

RESSALVA

Atendendo solicitação da autora,
o texto completo desta tese será
disponibilizado somente a partir
de 28/06/2025



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Thaís Guinami Pereira Alves

Integrais racionais lineares do fluxo geodésico em
superfícies e 4-webs

São José do Rio Preto - SP
2023

Thaís Guinami Pereira Alves

Integrais racionais lineares do fluxo geodésico em
superfícies e 4-webs

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Serguei Agafonov

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto - SP
2023

A474i

Alves, Thaís Guinami Pereira

Integrais racionais lineares do fluxo geodésico em superfícies e 4-webs / Thaís Guinami Pereira Alves. -- São José do Rio Preto, 2023

50 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Serguei Agafonov

1. Integrais racionais lineares em momento. 2. Fluxo geodésico. 3. Folheações geodésicas. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Thaís Guinami Pereira Alves

Integrais racionais lineares do fluxo geodésico em
superfícies e 4-webs

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Prof. Dr. Serguei Agafonov
Orientador

Prof. Dr. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP- Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Juan José Nuño Ballesteros
Universitat de València

Prof. Dr. Mikhail Malakhaltsev
Universidad de los Andes

Prof. Dr. Hernan Maycol Falla Luza
Universidade Federal Fluminense

São José do Rio Preto - SP
28 de Junho de 2023

*Ao meu esposo Daniel e
aos meus pais, Aparecido e Marilda,
dedico.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida e por ter sido meu sustento até aqui.

Ao meu orientador, grande professor e pesquisador, a qual tenho uma admiração enorme, lhe agradeço por todos os ensinamentos, correções e valiosas sugestões que foram essenciais para a conclusão deste trabalho. Agradeço também por sua paciência comigo e por toda sua dedicação nessa orientação.

À minha família, por entender minhas decisões, principalmente à meu esposo que eu tanto amo e que sempre permaneceu ao meu lado, me dando forças e ânimo para continuar em frente.

Ao Corpo Docente e colegas do Departamento de Matemática do IBILCE, que contribuiriam direta ou indiretamente na minha formação acadêmica. De forma especial agradeço aos meus queridos amigos, Elaine, Rodrigo, Ronísio e Yino por todas discussões e incentivo no decorrer do doutorado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*"De fato, é um segredo bem simples:
é somente com o coração que podemos ver corretamente;
o essencial é invisível aos olhos."
Saint-Exupéry, 2020, p.88*

RESUMO

O objetivo desse trabalho é estudar integrais racionais lineares. Mostramos que a dimensão local do espaço das integrais fatorado pela ação natural de grupo de Möbius é máxima e igual a 2 se, e somente se, a curvatura Gaussiana é constante e possui dimensão 0 se, e somente se, a curvatura Gaussiana é não constante. Apresentamos também uma caracterização geométrica de integrais racionais lineares do fluxo geodésico por meio de folheações e webs: o fluxo geodésico em uma superfície bidimensional admite uma integral racional linear se, e somente se, existem quatro folheações geodésicas de forma que a razão cruzada de suas inclinações é constante.

Palavras-chave: Integrais racionais lineares em momento. Fluxo geodésico. Folheações geodésicas.

ABSTRACT

The objective of this work is to study linear rational integrals. We show that the local dimension of the space of integrals factored by the natural action of Möbius group is maximum and equal to 2 if, and only if, the Gaussian curvature is constant and has dimension 0 if, and only if, the Gaussian curvature is not constant. We also present a geometric characterization of linear rational integrals of the geodesic flow, through foliations and webs: the geodesic flow on a two-dimensional surface admits a linear rational integral if, and only if, there are four geodesic foliations such that the cross ratio of their slopes is constant.

Keywords: Linear rational integrals in momentum. Geodesic flow. Geodesic foliations.

SUMÁRIO

Introdução	11
1 Preliminares	15
1.1 Integrabilidade do fluxo geodésico	15
1.2 Webs e integrais polinomiais homogêneas em momento	17
1.3 Integral racional linear em momento	18
1.4 Invariantes diferenciais	20
1.5 Teorema de Frobenius	24
2 Integrais racionais lineares	26
2.1 Ação do grupo SL_2 no conjunto das integrais	26
2.2 Derivada de Darboux e sistema de invariantes	27
2.3 Dimensão do espaço de integrais	30
3 4-webs de Nakai geodésicos	37
3.1 Construção de folheações geodésicas	37
3.2 4-webs de Nakai geodésicos	38
4 Conclusões	44
4.1 Campos projetivos	44
Referências	46

INTRODUÇÃO

Considere uma superfície S munida de uma métrica g , um ponto s na superfície e seja v um vetor tangente a S no ponto s . Esse vetor define uma direção, ponto e direção determinam unicamente uma geodésica. A pergunta natural é: qual a dinâmica desse vetor ao longo dessa curva? O vetor diretor vai ser sempre tangente a curva geodésica e o módulo da velocidade é sempre constante, coincidindo com o mesmo da posição inicial. Essas duas condições geométricas, determinam unicamente o fluxo geodésico. Além da definição geométrica natural do fluxo geodésico, podemos destacar sua estrutura algébrica, ou seja, o fluxo geodésico é um sistema Hamiltoniano no fibrado tangente TS com Hamiltoniano $H = \frac{1}{2}g(\xi, \xi)$ e devido ao isomorfismo canônico entre $T_s S$ e $T_s^* S$ podemos escrever o fluxo geodésico tanto no fibrado tangente quanto no fibrado cotangente (ver [25]).

Esse problema também é motivado pela mecânica, onde podemos pensar na seguinte situação: dada uma superfície, se uma partícula pode se mover ao longo dessa superfície sem fricção e sem forças exteriores, então ela está se movendo ao longo da geodésica com módulo da velocidade constante. Dessa forma, o movimento da partícula sem forças exteriores e sem fricção é a descrição do fluxo geodésico. O problema da integrabilidade do fluxo geodésico é um problema clássico da mecânica e despertou interesse em ser estudado por muitos físicos e matemáticos. Lembre que o Hamiltoniano é uma primeira integral, segue pelo Teorema de Liouville (veja [6] para um tratamento moderno) que é suficiente encontrar apenas uma primeira integral extra, ou seja uma função F que seja constante nas trajetórias e que F e H sejam funcionalmente independentes, para que o fluxo geodésico seja integrável.

Dizemos que uma primeira integral I_n do fluxo geodésico é uma integral polinomial homogênea em momento de grau n , se é da forma

$$I_n = \sum_{i=0}^n b_i(x, y) p^{n-i} q^i,$$

onde (x, y) são coordenadas locais e (p, q) coordenadas do momento. Estamos concentrados no estudo de integrais definidas localmente, esse problema é importante e vem motivando estudos pelos seguintes fatos: se temos uma integral analítica real, então qualquer parte homogênea em momento de sua expansão de Taylor em relação aos momentos também é uma primeira integral, ou seja, a existência de integral analítica implica na existência de integral polinomial. A segunda razão que torna o problema relevante é que

a superfície no fibrado cotangente onde a velocidade é zero é uma superfície de dimensão n , em qualquer ponto dessa superfície o campo Hamiltoniano se anula, a existência da integral nesses pontos singulares não é algo trivial, tornando a existência uma restrição forte.

O estudo da integrabilidade do fluxo geodésico por meio de integrais polinomiais homogêneas vem sendo estudado desde meados do século XIX por Darboux [10], Dini [11], Koenigs [15] (veja [9], [18] para mais bibliografias).

O conjunto das integrais polinomiais homogêneas de grau n é um espaço vetorial de dimensão finita. No que refere-se a dimensão segue pelo Teorema de Noether que integrais lineares estão em uma correspondência biunívoca com isometrias infinitesimais e a dimensão do espaço de integrais lineares é 0, 1 ou 3, sendo: 0 (caso genérico), 1 (para as superfícies localmente isométricas às superfícies de revolução), ou 3 (para superfícies de curvatura Gaussiana constante). No caso de integrais quadráticas o estudo da dimensão do espaço foi feito por Koenigs [15] e constatado que a dimensão possível é 1, 2, 3, 4 ou 6.

Já no caso de integrais cúbicas o que foi demonstrado é que o espaço de integrais cúbicas é no máximo 10-dimensional, tal limite foi realizado em superfícies de curvatura Gaussiana constante. Além disso, foi mostrado por Kruglikov em [16] que para o caso de curvatura Gaussiana não constante, a dimensão é no máximo 7.

Uma continuação natural é estudar integrais racionais em momento, cujo numerador e denominador são polinômios homogêneos em momento de mesmo grau. O estudo dessas integrais foi iniciado por Kozlov [17]. Em [27], [4], [5] Agapov e Shubin investigaram integrais racionais lineares

$$\frac{A(x, y)p + B(x, y)q}{C(x, y)p + E(x, y)q},$$

em particular eles exibiram de forma explícita métricas Riemannianas em superfícies cujos os fluxos geodésicos admitem uma primeira integral racional em momento com o numerador e denominador linear.

Neste trabalho contribuimos para a descrição analítica e geométrica de integrais racionais lineares do fluxo geodésico. Observe que diferente das integrais polinomiais homogêneas o conjunto das integrais racionais lineares não é um espaço vetorial, toda a geometria virá da ação do grupo de Möbius que age naturalmente no conjunto das integrais racionais lineares. Mostramos no capítulo 2 que a dimensão do espaço das integrais racionais lineares fatorado pela ação do grupo SL_2 é 2 no caso de curvatura Gaussiana constante e a dimensão é 0 no caso de curvatura Gaussiana não constante.

Um outro tema clássico, bastante explorado, é a geometria dos webs ([8], [26]) onde estuda-se invariantes locais para uma determinada configuração de folheações em posição geral, onde por folheação entendemos como curvas integrais de uma equação diferencial ordinária no plano.

Podemos construir webs por meio de integral polinomial em momento, por exemplo, a construção de um 3-web por meio de uma integral polinomial cúbica é dada da seguinte forma: tome $\xi = dx$ e $\eta = dy$, logo

$$b_0 dx^3 + b_1 dx^2 dy + b_2 dx dy^2 + b_3 dy^3 = 0.$$

Dividindo por dx^3 , obtemos a seguinte equação diferencial ordinária,

$$b_0 + b_1 \frac{dy}{dx} + b_2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + b_3 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 = 0.$$

Na região onde temos 3 raízes reais, integrando obtemos 3-webs.

Dizemos que um 3-web é hexagonal se para qualquer ponto não singular existe um difeomorfismo aplicando as folhas do web em alguma vizinhança do ponto em 3 famílias de segmentos de retas paralelos.

Em um primeiro momento é normal pensarmos que esses dois tópicos de estudos, a geometria dos webs e a dinâmica do fluxo geodésico, não possuem nenhum tipo de relação entre si, mas caracterizar geometricamente integrais polinomiais em momento do fluxo geodésico por meio de folheações e webs é um tema de bastante interesse.

O Teorema de Graf e Sauer [14] diz que 3-web linear é hexagonal se, e somente se, todas as retas são tangentes a uma mesma curva dual a cúbica. Note que a generalização natural desse Teorema para o caso de uma superfície S munida com uma métrica g , seria nos questionar se existe 3-web geodésico hexagonal para essa superfície, quais as condições geométricas ou invariantes para que exista 3-web geodésico hexagonal, a história por trás desse questionamento perdura no final do século 19 e pode ser visto em [13], [28], [29], [33]. Em seu último livro sobre teoria dos webs [7] Blaschke destacou essa questão, ou seja, o problema de encontrar um critério intrínseco para a existência de 3-webs geodésicos hexagonais, mas não foi solucionado em sua época.

Em 2021, Agafonov encontrou uma solução invariante para o problema destacado por Blaschke e provou em seu artigo [1] que 3-web geodésico é hexagonal se, e somente se, o fluxo geodésico admite integral polinomial de grau 3 em momento. Em resumo, integrabilidade significa hexagonalidade.

Existe uma caracterização por meio de webs também para integral de grau 2, Agafonov provou em [2] que a existência de integral polinomial quadrática do fluxo geodésico ocorre se, e somente se, a superfície carrega uma rede geodésica $\mathcal{G}$ tal que um (e, portanto, qualquer) 3-subweb do 4-web formada por $\mathcal{G}$ e sua rede bissetriz $\mathcal{N}$ é hexagonal.

A caracterização para a integral de grau 1, é clássica, a aplicação do Teorema de Noether. Pelo Teorema de Noether, a existência de uma integral linear do fluxo geodésico sobre uma superfície é equivalente à existência de um campo vetorial de Killing, que é a projeção de TS a S do campo vetorial Hamiltoniano correspondente a integral.

O problema de caracterizar integrais polinomiais em momento através de webs ainda é um problema em aberto e para integrais de grau maior que 3 ainda não há até o momento uma caracterização. Nosso estudo foi motivado por essa caracterização geométrica relacionando webs com integrais polinomiais e nosso objetivo foi conseguir uma caracterização geométrica por meio de webs para integrais polinomiais racionais lineares do fluxo geodésico.

Podemos definir 1-web com $I = \lambda$, onde

$$I = \frac{A\xi + B\eta}{C\xi + E\eta},$$

é uma integral racional linear em termos da velocidade (ξ, η) que é dual ao momento (p, q) e λ uma constante, ou seja, se existe integral racional linear então existe família de folheações geodésicas a 1-parâmetro. Tomando quatro dessas folheações, obtém-se um 4-web geodésico com razão cruzada das tangentes às quatro folheações em cada ponto constante.

Nakai estudou esse tipo de web em [21] e não é difícil ver que para um 4-web do plano cuja razão cruzada é constante, basta que um dos 3-subwebs seja não hexagonal para que todos sejam não-hexagonais e, além disso, todos eles têm a mesma curvatura de Blaschke ([21]). Dufour e Lehmann também estudam webs do tipo Nakai e provam em [12] que Nakai's webs possuem posto 0 ou 1 e apresentaram exemplos para posto 1.

No capítulo 3 obtivemos por meio do Teorema 3.4 uma caracterização geométrica que relaciona integral racional linear e 4-webs, mostramos que existir uma integral fracional linear é equivalente a existir 4 folheações geodésicas de forma que a razão cruzada das tangentes às quatro folheações em cada ponto é constante.

Todos os resultados obtidos nessa tese são locais e todas funções aqui trabalhadas são suaves (C^∞).

CONCLUSÕES

3.3 Campos projetivos

Nos exemplos em que Agapov e Shubin mostraram de forma explícita integrais racionais lineares para a métrica em coordenadas conformes dada por $\Lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$ (ver [5] para mais detalhes) verificamos possuir simetria projetiva, conforme podemos ver a seguir.

- Considerando a métrica $g = e^{4x}(1 + 3\cos^2(y))(dx^2 + dy^2)$, o fluxo geodésico admite a primeira integral racional linear dada por:

$$F = e^x \frac{\sin(y)p + 2\cos(y)q}{3\sin(y)\cos(y)p + (2 - 3\sin^2(y))q}.$$

A equação da geodésica não parametrizada da métrica $g = e^{4x}(1 + 3\cos^2(y))(dx^2 + dy^2)$ é dada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3\cos(y)\sin(y)}{1 + 3\cos^2(y)} - 2\frac{dy}{dx} - \frac{3\cos(y)\sin(y)}{1 + 3\cos^2(y)} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3. \quad (3.28)$$

Note que na equação (3.28) não há dependência de x , obtemos assim uma simetria infinitesimal ∂_x , mas a métrica g possui dependência de x , logo essa simetria infinitesimal não é uma isometria, segue então que é uma simetria projetiva, ou seja, o fluxo local leva geodésica não parametrizada em geodésica não parametrizada.

- Considerando a métrica $g = e^{2x}(J_0^2(y) + J_1^2(y))(dx^2 + dy^2)$, o fluxo geodésico dessa métrica admite a primeira integral:

$$F = \frac{(x - y)J_0(y)p - (x - y)(J_1(y))q}{J_1(y)p + J_0(y)q}$$

A equação da geodésica não parametrizada é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-2J_0(y)J_1(y) + 2J_1(y)(J_0(y) - \frac{J_1(y)}{y})}{J_0^2(y) + J_1^2(y)} - 2\frac{dy}{dx} \\ &+ \frac{-2J_0(y)J_1(y) + 2J_1(y)(J_0(y) - \frac{J_1(y)}{y})}{J_0^2(y) + J_1^2(y)} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \end{aligned}$$

Novamente não há dependência de x na equação da geodésica não parametrizada para essa métrica, obtemos uma simetria infinitesimal ∂_x , e assim como no caso anterior, essa simetria infinitesimal não é uma isometria, pois há dependência de x na métrica, logo é uma simetria projetiva.

O mesmo ocorreu com os demais exemplos expostos no artigo de Agapov e Shubin, todos possuíam campos projetivos. Dessa forma seria interessante um estudo futuro sobre a relação entre a existência de campos projetivos e a existência de integrais racionais lineares.

REFERÊNCIAS

- [1] S.I. Agafonov, Hexagonal geodesic 3-webs, *International Mathematics Research Notices*, (2021), 33 p.
- [2] S.I. Agafonov, Quadratic integrals of geodesic flow, webs, and integrable billiards, *Journal of Geometry and Physics*, (2021), 10 p.
- [3] S.V. Agapov, Rational integrals of a natural mechanical system on the 2-torus, *Sib. Math. Journ.*, v. 61:2 (2020) p. 199 - 207
- [4] S.V. Agapov, On first integrals of two-dimensional geodesic flows, *Sib. Math. Journ.*, v. 61:4, (2020) p. 563 - 574
- [5] S. Agapov, V. Shubin, Rational integrals of 2-dimensional geodesic flows: new examples, *Journal of Geometry and Physics*, v. 170 (2021) p. 9
- [6] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics 2. ed.* Springer-Verlag, New York, 1989.
- [7] W. Blaschke, Einführung in die Geometrie der Waben. (German) Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart, 1955. 108 pp.
- [8] W. Blaschke, G. Bol, *Geometrie der Gewebe*, Topologische Fragen der Differentialgeometrie. J. Springer, Berlin, 1938.
- [9] A.V. Bolsinov, V.S. Matveev, A.T. Fomenko, Two-dimensional Riemannian metrics with an integrable geodesic flow. Local and global geometries, *Mat. Sb.* 189 (10) (1998) 5–32. Engl. translation: *Sb. Math.* 189 (9–10) (1998) 1441–1466.
- [10] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*. Paris: Gautier, Villar, 1891.
- [11] U. Dini, Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazione geografiche di una superficie su di un'altra. (Italian) *Brioschi Ann.* (2) III, (1869) 269–294.
- [12] J. P. Dufour, D. Lehmann, Le rang des tissus de Nakai, *arXiv:2204.10077 [math.DG]*, (2022)

-
- [13] S. Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation. (German) *Deutsche Math.-Ver.* 6, (1899) No.2, 45–90.
 - [14] H. Graf, R. Sauer, Über dreifache Geradensysteme in der Ebene, welche Dreiecksnetze bilden, *Sitzungsb. Math.-Naturw. Abt.* (1924), 119-156.
 - [15] G. Koenigs, Sur les géodesiques a intégrales quadratiques, in: Note II from Darboux *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. IV, Chelsea Publishing, 1896.
 - [16] B. Kruglikov, Invariant characterization of Liouville metrics and polynomial integrals, *J. Geom. Phys.*, v. 58 (2008), p.979–995.
 - [17] V. V. Kozlov, On Rational Integrals of Geodesic Flows, *Regul. Chaotic Dyn.*, v. 19:6 (2014), p.601-606.
 - [18] V.N. Kolokol'tsov, Geodesic flows on two-dimensional manifolds with an additional first integral that is polynomial with respect to velocities, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 46 (5) (1982) 994–1010, 1135. Engl. Transl.: *Math. USSR-Izv* 21 (1983) 291–306.
 - [19] S. Lie, Untersuchungen über geodätische Curven. (German) *Math. Ann.* 20 (1882), no. 3, 357-454.
 - [20] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana. 2. ed* Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1988.
 - [21] I. Nakai, Curvature of curvilinear 4-webs and pencil of one forms., *Math. Helv.* v.73 (1998) p. 177-205.
 - [22] P. J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations. 2. ed* Cambridge University Press, New York, 1993.
 - [23] P. J. Olver, *Equivalence, Invariants, and Symmetry. 1. ed* Cambridge University Press, New York, 1995.
 - [24] L.V. Ovsiannikov, *Group analysis of differential equations.* Ames. Academic Press, New York-London, 1982.
 - [25] G. P. Paternain, *Geodesic flows. 1. ed.* Birkhäuser Boston, Boston, 1999.
 - [26] J. V. Pereira, L. Pirio, *An Invitation to Web Geometry 2. ed.* Springer International Publishing, New York, 2015.
 - [27] A. Saint-Exupéry, *O pequeno príncipe 1. ed.* Faro Editorial, Barueri, 2020.
 - [28] R. Sauer, Flächen mit drei ausgezeichneten Systemen geodätischer Linien, die sich zu einem Dreiecksnetz verknüpfen lassen. (German) *Sitzungsberichte München*, 1926, 353-397.
 - [29] P. Stäckel, Lineare Scharen geodätischer Linien, *Math. Ann.*, v. 56 (1903), p.501-506
 - [30] R. W. Sharpe, *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program 1. ed.* Springer-Verlag, New York, 1996.

- [31] O. Stormark, *Lie's structural approach to PDE systems 1. ed.* Cambridge University Press, New York, 2000.
- [32] E. Vessiot, Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations, *Acta Mathematica*. v. 28 (1904) p. 307—349.
- [33] O. Volk, Über Flächen mit geodätischen Dreiecknetzen, *Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl.* (1929) 2-32.
- [34] F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups 1. ed.* , University Pennsylvania, 1971.