

Dissertação de Mestrado

**PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS PARA  
APLICAÇÕES EM ESTRUTURAS INTELIGENTES  
UTILIZANDO DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES**

**Samuel da Silva**

Dissertação apresentada a Universidade Estadual Paulista, UNESP - Campus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

*Orientador:* **Prof. Dr. Vicente Lopes Junior**  
*Co-Orientador:* **Prof. Dr. Edvaldo Assunção**

Ilha Solteira, 21 de Fevereiro de 2005.

*À Carol e Gabriel pelo amor,  
carinho e compreensão.*

*Whatever you do will be insignificant, but it is  
very important that you do it.*

*Mahatma Gandhi.*

## **Agradecimentos**

Ao Prof. Vicente Lopes Júnior por me incentivar à pesquisa desde os tempos de iniciação científica e pela amizade criada nestes anos de convívio.

Ao Prof. Edvaldo Assunção pela co-orientação desta pesquisa. A paciência do Prof. Edvaldo em me receber várias vezes, para ajudar a sanar muitas dúvidas no decorrer do projeto, contribuiu muito para este trabalho.

Ao Prof. João Antonio Pereira, pelas discussões dentro e fora das salas de aulas que ajudaram na minha formação e no meu prazer pela área de pesquisa em que atuo.

Aos membros da banca: Prof. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira e Prof. Edílson Hiroshi Tamai pelas sugestões e comentários.

Aos amigos do Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes (GMSINT) da UNESP/Ilha Solteira, pelos momentos de aprendizagem, descontração e amizade que somente um grupo de amigos pode proporcionar.

A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pela concessão da bolsa de estudos, projeto n.º 02/11360-3, fundamental para a minha dedicação integral neste trabalho.

**SILVA, S. 2005**, “Projeto de Controladores Robustos para Aplicações em Estruturas Inteligentes Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares”, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, UNESP - Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, SP, Brasil.

**Palavras-chave:** *Controle de Vibrações, Estruturas Inteligentes, Controle Robusto, Desigualdades Matriciais Lineares.*

## **RESUMO**

Este trabalho tem como propósito utilizar técnicas de controle robusto para atenuação ativa de vibração mecânica em estruturas acopladas a atuadores e sensores piezolétricos. Os controladores são projetados segundo o enfoque de otimização convexa, com os requisitos envolvendo desigualdades matriciais lineares (LMIs). A proposta é ilustrar duas sínteses diferentes de realimentação via LMIs. A primeira é o projeto de controladores por realimentação de estados, estimados por um observador, considerando incertezas paramétricas do tipo politópicas. A segunda metodologia é baseada no controle  $H_\infty$  via realimentação do sinal de saída, considerando incertezas dinâmicas limitadas por norma. Os sensores/atuadores são posicionados em pontos ótimos utilizando-se a norma  $H_\infty$  como índice de desempenho. Os modelos matemáticos utilizados na síntese dos controladores foram obtidos a partir do método dos elementos finitos considerando o acoplamento eletromecânico entre os atuadores/sensores e a estrutura base ou a partir de métodos de identificação. Neste contexto, este trabalho também discute e exemplifica o algoritmo de realização de autosistemas (ERA). Três exemplos são solucionados para exemplificar a metodologia implementada: uma estrutura tipo placa, uma viga engastada-livre e a supressão ativa de flutter em um aerofólio 2-D, problema de grande interesse na indústria aeronáutica. Os resultados mostraram uma significativa atenuação da vibração estrutural na faixa de frequência de interesse e o atendimento dos requisitos impostos na fase de projeto.

**SILVA, S. 2005**, “Robust Controller Design for Applications in Smart Structures Using Linear Matrix Inequalities”, Master of Science in Mechanical Engineering Thesis, Department of Mechanical Engineering, UNESP - Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, SP, Brasil.

**Keywords:** *Vibration Control, Smart Structures, Robust Control, Linear Matrix Inequalities.*

## **ABSTRACT**

The proposal of this work is to use robust control techniques in order to suppress mechanical vibration in structures with piezoelectric sensors and actuators coupled. The controllers are designed by convex optimization and the constraints are dealt through linear matrix inequalities (LMIs) frameworks. Two different methodologies to feedback the system by using LMIs are explained. The first one is the observer-based state-feedback considering polytopic uncertainties. The second one is the  $H_\infty$  output feedback control considering norm-bound uncertainties. The sensors/actuators are located in optimal placements by using  $H_\infty$  norm as performance index. The mathematical models used in the controller design were obtained by finite element methods considering electromechanical effects between the host structure and piezoelectric sensors/actuators patches or by using identification methods. In this sense, it is also discussed the eigensystem realization algorithm (ERA). Three different applications are proposed and solved in order to illustrate the applicability of the methodology: a cantilever plate; a cantilever beam; and an active flutter suppression in a 2-D airfoil, a problem of considered interest in the aeronautic industry. The results showed the vibration suppression in the bandwidth of interest when submitted to the requirements imposed by practical situations.

## Lista de Figuras

Figura 1.1. Aeronave com sistema AVC comercial.....	02
Figura 1.2. Estrutura acoplada a um circuito shunt ressonador.....	05
Figura 2.1. Estação Espacial Internacional.....	14
Figura 2.2. Vista geral da bancada experimental.....	24
Figura 2.3. Detalhes da bancada experimental.....	24
Figura 2.4. FRF para a estrutura excitada com os atuadores PZT e sinal de saída obtido com o acelerômetro 1 – FRF $G_1$ (vide tabela 2.1).....	26
Figura 2.5. FRF para a estrutura excitada com os atuadores PZT e sinal de saída obtido com o acelerômetro 2 – FRF $G_2$ (vide tabela 2.1).....	27
Figura 2.6. FRF para a estrutura excitada com os atuadores PZT e sinal de saída obtido com o acelerômetro 3 – FRF $G_3$ (vide tabela 2.1).....	27
Figura 2.7. FRF para a estrutura excitada com os atuadores PZT e sinal de saída obtido com o acelerômetro 4 – FRF $G_4$ (vide tabela 2.1).....	28
Figura 2.8. FRF para a estrutura excitada com os atuadores PZT e sinal de saída obtido com o sensor PVDF – FRF $G_5$ (vide tabela 2.1).....	28
Figura 3.1. Incerteza aditiva.....	37
Figura 3.2. Incerteza multiplicativa na saída.....	38
Figura 3.3. Incerteza multiplicativa na entrada.....	38
Figura 4.1. Representação convexa do problema de controle.....	52
Figura 4.2. Forma padrão da realimentação geral de um sistema com incerteza dinâmica.....	52
Figura 4.3. Sistema com a incerteza limitada por norma.....	54
Figura 4.4 Problema de desempenho e robustez convertido em problema de robustez.....	56
Figura 4.5. Problema de desempenho e robustez convertido em problema de desempenho...	57
Figura 4.6. Estrutura da incerteza aditiva.....	57
Figura 4.7. Planta generalizada com a incerteza aditiva.....	58
Figura 4.8. Planta generalizada para o projeto com incerteza residual aditiva – Problema de desempenho e robustez.....	59
Figura 4.9. Planta generalizada para o projeto com incerteza residual aditiva – Problema de	

desempenho.....	60
Figura 4.10. Planta aumentada na forma final para o projeto com incerteza residual aditiva – Problema de desempenho.....	61
Figura 5.1. Estrutura discretizada e bancada experimental.....	65
Figura 5.2. Índice de posicionamento versus localização dos PZTs.....	66
Figura 5.3. Diagrama esquemático da instrumentação utilizada.....	66
Figura 5.4. FRF para a estrutura excitada com o martelo de impacto.....	67
Figura 5.5. FRF para a estrutura excitada com os atuadores PZT.....	68
Figura 5.6. $G_1$ para o modelo reduzido e residual.....	68
Figura 5.7. $G_2$ para o modelo reduzido e residual.....	69
Figura 5.8. Magnitude $G_1$ para todas as 4 possíveis funções à malha aberta.....	70
Figura 5.9. Magnitude $G_2$ para todas as 4 possíveis funções à malha aberta.....	71
Figura 5.10. FRF para o sistema à malha aberta e à malha fechada – Condição nominal.....	71
Figura 5.11. Resposta no domínio do tempo para o sistema à malha aberta e à malha fechada para os dois primeiros modos, considerando o sistema na condição nominal.....	73
Figura 5.12. Resposta no domínio do tempo para o sistema à malha fechada para o 3.º e o 4.º modos, considerando o sistema na condição nominal.....	73
Figura 5.13. Resposta no domínio do tempo para o sistema à malha fechada para o 5.º e o 6.º modos, considerando o sistema na condição nominal.....	74
Figura 5.14. Resposta física no domínio do tempo para o sistema sem controle e com controle.....	74
Figura 5.15. FRF $G_1$ para o sistema sem controle e com controle considerando variação paramétrica, para o sistema na condição do vértice 1 (V1) e vértice 2 (V2).....	75
Figura 5.16. FRF $G_1$ para o sistema sem controle e com controle considerando variação paramétrica, para o sistema na condição do vértice 3 (V3) e vértice 4 (V4).....	75
Figura 5.17. Planta generalizada utilizada no projeto do compensador – modelo Simulink®.....	77
Figura 5.18. Ponderação sobre a função sensibilidade.....	77
Figura 5.19. Ponderação sobre os modos residuais.....	78
Figura 5.20. FRFs do sistema com controle e sem controle.....	78
Figura 5.21. Característica de desempenho do sistema – função sensibilidade.....	79

Figura 5.22. Característica de robustez do sistema – função restrição de energia.....	80
Figura 5.23. Esquema da viga discretizada com as posições candidatas.....	81
Figura 5.24. Índice de posicionamento versus localização do PZT.....	83
Figura 5.25. Estrutura instrumentada a ser simulada.....	83
Figura 5.26. FRF, com e sem o efeito do acoplamento eletromecânico considerado no modelo, excitando com o martelo de impacto e com o PZT, respectivamente.....	85
Figura 5.27. Forma dos modos a serem controlados.....	86
Figura 5.28. FRFs do modelo completo, reduzido e residual – Caso Nominal.....	87
Figura 5.29. FRFs do modelo completo, reduzido e residual para os 4 vértices do politopo..	88
Figura 5.30. Família de plantas de ordem reduzida.....	88
Figura 5.31. FRF para o sistema à malha aberta e à malha fechada – Condição Nominal.....	89
Figura 5.32. FRF à malha aberta e à malha fechada para os 4 vértices do politopo.....	90
Figura 5.33. Sinal de controle para sistema na condição nominal.....	90
Figura 5.34. Sinal de controle para o sistema na condição extrema de cada vértice do politopo.....	91
Figura 5.35. Resposta no tempo dos modos controlados e de 4 modos residuais – Nominal.	91
Figura 5.36. Mapeamento de pólos do sistema – Nominal.....	92
Figura 5.37. Esquema da instrumentação utilizada no ensaio experimental, para excitação com o martelo de impacto.....	92
Figura 5.38. Esquema da instrumentação utilizada no ensaio experimental, para excitação com o par de atuadores PZT.....	93
Figura 5.39. Vista do teste experimental realizado.....	94
Figura 5.40. FRF experimental e dos modelos simulados, excitando com o martelo de impacto.....	94
Figura 5.41. FRF experimental e dos modelos simulados, excitando com o atuador PZT.....	95
Figura 5.42. Seção transversal de um típico aerofólio 2D.....	97
Figura 5.43. Diagrama de corpo livre do corpo principal e da superfície de controle, (Olds, 1997).....	99
Figura 5.44. Resposta aeroelástica à malha aberta com $V = 290$ m/s, (sistema estável, $V < V_f$ ).....	102
Figura 5.45. Resposta aeroelástica à malha aberta com $V = V_f = 298$ m/s (sistema	

marginalmente estável).....	103
Figura 5.46. Resposta aeroelástica à malha aberta com $V = 305$ m/s (sistema instável, $V > V_f$ ).....	103
Figura 5.47. Resposta aeroelástica à malha fechada, considerando $V = 305$ m/s, sistema estável, (regulador não-robusto).....	105
Figura 5.48. Entrada de controle considerando o sistema na condição nominal (regulador não-robusto).....	106
Figura 5.49. Caixa de parâmetros mostrando as combinações de incertezas.....	106
Figura 5.50. Resposta aeroelástica à malha fechada considerando a condição do vértice V5, sistema instável (regulador não-robusto).....	107
Figura 5.51. Resposta aeroelástica à malha fechada considerando a condição do vértice V7, sistema instável (regulador não-robusto).....	107
Figura 5.52. Resposta aeroelástica à malha-fechada considerando condição do vértice V1 e $V > V_f$ (regulador robusto).....	109
Figura 5.53. Resposta aeroelástica à malha-fechada considerando condição do vértice V5 e $V > V_f$ (regulador robusto).....	109
Figura 5.54. Resposta aeroelástica à malha-fechada considerando condição do vértice V7 e $V > V_f$ (regulador robusto).....	110
Figura 5.55. Resposta aeroelástica à malha-fechada considerando condição do vértice V8 e $V > V_f$ (regulador robusto).....	110
Figura 5.56. Resposta aeroelástica à malha-fechada considerando condição nominal, sistema estável (regulador robusto).....	111
Figura 5.57. Entrada de controle considerando o sistema na condição nominal (regulador robusto).....	111

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1. Nomenclatura das funções de transferência, todos os sinais de entrada são obtidos com o atuador PZT.....	25
Tabela 2.2. Freqüências naturais da estrutura (Hz).....	29
Tabela 2.3. Freqüências dos modos computacionais adicionados no processo de	

identificação.....	29
Tabela 5.1. Desempenho do controlador na condição nominal de operação.....	72
Tabela 5.2. Propriedades da Viga.....	81
Tabela 5.3. Propriedades do PZT (Piezo Systems, INC.).....	81
Tabela 5.4. Frequências Naturais (Hz).....	84
Tabela 5.5. Frequências naturais (Hz) dos modelos simulados e curva experimental.....	95
Tabela 5.6. Lista de constantes utilizada, (Silva e Lopes Jr, 2004b, adaptadas de Olds, 1997).....	102

## Lista de Símbolos

### Geral

$\mathbf{A}^T$	Transposto da matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	Inverso da matriz quadrada não-singular $\mathbf{A}$
$\ \mathbf{A}\ _2$	Norma euclidiana de uma matriz $\mathbf{A}$ com valores reais
$\text{diag} ( a_i )$	Matriz diagonal com elemento $a_i$ na diagonal
$\lambda_i(\mathbf{A})$	Autovalores da matriz quadrada $\mathbf{A}$
$\lambda_{\max}(\mathbf{A})$	Máximo autovalor da matriz quadrada $\mathbf{A}$
$\mathbf{I}_n$	Matriz identidade, $n \times n$
$\mathbf{0}_{n \times m}$	Matriz de zeros, $n \times m$

### Letras Latinas

$\mathbf{A}$	Matriz dinâmica
$\mathbf{B}$	Matriz de entrada
$\mathbf{B}_1$	Matriz de entrada controle
$\mathbf{B}_2$	Matriz de entrada distúrbio
$\mathbf{B}_m$	Matriz de entrada modal ou de participação modal
$\mathbf{C}$	Matriz de saída

$\mathbf{C}_m$	Matriz de saída modal
$\mathbf{C}_{mq}$	Matriz de saída de deslocamento modal
$\mathbf{C}_{mv}$	Matriz de saída de velocidade modal
$\mathbf{D}$	Matriz de transmissão direta
$\mathbf{G}$	Função de transferência do sistema
$\mathbf{G}_c$	Matriz função de transferência do modelo nominal
$\mathbf{G}_d$	Matriz função de transferência do sinal de distúrbio
$\mathbf{G}_p$	Matriz função de transferência do modelo de incerteza aditiva
$h$	Deslocamento com relação ao plunge
$\mathbf{H}(k)$	Matriz de Hankel generalizada no passo de amostragem $k$
$\mathbf{H}_{zw}$	Matriz função de transferência entre a saída regulada e a entrada exógena
$\mathbf{H}_{qp}$	Matriz função de transferência entre a saída e a entrada relacionadas a incerteza $\Delta$
$\ \mathbf{H}\ _\infty$	Norma $H_\infty$ do sistema
$I_\alpha$	Momento de inércia do aerofólio
$I_\beta$	Momento de inércia da superfície de controle do flap
$K_h$	Rigidez da mola do plunge
$K_\alpha$	Rigidez da mola do pitch
$K_\beta$	Rigidez da mola do flap
$\mathbf{K}_f$	Matriz de rigidez do aerofólio
$\mathbf{K}$	Função de transferência do controlador
$\mathbf{K}_c$	Matriz de ganho de realimentação
$\mathbf{K}_e$	Matriz de ganho do observador
$L$	Força de sustentação
$m$	Massa do aerofólio
$M$	Momento das forças externas
$\mathbf{M}_f$	Matriz de massa do aerofólio
$\mathbf{p}$	Vetor de entrada relacionado a incerteza $\Delta$
$\mathbf{P}$	Planta generalizada contendo as interconexões entre os sinais de entrada e saída
$\mathbf{q}$	Vetor de saída relacionado a incerteza $\Delta$
$\mathbf{q}_m$	Vetor de deslocamento modal

$\dot{\mathbf{q}}_m$	Vetor de velocidade modal
$\mathbf{R}$	Matriz de transformação
$S_\alpha$	Momento estático do aerofólio por unidade de comprimento
$S_\beta$	Momento estático da superfície de controle do flap
$\mathbf{S}$	Função sensibilidade
$T$	Torque aplicado na mola do flap
$T_s$	Torque adicional aplicado na mola do flap
$\mathbf{T}$	Função sensibilidade complementar
$\mathbf{u}$	Vetor de controle
$\mathbf{U}$	Função restrição de energia
$v$	Número de vértices de um polítopo
$V$	Velocidade do aerofólio
$V_f$	Velocidade de flutter
$V(x)$	Função de Lyapunov
$\mathbf{w}$	Vetor de entradas perturbantes (exógena)
$\mathbf{W}_c$	Matriz de controlabilidade
$\mathbf{W}_o$	Matriz de observabilidade
$\mathbf{x}$	Vetor de estados
$\mathbf{x}(0)$	Vetor de condições iniciais
$\mathbf{y}$	Vetor de saídas medidas
$\mathbf{z}$	Vetor de saídas reguladas
$\mathbf{Z}$	Matriz de coeficientes de amortecimento modal

## Letras Gregas

$\omega_i$	<i>i</i> ésima frequência natural
$\Omega$	Espaço convexo
$\mathbf{\Omega}$	Matriz de frequências naturais
$\zeta$	Coefficiente de amortecimento modal
$\sum_A$	Matriz de posicionamento de atuadores

$\Sigma_s$	Matriz de posicionamento de sensores
$\sigma_{\infty ik}$	Índice de posicionamento $H_\infty$ para o i-ésimo atuador (sensor) e o k-ésimo modo
$\sigma_a$	Vetor de índice de posicionamento do atuador
$\sigma_s$	Vetor de índice de posicionamento do sensor
$\sigma_m$	Vetor de índice de posicionamento dos modos
$\beta$	Amplitude limite do sinal de saída
$\mu$	Amplitude limite do sinal de controle
$\alpha$	Taxa de decaimento do controlador
$\alpha_f$	Ângulo pitch
$\beta_f$	Ângulo flap
$\rho$	Densidade do ar
$\gamma$	Taxa de decaimento do observador
$\varepsilon$	Elipsóide centrado na origem
$\theta$	Escalar relacionado ao problema de cálculo da norma $H_\infty$
$\Delta$	Conjunto de incertezas
$\Delta_a$	Incerteza aditiva
$\Delta_i$	Incerteza multiplicativa na entrada
$\Delta_o$	Incerteza multiplicativa na saída

## Subscrito

1	Referente a entrada de distúrbio
2	Referente a entrada de controle
c	Referente aos modos a serem controlados
r	Referente aos modos residuais (modos de alta frequência)

## Siglas

AG	Algoritmos genéticos
ANC	Active Noise Control
ANVC	Active Noise and Vibration Control
ATVAs	Active Tuned Vibration Attenuators
AVC	Controle Ativo de Vibrações
ERA	Algoritmo de Realização de Autosistemas
EVP	Problema de autovalor
FEM	Método dos elementos finitos
FRF	Função de resposta em frequência
GEPV	Problema de Autovalor Generalizado
IRF	Função de Resposta ao Impulso
LDI	Inclusão diferencial linear
LMI	Desigualdade Matricial Linear
LMIP	Problema de Factibilidade de uma LMI
LQG/LTR	Regulador quadrático gaussiano com recuperação da função de malha
LTI	Sistema linear e invariante no tempo
NLDI	LDI limitada por norma.
PLDI	LDI politópica
PVDF	polyvinilidene fluoride
PZT	titanato-zirconato-chumbo
SISO	Single input-Single output

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b>	01
1.1. Técnicas de Controle Ativo de Vibração e Ruído	03
1.2. Organização do Trabalho	06
<b>2. DINÂMICA DE ESTRUTURAS INTELIGENTES</b>	08
2.1. Realização no Espaço de Estados Modal	10
2.2. Posicionamento de Atuadores e Sensores Piezelétricos	12
2.2.1. A Norma $H_\infty$	14
2.2.2. Uso da Norma $H_\infty$ no Posicionamento de Atuadores e Sensores	15
2.3. Ensaio de Identificação	18
2.3.1. Parâmetros de Markov de um Sistema	19
2.3.2. Algoritmo de Realização de Autosistemas (ERA)	21
2.3.3. Viga com PZT e PVDF Acoplados	23
<b>3. DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES</b>	31
3.1. Histórico	31
3.2. Definições e Conceitos Básicos	33
3.2.1. Problema de Factibilidade de uma LMI (LMIP)	34
3.2.2. Problema de Autovalor (EVP)	34
3.2.3. Problema de Autovalor Generalizado (GEVP)	35
3.3. Sistemas Incertos	35
3.3.1. Incertezas Estruturadas	35
3.3.2. Incertezas Não Estruturadas	37
3.4. Estabilidade Quadrática	39
3.5. Realimentação de Estados via LMI com Restrições de Projeto	40
3.5.1. Estabilidade Quadrática para LDIs à Malha Fechada	41
3.5.2. Limitação de Sinais de Saída	42
3.5.3. Limitação de Sinais de Entrada (Sinal de Controle)	43
3.5.4. Imposição de Taxa de Decaimento	44
3.6. Observador de Estados via LMI	45
3.7. “Spillover” de Controle e de Observação	47

<b>4. CONTROLE ROBUSTO <math>H_\infty</math></b>	50
4.1. Configuração Geral do Problema de Controle $H_\infty$	51
4.2. Problema de Desempenho e Robustez	55
4.3. Projeto Incluindo Robustez à Dinâmica Residual	57
4.4. Solução do Problema $H_\infty$ via LMI	62
<b>5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO</b>	64
5.1. Placa com Atuadores Piezelétricos Incorporados	64
5.1.1. Identificação do Sistema	64
5.1.2. Controle por Realimentação de Estados Estimados por Observador	69
5.1.3. Controle $H_\infty$ via Realimentação da Saída	76
5.2. Viga com Atuadores Piezelétricos Incorporados	80
5.2.1. Posicionamento do Atuador PZT e do Sensor	82
5.2.2. Caracterização dos Modelos da Estrutura Inteligente	84
5.2.3. Projeto do Controlador Robusto	89
5.2.4. Verificação Experimental	92
5.3. Supressão Ativa de Flutter em um Aerofólio 2D	96
5.3.1. Modelo Aeroelástico do Aerofólio 2D	97
5.3.2. Sistema à Malha Aberta	101
5.3.3. Sistema à Malha Fechada	104
<b>6. CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	113
6.1. Conclusões	113
6.2. Sugestões para Futuros Trabalhos	115
<b>7. REFERÊNCIAS</b>	117

---

## 1. INTRODUÇÃO

---

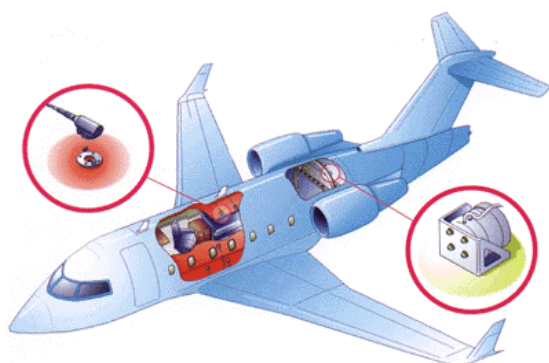
Atualmente se observa grande exigência no desempenho de sistemas estruturais, dos quais se destacam:

- Necessidade de estruturas leves e resistentes, em virtude da economia de combustível e conseqüente diminuição nos custos de transporte, no caso de meios móveis, ou ainda no caso de mecanismos robóticos onde se tem necessidade de baixo torque de acionamento, (Wang et al., 1999);
- Excelente comportamento dinâmico para garantir estabilidade do sistema e precisão de movimento, principalmente em satélites com apêndices leves, (Yan e Yam, 2002);
- Redução de falhas por fadiga, o que pode ser conseguido minimizando vibrações, e melhoria na qualidade e conforto no transporte, (Giurgiutiu, 2000);

O grande desafio é que estruturas leves podem ser excitadas por ruído excessivo, devido a perturbações externas. Para contornar este problema e cumprir as exigências de desempenho, pode-se optar por utilizar técnicas tradicionais ou técnicas de controle ativo de vibrações (AVC). As técnicas tradicionais de redução de vibração são as que aumentam a massa e o amortecimento da estrutura, através, por exemplo, da aplicação de materiais viscoelásticos ao longo da estrutura (Rade et al., 2003). Porém estas técnicas podem, em alguns casos, comprometer as metas de redução de peso, além de não terem boas características de robustez, fazendo com que a sistemática de AVC seja mais atraente em aplicações recentes. Nas últimas décadas, as metodologias de AVC têm recebido significantes contribuições, sobretudo devido aos avanços no processamento digital de sinais e em novas metodologias de controle. O assunto é amplamente investigado em Fuller et al. (1996), Hansen e Snyder (1997), Gawronski (1998) e Juang e Phan (2001).

No geral, os sistemas de AVC agem produzindo vibrações no sentido contrário para reduzir as vibrações indesejadas. As técnicas de AVC utilizam forças de controle, aplicadas na estrutura por um controlador, que se baseiam em informações obtidas por um sensor. Estas forças procuram reduzir as amplitudes de vibração estrutural causadas por uma fonte de vibração indesejável de origem primária, (Anthony, 2000). Em estruturas aeroespaciais as vibrações indesejadas se originam nas fontes acústicas e vibracionais, com faixas típicas de frequências de 30 Hz até 10 kHz para fontes acústicas e 20 Hz até 2 kHz para fontes vibracionais, (Forgrave et

al., 1999). Todas estas perturbações podem provocar, por exemplo, vibrações na fuselagem das aeronaves e causar ruído na cabine da tripulação e passageiros, ou ainda provocar fenômenos aeroelásticos dramáticos como o “flutter”, (Bisplinghoff et al., 1996). Assim, atualmente já existem várias empresas no mercado, como exemplo, a empresa Ultra Electronics Ltda (1999), que desenvolveu, entre outros, um equipamento denominado *Active Tuned Vibration Attenuators* (ATVAs), fig. 1.1, composto por sensores/atuadores e controladores que é acoplado diretamente a fuselagem da aeronave para controle ativo de vibrações e ruídos.



(a) Aeronave com controle ativo de vibrações



(b) Controlador ativo fixado a fuselagem

Figura 1.1. Aeronave com sistema AVC comercial. Fonte: <http://www.ultraquiet.com/>

Porém não apenas em aplicações aeronáuticas é importante a redução de vibrações, o controle estrutural de edifícios também tem sido objeto de diversos estudos, principalmente no caso de abalos sísmicos, (Dai, 2002). Várias empresas, como a japonesa Takenaka (<http://www.takenaka.co.jp/>), incorporam o controle estrutural em edifícios para reduzir instabilidades geradas pelo vento e fazer com que a estrutura responda de maneira controlada as vibrações decorrentes de terremotos.

A empresa K2 Inc (2003) trabalha no desenvolvimento de produtos esportivos como os “esquis inteligentes”, que possuem sensores e atuadores piezelétricos embutidos a sua estrutura. Os sensores percebem as vibrações e enviam um sinal a um circuito lógico que produz uma lei de controle a ser seguida pelo atuador. Os movimentos do atuador, no sentido oposto ao das vibrações, proporcionam maior estabilidade ao esqui.

Como aplicação militar pode-se destacar pesquisa financiada pelo exército americano, que está embutindo cristais piezelétricos dentro das hélices do rotor de helicópteros, os quais produzem uma resposta de realimentação que é utilizada para reduzir a vibração e o ruído dentro da cabine do piloto, The Institute of Materials, Minerals & Mining – IOM3 (2003).

---

A popularização de materiais “inteligentes” começou a partir do início dos anos 90 com o desenvolvimento de materiais com características ativas, com especial destaque para os materiais piezelétricos, que começaram a ser integrados aos modelos estruturais (Hagood et al., 1990). Assim se criou um novo enfoque no qual uma estrutura pode ter a sua resposta dinâmica minimizada utilizando de forma integrada técnicas de otimização estrutural, atuadores, sensores e controladores. Conseqüentemente, essa integração capacita o sistema a responder de modo controlado a excitações externas, procurando compensar os efeitos que levariam a resposta a se afastar de patamares aceitáveis. Atualmente, tem-se convencionado chamar esses sistemas, que integram estrutura, sensores, atuadores e controladores de *Estruturas Inteligentes*, (Clark et al., 1998).

O sucesso das técnicas de AVC depende de diversos fatores, incluindo: o modelo usado, o posicionamento dos sensores e atuadores na estrutura, a escolha do controlador, o tipo de sensor e atuador usado para medir cada parâmetro, o parâmetro utilizado para representar a vibração estrutural a ser minimizada, etc. Neste contexto, este trabalho tem como meta explorar o uso de desigualdades matriciais lineares (LMIs) no projeto de controladores robustos para aplicações em estruturas inteligentes, objetivando a redução de vibração estrutural. Serão analisados no capítulo 5 três exemplos para ilustrar o uso da metodologia estudada e implementada. Os sensores/atuadores são posicionados em pontos ótimos utilizando-se a norma  $H_\infty$  como índice de desempenho, enquanto, as técnicas de controle são resolvidas através de LMIs. Utiliza-se como parâmetro para representar vibração estrutural a magnitude dos modos de baixa frequência, como é feito na maioria dos trabalhos convencionais da literatura.

Na seqüência deste capítulo são apresentadas algumas considerações sobre as técnicas de AVC, focando na utilização de LMIs, e a forma de organização deste texto.

## **1.1. Técnicas de Controle Ativo de Vibrações**

Em geral sempre são abordados dois tipos de estratégias de controle: controle de alimentação direta ou antecipativo (*feedforward*) e controle por realimentação (*feedback*). A primeira estratégia (*feedforward*) é um algoritmo de controle simples, mas que requer um sinal de referência. O controlador usa este sinal de referência para ajustar continuamente o sinal de controle e minimizar um erro de saída, (Anthony, 2000). Grande parte das técnicas de controle ativo de ruído (*ANC – Active Noise Control*) envolvem esta estratégia, onde a meta é o cancelamento deste ruído através de um filtro. Mais tarde, porém, observou-se que em muitas aplicações práticas o ruído é também causado por vibração mecânica. Surgiam assim as técnicas

---

de controle ativo de vibração e ruído (*ANVC – Active Noise and Vibration Control*), (Fuller et al., 1996). A literatura tem apresentado diversas variantes de técnicas ANVC, como exemplo, o controle acústico estrutural ativo. Nesta técnica somente são atenuados modos naturais com maior eficiência na irradiação de som quando uma estrutura é excitada.

A outra estratégia (*feedback*) não requer um sinal de referência, mas há limitações no desempenho devido às restrições de estabilidade, (Lee, 2000). O controle por realimentação é particularmente usado para controlar modos individuais em regiões de baixa frequência, como o é caso da maioria das aplicações de controle em estruturas flexíveis. Nestes problemas os sistemas devem seguir uma trajetória com alta precisão em um curto intervalo de tempo, como exemplo prático tem-se os mecanismos robóticos, (Valer, 1999).

De maneira geral os problemas de controle ativo de vibrações (AVC) com realimentação, de estados ou de saída, tem como meta o projeto de um controlador para suprir vibrações na região de baixa frequência. Várias metodologias têm sido utilizadas para projetos de controladores para estas aplicações. Inicialmente técnicas de AVC foram projetadas considerando apenas sistemas SISO (*Single Input-Single Output*) e técnicas clássicas de controle, como o método do lugar das raízes e os métodos de resposta em frequência, (Ogata, 1997). Durante muitos anos estas técnicas se mostraram suficientes, porém com a evolução das exigências estruturais estas metodologias passaram a se tornar insatisfatórias, motivando, assim, a introdução de técnicas de controle moderno, (Meirovitch, 1990). Outro grande problema encontrado é o fato da maioria das estruturas serem sistemas com parâmetros distribuídos, portanto são necessárias aproximações e truncamentos. Isto invariavelmente conduz a erros de modelagem, sobretudo na dinâmica referente aos modos residuais, o que pode provocar efeitos nocivos ao sistema, se destacando os efeitos “*spillover*”, explicados no capítulo 3 deste trabalho. Além disto variações paramétricas também podem prejudicar o sistema e devem ser consideradas no projeto. Isto faz com que técnicas de controle robusto mereçam destaque em aplicações de AVC, ainda que muitas vezes elas sejam esquecidas, uma vez que o controle por realimentação por si só já dá um certo grau de robustez ao sistema, mas que nem sempre se mostra suficiente em termos práticos, (Valer, 1999).

Uma alternativa de AVC utilizada com sucesso por alguns autores, e que não pode ser classificada como técnica ativa, é a utilização de circuito elétrico shunt ressonador. A idéia é transformar a energia mecânica em energia elétrica e dissipar na forma de calor em um resistor conectado a uma cerâmica piezoeletrica através de um circuito externo, fig. (1.2). Com isto a estrutura pode ter alguns de seus modos amortecidos. Sfeffen Jr. e Inman (2000) utilizam esta técnica no amortecimento de uma viga. Já AboElSooud (2002) utiliza estes circuitos para controle acústico em uma estrutura bidimensional.

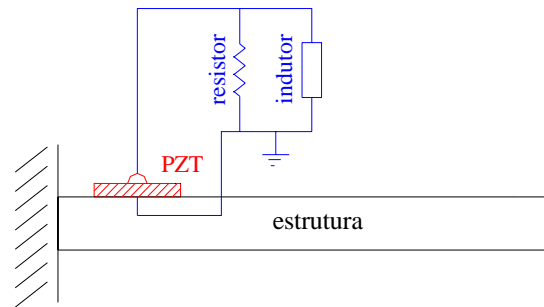


Figura 1.2. Estrutura acoplada a um circuito shunt ressonador.

Porém, a grande contribuição nos últimos anos se deve ao desenvolvimento de algoritmos de otimização convexa poderosos, como o método dos pontos interiores, (Gahinet et al., 1995). Devido a este avanço, a partir dos anos 90 um novo paradigma ganha maior espaço e os problemas de controle começam a ser escritos na forma de “desigualdades matriciais lineares” (LMI – do inglês “Linear Matrix Inequalities”), sendo possível resolvê-las através de ferramentas eficientes de otimização convexa.

Apesar disto, este enfoque não tem sido muito utilizado pela comunidade de dinâmica estrutural em problemas práticos de AVC. Poucos autores exploram esta metodologia aplicada em estruturas inteligentes, podendo-se citar o trabalho de Sana e Rao (2000) que reduzem vibrações em uma viga engastada-livre usando duas cerâmicas piezelétricas como atuadores e dois polímeros piezelétricos como sensores. Na metodologia proposta por Sana e Rao (2000) as desigualdades resultantes são bilineares, portanto não se pode resolvê-las diretamente usando os pacotes computacionais de otimização convexa existentes, sendo necessário se lançar mão de procedimentos iterativos, como por exemplo, o algoritmo “cone complementarity linearization” (Ghaoui et al., 1997) que é um procedimento de alto custo computacional.

Mais recentemente Sana e Rao (2001) apresentaram um sistema pendular simples com dois graus de liberdade e fizeram restrições na forma de LMI para o potencial elétrico de entrada no atuador e testaram o controlador projetado em tempo real. Este mesmo sistema pendular foi simulado por Gonçalves et al. (2002), que realizou uma comparação entre o controle ótimo  $H_2$  e controle ótimo  $H_\infty$ , em ambos os casos fazendo realimentação de estados e resolvendo via LMIs. As LMIs utilizadas por Gonçalves et al. (2002) foram propostas pioneiramente por Peres (1997). Gonçalves et al. (2003a) e (2003b) simularam uma síntese de realimentação de estados usando LMIs clássicas, descritas em Boyd et al. (1994b), considerando inclusões diferenciais lineares

(LDI) com incerteza limitada por norma para um sistema mecânico 2DOF e para uma viga de alumínio biengastada, respectivamente.

No presente trabalho a proposta é ilustrar duas sínteses diferentes de realimentação via LMIs. A primeira é o projeto de controladores por realimentação de estados, estimados por um observador, considerando incertezas paramétricas descritas por LDI politópicas (PLDI). A solução é baseada em um procedimento proposto por Geromel et al. (1991) e discutido em aplicações práticas em Silva et al. (2003, 2004a, 2004b). Esta síntese é descrita no capítulo 3 deste trabalho. A segunda metodologia é baseada no controle  $H_\infty$  via realimentação do sinal de saída considerando incertezas dinâmicas limitadas por norma, em um enfoque proposto por Gahinet e Apkarian (1994) e discutido em aplicações práticas em Silva et al. (2004c) e Carvalhal et al. (2005). Esta síntese é discutida no capítulo 4.

Uma vez que a solução numérica de uma LMI para sistemas de ordem elevada é muito lenta, sempre será necessário considerar um modelo de baixa ordem considerando somente poucos modos significativos na região de baixa frequência ou na região de interesse, apesar de alguns autores não seguirem esta linha, por exemplo, em Gonçalves et al. (2003b). Além de se reduzir o tempo de solução da LMI, o controlador resultante tem ordem baixa facilitando a implementação em hardware. Assim, neste trabalho considera-se a mesma filosofia utilizada nos métodos indiretos, que é projetar um controlador de ordem reduzida a partir de um modelo reduzido (contendo apenas os modos de baixa frequência). Devido a este fato, deve ser feita uma análise após a implementação do controlador para avaliar os efeitos de “spillover”.

## **1.2. Organização do Trabalho**

O trabalho está organizado em 6 capítulos. O capítulo 2 dá uma síntese geral da análise dinâmica de estruturas inteligentes, discutindo o modelo no espaço de estados obtido a partir da identificação do sistema utilizando o algoritmo de realização de autosistemas (ERA), e do posicionamento ótimo de atuadores e sensores piezelétricos via mapeamento da norma  $H_\infty$ . Com a finalidade de ilustrar o algoritmo ERA um exemplo de identificação com dados reais é resolvido neste capítulo. Na sequência, o capítulo 3 discute os aspectos básicos do controle robusto via LMI. Considera-se o projeto de controladores com realimentação de estados, sendo assim, também se discute o projeto de observadores dinâmicos. O controle  $H_\infty$  via realimentação da saída é apresentado no capítulo 4. No capítulo 5 são apresentados os resultados dos exemplos implementados. Um dos exemplos apresenta uma interessante aplicação para técnicas LMIs e consiste na supressão ativa de flutter em um aerofólio bidimensional. Flutter é um fenômeno

aeroelástico de considerável importância na indústria aeronáutica. O modelo linear clássico utilizado foi baseado em trabalhos prévios citados na literatura e o exemplo utiliza a síntese de LMIs via realimentação de estados com os estados estimados por um observador dinâmico, descritos no capítulo 3. Nos últimos anos as propostas de uso de materiais inteligentes neste tipo de aplicação têm sido intensas, (Nagamine, 2001), porém no exemplo implementado nenhuma consideração prática é feita sobre o tipo de atuador e sensor que podem ser utilizados, apenas o ponto de vista teórico do modelo dinâmico e do controle são destacados. Por fim, o capítulo 6 apresenta as considerações finais do trabalho e as sugestões para pesquisas futuras.

---

## 2. DINÂMICA DE ESTRUTURAS INTELIGENTES

---

Os pioneiros no desenvolvimento de modelos dinâmicos para estruturas inteligentes são os trabalhos de Bailey e Hubbard (1985) e Crawley e de Luis (1987). Ambos usam a tensão mecânica induzida pelos atuadores piezelétricos para contribuir com a tensão mecânica total da estrutura base. Porém o primeiro trabalho de pesquisa que desenvolveu uma sistemática rigorosa para o projeto de uma estrutura deste tipo foi o de Hagood et al. (1990), que aplicaram o princípio generalizado de Hamilton para sistemas acoplados eletromecanicamente, também conhecido como princípio variacional aplicado a meios piezelétricos (Allik e Hughes, 1970). A grande contribuição de Hagood et al. (1990) foi formular de modo mais claro o acoplamento eletromecânico. A partir daí estruturas inteligentes mais complexas, como placas e cascas, começaram a surgir na literatura, (Dosh e Inman, 1992).

Alguns exemplos são: Banks et al. (1995), que apresentam um modelo geral descrevendo a interação entre materiais piezelétricos e uma estrutura elástica constituída de cascas cilíndricas, placas ou vigas; Blanguernon et al. (1999) desenvolvem um modelo analítico de um elemento piezocerâmico e seu acoplamento mecânico com a dinâmica estrutural de uma viga criando a capacidade de prever o comportamento de uma estrutura acoplada; Lam e Ng (1999) utilizam nas suas formulações a teoria clássica de placas laminadas e as soluções de Navier Stokes para analisar placas de material compósito com sensores e atuadores integrados.

Poucos trabalhos incluem os efeitos de cisalhamento na obtenção de modelos analíticos de estruturas inteligentes. Como exceção, tem-se Yang e Lee (1994) que a partir do modelo de viga de Timoshenko inserem o acoplamento eletromecânico devido a presença dos atuadores piezelétricos incorporados. Já Aldraihem et al. (1996) mostram que o efeito do cisalhamento deve ser considerado em aplicações de controle quando a relação entre a espessura da viga e o seu comprimento é menor do que 15, para materiais isotrópicos, e maior do que 30, para materiais compostos.

Uma grande contribuição na inclusão de efeitos de cisalhamento em modelos de estruturas inteligentes foi dada por Lima (1999), que usou o princípio de Hamilton na obtenção de modelos analíticos via método dos elementos finitos para modelos de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko e de placa de Kirchhoff e Mindlin-Ressner. Neste trabalho não foi deixado claro quais as funções de interpolação que foram utilizadas na aproximação dos graus de liberdade elétrico e não são dadas referências adicionais neste tópico. Lopes Jr et al. (2000a) mostram as funções de interpolação usadas para os graus de liberdade elétrico no modelo de viga de Euler-

---

Bernoulli e ainda apresentam um procedimento para poder se aplicar o problema do autovalor padrão no modelo com acoplamento eletromecânico, uma vez que as matrizes globais de massa e rigidez obtidas não são positivas definidas. Este mesmo modelo foi usado para otimização no posicionamento de atuadores piezelétricos e controle ativo de vibrações em uma viga no trabalho de Silva e Lopes Jr. (2002). Rocha et al. (2004) fazem uma generalização deste procedimento para o modelo de placa de Kirchhoff acoplada com atuadores piezelétricos modelados como elemento de viga de Euler-Bernoulli e comparam os resultados com um modelo gerado no software comercial de elementos finitos Ansys®. Apesar da simplificação do modelo os resultados são representativos. O exemplo da placa apresentado no atual trabalho utiliza este modelo para simular exemplos de aplicação para o cálculo do posicionamento ótimo dos atuadores.

Além da técnica de elementos finitos, a preferida na obtenção de modelos eletromecânicos, métodos alternativos também têm sido estudados, como o método dos modos assumidos, (Meirovitch, 1997). Pota e Alberts (1995) usam esta metodologia para obtenção de uma função de transferência relacionando os potenciais elétricos de saída e entrada de sensores e atuadores piezelétricos, respectivamente. Neste modelo considerou-se uma viga laminada com um piezocerâmico e piezopolímero colados na superfície. Um dos grandes problemas é que esta técnica é baseada no truncamento modal e deve ser levado em consideração a dinâmica dos modos residuais. Halim e Moheimani (2002) mostram um procedimento para compensar este erro devido ao truncamento modal. Todas as considerações dos autores anteriores foram utilizadas em uma aplicação prática no trabalho de Abreu. et al. (2003) para controle de uma viga ativa usando um regulador linear quadrático. Todos estes autores afirmam que a metodologia pode ser utilizada para outros tipos de estruturas. Porém, a técnica parece ser limitada a estruturas com geometria e condições de contorno simples, uma vez que a metodologia envolve as autofunções analíticas, sendo dependente das condições de contorno e solução analítica para o problema de autovalor diferencial e como se sabe poucos sistemas distribuídos tem solução analítica na forma fechada, (Meirovitch, 1997).

No geral todas as técnicas tem como meta se chegar a equações manipuláveis dependentes das matrizes globais de massa, rigidez elástica, rigidez eletroelástica e matriz de capacitância piezelétrica e, também, que possam ser feitas analogias com modelos de dinâmica estrutural convencional. Um dos fatores que influenciam o modelo destas estruturas é a posição dos atuadores e dos sensores acoplados. Pode-se ter uma influência maior ou menor do acoplamento eletromecânico dependendo da posição do atuador, Rocha et al. (2004).

No trabalho atual o modelo da estrutura inteligente é obtido de duas maneiras. A primeira é através de técnicas clássicas de FEM, aliadas a equações constitutivas da piezeletricidade linear, para obtenção do modelo de viga de Euler-Bernoulli. Para clareza deste texto detalhes na obtenção das matrizes de massa, rigidez elástica, rigidez eletroelástica e matriz de capacitância piezolétrica são omitidos. Porém, detalhes podem ser encontrados em Lopes Jr. et al. (2003), Silva (2004) ou Rocha et al. (2004). O exemplo de aplicação da viga, no capítulo 5, é feito a partir deste modelo. O segundo modelo é obtido a partir de dados experimentais e consiste na obtenção das matrizes que caracterizam a realização no espaço de estados utilizando as medidas de função de resposta em frequência. O segundo exemplo de aplicação, feito na placa, é identificado experimentalmente e o controlador simulado. Stöbner e Gaul (2001) fizeram algo similar, identificaram o modelo da estrutura de um carro através de técnicas de análise modal experimental. A partir do modelo identificado, as vibrações na estrutura foram atenuadas usando seis atuadores PVDF colados em uma placa fina que estava colada no automóvel. Com este sistema se conseguiu reduzir aproximadamente 25% da amplitude do 1.º modo e 60% da amplitude do 3.º modo através do uso de técnicas convencionais de controle envolvendo reguladores lineares quadráticos.

As seções a seguir mostram a representação no espaço de estados modal e técnicas de posicionamento ótimo de atuadores e sensores piezolétricos. Além disto é revisado a identificação de sistemas utilizando o algoritmo de realização de autosistemas (ERA), com um exemplo a partir de dados reais para ilustração do algoritmo.

## **2.1. Realização no Espaço de Estados Modal**

A realização no espaço de estados escrito em coordenadas modais, considerando as matrizes com dimensão apropriada e assumidas conhecidas, é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{2.1}$$

sendo  $\mathbf{x}$  o vetor de estados modal,  $\mathbf{u}$  o sinal de entrada e  $\mathbf{y}$  o sinal de saída. O trio  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  é composto pelas matrizes dinâmicas, de entrada e de saída, respectivamente, definidas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega^2 & -2\mathbf{Z}\Omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_{mq} \quad \mathbf{C}_{mv}] \tag{2.2}$$

sendo  $\mathbf{\Omega}$  a matriz de freqüências naturais,  $\mathbf{Z}$  a matriz de coeficientes de amortecimento modal,  $\mathbf{I}$  a matriz identidade,  $\mathbf{B}_m$  a matriz de entrada modal,  $\mathbf{C}_{mq}$  a matriz de saída de deslocamento modal e  $\mathbf{C}_{mv}$  a matriz de saída de velocidade modal.

Através de uma transformação linear é possível obter estas matrizes na forma de blocos diagonais. Esta realização é recomendável para projeto de controladores. Assim as matrizes dinâmicas, de entrada e de saída são dadas na forma:

$$\mathbf{A}_m = \text{diag}(\mathbf{A}_{mi}), \quad \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{m1} \\ \mathbf{B}_{m2} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_m = [\mathbf{C}_{m1} \quad \mathbf{C}_{m2} \quad \cdots \quad \mathbf{C}_{mn}] \quad (2.3)$$

sendo  $i = 1, 2, \dots, n$ , onde  $n$  é o número de modos considerados, e  $\mathbf{A}_{mi}$ ,  $\mathbf{B}_{mi}$  e  $\mathbf{C}_{mi}$  são blocos  $2 \times 2$ ,  $2 \times n.$  de entradas e  $n.$  de saídas  $\times 2$ , respectivamente. Estes blocos podem ser arranjados de diversas formas diferentes e também se converter de uma forma a outra a partir de uma transformação linear. Isto pode ser feito usando as seguintes equações:

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}, \quad \mathbf{B}_m = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_m = \mathbf{C} \mathbf{R} \quad (2.4)$$

sendo  $\mathbf{R}$  uma matriz de transformação. Gawronski (1998) mostra diversas formas que esta matriz pode ter. Uma possível forma para a matriz dinâmica é:

$$\mathbf{A}_{mi} = \begin{bmatrix} -\zeta_i \omega_i & \omega_i \\ -\omega_i & -\zeta_i \omega_i \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

O vetor de estados,  $\mathbf{x}$ , de coordenadas modais, neste caso, consiste de  $2n$  componentes independentes,  $\mathbf{x}_i$ , que representam o estado de cada modo. O  $\mathbf{x}_i$  (*iésimo* componente) para a representação da eq. (2.5) é dado por:

$$\mathbf{x}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{mi} \\ \dot{\mathbf{q}}_{mi} \end{Bmatrix}, \quad \text{onde } \mathbf{q}_{moi} = \zeta_i \mathbf{q}_{mi} + \dot{\mathbf{q}}_{mi} / \omega_i \quad (2.6)$$

sendo  $\mathbf{q}_{mi}$  o *iésimo* deslocamento modal,  $\dot{\mathbf{q}}_{mi}$  a *iésima* velocidade modal,  $\zeta_i$  o *iésimo* coeficiente de amortecimento modal e  $\omega_i$  a *iésima* freqüência natural. Mais informações sobre este tópico podem ser encontradas em Gawronski (1998) ou Silva (2003).

## **2.2. Posicionamento de Atuadores e Sensores Piezelétricos**

Diversos autores estudaram o problema de localização ótima de sensores e atuadores no controle ativo de estruturas usando diferentes métodos de otimização e funções objetivos. O interesse neste tópico se deve a alguns fatores como, (Papatheodorou et al., 1999):

- Uso de um pequeno número de sensores e atuadores para minimizar o custo de instrumentação e processamento de sinais;
- Obtenção de boas estimativas dos parâmetros modais;
- Melhora do controle estrutural;

Dada a importância do posicionamento ótimo de atuadores, diversos pesquisadores têm trabalho neste tema. Na literatura, duas formulações básicas são geralmente encontradas: métodos à malha aberta e métodos à malha fechada (Oliveira e Geromel, 2000). Os procedimentos à malha aberta simplificam significativamente o problema, pois a seleção é feita independente de qualquer controlador. Exemplos práticos para este procedimento são dados em Kabamba et al. (1994) e Brasseur et al. (2004). O último trabalho investigou o problema de posicionamento de PZTs para controle ativo acústico estrutural. Entretanto, não se tem garantia que esta solução representa o melhor desempenho a malha fechada através da introdução de controlador por realimentação.

Por outro lado, nos procedimentos à malha fechada a meta é projetar o controlador que minimize algum índice de desempenho considerando ao mesmo tempo os efeitos da localização dos atuadores (Geromel, 1989). Para finalidades práticas, vários autores têm utilizado uma metodologia conhecida como otimização discreto-contínua, (Pereira, 2003). Nesta metodologia o problema é dividido em dois laços de otimização: um externo correspondendo a posição do atuador, sendo caracterizado por um problema de otimização discreta e um laço interno correspondendo a otimização do controlador, (Lopes Jr. et al., 2000b). Em geral se utiliza como função objetivo a minimização da energia mecânica interna da estrutura e do esforço do controlador, como fez Heverly II et al. (2001) que usam como técnica de otimização discreta “simulated annealing”. Nestes casos a maioria dos autores trabalha com problemas de otimização restrita, limitando a amplitude do sinal de controle. Vários autores seguem esta linha, como Rao et al. (1991) que estudaram otimização discreta utilizando como ferramenta algoritmos genéticos (AG). Furuya e Haftka (1993) também usaram AG para encontrar a posição ótima de 8 atuadores em uma estrutura com 1507 posições candidatas. Kirby III et al. (1994) usam AG para solucionar

---

o problema do tamanho e a localização ótima de atuadores para controle multivariável. Silva e Lopes Jr (2002) utilizaram esta técnica para otimizar o posicionamento de atuadores em uma viga com 20 elementos e discutem a influência na escolha dos parâmetros genéticos adotados.

Uma aplicação prática interessante foi feita por Simpson e Hansen (1996) que usaram um modelo simples de um interior de uma aeronave e determinaram o posicionamento ótimo de atuadores usando AG. De Fonseca et al. (2000) realizaram um estudo comparativo das diferentes técnicas de otimização em um problema de posicionamento de sensores e atuadores na estrutura de uma aeronave. As duas últimas referências são exemplos de minimização de radiação de som. De Fonseca et al. (2000) encontraram alguns algoritmos clássicos de otimização com elementos aleatórios que podem ser melhores utilizados do que algoritmos genéticos. Em geral, variações dos parâmetros dos algoritmos genéticos provocam melhora na convergência da busca, porém, é provável que a melhora dos AG seja um problema específico, (Silva e Lopes Jr., 2002). Outro autor que usa AG é Gao et al. (2000) que posicionam atuadores piezelétricos buscando minimizar a potência acústica irradiada em uma placa fina.

Como se percebe nos parágrafos anteriores, algoritmos evolutivos nos dias atuais são amplamente utilizados para problemas de otimização de posicionamento, entretanto técnicas clássicas também podem fornecer bons resultados. Nesta linha se destaca Gabbert et al. (1997), que apresentaram uma técnica baseada nos métodos clássicos de otimização para determinar a localização de atuadores em estruturas inteligentes por otimização discreta-contínua. Jia (1990) utiliza, por sua vez, o método de Newton para otimização do posicionamento e tamanho da cerâmica piezelétrica na estrutura base, porém trabalha com a solução analítica do modelo de viga de Euler-Bernoulli, podendo ser uma técnica de difícil aplicação em estruturas com geometria mais complexa. Hiramoto et al. (2000) usam o método Quasi-Newton para localizar em pontos ótimos dois atuadores piezelétricos em uma viga simplesmente suportada. Como função objetivo é usado a minimização da função de transferência à malha fechada do sistema. Outra ferramenta clássica de otimização utilizada é a programação seqüencial quadrática, (Li et al., 2001) e (Lopes Jr. et al., 2000b).

Outra classe de autores prefere utilizar como função objetivo medidas das matrizes grammianas de controlabilidade e observabilidade para realizar um mapeamento do posicionamento de atuadores e sensores, respectivamente. Costa e Silva e Arruda (1997) mostram que maximização de propriedades destas matrizes, como traços e autovalores, pode ser utilizada eficientemente em problemas de posicionamento de atuadores piezelétricos. Outros autores que utilizam técnica similar são: Sadri et al. (1999) que usam maximização da matriz

grammiana de controlabilidade como função objetivo para otimização do tamanho de atuadores em uma placa, usando como técnica AG; Han e Lee (1999) também fizeram algo similar.

Porém, a idéia do presente trabalho foi utilizar normas de sistema como função objetivo no enfoque de posicionamento à malha aberta, ou seja, o posicionamento é feito independente de qualquer controlador. Este paradigma foi seguido devido a grande simplificação alcançada através deste enfoque. Panossian et al. (1998) mostram uma aplicação prática desta técnica. Os autores localizam 4 atuadores e cerca de 340 sensores no modulo Z1 da Estação Espacial Internacional (entre mais de 10000 posições candidatas) usando como critério de desempenho a norma  $H_2$ , fig. 2.1. Também foi considerado que os efeitos de distúrbios externos não influenciam o posicionamento dos atuadores.

Apesar desta aplicação prática ilustrar as vantagens da metodologia, poucos autores usam normas como índice de posicionamento. Gawronski (1998) mostra maiores detalhes da metodologia.



Figura 2.1. Estação Espacial Internacional, fonte: <http://spaceflight.nasa.gov/gallery/images/station/>.

### 2.2.1. A Norma $H_\infty$

Considerando um sistema estável a norma  $H_\infty$  é definida como, (Burl, 1999):

$$\|\mathbf{H}\|_\infty = \max_{\omega} \sigma_{\max}(G(\omega)) \quad (2.7)$$

sendo  $\sigma_{\max}(G(\omega))$  o maior valor singular de  $G(\omega)$ . A norma  $H_\infty$  de um sistema SISO é a magnitude do maior pico da função de transferência  $G(\omega)$  em termos de valores singulares.

A norma do  $i$ -ésimo modo natural do sistema dado pelo trio de matrizes  $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i)$  pode ser estimada de diferentes formas, (Gawronski, 1998). Neste trabalho calcula-se a norma  $H_\infty$ ,

tanto dos modos quanto do sistema, a partir de um problema de otimização convexa. Em Assunção e Teixeira (2001) há uma sub-rotina para computar esta norma com o auxílio do LMI toolbox do Matlab®, que é utilizada no cálculo da norma no presente trabalho. A norma  $H_\infty$  pode ser encontrada a partir do seguinte problema de otimização convexa:

$$\begin{aligned} & \|H\|_\infty^2 = \min \theta \\ \text{sujeito à } & \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C} \mathbf{C}^T & \mathbf{P} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} & -\theta \end{bmatrix} < \mathbf{0} \\ & \mathbf{P} > \mathbf{0} \\ & \theta > 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

sendo  $\mathbf{P}$  uma matriz simétrica positiva definida e  $\theta$  um escalar.

A norma  $H_\infty$  de um sistema é igual a maior norma dos modos, i. e.:

$$\|H\|_\infty = \max_i \|H_i\|_\infty, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

A propriedade da equação (2.9) significa que o maior pico da função de resposta em frequência (FRF) de um sistema com baixo amortecimento estrutural determina a resposta do pior caso. A norma  $H_\infty$  do  $i$ -ésimo modo de uma estrutura com um conjunto  $s$  de atuadores é a soma RMS da norma do referido modo para cada atuador separadamente, ou seja:

$$\|H_i\|_\infty = \sqrt{\sum_{j=1}^s \|H_{ij}\|_\infty^2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

sendo  $n$  o número de modos considerados. Da mesma forma a norma  $H_\infty$  do  $i$ -ésimo modo de uma estrutura com um conjunto  $r$  de sensores é a soma RMS da norma do referido modo para cada sensor separadamente, ou seja:

$$\|H_i\|_\infty = \sqrt{\sum_{k=1}^r \|H_{ik}\|_\infty^2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

## 2.2.2. Uso da Norma $H_\infty$ no Posicionamento de Atuadores e Sensores

Os atuadores devem ser posicionados em localizações que excitam os modos de interesse mais eficientemente. O problema de localização ótima de sensores e atuadores pode ser interpretado como um problema de posicionamento de um pequeno conjunto de atuadores e

sensores tal que a norma  $H_2$ ,  $H_\infty$  ou Hankel do sistema seja o mais próximo possível da norma do sistema caso se utilizasse um conjunto grande de sensores e atuadores. A metodologia estudada neste trabalho é simples de ser implementada em comparação com outros métodos citados na literatura, além de ser eficiente para um grande conjunto de posições candidatas. Outra vantagem é a sua clara interpretação física, (Gawronski, 1998).

A norma  $H_\infty$  pode ser uma boa medida de controlabilidade, porém trabalhos recentes tem considerado o conceito de controlabilidade espacial, definida através da noção de norma  $H_2$  ou  $H_\infty$  espacial (Halim e Moheimani, 2003). Esta escolha é justificada porque pelo uso deste índice é possível manter a controlabilidade modal de modos selecionados sobre um certo nível sem degradar o desempenho do sistema. Entretanto, neste trabalho se utiliza a norma  $H_\infty$  como índice para o posicionamento, porém poderia se utilizar outros índices sem perda de generalidade. Denota-se por  $H$  a função de transferência do sistema. O índice de posicionamento  $\sigma_{\infty ik}$  que avalia o  $k$ -ésimo atuador atuando sobre o  $i$ -ésimo modo em termos de norma  $H_\infty$  é definido para todos os modos e todas as localizações candidatas possíveis:

$$\sigma_{\infty ik} = w_{ik} \frac{\| \mathbf{H}_{ik} \|_\infty}{\| \mathbf{H} \|_\infty}, \quad k = 1, \dots, S \quad i = 1, \dots, n \quad (2.12)$$

sendo  $w_{ik}$  o peso para o  $k$ -ésimo atuador e para o  $i$ -ésimo modo, este peso tem o propósito de penalizar certas posições em relação a outras,  $S$  é o número de posições candidatas para os atuadores e  $n$  o número de modos considerados. Usando estes índices pode-se definir uma matriz de posicionamento do atuador:

$$\sum_A = \begin{bmatrix} \sigma_{\infty 11} & \sigma_{\infty 12} & \cdots & \sigma_{\infty 1k} & \cdots & \sigma_{\infty 1S} \\ \sigma_{\infty 21} & \sigma_{\infty 22} & \cdots & \sigma_{\infty 2k} & \cdots & \sigma_{\infty 2S} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{\infty i1} & \sigma_{\infty i2} & \cdots & \sigma_{\infty ik} & \cdots & \sigma_{\infty iS} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{\infty n1} & \sigma_{\infty n2} & \cdots & \sigma_{\infty nk} & \cdots & \sigma_{\infty nS} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i\text{ésimo modo} \\ \\ \\ \uparrow k\text{ésimo atuador} \end{matrix} \quad (2.13)$$

A  $i$ -ésima linha desta matriz corresponde ao  $i$ -ésimo modo e a  $k$ -ésima coluna ao atuador posicionado na  $k$ -ésima localização candidata. O procedimento para o índice de posicionamento do sensor  $\sigma_{\infty ik}$  é similar e avalia o  $k$ -ésimo sensor no  $i$ -ésimo modo em termos da norma  $H_\infty$ :

$$\sigma_{\infty ik} = w_{ik} \frac{\|\mathbf{H}_{ik}\|_{\infty}}{\|\mathbf{H}\|_{\infty}}, \quad k = 1, \dots, R \quad i = 1, \dots, n \quad (2.14)$$

sendo  $w_{ik}$  o peso para o  $k$ -ésimo sensor e para o  $i$ -ésimo modo,  $R$  é o número de posições candidatas para os sensores e  $n$  o número de modos considerados. Usando estes índices pode-se definir uma matriz de posicionamento do sensor:

$$\sum S = \begin{bmatrix} \sigma_{\infty 11} & \sigma_{\infty 12} & \cdots & \sigma_{\infty 1k} & \cdots & \sigma_{\infty 1R} \\ \sigma_{\infty 21} & \sigma_{\infty 22} & \cdots & \sigma_{\infty 2k} & \cdots & \sigma_{\infty 2R} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{\infty i1} & \sigma_{\infty i2} & \cdots & \sigma_{\infty ik} & \cdots & \sigma_{\infty iR} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{\infty n1} & \sigma_{\infty n2} & \cdots & \sigma_{\infty nk} & \cdots & \sigma_{\infty nR} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i\text{ésimo modo} \\ \\ \\ \\ \\ \uparrow k\text{ésimo sensor} \end{matrix} \quad (2.15)$$

A  $i$ -ésima linha desta matriz corresponde ao  $i$ -ésimo modo e a  $k$ -ésima coluna ao sensor posicionado na  $k$ -ésima localização candidata.

As matrizes de posicionamento dão as propriedades de localização de cada atuador/sensor. O vetor de índice de posicionamento do atuador é definido por:

$$\sigma_a = [\sigma_{a1} \quad \sigma_{a2} \quad \cdots \quad \sigma_{a_s}]^T \quad (2.16)$$

No caso do índice envolvendo a norma  $H_{\infty}$  é o maior índice sobre todos os modos, ou seja:

$$\sigma_{ak} = \max_i (\sigma_{ik}) \quad i = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, S \quad (2.17)$$

De maneira similar o vetor de índice de posicionamento do sensor é definido como:

$$\sigma_s = [\sigma_{s1} \quad \sigma_{s2} \quad \cdots \quad \sigma_{sR}]^T \quad (2.18)$$

No caso do índice envolvendo a norma  $H_{\infty}$ , é o maior índice sobre todos os modos, ou seja:

$$\sigma_{Sk} = \max_i (\sigma_{ik}) \quad i = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, R \quad (2.19)$$

O vetor de índice dos modos por sua vez é definido da seguinte forma:

$$\sigma_m = [\sigma_{m1} \quad \sigma_{m2} \quad \cdots \quad \sigma_{mn}]^T \quad (2.20)$$

Estes índices podem ser determinados como sendo a soma RMS do *i-ésimo* modo sobre todos os atuadores:

$$\sigma_{mi} = \sqrt{\sum_{k=1}^S \sigma_{ik}^2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.21)$$

ou a soma RMS do *i-ésimo* modo sobre todos os sensores:

$$\sigma_{mi} = \sqrt{\sum_{k=1}^R \sigma_{ik}^2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.22)$$

Das propriedades e equações acima, constata-se que o índice  $\sigma_{ak}$  ( $\sigma_{sk}$ ) caracteriza a importância do *k-ésimo* atuador (ou sensor), assim este índice pode ser usado como um índice de posicionamento de atuador (ou sensor). Por outro lado, os índices de atuadores (sensores) com valores pequenos  $\sigma_{ak}$  ( $\sigma_{sk}$ ) podem ser removidos por terem participação insignificante.

O índice modal  $\sigma_{mi}$  também pode ser usado. Este índice caracteriza a importância do *i-ésimo* modo para uma dada configuração de sensores e atuadores. Os modos com normas menos significativas (ou seja, com valores pequenos do índice  $\sigma_{mi}$ ) podem ser eliminados da escolha de melhor posicionamento. Maiores detalhes podem ser encontrados em Gawronski (1998) ou no trabalho de estudos especiais do autor, (Silva, 2003).

### **2.3. Ensaio de Identificação**

O ensaio de identificação é utilizado com o propósito de se obter o modelo a controlar a partir da função de resposta ao impulso (IRF). Uma vez que é extremamente complicado se obter diretamente a IRF, neste trabalho se optou por obter a função de resposta em frequência (FRF) e na seqüência aplicar a transformada inversa de Fourier, obtendo assim a IRF.

O método de identificação utilizado neste trabalho se baseia na teoria de realização de sistemas, (Skelton, 1988). Vários algoritmos são baseados nesta teoria, como por exemplo, o método Q-Markov Cover e o algoritmo de realização de autossistemas (ERA). Moreira e Arruda (1997) fizeram uma comparação entre estes dois algoritmos no que diz respeito ao custo envolvido na implementação. Como exemplo, foi feita uma treliça simulando a estrutura de um satélite. O método ERA apresentou resultados melhores do que o Q-Markov Cover, mas seu custo computacional foi um pouco superior.

Entre todos os métodos desta classe de algoritmos, o mais popular para aplicações de controle e testes modais de estruturas flexíveis é o ERA, (Juang e Phan, 2001). A idéia do ERA é obter o modelo no espaço de estados a partir dos parâmetros característicos do sistema, conhecidos como parâmetros de Markov. A partir destes parâmetros se constrói a matriz de Hankel e via decomposição de valores singulares (SVD) determina-se o conjunto de matrizes que descrevem a realização no espaço de estados. A seguir são apresentados os principais pontos do algoritmo, maiores detalhes são encontrados em Juang (1994) ou Juang e Phan (2001). Por fim, um exemplo de identificação utilizando dados reais de ensaio é feito para ilustrar o algoritmo.

### 2.3.1. Parâmetros de Markov de um Sistema

Assumindo uma entrada impulso unitário em um instante  $k$ :

$$\begin{bmatrix} u(k-p) \\ \vdots \\ u(k-1) \\ u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+s-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

sendo  $k$  e  $s$  inteiros arbitrários, mas  $p$  é um inteiro pré-especificado. O inteiro  $p$  deve ser maior ou igual a um número específico relacionado a ordem do sistema e o número de saídas. Assume-se também que a resposta em um instante menor que  $k$  é:

$$\begin{bmatrix} y(k-p) \\ \vdots \\ y(k-2) \\ y(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

A resposta nos outros instantes é dada por:

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+s-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_0^{(1)} \\ \vdots \\ \beta_0^{(s-1)} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$



### 2.3.2. Algoritmo de Realização de Autosistemas (ERA)

Denotando os parâmetros de Markov como:

$$\begin{aligned}
 Y_0 &= \mathbf{D} = \beta_0 \\
 Y_1 &= \mathbf{CB} = \beta_0^{(1)} \\
 Y_2 &= \mathbf{CAB} = \beta_0^{(2)} \\
 Y_3 &= \mathbf{CA}^2\mathbf{B} = \beta_0^{(3)} \\
 &\vdots \\
 Y_k &= \mathbf{CA}^{k-2}\mathbf{B} = \beta_0^{(k)}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

A realização de sistemas começa com a formação da matriz de Hankel generalizada, que apresenta ordem igual a  $[p \times \gamma]$  e é composta pelos parâmetros de Markov:

$$\mathbf{H}(0) = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_\gamma \\ Y_2 & Y_3 & \cdots & Y_{\gamma+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_p & Y_{p+1} & \cdots & Y_{p+\gamma-1} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

sendo  $p$  e  $\gamma$  inteiros tal que  $\gamma r > pm$ ,  $m$  é o número de saídas e  $r$  é o número de entradas. A matriz de Hankel é também conhecida como matriz de blocos de dados.

A matriz  $\mathbf{H}(0)$  tem rank  $n$  (a ordem do sistema) se  $pm \geq n$ . A eq. (2.30) pode ser decomposta em duas matrizes:

$$\mathbf{H}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{CAB} & \cdots & \mathbf{CA}^{\gamma-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^\gamma\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{p-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^p\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{p+\gamma-2}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \mathbf{W}_o \mathbf{W}_c \tag{2.31}$$

sendo:

$$\mathbf{W}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{p-1} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

$$\mathbf{W}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{\gamma-1}\mathbf{B}]$$

A matriz  $\mathbf{W}_o$  é a matriz de observabilidade e  $\mathbf{W}_c$  é a matriz de controlabilidade. O passo seguinte é a decomposição em valores singulares, SVD, de  $\mathbf{H}(0)$  da eq. (2.30):

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{R}\mathbf{\Sigma}\mathbf{S}^T \quad (2.33)$$

sendo as colunas das matrizes  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{S}$  ortonormais e  $\mathbf{\Sigma}$  uma matriz retangular:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Considerando que as matrizes  $\mathbf{R}_n$  e  $\mathbf{S}_n$  são formadas pelas primeiras  $n$  colunas das matrizes  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{S}$ , respectivamente, a matriz  $\mathbf{H}(0)$  torna-se:

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{R}_n \mathbf{\Sigma}_n \mathbf{S}_n^T, \quad \mathbf{R}_n^T \mathbf{R}_n = \mathbf{I}_n = \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n \quad (2.35)$$

A partir das equações (2.31) e (2.35) pode-se escrever:

$$\mathbf{H}(0) = [\mathbf{R}_n \mathbf{\Sigma}_n^{1/2}] [\mathbf{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T] \cong \mathbf{W}_o \mathbf{W}_c \quad (2.36)$$

Da eq. (2.36) observa-se que  $\mathbf{W}_o$  é relacionado a  $\mathbf{R}_n$  e  $\mathbf{W}_c$  é relacionado a  $\mathbf{S}_n^T$ . Assim de (2.32) chega-se a:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{a primeira coluna de } \mathbf{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \\ \mathbf{C} &= \text{a primeira linha de } \mathbf{R}_n \mathbf{\Sigma}_n^{1/2} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Para computar a matriz  $\mathbf{A}$  forma-se a matriz de Hankel no passo de amostragem  $k = 1$ :

$$\mathbf{H}(1) = \begin{bmatrix} Y_2 & Y_3 & \cdots & Y_{\gamma+1} \\ Y_3 & Y_4 & \cdots & Y_{\gamma+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{p+1} & Y_{p+2} & \cdots & Y_{p+\gamma} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Agora escrevendo a equação (2.38) em termos das matrizes do sistema  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(1) &= \begin{bmatrix} \mathbf{CAB} & \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^\gamma\mathbf{B} \\ \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \mathbf{CA}^3\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{\gamma+1}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^p\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{p+1}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{p+\gamma-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{W}_o\mathbf{A}\mathbf{W}_c \\
&= \mathbf{R}_n\boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2}\mathbf{S}_n^T
\end{aligned} \tag{2.39}$$

A solução para a matriz dinâmica é:

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2}\mathbf{R}_n^T\mathbf{H}(1)\mathbf{S}_n\boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \tag{2.40}$$

Um tratamento matemático mais rigoroso neste tópico pode ser encontrado em Juang (1994).

Em resumo, o método ERA é um procedimento para computar as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  a partir dos parâmetros de Markov do sistema. O procedimento requer o cálculo das matrizes de Hankel,  $\mathbf{H}(0)$  e  $\mathbf{H}(1)$ . As matrizes identificadas do sistema são:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2}\mathbf{R}_n^T\mathbf{H}(1)\mathbf{S}_n\boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \\
\mathbf{B} &= \text{a primeira coluna de } \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2}\mathbf{S}_n^T \\
\mathbf{C} &= \text{a primeira linha de } \mathbf{R}_n\boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \\
\mathbf{D} &= \mathbf{Y}_0
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Ressalta-se que a realização encontrada pelo algoritmo descrito acima está no domínio discreto e a teoria de controle utilizada neste trabalho se baseia no domínio analógico. Sendo assim é necessário realizar uma transformação para o espaço de estados em tempo contínuo. Esta conversão do modelo no espaço de estados para o domínio discreto e para o domínio contínuo e vice-versa pode ser facilmente realizada com o auxílio das funções do Matlab® *d2c* e *c2d*.

Atualmente também existe um grande número de variantes para este método. Um dos bons exemplos é o ERA/OKID (Observer Kalman Filter Identification), onde é utilizado um filtro de Kalman para tratar o problema de identificação de sistemas com ruído. Detalhes deste método podem ser encontrados no trabalho de Salazar (2000).

### 2.3.3. Exemplo: Viga com PZT e PVDF Acoplados

Este exemplo tem como meta identificar o modelo no espaço de estados de uma viga de aço inox com 410 mm x 25 mm x 1 mm, de comprimento, largura e espessura, respectivamente.

A condição de contorno pretendida é a engastada-livre; entretanto, não se tem garantia da total restrição dos graus de liberdade. Uma vista geral da estrutura a ser testada é mostrada na figura 2.2.

A identificação foi feita através do método ERA. Um modelo finito dimensional na faixa de frequência de 0 até 1000 Hz foi identificado. Um sensor PVDF (modelo ACX) foi colado próximo ao engaste, vide figura 2.3b. Com o objetivo de melhorar o processo de identificação foi utilizado mais 4 sinais de saídas utilizando um acelerômetro (modelo 352A10 PCB Piezotronics®). Como sinal de entrada utilizou-se um par de atuadores PZT (Piezo System Inc.) colados do mesmo lado da superfície, figura 2.3a, na face oposta ao PVDF, próximos ao engaste. Foram feitos vários testes excitando a estrutura com um martelo de impacto, porém os resultados não ficaram bons, necessitando um maior número de testes futuros. Portanto, no presente exemplo tem-se 5 possíveis funções de transferência entre o sinal de entrada e os sinais de saídas. Para melhor compreensão dos gráficos utiliza-se a nomenclatura mostrada na tabela 2.1.

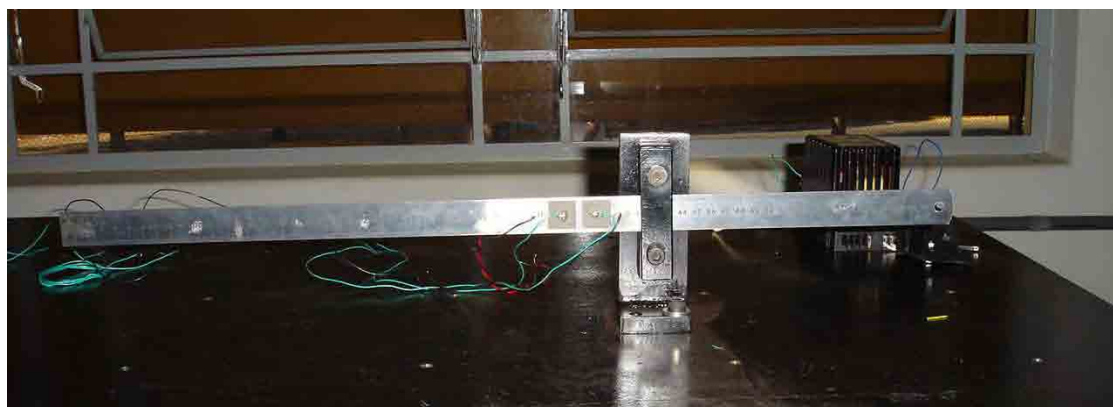
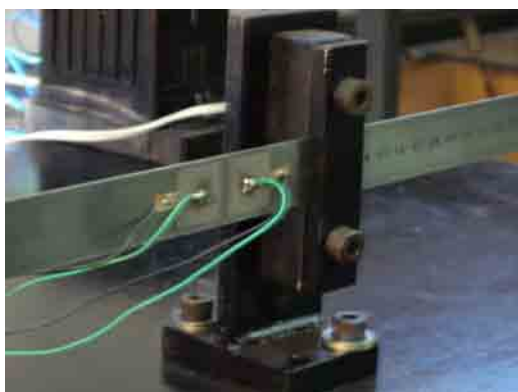
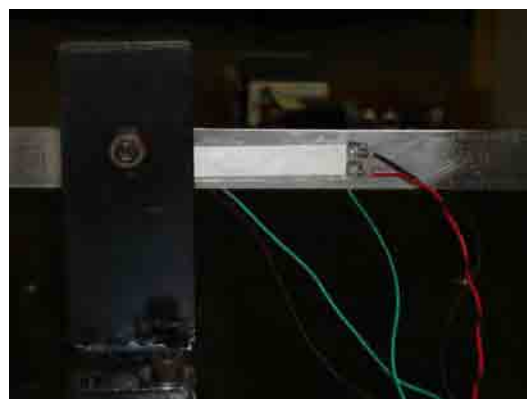


Figura 2.2. Vista geral da bancada experimental.



(a) Atuadores PZT.



(b) Sensor PVDF.

Figura 2.3. Detalhes da bancada experimental.

Tabela 2.1. Nomenclatura das funções de transferência, todos os sinais de entrada são obtidos com o atuador PZT.

<b>Função</b>	<b>Sinal de Saída</b>
G <sub>1</sub>	Acelerômetro na extremidade livre da viga.
G <sub>2</sub>	Acelerômetro à 100 mm da extremidade livre da viga.
G <sub>3</sub>	Acelerômetro à 200 mm da extremidade livre da viga.
G <sub>4</sub>	Acelerômetro à 300 mm da extremidade livre da viga.
G <sub>5</sub>	PVDF colado próximo ao engaste

As FRFs medidas experimentalmente são mostradas nas figuras 2.4 a 2.8. A montagem experimental usada é similar a apresentada no exemplo da placa do capítulo 5, figura 5.3. Em todos os sinais se utilizou 800 pontos de discretização. O sinal de excitação do PZT usado foi do tipo “swept sine” com largura de banda de 0-1000 Hz para a excitação do PZT. O sinal de entrada e saída passam por uma janela Hanning para evitar problemas de leakage. O software utilizado para gerar, armazenar e analisar os sinais foi o SignalCalc ACE®. Ressalta-se que por restrições no número de canais do sistema de aquisição utilizado é adquirida uma FRF por vez. Os dados são salvos como um arquivo com extensão TXT e enviado ao Matlab®, ambiente em que foi implementado o algoritmo de realização de autosistemas (ERA). O primeiro passo foi aplicar a transformada inversa de Fourier nas FRFs medidas para se obter a função de resposta ao impulso. A partir daí, o procedimento descrito nos itens anteriores é seguido. Os resultados do processo de identificação são apresentados nas figuras 2.4 até 2.8. As curvas em vermelho são as FRFs calculadas analiticamente a partir das matrizes identificadas que representam o modelo no espaço de estados do sistema em estudo.

O modelo FEM analítico deste sistema apresenta 8 modos na faixa de frequências de interesse. Já para o modelo identificado foram adicionados modos computacionais para melhorar o processo de identificação. Mesmo assim a identificação dos modos com frequência abaixo de 100 Hz foi extremamente difícil, uma vez que o sinal nesta faixa de frequência apresentou um nível de ruído muito grande. Isto impede afirmar com segurança quais picos representam modos e quais são ruídos. Outro fator foi o fato de que o PZT trabalha melhor sendo excitado em altas frequências. O primeiro modo, por exemplo, que tem frequência em torno de 5 Hz não foi possível medir com exatidão (soma-se o fato desta frequência estar próxima ao fundo de escala do acelerômetro usado, que é de 2.5 Hz). Por outro lado os resultados da identificação na faixa de frequência de 300 Hz até 1000 Hz foram bastante satisfatórios.

O objetivo do processo de identificação foi apenas obter a realização do sistema e não obter os parâmetros modais do sistema. Caso esta fosse a meta, bastaria utilizar a matriz dinâmica  $\mathbf{A}$ , para se solucionar o problema de autovalor e autovetor associado, com isto os resíduos, as frequências naturais e os fatores de amortecimento seriam estimados. Com os resíduos e a matriz de saídas identificada  $\mathbf{C}$ , é possível realizar uma transformação de coordenadas e obter os modos de vibrar da estrutura, (Maia et al., 1996). As frequências naturais obtidas no processo de identificação são apresentadas na tabela 2.2 para comparar com os resultados do modelo FEM (modelo de viga de Euler Bernouli discretizado em 24 elementos finitos iguais).

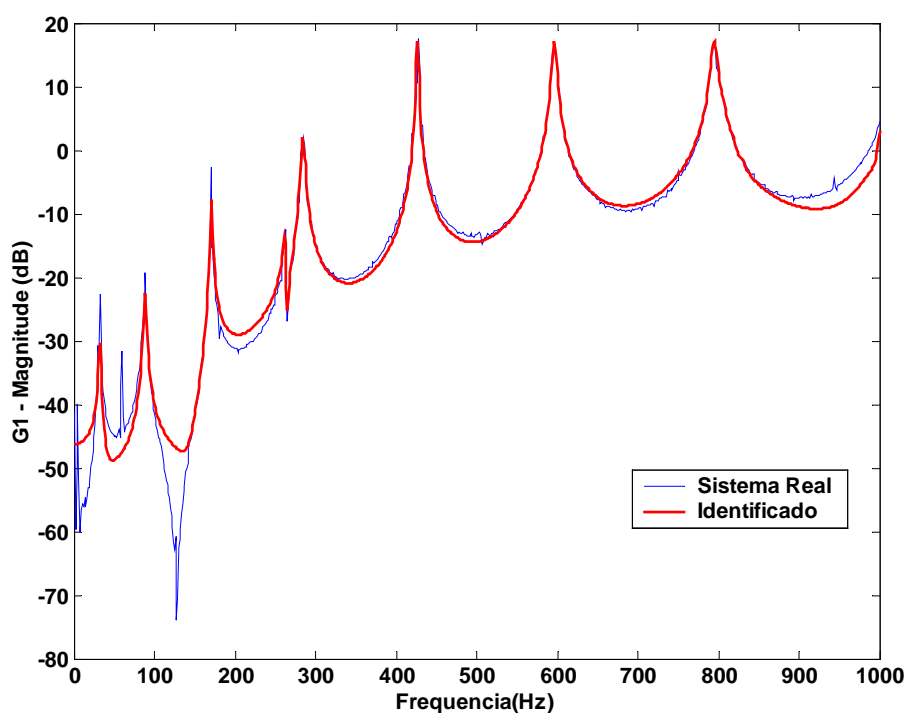


Figura 2.4. FRF para a estrutura excitada com os atuadores PZT e sinal de saída obtido com o acelerômetro 1 – FRF  $G_1$  (vide tabela 2.1). Unidades: mV/mV.

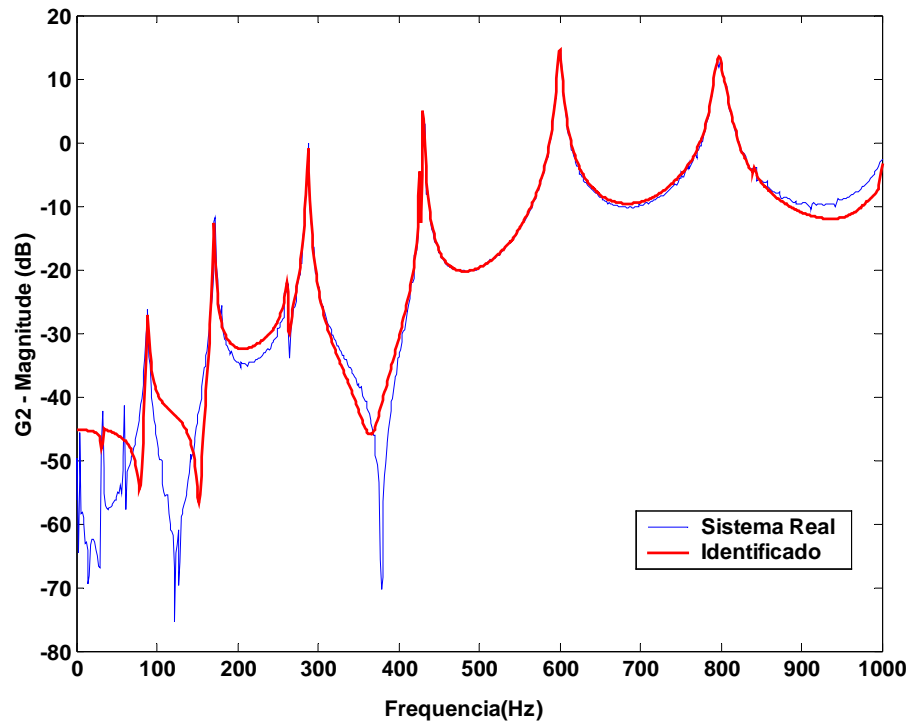


Figura 2.5. FRF para a estrutura excitada com os atuadores PZT e sinal de saída obtido com o acelerômetro 2 – FRF  $G_2$  (vide tabela 2.1). Unidades: mV/mV.

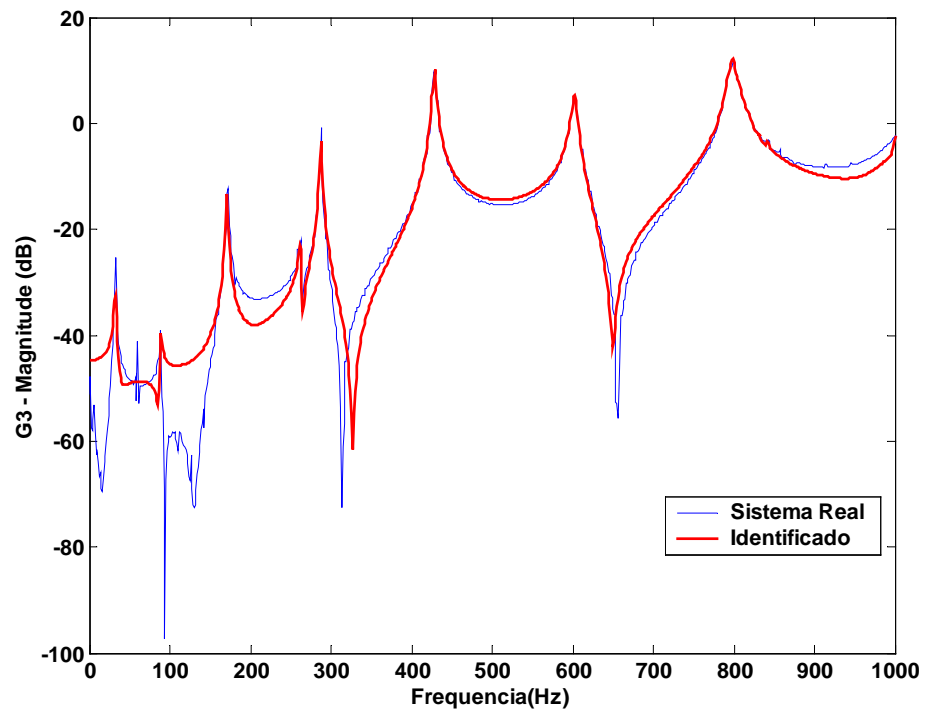


Figura 2.6. FRF para a estrutura excitada com os atuadores PZT e sinal de saída obtido com o acelerômetro 3 – FRF  $G_3$  (vide tabela 2.1). Unidades: mV/mV.

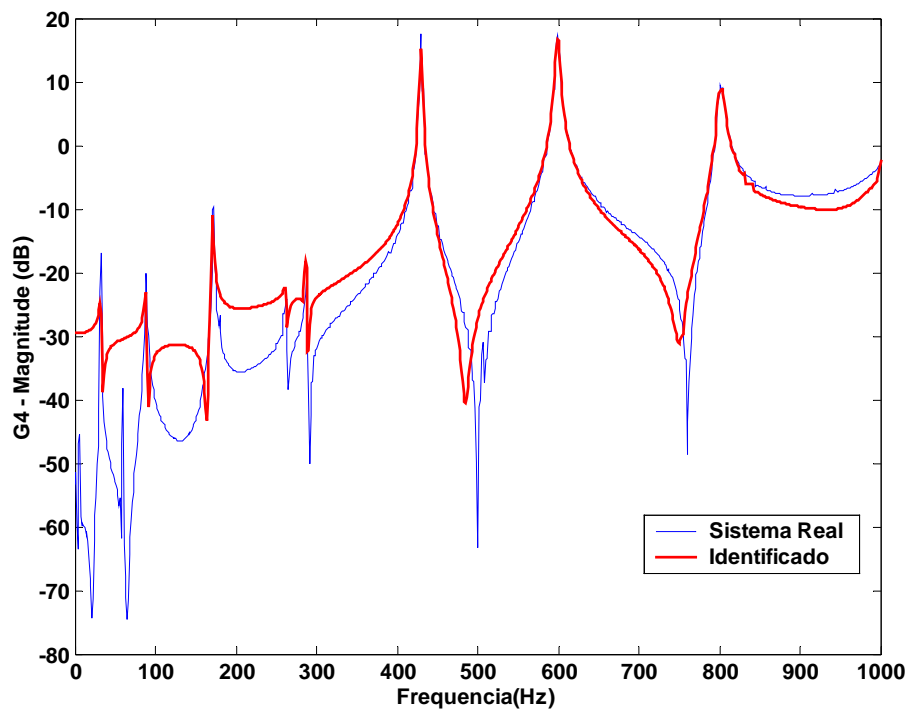


Figura 2.7. FRF para a estrutura excitada com os atuadores PZT e sinal de saída obtido com o acelerômetro 4 – FRF  $G_4$  (vide tabela 2.1). Unidades: mV/mV.

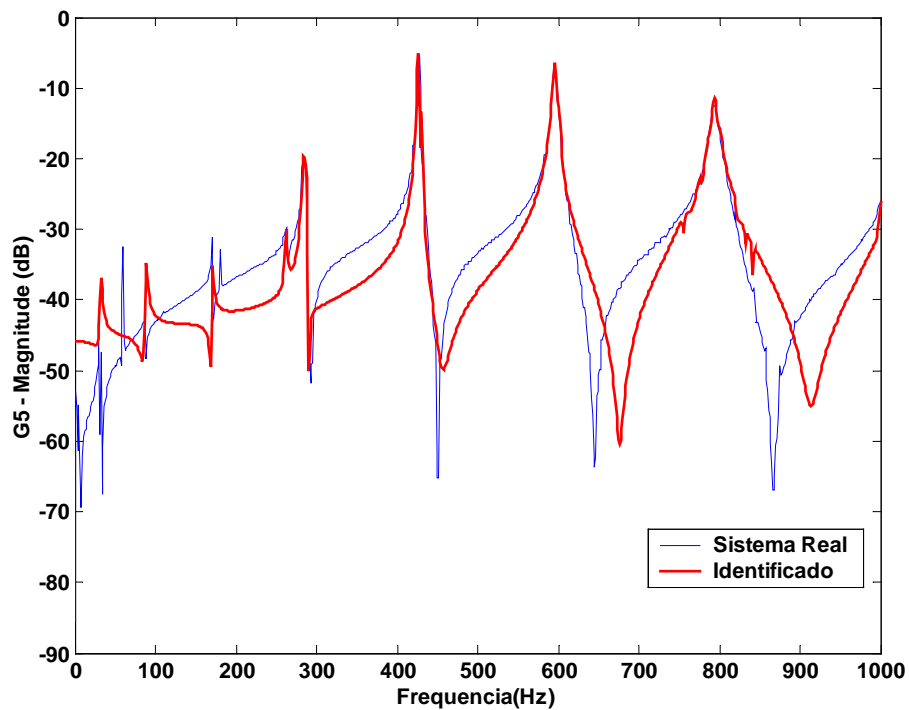


Figura 2.8. FRF para a estrutura excitada com os atuadores PZT e sinal de saída obtido com o sensor PVDF – FRF  $G_5$  (vide tabela 2.1). Unidades: mV/mV.

Tabela 2.2. Freqüências naturais da estrutura (Hz).

<b>Modo</b>	<b>FEM</b>	<b>ERA</b>	<b>Diferença* (%)</b>
<b>1.º</b>	4.9	XXXX	XXXX
<b>2.º</b>	31.0	32.4	4.3
<b>3.º</b>	86.9	88.2	1.5
<b>4.º</b>	170.4	170.6	0.1
<b>5.º</b>	281.6	283.5	0.7
<b>6.º</b>	420.8	425.9	1.2
<b>7.º</b>	587.8	595.8	1.3
<b>8.º</b>	782.8	794.5	1.5

$$*D = |100 - 100.F^{FEM}/F^{ERA}|$$

As diferenças se devem a diversos fatores, mas, acredita-se ser causado pelo desconhecimento do valor exato do módulo de elasticidade, uma vez que o material da viga utilizada não se conhece ao certo. Outro fator a se considerar é relativo as condições de contorno. Mesmo assim os valores estão dentro de margens aceitáveis (o máximo erro foi de 4.3% na 2.º freqüência natural). A tabela 2.3 mostra todas as freqüências obtidas incluindo os modos computacionais adicionados na identificação. O modelo foi identificado com 25 modos, ou seja, 17 modos computacionais e altamente amortecidos. Pela análise qualitativa das FRFs pode-se afirmar com certeza que o sistema real em questão não contém todos estes modos.

O motivo da inclusão destes modos é melhorar a identificação, como já havia sido comentado anteriormente. A inclusão destes modos aumenta o número de estados da realização a ser feita, assim o tamanho da matriz Hankel a ser montada é maior, o que melhora o processo de identificação. Após a identificação das matrizes estes modos podem ser eliminados ou retirados do sistema. Um fator negativo da inclusão destes modos é o tempo para se realizar a decomposição em valores singulares da matriz Hankel, que será bem maior.

Tabela 2.3. Freqüências dos modos computacionais adicionados no processo de identificação.

<b>Modo</b>	<b>Freqüência (Hz)</b>
<b>1.º</b>	<b>32.4</b>
<b>2.º</b>	<b>88.2</b>
<b>3.º</b>	<b>170.6</b>
<b>4.º</b>	<b>262.3</b>

---

<b>5.º</b>	<b>283.5</b>
<b>6.º</b>	287.5
<b>7.º</b>	<b>425.9</b>
<b>8.º</b>	428.8
<b>9.º</b>	430.2
<b>10.º</b>	<b>595.8</b>
<b>11.º</b>	599.3
<b>12.º</b>	602.2
<b>13.º</b>	756.2
<b>14.º</b>	761.2
<b>15.º</b>	775.9
<b>16.º</b>	785.8
<b>17.º</b>	<b>794.5</b>
<b>18.º</b>	798.1
<b>19.º</b>	804.3
<b>20.º</b>	820.9
<b>21.º</b>	832.2
<b>22.º</b>	841.5
<b>23.º</b>	937.0
<b>24.º</b>	994.8
<b>25.º</b>	1000.0

(Valores destacados correspondem aos modos verdadeiros)

### 3. DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

---

Neste capítulo são apresentados os principais fundamentos envolvidos no controle via LMI. O foco neste capítulo é o controle por realimentação de estados, garantindo estabilidade à malha fechada, robustez frente à variações paramétricas da planta, imposição de condições de desempenho e restrições no projeto. Inicialmente é feito um breve histórico do uso de LMI na teoria de controle, na seqüência são apresentadas definições preliminares sobre LMI mostrando os problemas padrões tratados e os tipos de representação de incertezas que podem ser utilizadas. Em seguida são apresentadas considerações sobre estabilidade quadrática e sobre o projeto de controladores robustos com restrições. Uma vez que se optou pelo projeto via realimentação de estados é fundamental o projeto de um observador dinâmico para estimação de estados não medidos diretamente. Assim o projeto de observadores, também utilizando LMI, é apresentado na seqüência. Os efeitos nocivos de “spillover” são abordados em seguida, assim como técnicas para se reduzir estes efeitos.

#### 3.1. Histórico

O uso de LMI em problemas de análise dinâmica começou por volta de 1890 quando Lyapunov publicou seu trabalho, surgindo a Teoria de Lyapunov, (Boyd et al., 1994a). A idéia de seu trabalho foi mostrar que o sistema dinâmico:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.1)$$

é assintoticamente estável, isto é, todas as trajetórias convergem a zero, se e somente se existe uma matriz  $\mathbf{P}$  positiva definida tal que:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < \mathbf{0} \quad (3.2)$$

A inequação acima é conhecida como desigualdade de Lyapunov e é resultado direto do 2.º teorema de Lyapunov, (Ogata, 1997). A eq. (3.2) é uma forma especial de LMI. Lyapunov também mostrou que esta LMI pode ser resolvida analiticamente através de um conjunto de equações lineares equivalentes.

O próximo grande passo ocorreu nos anos 40 quando Lur’e, Postnikov e outros na antiga União Soviética aplicaram o método de Lyapunov para alguns problemas práticos de engenharia de controle, especialmente em problemas de estabilidade de sistemas de controle com não-

---

linearidade no atuador, (Boyd et al., 1994a). Apesar de não resolverem explicitamente na forma de LMI, o critério utilizado tinha a forma de uma desigualdade matricial. Esta desigualdade era reduzida a uma inequação polinomial que podia ser resolvida à “mão” e foi a primeira demonstração de que a teoria de Lyapunov poderia ser utilizada em problemas práticos de engenharia.

Já no início dos anos 60, Yakubovich, Popov, Kalman e outros pesquisadores reduziram a solução das LMIs que surgiram no problema de Lur’e a um critério gráfico simples, chamado atualmente de lema KYP (Kalman-Yakubovich e Popov) ou, também, de *positive real-lemma*. Este lema tem muitas variantes na literatura, as quais podem ser aplicadas a sistemas de ordem elevada, apesar de não serem atraentes em sistemas com não-linearidades. Para Boyd et al. (1994a) a contribuição do lema KYP foi mostrar que certas classes de problemas envolvendo LMI podem ter solução através de métodos gráficos.

O lema KYP e suas extensões foram exaustivamente estudados até a metade dos anos 60 e foram relacionadas a idéias de passividade, ao teorema dos ganhos pequenos e ao controle ótimo quadrático. Em 1970 foi mostrado que as LMIs que apareciam no lema KYP poderiam ser resolvidas não apenas graficamente, mas também pela solução de certas equações algébricas de Riccati, (Boyd et al. 1994a). Neste mesmo período a solução do problema do regulador linear quadrático (LQR), envolvendo a resolução da equação de Riccati, marcou época, sendo utilizada até hoje em problemas de controle ótimo, (Peres, 1997).

Neste estágio a maioria dos problemas com restrições LMI envolviam soluções via métodos analíticos, como método direto para sistemas de ordem pequena, métodos gráficos e soluções de equações de Riccati. Porém a partir da década de 70, constatou-se que as LMI que aparecem na teoria de controle podem ser formuladas como problemas de otimização convexa e solucionadas via algoritmos numéricos. Pyatnitskii e Skorodinskii foram, provavelmente, os primeiros a mostrar isto claramente. Eles reduziram o problema de Lur’e a um problema de otimização convexa envolvendo LMIs, que podia ser solucionado pelo algoritmo do elipsóide. Até onde se sabe, Pyatnitskii e Skorodinskii foram os primeiros a formular a solução de uma LMI por meio de um algoritmo de busca convexa com garantias de se encontrar uma solução (Boyd et al., 1994b).

Dois desenvolvimentos recentes fizeram com que este enfoque ganhasse destaque. O primeiro foi o grande aumento na capacidade dos computadores e o segundo o desenvolvimento de poderosos algoritmos numéricos para otimização convexa, (Boyd et al., 1993). Entre eles pode-se destacar o desenvolvimento de um método de programação linear que resolve problemas descritos na forma de LMIs com convergência polinomial, muito útil na prática, que foi proposto

por Karmarkar em 1984. Em 1988, Nesterov e Nemirovski desenvolveram o método de pontos interiores que se aplicam diretamente nos problemas de programação convexa que envolvem LMIs, (Assunção e Teixeira ,2001), (Boyd et al., 1994a).

Através do método proposto por Nesterov e Nemirovski o enfoque de controle via LMI começou a se tornar popular. Atualmente é possível resolver rapidamente problemas de otimização convexa que não tem solução analítica através de técnicas tradicionais. Além disto, as soluções de muitos problemas de otimização convexa podem ser computadas em tempo computacional relativamente pequeno se comparado às soluções via técnicas convencionais, Boyd et al. (1993). Somado a tudo isto está o fato de inúmeros pacotes computacionais especializados em LMIs serem disponíveis, como o *LMI Control Toolbox* do Matlab® (Gahinet et al., 1995), ou o software *LMISol* de domínio público (Oliveira et al., 1997).

Atualmente, as LMIs estão sendo objeto de estudo de muitas pesquisas por renomados pesquisadores mundiais, tendo sido aplicadas nas mais diversas áreas: controle de sistemas contínuos e discretos no tempo (Ghaoui e Niculescu, 2000), controle ótimo, controle robusto (Van Antwerp e Braatz, 2000), redução de modelos (Assunção, 2000), controle de sistemas não lineares, teoria de filtros robustos, identificação de sistemas, controle com estrutura variável, controle usando lógica fuzzy, detecção, localização e quantificação de falhas estruturais em sistemas mecânicos, (Abdalla et al., 1999) e (Abdalla et al., 2000).

### 3.2. Definições e Conceitos Básicos

Uma LMI é definida como sendo uma desigualdade matricial da forma, (Boyd et al., 1993):

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \mathbf{F}_i > \mathbf{0} \quad (3.3)$$

sendo  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$  a variável, e  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  dados. O conjunto  $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{F}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}\}$  é convexo e positivo definido. A LMI da ineq. (3.3) é equivalente a um conjunto de  $n$  inequações polinomiais em  $\mathbf{x}$ .

Múltiplas LMIs,  $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \dots, \mathbf{F}_n(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ , podem ser expressas como uma LMI simples através de  $\text{diag}(\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \dots, \mathbf{F}_n(\mathbf{x}) > \mathbf{0})$ . Além disto nenhuma distinção é feita entre o conjunto de LMIs e uma LMI simples, ou seja, as LMIs  $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \dots, \mathbf{F}_n(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$  são iguais a LMI  $\text{diag}(\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \dots, \mathbf{F}_n(\mathbf{x}) > \mathbf{0})$ .

Um resultado importante em LMI é que uma classe de desigualdades não-lineares podem ser convertidas na forma de LMI através do uso do complemento de Schur. A idéia básica é a seguinte: Seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}^T(\mathbf{x}) & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (3.4)$$

sendo  $\mathbf{Q}(\mathbf{x})=\mathbf{Q}^T(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{R}(\mathbf{x})=\mathbf{R}^T(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  são dependentes afins de  $\mathbf{x}$ . A inequação (3.4) é equivalente a desigualdade matricial não-linear:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}^T(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \quad (3.5)$$

Uma demonstração do complemento de Schur pode ser encontrada em Van Antwerp e Braatz, (2000). Existem muitos problemas convexos e quasi-convexos comuns que aparecem na teoria de controle. Na seqüência são apresentados os mais comuns.

### 3.2.1. Problema de Factibilidade de uma LMI (LMIP)

Dada uma LMI  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ , o problema de factibilidade de uma LMI (LMIP) corresponde a encontrar  $\mathbf{x}^{\text{fact}}$  tal que a desigualdade  $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{\text{fact}}) > \mathbf{0}$  é verdadeira, ou determinar que a LMI é infactível. LMIP é um problema de factibilidade convexa. O problema de estabilidade de Lyapunov, mostrado na inequação (3.2) é um exemplo de um LMIP.

### 3.2.2. Problema de Autovalor (EVP)

O problema de autovalor (EVP), neste caso, se restringe a minimizar o máximo autovalor de uma matriz, sujeito a LMI, (Boyd et al., 1993):

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \lambda \\ & \text{sujeito à } \lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \\ & \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.6)$$

sendo  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  matrizes simétricas que dependem da variável de otimização  $\mathbf{x}$ . EVP é um problema de otimização convexa e pode aparecer em controle com problemas de minimização de funcionais.

### 3.2.3. Problema de Autovalor Generalizado (GEVP)

O problema de autovalor generalizado (GEVP), neste caso, se restringe a minimizar o máximo autovalor generalizado de um par de matrizes dependentes de uma variável e sujeitos a restrições LMI. A forma geral de um GEVP é:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \lambda \\ & \text{sujeito à } \lambda \mathbf{B}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \\ & \mathbf{B}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \\ & \mathbf{C}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.7}$$

sendo  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  dependentes de  $\mathbf{x}$ . GEVP é um problema quasi-convexo. Quando estas matrizes são todas diagonais, este problema se reduz a um problema de programação linear fracional geral. Muitas funções quasi-convexas não-lineares podem ser representadas na forma de um GEVP.

## 3.3. Sistemas Incertos

Todo projeto de controle é baseado no uso de um modelo do sistema dinâmico, que procura representar o sistema real. Entretanto, este modelo nominal, que em muitos casos é descrito como um sistema linear e invariante no tempo, contém incertezas significativas em relação ao modelo real do sistema. Isto ocorre, principalmente, devido a incertezas nos parâmetros, que são originadas pela imprecisão dos parâmetros físicos ou devidas as variações destes parâmetros durante a operação, e incertezas dinâmicas, que consistem em componentes dinâmicos omitidos no modelo linear que causam variações no comportamento dinâmico durante a operação. As incertezas dinâmicas podem ser originadas nos modos flexíveis à altas frequências, nas não-linearidades devido às entradas excessivas e variações lentas no tempo. Em geral as incertezas são divididas em duas classes: incertezas estruturadas e não estruturadas.

### 3.3.1. Incertezas Estruturadas

Incetezas paramétricas são geralmente referenciadas como estruturadas e a caracterização destas incertezas pode ser feita através de modelos politópicos, modelos a parâmetro-dependentes afim e modelos com matrizes de incerteza. A caracterização destas incertezas utiliza inclusões diferenciais lineares (LDI).

Considerando um sistema linear variante no tempo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}_1(t)\mathbf{w} + \mathbf{B}_2(t)\mathbf{u}, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}_1(t)\mathbf{w} + \mathbf{D}_2(t)\mathbf{u}\end{aligned}\quad (3.8)$$

sendo  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  o vetor de estados e todas as matrizes com dimensão apropriada. Uma LDI é dada por, (Oliveira e Arrifano, 2001):

$$\Omega \in \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & \mathbf{B}_1(t) & \mathbf{B}_2(t) \\ \mathbf{C}(t) & \mathbf{D}_1(t) & \mathbf{D}_2(t) \end{bmatrix} \right\} \quad (3.9)$$

sendo que  $\Omega$  pode ter formas especiais, isto é, pode ser um politopo, um sistema determinado, etc. Uma LDI pode ser usada para descrever uma família de sistemas lineares variantes no tempo. Na literatura existem algumas famílias específicas de LDI e as principais são mostradas na seqüência.

Considerando agora um sistema linear e invariante no tempo (LTI):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}_1\mathbf{w} + \mathbf{D}_2\mathbf{u}\end{aligned}\quad (3.10)$$

sendo  $\mathbf{A}$  a matriz dinâmica,  $\mathbf{B}_1$  a matriz de entrada de distúrbio,  $\mathbf{B}_2$  a matriz de entrada de controle,  $\mathbf{C}$  é a matriz de saída,  $\mathbf{D}_1$  e  $\mathbf{D}_2$  são matrizes de transmissão direta,  $\mathbf{x}$  o vetor de estados,  $\mathbf{w}$  o vetor de distúrbio e  $\mathbf{u}$  o sinal de controle. Todas as matrizes e vetores têm dimensões apropriadas. Este sistema pode ser interpretado como uma LDI, assim:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C} & \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.11)$$

Quando  $\Omega$  é um politopo, a LDI é chamada de LDI politópica ou PLDI. Muitos dos resultados que aparecem em LMI podem ser descritos como uma combinação convexa dos sistemas de vértices de politopos:

$$\text{Co}\{\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_v\} \quad (3.12)$$

sendo  $v$  o número de vértices do politopo e:

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_{1,i} & \mathbf{B}_{2,i} \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_{1,i} & \mathbf{D}_{2,i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, v \quad (3.13)$$

sendo as matrizes da eq. (3.13) conhecidas.

Outros casos especiais de LDI surgem em problemas de controle robusto, como exemplo, modelos a parâmetro-dependentes afim e modelos com matrizes de incerteza, mas fogem as metas deste trabalho. Uma descrição destes sistemas incertos pode ser encontrada em Oliveira e Arrifano, (2001).

Neste trabalho, especial destaque é dado às incertezas politópicas. Caso o sistema possua incertezas politópicas, o projeto de controladores robustos através de LMIs pode ser realizado utilizando o conceito de estabilidade quadrática, (Assunção e Teixeira, 2001).

### 3.3.2. Incertezas Não Estruturadas

Incertezas não estruturadas são perturbações descritas em termos de suas amplitudes, e podem ser descritas como modelos de incertezas aditivas e multiplicativas, além de LDIs limitadas por norma (Oliveira e Arrifano, 2001). Incertezas deste tipo não podem ser descritas como função de um parâmetro específico. Em geral estão relacionadas à dinâmica não modelada (sobretudo em altas frequências devido ao truncamento modal) e não-linearidades do sistema. Estes tipos de incertezas são especificados como limites para a FRF do sistema, (Valer, 1999).

Os tipos de incertezas não estruturadas mais comuns são: o modelo de incerteza aditiva, o modelo de incerteza multiplicativa na saída e o modelo de incerteza multiplicativa na entrada. O modelo de incerteza aditiva é dado por:

$$G(s) = G_n(s) + \Delta_a(s) \quad (3.14)$$

sendo  $G(s)$  a função de transferência real,  $G_n(s)$  a função de transferência nominal e  $\Delta_a(s)$  representando a incerteza aditiva. Moreira (1998) utiliza, no projeto de controlador  $H_\infty$  robusto, este modelo de incerteza. A representação deste sistema é mostrada na figura (3.1).

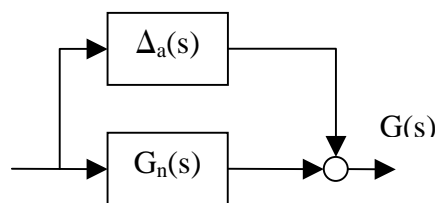


Figura 3.1. Incerteza aditiva.

O modelo de incerteza multiplicativa na saída é dado por:

$$G(s) = (I + \Delta_o(s))G_n(s) \quad (3.15)$$

sendo  $I$  a matriz identidade e  $\Delta_o(s)$  representando a incerteza multiplicativa na saída. A representação deste sistema é mostrada na figura (3.2).

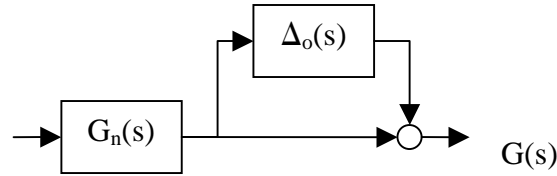


Figura 3.2. Incerteza multiplicativa na saída.

Já o modelo de incerteza multiplicativa na entrada é dado por:

$$G(s) = G_n(s)(I + \Delta_i(s)) \quad (3.16)$$

sendo  $\Delta_i(s)$  a representação da incerteza multiplicativa na entrada. A representação deste sistema é mostrada na figura (3.3).

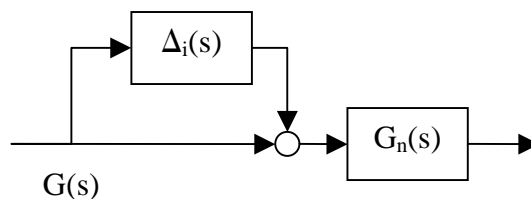


Figura 3.3. Incerteza multiplicativa na entrada.

Outra classe especial de LDI são as LDIs limitadas por normas (NLDIs). Limitantes de normas especificam a quantidade de incerteza em termos de ganho RMS. Ganho RMS ou ganho  $L_2$  é definido como a pior razão entre as entradas e saídas do sistema:

$$\|\Delta\|_{\infty}^2 = \sup_{\substack{w \neq 0 \\ w \in L_2}} \frac{\|\Delta w\|_{L_2}}{\|w\|_{L_2}} \quad (3.17)$$

sendo  $\|w\|_{L_2}$  a energia do sinal de entrada. Além disto limitantes de normas também são úteis para quantificar incertezas paramétricas dependentes de frequência. Maiores detalhes de NLDIs são apresentadas em Boyd et al. (1994b).

### 3.4. Estabilidade Quadrática

Um sistema dinâmico descrito por uma LDI:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{A}(t) \in \Omega \quad (3.18)$$

é assintoticamente estável se e somente se, todas as trajetórias do sistema convergem para zero em  $t \rightarrow \infty$ . Uma condição suficiente para isto é a existência de uma função na forma quadrática:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (3.19)$$

sendo  $\mathbf{P}$  uma matriz positiva definida, ou seja,  $\mathbf{P} > \mathbf{0}$ . O sistema é assintoticamente estável se a eq. (3.18) decai para todas as trajetórias não-nulas. Se existe uma matriz  $\mathbf{P}$  que satisfaça estas condições o sistema da eq. (3.18) é dito ser *assintoticamente estável*, ou seja, todas as trajetórias corrijam à zero. Estas condições vêm diretamente do teorema principal de Lyapunov, que afirma que para um sistema ser estável a função  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ , conhecida como função de Lyapunov, deve ser positiva e a derivada primeira de  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  no tempo deve ser negativa. Assim uma condição necessária e suficiente para a LDI da eq. (3.18) ser estável é solucionar o seguinte LMIP:

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < \mathbf{0} \quad \text{para todo } \mathbf{A} \in \Omega \quad (3.20)$$

Assumindo uma nova variável  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ , pode-se representar o dual desta equação que é uma condição equivalente para a estabilidade quadrática:

$$\mathbf{Q} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{Q} < \mathbf{0} \quad \text{para todo } \mathbf{A} \in \Omega \quad (3.21)$$

As condições para estabilidade quadrática podem ser estendida para qualquer família de LDIs, como sistemas LTIs, PLDIs ou NLDIs. Assim:

**Sistema LTI:** A condição (3.20) torna-se:

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < \mathbf{0} \quad (3.22)$$

checar a estabilidade de um sistema LTI é solucionar este LMIP na variável  $\mathbf{P}$ .

**Sistema PLDI:** A condição (3.20) é equivalente a:

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i < \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, v \quad (3.23)$$

sendo  $v$  o número de vértices do politopo.

A condição de estabilidade para um sistema NLDI pode ser vista em detalhes em Boyd et al. (1994b) e não é apresentada neste trabalho por não ter sido utilizada nos exemplos realizados. No item 3.5.1 deste trabalho estas condições são escritas para sistemas considerando realimentação de estados, onde a meta é encontrar um ganho de realimentação que garanta que o sistema seja quadraticamente estabilizável à malha fechada.

### 3.5. Realimentação de Estados via LMI com Restrições de Projeto

Assumindo controle por realimentação de estados para a LTI descrita pela eq. (3.10), uma lei de controle linear pode ser dada por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_c \mathbf{x} \quad (3.24)$$

sendo  $\mathbf{K}_c$  a matriz de ganho de realimentação a ser determinada. Considera-se também que  $\mathbf{D}_1=0$  e  $\mathbf{D}=\mathbf{D}_2$ . As matrizes à malha fechada são dadas por:

$$\mathbf{A}_f = \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_c \quad (3.25)$$

$$\mathbf{C}_f = \mathbf{C} + \mathbf{D} \mathbf{K}_c \quad (3.26)$$

O interesse é encontrar o conjunto de ganhos estabilizantes definido por:

$$\mathbf{K}_c = \{ \mathbf{K}_c : \mathbf{A}_f \text{ é assint. estável} \} \quad (3.27)$$

ou seja, todos os autovalores de  $\mathbf{A}_f$  têm parte real negativa. Este cálculo deve considerar restrições que atendam algumas especificações de desempenho e robustez. Entre elas estão:

- Estabilidade quadrática para o sistema à malha fechada;
- Limitação de sinais de saída;
- Limitação de sinais de entrada;
- Taxa de decaimento.

Na seqüência são apresentadas cada uma das LMIs que descrevem estas restrições. Somente LMIs para sistemas LTIs e sistemas PLDIs são tratadas neste trabalho. Porém para

sistemas NLDIs todas as LMIs correspondentes para estas restrições podem ser encontradas em Boyd et al. (1994b).

### 3.5.1. Estabilidade Quadrática para LDIs à Malha Fechada

O sistema da equação (3.8) é quadraticamente estabilizável via realimentação linear de estados se e somente se existe uma matriz de ganho estático  $\mathbf{K}_c$  tal que o sistema à malha fechada, descrito pela LDI:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}_2(t)\mathbf{K}_c)\mathbf{x} + \mathbf{B}_1(t)\mathbf{w} \\ \mathbf{y} &= (\mathbf{C}(t) + \mathbf{D}_2(t)\mathbf{K}_c)\mathbf{x} + \mathbf{D}_1(t)\mathbf{w}\end{aligned}\quad (3.28)$$

seja estável. Este problema pode ser escrito como um LMIP, como já foi discutido anteriormente.

**Sistema LTI:** O sistema LTI da equação (3.10) sendo realimentado por uma lei de controle linear dada pela equação (3.24) é estável se e somente se:

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}_c)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}_c) < \mathbf{0} \quad (3.29)$$

ou na forma dual:

$$\mathbf{Q} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}_c)^T + (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}_c)\mathbf{Q} < \mathbf{0} \quad (3.30)$$

As variáveis deste problema são as matrizes  $\mathbf{P}$  ou  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{K}_c$ . Como existe multiplicação entre elas, as restrições das inequações (3.29) e (3.30) não são convexas nas variáveis de interesse. Porém definindo a variável  $\mathbf{Y} = \mathbf{K}_c\mathbf{Q}$ , sendo  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ , e substituindo na inequação (3.30) o problema se torna convexo:

$$\mathbf{Q} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}_2\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}_2^T < \mathbf{0} \quad (3.31)$$

que é uma LMI em  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Q}$ . O ganho de realimentação é determinado por:

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{Y}\mathbf{Q}^{-1} \quad (3.32)$$

sendo  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Q}$  soluções do LMIP da inequação (3.31).

**Sistema PLDI:** Considerando a LDI da equação (3.28), com:

$$[\mathbf{A}(t) \quad \mathbf{B}(t)] \in \text{Co} \left\{ [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{B}_{2,1}], \dots, [\mathbf{A}_v \quad \mathbf{B}_{2,v}] \right\} \quad (3.33)$$

sendo  $v$  o número de vértices do polítopo. A LDI da equação (3.28) é quadraticamente estável se e somente se existe uma matriz  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{Y}$  tal que o seguinte LMIP seja factível:

$$\mathbf{Q} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{B}_{2,i} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_{2,i}^T < \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, v \quad (3.34)$$

O ganho de realimentação é dado pela equação (3.32) com  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Q}$  soluções do LMIP da inequação (3.34).

### 3.5.2. Limitação de Sinais de Saída

Assume-se que é desejável limitar a energia de saída e que uma matriz  $\mathbf{Q}$  satisfaça as condições de estabilidade quadrática. Denotando  $\varepsilon$  como sendo um elipsóide centrado na origem, (Folcher e Ghaoui, 1994):

$$\varepsilon = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x} \leq 1 \right\} \quad (3.35)$$

Este elipsóide é dito ser invariante para a LDI da equação (3.28) se para toda a trajetória que começar dentro deste elipsóide, todos os estados permanecerem dentro dele, ou seja:

$$\mathbf{x}(0) \in \varepsilon \Rightarrow \forall t > 0, \quad \mathbf{x}(t) \in \varepsilon \quad (3.36)$$

sendo  $\mathbf{x}(0)$  o estado inicial conhecido. A máxima energia de saída, dado um certo estado inicial, é dada por:

$$\max \left\{ \int_0^{\infty} \mathbf{y}^T \mathbf{y} dt \mid \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}(t) \mathbf{x} \right\}, \quad \text{sendo} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) \\ \mathbf{C}(t) \end{bmatrix} \in \Omega \quad (3.37)$$

Supondo que exista uma função de Lyapunov  $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$  tal que:

$$\mathbf{Q} > \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) \leq -\mathbf{y}^T \mathbf{y} \quad (3.38)$$

com  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ . A condição dada pela inequação (3.38) é equivalente a seguinte LMI em  $\mathbf{Q}$  para um sistema LTI:

$$\mathbf{Q} > \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T & \mathbf{Q}\mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}\mathbf{Q} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \quad (3.39)$$

Se  $\mathbf{Q}$  satisfaz a inequação (3.39) então o limite superior da energia de saída dado pela equação (3.37) é dado por  $\mathbf{x}(0)^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}(0)$ . É possível concluir da inequação (3.39) que para um dado ganho de realimentação a energia de saída é menor do que um valor específico,  $\beta$ . Assume-se que toda a condição inicial é dada. Para um sistema LTI à malha fechada tem-se o seguinte LMIP para que isto seja verdadeiro:

$$\begin{aligned} & \mathbf{Q} > \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_0^T & \beta \end{bmatrix} > \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}_2 \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_2^T & (\mathbf{Q}\mathbf{C} + \mathbf{D}_2 \mathbf{Y})^T \\ \mathbf{C}\mathbf{Q} + \mathbf{D}_2 \mathbf{Y} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.40)$$

sendo  $\mathbf{Y} = \mathbf{K}_c \mathbf{Q}$  e o ganho de realimentação dado pela equação (3.32) com  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Q}$  soluções do LMIP dado pelo LMIP (3.40). A extensão para sistema PLDI é imediata e é dada em detalhes em Boyd et al. (1994b).

### 3.5.3. Limitação de Sinais de Entrada (Sinal de Controle)

Quando uma condição inicial é conhecida é também possível encontrar um limitante superior em norma para o sinal de controle dado pela equação (3.24). Dado  $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$  e  $\mathbf{Y}$  que satisfaçam as condições de estabilidade quadrática (tanto para um sistema LTI, PLDI ou NLDI) e que seja limitado pelo elipsóide definido na equação (3.35), conseqüentemente, (Boyd et al., 1994b):

$$\max_{t \geq 0} \|\mathbf{u}\| = \max_{t \geq 0} \|\mathbf{Y}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}\| \leq \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}} \|\mathbf{Y}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}\| = \lambda_{\max} \left( \mathbf{Q}^{-1/2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \mathbf{Q}^{-1/2} \right) \quad (3.41)$$

sendo  $\lambda_{\max}$  o máximo autovalor. Além disto, a restrição  $\|\mathbf{u}\| \leq \mu$  é imposta para todo tempo  $t \geq 0$  se a LMI seguinte é factível:

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Y}^T \\ \mathbf{Y} & \mu^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (3.42)$$

### 3.5.4. Imposição de Taxa de Decaimento

A taxa de decaimento (ou maior expoente de Lyapunov) de uma LDI descrita pela equação (3.28) é definida como o maior valor de  $\alpha$  tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \|\mathbf{x}(t)\| = \mathbf{0} \quad (3.43)$$

para toda trajetória de  $\mathbf{x}$ . De maneira equivalente a taxa de decaimento é o máximo de:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{-\log \|\mathbf{x}(t)\|}{t} \right) \quad (3.44)$$

sobre todas as trajetórias não-nulas, sendo inf o símbolo para valores inferiores (estabilidade corresponde a taxa de decaimento positiva).

Pode-se usar a função quadrática de Lyapunov para estabelecer um limite inferior para a taxa de decaimento da LDI da equação (3.28). Caso:

$$\frac{d\mathbf{V}(\mathbf{x})}{dt} \leq -2\alpha\mathbf{V}(\mathbf{x}) \quad (3.45)$$

para todas as trajetórias então:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \mathbf{V}(\mathbf{x}(0))e^{-2\alpha t} \quad (3.46)$$

o que significa que para todas as trajetórias a taxa de decaimento da LDI da equação (3.28) é no mínimo  $\alpha$ .

Para um sistema LTI à malha fechada a condição da inequação (3.45) para todas as trajetórias é equivalente à:

$$\mathbf{Q} > \mathbf{0}, \quad 2\alpha\mathbf{Q} + \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}_2\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}_2^T < \mathbf{0} \quad (3.47)$$

que é uma LMI em  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Q}$ . O ganho de realimentação é determinado pela equação (3.32) sendo  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Q}$  soluções do LMIP da inequação (3.47). Mais uma vez a extensão para sistemas PLDIs é imediata.

Uma taxa de decaimento ótima pode ser encontrada solucionando um GEVP. Em resumo o projeto do controlador para garantir estabilidade quadrática, limite de sinal de entrada e saída e taxa de decaimento ótima é o resultado do problema de otimização convexa definido nas inequações (3.48), considerando um sistema PLDI. Neste problema se considera  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Y}$  e  $\alpha$

incógnitas, sendo  $\alpha$  a variável de otimização. Os valores dos limites de entrada,  $\mu$ , e de saída,  $\beta$ , são fixados no momento do projeto, (Silva et al., 2004d).

$$\begin{aligned}
 & \underset{\alpha^*}{\text{minimize}} \alpha^* \\
 & \underset{\mathbf{Q}, \mathbf{Y}}{\text{subject to}} \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{B}_{2,i} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_{2,i}^T & (\mathbf{Q} \mathbf{C}_i + \mathbf{D}_{2,i} \mathbf{Y})^T \\ \mathbf{C}_i \mathbf{Q} + \mathbf{D}_{2,i} \mathbf{Y} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(0)^T & \beta \end{bmatrix} > \mathbf{0} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Y}^T \\ \mathbf{Y} & \mu^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \\
 & \mathbf{Q} > \mathbf{0} \\
 & \mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{B}_{2,i} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_{2,i}^T < 2\alpha^* \mathbf{Q}
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

sendo  $i=1,2,\dots,v$  e  $v$  o número de vértices de um polítopo e  $\alpha^* = -\alpha$ . Para solucionar este problema pode-se utilizar o método dos pontos interiores, (Gahinet et al., 1995). No caso, para cada condição inicial, o sinal de entrada,  $\mathbf{u}$ , e o sinal de saída,  $\mathbf{y}$ , têm-se a garantia:

$$\forall t \geq 0, \begin{cases} \|\mathbf{u}\| < \mu e^{-\alpha t} \\ \|\mathbf{y}\| < \beta e^{-\alpha t} \end{cases} \tag{3.49}$$

caso o problema de otimização definido em (3.48) tenha solução.

O ganho de realimentação é dado pela equação (3.32) com  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Q}$  soluções do GEVP de (3.48). Pode-se também solucionar o problema de factibilidade, considerando que a taxa de decaimento  $\alpha$  é conhecida.

### 3.6. Observador de Estados via LMI

Geralmente, nem todos os estados estão disponíveis para realimentação direta, pois o número de sensores disponíveis é limitado, ou existem variáveis de estado com difícil acesso, ou até mesmo não medidas diretamente por não terem um significado físico. Nestes casos é essencial o projeto de um observador de estados. Neste trabalho é considerado o projeto de um observador determinístico para estimar os estados modais não avaliados, (Silva et al., 2004b). Além disto apenas um número limitado de modos precisam ser controlados, assim:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_r \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r \end{bmatrix} \begin{cases} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_r \end{cases} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{2c}(t) \\ \mathbf{B}_{2r} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_c(t) & \mathbf{C}_r \end{bmatrix} \begin{cases} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_r \end{cases} + \mathbf{D}_2 \mathbf{u}$$

sendo  $\mathbf{x}_c$  os estados correspondentes aos modos de baixa frequência (modos de interesse) e  $\mathbf{x}_r$  denotando os modos residuais. Assume-se variação paramétrica do tipo politópica apenas na região dos modos de baixa frequência:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A}_c(t) \quad \mathbf{B}_{2c}(t) \quad \mathbf{C}_c(t)] \in \Omega \\ \Omega = \text{Co} \{ & [\mathbf{A}_{c,i} \quad \mathbf{B}_{2c,i} \quad \mathbf{C}_{c,i}], \dots, [\mathbf{A}_{c,v} \quad \mathbf{B}_{2c,v} \quad \mathbf{C}_{c,v}] \} \end{aligned} \quad (3.51)$$

sendo  $i=1, \dots, v$  e  $v$  o número de vértices do politopo. Apenas com o propósito de simplificação, irá se considerar, daqui para frente, apenas variação paramétrica na matriz dinâmica, assim  $\Omega \in \mathbf{A}(t)$ .

A lei de controle linear será dada por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_c \bar{\mathbf{x}}_c \quad (3.52)$$

sendo  $\bar{\mathbf{x}}_c$  o vetor estimado de estados modais a ser controlado. O problema de otimização escrito pelas inequações (3.48) pode ser reescrito para sintetizar um controlador apenas para os modos de interesse, neste caso se considera apenas o problema de factibilidade:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{c,i} \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}_{c,i}^T + \mathbf{B}_{2c} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_{2c}^T & (\mathbf{C}_c \mathbf{Q} + \mathbf{D}_2 \mathbf{Y})^T \\ \mathbf{C}_c \mathbf{Q} + \mathbf{D}_2 \mathbf{Y} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{x}_c(0) \\ \mathbf{x}_c^T(0) & \beta \end{bmatrix} > \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}_c(0)^T \\ \mathbf{x}_c(0) & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Y}^T \\ \mathbf{Y} & \mu^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \\ & \mathbf{Q} > \mathbf{0} \\ & 2\alpha \mathbf{Q} + \mathbf{A}_{c,i} \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}_{c,i}^T + \mathbf{B}_{2c} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_{2c}^T < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.53)$$

O ganho de realimentação é dado pela equação (3.32) com  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Q}$  soluções do LMIP da inequação (3.53).

Pode-se escrever a equação linear de um observador modal, (Meirovitch, 1990), considerando um sistema LTI:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_c = \mathbf{A}_c \bar{\mathbf{x}}_c + \mathbf{B}_{2c} \mathbf{K}_c \bar{\mathbf{x}}_c + \mathbf{K}_e (\mathbf{C}_c \bar{\mathbf{x}}_c + \mathbf{D}_2 \mathbf{K}_c \bar{\mathbf{x}}_c - \mathbf{y}) \quad (3.54)$$

sendo  $\mathbf{A}_c$  a matriz dinâmica na condição nominal e  $\mathbf{K}_e$  a matriz de ganho do observador que pode ser obtida por diferentes técnicas. É possível encontrar um ganho para o observador através da solução do seguinte LMIP, (Boyd et al., 1994b):

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}, \quad 2\gamma \mathbf{P} + \mathbf{A}_c^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_c + \mathbf{W} \mathbf{C}_c + \mathbf{C}_c^T \mathbf{W}^T < \mathbf{0} \quad (3.55)$$

sendo  $\gamma$  a taxa de decaimento imposta ao observador, com  $\gamma \gg \alpha^*$ , o que garante que o erro entre os estados estimados e reais convirja a zero o mais rápido possível. Para toda matriz  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{W}$  satisfazendo a LMI da inequação (3.55) corresponde a um observador estável. A matriz de ganho do observador é dada por:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{W} \quad (3.56)$$

sendo  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{W}$  soluções do LMIP da inequação (3.55).

### 3.7. “Spillover” de Controle e de Observação

Os sinais dos sensores incluem contribuições dos modos a serem controlados e, também, dos modos residuais, portanto o vetor de saída é dado por (Meirovitch, 1990):

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{D}_2 \mathbf{u} \quad (3.57)$$

Agora substituindo a eq. (3.57) na eq. (3.54) obtém-se:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_c = \mathbf{A}_c \bar{\mathbf{x}}_c + \mathbf{B}_{2c} \mathbf{K}_c \bar{\mathbf{x}}_c + \mathbf{K}_e \mathbf{C}_c (\bar{\mathbf{x}}_c - \mathbf{x}_c) - \mathbf{K}_e \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r \quad (3.58)$$

Considerando um sistema nos modos de baixa frequência e realimentando o sistema da eq. (3.50) tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_{2c} \mathbf{K}_c \bar{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{B}_{2r} \mathbf{K}_c \bar{\mathbf{x}}_c \end{aligned} \quad (3.59)$$

Neste ponto, subtraindo as equações 3.58 e 3.59, pode ser definido o vetor de erro:

$$\dot{\mathbf{e}}_c = (\mathbf{A}_c + \mathbf{K}_e \mathbf{C}_c) \mathbf{e}_c - \mathbf{K}_e \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r \quad \text{sendo} \quad \mathbf{e}_c = \bar{\mathbf{x}}_c - \mathbf{x}_c \quad (3.60)$$

Estas equações podem ser reescritas em uma forma matricial descrita em detalhes em Meirovitch (1990). Ressalta-se que em Meirovitch (1990) é considerado realimentação negativa (diferente da realimentação adotada neste trabalho), assim os sinais do sistema abaixo são contrários do encontrado no livro de Meirovitch (1990):

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c + \mathbf{B}_{2c} \mathbf{K}_c & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{2c} \mathbf{K}_c \\ \mathbf{B}_{2r} \mathbf{K}_c & \mathbf{A}_r & \mathbf{B}_{2r} \mathbf{K}_c \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_e \mathbf{C}_r & \mathbf{A}_c(t) + \mathbf{K}_e \mathbf{C}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_r \\ \mathbf{e}_c \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

O termo  $\mathbf{B}_{2r} \mathbf{K}_c$  é responsável pela excitação dos modos residuais pelo sinal de controle e é conhecido como “spillover” de controle. Este termo não afeta os autovalores do sistema à malha fechada, portanto não pode desestabilizar o sistema. No entanto, este termo pode causar alguma degradação no desempenho.

Por outro lado o termo  $-\mathbf{K}_e \mathbf{C}_r$  pode produzir instabilidade nos modos residuais. Este efeito é conhecido como “spillover” de observação, que é a perturbação provocada pela dinâmica residual no sinal medido. Porém, um amortecimento modal pequeno, inerente na estrutura, é geralmente suficiente para contornar o efeito de “spillover” de observação, (Meirovitch, 1990). Outro efeito é o “spillover” dinâmico, que é provocado pelo acoplamento entre os modos nominais e residuais. Em geral, o problema de controle estrutural não apresenta “spillover dinâmico”, uma vez que a representação da matriz dinâmica é do tipo bloco diagonal.

Existem na literatura dezenas de trabalhos que descrevem e mostram maneiras de se diminuir estes efeitos indesejáveis em sistemas de controle estrutural. Charon (1997) discutiu em grandes detalhes duas formas de se diminuir os efeitos “spillover”. A primeira é utilizando como observador de estados um filtro de Kalman. A idéia é considerar a influência da dinâmica dos modos residuais na medida do sensor como um ruído. Isto pode ser feito aumentando-se a variância do ruído no sensor, que é utilizada para se calcular o ganho do observador. Charon (1997) concluiu que isto implica em uma perda na confiança das medidas do sensor. Uma vez, que a matriz de ganho do controlador permanece inalterada (seu cálculo não depende deste ruído no sensor) o desempenho do sistema controlado irá diminuir. Silva e Lopes Jr. (2004a) aplicam esta técnica para reduzir “spillover” no controle de vibração em uma viga biengastada e Carvalho et al. (2004) no controle de uma estrutura tipo treliça com PZT stacks.

A segunda forma é bem mais popular e consiste em aumentar a ordem do observador mantendo fixa a ordem do controlador. A estimação dos estados pode ser melhorada

considerando um número maior de modos no observador. Esta alternativa é interessante, pois se pode considerar modos observáveis, mas não controlados. Porém nada pode ser dito sobre a evolução dos pólos dos modos não observados. Lewis (2000) também utiliza esta segunda estratégia para diminuir os efeito de “spillover” no controle de vibrações de um toróide com sensores e atuadores piezelétricos.

---

## 4. CONTROLE ROBUSTO $H_\infty$

---

Existem inúmeras estratégias de controle que podem ser utilizadas em problemas de controle robusto de estruturas mecânicas. Neste tópico se destacam a técnica LQG aliada com a metodologia de recuperação da função de transferência de malha (LTR), o controle  $H_2$ , que nada mais é do que uma generalização do controle LQG e o controle  $H_\infty$ . No controle LQG se assume que o sinal de distúrbio, que pode ser uma entrada exógena qualquer, está co-localizado com a entrada de controle, enquanto a metodologia  $H_2$  considera uma generalização para situações onde este distúrbio não é co-localizado.

A escolha de qual metodologia se escolher está relacionada principalmente as características dinâmicas do sistema em questão. Por exemplo, a metodologia LQG/LTR exige que a planta seja de fase mínima, ou seja, os zeros da planta devem ter parte real negativa, e o número de sensores deve ser sempre maior ou igual ao número de atuadores, (Cruz, 1996). Tanto a metodologia LQG/LTR quanto o controle  $H_2$  são indicados para os casos de se controlar sistemas com sinais exógenos com densidade espectral fixa. O projeto tem como meta minimizar a norma  $H_2$  do sistema a malha fechada, ou seja, minimizar a energia do sinal de saída quando a entrada é um impulso unitário, em outras palavras, diminuir a área abaixo da FRF.

Já o controle  $H_\infty$  tem como propósito minimizar os efeitos das entradas exógenas,  $\mathbf{w}$ , no sinal das saídas reguladas,  $\mathbf{z}$ , assim como o controle  $H_2$ . No entanto, esta minimização é feita em termos da norma infinita do sistema. O vetor de entradas exógenas  $\mathbf{w}$  pode incluir ruídos de alta frequência provenientes dos sensores; entradas perturbantes, como rajadas de ventos, sinais impulsivos, etc e sinais de referência, no caso de problemas de rastreamento. O vetor de saídas reguladas  $\mathbf{z}$  inclui, geralmente, os sinais de erro, limitação do sinal de controle, etc. Esta minimização é feita em termos da norma infinita da função de transferência de  $\mathbf{w}$  para  $\mathbf{z}$  e a meta é encontrar uma função de transferência para o controlador que minimize esta norma (problema de desempenho) e ainda garanta especificação de robustez (problema de robustez). Apesar da maioria das técnicas modernas utilizarem especificações no domínio do tempo, as especificações utilizando a técnica de controle  $H_\infty$  são mais facilmente escritas no domínio da frequência, em termos de filtros de projeto.

Em ambas as metodologias citadas acima, existem técnicas de projeto via realimentação de estados ou de saídas. No caso de projeto por realimentação de estados é necessário, na maioria das aplicações práticas, o projeto de um estimador dos estados desconhecidos, normalmente com características estocásticas (Filtro de Kalman) e também atendendo requisitos de desempenho e

---

robustez. Assim a metodologia de controle por realimentação da saída é uma boa alternativa para se evitar o projeto de um controlador e um observador, ambos sintetizados separadamente (devido ao princípio da separação). Ressalta-se que o projeto de controle via realimentação de estados estimados por um observador é um caso especial de controle por realimentação dinâmica da saída da planta, Juang e Phan (2001). Neste sentido, o presente capítulo trata do controle  $H_\infty$  via realimentação da saída (Zhou e Doyle, 1998). Ressalta-se que o controle  $H_\infty$  pode ser feito via realimentação de estados, como discutido nas referências Peres (1997), Silva et al. (2003), Silva, (2004). Além disto, a incerteza à dinâmica não-modelada tratada no presente capítulo é caracterizada como não-estruturada e corresponde a um limitante superior da dinâmica dos modos residuais.

Como resultado do procedimento de projeto é obtido uma função de transferência para o controlador com ordem igual a ordem da planta generalizada (planta nominal com os filtros especificando as condições de desempenho e robustez exigidos). A planta nominal contém informação apenas sobre os modos de baixa frequência e os filtros projetados tem ordem baixa, com isso, procura-se encontrar um controlador de baixa ordem para atuar em uma planta de alta ordem. A planta real, no caso, tem um número de modos muito maior do que o número de modos que se deseja efetivamente controlar. Portanto, deve-se ter o máximo de cuidado no momento de projeto, uma vez que o sistema pode estar sujeito a efeitos spillover que podem deteriorar ou acarretar instabilidade no sistema à malha fechada, Silva e Lopes Jr. (2004a).

Este capítulo está dividido em quatro partes. Inicialmente é visto a configuração geral do problema de controle a ser tratado. O problema de desempenho é apresentado, seguido do problema de robustez. As formas de se resolver o problema de desempenho e robustez simultaneamente são discutidas e o enfoque de solução adotado no trabalho é mostrado. O projeto incluindo robustez à dinâmica residual, adotando a incerteza como sendo não-estruturada e do tipo aditiva, é apresentado e, são discutidas as condições para manter robustez de estabilidade. Por fim, a solução do problema via LMIs.

#### **4.1. Configuração Geral do Problema de Controle $H_\infty$**

A configuração geral do problema de controle  $H_\infty$  pode ser vista na fig. 4.1. Nesta figura pode ser visto o vetor de entradas exógenas  $\mathbf{w}$ , o vetor de saídas reguladas  $\mathbf{z}$ , o sinal de medida  $\mathbf{y}$  utilizado para realimentar o sistema, o sinal de controle  $\mathbf{u}$ , a função de transferência do controlador  $\mathbf{K}$  e a planta generalizada  $\mathbf{P}$ , que contém as interconexões entre os sinais de entradas e saídas. Ressalta-se aqui que a planta generalizada  $\mathbf{P}$  só contém informações referentes a um

número limitado de modos que se deseja controlar. A variável complexa  $s$  é omitida nas equações a seguir para clareza do texto. O modelo matemático pode ser dado por:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{zw} & \mathbf{P}_{zu} \\ \mathbf{P}_{yw} & \mathbf{P}_{yu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \mathbf{P} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

sendo  $\mathbf{P}_{zw}$ ,  $\mathbf{P}_{zu}$ ,  $\mathbf{P}_{yw}$  e  $\mathbf{P}_{yu}$  as respectivas funções de transferência.

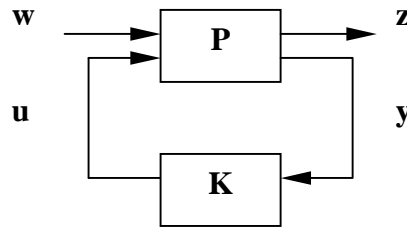


Figura 4.1. Representação convexa do problema de controle.

Considerando que o sistema tenha alguma incerteza referente a dinâmica desconhecida ou omitida durante a fase de modelagem e/ou identificação, pode-se considerar esta incerteza como sendo não-estruturada inserindo um laço de realimentação externo contendo uma perturbação normalizada  $\Delta$ . A figura 4.2. ilustra este novo sistema e a eq. (4.2) mostra a relação entre a planta generalizada  $\mathbf{P}$  e os três respectivos sinais de entradas e saídas, (Burl, 1999).

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{qp} & \mathbf{P}_{qw} & \mathbf{P}_{qu} \\ \mathbf{P}_{zp} & \mathbf{P}_{zw} & \mathbf{P}_{zu} \\ \mathbf{P}_{yp} & \mathbf{P}_{yw} & \mathbf{P}_{yu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \mathbf{P} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

sendo os vetores  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  relacionados às especificações de robustez (entradas e saídas da perturbação desconhecida  $\Delta$ ).

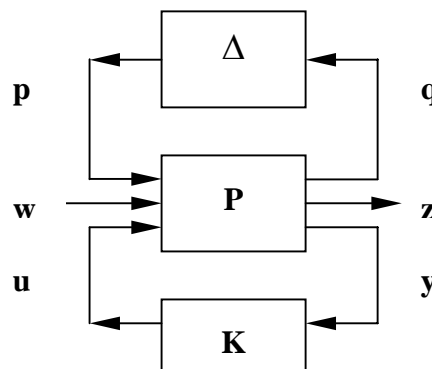


Figura 4.2. Forma padrão da realimentação geral de um sistema com incerteza dinâmica.

A função de transferência para o sistema da fig. 4.2 é dada por:

$$\mathbf{H}_{zw}^{\text{pert}} = \mathbf{H}_{zw} + \mathbf{H}_{zp} \Delta (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{qp} \Delta)^{-1} \mathbf{H}_{qw} \quad (4.3)$$

sendo  $\mathbf{H}_{zw}$ ,  $\mathbf{H}_{zp}$ ,  $\mathbf{H}_{qp}$  e  $\mathbf{H}_{qw}$  as funções de transferências à malha fechada entre os sinais de saída  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{q}$  e os sinais de entrada  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{p}$ . Estas funções são dadas por, (Moreira, 1998):

$$\mathbf{H}_{zw} = \mathbf{P}_{zw} + \mathbf{P}_{zu} \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{uy} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yw} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{H}_{zp} = \mathbf{P}_{zp} + \mathbf{P}_{zu} \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{uy} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yp} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{H}_{qw} = \mathbf{P}_{qw} + \mathbf{P}_{qu} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{uy} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yw} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{H}_{qp} = \mathbf{P}_{qp} + \mathbf{P}_{qu} \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{uy} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yp} \quad (4.7)$$

O que se espera é que o sistema atenda os requisitos de desempenho, como amortecimento dos modos de interesse dentro de limites específicos de consumo de energia e se mantenha estável, mesmo na presença de possíveis perturbações  $\Delta$ . Estes requisitos serão atendidos se as funções de transferência dada pelas eq. (4.4) até (4.7) mantiverem estáveis.

Neste momento é importante discutir um dos pontos chaves para a teoria de controle robusto: **o teorema do ganho pequeno**, que pode ser encontrado em detalhes em Burl (1999). Este teorema é um excelente teste para avaliar a robustez de estabilidade frente a perturbações limitadas por norma. O teorema afirma que um sistema com uma perturbação normalizada  $\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$  é internamente estável, se para todas as perturbações possíveis o sistema à malha fechada for estável e a seguinte desigualdade satisfeita:

$$\|\mathbf{H}_{qp}\|_{\infty} = \sup_{\omega} \{\bar{\sigma}(\mathbf{H}_{qp})\} < 1 \quad (4.8)$$

sendo a norma infinita,  $\|\mathbf{H}_{qp}\|_{\infty}$ , definida como o valor supremo do máximo valor singular do sistema (esta é a definição mais geral para norma infinita de sistemas MIMO).

A seguir soluciona-se um exercício proposto em Burl (1999) na página 173 para exemplificar o teorema do ganho pequeno.

**Exemplo:** Dado uma planta  $G(s)$  com uma incerteza não-estruturada de realimentação na entrada  $\|\Delta_{fi}\|_{\infty} \leq 0,5$  e um controlador de realimentação negativa  $K(s)$ . Defina se o sistema é estável na presença desta incerteza.

As funções de transferência  $G(s)$  e  $K(s)$  são dadas por:

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 4}, \quad K(s) = \frac{4(s + 2)}{s + 8}$$

**Solução:** O primeiro passo é normalizar a incerteza, assim:

$$\|\Delta_{fi}\|_{\infty} = 0,5\|\Delta\|_{\infty}, \quad \text{sendo } \|\Delta\|_{\infty} \leq 1$$

O diagrama de blocos do sistema é visto na fig. 4.3.

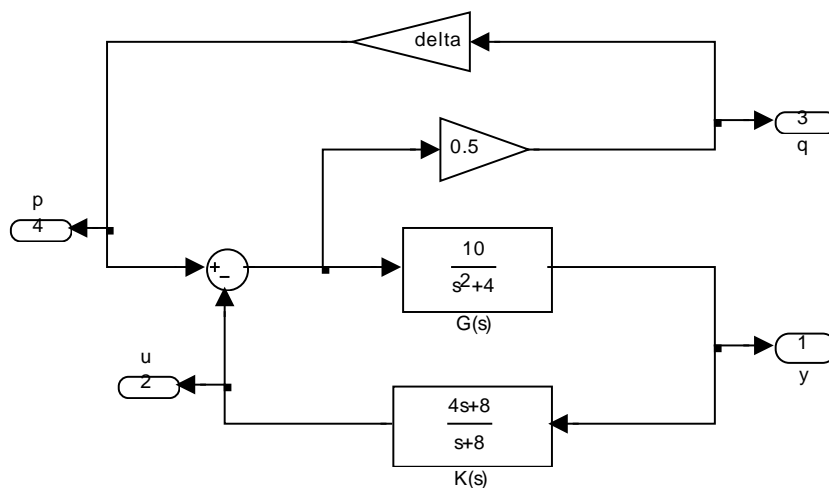


Figura 4.3. Sistema com a incerteza limitada por norma.

O passo seguinte é calcular a função de transferência entre a saída  $q$  e a entrada  $p$ , obtendo:

$$H_{qp} = 0,5 \frac{1}{1 + KG}$$

Calculando a norma infinita da função de transferência acima com o auxílio do Matlab chega-se ao valor de 0.878 que é menor do que 1, ou seja, o sistema permanece estável para o conjunto de incertezas considerado.

Em termos práticos, dependendo do tipo de incerteza considerado, o teorema do ganho pequeno pode ser interpretado em termos da função sensibilidade  $S$ , sensibilidade complementar  $T$ , ou função restrição de energia  $U$ , que são funções bem conhecidas da teoria de controle clássico. Damen e Weiland (2001) discutem com mais detalhes estas considerações práticas.

Assim, a partir deste teorema e definindo o critério de desempenho em termos da norma infinita (discutida no capítulo 2) pode-se escrever o problema de desempenho:

**Problema de Desempenho:** Encontrar um controlador de realimentação de saídas  $\mathbf{K}$  tal que a seguinte condição seja satisfeita:

$$\|\mathbf{H}_{zw}\|_{\infty} < \gamma \quad (4.9)$$

sendo  $\gamma$  um custo de projeto, caso  $\gamma$  seja o valor mínimo temos o problema ótimo, caso contrário o problema é definido como subótimo.

Agora o problema de robustez pode ser escrito como:

**Problema de Robustez:** Encontrar um controlador de realimentação de saídas  $\mathbf{K}$  tal que a seguinte condição seja satisfeita:

$$\|\mathbf{H}_{qp}\|_{\infty} \leq 1 \quad (4.10)$$

que é um resultado direto do teorema do ganho pequeno visto anteriormente.

## 4.2. Problema de Desempenho e Robustez

Para o projeto do compensador se deve solucionar os problemas (4.9) e (4.10) simultaneamente e define-se, então, o chamado problema de desempenho e robustez. Existem na literatura diversas metodologias para se resolver este problema. Uma delas é utilizando a teoria de valores singulares estruturados via método de iteração D-K. Neste enfoque uma perturbação fictícia  $\Delta_p$  é inserida em um laço de realimentação ligando a saída regulada  $\mathbf{z}$  e a entrada exógena  $\mathbf{w}$ , como visto na fig. 4.4. Assim, converte-se um problema de desempenho e robustez em um problema de robustez e soluciona-se via iteração D-K, (Burl, 1999). Porém uma das grandes críticas a este enfoque é a alta ordem do compensador que é obtido, em geral, duas à três vezes a ordem da planta generalizada em estudo. Pode-se utilizar, posterior ao projeto do controlador, uma redução de sua ordem através de métodos clássicos de redução de modelos, como o método de Moore via realização balanceada, discutido sucintamente no 1.º relatório de pesquisa do autor, (Silva, 2004). Um exemplo é o trabalho de Abreu (2003) que resolveu o problema de controle de uma placa utilizando iteração D-K e chegou em controladores de dimensão muitas vezes superior a ordem da planta em questão. Aplicando redução clássica, em grande parte já implementada em pacotes como o Matlab® (vide funções *balreal* e *modred*), ele conseguiu reduzir a ordem destes

controladores. Porém, Assunção (2000) deixa claro em seu trabalho que *redução de ordem de controladores para sistemas incertos* é um problema de difícil solução e que ainda não foi totalmente solucionado. Este é um tema com ampla pesquisa nos dias atuais. Sendo assim, o procedimento de redução da ordem de controladores como está feito no trabalho de Abreu (2003) deve ser feito com o máximo de cuidado, pois não se tem garantia, que o método de Moore, mantenha o controlador reduzido dentro das especificações.

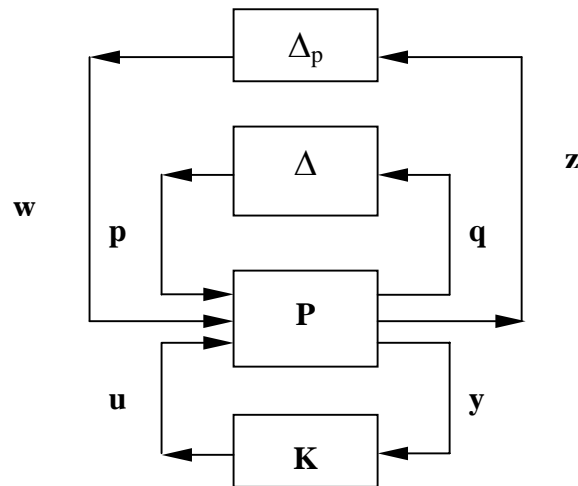


Figura 4.4 Problema de desempenho e robustez convertido em problema de robustez.

Para evitar o inconveniente do uso da iteração D-K é adotado neste trabalho o mesmo enfoque alternativo proposto na tese de Moreira (1998). Neste enfoque o problema de desempenho e robustez é convertido em um problema de desempenho. Isto é feito abrindo-se o laço de realimentação da incerteza e inserindo a variável  $\mathbf{q}$  junto ao vetor de saídas reguladas  $\mathbf{z}$  e o vetor  $\mathbf{p}$  junto ao vetor de entradas exógenas  $\mathbf{w}$ .

Assim, define-se um novo vetor de saídas reguladas  $\mathbf{z}' = [\mathbf{q} \ \mathbf{z}]^T$  e um novo vetor de entradas exógenas  $\mathbf{w}' = [\mathbf{p} \ \mathbf{w}]^T$ . O novo problema é minimizar a norma infinita da função de transferência entre  $\mathbf{w}'$  e  $\mathbf{z}'$ . Tem-se então um problema de desempenho e robustez convertido em um problema simplesmente de desempenho, como mostra a equação seguinte:

$$\mathbf{z}' = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{qp} & \mathbf{H}_{qw} \\ \mathbf{H}_{zp} & \mathbf{H}_{zw} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

O inconveniente é o acoplamento que se cria entre o problema de desempenho e robustez, uma vez que a entrada relacionada a robustez, vetor  $\mathbf{p}$ , influencia a saída relacionada ao desempenho, vetor  $\mathbf{z}$ , e vice-versa. Para diminuir o efeito entre os termos cruzados da eq. (4.11) um fator atenuante  $\mathbf{K}_d$  pode ser inserido na entrada do vetor  $\mathbf{p}$  e o inverso deste ganho é inserido na saída do vetor  $\mathbf{q}$  com o propósito de minimizar esta influência, como já havia sido proposto e

discutido em detalhes no trabalho de Moreira (1998). A figura 4.5. mostra a configuração final do projeto a ser utilizado no presente trabalho.

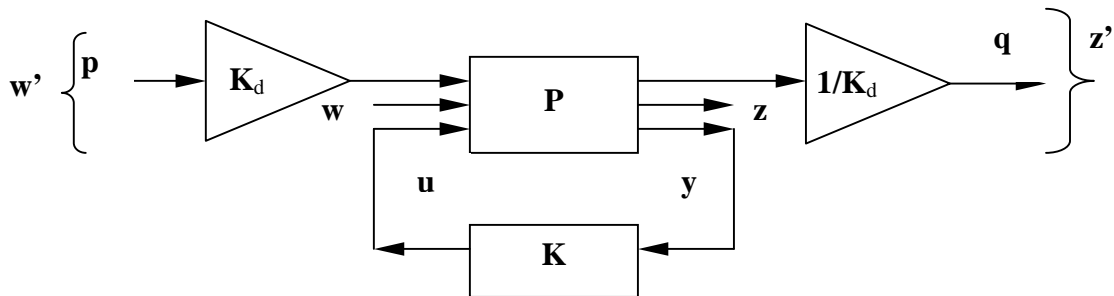


Figura 4.5. Problema de desempenho e robustez convertido em problema de desempenho.

### 4.3. Projeto incluindo Robustez à Dinâmica Residual

A incerteza residual adotada neste trabalho será caracterizada como não-estruturada e do tipo aditiva. No capítulo anterior foram definidas as principais características e tipos de incertezas não-estruturadas. Na verdade nos exemplos tratados neste trabalho se conhece a dinâmica do sistema a se controlar em uma faixa de frequências maior do que a faixa que se deseja controlar. Porém, incluir toda a dinâmica destes modos no projeto do controlador é uma tarefa árdua e muitas vezes quase que impossível, pois muitos dos modos podem nem mesmo ter a propriedade de controlabilidade. Sendo assim o truncamento em um faixa de frequência menor é uma exigência neste tipo de aplicação. Portanto:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_c + \mathbf{G}_r \quad (4.12)$$

Sendo  $\mathbf{G}$  a função de transferência do sistema, e os subscritos  $(\cdot)_c$  e  $(\cdot)_r$  significando modos a serem controlados e modos residuais (de alta frequência). A figura 4.6 mostra a estrutura da incerteza aditiva demonstrada pela equação 4.12. O que muda entre os tipos de incerteza utilizados é o ramo em que se retira a informação para ser enviada para a incerteza  $\Delta$ , ou seja, os pontos de entrada e saída dos sinais  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ , respectivamente.

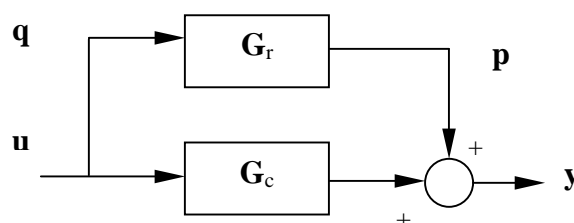


Figura 4.6. Estrutura da incerteza aditiva.



$$\begin{aligned} \mathbf{G}_c &= \mathbf{C}_c (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_{2c} + \mathbf{D}_{2c} \\ \mathbf{G}_d &= \mathbf{C}_c (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_{1c} + \mathbf{D}_{1c} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Além destas funções os dois filtros de projeto são inseridos na malha junto com o modelo de incerteza aditiva adotado. A configuração geral deste projeto é mostrado na fig. 4.8.

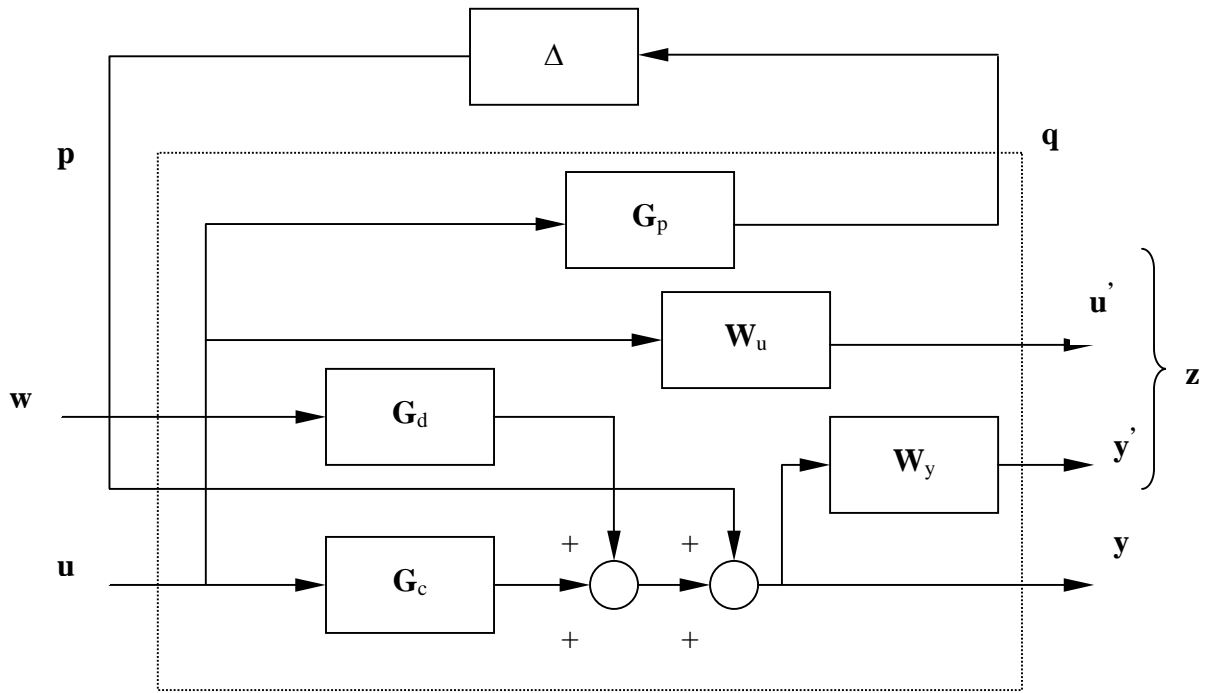


Figura 4.8. Planta generalizada para o projeto com incerteza residual aditiva – Problema de desempenho e robustez.

Como discutido anteriormente, abre-se o laço de realimentação da incerteza e converte-se o problema de desempenho e robustez, visto na fig. 4.8, em um problema de desempenho, (Moreira, 1998). A figura 4.9 mostra a nova configuração, onde é inserido um fator atenuante  $\mathbf{K}_d$  e seu inverso com a finalidade de diminuir o efeito das normas entre os sinais cruzados relacionados a desempenho e robustez.

As matrizes de função de transferência deste sistema são:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{z'w'} &= \begin{bmatrix} \mathbf{W}_y \mathbf{G}_d & \mathbf{W}_y \mathbf{K}_d \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{P}_{z'u} &= \begin{bmatrix} \mathbf{W}_y \mathbf{G}_c \\ \mathbf{W}_u \\ \mathbf{G}_p \mathbf{G}_c \mathbf{K}_d^{-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_{y'w'} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_p & \mathbf{K}_d \end{bmatrix}, & \mathbf{P}_{y'u} &= \mathbf{G}_c \end{aligned} \quad (4.15)$$

sendo  $\mathbf{w}' = [\mathbf{w} \ \mathbf{p}]^T$  e  $\mathbf{z}' = [\mathbf{z} \ \mathbf{q}]^T$ , onde  $\mathbf{z} = [\mathbf{y}' \ \mathbf{u}']^T$ .

Após algumas manipulações algébricas obtém-se a função de transferência entre o sinal  $\mathbf{z}'$  e  $\mathbf{w}'$  à malha fechada dada por:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{z}'\mathbf{w}'} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_y & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_p \mathbf{K}_d^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{S} \\ \mathbf{U} & \mathbf{U} \\ \mathbf{U} & \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_d \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

sendo  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{U}$  as funções de sensibilidade e de restrição de energia. Estas funções são bem conhecidas da teoria clássica de controle e são dadas por, (Damen e Weiland, 2001):

$$\mathbf{S} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_c \mathbf{K})^{-1} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{K} \mathbf{S} \quad (4.18)$$

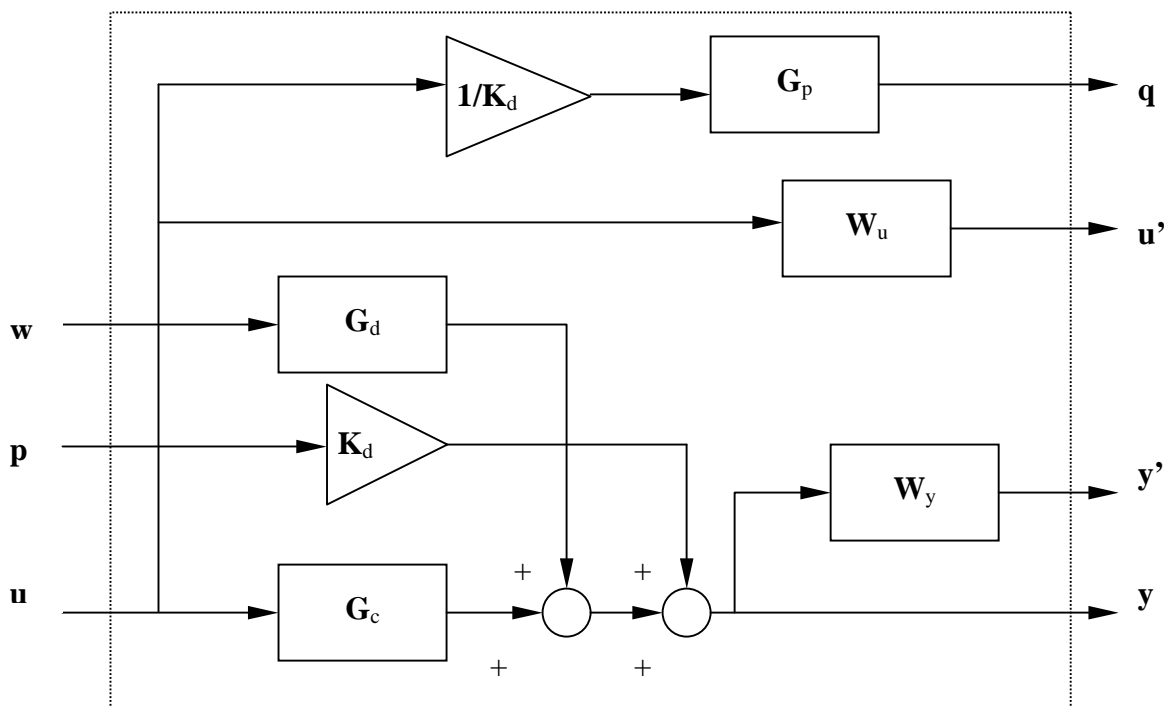


Figura 4.9. Planta generalizada para o projeto com incerteza residual aditiva – Problema de desempenho.

É importante observar que na fig. 4.9 tanto a função  $\mathbf{W}_u$  quanto o modelo de incerteza  $\mathbf{G}_p$  estão ponderando o vetor de entrada de controle  $\mathbf{u}$  e estão relacionados a função de restrição de energia  $\mathbf{U}$ , como pode ser comprovado pela equação (4.16). Assim ambas funções,  $\mathbf{W}_u$  e  $\mathbf{G}_p$ , podem ser usadas para limitar o sinal de controle e especificar características de robustez à dinâmica residual. Porém,  $\mathbf{W}_u$  também está relacionado com a robustez referente a ruídos de alta frequência proveniente de sensores de medida. Além disto, muitos autores utilizam  $\mathbf{W}_u$ , tentando

substituir (ou encontrar) uma função de transferência que se aproxime de  $\mathbf{G}_p$ , ou seja, que sirva de limitante superior para o modelo de incerteza de dinâmica de alta frequência não modelada. Entretanto, na maioria das aplicações de engenharia de controle estrutural, este modelo é conhecido ( $\mathbf{G}_r$ ), assim o projeto se torna muito mais fácil e direto a partir da especificação apenas de  $\mathbf{G}_p$ , sendo que  $\mathbf{W}_u$  pode ser omitido do projeto. Inclusive é conceitualmente mais correto especificar robustez à dinâmica residual a partir apenas de  $\mathbf{G}_p$ , uma vez que esta função está relacionada a saída de incerteza  $\mathbf{q}$ . Para maiores detalhes deste assunto e uma descrição completa do que foi discutido acima recomenda-se Moreira (1998).

Uma nova configuração pode então ser dada pela fig. 4.10. Um ganho atenuante  $\mathbf{K}_w$  também é inserido na entrada do vetor  $\mathbf{w}$ , uma vez que o sinal de distúrbio pode ter uma energia maior do que o sinal de controle  $\mathbf{u}$ . Assim esta atenuação na entrada  $\mathbf{w}$  tem como meta reduzir o nível do sinal de distúrbio na saída relacionada à incerteza  $\mathbf{q}$ , o que não causa maiores problemas, uma vez que o sistema em questão é assumido ser linear.

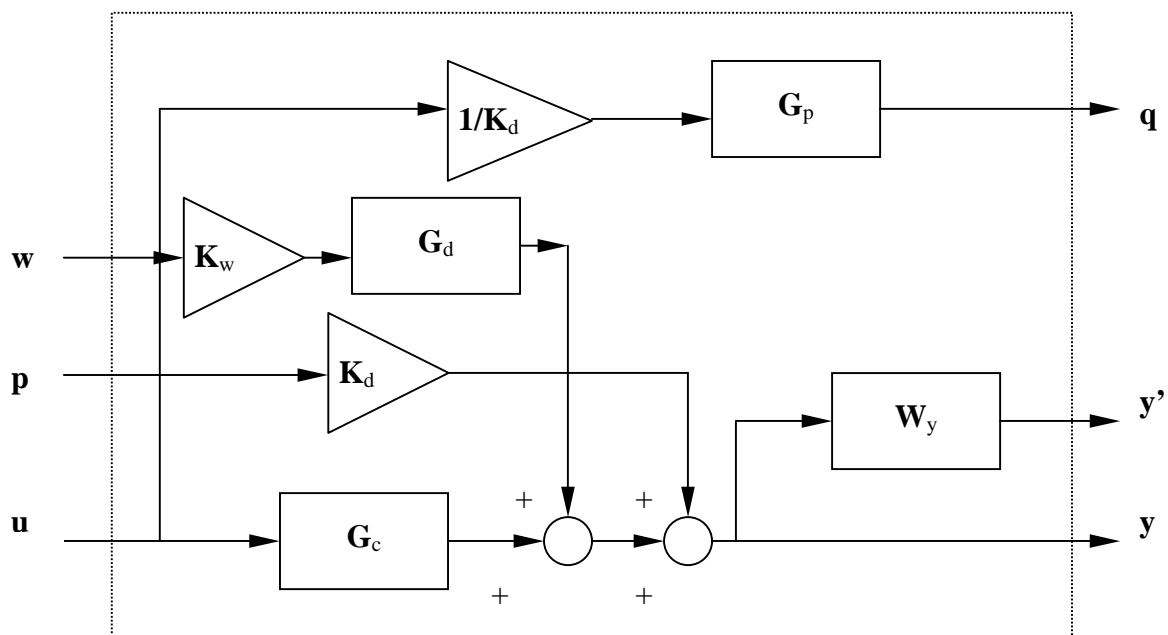


Figura 4.10. Planta aumentada na forma final para o projeto com incerteza residual aditiva – Problema de desempenho.

A montagem da planta aumentada pode ser realizada com o auxílio do Simulink® ou, mais facilmente, a partir da função *sconnect* do LMI toolbox do Matlab®, Gahinet et al. (1995). Para solucionar o problema  $H_\infty$  relacionado pode-se utilizar a formulação via enfoque de Riccati ou a solução baseada em LMI. Na próxima seção é apresentado sucintamente a solução via LMI, que foi utilizada no exemplo do capítulo 5.

#### 4.4. Solução do Problema $H_\infty$ via LMI

A formulação para solucionar o problema  $H_\infty$  neste trabalho é feita pelo enfoque LMI proposto por Gahinet e Apkarian (1994) e com as rotinas já implementadas no LMI toolbox do Matlab®, Gahinet et al. (1995).

O enfoque LMI permite solucionar computacionalmente problemas de grande dimensão e com o mérito de eliminar problemas de irregularidades de restrições encontrados freqüentemente em soluções baseadas no enfoque via Riccati. A solução do problema é feita no domínio do tempo, portanto, a planta generalizada  $\mathbf{P}$ , descrita na fig. 4.10, deve estar escrita no espaço de estados:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w}' + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z}' &= \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}' + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}' + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{4.19}$$

sendo as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$ ,  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{D}_{11}$ ,  $\mathbf{D}_{12}$ ,  $\mathbf{D}_{21}$  e  $\mathbf{D}_{22}$  as matrizes que descrevem a realização no espaço de estados para a planta generalizada  $\mathbf{P}$ . O problema ótimo  $H_\infty$  é solucionado diretamente do seguinte problema de otimização:

minimizar  $\gamma$ , com as variáveis  $\mathbf{R}=\mathbf{R}^T$  e  $\mathbf{S}=\mathbf{S}^T$ , tal que:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A}^T & \mathbf{R}\mathbf{C}_1^T & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{R} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{D}_{11}^T & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} < \mathbf{0}\tag{4.20}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A} & \mathbf{S}\mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{B}_1^T\mathbf{S} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} < \mathbf{0}\tag{4.21}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}\tag{4.22}$$

sendo que  $\mathbf{N}_{12}$  e  $\mathbf{N}_{21}$  denotam as bases de espaços nulos de  $(\mathbf{B}_2^T, \mathbf{D}_{12}^T)$  e  $(\mathbf{C}_2, \mathbf{D}_{21})$ , respectivamente.

Para solucionar este problema pode-se utilizar a função *mincx* do LMI Toolbox do Matlab®. Entretanto, ao contrário do capítulo anterior, onde todas as LMIs estudadas foram implementadas em rotinas próprias usando o *LMILab*®, neste tipo de controlador se utilizou a

função *hinflmi*. Esta função soluciona o problema  $H_\infty$  acima a partir do conhecimento da planta generalizada  $\mathbf{P}$ , que pode ser montada com o auxílio do Simulink® ou do comando *sconnect*. Como resultado é obtido um controlador  $\mathbf{K}$  para realimentação do sinal medido.

---

## 5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

---

Neste capítulo são apresentados três exemplos de aplicação. O primeiro foi feito considerando-se uma placa com 2 pares de atuadores piezelétricos acoplados e 01 acelerômetro utilizado como sinal para realimentação. Neste exemplo são ilustradas duas diferentes sínteses de projeto de controladores. Já o segundo exemplo considera o controle de uma viga de alumínio com um par de atuadores piezelétricos. O último exemplo apresenta o projeto de um controlador robusto à variação paramétrica para supressão ativa de flutter em um aerofólio 2D via realimentação de estados estimados.

### 5.1. Placa com Atuadores Piezelétricos Incorporados

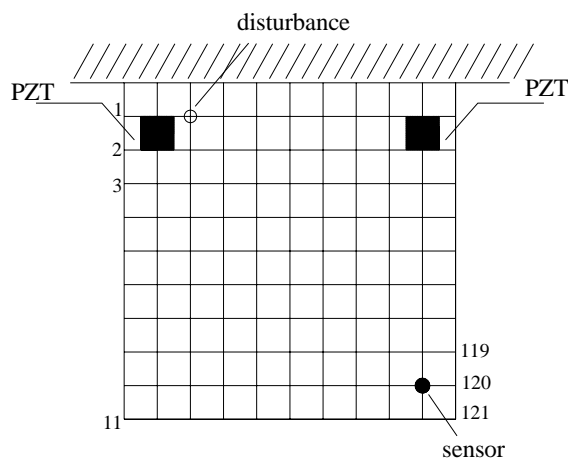
Este exemplo procura ilustrar as duas sínteses de projeto descritas nos capítulos 3 e 4 deste trabalho. Inicialmente a realização no espaço de estados é identificada a partir de dados experimentais. Uma vez identificado o modelo, o projeto de um controlador ativo para atenuar os dois primeiros modos de vibração é implementado e simulado computacionalmente. Duas sínteses são revistas, a primeira é baseada em um projeto de controlador via realimentação de estados estimados por um observador dinâmico. Já na segunda metodologia, o controle  $H_\infty$  via realimentação da saída é implementado. Ambas as técnicas são solucionadas por LMIs e os resultados são discutidos.

#### 5.1.1. Identificação do Sistema

Neste exemplo é considerado uma placa de alumínio com dimensão de 0.2 x 0.2 x 0.002 m de comprimento, largura e espessura, respectivamente. A estrutura é discretizada por FEM usando o modelo de placa de Kirchhoff em 10 x 10 elementos, com 4 nós e 3 graus de liberdade por nó. Este modelo foi utilizado na fase de otimização da localização dos atuadores PZTs. A condição de contorno pretendida é a engastada-livre-livre-livre, porém na montagem experimental não temos garantia da restrição total dos graus de liberdade engastados, principalmente, os graus de liberdade de rotação. Mesmo assim esta foi a condição de contorno pretendida, pois em testes na condição totalmente livre teve-se problemas na identificação de algumas freqüência (em especial as de baixa freqüência).

As propriedades do alumínio são: módulo de elasticidade = 70 GPa e densidade = 2710 kg.m<sup>-3</sup>. O número de graus de liberdade elétrico muda em função do número de elementos piezelétricos considerado (2 dof por elemento), (Lopes Jr. et al., 2000). As propriedades dos atuadores piezelétricos, com 0.02 x 0.02 x 0.00027 m de comprimento, largura e espessura, respectivamente, são baseadas no material PSI-5A-S4 (Piezo System® Inc.) são: módulo de elasticidade = 60 GPa, densidade = 7650 kg.m<sup>-3</sup>, constante dielétrica = 190e-12 m.V<sup>-1</sup>, permissividade dielétrica = 30.705C/m<sup>2</sup>.

O primeiro passo é encontrar o posicionamento de dois pares de atuadores piezelétrico a serem colados de ambos os lados da placa. Para isto se usa um modelo FEM. A figura 5.1 mostra a estrutura considerada, onde os números de 1 a 11 e nesta seqüência até 121 significam os nós do modelo.



(a) Esquema da estrutura.



(b) Foto da estrutura considerada.

Figura 5.1. Estrutura discretizada e bancada experimental.

Foi considerado que cada PZT pode ser posicionado entre estes nós. Rocha et al. (2004) mostram em maiores detalhes como este posicionamento pode ser realizado a partir do mapeamento da norma  $H_\infty$  do sistema, descrito no capítulo 2 deste texto. A figura 5.2 mostra o índice de posicionamento obtido em função da posição dos PZTs. Cada ponto do gráfico se relaciona ao índice de desempenho através da distribuição de cores. A magnitude deste índice fornece informações sobre a eficiência da cerâmica piezelétrica nos dois primeiros modos de vibrar da estrutura. Claramente o atuador é mais efetivo nos extremos da região próxima ao engaste, como mostrado na figura 5.1a.

A figura 5.3 mostra o esquema experimental da estrutura com atuadores PZT colados na posição ótima para estas exigências, (A maioria das figuras do trabalho estão com a legenda em inglês, pois foram usadas na confecção de artigos). A posição do distúrbio de entrada é mostrado na fig. 5.1a.

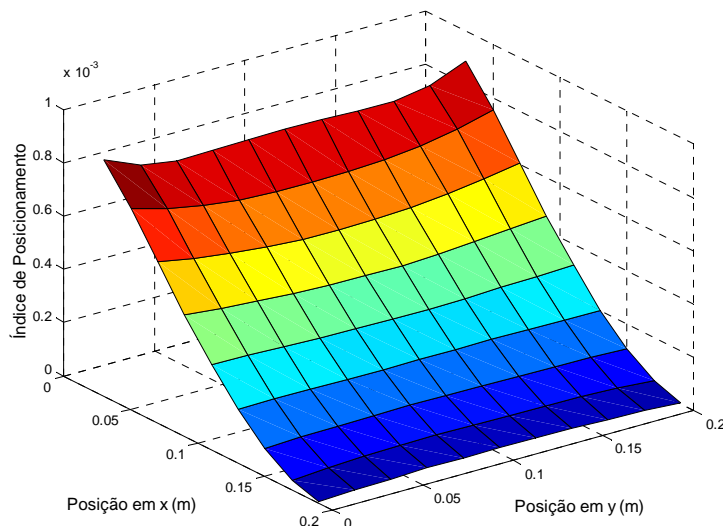


Figura 5.2. Índice de posicionamento versus localização dos PZTs.

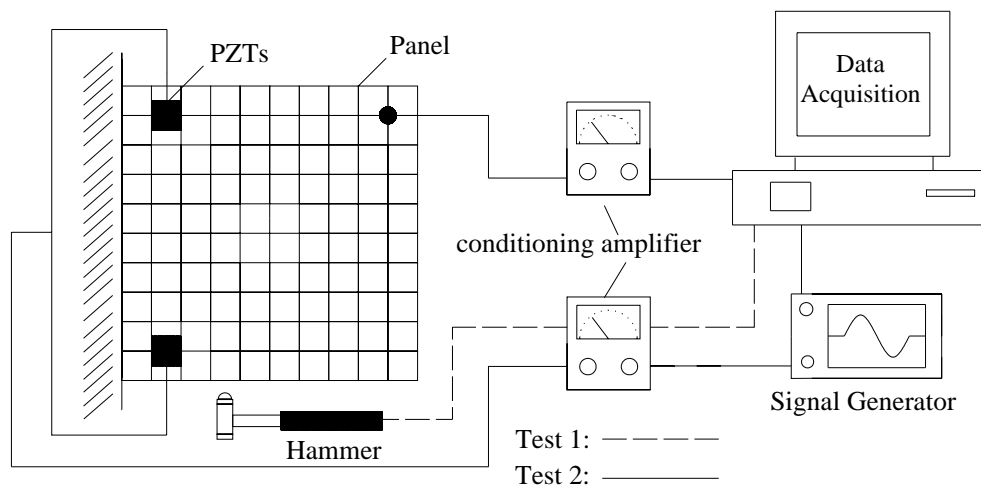


Figura 5.3. Diagrama esquemático da instrumentação utilizada.

Para finalidade de análise, um sistema finito dimensional foi obtido experimentalmente na largura de banda de interesse. O teste foi feito excitando o sistema com duas entradas diferentes, a primeira com o martelo de impacto (Teste 1) e a outra com os pares de atuadores PZT simultaneamente (Teste 2). A saída (sinal para realimentação) foi obtida em um ponto, então têm-se duas FRFs.

O sinal de saída foi medido com um acelerômetro, modelo 352A10 PCB Piezotronics®. O martelo de impacto usado foi o modelo 086C04 da PCB Piezotronics®. Neste experimento o software SignalCalc ACE® foi usado para gerar um sinal “swept sine” com largura de banda de 0-1000 Hz para a excitação do PZT e para fazer a aquisição de dados. A taxa de amostragem utilizada foi de 1.25 Hz.

Um modelo de 10 modos foi identificado usando o método ERA. Na verdade, o sistema real tem 9 modos nesta banda de frequência (0 até 1000 Hz), mas o ERA adiciona um modo computacional altamente amortecido para o modelo, pois assim o ajuste das FRFs alcançado é um pouco melhor. As FRFs do sistema real e do modelo identificado são mostradas nas fig. 5.4 e 5.5, para uma excitação com o martelo de impacto ( $G_1$ ) e com o PZT ( $G_2$ ), respectivamente.

As funções de transferência  $G_1$  e  $G_2$  são relativas as realizações no espaço de estados  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}, \mathbf{D}_1)$  e  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}, \mathbf{D}_2)$ , respectivamente. Um modelo de quarta ordem foi obtido através do truncamento do modelo. As magnitudes das FRFs  $G_1$  e  $G_2$  para o modelo reduzido e residual são, mostradas nas fig. 5.6 e 5.7.

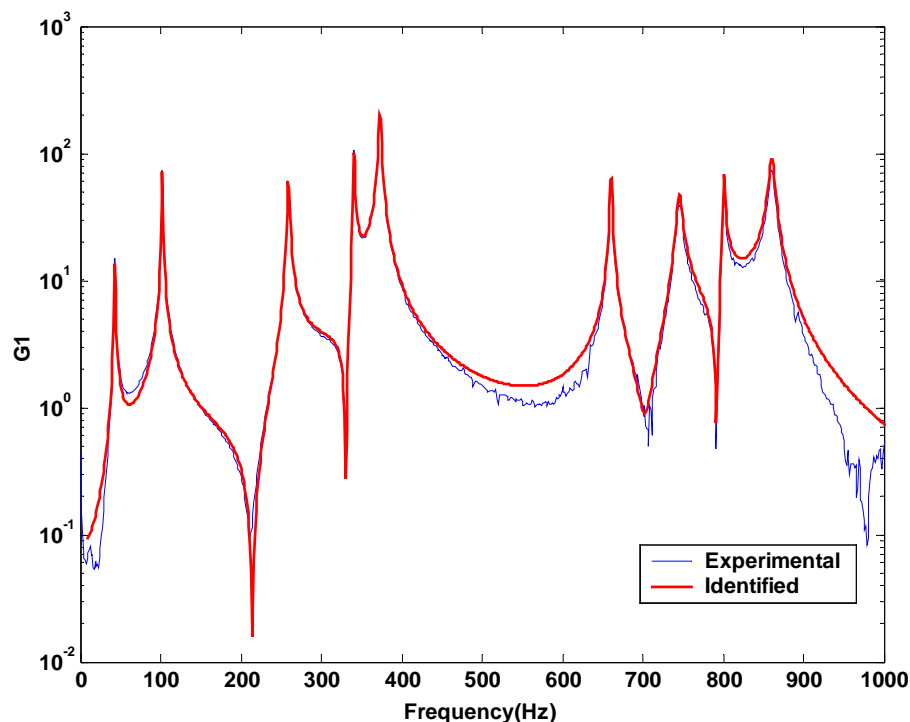


Figura 5.4. FRF para a estrutura excitada com o martelo de impacto. Unidades: mV/mV.

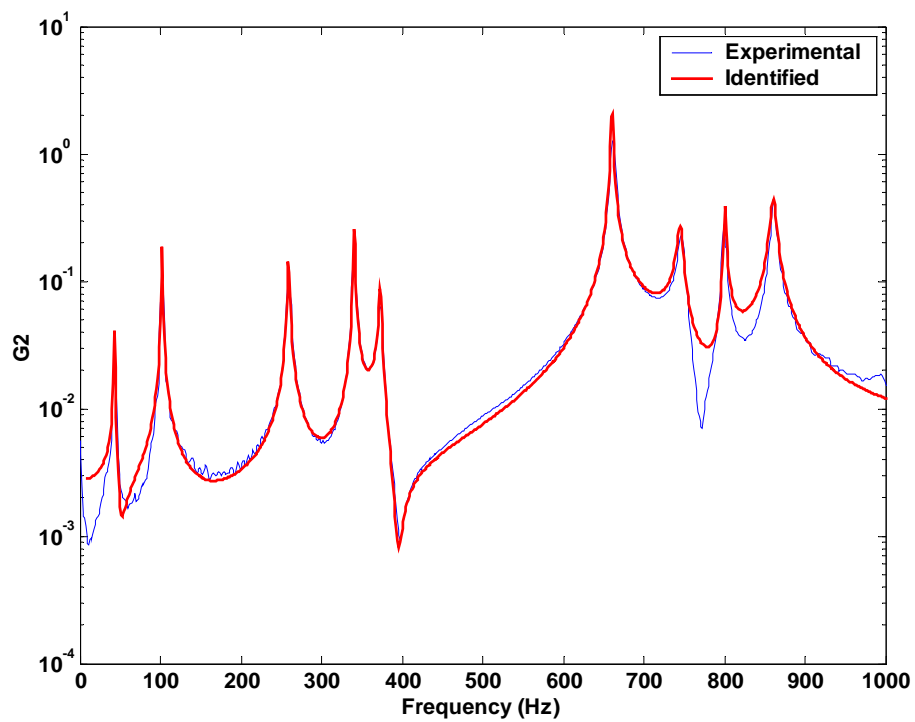


Figura 5.5. FRF para a estrutura excitada com os atuadores PZT. Unidades: mV/mV.

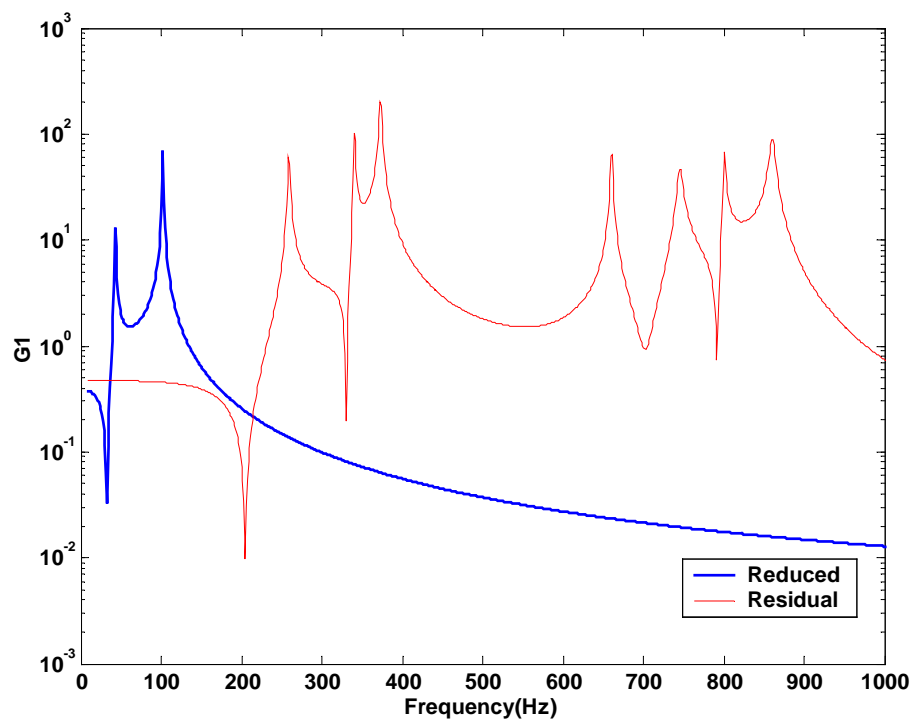


Figura 5.6.  $G_1$  para o modelo reduzido e residual. Unidades: mV/mV.

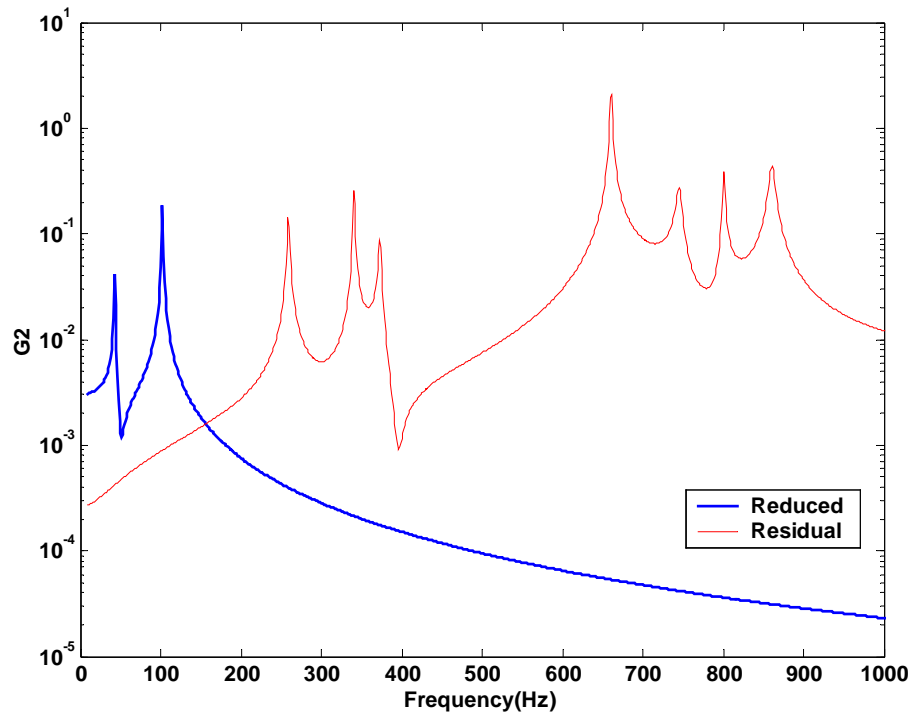


Figura 5.7.  $G_2$  para o modelo reduzido e residual. Unidades: mV/mV.

### 5.1.2. Controle por Realimentação de Estados Estimados por Observador

Uma das grandes vantagens do uso de LMIs é a possibilidade de se incluir diferentes restrições e incertezas simultaneamente. No presente exemplo é considerada uma possível variação paramétrica que pode causar uma variação de  $\pm 15\%$  na primeira e na segunda frequência natural. Portanto, tem-se dois parâmetros incertos:

$$\omega_{n1} \in [\omega_{n1}^{\min} = 0.85\omega_{n1} \quad \omega_{n1}^{\max} = 1.15\omega_{n1}] \quad (5.1)$$

$$\omega_{n2} \in [\omega_{n2}^{\min} = 0.85\omega_{n2} \quad \omega_{n2}^{\max} = 1.15\omega_{n2}] \quad (5.2)$$

Estes parâmetros incertos podem estar descritos dentro de um politopo. O controlador que satisfaz todos os sistemas descritos neste espaço convexo é dito ser robusto para variações paramétricas. As figuras 5.8 e 5.9 ilustram esta variação.

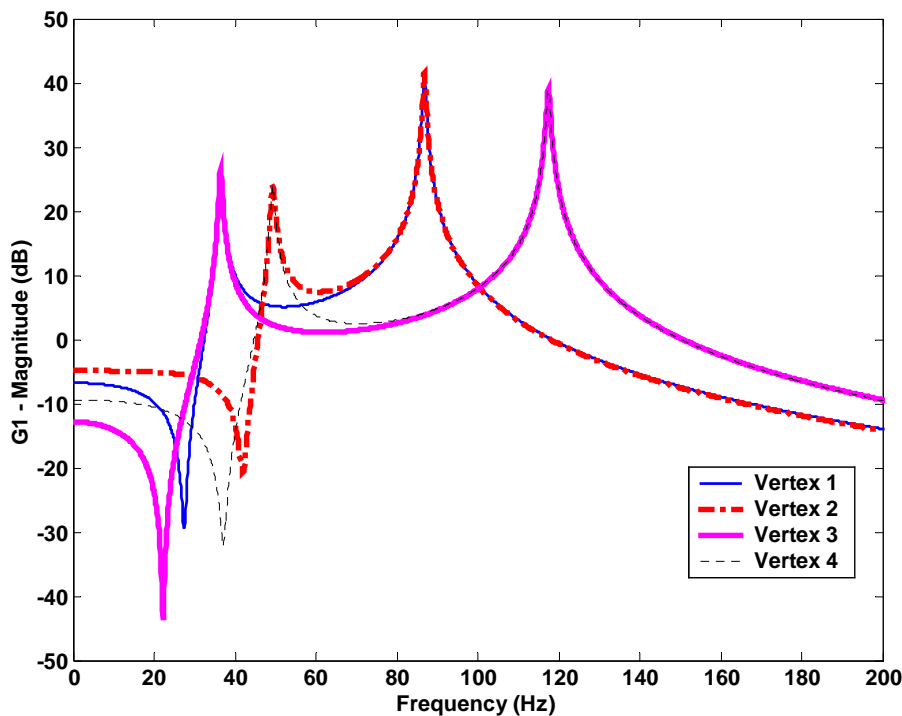


Figura 5.8. Magnitude  $G_1$  para todas as 4 possíveis funções à malha aberta. Unidades: mV/mV.

Nesta seção o regulador LMI foi projetado para aumentar o amortecimento dos dois primeiros modos. O regulador é obtido da solução do problema LMI das inequações descritas em (3.53). É considerado ser conhecido uma condição inicial  $\mathbf{x}_c(0) = [-0.01 \ 0 \ -0.01 \ 0]^T$ , um limite para o sinal de controle  $\mu = 10$ , um limite para o sinal de saída  $\beta = 2$ , uma taxa de decaimento para o controlador e para o observador de estados, respectivamente  $\alpha = 5$  e  $\gamma = 3\alpha$ . A figura 5.10 compara a magnitude da FRF do sistema à malha aberta e à malha fechada. Ressalta-se que o observador foi calculado considerando-se apenas a matriz dinâmica na condição nominal.

A tabela 5.1 mostra a atenuação alcançada pelo amortecimento ativo, comparando o sistema controlado e sem controle. Como resultado do amortecimento ativo os picos de ressonância dos modos controlados são reduzidos. Além disto, a amplitude de outros modos, que não são explicitamente incluídos no controlador, são reduzidas ocasionalmente, por exemplo, o 3.º e o 6.º modo tem atenuação de 3.4 dB e 7.0 dB, respectivamente. No entanto, alguns picos aumentam a magnitude, por exemplo, o 4.º e o 8.º modo aumentam a magnitude em 8.9 dB e 4.3 dB, respectivamente. Isto ocorre porque o controlador conduz a “spillover” de controle, ou seja, a energia do sinal de controle excita estes modos.

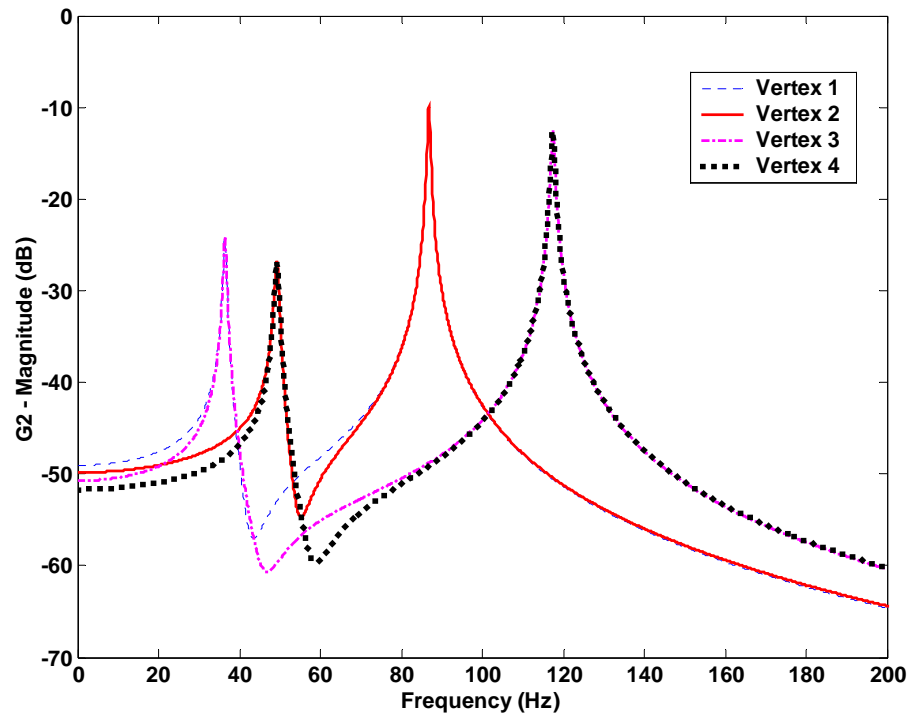


Figura 5.9. Magnitude  $G_2$  para todas as 4 possíveis funções à malha aberta. Unidades: mV/mV.

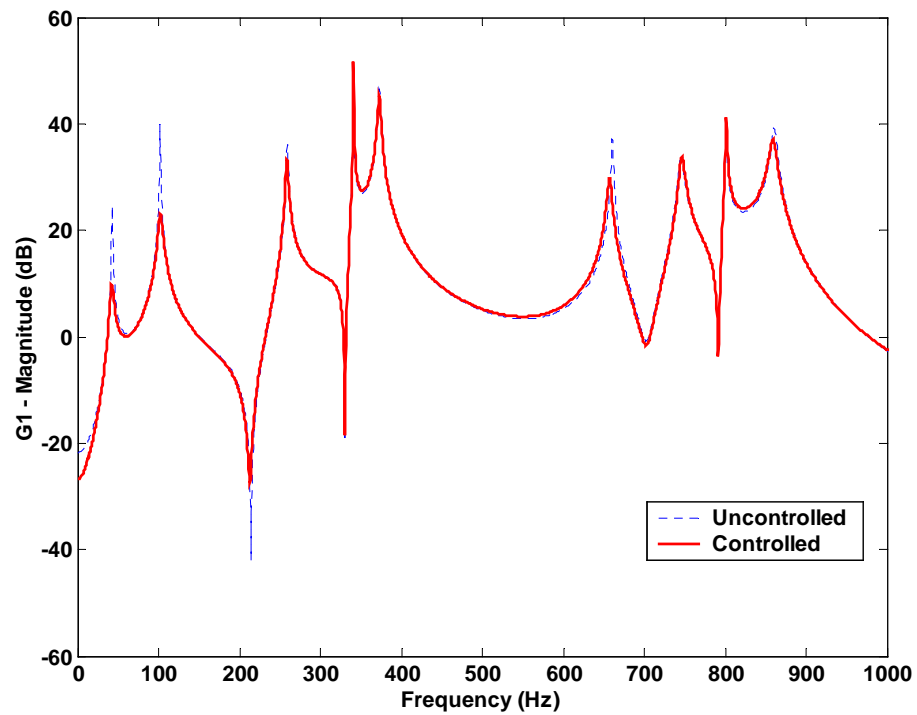


Figura 5.10. FRF para o sistema à malha aberta e à malha fechada – Condição nominal.

Unidades: mV/mV.

Tabela 5.1. Desempenho do controlador na condição nominal de operação.

Modo	Malha Aberta		Malha Fechada		Atenuação Magnitude. (dB)
	Magnitude (dB)	$\zeta$ modal	Magnitude (dB)	$\zeta$ modal	
1.º	25.1	0.0101	9.9	0.053	-15.2
2.º	40.1	0.0037	22.8	0.024	-17.3
3.º	36.5	0.0041	33.1	0.0058	-3.4
4.º	42.3	0.0019	51.2	0.00045	+8.9
5.º	46.3	0.0038	45.4	0.0044	-0.9
6.º	36.8	0.0017	29.8	0.004	-7

As figuras 5.11, 5.12 e 5.13 mostram a resposta no domínio do tempo para o sistema à malha aberta e à malha fechada para os modos controlados explicitamente (1.º e 2.º modo) e alguns modos residuais. Estes resultados foram obtidos considerando  $-0.01\text{m}$  de deslocamento modal como condição inicial nos dois primeiros modos. Somente a figura 5.11 mostra a resposta para o sistema sem controle. Claramente se observa uma baixa influência da dinâmica de alta frequência no desempenho do controle estrutural. Comparando a magnitude modal dos modos residuais nestas figuras se observa que o efeito de “spillover” existe, mas é pequeno quando comparado com a magnitude modal dos modos controlados, mostrados na figura 5.11. A figura 5.14 mostra a resposta física do sistema, combinação das respostas dos dois modos controlados e dos modos residuais considerados. O ponto de medida é referente a posição do acelerômetro, como visto pela figura 5.1a. Mesmo assim, apesar desta resposta ser estável, o 4.º modo pode acarretar problemas de estabilidade em uma implementação prática, o mesmo acontecendo com o 8.º modo.

Para testar as características de robustez à variação paramétrica, o sistema foi simulado nas condições extremas. As figuras 5.15 e 5.16 mostram as FRFs para os quatro vértices do polítopo considerado, representando a variação paramétrica causada pela incerteza na frequência natural.

As respostas no tempo para o sistema nas condições de variação paramétrica são similares as respostas encontradas nas figuras 5.11 até 5.14 e por este motivo não foram incluídas no presente texto.

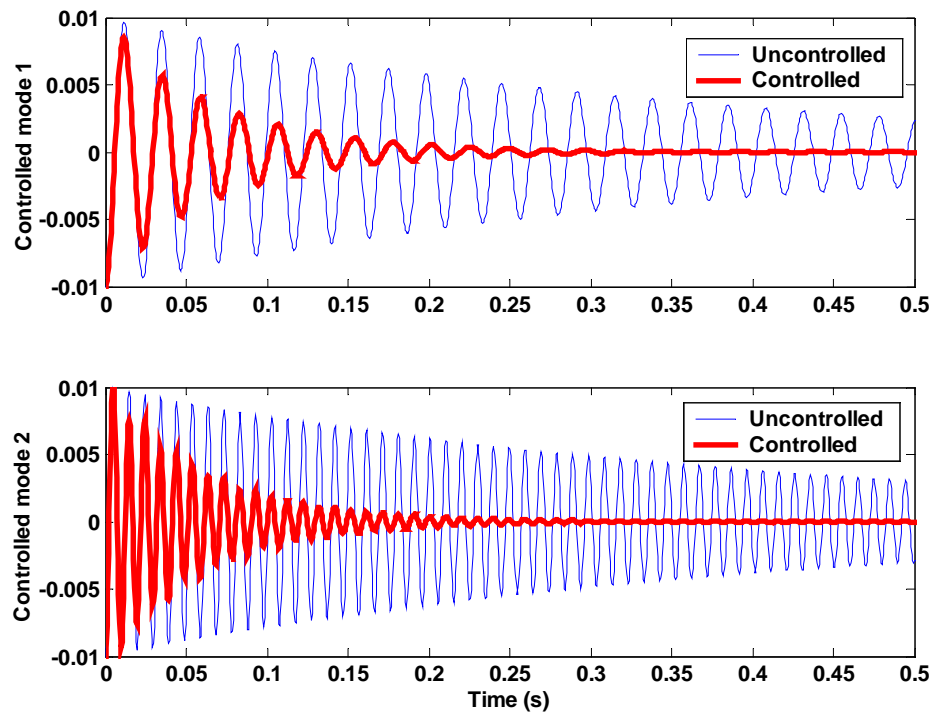


Figura 5.11. Resposta no domínio do tempo para o sistema à malha aberta e à malha fechada para os dois primeiros modos, considerando o sistema na condição nominal.

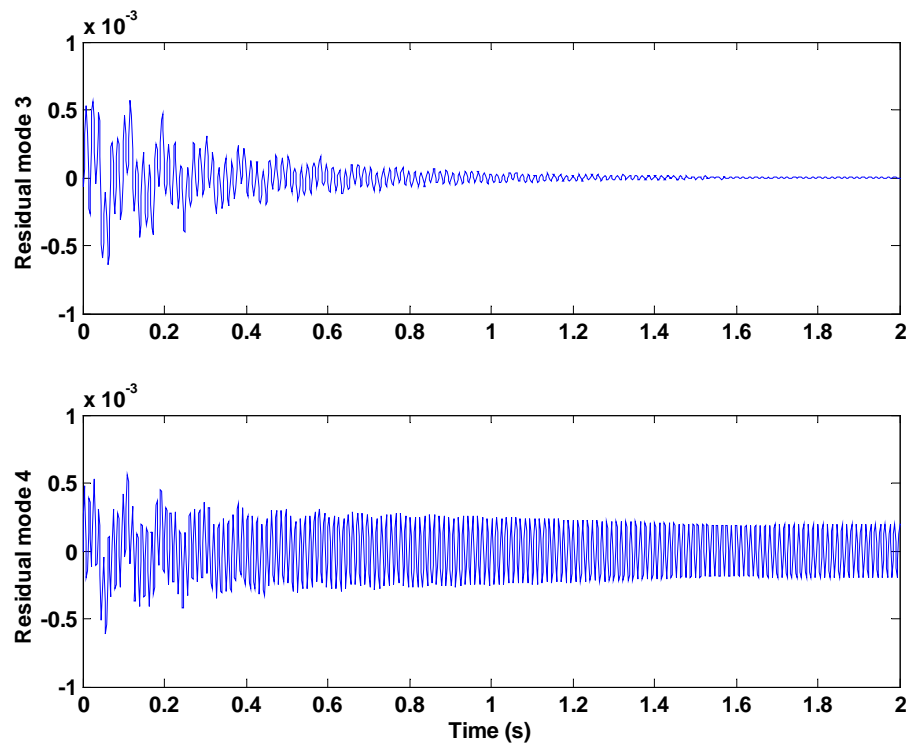


Figura 5.12. Resposta no domínio do tempo para o sistema à malha fechada para o 3.º e 4.º modos, considerando o sistema na condição nominal.

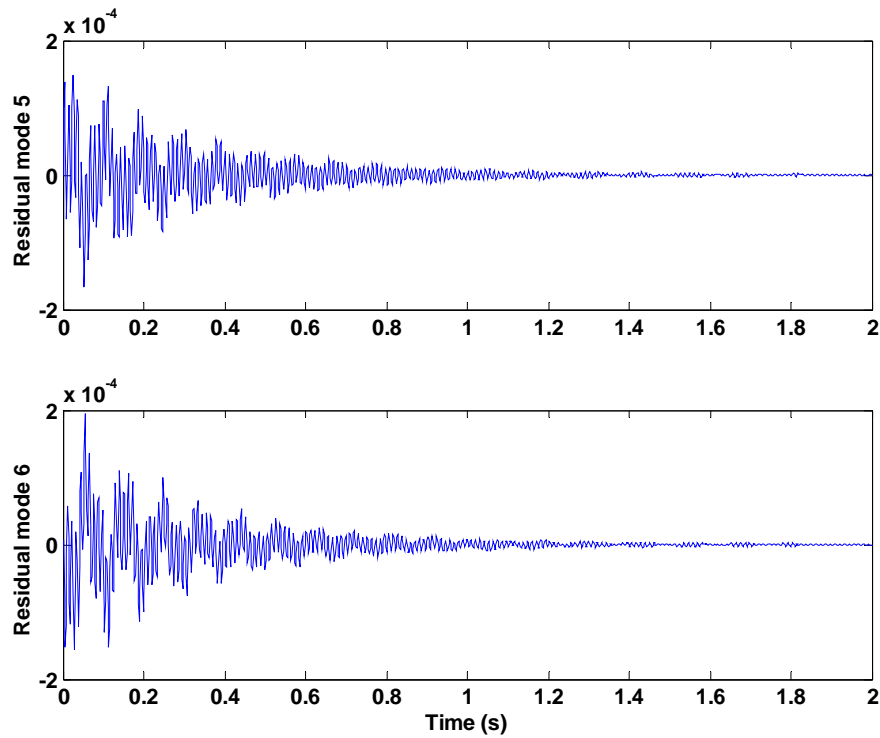


Figura 5.13. Resposta no domínio do tempo para o sistema à malha fechada para o 5.º e o 6.º modos, considerando o sistema na condição nominal.

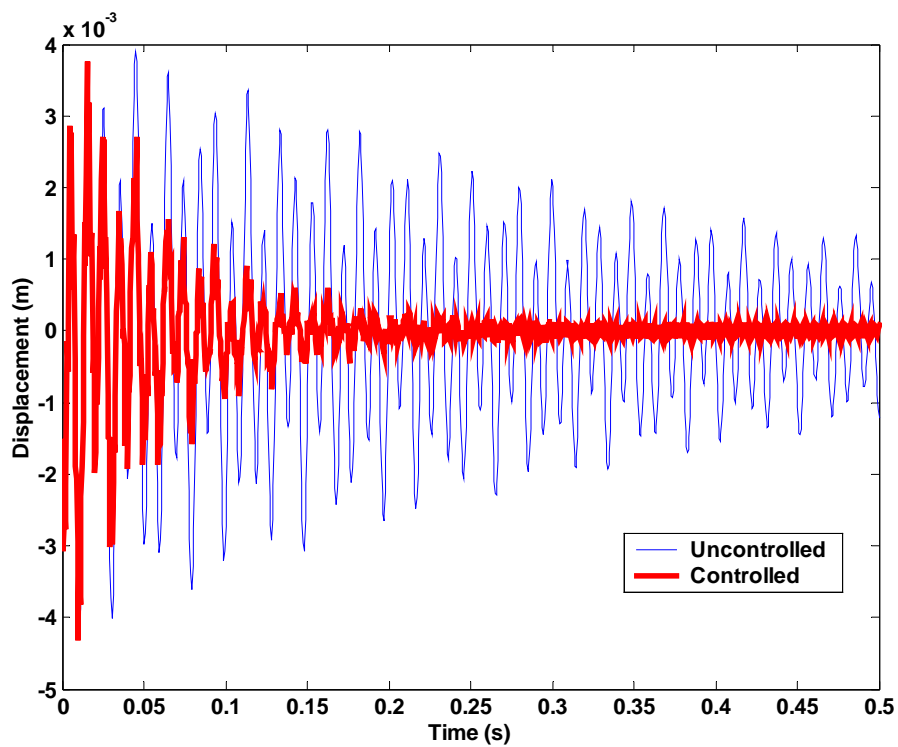


Figura 5.14. Resposta física no domínio do tempo para o sistema sem controle e com controle. (sensor como mostrado na figura 5.1). **correção: onde se lê Displacement (m) deve ser lido Acceleration (mV).**

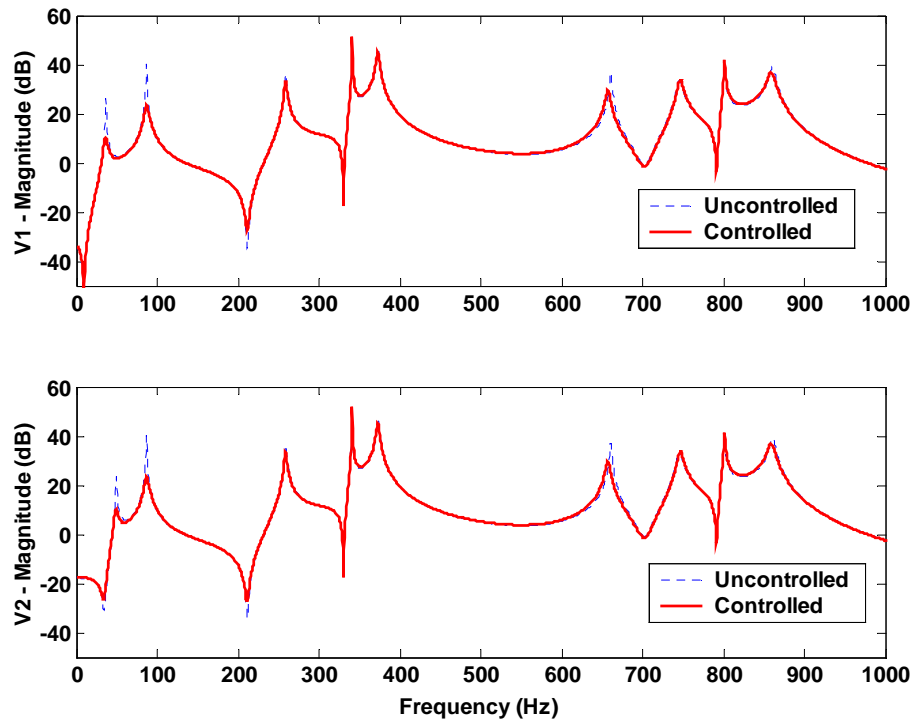


Figura 5.15. FRF  $G_1$  para o sistema sem controle e com controle considerando variação paramétrica, para o sistema na condição do vértice 1 (V1) e vértice 2 (V2). Unidades: mV/mV.

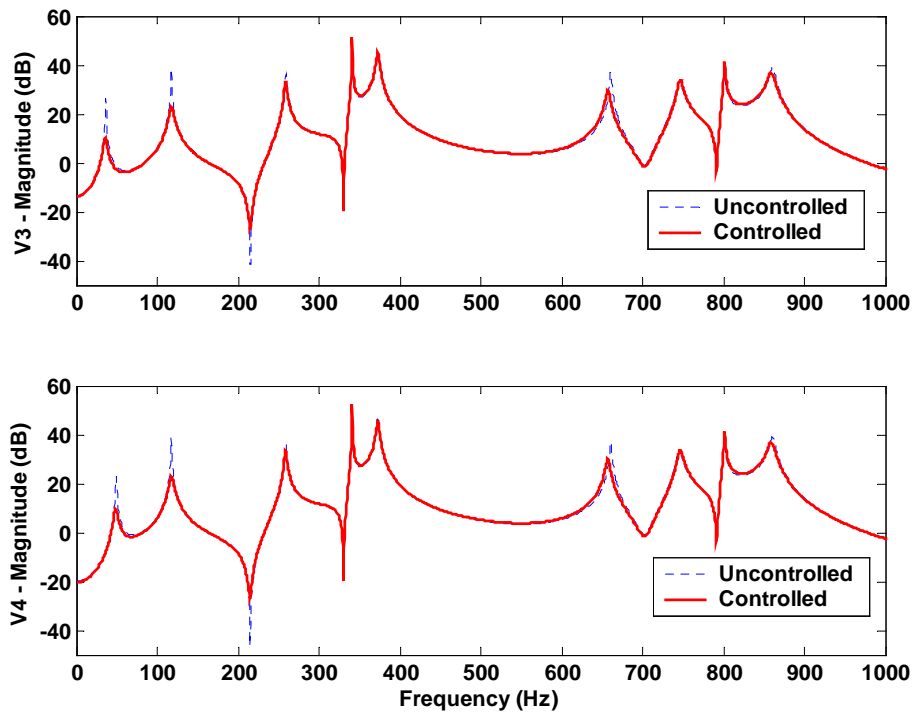


Figura 5.16. FRF  $G_1$  para o sistema sem controle e com controle considerando variação paramétrica, para o sistema na condição do vértice 3 (V3) e vértice 4 (V4). Unidades: mV/mV.

Obviamente o controlador projetado baseado nesta metodologia não garante estabilidade, pois o sistema pode tornar-se instável, uma vez que os modos residuais podem ser excitados pelo sinal de controle. Além disto, têm-se a garantia de limitar a entrada nos PZTs somente no caso onde é bem-conhecida a condição inicial, pois as LMIs usadas neste procedimento de projeto são baseadas no princípio do elipsóide invariante. A condição inicial conhecida é uma exigência para assegurar que não ocorra saturação no nível do sinal de controle. Em muitas aplicações práticas o conhecimento desta condição inicial não é possível. Então, é necessário incluir na metodologia uma técnica específica para contornar esta dificuldade. No próximo exemplo é implementada a formulação  $H_\infty$ , discutida no capítulo 4, para se solucionar o mesmo problema. Neste exemplo será considerado robustez à dinâmica referente somente aos modos residuais.

### 5.1.3. Controle $H_\infty$ via Realimentação da Saída

Este exemplo ilustra a síntese de projeto estudada no capítulo 4 deste texto. O mesmo problema da placa é solucionado por esta metodologia. O primeiro passo é escolher um filtro  $\mathbf{W}_y$  com a função de incrementar o coeficiente de amortecimento do 1.º e do 2.º modo. Assim é escolhido um filtro passa-baixa de 2.º ordem com frequência de corte entre a 1.º e a 2.º frequência natural. Já a dinâmica dos modos residuais é representada por um filtro de baixa ordem  $\mathbf{G}_p$ , atendendo a especificação da inequação (4.13). Os valores dos ganhos usados são  $\mathbf{K}_d=0.001$  e  $\mathbf{K}_w=0.001$ , que foram encontrados após um rápido processo iterativo. As funções de transferência  $\mathbf{W}_y$  e  $\mathbf{G}_p$  são dadas por:

$$\mathbf{W}_y = \frac{5063}{s^2 + 270s + 202500}, \quad \mathbf{G}_p = 0.0025 \frac{\left( \omega_1^2 s^2 + \frac{2\zeta_1}{\omega_1} s + 1 \right)^2}{\left( \omega_2^2 s^2 + \frac{2\zeta_2}{\omega_2} s + 1 \right)^2} \quad (5.3)$$

sendo  $\omega_1=500$  rad/s,  $\omega_2=2700$  rad/s,  $\zeta_1=0.3$  e  $\zeta_2=0.3$ . O modelo da planta aumentada com os respectivos filtros e funções de transferência é mostrado na figura 5.17. A figura 5.18 e 5.19 mostram os gráficos dos valores singulares das funções  $\mathbf{W}_y$  e  $\mathbf{G}_p$ .

A resposta à malha fechada (FRF entre o sinal de distúrbio  $\mathbf{w}$  e o sinal de saída  $\mathbf{y}$ ) do sistema no domínio da frequência pode ser vista na figura 5.20. Observa-se uma boa atenuação nas amplitudes dos dois modos de interesse. Diferente da metodologia aplicada no item 5.1.2, os modos restantes permanecem inalterados.

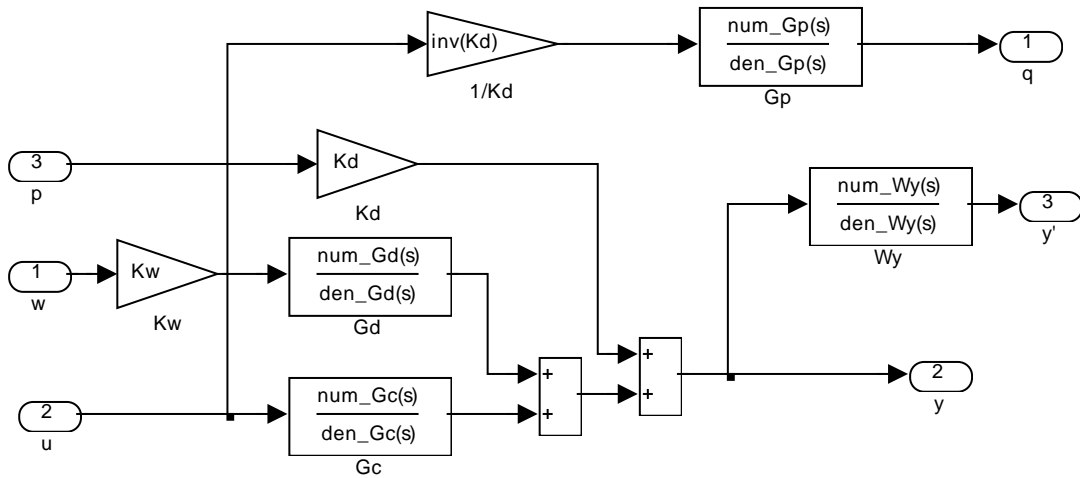


Figura 5.17. Planta generalizada utilizada no projeto do compensador – modelo Simulink®.

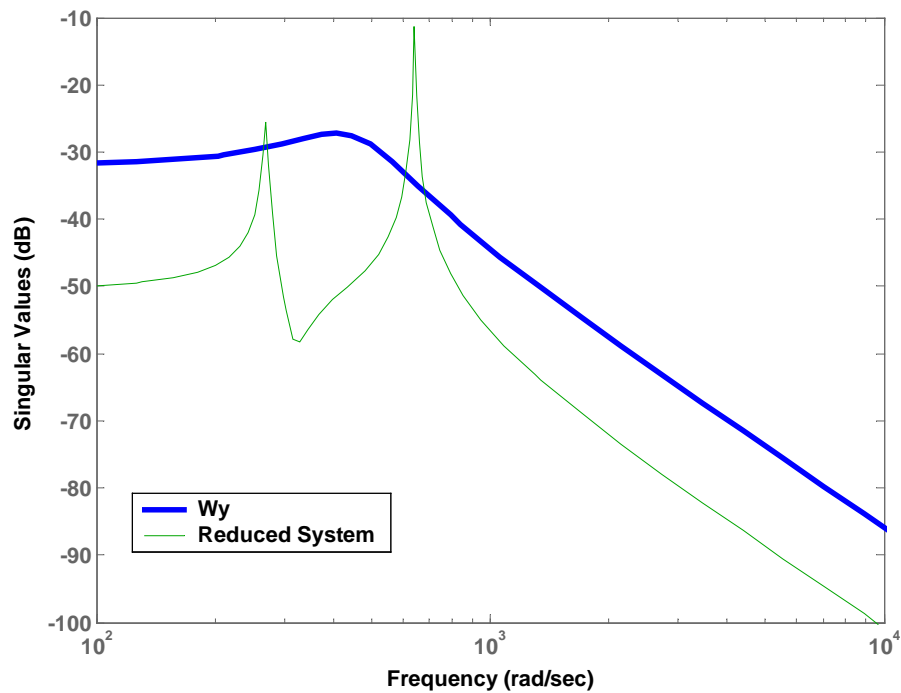


Figura 5.18. Ponderação sobre a função sensibilidade. Unidades: mV/mV.

As características de desempenho e robustez do controlador resultante são avaliadas no domínio da frequência. A função sensibilidade à malha fechada, que nada mais é que a relação entre a saída medida  $y$  e a entrada exógena  $w$ , é mostrada na figura 5.21. A especificação de desempenho é cumprida, uma vez que se observa que a função sensibilidade apresenta um baixo peso na região de frequência referente aos dois primeiros modos e um peso alto na região de alta frequência. Isto significa que existe uma redução nos dois primeiros modos desejados sem

qualquer alteração da dinâmica dos modos residuais. Além disto em nenhum ponto a função sensibilidade cruza o inverso da função de ponderação  $W_y$ , o que significa que a desigualdade expressa pela inequação 4.9 é cumprida.

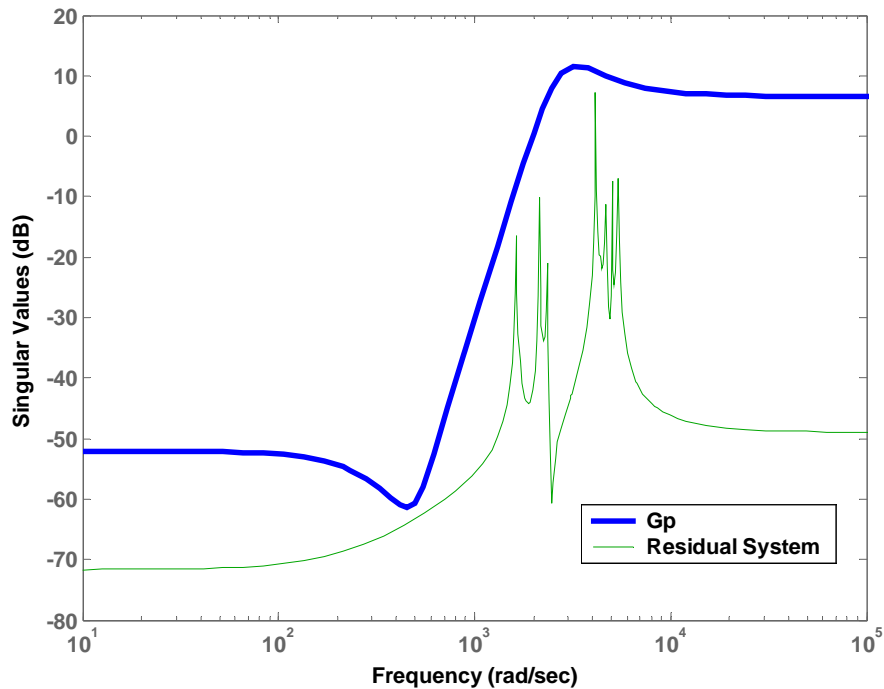


Figura 5.19. Ponderação sobre os modos residuais. Unidades: mV/mV.

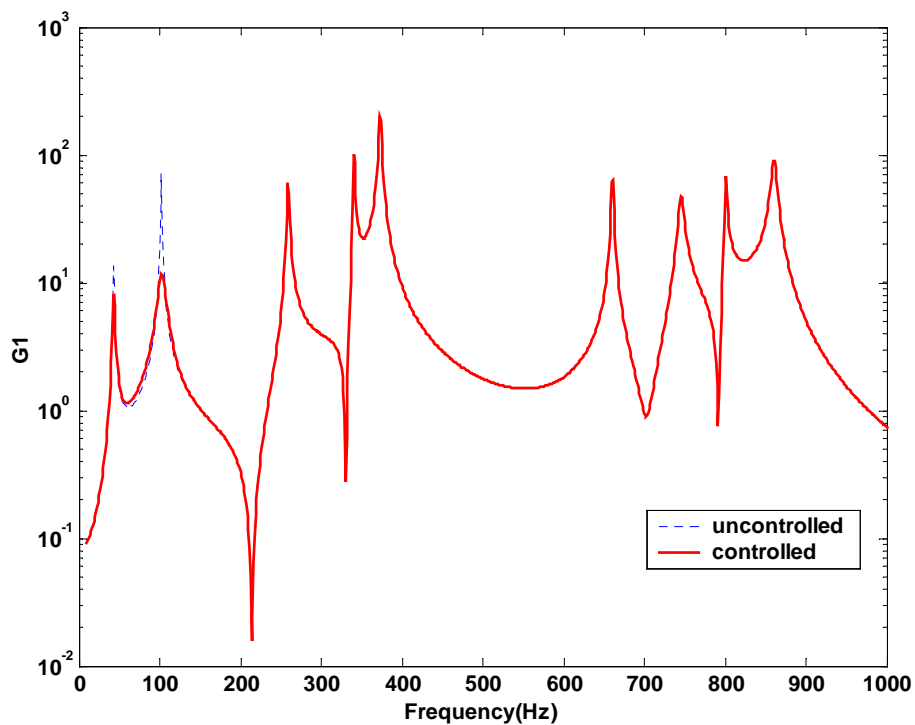


Figura 5.20. FRFs do sistema com controle e sem controle. Unidades: mV/mV.

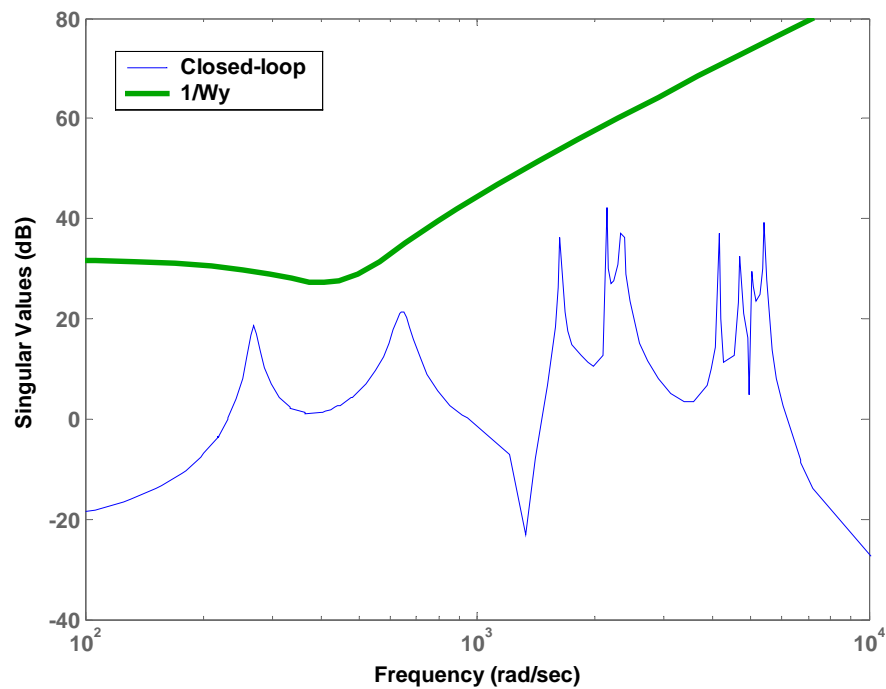


Figura 5.21. Característica de desempenho do sistema – função sensibilidade. Unidades: mV/mV.

A função de restrição de energia, que é a relação entre o sinal de saída do controlador, sinal de controle  $\mathbf{u}$ , e a entrada  $\mathbf{w}$  é mostrada na figura 5.22. A função restrição de energia  $\mathbf{U}$  representa a distribuição de energia do sinal de controle distribuído para cada modo do sistema. Assim, na figura 5.22 fica claro que a energia de controle está concentrada nos dois primeiros modos, que apresentam os maiores picos da função  $\mathbf{U}$ . A energia distribuída para os modos adjacentes tem picos muito pequenos se comparados aos picos dos modos de interesse. A inclusão do modelo de incerteza  $\mathbf{G}_p$  proporcionou esta redução do nível de energia de controle distribuído para a região fora da banda de frequência de interesse. Esta restrição quanto ao sinal de controle excitar outros modos, que não os controlados, é atendida, pois em nenhum momento a função restrição de energia cruza o inverso do modelo de incerteza  $\mathbf{G}_p$ . Em outras palavras isto significa que a restrição imposta pela desigualdade da inequação 4.10 é cumprida. Assim, o sistema permanece estável frente a qualquer conjunto de perturbação desconhecidas  $\Delta$  que atue no sistema, sendo obedecida a especificação de norma limitada conhecida. Portanto, o sistema controlado se torna robusto à dinâmica residual, não considerada no modelo reduzido.

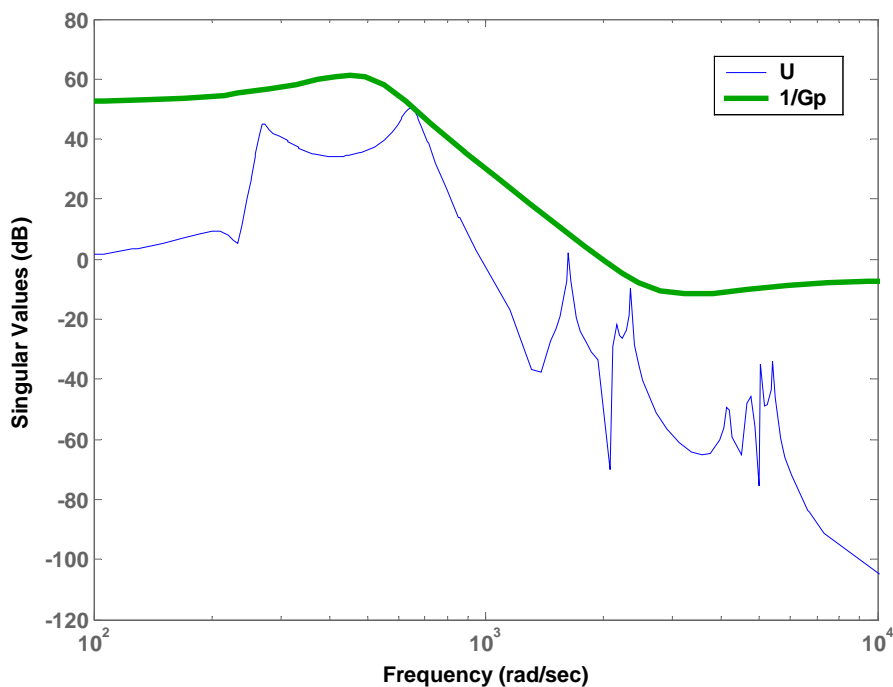


Figura 5.22. Característica de robustez do sistema – função restrição de energia. Unidades: mV/mV.

Outro importante ponto a se destacar é a ordem do compensador final que é igual a ordem da planta generalizada em estudo, ou seja, de  $10^{\text{a}}$  ordem. Este resultado é a soma da ordem 4 para a planta nominal, ordem 2 para o filtro  $\mathbf{W}_y$  e ordem 4 para o modelo de incerteza  $\mathbf{G}_p$ . Esta ordem poderia até ter sido menor se fosse escolhido funções peso de menor ordem. Caso fosse utilizado o modelo completo, o projeto resultaria em  $20^{\text{a}}$  ordem. Lembrando que o sistema foi identificado com 10 modos, sendo 1 modo computacional altamente amortecido inserido para melhorar o processo de identificação. Por outro lado, se fosse utilizado a planta generalizada para projetar um controlador via teoria de valores singulares estruturados a ordem do controlador seria superior a ordem da planta em estudo.

## 5.2. Viga com Atuadores Piezelétricos Incorporados

A figura 5.23 mostra uma estrutura flexível de alumínio do tipo viga, modelada via FEM com 24 elementos (25 nós) com 2 graus de liberdade por nó (um de translação no eixo z e outro de rotação sobre o eixo x). A condição de contorno adotada é a engastada-livre. As propriedades geométricas e físicas da estrutura e dos atuadores PZT a serem utilizados são mostradas nas tabelas 5.2 e tabela 5.3.

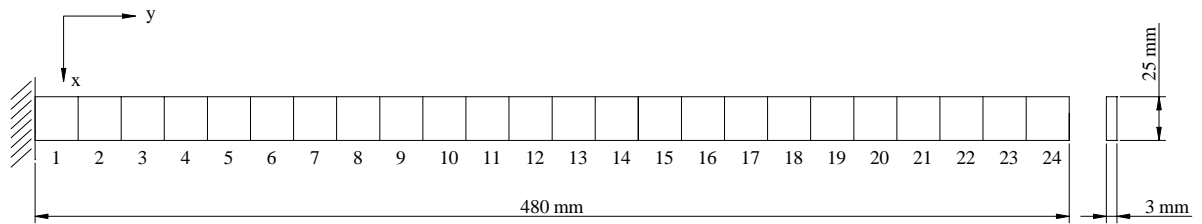


Figura 5.23. Esquema da viga discretizada com as posições candidatas.

Tabela 5.2. Propriedades da Viga.

PROPRIEDADE	VALOR
Módulo de Young (GPa)	70
Coefficiente de Poisson	0.3
Densidade ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	2710
Comprimento (mm)	480
Largura (mm)	25
Espessura (mm)	3

Tabela 5.3. Propriedades do PZT (Piezo Systems, INC.)

PROPRIEDADE	VALOR
Módulo de Young (GPa)	60
Constante piezelétrica ( $\text{m}\cdot\text{V}^{-1}$ )	190e-12
Constante dielétrica ( $\text{C}/\text{m}^2$ )	30.705
Permissividade do ar ( $\text{F}/\text{m}$ )	7.33e-9
Elasticidade ( $\text{m}/\text{N}^2$ )	1.076e11
Comprimento (mm)	20
Largura (mm)	25
Espessura (mm)	0.267

Considera-se que esta estrutura esteja submetida a uma entrada tipo distúrbio que excita os seus modos naturais, fazendo com que as magnitudes dos dois primeiros modos sejam inconvenientes para o funcionamento do sistema. Assume-se isto por um motivo qualquer, poderia ser, por exemplo, geração excessiva de ruído. O problema hipotético descrito neste exemplo é:

Deseja-se atenuar a magnitude nos dois primeiros modos de vibração da estrutura (aumentar o coeficiente de amortecimento). Para isto é sintetizado um regulador ativo (controlador + observador) via LMI com um par de atuadores PZT acoplado a estrutura, evitando assim que o projeto estrutural seja refeito. Um ponto ótimo para atuação sobre os modos específicos é selecionado para colagem dos PZTs na estrutura. O modelo considera a influência da dinâmica do PZT. São considerados no projeto do regulador aspectos de robustez frente à possíveis variações paramétricas da estrutura, limite nas amplitudes dos sinais de entrada/saída e otimização da taxa de decaimento. Um sensor para fins de realimentação é posicionado em um ponto ótimo.

A seguir são explicados em detalhes o posicionamento ótimo do atuador PZT e do sensor de realimentação, a modelagem, discutindo a influência do PZT na dinâmica do modelo e o projeto do regulador via LMI. O modelo dinâmico é testado em várias condições distintas de operação: uma nominal, simulando o funcionamento ideal; e casos de dispersão, devido a possíveis variações paramétricas da planta. Além disto, o controlador foi projetado baseando-se em um modelo de ordem reduzida contendo apenas a dinâmica de interesse, pois caso fosse projetado com base no modelo completo, ele resultaria em alta ordem, tornando a implementação em hardware complexa e cara.

### **5.2.1. Posicionamento do Atuador PZT e do Sensor**

O objetivo é posicionar um par de atuadores PZT em um dos elementos da estrutura para obtenção de um melhor desempenho no controle dos modos de interesse. Assume-se 24 posições candidatas para o PZT, que podem ser vistas na figura 5.23. Já para o sensor se assume que todos os nós são candidatos ao posicionamento (menos o do engaste), portanto têm-se 24 posições candidatas. O sensor utilizado neste exemplo é o de deslocamento. A escolha de um sensor de deslocamento foi simplificar o projeto do controlador, uma vez que as matrizes de transmissão direta, que apareceriam caso fosse utilizado um acelerômetro como sensor de realimentação, são omitidas do projeto.

A figura 5.24 mostra o índice de posicionamento do atuador para os dois modos de interesse em função da posição do PZT e da posição do sensor nos nós candidatos. Este índice é

calculado, segunda a teoria descrita na capítulo 2, e representam a norma  $H_\infty$  dos dois primeiros modos para cada combinação do atuador/sensor.

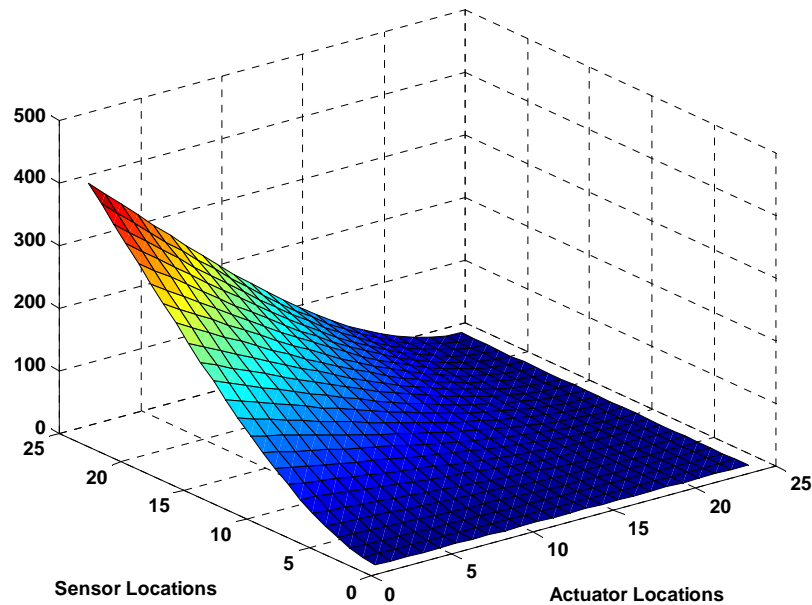


Figura 5.24. Índice de posicionamento versus localização do PZT.

Analisando a figura 5.24 constata-se que o melhor posicionamento para controle dos modos de interesse é localizar o atuador no elemento 1. Porém, o primeiro elemento não é considerado por restrições geométricas, uma vez que é necessário um certo espaço até o engaste para os conectores e fios do PZT (Abreu e Ribeiro, 2002). Visando uma aplicação prática, o PZT foi considerado no 2.º elemento. Já para o sensor a melhor posição é na extremidade livre (nó 24).

Em resumo o PZT será posicionado no elemento 2 e o sensor de realimentação na extremidade livre da viga. Escolhe-se uma posição qualquer para a entrada de distúrbio. O sinal de distúrbio pode ser obtido, por exemplo, através de um martelo de impacto. A figura 5.25 mostra o esquema do sistema a ser controlado, com o atuador, sensor e distúrbio.

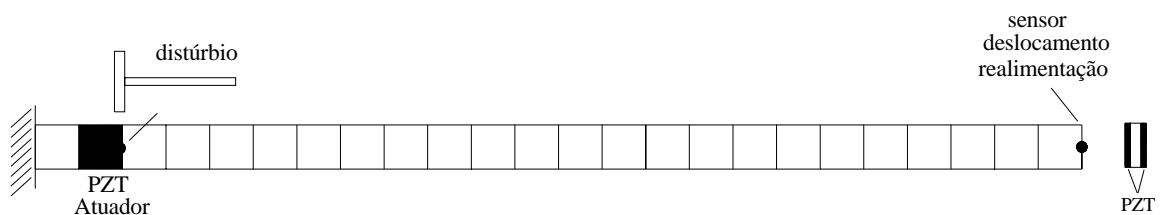


Figura 5.25. Estrutura instrumentada a ser simulada.

### 5.2.2. Caracterização dos Modelos da Estrutura Inteligente

Como foi visto no capítulo 2, a inclusão de atuadores piezelétricos modifica as propriedades da estrutura, sobretudo em sistemas leves. Após posicionar os atuadores em pontos ótimos o efeito do acoplamento eletromecânico do PZT na estrutura base é então incorporado ao modelo e são comparadas as funções de respostas em frequência (FRF), considerando os modelos com e sem o efeito do PZT.

Também são comparadas as respostas dos modelos da estrutura inteligente obtidas através do software comercial de elementos finitos Ansys®. Ressalta-se que no Ansys® é utilizado um modelo 3D (elemento sólido), uma vez que não é possível modelar o PZT como um elemento 2D neste programa. Portanto, o modelo no Ansys® considera modos, que não foram modelados no programa implementado no Matlab®, que se baseia em elementos de viga de Euler-Bernoulli. Porém a comparação entre as frequências naturais nos modos de flexão permite validar o programa implementado, que foi chamado de Smartsys, com o Ansys®. Nota-se a partir da tabela 5.4 que o modelo sem considerar o efeito do acoplamento eletromecânico apresenta uma discrepância grande, a partir da 5.º frequência.

Tabela 5.4. Frequências Naturais (Hz).

Modos	Smartsys		Desvio*	Ansys® Modelo 3D	Desvio*	Desvio+
	Viga	Viga+PZT				
<b>1</b>	10.69	10.92	2.1%	10.87	1.6%	0.4%
<b>2</b>	66.99	67.88	1.3%	68.18	1.7%	0.4%
<b>3</b>	187.58	188.90	0.7%	192.42	2.5%	1.8%
<b>4</b>	367.60	368.32	0.2%	382.68	3.9%	3.7%
<b>5</b>	607.70	606.64	0.2%	647.43	6.1%	6.3%
<b>6</b>	907.90	904.05	0.4%	996.88	8.9%	9.3%

\* em relação ao modelo da viga sem o efeito do PZT.+ em relação ao modelo da viga com o efeito do PZT.

A tabela acima também mostra a diferença nas frequências naturais obtidas através dos dois programas. Nota-se uma grande discrepância a partir da 5.º frequência natural. Isto se deve ao modelo adotado no programa Ansys, que permite apenas a formulação com elementos sólidos. Neste exemplo, a relação de aspectos, dimensões do elemento, comprometeu a exatidão dos modos mais elevados.

Como temos duas entradas e uma saída, temos duas possíveis funções de transferência neste sistema. As funções de transferência  $G_1$  e  $G_2$  são relacionadas as realizações no espaço de estados  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{C})$  e  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C})$ , respectivamente. As magnitudes das FRFs para o modelo na condição nominal de operação são mostradas na fig. 5.26. Considera-se o sistema com e sem o efeito do PZT e também amortecimento proporcional as matrizes de massa e rigidez, com  $\alpha_p=5$  e  $\beta_p=1e-6$ . As formas modais dos modos a serem controladas são mostradas nas figs. 5.27a e 5.27b.

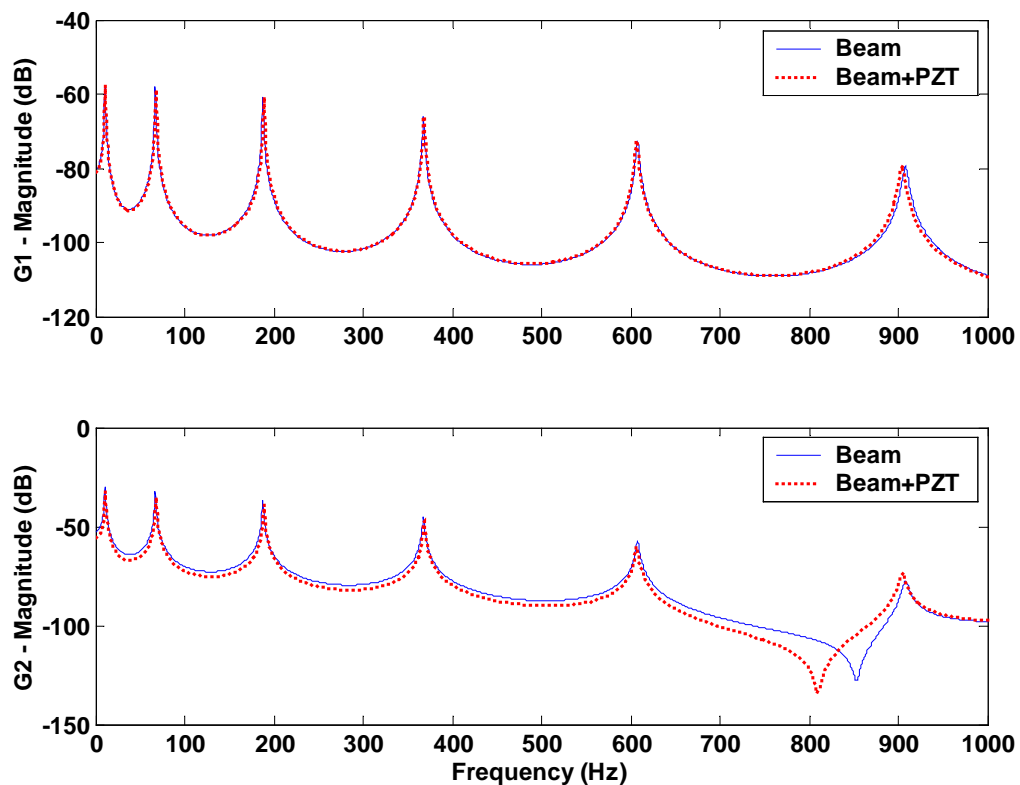
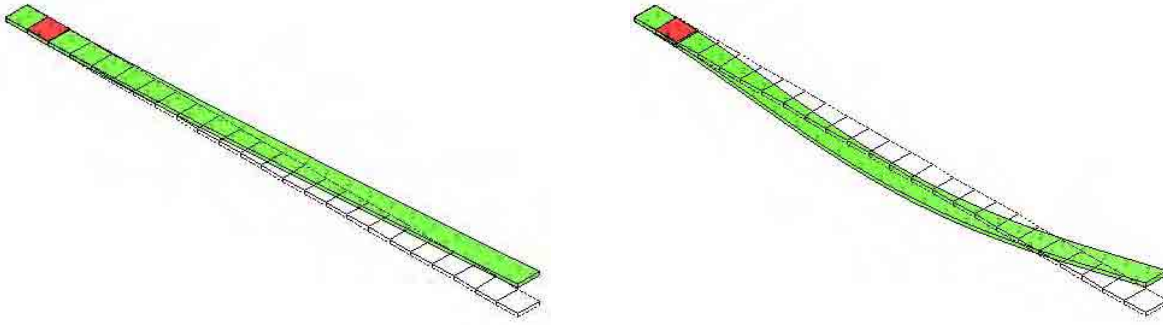


Figura 5.26. FRF, com e sem o efeito do acoplamento eletromecânico considerado no modelo, excitando com o martelo de impacto  $G_1$  e com o PZT  $G_2$ , respectivamente. Unidades: mV/mV.

Mesmo obtendo o modelo matemático com todo o cuidado, este ainda não está totalmente livre de erros. Uma das fontes de erro é a não consideração da espessura da camada de adesivo, ou seja, considera-se que o PZT está perfeitamente fixo na estrutura. Dependendo da relação entre a espessura do elemento piezelétrico e a camada de adesivo, pode haver uma grande redução no momento induzido, Lima (1999). Abreu e Ribeiro (2002) fizeram um processo de ajuste a partir de dados experimentais, procurando ajustar o módulo de elasticidade do PZT para compensar este erro. Outra forma é considerar este efeito no modelo, mas isto foge das metas deste trabalho.



(a) 1.º Modo (10.69 Hz)

(b) 2.º Modo (66.99 Hz)

Figura 5.27. Forma dos modos a serem controlados.

Pelas razões descritas anteriormente e algumas outras incertezas não quantificadas neste trabalho, foram incluídas características de robustez frente a variações paramétricas. São caracterizados quatro modelos para simulação, formando assim uma família de plantas do sistema. Consideram-se quatro vértices extremos que representam as possíveis variações paramétricas da planta. Define-se a nomenclatura vértice 1 (V1), vértice 2 (V2), vértice 3 (V3) e vértice 4 (V4) para cada uma destas condições. Para efeito de simulação considera-se uma variação de  $\pm 10\%$  na primeira e na segunda frequência natural, que corresponde aos modos de interesse, assim temos dois parâmetros incertos:

$$\omega_1 \in [\omega_1^{\min} = 0.9\omega_1 \quad \omega_1^{\max} = 1.1\omega_1], \quad \omega_2 \in [\omega_2^{\min} = 0.9\omega_2 \quad \omega_2^{\max} = 1.1\omega_2] \quad (5.4)$$

que formam um politopo com quatro vértices:

$$\mathbf{A}_{c,1} = \begin{bmatrix} -\zeta_1\omega_1^{\min} & \omega_1^{\min} & 0 & 0 \\ -\omega_1^{\min} & -\zeta_1\omega_1^{\min} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta_2\omega_2^{\min} & \omega_2^{\min} \\ 0 & 0 & -\omega_2^{\min} & -\zeta_2\omega_2^{\min} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{V1} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{A}_{c,2} = \begin{bmatrix} -\zeta_1\omega_1^{\max} & \omega_1^{\max} & 0 & 0 \\ -\omega_1^{\max} & -\zeta_1\omega_1^{\max} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta_2\omega_2^{\min} & \omega_2^{\min} \\ 0 & 0 & -\omega_2^{\min} & -\zeta_2\omega_2^{\min} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{V2} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{A}_{c,3} = \begin{bmatrix} -\zeta_1 \omega_1^{\min} & \omega_1^{\min} & 0 & 0 \\ -\omega_1^{\min} & -\zeta_1 \omega_1^{\min} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta_2 \omega_2^{\max} & \omega_2^{\max} \\ 0 & 0 & -\omega_2^{\max} & -\zeta_2 \omega_2^{\max} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{V3} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{A}_{c,4} = \begin{bmatrix} -\zeta_1 \omega_1^{\max} & \omega_1^{\max} & 0 & 0 \\ -\omega_1^{\max} & -\zeta_1 \omega_1^{\max} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta_2 \omega_2^{\max} & \omega_2^{\max} \\ 0 & 0 & -\omega_2^{\max} & -\zeta_2 \omega_2^{\max} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{V4} \quad (5.8)$$

Como se deseja controlar apenas os dois primeiros modos, obtêm-se através de um método de redução um modelo de quarta ordem contendo apenas a dinâmica de interesse no projeto do controlador. A figura 5.28 mostra as magnitudes destas FRFs para o modelo de ordem completa, modelo de ordem reduzida e modelo residual para a condição de operação nominal. A figura 5.29 mostram as FRFs para as condições de variação. A figura 5.30 mostra a família de plantas reduzidas onde se pode observar as dispersões nas frequências para as diferentes condições de operação. Nenhuma especificação sobre o desempenho para os modos de alta frequência foi incluída no projeto deste controlador.

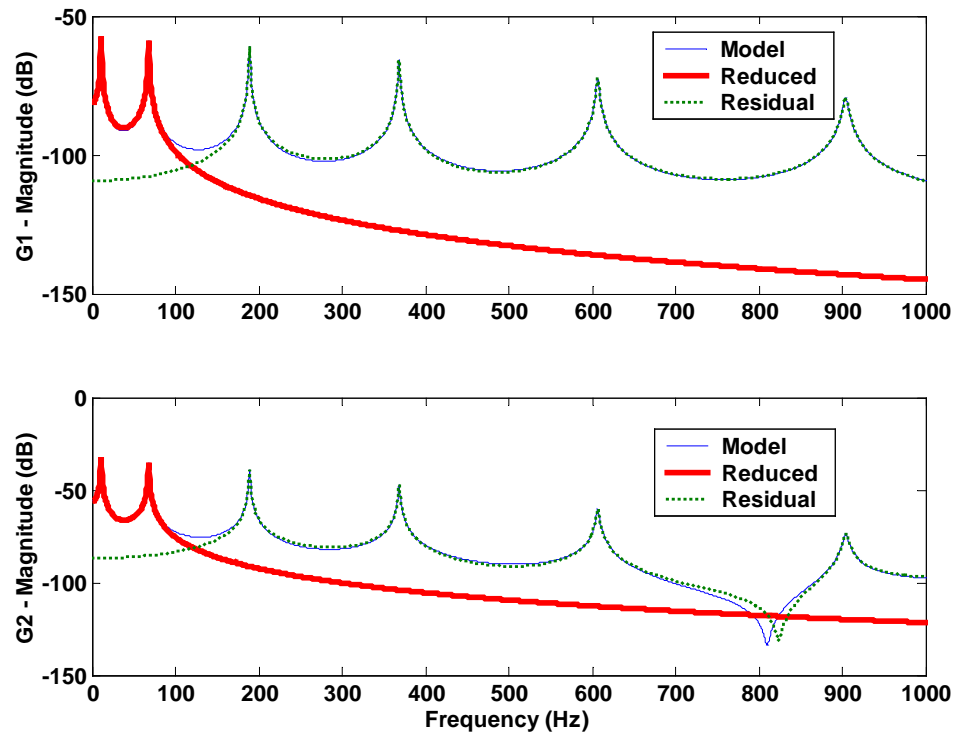
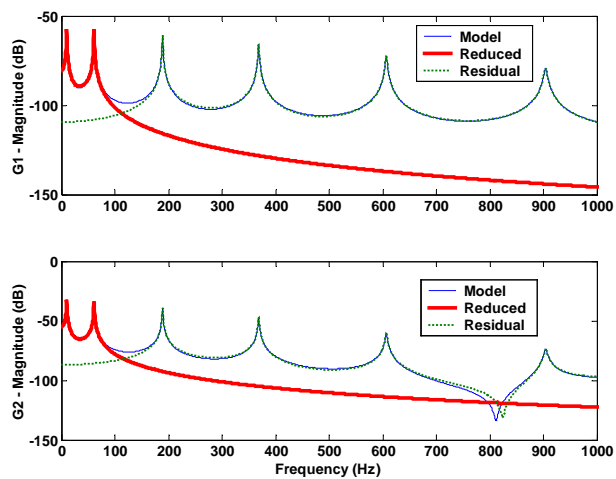
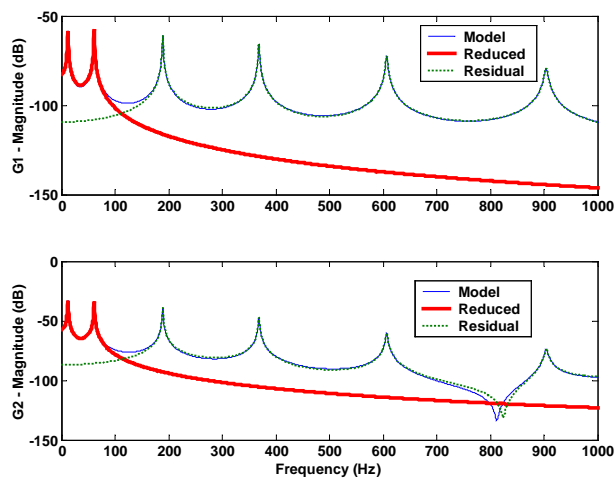


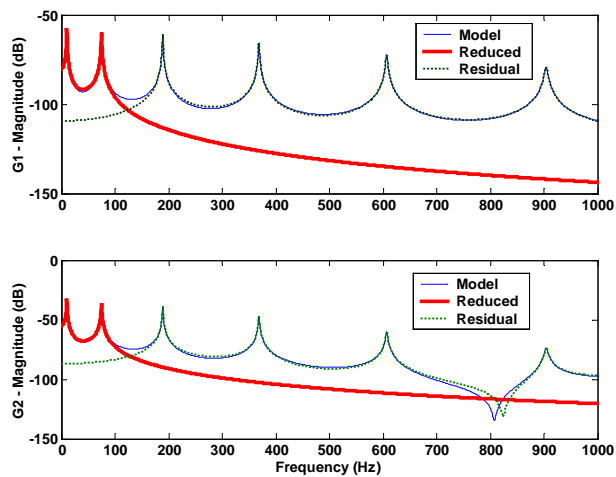
Figura 5.28. FRFs do modelo completo, reduzido e residual – Condição Nominal. Unidades: mV/mV.



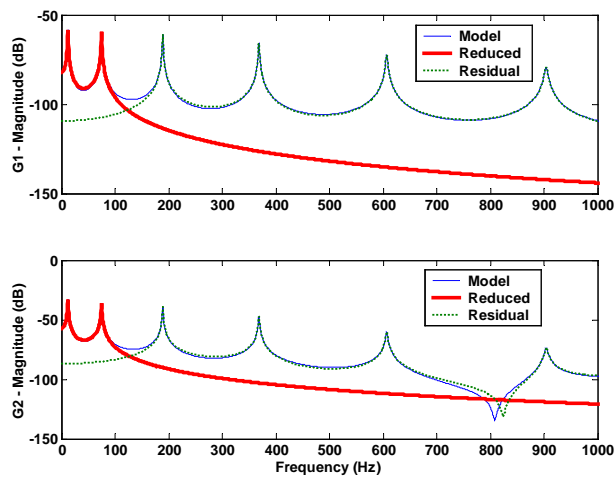
(a) sistema na condição V1



(b) sistema na condição V2



(c) sistema na condição V3



(d) sistema na condição V4

Figura 5.29. FRFs do modelo completo, reduzido e residual para os 4 vértices do polítopo.

Unidades: mV/mV.

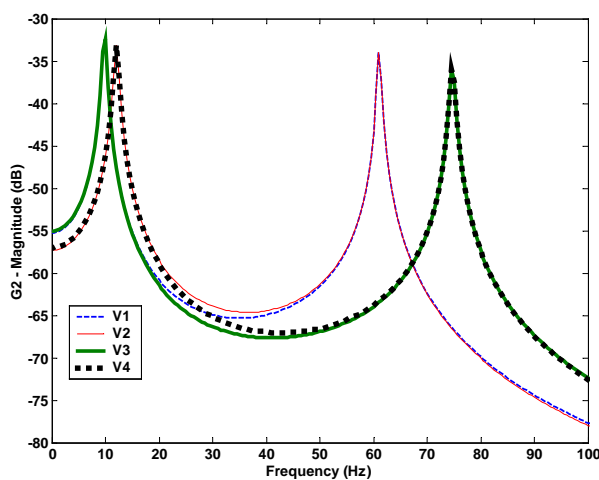
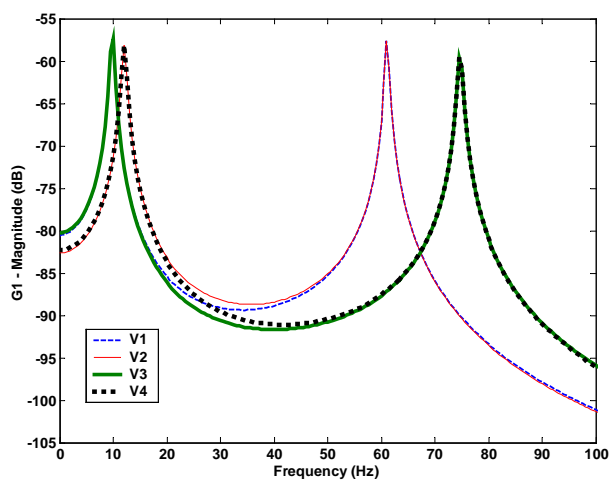


Figure 5.30. Família de plantas de ordem reduzida. Unidades: mV/mV.

### 5.2.3. Projeto do Controlador Robusto

O controlador foi sintetizado através da resolução do problema de otimização dado por (3.53), considerando a família de plantas da fig. 5.30 e utilizando os parâmetros  $\rho=0.5$ ,  $\beta=1$  e  $\mathbf{x}(0)=[-0.009 \ 0 \ 0 \ -0.009]^T$ . Foi considerada a realimentação de estados estimados por um observador dinâmico, calculado a partir do problema LMI dado por (3.55), apenas para a condição nominal. As restrições também incluem taxa de decaimento do observador seis vezes maior do que a do controlador ( $\gamma=6\alpha$ ). As simulações foram feitas a partir da eq. (3.61) que considera os efeitos de “spillover” de observação e controle. O controlador robusto teve a seguinte matriz de ganho resultante:

$$\mathbf{K}_c=[19.8963 \ -4.4678 \ 3.6119 \ -0.2147]$$

já a matriz de ganho do observador foi:

$$\mathbf{K}_e=10^4[-2.2121 \ 1.5612 \ 6.8296 \ 1.1035]^T$$

Os gráficos das FRFs para os sistemas com controle e sem controle para o modelo na condição nominal e os quatro vértices são mostrados nas figuras 5.31 e 5.32, respectivamente.

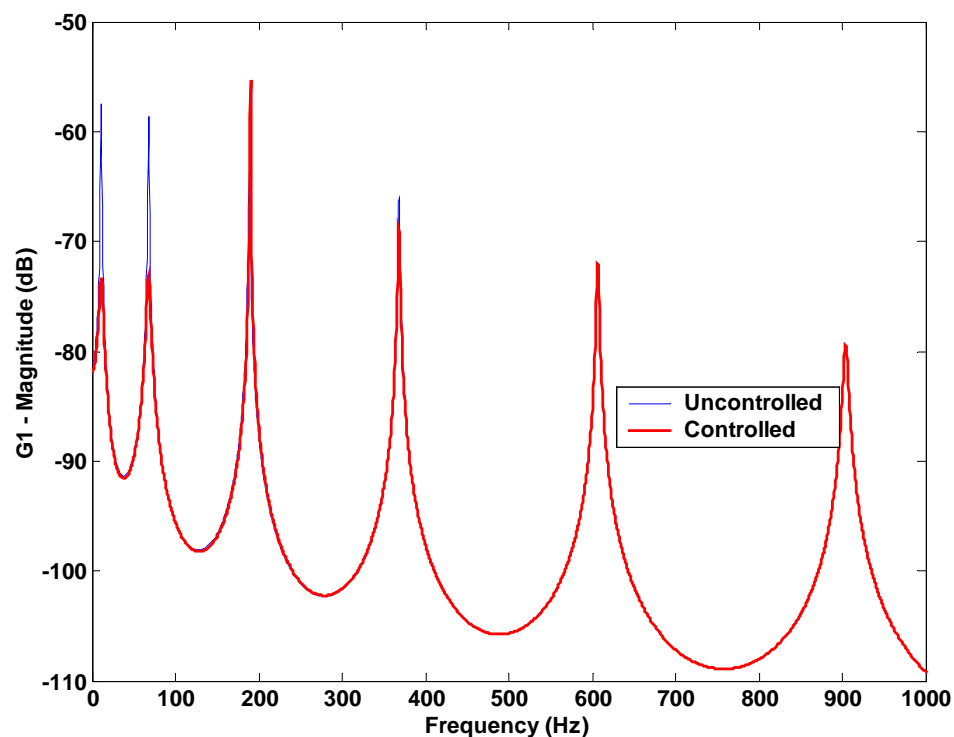
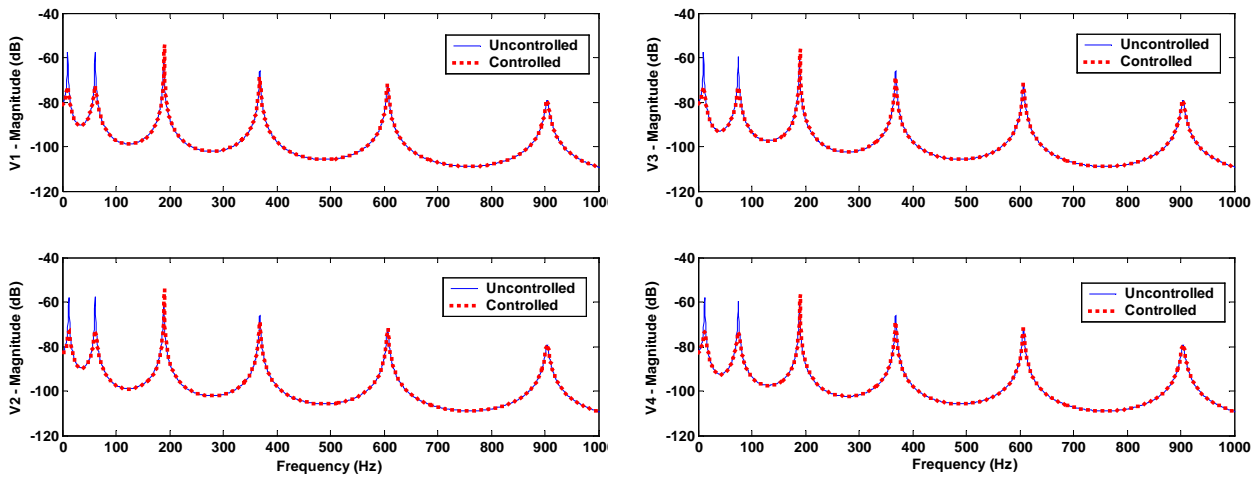


Figura 5.31. FRF para o sistema à malha aberta e à malha fechada – Condição Nominal.

Unidades: mV/mV.

O sinal de controle no domínio do tempo é mostrado na figura 5.33 para o sistema na condição nominal. As respostas para os quatro vértices do politopo são similares e omitidas. Foi considerado durante o projeto que o máximo potencial elétrico permitido a ser aplicado no PZT era limitado a 150 V.



(a) sistema V1 e V2, respectivamente.

(b) sistema V3 e V4, respectivamente.

Figura 5.32. FRF à malha aberta e à malha fechada para os 4 vértices do politopo. Unidades: mV/mV.

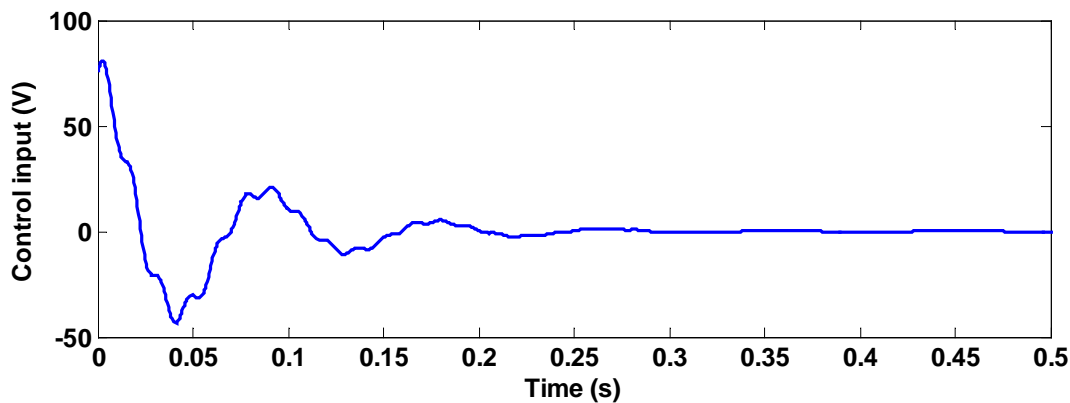


Figura 5.33. Sinal de controle para sistema na condição nominal.

A resposta no tempo, para a mesma condição inicial utilizada no projeto do controlador, para o sistema controlado é mostrada nas figura 5.34 e 5.35. Nesta figura são mostradas as respostas para os modos controlados e alguns modos residuais (3.º, 4.º, 5.º e 6.º modo) na condição nominal. A resposta física do sistema é uma combinação linear de todos os modos. Claramente se observa que a maior contribuição para a resposta física do sistema é devida aos modos de baixa frequência, 1.º modo e 2.º modo, que são os controlados. As respostas domínio

do tempo para os quatro vértices do polítopo são similares as respostas encontradas nas figuras 5.34 e 5.35 (condição nominal) e por este motivo não foram incluídas no presente texto.

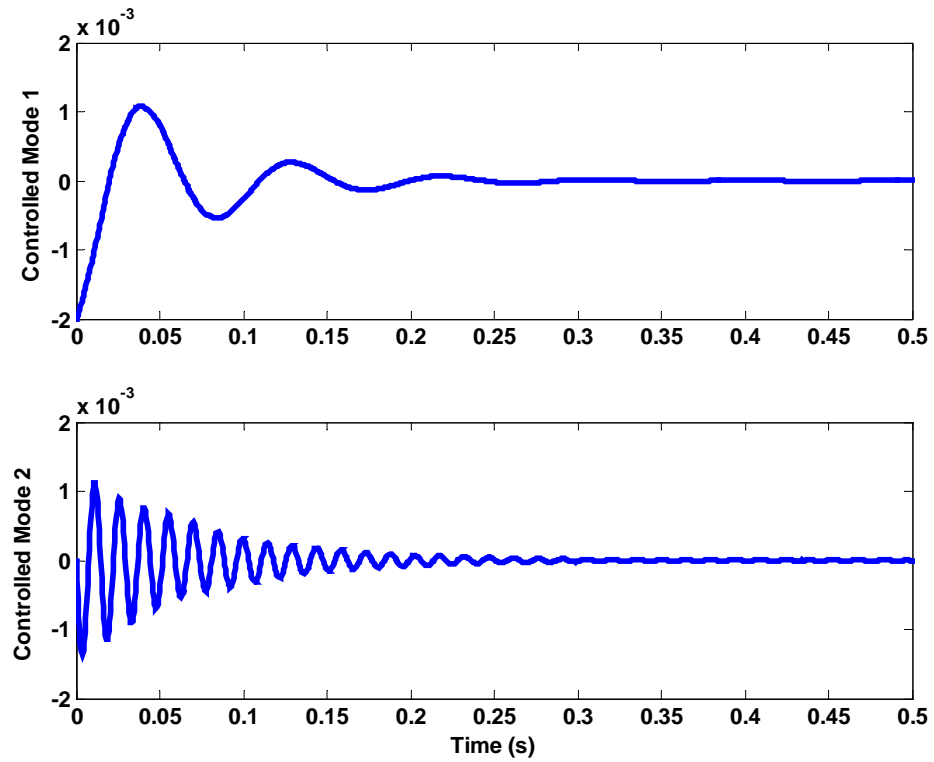


Figura 5.34. Resposta no tempo dos modos controlados, 1.º e 2.º modo – condição nominal.

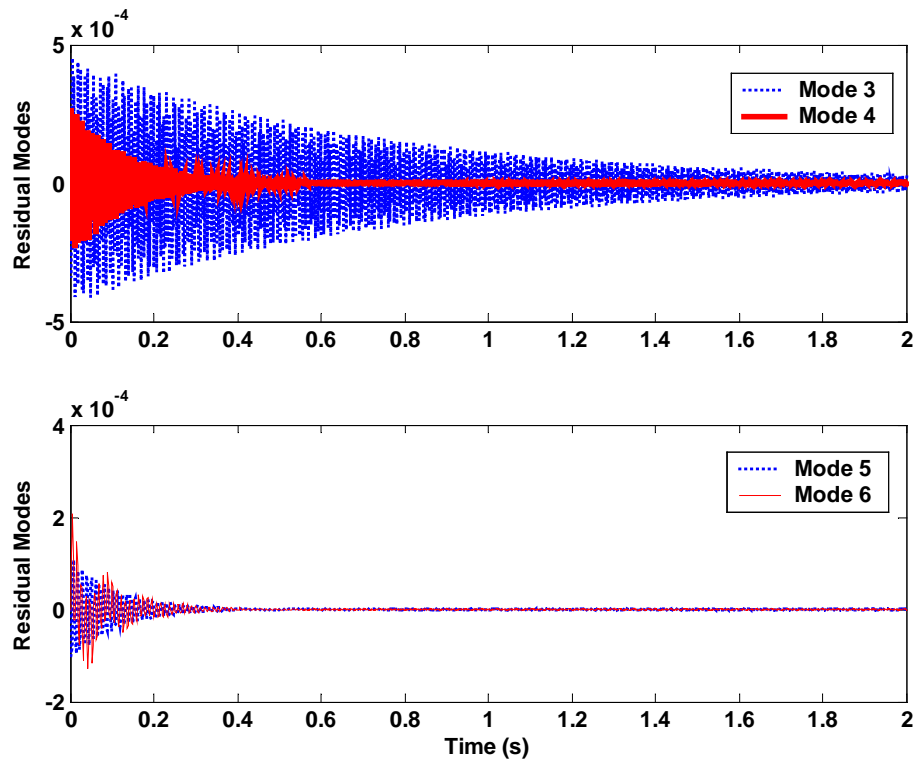


Figura 5.35. Resposta no tempo de 4 modos residuais – condição nominal.

O efeito do “spillover” de observação não desestabiliza o sistema, como pode ser visto no mapeamento dos pólos do sistema à malha fechada na condição nominal, fig. 5.36. Porém o efeito de “spillover” de controle existe, como pode ser visto na figura 5.35. No entanto, a amplitude modal foi muito pequena se comparada com a amplitude dos modos controlados, além de tender a desaparecer à medida que os modos controlados vão sendo decaídos.

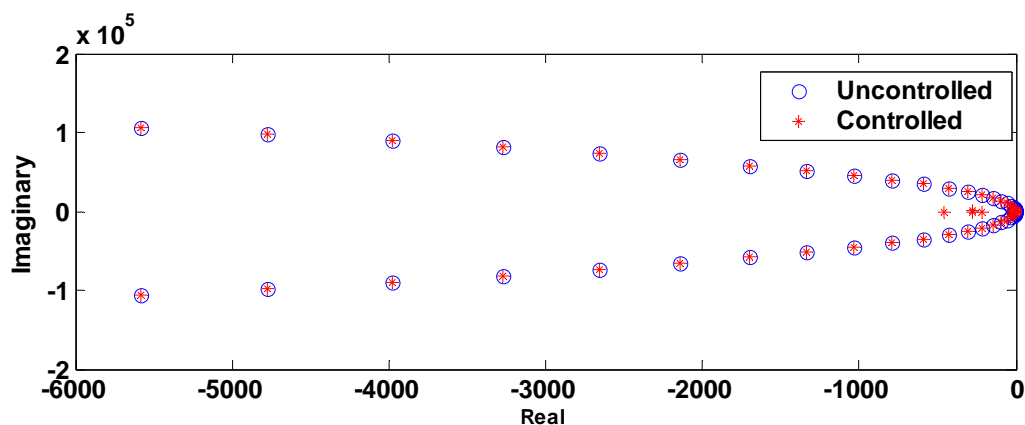


Figura 5.36. Mapeamento de pólos do sistema – condição Nominal.

#### 5.2.4. Verificação Experimental

Nesta etapa são mostrados dois testes experimentais com o propósito de validar o modelo FEM desenvolvido. Para isto, as frequências naturais da estrutura com os atuadores piezelétricos acoplados são obtidas experimentalmente e comparadas com as frequências obtidas no modelo simulado através do programa Smartsys. Um esquema da viga com a instrumentação empregada é mostrado nas figuras 5.37 e 5.38. Ressalta-se que as dimensões e propriedades da viga e dos PZTs são as mesmas da estrutura simulada nas etapas anteriores.

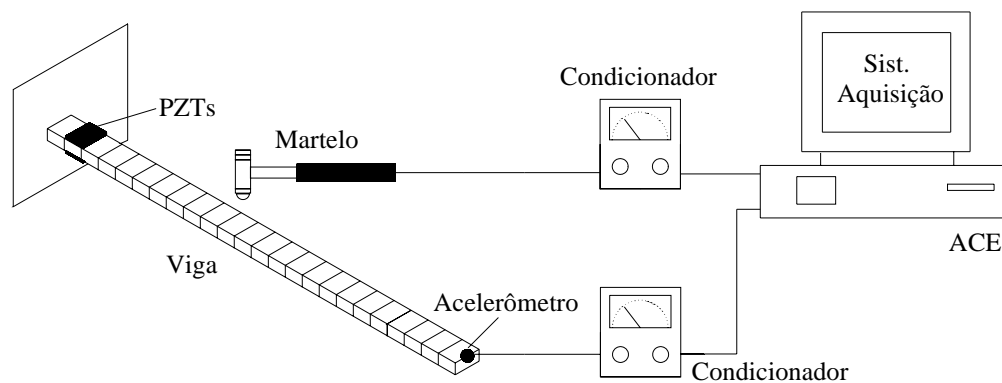


Figura 5.37. Esquema da instrumentação utilizada no ensaio experimental, para excitação com o martelo de impacto.

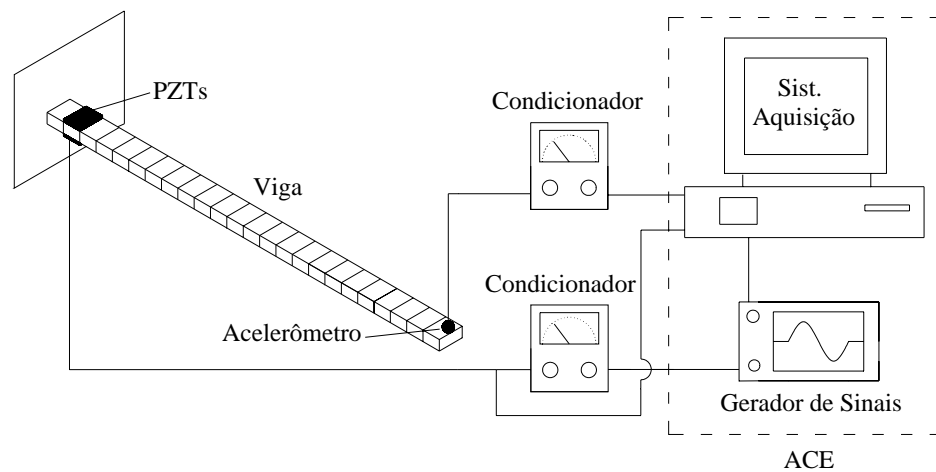
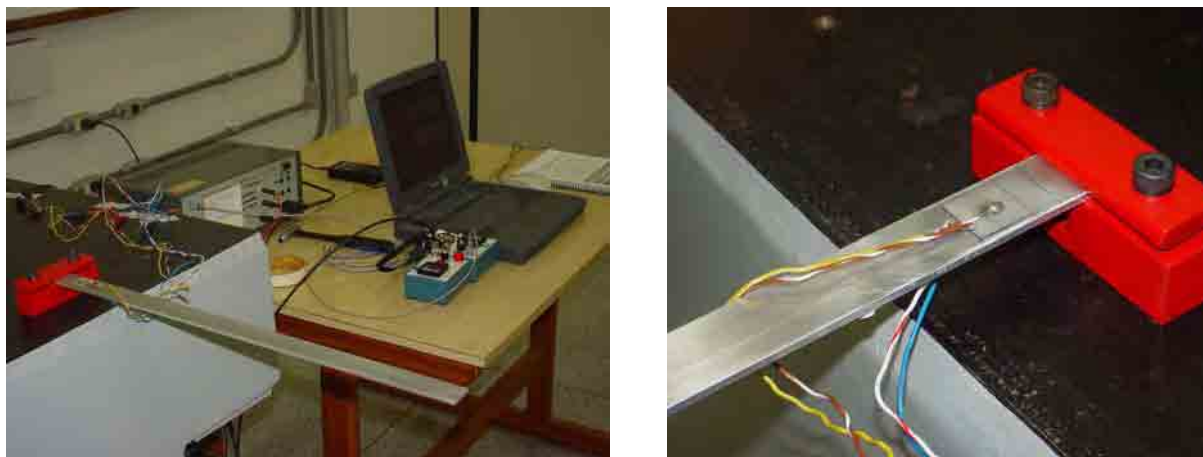


Figura 5.38. Esquema da instrumentação utilizada no ensaio experimental, para excitação com o par de atuadores PZT.

Utiliza-se neste experimento os seguintes equipamentos:

- 01 microcomputador, para armazenagem, processamento e análise dos dados do ensaio, equipado com placa de aquisição e conversão de sinais analógico/digital e digital/analógico.
- software de análise de sinais Signal Calc ACE®.
- 01 martelo de impacto, modelo 086C04 da PCB Piezotronics®
- 01 acelerômetro, modelo 352A10 da PCB da PCB Piezotronics®.
- 02 condicionadores de sinais, modelo 480E09 da PCB Piezotronics®.

Os testes experimentais são realizados utilizando dois diferentes tipos de excitação. No primeiro, esquema apresentado na fig. 5.37, a estrutura é excitada com o martelo de impacto, obtendo assim a função de transferência  $G_1$ , relacionada com as matrizes  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{C})$ . Já no segundo teste, esquema da figura 5.38, a estrutura é excitada com o par de atuadores PZTs, obtendo assim a função de transferência  $G_2$ , relacionada com as matrizes  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C})$ . O sinal de excitação para o atuador PZT é produzido pelo gerador de sinais do software Signal Calc Ace® e consiste de um seno com varredura em frequência (“chirp sine”) de 0 até 1000 Hz. Este sinal gerado é amplificado e alimenta os atuadores PZTs acoplados a viga. Já o sinal da resposta do sistema é medido pelo acelerômetro fixado na extremidade livre da viga e passa pelo condicionador de sinais, sendo encaminhado em seguida ao sistema de aquisição. Uma vista geral do experimento é mostrada na fig. 5.39.



(a) Vista geral do ensaio.

(b) detalhe da piezoestrutura engastada.

Figura 5.39. Vista do teste experimental realizado.

As figuras 5.40 e 5.41 mostram o gráfico da FRF da estrutura obtida experimentalmente e as FRFs para os modelos simulados com e sem o efeito do acoplamento eletromecânico.

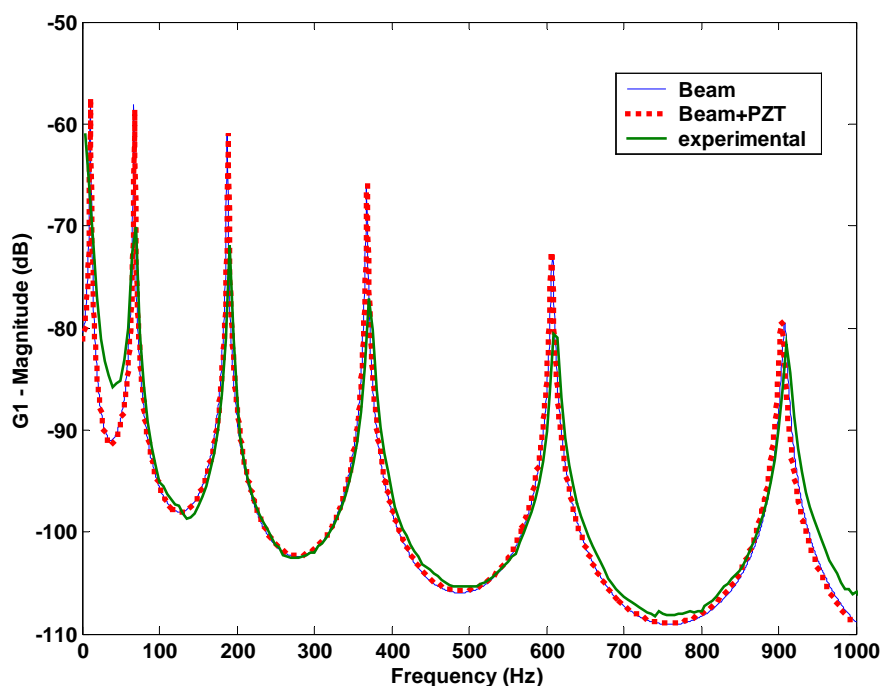


Figura 5.40. FRF experimental e dos modelos simulados, excitando com o martelo de impacto.

Unidades: mV/mV.

Observa-se que a curva experimental se aproxima mais do modelo simulado considerando o efeito do acoplamento eletromecânico. As amplitudes da curva experimental e das curvas simuladas são diferentes e isto é justificado pelo fato do amortecimento real da estrutura não ser exatamente conhecido. A curva experimental da figura 5.42 tem uma boa concordância com as

curvas simuladas até a região próxima a 600 Hz, a partir daí esta curva se distancia muito. Isto indica erros no modelo, possivelmente, provocados pela simplificação na obtenção do modelo dinâmico. A tabela 5.5 mostra a diferença entre as frequências dos modelos simulados e da curva experimental, tendo como referência a curva experimental. Ressalta-se que as frequências experimentais foram obtidas a partir de uma média com o teste com o martelo e com os atuadores piezelétricos. Na análise destes dados, deve-se considerar que não foi realizado nenhum tipo de ajuste de modelos e que as condições de contorno do experimento não são exatamente as representadas pelo modelo.

Tabela 5.5. Frequências naturais (Hz) dos modelos simulados e curva experimental.

MODO	FREQ. EXP.	SMART BEAM (MATLAB®)			
		Viga	Desvio	Viga+PZT	Desvio
1	10.5	10.69	1.8%	10.92	3.8%
2	68.3	66.99	1.9%	67.88	0.6%
3	190.1	187.58	1.3%	188.90	0.6%
4	371.4	367.60	1.0%	368.32	0.8%
5	612.3	607.70	0.7%	606.64	0.7%
6	910.11	907.90	0.2%	904.05	0.7%

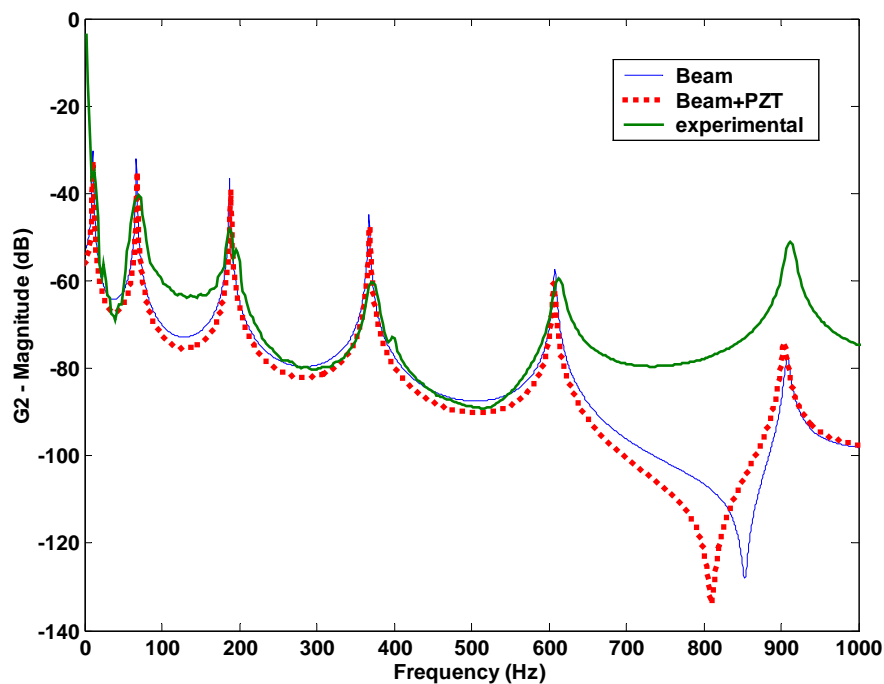


Figura 5.41. FRF experimental e dos modelos simulados, excitando com o atuador PZT.

Unidades: mV/mV.

### 5.3. Supressão Ativa de Flutter em um Aerofólio 2D

Flutter é uma vibração em voo de estruturas flexíveis causada pela energia no escoamento de ar sendo absorvida pelas superfícies sustentadoras. Tipicamente uma estrutura será estável até uma velocidade limite (a velocidade de flutter) para dadas condições.

Este fenômeno é mais susceptível de ocorrer em asas, ailerons e outras partes flexíveis de aeronaves com considerável carregamento aerodinâmico. É um fenômeno aeroelástico de interesse na indústria aeronáutica, pois o flutter pode causar aumento de fadiga de asas e dificultar altas velocidades de voo, além de ser uma instabilidade potencialmente destrutiva, resultante de uma interação entre forças aerodinâmicas, de inércia e estruturais, (Bisplinghoff et al., 1996).

Para contornar este efeito, é possível utilizar técnicas passivas e ativas. Entre as técnicas passivas se destaca o balanço de massas, porém isto pode adicionar muita massa para a estrutura sendo, portanto, algo indesejável. Outra solução seria voar abaixo da velocidade de flutter, porém isto pode prejudicar o desempenho de voo. Por outro lado, supressão ativa de flutter consiste de um sistema de controle automático *onboard* que atua no sistema. O primeiro teste de um equipamento deste foi feito em 1973 em uma aeronave B-52-E que voou em velocidade acima da velocidade limite. Uma boa revisão histórica do fenômeno flutter e formas de suprimi-lo é encontrado no trabalho De Marqui Jr et al. (2001).

Nos dias atuais, existem diversos tipos de controladores que podem ser utilizados para controle ativo de flutter. Por exemplo, Olds (1997) usa uma placa fina em um fluxo bidimensional e simula numericamente o modelo sem controle usando o Matlab®. A teoria do regulador linear quadrático (LQR) foi usada para projetar um controlador com realimentação de estados para manter o sistema estável à malha-fechada na velocidade de flutter. Apesar do bom desempenho, os resultados não são reais, pois o controlador LQR exige que todos os estados sejam conhecidos para se realimentar o sistema. Em uma aplicação real esta é uma situação difícil de ocorrer, pois não existem sensores específicos para medição de estados aerodinâmicos.

Bail (1997), considerando o mesmo modelo de Olds (1997), usou um estimador de estados para contornar o problema descrito no parágrafo anterior. Ele investigou e comparou dois métodos de controle usando observadores dinâmicos: controle LQG e controle  $H_\infty$ , solucionados pela equação de Ricatti. Bail (1997) considera o problema de rejeição de distúrbios assumindo o modelo de distúrbio externo como uma rajada de vento na superfície do flap.

Norlander et al. (2000) também usaram controle LQG para avaliar um modelo em testes em túnel de vento. Por sua vez, Haley and Soloway (1996) fizeram uma investigação

experimental em um túnel de vento para demonstrar o uso do controle preditivo generalizado para controlar flutter em um aerofólio subsônico.

Técnicas não convencionais também podem ser usadas para suprir flutter. Belo et al. (2001) mostraram uma investigação na aplicação de lógica fuzzy usando o método de Mandani para estabelecer leis para supressão de flutter. Eles simularam uma estrutura aeroelástica 2-D (NACA, 0012 tipo asa rígida retangular) com comportamento aerodinâmico não-linear.

Harman and Liu (2002) demonstram que é necessário considerar robustez em projetos de controle e discutem algumas técnicas populares sugerindo o uso de LMIs. Assim, neste exemplo, a meta é usar técnicas LMIs para projetar um controle ativo de realimentação de estados para supressão de flutter. Devido a estados aerodinâmicos imensuráveis é necessário o uso de um observador dinâmico. Então, LMIs também foram aplicadas para se projetar um estimador de estados. Inicialmente, o modelo simulado, consistindo de uma placa fina em um fluxo bidimensional, é formulado sucintamente. Na seqüência, foram projetados dois controladores, o primeiro não-robusto à variação paramétrica e o segundo robusto. A incerteza paramétrica é modelada através de incertezas politópicas. O exemplo conclui com a simulação de cada controlador. Também são comparadas as respostas à malha aberta e à malha fechada e o desempenho em ambos os controladores.

### 5.3.1. Modelo Aeroelástico do Aerofólio 2D

Um típico aerofólio é visto como uma placa suspensa em um ponto fixo por uma mola. O modelo básico é ilustrado na fig. 5.42, (York, 1980).

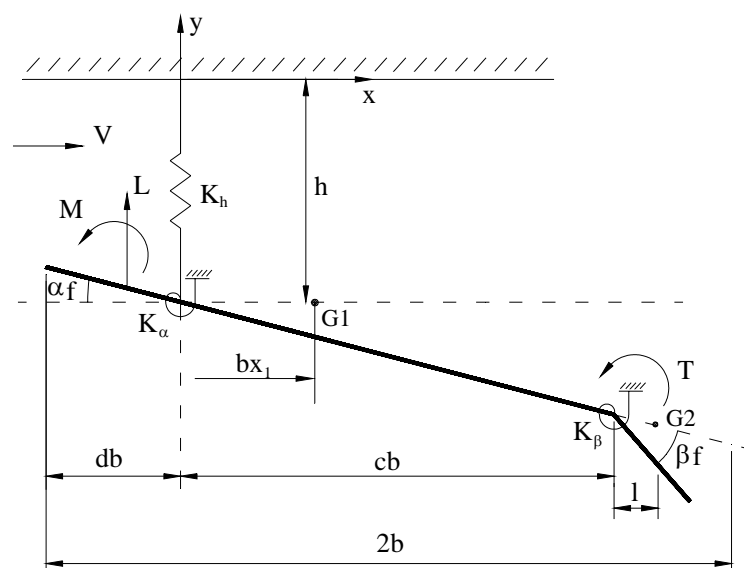


Figura 5.42. Seção transversal de um típico aerofólio 2D.

O movimento do aerofólio é descrito por três coordenadas independentes: o *plunge*  $h$ , o *pitch*  $\alpha_f$ , e o *ângulo flap*  $\beta_f$ . Para representar melhor as forças atuantes na seção transversal devido a asa ser presa, pode-se usar molas lineares e torsionais. Assim a mola linear representando a força de restauração para o *plunge* do aerofólio é assumida ter constante  $K_h$ . Além disto, a mola torsional tem constante  $K_\alpha$  e a mola do *flap* tem constante  $K_\beta$ . O controle no *flap* é localizado na ponta da asa. A meta é projetar um controlador que produza um torque adicional  $T_s$  no *flap*.

O aerofólio é assumido estar sujeito a três cargas aerodinâmicas, L, M e T, cada uma aplicada em uma superfície específica do aerofólio. A modelagem é dividida em duas partes: a primeira é relacionada a obtenção das equações do movimento, através da aplicação da segunda lei de Newton ou das equações de Lagrange, e a segunda etapa considera a inclusão do modelo aeroelástico. Para a proposta desta pesquisa, muitos destes detalhes são omitidos, porém uma descrição completa desta modelagem clássica é apresentada nos trabalhos de Bail (1997), Olds (1997) e em um trabalho submetido à revista da ABCM, Silva e Lopes Jr. (2004b).

Neste sentido, a partir do diagrama de corpo livre da figura 5.43 e após uma manipulação matemática obtém-se a seguinte equação do movimento:

$$\begin{bmatrix} bm & S_\alpha & S_\beta \\ bS_\alpha & I_\alpha & I_\beta + S_\beta bc \\ bS_\beta & I_\beta + S_\beta bc & I_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h}/b \\ \ddot{\alpha}_f \\ \ddot{\beta}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} bK_h & 0 & 0 \\ 0 & K_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & K_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha_f \\ \beta_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L \\ -M \\ -(T + T_s) \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

sendo  $S_\alpha$  o momento estático do aerofólio por unidade de comprimento,  $S_\beta$  o momento estático da superfície de controle do flap,  $I_\alpha$  o momento de inércia do aerofólio e  $I_\beta$  o momento de inércia da superfície de controle do flap. Além destas variáveis, temos a massa  $m$ , soma da massa do corpo 1 e do corpo 2, a constante normalizada  $b$  e a distância não-dimensionalizada  $c$ . Para o sistema à malha aberta se considera  $T_s=0$ .

A equação (5.9) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{K}_f \mathbf{Y}(t) = \begin{Bmatrix} -L \\ -M \\ -(T + T_s) \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

sendo:

$$\mathbf{M}_f = \begin{bmatrix} bm & S_\alpha & S_\beta \\ bS_\alpha & I_\alpha & I_\beta + S_\beta bc \\ bS_\beta & I_\beta + S_\beta bc & I_\beta \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} bK_h & 0 & 0 \\ 0 & K_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & K_\beta \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

onde as matrizes  $\mathbf{M}_f$  e  $\mathbf{K}_f$  são as matrizes globais de massa e rigidez, respectivamente.

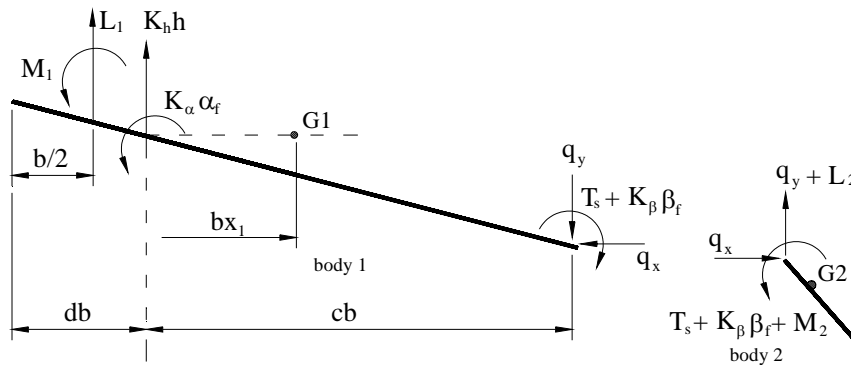


Figure 5.43. Diagrama de corpo livre do corpo principal e da superfície de controle, (Olds, 1997).

Seguindo a formulação em York (1980), pode-se aplicar a transformada de Laplace na equação (5.10). Este procedimento converte o sistema para o domínio da frequência e o movimento do aerofólio fica definido com oscilações harmônicas simples. Considerando as equações linearizadas e a teoria aerodinâmica obtém-se as equações que fornecem a distribuição de pressão sobre a asa e as respostas aerodinâmicas. Após a obtenção das equações do sistema básico, a transformada inversa de Fourier é usada para a obtenção do modelo no espaço de estados. Para maiores detalhes sobre este tópico consulte York (1980) e Olds (1997). Para a proposta do presente exemplo consideramos o modelo no espaço de estados da forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (5.13)$$

sendo  $\mathbf{A}$  a matriz dinâmica,  $\mathbf{B}$  a matriz de entrada de controle,  $\mathbf{C}$  a matriz de saída,  $\mathbf{y}(t)$  é vetor de saídas,  $\mathbf{u}(t)$  o sinal de controle (torque aplicado na superfície do flap) e  $\mathbf{x}(t)$  é o vetor de estados dado por:

$$\mathbf{x}(t) = \left\{ \dot{\mathbf{Y}}(t) \quad \mathbf{Y}(t) \quad \mathbf{x}_a(t) \right\}^T, \quad \mathbf{Y}(t) = \left\{ \frac{h(t)}{b} \quad \alpha_f(t) \quad \beta_f(t) \right\}^T, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{x}_a(t) = \left\{ A_{a1}(t) \quad A_{a2}(t) \quad A_{a3}(t) \quad A_{a4}(t) \right\}^T$$

sendo  $\mathbf{x}_a(t)$  os estados aerodinâmicos que são usados para descrever o “estado” do fluido representando o carregamento aerodinâmico no aerofólio. A obtenção da matriz  $\mathbf{A}$  é omitida neste texto, mas é encontrada em detalhes em Olds (1997) e Silva e Lopes Jr. (2004b). O importante é notar que a matriz dinâmica é função da velocidade, assim dependendo da velocidade de vôo o sistema dinâmico pode ser estável ou instável. Já a matriz de entrada é dada por:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\mathbf{I}_\beta} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_f^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Neste estudo, as medidas de  $h$ ,  $\beta_f$  e  $\alpha_f$  e suas respectivas velocidades são assumidas serem mensuráveis. Assim, a matriz de saídas é dada por:

$$\mathbf{C} = [\mathbf{I}_{6 \times 6} \quad \mathbf{0}_{6 \times 4}] \quad (5.16)$$

Uma vez que nem todos os estados são medidos, pois os estados aerodinâmicos são imensuráveis, deve-se construir um observador para estimar estes estados a partir das medidas que são mensuráveis.

### 5.3.2. Sistema à Malha Aberta

Para verificar a metodologia proposta são apresentados resultados de simulação para o sistema à malha aberta para diferentes velocidades. Considera-se as seguintes velocidades  $V = 290$  m/s,  $V = 298$  m/s e  $V = 305$  m/s, que são as mesmas utilizadas em Olds (1997) mas convertidas para o sistema internacional de medidas. A velocidade  $V = 298$  m/s é a velocidade de flutter ( $V_f$ ) e representa a velocidade que o sistema à malha aberta torna-se marginalmente estável. Assim, para  $V < V_f$  o sistema é assintoticamente estável e para  $V > V_f$  o sistema é instável. Neste caso ( $V > V_f$ ) o movimento do aerofólio torna-se instável e existe a possibilidade de uma falha abrupta. Esta é uma situação muito perigosa que não pode ocorrer em um sistema real.

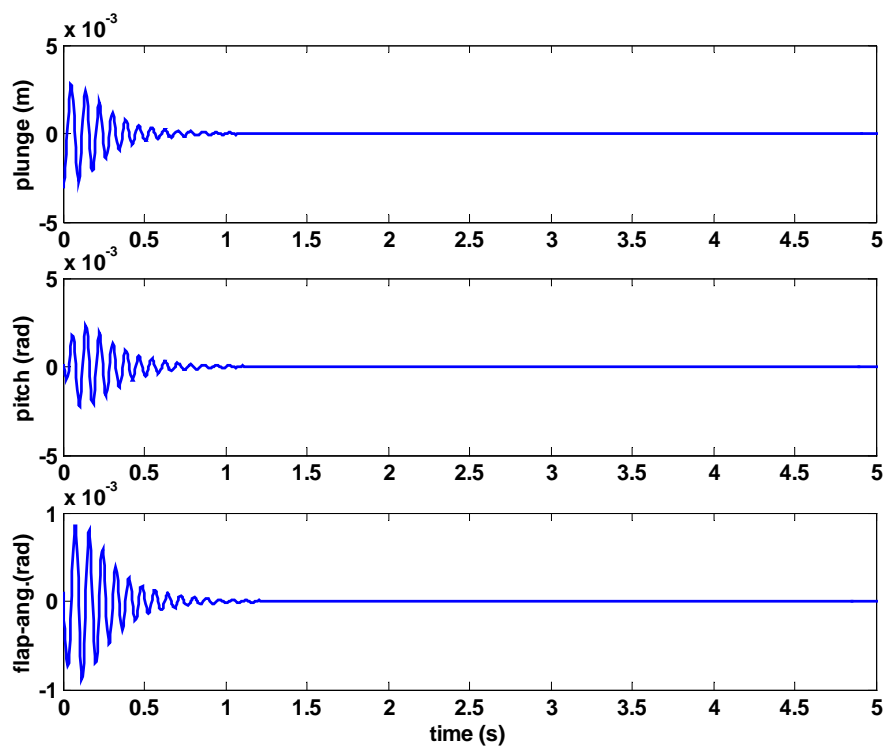
As figuras 5.44, 5.45 e 5.46 mostram as respostas aeroelásticas à malha aberta no domínio do tempo para cada velocidade sem considerar incerteza em nenhum dos parâmetros do modelo. Considera-se, nesta aplicação o seguinte vetor de condição inicial:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} 0.0152 \\ -0.01 \\ 0.005 \\ -0.003 \\ 0.0001 \\ 0.0001 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

Nos gráficos apresentados o tempo é de 0 até 5 segundos, discretizados em 1024 pontos. A lista de constantes usadas na simulação é mostrada na tabela 5.6.

Tabela 5.6. Lista de constantes utilizada, (Silva e Lopes Jr, 2004b, adaptadas de Olds, 1997).

Parametro	Valor (Sistema Internacional)
$\alpha_1$	0.0165 [rad]
$\alpha_2$	0.335 [rad]
b	0.914 [m]
$\beta_1$	0.41 [rad]
$\beta_2$	0.32 [rad]
c	1.0
$I_\alpha$	2.69e1 [kg.m]
$I_\beta$	6.73e-1 [kg.m]
m	1.287e2 [kg/m]
$K_h$	$m \cdot 50^2$ [N/m]
$K_\alpha$	$I_\alpha 100^2$ [N/m]
$K_\beta$	$I_\beta 500^2$ [N/m]
$\rho$	1225 [kg/m <sup>3</sup> ]
$S_\alpha$	2.35e1 [kg]
$S_\beta$	1470 [kg]

Figura 5.44. Resposta aeroelástica à malha aberta com  $V = 290$  m/s, (sistema estável,  $V < V_f$ ).

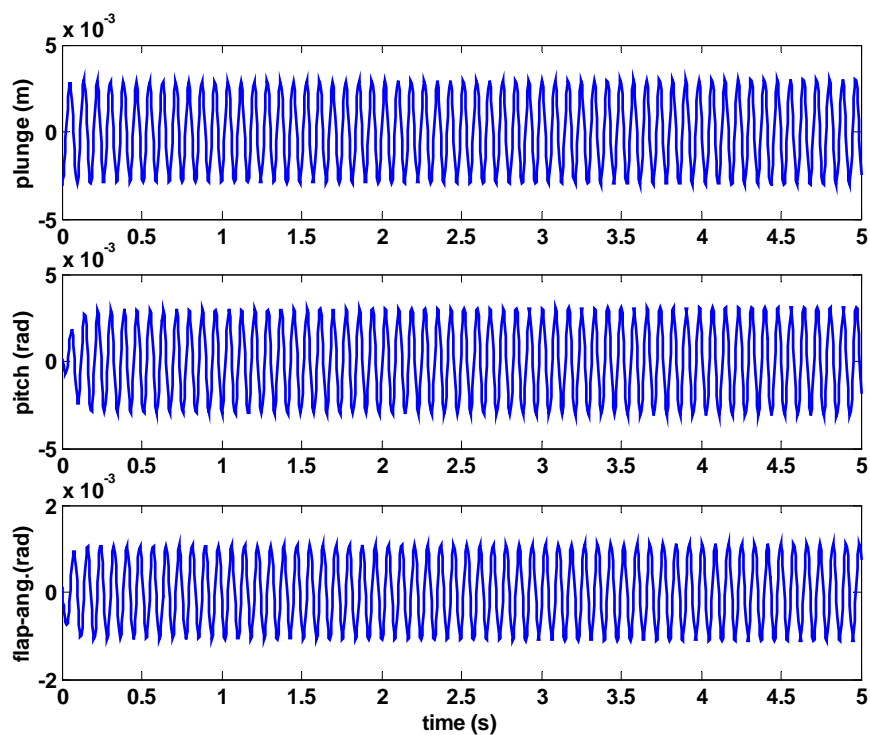


Figura 5.45. Resposta aeroelástica à malha aberta com  $V = V_f = 298$  m/s (sistema marginalmente estável).

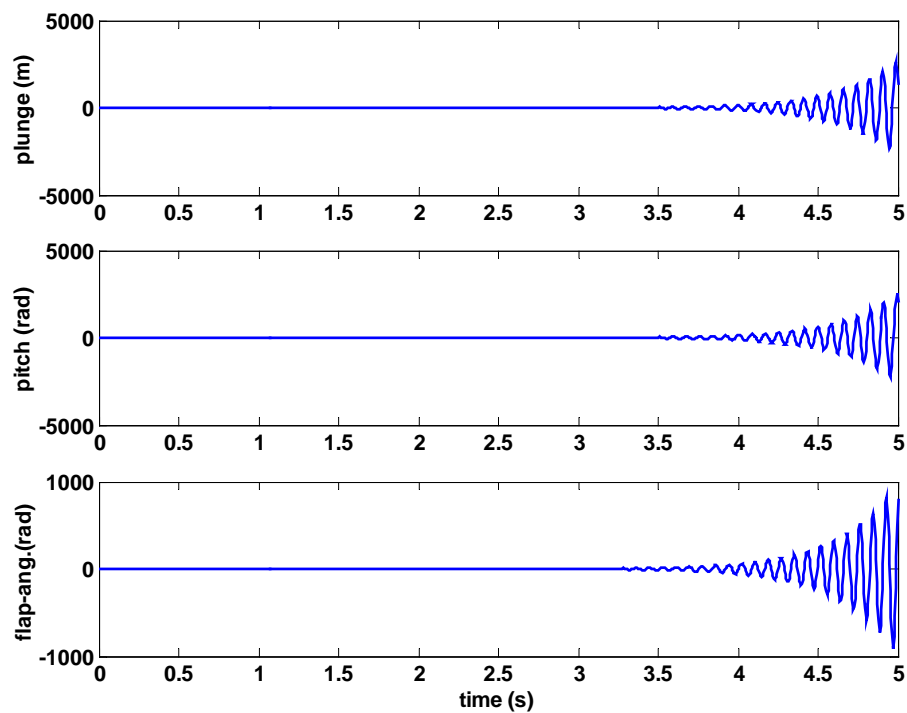


Figura 5.46. Resposta aeroelástica à malha aberta com  $V = 305$  m/s (sistema instável,  $V > V_f$ ).

### 5.3.3. Sistema à Malha Fechada

Nesta seção o controlador é projetado para a velocidade  $V = 305$  m/s (caso instável). A meta é projetar um regulador baseado na solução das LMIs descritas no capítulo 3 deste trabalho. Consideram-se as taxas de decaimento do controlador e do observador, como sendo  $\alpha = 1$  e  $\gamma = 3$ , e  $\mu = 250$  respectivamente.

Para testar a potencialidade da metodologia, primeiramente se projeta o regulador não-robusto a incertezas no modelo. A matriz de ganho de realimentação de estados não robusto é obtida pela solução do seguinte LMIP:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{Q} > \mathbf{0} \\
 & \mathbf{QA}^T + \mathbf{AQ} + \mathbf{BY} + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T + 2\alpha\mathbf{Q} < \mathbf{0} \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Y}^T \\ \mathbf{Y} & \mu^2\mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

A matriz de ganho do controlador  $\mathbf{K}_c = \mathbf{YQ}^{-1}$  é obtida da solução das desigualdades (5.18). O observador é obtido pela solução de  $\mathbf{K}_e = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{W}$ , onde  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{W}$  são soluções do seguinte LMIP:

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA} + \mathbf{WC} + \mathbf{C}^T\mathbf{W}^T + 2\gamma\mathbf{P} < \mathbf{0} \tag{5.19}$$

A figura 5.47 mostra a resposta a malha-fechada para esta condição. O controlador alcançou as exigências impostas e a resposta à malha-fechada é estável. A entrada de controle para este regulador robusto, o torque  $T_s$ , é calculado através da equação (3.52) e mostrado na figura 5.48.

Entretanto, se for considerada uma variação paramétrica, verifica-se que o sistema torna-se instável. O sistema foi assumido ter uma possível variação de  $\pm 10\%$  nos valores de rigidez da mola do *flap* ( $K_\beta$ ), mola do *pitch* ( $K_\alpha$ ) e rigidez do *plunge* ( $K_h$ ). Então, existem três parâmetros incertos ( $p=3$ ).

$$\begin{aligned}
 K_\beta^{\min} &= 0.9K_\beta^N < K_\beta < K_\beta^{\max} = 1.1K_\beta^N \\
 K_\alpha^{\min} &= 0.9K_\alpha^N < K_\alpha < K_\alpha^{\max} = 1.1K_\alpha^N \\
 K_h^{\min} &= 0.9K_h^N < K_h < K_h^{\max} = 1.1K_h^N
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

sendo  $K_\beta^N$ ,  $K_\alpha^N$  e  $K_h^N$  os valores nominais dos parâmetros das respectivas molas. Para as considerações acima existem oito ( $2^3$ ) vértices do sistema politópico. As incertezas são mostradas na figura 5.49. Os vértices dos parâmetros são combinações dos valores mínimos e máximos das incertezas do sistema. É suposto que o sistema pode assumir qualquer combinação de valores dentro deste espaço. Os vértices correspondem a V1 ( $K_\beta^{\min}$ ,  $K_\alpha^{\min}$ ,  $K_h^{\min}$ ), V2 ( $K_\beta^{\min}$ ,  $K_\alpha^{\max}$ ,  $K_h^{\min}$ ), V3 ( $K_\beta^{\min}$ ,  $K_\alpha^{\min}$ ,  $K_h^{\max}$ ), V4 ( $K_\beta^{\min}$ ,  $K_\alpha^{\max}$ ,  $K_h^{\max}$ ), V5 ( $K_\beta^{\max}$ ,  $K_\alpha^{\min}$ ,  $K_h^{\min}$ ), V6 ( $K_\beta^{\max}$ ,  $K_\alpha^{\max}$ ,  $K_h^{\min}$ ), V7 ( $K_\beta^{\max}$ ,  $K_\alpha^{\min}$ ,  $K_h^{\max}$ ), e V8 ( $K_\beta^{\max}$ ,  $K_\alpha^{\max}$ ,  $K_h^{\max}$ ). Estes vértices definem as possíveis matrizes dinâmicas  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_8$ .

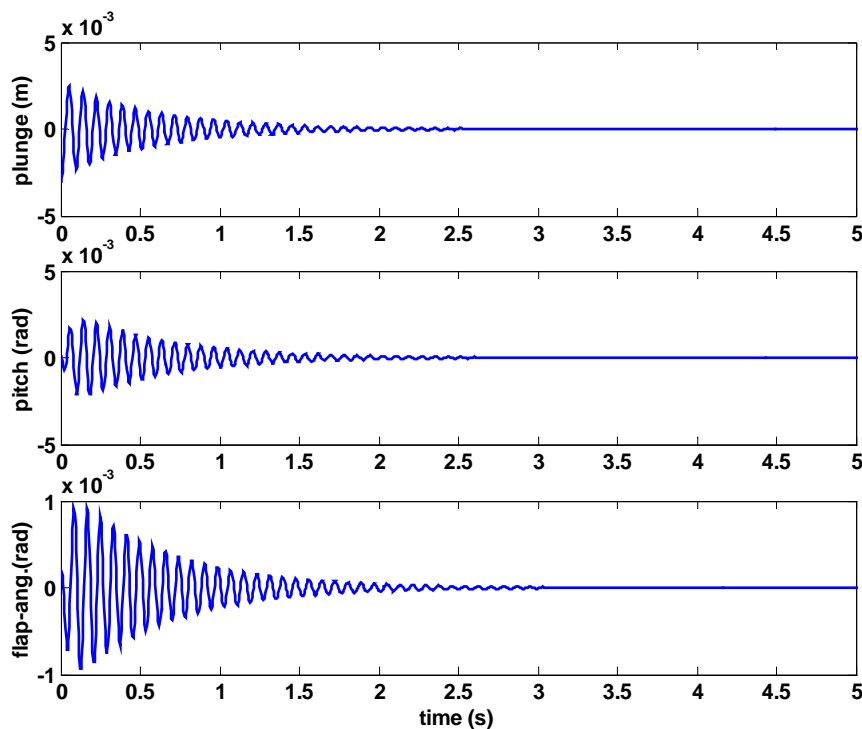


Figura 5.47. Resposta aeroelástica à malha fechada, considerando  $V = 305$  m/s, sistema estável, (regulador não-robusto).

O regulador não-robusto projetado a partir das LMIs (5.18) e (5.19) assegura somente as exigências na condição nominal. Para verificar este fato, o sistema foi considerado na condição dos vértices V5 e V7. As figuras 5.50 e 5.51 representam as respostas temporais a malha fechada considerando os sistemas nestas condições. Claramente, este regulador não é robusto para incertezas nestes parâmetros. Os resultados foram similares para todos os outros vértices testados.

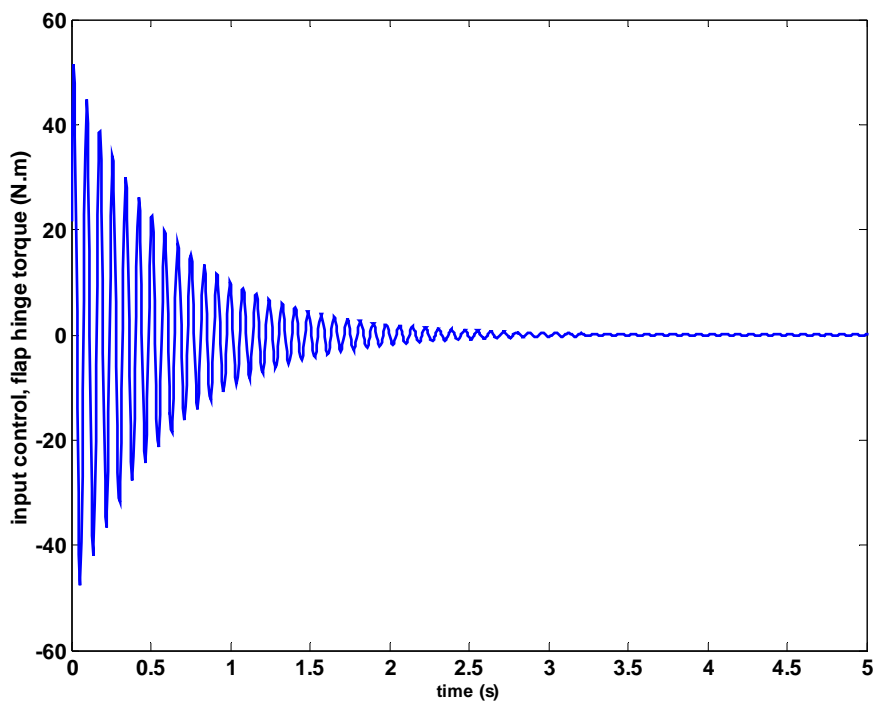


Figura 5.48. Entrada de controle considerando o sistema na condição nominal (regulador não-robusto).

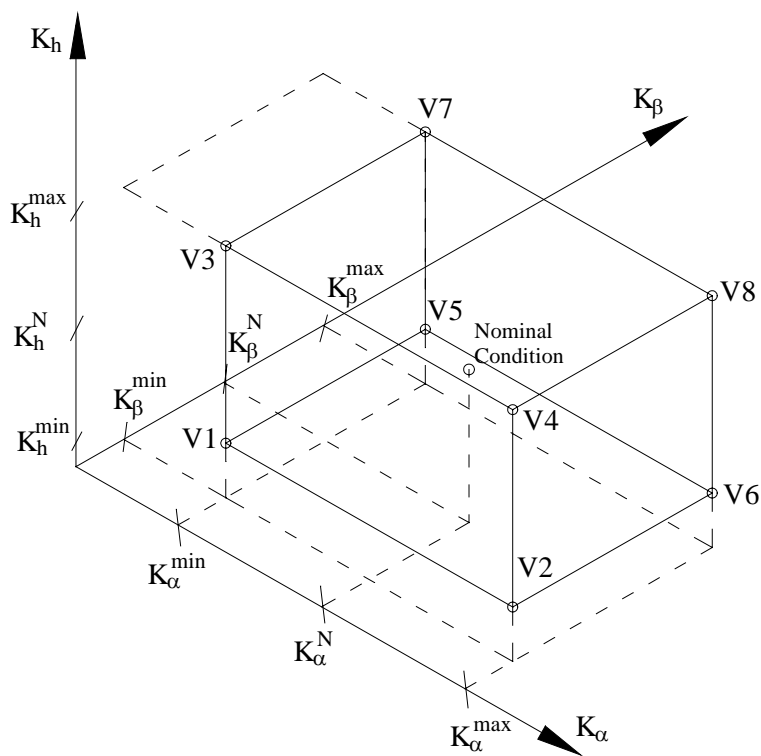


Figura 5.49. Caixa de parâmetros mostrando as combinações de incertezas.

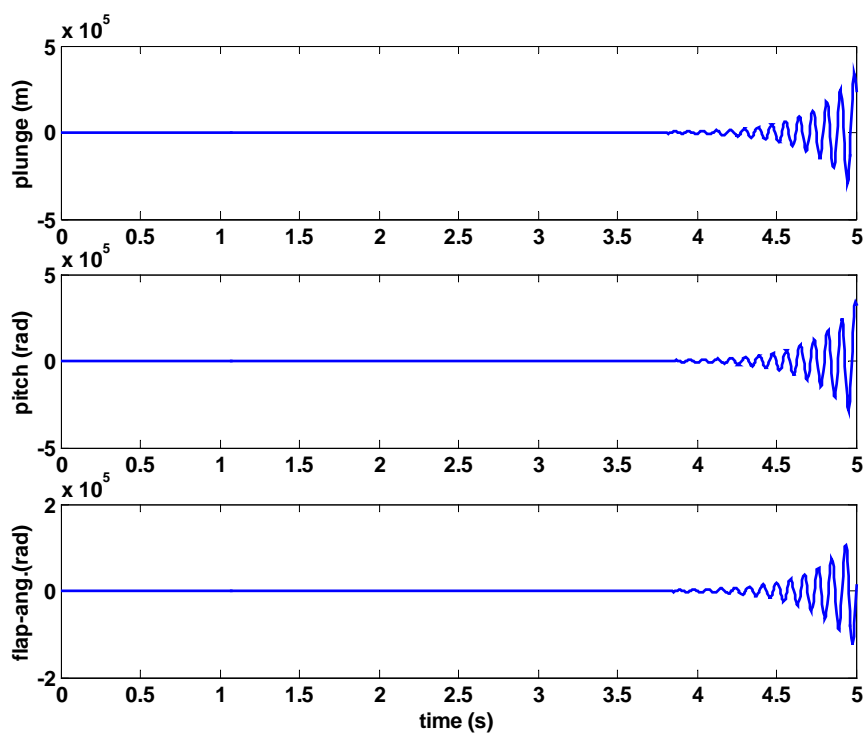


Figura 5.50. Resposta aeroelástica à malha fechada considerando a condição do vértice V5, sistema instável (regulador não-robusto).

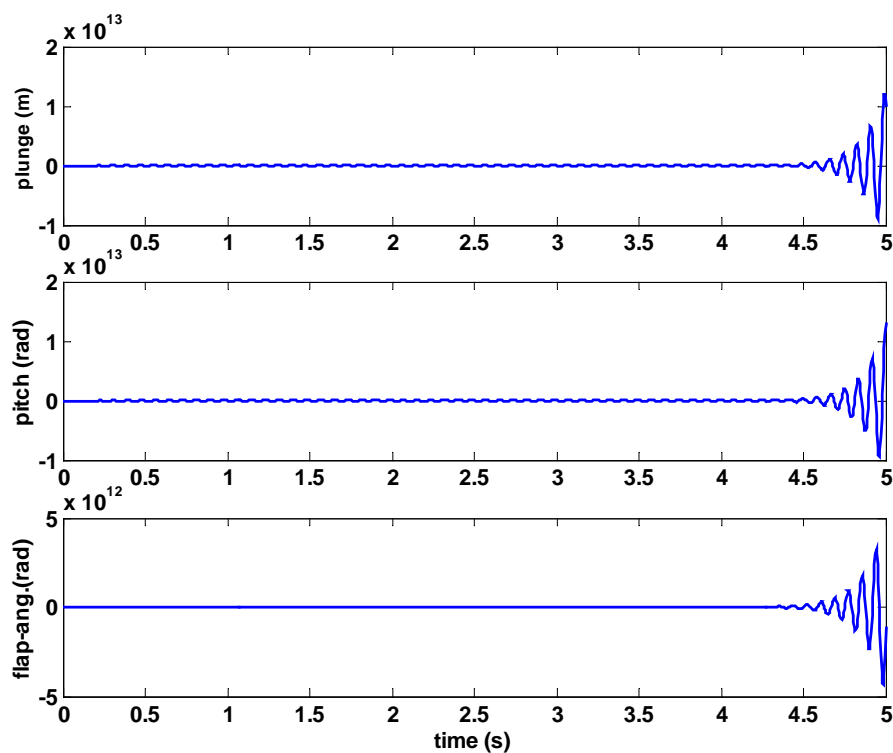


Figura 5.51. Resposta aeroelástica à malha fechada considerando a condição do vértice V7, sistema instável (regulador não-robusto).

Então, é necessário projetar um regulador LMI para garantir estabilidade quadrática à malha-fechada considerando variação paramétrica nas molas. Para resolver este problema incertezas podem ser quantificadas como descrito na figura 5.49. O controlador que satisfaz todos os sistemas descritos dentro deste espaço paramétrico é dito ser robusto à variações paramétricas. Para satisfazer estas exigências é suficiente solucionar para o controlador as seguintes LMIs:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{QA}_1^T + \mathbf{A}_1\mathbf{Q} + \mathbf{BY} + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T + 2\alpha\mathbf{Q} < \mathbf{0} \\
 & \mathbf{QA}_2^T + \mathbf{A}_2\mathbf{Q} + \mathbf{BY} + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T + 2\alpha\mathbf{Q} < \mathbf{0} \\
 & \quad \vdots \\
 & \mathbf{QA}_8^T + \mathbf{A}_8\mathbf{Q} + \mathbf{BY} + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T + 2\alpha\mathbf{Q} < \mathbf{0} \\
 & \quad \mathbf{Q} > \mathbf{0} \\
 & \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
 & \quad \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Y}^T \\ \mathbf{Y} & \mu^2\mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

A matriz de ganho do controlador é  $\mathbf{K}_c = \mathbf{YQ}^{-1}$ , sendo  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Q}$  soluções do LMIP (5.21), sendo  $\mathbf{x}(0)$ ,  $\mu$  e  $\alpha$  conhecidos. A matriz de ganho do observador é  $\mathbf{K}_e = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{W}$ , sendo  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{W}$  soluções para o LMIP dado por (5.19), considerando o sistema apenas na condição nominal, pois para considerar o problema robusto no projeto do observador estaria sendo violado o teorema da separação.

As figuras 5.52, 5.53, 5.54 e 5.55 mostram as respostas do controlador robusto submetido a condições iniciais da eq. (5.17) para o sistema nas condições dos vértices V1, V5, V7 e V8 para  $V = 305 \text{ m/s}$  ( $V > V_f$ ). Os resultados de todos os outros vértices foram similares.

Analisando as figuras 5.52, 5.53, 5.54 e 5.55, conclui-se que o regulador obtido é robusto para variação paramétrica nas constantes de rigidez das molas. Entretanto, nada pode ser dito sobre a variação em outros parâmetros, por exemplo, a variação da massa do aerofólio. Este tipo de variação pode ser algo bem factível de ocorrer, uma vez que inúmeras aeronaves armazenam o tanque de combustível nas asas. Para qualquer outra variação de parâmetro o procedimento de projeto é o mesmo e é necessário considerar todos os outros vértices em um sistema politópico.

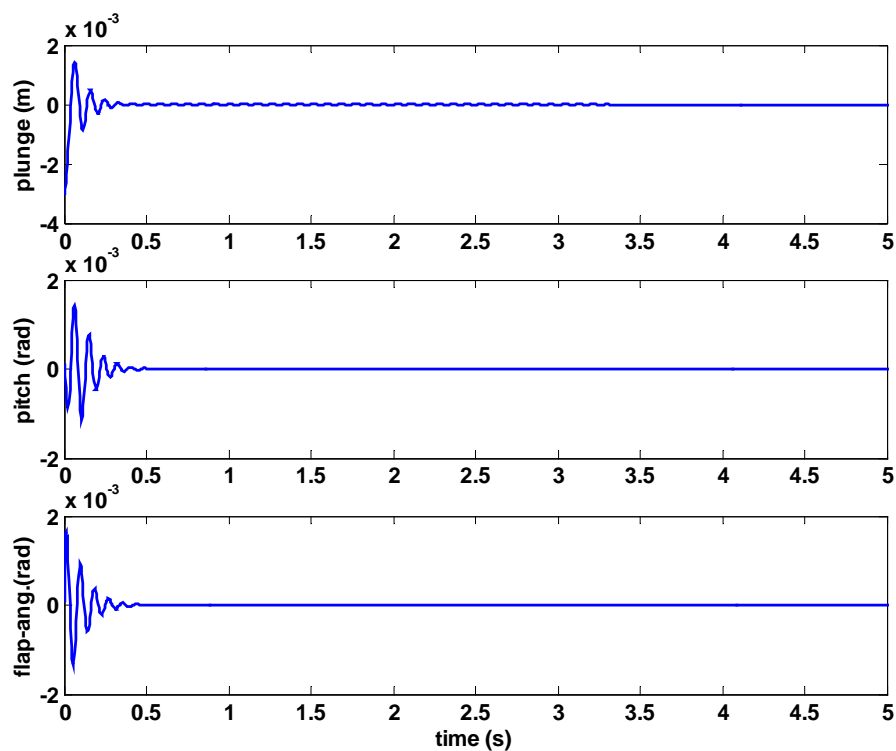


Figure 5.52. Resposta aeroelástica à malha-fechada considerando condição do vértice V1 e  $V > V_f$  (regulador robusto).

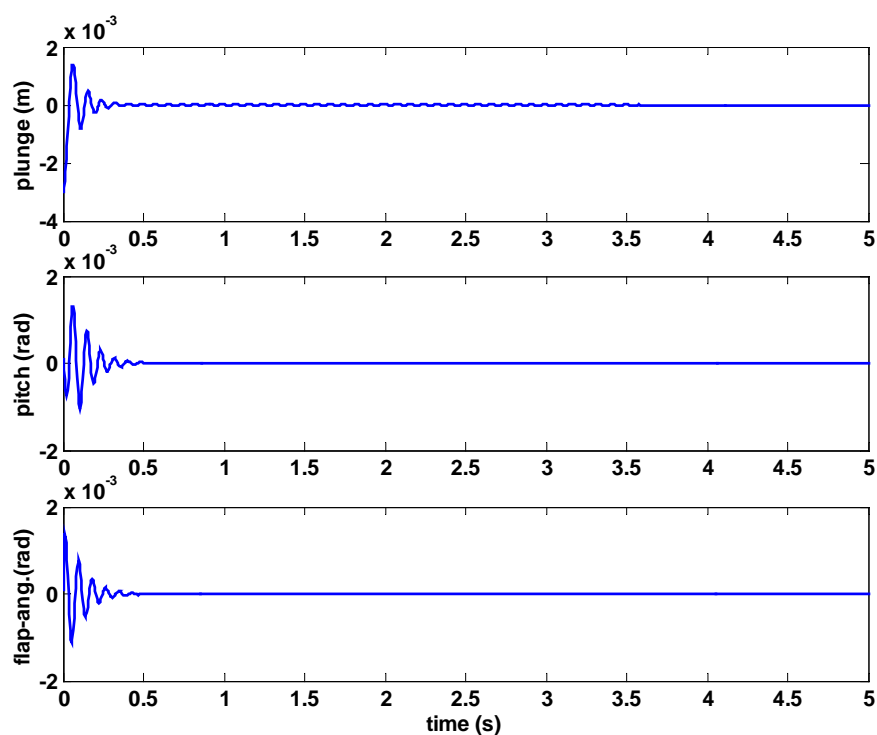


Figure 5.53. Resposta aeroelástica à malha-fechada considerando condição do vértice V5 e  $V > V_f$  (regulador robusto).

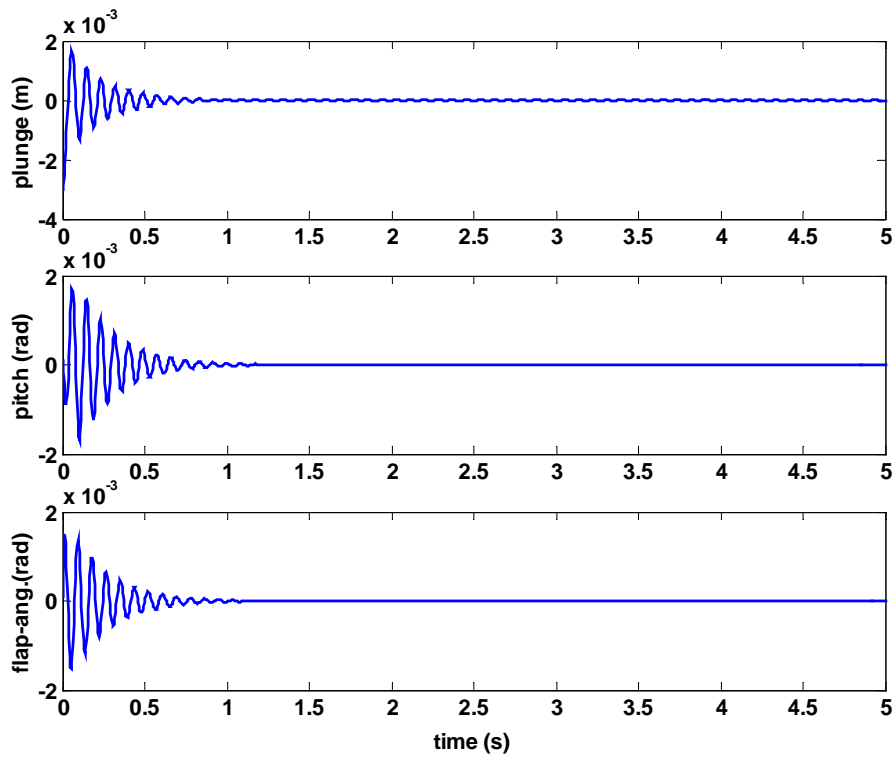


Figure 5.54. Resposta aeroelástica à malha-fechada considerando condição do vértice V7 e  $V > V_f$  (regulador robusto).

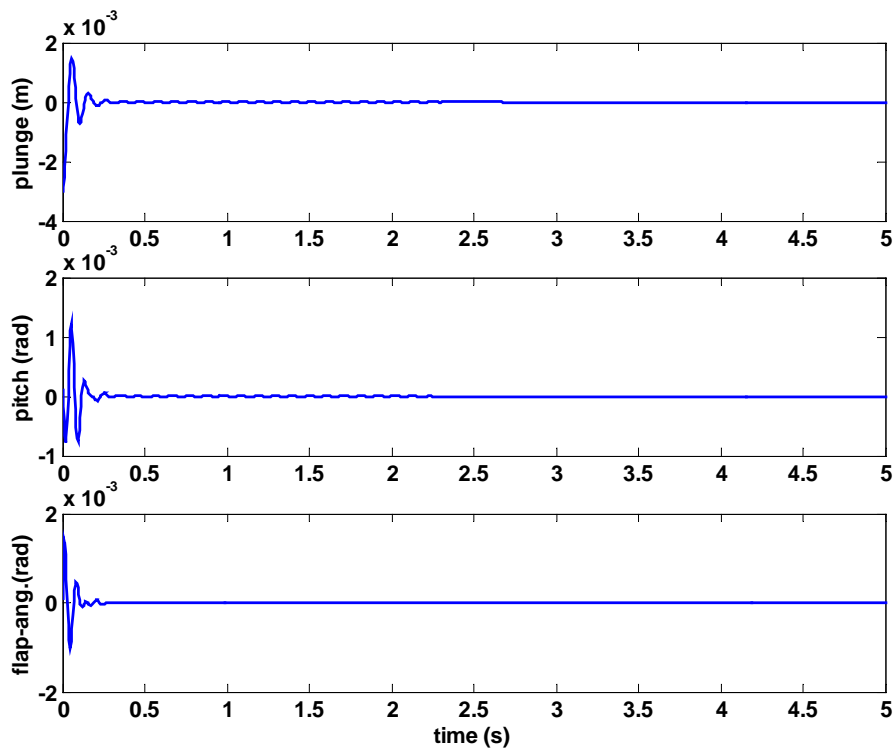


Figure 5.55. Resposta aeroelástica à malha-fechada considerando condição do vértice V8 e  $V > V_f$  (regulador robusto).

A figura 5.56 mostra a resposta considerando o sistema na condição nominal ( $K_{\beta}^N$ ,  $K_{\alpha}^N$ ,  $K_h^N$ ). O controlador projetado satisfaz as exigências e foi estável quando realimentado com o regulador robusto.

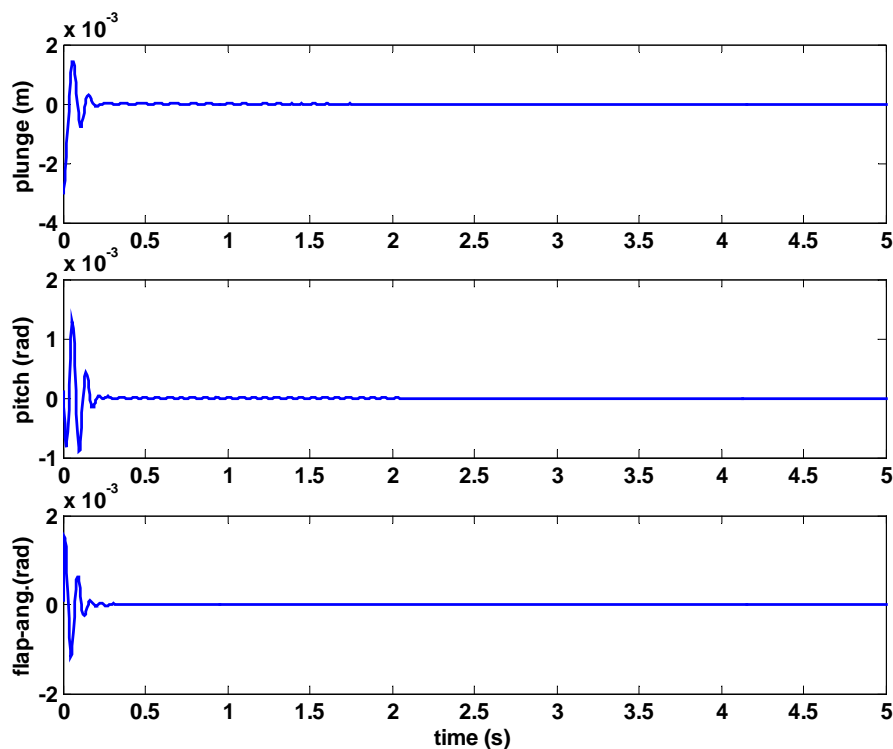


Figura 5.56. Resposta aeroelástica à malha-fechada considerando a condição nominal, sistema estável (regulador robusto).

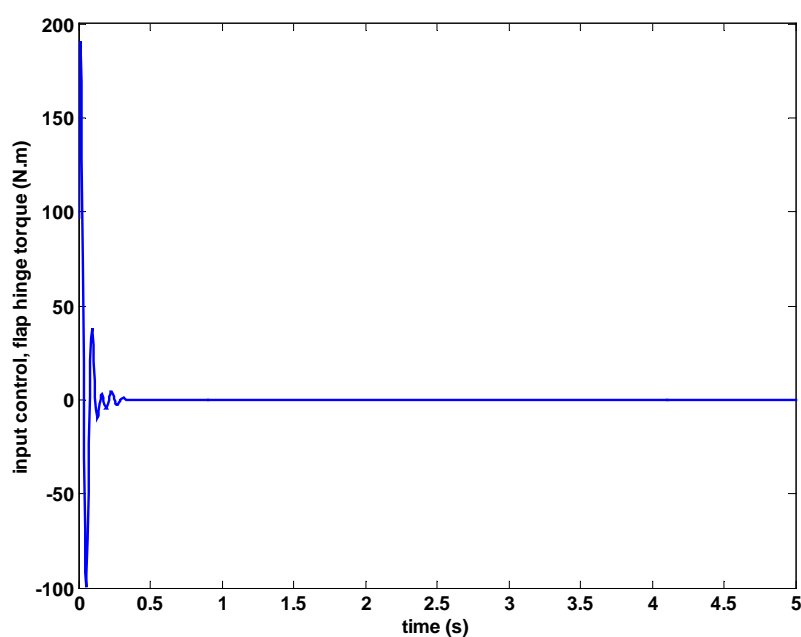


Figura 5.57. Entrada de controle considerando o sistema na condição nominal (regulador robusto).

---

A entrada de controle para o controlador robusto (torque adicional no *flap*,  $T_s$ ) é computada pela equação (3.52). A figura 5.57 mostra esta resposta. Para as outras condições os resultados foram similares.

Este exemplo apresentou uma solução alternativa para supressão de flutter em um aerofólio 2-D usando controle ativo. Foi escolhido utilizar técnicas LMIs devido as vantagens quando comparados com outras técnicas, por exemplo, facilidade para solucionar problemas robustos e formulação bem definida na literatura, (Boyd et al., 1994).

Neste exemplo não se solucionou o problema de atenuação de distúrbio e ruído, como por exemplo, uma entrada de perturbação do tipo rajada de vento. Neste caso uma boa técnica para se solucionar o problema seria o método  $H_\infty$ . Bail (1997) solucionou em sua dissertação o mesmo problema apresentado neste exemplo, considerando uma rajada de vento perturbando o sistema. O controle foi determinado via teoria  $H_\infty$  através das equações de Riccati. Um exemplo futuro solucionando este problema de rejeição de distúrbios via controle  $H_\infty$  através da solução de LMIs se mostra interessante.

Outro exemplo que pode ser explorado como direção futura de pesquisa é o uso de modelos fuzzy Takagi-Sugeno baseados em projetos LMI para desenvolver um regulador não-linear para suprimir flutter em aeronaves. Então, neste caso, é possível considerar muitas não-linearidades omitidas no modelo usado neste trabalho ou ainda utilizar um modelo mais complexo. Este tipo de projeto de controle esta bem definido na literatura e tem várias citações bem sucedidas, por exemplo, em Tanaka et al. (1998) e Teixeira et al. (2001), porém sendo aplicado em problemas não-lineares simples, como o clássico pêndulo invertido.

---

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

Neste capítulo as conclusões alcançadas e as sugestões para novas direções de pesquisas a partir dos tópicos discutidos neste trabalho são apresentadas.

### 6.1. Conclusões

O objetivo do trabalho era estudar e avaliar duas metodologias de controle via LMIs. Inicialmente foi revisado o modelo de estruturas inteligentes e os principais pontos do algoritmo de realização de autosistemas (ERA). Este critério que foi utilizado para identificar os modelos matemáticos de algumas das estruturas através de ensaios experimentais, para obtenção das respectivas funções de respostas em frequências e da aplicação do algoritmo. Os resultados de identificação se mostraram satisfatórios. A teoria de controle por LMIs, tanto com realimentação de estados estimados por observador, quanto o controle  $H_\infty$  via realimentação dinâmica da saída foi revista sucintamente, assim como a inclusão para garantia de desempenho e robustez à dinâmica residual.

Utilizando realimentação de estados se analisou três exemplos, o primeiro em uma placa, o segundo em uma viga e finalmente a supressão de vibrações em um aerofólio. No primeiro exemplo as respostas não conseguiram atender as especificações, uma vez que os efeitos de spillover podem vir a desestabilizar o sistema em uma futura implementação prática. A síntese LMI de realimentação de estados baseados em estados estimados, utilizando basicamente a síntese de projeto discutida no capítulo 3, pode produzir um controlador instável, uma vez que nenhuma especificação de robustez à dinâmica residual foi inserida no projeto. Como resultado desta limitação alguns picos de ressonância podem aumentar a amplitude para o sistema à malha fechada. Por outro lado, aplicando o método  $H_\infty$  é possível se beneficiar do teorema do ganho pequeno para se alcançar a meta de robustez frente a dinâmica dos modos de alta frequência. Estes requisitos foram inseridos a partir da inclusão de filtros de projeto, montando assim a planta generalizada. Outro importante ponto é observar que a ordem do controlador obtido foi igual a ordem da planta em questão. O exemplo na placa foi utilizado para exemplificar esta síntese a partir da solução de LMIs.

Já no segundo exemplo, o controlador por realimentação de estados para uma viga conseguiu atender as especificações e os efeitos spillover não se mostraram prejudiciais a estabilidade do sistema à malha fechada. Como principal constatação na solução destes dois

---

primeiros exemplos, verifica-se que o projeto de controladores para modelos reduzidos, considerando somente os modos de interesse, deve ser avaliada com cuidado, uma vez que a dinâmica referente aos modos residuais pode afetar os requisitos de projeto. Como alternativa, ao projeto de controladores robustos à dinâmica residual (escolha mais natural, porém mais complexa), pode-se utilizar a síntese descrita no capítulo 3, desde que feita de forma cuidadosa e avaliando o efeito da dinâmica residual nas simulações à malha fechada. Por outro lado trabalhos na literatura, como Paupitz (2003), apresentam controladores para supressão de vibração estrutural projetados a partir do modelo completo, diferente do paradigma utilizado neste trabalho. A referida metodologia se mostra impraticável, visto o tempo computacional envolvido e a ordem elevada obtida para implementação em tempo real para sistemas com certo grau de complexidade.

O terceiro e último exemplo ilustrou a síntese de um regulador LMI para supressão de flutter em um aerofólio bidimensional voando em uma velocidade acima da crítica. Nesta velocidade o sistema é instável e pode ocorrer uma pane, assim é necessário contornar este problema com a inclusão de um controlador. Portanto, o projeto de um controlador por realimentação de estados estimados é sintetizado. Os resultados mostram a supressão de flutter para o sistema trabalhando acima da velocidade de flutter. Dois reguladores foram comparados, o primeiro sem considerar qualquer tipo de variação paramétrica no modelo e o segundo robusto a variação dos parâmetros de rigidez do sistema. Neste texto não são apresentadas simulações considerando um número maior de incertezas, principalmente nas constantes aerodinâmicas, o que é deixado como sugestão para futuros trabalhos.

Com base na pesquisa bibliográfica realizada e nos exemplos solucionados a metodologia de AVC se mostrou fácil de ser implementada, sendo que a inclusão de incertezas torna o problema mais próximo da realidade. A inclusão dos efeitos do acoplamento eletromecânico na estrutura base, embora ignorada por muitos pesquisadores, pode modificar as características dinâmicas do sistema e, sendo assim devem ser consideradas no modelo ou, ao menos, previstas na caracterização de incertezas. Esta metodologia pode ser estendida para problemas mais complexos, por exemplo, envolvendo estruturas treliçadas e do tipo casca.

Por fim, destaca-se que a partir deste trabalho foram produzidos diversos artigos publicados em anais de eventos e em periódicos, alguns já aceitos e outros em fase de avaliação. A maioria deles está citado no texto deste trabalho.

---

## 6.2. Sugestões para Futuros Trabalhos

Esta pesquisa apresentou de maneira resumida diversos assuntos envolvidos no projeto de controladores para aplicações em estruturas inteligentes. Sendo assim, inúmeros tópicos de pesquisa podem ser aprofundados a partir deste trabalho. Como destaque, temos:

- Simulação em tempo real dos controladores implementados neste trabalho. Esta etapa não pode ser realizada, pois o laboratório não possuía até a conclusão desta pesquisa uma placa para aquisição e controle em tempo real. Entretanto, recentemente foi adquirido um sistema da Quanser® que permite estes ensaios em tempo real, o que deverá ser objeto de estudos pelo GMSINT/UNESP/Ilha Solteira.
- As incertezas paramétricas tratadas nos exemplos da placa e da viga, foram relacionadas a variações nas frequências naturais. Uma vez, que o amortecimento é, geralmente, um parâmetro de difícil identificação, exemplos futuros considerando controle robusto à incertezas nos coeficientes de amortecimento se mostram interessante. A tese de Abreu (2003) discute este ponto.
- Uma vez que o modelo identificado a partir do método ERA está no domínio discreto no tempo, a formulação de toda a teoria envolvida no projeto de controladores no domínio discreto se mostra interessante. Segundo a literatura, espera-se que os resultados experimentais sejam melhores para os controladores digitais do que para os controladores obtidas a partir das técnicas analógicas descritas no presente trabalho. Adicionalmente, poucos trabalhos sobre controle ativo de vibrações estruturais discutem o projeto direto no domínio discreto, a grande maioria projeta o controlador analógico e depois o discretiza para implementação em tempo real.
- O projeto do observador em todos os exemplos foi realizado considerando-se o sistema na condição nominal dos parâmetros, pois assim o projeto do controlador e do observador poderia ter sido realizado independentemente, devido ao teorema da separação. Portanto, um tópico interessante para estudos futuros é o projeto de observadores robustos.
- O posicionamento de atuadores e sensores através de normas abre grande perspectiva para pesquisas futuras. Entre elas se destacam: utilização de outras normas, como a norma  $H_2$  e Hankel; utilização de algoritmos genéticos com as funções objetivos envolvendo normas de sistemas, principalmente para casos de configuração complexa; e a mais promissora: utilização de normas de sistemas para problemas de posicionamento

---

de atuadores/sensores considerando entradas de controle, entradas exógenas, saídas de realimentação e saídas de desempenho, tópico pouco explorado na literatura e que pode ser solucionado a partir de modificações deste trabalho. Além destas linhas, a utilização de métodos de superfície de respostas, também são promissoras para problemas de posicionamento de atuadores/sensores. Pesquisas do grupo GMSINT estão sendo iniciadas em alguns destes tópicos.

- Uso de normas, em especial a norma  $H_2$ , como índice para detecção e localização de falhas estruturais, como, por exemplo, trincas em estruturas flexíveis. Uma pesquisa interessante é unir o método ERA para identificação das matrizes (**A**, **B**, **C**, **D**) e o cálculo de normas por LMIs para problemas de detecção de falhas em sistema mecânicos. Gawronski e Sawicki (2000) sugerem isto em um artigo, porém poucos autores exploram este paradigma, sendo, portanto um tópico interessante e carente de pesquisas para avaliar a real exequibilidade da proposta.
- Ainda em detecção de falhas, o uso de LMIs para detecção e quantificação de falhas estruturais baseadas em modelos de elementos finitos (na realidade a utilização de algoritmos de otimização convexa para solução do problema inverso relacionado) é interessante para ser explorado. Abdalla et al. (1999, 2000) discutem e exemplificam o uso de LMIs para solucionar o problema inverso em detecção de falhas estruturais.
- Explorar o controle  $H_\infty$  por realimentação de estados e a metodologia para controle misto  $H_2/H_\infty$  para aplicações de controle de vibrações.
- Testar a metodologia em outros exemplos práticos, como por exemplo, o controle de suspensões de automóveis usando amortecedores com fluido eletro-reológico, controle de vibrações laterais em rotores flexíveis utilizando mancais ativos magnéticos, controle de vibrações em treliças adaptativas com PZTs do tipo pilha, etc.
- Considerar o controle de vibrações em estruturas com fortes não-linearidades e unir LMIs com modelos fuzzy Takagi-Sugeno para o projeto de reguladores não-lineares. Métodos não-lineares para identificação de sistemas também se mostram interessantes.

---

## 7. REFERÊNCIAS

---

ABDALLA, M. O.; ZIMMERMAN, D. C. E GRIGORIADIS, K. M. “Structural Damage Detection using Strain Data via Linear Matrix Inequality Based Methods”. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, San Diego, California, p. 1114-1118, 1999.

ABDALLA, M. O.; ZIMMERMAN, D. C. E GRIGORIADIS, K. M. “Reduce Optimal Parameter Update in Structural Systems Using LMIs”. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, Chicago, Illinois, p. 991-995, 2000.

ABOELSOUD, M. T. Vibration Control of Plates using Periodically Distributed Shunted Piezoelectric Patches. Phd. D. Thesis, University of Maryland, 2002.

ABREU, G. L. C. M. E RIBEIRO, J.F. “Optimal Control Design of a Flexible Beam Containing Piezoelectric Elements”. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA – CBA, 14, Natal – RN, p. 1327-1334, 2002.

ABREU, G. L. C. M.; RIBEIRO, J. F. E STEFFEN JR., V. “Experiments on Optimal Vibration Control of a Flexible Beam Containing Piezoelectric Sensors and Actuators”. SHOCK AND VIBRATION, v. 10, n. 5, p. 283-300, 2003.

ABREU, G. L. C. M. Projeto Robusto  $H_\infty$  Aplicado no Controle de Vibrações em Estruturas Flexíveis com Materiais Piezelétricos Incorporados. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, 265p., 2003.

ALDRAIHEM, O. J.; WETHERHOLD, R. C. E SINGH, T. “Intelligent Beam Structures: Timoshenko Theory vs. Euler-Bernoulli Theory”. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, Dearborn, MI, WPO2, v. 4, n. 15, p. 976-981, 1996.

ALLIK, H. E HUGHES, T. J. R. “Finite Element Method for Piezoelectric Vibration”. JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENG., v. 2, p. 151-157, 1970.

ANTHONY, D. K. Robust Optimal Design Using Passive and Active Methods of Vibration Control. Ph. D. Thesis, Faculty of Engineering And Applied Science, Institute of Sound And Vibration Research, University of Southampton, 2000.

ASSUNÇÃO, E. Redução  $H_2$  e  $H_\infty$  de Modelos Através de Desigualdades Matriciais Lineares: Otimização Local e Global, Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica, UNICAMP, Campinas, SP, 2000.

---

ASSUNÇÃO, E. E TEIXEIRA, M. C. M. “Projeto de Sistema de Controle Via LMIs usando o MATLAB”. In: ESCOLA BRASILEIRA DE APLICAÇÕES EM DINÂMICA E CONTROLE - APLICON. USP – São Carlos – SP, 2001. (CD-Room).

ASSUNÇÃO, E.; MARCHESI, H. F.; TEIXEIRA, M. C. M. E PERES, P. L. D. “Otimização Global Rápida para o Problema de Redução  $H_\infty$  de Modelos.” In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA – CBA, 14, Natal – RN, 2002. (CD-Room).

BAIL, T. R. A Disturbance-Rejection Problem For A 2-D Airfoil. MS thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1997.

BAILEY, T. AND HUBBARD, J. E. “Distributed Piezoelectric-Polymer Active Vibration Control of a Cantilver Beam”. JOURNAL OF GUIDANCE, CONTROL AND DYNAMICS, v. 8, n. 5, p. 605-611, 1985.

BANKS, H. T.; SMITH, R. C. AND WANG, Y. “The modeling of piezoceramic patch interactions with shells, plates and beams”. QUATERLY OF APPLIED MATHEMATICS, v. 53, n. 2, p. 353-381, 1995.

BARDOU, O.; GARDONIO, P.; ELLIOT, S. J. E PINNINGTON, R. J. “Active Power Minimisation and Power Absorption in a Plate whith Force and Moment Excitation”. JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION, p. 111-151, 1997.

BATHE, K. J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall, 1982.

BATRA, R. C. Design of Smart Materials & Structures, Lecture Notes for Short-Course, Department of Engineering Science and Mechanics, Virginia Polytechnic Institute & State University, Blacksburg, Virginia, USA, 1998.

BELO, E. M., ROCHA, J. C. E DE MARQUI JR., C. “A Fuzzy Controller for Active Flutter Suppression”, In: Proceedings of 9<sup>th</sup> International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, Florianópolis/SC, Brazil, p. 9- 14., 2001.

BHASKAR, A. “Estimates of Error in the Frequency Response of Non-Classically Damped Systems”. JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION, v. 184, p. 59-72, 1995.

BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H. E HALFMAN, R. L. Aeroelasticity, Dover, New York, 1996.

BLANGUERNON, A.; LÉNÉ, F. E BERNADOU, M. “Active Control of a Beam using a Piezoceramic Element”. SMART MATERIAL AND STRUCTURE, v. 8, p. 116-124, 1999.

- 
- BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H. E HALFMAN, R. L. Aeroelasticity, Dover, New York, 1996.
- BOYD, S.; BALAKRISHNAN, V.; FERON, E. E EL GHAOUI, L. “Control System Analysis and Synthesis via Linear Matrix Inequalities”. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, p. 2147-2154, 1993.
- BOYD, S., BALAKRISHNAN, V., FERON, E. E EL GHAOUI, L. “History of Linear Matrix Inequalities in Control Theory”. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, Baltimore, Maryland, 1994a.
- BOYD, S., BALAKRISHNAN, V., FERON, E. AND EL GHAOUI, L. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. SIAM Studies in Applied Mathematics, USA, 193p., 1994b.
- BRASSEUR, M., DE BOE, P., GOLINVAL, J. C., TAMAZ, P., CAULE, P., EMBRECHTS, J.-J. AND NEMERLIN, J. “Placement of Piezoelectric Laminate Actuator for Active Structural Acoustic Control”, In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NOISE & VIBRATION ENGINEERING, ISMA 2004, Leuven, Bélgica, pp. 41-54, 2004.
- BURL, J. B. Linear Optimal Control:  $H_2$  and  $H_\infty$  Methods. Addison-Wesley, ISBN 0-21-80868-4, 1999.
- CARVALHAL, R., SILVA, S., BUENO, D. D. E LOPES JR., V. “Active Structural Control For Spacial Truss Structure With Sensors/Actuators in Optimal Placement”. In: 25<sup>th</sup> Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 25.º CILAMCE, Recife, PE, 2004.
- CARVALHAL, R., SILVA, S. E LOPES JR., V.. “Robust Control Applications for Smart Structures”. In: 23.º International Modal Analysis Conference, 2005, Orlando, Florida. 23.º IMAC – CONFERENCE & EXPOSITION ON STRUCTURAL DYNAMICS, 2005.
- CHARON, W. Practical “Design and Verification of LQG Controllers as Applied to Active Structure”. JOURNAL OF INTELLIGENT MATERIAL SYSTEMS AND STRUCTURES, v. 8, n. 11, p. 960-985, 1997.
- CLARK, R.L.; SAUNDERS, W.R. E GIBBS, G.P. Adaptable Structures: Dynamics and Control, John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- COSTA E SILVA, V. M. E ARRUDA, J. R. F. “Otimização do Posicionamento de Atuadores Piezocerâmicos em Estruturas Flexíveis Usando um Algoritmo Genético”. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA - COBEM 97, 14, Bauru, SP, 1997. (CD Room).

---

CRAWLEY, E. F. E DE LUIS, J. “Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures”. AIAA JOURNAL, v. 25, n. 10, p. 1373-1385, 1987.

CRUZ, J. J. Controle Robusto Multivariável: O método LQG/LTR. Editora da Universidade de São Paulo, 1996.

DAI, Y. Feedback Control of Multi-Story Structures Under Seismic Excitations. Ph. D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, VPI&US, Blacksburg, Virginia, 2002.

DAMEN, A. E WEILAND, S. Robust Control. Notas de Aula, Measurement and Control Group Eindhoven University of Technology, 2001.

DE FONSECA, P. Simulation And Optimization of the Dynamic Behaviour of Mechatronic Systems. Ph. D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Katholieke Universiteit Leuven, 2000.

DE MARQUI JR., C., BENINI, G. R. AND BELO, E. M. 2001. “Uma Revisão Histórica do Fenômeno Flutter”. Proceedings of 16<sup>th</sup> Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Uberlândia/MG, Brazil, (CD-Room), 2001.

DOSH, J. J. E INMAN, D. J. “A Self-Sensing Piezoelectric Actuator for Collocated Control”. JOURNAL OF INTELLIGENT MATERIAL SYSTEMS AND STRUCTURES, v. 3, p. 166-185, 1993.

FULLER, C. R., ELLIOT, S. J. AND NELSON, P. A. Active Control of Vibration, Academic Press, 1996.

FURUYA, H. E HAFTKA, R. T. “Locating Actuators for Vibration Supression on Space Trusses by Genetic Algorithms”. STRUCTURES AND CONTROL OPTIMIZATION, ASME 1993, p. 1-11., 1993.

FOLCHER, J. P. E GHAOUI, L. “State-Feedback Design via Linear Matrix Inequalities Application to a Benchmark Problem”. IEEE ISBN 0-7803-1872-2, p. 1217-1222, 1994.

FORGRAVE, J. C.; MAN K. F., E NEWELL, J. M. “Spacecraft Acoustic and Random Vibrations Test Optimization”. SOUND AND VIBRATIONS, p. 28-31, 1999.

GABBERT, U.; SCHULTZ, I. E WEBER, C.T. “Actuator Placement in Smart Structures by Discrete-Continuous Optimization”. In: ASME DESIGN ENG. TECH. CONFERENCES, Sacramento, USA., 1997.

- 
- GAHINET, P. E. APKARIAN, P. A. “Linear Matrix Inequality Approach to  $H_\infty$  Control”, International Journal Robust and Nonlinear Control, (4), 1994, pp. 421-448.
- GAHINET, P., NEMIROVSKI, A., LAUB, A. J. AND CHILIALI, M. LMI Control Toolbox User’s Guide. The Mathworks Inc., Natick, MA, USA, 1995.
- GAO, F.; SHEN, F. E. LI, L. “The Optimal Design of Piezoelectric Actuators for Plate Vibroacoustic Control Using Genetic Algorithms with Immune Diversity”. SMART MATERIALS AND STRUCTURES, v. 9, p. 485 – 491, 2000.
- GAWRONSKI, W. Dynamics and Control of Structures: A Modal Approach. 1.ed. New York: Springer Verlag, 1998, 231p.
- GAWRONSKI, W. E. SAWICKI, J. T. “Structural Damage Detection Using Modal Norms”. In: JOURNAL OF SOUND AND VIBRATIONS, v. 1, n. 229, p. 194-198, 2000.
- GEROMEL, J. C. “Convex Analysis and Global Optimization of Joint Actuator Location and Control Problems”, In: IEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, Vol. 34, N. 7, pp. 711-720, 1989.
- GEROMEL, J. C.; PERES, P. L. D. E. BERNUSSOU, J. “On a Convex Parameter Space Method for Linear Control Design of Uncertain Systems”. SIAM J. CONTROL AND OPTIMIZATION, v. 2, n. 29, p. 381-402., 1991.
- GHAOUI, L., OUSTRY, F. E. AITRAMI, M. A. “Cone Complementary Linearization Algorithm for Static Output-Feedback and Related Problems.” IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, v. 42, n. 8, 1997.
- GHAOUI, L. AND NICULESCU, S., Advances in Linear Matrix Inequalities Methods in Control. Siam, USA, 2000.
- GIURGIUTIU, V. Recent Advances in Smart-Material Rotor Control Actuation. AIAA/ASME/ASCE/AHS STRUCTURE, STRUCTURAL DYNAMICS AND MATERIALS CONFERENCE AND EXHIBIT, Atlanta – USA, 2000.
- GONÇALVES, P. J. P.; LOPES JR., V. E. ASSUNÇÃO, E. “ $H_2$  and  $H_\infty$  Norm Control of Intelligent Structures using LMI Techniques.” In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NOISE AND VIBRATION ENGINEERING – ISMA, 26, Leuven, Belgium, 2002. (CD Room).

---

GONÇALVES, P. J. P.; SILVA, S.; TURRA, A. E. E LOPES JR., V. “Active Vibration Control in Smart Structures Comparing the Control Algorithms: IMSC and LMI.” In: SYMPOSIUM ON DYNAMIC PROBLEMS OF MECHANICS- DINAME, 10, p. 171-176, 2003a.

GONÇALVES, P. J. P.; LOPES JR., V. E BRENNAN , M. J. “Using LMI Techniques To Control Intelligent Structures.” In: IMAC - CONFERENCE ON STRUCTURAL DYNAMICS, 21, Kissimmee, Florida, 2003b. (CD Room).

GONÇALVES, P. J. P. Controle Ativo de Vibração Estrutural Utilizando Materiais Inteligentes e Desigualdades Matriciais Lineares. Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, 110p, 2003

HAGOOD, N.W.; CHUNG, W.H. E VON FLOTOW, A. “Modelling of Piezoelectric Actuator Dynamics for Active Structural Control.” JOURNAL OF INTELLIGENT MATERIAL SYSTEMS AND STRUCTURES, v. 1, p. 4-25, 1990.

HALEY, P. E SOLOWAY, D. “Experimental Validation of Generalized Predictive Control for Active Flutter Suppression”. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications, p. 125-129, 1996.

HALIM, D. E MOHEIMANI, S. O. R. “Experimental Implementation of Spatial  $H_{\infty}$  Control on a Piezoelectric-Laminate Beam.” IEEE/ASME TRANSACTIONS ON MECHATRONICS, v.,7, n. 3, p. 346-356, 2002.

HALIM, D. E MOHEIMANI, S. O. R. “An Optimization Approach to Optimal Placement of Collocated Piezoelectric Actuators and Sensor On a Thin Plate”. In: MECHATRONICS, Vol. 13, pp. 27-47, 2003.

HAN, J. H. E LEE, I. “Optimal Placement of Piezoelectric Sensor and Actuators for Vibration Control of a Composite Plate Using Genetic Algorithms”. SMART MATERIALS AND STRUCTURES, v. 2, n. 8, p. 257-267, 1999.

HANSEN, C. H. E SNYDER, S. D. Active Control of Noise and Vibrations. E&FN Spon, London UK, 1997.

HARMAN, D. E LIU, H. H. T. “Robust Flight Control: A Real-Time Simulation Investigation”, Proceedings of the 23rd International Congress of Aeronautical Sciences (ICAS), Toronto, Canada, September 8-13, 2002, ICAS 2002-5.4.3, 2002.

---

HERVELY II, D. E.; WANG, K. W. AND SMITH, E. C. An “Optimal Actuator Placement Methodology for Active Control of Helicopter Airframe Vibration”. JOURNAL OF THE AMERICAN HELICOPTER SOCIETY, v. 4, n. 46, p. 251-261, 2001.

HIRAMOTO, K., DOK, H. E. OBINATA, G. “Optimal Sensor/Actuator Placement for Active Vibration Control Using Explicit Solution of Algebraic Riccati Equation”. JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION, v. 5, n. 229, p. 1057-1075, 2000.

JIA, J. Optimization of Piezoelectric Actuator Systems for Vibration Control of Flexible Structures. Ph. D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, VPI&US, Blacksburg, Virginia, 1990.

JUANG, J. Applied System Identification, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.

JUANG, J. E PHAN, Q. Identification and Control of Mechanical System. Cambridge University Press, ISBN 0521783550, 2001.

K2 INC, MATERIALS IN SPORT AND LEISURE. Disponível em: <<http://www.k2inc.net>> Acesso em: jul, 2003.

KABAMBA, P. T., MEERKOV, S. M., AND POH, E. K. “H<sub>2</sub> optimal zeros”, In: IEEE TRANSACTIONS AUTOMATIC CONTROL, vol. 39, N.6, pp. 1298-1301, 1994.

KIRB III, G.C.; MATIC, P. E LINDNER, D.K. “Optimal Actuator Size and Location Using Genetic Algorithms for Multivariable Control”. AD-Vol. 45/MD-Vol. 54, In: ADAPTIVE STRUCTURES AND COMPOSITE MATERIALS: ANALYSIS AND APPLICATION, ASME, p. 325-335, 1994.

LAM, K. Y. E NG, T. Y. “Active Control of Composite Plates with Integrated piezoelectric Sensors and Actuators Under Various Dynamic Loading Conditions”. SMART MATERIALS AND STRUCTURES, v. 8, p. 223-237, 1999.

LEE, Y. S. Active Control of Smart Structures using Distributed Piezoelectric Transducers. Ph. D. Thesis, University of Southampton, Faculty of Engineering and Applied Science, Institute of Sound and Vibration Research, 2000.

LEWIS, B.S. J. A. Finite Element Modeling and Active Control of an Inflated Torus Using Piezoelectric Devices. Master Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 2000.

---

LI, L. X.; SHEN, Y. P. E GAO, F. “The Optimal Design of Piezoelectric Actuators for Acoustic Control.” SMART MATERIALS AND STRUCTURES, v. 10, p. 421-426, 2001.

LIMA, J. J. Modelagem de Sensores e Atuadores Piezelétricos com Aplicações em Controle Ativo de Estruturas. Tese de Doutorado, Depto. de Mecânica Computacional, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Campinas, Brasil, 1999.

LOPES JR. V.; PEREIRA, J. A. E INMAN D. J. “Structural FRF Acquisition Via Electric Impedance Measurement Applied to Damage Location”. In: International Modal Analysis Conference – IMAC, 18, San Antonio , p. 1549 – 1555, 2000a.

LOPES JR., V.; STEFFEN JR. V., E INMAN, D. J. “Optimal Design of Smart Structures Using Bonded Piezoelectric for Vibration Control”. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NOISE AND VIBRATION ENGINEERING – ISMA, 25, Leuven, Belgium, 2000b. (CD Room).

LOPES JR., V.; STEFFEN JR. V., E INMAN, D. J. “Optimal Placement of Piezoelectric Sensor/Actuator for Smart Structures Vibration Control”. In: DYNAMICAL SYSTEMS AND CONTROL, ed. London: Taylor & Francis Books Ltd, 2003.

MAIA, N., SILVA, J. ET AL. Theoretical and Experimental Modal Analysis. Research Studies Press Ltd., Baldock, Hertfordshire, England, 1996.

MEIROVITCH, L. Dynamics and Control of Structures. John Wiley & Sons, ISBN 0-471-62858-1, 1990.

MEIROVITCH, L. Principles and Techniques of Vibrations. Prentice Hall, 1997.

MOREIRA, F.J. O. E ARRUDA, J. R. F. “Model Identification Using ERA and Q-Markov Cover: An Experimental Example”. In: ANAIS DO VI SYMPOSIUM ON DYNAMICS PROBLEMS OF MECHANICS, DINAME 97, p. 242-244, 1997.

MOREIRA, F. J. O. Um Controlador  $H_{\infty}$  de Banda Limitada para Controle Ativo de Vibração Estrutural. Tese de Doutorado, Depto. de Mecânica Computacional, UNICAMP, 1998, 199p.

NAGAMINE, R. K. Lógica Difusa para o Controle Não Convencional de uma Viga Inteligente. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica – Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 2001, 113p.

NORLANDER, T., NILSSON, B., RING, D. AND JOHANSSON, U. “A Study On Active Flutter Detection And Control”, 0-7803-6262-4/00, IEEE, pp. 172-179, 2000.

- 
- OGATA, K. Modern Control Engineering. Prentice Hall, New Jersey-USA, 1997.
- OLDS, S. Modelling and LQR Control of a Two-Dimensional Airfoil. MS thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1997.
- OLIVEIRA, M. C.; FARIAS, D. P. E GEROMEL, J. C. LMISol, User's Guide, UNICAMP, Campinas-SP, Brasil, 1997.
- OLIVEIRA, M. C. AND GEROMEL, J. C., "Linear Output Feedback Controller with Joint Selection of Sensors and Actuators", In: IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, Vol. 45, N. 12, pp. 2412-2419, 2000.
- OLIVEIRA, V. A. E ARRIFANO, N. S. D. "Controle de Sistemas Incertos." In: ESCOLA BRASILEIRA DE APLICAÇÕES EM DINÂMICA E CONTROLE - APLICON. USP – São Carlos – SP, 2001. (CD-Room).
- PANOSSIAN, H.; GAWRONSKI, W. E OSSMAN, J. "Balanced Shaker and Sensor Placement for Modal Testing of Large Flexible Structures". In: IMAC-XVI, Santa Barbara, CA, 1998.
- PAPATHEODOROU, M.; TAYLOR, C. A E LIEVEN, N. A. J. "Optimal Sensor Locations for Dynamic Verification". In: STRUCTURAL DYNAMICS – EURO DYN 99, p. 587-592, 1999.
- PEREIRA, C. B. Técnicas de Otimização Discreto-Contínuas Aplicadas ao Controle de Vibrações de Estruturas Inteligentes. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2003.
- PERES, P. L. D. Controle  $H_2$  e  $H_\infty$ : Caracterização por Desigualdades Matriciais Lineares. Tese de Livre Docência, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Campinas, SP, 1997.
- POTA, H. R. E ALBERTS, T. E. "Multivariable Transfer Function for a Slewing Piezoelectric Laminate Beam". Transactions ASME, JOURNAL DYNAMIC SYSTEMS, MEASUREMENTS, CONTROL, v. 117, p. 352-359, 1995.
- RADE, D. A.; LIMA, A. M. G. E STOPPA, M. H. Analytical Modeling and Experimental Characterization of Vibration Plates Containing Viscoelastic Surface Treatments. In: 2.º CONGRESSO TEMÁTICO DE APLICAÇÕES DE DINÂMICA E CONTROLE DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL (SBMAC), p. 2164-2173, 2003.
- RAO, S.S., PAN, T.S. AND VENKAYYA, V.B. "Optimal Placement of Actuators in Actively Controlled Structures Using Genetic Algorithms." AIAA JOURNAL, v. 6, n. 29, p. 942-943, 1991.

---

ROCHA, T. L., SILVA, S. E LOPES JR., V. “Optimal Location of Piezoelectric Sensor and Actuator for Flexible Structures.” In: 11TH INTERNATIONAL CONGRESS ON SOUND AND VIBRATION, 2004, ST. PETERSBURG. 11.º ICSV, p.1807 – 1814, 2004.

SADRI, A. M.; WRIGTH, J. R., E WYNNE, R. J. “Modelling and Optimal Placement of Piezoelectric Actuators in Isotropic Plates Using Genetic Algorithms.” SMART MATERIALS AND STRUCTURES, v. 8, p. 490-498, 1999.

SALAZAR, J. W. A. Identificação de Sistemas de Estruturas Mecânicas e Aplicações. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-RJ, 2000.

SANA, S. E RAO, V. “Application of Linear Matrix Inequalities in the Control of Smart Structural Systems.” JOURNAL OF INTELLIGENT MATERIAL AND STRUCTURES, v. 11, p. 311-323, 2000.

SANA, S. E RAO, V. S. “Robust Control Input Limited Smart Structural System.” IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 9, n.º 1, 2001.

SILVA, S. Uso da Norma  $H_{\infty}$  no Posicionamento de Atuadores e Sensores Piezelétricos. Trabalho de estudos especiais, Departamento de Engenharia Mecânica, UNESP/Ilha Solteira, 2003.

SILVA, S. Projeto de Um Controlador Robusto para Aplicações em Estruturas Inteligentes Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares. 1.º Relatório de Pesquisa MSI apresentado à FAPESP, UNESP/Ilha Solteira, processo 02/11360-3, 2004.

SILVA, S. E LOPES JR., V. “Técnicas de Controle Ótimo para Supressão de Vibração Utilizando Sensores e Atuadores Piezelétricos”. In: II CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA - CONEM 2002, João Pessoa, Paraíba, 2002, (CD Room)

SILVA, S. E LOPES JR., V. “Redução dos Efeitos Spillover em Problemas de Controle Estrutural”. In: 3.º CONGRESSO TEMÁTICO DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES, 3.º DINCON, p. 520-524, 2004a.

SILVA, S. E LOPES JR., V. “Active Flutter Suppression in a 2-D Airfoil Using Linear Matrix Inequalities Techniques”. In: JOURNAL OF BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES AND ENGINEERING, 2004b, (artigo submetido).

SILVA, S. E LOPES JR., V. E ASSUNÇÃO, E. “Controle Robusto de Estruturas Flexíveis usando Técnicas LMIs”. In: 2º CONGRESSO TEMÁTICO DE DINÂMICA E CONTROLE DA SBMAC, 2003, SÃO JOSÉ DOS CAMPOS, SP, 2.º DINCON 2003, p.2200 – 2219, 2003.

---

SILVA, S. E LOPES JR., V. E ASSUNÇÃO, E. “Robust Control to Parametric Uncertainties in Smart Structures Using Linear Matrix Inequalities”. In: JOURNAL OF BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES AND ENGINEERING, ISSN 0100-7386, Vol. XXVI, N.º 4 (artigo aceito para publicação, processo n.º 852/2003), 2004a.

SILVA, S. E LOPES JR., V. E ASSUNÇÃO, E. “Robust Control of Truss Structure Using Linear Matrix Inequalities”. In: 22.º INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 2004, DEARBORN, MICHIGAN. 22.º IMAC - CONFERENCE & EXPOSITION ON STRUCTURAL DYNAMICS, 2004b, (em CD).

SILVA, S. E LOPES JR., V. E ASSUNÇÃO, E. “Observer-based state-feedback versus  $H_\infty$  output feedback control solved by LMI approach for applications in smart structures”. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NOISE & VIBRATION ENGINEERING, ISMA 2004, Leuven, Belgica, p. 269-283, 2004c.

SILVA, S. E LOPES JR., V. E ASSUNÇÃO, E. “Active Damping Using LMI Controller Based in an Identified Model by ERA”. In: 3º CONGRESSO TEMÁTICO DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES, 2004, ILHA SOLTEIRA, SP. 3.º DINCON, 2004d. p.504 – 510.

SILVA, S. E LOPES JR., V. E ASSUNÇÃO, E. “Linear Matrix Inequalities for Vibration Attenuation in Smart Structures”. In: 3.º CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 2004, BELÉM, PA. 3.º CONEM, 2004e, (em CD).

SIMPSON, M. T. E HANSEN, C. H. “Use of Genetic Algorithms to Optimize Vibration Actuator Placement for Active Control of Harmonic Interior Noise in a Cylinder with Floor Structure”. NOISE CONTROL ENGINEERING JOURNAL, p. 169-184, 1996.

SKELTON, R. E., Dynamic System Control: Linear System Analysis and Synthesis, Wiley, New York, 1998.

STEFFEN JR., V. E INMAN, D. J. “Optimal Design of Piezoelectric Materials for Vibration Damping in Mechanical Systems”. JOURNAL OF INTELLIGENT MATERIAL SYSTEMS AND STRUCTURES, v. 10, n. 12, p. 945-955, 2000.

STÖBNER, U. E GAUL, L. “Active Vibration Control of a Car Body Based on Experimentally Evaluated Modal Parameters”. MECHANICAL SYSTEMS AND SIGNAL PROCESSING, v. 1, n. 15, p. 173-188, 2001.

---

SKELTON, R. E. Dynamic System Control: Linear System Analysis and Synthesis, Wiley, New York, 1998.

TANAKA, K., IKEDA, T. E WANG, H. O. “Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers: Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs”. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, v. 6, n. 2, p. 250-265, 1998.

TEIXEIRA, M. C. M., AVELLAR, R. G. E ASSUNÇÃO, E. “On Relaxed LMI-Based Design for Fuzzy Controllers”. In: Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, p. 704-707, 2001.

THE INSTITUTE OF MATERIALS, MINERALS AND MINING - IOM3. Aerospace and Defense Applications - an overview of US military smart adaptive projects. Disponível em: <<http://www.instmat.co.uk/iom/divisions/mst/smac/intro.htm>>, Acesso em: jul, 2003

ULTRA ELECTRONICS LTD., Noise and Vibration Systems, Disponível em: <<http://www.ultraquiet.com>>, Acesso em: jul, 2003.

VALER, C. E. I. Uma Introdução ao Controle Robusto com Aplicações a Estruturas Flexíveis. Dissertação de Mestrado, PUC-RJ – Depto. de Engenharia Mecânica, 1999.

VANANTWERP, J. G. E BRAATZ, R. D. “A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities”. JOURNAL OF PROCESS CONTROL, v. 10, p. 363-385, 2000.

WANG., Z.; CHEN, S. E HAN, W. “Integrated Structural and Control Optimization of Intelligent Structures”. ENGINEERING STRUCTURES – ELSEVIER, v. 21, p. 183-191, 1999.

YAN., Y. J. E YAM, L. H. “A Synthetic Analysis on Design of Optimum Control for an Optimized Intelligent Structure”. JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION, v. 4, n. 249, p. 775-784, 2002.

YANG, S. M. E LEE, Y. J. “Modal Analysis of Stepped Beams with Piezoelectric Materials”. JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION, v. 176, n. 3, p. 289-300, 1994.

YORK, D. L. Analysis of Flutter Suppression via An Energy Method. MS thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1980.

ZHOU, K. E DOYLE, J. C. Essentials of Robust Control. Prentice Hall, 1998.