepsilon$, onde ν_j representa a carga do vértice v_j.

Para ilustrar a ideia, considere D um grafo orientado com vértices $v_1, \ldots, v_5$ e arestas $e_1, \ldots, e_7$, com matriz de incidência

$$\mathbf{Q}(D) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Uma possível representação para D é



Se, por exemplo, tivermos $\varepsilon = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ então

$$\mathbf{Q} \cdot \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Note que o valor de cada ν_j corresponde à diferença entre o grau de saída e o grau de entrada no vértice v_j. Isto ocorre somente para este ε, ou seja, todas as arestas com peso 1.

Uma pergunta que poderia surgir dessa análise seria "qual ε satisfaz $\mathbf{Q} \cdot \varepsilon = 0$?", ou seja, quais "correntes" mantêm os vértices em equilíbrio (quantidade que chega igual à quantidade que sai).

Note que os vetores ε satisfazendo $\mathbf{Q} \cdot \varepsilon = 0$ estão no espaço nulo (ou núcleo) de $\mathbf{Q}$.

Fazendo o escalonamento da matriz $\mathbf{Q}$ encontramos a sua forma reduzida

$$\mathbf{Q}_{\text{red}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|ccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_5 & e_4 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Chamamos atenção para o fato de que durante o processo de escalonamento permutamos as colunas e_4 e e_5, e, uma vez que as colunas são indexadas pelos arcos precisamos ter esse cuidado ao escrever os vetores da base do núcleo.

Seja $\mathbf{R}$ uma matriz reduzida escrita em blocos na forma

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{r\times r} & \mathbf{F}_{r\times m-r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times m}$$

Sendo $\mathbf{N}$ a matriz espaço nulo de $\mathbf{R}$, ou seja, satisfazendo $\mathbf{RN} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{N}$ será da forma $\begin{pmatrix} -\mathbf{F}_{r\times m-r} \\ \mathbf{I}_{m-r\times m-r} \end{pmatrix}$, onde as colunas de $\mathbf{N}$ formam uma base do núcleo de $\mathbf{R}$. Finalmente, em nosso exemplo, temos então a seguinte base para o núcleo

$$\overset{\varepsilon}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \quad \overset{\varepsilon'}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \quad \overset{\varepsilon''}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Veja que as componentes de ε não nulas correspondem à e_1,e_2 e e_4, lembramos o leitor da permutação das colunas ocorrida no processo de escalonamento. Estes arcos formam um ciclo no grafo orientado. Paras as componentes de ε' temos e_3, e_5 e e_6 neste caso observe que a componente correspondente a aresta e_5 é negativa, o que significa que o ciclo formado por ε' passa no sentido oposto da orientação de e_5. Finalmente para ε'' temos o ciclo formado pelas arestas e_1 (no sentido oposto), e_2 e e_7.

Agora vamos nos concentrar no espaço coluna da matriz $\mathbf{Q}$. Podemos perceber, observando a matriz $\mathbf{Q}_{\text{red}}$, que uma base para o espaço coluna é formada por e_1, e_2, e_3 e e_5, que são os pivôs da matriz $\mathbf{Q}_{\text{red}}$, ou seja, formam o bloco identidade. Esses elementos determinam uma árvore geradora no grafo. Chamamos a atenção para o fato de que as outras arestas são combinações lineares das 4 citadas anteriormente. Por exemplo, $e_7 = -e_2 + e_1$, que corresponde a um caminho entre v_5 e v_3.

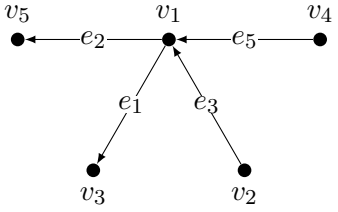


Figura 3.4: Árvore geradora do grafo orientado D

Posto da Matriz de Incidência

Para qualquer grafo orientado G, a soma das entradas de uma coluna de $\mathbf{Q}(G)$ é zero e, consequentemente, as linhas de $\mathbf{Q}(G)$ são linearmente dependentes. Nesta parte do texto, estudaremos o significado do posto de $\mathbf{Q}(G)$ com relação ao grafo G.

Lema 3.11. *Se G é um grafo conexo com n vértices, então o posto de $\mathbf{Q}(G)$ é igual a $n-1$.*

Demonstração. Suponha que $x^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ é um *vetor coluna* no espaço nulo de $\mathbf{Q}^T$, isto é, $x^T \cdot \mathbf{Q} = 0$. Então $x_i - x_j = 0$ sempre que o vértice v_i estiver conectado com o vértice v_j por meio de algum percurso. Uma vez que G é conexo, então todas as coordenadas de x são iguais, ou seja, $x = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Portanto o espaço nulo de $\mathbf{Q}^T$ é no máximo unidimensional e assim o posto de $\mathbf{Q}$ é no mínimo $n-1$. Como observado anteriormente, as linhas de $\mathbf{Q}$ são linearmente dependentes e portanto o posto de $\mathbf{Q}$ é no máximo $n-1$, implicando que o posto de $\mathbf{Q}$ é $n-1$. □

Teorema 3.12. *Se G é um grafo com n vértices e tem k componentes conexas então o posto de $\mathbf{Q}$ é $n-k$.*

Demonstração. Sejam $G_1, G_2, \dots, G_k$ os componentes conexas de G. Rotulando os vértices (linhas de $\mathbf{Q}$) e os arcos (colunas de $\mathbf{Q}$) de modo conveniente, temos

$$\mathbf{Q}(G) = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}(G_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}(G_2) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{Q}(G_k) \end{pmatrix}$$

Uma vez que G_i é conexo, o posto de $\mathbf{Q}(G_i)$ é $n_i - 1$ (pelo lema 3.11), onde n_i é o número de vértices em G_i, $i = 1, \dots, k$. Então:

$$\begin{aligned} \operatorname{rk} \mathbf{Q}(G) &= \operatorname{rk} \mathbf{Q}(G_1) + \cdots + \operatorname{rk} \mathbf{Q}(G_k) \\ &= (n_1 - 1) + \cdots + (n_k - 1) \\ &= n_1 + \cdots + n_k - k = n - k. \end{aligned}$$

□

Para ilustrar o teorema anterior, considere o exemplo da figura 3.5 na página 31.

Lema 3.13. *Seja G um grafo conexo orientado com n vértices. Então o espaço coluna de $\mathbf{Q}(G)$ consiste de todos os vetores $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $\sum_i x_i = 0$.*

Demonstração. Seja U o espaço coluna de $\mathbf{Q}(G)$ e seja

$$W = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Big\}.$$

$$
\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccc}
-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

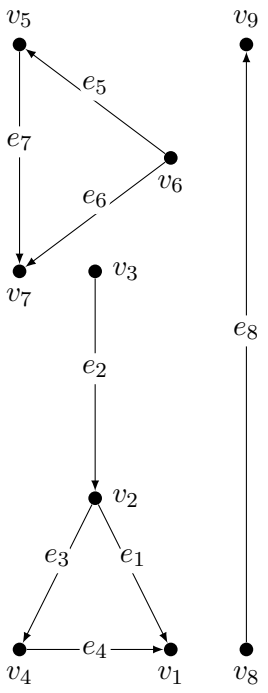


Figura 3.5: Grafo com três componentes

Então $\dim W = n-1$, pois afinal é fácil verificar que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ fornece $x_n = -x_1 - x_2 + \cdots + x_{n-1}$, que possui $n-1$ graus de liberdade. Cada coluna de $\mathbf{Q}(G)$ está em W e consequentemente $U \subset W$. Logo, pelo lema 3.11, segue que

$$n - 1 = \dim U \leqslant \dim W = n - 1.$$

Portanto $\dim U = \dim W$ e concluímos que $U = W$. □

Exemplo 3.14. Considere a matriz de incidência

$$
\mathbf{Q} = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc}
-1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}.
$$

Perceba que um elemento do espaço coluna é da forma

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Assim,

$$x_1 = -\alpha, \qquad x_2 = \alpha + \beta - \gamma, \qquad x_3 = \gamma, \qquad x_4 = -\beta,$$

e portanto $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\alpha + \alpha + \beta - \gamma + \gamma - \beta = 0$.

Lema 3.15. *Seja G um grafo com n vértices. As colunas $j_1, \ldots, j_k$ de $\mathbf{Q}(G)$ são linearmente independentes se, e somente se, as arestas correspondentes $e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}$ de G induzem um grafo acíclico, ou seja, uma floresta.*

Demonstração. Considere as arestas $e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}$ e suponha haver um ciclo no subgrafo induzido. Sem perda de generalidade, suponha que as colunas $j_1, \ldots, j_p$ formem esse ciclo. Caso necessário, podemos renomear os vértices de G de modo que a submatriz de $\mathbf{Q}(G)$ formada pelas colunas $j_1, \ldots, j_p$ seja da forma $\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{pmatrix}$, onde $\mathbf{B}_{p\times p}$ é matriz incidente do ciclo formado pelas arestas $e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}$. Perceba que $\mathbf{B}$ é uma matriz quadrada com a soma das entradas de cada coluna igual a zero, afinal $\mathbf{B}$ é da forma

$$\begin{pmatrix} \vdots & \cdots & \pm 1 & \cdots \\ \pm 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \mp 1 & \cdots \\ \mp 1 & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Portanto $\mathbf{B}$ é uma matriz singular e assim as colunas $j_1 \ldots, j_k$ são linearmente dependentes.

Reciprocamente, suponha que as arestas $e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}$ induzem um grafo acíclico, ou seja, uma floresta. Se a floresta tem q componentes conexas então $k = n - q$, que pelo teorema 3.12 é o posto da submatriz formada pelas colunas $j_1, \ldots, j_k$. Portanto as colunas $j_1, \ldots, j_k$ são linearmente independentes. □

Lema 3.16. *A matriz $\mathbf{Q}$ é unimodular, ou seja, qualquer determinante de uma submatriz quadrada de $\mathbf{Q}$ é 0 ou ± 1.*

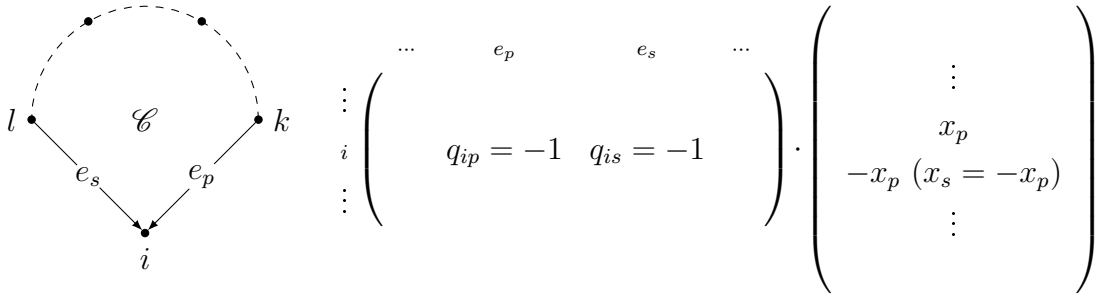
Demonstração. Considere $\mathbf{M}$ uma submatriz quadrada de $\mathbf{Q}$, de ordem k. Caso essa submatriz tenha uma linha ou uma coluna nula, então claramente $\det \mathbf{M} = 0$. Além disso, $\det \mathbf{M} = 0$ quando houver, em cada coluna, exatamente duas entradas não nulas, valendo 1 e -1, implicando portanto em linhas L.D.. Suponha que $\det \mathbf{M} \neq 0$ ($\mathbf{M}$ é não singular). Então deve haver uma coluna na qual existe apenas uma entrada não nula, 1 ou -1, digamos, localizada na linha i e coluna j. Então $\det \mathbf{M} = \pm 1 \det \mathbf{M}_{ij}$, onde $\mathbf{M}_{ij}$ é a submatriz de ordem $(k-1)$ de $\mathbf{M}$ obtida pela remoção da linha i e da coluna j. A matriz $\mathbf{M}_{ij}$ também é não singular, pois $\mathbf{M}$ é não singular. Analogamente, deve existir uma coluna de $\mathbf{M}_{ij}$ na qual existe apenas uma entrada não nula, 1 ou -1, digamos, localizada na linha q e coluna r. Logo $\det \mathbf{M}_{ij} = \pm 1 \det \mathbf{M}_{qr}$, onde $\mathbf{M}_{qr}$ é a submatriz de ordem $(k-2)$ de $\mathbf{M}_{ij}$ obtida após a retirada da linha q e coluna r. Repetindo esse procedimento temos que $\det \mathbf{M} = (\pm 1)(\pm 1)\cdots(\pm 1) = \pm 1$. □

Ciclos e Cortes

Seja G um grafo com $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Defina uma orientação para cada aresta de G e seja $\mathbf{Q}$ a matriz de incidência. O espaço nulo de

$\mathbf{Q}$ é chamado de *subespaço de ciclos* de G enquanto que o espaço linha de $\mathbf{Q}$ (espaço coluna de $\mathbf{Q}^T$) é chamado de *subespaço de corte* de G.

Considere um ciclo $\mathscr{C}$ em G e escolha uma orientação para o ciclo. Seja $x_{m\times 1}$ o vetor de incidência do ciclo. Afirmamos que $\mathbf{Q}x = \mathbf{0}$, isto é, x está no espaço nulo de $\mathbf{Q}$. O *i-ésimo* elemento de $\mathbf{Q}x$ é $(\mathbf{Q}x)_i = \sum_{j=1}^{m} q_{ij}x_j$. Se o vértice i não está no ciclo $\mathscr{C}$ então $(\mathbf{Q}x)_i = 0$. Caso contrário deve haver precisamente duas arestas incidentes no vértice i. Suponha que e_p, com extremidades em i,k e e_s com extremidades em i,l estão em $\mathscr{C}$. Se e_p chega em i e deixa k e e_s chega em i e deixa l, então temos $q_{ip} = 1$ e $q_{is} = 1$ e $q_{ij}x_j = 0$ para $j \neq p$, $j \neq s$. Também $x_p = -x_s$, pois possuem orientações opostas no ciclo. Disso segue que $(\mathbf{Q}x)_i = 0$. Portanto x está no espaço nulo de $\mathbf{Q}$. Abaixo temos uma ilustração desse raciocínio



Agora vamos aos cortes. Seja $V(G) = V_1 \cup V_2$ onde V_1 e V_2 são dois subconjuntos não vazios e disjuntos. O conjunto de arestas com uma extremidade em V_1 e outra em V_2 é chamado de corte.

$$(V_1, V_2)_G = \{v_iv_j \text{ ou } v_jv_i \in E(G) : v_i \in V_1, v_j \in V_2 \; i, j = 1, \ldots, n\}.$$

Perceba que a nomenclatura "corte" vem do fato de que a remoção de todas as arestas deste conjunto nos traz mais uma componente conexa do grafo, ou caso se trate de um grafo conexo o transforma em desconexo. Cabe também observar que caso sejam removidas arestas pertencentes a um subconjunto próprio de (V_1, V_2) não temos adição de componente conexa.

Dado um corte $\mathscr{K}$ definiremos o vetor de incidência $y_{m\times 1}$ no qual os seus componentes são indexados por $E(G)$. Se $e_i \notin \mathscr{K}$ então $y_i = 0$. Se $e_i \in \mathscr{K}$ então $y_i = 1$ se e_i está orientado de V_1 para V_2 ou $y_i = -1$ se e_i está orientado de V_2 para V_1.

Exemplo 3.17. Considere um grafo orientado G com $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, representado na figura 3.6. Seja $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $V_2 = \{v_4, v_5\}$. Então o vetor de incidência do corte $\mathscr{K}$ será $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Seja u um vetor de ordem $n \times 1$ no qual os componentes são indexados por $V(G)$. Definimos $u_i = 1$ se $v_i \in V_1$ ou $v_i = -1$ se $i \in V_2$. Observe que $y^T = \frac{1}{2}u^T\mathbf{Q}$ $(y = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T u)$ e portanto y está no espaço linha de $\mathbf{Q}$ (espaço coluna de $\mathbf{Q}^T$). A grosso modo essa transformação "enxerga" V_1 e V_2 como dois vértices e nos dá o conjunto de arestas

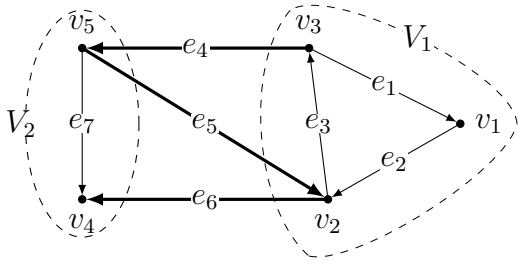


Figura 3.6: Exemplo de corte

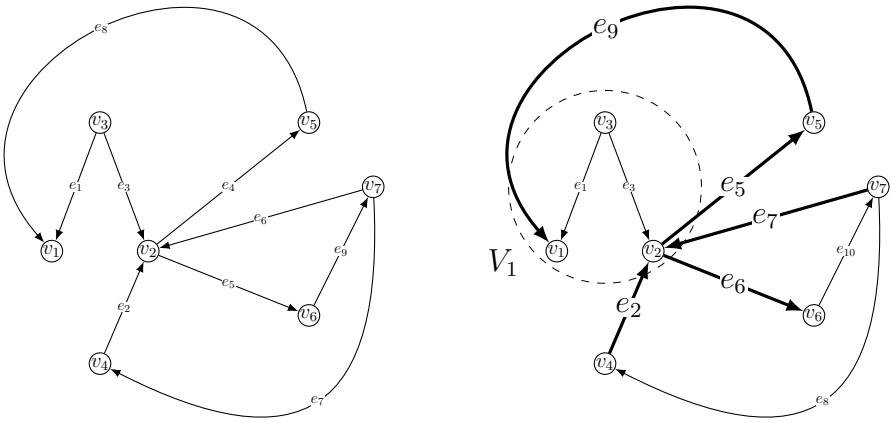
incidentes, trazendo assim as "conexões" entre eles. Uma interpretação possível para essas componentes seria a de duas cidades e suas rodovias de acesso.

Também podemos fazer uma outra leitura e analisarmos apenas uma das componentes, ou seja, ao invés de olharmos para V_1 e V_2 podemos nos concentrar em apenas um deles, digamos V_1. A diferença é que o vetor indexador será da forma $u_i = 1$ se $v_i \in V_1$ e zero caso contrário (vale notar que V_2 está implicitamente definido como o complementar de V_1) e a transformação seria $y^T = u^T\mathbf{Q}$ ($y = \mathbf{Q}^T u$). A ideia seria de "elencar" os arcos que incidem em V_1 perceba que os cálculos se tornariam extremamente fáceis, afinal bastaria apenas somar as linhas correspondentes as vértices pertinentes a V_1. Para ilustrar melhor a ideia considere o seguinte exemplo.

Exemplo 3.18. Seja G um grafo orientado com o conjunto de vértices $\{v_1, \ldots, v_7\}$ e conjunto de arcos $\{e_1, \ldots, e_9\}$ e seja $\mathbf{Q}_{7\times 9}$ a matriz de incidência de G. Considere ainda $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $u^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ o vetor indexador de V_1. Se $y^T = u^T\mathbf{Q}$ temos,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} =$$

$y^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ o que corresponde as somas das linhas v_1,v_2 e v_3. Note que as componentes das colunas cuja as arestas possuem extremidades em V_1 (caso de e_1 e e_3) se anulam, e as arestas que não incidem em V_1 possuem componentes nulas (caso de e_9).



(a) Grafo Orientado G (b) em destaque as arestas de y^T

Embora a interpretação acima seja extremamente ingênua, um corte em um grafo nos mostra quais arestas podem ser removidas de modo a tornar o grafo desconexo, note que estas arestas não são arbitrarias e portanto podemos caracterizar todos esses conjuntos.

3.2 Ciclos fundamentais e cortes fundamentais

Já mostramos que em um grafo com n vértices, m arestas e k componentes conexas, o posto de $\mathbf{Q} = n - k$. Portanto, pelo teorema 2.19 (do núcleo e imagem), a dimensão do subespaço de ciclos (que é a dimensão do espaço nulo de $\mathbf{Q}$) de G é $m - n + k$, onde a dimensão do subespaço de corte de G é $n - k$, afinal a matriz $\mathbf{Q}$ é de ordem $(n \times m)$ e

$$\underbrace{\dim \mathcal{R}(\mathbf{Q})}_{\text{posto de } \mathbf{Q} = n-k} + \underbrace{\dim \mathcal{N}(\mathbf{Q})}_{\text{dimensão do ciclo}} = m.$$

O subespaço de ciclos de G é a soma direta dos subespaços de ciclos de cada uma de suas componentes conexas. Uma ideia similar se aplica ao subespaço de cortes de G. Portanto para determinar bases para os subespaços de ciclos e cortes voltaremos a nossa atenção apenas para componentes conexas.

Seja G um grafo conexo e seja T uma árvore geradora de G. As arestas $E(G) \setminus E(T)$ constituem a *co-árvore* de G, no qual denotaremos por T^c, o complemento de T em $E(G)$. Se $e_i \in E(T^c)$ então $E(T) \cup \{e_i\}$ contém um único ciclo que denotaremos por $\mathscr{C}_i$ e o chamaremos de *ciclo fundamental*. A orientação de $\mathscr{C}_i$ é tomada de modo consistente com a orientação de e_i, isto é, no sentido da aresta.

Teorema 3.19. *Sejam G um grafo conexo com n vértices e m arestas, e T a árvore geradora de G. Para cada $e_i \in E(T^c)$, considere x^i o vetor de incidência do ciclo fundamental $\mathscr{C}_i$. Então $\{x^i : e_i \in E(T^c)\}$ forma uma base para o subespaço de ciclos de G.*

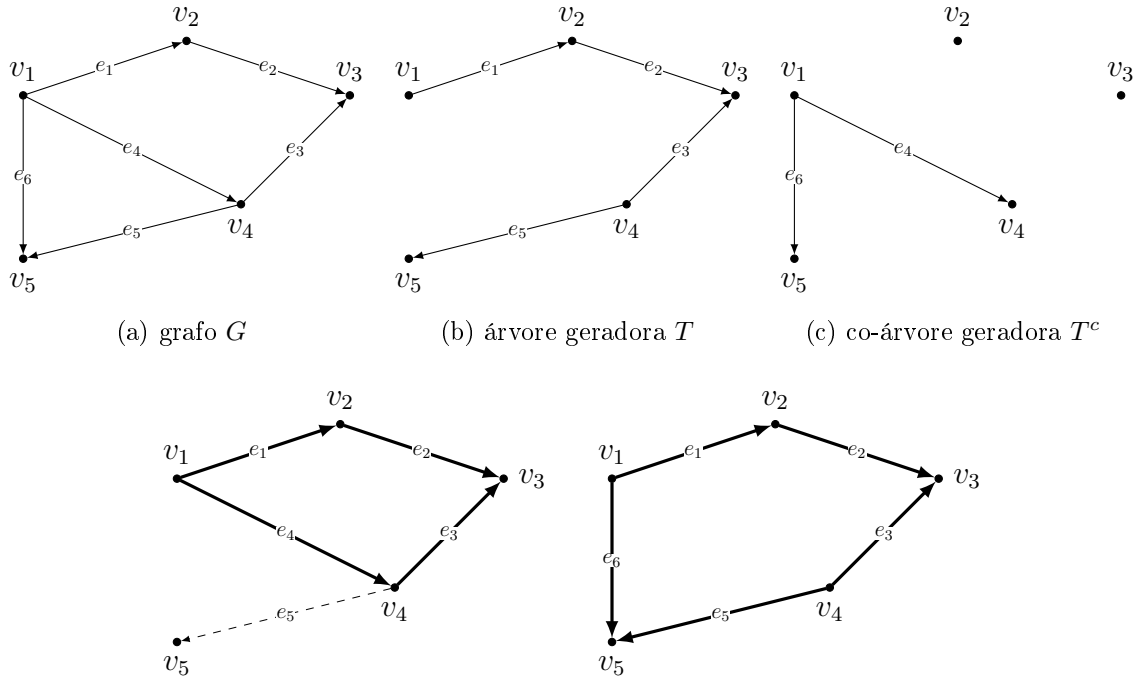
Demonstração. Como observado anteriormente, x^i está no subespaço de ciclos de G. Note que $|E(T^c)| = |E(G) \setminus E(T)| = |E(G)| - |E(T)| = m - n + 1$. Uma vez que a dimensão do subespaço de ciclo de G é $m - n + 1$, apenas precisamos provar que $\{x^i : e_i \in E(T^c)\}$ são linearmente independentes. Se $e_i \in E(T^c)$ então o ciclo fundamental $\mathscr{C}_i$ contém precisamente uma aresta (e_i) provida por $E(T^c)$, enquanto todas as outras arestas de $\mathscr{C}_i$ provêm de $E(T)$. Portanto e_i não pertence a nenhum outro ciclo fundamental. Em outras palavras, x^i tem alguma entrada não nula, enquanto cada x^j, $j \neq i$ tem. Portanto, $\{x^i : e_i \in E(T^c)\}$ é linearmente independente. □

Exemplo 3.20. Para que possamos ilustrar a ideia de ciclo fundamental considere o grafo G com $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$,representado em (a) da figura 3.7, e a árvore geradora T com $E(T) = \{e_1, e_2, e_3, e_5\}$ e, consequentemente co-árvore geradora T^c com $E(T^c) = \{e_4, e_6\}$. Então $e_4 \cup E(T)$ contém o ciclo fundamental $\mathscr{C}_4$ composto pelas arestas e_1 (sentido oposto), e_2 (sentido oposto),e_3 e e_4 e, portanto tem como vetor de incidência $x^4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Também note que a aresta e_5 não é incidente no ciclo fundamental $\mathscr{C}_4$, muito embora esteja em $e_4 \cup E(T)$. Para $e_6 \cup E(T)$ temos o ciclo fundamental $\mathscr{C}_6$ com arestas e_1 (sentido oposto), e_2 (sentido oposto), e_3, e_5 (sentido oposto) e e_6 e com vetor de incidência $x^6 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Chamamos a atenção para o fato de que x^4 e x^6 são linearmente independentes.

O procedimento para encontrar uma base para o subespaço de corte de G também faz o uso da árvore geradora. Seja $e_i \in E(T)$ o grafo obtido removendo e_i de T é uma floresta com duas componentes. Seja V_1 e V_2 o conjunto de vértices desses dois componentes. Então $V(G) = V_1 \cup V_2$ é uma partição. Vamos assumir que e_i está orientado de V_1 para V_2. Seja $\mathscr{K}_i$ denotar o corte de G correspondente a partição $V_1 \cup V_2$ e seja y^i o seu vetor de incidência. O corte $\mathscr{K}_i$ é chamado de corte fundamental.

Teorema 3.21. *Seja G um grafo conexo com n vértices, m arestas e seja T a árvore geradora de G. Para cada $e_i \in E(T)$, seja y^i o vetor de incidência do corte fundamental $\mathscr{K}_i$. Então $\{y^i : e_i \in E(T)\}$ forma uma base para o subespaço de corte de G*

Demonstração. Uma vez que $|E(T)| = n - 1$, que é a dimensão do subespaço de corte de G, precisamos apenas provar que $\{y^i : e_i \in E(T)\}$ é um conjunto linearmente independente. Como na prova do teorema anterior, cada corte fundamental contém precisamente uma aresta de $E(T)$ e cada aresta não está em nenhum outro corte fundamental. Portanto, $\{y^i : e_i \in E(T)\}$ é um conjunto linearmente independente. □



(a) grafo G (b) árvore geradora T (c) co-árvore geradora T^c

(d) ciclo fundamental $\mathscr{C}_4$ (e) ciclo fundamental $\mathscr{C}_6$

Figura 3.7: Grafo G e seus ciclos fundamentais

Exemplo 3.22. Neste exemplo iremos ilustrar o conceito apresentado no teorema 3.21 e o procedimento de como encontrar uma base para o subespaço de cortes. Embora seja um exemplo "longo" acreditamos que seja indispensável para a leitura.

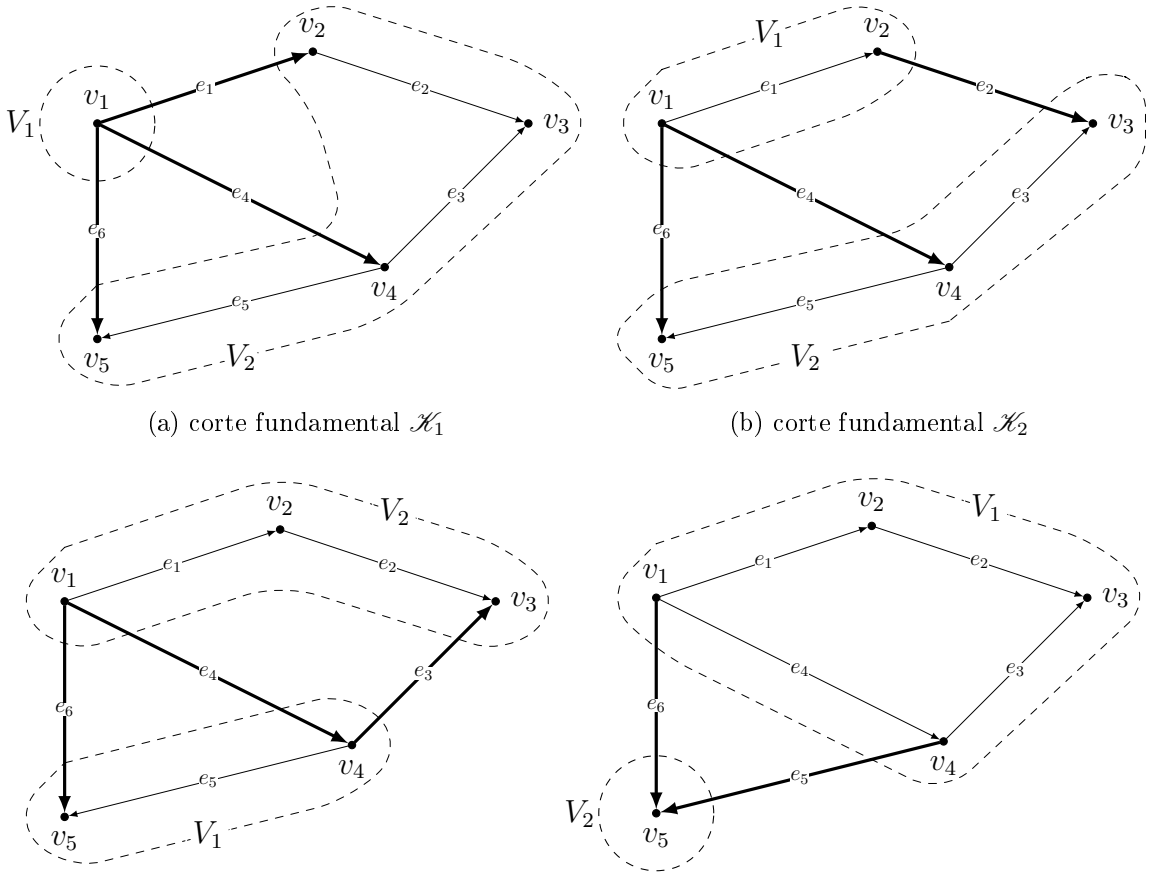
Neste caso considere o grafo G definido no exemplo anterior (figura 3.7a) com a mesma árvore geradora T (figura 3.7b). Como $|E(T)| = 4$ devemos encontrar então 4 cortes fundamentais, ilustrados na figura 3.8.

Retirando-se e_1 temos o grafo composto pelas partições $V_1 = \{v_1\}$ e $V_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e temos o corte fundamental $\mathscr{K}_1$ composto pelas arestas e_1, e_4 e e_6 e com vetor de incidência $y^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Para a aresta e_2 temos as partições $V_1 = \{v_1, v_2\}$ e $V_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$ e corte fundamental $\mathscr{K}_2$ composto pelas arestas e_2, e_4 e e_6 e vetor de incidência $y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Associado a aresta e_3 temos as partições $V_1 = \{v_4, v_5\}$ e $V_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$, corte fundamental $\mathscr{K}_3$ composto pelas arestas e_3, e_4 (no sentido oposto) e e_6 (no sentido oposto) e vetor de incidência $y^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Finalmente para a aresta e_5 temos as partições $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $V_2 = \{v_5\}$ e o corte fundamental $\mathscr{K}_5$ composto pelas arestas e_5 e e_6 e vetor de incidência $y^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Note que cada corte fundamental possui uma aresta exclusiva, provida por $E(T)$, e portanto são linearmente independentes.



(a) corte fundamental $\mathscr{K}_1$

(b) corte fundamental $\mathscr{K}_2$

(c) corte fundamental $\mathscr{K}_3$

(d) corte fundamental $\mathscr{K}_5$

Figura 3.8: Cortes fundamentais do Grafo G

Matrizes Fundamentais

Sejam G um grafo conexo com $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$ e T uma árvore geradora de G. Podemos considerar[1] que $E(T) = \{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$. Então seja T^c a co-árvore com conjunto de arestas $E(T^c) = \{e_n, \ldots, e_m\}$. Vamos assumir que as arestas de G possuem uma orientação[2].

A *matriz ciclo fundamental* $\mathbf{C}$ de G é uma matriz $(m - n + 1) \times m$ definida como: As linhas de $\mathbf{C}$ são indexadas por $E(T^c)$, ao passo que as colunas são indexadas por $E(G)$. A *i-ésima* linha de $\mathbf{C}$ é o vetor incidente ao ciclo fundamental $\mathscr{C}_i$ associado a e_i,$i = n, \ldots, m$. Uma vez que e_i é a única aresta de T^c que está em $\mathscr{C}_i$, $i = n, \ldots, m$, $\mathbf{C}$ deve ser da forma $[\mathbf{C}_f \ \mathbf{I}]$ onde $\mathbf{C}_f$ é de ordem $(m - n + 1) \times (n - 1)$.

A *matriz corte fundamental* $\mathbf{B}$ de G é uma matriz $(n-1) \times m$ definida da seguinte forma: As linhas de $\mathbf{B}$ são indexadas por $E(T)$, enquanto que as colunas são indexadas por $E(G)$. A *i-ésima* linha de $\mathbf{B}$ é o vetor incidente y^i do corte fundamental $\mathscr{K}_i$ associado à aresta $e_i \in E(T)$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Uma vez que e_i é tanto aresta de T

[1] Caso as arestas não estejam rotuladas nessa ordem, podemos renomeá-las de modo conveniente.

[2] Os resultados aqui apresentados também são válidos para grafos não orientados, mas como as matrizes de incidência possuem entradas não negativas, utiliza-se aritmética módulo 2.

quanto de $\mathscr{K}_i$ apenas para $i = 1, \ldots, n-1$, então $\mathbf{B}$ deve ser da forma $[\mathbf{I}\ \mathbf{B}_f]$ onde $\mathbf{B}_f$ é de ordem $(n-1) \times (m-n+1)$.

Em essência temos que a matriz ciclo fundamental e a matriz corte fundamental podem ser escritas na forma de "blocos", no qual um desses blocos é sempre a matriz identidade. Mais uma vez lembramos que pode ser necessário renomear as arestas. A seguir considere novamente o grafo definido nos exemplos 3.20 e 3.22. Então a matriz ciclo fundamental será

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ e_4 \\ e_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Perceba que não temos o bloco $\mathbf{C}_f$ e $\mathbf{I}$. Isso se deve ao fato de que as arestas não estão nomeadas de modo conveniente. A seguir optamos apenas por fazer a permutação das colunas e_4 e e_5, o que é equivalente ao criar uma nova rotulação para as arestas, desse modo temos

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ e_4 \\ e_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cc} e_1 & e_2 & e_3 & e_5 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|cc} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}.$$

Para a matriz corte fundamental procedemos da mesma forma e ficamos com

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cc} e_1 & e_2 & e_3 & e_5 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}.$$

Lema 3.23. *Dada uma matriz corte fundamental* $\mathbf{B}$*, vale que* $\mathbf{B}_f = -\mathbf{C}_f^T$.

Demonstração. Seja $\mathbf{Q}$ a matriz de incidência de G. Como visto anteriormente, cada vetor linha de $\mathbf{B}$ está no espaço linha de $\mathbf{Q}$. Por outro lado, a transposta de qualquer vetor linha de $\mathbf{C}$ está no espaço nulo de $\mathbf{Q}$. Então segue que $\mathbf{B}\mathbf{C}^T = \mathbf{0}$. Logo,

$$(\mathbf{I}\ \ \mathbf{B}_f) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{C}_f^T \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Então temos $\mathbf{C}_f^T + \mathbf{B}_f = \mathbf{0}$. Portanto, $\mathbf{B}_f = -\mathbf{C}_f^T$. □

Teorema 3.24. *Seja* $\mathbf{Q}_1$ *a matriz de incidência reduzida obtida pela eliminação da última linha da matriz de incidência* $\mathbf{Q}$ *e suponha que* $\mathbf{Q}_1$ *seja particionada como* $\mathbf{Q}_1 = (\mathbf{Q}_{11}\ \ \mathbf{Q}_{12})$*, onde* $\mathbf{Q}_{11}$ *é de ordem* $(n-1) \times (n-1)$*. Então* $\mathbf{B}_f = \mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{12}$ *e* $\mathbf{C}_f = -\mathbf{Q}_{12}^T \left(\mathbf{Q}_{11}^T\right)^{-1}$.

Demonstração. O posto de $\mathbf{Q}_{11}$ é igual a $n-1$, que é o mesmo que o posto de $\mathbf{Q}$. Logo as linhas de $\mathbf{Q}_1$ formam uma base para o espaço linha de $\mathbf{Q}$. Uma vez que cada linha de $\mathbf{B}$ está no espaço linha de $\mathbf{Q}$, então existe uma matriz $\mathbf{Z}$ tal que $\mathbf{B} = \mathbf{Z}\mathbf{Q}_1$. Reescrevendo na forma particionada temos

$$(\mathbf{I} \;\; \mathbf{B}_f) = \mathbf{Z}\,(\mathbf{Q}_{11} \;\; \mathbf{Q}_{12})\,.$$

Daí segue que $\mathbf{Z}\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{Z}\mathbf{Q}_{12} = \mathbf{B}_f$. Portanto $\mathbf{Z} = \mathbf{Q}_{11}^{-1}$ e $\mathbf{B}_f = \mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{12}$. Para a segunda parte temos, pelo lema 3.23, $\mathbf{C}_f = -\mathbf{B}_f^T = -(\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{12})^T = -\mathbf{Q}_{12}^T\left(\mathbf{Q}_{11}^T\right)^{-1}$. □

Teorema 3.25. *Seja G um grafo conexo com n vértices, m arestas e seja $\mathbf{B}$ a matriz corte fundamental de G com respeito a árvore geradora T. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) um conjunto de colunas de $\mathbf{B}$ é linearmente independente se, e somente se, as arestas correspondentes de G induzem um grafo acíclico;

(ii) um conjunto de $n-1$ colunas de $\mathbf{B}$ é linearmente independente se, e somente se, as arestas correspondentes formam uma árvore geradora em G;

(iii) se $\mathbf{X}$ é uma submatriz de $\mathbf{B}$ de ordem $(n-1)\times(n-1)$ então o $\det\mathbf{X}$ é 0 ou ± 1;

(iv) $\det\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ é igual ao número de arvores geradoras de G;

Demonstração. Lembrando que as colunas de $\mathbf{B}$ são indexadas por $E(G)$. Seja $\mathbf{Q}$ a matriz de incidência de G e seja $\mathbf{Q}_1 = (\mathbf{Q}_{11} \;\; \mathbf{Q}_{12})$ como no teorema anterior. Ainda pelo teorema anterior $\mathbf{B} = \mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_1$. Seja $\mathbf{Y}$ a submatriz de $\mathbf{B}$ formado pelas colunas $j_1, \ldots, j_k$ e seja $\mathbf{R}$ a submatriz de $\mathbf{Q}_1$ formada pelas colunas de mesmo índices. Então $\mathbf{Y} = \mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{R}$ e $\mathrm{rk}(\mathbf{Y}) = \mathrm{rk}(\mathbf{R})$. Em particular as colunas de $\mathbf{Y}$ são linearmente independentes se e somente se as colunas correspondentes de $\mathbf{R}$ são linearmente independentes. Pelo lema 3.15, as colunas de $\mathbf{R}$ são linearmente independentes se e somente se as arestas correspondentes formam um grafo acíclico em G. A afirmação (ii) segue de (i).

Para provar (iii) note que $\det\mathbf{X}$ é $\det\mathbf{Q}_{11}^{-1}$ multiplicado pelo determinante da submatriz de $\mathbf{Q}_1$ de ordem $(n-1)\times(n-1)$. Uma vez que $\mathbf{Q}$ é totalmente unimodular segue que $\det\mathbf{X}$ é ou 0 ou ± 1.

Para provar (iv), primeiro observe que, pela fórmula de Cauchy–Binet, $\det\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \sum(\det\mathbf{Z})^2$, onde o somatório é sobre todas $(n-1)\times(n-1)$ submatrizes de $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{B}$. Por (ii), $\det\mathbf{Z}$ é não nulo se, e somente se, as arestas correspondentes formam uma árvore geradora de G, e então por (iii) $\det\mathbf{Z}$ dever ser ± 1. Portanto $\det\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ é igual ao número de árvores geradoras de G. □

Agora voltaremos a falar da matriz ciclo fundamental. Seja $\mathbf{C}$ a matriz ciclo fundamental de G com relação a árvore geradora T. Lembre-se que as colunas de $\mathbf{C}$ são indexadas por $E(G)$.

Lema 3.26. *As colunas $j_1, \ldots, j_k$ de $\mathbf{C}$ são linearmente dependentes se o subgrafo induzido em G pelas arestas correspondentes contém um corte.*

Demonstração. Seja $\mathbf{Q}$ a matriz de incidência de G. Suponha que as arestas de G indexadas por $j_1, \ldots, j_k$ contenham um corte. Seja u o vetor de incidência desse corte. Como observado anteriormente, u^T está no espaço linha de $\mathbf{Q}$ e portanto $u^T = z^T\mathbf{Q}$ para algum vetor z. Então $\mathbf{C}u = \mathbf{C}\mathbf{Q}^T z = 0$, pois $\mathbf{C}\mathbf{Q}^T = \mathbf{0}$. Note que somente as coordenadas de u indexadas por $j_1, \ldots, j_k$ podem possível serem não nulas. Então, para que $\mathbf{C}u = 0$ concluímos que as colunas $j_1, \ldots, j_k$ são linearmente dependentes. □

Lema 3.27. *Seja $\mathbf{X}$ uma submatriz de $\mathbf{C}$ de ordem $(m-n+1)\times(m-n+1)$. Então $\mathbf{X}$ é não singular se, e somente se, as arestas correspondentes às colunas de $\mathbf{X}$ formam uma co-árvore de G.*

Demonstração. Suponha que as colunas de $\mathbf{X}$ estão indexadas por $F \subset E(G)$. Se $\mathbf{X}$ é não singular, então pelo lema anterior o subgrafo induzido por F contém um corte. Então F^c induz uma floresta. Uma vez que $|F^c| = n-1$, esta floresta, na verdade, deve ser uma árvore geradora de G. Portanto as arestas em F formam uma co-árvore.

Por outro lado, suponha que as arestas em F formem uma co-árvore S^c, onde S é uma árvore geradora de G. Seja $\mathbf{D}$ a matriz do ciclo fundamental com relação a S. Veja que as colunas de $\mathbf{C}$, assim como as de $\mathbf{D}$, estão indexadas por $E(G)$ e listadas na mesma ordem. Uma vez que as linhas de $\mathbf{C}$, assim como as de $\mathbf{D}$, são linearmente independentes, e uma vez que seus espaços linha são os mesmos, existe uma matriz não singular $\mathbf{Z}$ de ordem $(m-n+1)\times(m-n+1)$ tal que $\mathbf{C} = \mathbf{Z}\mathbf{D}$. Portanto uma $(m-n+1)\times(m-n+1)$ submatriz de $\mathbf{C}$ é não singular se, e somente se, a correspondente submatriz de $\mathbf{D}$ é não singular. A submatriz de $\mathbf{D}$ indexada por F é a matriz identidade. Logo a submatriz de $\mathbf{C}$ indexada por F é não singular. □

Uma Aplicação

A seguir, encerraremos nosso trabalho apresentando uma aplicação da teoria acima estudada, particularmente para grafos não orientados. Neste caso, precisamos apenas levar em conta o fato de que as entradas da matriz de incidência são não negativas e portanto o uso da aritmética módulo 2 se faz necessário, pois assim teremos $1+1=0$.

Suponha que nos é dado uma caixa que contenha oito interruptores de um circuito conexo, ou seja, $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, que podem ser acionados por fora da caixa. Este aparato é conhecido por *network switching*.

Temos a seguinte tarefa: Determinar como os interruptores estão conectados dentro da caixa sem abri-lá. Uma forma de encontrar a resposta seria conectar uma lâmpada em série com uma bateria nos terminais disponíveis no aparato e também um interruptor adicional k, como na figura 3.9. Em seguida, por meio de tentativas, buscamos uma lista de combinações que acendem a lâmpada.

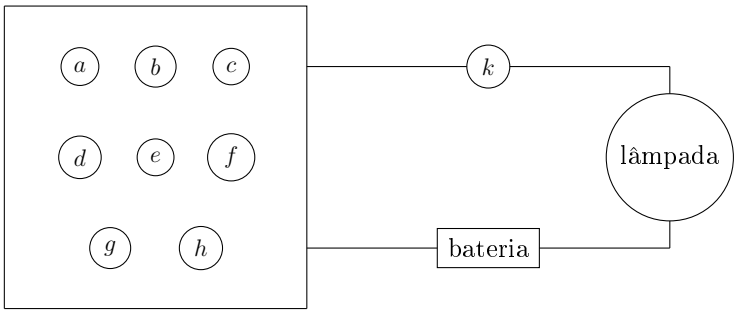


Figura 3.9: Exemplo de *switching network*

Suponha que nesse experimento descobrimos que as combinações que acendem a lâmpada foram as seguintes: (a, b, f, h, k), (a, b, g, k), (a, e, f, g, k), (a, e, h, k), (b, c, e, h, k), (c, f, h, k), (c, g, k) e (d, k).

Veja que, para a solução, podemos considerar o *switching network* como um grafo no qual as arestas representam os interruptores. Podemos considerar que o grafo é conexo e não contém nenhum laço. Uma vez que o acendimento da lâmpada implica na formação de um ciclo, podemos então escrever uma matriz composta pelos ciclos deste grafo. Nesse caso temos:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & k \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|cccc} a & b & c & d & f & e & g & h & k \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Veja que fizemos o escalonamento da matriz $\mathbf{C}$ usando aritmética módulo 2. Por conveniência, a escrevemos na forma

$$(\mathbf{C}_f \ \mathbf{I}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|ccccc} e & g & h & k & & a & b & c & d & f \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}.$$

Embora seja possível obter uma representação do grafo a partir da matriz ciclo fundamental, procederemos para encontrar a matriz de incidência. Para isso encontraremos primeiro a matriz corte fundamental, uma vez que ela se encontra no espaço

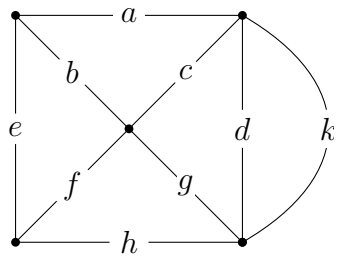
linha da matriz de incidência e, pelo lema 3.23, $\mathbf{B}_f = -\mathbf{C}_f^T$ ($= \mathbf{C}_f^T \mod 2$). Logo, a matriz corte fundamental, na forma, $[\mathbf{I}\ \mathbf{B}_f]$ (indexada da mesma forma que a matriz $\mathbf{C}$) é

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cccc|ccccc} \multicolumn{4}{c|}{\begin{matrix} e & g & h & k \end{matrix}} & \multicolumn{5}{c}{\begin{matrix} a & b & c & d & f \end{matrix}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Devemos lembrar que a matriz de incidência tem, em cada coluna, apenas duas entradas não nulas, o que não acontece com a matriz corte fundamental, e em particular note que as colunas a e b da matriz $\mathbf{B}$ possuem três 1's cada. Para contornar essa situação basta trocar a terceira linha da matriz $\mathbf{B}$ pela soma dela com a primeira e, finalmente, completar a matriz com mais uma linha, de modo que cada coluna tenha exatamente duas entradas não nulas.

Encontramos assim a matriz de incidência $\mathbf{Q}$, para este exemplo, com uma possível representação para o grafo.

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} \begin{matrix} e & g & h & k & a & b & c & d & f \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$



Finalmente temos uma representação dos interruptores e suas conexões dentro da caixa.

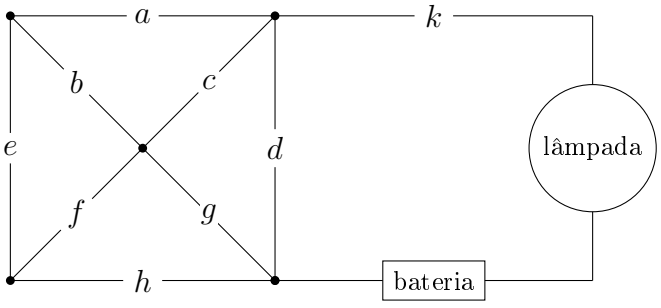


Figura 3.10: Grafo solução para o problema *network switching*

4 Sugestão de Aulas

Neste capítulo, pretendemos aproximar o conteúdo abordado na sala de aula das escolas do ensino médio com parte do conteúdo abordado neste trabalho. Apesar de reconhecermos que "teoria de grafos" não faz parte da estrutura curricular, acreditamos que qualquer dificuldade no entendimento se dá pelo fato de que os alunos ainda não tiveram a experiência com alguns dos conceitos, aqui definidos como "básicos". Assim, pensamos que, com tempo suficiente, tais conceitos possam ser aprendidos.

Além disso, é possível fazer uma introdução à teoria de grafos, bem como trabalhar com a ideia de matriz de adjacência e de incidência, em particular, essa última nos traz um interessante resultado sobre o espaço nulo e os ciclos de um grafo, tratado como uma forma especial de sistemas de equações.

Finalmente, este capítulo traz apenas sugestões de atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula. Em uma dessas sugestões (o problema das pontes) optamos em elaborar um roteiro mais completo, servindo assim de paradigma, ou não, para as outras atividades.

4.1 Atividades

Conhecendo Grafos

A proposta desta atividade é dar uma lista de tarefas que um determinado aluno deva fazer antes de sair de casa para ir à escola. Nesta lista, podemos incluir: levantar da cama, vestir a calça, colocar a meia, tomar banho, etc.... A ideia é fazer com que o aluno perceba que existe uma ordenação natural, muito embora algumas tarefas possam ser feitas antes de outras, algumas necessariamente devem ser feitas em uma ordem específica, como por exemplo, colocar a meia antes de calçar o tênis.

Embora seja uma atividade extremamente simples, a ideia é apresentar aos alunos o conceito de grafos e, em particular, grafos orientados.

O problema das Pontes de Königsberg

Nesta atividade, o objetivo é apresentar o problema que motivou o matemático suíço Leonard Euler (1707–1783) a escrever o primeiro estudo sobre a teoria de grafos. Além disso, podemos introduzir o conceito de *trilha euleriana*.

O "problema das pontes" consistia na tentativa de se fazer um passeio na cidade de Königsberg (atualmente Calingrado, Russia) de modo que todas as pontes da cidade fossem percorridas uma única vez, e voltando ao ponto de partida.

Desenvolvimento

Apresentamos no anexo A (página 47) a folha a ser entregue ao aluno, com a representação da cidade de Königsberg e com as etapas a serem desenvolvidas. A proposta é colocar os conceitos elementares da teoria de grafos e verificar qual ou quais condições são necessárias para que seja possível, a partir de um grafo, percorrer todas as suas arestas e retornar ao vértice inicial. Também, modelamos o problema na forma de um grafo com 4 vértices e 7 arestas, de modo a se identificar os graus dos vértices.

Dentre esses conceitos destacamos: grau de um vértice (bem como a ocorrência de vértices pares e ímpares), percurso e ciclo.

Grafos e Redes Sociais

Tendo em vista que grande parte dos alunos estão conectados por meio de redes sociais, em particular destacamos o *Facebook*, *Instagram* e *WhatsApp*, apresentar grafos a partir do conceito de rede social fornece uma oportunidade interessante para falarmos sobre o grau de um vértice, bem como sobre componente conexa ou pontes.

Vale abordar o tema da segurança na transmissão de dados pela rede, tendo em vista que todos estão conectados, rapidamente há uma "disseminação", ou melhor, uma propagação de informação na rede. Nesse sentido, podemos até introduzir o conceito de disseminação.

Uma forma de ilustrar essas redes seria pedindo que cada aluno fizesse um "mapa" de seus contatos de alguma de suas redes sociais, preferencialmente daquela que tiver o maior número de participantes na turma. Tendo em vista o grande número de contatos que cada aluno pode ter nessa rede, podemos fazer algum tipo de restrição como, por exemplo, "colegas que estudaram juntos no nono ano". A partir destas listas individuais poderia ser criado um painel reunindo todas as informações, apresentando-as como um grafo.

Caminhos Hamiltonianos

Embora não tenhamos abordado neste trabalho, de modo mais aprofundado, alguns conceitos, como o de caminho euleriano, por exemplo, no qual devemos percorrer cada

aresta do grafo ao menos uma vez, ou ainda, o de caminho hamiltoniano, no qual devemos atingir cada vértice do grafo apenas uma vez, podemos propor o jogo criado por Sir Hamilton.

Mais precisamente, em 1859 Hamilton propôs um jogo que exigia do jogador a execução de um percurso ao longo dos vértices de um dodecaedro. Cada vértice estava nomeado com as principais cidades daquele época. A ideia era, partindo de um vértice, percorrer todas os outros vértices uma única vez e retornar ao vértice inicial.

Todavia este problema seja de fácil compreensão, e até apresenta certa analogia com o problema das pontes de Königsberg, ainda hoje [7] não há um critério geral para a condição da existência de um ciclo hamiltoniano em um grafo.

A ideia da atividade seria propor aos alunos a construção de um dodecaedro, atribuindo a cada vértice o nome de uma cidade e pedindo que os alunos mostrem um caminho no qual seja possível percorrer todos os vértices, retornando ao vértice inicial. Lembrando que esse caminho deverá ser composto de vértices adjacentes.

Também podemos explorar essa ideia em outros sólidos, verificando qual, ou quais, deles podemos encontrar um ciclo hamiltoniano. Nesse sentido uma atividade como essa além de apresentar os conceitos de grafos, também é uma ótima oportunidade para se trabalhar o raciocínio combinatório, bem como a busca por uma forma, ou um *algoritmo*, que resolva o problema.

Grafos e Matrizes

Podemos trabalhar com uma atividade no qual relacionemos grafos e matrizes. Evidentemente não no grau de profundidade que tivemos ao longo dos capítulos anteriores, mas de um modo com o qual os alunos possam entender os conceitos de matriz de adjacência e matriz de incidência.

Podemos começar definindo essas estruturas, e em seguida apresentar alguns exemplos no qual é solicitado ao aluno a "construção", a partir de um grafo simples, dessas matrizes.

Para matrizes de adjacência destacamos o lema 3.8, no qual temos uma ótima oportunidade para a prática da multiplicação de matrizes, além de ser um interessante resultado relacionado com grafo, ainda nessa linha, a atividade pode requerer do aluno que seja encontrado esses caminhos, mostrando a relação entre as entradas da matriz e os caminhos no grafo.

Para matrizes de incidência podemos explorar o conceito de dependência/independência linear, mostrando que em um grafo sempre que um conjunto de arestas formar um ciclo, então uma dessas é combinação linear das outras. Esse fato pode ser verificado ao analisarmos, na matriz de incidência, as colunas correspondentes a estas arestas.

Anexo A

Atividade - O problema das pontes de Königsberg

Introdução

O estudo da teoria de grafos teria sido motivado pelo seguinte problema. Fazer um "passeio" por todas as pontes da cidade de Königsberg, atualmente Kalingrado na Rússia, de modo que, ao final do percurso, fosse possível retornar ao ponto de partida tento visitado cada ponte exatamente uma vez.

Observe a figura, na qual temos uma representação do problema. As pontes estão numeradas de 1 até 7 e as porções de terra por *a, b, c* e *d*.

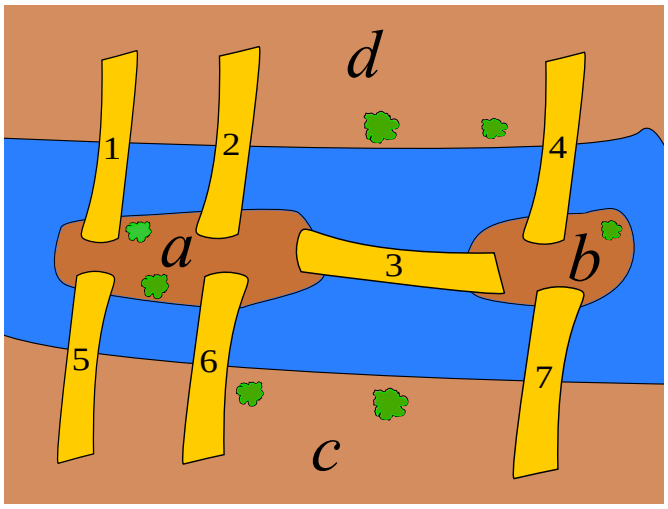


Figura 4.1

• Procure um percurso no qual cada ponte da figura é percorrida exatamente uma vez, terminando no ponto de partida.

A seguir temos uma outra ilustração (figura 4.2) do problema. Note que nessa representação estamos interessados apenas em dois aspectos do problema: As "porções de terra" e as "pontes".

As "porções de terra", identificadas pelas respectivas letras, são chamadas de *vértices*, enquanto que as "pontes" são chamadas de *arestas*. Um *grafo* é composto essencialmente por vértices e arestas - que por sua vez nada mais são do que pares de vértices.

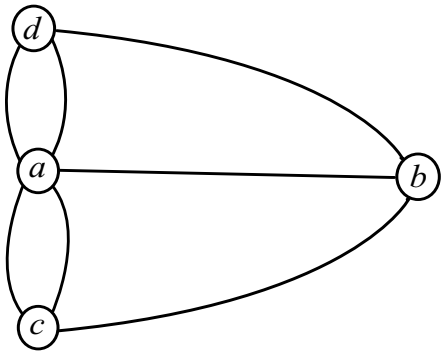


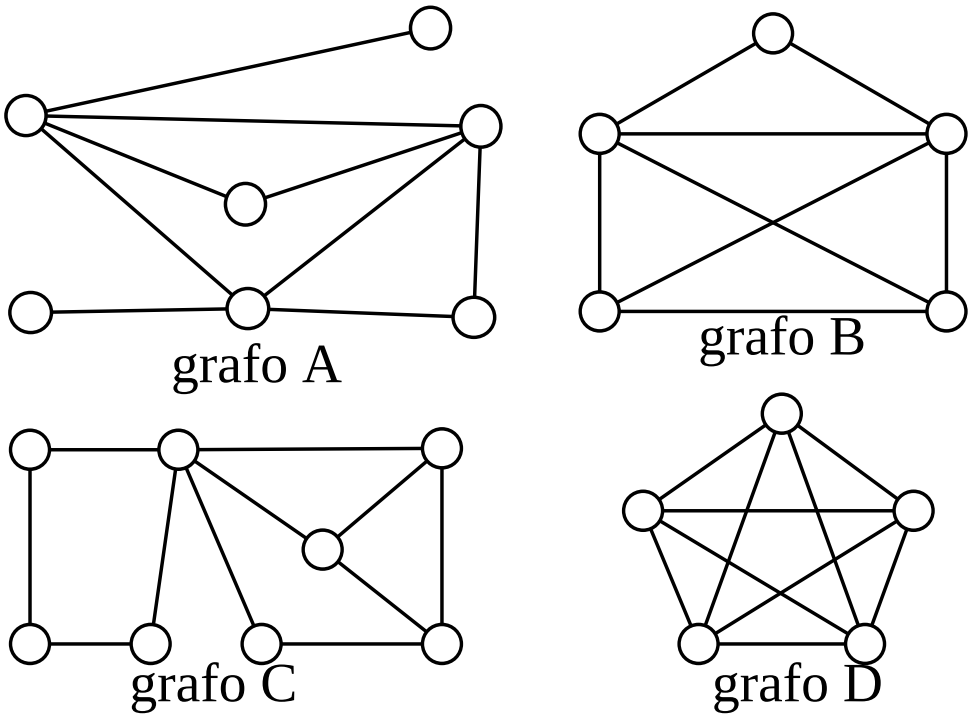
Figura 4.2

• Observando a figura 4.2, identifique e nomeie as arestas correspondentes aos da figura 4.1.

Chamamos de *grau* de um vértice, a quantidade de arestas que *incidem* nele. Por exemplo, o vértice b da figura 4.2 tem grau 3.

• Escreva os seguintes elementos do grafo da figura 4.2: vértices, arestas e o grau de cada vértice.

Observe (e identifique) a quantidade de vértices cujo o grau é um número ímpar (ou simplesmente vértices de *grau ímpar*). Será que o percurso que queremos tem alguma relação com o grau de cada vértice encontrado no grafo? Para que possamos responder essa questão precisamos de um pouco mais de informação. Observe os grafos a seguir:



Para cada grafo faça o seguinte:

- Nomeie os vértices e as arestas;
- Escreva os graus de cada um dos vértices;

- Identifique os vértices com grau par e os vértices com grau ímpar.
- Faça um percurso no qual cada aresta do grafo é percorrida exatamente uma vez, terminando, quando possível, no vértice inicial.
- Quando possível, repita o item anterior, dessa vez começando o percurso em algum vértice de grau ímpar.

Após esses procedimentos responda:

- Em quais grafos foi possível encontrar um percurso no qual todas as arestas foram percorridas?
- Em quais grafos foi possível encontrar um percurso no qual todas as arestas foram percorridas e o vértice inicial foi igual ao vértice final?
- Nos casos em que foi possível percorrer todas as arestas do grafo, qual era o grau do vértice inicial e do vértice final?
- Nos casos em que foi possível percorrer todas as arestas do grafo, quantos vértices de grau ímpar havia? E quantos vértices de grau par?
- O que podemos concluir sobre os graus dos vértices nos casos em que podemos realizar o percurso? Faça exemplos que suporte essa conclusão.

Referências

[1] BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo: HARBRA, 1980.

[2] LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[3] BAPAT, R. B. *Graphs and Matrices*. 1. ed. New Deli: Springer, 2010.

[4] JUNGNICKEL, D. *Graphs, Networks and Algorithms*. 3. ed. Augsburg: Springer, 2008.

[5] COSTA, P. P. da. *Teoria de Grafos e suas Aplicações*. Dissertação de mestrado — IGCE–Unesp Rio Claro, 2011.

[6] BROUWER, A. E.; HAEMERS, W. H. *Spectra of Graphs*. 1. ed. New York: Springer, 2012.

[7] ORE, O. *Graphs and their Uses*. 2. ed. Washington: The Mathematical Association of America, 1990.

[8] WALLIS, W. D. *A Beginner's Guide to Graph Theory*. 2. ed. Boston: Birkhauser, 2007.

[9] NARSINGH, D. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. 1. ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1974.