



161



IFT

**Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista**

TESE DE DOUTORADO

IFT-D.004/00

OK

Sólitons em teorias de Toda não abelianas singulares

Emílio Pedro Gueuvoghlanian

Orientador

Prof. Dr. José Francisco Gomes



Fevereiro de 2000

AGRADECIMENTOS

Desejo agradecer aos professores, funcionários e alunos do IFT, pela cooperação;

Ao colega Randall, pela ajuda com o "software";

Ao professor L. A. Ferreira, pelos cursos e pelas discussões;

Aos professores G. M. Sotkov e A. H. Zimerman, com os quais tive o privilégio de colaborar;

Em especial, ao prof. J. F. Gomes, pela oportunidade de realizar este trabalho sob sua orientação, pela paciência e por todo o conhecimento adquirido na realização desta tese;

À FAPESP e à CAPES, pelo suporte financeiro.

RESUMO

Nesta tese, propomos uma nova classe de modelos de Toda não abelianos singulares através da redução hamiltoniana do modelo WZNW de 2-loops associado à álgebra afim $A_r^{(1)}$. Esta classe de modelos é caracterizada pela presença de soluções sóliton e generaliza os modelos de sine-Gordon e Lund-Regge. O primeiro é conhecido por admitir carga topológica não trivial e o segundo pela presença de campos eletricamente carregados. Os nossos modelos admitem sólitons com ambas as cargas não triviais.

A redução hamiltoniana é implementada através de uma gradação Q e de um par de geradores constantes de grau ± 1 . A construção sistemática da ação efetiva é obtida através da ação de WZNW calibrada de forma a incorporar os vínculos, introduzindo campos de calibre auxiliares. Desenvolvemos uma formulação de curvatura nula e mostramos a integrabilidade clássica construindo a matriz r , descrevendo as relações fundamentais de Poisson.

Discutimos em detalhes os modelos de sine-Gordon e Lund-Regge e construímos explicitamente os sólitons e seu espectro para a nova classe de modelos no caso geral $A_r^{(1)}$, utilizando o método de "dressing" e operadores de vértice.

ABSTRACT

In this thesis, a new class of non abelian singular Toda models is proposed in terms of the hamiltonian reduction of the 2-loops WZNW model associated to the affine $A_r^{(1)}$ algebra. Such class of models is characterized by the presence of solitons and constitutes a generalization of the sine-Gordon and Lund-Regge models. The former is known to admit non trivial topological charges while the latter admits electrically charged fields. Our models admit both charges in a non trivial manner.

The hamiltonian reduction is implemented by defining a gradation Q and a pair of grade ± 1 constant generators. The systematic construction of the effective action is obtained from the gauged WZNW action which incorporates the constraints by introducing auxiliary gauge fields. We also develop the zero curvature formalism and prove the classical integrability by explicit construction of the r matrix which underlines the fundamental Poisson bracket relation. The sine-Gordon and Lund-Regge models are discussed in detail and the explicit solitons of the $A_r^{(1)}$ model and its spectra are constructed by the dressing method and vertex operators.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1- INTRODUÇÃO***(1)

CAPÍTULO 2- OS MODELOS WZNW E WZNW 2-LOOPS***(7)

CAPÍTULO 3- OS MODELOS DE TODA***(12)

- REDUÇÃO HAMILTONIANA***(12)

- O FUNCIONAL AÇÃO DOS MODELOS DE TODA***(17)

CAPÍTULO 4- INTEGRABILIDADE, "DRESSING", VÉRTICES E SÓLITONS***(24)

- INTEGRABILIDADE***(24)

- TRANSFORMAÇÕES DE "DRESSING"***(31)

- OPERADORES DE VÉRTICE***(36)

- SÓLITONS***(48)

CAPÍTULO 5- OS MODELOS DE SINE-GORDON E LUND-REGGE***(53)

- O MODELO DE SINE-GORDON***(53)

- O MODELO DE LUND-REGGE***(63)

CAPÍTULO 6- O MODELO DE TODA NÃO ABELIANO SINGULAR CONFORME AFIM $A_r^{(1)}$ ***(79)

- FORMULAÇÃO DO MODELO***(79)

- EQUIVALÊNCIA ENTRE VÉRTICES***(91)

- SOLUÇÃO DE 1 VÉRTICE***(92)

- SOLUÇÃO DE 2 VÉRTICES***(100)

- SOLUÇÃO DE 3 VÉRTICES***(113)

CAPÍTULO 7- CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS***(125)

- CONCLUSÕES***(125)

- PERSPECTIVAS***(126)

CAPÍTULO 8- APÊNDICES***(127)

- DEFINIÇÕES ALGÉBRICAS***(127)

- CÁLCULO DA MATRIZ r CLÁSSICA***(131)

- CÁLCULO DOS ELEMENTOS DE MATRIZ***(143)

REFERÊNCIAS***(150)

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O objeto de estudo desta tese está relacionado a tópicos como álgebras de Lie de dimensão infinita, modelos integráveis e sólitons. O estudo de álgebras de Lie em Física adquiriu um lugar de destaque nas últimas décadas. Isto se deve ao fato de que as mesmas estão associadas a simetrias em teorias de campos. Consequentemente, a teoria dos grupos de Lie é fundamental na compreensão das interações fundamentais em Física. As álgebras de Lie de dimensão infinita, por sua vez, estão relacionadas às teorias de supercordas, no estudo de fenômenos críticos em duas dimensões e na estrutura algébrica dos modelos integráveis. O estudo dos modelos integráveis, além do interesse matemático, é importante em Física na elucidação de aspectos não perturbativos em teoria quântica de campos. Em especial, o estudo de sólitons e “dyons” (sólitons com carga elétrica e magnética) é vital, pois os mesmos guardam uma importante relação com os monopolos magnéticos e dualidade em teorias de Yang-Mills em 4-D.

Os modelos de Toda em 2-D são teorias de campos relativísticas integráveis. Embora os modelos sejam integráveis, sólitons estão intrinsecamente relacionados com álgebras de dimensão infinita. Exemplos conhecidos são os modelos de sine-Gordon e Lund-Regge, ambos relacionados com a álgebra afim $\widehat{sl}(2)$. O primeiro admite sólitons com carga topológica não trivial, enquanto que no segundo os sólitons são carregados eletricamente. Os modelos de Toda não abelianos singulares propostos nesta tese são caracterizados por apresentarem sólitons com ambas as cargas não triviais, ou seja, “dyons”.

A riqueza do espectro destas teorias de sólitons em 2-D merece atenção especial devido à sua relação com teorias de Yang-Mills autoduais em 4 dimensões.

Discutimos, agora, de maneira introdutória, a classificação geral dos modelos de Toda. O leitor deve consultar os dois próximos capítulos, para maiores esclarecimentos. O modelo WZNW [1] é dado em termos de um elemento de grupo g e os campos da teoria correspondem aos parâmetros do grupo. As equações de movimento do modelo WZNW são expressas na forma

$$\partial \bar{J} = \bar{\partial} J = 0, \quad (1.1)$$

onde $(J, \bar{J})$ são denominadas correntes quirais e dadas em termos do elemento de grupo g . Os modelos de Toda conformes são obtidos implementando-se vínculos sobre as duas correntes quirais. Estes vínculos são especificados em termos de

dois elementos constantes da álgebra $\epsilon^\pm$. Os símbolos $\pm$ são decorrentes de uma gradação da álgebra, definida através de um operador de gradação. Através da decomposição de Gauss, o elemento do grupo pode ser decomposto como

$$g = NBM, \quad (1.2)$$

onde N , B e M são exponenciais de geradores de grau positivo, zero e negativo. O efeito dos vínculos sobre as equações do modelo WZNW se traduz no fato de que os únicos graus de liberdade dinâmicos em g tornam-se aqueles associados aos geradores de grau zero. Ou seja, no modelo de Toda as equações resultantes dependem somente de B . O modelo de Toda, neste caso, será invariante conforme do mesmo modo que no modelo WZNW. Entretanto, estes modelos não possuem sólitons, pois não existem configurações de múltiplos vácuos. A estrutura de B é determinada pelo operador de gradação. Se

$$Q = \sum_{i=1}^r \frac{2\lambda_i H}{\alpha_i^2}, \quad (1.3)$$

$$\epsilon^+ = \sum_{i=1}^r E_{\alpha_i}^{(0)} \quad (1.4)$$

e

$$\epsilon^- = \sum_{i=1}^r E_{-\alpha_i}, \quad (1.5)$$

então o modelo resultante é denominado modelo de Toda abeliano conforme [11,13], onde λ_i são pesos fundamentais, isto é,

$$\frac{2\lambda_i \cdot \alpha_j}{\alpha_j^2} = \delta_{i,j}. \quad (1.6)$$

Os elementos de B são exponenciais dos geradores de Cartan $\{h_1, \dots, h_r\}$. Os modelos de Toda não abelianos conformes [14,15] são obtidos suprimindo-se um ou mais geradores do operador Q em (1.3). No caso mais simples, define-se

$$Q = \sum_{i=2}^r \frac{2\lambda_i H}{\alpha_i^2}, \quad (1.7)$$

$$\epsilon^+ = \sum_{i=2}^r E_{\alpha_i} \quad (1.8)$$

e

$$\epsilon^- = \sum_{i=2}^r E_{-\alpha_i}. \quad (1.9)$$

Neste caso, B é obtido exponenciando-se os geradores $\{h_1, \dots, h_r, E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}\}$. Note que $\epsilon^\pm$ é tal que existe uma subálgebra G_0^0 associada ao gerador $\frac{2\lambda_1 H}{\alpha_1^2}$ satisfazendo:

$$\left[\epsilon^\pm, \frac{2\lambda_1 H}{\alpha_1^2} \right] = 0. \quad (1.10)$$

Os modelos de Toda não abelianos singulares conformes [14,15] são obtidos a partir desta última gradação, com a implementação, compatível com as equações de movimento, dos seguintes vínculos adicionais:

$$J|_{\frac{2\lambda_1 H}{\alpha_1^2}} = \bar{J}|_{\frac{2\lambda_1 H}{\alpha_1^2}} = 0. \quad (1.11)$$

O modelo resultante possui singularidades nas equações de movimento. Além disso, o campo em B associado ao gerador na direção $\frac{2\lambda_1 H}{\alpha_1^2}$ torna-se não dinâmico e não local.

Analisemos, agora, o caso no qual a álgebra relevante é a de Kac-Moody. Neste caso, considera-se, inicialmente, o modelo WZNW 2-loops [8]. As equações de movimento podem ser expressas analogamente às equações de movimento do modelo WZNW (1.1). Entretanto, agora, g é uma exponencial dos geradores da álgebra de Kac-Moody. O modelo WZNW 2-loops também é invariante conforme. Considere a álgebra $A_r^{(1)}$. Os modelos de Toda abelianos conformes afins [7,8] são definidos pela gradação principal:

$$Q = (r+1)D + \sum_{i=1}^r \frac{2\lambda_i H}{\alpha_i^2}, \quad (1.12)$$

$$\epsilon^+ = \sum_{i=1}^r E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{-\alpha_1 - \dots - \alpha_r}^{(1)} \quad (1.13)$$

e

$$\epsilon^- = \sum_{i=1}^r E_{-\alpha_i}^{(0)} + E_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r}^{(-1)}. \quad (1.14)$$

Neste caso, B é uma exponencial dos geradores $\{h_1^{(0)}, \dots, h_r^{(0)}, C, D\}$. O modelo associado é invariante conforme. O campo associado ao gerador D pode ser absorvido redefinindo-se o espaço-tempo de forma a que a invariância conforme seja quebrada [32]. Neste caso, o modelo é denominado modelo de Toda abeliano afim e possui sólitons topológicos. O modelo de sine-Gordon [16] corresponde a $A_1^{(1)}$. O caso não abeliano [24] mais simples está associado a

$$Q = rD + \sum_{i=2}^r \frac{2\lambda_i H^{(0)}}{\alpha_i^2}, \quad (1.15)$$

$$\epsilon^+ = \sum_{i=2}^r E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{-\alpha_2-\dots-\alpha_r}^{(1)} \quad (1.16)$$

e

$$\epsilon^- = \sum_{i=2}^r E_{-\alpha_i}^{(0)} + E_{\alpha_2+\dots+\alpha_r}^{(-1)}. \quad (1.17)$$

Neste caso, B é obtido exponenciando-se os geradores $\{h_1^{(0)}, \dots, h_r^{(0)}, C, D, E_{\alpha_1}^{(0)}, E_{-\alpha_1}^{(0)}\}$. O modelo associado é denominado Toda não abeliano conforme afim. Novamente, absorvendo o campo associado ao gerador D, quebra-se a invariância conforme. Neste caso, o modelo é denominado modelo de Toda não abeliano afim e possui sólitons. Os modelos de Toda não abelianos singulares conformes afins são obtidos a partir desta última gradação, com a implementação, compatível com as equações de movimento, dos seguintes vínculos adicionais:

$$J|_{\frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2}} = \bar{J}|_{\frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2}} = 0. \quad (1.18)$$

O modelo resultante possui singularidades nas equações de movimento. Além disso, o campo em B associado ao gerador na direção $\frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2}$ torna-se não dinâmico e não local. Quando o campo associado ao gerador D é absorvido, quebra-se a invariância conforme. O modelo resultante é denominado modelo de Toda não abeliano singular afim e possui sólitons. O modelo proposto nesta tese corresponde a este caso [29,30]. Como exemplo mais simples desta classe de modelos, considere a álgebra $A_1^{(1)}$, com

$$Q = D, \quad (1.19)$$

$$\epsilon^+ = H^{(1)}, \quad (1.20)$$

$$\epsilon^- = H^{(-1)}. \quad (1.21)$$

Neste caso, B é obtido exponenciando-se os geradores $\{h_1^{(0)}, C, D, E_{\alpha_1}^{(0)}, E_{-\alpha_1}^{(0)}\}$. Tomando-se os vínculos adicionais (1.18) e quebrando a invariância conforme, obtêm-se o modelo de Lund-Regge [17-18]. Este modelo possui sólitons eletricamente carregados.

Considere o modelo dado por

$$Q = D \quad (1.22)$$

e (ϵ^+, ϵ^-) dados como combinações de $\{E_{\alpha}^{(1)}, h_i^{(1)}\}$ e $\{E_{\alpha}^{(-1)}, h_i^{(-1)}\}$, respectivamente. Neste caso, B é obtido exponenciando-se os geradores $\{h_1^{(0)}, \dots, h_r^{(0)}, C, D\}$

e todos os geradores $E_{\alpha}^{(0)}$ associados a todas as raízes da álgebra. Se não forem definidos vínculos adicionais, de forma a que o modelo seja não singular, com exceção dos campos associados aos geradores D e C, os graus de liberdade deste modelo correspondem aos graus de liberdade do modelo WZNW associado a uma álgebra de Lie de dimensão finita. Entretanto, as constantes $\epsilon^{\pm}$ introduzem uma perturbação no modelo WZNW na forma de um potencial dado por:

$$T_r (\epsilon^+ B \epsilon^- B^{-1}) . \quad (1.23)$$

Esta é uma maneira sistemática de se construir perturbações integráveis do modelo WZNW.

Discutimos, agora, o conteúdo desta tese.

No capítulo dois, introduzimos o modelo WZNW e derivamos as equações de movimento. Apresentamos a identidade de Polyakov-Wiegman. Demonstramos que o termo topológico da ação corresponde a um comutador. Por último, introduzimos o modelo WZNW 2-loops.

Na primeira seção do terceiro capítulo apresentamos os conceitos de gradação e decomposição de Gauss e discutimos a implementação de vínculos no processo conhecido como redução hamiltoniana. Obtemos as equações resultantes para o elemento de grupo B e apresentamos a condição necessária para se tomar vínculos adicionais, levando aos modelos singulares.

Na segunda seção do terceiro capítulo apresentamos o método pelo qual é possível obter a ação dos modelos de Toda diretamente da ação dos modelos WZNW ou WZNW 2-loops, onde implementamos os vínculos na ação através de campos de calibre auxiliares.

Na primeira seção do quarto capítulo discutimos o conceito de integrabilidade clássica. Demonstramos que a condição de curvatura nula implica na existência de quantidades conservadas e que a involução das mesmas está associada ao colchete fundamental de Poisson. Por último, apresentamos a equação de Yang-Baxter clássica.

Na segunda seção do quarto capítulo discutimos o conceito de transformações de “dressing”. Estas transformações permitem obter, a partir de configurações de vácuo, soluções não triviais para as equações diferenciais não lineares associadas aos campos. Estas soluções dependem da escolha de um elemento constante arbitrário do grupo.

Na terceira seção do quarto capítulo apresentamos o conceito de operadores de vértice. Demonstramos que o elemento constante do grupo do qual depende a solução do “dressing” deve ser tomado como um produto das exponenciais dos operadores de vértice. Esta escolha é conveniente, pois os operadores de vértice são nilpotentes.

Na quarta seção do quarto capítulo discutimos os conceitos básicos relativos a ondas solitárias e sólitons.

Na primeira seção do quinto capítulo aplicamos todo o formalismo desenvolvido na parte anterior da tese no modelo de sine-Gordon. Mostramos que as equações de movimento são obtidas a partir da condição de curvatura nula e a invariância conforme das mesmas. Construímos a lagrangeana e verificamos a integrabilidade do modelo, considerando a matriz r associada. Obtemos as soluções de 1-sóliton e 1-antisóliton. Calculamos a carga topológica, a energia e o momento.

Na segunda seção do quinto capítulo aplicamos o mesmo procedimento para o modelo de Lund-Regge. Verificamos que o mesmo não possui carga topológica, mas possui carga elétrica.

Na primeira seção do sexto capítulo introduzimos o novo modelo denominado Toda não abeliano singular conforme afim $A_r^{(1)}$. Demonstramos que as equações de movimento são obtidas a partir da condição de curvatura nula e que as mesmas são invariantes por uma transformação conforme. Verificamos que o modelo é integrável pois obedece à relação conhecida como colchete fundamental de Poisson. Verificamos que a matriz r associada é a mesma do modelo de Toda abeliano conforme afim $A_r^{(1)}$. Verificamos que o modelo é invariante por uma transformação $U(1)$ global e que a respectiva carga elétrica é dada por um termo de "superfície".

Na segunda seção do sexto capítulo demonstramos a existência de vértices equivalentes. Ou seja, demonstramos que, sob escolhas convenientes das constantes conhecidas como parâmetros espectrais, vértices pertencentes a um mesmo subconjunto produzem soluções iguais.

Na terceira seção do sexto capítulo calculamos uma solução de 1 vértice. A mesma possui carga topológica, mas não possui carga elétrica. Demonstramos que a energia e o momento são dados por termos de superfície. Esta solução corresponde ao modelo de Toda abeliano afim $A_{r-1}^{(1)}$.

Na quarta seção do sexto capítulo calculamos uma solução de 2 vértices. A mesma possui cargas elétrica e topológica. Demonstramos que a energia e o momento são dados por termos de superfície.

Na quinta seção do sexto capítulo calculamos uma solução de 3 vértices. As carga elétrica, topológica e a energia e o momento são somas das respectivas quantidades das soluções de 1 e 2 vértices. Demonstramos que a energia e o momento são dados por termos de superfície.

As perspectivas e conclusões são dadas no último capítulo.

O primeiro apêndice traz todas as definições algébricas básicas necessárias para a compreensão da tese.

O segundo apêndice traz em detalhes todos os cálculos relativos à matriz r .

O terceiro apêndice mostra em detalhes os cálculos necessários na obtenção das soluções dos modelos de sine-Gordon, Lund-Regge e das soluções de 1, 2 e 3 vértices do modelo $A_r^{(1)}$ não abeliano singular.

Por último, citamos algumas das referências mais importantes relacionadas à tese.

Capítulo 2

OS MODELOS WZNW E WZNW 2-LOOPS

O modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten (WZNW) é dado por [1] :

$$S = \frac{k}{16\pi} \int d^2x \text{Tr}[\partial_\mu g \partial^\mu g^{-1}] + \frac{k}{24\pi} \int_B d^3x \epsilon^{abc} \text{Tr}[g^{-1} \partial_a g g^{-1} \partial_b g g^{-1} \partial_c g], \quad (2.1)$$

onde g é um elemento de um grupo de Lie $\overline{G}$ e B é uma variedade tridimensional cuja fronteira é a compactificação do espaço bidimensional com coordenadas (t, x) . O segundo termo na ação é conhecido como termo de Wess-Zumino [2]. Nesta tese, nos referimos ao primeiro termo como quadrático e ao segundo termo como topológico.

Calculemos as equações de movimento para esta ação. A variação do termo quadrático quando $g \rightarrow g + \delta g$ é dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{k}{16\pi} \int d^2x \{ \text{Tr}[\partial_\mu (g + \delta g) \partial^\mu (g^{-1} - g^{-1} \delta g g^{-1})] - \text{Tr}[\partial_\mu g \partial^\mu g^{-1}] \} \\ &= \frac{k}{16\pi} \int d^2x \text{Tr}[(\partial_\mu \delta g) \partial^\mu g^{-1} - \partial_\mu g \partial^\mu g^{-1} \delta g g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} (\partial^\mu \delta g) g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \delta g \partial^\mu g^{-1}] \\ &= \frac{k}{16\pi} \int d^2x \text{Tr} [2(\partial_\mu \delta g) \partial^\mu g^{-1} - 2\delta g g^{-1} \partial_\mu g \partial^\mu g^{-1}] \\ &= \frac{k}{16\pi} \int d^2x \text{Tr} \{ -2\partial^\mu (g^{-1} \delta g) g^{-1} \partial_\mu g \} \\ &= \frac{k}{16\pi} \int d^2x \text{Tr} \{ 2g^{-1} \delta g \partial^\mu (g^{-1} \partial_\mu g) \}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde utilizou-se a propriedade cíclica do traço. A variação do termo topológico quando $g \rightarrow g + \delta g$ é dada por:

$$\begin{aligned}
& \frac{k}{24\pi} \int_B d^3x \in^{abc} Tr\{\delta[g^{-1}\partial_a g]g^{-1}\partial_b g g^{-1}\partial_c g + g^{-1}\partial_a g \delta[g^{-1}\partial_b g]g^{-1}\partial_c g + \\
& \quad + g^{-1}\partial_a g g^{-1}\partial_b g \delta[g^{-1}\partial_c g]\} \\
& = \frac{k}{8\pi} \int_B d^3x \in^{abc} Tr\{\partial_c[g^{-1}\partial_a g g^{-1}\partial_b g g^{-1}\delta g]\} \\
& = \frac{k}{8\pi} \int d^2x \in^{ab} Tr[g^{-1}\partial_a g g^{-1}\partial_b g g^{-1}\delta g] \\
& = -\frac{k}{8\pi} \int d^2x \in^{ab} Tr[\partial_a g^{-1}\partial_b g g^{-1}\delta g] \\
& = -\frac{k}{8\pi} \int d^2x \in^{ab} Tr[\partial_a(g^{-1}\partial_b g)g^{-1}\delta g], \tag{2.3}
\end{aligned}$$

onde utilizamos que

$$\begin{aligned}
Tr\{\delta[g^{-1}\partial_c g]\} & = Tr\{\delta g^{-1}\partial_c g + g^{-1}\delta\partial_c g\} = Tr\{-g^{-1}\delta g g^{-1}\partial_c g + g^{-1}\delta\partial_c g\} \\
& = Tr\{\delta\partial_c g^{-1}\delta g + g^{-1}\delta\partial_c g\} = Tr\{\partial_c[g^{-1}\delta g]\}. \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Combinando (2.2), (2.3) e utilizando o princípio da mínima ação, obtemos:

$$\bar{\partial}(g^{-1}\partial g) = 0, \tag{2.5}$$

onde introduzimos as variáveis $(z, \bar{z})$ definidas por:

$$z = t + x \tag{2.6}$$

e

$$\bar{z} = t - x, \tag{2.7}$$

de tal modo que

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \partial + \bar{\partial} \tag{2.8}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \partial - \bar{\partial}. \tag{2.9}$$

Observe que

$$\partial(\bar{\partial}gg^{-1}) = \partial\bar{\partial}gg^{-1} + \bar{\partial}g\partial g^{-1}. \quad (2.10)$$

Por outro lado,

$$\bar{\partial}(g^{-1}\partial g) = \bar{\partial}g^{-1}\partial g + g^{-1}\partial\bar{\partial}g. \quad (2.11)$$

Multiplicando esta última equação por g à esquerda e g^{-1} à direita, temos:

$$\begin{aligned} g\bar{\partial}(g^{-1}\partial g)g^{-1} &= g\bar{\partial}g^{-1}\partial gg^{-1} + \partial\bar{\partial}gg^{-1} = g\bar{\partial}g^{-1}gg^{-1}\partial gg^{-1} + \partial\bar{\partial}gg^{-1} \\ &= \bar{\partial}g\partial g^{-1} + \partial\bar{\partial}gg^{-1}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

pois

$$\partial(gg^{-1}) = \bar{\partial}(gg^{-1}) = 0. \quad (2.13)$$

Ou seja, comparando (2.10) e (2.12),

$$\partial(\bar{\partial}gg^{-1}) = g\bar{\partial}(g^{-1}\partial g)g^{-1}. \quad (2.14)$$

Logo, (2.5) implica que:

$$\partial(\bar{\partial}gg^{-1}) = 0. \quad (2.15)$$

Definindo

$$J \equiv g^{-1}\partial g \quad (2.16)$$

e

$$\bar{J} = \bar{\partial}gg^{-1}, \quad (2.17)$$

vemos que

$$\bar{\partial}J = 0 \quad (2.18)$$

e

$$\partial\bar{J} = 0. \quad (2.19)$$

As soluções de (2.5) e (2.15) são da forma:

$$g(z, \bar{z}) = g_A(\bar{z})g_B(z), \quad (2.20)$$

com g_A e g_B elementos arbitrários do grupo de Lie $\overline{G}$.

Apresentamos uma importante relação obtida por Polyakov-Wiegman [3]. Temos que:

$$\begin{aligned}
 & S_{WZNW}(g_1 h_1 h_2) \\
 &= S_{WZNW}(g_1) + S_{WZNW}(h_1) + S_{WZNW}(h_2) - \frac{k}{2\pi} \int d^2x \text{Tr} (h_1^{-1} \partial h_1 \bar{\partial} h_2 h_2^{-1}) + \\
 & - \frac{k}{2\pi} \int d^2x \text{Tr} (g_1^{-1} \partial g_1 \bar{\partial} h_1 h_1^{-1}) - \frac{k}{2\pi} \int d^2x \text{Tr} (g_1^{-1} \partial g_1 h_1 \bar{\partial} h_2 h_2^{-1} h_1^{-1}). \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Note que o termo topológico da ação S_{WZNW} está associado a um comutador:

$$\begin{aligned}
 & \in^{ijk} \text{Tr}(g^{-1} \partial_i g g^{-1} \partial_j g g^{-1} \partial_k g) \\
 &= \frac{1}{2} \in^{ijk} \text{Tr}(g^{-1} \partial_i g g^{-1} \partial_j g g^{-1} \partial_k g) + \frac{1}{2} \in^{ikj} \text{Tr}(g^{-1} \partial_i g g^{-1} \partial_k g g^{-1} \partial_j g) \\
 &= \frac{1}{2} \in^{ijk} \text{Tr}\{g^{-1} \partial_i g [g^{-1} \partial_j g, g^{-1} \partial_k g]\}. \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

Transformações conformes [4,5] são, por definição, aquelas que preservam ângulos. Em um espaço de Minkowski bidimensional qualquer transformação da forma $z \rightarrow f(z)$ e $\bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z})$, onde $(f, \bar{f})$ são funções analíticas [33], é uma transformação conforme. Os campos fundamentais em uma teoria conforme são denominados primários. São definidos pela lei de transformação:

$$\phi(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{df}{dz}\right)^\Delta \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{z}}\right)^{\bar{\Delta}} \phi[f(z), \bar{f}(\bar{z})], \quad (2.23)$$

onde Δ e $\bar{\Delta}$ são os pesos conformes do campo ϕ , $(\Delta + \bar{\Delta})$ é a dimensão de escala e $(\Delta - \bar{\Delta})$ é o spin conforme.

As equações (2.5) e (2.15) são invariantes por uma transformação conforme com o elemento de grupo g se transformando como [6] :

$$g(z, \bar{z}) \rightarrow \left[\frac{df}{dz}\right]^\Delta \left[\frac{d\bar{f}}{d\bar{z}}\right]^{\bar{\Delta}} g(f, \bar{f}). \quad (2.24)$$

Considere a equação (2.5). Substituindo (2.24) e utilizando

$$\partial = \frac{df}{dz} \frac{\partial}{\partial f}, \quad (2.25)$$

$$\bar{\partial} = \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{f}}, \quad (2.26)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{f}} \left\{ g^{-1}(f, \bar{f}) \frac{1}{\left[\frac{df}{dz}\right]^\Delta \left[\frac{d\bar{f}}{d\bar{z}}\right]^\Delta} \frac{df}{dz} \frac{\partial}{\partial f} \left(\left[\frac{df}{dz}\right]^\Delta \left[\frac{d\bar{f}}{d\bar{z}}\right]^\Delta g(f, \bar{f}) \right) \right\} \\ &= \frac{df}{dz} \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{f}} \left\{ g^{-1}(f, \bar{f}) \frac{\partial}{\partial f} g(f, \bar{f}) + \frac{1}{\left[\frac{df}{dz}\right]^\Delta} \frac{\partial}{\partial f} \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]^\Delta \right\} \\ &= \frac{df}{dz} \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{f}} \left[g^{-1}(f, \bar{f}) \frac{\partial}{\partial f} g(f, \bar{f}) \right]. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{f}} \left[g^{-1}(f, \bar{f}) \frac{\partial}{\partial f} g(f, \bar{f}) \right] = 0. \quad (2.27)$$

Analogamente para (2.15). Ou seja, as equações de movimento são invariantes por uma transformação conforme.

Ao modelo WZNW 2-loops [7,8] correspondem as seguintes equações de movimento, expressas em termos das correntes quirais:

$$\bar{\partial} J = \bar{\partial}(\hat{g}^{-1} \partial \hat{g}) = 0 \quad (2.28)$$

e

$$\partial \bar{J} = \partial(\bar{\partial} \hat{g} \hat{g}^{-1}) = 0, \quad (2.29)$$

onde $\hat{g}$ é uma exponencial dos geradores da álgebra de Lie afin, ou seja, uma álgebra de Kac-Moody [9,10].

As correntes escrevem-se em termos dos geradores da álgebra como:

$$J(z) = \sum_{a,b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g^{ab} J_a^{-n}(z) T_b^{(n)} + J^D(z) C + J^C(z) D \quad (2.30)$$

e

$$\bar{J}(\bar{z}) = \sum_{a,b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g^{ab} \bar{J}_a^{-n}(\bar{z}) T_b^{(n)} + \bar{J}^D(\bar{z}) C + \bar{J}^C(\bar{z}) D, \quad (2.31)$$

onde $T_b^{(n)}$, D e C são os geradores da álgebra de Kac-Moody e $g^{ab} = Tr(T_a T_b)$.

Capítulo 3

OS MODELOS DE TODA

REDUÇÃO HAMILTONIANA

O raciocínio que faremos a seguir é válido para grupos e álgebras de Lie [10] de dimensão finita ou infinita. Usaremos a mesma nomenclatura (grupos e álgebras de Lie) e a mesma notação em ambos os casos. Uma álgebra de Lie G pode ser decomposta por um operador de gradação Q [9], de tal modo que:

$$G = \oplus_i G_i. \quad (3.1)$$

Os subespaços G_i são definidos através de

$$[Q, G_{\pm i}] = \pm i G_{\pm i} \quad (3.2)$$

e, como consequência da identidade de Jacobi,

$$[G_i, G_j] \in G_{i+j}. \quad (3.3)$$

Definimos o elemento de grupo g através da decomposição de Gauss:

$$g = NBM, \quad (3.4)$$

onde N, B e M são exponenciais dos geradores de grau negativo, positivo e zero, respectivamente.

Definimos:

$$J = g^{-1} \partial g \quad (3.5)$$

e

$$\bar{J} = -\bar{\partial} g g^{-1}. \quad (3.6)$$

Substituindo (3.4) em (3.5)-(3.6), obtemos:

$$J = M^{-1} K M \quad (3.7)$$

e

$$\bar{J} = -N \bar{K} N^{-1}, \quad (3.8)$$

onde

$$K = B^{-1}N^{-1}\partial NB + B^{-1}\partial B + \partial MM^{-1} \quad (3.9)$$

e

$$\bar{K} = N^{-1}\bar{\partial}N + \bar{\partial}BB^{-1} + B\bar{\partial}MM^{-1}B^{-1}. \quad (3.10)$$

Impondo a condição

$$\bar{\partial}J = \partial\bar{J} = 0, \quad (3.11)$$

temos que:

$$\bar{\partial}(M^{-1}KM) = \bar{\partial}M^{-1}KM + M^{-1}\bar{\partial}KM + M^{-1}K\bar{\partial}M = 0.$$

Multiplicando por M à esquerda e M^{-1} à direita, obtemos:

$$0 = \bar{\partial}K + K\bar{\partial}MM^{-1} + M\bar{\partial}M^{-1}K$$

$$= \bar{\partial}K + K\bar{\partial}MM^{-1} - \bar{\partial}MM^{-1}K = \bar{\partial}K + [K, \bar{\partial}MM^{-1}].$$

Logo, as equações de movimento (3.11) escrevem-se como:

$$\bar{\partial}K + [K, \bar{\partial}MM^{-1}] = 0 \quad (3.12)$$

e, de modo similar,

$$\partial\bar{K} - [\bar{K}, N^{-1}\partial N] = 0. \quad (3.13)$$

Neste ponto, torna-se conveniente fazer duas observações para efeito de cálculo. Em primeiro lugar, note que:

$$[\partial \exp(T)] \exp(-T) = \partial T + \frac{1}{2!}[T, \partial T] + \frac{1}{3!}[T, [T, \partial T]] + \dots, \quad (3.14)$$

onde T representa um elemento da álgebra. Esta relação pode ser verificada expandindo-se $\exp(T)$ em uma série de potências:

$$\exp(T) = 1 + T + \frac{T^2}{2!} + \dots \quad (3.15)$$

O lado direito de (3.14) define um elemento da álgebra [10], pois o comutador de dois elementos da álgebra, assim como sua soma, pertence à álgebra. Como consequência de (3.14), temos ainda,

$$\exp(T)[\partial \exp(-T)] = -\partial T - \frac{1}{2!}[T, \partial T] - \frac{1}{3!}[T, [T, \partial T]] + \dots \quad (3.16)$$

A segunda observação refere-se ao fato de que a conjugação de um elemento da álgebra por um elemento do grupo é um elemento da álgebra. Isto expressa-se através da relação de Baker-Campbell-Hausdorff [10]:

$$\exp(T)L\exp(-T) = L + [T, L] + \frac{1}{2!}[T, [T, L]] + \dots, \quad (3.17)$$

onde T e L são elementos da álgebra.

Introduzimos os vínculos [11,8,15]

$$J_{\text{vinculado}} = j + \epsilon_- \quad (3.18)$$

e

$$\bar{J}_{\text{vinculado}} = \bar{j} + \epsilon_+, \quad (3.19)$$

onde $(j, \bar{j})$ contém somente geradores de grau (zero e positivos, zero e negativos) e $\epsilon_{\pm}$ são geradores constantes de grau ± 1 .

Representemos por G_0 , G_+ e G_- os subespaços com geradores de grau zero, positivos e negativos, respectivamente. Analisemos o efeito da condição (3.18) em (3.7) e (3.9). A corrente J possui três tipos de elementos. Analisemos um a um. Em primeiro lugar, considere

$$M^{-1}[\partial M M^{-1}]M = M^{-1}\partial M. \quad (3.20)$$

M é uma exponencial de geradores de grau positivo. Logo, M^{-1} e ∂M envolvem apenas geradores de grau positivo. Utilizando (3.16), escrevemos simbolicamente:

$$M^{-1}\partial M = G_+ + \frac{1}{2!}[G_+, G_+] + \frac{1}{3!}[G_+, [G_+, G_+]] + \dots \quad (3.21)$$

Utilizando (3.3), vemos que

$$[G_+, G_+] \in G_+. \quad (3.22)$$

Portanto, $M^{-1}\partial M$ dado por (3.21) envolve somente geradores de grau positivo. Consequentemente, a condição (3.18) não é relevante para este termo. O mesmo ocorre com o termo $M^{-1}(B^{-1}\partial B)M$.

O terceiro termo é o relevante para o vínculo (3.18). Temos que $N^{-1}\partial N \in G_-$. Logo, $B^{-1}N^{-1}\partial NB \in G_-$. Portanto, utilizando (3.17),

$$M^{-1}(B^{-1}N^{-1}\partial NB)M = G_- + [G_+, G_-] + \frac{1}{2!}[G_+, [G_+, G_-]] + \dots \quad (3.23)$$

Observe que o termo com o menor grau em (3.23) é o primeiro (G_-). Isto porque o comutador com G_+ gera elementos de grau maior. Mas, por (3.18), queremos que o menor grau possível seja (-1) . Portanto, escolhemos:

$$(B^{-1}N^{-1}\partial NB)_{\text{vinculado}} = \epsilon_- \quad (3.24)$$

e, similarmente,

$$(B\bar{\partial}MM^{-1}B^{-1})_{\text{vinculado}} = \epsilon_+ . \quad (3.25)$$

Substituindo (3.24) em (3.9), temos que, por (3.12),

$$0 = \bar{\partial}(\epsilon_- + B^{-1}\partial B + \partial MM^{-1}) + [\epsilon_- + B^{-1}\partial B + \partial MM^{-1}, \bar{\partial}MM^{-1}]$$

$$= \bar{\partial}(B^{-1}\partial B) + \bar{\partial}(\partial MM^{-1}) + [\epsilon_- + B^{-1}\partial B + \partial MM^{-1}, B^{-1}\epsilon_+ B], \quad (3.26)$$

sendo que na última passagem utilizamos (3.25). Observe que $B^{-1}\partial B$ e $[\epsilon_-, B^{-1}\epsilon_+ B] \in G_0$. Os outros termos possuem grau diferente de zero, pois $\partial MM^{-1} \in G_+$, $[B^{-1}\partial B, B^{-1}\epsilon_+ B] \in G_1$ e $[\partial MM^{-1}, B^{-1}\epsilon_+ B] \in G_+$. Como elementos pertencentes a subespaços diferentes não podem ser proporcionais, obtemos de (3.26) duas equações:

$$\bar{\partial}(B^{-1}\partial B) + [\epsilon_-, B^{-1}\epsilon_+ B] = 0 \quad (3.27)$$

e

$$\bar{\partial}(\partial MM^{-1}) + [B^{-1}\partial B, B^{-1}\epsilon_+ B] + [\partial MM^{-1}, B^{-1}\epsilon_+ B] = 0. \quad (3.28)$$

Pode-se verificar que impondo (3.25) a relação (3.28) é automaticamente satisfeita. A equação (3.27), por outro lado, é não trivial. De modo similar, (3.8), (3.10), (3.13) e (3.19) implicam em :

$$\partial(\bar{\partial}BB^{-1}) - [\epsilon_+, B\epsilon_- B^{-1}] = 0. \quad (3.29)$$

Portanto, (3.27) e (3.29) são as equações de movimento do modelo vinculado. As mesmas equações foram propostas por Leznov e Saveliev [12] dentro do contexto do formalismo de curvatura nula.

Faremos algumas observações:

a) Note que N e M não estão envolvidos nas equações de movimento. Como consequência, somente os campos associados aos geradores de grau zero são dinâmicos. Como será visto, os campos correspondem a parâmetros que especificam o elemento do grupo.

b) As equações (3.27) e (3.29) são equivalentes, do mesmo modo que nos modelos WZNW e WZNW 2-loops

$$\partial(\bar{\partial}gg^{-1}) = g[\bar{\partial}(g^{-1}\partial g)]g^{-1} \quad (3.30)$$

implica que as duas condições contidas em (3.11) devam ser obedecidas simultaneamente Isto ocorre pois

$$B\{\bar{\partial}(B^{-1}\partial B) + [\epsilon_-, B^{-1}\epsilon_+ B]\}B^{-1} = \partial(\bar{\partial}BB^{-1}) - [\epsilon_+, B\epsilon_- B^{-1}]. \quad (3.31)$$

Ou seja, (3.27) implica em (3.29) e (3.29) implica em (3.27).

c) Vínculos adicionais, além de (3.18)-(3.19), podem ser tomados [15]. Suponha que exista uma subálgebra $G_0^0 \in G_0$ tal que

$$[G_0^0, \epsilon_{\pm}] = 0. \quad (3.32)$$

Multiplicando (3.27) à direita por G_0^0 :

$$0 = \bar{\partial}(B^{-1}\partial B)G_0^0 + [\epsilon_-, B^{-1}\epsilon_+ B]G_0^0 = \bar{\partial}(B^{-1}\partial B)G_0^0 + [\epsilon_-, B^{-1}\epsilon_+ BG_0^0] \quad (3.33)$$

Tomando o traço, obtemos:

$$\bar{\partial}Tr[B^{-1}\partial BG_0^0] = 0. \quad (3.34)$$

Similarmente,

$$\partial Tr[\bar{\partial}BB^{-1}G_0^0] = 0. \quad (3.35)$$

Portanto, é possível definir vínculos adicionais:

$$Tr[B^{-1}\partial BG_0^0] = 0 \quad (3.36)$$

e

$$Tr[\bar{\partial}BB^{-1}G_0^0] = 0. \quad (3.37)$$

d) É importante salientar que conforme a escolha da estrutura Lie algébrica, da gradação Q , das constantes $\epsilon_{\pm}$ e da implementação ou não dos vínculos adicionais (3.36)-(3.37), obtêm-se modelos diferentes. Vamos discutir a nomenclatura destes modelos. Esquemáticamente,

*quanto à estrutura Lie algébrica:

- álgebra de Lie de dimensão finita → Toda conforme. Exemplos: [13-15].

- "loop" álgebras → Toda afim.

- Kac-Moody → Toda afim conforme.

Os modelos associados a "loop" álgebras e álgebras de Kac-Moody estão relacionados pela quebra ou não da simetria conforme e, portanto, podem ser considerados como pertencentes à mesma classe. Exemplos: sine-Gordon [16], Toda abeliano afim [7,8,19], Lund-Regge [17,18] e o modelo $Ar^{(1)}$ não abeliano singular (proposto e estudado nesta tese).

*quanto à estrutura abeliana de B :

-se B contém somente geradores que comutam entre si $\rightarrow$ Toda abeliano.

-de outra forma $\rightarrow$ Toda não abeliano.

*quando vínculos adicionais são tomados: Toda singular

A razão deste nome vêm do fato que os vínculos adicionais introduzem singularidades no modelo.

Finalizando, nesta seção, estabelecemos vínculos sobre as correntes dos modelos WZNW e WZNW 2-loops e obtivemos os modelos de Toda. Entretanto, na seção seguinte, adotaremos um ponto de vista mais geométrico que nos levará da ação dos modelos WZNW e WZNW 2-loops para a ação dos modelos de Toda.

O FUNCIONAL AÇÃO DOS MODELOS DE TODA

Nesta tese, estamos utilizando a seguinte convenção para a métrica:

$$\eta^{\mu\nu} = (1, -1). \quad (3.38)$$

Reescrevemos (2.1) como:

$$S = -\frac{k}{4\pi} \int d^2x \text{Tr}[g^{-1} \partial g g^{-1} \bar{\partial} g] + \frac{k}{24\pi} \int_B d^3x \epsilon^{abc} \text{Tr}[g^{-1} \partial_a g g^{-1} \partial_b g g^{-1} \partial_c g]. \quad (3.39)$$

Inicialmente, convém fazer uma observação a respeito do bilinear simétrico traço. Considere uma álgebra de Lie de dimensão infinita. Neste caso, o operador de gradação [9,24] é uma combinação linear dos operadores $\left\{ D, \frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2}, \dots, \frac{2\lambda_r \cdot H^{(0)}}{\alpha_r^2} \right\}$. Consequentemente [24], utilizando as relações para a forma traço descritas no apêndice "Definições Algébricas",

$$\text{se } [(n+m) \neq 0] \rightarrow [\text{Tr}(G_n, G_m) = 0]. \quad (3.40)$$

O objetivo desta seção é o de obter a ação dos modelos de Toda. Conforme vimos na seção anterior, o processo de redução hamiltoniana elimina os campos associados aos geradores presentes em N e M-equações (3.4), (3.27) e (3.29). Portanto, ação que procuramos deve ser invariante por uma transformação que leve de $g = \text{NBM}$ a $g' = B$. Ou seja, a ação que procuramos deve ser invariante por:

$$g \rightarrow g' = \alpha^- g \alpha^+, \quad (3.41)$$

onde $\alpha^- \in G_-$ e $\alpha^+ \in G_+$.

Introduzimos campos de calibre $W \in G_-$ e $\bar{W} \in G_+$, transformando-se como:

$$W \rightarrow W' = \alpha^- W (\alpha^-)^{-1} + \alpha^- \partial (\alpha^-)^{-1} \quad (3.42)$$

e

$$\bar{W} \rightarrow \bar{W}' = (\alpha^+)^{-1} \bar{W} \alpha^+ + \bar{\partial} (\alpha^+)^{-1} \alpha^+. \quad (3.43)$$

Verificaremos que uma ação invariante por (3.41)-(3.43) é dada por [15]:

$$S_{WZNW}^{gauged}(g, W, \bar{W}) = S_{WZNW}(g) +$$

$$-\frac{k}{2\pi} \int d^2x \{ Tr W [\bar{\partial} g g^{-1} - \epsilon_+] + \bar{W} [g^{-1} \partial g - \epsilon_-] + W g \bar{W} g^{-1} \}, \quad (3.44)$$

onde $S_{WZNW}(g)$ é dado por (3.39). De modo mais claro, temos que, explicitamente,

$$S_{WZNW}^{gauged}(g', W', \bar{W}') = S_{WZNW}^{gauged}(g, W, \bar{W}). \quad (3.45)$$

Analisemos termo a termo em (3.44). Em primeiro lugar note que

$$S_{WZNW}(g') = S_{WZNW}(g) - \frac{k}{2\pi} \int d^2x Tr [\bar{\partial} g g^{-1} (\alpha^-)^{-1} \partial \alpha^-] +$$

$$-\frac{k}{2\pi} \int d^2x Tr [\bar{\partial} \alpha^+ (\alpha^+)^{-1} g^{-1} \partial g] - \frac{k}{2\pi} \int d^2x Tr [g \bar{\partial} \alpha^+ (\alpha^+)^{-1} g^{-1} (\alpha^-)^{-1} \partial \alpha^-], \quad (3.46)$$

onde utilizamos (2.21) e o fato de que

$$S_{WZNW}(\alpha^-) = S_{WZNW}(\alpha^+) = 0. \quad (3.47)$$

Isto decorre de (3.40), tendo em vista que α^- e α^+ possuem somente geradores de grau negativo e positivo, respectivamente.

A transformação dos três termos que envolvem $(W, \bar{W})$ em (3.44) resulta em:

$$Tr \{ [\alpha^- W (\alpha^-)^{-1} + \alpha^- \partial (\alpha^-)^{-1}] [\bar{\partial} (\alpha^- g \alpha^+) (\alpha^- g \alpha^+)^{-1} - \epsilon^+] +$$

$$+ [(\alpha^+)^{-1} \bar{W} \alpha^+ + \bar{\partial} (\alpha^+)^{-1} \alpha^+] [(\alpha^- g \alpha^+)^{-1} \partial (\alpha^- g \alpha^+) - \epsilon^-] +$$

$$+ [\alpha^- W (\alpha^-)^{-1} + \alpha^- \partial (\alpha^-)^{-1}] (\alpha^- g \alpha^+) [(\alpha^+)^{-1} \bar{W} \alpha^+ + \bar{\partial} (\alpha^+)^{-1} \alpha^+] (\alpha^- g \alpha^+)^{-1} \}. \quad (3.48)$$

O termo que envolve W e $\bar{W}$ em (3.48) é dado por:

$$Tr[\alpha^- W (\alpha^-)^{-1} \alpha^- g \alpha^+ (\alpha^+)^{-1} \bar{W} \alpha^+ (\alpha^+)^{-1} g^{-1} (\alpha^-)^{-1}] = Tr[W g \bar{W} g^{-1}]. \quad (3.49)$$

Para analisar os outros termos escrevemos simbolicamente:

$$\alpha^- = \exp(G_{-1} + G_{-2} + \dots), \quad (3.50)$$

$$\alpha^+ = \exp(G_1 + G_2 + \dots), \quad (3.51)$$

onde G_{-1} é uma combinação linear de geradores de grau (-1), etc. O termo que envolve $W \epsilon^+$ em (3.48) é dado por:

$$Tr[\alpha^- W (\alpha^-)^{-1} \epsilon^+] = Tr[W (\alpha^-)^{-1} \epsilon^+ \alpha^-]$$

$$= Tr\{W(\epsilon^+ + [\epsilon^+, G_{-1}] + \dots)\} = Tr\{W(\epsilon^+ + G_0 + G_{-1} + \dots)\} = Tr(W \epsilon^+), \quad (3.52)$$

onde utilizamos (3.17) e (3.40). Similarmente,

$$Tr[(\alpha^+)^{-1} \bar{W} \alpha^+ \epsilon^-] = Tr(\bar{W} \epsilon^-). \quad (3.53)$$

Os outros termos que envolvem W e $\bar{W}$ em (3.48) são:

$$\begin{aligned} & Tr\{\alpha^- W (\alpha^-)^{-1} \bar{\partial} (\alpha^- g \alpha^+) (\alpha^- g \alpha^+)^{-1} + \\ & + \alpha^- W (\alpha^-)^{-1} (\alpha^- g \alpha^+) \bar{\partial} (\alpha^+)^{-1} \alpha^+ (\alpha^- g \alpha^+)^{-1}\} \\ & = Tr[W \bar{\partial} g g^{-1}] \end{aligned} \quad (3.54)$$

e

$$\begin{aligned} & Tr\{(\alpha^+)^{-1} \bar{W} \alpha^+ (\alpha^- g \alpha^+)^{-1} \partial (\alpha^- g \alpha^+) + \\ & + \alpha^- \partial (\alpha^-)^{-1} (\alpha^- g \alpha^+) (\alpha^+)^{-1} \bar{W} \alpha^+ (\alpha^- g \alpha^+)^{-1}\} \\ & = Tr[\bar{W} g^{-1} \partial g]. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Na verificação das duas últimas equações utilizamos (3.40).

Para avaliar o termo $Tr[\alpha^- \partial (\alpha^-)^{-1} \epsilon^+]$ de (3.48), escrevemos

$$\alpha^- = \exp T. \quad (3.56)$$

Por (3.16) temos que

$$\alpha^- \partial (\alpha^-)^{-1} = \partial T + G_{-2} + G_{-3} + \dots \quad (3.57)$$

Ou seja, como T possui somente geradores de grau negativo, os comutadores em (3.16) não podem resultar em G_{-1} . Portanto, como ϵ^+ possui grau (+1),

$$Tr[\alpha^- \partial (\alpha^-)^{-1} \epsilon^+] = Tr[\partial T \epsilon^+]. \quad (3.58)$$

Mas o resultado de (3.58) deve ser integrado. Tratando-se de uma derivada total,

$$\int d^2x Tr[\alpha^- \partial (\alpha^-)^{-1} \epsilon^+] = 0. \quad (3.59)$$

Similarmente,

$$\int d^2x Tr[\bar{\partial} (\alpha^+)^{-1} \alpha^+ \epsilon^-] = 0. \quad (3.60)$$

Os outros termos em (3.48) são:

$$\begin{aligned} & Tr\{ [\alpha^- \partial (\alpha^-)^{-1} \bar{\partial} (\alpha^- g \alpha^+) (\alpha^- g \alpha^+)^{-1}] + [\bar{\partial} (\alpha^+)^{-1} \alpha^+ (\alpha^- g \alpha^+)^{-1} \partial (\alpha^- g \alpha^+)] + \\ & + [\alpha^- \partial (\alpha^-)^{-1} (\alpha^- g \alpha^+) \bar{\partial} (\alpha^+)^{-1} \alpha^+ (\alpha^- g \alpha^+)^{-1}] \} \\ & = Tr\{ [\partial (\alpha^-)^{-1} \alpha^- \bar{\partial} g g^{-1}] + \\ & + [\alpha^+ \bar{\partial} (\alpha^+)^{-1} g^{-1} \partial g] + [\partial (\alpha^-)^{-1} \alpha^- g \bar{\partial} \alpha^+ (\alpha^+)^{-1} g^{-1}] \}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

O termo em (3.61) deve ser multiplicado por $(-k)/(2\pi)$. Comparando-se (3.61) com (3.46), vemos que a soma é igual a $S_{WZNW}(g)$. Considerando-se (3.49), (3.52)-(3.55), vemos que a igualdade (3.45) está correta.

Quando os vínculos adicionais (3.36)-(3.37) são tomados, os campos presentes em G_0^0 são eliminados de B. Portanto, neste caso, a ação deve ser, também, invariante por:

$$g_0 \rightarrow g'_0 = \alpha^0 g_0 \alpha^0, \quad (3.62)$$

onde $g^0 \in G_0$ e $\alpha^0 \in G_0^0$.

Introduzimos

$$W = W_- + W_0 \quad (3.63)$$

e

$$\overline{W} = \overline{W}_+ + \overline{W}_0, \quad (3.64)$$

onde $W_- \in G_-$, $\overline{W}_+ \in G_+$, $(W_0, \overline{W}_0) \in G_0^0$.

Em primeiro lugar, cabe notar que (3.44) é invariante por (3.41)-(3.43), mesmo quando W e $\overline{W}$ são da forma (3.63)-(3.64). Isto ocorre pois $\text{Tr}(G_0^0 X)$ somente é diferente de zero quando $X \in G_0$. Os únicos termos relevantes desta forma aparecem em (3.52)-(3.53). Considere (3.52) com α^- dado por (3.50). Então,

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{W_0(\epsilon^+ + [\epsilon^+, G_{-1}] + \dots)\} &= \text{Tr}\{W_0[\epsilon^+, G_{-1}]\} \\ &= \text{Tr}(W_0 \epsilon^+ G_{-1} - W_0 G_{-1} \epsilon^+) \\ &= \text{Tr}\{[W_0, \epsilon^+] G_{-1}\} = 0, \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde utilizamos (3.32). O mesmo ocorre com (3.53). Ou seja,

$$\text{Tr}[\alpha^- W (\alpha^-)^{-1} \epsilon^+] = \text{Tr}(W \epsilon^+) \quad (3.66)$$

e

$$\text{Tr}[(\alpha^+)^{-1} \overline{W} \alpha^+ \epsilon^-] = \text{Tr}(\overline{W} \epsilon^-). \quad (3.67)$$

Suponha que sob (3.62)

$$W' = \alpha^0 W (\alpha^0)^{-1} + \alpha^0 \partial (\alpha^0)^{-1}, \quad (3.68)$$

$$\overline{W}' = (\alpha^0)^{-1} \overline{W} \alpha^0 + \bar{\partial} (\alpha^0)^{-1} \alpha^0, \quad (3.69)$$

$$W'_0 = W_0 + \alpha^0 \partial (\alpha^0)^{-1} \quad (3.70)$$

e

$$\overline{W}'_0 = \overline{W}_0 + \bar{\partial} (\alpha^0)^{-1} \alpha^0. \quad (3.71)$$

A seguinte ação é invariante por (3.62)-(3.64) e (3.68)-(3.71), dado que G_0^0 seja abeliano [15]:

$$S_{WZNW}^{gauged}(g, W, \overline{W}, W_0, \overline{W}_0) = S_{WZNW}(g) +$$

$$-\frac{k}{2\pi} \int d^2x \text{Tr}\{W[\bar{\partial} g g^{-1} - \epsilon^+] + \overline{W}[g^{-1} \partial g - \epsilon^-] + W g \overline{W} g^{-1} + W_0 \overline{W}_0\}. \quad (3.72)$$

A análise segue essencialmente os mesmos passos da verificação de (3.45). O único ponto interessante a mencionar é que sendo G_0^0 abeliano, o termo topológico de $S_{WZNW}(\alpha^0)$ é igual a zero, pois trata-se de um comutador. Entretanto, a parte restante da ação $S_{WZNW}(\alpha^0)$ não é zero. Levando-se este fato em consideração, pode-se demonstrar que (3.72) é realmente invariante.

Considere a ação invariante (3.72). Partindo de $g=NBM$, podemos escolher:

$$\alpha^- = N^{-1} \quad (3.73)$$

e

$$\alpha^+ = M^{-1}. \quad (3.74)$$

Ou seja,

$$S_{WZNW}^{gauged}(NBM, W, \bar{W}, W_0, \bar{W}_0) = S_{WZNW}^{gauged}(B, W', \bar{W}', W'_0, \bar{W}'_0). \quad (3.75)$$

Em seguida, escolhemos α^0 tal que

$$g_0^f = \alpha^0 B \alpha^0 \quad (3.76)$$

não possua o gerador da álgebra na direção G_0^0 ,

$$S_{WZNW}^{gauged}(B, W', \bar{W}', W'_0, \bar{W}'_0) = S_{WZNW}^{gauged}(g_0^f, W'', \bar{W}'', W''_0, \bar{W}''_0). \quad (3.77)$$

Finalmente, integramos sobre os campos de calibre:

$$e^S = \exp[S_{WZNW}(g_0^f)] \int DW_- D\bar{W}_+ DW_0 D\bar{W}_0$$

$$\exp\{-[k/(2\pi)] \int d^2x Tr[W \left(\bar{\partial} g_0^f (g_0^f)^{-1} - \epsilon^+ \right) + \bar{W} \left((g_0^f)^{-1} \partial g_0^f - \epsilon^- \right) + W g_0^f \bar{W} (g_0^f)^{-1} + W_0 \bar{W}_0]\}. \quad (3.78)$$

Tendo em vista que $g_0^f \in G_0/G_0^0$ e considerando as equações, (3.63)-(3.64), reescrevemos:

$$e^S = \exp \left[S_{WZNW}(g_0^f) \right]$$

$$\begin{aligned} & \int DW_- D\bar{W}_+ \exp \left\{ -\frac{k}{2\pi} \int d^2x \text{Tr} [-W_- \epsilon^+ - \bar{W}_+ \epsilon^- + W_- g_0^f \bar{W}_+ (g_0^f)^{-1}] \right\} \\ & \cdot \int DW_0 D\bar{W}_0 \exp \left\{ -\frac{k}{2\pi} \int d^2x \text{Tr} [W_0 \bar{\partial} g_0^f (g_0^f)^{-1} + \right. \\ & \left. + \bar{W}_0 (g_0^f)^{-1} \partial g_0^f + W_0 g_0^f \bar{W}_0 (g_0^f)^{-1} + W_0 \bar{W}_0] \right\}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Note que

$$\begin{aligned} & \text{Tr} [-W_- \epsilon^+ - \bar{W}_+ \epsilon^- + W_- g_0^f \bar{W}_+ (g_0^f)^{-1}] \\ & = \text{Tr} \{ [W_- - g_0^f \epsilon^- (g_0^f)^{-1}] g_0^f [\bar{W}_+ - (g_0^f)^{-1} \epsilon^+ g_0^f] (g_0^f)^{-1} - [\epsilon^- (g_0^f)^{-1} \epsilon^+ g_0^f] \}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Definimos uma ação efetiva [15]:

$$\begin{aligned} \exp(S_{\text{efetivo}}) &= \exp \left\{ S_{WZNW}(g_0^f) + \frac{k}{2\pi} \int d^2x \text{Tr} [\epsilon^+ g_0^f \epsilon^- (g_0^f)^{-1}] \right\} \\ & \cdot \int DW_0 D\bar{W}_0 \exp \left\{ -[k/(2\pi)] \int d^2x \text{Tr} [W_0 \bar{W}_0 + \right. \\ & \left. + W_0 g_0^f \bar{W}_0 (g_0^f)^{-1} + W_0 \bar{\partial} g_0^f (g_0^f)^{-1} + \bar{W}_0 (g_0^f)^{-1} \partial g_0^f] \right\}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Quando tomarmos exemplos explícitos, veremos que as equações de movimento dos campos associadas a esta ação efetiva serão as mesmas equações obtidas de (3.27)-(3.29).

Capítulo 4

INTEGRABILIDADE, “DRESSING”, VÉRTICES E SÓLITONS

INTEGRABILIDADE

Considere um sistema hamiltoniano [20] de n graus de liberdade e suponha que existam n funções independentes $I(q,p)$ tais que:

$$\frac{dI^{(j)}}{dt} = 0 \quad (4.1)$$

e

$$\{I^{(j)}, I^{(k)}\} = 0, \quad (4.2)$$

onde $1 \leq k, j \leq n$, (q,p) representam as n coordenadas e n momentos generalizados. A equação (4.2) é conhecida como condição de involução e os colchetes de Poisson são definidos por:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^{(i)}} \frac{\partial g}{\partial p^{(i)}} - \frac{\partial f}{\partial p^{(i)}} \frac{\partial g}{\partial q^{(i)}} \right). \quad (4.3)$$

Neste caso, é possível demonstrar que existe uma transformação canônica tal que os $I^{(j)}$ são os novos momentos generalizados e $H=H(I)$, onde H é a hamiltoniana. Como a transformação é canônica,

$$\frac{dI^{(j)}}{dt} = \{H, I\} = 0 \quad (4.4)$$

e

$$\frac{d\theta^{(j)}}{dt} = \{H, \theta^{(j)}\} = w(I), \quad (4.5)$$

onde os $\theta^{(j)}$ são as novas coordenadas generalizadas e $w(I)$ é uma função independente do tempo. As variáveis (θ, I) são conhecidas como variáveis de ângulo e ação. De (4.5) obtemos:

$$\theta^{(j)}(t) = \theta^{(j)}(0) + w(I)t. \quad (4.6)$$

Em teoria clássica de campos, o número de graus de liberdade é infinito e, portanto, precisamos de um número infinito de quantidades conservadas em involução. Note que, agora, os colchetes de Poisson envolvem derivadas funcionais:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \int d^{D-1}x \left[\frac{\delta f}{\delta \varphi_i(x^\mu)} \frac{\delta g}{\delta \Pi_i(x^\mu)} - \frac{\delta f}{\delta \Pi_i(x^\mu)} \frac{\delta g}{\delta \varphi_i(x^\mu)} \right], \quad (4.7)$$

onde os φ_i e Π_i são os campos e seus momentos conjugados. Derivadas funcionais são definidas por:

$$\frac{\delta f}{\delta \varphi(x)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f[\varphi(y) + \epsilon \delta(y-x)] - f[\varphi(y)]}{\epsilon}. \quad (4.8)$$

Considere potenciais de calibre A_μ pertencentes a uma álgebra de Lie de dimensão finita ou infinita (Kac-Moody). Seja dx^μ uma variação nas coordenadas. Associemos a esta variação um elemento do grupo:

$$g(x^\mu + dx^\mu, x^\mu, A_\mu) = I + dx^\mu A_\mu(x^\mu). \quad (4.9)$$

De modo equivalente, para uma trajetória finita C ,

$$g(C, A_\mu) = P \left(\exp \int_C A_\mu dx^\mu \right). \quad (4.10)$$

O símbolo P em (4.10) representa o operador ordenamento de trajetória. Se a trajetória C for parametrizada por um número S , $S \rightarrow x^\mu$, então (4.10) é equivalente a:

$$g(C, A_\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 dS_n \int_0^{S_n} dS_{n-1} \int_0^{S_{n-1}} dS_{n-2} \dots \int_0^{S_2} dS_1 \left[\left(\frac{dx}{dS_n} \cdot A[x(S_n)] \right) \dots \left(\frac{dx}{dS_1} \cdot A[x(S_1)] \right) \right]. \quad (4.11)$$

Seja Γ_1 uma trajetória de $x_1^\mu \rightarrow x_2^\mu$ e Γ_2 uma trajetória de $x_2^\mu \rightarrow x_1^\mu$. Considere o limite no qual a área da superfície Ω definida por (Γ_1, Γ_2) tende a zero. Pode-se demonstrar que [22]:

$$g(\Gamma_1, A_\mu) g(\Gamma_2, A_\mu) = \exp \left[\frac{1}{2} \int_\Omega dx^\mu \wedge dx^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]) \right]. \quad (4.12)$$

Portanto, se a curvatura for nula,

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = 0, \quad (4.13)$$

então:

$$g(\Gamma_1, A_\mu)g(\Gamma_2, A_\mu) = I. \quad (4.14)$$

Mas, de (4.10)-(4.11), vemos que:

$$[g(\Gamma_2, A_\mu)]^{-1} = g(\Gamma_2^{-1}, A_\mu), \quad (4.15)$$

onde Γ_2^{-1} representa a trajetória Γ_2 percorrida no sentido inverso. Comparando (4.14) e (4.15), concluímos que

$$g(\Gamma_1, A_\mu) = g(\Gamma_2^{-1}, A_\mu). \quad (4.16)$$

Ou seja, se a curvatura for nula, $g(\Gamma, A_\mu)$ não depende da trajetória, mas somente do ponto inicial e final. Consequentemente, se C é uma trajetória fechada,

$$g(C, A_\mu) = I. \quad (4.17)$$

Vamos nos restringir a 1+1 dimensões. Definimos [21]:

$$T(t) = P \left[\exp \int_{-L}^L A_x(t, x) dx \right] \quad (4.18)$$

e

$$S(x) = P \left[\exp \int_0^x A_t(t, x) dt \right]. \quad (4.19)$$

Façamos a trajetória $(x,t)=(-L,0) \rightarrow (-L,\tau) \rightarrow (L,\tau) \rightarrow (L,0) \rightarrow (-L,0)$. Então, (4.10), (4.17)-(4.19) implicam em:

$$S(-L)T(\tau)[S(L)]^{-1}[T(0)]^{-1} = I. \quad (4.20)$$

Portanto,

$$T(\tau) = [S(-L)]^{-1}T(0)S(L). \quad (4.21)$$

Se as condições de contorno forem tais que

$$A_t(t, -L) = A_t(t, L), \quad (4.22)$$

temos de (4.19) e (4.21) que:

$$T(\tau) = [S(L)]^{-1}T(0)S(L). \quad (4.23)$$

Consequentemente,

$$[T(\tau)]^n = ([S(L)]^{-1}T(0)S(L))^n \quad (4.24)$$

Tomando o traço, obtemos [21]:

$$\text{Tr}\{ [T(\tau)]^n \} = \text{Tr}\{ [T(0)]^n \}. \quad (4.25)$$

A equação (4.25) implica que $\text{tr}\{ [T(\tau)]^n \}$ é independente do tempo. Como n pode assumir infinitos valores, teríamos, a princípio, infinitas quantidades conservadas. Para matrizes de dimensão finita, estas quantidades não são todas independentes. Para álgebras de Kac-Moody, entretanto, as representações são de dimensão infinita ou são de dimensão finita (loop-álgebra) com a inclusão de um parâmetro espectral [21]. Neste caso, existem infinitas quantidades conservadas funcionalmente independentes.

Introduzimos o produto direto de matrizes [21]:

$$(A \otimes B)_{ij,kl} = A_{ik} B_{jl}. \quad (4.26)$$

Temos que:

$$k(A \otimes B) = (kA \otimes B) = (A \otimes kB) \quad (4.27)$$

e, dado que os elementos das matrizes sejam objetos que comutem, como, por exemplo, números complexos,

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD), \quad (4.28)$$

onde k é um número complexo.

Definimos:

$$\left\{ A \otimes B \right\}_{ij,kl} \equiv \{ A_{ik}, B_{jl} \}. \quad (4.29)$$

Verificam-se as propriedades

$$\left\{ A \otimes BC \right\} = \left\{ A \otimes B \right\} (I \otimes C) + (I \otimes B) \left\{ A \otimes C \right\} \quad (4.30)$$

e

$$\left\{ AB \otimes C \right\} = \left\{ A \otimes C \right\} (B \otimes I) + (A \otimes I) \left\{ B \otimes C \right\}. \quad (4.31)$$

Os modelos que iremos analisar apresentam relações da forma

$$\left\{ A_x(y, t) \otimes A_x(z, t) \right\} = [r, A_x(y, t) \otimes I + I \otimes A_x(z, t)] \delta(y - z). \quad (4.32)$$

A relação anterior é conhecida como colchete fundamental de Poisson [13,21]. Redefinimos (4.18) em uma notação conveniente:

$$T(y) = P \left[\exp \int_0^y A_x(t, z) dz \right]. \quad (4.33)$$

Pode-se demonstrar que, no limite $\Delta \rightarrow 0$, (4.33) é equivalente a:

$$T(y) = \prod_i l_i = P \left(\exp \int_{y-\Delta}^y A_x(t, z) dz \right) \dots P \left(\exp \int_0^\Delta A_x(t, z) dz \right). \quad (4.34)$$

Temos que

$$l_i = P \left[\exp \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} A_x(t, z) dz \right] = 1 + \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} A_x(t, z) dz + O(\Delta^2). \quad (4.35)$$

Obtemos:

$$\begin{aligned} \left\{ l_i \otimes l_j \right\} &= \left\{ \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} A_x(t, z) dz \otimes \int_{(j-1)\Delta}^{j\Delta} A_x(t, y) dy \right\} + O(\Delta^2) \\ &= \delta_{i,j} \left[r, \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} A_x(t, z) dz \otimes I + I \otimes \int_{(j-1)\Delta}^{j\Delta} A_x(t, y) dy \right] + O(\Delta^2). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Temos, ainda, que:

$$[r, l_i \otimes l_j] = \left[r, \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} A_x(t, z) dz \otimes I + I \otimes \int_{(j-1)\Delta}^{j\Delta} A_x(t, y) dy \right] + O(\Delta^2). \quad (4.37)$$

Portanto, no limite $\Delta \rightarrow 0$,

$$\left\{ l_i \otimes l_j \right\} = \delta_{i,j} [r, l_i \otimes l_j]. \quad (4.38)$$

Calculemos

$$\begin{aligned} &\left\{ T(y) \otimes T(y) \right\} \\ &= \sum_{p,q} \left(\prod_{k=p+1}^N l_k \otimes \prod_{m=q+1}^N l_m \right) \left\{ l_p \otimes l_q \right\} \left(\prod_{i=1}^{p-1} l_i \otimes \prod_{j=1}^{q-1} l_j \right) \\ &= \sum_p \left(\prod_{k=p+1}^N l_k \otimes l_k \right) [r, l_p \otimes l_p] \left(\prod_{i=1}^{p-1} l_i \otimes l_i \right) \end{aligned}$$

$$= [r, \prod_{i=1}^N l_i \otimes \prod_{j=1}^N l_j], \quad (4.39)$$

onde

$$\lim_{N \rightarrow \infty, \Delta \rightarrow 0} N\Delta = y. \quad (4.40)$$

Ou seja [21],

$$\left\{ T(y) \otimes T(y) \right\} = [r, T(y) \otimes T(y)]. \quad (4.41)$$

Esta equação é conhecida como relação de Sklyanin.

Estamos interessados nos colchetes de Poisson dos elementos da forma (4.25). Temos que

$$\begin{aligned} & \left\{ [T(y)]^n \otimes [T(y)]^m \right\} \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m ([T(y)]^{n-p} \otimes [T(y)]^{m-q}) \left\{ T(y) \otimes T(y) \right\} ([T(y)]^{p-1} \otimes [T(y)]^{q-1}) \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m ([T(y)]^{n-p} \otimes [T(y)]^{m-q}) [r, T(y) \otimes T(y)] ([T(y)]^{p-1} \otimes [T(y)]^{q-1}). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Tomando o traço, obtemos:

$$Tr \left\{ [T(y)]^n \otimes [T(y)]^m \right\} = nm Tr \left\{ [r, T(y) \otimes T(y)] ([T(y)]^{n-1} \otimes [T(y)]^{m-1}) \right\} \quad (4.43)$$

$$= nm Tr [r, (T(y))^n \otimes (T(y))^m] = 0. \quad (4.44)$$

Utilizando a propriedade

$$\{Tr A^n, Tr B^m\} = Tr \left\{ A^n \otimes B^m \right\}, \quad (4.45)$$

vemos que

$$\{Tr [T(y)]^n, Tr [T(y)]^m\} = 0. \quad (4.46)$$

Portanto, verificamos que as quantidades conservadas estão em involução. Salientamos que a análise feita restringiu-se ao caso particular de condições periódicas de contorno..

Definimos

$$P(A \otimes B) \equiv (B \otimes A)P, \quad (4.47)$$

com a propriedade

$$P^2 = I. \quad (4.48)$$

Os colchetes de Poisson satisfazem a identidade de Jacobi. Podemos escrevê-la na forma [21]:

$$\begin{aligned} & \left\{ A \otimes \left\{ B \otimes C \right\} \right\} + P_{23}P_{13} \left\{ B \otimes \left\{ C \otimes A \right\} \right\} P_{13}P_{23} + \\ & + P_{12}P_{13} \left\{ C \otimes \left\{ A \otimes B \right\} \right\} P_{13}P_{12} = 0, \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde P_{ij} atua nas posições i e j do produto direto.

A forma geral da matriz r em (4.32) é:

$$r = \sum_i a_i \otimes b_i. \quad (4.50)$$

Definimos:

$$r_{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes I, \quad (4.51)$$

e similarmente para r_{ij} , com (i, j) inteiros arbitrários. Suponha que a seguinte propriedade seja válida:

$$-r = \sum_i b_i \otimes a_i. \quad (4.52)$$

Então, substituindo (A, B, C) em (4.49) por $(A_x(y, t), A_x(z, t), A_x(w, t))$ e utilizando (4.32) e (4.52), obtemos:

$$0 = \delta(y - z)\delta(z - w) \{ [r_{23}, [r_{12}, A_1 + A_2]] + [r_{23}, [r_{13}, A_1 + A_3]] +$$

$$- [r_{12}, [r_{13}, A_1 + A_3]] - [r_{12}, [r_{23}, A_2 + A_3]] - [r_{13}, [r_{23}, A_2 + A_3]] + [r_{13}, [r_{12}, A_1 + A_2]] \}, \quad (4.53)$$

onde

$$A_1 = A_x(y, t) \otimes I \otimes I, \quad (4.54)$$

etc. Verifica-se que uma condição suficiente [21] para que a relação (4.53) seja satisfeita é a de que a matriz r satisfaça a equação de Yang-Baxter clássica:

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0. \quad (4.55)$$

TRANSFORMAÇÕES DE "DRESSING"

Considere potenciais de calibre $A_\mu(t, x)$. Definimos:

$$A \equiv A_z = \frac{\partial x^\mu}{\partial z} A_\mu = \frac{1}{2}(A_t + A_x) \quad (4.56)$$

e

$$\bar{A} \equiv A_{\bar{z}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{z}} A_\mu = \frac{1}{2}(A_t - A_x), \quad (4.57)$$

onde z e $\bar{z}$ são dados por (2.6) – (2.7) ..

A curvatura [21-22] é dada por:

$$F_{\mu\nu} = [\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu]. \quad (4.58)$$

Impondo a condição de que a curvatura aplicada em uma função teste genérica Ψ seja nula,

$$F_{\mu\nu} \Psi = 0, \quad (4.59)$$

obtemos:

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = 0. \quad (4.60)$$

Expressando (4.60) em termos de A e $\bar{A}$, temos:

$$\partial \bar{A} - \bar{\partial} A + [A, \bar{A}] = 0. \quad (4.61)$$

Os modelos de Toda admitem uma formulação de curvatura nula. Ou seja, suas equações de movimento são obtidas a partir de (4.61) com A e $\bar{A}$ dados por:

$$A = B \epsilon^- B^{-1} \quad (4.62)$$

e

$$\bar{A} = -\epsilon^+ - \bar{\partial} B B^{-1}. \quad (4.63)$$

Ou seja, substituindo (4.62)-(4.63) em (4.61) obtemos (3.29) e, consequentemente, (3.27). Desejamos salientar, entretanto, que a forma dos potenciais (4.62)-(4.63)

não é única. Lembramos que em uma transformação de calibre, gerada por um elemento de grupo W , a curvatura transforma-se como:

$$F'_{\mu\nu} = W F_{\mu\nu} W^{-1}. \quad (4.64)$$

Portanto,

$$(F_{\mu\nu} = 0) \iff (F'_{\mu\nu} = 0). \quad (4.65)$$

Consequentemente, a nova curvatura nula, *escrita em termos do mesmo elemento de grupo B* , implica nas mesmas equações de movimento.

A equação (4.60) possui como solução:

$$A = -\partial T T^{-1} \quad (4.66)$$

e

$$\bar{A} = -\bar{\partial} T T^{-1}. \quad (4.67)$$

O potencial A_μ é o que se chama de puro "gauge".

Vamos, agora, restringir nossa discussão ao caso no qual a álgebra relevante é a de Kac-Moody. Suponha que exista uma solução das equações de movimento, a qual denominaremos "vácuo", tal que:

$$B_{vac} \in^- B_{vac}^{-1} = \epsilon^- \quad (4.68)$$

e

$$\bar{\partial} B_{vac} B_{vac}^{-1} = \bar{k} z C, \quad (4.69)$$

onde $\bar{k}$ é uma constante e C é o gerador de carga central. Substituindo (4.68)-(4.69) em (4.62)-(4.63), resulta em:

$$A_{vac} = \epsilon^- \quad (4.70)$$

e

$$\bar{A}_{vac} = -\epsilon^+ - \bar{k} z C. \quad (4.71)$$

Substituindo (4.70)-(4.71) em (4.61), obtemos:

$$[\epsilon^+, \epsilon^-] = \bar{k} C. \quad (4.72)$$

Comparando (4.66)-(4.67) com (4.70)-(4.71), vemos que:

$$T_0 \equiv T_{vac} = \exp(-z \epsilon^-) \exp(\bar{z} \epsilon^+). \quad (4.73)$$

Suponha que existam duas transformações de calibre levando [23-24] de (4.70)-(4.71) a (4.62)-(4.63):

$$A = \Theta^\pm A_{vac}(\Theta^\pm)^{-1} - \partial\Theta^\pm(\Theta^\pm)^{-1} \quad (4.74)$$

e

$$\bar{A} = \Theta^\pm \bar{A}_{vac}(\Theta^\pm)^{-1} - \bar{\partial}\Theta^\pm(\Theta^\pm)^{-1}. \quad (4.75)$$

Ou seja,

$$B \in^- B^{-1} = \Theta^\pm \in^- (\Theta^\pm)^{-1} - \partial\Theta^\pm(\Theta^\pm)^{-1} \quad (4.76)$$

e

$$- \in^+ - \bar{\partial} B B^{-1} = \Theta^\pm (- \in^+ - \bar{k}_z C)(\Theta^\pm)^{-1} - \bar{\partial}\Theta^\pm(\Theta^\pm)^{-1}. \quad (4.77)$$

Note que reescrevendo (4.74)-(4.75) na forma:

$$A_\mu = -\partial_\mu(\Theta^\pm T_0)(\Theta^\pm T_0)^{-1}, \quad (4.78)$$

concluimos que

$$\Theta^+ T_0 = \Theta^- T_0 g, \quad (4.79)$$

onde g é um elemento constante (ou seja, sem dependência em x e t) do grupo. Consequentemente [24] ,

$$(\Theta^-)^{-1} \Theta^+ = T_0 g T_0^{-1}. \quad (4.80)$$

Suponha que $\Theta^\pm$ são elementos do grupo na forma:

$$\Theta^- = e^{t(0)} e^{t(-1)} e^{t(-2)} \dots, \quad (4.81)$$

$$\Theta^+ = e^{v(0)} e^{v(1)} e^{v(2)} \dots, \quad (4.82)$$

onde $t(0)$ indica uma combinação linear de geradores de grau zero, $t(-1)$ indica uma combinação linear de geradores de grau (-1), etc. Similarmente com $v(0)$, $v(1)$, etc. Observe que tomar a hipótese de que existem duas transformações de calibre levando do vácuo a A_μ é equivalente a dizer que o elemento do grupo $T_0 g T_0^{-1}$ possui uma decomposição de Gauss (3.4), conforme (4.80)-(4.82).

Tomemos a equação (4.76) para Θ^- . Lembrando que B possui somente geradores de grau zero, utilizando (3.17) e tomando os termos de grau zero dos dois lados da equação, obtemos:

$$0 = 0 - \partial e^{t(0)} e^{-t(0)}. \quad (4.83)$$

Ou seja,

$$e^{t(0)} = \exp[F(\bar{z})], \quad (4.84)$$

onde F é um funcional arbitrário de grau zero.

Tomando a equação (4.77) para Θ^- e coletando os termos de grau (+1), obtemos:

$$\epsilon^+ = e^{t(0)} \epsilon^+ e^{-t(0)}. \quad (4.85)$$

Ou seja,

$$[t(0), \epsilon^+] = [F(\bar{z}), \epsilon^+] = 0. \quad (4.86)$$

Devido à identidade de Jacobi,

$$[F(\bar{z}), \epsilon^-] = 0. \quad (4.87)$$

Portanto, $F(\bar{z}) \in G_0^0$ -(3.32)-(isto inclui o caso no qual F é dado em termos da carga central C).

Tomando a equação (4.77) para Θ^+ e coletando os termos de grau zero, obtemos:

$$\bar{\partial} B B^{-1} = \bar{k} z C + \bar{\partial} e^{v(0)} e^{-v(0)}. \quad (4.88)$$

Portanto,

$$e^{v(0)} = B \exp[-\bar{k} z \bar{z} C + G(z)], \quad (4.89)$$

onde G é um funcional arbitrário de grau zero.

Tomando a equação (4.76) para Θ^+ e coletando os termos de grau (-1), obtemos:

$$B \epsilon^- B^{-1} = e^{v(0)} \epsilon^- e^{-v(0)}. \quad (4.90)$$

Ou seja, utilizando (4.89) vemos que

$$[G(z), \epsilon^-] = 0. \quad (4.91)$$

Devido à identidade de Jacobi,

$$[G(z), \epsilon^+] = 0. \quad (4.92)$$

Portanto, $G(z) \in G_0^0$ (isto inclui o caso no qual G é dado em termos da carga central C).

Tomando a equação (4.77) para Θ^- e coletando os termos de grau zero, obtemos:

$$\bar{\partial} B B^{-1} = \exp\{F(\bar{z})\}[t(-1), \epsilon^+] \exp\{-F(\bar{z})\} + \bar{k}zC + \bar{\partial} \exp\{F(\bar{z})\} \exp\{-F(\bar{z})\}, \quad (4.93)$$

onde utilizamos (4.84)

Tomando a equação (4.76) para Θ^+ e coletando os termos de grau zero, obtemos:

$$0 = e^{v(0)}[v(1), \epsilon^-]e^{-v(0)} - \partial e^{v(0)}e^{-v(0)}. \quad (4.94)$$

Substituindo (4.89) na equação anterior, resulta:

$$\begin{aligned} & B \exp\{G(z)\}[v(1), \epsilon^-] \exp\{-G(z)\}B^{-1} \\ &= \partial B B^{-1} - \bar{k}\bar{z}C + \partial \exp\{G(z)\} \exp\{-G(z)\}. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Podemos escolher

$$F(\bar{z}) = G(z) = 0. \quad (4.96)$$

Verifiquemos quais as consequências desta escolha. Multiplicando a equação (4.93) por um elemento de G_0^0 , que supomos diferente de D, e tomando o traço, obtemos:

$$Tr[\bar{\partial} B B^{-1} G_0^0] = Tr\{[t(-1), \epsilon^+] G_0^0\} = Tr[t(-1), \epsilon^+ G_0^0] = 0. \quad (4.97)$$

Multiplicando a equação (4.95) por um elemento de G_0^0 , que supomos diferente de D, e tomando o traço, obtemos:

$$Tr[B^{-1} \partial B G_0^0] = Tr\{[v(1), \epsilon^-] G_0^0\} = Tr[v(1), \epsilon^- G_0^0] = 0. \quad (4.98)$$

Portanto, vemos que a escolha (4.96) corresponde a tomar os vínculos adicionais (3.36)-(3.37).

Substituindo (4.81)-(4.82), (4.84), (4.89) e (4.96) em (4.80), obtemos:

$$\dots e^{-t(-2)} e^{-t(-1)} B e^{-\bar{k}\bar{z}zC} e^{v(1)} e^{v(2)} \dots = T_0 g T_0^{-1}. \quad (4.99)$$

Considere representações de peso máximo da álgebra de Kac-Moody. Existem estados $|\lambda\rangle$ e $\langle\lambda'|$ tais que:

$$G_+ |\lambda\rangle = \langle\lambda'| G_- = 0. \quad (4.100)$$

Considerando estados desta forma, a equação (4.99) resulta [24] em:

$$\langle\lambda'| B \exp(-\bar{k}\bar{z}zC) |\lambda\rangle = \langle\lambda'| T_0 g T_0^{-1} |\lambda\rangle. \quad (4.101)$$

O lado esquerdo de (4.101) é uma função dos campos associados aos geradores de grau zero. O lado direito é uma função de z e $\bar{z}$, conforme (4.73). A partir desta equação podem ser obtidas soluções explícitas para os modelos de Toda.

OPERADORES DE VÉRTICE

Conforme vimos na seção anterior, as soluções para os campos da teoria, contidos em B, dependem de um elemento do grupo constante g (4.101). Escrevemos

$$g = \exp F(\gamma), \quad (4.102)$$

onde γ é o que se chama de parâmetro espectral. É possível escolher $F(\gamma)$ de tal modo [24] que

$$[\epsilon^\pm, F(\gamma)] = f^\pm(\gamma)F(\gamma), \quad (4.103)$$

onde $f^\pm$ são funções a serem determinadas em casos específicos.

Relembramos uma importante fórmula:

$$Se^A S^{-1} = \exp(SAS^{-1}), \quad (4.104)$$

onde S e A são elementos arbitrários do grupo e da álgebra, respectivamente. Calculemos:

$$\begin{aligned} T_0 g T_0^{-1} &= \exp(-z \in^-) \exp(\bar{z} \in^+) \exp[F(\gamma)] \exp(-\bar{z} \in^+) \exp(z \in^-) \\ &= \exp(-z \in^-) \exp\{\exp(\bar{z} \in^+) F(\gamma) \exp(-\bar{z} \in^+)\} \exp(z \in^-) \\ &= \exp(-z \in^-) \exp\{\exp[\bar{z} f^+(\gamma)] F(\gamma)\} \exp(z \in^-) \\ &= \exp\{\exp(-z \in^-) \exp[\bar{z} f^+(\gamma)] F(\gamma) \exp(z \in^-)\} \\ &= \exp\{\exp[-z f^-(\gamma)] \exp[\bar{z} f^+(\gamma)] F(\gamma)\}. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Definindo

$$\rho = \exp\{-z f^-(\gamma) + \bar{z} f^+(\gamma)\}, \quad (4.106)$$

obtemos:

$$T_0 g T_0^{-1} = \exp\{\rho(\gamma) F(\gamma)\}. \quad (4.107)$$

Temos, ainda, que se

$$g = \exp[F_1(\gamma_1)] \exp[F_2(\gamma_2)] \dots \exp[F_N(\gamma_N)], \quad (4.108)$$

com

$$[\epsilon^\pm, F_i(\gamma_i)] = f_i^\pm(\gamma_i)F_i(\gamma_i), \quad (4.109)$$

então,

$$\begin{aligned} T_0 g T_0^{-1} &= T_0 \exp[F_1(\gamma_1)] T_0^{-1} T_0 \exp[F_2(\gamma_2)] T_0^{-1} T_0 \dots \exp[F_N(\gamma_N)] T_0^{-1} \\ &= \exp[\rho_1(\gamma_1)F_1(\gamma_1)] \exp[\rho_2(\gamma_2)F_2(\gamma_2)] \dots \exp[\rho_N(\gamma_N)F_N(\gamma_N)], \end{aligned} \quad (4.110)$$

onde

$$\rho_i(\gamma_i) = \exp[-zf_i^-(\gamma_i) + \bar{z}f_i^+(\gamma_i)]. \quad (4.111)$$

Se substituirmos (4.110) em (4.101), veremos que o cálculo depende, a princípio, de todas as potências dos F_i ($1, F_i, F_i^2, \dots$). Portanto, além de (4.103), é conveniente que os F_i satisfaçam a seguinte propriedade:

$$(F_i)^m = 0, \quad (4.112)$$

onde m é algum inteiro. Nesta tese, analisaremos apenas casos nos quais a álgebra é $A_r^{(1)}$. Para estas álgebras, existem F_i tais que

$$F_i^2 = 0. \quad (4.113)$$

As equações (4.113) e (4.103) são características do que se chama na literatura de operadores de vértice [5,10,25].

Analisaremos três casos específicos. Em primeiro lugar, considere a gradação homogênea da álgebra de Kac-Moody [9,24-25]:

$$Q_{\text{homogênea}} = D. \quad (4.114)$$

Nos restringimos a $A_1^{(1)}$ e escolhemos

$$\epsilon^+ = \mu^+ H^{(1)} \quad (4.115)$$

e

$$\epsilon^- = \mu^- H^{(-1)}, \quad (4.116)$$

onde $\mu^\pm$ são constantes arbitrárias. Observe que, conforme (3.2), ϵ^+ possui grau (+1) e ϵ^- possui grau (-1). Sejam [25]

$$F^\pm(\gamma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{\pm\alpha_1}^{(n)} \gamma^{-n}. \quad (4.117)$$

Então, normalizando

$$\alpha_1^2 = 2, \quad (4.118)$$

obtemos:

$$[\epsilon^+, F^\pm(\gamma)] = \pm \mu^+ \sqrt{2} \gamma F^\pm(\gamma) \quad (4.119)$$

e

$$[\epsilon^-, F^\pm(\gamma)] = \pm \mu^- \sqrt{2} \gamma^{-1} F^\pm(\gamma). \quad (4.120)$$

Portanto, verificamos (4.103). Observe que $F^\pm$ é escrito como uma soma que contém geradores de todos os graus possíveis $(-\infty, \infty)$.

Definimos:

$$b^{(n)} = H^{(n)}. \quad (4.121)$$

Consequentemente,

$$[b^{(n)}, b^{(m)}] = n \delta_{n+m,0} C. \quad (4.122)$$

A álgebra (4.122) é conhecida como álgebra do oscilador harmônico ou álgebra de Heisenberg. Definimos, ainda,

$$\hat{p} = H^{(0)} \quad (4.123)$$

e $\hat{q}$ tal que

$$[\hat{q}, \hat{p}] = iC. \quad (4.124)$$

Introduzimos o campo de Fubini-Veneziano [10,25]:

$$\varphi(\gamma) = \hat{q} - i \hat{p} \ln \gamma + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \left(\frac{b^{(n)} \gamma^{-n}}{n} \right). \quad (4.125)$$

Definimos:

$$\varphi^+(\gamma) = i \sum_{n>0} \frac{b^{(n)} \gamma^{-n}}{n}, \quad (4.126)$$

$$\varphi^-(\gamma) = i \sum_{n<0} \frac{b^{(n)} \gamma^{-n}}{n} \quad (4.127)$$

e

$$\varphi^{(0)}(\gamma) = \hat{q} - i \hat{p} \ln \gamma. \quad (4.128)$$

A partir de (4.125)-(4.128) define-se o operador de vértice:

$$V^{(\pm\alpha_1)}(\gamma) =: \exp[i(\pm\alpha_1)\varphi(\gamma)] :$$

$$= \exp[i(\pm\alpha_1)\varphi^-(\gamma)] \exp[i(\pm\alpha_1)\varphi^{(0)}(\gamma)] \exp[i(\pm\alpha_1)\varphi^+(\gamma)]$$

$$= \gamma \exp[i(\pm\alpha_1)\varphi^-(\gamma)] \exp[i(\pm\alpha_1)\hat{q}] \exp[(\pm\alpha_1)\hat{p} \ln \gamma] \exp[i(\pm\alpha_1)\varphi^+(\gamma)], \quad (4.129)$$

onde utilizamos a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, que neste caso se reduz a:

$$se\{ [A,[A,B]]=[B,[A,B]]=0\} \rightarrow \{e^A e^B = e^{[A,B]} e^B e^A\}. \quad (4.130)$$

Comparando (4.115)-(4.116) e (4.121), vemos que:

$$\epsilon^+ = \mu^+ b^{(1)} \quad (4.131)$$

e

$$\epsilon^- = \mu^- b^{(-1)}. \quad (4.132)$$

Calculemos:

$$\begin{aligned} & [\epsilon^+, V^{(+\alpha_1)}(\gamma)] = \\ & \mu^+ \gamma b^{(1)} \exp[i\sqrt{2}\varphi^-(\gamma)] \exp[i\sqrt{2}\hat{q}] \exp[\sqrt{2}\hat{p} \ln \gamma] \exp[i\sqrt{2}\varphi^+(\gamma)] + \\ & - \mu^+ \gamma \exp[i\sqrt{2}\varphi^-(\gamma)] b^{(1)} \exp[i\sqrt{2}\hat{q}] \exp[\sqrt{2}\hat{p} \ln \gamma] \exp[i\sqrt{2}\varphi^+(\gamma)] \\ & = \mu^+ \gamma \exp[i\sqrt{2}\varphi^-(\gamma)] \left(b^{(1)} - \frac{(i)^2 \sqrt{2} \gamma}{(-1)} [b^{(-1)}, b^{(1)}] - b^{(1)} \right) \\ & \quad \cdot \exp[i\sqrt{2}\hat{q}] \exp[\sqrt{2}\hat{p} \ln \gamma] \exp[i\sqrt{2}\varphi^+(\gamma)] \\ & = \mu^+ \gamma \sqrt{2} V^{(+\alpha_1)}(\gamma). \end{aligned} \quad (4.133)$$

Similarmente,

$$[\epsilon^-, V^{(+\alpha_1)}(\gamma)] = \mu^- \gamma^{-1} \sqrt{2} V^{(+\alpha_1)}(\gamma), \quad (4.134)$$

$$[\epsilon^+, V^{(-\alpha_1)}(\gamma)] = -\mu^+ \gamma \sqrt{2} V^{(-\alpha_1)}(\gamma) \quad (4.135)$$

e

$$[\epsilon^-, V^{(-\alpha_1)}(\gamma)] = -\mu^- \gamma^{-1} \sqrt{2} V^{(-\alpha_1)}(\gamma). \quad (4.136)$$

A comparação de (4.119)-(4.120) com (4.133)-(4.136) sugere identificar $F^\pm(\gamma)$ com $V^{(\pm\alpha_1)}(\gamma)$. Esta identificação é realmente válida para $A_r^{(1)}$ em geral, a menos da introdução de certos fatores em $V^{(\pm\alpha_1)}$ conhecidos como fatores de Klein [5,10].

Calculemos:

$$\exp[(\pm\sqrt{2}) \hat{p} \ln \gamma] \exp[i(\pm\sqrt{2}) \hat{q}] = \gamma^2 \exp[i(\pm\sqrt{2}) \hat{q}] \exp[(\pm\sqrt{2}) \hat{p} \ln \gamma] \quad (4.137)$$

e

$$[i(\pm\sqrt{2})\varphi^+(\gamma), i(\pm\sqrt{2})\varphi^-(w)] = -2 \sum_{n>0} \frac{1}{n} \left(\frac{w}{\gamma}\right)^n = 2 \ln \left(1 - \frac{w}{\gamma}\right). \quad (4.138)$$

Consequentemente,

$$V^{(\pm\alpha_1)}(\gamma) V^{(\pm\alpha_1)}(w) = (\gamma - w)^2 : \exp[i(\pm\alpha_1)\varphi(\gamma) + i(\pm\alpha_1)\varphi(w)] : \quad (4.139)$$

Portanto,

$$[V^{(\pm\alpha_1)}(\gamma)]^2 = 0. \quad (4.140)$$

O fator de Klein $C_\alpha(\hat{p})$ depende somente de $\hat{p}$ e possui a seguinte propriedade [5]:

$$C_\alpha(\hat{p}) V^\alpha(\gamma) = V^\alpha(\gamma) C_\alpha(\hat{p} + \alpha). \quad (4.141)$$

Consequentemente,

$$C_\alpha(\hat{p}) V^\alpha(\gamma) C_\alpha(\hat{p}) V^\alpha(\gamma) = C_\alpha(\hat{p}) V^\alpha(\gamma) V^\alpha(\gamma) C_\alpha(\hat{p} + \alpha) = 0. \quad (4.142)$$

Portanto, o fator de Klein não modifica (4.140). Ou seja, verificamos (4.113).

A gradação principal [9,24-25] da álgebra de Kac-Moody $A_r^{(1)}$ é definida por:

$$Q_{principal} = (r+1)D + \sum_{i=1}^r \left(\frac{2\lambda_i \cdot H^{(0)}}{\alpha_i^2} \right), \quad (4.143)$$

onde por λ_i representamos os pesos fundamentais de A_r (conforme apêndice "Definições Algébricas"). Nos restringimos a $A_1^{(1)}$, de tal forma que

$$Q_{principal} = 2D + \frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2}. \quad (4.144)$$

Escolhemos

$$\epsilon^+ = \mu^+ (E_{\alpha_1}^{(0)} + E_{-\alpha_1}^{(1)}) \quad (4.145)$$

e

$$\epsilon^- = \mu^- (E_{-\alpha_1}^{(0)} + E_{\alpha_1}^{(-1)}). \quad (4.146)$$

Observe que, coerentemente com a gradação (4.144), $\epsilon^\pm$ possuem grau (± 1) .

Sejam

$$F^\pm(\gamma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\pm) \gamma^{-2n-1} (E_{\alpha_1}^{(n)} - E_{-\alpha_1}^{(n+1)}) + \gamma^{-2n} [h^{(n)} - (1/2)C\delta_{n,0}]. \quad (4.147)$$

Então,

$$[\epsilon^\pm, F^\pm(\gamma)] = -2\mu^\pm \gamma^{\pm 1} F^\pm(\gamma) = \begin{matrix} \uparrow \\ \ell_{(+)}^\pm \end{matrix} \quad \textcircled{F^\pm} \quad (4.148)$$

e

$$[\epsilon^\pm, F^\mp(\gamma)] = 2\mu^\pm \gamma^{\pm 1} F^\mp(\gamma) = \begin{matrix} \uparrow \\ \ell_{(-)}^\pm \end{matrix} \quad \textcircled{F^\mp} \quad (4.149)$$

Portanto, verificamos (4.103).

Definimos [25]:

$$b^{(2n+1)} = E_{\alpha_1}^{(n)} + E_{-\alpha_1}^{(n+1)}. \quad (4.150)$$

Consequentemente,

$$[b^{(2n+1)}, b^{(2m+1)}] = (2n+1)\delta_{n+m+1,0}C. \quad (4.151)$$

Vemos que

$$\epsilon^+ = \mu^+ b^{(1)} \quad (4.152)$$

e

$$\epsilon^- = \mu^- b^{(-1)}. \quad (4.153)$$

Definimos:

$$\varphi^+(\gamma) = 2 \sum_{n \geq 0} \left(\frac{b^{(2n+1)} \gamma^{-(2n+1)}}{2n+1} \right) \quad (4.154)$$

e

$$\varphi^-(\gamma) = 2 \sum_{n < 0} \left(\frac{b^{(2n+1)} \gamma^{-(2n+1)}}{2n+1} \right). \quad (4.155)$$

Analogamente a (4.129), definimos os operadores de vértice:

$$V^\pm(\gamma) = \exp[\pm \varphi^-(\gamma)] \exp[\pm \varphi^+(\gamma)] \quad (4.156)$$

Consequentemente,

$$[\epsilon^\pm, V^+(\gamma)] = -2\mu^\pm \gamma^{\pm 1} V^+(\gamma) \quad (4.157)$$

e

$$[\epsilon^\pm, V^-(\gamma)] = 2\mu^\pm \gamma^{\pm 1} V^-(\gamma). \quad (4.158)$$

Portanto, comparando (4.148)-(4.149) a (4.157)-(4.158), vemos que $F^\pm(\gamma) \rightarrow V^\pm(\gamma)$.

Calculemos:

$$\begin{aligned} & [\varphi^+(\gamma), \varphi^-(w)] \\ &= -4 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{w}{\gamma} \right)^{2n+1} = -4 \sum_{n > 0, \text{impar}} \frac{1}{n} \left(\frac{w}{\gamma} \right)^n \\ &= -4 \left(\frac{-1}{2} \right) \left[\sum_{n > 0} \frac{1}{n} \left(\frac{-w}{\gamma} \right)^n - \sum_{n > 0} \frac{1}{n} \left(\frac{w}{\gamma} \right)^n \right] \\ &= 2 \left[-\ln \left(1 + \frac{w}{\gamma} \right) + \ln \left(1 - \frac{w}{\gamma} \right) \right] \\ &= 2 \ln \left(\frac{\gamma - w}{\gamma + w} \right). \end{aligned} \quad (4.159)$$

Consequentemente,

$$V^+(\gamma)V^+(w) = \left(\frac{\gamma - w}{\gamma + w} \right)^2 \exp[\varphi^-(\gamma) + \varphi^-(w)] \exp[\varphi^+(\gamma) + \varphi^+(w)]. \quad (4.160)$$

Portanto,

$$[V^+(\gamma)]^2 = 0 \quad (4.161)$$

e, analogamente,

$$[V^-(\gamma)]^2 = 0. \quad (4.162)$$

Ou seja, verificamos (4.113). Em geral, para o caso dos modelos de Toda abelianos associados a uma álgebra G , os operadores de vértice foram construídos em [31].

O terceiro caso do qual vamos tratar consiste de uma gradação intermediária entre a homogênea e a principal. A mesma é dada para $A_r^{(1)}$ por [25]:

$$Q_{intermediária} = rD + \sum_{i=2}^r \frac{2\lambda_i \cdot H^{(0)}}{\alpha_i^2}. \quad (4.163)$$

Escolhemos:

$$\epsilon^+ = \mu^+ \left[\sum_{i=2}^r E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{-(\alpha_2 + \dots + \alpha_r)}^{(1)} \right] \quad (4.164)$$

e

$$\epsilon^- = \mu^- \left[\sum_{i=2}^r E_{-\alpha_i}^{(0)} + E_{\alpha_2 + \dots + \alpha_r}^{(-1)} \right]. \quad (4.165)$$

Os auto estados de $\epsilon^\pm$ são dados por [25]:

$$\bar{F}_{1,j}(\gamma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^{-rn} \sum_{p=0}^{r-1} w^{pj} \gamma^{-p} E_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{(p+1)}}^{(n)}, \quad (4.166)$$

$$\hat{F}_{1,j}(\gamma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^{-rn} \sum_{p=0}^{r-1} w^{-pj} \gamma^p E_{-\alpha_1 + \dots + \alpha_{(p+1)}}^{(n)} \quad (4.167)$$

e

$$\begin{aligned} F_{a,j}(\gamma) = & \frac{C}{w^a - 1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^{-rn} \sum_{i=1}^{r-1} h_{i+1}^{(n)} \sum_{p=1}^i w^{a(i-p)} + \\ & + \sum_{b=1}^{r-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w^{bj} \gamma^{-(b+nr)} \left[\sum_{i=1}^{r-b} w^{a(i-1)} E_{\alpha_{(i+1)} + \dots + \alpha_{(i+b)}}^{(n)} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^b w^{a(i+r-1-b)} E_{-\alpha_{(i+1)} + \dots + \alpha_{(i+r-b)}}^{(n+1)} \right], \end{aligned} \quad (4.168)$$

onde $(j=1, \dots, r)$, $(a=1, \dots, r-1)$ e

$$w = \exp \left[\frac{2\pi i}{r} \right]. \quad (4.169)$$

Algumas propriedades importantes de w são:

$$w^r = 1 \quad (4.170)$$

e

$$1 + w + w^2 + \dots + w^{r-1} = 0. \quad (4.171)$$

Os comutadores de $\epsilon^\pm$ com os vértices são dados por:

$$[\epsilon^+, \bar{F}_{1,j}(\gamma)] = -\mu^+ w^{-j} \gamma \bar{F}_{1,j}(\gamma), \quad (4.172)$$

$$[\epsilon^-, \bar{F}_{1,j}(\gamma)] = -\mu^- w^j \gamma^{-1} \bar{F}_{1,j}(\gamma), \quad (4.173)$$

$$[\epsilon^+, \hat{F}_{1,j}(\gamma)] = \mu^+ w^{-j} \gamma \hat{F}_{1,j}(\gamma), \quad (4.174)$$

$$[\epsilon^-, \hat{F}_{1,j}(\gamma)] = \mu^- w^j \gamma^{-1} \hat{F}_{1,j}(\gamma), \quad (4.175)$$

$$[\epsilon^+, F_{a,j}(\gamma)] = \mu^+ w^{-j} (w^a - 1) \gamma F_{a,j}(\gamma) \quad (4.176)$$

e

$$[\epsilon^-, F_{a,j}(\gamma)] = \mu^- w^j (w^{-a} - 1) \gamma^{-1} F_{a,j}(\gamma). \quad (4.177)$$

A seguir, fornecemos importantes relações entre os vértices:

$$\bar{F}_{1,r}(\gamma = \tilde{\gamma} w^{-j}) = \bar{F}_{1,j}(\gamma = \tilde{\gamma}), \quad (4.178)$$

$$\hat{F}_{1,r}(\gamma = \tilde{\gamma} w^{-j}) = \hat{F}_{1,j}(\gamma = \tilde{\gamma}), \quad (4.179)$$

$$F_{a,r}(\gamma = \tilde{\gamma} w^{-j}) = F_{a,j}(\gamma = \tilde{\gamma}), \quad (4.180)$$

e, se $\gamma^* = \gamma^{-1}$,

$$\bar{F}_{1,j}^\dagger(\gamma) = \hat{F}_{1,j}(\gamma) \quad (4.181)$$

$$F_{a,j}^\dagger(\gamma) = F_{r-a, (j-a) \bmod r}(\gamma), \quad (4.182)$$

com $(a=1, \dots, r-1)$, $(j=1, \dots, r)$. Na última expressão, por módulo r entende-se que $(0) \bmod r = r$, $(-1) \bmod r = (r-1)$, etc.

Definimos [25]:

$$A_{(nr)}^{(0)} = \sqrt{r+1} \vec{\lambda}_1 \cdot H^{(n)} - \frac{(r-1)}{2} \sqrt{\frac{1}{r+1}} \delta_{n,0} C \quad (4.183)$$

e, para $(a=1, \dots, r-1)$,

$$A_{(a+nr)}^{(a)} = \sum_{i=1}^{r-a} E_{\alpha_{(i+1)} + \alpha_{(i+2)} + \dots + \alpha_{(i+a)}}^{(n)} + \sum_{i=1}^a E_{-\alpha_{(i+1)} + \alpha_{(i+2)} + \dots + \alpha_{(i+r-a)}}^{(n+1)}. \quad (4.184)$$

Consequentemente,

$$[A_{(a+nr)}^{(a)}, (A_{(b+mr)}^{(b)})^\dagger] = (a+nr) \delta_{n,m} \delta_{a,b}, \quad (4.185)$$

$$[A_{(nr)}^{(0)}, (A_{(mr)}^{(0)})^\dagger] = nr \delta_{n,m} \quad (4.186)$$

e

$$[A_{(nr)}^{(0)}, A_{(a+nr)}^{(a)}] = 0, \quad (4.187)$$

onde

$$(A_{(b+mr)}^{(b)})^\dagger = A_{(-b-mr)}^{(r-b)} \quad (4.188)$$

e

$$(A_{(mr)}^{(0)})^\dagger = A_{(-mr)}^{(0)}. \quad (4.189)$$

Vemos que

$$\epsilon^+ = \mu^+ A_{(1+0r)}^{(1)} = \mu^+ A_{(1)}^{(1)} \quad (4.190)$$

e

$$\epsilon^- = \mu^- A_{(r-1-r)}^{(r-1)} = \mu^- A_{(-1)}^{(r-1)}. \quad (4.191)$$

Definimos [25]:

$$\varphi_-^{(1)}(\gamma) = i \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_{(nr)}^{(0)} \gamma^{-nr}}{nr} \right), \quad (4.192)$$

$$\varphi_+^{(1)}(\gamma) = -i \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(A_{(nr)}^{(0)})^\dagger \gamma^{nr}}{nr} \right), \quad (4.193)$$

e, para $(a=1, \dots, r-1)$,

$$\varphi_-^{(1+a)}(\gamma) = i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_{(a+nr)}^{(a)} \gamma^{a+nr}}{a+nr} \right), \quad (4.194)$$

$$\varphi_+^{(1+a)}(\gamma) = -i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(A_{(a+nr)}^{(a)})^\dagger \gamma^{-(a+nr)}}{a+nr} \right). \quad (4.195)$$

Definimos, ainda,

$$Q^- = (\varphi_-^{(1)}, \varphi_-^{(2)}, \dots, \varphi_-^{(r)}), \quad (4.196)$$

$$Q^+ = (\varphi_+^{(1)}, \varphi_+^{(2)}, \dots, \varphi_+^{(r)}), \quad (4.197)$$

$$q = (q_1, O_{(r-1)}) \quad (4.198)$$

e

$$p = (p_1, O_{(r-1)}). \quad (4.199)$$

Por $O_{(r-1)}$ entende-se o vetor de $(r-1)$ componentes iguais a zero. As variáveis q_1 e p_1 obedecem à relação:

$$[q_1, p_1] = iC. \quad (4.200)$$

Os operadores de vértice são definidos por:

$$V^{(\alpha)}(\gamma) = \exp[i\alpha^* \cdot Q^+(\gamma)] \exp[i\alpha \cdot q] \exp[\alpha \cdot p \ln \gamma] \exp[i\alpha \cdot Q^-(\gamma)], \quad (4.201)$$

onde

$$\alpha_1 = (\sqrt{r+1}, I_{(r-1)}), \quad (4.202)$$

e, para $(a=1, \dots, r-1)$

$$\alpha_{(a+1)} = (0, w^{(a-1)}(w-1), w^{2(a-1)}(w^2-1), \dots, w^{(r-1)(a-1)}(w^{r-1}-1)). \quad (4.203)$$

Por $I_{(r-1)}$ entende-se o vetor de $(r-1)$ componentes iguais a 1.

Verifica-se que os operadores de vértice V^α obedecem às mesmas relações de comutação (4.172)-(4.177) dos operadores F . A identificação é a que se segue:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{l} \bar{F}_{1,r} \rightarrow V(\alpha_1) \\ \bar{F}_{1,1} \rightarrow V(\alpha_1+\alpha_2) \\ \bar{F}_{1,2} \rightarrow V(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \\ \vdots \\ \bar{F}_{1,r-1} \rightarrow V(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} \hat{F}_{1,r} \rightarrow V(-\alpha_1) \\ \hat{F}_{1,1} \rightarrow V(-\alpha_1-\alpha_2) \\ \hat{F}_{1,2} \rightarrow V(-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3) \\ \vdots \\ \hat{F}_{1,r-1} \rightarrow V(-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_r) \end{array} \right), \\
& \left(\begin{array}{l} F_{1,1} \rightarrow V(\alpha_2) \\ F_{1,2} \rightarrow V(\alpha_3) \\ \vdots \\ F_{1,r-1} \rightarrow V(\alpha_r) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} F_{2,2} \rightarrow V(\alpha_2+\alpha_3) \\ F_{2,3} \rightarrow V(\alpha_3+\alpha_4) \\ \vdots \\ F_{2,r-1} \rightarrow V(\alpha_{r-1}+\alpha_r) \end{array} \right), \\
& \left(\begin{array}{l} F_{3,3} \rightarrow V(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) \\ F_{3,4} \rightarrow V(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5) \\ \vdots \\ F_{3,r-1} \rightarrow V(\alpha_{r-2}+\alpha_{r-1}+\alpha_r) \end{array} \right), \dots, (F_{r-1,r-1} \rightarrow V(\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_r)), \\
& (F_{1,r} \rightarrow V(-\alpha_2-\alpha_3-\dots-\alpha_r)), \dots, \left(\begin{array}{l} F_{r-3,r} \rightarrow V(-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4) \\ F_{r-3,1} \rightarrow V(-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5) \\ \vdots \\ F_{r-3,r-4} \rightarrow V(-\alpha_{r-2}-\alpha_{r-1}-\alpha_r) \end{array} \right), \\
& \left(\begin{array}{l} F_{r-2,r} \rightarrow V(-\alpha_2-\alpha_3) \\ F_{r-2,1} \rightarrow V(-\alpha_3-\alpha_4) \\ \vdots \\ F_{r-2,r-3} \rightarrow V(-\alpha_{r-1}-\alpha_r) \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} F_{r-1,r} \rightarrow V(-\alpha_2) \\ F_{r-1,1} \rightarrow V(-\alpha_3) \\ \vdots \\ F_{r-1,r-2} \rightarrow V(-\alpha_r) \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Pode-se demonstrar que [25]:

$$\begin{aligned}
& V^{(\alpha)}(\gamma)V^{(\alpha)}(v) \\
& =: V^{(\alpha)}(\gamma)V^{(\alpha)}(v) : \gamma^{\frac{3}{2}(\alpha^{(1)})^2} v^{\frac{1}{2}(\alpha^{(1)})^2} \left(1 - \frac{v}{\gamma}\right)^{\frac{1}{r} \left[(\alpha^{(1)})^2 + \sum_{a=1}^{r-1} \alpha^{(1+a)} (\alpha^{(1+a)})^* \right]} \\
& \cdot \prod_{p=1}^{r-1} \left(1 - \frac{v}{\gamma} w^{-p}\right)^{\frac{1}{r} \left[(\alpha^{(1)})^2 + \sum_{a=1}^{r-1} w^{pa} \alpha^{(1+a)} (\alpha^{(1+a)})^* \right]}. \quad (4.204)
\end{aligned}$$

Quando $\gamma = v$, $1-(\gamma/v) \rightarrow 0$. Mas, como

$$\frac{(\alpha^{(1)})^2}{r} + \sum_{a=1}^{r-1} \frac{\alpha^{(1+a)}(\alpha^{(1+a)})^*}{r} > 0, \quad (4.205)$$

então,

$$[V^{(\alpha)}(\gamma)]^2 = 0. \quad (4.206)$$

Portanto, verifica-se (4.113).

SÓLITONS

Nesta seção discutiremos alguns conceitos básicos associados a sólitons [16,21]. Nos restringimos a 1+1 dimensões (t e x). Considere a equação de onda:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(x, t) = 0. \quad (4.207)$$

Qualquer função da forma $f(x \pm ct)$ é uma solução. Além disso, a equação é linear. Ou seja, dadas duas soluções, a soma também é solução. Portanto, uma função da forma

$$f(x - ct) = \int dk [a_1(k) \cos(kx - wt) + a_2(k) \sin(kx - wt)] \quad (4.208)$$

é solução [16]. Ou seja, ondas planas, $\sin(kx - wt)$ e $\cos(kx - wt)$, formam um conjunto completo de soluções para (4.207). A velocidade de fase é dada por:

$$v_{fase} = \frac{w}{k} = c. \quad (4.209)$$

e a velocidade de grupo por:

$$\frac{dw}{dk} = c. \quad (4.210)$$

Ou seja, todos os modos de Fourier possuem a mesma velocidade, que por sua vez é igual à velocidade de grupo. Portanto, verificam-se as seguintes propriedades:

a) Tomando a função f como localizada, ou seja, diferente de zero somente em uma região finita do espaço, é possível construir um pacote de onda localizado que se mova sem sofrer distorção;

b) Tomando dois pacotes de onda localizados, $f_1(x - ct)$ e $f_2(x + ct)$, a soma dada por $f_3(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$ também é solução. Quando t tende a $(-\infty)$, os dois pacotes estão separados e se aproximando. Em um tempo finito eles colidem. Quando t tende a $(+\infty)$, estão novamente separados e se afastando. Ou seja, depois da colisão os dois pacotes mantêm suas formas originais.

Estas notáveis propriedades estão associadas ao fato de que a equação de onda é linear e sem dispersão.

Consideremos, agora, a equação de Klein-Gordon, obtida a partir de (4.207) adicionando-se um termo de massa:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 c^2 \right) \phi(x, t) = 0. \quad (4.211)$$

Note que a equação é linear e ondas planas continuam a ser solução. Entretanto, neste caso, o sistema possui uma relação de dispersão não trivial:

$$[w(k)]^2 = k^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (4.212)$$

Isto implica que a velocidade de fase,

$$v_{fase} = \frac{w(k)}{k}, \quad (4.213)$$

não é a mesma para todos os modos de Fourier. Portanto, qualquer pacote de onda inicialmente localizado sofre uma distorção à medida que o tempo passa. Consequentemente, as propriedades (a) e (b) foram perdidas. Dizemos que o novo termo incluído em (4.211) é um termo dispersivo.

Da mesma forma, adicionando-se a (4.207) um termo não linear,

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(x, t) + \phi^3(x, t) = 0, \quad (4.214)$$

verifica-se que as propriedades (a) e (b) não são mantidas.

Entretanto, em alguns casos, é possível adicionar termos dos dois tipos, não lineares e dispersivos, de modo a que as equações resultantes possuam soluções com as propriedades (a) e (b). De um modo geral, os nomes sólitons ou ondas solitárias são atribuídos a estas soluções. Salientamos que, na literatura [16], as definições precisas destes nomes variam de autor para autor.

Daremos, a seguir, uma definição mais precisa [16] dos nomes sólitons e ondas solitárias. Considere um sistema de equações diferenciais não lineares determinando a dinâmica de um conjunto de campos, possuindo uma densidade de energia $\varepsilon(x, t)$. A energia é dada por:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(x, t) dx. \quad (4.215)$$

A energia deve ser finita e possuir um limite inferior que pode ser ajustado de modo a que seja zero. Uma solução é denominada localizada se a integral de $\varepsilon(x, t)$ em uma região finita do espaço, em qualquer instante t , é finita e $\varepsilon(x, t)$ vai a zero quando x tende a $(\pm\infty)$. Se estas condições forem satisfeitas, uma solução das equações de movimento será denominada uma onda solitária se [16]:

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon(x - vt). \quad (4.216)$$

Em particular, qualquer função estática, ou seja, sem dependência temporal, satisfazendo as condições anteriores, é uma onda solitária.

Considere um conjunto de ondas solitárias, cada uma com uma densidade de energia $\varepsilon_0^{(i)}(x - v^{(i)}t)$. Considere, ainda, que existam outras soluções deste sistema de equações, de tal modo que a densidade de energia associada seja $\varepsilon(x, t)$. Suponha que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varepsilon(x, t) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_0^{(i)}(x - a^{(i)} - v^{(i)}t) \quad (4.217)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(x, t) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_0^{(i)}(x - a^{(i)} - v^{(i)}t + \delta^{(i)}), \quad (4.218)$$

onde $a^{(i)}$ e $\delta^{(i)}$ são constantes e N é arbitrário. Então, neste caso, as ondas solitárias são denominadas sólitons [16]. Consequentemente, as soluções associadas a $\varepsilon(x, t)$ são denominadas N -sólitons e representam o espalhamento de N sólitons. Observe que a exigência de que N seja arbitrário implica que deve-se encontrar a função que represente o espalhamento de um número arbitrário de ondas solitárias satisfazendo (4.217)-(4.218). Logicamente, tal tarefa não é trivial.

Uma característica importante dos sólitons é a de que os mesmos podem ser interpretados como partículas extendidas. Isto se deve ao fato usual de possuírem, em teorias relativísticas, energia e momento da forma ($c=1$):

$$E = \frac{M}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (4.219)$$

e

$$P = \frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (4.220)$$

onde v é a velocidade e M é interpretado como a massa do sólito.

Passemos, agora, ao conceito de sólito topológico. Como exemplo, tomamos o modelo de sine-Gordon, dado pela lagrangeana [16]:

$$L = \frac{m^4}{\lambda} \left[\frac{1}{2} (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi) + (\cos \phi - 1) \right] \quad (4.221)$$

As soluções da equação de movimento devem ser de tal forma que no limite $x \rightarrow (\pm\infty)$ o campo ϕ assuma um valor que minimize o potencial em (4.221). Portanto,

$$\phi(\pm\infty) = 2N\pi, \quad (4.222)$$

onde N é um inteiro. Define-se a corrente topológica:

$$J^\mu = \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (4.223)$$

Esta corrente é trivialmente conservada:

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = \frac{1}{2\pi} (\partial_t \partial_x - \partial_x \partial_t) \phi = 0. \quad (4.224)$$

Salientamos que a corrente topológica não é originária do teorema de Noether. A carga topológica é dada por:

$$Q_{TOP} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx J^0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\partial}{\partial x} \phi = \frac{1}{2\pi} [\phi(t, \infty) - \phi(t, -\infty)]. \quad (4.225)$$

Uma consequência importante da existência da carga topológica é que configurações de campo que em um determinado instante possuam um determinado valor de Q_{TOP} somente podem sofrer decaimentos ou excitações para configurações com o mesmo valor de Q_{TOP} . Ou seja, as soluções são divididas em setores que não se interseccionam.

A equação de sine-Gordon,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sin \phi = 0, \quad (4.226)$$

possui a solução de 1-sóliton estática na forma [16]

$$\phi_S = 4 \arctan \exp(x - x_0), \quad (4.227)$$

com carga topológica

$$Q_{TOP}^S = 1. \quad (4.228)$$

Similarmente, a solução dada por:

$$\phi_A = -4 \arctan \exp(x - x_0) \quad (4.229)$$

é chamada de anti-sóliton [16] e possui carga topológica

$$Q_{TOP}^A = -1. \quad (4.230)$$

Além das soluções sóliton e anti-sóliton, existem as soluções de N -sóliton [16]. A solução

$$\phi_{SA}(x, t) = 4 \arctan \left(\frac{\sinh(vt/\sqrt{1-v^2})}{v \cosh(x/\sqrt{1-v^2})} \right) \quad (4.231)$$

corresponde ao espalhamento de um sóliton e um anti-sóliton. Por exemplo, no limite $t \rightarrow \infty$,

$$\phi_{SA} \rightarrow \phi_S \left(\frac{x + v(t - \Delta/2)}{\sqrt{1 - v^2}} \right) + \phi_A \left(\frac{x - v(t - \Delta/2)}{\sqrt{1 - v^2}} \right), \quad (4.232)$$

onde

$$\Delta = \frac{(1 - v^2)}{v} \ln v \quad (4.233)$$

é conhecido como “atraso temporal”. O espalhamento sóliton-sóliton é dado por:

$$\phi_{SS}(x, t) = 4 \arctan \left(\frac{v \sinh(x/\sqrt{1 - v^2})}{\cosh(vt/\sqrt{1 - v^2})} \right). \quad (4.234)$$

Voltaremos a abordar o modelo de sine-Gordon no próximo capítulo, sob um outro ponto de vista.

Capítulo 5

OS MODELOS DE SINE-GORDON E LUND-REGGE

O MODELO DE SINE-GORDON

Considere a álgebra $A_1^{(1)}$. Seja o operador de gradação dado por (4.144)

$$Q = 2D + \frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2} \quad (5.1)$$

e $\epsilon^\pm$ dados por (4.145)-(4.146)

$$\epsilon^\pm = \mu \left(E_{\pm\alpha_1}^{(0)} + E_{\mp\alpha_1}^{(\pm 1)} \right). \quad (5.2)$$

Trabalhamos com a normalização (4.118)

$$\alpha_1^2 = 2. \quad (5.3)$$

Os geradores de grau zero são dados por $\{h^{(0)}, D, C\}$. Portanto, parametrizamos o elemento de grupo B como:

$$B = \exp\{\varphi h^{(0)} + \nu C + \eta D\}. \quad (5.4)$$

Observe que este é um modelo de Toda abeliano, pois B contém somente geradores que comutam entre si. Os potenciais de calibre, (4.62)-(4.63) são dados por:

$$A = \mu[e^{-2\varphi} E_{-\alpha_1}^{(0)} + e^{2\varphi-\eta} E_{+\alpha_1}^{(-1)}] \quad (5.5)$$

e

$$\bar{A} = -\mu[E_{+\alpha_1}^{(0)} + E_{-\alpha_1}^{(1)}] - \bar{\partial}\varphi h^{(0)} - \bar{\partial}\nu C - \bar{\partial}\eta D, \quad (5.6)$$

onde escolhemos em (4.145)-(4.146)

$$\mu^- = \mu^+ = \mu > 0. \quad (5.7)$$

A condição de curvatura nula (4.61) implica que:

$$\partial\bar{\partial}\eta = 0, \quad (5.8)$$

$$\partial\bar{\partial}\nu = \mu^2 e^{2\varphi-\eta} \quad (5.9)$$

e

$$\partial\bar{\partial}\varphi = \mu^2 (e^{-2\varphi} - e^{2\varphi-\eta}). \quad (5.10)$$

Considere a transformação conforme dada por $z \rightarrow f(z)$ e $\bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z})$, onde f e $\bar{f}$ são funções analíticas. Então,

$$\frac{\partial}{\partial z} = f'(z) \frac{\partial}{\partial f} \quad (5.11)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \bar{f}'(\bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{f}}. \quad (5.12)$$

Suponha que os campos se transformem por:

$$\exp[\varphi(z, \bar{z})] \rightarrow [f'(z)]^{-\frac{1}{2}} [\bar{f}'(\bar{z})]^{-\frac{1}{2}} \exp[\varphi(f, \bar{f})], \quad (5.13)$$

$$\exp[\eta(z, \bar{z})] \rightarrow [f'(z)]^{-2} [\bar{f}'(\bar{z})]^{-2} \exp[\eta(f, \bar{f})] \quad (5.14)$$

e

$$\exp[\nu(z, \bar{z})] \rightarrow [f'(z)]^{\delta} [\bar{f}'(\bar{z})]^{\bar{\delta}} \exp[\nu(f, \bar{f})], \quad (5.15)$$

onde δ e $\bar{\delta}$ são constantes arbitrárias. Substituindo (5.11)-(5.15) em (5.8)-(5.10), obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial f} \frac{\partial}{\partial \bar{f}} \eta' = 0, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial f} \frac{\partial}{\partial \bar{f}} \nu' = \mu^2 \exp[2\varphi' - \eta'] \quad (5.17)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial f} \frac{\partial}{\partial \bar{f}} \varphi' = \mu^2 \{ \exp[-2\varphi'] - \exp[2\varphi' - \eta'] \}. \quad (5.18)$$

Portanto, as equações de movimento são invariantes por uma transformação conforme, dado que os campos se transformem na forma (5.13)-(5.15).

Calculemos a ação. Como não estamos impondo vínculos adicionais, então, em (3.76)

$$g_0^f = B. \quad (5.19)$$

A equação (3.81) se reduz a:

$$S_{efetivo} = S_{WZNW}(B) + \frac{k}{2\pi} \int d^2x \text{Tr}[\epsilon^+ B \epsilon^- B^{-1}], \quad (5.20)$$

onde tomamos $k > 0$. Como B é abeliano, o termo topológico de S_{WZNW} em (3.39) é igual a zero, pois trata-se de uma comutador (2.22). Logo, utilizando as relações para a forma traço descritas no apêndice "Definições Algébricas", obtemos

$$S_{WZNW}(B) = -\frac{k}{4\pi} \int d^2x \text{Tr}[B^{-1} \partial B B^{-1} \bar{\partial} B] = -\frac{k}{4\pi} \int d^2x [2\partial\varphi \bar{\partial}\varphi + \partial\nu \bar{\partial}\eta + \bar{\partial}\nu \partial\eta]. \quad (5.21)$$

O segundo termo em (5.20) é igual a:

$$\frac{k\mu^2}{2\pi} \int d^2x [e^{-2\varphi} + e^{2\varphi-\eta}]. \quad (5.22)$$

Portanto, a densidade de lagrangeana é dada por:

$$L = -\frac{k}{4\pi} [2\partial\varphi \bar{\partial}\varphi + \partial\nu \bar{\partial}\eta + \bar{\partial}\nu \partial\eta] + \frac{k\mu^2}{2\pi} [e^{-2\varphi} + e^{2\varphi-\eta}]. \quad (5.23)$$

As equações de Euler-Lagrange para um campo genérico Ψ são dadas por:

$$\frac{\delta L}{\delta \Psi} = \partial \left(\frac{\delta L}{\delta(\partial \Psi)} \right) + \bar{\partial} \left(\frac{\delta L}{\delta(\bar{\partial} \Psi)} \right), \quad (5.24)$$

o que, combinado com (5.23), resulta em (5.8)-(5.10).

O momento canônico associado a um campo genérico Ψ é dado por:

$$\Pi_\Psi = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t \Psi)}. \quad (5.25)$$

Portanto, a partir de (5.23), obtemos:

$$\Pi_\varphi = -\frac{k}{4\pi} \partial_t \varphi, \quad (5.26)$$

$$\Pi_\nu = -\frac{k}{8\pi} \partial_t \eta \quad (5.27)$$

e

$$\Pi_\eta = -\frac{k}{8\pi} \partial_t \nu. \quad (5.28)$$

Por (4.56)-(4.57),

$$A_x = A - \bar{A}. \quad (5.29)$$

Conforme (4.65), as equações de movimento são invariantes por uma transformação de calibre. Portanto, verificaremos a integrabilidade do modelo através de um potencial de calibre transformado:

$$\begin{aligned} A_x' &= B^{-\frac{1}{2}} A_x B^{\frac{1}{2}} - \partial_x B^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} \\ &= B^{\frac{1}{2}} \epsilon^- B^{-\frac{1}{2}} + B^{-\frac{1}{2}} \epsilon^+ B^{\frac{1}{2}} + (\partial_t - \partial_x) B^{\frac{1}{2}} B^{-\frac{1}{2}} - \partial_x B^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} \\ &= B^{\frac{1}{2}} \epsilon^- B^{-\frac{1}{2}} + B^{-\frac{1}{2}} \epsilon^+ B^{\frac{1}{2}} + \partial_t B^{\frac{1}{2}} B^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

onde utilizamos o fato de que B é abeliano. Portanto,

$$A_x' = \mu [e^{-\varphi} E_{-\alpha_1}^{(0)} + e^{\varphi-\frac{\eta}{2}} E_{+\alpha_1}^{(-1)} + e^{-\varphi} E_{+\alpha_1}^{(0)} + e^{\varphi-\frac{\eta}{2}} E_{-\alpha_1}^{(1)}] - \frac{2\pi}{k} [\Pi_\varphi h^{(0)} + 2\Pi_\nu D + 2\Pi_\eta C]. \quad (5.31)$$

Utilizaremos os colchetes de Poisson canônicos, dados para um campo genérico Ψ e seu momento conjugado Π_Ψ por:

$$\{\Psi(y, t), \Pi_\Psi(z, t)\} = \delta(y - z) \quad (5.32)$$

e

$$\{\Psi(y, t), \Psi(z, t)\} = \{\Pi_\Psi(y, t), \Pi_\Psi(z, t)\} = 0. \quad (5.33)$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \left\{ A_x'(y, t) \otimes A_x'(z, t) \right\} &= \frac{2\pi\mu}{k} \delta(y - z) [(I \otimes I) - \sigma] \{ e^{-\varphi} [E_{-\alpha_1}^{(0)} \otimes h^{(0)}] + \\ &\quad - e^{\varphi-\frac{\eta}{2}} [E_{+\alpha_1}^{(-1)} \otimes h^{(0)}] + e^{-\varphi} [E_{+\alpha_1}^{(0)} \otimes h^{(0)}] + \\ &\quad - e^{\varphi-\frac{\eta}{2}} [E_{-\alpha_1}^{(1)} \otimes h^{(0)}] + e^{\varphi-\frac{\eta}{2}} [E_{+\alpha_1}^{(-1)} \otimes C] + e^{\varphi-\frac{\eta}{2}} [E_{-\alpha_1}^{(1)} \otimes C] \}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

onde

$$\sigma(A_1 \otimes B_1) \dots (A_n \otimes B_n) = (B_1 \otimes A_1) \dots (B_n \otimes A_n). \quad (5.35)$$

Nesta última relação, (A_i, B_i) são elementos arbitrários da álgebra.

Definindo-se

$$r = -\frac{2\pi}{k}[C^+ - C^-], \quad (5.36)$$

com

$$C^+ = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h^{(m)} \otimes h^{(-m)}}{2} + (E_{+\alpha_1}^{(0)} \otimes E_{-\alpha_1}^{(0)}) + \sum_{m=1}^{\infty} \{[E_{+\alpha_1}^{(m)} \otimes E_{-\alpha_1}^{(-m)}] + [E_{-\alpha_1}^{(m)} \otimes E_{+\alpha_1}^{(-m)}]\} \quad (5.37)$$

e

$$C^- = \sigma C^+, \quad (5.38)$$

verifica-se que a relação (4.32) associada à integrabilidade do sistema é satisfeita:

$$\left\{ A_x(y, t) \otimes A_x(z, t) \right\} = [r, A_x(y, t) \otimes I + I \otimes A_x(z, t)] \delta(y - z). \quad (5.39)$$

Antes de obtermos uma solução do modelo, é conveniente discutirmos uma peculiaridade do campo η . Conforme (4.97)-(4.98), dado que exista um gerador em B que comute com $\epsilon^\pm$, o método de “dressing” com as escolhas (4.96) fornecerá soluções que respeitem necessariamente os vínculos adicionais (3.36)-(3.37). Em qualquer modelo existe pelo menos uma direção na qual isto ocorre. Esta direção é dada pela carga central C. Portanto, necessariamente,

$$Tr[B^{-1} \partial B C] = \partial \eta = 0 \quad (5.40)$$

e

$$Tr[\bar{\partial} B B^{-1} C] = \bar{\partial} \eta = 0. \quad (5.41)$$

As equações (5.40)-(5.41) são compatíveis com a escolha que fazemos:

$$\eta = 0. \quad (5.42)$$

Observe que esta escolha quebra a invariância conforme.

Portanto,

$$B = \exp(\varphi h^{(0)} + \nu C). \quad (5.43)$$

Uma solução de vácuo da forma (4.70)-(4.71) existe e é dada por:

$$\varphi_{vac} = 0 \quad (5.44)$$

e

$$\nu_{vac} = \mu^2 z \bar{z}, \quad (5.45)$$

conforme (5.8)-(5.10). Portanto, na equação (4.101),

$$\bar{k} = \mu^2. \quad (5.46)$$

Utilizaremos a equação (4.101). Como o sistema possui dois graus de liberdade (φ e ν), necessitaremos de duas equações. Escolhemos estados da forma (4.100) dados por $|\lambda_0\rangle$, $|\lambda_1\rangle$ e os seus duais $\langle\lambda_0|$ e $\langle\lambda_1|$, onde λ_0 e λ_1 são os pesos fundamentais da álgebra $A_1^{(1)}$. Ou seja,

$$\langle\lambda_0|B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C)|\lambda_0\rangle = \langle\lambda_0|T_0 g T_0^{-1}|\lambda_0\rangle \quad (5.47)$$

e

$$\langle\lambda_1|B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C)|\lambda_1\rangle = \langle\lambda_1|T_0 g T_0^{-1}|\lambda_1\rangle. \quad (5.48)$$

Utilizando (5.43) e as propriedades das representações das álgebras $A_r^{(1)}$ discutidas no apêndice "Definições Algébricas", obtemos:

$$\langle\lambda_0|B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C)|\lambda_0\rangle = \exp(\nu - \mu^2 z \bar{z}) \quad (5.49)$$

e

$$\langle\lambda_1|B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C)|\lambda_1\rangle = \exp(\varphi + \nu - \mu^2 z \bar{z}). \quad (5.50)$$

Resta-nos escolher o elemento constante g que aparece em (5.47)-(5.48). Escolhemos:

$$g = \exp[aF^\pm(\gamma)], \quad (5.51)$$

onde $F^\pm(\gamma)$ é dado por (4.147), $\gamma > 0$ e a é uma constante. Conforme (4.103), (4.106)-(4.107) e (4.148)-(4.149),

$$T_0 g T_0^{-1} = \exp[a\rho^\pm(\gamma) F^\pm(\gamma)], \quad (5.52)$$

onde

$$\rho^\pm(\gamma) = \exp(\pm 2\mu z \gamma^{-1} \mp 2\mu \bar{z} \gamma). \quad (5.53)$$

Conforme (4.161)-(4.162), o quadrado do operador de vértice é igual a zero, logo,

$$T_0 g T_0^{-1} = 1 + a\rho^\pm(\gamma) F^\pm(\gamma). \quad (5.54)$$

Devemos substituir a expressão anterior em (5.47)-(5.48) e calcular os "elementos de matriz". Todos os cálculos desta forma são apresentados no apêndice "Cálculo dos elementos de matriz". Aqui, apresentamos os resultados:

$$\langle \lambda_0 | T_0 g T_0^{-1} | \lambda_0 \rangle = 1 - \frac{a \rho^\pm(\gamma)}{2} \quad (5.55)$$

e

$$\langle \lambda_1 | T_0 g T_0^{-1} | \lambda_1 \rangle = 1 + \frac{a \rho^\pm(\gamma)}{2}. \quad (5.56)$$

De (5.47)-(5.50) e (5.55)-(5.56), obtemos:

$$\exp(\nu - \mu^2 z \bar{z}) = 1 - \frac{a \rho^\pm(\gamma)}{2} \quad (5.57)$$

e

$$\exp \varphi = \frac{2 + a \rho^\pm(\gamma)}{2 - a \rho^\pm(\gamma)}. \quad (5.58)$$

Portanto, obtivemos uma solução das equações de movimento. Note que a constante a é arbitrária. Logo, podemos parametrizar:

$$a = -2i \exp[\mp 2Y \mu(\gamma^{-1} + \gamma)], \quad (5.59)$$

onde Y é uma constante real. Substituímos em (5.57)-(5.58):

$$\exp(\nu - \mu^2 z \bar{z}) = 1 + i \tilde{\rho}^\pm(\gamma) \quad (5.60)$$

e

$$\exp \varphi = \frac{1 - i \tilde{\rho}^\pm(\gamma)}{1 + i \tilde{\rho}^\pm(\gamma)}, \quad (5.61)$$

onde

$$\tilde{\rho}^\pm(\gamma) = \exp[\pm 2\mu t(\gamma^{-1} - \gamma) \pm 2\mu(x - Y)(\gamma^{-1} + \gamma)]. \quad (5.62)$$

Lembramos que a razão entre um número e o seu complexo conjugado é dada por:

$$\frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta} = \frac{r e^{-i\theta}}{r e^{i\theta}} = e^{-2i\theta}, \quad (5.63)$$

onde

$$\theta = \arctan \frac{\beta}{\alpha}. \quad (5.64)$$

Comparando (5.63) com (5.61), vemos que:

$$\varphi = -2i \arctan[\tilde{\rho}^\pm(\gamma)], \quad (5.65)$$

a menos de um múltiplo de $2\pi i$. Definindo:

$$\tilde{\varphi} = -i\varphi \quad (5.66)$$

e substituindo em (5.10) com a condição (5.42), obtemos:

$$\partial\bar{\partial}\tilde{\varphi} + 2\mu^2 \sin(\tilde{\varphi}) = 0. \quad (5.67)$$

Portanto, comparando (5.65) e (5.67) com (4.226)-(4.227) e (4.229), vemos que, a menos de redefinições apropriadas, justifica-se associarmos este modelo àquele conhecido na literatura como modelo de sine-Gordon [16]. Ou seja, a solução que obtivemos corresponde ao que se chama de 1-sóliton (1-anti-sóliton). Discutiremos as suas características. A partir de (5.61)-(5.62), obtemos, tomando os limites $x \rightarrow (\pm\infty)$:

$$\left[\begin{array}{llll} [\tilde{\rho}^+(\infty) \rightarrow \infty] & \rightarrow & [e^{\varphi^+}(\infty) = -1] & \rightarrow & [\varphi^+(\infty) = i\pi] \\ [\tilde{\rho}^+(-\infty) \rightarrow 0] & \rightarrow & [e^{\varphi^+}(-\infty) = 1] & \rightarrow & [\varphi^+(-\infty) = 0] \\ [\tilde{\rho}^-(\infty) \rightarrow 0] & \rightarrow & [e^{\varphi^-}(\infty) = 1] & \rightarrow & [\varphi^-(\infty) = 0] \\ [\tilde{\rho}^-(-\infty) \rightarrow \infty] & \rightarrow & [e^{\varphi^-}(-\infty) = -1] & \rightarrow & [\varphi^-(-\infty) = i\pi] \end{array} \right], \quad (5.68)$$

onde $\varphi^+(\varphi^-)$ corresponde à solução com $\tilde{\rho}^+(\tilde{\rho}^-)$. Note que os valores de $\varphi^\pm$ são definidos a menos de $2\pi i$.

Definimos a corrente topológica:

$$J^\mu = \frac{\epsilon^{\mu\nu}}{i\pi} \partial_\nu \varphi. \quad (5.69)$$

A carga topológica correspondente é dada por:

$$Q_{TOP}^\pm = \frac{(\varphi^\pm(t, \infty) - \varphi^\pm(t, -\infty))}{i\pi}. \quad (5.70)$$

Portanto,

$$Q_{TOP}^\pm = \pm 1, \quad (5.71)$$

onde $Q_{TOP}^\pm$ corresponde às soluções $\varphi^\pm$. Portanto, obtivemos as soluções 1-sóliton e 1-anti-sóliton.

Podemos escrever, a partir de (5.61)-(5.62),

$$\varphi^\pm(x, t) = \varphi^\pm(x - vt), \quad (5.72)$$

onde

$$v = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}. \quad (5.73)$$

O tensor energia-momento é dado por:

$$T^{\mu\xi} = \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu\varphi)}\partial^\xi\varphi + \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu\nu)}\partial^\xi\nu + \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu\eta)}\partial^\xi\eta - g^{\mu\nu}L. \quad (5.74)$$

As definições (2.6)-(2.7) implicam que, para campos genéricos A e B,

$$\partial A \bar{\partial} B = \frac{1}{4} (g^{\mu\nu} \partial_\mu B \partial_\nu A + \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu B \partial_\nu A). \quad (5.75)$$

Portanto, reescrevemos (5.23):

$$L = -\frac{k}{4\pi} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\xi} \partial_\mu \varphi \partial_\xi \varphi + \frac{1}{2} g^{\mu\xi} \partial_\mu \eta \partial_\xi \nu \right] + \frac{k\mu^2}{2\pi} [e^{-2\varphi} + e^{2\varphi-\eta}], \quad (5.76)$$

onde os termos em $\epsilon^{\mu\nu}$ se cancelam. Temos que

$$\frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu\varphi)} = -\frac{k}{4\pi} g^{\mu\beta} \partial_\beta \varphi, \quad (5.77)$$

$$\frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu\nu)} = -\frac{k}{8\pi} g^{\mu\beta} \partial_\beta \eta \quad (5.78)$$

e

$$\frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu\eta)} = -\frac{k}{8\pi} g^{\mu\beta} \partial_\beta \nu. \quad (5.79)$$

Portanto,

$$T^{\mu\xi} = -\frac{k}{8\pi} [2\partial^\mu\varphi\partial^\xi\varphi + \partial^\mu\nu\partial^\xi\eta + \partial^\mu\eta\partial^\xi\nu] - g^{\mu\xi}.L \quad (5.80)$$

A energia é dada, considerando (5.42), por:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ -\frac{k}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{k\mu^2}{2\pi} (e^{2\varphi} + e^{-2\varphi}) \right\}. \quad (5.81)$$

O momento é dado, considerando (5.42), por:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{k}{4\pi} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right] \right\}. \quad (5.82)$$

De (5.10) vemos que se φ tende a uma constante em $x \rightarrow (\pm\infty)$, então:

$$e^{2\varphi}(\pm\infty) = e^{-2\varphi}(\pm\infty). \quad (5.83)$$

Para que a integral em (5.81) seja convergente, o integrando deve se anular para x tendendo a $(\pm\infty)$. Mas, a condição (5.83) implica que isto não ocorre. Portanto, redefinimos, subtraindo a energia de ponto zero:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ -\frac{k}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{k\mu^2}{2\pi} (e^{2\varphi} + e^{-2\varphi} - 2) \right\}. \quad (5.84)$$

Verifica-se que a solução (5.61) é tal que as seguintes equações de Backlund [16] são satisfeitas:

$$\partial\varphi^{\pm} = \pm\mu\gamma^{-1}(e^{\varphi^{\pm}} - e^{-\varphi^{\pm}}) \quad (5.85)$$

e

$$\bar{\partial}\varphi^{\pm} = \mp\mu\gamma(e^{\varphi^{\pm}} - e^{-\varphi^{\pm}}). \quad (5.86)$$

Portanto,

$$\partial\varphi^{\pm}\bar{\partial}\varphi^{\pm} = -\mu^2(e^{\varphi^{\pm}} - e^{-\varphi^{\pm}})^2. \quad (5.87)$$

Substituindo (5.87) em (5.84) e somando e subtraindo esta última equação com (5.82), obtemos:

$$E - P = -\frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [(\partial\varphi^{\pm})^2 - \partial\varphi^{\pm}\bar{\partial}\varphi^{\pm}] dx \quad (5.88)$$

e

$$E + P = -\frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [(\bar{\partial}\varphi^{\pm})^2 - \partial\varphi^{\pm}\bar{\partial}\varphi^{\pm}] dx. \quad (5.89)$$

Ou seja,

$$E = -\frac{k}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\partial\varphi^{\pm}}{\partial x} \right)^2 \quad (5.90)$$

e

$$P = \frac{k}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial\varphi^{\pm}}{\partial t} \frac{\partial\varphi^{\pm}}{\partial x} = -\frac{k\nu}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\partial\varphi^{\pm}}{\partial x} \right)^2. \quad (5.91)$$

Sendo que a última igualdade em (5.91) decorre de (5.72). De (5.85)-(5.86), obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi^\pm}{\partial x} \right)^2 &= \mu^2 (\gamma^{-1} + \gamma)^2 (e^{\varphi^\pm} - e^{-\varphi^\pm})^2 = -\mu^2 (\gamma^{-1} + \gamma)^2 \frac{16(\tilde{\rho})^2}{[1 + (\tilde{\rho})^2]^2} \\ &= \pm 4\mu (\gamma^{-1} + \gamma) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{[1 + (\tilde{\rho})^2]}. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Substituindo (5.92) em (5.90)-(5.91), obtemos:

$$E = \frac{k\mu}{\pi} \left(\frac{\gamma^2 + 1}{\gamma} \right) \quad (5.93)$$

e

$$P = \frac{k\mu}{\pi} \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \right). \quad (5.94)$$

Estas expressões são válidas para $\varphi^\pm$. Ou seja, apesar dos campos serem complexos, a energia e o momento são reais. Tendo em vista que estamos tomando γ e k como positivos, a energia é real e positiva. Observe que, de (5.73), obtemos:

$$\sqrt{1 - v^2} = \frac{2\lambda}{(\lambda^2 + 1)}. \quad (5.95)$$

Substituindo em (5.93)-(5.94), obtemos as fórmulas relativísticas para a energia e o momento de uma partícula, (4.219)-(4.220), sendo que

$$M = \frac{2k\mu}{\pi}. \quad (5.96)$$

O MODELO DE LUND-REGGE

Considere a álgebra $A_1^{(1)}$. Seja o operador de gradação dado por (4.114)

$$Q = D \quad (5.97)$$

e $\epsilon^\pm$ dados por (4.115)-(4.116)

$$\epsilon^\pm = \mu H^{(\pm 1)}. \quad (5.98)$$

Trabalharemos com a normalização (4.118)

$$\alpha_1^2 = 2. \quad (5.99)$$

Os geradores de grau zero são dados por $\{h^{(0)}, E_{\pm\alpha_1}^{(0)}, D, C\}$. Parametrizamos o elemento de grupo B como:

$$B = \exp(\chi E_{-\alpha_1}^{(0)}) \exp\left(\varphi \frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2} + \nu C + \eta D\right) \exp(\psi E_{\alpha_1}^{(0)}), \quad (5.100)$$

onde λ_1 é o peso fundamental associado à raiz α_1 e $(h^{(0)}, H^{(0)})$ correspondem respectivamente à base de Chevalley e Weyl-Cartan, conforme o apêndice "Definições Algébricas". O fato de tomarmos a direção $2\lambda_1 H^{(0)}/\alpha_1^2$ ao invés de $h^{(0)}$ não acarreta em nenhum problema, pois o conjunto $\{2\lambda_1 H^{(0)}/\alpha_1^2, E_{\pm\alpha_1}^{(0)}, D, C\}$ também forma uma base para a subálgebra associada aos geradores de grau zero. Observe que este é um modelo de Toda não abeliano, pois B contém geradores que não comutam entre si.

Note que

$$\left[\epsilon^{\pm}, \frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2} \right] = 0. \quad (5.101)$$

Portanto, conforme (3.36)-(3.37), podemos tomar vínculos adicionais:

$$Tr \left[(B^{-1} \partial B) \frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2} \right] = 0 \quad (5.102)$$

e

$$Tr \left[(\bar{\partial} B B^{-1}) \frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2} \right] = 0. \quad (5.103)$$

As equações (5.102)-(5.103) implicam que:

$$\partial \varphi = 2\psi \partial \chi e^{\varphi} \quad (5.104)$$

e

$$\bar{\partial} \varphi = 2\chi \bar{\partial} \psi e^{\varphi}. \quad (5.105)$$

Definimos:

$$\tilde{\chi} = \chi \exp\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (5.106)$$

e

$$\tilde{\psi} = \psi \exp\left(\frac{\varphi}{2}\right). \quad (5.107)$$

Substituindo (5.106)-(5.107) em (5.104)-(5.105), obtemos:

$$\partial \varphi = \frac{2 \tilde{\psi} \partial \tilde{\chi}}{\Delta} \quad (5.108)$$

e

$$\bar{\partial}\varphi = \frac{2\tilde{\chi}\bar{\partial}\tilde{\psi}}{\Delta}, \quad (5.109)$$

onde

$$\Delta = 1 + \tilde{\psi}\tilde{\chi}. \quad (5.110)$$

Note que o fator Δ pode ser eventualmente nulo. Consequentemente, as equações de movimento, assim como os observáveis da teoria, contém singularidades. Por este motivo, denominamos este modelo "singular".

Os potenciais de calibre A e $\bar{A}$, (4.62)-(4.63), são dados por:

$$A = \mu[e^{-\eta}(H^{(-1)} + \sqrt{2}\chi E_{-\alpha_1}^{(-1)}) - \sqrt{2}\psi e^{\varphi-\eta}(E_{\alpha_1}^{(-1)} - \chi h^{(-1)} - \chi^2 E_{-\alpha_1}^{(-1)})] \quad (5.111)$$

e

$$\bar{A} = -\mu H^{(1)} - (\bar{\partial}\chi + \chi\bar{\partial}\varphi)E_{-\alpha_1}^{(0)} - \bar{\partial}\nu C - \bar{\partial}\eta D - e^{\varphi}\bar{\partial}\psi(E_{\alpha_1}^{(0)} - \chi^2 E_{-\alpha_1}^{(0)}), \quad (5.112)$$

onde escolhemos em (4.115) - (4.116)

$$\mu^- = \mu^+ = \mu > 0. \quad (5.113)$$

A condição de curvatura nula (4.61) e as equações (5.108)-(5.109) implicam que:

$$\partial\bar{\partial}\eta = 0, \quad (5.114)$$

$$\partial\bar{\partial}\nu = \mu^2 e^{-\eta}(1 + 2\tilde{\psi}\tilde{\chi}), \quad (5.115)$$

$$\partial\left(\frac{\bar{\partial}\tilde{\psi}}{\Delta}\right) + \frac{\tilde{\psi}\partial\tilde{\chi}\bar{\partial}\tilde{\psi}}{\Delta^2} + 2\mu^2 e^{-\eta}\tilde{\psi} = 0 \quad (5.116)$$

e

$$\bar{\partial}\left(\frac{\partial\tilde{\chi}}{\Delta}\right) + \frac{\tilde{\chi}\partial\tilde{\chi}\bar{\partial}\tilde{\psi}}{\Delta^2} + 2\mu^2 e^{-\eta}\tilde{\chi} = 0. \quad (5.117)$$

As equações (5.114)-(5.117) são invariantes por uma transformação conforme $z \rightarrow f(z)$ e $\bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z})$, onde $(f, \bar{f})$ são funções analíticas, com a transformação dos campos dada na forma:

$$\tilde{\chi}(z, \bar{z}) \rightarrow \tilde{\chi}'(f, \bar{f}), \quad (5.118)$$

$$\tilde{\psi}(z, \bar{z}) \rightarrow \tilde{\psi}'(f, \bar{f}), \quad (5.119)$$

$$\exp[\nu(z, \bar{z})] \rightarrow [f'(z)]^\delta [\bar{f}'(\bar{z})]^\delta \exp[\nu'(f, \bar{f})] \quad (5.120)$$

e

$$\exp[\eta(z, \bar{z})] \rightarrow [f'(z)]^{-1} [\bar{f}'(\bar{z})]^{-1} \exp[\eta'(f, \bar{f})], \quad (5.121)$$

onde as constantes $(\delta, \bar{\delta})$ são arbitrárias.

Calculemos a ação. Como estamos impondo os vínculos adicionais (5.104)-(5.105), o campo φ não é dinâmico, pois é obtido integrando-se (5.108)-(5.109). Neste sentido dizemos que este campo é não local. Portanto, a lagrangeana não deve depender de φ . Reescrevemos (5.100) na seguinte forma:

$$B = \exp\left(\frac{\varphi}{2} \frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2}\right) \exp(\tilde{\chi} E_{-\alpha_1}^{(0)}) \exp(\nu C + \eta D) \exp(\tilde{\psi} E_{\alpha_1}^{(0)}) \exp\left(\frac{\varphi}{2} \frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2}\right), \quad (5.122)$$

onde utilizamos (4.104) e (5.106)-(5.107). Escolhemos, convenientemente, em (3.76):

$$\alpha^{(0)} = \exp\left(-\frac{\varphi}{2} \frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2}\right). \quad (5.123)$$

Logo,

$$g_0^f = \exp(\tilde{\chi} E_{-\alpha_1}^{(0)}) \exp[\nu C + \eta D] \exp(\tilde{\psi} E_{\alpha_1}^{(0)}). \quad (5.124)$$

A ação efetiva será obtida a partir de (3.81). Calculemos por partes. Em primeiro lugar, considere $S_{WZNW}(g_0^f)$. Denominamos um dos termos como topológico e o outro como quadrático. Utilizaremos (2.21) com g_1, h_1 e h_2 dados, na ordem, pelas três exponenciais de (5.124). O termo topológico de (3.39) em $L(g_1), L(h_1)$ e $L(h_2)$ é zero, pois cada uma das exponenciais é abeliana. Os termos quadráticos de $L(g_1)$ e $L(h_2)$ e os dois termos em (2.21) que envolvem (h_2, h_1) e (h_1, g_1) são nulos conforme as relações para a forma traço descritas no apêndice "Definições Algébricas". Portanto, as únicas contribuições não nulas são dadas pelo termo quadrático de $L(h_1)$ e o termo de Polyakov-Wiegman envolvendo (h_1, h_2, g_1) :

$$S_{WZNW}(g_0^f) = -\frac{k}{4\pi} \int d^2x [\partial\nu \bar{\partial}\eta + \partial\eta \bar{\partial}\nu + 2\partial\tilde{\chi} \bar{\partial}\tilde{\psi}]. \quad (5.125)$$

O segundo termo que vêm de (3.81) é dado por:

$$\frac{k}{2\pi} \int d^2x \text{Tr}[\epsilon^+ g_0^f \epsilon^- (g_0^f)^{-1}] = \frac{\mu^2 k}{2\pi} \int d^2x e^{-\eta} (1 + 2\tilde{\psi}\tilde{\chi}). \quad (5.126)$$

Para calcular o termo que vêm da integral funcional em (3.81), parametrizamos:

$$W_0 = a_0 \frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2} \quad (5.127)$$

e

$$\bar{W}_0 = \bar{a}_0 \frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2}, \quad (5.128)$$

onde $(a_0, \bar{a}_0)$ são dois funcionais arbitrários. Verifica-se que:

$$Tr[W_0 \bar{\partial} g_0^f (g_0^f)^{-1}] = -a_0 \tilde{\chi} \bar{\partial} \tilde{\psi}, \quad (5.129)$$

$$Tr[\bar{W}_0 (g_0^f)^{-1} \partial g_0^f] = -\bar{a}_0 \tilde{\psi} \partial \tilde{\chi}, \quad (5.130)$$

$$Tr[W_0 \bar{W}_0] = \frac{a_0 \bar{a}_0}{2} \quad (5.131)$$

e

$$Tr[W_0 g_0^f \bar{W}_0 (g_0^f)^{-1}] = a_0 \bar{a}_0 \left(\frac{1}{2} + \tilde{\psi} \tilde{\chi} \right). \quad (5.132)$$

Somando (5.129)-(5.132), obtemos:

$$-a_0 \tilde{\chi} \bar{\partial} \tilde{\psi} - \bar{a}_0 \tilde{\psi} \partial \tilde{\chi} + a_0 \bar{a}_0 \Delta = \Delta \left(a_0 - \frac{\tilde{\psi} \partial \tilde{\chi}}{\Delta} \right) \left(\bar{a}_0 - \frac{\tilde{\chi} \bar{\partial} \tilde{\psi}}{\Delta} \right) - \frac{\tilde{\psi} \tilde{\chi} \partial \tilde{\chi} \bar{\partial} \tilde{\psi}}{\Delta}. \quad (5.133)$$

Substituímos (5.133) na integral funcional em (3.81), obtendo:

$$\exp \left(\frac{k}{2\pi} \int d^2 x \frac{\tilde{\psi} \tilde{\chi} \partial \tilde{\chi} \bar{\partial} \tilde{\psi}}{\Delta} \right) \int D \left(a_0 \frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2} \right) D \left(\bar{a}_0 \frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2} \right) \\ \exp \left[-\frac{k}{2\pi} \int d^2 x \Delta \left(a_0 - \frac{\tilde{\psi} \partial \tilde{\chi}}{\Delta} \right) \left(\bar{a}_0 - \frac{\tilde{\chi} \bar{\partial} \tilde{\psi}}{\Delta} \right) \right].$$

Definiremos uma nova ação efetiva, descartando nesta última expressão a integral funcional, obtendo uma contribuição da expressão anterior na forma:

$$\frac{k}{2\pi} \int d^2 x \frac{\tilde{\psi} \tilde{\chi} \partial \tilde{\chi} \bar{\partial} \tilde{\psi}}{\Delta}. \quad (5.134)$$

Portanto, de (5.125)-(5.126) e (5.134), obtemos:

$$S_{efetivo} = -\frac{k}{4\pi} \int d^2x \left(\partial\nu\bar{\partial}\eta + \partial\eta\bar{\partial}\nu + \frac{2\partial\tilde{\chi}\bar{\partial}\tilde{\psi}}{\Delta} \right) + \frac{k\mu^2}{2\pi} \int d^2x e^{-\eta} (1 + 2\tilde{\psi}\tilde{\chi}). \quad (5.135)$$

As equações de Euler-Lagrange para (5.135) resultam em (5.114)-(5.117).

De (5.135) obtemos os momentos canônicos:

$$\Pi_\nu = -\frac{k}{8\pi} \partial_t \eta, \quad (5.136)$$

$$\Pi_\eta = -\frac{k}{8\pi} \partial_t \nu, \quad (5.137)$$

$$\Pi_{\tilde{\chi}} = -\frac{k}{4\pi} \frac{\bar{\partial}\tilde{\psi}}{\Delta} \quad (5.138)$$

e

$$\Pi_{\tilde{\psi}} = -\frac{k}{4\pi} \frac{\partial\tilde{\chi}}{\Delta}. \quad (5.139)$$

Definimos:

$$S_1 = \exp \left(-\frac{\varphi}{2} \frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2} - \frac{\nu}{2} C - \frac{\eta}{2} D \right) \quad (5.140)$$

e

$$S_2 = \exp(-\tilde{\chi} E_{-\alpha_1}^{(0)}). \quad (5.141)$$

Pelo mesmo argumento que nos permitiu considerar (5.30), faremos transformações de calibre em A_x . A primeira será da forma:

$$A'_x = S_1 A_x (S_1)^{-1} - \partial_x S_1 (S_1)^{-1} \quad (5.142)$$

e, em seguida,

$$A''_x = S_2 A'_x (S_2)^{-1} - \partial_x S_2 (S_2)^{-1}. \quad (5.143)$$

Observe o fato de que as duas transformações não comutam. Temos que

$$A''_x = \mu e^{-\frac{\eta}{2}} (H^{(1)} + H^{(-1)}) - \mu\sqrt{2}e^{-\frac{\eta}{2}} (\tilde{\chi} E_{-\alpha_1}^{(1)} + \tilde{\psi} E_{\alpha_1}^{(-1)}) +$$

$$-\frac{4\pi}{k}(\Pi_{\tilde{\psi}}E_{-\alpha_1}^{(0)} + \Pi_{\tilde{\chi}}E_{\alpha_1}^{(0)}) - \frac{4\pi}{k}\Pi_{\eta}C - \frac{4\pi}{k}\Pi_{\nu}D + -\frac{2\pi}{k}\sqrt{2}\left(\tilde{\psi}\Pi_{\tilde{\psi}} + \tilde{\chi}\Pi_{\tilde{\chi}}\right)H^{(0)}. \quad (5.144)$$

Utilizando os colchetes de Poisson canônicos, obtemos:

$$\begin{aligned} \left\{A_x''(y, t) \otimes A_x''(z, t)\right\} &= \delta(y - z)[(I \otimes I) - \sigma]\{ \\ &\frac{2\pi}{k}\mu e^{-\frac{\eta}{2}}[(H^{(1)} + H^{(-1)}) \otimes C] + \frac{2\pi}{k}\sqrt{2}\mu e^{-\frac{\eta}{2}}[(\tilde{\chi}E_{-\alpha_1}^{(1)} - \tilde{\psi}E_{\alpha_1}^{(-1)}) \otimes C] + \\ &\frac{4\pi}{k}\sqrt{2}\mu e^{-\frac{\eta}{2}}(E_{-\alpha_1}^{(1)} \otimes E_{\alpha_1}^{(0)}) + \frac{4\pi}{k}\sqrt{2}\mu e^{-\frac{\eta}{2}}(E_{\alpha_1}^{(-1)} \otimes E_{-\alpha_1}^{(0)}) + \\ &-\frac{4\pi}{k}\mu e^{-\frac{\eta}{2}}\tilde{\chi}(E_{-\alpha_1}^{(1)} \otimes H^{(0)}) + \frac{4\pi}{k}\mu e^{-\frac{\eta}{2}}\tilde{\psi}(E_{\alpha_1}^{(-1)} \otimes H^{(0)}) + \\ &-\left(\frac{4\pi}{k}\right)^2\frac{\sqrt{2}}{2}\Pi_{\tilde{\psi}}(E_{-\alpha_1}^{(0)} \otimes H^{(0)}) - \left(\frac{4\pi}{k}\right)^2\frac{\sqrt{2}}{2}\Pi_{\tilde{\chi}}(E_{\alpha_1}^{(0)} \otimes H^{(0)})\}. \end{aligned} \quad (5.145)$$

Verifica-se que (5.145) satisfaz a relação (4.32) relativa à integrabilidade do sistema, sendo que a matriz r é a mesma do modelo de sine-Gordon (5.36):

$$\left\{A_x''(y, t) \otimes A_x''(z, t)\right\} = [r, A_x''(y, t) \otimes I + I \otimes A_x''(z, t)] \delta(y - z). \quad (5.146)$$

Da mesma forma que no modelo de sine-Gordon (5.42), impomos que em nossa solução

$$\eta = 0, \quad (5.147)$$

o que é compatível com (5.114). Observe que esta escolha quebra a invariância conforme.

Portanto,

$$B = \exp(\chi E_{-\alpha_1}^{(0)}) \exp\left(\varphi \frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha^2} + \nu C\right) \exp(\psi E_{\alpha_1}^{(0)}). \quad (5.148)$$

Observe que B é parametrizado por (χ, ψ) e não $(\tilde{\chi}, \tilde{\psi})$.

Uma solução de vácuo da forma (4.70)-(4.71) existe e é dada por:

$$\tilde{\psi}_{vac} = \tilde{\chi}_{vac} = \varphi_{vac} = 0 \quad (5.149)$$

e

$$\nu_{vac} = \mu^2 z \bar{z}, \quad (5.150)$$

conforme (5.115)-(5.117) e (5.108)-(5.109). Portanto, na equação (4.101),

$$\bar{k} = \mu^2. \quad (5.151)$$

Utilizaremos (4.101). Como estados da forma (4.100), escolhemos $|\lambda_0\rangle$, $|\lambda_1\rangle$, $E_{-\alpha_1}^{(0)}|\lambda_1\rangle$ e os seus duais $\langle\lambda_0|$, $\langle\lambda_1|$ e $\langle\lambda_1|E_{\alpha_1}^{(0)}$. Observe que sendo $E_{-\alpha_1}^{(0)} \in G_0$, então:

$$\begin{aligned} G_+[E_{-\alpha_1}^{(0)}|\lambda_1\rangle] &= G_+G_0|\lambda_1\rangle = \{G_0G_+ + [G_+, G_0]\}|\lambda_1\rangle \\ &= [G_+, G_0]|\lambda_1\rangle = G_+|\lambda_1\rangle = 0. \end{aligned} \quad (5.152)$$

Vemos que na expressão (5.148) temos quatro graus de liberdade $(\chi, \varphi, \nu, \psi)$. Portanto, utilizaremos (4.101) quatro vezes:

$$\langle\lambda_0|B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C)|\lambda_0\rangle = \langle\lambda_0|T_0 g T_0^{-1}|\lambda_0\rangle, \quad (5.153)$$

$$\langle\lambda_1|B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C)|\lambda_1\rangle = \langle\lambda_1|T_0 g T_0^{-1}|\lambda_1\rangle, \quad (5.154)$$

$$\langle\lambda_1|B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C)E_{-\alpha_1}^{(0)}|\lambda_1\rangle = \langle\lambda_1|T_0 g T_0^{-1}E_{-\alpha_1}^{(0)}|\lambda_1\rangle \quad (5.155)$$

e

$$\langle\lambda_1|E_{\alpha_1}^{(0)}B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C)|\lambda_1\rangle = \langle\lambda_1|E_{\alpha_1}^{(0)}T_0 g T_0^{-1}|\lambda_1\rangle. \quad (5.156)$$

Utilizando (5.148) e as propriedades das representações das álgebras $A_r^{(1)}$ discutidas no apêndice "Definições Algébricas", obtemos:

$$\langle\lambda_0|B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C)|\lambda_0\rangle = \exp(\nu - \mu^2 z \bar{z}), \quad (5.157)$$

$$\langle\lambda_1|B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C)|\lambda_1\rangle = \exp\left(\frac{\varphi}{2} + \nu - \mu^2 z \bar{z}\right), \quad (5.158)$$

$$\langle\lambda_1|B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C)E_{-\alpha_1}^{(0)}|\lambda_1\rangle = \tilde{\psi} \exp(\nu - \mu^2 z \bar{z}) \quad (5.159)$$

e

$$\langle\lambda_1|E_{\alpha_1}^{(0)}B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C)|\lambda_1\rangle = \tilde{\chi} \exp(\nu - \mu^2 z \bar{z}). \quad (5.160)$$

Resta-nos escolher o elemento constante g que aparece em (5.153)-(5.156). Escolhemos

$$g = \exp[aF^-(\gamma_1)] \exp[bF^+(\gamma_2)], \quad (5.161)$$

onde $F^\pm$ são dados por (4.117) e $(\gamma_1, \gamma_2, a, b)$ são constantes complexas. Conforme (4.103), (4.110)-(4.111) e (4.119)-(4.120),

$$T_0 g T_0^{-1} = \exp[a\rho_1 F^-(\gamma_1)] \exp[b\rho_2 F^+(\gamma_2)]$$

e, conforme (4.140), o quadrado do operador de vértice é igual a zero, portanto,

$$T_0 g T_0^{-1} = 1 + a\rho_1 F^-(\gamma_1) + b\rho_2 F^+(\gamma_2) + ab\rho_1 \rho_2 F^-(\gamma_1) F^+(\gamma_2), \quad (5.162)$$

onde

$$\rho_1 = \exp\left(\mu\sqrt{2}\gamma_1^{-1}z - \mu\sqrt{2}\gamma_1\bar{z}\right) \quad (5.163)$$

e

$$\rho_2 = \exp\left(-\mu\sqrt{2}\gamma_2^{-1}z + \mu\sqrt{2}\gamma_2\bar{z}\right). \quad (5.164)$$

Devemos substituir a expressão (5.162) em (5.153)-(5.156) e calcular os “elementos de matriz”. Todos os cálculos desta forma são apresentados no apêndice “Cálculo dos elementos de matriz”. Aqui, apresentamos os resultados:

$$\langle \lambda_0 | T_0 g T_0^{-1} | \lambda_0 \rangle = 1 + ab\rho_1 \rho_2 \frac{\gamma_{2,1}}{(1 - \gamma_{2,1})^2}, \quad (5.165)$$

$$\langle \lambda_1 | T_0 g T_0^{-1} | \lambda_1 \rangle = 1 + ab\rho_1 \rho_2 \frac{(\gamma_{2,1})^2}{(1 - \gamma_{2,1})^2}, \quad (5.166)$$

$$\langle \lambda_1 | T_0 g T_0^{-1} E_{-\alpha_1}^{(0)} | \lambda_1 \rangle = b\rho_2 \quad (5.167)$$

e

$$\langle \lambda_1 | E_{\alpha_1}^{(0)} T_0 g T_0^{-1} | \lambda_1 \rangle = a\rho_1, \quad (5.168)$$

onde definimos

$$\gamma_{2,1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}. \quad (5.169)$$

Portanto, de (5.157)-(5.160) e (5.165)-(5.168), obtemos:

$$\exp(\nu - \mu^2 z \bar{z}) = 1 + ab\rho_1 \rho_2 \frac{\gamma_{2,1}}{(1 - \gamma_{2,1})^2}, \quad (5.170)$$

$$\exp\left(\frac{\varphi}{2} + \nu - \mu^2 z \bar{z}\right) = 1 + ab\rho_1\rho_2 \frac{(\gamma_{2,1})^2}{(1 - \gamma_{2,1})^2}, \quad (5.171)$$

$$\tilde{\psi} \exp(\nu - \mu^2 z \bar{z}) = b\rho_2 \quad (5.172)$$

e

$$\tilde{\chi} \exp(\nu - \mu^2 z \bar{z}) = a\rho_1. \quad (5.173)$$

Definimos

$$\Gamma = ab \frac{\gamma_{2,1}}{(1 - \gamma_{2,1})^2} \quad (5.174)$$

e obtemos:

$$\exp \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \gamma_{2,1}\Gamma\rho_1\rho_2}{1 + \Gamma\rho_1\rho_2}, \quad (5.175)$$

$$\tilde{\psi} = \frac{b\rho_2}{1 + \Gamma\rho_1\rho_2} \quad (5.176)$$

e

$$\tilde{\chi} = \frac{a\rho_1}{1 + \Gamma\rho_1\rho_2}. \quad (5.177)$$

Como γ_1 e γ_2 são arbitrários, escolhemos de modo a obter uma solução encontrada na literatura para este modelo [18]:

$$\gamma_1 = -\exp(\bar{b} - i\bar{a}) \quad (5.178)$$

e

$$\gamma_2 = \exp(\bar{b} + i\bar{a}), \quad (5.179)$$

onde $(\bar{a}, \bar{b})$ são reais. Portanto,

$$\gamma_{2,1} = -\exp(2i\bar{a}). \quad (5.180)$$

Logo,

$$\Gamma = -\frac{ab}{4(\cos \bar{a})^2}. \quad (5.181)$$

Como a e b são quaisquer, parametrizamos,

$$a = 2 \cos \bar{a} \exp \left[i \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right] \exp \left(2\sqrt{2}\mu Y \cos \bar{a} \cosh \bar{b} \right) \quad (5.182)$$

e

$$b = 2 \cos \bar{a} \exp \left[i \left(-\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right] \exp \left(2\sqrt{2}\mu Y \cos \bar{a} \cosh \bar{b} \right), \quad (5.183)$$

onde θ e Y são constantes reais.

Com as escolhas (5.178)-(5.179), reescrevemos (5.163)-(5.164) como:

$$\rho_1 = \exp(F + iG) \quad (5.184)$$

e

$$\rho_2 = \exp(F - iG), \quad (5.185)$$

onde

$$F(t, x) = 2\sqrt{2}\mu \cos \bar{a} (t \sinh \bar{b} - x \cosh \bar{b}) \quad (5.186)$$

e

$$G(t, x) = 2\sqrt{2}\mu \sin \bar{a} (-t \cosh \bar{b} + x \sinh \bar{b}). \quad (5.187)$$

Substituindo (5.180)-(5.187) em (5.175)-(5.177), obtemos:

$$\tilde{\psi} = \frac{i \cos \bar{a} \exp[-i(\theta + G)]}{\cosh \tilde{F}}, \quad (5.188)$$

$$\tilde{\chi} = \frac{i \cos \bar{a} \exp[i(\theta + G)]}{\cosh \tilde{F}} \quad (5.189)$$

e

$$\exp \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \exp(2i\bar{a}) \exp(2\tilde{F})}{1 + \exp(2\tilde{F})}, \quad (5.190)$$

onde

$$\tilde{F}(t, x) = F(t, x - Y). \quad (5.191)$$

Esta solução é a encontrada na literatura para o modelo de Lund-Regge [18].

Façamos a análise da solução. Note que a ação (5.135) é invariante por uma transformação $U(1)$ global:

$$\tilde{\psi} \rightarrow e^{i\epsilon} \tilde{\psi} \quad (5.192)$$

e

$$\tilde{\chi} \rightarrow e^{-i\epsilon} \tilde{\chi}, \quad (5.193)$$

onde ϵ é uma constante. Infinitesimalmente,

$$\tilde{\psi}' \simeq 1 + i\epsilon \tilde{\psi} \quad (5.194)$$

e

$$\tilde{\chi}' \simeq 1 - i\epsilon \tilde{\chi}. \quad (5.195)$$

A corrente de Noether associada é dada por:

$$J^\mu = \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu \tilde{\psi})} \frac{\delta \tilde{\psi}}{\delta \epsilon} + \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu \tilde{\chi})} \frac{\delta \tilde{\chi}}{\delta \epsilon}. \quad (5.196)$$

Reescrevemos (5.135) como:

$$\begin{aligned} S_{efetivo} = & -\frac{k}{4\pi} \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\xi} \partial_\mu \eta \partial_\xi \nu + \frac{1}{2\Delta} (g^{\mu\xi} \partial_\mu \tilde{\psi} \partial_\xi \tilde{\chi} + \epsilon^{\mu\xi} \partial_\mu \tilde{\psi} \partial_\xi \tilde{\chi}) \right\} + \\ & + \frac{k\mu^2}{2\pi} \int d^2x e^{-\eta} (1 + 2 \tilde{\psi} \tilde{\chi}). \end{aligned} \quad (5.197)$$

Logo,

$$\begin{aligned} J^\mu = & \left(-\frac{k}{4\pi} \right) \frac{i \tilde{\psi}}{2\Delta} (g^{\xi\mu} \partial_\xi \tilde{\chi} - \epsilon^{\xi\mu} \partial_\xi \tilde{\chi}) + \\ & - \left(-\frac{k}{4\pi} \right) \frac{i \tilde{\chi}}{2\Delta} (g^{\xi\mu} \partial_\xi \tilde{\psi} + \epsilon^{\xi\mu} \partial_\xi \tilde{\psi}). \end{aligned} \quad (5.198)$$

A carga elétrica é dada por:

$$\begin{aligned} Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx J^0 &= \left(-\frac{k}{4\pi} \right) \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{[\tilde{\psi} (\partial_t \tilde{\chi} + \partial_x \tilde{\chi}) - \tilde{\chi} (\partial_t \tilde{\psi} - \partial_x \tilde{\psi})]}{\Delta} \\ &= \left(-\frac{k}{4\pi} \right) i \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\tilde{\psi} \partial \tilde{\chi}}{\Delta} - \frac{\tilde{\chi} \bar{\partial} \tilde{\psi}}{\Delta} \right] = \left(-\frac{k}{4\pi} \right) \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\partial \varphi - \bar{\partial} \varphi) \\ &= \left(-\frac{k}{4\pi} \right) \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x \varphi = \left(-\frac{k}{4\pi} \right) \frac{i}{2} [\varphi(t, \infty) - \varphi(t, -\infty)], \end{aligned} \quad (5.199)$$

onde utilizamos (5.108)-(5.109). Ou seja, as assintóticas de φ estão relacionadas à carga elétrica. As assintóticas de φ dependem de F (5.186). Como estamos tomando $\mu > 0$ e $\cosh \bar{b}$ é sempre > 0 , o comportamento de φ depende do sinal de $\cos \bar{a}$:

a) $\cos \bar{a} > 0$

$$\exp \frac{\varphi(t, \infty)}{2} = 1 \rightarrow \frac{\varphi(t, \infty)}{2} = 2n^+ \pi i \quad (5.200)$$

e

$$\exp \frac{\varphi(t, -\infty)}{2} = -\exp(2i\bar{a}) \rightarrow \frac{\varphi(t, -\infty)}{2} = 2i\bar{a} - \text{senal}(\bar{a})i\pi + 2n^- \pi i, \quad (5.201)$$

onde $n^\pm$ são inteiros e $\text{senal}(x)=1$ se $x > 0$ e -1 se $x < 0$. A introdução da função senal na expressão anterior é consistente pois $\exp(i\pi) = \exp(-i\pi)$. A escolha que fizemos nos levará à expressão para a carga elétrica constante na literatura [18]. Logo,

$$Q = \left(-\frac{k}{2\pi} \right) \left[-\text{senal}(\bar{a})\frac{\pi}{2} + \bar{a} - \pi(n^+ - n^-) \right]. \quad (5.202)$$

Com a substituição $\bar{a} \rightarrow -\alpha$, $(n^+ - n^-) \rightarrow 0$ e $\left(-\frac{k}{2\pi}\right) \rightarrow \frac{4}{\lambda^2}$, obtemos a expressão de [18], onde os símbolos (α, λ) correspondem à notação da referência citada. Observe que como consequência deste resultado, a carga elétrica não é bem definida no limite $\bar{a} \rightarrow 0$, devido à presença da função senal [18].

b) $\cos \bar{a} < 0$

$$\exp \frac{\varphi(t, \infty)}{2} = -\exp(2i\bar{a}) \rightarrow \frac{\varphi(t, \infty)}{2} = 2i\bar{a} - \text{senal}(\bar{a})i\pi + 2n^+ \pi i \quad (5.203)$$

e

$$\exp \frac{\varphi(t, -\infty)}{2} = 1 \rightarrow \frac{\varphi(t, -\infty)}{2} = 2n^- \pi i, \quad (5.204)$$

Logo,

$$Q = \left(-\frac{k}{2\pi} \right) \left[\text{senal}(\bar{a})\frac{\pi}{2} - \bar{a} - \pi(n^+ - n^-) \right]. \quad (5.205)$$

c) $\cos \bar{a} = 0$. Neste caso, a função $F(\tilde{F})$ se anula. Portanto,

$$\exp \frac{\varphi(t, x)}{2} = 1, \quad (5.206)$$

para todo (t, x) . Consequentemente,

$$Q = 0. \quad (5.207)$$

O tensor energia-momento correspondente a (5.197) é dado por:

$$\begin{aligned}
T^{\mu\xi} = & -\frac{k}{8\pi}(\partial^\mu\nu\partial^\xi\eta + \partial^\mu\eta\partial^\xi\nu) + \\
& -\frac{k}{8\pi}\left(\frac{g^{\alpha\mu}\partial_\alpha\tilde{\psi}\partial^\xi\tilde{\chi} + \epsilon^{\alpha\mu}\partial_\alpha\tilde{\psi}\partial^\xi\tilde{\chi}}{\Delta}\right) + \\
& -\frac{k}{8\pi}\left(\frac{g^{\alpha\mu}\partial_\alpha\tilde{\chi}\partial^\xi\tilde{\psi} - \epsilon^{\alpha\mu}\partial_\alpha\tilde{\chi}\partial^\xi\tilde{\psi}}{\Delta}\right) - g^{\mu\xi}L.
\end{aligned} \tag{5.208}$$

Tomando $\eta = 0$, considerando que $(\tilde{\psi}, \tilde{\chi})$ vão a zero em $(\pm\infty)$ e subtraíndo a energia de ponto zero, obtemos:

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(T^{00} + \frac{k\mu^2}{2\pi} \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ -\frac{k}{8\pi\Delta} (\partial_x\tilde{\psi}\partial_x\tilde{\chi} + \partial_t\tilde{\psi}\partial_t\tilde{\chi}) - \frac{k\mu^2}{2\pi} (2\tilde{\psi}\tilde{\chi}) \right\},
\end{aligned} \tag{5.209}$$

e

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} dx T^{01} = \frac{k}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{(\partial_x\tilde{\psi}\partial_t\tilde{\chi} + \partial_x\tilde{\chi}\partial_t\tilde{\psi})}{\Delta}. \tag{5.210}$$

De (5.209)-(5.210), obtemos:

$$\begin{aligned}
E - P &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ -\frac{k}{2\pi\Delta} \partial\tilde{\psi}\partial\tilde{\chi} - \frac{k\mu^2}{\pi} \tilde{\psi}\tilde{\chi} \right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ -\frac{k}{4\pi} \frac{\partial\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}} \partial\varphi - \frac{k\mu^2}{\pi} \tilde{\psi}\tilde{\chi} \right\}
\end{aligned} \tag{5.211}$$

e, similarmente,

$$E + P = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ -\frac{k}{4\pi} \frac{\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\tilde{\chi}} \bar{\partial}\varphi - \frac{k\mu^2}{\pi} \tilde{\psi}\tilde{\chi} \right\}. \tag{5.212}$$

Portanto,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \left(-\frac{k}{8\pi} \right) \left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}} \partial\varphi + \frac{\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\tilde{\chi}} \bar{\partial}\varphi \right) - \frac{k\mu^2}{\pi} \tilde{\psi}\tilde{\chi} \right\} \tag{5.213}$$

e

$$P = -\frac{k}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{\bar{\partial} \tilde{\chi}}{\tilde{\chi}} \bar{\partial} \varphi - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\tilde{\psi}} \partial \varphi \right\}. \quad (5.214)$$

A solução (5.188)-(5.190) obedece às seguintes relações (equações de Backlund):

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\tilde{\psi}} = -\mu\sqrt{2} \exp(-\bar{b} - i\bar{a}) \exp \frac{\varphi}{2}, \quad (5.215)$$

$$\frac{\bar{\partial} \tilde{\chi}}{\tilde{\chi}} = \mu\sqrt{2} \exp(\bar{b} - i\bar{a}) \exp \frac{\varphi}{2} \quad (5.216)$$

e

$$\frac{\tilde{\psi} \tilde{\chi} \exp(i\bar{a})}{\cos \bar{a}} = \frac{1}{\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial w}\right)} \left(\frac{\partial e^{\frac{\varphi}{2}}}{\partial w}\right), \quad (5.217)$$

onde por w representamos qualquer uma das variáveis $(t, x, z, \bar{z})$. Observe que a última equação implica que todas as derivadas de $e^{\frac{\varphi}{2}}$ são proporcionais a $\partial_x e^{\frac{\varphi}{2}}$. De (5.213)-(5.217), obtemos:

$$E = \frac{k\mu\sqrt{2}}{4\pi} \exp(-i\bar{a}) \left(e^{\bar{b}} + e^{-\bar{b}}\right) \partial_x \exp\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (5.218)$$

e

$$P = \frac{k\mu\sqrt{2}}{4\pi} \exp(-i\bar{a}) \left(e^{\bar{b}} - e^{-\bar{b}}\right) \partial_x \exp\left(\frac{\varphi}{2}\right). \quad (5.219)$$

Conforme (5.200)-(5.201), (5.203)-(5.204) e (5.206) vemos que:

$$E = \frac{k\mu\sqrt{2}}{\pi} \cosh \bar{b} |\cos \bar{a}| \quad (5.220)$$

e

$$P = \frac{k\mu\sqrt{2}}{\pi} \sinh \bar{b} |\cos \bar{a}|. \quad (5.221)$$

Observe que apesar dos campos serem complexos, tanto a energia quanto o momento são reais. Além disso, a energia é positiva, pois estamos considerando k e μ positivos.

Poderíamos definir uma velocidade associada à solução de duas formas. A primeira através de $F(x-vt)$ (5.186):

$$v_F = tgh\bar{b}. \quad (5.222)$$

A segunda, através de $G(x-vt)$ (5.187):

$$v_G = \cot gh\bar{b} = v_F^{-1}. \quad (5.223)$$

Note, entretanto que a energia e o momento não dependem de G (5.209)-(5.210), pois os produtos de $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\chi}$ e suas derivadas não dependem de G . Portanto, tomamos (5.222) como definição de velocidade. Logo,

$$\sqrt{1-v^2} = \frac{1}{\cosh \bar{b}}. \quad (5.224)$$

Consequentemente a energia e o momento são da forma (4.219)-(4.220), com M dado por:

$$M = \frac{k\mu\sqrt{2}}{\pi} |\cos \bar{a}|. \quad (5.225)$$

Por último, temos que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tilde{\psi} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tilde{\chi} = 0. \quad (5.226)$$

Consequentemente, os campos $(\tilde{\psi}, \tilde{\chi})$ não possuem carga topológica.

Capítulo 6

O MODELO $A_r^{(1)}$ NÃO ABELIANO SINGULAR CONFORME AFIM

FORMULAÇÃO DO MODELO

Considere a álgebra $A_r^{(1)}$ (para todas as definições algébricas consulte o apêndice “Definições Algébricas”). Seja o operador de gradação dado por (4.163):

$$Q = rD + \sum_{i=2}^r \frac{2\lambda_i H^{(0)}}{\alpha_i^2} \quad (6.1)$$

e $\epsilon^\pm$ dados por (4.164)-(4.165),

$$\epsilon^+ = \mu \left(\sum_{i=2}^r E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{-\alpha_2 - \dots - \alpha_r}^{(1)} \right), \quad (6.2)$$

$$\epsilon^- = \mu \left(\sum_{i=2}^r E_{-\alpha_i}^{(0)} + E_{\alpha_2 + \dots + \alpha_r}^{(-1)} \right), \quad (6.3)$$

onde escolhemos

$$\mu^\pm = \mu > 0. \quad (6.4)$$

Os geradores de grau zero são $\{h_1^{(0)}, \dots, h_r^{(0)}, E_{\alpha_1}^{(0)}, E_{-\alpha_1}^{(0)}, C, D\}$.

Podemos tomar, alternativamente, $\left\{ \frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2}, h_2^{(0)}, \dots, h_r^{(0)}, E_{\alpha_1}^{(0)}, E_{-\alpha_1}^{(0)} \right\}$, pois

$$\frac{2\alpha_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2} = \frac{2}{\alpha_1^2} \sum_{j=1}^r K_{1,j}^{-1} \alpha_j H^{(0)} = \frac{2}{\alpha_1^2} \sum_{j=1}^r \frac{\alpha_j^2}{2} K_{1,j}^{-1} h_j^{(0)}, \quad (6.5)$$

onde $K_{i,j}$ representa a matriz de Cartan da álgebra de dimensão finita A_r . Ou seja, $\frac{2\alpha_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2}$ não é uma combinação linear de, *somente*, $h_2^{(0)}, \dots, h_r^{(0)}$. Definimos:

$$B = \exp(\chi E_{-\alpha_1}^{(0)}) \cdot \exp \left[\varphi_1 \frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2} + \sum_{i=2}^r \varphi_i h_i^{(0)} + \nu C + \eta D \right] \exp(\psi E_{\alpha_1}^{(0)}), \quad (6.6)$$

onde todos os campos são escalares de Lorentz. Observe que o modelo de Toda associado é não abeliano, pois B contém geradores que não comutam entre si.

Note que:

$$\left[\epsilon^\pm, \frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2} \right] = 0. \quad (6.7)$$

Portanto, podemos tomar os vínculos adicionais (3.36)-(3.37):

$$Tr \left[(B^{-1} \partial B) \frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2} \right] = 0 \quad (6.8)$$

e

$$Tr \left[(\bar{\partial} B B^{-1}) \frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2} \right] = 0. \quad (6.9)$$

Estes vínculos implicam que:

$$\partial \varphi_1 = \left(\frac{r+1}{r} \right) \psi \exp(\varphi_1 - \varphi_2) \partial \chi \quad (6.10)$$

e

$$\bar{\partial} \varphi_1 = \left(\frac{r+1}{r} \right) \chi \exp(\varphi_1 - \varphi_2) \bar{\partial} \psi. \quad (6.11)$$

Definimos:

$$\tilde{\chi} = \chi \exp \frac{\varphi_1}{2} \quad (6.12)$$

e

$$\tilde{\psi} = \psi \exp \frac{\varphi_1}{2}. \quad (6.13)$$

Substituindo estas duas últimas expressões em (6.10)-(6.11), obtemos:

$$\partial \varphi_1 = \left(\frac{r+1}{r} \right) \frac{\tilde{\psi} \partial \tilde{\chi} e^{-\varphi_2}}{\Delta} \quad (6.14)$$

e

$$\bar{\partial} \varphi_1 = \left(\frac{r+1}{r} \right) \frac{\tilde{\chi} \bar{\partial} \tilde{\psi} e^{-\varphi_2}}{\Delta}, \quad (6.15)$$

onde

$$\Delta = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r+1}{r} \right) \tilde{\psi} \tilde{\chi} e^{-\varphi_2}. \quad (6.16)$$

Note que o fator Δ pode ser eventualmente nulo. Consequentemente, as equações de movimento, assim como os observáveis da teoria contém singularidades. Por este motivo, denominamos este modelo singular.

Os potenciais de calibre A e $\bar{A}$ (4.62)-(4.63) são dados por:

$$A = \mu \left\{ \sum_{i=2}^r \exp \left(- \sum_{j=2}^r K_{i,j} \varphi_j \right) E_{-\alpha_i}^{(0)} - \chi e^{-2\varphi_2 + \varphi_3} E_{-\alpha_1 - \alpha_2}^{(0)} + \right. \\ \left. + \psi e^{\varphi_1 + \varphi_r - \eta} E_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r}^{(-1)} + E_{\alpha_2 + \dots + \alpha_r}^{(-1)} e^{\varphi_2 + \varphi_r - \eta} (1 + \psi \chi e^{\varphi_1 - \varphi_2}) \right\} \quad (6.17)$$

e

$$\bar{A} = \mu \left(- \sum_{i=2}^r E_{\alpha_i}^{(0)} - E_{-\alpha_2 - \dots - \alpha_r}^{(1)} \right) - [\chi \bar{\partial} \varphi_1 + \bar{\partial} \chi - \chi \bar{\partial} \varphi_2 - \chi^2 \bar{\partial} \psi e^{\varphi_1 - \varphi_2}] E_{-\alpha_1}^{(0)} + \\ - \bar{\partial} \psi e^{\varphi_1 - \varphi_2} E_{\alpha_1}^{(0)} - \bar{\partial} \nu C - \bar{\partial} \eta D - \sum_{i=2}^r \bar{\partial} \varphi_i h_i^{(0)} - \chi \bar{\partial} \psi e^{\varphi_1 - \varphi_2} \sum_{j=2}^r \left(\frac{r+1-j}{r} \right) h_j^{(0)}, \quad (6.18)$$

onde estamos normalizando, para $(i=1, \dots, r)$,

$$\frac{2}{\alpha_i^2} = 1. \quad (6.19)$$

Na obtenção de (6.17)-(6.18), os resultados a seguir são úteis, (onde $i=2, \dots, r$):

$$[h_i^{(0)}, E_{\alpha_2 + \dots + \alpha_r}^{(-1)}] = \sum_{j=2}^r K_{j,i} E_{\alpha_2 + \dots + \alpha_r}^{(-1)} = (\delta_{i,2} + \delta_{i,r}) E_{\alpha_2 + \dots + \alpha_r}^{(-1)}, \quad (6.20)$$

$$[h_i^{(0)}, E_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r}^{(-1)}] = \sum_{j=1}^r K_{j,i} E_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r}^{(-1)} = \delta_{i,r} E_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r}^{(-1)} \quad (6.21)$$

e

$$\frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2} = \sum_{j=1}^r \left(\frac{r+1-j}{r+1} \right) h_j^{(0)}, \quad (6.22)$$

pois

$$(K^{-1})_{1,j} = \frac{r-j+1}{r+1}. \quad (6.23)$$

A condição de curvatura nula (4.61) associada aos potenciais (6.17)-(6.18) e aos vínculos (6.14)-(6.15) implica nas equações de movimento:

$$\partial \bar{\partial} \eta = 0, \quad (6.24)$$

$$\partial \bar{\partial} \nu = \mu^2 e^{\varphi_r - \eta} (e^{\varphi_2} + \tilde{\psi} \tilde{\chi}), \quad (6.25)$$

$$\partial \left(\frac{e^{-\varphi_2} \bar{\partial} \tilde{\psi}}{\Delta} \right) + \left(\frac{r+1}{2r} \right) \frac{\tilde{\psi} e^{-2\varphi_2} \partial \tilde{\chi} \bar{\partial} \tilde{\psi}}{\Delta^2} + \mu^2 e^{\varphi_r - \eta} \tilde{\psi} = 0, \quad (6.26)$$

$$\bar{\partial} \left(\frac{e^{-\varphi_2} \partial \tilde{\chi}}{\Delta} \right) + \left(\frac{r+1}{2r} \right) \frac{\tilde{\chi} e^{-2\varphi_2} \partial \tilde{\chi} \bar{\partial} \tilde{\psi}}{\Delta^2} + \mu^2 e^{\varphi_r - \eta} \tilde{\chi} = 0 \quad (6.27)$$

e, para $i=(2,...,r)$,

$$\begin{aligned} \partial \bar{\partial} \varphi_i = & - \left(\frac{r+1-i}{r} \right) \frac{\partial \tilde{\chi} \bar{\partial} \tilde{\psi} e^{-\varphi_2}}{\Delta^2} - \mu^2 e^{\varphi_2 + \varphi_r - \eta} + \\ & + \mu^2 \exp \left(- \sum_{j=2}^r K_{i,j} \varphi_j \right) + \mu^2 \left(\frac{1-i}{r} \right) e^{\varphi_r - \eta} \tilde{\psi} \tilde{\chi}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

As equações (6.24)-(6.28) são invariantes por uma transformação conforme $z \rightarrow f(z)$ e $\bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z})$, onde $(f, \bar{f})$ são funções analíticas, com a transformação dos campos dada na forma:

$$\tilde{\chi}(z, \bar{z}) \rightarrow \tilde{\chi}(f, \bar{f}), \quad (6.29)$$

$$\tilde{\psi}(z, \bar{z}) \rightarrow \tilde{\psi}(f, \bar{f}), \quad (6.30)$$

$$\exp[\nu(z, \bar{z})] \rightarrow [f'(z)]^{\delta} [\bar{f}'(\bar{z})]^{\bar{\delta}} \exp[\nu(f, \bar{f})], \quad (6.31)$$

$$\exp[\eta(z, \bar{z})] \rightarrow [f'(z)]^{\delta_\eta} [\bar{f}'(\bar{z})]^{\bar{\delta}_\eta} \exp[\eta(f, \bar{f})] \quad (6.32)$$

e, para $(i=2,...,r)$,

$$\exp[\varphi_i(z, \bar{z})] \rightarrow [f'(z)]^{\delta_i} [\bar{f}'(\bar{z})]^{\bar{\delta}_i} \exp[\varphi_i(f, \bar{f})], \quad (6.33)$$

onde

$$\delta_2 = \bar{\delta}_2 = 0, \quad (6.34)$$

$$\delta_3 = \bar{\delta}_3 = 1 \quad (6.35)$$

e os outros $(\delta_i, \bar{\delta}_i)$ ($i=4, \dots, r$) são obtidos através das seguintes relações de recorrência:

$$\delta_{i-1} - 2\delta_i + \delta_{i+1} = 1, \quad [3 \leq i \leq (r-1)] \quad (6.36)$$

e

$$\bar{\delta}_{i-1} - 2\bar{\delta}_i + \bar{\delta}_{i+1} = 1, \quad [3 \leq i \leq (r-1)]. \quad (6.37)$$

Temos, ainda, que

$$\delta_\eta = \delta_r - 1, \quad (6.38)$$

$$\bar{\delta}_\eta = \bar{\delta}_r - 1 \quad (6.39)$$

e os pesos $(\delta, \bar{\delta})$ são arbitrários.

Calculemos a ação. Como estamos impondo os vínculos adicionais (6.8)-(6.9), o campo φ_1 não é dinâmico, pois é obtido integrando-se (6.14)-(6.15). Neste sentido, dizemos que este campo é não local. Portanto, a lagrangeana não deve depender de φ_1 . Reescrevemos B (6.6) na forma:

$$B = e^{(\varphi_1/2)(2\lambda_1 \cdot H^{(0)}/\alpha_1^2)} e^{\tilde{\chi} E_{-\alpha_1}^{(0)}} e^{\left(\sum_{i=2}^r \varphi_i h_i^{(0)} + \nu C + \eta D\right)} e^{\tilde{\psi} E_{\alpha_1}^{(0)}} e^{(\varphi_1/2)(2\lambda_1 \cdot H^{(0)}/\alpha_1^2)}. \quad (6.40)$$

Escolhemos em (3.76):

$$\alpha^{(0)} = \exp\left(-\frac{\varphi_1}{2} \frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2}\right). \quad (6.41)$$

Logo,

$$g_0^f = \exp(\tilde{\chi} E_{-\alpha_1}^{(0)}) \exp\left(\sum_{i=2}^r \varphi_i h_i^{(0)} + \nu C + \eta D\right) \exp(\tilde{\psi} E_{\alpha_1}^{(0)}). \quad (6.42)$$

A ação efetiva será obtida a partir de (3.81). Calculemos por partes. Em primeiro lugar, considere $S_{WZNW}(g_0^f)$. Denominaremos um dos termos como topológico e o outro como quadrático. Utilizemos (2.21) com g_1, h_1 e h_2 dados, na ordem, pelas três exponenciais de (6.42). O termo topológico de (3.39) em $L(g_1)$, $L(h_1)$ e $L(h_2)$ é zero, pois cada uma das exponenciais é abeliana. Os termos quadráticos de $L(g_1)$, $L(h_2)$ e os dois termos em (2.21) que envolvem (h_2, h_1) e (h_1, g_1) são nulos, conforme as relações para a forma traço descritas no apêndice "Definições Algébricas". Portanto, as únicas contribuições não nulas são dadas pelo termo quadrático de $L(h_1)$ e pelo termo de Polyakov-Wiegman envolvendo (h_1, h_2, g_1) :

$$S_{WZ\bar{N}W}(g_0^f) = -\frac{k}{2\pi} \int d^2x (e^{-\varphi_2} \partial \tilde{\chi} \bar{\partial} \tilde{\psi}) +$$

$$-\frac{k}{4\pi} \int d^2x \left(\sum_{i,j=2}^r \eta_{i,j} \partial \varphi_i \bar{\partial} \varphi_j + \partial \nu \bar{\partial} \eta + \partial \eta \bar{\partial} \nu \right), \quad (6.43)$$

onde $\eta_{i,j}$ representa a matriz de Cartan simetrizada da álgebra de dimensão finita A_r , conforme apresentado no apêndice "Definições Algébricas". O segundo termo que vêm de (3.81) é dado por:

$$\frac{k}{2\pi} \int d^2x Tr[\epsilon^+ g_0^f \epsilon^- (g_0^f)^{-1}] =$$

$$\frac{k\mu^2}{2\pi} \int d^2x [e^{-2\varphi_2+\varphi_3} + \sum_{i=3}^{r-1} e^{\varphi_{i-1}-2\varphi_i+\varphi_{i+1}} + e^{\varphi_{r-1}-2\varphi_r} + e^{\varphi_r-\eta} (e^{\varphi_2} + \tilde{\psi} \tilde{\chi})]. \quad (6.44)$$

Para calcular o termo que vêm da integral funcional em (3.81), parametrizamos W_0 e $\bar{W}_0$ como em (5.127)-(5.128). Verifica-se que:

$$Tr[W_0 \bar{\partial} g_0^f (g_0^f)^{-1}] = -a_0 \tilde{\chi} e^{-\varphi_2} \bar{\partial} \tilde{\psi}, \quad (6.45)$$

$$Tr[\bar{W}_0 (g_0^f)^{-1} \partial g_0^f] = -\bar{a}_0 \tilde{\psi} e^{-\varphi_2} \partial \tilde{\chi}, \quad (6.46)$$

$$Tr[W_0 \bar{W}_0] = \left(\frac{r}{r+1} \right) a_0 \bar{a}_0 \quad (6.47)$$

e

$$Tr[W_0 g_0^f \bar{W}_0 (g_0^f)^{-1}] = a_0 \bar{a}_0 \left[\frac{r}{r+1} + \tilde{\psi} \tilde{\chi} e^{-\varphi_2} \right]. \quad (6.48)$$

Somamos as quatro últimas equações e as escrevemos na forma:

$$\left[\left(\frac{2r\Delta}{r+1} \right) \left(a_0 - \frac{\tilde{\psi} \partial \tilde{\chi} e^{-\varphi_2}}{\left(\frac{2r\Delta}{r+1} \right)} \right) \left(\bar{a}_0 - \frac{\tilde{\chi} \bar{\partial} \tilde{\psi} e^{-\varphi_2}}{\left(\frac{2r\Delta}{r+1} \right)} \right) \right] - \frac{\tilde{\psi} \tilde{\chi} e^{-2\varphi_2} \partial \tilde{\chi} \bar{\partial} \tilde{\psi}}{\left(\frac{2r\Delta}{r+1} \right)}. \quad (6.49)$$

Substituímos (6.49) em (3.81) e redefinimos a ação, obtendo, a menos de uma integral funcional, a contribuição

$$\left(\frac{k}{2\pi} \right) \left(\frac{r+1}{2r} \right) \int d^2x \frac{\tilde{\psi} \tilde{\chi} e^{-2\varphi_2} \partial \tilde{\chi} \bar{\partial} \tilde{\psi}}{\Delta}. \quad (6.50)$$

Portanto, de (6.43)-(6.44) e (6.50), obtemos:

$$S_{efetivo} = -\frac{k}{4\pi} \int d^2x \left\{ \sum_{i,j=2}^r \eta_{i,j} \partial \varphi_i \bar{\partial} \varphi_j + \partial \nu \bar{\partial} \eta + \partial \eta \bar{\partial} \nu + \right. \\ \left. + \frac{2e^{-\varphi_2} \partial \tilde{\chi} \bar{\partial} \tilde{\psi}}{\Delta} - 2\mu^2 \left[\sum_{i=2}^r \exp \left[\sum_{j=2}^r (-K_{i,j} \varphi_j) \right] + e^{\varphi_r - \eta} (e^{\varphi_2} + \tilde{\psi} \tilde{\chi}) \right] \right\}. \quad (6.51)$$

Podemos reescrever esta ação como:

$$S_{efetivo} = -\frac{k}{4\pi} \int d^2x \left\{ \sum_{i,j=2}^r \frac{\eta_{i,j}}{4} g^{\mu\xi} \partial_\mu \varphi_j \partial_\xi \varphi_i + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} g^{\mu\xi} \partial_\mu \eta \partial_\xi \nu + \frac{1}{2} \frac{e^{-\varphi_2}}{\Delta} (g^{\mu\xi} \partial_\mu \tilde{\psi} \partial_\xi \tilde{\chi} + \epsilon^{\mu\xi} \partial_\mu \tilde{\psi} \partial_\xi \tilde{\chi}) + \right. \\ \left. - 2\mu^2 \left[\sum_{i=2}^r \exp \left(\sum_{j=2}^r (-K_{i,j} \varphi_j) \right) + e^{\varphi_r - \eta} (e^{\varphi_2} + \tilde{\psi} \tilde{\chi}) \right] \right\}, \quad (6.52)$$

onde estamos utilizando a convenção

$$g^{00} = -g^{11} = 1 \quad (6.53)$$

e

$$\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1. \quad (6.54)$$

As equações de Euler-Lagrange para (6.52) resultam em (6.24)-(6.28).

De (6.52) obtemos os momentos canônicos:

$$\Pi_\nu = -\frac{k}{8\pi} \partial_t \eta, \quad (6.55)$$

$$\Pi_\eta = -\frac{k}{8\pi} \partial_t \nu, \quad (6.56)$$

$$\Pi_{\tilde{\chi}} = -\frac{k}{4\pi} \frac{e^{-\varphi_2} \bar{\partial} \tilde{\psi}}{\Delta}, \quad (6.57)$$

$$\Pi_{\tilde{\psi}} = -\frac{k}{4\pi} \frac{e^{-\varphi_2} \partial \tilde{\chi}}{\Delta} \quad (6.58)$$

e, para $(k=2, \dots, r)$,

$$\Pi_{\varphi_k} = -\frac{k}{8\pi} \eta_{k,i} \partial_i \varphi_i. \quad (6.59)$$

Definimos:

$$S_1 = \exp \left\{ -\frac{\varphi_1}{2} \frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2} - \frac{\nu}{2} C - \frac{\eta}{2} D - \sum_{i=3}^r \frac{\varphi_i}{2} h_i^{(0)} \right\}, \quad (6.60)$$

$$S_2 = \exp(-\tilde{\chi} E_{-\alpha_1}^{(0)}) \quad (6.61)$$

e

$$S_3 = \exp \left(-\frac{\varphi_2}{2} h_2^{(0)} \right). \quad (6.62)$$

As equações de movimento são invariantes por uma transformação de calibre, conforme (4.65). Portanto, verificaremos a integrabilidade do modelo através de um potencial de calibre transformado. Efetuaremos três transformações de calibre em A_x . A primeira será da forma

$$A'_x = S_1 A_x (S_1)^{-1} - \partial_x S_1 (S_1)^{-1}, \quad (6.63)$$

a segunda

$$A''_x = S_2 A'_x (S_2)^{-1} - \partial_x S_2 (S_2)^{-1} \quad (6.64)$$

e, por último,

$$A'''_x = S_3 A''_x (S_3)^{-1} - \partial_x S_3 (S_3)^{-1}. \quad (6.65)$$

Observe que as transformações não comutam.

Obtemos:

$$\begin{aligned} A'''_x = & -\frac{4\pi}{k} (\Pi_\eta C + \Pi_\nu D) + \mu \sum_{i=1}^{r-1} \exp \left(-\sum_{j=1}^{r-1} \frac{\tilde{K}_{i,j} \varphi_{j+1}}{2} \right) (E_{\alpha_{(i+1)}}^{(0)} + E_{-\alpha_{(i+1)}}^{(0)}) + \\ & + \mu e^{\frac{\varphi_r}{2} - \frac{\eta}{2}} (\tilde{\psi} E_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r}^{(-1)} + \tilde{\chi} E_{-\alpha_1 + \dots + \alpha_r}^{(1)}) + \mu e^{\frac{\varphi_2}{2} + \frac{\varphi_r}{2} - \frac{\eta}{2}} (E_{\alpha_2 + \dots + \alpha_r}^{(-1)} + E_{-\alpha_2 + \dots + \alpha_r}^{(1)}) + \\ & - \frac{4\pi}{k} e^{\frac{\varphi_2}{2}} (\Pi_{\tilde{\chi}} E_{\alpha_1}^{(0)} + \Pi_{\tilde{\psi}} E_{-\alpha_1}^{(0)}) - \frac{4\pi}{k} \sum_{l,k=1}^{r-1} (\tilde{\eta}^{-1})_{l,k} \Pi_{\varphi_{(k+1)}} h_{l+1}^{(0)} + \\ & - \frac{2\pi}{k} \left(\frac{r+1}{r} \right) [\tilde{\psi} \Pi_{\tilde{\psi}} + \tilde{\chi} \Pi_{\tilde{\chi}}] \left(\frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2} \right), \end{aligned} \quad (6.66)$$

onde

$$\tilde{K}_{i,j} = K_{i+1,j+1}, (1 \leq i, j \leq r-1), \quad (6.67)$$

$$\tilde{\eta}_{i,j} = \eta_{i+1,j+1}, (1 \leq i, j \leq r-1), \quad (6.68)$$

ou seja,

$$\tilde{K}(r) = K(r-1) \quad (6.69)$$

e

$$\tilde{\eta}(r) = \eta(r-1). \quad (6.70)$$

Temos que:

$$\begin{aligned} & \left\{ A_x'''(y, t) \otimes A_x'''(z, t) \right\} = \delta(y-z)[(I \otimes I) - \sigma] \{ \\ & -\frac{2\pi\mu}{k} e^{\frac{\varphi_r}{2} - \frac{\eta}{2}} \left[C \otimes \left(\tilde{\psi} E_{\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{(-1)} + \tilde{\chi} E_{-(\alpha_1+\dots+\alpha_r)}^{(1)} \right) \right] + \\ & -\frac{2\pi\mu}{k} e^{\frac{\varphi_2}{2} + \frac{\varphi_r}{2} - \frac{\eta}{2}} \left[C \otimes \left(E_{\alpha_2+\dots+\alpha_r}^{(-1)} + E_{-(\alpha_2+\dots+\alpha_r)}^{(1)} \right) \right] + \\ & + \frac{2\pi\mu}{k} \sum_{i=1}^{r-1} \exp \left(- \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\tilde{K}_{i,j} \varphi_{j+1}}{2} \right) \left[\left(E_{\alpha(i+1)}^{(0)} + E_{-\alpha(i+1)}^{(0)} \right) \otimes h_{i+1}^{(0)} \right] + \\ & -\frac{4\pi\mu}{k} e^{\frac{\varphi_2}{2} + \frac{\varphi_r}{2} - \frac{\eta}{2}} \left[\left(E_{\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{(-1)} \otimes E_{-\alpha_1}^{(0)} \right) + \left(E_{-(\alpha_1+\dots+\alpha_r)}^{(1)} \otimes E_{\alpha_1}^{(0)} \right) \right] + \\ & -\frac{2\pi\mu}{k} e^{\frac{\varphi_r}{2} - \frac{\eta}{2}} \left[\left(\tilde{\psi} E_{\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{(-1)} + \tilde{\chi} E_{-(\alpha_1+\dots+\alpha_r)}^{(1)} \right) \otimes \sum_{l=1}^{r-1} (\tilde{\eta}^{-1})_{l,r-1} h_{l+1}^{(0)} \right] + \\ & -\frac{2\pi\mu}{k} \left(\frac{r+1}{r} \right) e^{\frac{\varphi_r}{2} - \frac{\eta}{2}} \left[\left(\tilde{\psi} E_{\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{(-1)} + \tilde{\chi} E_{-(\alpha_1+\dots+\alpha_r)}^{(1)} \right) \otimes \frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2} \right] + \\ & -\frac{2\pi\mu}{k} e^{\frac{\varphi_2}{2} + \frac{\varphi_r}{2} - \frac{\eta}{2}} \left[\left(E_{\alpha_2+\dots+\alpha_r}^{(-1)} + E_{-(\alpha_2+\dots+\alpha_r)}^{(1)} \right) \otimes \sum_{l=1}^{r-1} \left[(\tilde{\eta}^{-1})_{l,1} + (\tilde{\eta}^{-1})_{l,r-1} \right] h_{l+1}^{(0)} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{8\pi^2}{k^2} \left(\frac{r+1}{r} \right) e^{\frac{\varphi_2}{2}} \left[\left(\Pi_{\tilde{\chi}} E_{\alpha_1}^{(0)} + \Pi_{\tilde{\psi}} E_{-\alpha_1}^{(0)} \right) \otimes \frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2} \right] + \\
& + \frac{8\pi^2}{k^2} e^{\frac{\varphi_2}{2}} \left[\left(\Pi_{\tilde{\chi}} E_{\alpha_1}^{(0)} + \Pi_{\tilde{\psi}} E_{-\alpha_1}^{(0)} \right) \otimes \sum_{l=1}^{r-1} (\tilde{\eta}^{-1})_{l,1} h_{l+1}^{(0)} \right] \}, \quad (6.71)
\end{aligned}$$

onde σ foi definido em (5.35). Verifica-se que (6.71) satisfaz a relação (4.32) relativa à integrabilidade do sistema:

$$\left\{ A_x'''(y, t) \otimes A_x'''(z, t) \right\} = [r, A_x'''(y, t) \otimes I + I \otimes A_x'''(z, t)] \delta(y - z), \quad (6.72)$$

onde a matriz r é a generalização da matriz r dos modelos de sine-Gordon e Lund-Regge -(5.36)-:

$$r = -\frac{2\pi}{k} [C^+ - C^-], \quad (6.73)$$

sendo que

$$\begin{aligned}
C^+ = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\alpha, b=1}^r \frac{\alpha_b^2}{2} (K^{-1})_{a,b} \left(h_a^{(m)} \otimes h_b^{(-m)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \frac{\alpha^2}{2} \left(E_{\alpha}^{(0)} \otimes E_{-\alpha}^{(0)} \right) + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\alpha > 0} \frac{\alpha^2}{2} \left[E_{\alpha}^{(m)} \otimes E_{-\alpha}^{(-m)} + E_{-\alpha}^{(m)} \otimes E_{\alpha}^{(-m)} \right] \quad (6.74)
\end{aligned}$$

e

$$C^- = \sigma C^+. \quad (6.75)$$

A somatória indicada por $(\alpha > 0)$ representa uma soma sobre todas as raízes positivas. A demonstração de que a matriz r para este modelo é dada por (6.73) é dada no apêndice "Cálculo da matriz r clássica". Salientamos que esta matriz já é conhecida na literatura e é a mesma matriz do modelo de Toda conforme abeliano afim [8].

Da mesma forma que no modelo de sine-Gordon e no modelo de Lund-Regge, impomos que em nossa solução:

$$\eta = 0, \quad (6.76)$$

o que é compatível com (6.24). Observe que esta escolha quebra a invariância conforme.

Portanto,

$$B = \exp(\chi E_{-\alpha_1}^{(0)}) \exp \left[\varphi_1 \frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2} + \sum_{i=2}^r \varphi_i h_i^{(0)} + \nu C \right] \exp(\psi E_{\alpha_1}^{(0)}). \quad (6.77)$$

Observe que B é parametrizado por (χ, ψ) e não $(\tilde{\chi}, \tilde{\psi})$.

Uma solução de vácuo da forma (4.70)-(4.71) existe e é dada por:

$$\tilde{\psi}_{vac} = \tilde{\chi}_{vac} = \varphi_1^{vac} = \dots = \varphi_r^{vac} = 0 \quad (6.78)$$

e

$$\nu_{vac} = \mu^2 z \bar{z}, \quad (6.79)$$

conforme (6.24)-(6.28) e (6.14)-(6.15). Portanto, na equação (4.101),

$$\bar{k} = \mu^2. \quad (6.80)$$

Utilizaremos (4.101). Como estados da forma (4.100), tomamos $|\lambda_0\rangle, \dots, |\lambda_r\rangle, E_{-\alpha_1}^{(0)}|\lambda_1\rangle$ e os seus duais $\langle\lambda_0|, \dots, \langle\lambda_r|, \langle\lambda_1|E_{\alpha_1}^{(0)}$. Ou seja,

$$\langle\lambda_i|B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C)|\lambda_i\rangle = \langle\lambda_i|T_0 g T_0^{-1}|\lambda_i\rangle, \quad (i=0, \dots, r) \quad (6.81)$$

$$\langle\lambda_1|E_{\alpha_1}^{(0)}[B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C)]|\lambda_1\rangle = \langle\lambda_1|E_{\alpha_1}^{(0)}[T_0 g T_0^{-1}]|\lambda_1\rangle \quad (6.82)$$

e

$$\langle\lambda_1|[B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C)]E_{-\alpha_1}^{(0)}|\lambda_1\rangle = \langle\lambda_1|[T_0 g T_0^{-1}]E_{-\alpha_1}^{(0)}|\lambda_1\rangle. \quad (6.83)$$

Observe que em (6.81) existem $(r+1)$ equações.

Utilizando (6.77) e as propriedades das representações da álgebra $A_r^{(1)}$ discutidas no apêndice "Definições Algébricas", obtemos:

$$\langle\lambda_0|B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C)|\lambda_0\rangle = \exp(\nu - \mu^2 z \bar{z}), \quad (6.84)$$

$$\langle\lambda_1|B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C)|\lambda_1\rangle = \exp\left(\frac{r}{r+1}\varphi_1 + \nu - \mu^2 z \bar{z}\right), \quad (6.85)$$

pois o coeficiente de $\frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2}$ na direção $h_1^{(0)}$ é dado por $r/(r+1)$, conforme (6.22),

$$\langle\lambda_j|B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C)|\lambda_j\rangle = \exp\left[\left(\frac{r+1-j}{r+1}\right)\varphi_1 + \varphi_j + \nu - \mu^2 z \bar{z}\right], \quad (j=2, \dots, r), \quad (6.86)$$

pois o coeficiente de $\frac{2\lambda_1 H^{(0)}}{\alpha_1^2}$ na direção $h_j^{(0)}$ é dado por $\frac{r+1-j}{r+1}$, conforme (6.22),

$$\langle \lambda_1 | E_{\alpha_1}^{(0)} B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C) | \lambda_1 \rangle = \tilde{\chi} \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r-1}{r+1} \right) \varphi_1 + \nu - \mu^2 z \bar{z} \right] \quad (6.87)$$

e

$$\langle \lambda_1 | B \exp(-\mu^2 z \bar{z} C) E_{-\alpha_1}^{(0)} | \lambda_1 \rangle = \tilde{\psi} \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r-1}{r+1} \right) \varphi_1 + \nu - \mu^2 z \bar{z} \right]. \quad (6.88)$$

Resta-nos escolher o elemento constante g que aparece em (6.81)-(6.83). Por (4.102) e (4.108), tal escolha será determinada através da utilização de um ou mais vértices de (4.166)-(4.168), tendo em vista que $\epsilon^\pm$ são dados por (4.164)-(4.165). Isto será discutido na próxima seção.

A ação (6.52) é invariante por uma transformação global $U(1)$, dada por:

$$\tilde{\psi} \rightarrow e^{i\epsilon} \tilde{\psi}, \quad (6.89)$$

$$\tilde{\chi} \rightarrow e^{-i\epsilon} \tilde{\chi} \quad (6.90)$$

e os outros campos invariantes. A corrente de Noether é da forma (5.196) e escreve-se como:

$$J^\mu = -\frac{ik}{8\pi} \frac{e^{-\varphi_2}}{\Delta} \{ \tilde{\psi} (g^{\nu\mu} \partial_\nu \tilde{\chi} - \epsilon^{\nu\mu} \partial_\nu \tilde{\chi}) - \tilde{\chi} (g^{\nu\mu} \partial_\nu \tilde{\psi} + \epsilon^{\nu\mu} \partial_\nu \tilde{\psi}) \}. \quad (6.91)$$

A carga elétrica é dada por:

$$Q_{elétrica} = -\frac{ik}{4\pi} \left(\frac{r}{r+1} \right) [\varphi_1(t, \infty) - \varphi_1(t, -\infty)], \quad (6.92)$$

onde utilizamos (6.14)-(6.15). Analisemos o resultado. No modelo de Toda abeliano, os campos $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ possuem carga topológica [19]. No nosso modelo não abeliano singular, os campos $\varphi_2, \dots, \varphi_r$ possuem carga topológica, como será visto. Neste caso, o campo φ_1 não é dinâmico. Entretanto, a diferença das suas assintóticas que estaria relacionada à carga topológica, aparece, agora, relacionada à carga elétrica. Uma importante diferença, porém, está no fato de que (ao menos classicamente), a carga elétrica assume valores contínuos, enquanto que a carga topológica assume valores discretos.

O tensor energia-momento correspondente a (6.52) é dado por:

$$T^{\mu\xi} = -\frac{k}{8\pi} (\partial^\mu \nu \partial^\xi \eta + \partial^\mu \eta \partial^\xi \nu) - \frac{k}{8\pi} \frac{e^{-\varphi_2}}{\Delta} (g^{\alpha\mu} \partial_\alpha \tilde{\psi} \partial^\xi \tilde{\chi} + \epsilon^{\alpha\mu} \partial_\alpha \tilde{\psi} \partial^\xi \tilde{\chi}) +$$

$$-\frac{k}{8\pi} \frac{e^{-\varphi_2}}{\Delta} (g^{\alpha\mu} \partial_\alpha \tilde{\chi} \partial^\mu \tilde{\psi} - \epsilon^{\alpha\mu} \partial_\alpha \tilde{\chi} \partial^\mu \tilde{\psi}) - \frac{k}{8\pi} \sum_{i,j=2}^r K_{i,j} (\partial^\mu \varphi_j \partial^\mu \varphi_i) - g^{\mu\epsilon} L. \quad (6.93)$$

Calcularemos a energia para $\eta = 0$ e para soluções tais que em $(x \rightarrow \pm\infty)$ as assintóticas dos campos satisfaçam às seguintes condições:

$$\left[\sum_{i=2}^r \exp(-K_{i,j} \varphi_j) + \exp(\varphi_2 + \varphi_r) \right]_{x \rightarrow \pm\infty} = r \quad (6.94)$$

e

$$(\tilde{\psi} \tilde{\chi})_{x \rightarrow \pm\infty} = 0. \quad (6.95)$$

Neste caso, existe uma energia de ponto zero que deve ser subtraída de modo a se obter uma energia finita. Portanto, definimos:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(T^{00} + \frac{k\mu^2 r}{2\pi} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ -\frac{k}{8\pi} \frac{e^{-\varphi_2}}{\Delta} (\partial_t \tilde{\psi} \partial_t \tilde{\chi} + \partial_x \tilde{\psi} \partial_x \tilde{\chi}) - \frac{k}{16\pi} \sum_{i,j=2}^r K_{i,j} (\partial_t \varphi_i \partial_t \varphi_j + \partial_x \varphi_i \partial_x \varphi_j) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{k\mu^2}{2\pi} \left[\sum_{i=2}^r \exp(-K_{i,j} \varphi_j) + e^{\varphi_r} (e^{\varphi_2} + \tilde{\psi} \tilde{\chi}) - r \right] \right\}. \quad (6.96) \end{aligned}$$

O momento, para $\eta = 0$, é dado por:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} dx T^{01} = \frac{k}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{e^{-\varphi_2}}{\Delta} (\partial_t \tilde{\psi} \partial_x \tilde{\chi} + \partial_x \tilde{\psi} \partial_t \tilde{\chi}) + K_{i,j} (\partial_t \varphi_j \partial_x \varphi_i) \right\}. \quad (6.97)$$

EQUIVALÊNCIA ENTRE VÉRTICES

Nesta seção, discutiremos um aspecto importante dos vértices (4.166)-(4.168). Temos, a princípio,

$$2r + r(r-1) = r(r+1) \quad (6.98)$$

vértices, ou seja, um número de vértices igual ao número de raízes de A_r . Entretanto, podemos dividi-los em subconjuntos, de modo a que vértices pertencentes a um mesmo subconjunto sejam "equivalentes". De modo mais claro, para vértices

pertencentes a um mesmo subconjunto, as soluções obtidas serão as mesmas, desde que os parâmetros espectrais γ sejam ajustados de maneira adequada. Considere (4.178)-(4.180):

$$\bar{F}_{1,r}(\gamma = \tilde{\gamma}w^{-j}) = \bar{F}_{1,j}(\gamma = \tilde{\gamma}), \quad (6.99)$$

$$\hat{F}_{1,r}(\gamma = \tilde{\gamma}w^{-j}) = \hat{F}_{1,j}(\gamma = \tilde{\gamma}) \quad (6.100)$$

e

$$F_{a,r}(\gamma = \tilde{\gamma}w^{-j}) = F_{a,j}(\gamma = \tilde{\gamma}). \quad (6.101)$$

Analisemos (6.99). Temos que $\bar{F}_{1,r}(\tilde{\gamma}w^{-j})$ e $\bar{F}_{1,j}(\tilde{\gamma})$, com $(j=1,\dots,r)$, são *iguais*. Portanto, qualquer expressão na qual apareça $\bar{F}_{1,j}(\tilde{\gamma})$ será a *mesma* expressão escrita em termos de $\bar{F}_{1,r}(\tilde{\gamma}w^{-j})$. Portanto, qualquer solução obtida com $\bar{F}_{1,j}(\tilde{\gamma})$ será a *mesma* solução obtida com $\bar{F}_{1,r}(\tilde{\gamma}w^{-j})$. Logicamente, as substituições devem ser feitas de maneira consistente. Por exemplo,

$$\begin{aligned} T_0 \exp[\bar{F}_{1,r}(\tilde{\gamma}w^{-j})]T_0^{-1} &= \exp[\bar{\rho}_{1,r}(\tilde{\gamma}w^{-j})\bar{F}_{1,r}(\tilde{\gamma}w^{-j})] \\ &= \exp[\bar{\rho}_{1,j}(\tilde{\gamma})\bar{F}_{1,j}(\tilde{\gamma})] = T_0 \exp[\bar{F}_{1,j}(\tilde{\gamma})]T_0^{-1}, \end{aligned} \quad (6.102)$$

pois, como não poderia ser de outra forma,

$$\bar{\rho}_{1,r}(\tilde{\gamma}w^{-j}) = \bar{\rho}_{1,j}(\tilde{\gamma}). \quad (6.103)$$

Ou seja, os vértices $\bar{F}_{1,1}, \bar{F}_{1,2}, \dots, \bar{F}_{1,r}$ são todos equivalentes, sob escolhas convenientes dos parâmetros espectrais. Da mesma forma, os vértices $\hat{F}_{1,1}, \dots, \hat{F}_{1,r}$ são todos equivalentes entre si, assim como, também, os vértices $F_{a,1}, F_{a,2}, \dots, F_{a,r}$ são todos equivalentes entre si, sob escolhas convenientes dos parâmetros espectrais. Observe que a equivalência que demonstramos é válida para combinações arbitrárias destes vértices.

Portanto, podemos escolher um vértice como representante de cada subconjunto. Por conveniência, tomamos $\bar{F}_{1,r}, \hat{F}_{1,r}, F_{1,r}, F_{2,r}, \dots, F_{r-1,r}$. As soluções a serem obtidas utilizarão apenas estes vértices, como será visto nas próximas seções.

SOLUÇÃO DE 1 VÉRTICE

Nesta seção será obtida uma solução para o modelo $A_r^{(1)}$ não abeliano singular. Escolhemos:

$$g = \exp[cF_{d,r}(\gamma_3)], \quad (6.104)$$

onde $F_{d,r}$ ($d=1,\dots,r-1$) é dado por (4.168) e (c,γ_3) são constantes complexas. Conforme (4.102)-(4.103), (4.106)-(4.107) e (4.176)-(4.177), obtemos:

$$T_0 g T_0^{-1} = \exp [c \rho_{d,r}(\gamma_3) F_{d,r}(\gamma_3)], \quad (6.105)$$

onde

$$\rho_{d,r}(\gamma_3) = \exp \left[-\frac{\mu z(w^{-d} - 1)}{\gamma_3} + \mu \bar{z} \gamma_3 (w^d - 1) \right]. \quad (6.106)$$

exibe explicitamente a dependência espaço temporal. Conforme (4.206) o quadrado do operador de vértice é igual a zero. Portanto,

$$T_0 g T_0^{-1} = 1 + c \rho_{d,r}(\gamma_3) F_{d,r}(\gamma_3). \quad (6.107)$$

Devemos substituir (6.107) em (6.81)-(6.83) e calcular os elementos de matriz. Todos os cálculos desta forma são apresentados no apêndice "Cálculo dos elementos de matriz". Aqui, apresentamos os resultados, utilizando (6.84)-(6.88):

$$\exp(\nu - \mu^2 z \bar{z}) = 1 + \frac{c \rho_{d,r}(\gamma_3)}{(w^d - 1)}, \quad (6.108)$$

$$\exp \left[\frac{r}{r+1} \varphi_1 + \nu - \mu^2 z \bar{z} \right] = 1 + \frac{c \rho_{d,r}(\gamma_3)}{(w^d - 1)}, \quad (6.109)$$

$$\exp \left[\frac{r+1-j}{r+1} \varphi_1 + \varphi_j + \nu - \mu^2 z \bar{z} \right] = 1 + \frac{c \rho_{d,r}(\gamma_3) w^{d(j-1)}}{(w^d - 1)}, \quad (6.110)$$

para ($j=2,\dots,r$),

$$\tilde{\chi} \exp \left[\frac{r-1}{2(r+1)} \varphi_1 + \nu - \mu^2 z \bar{z} \right] = 0 \quad (6.111)$$

e

$$\tilde{\psi} \exp \left[\frac{r-1}{2(r+1)} \varphi_1 + \nu - \mu^2 z \bar{z} \right] = 0. \quad (6.112)$$

Ou seja,

$$\exp \left[\frac{r}{r+1} \varphi_1 \right] = 1, \quad (6.113)$$

$$\exp \varphi_j = \left[1 + \frac{c \rho_{d,r}(\gamma_3) w^{d(j-1)}}{w^d - 1} \right] \left[1 + \frac{c \rho_{d,r}(\gamma_3)}{w^d - 1} \right]^{-1}, \quad (6.114)$$

para ($j=2,\dots,r$) e

$$\tilde{\psi} = \tilde{\chi} = 0. \quad (6.115)$$

Note que, até o momento, não dissemos que esta solução descreva sólitons. Na verdade, dependendo da escolha do parâmetro espectral γ_3 , a mesma possa, talvez, não ser uma boa solução "física". Com esta última afirmação, queremos dizer que, *eventualmente*, a energia e o momento podem não ser reais.

Introduzimos uma *conjectura* que nos levará a soluções do tipo sólito. Salientamos que não estamos excluindo outras possibilidades. Tomamos

$$\rho_{d,r}(\gamma_3) = \text{real}. \quad (6.116)$$

Esta escolha é, intuitivamente, a mais simples possível. A energia e o momento dependem de derivadas dos campos. As soluções são funções nas quais os números complexos (w) aparecem inevitavelmente. Derivar estas funções equivale a introduzir mais números complexos se $\rho_{d,r}$ não for real. Portanto, a escolha (6.116) não torna os observáveis mais "complexos" do que eles já são, nos dois sentidos da palavra "complexo".

Lembrando que

$$w = \exp \frac{2\pi i}{r}, \quad (6.117)$$

reescrevemos (6.106):

$$\rho_{d,r}(\gamma_3) = \exp \left[2i\mu \sin \left(\frac{\pi d}{r} \right) \left(\frac{ze^{-\frac{i\pi d}{r}}}{\gamma_3} + \bar{z}\gamma_3 e^{\frac{i\pi d}{r}} \right) \right]. \quad (6.118)$$

Portanto, escolhemos de modo a satisfazer (6.116),

$$\gamma_3 = i(-1)^{\bar{n}} \exp S \exp \left(-\frac{i\pi d}{r} \right), \quad (6.119)$$

onde $\bar{n}$ é um inteiro arbitrário e S é um número real. Consequentemente,

$$\rho_{d,r}(\gamma_3) = \exp H, \quad (6.120)$$

onde

$$H = 4\mu(-1)^{\bar{n}} \sin \frac{\pi d}{r} [-t \sinh S + x \cosh S]. \quad (6.121)$$

Parametrizamos a constante c como:

$$c = (w^d - 1) \exp \left[-4\mu(-1)^{\bar{n}} \bar{Y} \sin \left(\frac{\pi d}{r} \right) \cosh S \right], \quad (6.122)$$

onde $\bar{Y}$ é uma constante real. Definimos:

$$\bar{H}(t, x) = H(t, x - \bar{Y}). \quad (6.123)$$

Substituindo (6.120) e (6.122)-(6.123) em (6.114), obtemos:

$$\exp \varphi_j = \frac{1 + w^{d(j-1)} \exp \bar{H}}{1 + \exp \bar{H}}, \quad (6.124)$$

para $(j=2, \dots, r)$.

Analisemos a solução. Observe que, de (6.113), obtemos:

$$\partial_x \varphi_1 = 0. \quad (6.125)$$

Portanto, por (6.92), vemos que a carga elétrica é nula:

$$Q_{elétrica} = 0. \quad (6.126)$$

A carga topológica está relacionada às assintóticas dos campos, que por sua vez dependem do comportamento de $\bar{H}$ em $(x \rightarrow \pm\infty)$. Observe que $\bar{H}$ depende de $\sin \frac{\pi d}{r}$, com $(d=1, \dots, r-1)$. Mas,

$$0 < \frac{\pi}{r} \leq \frac{\pi d}{r} \leq \frac{\pi(r-1)}{r} < \pi, \quad (6.127)$$

ou seja,

$$\sin \frac{\pi d}{r} > 0. \quad (6.128)$$

Como $\cosh S > 0$ (por definição) e estamos tomando $\mu > 0$, devemos analisar o sinal que vêm de $\bar{n}$:

$$\left[\begin{array}{llll} \bar{n} \text{ par:} & (x \rightarrow \infty) \rightarrow & (\bar{H} \rightarrow \infty) \rightarrow & (\exp \bar{H} \rightarrow \infty) \\ \bar{n} \text{ par:} & (x \rightarrow -\infty) \rightarrow & (\bar{H} \rightarrow -\infty) \rightarrow & (\exp \bar{H} \rightarrow 0) \\ \bar{n} \text{ ímpar:} & (x \rightarrow \infty) \rightarrow & (\bar{H} \rightarrow -\infty) \rightarrow & (\exp \bar{H} \rightarrow 0) \\ \bar{n} \text{ ímpar:} & (x \rightarrow -\infty) \rightarrow & (\bar{H} \rightarrow \infty) \rightarrow & (\exp \bar{H} \rightarrow \infty) \end{array} \right]. \quad (6.129)$$

Definimos:

$$\bar{\phi}_1 = \varphi_2, \quad (6.130)$$

$$\bar{\phi}_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j, \quad (6.131)$$

para $(j=2, \dots, r-1)$ e

$$\bar{\phi}_r = -\varphi_r. \quad (6.132)$$

Definimos, ainda,

$$\bar{\phi}_0 = \bar{\phi}_r \quad (6.133)$$

e

$$\bar{\phi}_{r+1} = \bar{\phi}_1. \quad (6.134)$$

Temos que, para $(j=1,\dots,r)$,

$$\exp \bar{\phi}_j = \frac{1 + w^d \exp \bar{H}}{1 + w^{d(j-1)} \exp \bar{H}}. \quad (6.135)$$

Portanto, para $\bar{n}$ par,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp \bar{\phi}_j = \frac{w^d}{w^{d(j-1)}} = w^d \quad (6.136)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp \bar{\phi}_j = 1. \quad (6.137)$$

Para $\bar{n}$ ímpar,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp \bar{\phi}_j = 1 \quad (6.138)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp \bar{\phi}_j = w^d. \quad (6.139)$$

Definimos a corrente topológica por:

$$J_{(j)}^\mu = \frac{\epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \bar{\phi}_j}{\left(\frac{2\pi i}{r}\right)}, \quad (6.140)$$

para $(j=1,\dots,r)$. Definimos a carga topológica por:

$$Q_{TOP}^{(j)} = \left[\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\phi}_j(t, x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{\phi}_j(t, x)}{\left(\frac{2\pi i}{r}\right)} \right]_{\text{módulo } r}, \quad (6.141)$$

onde (r) módulo $r=0$, $(r+1)$ módulo $r=1$, etc. Portanto, para $\bar{n}$ par,

$$Q_{TOP}^{(j)} = d \quad (6.142)$$

e, para $\bar{n}$ ímpar,

$$Q_{TOP}^{(j)} = -d. \quad (6.143)$$

Ou seja, o vértice $F_{d,r}$, com $(d=1,\dots,r-1)$ produz uma carga topológica $\pm d$. Observe que devemos definir a carga topológica módulo r , pois não podemos dizer que uma situação na qual um campo tenha assintóticas em $x \rightarrow \pm\infty$ iguais a w^d e 1 seja diferente de uma situação na qual o campo tenha assintóticas w^{d+r} e 1, pois $w^{d+r} = w^d$. Ou seja, não é possível e não faz sentido distinguir uma situação da outra.

Definimos:

$$\exp \phi_j = i w^{-\frac{d}{2}} \exp \bar{\phi}_j. \quad (6.144)$$

Verifica-se que a solução obedece ao vínculo:

$$e^{\phi_j} - e^{-\phi_{j-1}} = 2i \cos \frac{\pi d}{r}. \quad (6.145)$$

Além disso, verificam-se as equações diferenciais de primeira ordem [19]:

$$\bar{\partial} \phi_j = \mu (-1)^{\bar{n}} e^S (e^{\phi_{j+1}} - e^{\phi_j}) \quad (6.146)$$

e

$$\partial \phi_j = \mu (-1)^{\bar{n}} e^{-S} (e^{-\phi_{j-1}} - e^{-\phi_j}). \quad (6.147)$$

Desejamos expressar a energia e o momento nas novas variáveis. Para tanto, observamos que:

$$\sum_{i,j=2}^r K_{i,j} \partial \varphi_i \partial \varphi_j = \sum_{k=1}^r (\partial \phi_k)^2, \quad (6.148)$$

$$\sum_{i,j=2}^r K_{i,j} \bar{\partial} \varphi_i \bar{\partial} \varphi_j = \sum_{k=1}^r (\bar{\partial} \phi_k)^2 \quad (6.149)$$

e

$$\sum_{i=2}^r \exp(-K_{i,j} \varphi_j) + e^{\varphi_2 + \varphi_r} = \sum_{k=1}^r e^{\phi_{k+1} - \phi_k}. \quad (6.150)$$

Portanto, por (6.96)-(6.97) e (6.115),

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ -\frac{k}{8\pi} \sum_{k=1}^r [(\partial \phi_k)^2 + (\bar{\partial} \phi_k)^2] - \frac{k\mu^2}{2\pi} \left[\sum_{k=1}^r e^{\phi_{k+1} - \phi_k} - r \right] \right\} \quad (6.151)$$

e

$$P = \frac{k}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{k=1}^r [(\partial \phi_k)^2 - (\bar{\partial} \phi_k)^2]. \quad (6.152)$$

Definimos:

$$F^- = \mu(-1)^{\bar{n}} e^{-S} \sum_{k=1}^r e^{-\phi_k} \quad (6.153)$$

e

$$F^+ = -\mu(-1)^{\bar{n}} e^S \sum_{k=1}^r e^{\phi_k}. \quad (6.154)$$

Verifica-se que o potencial é dado por:

$$V = \frac{k}{4\pi} (\bar{\partial} F^- + \partial F^+). \quad (6.155)$$

A densidade de energia cinética é dada por:

$$-\frac{k}{4\pi} (\partial F^- + \bar{\partial} F^+). \quad (6.156)$$

A densidade de momento é dada por:

$$\frac{k}{4\pi} (\partial F^- - \bar{\partial} F^+). \quad (6.157)$$

Além disso, verifica-se que:

$$\bar{\partial} F^- = \partial F^+. \quad (6.158)$$

Substituindo (6.155)-(6.158) em (6.151)-(6.152), obtemos:

$$E = -\frac{k}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x (F^- - F^+) = -\frac{k\mu}{4\pi} (-1)^{\bar{n}} \left[e^{-S} \sum_{k=1}^r e^{-\phi_k} + e^S \sum_{k=1}^r e^{\phi_k} \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty} \quad (6.159)$$

e

$$\begin{aligned} P &= \frac{k}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\partial F^- - \bar{\partial} F^+) = \frac{k}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\partial F^- - \bar{\partial} F^- - \bar{\partial} F^+ + \partial F^+) \\ &= \frac{k}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x (F^- + F^+) = \frac{k\mu(-1)^{\bar{n}}}{4\pi} \left[e^{-S} \sum_{k=1}^r e^{-\phi_k} - e^S \sum_{k=1}^r e^{\phi_k} \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty}. \end{aligned} \quad (6.160)$$

Por (6.136)-(6.139) e (6.144), vemos que, para $\bar{n}$ par ou ímpar,

$$E = \frac{k\mu r}{\pi} \cosh S \sin \frac{\pi d}{r} \quad (6.161)$$

e

$$P = \frac{k\mu r}{\pi} \sinh S \sin \frac{\pi d}{r}. \quad (6.162)$$

Observe que tanto a energia quanto o momento são reais. Além disso, a energia é positiva, pois $\mu > 0, \cosh S > 0$ e $\sin \frac{\pi d}{r} > 0$. Observe que a energia e o momento dependem da carga topológica.

A energia e o momento são da forma (4.219)-(4.220), com:

$$M = \sqrt{E^2 - P^2} = \frac{k\mu r}{\pi} \sin \frac{\pi d}{r} \quad (6.163)$$

e

$$v = \tanh S. \quad (6.164)$$

Observe que esta é uma solução do modelo de Toda abeliano $A_{r-1}^{(1)}$. Conforme (3.27) e (3.29), as equações de movimento são determinadas dados B e $\epsilon^\pm$. No modelo de Toda abeliano [8], tendo em vista que o operador de gradação Q é dado pela gradação principal (4.143), temos que:

$$B = \exp \left[\sum_{i=1}^r \varphi_i h_i^{(0)} + \nu C + \eta D \right], \quad (6.165)$$

$$\epsilon^+ = \mu^+ \left(\sum_{i=1}^r E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_r)}^{(1)} \right) \quad (6.166)$$

e

$$\epsilon^- = \mu^- \left(\sum_{i=1}^r E_{-\alpha_i}^{(0)} + E_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r}^{(-1)} \right). \quad (6.167)$$

Para obter o modelo de Toda abeliano $A_{r-1}^{(1)}$, elimina-se α_r ou, de modo equivalente, α_1 . Temos que α_1 e α_r são equivalentes, pois, eliminando a primeira linha e a primeira coluna da matriz de Cartan de A_r ou a última linha e a última coluna, obtemos a mesma matriz. Ou seja, α_1 e α_r são equivalentes devido à simetria do diagrama de Dynkin de A_r . Portanto, no modelo de Toda abeliano $A_{r-1}^{(1)}$,

$$B = \exp \left[\sum_{i=2}^r \varphi_i h_i^{(0)} + \nu C + \eta D \right], \quad (6.168)$$

$$\epsilon^+ = \mu^+ \left(\sum_{i=2}^r E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{-(\alpha_2 + \dots + \alpha_r)}^{(1)} \right) \quad (6.169)$$

e

$$\epsilon^- = \mu^- \left(\sum_{i=2}^r E_{-\alpha_i}^{(0)} + E_{\alpha_2+\dots+\alpha_r}^{(-1)} \right). \quad (6.170)$$

Observe que $\epsilon^\pm$ são os mesmos de (6.2)-(6.3) e B corresponde a (6.40) quando $\tilde{\psi}, \tilde{\chi}$ e φ_1 são iguais a zero.

SOLUÇÃO DE 2 VÉRTICES

Nesta seção será obtida outra solução para o modelo $A_r^{(1)}$ não abeliano singular. Escolhemos:

$$g = \exp \left[a \hat{F}_{1,r}(\gamma_1) \right] \exp \left[b \bar{F}_{1,r}(\gamma_2) \right] \quad (6.171)$$

onde $\bar{F}_{1,r}$ e $\hat{F}_{1,r}$ são dados por (4.166)-(4.167) e $(a, b, \gamma_1, \gamma_2)$ são constantes complexas. Conforme (4.108)-(4.111), e (4.172)-(4.175), obtemos:

$$T_0 g T_0^{-1} = \exp \left[a \hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) \hat{F}_{1,r}(\gamma_1) \right] \exp \left[b \bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) \bar{F}_{1,r}(\gamma_2) \right]. \quad (6.172)$$

Conforme (4.206), o quadrado do operador de vértice é igual a zero. Portanto,

$$\begin{aligned} T_0 g T_0^{-1} = & 1 + a \hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) \hat{F}_{1,r}(\gamma_1) + b \bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) \bar{F}_{1,r}(\gamma_2) + \\ & + a b \hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) \bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) \hat{F}_{1,r}(\gamma_1) \bar{F}_{1,r}(\gamma_2), \end{aligned} \quad (6.173)$$

onde

$$\hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) = \exp \left[-\frac{\mu z}{\gamma_1} + \mu \gamma_1 \bar{z} \right] \quad (6.174)$$

e

$$\bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) = \exp \left[\frac{\mu z}{\gamma_2} - \mu \gamma_2 \bar{z} \right]. \quad (6.175)$$

Devemos substituir (6.173) em (6.81)-(6.83) e calcular os elementos de matriz. Todos os cálculos desta forma são apresentados no apêndice "Cálculo dos elementos de matriz". Aqui, apresentamos os resultados, utilizando (6.84)-(6.88):

$$\exp \left[\nu - \mu^2 z \bar{z} \right] = 1 + a b \hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) \bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) \frac{(\gamma_{1,2})^r}{(1 - \gamma_{1,2}) [1 - (\gamma_{1,2})^r]}, \quad (6.176)$$

$$\exp \left[\frac{r}{r+1} \varphi_1 + \nu - \mu^2 z \bar{z} \right] = 1 + a b \hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) \bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) \frac{1}{(1 - \gamma_{1,2}) [1 - (\gamma_{1,2})^r]}, \quad (6.177)$$

$$\exp \left[\left(\frac{r+1-j}{r+1} \right) \varphi_1 + \varphi_j + \nu - \mu^2 z \bar{z} \right] = 1 +$$

$$+ ab \hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) \bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) \frac{(\gamma_{1,2})^{j-1}}{(1-\gamma_{1,2}) [1 - (\gamma_{1,2})^r]}, \quad (6.178)$$

para $j=(2,\dots,r)$,

$$\tilde{\chi} \exp \left[\frac{(r-1)}{2(r+1)} \varphi_1 + \nu - \mu^2 z \bar{z} \right] = a \hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) \quad (6.179)$$

e

$$\tilde{\psi} \exp \left[\frac{(r-1)}{2(r+1)} \varphi_1 + \nu - \mu^2 z \bar{z} \right] = b \bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2), \quad (6.180)$$

onde

$$\gamma_{1,2} \equiv \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (6.181)$$

Note que até o momento não dissemos que esta solução descreve sólitons. Seguindo o raciocínio da seção anterior, que levou a (6.116), poderíamos escolher a solução mais simples de forma a que $\hat{\rho}$ e $\bar{\rho}$ fossem reais. Entretanto, observe que (6.176)-(6.178) depende somente do produto $\hat{\rho} \bar{\rho}$. De (6.179)-(6.180), vemos que o produto $\tilde{\psi} \tilde{\chi}$ é proporcional a $\hat{\rho} \bar{\rho}$. Consequentemente, tendo em vista que $\hat{\rho}$ e $\bar{\rho}$ são exponenciais, o produto de derivadas de $\tilde{\chi}$ com derivadas de $\tilde{\psi}$ é proporcional a $\hat{\rho} \bar{\rho}$. Conforme (6.96)-(6.97), a energia e o momento dependem somente do produto $\tilde{\psi} \tilde{\chi}$ e dos produtos de derivadas ($\partial_t \tilde{\psi} \partial_t \tilde{\chi}$, $\partial_x \tilde{\psi} \partial_t \tilde{\chi}$, $\partial_t \tilde{\psi} \partial_x \tilde{\chi}$, $\partial_x \tilde{\psi} \partial_x \tilde{\chi}$) e não de $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\chi}$ isoladamente. Portanto, escolhemos:

$$\hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) \bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) = \text{real}. \quad (6.182)$$

De modo a satisfazer esta condição, tomamos:

$$\gamma_1 = -\exp[+\bar{b} - i\bar{a}] \quad (6.183)$$

e

$$\gamma_2 = \exp[+\bar{b} + i\bar{a}], \quad (6.184)$$

onde $(\bar{a}, \bar{b})$ são constantes reais. Substituindo (6.183)-(6.184) em (6.174)-(6.175), obtemos:

$$\hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) = \exp[F + iG] \quad (6.185)$$

e

$$\bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) = \exp [F - iG], \quad (6.186)$$

onde

$$F = 2\mu \cos \bar{a} [-t \sinh \bar{b} + x \cosh \bar{b}] \quad (6.187)$$

e

$$G = 2\mu \sin \bar{a} [t \cosh \bar{b} - x \sinh \bar{b}]. \quad (6.188)$$

Observe que (6.185)-(6.186) satisfazem (6.182).

As constantes a e b são quaisquer. Podemos parametrizá-las como:

$$a = \sqrt{\frac{(1 - \gamma_{1,2}) [1 - (\gamma_{1,2})^r]}{(\gamma_{1,2})^r}} \exp [i\Theta - 2\mu Y \cos \bar{a} \cosh \bar{b}] \quad (6.189)$$

e

$$b = \sqrt{\frac{(1 - \gamma_{1,2}) [1 - (\gamma_{1,2})^r]}{(\gamma_{1,2})^r}} \exp [-i\Theta - 2\mu Y \cos \bar{a} \cosh \bar{b}], \quad (6.190)$$

onde Θ e Y são constantes reais. Observe que

$$ab \frac{(\gamma_{1,2})^r}{(1 - \gamma_{1,2})[1 - (\gamma_{1,2})^r]} = \exp [-4\mu Y \cos \bar{a} \cosh \bar{b}]. \quad (6.191)$$

Definimos:

$$\tilde{F}(t, x) = F(t, x - Y). \quad (6.192)$$

Substituindo (6.185)-(6.186), (6.189)-(6.190) e (6.192) em (6.176)-(6.180), obtemos:

$$\exp(\nu - \mu^2 z \bar{z}) = 1 + e^{2\tilde{F}}, \quad (6.193)$$

$$\exp \left[\frac{r}{r+1} \varphi_1 \right] = \frac{(\Gamma_1)^{-r} e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}}}{e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}}}, \quad (6.194)$$

$$\exp \varphi_j = \frac{(\Gamma_1)^{j-r-1} e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}}}{[e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}}]^{\frac{j-1}{r}} [(\Gamma_1)^{-r} e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}}]^{\frac{r+1-j}{r}}}, \quad (6.195)$$

para $j=(2, \dots, r)$,

$$\tilde{\chi} = \frac{\Gamma_2 e^{i(\Theta+G)}}{\left[e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}} \right]^{\frac{r+1}{2r}} \left[(\Gamma_1)^{-r} e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}} \right]^{\frac{r-1}{2r}}} \quad (6.196)$$

e

$$\tilde{\psi} = \frac{\Gamma_2 e^{-i(\Theta+G)}}{\left[e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}} \right]^{\frac{r+1}{2r}} \left[(\Gamma_1)^{-r} e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}} \right]^{\frac{r-1}{2r}}}, \quad (6.197)$$

onde

$$\Gamma_1 = -\exp(-2i\bar{a}) \quad (6.198)$$

e

$$\Gamma_2 = \sqrt{(1 - \Gamma_1) [(\Gamma_1)^{-r} - 1]}. \quad (6.199)$$

Analisemos as propriedades desta solução. Como veremos, a carga elétrica, a carga topológica, a energia e o momento dependem das assintóticas de $\tilde{F}$. Como $\cosh \bar{b} > 0$ e $\mu > 0$, devemos analisar o sinal que vêm de $\cos \bar{a}$. Observe que quando $\cos \bar{a} = 0$, $\tilde{F} = 0$ e $\Gamma_2 = 0$. Portanto, neste caso, com exceção de ν , os outros campos são constantes. Analisemos os casos $\cos \bar{a} \leq 0$:

$$\left[\begin{array}{llll} \cos \bar{a} > 0 : & (x \rightarrow \infty) \rightarrow & (\tilde{F} \rightarrow \infty) \rightarrow & (\exp \tilde{F} \rightarrow \infty) \\ \cos \bar{a} > 0 : & (x \rightarrow -\infty) \rightarrow & (\tilde{F} \rightarrow -\infty) \rightarrow & (\exp \tilde{F} \rightarrow 0) \\ \cos \bar{a} < 0 : & (x \rightarrow \infty) \rightarrow & (\tilde{F} \rightarrow -\infty) \rightarrow & (\exp \tilde{F} \rightarrow 0) \\ \cos \bar{a} < 0 : & (x \rightarrow -\infty) \rightarrow & (\tilde{F} \rightarrow \infty) \rightarrow & (\exp \tilde{F} \rightarrow \infty) \end{array} \right]. \quad (6.200)$$

Quando $\cos \bar{a} > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left[\frac{r}{r+1} \varphi_1 \right] = (-e^{-2i\bar{a}})^{-r}, \quad (6.201)$$

logo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r}{r+1} \varphi_1 = ir(2\bar{a} - \text{sin}(\bar{a})\pi) + 2n_1^+ \pi i, \quad (6.202)$$

onde n_1^+ é um inteiro. A função sinal foi introduzida do mesmo modo que no modelo de Lund-Regge e a consistência desta escolha vêm do fato que $\exp(i\pi) = \exp(-i\pi)$. Temos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp \left[\frac{r}{r+1} \varphi_1 \right] = 1, \quad (6.203)$$

logo,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{r}{r+1} \varphi_1 = 2n_1^- \pi i, \quad (6.204)$$

onde n_1^- é um inteiro. Portanto, conforme (6.92),

$$Q_{elétrica} = -\frac{kr}{2\pi} \left[\text{sin}(\bar{a}) \frac{\pi}{2} - \bar{a} - (n_1^+ - n_1^-) \frac{\pi}{r} \right]. \quad (6.205)$$

Quando $\cos \bar{a} < 0$,

$$Q_{elétrica} = -\frac{kr}{2\pi} \left[-\text{sin}(\bar{a}) \frac{\pi}{2} + \bar{a} - (n_1^+ - n_1^-) \frac{\pi}{r} \right]. \quad (6.206)$$

Quando $\cos \bar{a} = 0$,

$$Q_{elétrica} = 0. \quad (6.207)$$

Definimos:

$$\phi_1 = i\bar{a} + \varphi_2 - \frac{\varphi_1}{r+1}, \quad (6.208)$$

$$\phi_j = i\bar{a} + \varphi_{j+1} - \varphi_j - \frac{\varphi_1}{r+1}, \quad j=(2, \dots, r-1) \quad (6.209)$$

e

$$\phi_r = i\bar{a} - \varphi_r - \frac{\varphi_1}{r+1}. \quad (6.210)$$

Definimos, ainda,

$$\phi_0 = \phi_r \quad (6.211)$$

e

$$\phi_{r+1} = \phi_1. \quad (6.212)$$

Temos que, para $j=(1, \dots, r)$,

$$\exp \phi_j = e^{i\bar{a}} \frac{(-e^{-2i\bar{a}})^{j-r} e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}}}{(-e^{-2i\bar{a}})^{j-r-1} e^{\tilde{F}} + e^{-\tilde{F}}}. \quad (6.213)$$

Portanto,

a) para $\cos \bar{a} > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp \phi_j = -\exp(-i\bar{a}) \quad (6.214)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp \phi_j = \exp(i\bar{a}). \quad (6.215)$$

b) para $\cos \bar{a} < 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp \phi_j = \exp(i\bar{a}) \quad (6.216)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp \phi_j = -\exp(-i\bar{a}). \quad (6.217)$$

c) para $\cos \bar{a} = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp \phi_j = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp \phi_j = \text{constante}. \quad (6.218)$$

As expressões (6.214)-(6.218) são válidas para $(j=1, \dots, r)$. Portanto,

a) para $\cos \bar{a} > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_j - \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_j = -2i\bar{a} + \text{sinal}(\bar{a})i\pi + 2(k_j^+ - k_j^-)\pi i. \quad (6.219)$$

b) para $\cos \bar{a} < 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_j - \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_j = 2i\bar{a} - \text{sinal}(\bar{a})i\pi + 2(k_j^+ - k_j^-)\pi i. \quad (6.220)$$

c) para $\cos \bar{a} = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_j - \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_j = 0, \quad (6.221)$$

onde (k_j^+, k_j^-) são inteiros.

Definimos:

$$\bar{\phi}_1 = \varphi_2, \quad (6.222)$$

$$\bar{\phi}_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j, \quad j=(2, \dots, r-1) \quad (6.223)$$

e

$$\bar{\phi}_r = -\varphi_r. \quad (6.224)$$

Definimos, ainda,

$$\bar{\phi}_0 = \bar{\phi}_r \quad (6.225)$$

e

$$\bar{\phi}_{r+1} = \bar{\phi}_1. \quad (6.226)$$

Verifica-se, por (6.202), (6.204) e (6.208)-(6.210), que:

a) para $\cos \bar{a} > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_j - \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_j = -2i\bar{a} + \text{sinal}(\bar{a})i\pi - \frac{2\pi i}{r}(n_1^+ - n_1^-) + \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\phi}_j - \lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{\phi}_j. \quad (6.227)$$

b) para $\cos \bar{a} < 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_j - \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_j = 2i\bar{a} - \text{sinal}(\bar{a})i\pi - \frac{2\pi i}{r}(n_1^+ - n_1^-) + \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\phi}_j - \lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{\phi}_j. \quad (6.228)$$

c) para $\cos \bar{a} = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_j - \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_j = \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\phi}_j - \lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{\phi}_j = 0. \quad (6.229)$$

Comparando (6.219)-(6.221) com (6.227)-(6.229), vemos que:

a) para $\cos \bar{a} \leq 0$:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\phi}_j - \lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{\phi}_j}{\frac{2\pi i}{r}} = (n_1^+ - n_1^-) + r(k_j^+ - k_j^-). \quad (6.230)$$

b) para $\cos \bar{a} = 0$:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\phi}_j - \lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{\phi}_j}{\frac{2\pi i}{r}} = 0. \quad (6.231)$$

Portanto, para $(j=1, \dots, r)$:

$$Q_{TOP}^{(j)} = \left[\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\phi}_j - \lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{\phi}_j}{\frac{2\pi i}{r}} \right]_{\text{módulo } r} = (n_1^+ - n_1^-)_{\text{módulo } r}. \quad (6.232)$$

Logicamente, para $\cos \bar{a} = 0$, $n_1^+ - n_1^- = 0$.

Note que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tilde{\psi} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tilde{\chi} = 0. \quad (6.233)$$

Consequentemente, os campos $(\tilde{\psi}, \tilde{\chi})$ não possuem carga topológica.

Calculemos a energia e o momento. Para tanto, verificamos que esta solução obedece às seguintes equações diferenciais de primeira ordem (Backlund), desenvolvidas sistematicamente em [29]:

$$\frac{r}{r+1} \partial_\xi \varphi_1 = \frac{2\partial_\xi \tilde{F}}{(1 + e^{-2i\bar{a}})} \tilde{\psi} \tilde{\chi} \exp\left(\frac{-\varphi_1}{r+1}\right), \quad (6.234)$$

$$\partial \tilde{\psi} = \mu e^{-i\bar{a}-\bar{b}} \tilde{\psi} e^{\varphi_r + \frac{\varphi_1}{r+1}} \left[1 - e^{2i\bar{a}} \left(\frac{r-1}{2r} \right) \tilde{\psi} \tilde{\chi} e^{-\varphi_r - \frac{2\varphi_1}{r+1}} \right], \quad (6.235)$$

$$\bar{\partial} \tilde{\psi} = -\mu e^{i\bar{a}+\bar{b}} \tilde{\psi} e^{\varphi_2 - \frac{\varphi_1}{r+1}} \Delta, \quad (6.236)$$

$$\partial \tilde{\chi} = \mu e^{i\bar{a}-\bar{b}} \tilde{\chi} e^{\varphi_2 - \frac{\varphi_1}{r+1}} \Delta, \quad (6.237)$$

$$\bar{\partial} \tilde{\chi} = -\mu e^{-i\bar{a}+\bar{b}} \tilde{\chi} e^{\varphi_r + \frac{\varphi_1}{r+1}} \left[1 - e^{2i\bar{a}} \left(\frac{r-1}{2r} \right) \tilde{\psi} \tilde{\chi} e^{-\varphi_r - \frac{2\varphi_1}{r+1}} \right], \quad (6.238)$$

$$\partial \varphi_j = -\mu e^{-\bar{b}} \left\{ e^{-i\bar{a}} \left(e^{\varphi_{j-1} - \varphi_j + \frac{\varphi_1}{r+1}} \right) - e^{-i\bar{a}} \left(e^{\varphi_r + \frac{\varphi_1}{r+1}} \right) + e^{i\bar{a}} \left(\frac{r-j+1}{r} \right) \tilde{\psi} \tilde{\chi} e^{-\frac{\varphi_1}{r+1}} \right\} \quad (6.239)$$

$$j = (2, \dots, r),$$

$$\bar{\partial} \varphi_j = -\mu e^{\bar{b}} \left\{ e^{i\bar{a}} \left(e^{\varphi_2 - \frac{\varphi_1}{r+1}} \right) - e^{i\bar{a}} \left(e^{\varphi_{j+1} - \varphi_j - \frac{\varphi_1}{r+1}} \right) + e^{i\bar{a}} \left(\frac{j-1}{r} \right) \tilde{\psi} \tilde{\chi} e^{-\frac{\varphi_1}{r+1}} \right\}, \quad (6.240)$$

$j = (2, \dots, r)$, onde em (6.234) representamos por ξ qualquer uma das variáveis $(t, x, z, \bar{z})$.

Definimos:

$$\bar{\psi} = \exp \left(\frac{i\bar{a}}{2} \right) \exp \left(-\frac{\varphi_1}{2(r+1)} \right) \tilde{\psi} \quad (6.241)$$

$$\bar{\chi} = \exp \left(\frac{i\bar{a}}{2} \right) \exp \left(-\frac{\varphi_1}{2(r+1)} \right) \tilde{\chi}. \quad (6.242)$$

Reescrevemos as equações (6.234)-(6.240) nas novas variáveis:

$$\partial \bar{\psi} = \mu e^{-\bar{b}} \bar{\psi} e^{-\phi_r} \left[1 - \frac{1}{2} \bar{\psi} \bar{\chi} e^{\phi_r} \right], \quad (6.243)$$

$$\bar{\partial} \bar{\psi} = -\mu e^{\bar{b}} \bar{\psi} e^{\phi_1} \Delta_0, \quad (6.244)$$

$$\partial \bar{\chi} = \mu e^{-\bar{b}} \bar{\chi} e^{\phi_1} \Delta_0, \quad (6.245)$$

$$\bar{\partial} \bar{\chi} = -\mu e^{\bar{b}} \bar{\chi} e^{-\phi_r} \left[1 - \frac{1}{2} \bar{\psi} \bar{\chi} e^{\phi_r} \right], \quad (6.246)$$

$$\partial\phi_j = \mu e^{-\bar{b}} [-e^{-\phi_j} + e^{-\phi_{j-1}} - \bar{\psi}\bar{\chi}\delta_{j,1}], \quad j=(1,\dots,r) \quad (6.247)$$

e

$$\bar{\partial}\phi_j = \mu e^{\bar{b}} [e^{\phi_{j+1}} - e^{\phi_j} + \bar{\psi}\bar{\chi}\delta_{j,r}], \quad j=(1,\dots,r) \quad (6.248)$$

onde

$$\Delta_0 = 1 + \frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\chi}e^{-\phi_1}. \quad (6.249)$$

Salientamos que Δ_0 não é igual à variável Δ .

Esta solução obedece aos seguintes vínculos:

$$e^{\phi_j} - e^{-\phi_{j-1}} = 2i \sin \bar{a}, \quad j=(1,\dots,r) \quad (6.250)$$

e

$$\bar{\psi}\bar{\chi} = e^{-\phi_r} - e^{\phi_1} + 2i \sin \bar{a}. \quad (6.251)$$

A existência dos mesmos surge da compatibilidade das equações de primeira ordem com as de segunda ordem.

Desejamos expressar a energia e o momento nas novas variáveis. Para tanto, observamos que, por (6.208)-(6.210),

$$\sum_{i,j=2}^r K_{i,j} \partial\varphi_i \partial\varphi_j = \sum_{k=1}^r (\partial\phi_k)^2 - \frac{r}{(r+1)^2} (\partial\varphi_1)^2 \quad (6.252)$$

e

$$\sum_{i,j=2}^r K_{i,j} \bar{\partial}\varphi_i \bar{\partial}\varphi_j = \sum_{k=1}^r (\bar{\partial}\phi_k)^2 - \frac{r}{(r+1)^2} (\bar{\partial}\varphi_1)^2. \quad (6.253)$$

As equações de primeira ordem (6.234)-(6.240) e (6.243)-(6.248) implicam que:

$$\frac{r}{2(r+1)^2} (\partial\varphi_1)^2 - \frac{e^{-\varphi_2}}{\Delta} \partial\tilde{\psi}\partial\tilde{\chi} = -\frac{e^{-\phi_1}}{\Delta_0} \partial\bar{\psi}\partial\bar{\chi} \quad (6.254)$$

e

$$\frac{r}{2(r+1)^2} (\bar{\partial}\varphi_1)^2 - \frac{e^{-\varphi_2}}{\Delta} \bar{\partial}\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi} = -\frac{e^{-\phi_1}}{\Delta_0} \bar{\partial}\bar{\psi}\bar{\partial}\bar{\chi}. \quad (6.255)$$

Por (6.252)-(6.255), (6.208)-6.210) e (6.96)-(6.97), obtemos:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ -\frac{k}{8\pi} \sum_{k=1}^r [(\partial\phi_k)^2 + (\bar{\partial}\phi_k)^2] - \frac{k}{4\pi} \frac{e^{-\phi_1}}{\Delta_0} (\partial\bar{\psi}\partial\bar{\chi} + \bar{\partial}\bar{\psi}\bar{\partial}\bar{\chi}) + \right.$$

$$-\frac{k\mu^2}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^r e^{\phi_{k+1}-\phi_k} + \bar{\psi}\bar{\chi}e^{-\phi_r} - r \right) \} \quad (6.256)$$

e

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{k}{8\pi} \sum_{k=1}^r [(\partial\phi_k)^2 - (\bar{\partial}\phi_k)^2] + \frac{k}{4\pi} \frac{e^{-\phi_1}}{\Delta_0} (\partial\bar{\psi}\partial\bar{\chi} - \bar{\partial}\bar{\psi}\bar{\partial}\bar{\chi}) \right\}.$$

Utilizando (6.243)-(6.248), obtemos:

$$\partial\bar{\psi}\partial\bar{\chi} = \mu^2 e^{-2\bar{b}} \bar{\psi}\bar{\chi} e^{\phi_1-\phi_r} \Delta_0 \left[1 - \frac{e^{\phi_r}}{2} \bar{\psi}\bar{\chi} \right], \quad (6.257)$$

$$\bar{\partial}\bar{\psi}\bar{\partial}\bar{\chi} = \mu^2 e^{2\bar{b}} \bar{\psi}\bar{\chi} e^{\phi_1-\phi_r} \Delta_0 \left[1 - \frac{e^{\phi_r}}{2} \bar{\psi}\bar{\chi} \right], \quad (6.258)$$

$$\sum_{j=1}^r (\partial\phi_j)^2 = \mu^2 e^{-2\bar{b}} \left[\sum_{j=1}^r (e^{-\phi_j} - e^{-\phi_{j+1}})^2 + \bar{\psi}^2 \bar{\chi}^2 + 2\bar{\psi}\bar{\chi} (e^{-\phi_1} - e^{-\phi_r}) \right] \quad (6.259)$$

e

$$\sum_{j=1}^r (\bar{\partial}\phi_j)^2 = \mu^2 e^{2\bar{b}} \left[\sum_{j=1}^r (e^{\phi_{j+1}} - e^{\phi_j})^2 + \bar{\psi}^2 \bar{\chi}^2 + 2\bar{\psi}\bar{\chi} (e^{\phi_1} - e^{\phi_r}) \right]. \quad (6.260)$$

Definimos:

$$F^- = \mu e^{-\bar{b}} \sum_{k=1}^r e^{-\phi_k} \quad (6.261)$$

e

$$F^+ = -\mu e^{\bar{b}} \left(\sum_{k=1}^r e^{\phi_k} + \bar{\psi}\bar{\chi} \right). \quad (6.262)$$

Utilizando (6.243)-(6.248), verificamos que o potencial é dado por:

$$V = \frac{k}{4\pi} (\bar{\partial}F^- + \partial F^+) \quad (6.263)$$

A densidade de energia cinética é dada por:

$$-\frac{k}{4\pi} (\partial F^- + \bar{\partial} F^+). \quad (6.264)$$

A densidade de momento é dada por:

$$\frac{k}{4\pi} (\partial F^- - \bar{\partial} F^+). \quad (6.265)$$

Além disso, verifica-se que:

$$\bar{\partial} F^- = \partial F^+. \quad (6.266)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E &= -\frac{k}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x (F^- - F^+) \\ &= -\frac{k\mu}{4\pi} \left[e^{-\bar{b}} \sum_{k=1}^r e^{-\phi_k} + e^{\bar{b}} \sum_{k=1}^r e^{\phi_k} + e^{\bar{b}} \bar{\psi} \bar{\chi} \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty} \end{aligned} \quad (6.267)$$

e

$$\begin{aligned} P &= \frac{k}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x (F^- + F^+) \\ &= \frac{k\mu}{4\pi} \left[e^{-\bar{b}} \sum_{k=1}^r e^{-\phi_k} - e^{\bar{b}} \sum_{k=1}^r e^{\phi_k} - e^{\bar{b}} \bar{\psi} \bar{\chi} \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty}. \end{aligned} \quad (6.268)$$

Note que o último termo em $(\bar{\psi} \bar{\chi})$ na energia e no momento não contribui, pois, por (6.196)-(6.197), $\bar{\psi}$ e $\bar{\chi}$ se anulam em $\pm\infty$.

Para avaliar estas expressões, lembramos que os valores dos campos em $\pm\infty$ devem estar associados a um mínimo do potencial. Consequentemente, por (6.256),

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sum_{k=1}^r e^{\phi_{k+1} - \phi_k} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sum_{k=1}^r e^{\bar{\phi}_{k+1} - \bar{\phi}_k} = r. \quad (6.269)$$

Vemos que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\bar{\phi}_k} = \exp \left(\frac{2\pi i n^\pm}{r} \right), \quad k = (1, \dots, r), \quad (6.270)$$

onde $n^\pm$ são inteiros, soluciona (6.269). Consideremos o caso $\cos \bar{a} > 0$, com $\bar{a} > 0$. Neste caso, por (6.201), (6.203), (6.208)-(6.210), (6.222)-(6.224) e (6.270),

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\phi_k} = -e^{-i\bar{a}} \exp \left(\frac{2\pi i n^+}{r} \right) \exp \left(-\frac{2\pi i n_1^+}{r} \right) \quad (6.271)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\phi_k} = e^{i\bar{a}} \exp \left(\frac{2\pi i n^-}{r} \right) \exp \left(-\frac{2\pi i n_1^-}{r} \right), \quad (6.272)$$

para $k=(1,...,r)$. Substituindo estes valores na energia e no momento, obtemos:

$$E = \frac{k\mu r}{\pi} \cos \left[-\bar{a} + \frac{\pi}{r} (n^+ - n^-) - \frac{\pi}{r} (n_1^+ - n_1^-) \right] \\ \cdot \cos \left[-i\bar{b} + \frac{\pi}{r} (n^+ + n^-) - \frac{\pi}{r} (n_1^+ + n_1^-) \right] \quad (6.273)$$

e

$$P = \frac{k\mu r i}{\pi} \cos \left[-\bar{a} + \frac{\pi}{r} (n^+ - n^-) - \frac{\pi}{r} (n_1^+ - n_1^-) \right] \\ \cdot \sin \left[-i\bar{b} + \frac{\pi}{r} (n^+ + n^-) - \frac{\pi}{r} (n_1^+ + n_1^-) \right]. \quad (6.274)$$

Ou seja,

$$E = \frac{k\mu r}{\pi} \sin \left[\frac{\pi}{r} (n^+ - n^-) - \frac{2\pi}{rk} Q_{elétrica} \right] \cos \left[-i\bar{b} + \frac{\pi}{r} (n^+ + n^-) - \frac{\pi}{r} (n_1^+ + n_1^-) \right] \quad (6.275)$$

e

$$P = \frac{k\mu r i}{\pi} \sin \left[\frac{\pi}{r} (n^+ - n^-) - \frac{2\pi}{rk} Q_{elétrica} \right] \sin \left[-i\bar{b} + \frac{\pi}{r} (n^+ + n^-) - \frac{\pi}{r} (n_1^+ + n_1^-) \right]. \quad (6.276)$$

A constante $\bar{a}$ e os inteiros $(n^\pm, n_1^\pm)$ não são independentes. Isto pode ser visto do vínculo (6.250). O mesmo é válido para todo (x,t) . Em particular, em $x \rightarrow \pm\infty$. No limite $x \rightarrow \infty$:

$$\sin \left[\bar{a} - \frac{2\pi}{r} (n^+ - n_1^+) \right] = \sin \bar{a}. \quad (6.277)$$

No limite $x \rightarrow -\infty$:

$$\sin \left[\bar{a} + \frac{2\pi}{r} (n^- - n_1^-) \right] = \sin \bar{a}. \quad (6.278)$$

Da trigonometria, sabemos que se

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2, \quad (6.279)$$

então,

$$\theta_1 = \theta_2 + 2\pi \tilde{k}_1 \quad (6.280)$$

ou,

$$\theta_1 = \text{sinal}(\theta_2)\pi - |\theta_2| + 2\pi\tilde{k}_2, \quad (6.281)$$

onde $\tilde{k}_1$ e $\tilde{k}_2$ são inteiros. Escolhemos a seguinte solução:

$$n_1^+ = n^+ \quad (6.282)$$

e

$$n_1^- = n^-. \quad (6.283)$$

Portanto,

$$E = \frac{k\mu r}{\pi} \text{sinal}(\bar{a}) \cosh \bar{b} \sin \left(\frac{\pi}{r} Q_{TOP} - \frac{2\pi}{rk} Q_{elétrica} \right) \quad (6.284)$$

e

$$P = \frac{k\mu r}{\pi} \text{sinal}(\bar{a}) \sinh \bar{b} \sin \left(\frac{\pi}{r} Q_{TOP} - \frac{2\pi}{rk} Q_{elétrica} \right). \quad (6.285)$$

Estas expressões da energia e do momento são válidas para $\cos \bar{a} \leq 0$ e para todo $\bar{a}$. Para $\cos \bar{a} = 0$, temos:

$$E = P = 0. \quad (6.286)$$

Observe que tanto a energia quanto o momento são reais. Note que, se $\cos \bar{a} > 0$,

$$\text{sinal}(\bar{a}) \sin \left(\frac{\pi}{r} Q_{TOP} - \frac{2\pi}{rk} Q_{elétrica} \right) = \cos \bar{a} > 0. \quad (6.287)$$

Para $\cos \bar{a} < 0$,

$$\text{sinal}(\bar{a}) \sin \left(\frac{\pi}{r} Q_{TOP} - \frac{2\pi}{rk} Q_{elétrica} \right) = -\cos \bar{a} > 0. \quad (6.288)$$

Portanto, a energia é positiva.

A energia e o momento do sólito são da forma (4.219)-(4.220), com

$$M = \sqrt{E^2 - P^2} = \frac{k\mu r}{\pi} \text{sinal}(\bar{a}) \sin \left(\frac{\pi}{r} Q_{TOP} - \frac{2\pi}{rk} Q_{elétrica} \right) \quad (6.289)$$

e

$$v = \tanh \bar{b}. \quad (6.290)$$

Observe que esta velocidade é definida por F -(6.187)-. A função G (6.188) definiria uma velocidade dada por $\coth \bar{b}$, mas, conforme a discussão que fizemos no modelo de Lund-Regge -(5.222) e (5.223)-, a velocidade relevante para a energia e o momento é dada por (6.290).

Por último, desejamos mostrar que a equação (6.270) é realmente satisfeita. Temos que para $(j=1,\dots,r)$:

$$e^{\bar{\phi}_j} = \frac{[(\Gamma_1)^{j-r} e^{\bar{F}} + e^{-\bar{F}}] [(\Gamma_1)^{-r} e^{\bar{F}} + e^{-\bar{F}}]^{\frac{1}{r}}}{[(\Gamma_1)^{j-r-1} e^{\bar{F}} + e^{-\bar{F}}] [e^{\bar{F}} + e^{-\bar{F}}]^{\frac{1}{r}}}. \quad (6.291)$$

Observe que a expressão envolve raízes de números complexos. Como se sabe, a raiz de um número complexo é definida a menos de uma fase. Considere (6.291) quando $\cos \bar{\alpha} > 0$. Neste caso,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\bar{\phi}_j} = \frac{(\Gamma_1)^{j-r} e^{\bar{F}} [(\Gamma_1)^{-r} e^{\bar{F}}]^{\frac{1}{r}}}{(\Gamma_1)^{j-r-1} e^{\bar{F}} [e^{\bar{F}}]^{\frac{1}{r}}} = \frac{(\Gamma_1) [(\Gamma_1)^{-r} e^{\bar{F}} e^{2m_1^+ \pi i}]^{\frac{1}{r}}}{[e^{\bar{F}} e^{2m_2^+ \pi i}]^{\frac{1}{r}}} = e^{2\pi i(m_1^+ - m_2^+)/r}, \quad (6.292)$$

onde m_1^+ e m_2^+ são inteiros arbitrários. No outro extremo,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\bar{\phi}_j} = e^{2\pi i(m_1^- - m_2^-)/r}, \quad (6.293)$$

onde m_1^- e m_2^- são inteiros arbitrários. Portanto, neste caso,

$$n^+ = n_1^+ = m_1^+ - m_2^+ \quad (6.294)$$

e

$$n^- = n_1^- = m_1^- - m_2^-. \quad (6.295)$$

Ou seja, vemos que a carga topológica da solução pode assumir todos os valores possíveis de $-(r-1)$ até $(r-1)$, incluindo o valor zero. A análise para $\cos \bar{\alpha} < 0$ é completamente similar. Para $\cos \bar{\alpha} = 0$, a carga topológica é nula.

SOLUÇÃO DE 3 VÉRTICES

Nesta seção será obtida outra solução para o modelo $A_r^{(1)}$ não abeliano singular. Escolhemos:

$$g = \exp [a \hat{F}_{1,r}(\gamma_1)] \exp [c F_{d,r}(\gamma_3)] \exp [b \bar{F}_{1,r}(\gamma_2)], \quad (6.296)$$

onde $\bar{F}_{1,r}$, $\hat{F}_{1,r}$ e $F_{d,r}$ são dados por (4.166)-(4.168), $d=(1,\dots,r-1)$ e $(a,b,c,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ são constantes complexas. Conforme (4.108)-(4.111) e (4.172)-(4.177), obtemos:

$$T_0 g T_0^{-1} = \exp [a \hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) \hat{F}_{1,r}(\gamma_1)] \exp [c \rho_{d,r}(\gamma_3) F_{d,r}(\gamma_3)] \exp [b \bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) \bar{F}_{1,r}(\gamma_2)]. \quad (6.297)$$

Conforme (4.206), o quadrado do operador de vértice é igual a zero. Portanto,

$$\begin{aligned}
 T_0 g T_0^{-1} = & 1 + a \hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) \hat{F}_{1,r}(\gamma_1) + c \rho_{d,r}(\gamma_3) F_{d,r}(\gamma_3) + b \bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) \bar{F}_{1,r}(\gamma_2) + \\
 & + ab \hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) \bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) \hat{F}_{1,r}(\gamma_1) \bar{F}_{1,r}(\gamma_2) + ac \hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) \rho_{d,r}(\gamma_3) \hat{F}_{1,r}(\gamma_1) F_{d,r}(\gamma_3) + \\
 & + bc \bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) \rho_{d,r}(\gamma_3) F_{d,r}(\gamma_3) \bar{F}_{1,r}(\gamma_2) + \\
 & + abc \hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) \rho_{d,r}(\gamma_3) \bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) \hat{F}_{1,r}(\gamma_1) F_{d,r}(\gamma_3) \bar{F}_{1,r}(\gamma_2), \quad (6.298)
 \end{aligned}$$

onde

$$\hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) = \exp \left[-\frac{\mu z}{\gamma_1} + \mu \bar{z} \gamma_1 \right], \quad (6.299)$$

$$\bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) = \exp \left[\frac{\mu z}{\gamma_2} - \mu \bar{z} \gamma_2 \right] \quad (6.300)$$

e

$$\rho_{d,r}(\gamma_3) = \exp \left[-\frac{\mu z (w^{-d} - 1)}{\gamma_3} + \mu \bar{z} \gamma_3 (w^d - 1) \right]. \quad (6.301)$$

Devemos substituir (6.298) em (6.81)-(6.83) e calcular os elementos de matriz. Todos os cálculos desta forma são apresentados no apêndice "Cálculo dos elementos de matriz". Aqui, apresentamos os resultados, utilizando (6.84)-(6.88):

$$\begin{aligned}
 \exp(\nu - \mu^2 z \bar{z}) = & 1 + \frac{c \rho_{d,r}(\gamma_3)}{w^d - 1} + \frac{ab \hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) \bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) (\gamma_{1,2})^r}{(1 - \gamma_{1,2}) [1 - (\gamma_{1,2})^r]} + \\
 & + \frac{abc \hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) \bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) \rho_{d,r}(\gamma_3) (\gamma_{1,2})^r (w^d - \gamma_{1,3}) (1 - \gamma_{3,2})}{[1 - (\gamma_{1,2})^r] (w^d - 1) (1 - \gamma_{1,2}) (1 - \gamma_{1,3}) (1 - w^d \gamma_{3,2})}, \quad (6.302)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \exp \left[\frac{r \varphi_1}{r+1} + \nu - \mu^2 z \bar{z} \right] = & 1 + \frac{c \rho_{d,r}(\gamma_3)}{(w^d - 1)} + \frac{ab \hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) \bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2)}{(1 - \gamma_{1,2}) [1 - (\gamma_{1,2})^r]} + \\
 & + \frac{abc \hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) \bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) \rho_{d,r}(\gamma_3) (w^d - \gamma_{1,3}) (1 - \gamma_{3,2})}{[1 - (\gamma_{1,2})^r] (w^d - 1) (1 - \gamma_{1,2}) (1 - \gamma_{1,3}) (1 - w^d \gamma_{3,2})}, \quad (6.303)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \exp \left[\frac{r+1-j}{r+1} \varphi_1 + \varphi_j + \nu - \mu^2 z \bar{z} \right] \\
& = 1 + \frac{c\rho_{d,r}(\gamma_3)w^{d(j-1)}}{(w^d-1)} + \frac{ab\widehat{\rho}_{1,r}(\gamma_1)\bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2)(\gamma_{1,2})^{j-1}}{(1-\gamma_{1,2})[1-(\gamma_{1,2})^r]} + \\
& + \frac{abc\widehat{\rho}_{1,r}(\gamma_1)\bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2)\rho_{d,r}(\gamma_3)(w^d\gamma_{1,2})^{j-1}(w^d-\gamma_{1,3})(1-\gamma_{3,2})}{[1-(\gamma_{1,2})^r](w^d-1)(1-\gamma_{1,2})(1-\gamma_{1,3})(1-w^d\gamma_{3,2})}, \quad (6.304)
\end{aligned}$$

onde $j=(2,\dots,r)$,

$$\tilde{\chi} \exp \left[\frac{r-1}{2(r+1)} \varphi_1 + \nu - \mu^2 z \bar{z} \right] = a\widehat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) \left[1 + \frac{c\rho_{d,r}(\gamma_3)(w^d-\gamma_{1,3})}{(w^d-1)(1-\gamma_{1,3})} \right] \quad (6.305)$$

e

$$\tilde{\psi} \exp \left[\frac{r-1}{2(r+1)} \varphi_1 + \nu - \mu^2 z \bar{z} \right] = b\bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) \left[1 + \frac{c\rho_{d,r}(\gamma_3)w^d(1-\gamma_{3,2})}{(w^d-1)(1-w^d\gamma_{3,2})} \right], \quad (6.306)$$

onde utilizamos a definição

$$\gamma_{i,j} = \frac{\gamma_i}{\gamma_j}. \quad (6.307)$$

Da mesma forma que na solução de 1 e 2 vértices, tomamos as seguintes escolhas:

$$\widehat{\rho}_{1,r}(\gamma_1)\bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) = \text{real} \quad (6.308)$$

e

$$\rho_{d,r}(\gamma_3) = \text{real}. \quad (6.309)$$

Conforme discutimos nas duas seções anteriores, estas condições são satisfeitas escolhendo-se os parâmetros espectrais na forma:

$$\gamma_1 = -\exp(\bar{b} - i\bar{a}), \quad (6.310)$$

$$\gamma_2 = \exp(\bar{b} + i\bar{a}) \quad (6.311)$$

e

$$\gamma_3 = i(-1)^{\bar{n}} e^S \exp\left(-\frac{i\pi d}{r}\right), \quad (6.312)$$

onde $(\bar{a}, \bar{b}, S)$ são números reais e $\bar{n}$ é um número inteiro. Com estas escolhas, vemos que

$$\hat{\rho}_{1,r}(\gamma_1) = \exp(F + iG), \quad (6.313)$$

$$\bar{\rho}_{1,r}(\gamma_2) = \exp(F - iG). \quad (6.314)$$

e

$$\rho_{d,r}(\gamma_3) = \exp H, \quad (6.315)$$

onde

$$F = 2\mu \cos \bar{a} (-t \sinh \bar{b} + x \cosh \bar{b}), \quad (6.316)$$

$$G = 2\mu \sin \bar{a} (t \cosh \bar{b} - x \sinh \bar{b}) \quad (6.317)$$

e

$$H = 4\mu(-1)^{\bar{n}} \sin\left(\frac{\pi d}{r}\right) (-t \sinh S + x \cosh S). \quad (6.318)$$

Parametrizamos as constantes (a, b, c) do mesmo modo que nas soluções de 1 e 2 vértices:

$$a = \sqrt{\frac{(1 - \gamma_{1,2}) [1 - (\gamma_{1,2})^r]}{(\gamma_{1,2})^r}} \exp(i\Theta - 2\mu Y \cos \bar{a} \cosh \bar{b}), \quad (6.319)$$

$$b = \sqrt{\frac{(1 - \gamma_{1,2}) [1 - (\gamma_{1,2})^r]}{(\gamma_{1,2})^r}} \exp(-i\Theta - 2\mu Y \cos \bar{a} \cosh \bar{b}) \quad (6.320)$$

e

$$c = (w^d - 1) \exp\left[-4\mu(-1)^{\bar{n}} \bar{Y} \sin\left(\frac{\pi d}{r}\right) \cosh S\right], \quad (6.321)$$

onde Θ , Y e $\bar{Y}$ são constantes reais.

Definimos:

$$\tilde{F}(t, x) = F(t, x - Y) \quad (6.322)$$

e

$$\overline{H}(t, x) = H(t, x - \overline{Y}). \quad (6.323)$$

Substituindo (6.310)-(6.323) em (6.302)-(6.306), obtemos:

$$\exp(\nu - \mu^2 z \bar{z}) = 1 + e^{\overline{H}} + e^{2\tilde{F}} + w^{-d} \Gamma_3 \Gamma_4 e^{\overline{H}+2\tilde{F}}, \quad (6.324)$$

$$\exp \frac{r\varphi_1}{r+1} = \frac{1 + e^{\overline{H}} + (\Gamma_1)^{-r} e^{2\tilde{F}} + w^{-d} (\Gamma_1)^{-r} \Gamma_3 \Gamma_4 e^{\overline{H}+2\tilde{F}}}{1 + e^{\overline{H}} + e^{2\tilde{F}} + w^{-d} \Gamma_3 \Gamma_4 e^{\overline{H}+2\tilde{F}}}, \quad (6.325)$$

$$e^{\varphi_j} = \frac{1}{\left[1 + e^{\overline{H}} + e^{2\tilde{F}} + w^{-d} \Gamma_3 \Gamma_4 e^{\overline{H}+2\tilde{F}}\right]^{\frac{j-1}{r}}}$$

$$\cdot \frac{1 + w^{d(j-1)} e^{\overline{H}} + (\Gamma_1)^{-r+j-1} e^{2\tilde{F}} + w^{d(j-2)} (\Gamma_1)^{-r+j-1} \Gamma_3 \Gamma_4 e^{\overline{H}+2\tilde{F}}}{\left[1 + e^{\overline{H}} + (\Gamma_1)^{-r} e^{2\tilde{F}} + w^{-d} (\Gamma_1)^{-r} \Gamma_3 \Gamma_4 e^{\overline{H}+2\tilde{F}}\right]^{\frac{r+1-j}{r}}}, \quad (6.326)$$

para $j=(2, \dots, r)$,

$$\tilde{\chi} = \frac{1}{\left[1 + e^{\overline{H}} + e^{2\tilde{F}} + w^{-d} \Gamma_3 \Gamma_4 e^{\overline{H}+2\tilde{F}}\right]^{\frac{r+1}{2r}}}$$

$$\cdot \frac{\Gamma_2 e^{i(\Theta+G)} e^{\tilde{F}} (1 + \Gamma_3 e^{\overline{H}})}{\left[1 + e^{\overline{H}} + (\Gamma_1)^{-r} e^{2\tilde{F}} + w^{-d} (\Gamma_1)^{-r} \Gamma_3 \Gamma_4 e^{\overline{H}+2\tilde{F}}\right]^{\frac{r-1}{2r}}}, \quad (6.327)$$

e

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\left[1 + e^{\overline{H}} + e^{2\tilde{F}} + w^{-d} \Gamma_3 \Gamma_4 e^{\overline{H}+2\tilde{F}}\right]^{\frac{r+1}{2r}}}$$

$$\cdot \frac{\Gamma_2 e^{-i(\Theta+G)} e^{\tilde{F}} (1 + \Gamma_4 e^{\overline{H}})}{\left[1 + e^{\overline{H}} + (\Gamma_1)^{-r} e^{2\tilde{F}} + w^{-d} (\Gamma_1)^{-r} \Gamma_3 \Gamma_4 e^{\overline{H}+2\tilde{F}}\right]^{\frac{r-1}{2r}}}, \quad (6.328)$$

onde

$$\Gamma_1 = -\exp(-2i\bar{a}), \quad (6.329)$$

$$\Gamma_2 = \sqrt{(1 - \Gamma_1) [(\Gamma_1)^{-r} - 1]}, \quad (6.330)$$

$$\Gamma_3 = w^d \frac{[1 - i(-1)^{\bar{n}} e^{\bar{b}-S} e^{-i\bar{a}} w^{-d/2}]}{[1 - i(-1)^{\bar{n}} e^{\bar{b}-S} e^{-i\bar{a}} w^{d/2}]} \quad (6.331)$$

e

$$\Gamma_4 = w^d \frac{[1 - i(-1)^{\bar{n}} e^{S-\bar{b}} e^{-i\bar{a}} w^{-d/2}]}{[1 - i(-1)^{\bar{n}} e^{S-\bar{b}} e^{-i\bar{a}} w^{d/2}]} \quad (6.332)$$

Observe que nesta solução estão contidos alguns casos especiais:

- a) $\cos \bar{a} > 0$, $Y \rightarrow \infty$ e $\bar{Y}$ finito: solução de 1 vértice;
- b) $\cos \bar{a} < 0$, $Y \rightarrow -\infty$ e $\bar{Y}$ finito: solução de 1 vértice;
- c) $\bar{n}$ par, $\bar{Y} \rightarrow \infty$ e Y finito: solução de 2 vértices;
- d) $\bar{n}$ ímpar, $\bar{Y} \rightarrow -\infty$ e Y finito: solução de 2 vértices;
- e) soluções de vácuo; por exemplo, com $\cos \bar{a} > 0$, $Y \rightarrow \infty$, $\bar{n}$ par e $\bar{Y} \rightarrow \infty$,

etc.

As características da solução dependem do comportamento assintótico de $\bar{H}$ e $\tilde{F}$, já analisados em (6.129) e (6.200). Devemos considerar seis casos distintos:

- (I): $\cos \bar{a} > 0$ e $\bar{n}$ par;
- (II): $\cos \bar{a} > 0$ e $\bar{n}$ ímpar;
- (III): $\cos \bar{a} < 0$ e $\bar{n}$ par;
- (IV): $\cos \bar{a} < 0$ e $\bar{n}$ ímpar;
- (V): $\cos \bar{a} = 0$ e $\bar{n}$ par;
- (VI): $\cos \bar{a} = 0$ e $\bar{n}$ ímpar.

Para avaliar a carga elétrica, alguns dos limites que devemos analisar são da seguinte forma:

$$\lim_{A, B \rightarrow \infty} \frac{1 + c_1 e^A + c_2 e^B + c_3 e^{A+B}}{1 + c_4 e^A + c_5 e^B + c_6 e^{A+B}} = \lim_{A, B \rightarrow \infty} \frac{e^{-A-B} + c_1 e^{-B} + c_2 e^{-A} + c_3}{e^{-A-B} + c_4 e^{-B} + c_5 e^{-A} + c_6} = \frac{c_3}{c_6} \quad (6.333)$$

e

$$\lim_{A, -B \rightarrow \infty} \frac{1 + c_1 e^A + c_2 e^B + c_3 e^{A+B}}{1 + c_4 e^A + c_5 e^B + c_6 e^{A+B}} = \lim_{A, -B \rightarrow \infty} \frac{e^{-A} + c_1 + c_2 e^{-A+B} + c_3 e^B}{e^{-A} + c_4 + c_5 e^{-A+B} + c_6 e^B} = \frac{c_1}{c_4} \quad (6.334)$$

Verifica-se que, de forma similar a (6.205)-(6.207):

$$Q_{elétrica}^{(I),(II)} = -\frac{kr}{2\pi} \left[\text{sinal}(\bar{a}) \frac{\pi}{2} - \bar{a} - (n_1^+ - n_1^-) \frac{\pi}{r} \right], \quad (6.335)$$

$$Q_{elétrica}^{(III),(IV)} = -\frac{kr}{2\pi} \left[-\text{sinal}(\bar{a}) \frac{\pi}{2} + \bar{a} - (n_1^+ - n_1^-) \frac{\pi}{r} \right] \quad (6.336)$$

e

$$Q_{elétrica}^{(V),(VI)} = 0. \quad (6.337)$$

Ou seja, o resultado equivale ao da solução de 2 vértices, pois obtivemos três expressões que estão relacionadas a $\cos \bar{a} > 0$, $\cos \bar{a} < 0$ e $\cos \bar{a} = 0$.

Utilizando as mesmas definições de (6.222)-(6.224), temos que, para $j=(1,\dots,r)$:

$$\exp \bar{\phi}_j = \left\{ \frac{\left[1 + w^{dj} e^{\bar{H}} + (\Gamma_1)^{-r+j} e^{2\tilde{F}} + w^{d(j-1)} (\Gamma_1)^{-r+j} \Gamma_3 \Gamma_4 e^{\bar{H}+2\tilde{F}} \right]}{\left[1 + w^{d(j-1)} e^{\bar{H}} + (\Gamma_1)^{-r+j-1} e^{2\tilde{F}} + w^{d(j-2)} (\Gamma_1)^{-r+j-1} \Gamma_3 \Gamma_4 e^{\bar{H}+2\tilde{F}} \right]} \cdot \frac{\left[1 + e^{\bar{H}} + (\Gamma_1)^{-r} e^{2\tilde{F}} + w^{-d} (\Gamma_1)^{-r} \Gamma_3 \Gamma_4 e^{\bar{H}+2\tilde{F}} \right]^{\frac{1}{r}}}{\left[1 + e^{\bar{H}} + e^{2\tilde{F}} + w^{-d} \Gamma_3 \Gamma_4 e^{\bar{H}+2\tilde{F}} \right]^{\frac{1}{r}}} \right\}. \quad (6.338)$$

Para avaliar a carga topológica, devemos analisar os limites desta função quando $x \rightarrow \pm\infty$. Por exemplo, quando $\cos \bar{a} > 0$ e $\bar{n}$ for par,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \bar{\phi}_j &\rightarrow \frac{w^{d(j-1)} (\Gamma_1)^{-r+j} \Gamma_3 \Gamma_4 e^{\bar{H}+2\tilde{F}}}{w^{d(j-2)} (\Gamma_1)^{-r+j-1} \Gamma_3 \Gamma_4 e^{\bar{H}+2\tilde{F}}} \frac{\left[w^{-d} (\Gamma_1)^{-r} \Gamma_3 \Gamma_4 e^{\bar{H}+2\tilde{F}} \right]^{\frac{1}{r}}}{\left[w^{-d} \Gamma_3 \Gamma_4 e^{\bar{H}+2\tilde{F}} \right]^{\frac{1}{r}}} \\ &= w^d \Gamma_1 \frac{\left[(\Gamma_1)^{-r} e^{2\pi i m_1^+} \right]^{\frac{1}{r}}}{\left[e^{2\pi i m_2^+} \right]^{\frac{1}{r}}} = w^d \exp \left[\frac{2\pi i}{r} (m_1^+ - m_2^+) \right], \end{aligned} \quad (6.339)$$

onde m_1^+ e m_2^+ são inteiros. Definimos:

$$n^+ = m_1^+ - m_2^+ \quad (6.340)$$

Similarmente, do extremo $x \rightarrow -\infty$ surgem dois inteiros m_1^- e m_2^- e define-se

$$n^- = m_1^- - m_2^-. \quad (6.341)$$

Definindo a carga topológica do mesmo modo que em (6.232), obtemos:

$$Q_{TOP}^{(I),(III)} = d + (n^+ - n^-)_{\text{módulo } r}, \quad (6.342)$$

e

$$Q_{TOP}^{(II),(IV)} = -d + (n^+ - n^-)_{\text{módulo } r}. \quad (6.343)$$

Os casos (V) e (VI) são especiais. Quando $\cos \bar{a} = 0$, temos:

$$\Gamma_1 = 1, \quad (6.344)$$

$$\Gamma_2 = 0. \quad (6.345)$$

Neste caso, os dois fatores em (6.338) associados a raízes de ordem $1/r$ são iguais e, portanto, não é razoável esperar uma contribuição para a carga topológica originária de raízes de números complexos. Ou seja,

$$Q_{TOP}^{(V)} = -Q_{TOP}^{(VI)} = d. \quad (6.346)$$

Além disso, quando adicionalmente a $\cos \bar{a} = 0$ toma-se

$$S = \bar{b}, \quad (6.347)$$

resulta que

$$w^{-d} \Gamma_3 \Gamma_4 = 1. \quad (6.348)$$

Portanto, além do que é válido para $\cos \bar{a} = 0$, em geral,

$$\tilde{\psi} = \tilde{\chi} = \varphi_1 = 0, \quad (6.349)$$

obtêm-se

$$\bar{\phi}_j = \bar{\phi}_j^{\text{abeliano}} \quad (6.350)$$

e

$$\exp(\nu - \mu^2 z \bar{z}) = 2 [\exp(\nu - \mu^2 z \bar{z})]^{\text{abeliano}}, \quad (6.351)$$

onde por abeliano entende-se a solução de 1 vértice.

Note que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tilde{\psi} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tilde{\chi} = 0. \quad (6.352)$$

Consequentemente, os campos $(\tilde{\psi}, \tilde{\chi})$ não possuem carga topológica.

A condição (6.347) possui um importante significado físico. Observe que as funções (F, G, H) - ou $(\tilde{F}, G, \bar{H})$ - , dadas por (6.316)-(6.318), definem três velocidades diferentes:

$$|v_{\tilde{F}}| = \tanh \bar{b}, \quad (6.353)$$

$$|v_G| = \coth \bar{b} \quad (6.354)$$

e

$$|v_{\bar{H}}| = \tanh S. \quad (6.355)$$

Conforme discutido na seção anterior, a velocidade v_G não é relevante para a densidade de energia ou momento. Entretanto, se quisermos definir uma massa para o sólito utilizando a equação (4.219), devemos impor que

$$|v_{\tilde{F}}| = |v_{\bar{H}}|. \quad (6.356)$$

A condição (6.347) equivale a impor esta última igualdade. O cálculo da energia e momento é independente desta última escolha. Voltaremos a este ponto somente quando estivermos discutindo a massa do sólito.

A demonstração de que a energia e o momento são obtidos a partir de derivadas totais é uma tarefa não trivial, em geral. Da mesma forma, o mesmo é válido para o cálculo direto de integrais de funções como (6.326) . Aqui, apresentaremos um argumento já conhecido na literatura [24] que nos permitirá realizar o cálculo de maneira simples.

Em uma teoria conforme, o traço do tensor energia-momento $\Theta^{\mu\nu}$ é nulo:

$$\Theta^\alpha_\alpha = 0. \quad (6.357)$$

Mas, o tensor energia-momento dado por (6.93) não satisfaz esta condição:

$$T^\alpha_\alpha = 2V, \quad (6.358)$$

onde V é o potencial que aparece na densidade de lagrangeana em (6.52). Pode-se verificar, utilizando as equações de movimento, que:

$$T^\alpha_\alpha = \partial_\rho \partial^\rho f = 4\partial\bar{\partial}f, \quad (6.359)$$

onde

$$f = -\frac{k}{4\pi} \left\{ \sum_{i=2}^r \varphi_i + \frac{r(r-1)}{2(r+1)} \varphi_1 + r\nu \right\}. \quad (6.360)$$

Portanto, redefinimos:

$$\Theta_{cat}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + (\partial^\mu \partial^\nu - g^{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho) f, \quad (6.361)$$

onde por "cat" entende-se Toda afim conforme. Observe que

$$\partial_\mu \Theta_{cat}^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (6.362)$$

e

$$(\Theta_{cat})^\alpha{}_\alpha = 0. \quad (6.363)$$

Um sóliton, embora seja uma configuração de campos, deve ser interpretado como uma partícula (de uma teoria relativística, neste caso). Suponha que possa, ainda, ser interpretado como uma partícula livre. Então, sua energia e seu momento são da forma (4.219)-(4.220). Consequentemente, se a sua velocidade for diferente de c e sua massa de repouso for igual a zero, então, concluímos que a energia e o momento associados são iguais a zero.

Em uma teoria conforme não pode haver escala de massa, pois a mesma quebraria a invariância conforme. Consequentemente, no modelo de Toda afim conforme, ou seja, com $\eta \neq \text{constante}$, a massa de repouso do sóliton deve ser nula. Mas, como, em geral, a velocidade do sóliton é diferente de c , concluímos que a energia e o momento associados devem ser nulos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (\Theta_{cat})^{00} = \int_{-\infty}^{\infty} dx (\Theta_{cat})^{01} = 0. \quad (6.364)$$

Consequentemente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx T^{00} = - \int_{-\infty}^{\infty} dx (\partial_x \partial_x f) = \frac{M}{\sqrt{1-v^2}} \quad (6.365)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx T^{01} = \int_{-\infty}^{\infty} dx (\partial_t \partial_x f) = \frac{Mv}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (6.366)$$

Tomaremos estas expressões para nossa solução de 3 vértices. Portanto,

$$\frac{M}{\sqrt{1-v^2}} = - (\partial_x f) \Big|_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty} \quad (6.367)$$

e

$$\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2}} = (\partial_t f) \Big|_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty}. \quad (6.368)$$

Definimos

$$M_0 = \exp(\nu - \mu^2 z \bar{z}) \quad (6.369)$$

e

$$M_j = \exp \left(\varphi_j + \frac{r+1-j}{r+1} \varphi_1 + \nu - \mu^2 z \bar{z} \right), \quad (6.370)$$

para $j=(2,\dots,r)$. Note que

$$\exp \left(-\frac{4\pi}{k} f \right) = M_0 M_2 M_3 \dots M_r e^{r\mu^2 z \bar{z}}. \quad (6.371)$$

Ou seja,

$$\frac{M}{\sqrt{1-v^2}} = - \left(-\frac{k}{4\pi} \right) \left[\frac{\partial_x M_0}{M_0} + \frac{\partial_x M_2}{M_2} + \dots + \frac{\partial_x M_r}{M_r} + \frac{\partial_x e^{r\mu^2 z \bar{z}}}{e^{r\mu^2 z \bar{z}}} \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty} \quad (6.372)$$

e

$$\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2}} = \left(-\frac{k}{4\pi} \right) \left[\frac{\partial_t M_0}{M_0} + \frac{\partial_t M_2}{M_2} + \dots + \frac{\partial_t M_r}{M_r} + \frac{\partial_t e^{r\mu^2 z \bar{z}}}{e^{r\mu^2 z \bar{z}}} \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty}. \quad (6.373)$$

Observe que o último termo na expressão do momento não contribui, pois o seu valor é o mesmo nos dois extremos. Entretanto, na energia este último termo leva a uma divergência, o que reflete o fato de que não subtraímos a energia de ponto zero. Portanto, redefinimos:

$$\frac{M}{\sqrt{1-v^2}} = - \left(-\frac{k}{4\pi} \right) \left[\frac{\partial_x M_0}{M_0} + \frac{\partial_x M_2}{M_2} + \dots + \frac{\partial_x M_r}{M_r} \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty}. \quad (6.374)$$

Observe, agora, que por (6.302) e (6.304), estes $M_0, M_2, \dots, M_r$ são os elementos de matriz. Sua forma geral é:

$$M_k = 1 + a_1^k e^{\bar{H}} + a_2^k e^{2\bar{F}} + a_3^k e^{\bar{H}+2\bar{F}}, \quad (6.375)$$

onde os (a_1^k, a_2^k, a_3^k) são constantes. Lembramos que $\bar{H}$ e $\bar{F}$ são funções lineares de x e t . Portanto, derivadas destas funções são constantes. Introduzimos a seguinte notação para facilitar a discussão:

$$\partial_\mu \bar{H} = h_\mu \quad (6.376)$$

e

$$\partial_\mu (2\bar{F}) = f_\mu, \quad (6.377)$$

onde h_μ e f_μ são constantes. Portanto,

$$\frac{\partial_\mu M_k}{M_k} = \frac{h_\mu a_1^k e^{\bar{H}} + f_\mu a_2^k e^{2\bar{F}} + (h_\mu + f_\mu) a_3^k e^{\bar{H}+2\bar{F}}}{1 + a_1^k e^{\bar{H}} + a_2^k e^{2\bar{F}} + a_3^k e^{\bar{H}+2\bar{F}}}. \quad (6.378)$$

Por (6.373)-(6.374), devemos avaliar expressões deste tipo quando $x \rightarrow \pm\infty$. Observe que

$$\frac{\partial_\mu M_k}{M_k} \Big|_{x \rightarrow \pm\infty} \in (0, h_\mu, f_\mu, (h_\mu + f_\mu)), \quad (6.379)$$

ou seja, este número assume um destes quatro valores possíveis em $x \rightarrow \pm\infty$, dependendo dos valores assintóticos de $\bar{F}$ e $\bar{H}$. Portanto, este valor não depende de k e cada um dos termos em (6.373)-(6.374) contribui do mesmo modo:

$$\frac{M}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{kr}{4\pi} \left(\frac{\partial_x M_0}{M_0} \right)_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty} \quad (6.380)$$

e

$$\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2}} = -\frac{kr}{4\pi} \left(\frac{\partial_t M_0}{M_0} \right)_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty}. \quad (6.381)$$

Pode-se verificar que em todos os casos, de (I) a (VI), utilizando (6.316), (6.318) e M_0 dado por (6.324), a energia e o momento resultam em:

$$E = \frac{kr\mu}{\pi} \left(|\cos \bar{a}| \cosh \bar{b} + \sin \left(\frac{\pi d}{r} \right) \cosh S \right) \quad (6.382)$$

e

$$P = \frac{kr\mu}{\pi} \left(|\cos \bar{a}| \sinh \bar{b} + \sin \left(\frac{\pi d}{r} \right) \sinh S \right). \quad (6.383)$$

Observe que se quisermos definir uma massa, devemos tomar (6.347). Logo,

$$M = \frac{kr\mu}{\pi} \left[|\cos \bar{a}| + \sin \left(\frac{\pi d}{r} \right) \right]. \quad (6.384)$$

Consequentemente, a massa, a carga elétrica e a carga topológica da solução de 3 vértices são a soma das respectivas quantidades das soluções de 1 e 2 vértices. Salientamos que o mesmo método que apresentamos aqui para calcular a energia e o momento pode ser utilizado nas soluções de 1 e 2 vértices e leva exatamente aos resultados obtidos nas duas seções anteriores.

Capítulo 7

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

CONCLUSÕES

Finalizamos este trabalho ressaltando os pontos principais que nos levaram à construção dos modelos de Toda não abelianos singulares conformes afins $A_r^{(1)}$.

Os modelos em questão podem ser definidos através da sua estrutura algébrica utilizando-se a gradação Q e os geradores constantes de grau ± 1 , $\epsilon^\pm$. Dentro desta classe, podemos implementar um vínculo adicional em G_0^0 de forma a que os campos da teoria parametrizem o espaço quociente G_0/G_0^0 . Sob o ponto de vista de teoria de campos, os modelos são especificados através da redução hamiltoniana do modelo de WZNW de 2-loops e a sua ação efetiva é obtida eliminando-se os graus de liberdade associados ao espaço tangente G/G_0 e subsequentemente G_0^0 . A redução adicional que elimina o grau de liberdade correspondente a G_0^0 gera singularidades e a ação efetiva do modelo reduzido é obtida através da ação do modelo WZNW calibrada de forma a implementar os vínculos. As equações de movimento podem ser sistematicamente escritas através da condição de curvatura nula e dão origem à relação fundamental de Poisson e à matrix r clássica. As soluções sóliton são obtidas através do método de dressing que relaciona campos físicos com funções explícitas do espaço-tempo. Tecnicamente, um ingrediente essencial para a obtenção das soluções são os operadores de vértice, devido a propriedade da nilpotência.

Vimos que os campos da teoria são complexos, mas existem soluções, como as apresentadas nesta tese, com energia e momento reais. A solução de 1 vértice é uma solução de 1-sóliton e possui carga topológica. Entretanto, não possui carga elétrica. Esta solução corresponde ao modelo de Toda abeliano $A_{r-1}^{(1)}$. A solução de 2 vértices é uma solução de 1 sóliton. A mesma possui carga elétrica e topológica. Neste sentido, dizemos que é um “dyon”. A solução de 3 vértices corresponde a uma solução de 2 sólitons e também é um “dyon”. As cargas elétrica e topológica, a energia e o momento da solução de 3 vértices são somas das respectivas quantidades das soluções de 1 e 2 vértices. Para as três soluções, a carga elétrica, a energia e o momento são dados por termos de “superfície”. Todas as soluções obtidas possuem uma interpretação de partícula livre relativística, com massas bem definidas.

PERSPECTIVAS

A classe de modelos integráveis discutida nesta tese é relacionada com a álgebra $A_r^{(1)}$ e é descrita pela ação (6.52). Note que a ação não é simétrica pela troca $\partial \rightarrow \bar{\partial}$, apresentando um termo antissimétrico $\epsilon^{\mu\nu}$. Este termo é responsável por termos de torção, conforme explicado na referência [15]. Na referência [27], mostramos que uma subclasse particular destes modelos é caracterizada pela ausência de termos de torção devido a propriedades de origem Lie algébrica. A condição precisa para a ausência de termos de torção foi especificada em [27] e somente é satisfeita para as álgebras $B_r^{(1)}$, $A_{2r}^{(2)}$ e $D_{r+1}^{(2)}$, sendo que os dois últimos casos correspondem a álgebras afins torcidas ("twisted"). Na referência [28] construímos explicitamente estes modelos e mostramos a sua integrabilidade clássica através da construção da curvatura nula.

Esta subclasse de modelos coincide precisamente com os modelos propostos por Fateev [26] no contexto de dualidade entre acoplamentos forte e fraco entre certos modelos de Thirring interagentes com campos de Toda abelianos. Pretendemos seguir o mesmo procedimento desta tese na construção de sólitons para esta subclasse de modelos. Em particular, temos interesse na relação entre ausência de torção e dualidade.

Capítulo 8

APÊNDICES

DEFINIÇÕES ALGÉBRICAS

Neste apêndice, apresentamos as definições e propriedades algébricas utilizadas nesta tese [10].

A álgebra de Lie simples de dimensão finita A_r possui uma base denominada de Weyl-Cartan tal que:

$$[H_i, H_j] = 0, \quad (8.1)$$

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha^{(i)} E_\alpha \quad (8.2)$$

e

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} \epsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta}, & \text{se } \alpha + \beta \text{ é raiz;} \\ \frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha^2}, & \text{se } \alpha + \beta = 0; \\ 0, & \text{de outro modo.} \end{cases} \quad (8.3)$$

Os geradores H_i , ($i = 1, \dots, r$), definem o que se conhece como subálgebra de Cartan. O número r é o “rank” da álgebra. Os geradores E_α são denominados escadas (“steps”) e por α, β designamos as raízes da álgebra. Tais raízes são vetores em um espaço euclidiano de dimensão r , com um respectivo produto escalar associado. Os número ϵ são denominados cociclos e são definidos de forma a que

$$\epsilon(\alpha, \beta) = \pm 1 \quad (8.4)$$

e

$$\epsilon(\alpha, \beta) = -\epsilon(\beta, \alpha). \quad (8.5)$$

A determinação completa dos cociclos é feita de modo a que a identidade de Jacobi seja satisfeita. As raízes da álgebra são classificadas em positivas e negativas de modo a que qualquer raiz da álgebra possa ser escrita na forma

$$\alpha = \sum_{i=1}^r k_i \alpha_i, \quad (8.6)$$

onde as raízes α_i são raízes positivas denominadas simples e os inteiros k_i são todos positivos (raízes positivas) ou todos negativos (raízes negativas).

Define-se a base de Chevalley redefinindo a subálgebra de Cartan:

$$h_i = \frac{2\alpha_i \cdot H}{\alpha_i^2}, \quad (8.7)$$

com $i=(1,\dots,r)$. Nesta base,

$$[h_i, h_j] = 0, \quad (8.8)$$

$$[h_i, E_\alpha] = \sum_{b=1}^r m_b^\alpha K_{b,i} E_\alpha, \quad (8.9)$$

e

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} \epsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta}, & \text{se } \alpha + \beta \text{ é raiz;} \\ \sum_{b=1}^r l_b^\alpha h_b, & \text{se } \alpha + \beta = 0; \\ 0, & \text{de outro modo.} \end{cases} \quad (8.10)$$

Os inteiros l_b^α e m_b^α são determinados por:

$$\frac{\alpha}{\alpha^2} = \sum_{b=1}^r l_b^\alpha \frac{\alpha_b}{\alpha_b^2} \quad (8.11)$$

e

$$\alpha = \sum_{b=1}^r m_b^\alpha \alpha_b. \quad (8.12)$$

A matriz de Cartan é definida por:

$$K_{a,b} = \frac{2\alpha_a \cdot \alpha_b}{\alpha_b^2}. \quad (8.13)$$

A matriz de Cartan simetrizada é definida por:

$$\eta_{a,b} = \frac{4\alpha_a \cdot \alpha_b}{\alpha_a^2 \alpha_b^2}. \quad (8.14)$$

Os pesos fundamentais λ_j são definidos por:

$$\frac{2\alpha_i \cdot \lambda_j}{\alpha_j^2} = \delta_{i,j}, \quad (1 \leq i, j \leq r). \quad (8.15)$$

Salientamos que nesta tese o símbolo $K_{i,j}$ representa a matriz de Cartan da álgebra A_r e não $A_r^{(1)}$. Aqui, apresentamos a matriz de Cartan de A_r :

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (8.16)$$

A inversa da matriz de Cartan de A_r é dada por:

$$K^{-1} = \frac{1}{r+1} \begin{pmatrix} r & r-1 & r-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ r-1 & 2(r-1) & 2(r-2) & \dots & 6 & 4 & 2 \\ r-2 & 2(r-2) & 3(r-2) & \dots & 9 & 6 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3(r-2) & 2(r-2) & r-2 \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2(r-2) & 2(r-1) & r-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & r-2 & r-1 & r \end{pmatrix}. \quad (8.17)$$

As raízes positivas de A_r são:

$A_1 : \alpha_1;$

$A_2 : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2;$

$A_3 : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3;$

$A_4 : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4;$

etc.

Para a álgebra A_r , os cociclos $\epsilon(\alpha, \beta)$ associados a comutadores entre raízes positivas podem ser escolhidos na seguinte forma:

$$\epsilon(\alpha_j + \alpha_{j+1} + \dots + \alpha_{j+k}, \alpha_{j+k+1} + \dots + \alpha_{j+k+s}) = 1, \quad (8.18)$$

se $\alpha_j + \dots + \alpha_{j+k+s}$ for raiz, onde k e s são inteiros positivos. Os cociclos associados a comutadores entre raízes positivas e negativas são determinados por:

$$\epsilon(\beta, -\alpha - \beta) = \epsilon(-\alpha - \beta, \alpha) = \epsilon(\alpha, \beta), \quad (8.19)$$

onde α e β são raízes positivas, se $\alpha + \beta$ for raiz. Ou seja, a partir de (8.18), determina-se (8.19). Os cociclos associados a comutadores entre raízes negativas são determinados por:

$$\epsilon(-\alpha, -\beta) = -\epsilon(\alpha, \beta), \quad (8.20)$$

onde α e β são raízes positivas, se $\alpha + \beta$ for raiz. Ou seja, (8.18) determina (8.20). Pode-se demonstrar que estas escolhas satisfazem a identidade de Jacobi [10].

As relações de comutação para $A_r^{(1)}$ são da seguinte forma:

$$[h_a^{(m)}, h_b^{(n)}] = mC\eta_{a,b}\delta_{m+n,0}, \quad (8.21)$$

$$[h_a^{(m)}, E_\alpha^{(n)}] = \sum_{b=1}^r m_b^\alpha K_{b,a} E_\alpha^{(m+n)}, \quad (8.22)$$

$$[E_\alpha^{(m)}, E_{-\alpha}^{(n)}] = \sum_{b=1}^r l_b^\alpha h_b^{(m+n)} + \frac{2}{\alpha^2} mC\delta_{m+n,0}, \quad (8.23)$$

$$[E_\alpha^{(m)}, E_\beta^{(n)}] = \epsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta}^{(m+n)}, \text{ se } \alpha + \beta \text{ é raiz}, \quad (8.24)$$

$$[D, E_\alpha^{(m)}] = mE_\alpha^{(m)} \quad (8.25)$$

e

$$[D, h_a^{(m)}] = mh_a^{(m)}. \quad (8.26)$$

O gerador carga central C comuta com todos os geradores da álgebra.

Define-se:

$$[E_\alpha^{(m)}]^\dagger = E_{-\alpha}^{(-m)} \quad (8.27)$$

e

$$[h_a^{(m)}]^\dagger = h_a^{(-m)} \quad (8.28)$$

Define-se uma forma simétrica bilinear traço como:

$$Tr(h_a^{(m)} h_b^{(n)}) = \eta_{a,b} \delta_{m+n,0}, \quad (8.29)$$

$$Tr(E_\alpha^{(m)} E_\beta^{(n)}) = \frac{2}{\alpha^2} \delta_{\alpha+\beta,0} \delta_{m+n,0}, \quad (8.30)$$

$$Tr(CD) = 1 \quad (8.31)$$

e igual a zero nos outros casos.

Os geradores atuam em uma representação com estados $|\lambda_j\rangle$ - $j=(0,\dots,r)$ - do seguinte modo:

$$C|\lambda_j\rangle = |\lambda_j\rangle, \quad (j=0,\dots,r), \quad (8.32)$$

$$h_i^{(0)}|\lambda_j\rangle = \delta_{i,j}, \quad (j=0,\dots,r) \text{ e } (i=1,\dots,r), \quad (8.33)$$

$$E_\alpha^{(n)}|\lambda_j\rangle = 0, \text{ se } n > 0 \text{ ou se } (n=0 \text{ e } \alpha > 0), \quad (8.34)$$

$$h_a^{(n)}|\lambda_j\rangle = 0, \text{ se } n > 0. \quad (8.35)$$

Relações análogas podem ser obtidas para os estados duais $\langle\lambda_j| = (|\lambda_j\rangle)^\dagger$, utilizando (8.27)-(8.28).

CÁLCULO DA MATRIZ r CLÁSSICA

Neste apêndice, verificaremos que a matriz r dada por (6.73) satisfaz a relação de Poisson fundamental (6.72), com A_x''' dado por (6.66).

Normalizamos

$$\frac{\alpha^2}{2} = 1, \quad (8.36)$$

para toda raiz de A_r . Portanto, pode-se demonstrar que,

$$(\eta^{-1})_{t,l} = (\eta^{-1})_{l,t} = (K^{-1})_{l,t} = (K^{-1})_{t,l}. \quad (8.37)$$

Passemos ao nosso objetivo principal. que é calcular o comutador

$$[C^+ - C^-, A_x''' \otimes I + I \otimes A_x''']. \quad (8.38)$$

Para isto, precisaremos calcular comutadores da forma

$$[C^+ - C^-, T \otimes I + I \otimes T], \quad (8.39)$$

onde por T representamos geradores pertencentes ao conjunto $\{C, D, h_l^{(0)}, \lambda_1 \cdot H^{(0)}, E_{\pm\alpha_i}^{(0)} (i = 1, \dots, r), E_{\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{(-1)}, E_{-(\alpha_1+\dots+\alpha_r)}^{(1)}, E_{\alpha_2+\dots+\alpha_r}^{(-1)}, E_{-(\alpha_2+\dots+\alpha_r)}^{(1)}\}$, conforme (6.66). Calcularemos termo a termo.

Temos que

$$[C^+ - C^-, C \otimes I + I \otimes C] = 0, \quad (8.40)$$

pois C comuta com todo gerador da álgebra. Da mesma forma,

$$[C^+ - C^-, D \otimes I + I \otimes D] = 0. \quad (8.41)$$

Isto resulta do fato de que os elementos de $(C^+ - C^-)$ são da forma $(T^{(m)} \otimes T^{(-m)})$
e

$$\begin{aligned}
[T^{(m)} \otimes T^{(-m)}, D \otimes I + I \otimes D] &= [T^{(m)}, D] \otimes T^{(-m)} + T^{(m)} \otimes [T^{(-m)}, D] \\
&= -mT^{(m)} \otimes T^{(-m)} + mT^{(m)} \otimes T^{(-m)} = 0.
\end{aligned} \tag{8.42}$$

O comutador a seguir, também, se anula,

$$[C^+ - C^-, h_i^{(0)} \otimes I + I \otimes h_i^{(0)}] = 0, \tag{8.43}$$

pois o índice zero faz com que o comutado de $h_i^{(0)}$ com qualquer gerador da subálgebra de Cartan seja zero e

$$[E_\alpha^{(m)} \otimes E_{-\alpha}^{(-m)}, h_i^{(0)} \otimes I + I \otimes h_i^{(0)}] = 0, \tag{8.44}$$

com α e m arbitrários, pois os dois termos resultantes se anulam. Da mesma forma,

$$[C^+ - C^-, \lambda_1.H^{(0)} \otimes I + I \otimes \lambda_1.H^{(0)}] = 0. \tag{8.45}$$

Antes de calcularmos o restante dos comutadores, é conveniente introduzir

$$C^0 = \sum_{a,b=1}^r (\eta^{-1})_{a,b} h_a^{(0)} \otimes h_b^{(0)} + C \otimes D + D \otimes C. \tag{8.46}$$

É um fato conhecido que o operador definido por [8]

$$\widehat{C} = C^0 + C^+ + C^- \tag{8.47}$$

possui a propriedade de que

$$[\widehat{C}, T \otimes I + I \otimes T] = 0, \tag{8.48}$$

para todo elemento T da álgebra. Em particular,

$$[\widehat{C}, I \otimes E_\beta^{(n)} + E_\beta^{(n)} \otimes I] = 0, \tag{8.49}$$

onde β é uma raiz arbitrária e n é um inteiro arbitrário.

Temos que, utilizando (8.48),

$$\begin{aligned}
[C^+ + C^-, I \otimes E_\beta^{(n)} + E_\beta^{(n)} \otimes I] &= -[C^0, I \otimes E_\beta^{(n)} + E_\beta^{(n)} \otimes I] \\
&= - \sum_{a=1}^r \frac{\alpha_a^2}{2} m_a^\beta \left(h_a^{(0)} \otimes E_\beta^{(n)} + E_\beta^{(n)} \otimes h_a^{(0)} \right) - n \left(C \otimes E_\beta^{(n)} + E_\beta^{(n)} \otimes C \right),
\end{aligned} \tag{8.50}$$

onde

$$\beta = \sum_{a=1}^r m_a^\beta \alpha_a \quad (8.51)$$

e α_a são as raízes simples. Observe, entretanto, que a matriz r depende de $(C^+ - C^-)$. É necessário desenvolver um pouco mais o raciocínio.

Calculemos $[C^+, I \otimes E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{\alpha_i}^{(0)} \otimes I]$ por partes, onde α_i é uma raiz simples:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a,b=1}^r (\eta^{-1})_{a,b} h_a^{(m)} \otimes h_b^{(-m)}, I \otimes E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{\alpha_i}^{(0)} \otimes I \right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(h_i^{(m)} \otimes E_{\alpha_i}^{(-m)} + E_{\alpha_i}^{(m)} \otimes h_i^{(-m)} \right); \end{aligned} \quad (8.52)$$

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{\alpha > 0} E_{\alpha}^{(0)} \otimes E_{-\alpha}^{(0)}, I \otimes E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{\alpha_i}^{(0)} \otimes I \right] \\ &= -E_{\alpha_i}^{(0)} \otimes h_i^{(0)} + \sum \{X^+\}^{(0)} \otimes \{X^-\}^{(0)}, \end{aligned} \quad (8.53)$$

onde X^+ e X^- representam operadores escada associados a raízes positivas e negativas, respectivamente, os colchetes indicam conjuntos desta forma, o índice zero informa que o número inteiro associado ao gerador escada é zero e a somatória informa que pode existir mais de um termo nesta forma. Como veremos, as formas específicas destes termos não são necessárias. Salientamos que para obter esta igualdade utilizamos o fato de que a soma de uma raiz negativa com uma raiz simples positiva não pode ser positiva.;

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\alpha > 0} E_{\alpha}^{(m)} \otimes E_{-\alpha}^{(-m)}, I \otimes E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{\alpha_i}^{(0)} \otimes I \right] \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} E_{\alpha_i}^{(m)} \otimes h_i^{(-m)} + \sum_{\{m \geq 1\}} \{X^+\}^{\{m\}} \otimes \{X^-\}^{\{-m\}}, \end{aligned} \quad (8.54)$$

onde $\{m \geq 1\}$ significa que qualquer termo na somatória obedece a esta condição;

$$\left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\alpha > 0} E_{-\alpha}^{(m)} \otimes E_{\alpha}^{(-m)}, I \otimes E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{\alpha_i}^{(0)} \otimes I \right]$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{m=1}^{\infty} h_i^{(m)} \otimes E_{\alpha_i}^{(-m)} + \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\alpha > 0} \left[\epsilon(\alpha, \alpha_i) E_{-\alpha}^{(m)} \otimes E_{\alpha+\alpha_i}^{(-m)} + \epsilon(-\alpha, \alpha_i) E_{(-\alpha+\alpha_i)}^{(m)} \otimes E_{\alpha}^{(-m)} \right] \\
&= - \sum_{m=1}^{\infty} h_i^{(m)} \otimes E_{\alpha_i}^{(-m)} + \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{\alpha > 0} \epsilon(\alpha, \alpha_i) E_{-\alpha}^{(m)} \otimes E_{\alpha+\alpha_i}^{(-m)} + \sum_{\beta > 0} \epsilon(-\beta - \alpha_i, \alpha_i) E_{-\beta}^{(m)} \otimes E_{\beta+\alpha_i}^{(-m)} \right] \\
&= - \sum_{m=1}^{\infty} h_i^{(m)} \otimes E_{\alpha_i}^{(-m)}, \tag{8.55}
\end{aligned}$$

onde na última somatória mudamos a variável de β para α , utilizando em seguida a propriedade:

$$\epsilon(\alpha, \alpha_i) = -\epsilon(-\alpha - \alpha_i, \alpha_i). \tag{8.56}$$

Somando (8.52)-(8.55), obtemos:

$$[C^+, I \otimes E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{\alpha_i}^{(0)} \otimes I] = -E_{\alpha_i}^{(0)} \otimes h_i^{(0)} + \sum_{\{m \geq 0\}} \{X^+\}^{\{m\}} \otimes \{X^-\}^{\{-m\}}. \tag{8.57}$$

Similarmente,

$$[C^-, I \otimes E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{\alpha_i}^{(0)} \otimes I] = -h_i^{(0)} \otimes E_{\alpha_i}^{(0)} + \sum_{\{m \geq 0\}} \{X^-\}^{\{-m\}} \otimes \{X^+\}^{\{m\}}. \tag{8.58}$$

Somando (8.57) e (8.58), obtemos:

$$\begin{aligned}
&[C^+ + C^-, I \otimes E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{\alpha_i}^{(0)} \otimes I] = -h_i^{(0)} \otimes E_{\alpha_i}^{(0)} - E_{\alpha_i}^{(0)} \otimes h_i^{(0)} + \\
&+ \sum_{\{m \geq 0\}} \left[\{X^+\}^{\{m\}} \otimes \{X^-\}^{\{-m\}} + \{X^-\}^{\{-m\}} \otimes \{X^+\}^{\{m\}} \right]. \tag{8.59}
\end{aligned}$$

Comparando esta última igualdade com (8.50), vemos que:

$$\sum_{\{m \geq 0\}} \left[\{X^+\}^{\{m\}} \otimes \{X^-\}^{\{-m\}} + \{X^-\}^{\{-m\}} \otimes \{X^+\}^{\{m\}} \right] = 0. \quad (8.60)$$

Lembrando que a álgebra é um espaço vetorial e que vetores em $\{X^+\}^{\{s\}}$ são linearmente independentes dos vetores em $\{X^-\}^{\{t\}}$, temos que, coerentemente com a estrutura de produto direto,

$$\sum_{\{m \geq 0\}} \{X^+\}^{\{m\}} \otimes \{X^-\}^{\{-m\}} = 0 \quad (8.61)$$

e

$$\sum_{\{m \geq 0\}} \{X^-\}^{\{-m\}} \otimes \{X^+\}^{\{m\}} = 0. \quad (8.62)$$

Ou seja,

$$[C^+, I \otimes E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{\alpha_i}^{(0)} \otimes I] = -E_{\alpha_i}^{(0)} \otimes h_i^{(0)} \quad (8.63)$$

e

$$[C^-, I \otimes E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{\alpha_i}^{(0)} \otimes I] = -h_i^{(0)} \otimes E_{\alpha_i}^{(0)}. \quad (8.64)$$

Portanto,

$$[C^+ - C^-, I \otimes E_{\alpha_i}^{(0)} + E_{\alpha_i}^{(0)} \otimes I] = h_i^{(0)} \otimes E_{\alpha_i}^{(0)} - E_{\alpha_i}^{(0)} \otimes h_i^{(0)}, \quad (8.65)$$

para $i=1, \dots, r$. Observe que não existe somatória em i .

Analogamente,

$$[C^+ - C^-, I \otimes E_{-\alpha_i}^{(0)} + E_{-\alpha_i}^{(0)} \otimes I] = h_i^{(0)} \otimes E_{-\alpha_i}^{(0)} - E_{-\alpha_i}^{(0)} \otimes h_i^{(0)}, \quad (8.66)$$

para $i=1, \dots, r$.

Denotamos:

$$\gamma = \alpha_1 + \dots + \alpha_r \quad (8.67)$$

e calculamos $[C^+, I \otimes E_{\gamma}^{(-1)} + E_{\gamma}^{(-1)} \otimes I]$ por partes:

$$\left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j,l=1}^r (\eta^{-1})_{j,l} h_j^{(m)} \otimes h_l^{(-m)}, I \otimes E_{\gamma}^{(-1)} + E_{\gamma}^{(-1)} \otimes I \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^r \left\{ \left[(\eta^{-1})_{j,1} + (\eta^{-1})_{j,r} \right] \left[h_j^{(m)} \otimes E_{\gamma}^{(-1-m)} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left[(\eta^{-1})_{1,j} + (\eta^{-1})_{r,j} \right] \left[E_{\gamma}^{(m-1)} \otimes h_j^{(-m)} \right] \right\} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^r \left[(\eta^{-1})_{1,j} + (\eta^{-1})_{r,j} \right] \left[h_j^{(m)} \otimes E_{\gamma}^{(-1-m)} + E_{\gamma}^{(m-1)} \otimes h_j^{(-m)} \right] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^r \left[h_j^{(m)} \otimes E_{\gamma}^{(-1-m)} + E_{\gamma}^{(m-1)} \otimes h_j^{(-m)} \right], \tag{8.68}
\end{aligned}$$

onde utilizamos (8.37) e as relações

$$[h_i^{(0)}, E_{\gamma}^{(-1)}] = (\delta_{i,1} + \delta_{i,r}) E_{\gamma}^{(-1)} \tag{8.69}$$

e

$$(\eta^{-1})_{1,j} + (\eta^{-1})_{r,j} = 1; \tag{8.70}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{\alpha > 0} E_{\alpha}^{(0)} \otimes E_{-\alpha}^{(0)}, I \otimes E_{\gamma}^{(-1)} + E_{\gamma}^{(-1)} \otimes I \right] \\
&= -E_{\gamma}^{(0)} \otimes \sum_{a=1}^r h_a^{(-1)} + \sum \{X^+\}^{(0)} \otimes \{X^+\}^{(-1)}, \tag{8.71}
\end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de que a soma de qualquer raiz positiva com γ não é raiz, pois γ é a raiz mais alta da álgebra;

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\alpha > 0} E_{\alpha}^{(m)} \otimes E_{-\alpha}^{(-m)}, I \otimes E_{\gamma}^{(-1)} + E_{\gamma}^{(-1)} \otimes I \right] \\
&= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=1}^r E_{\gamma}^{(m)} \otimes h_a^{(-1-m)} + \sum_{\{m \geq 1\}} \{X^+\}^{\{m\}} \otimes \{X^+\}^{\{-m-1\}}; \tag{8.72}
\end{aligned}$$

$$\left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\alpha > 0} E_{-\alpha}^{(m)} \otimes E_{\alpha}^{(-m)}, I \otimes E_{\gamma}^{(-1)} + E_{\gamma}^{(-1)} \otimes I \right]$$

$$= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=1}^r h_a^{(-1+m)} \otimes E_{\gamma}^{(-m)} + C \otimes E_{\gamma}^{(-1)} + \sum_{\{m \geq 1\}} \{X^+\}^{\{m-1\}} \otimes \{X^+\}^{\{-m\}}. \quad (8.73)$$

Somando (8.68) e (8.71)-(8.73), obtemos:

$$\begin{aligned} & [C^+, I \otimes E_{\gamma}^{(-1)} + E_{\gamma}^{(-1)} \otimes I] \\ &= - \sum_{a=1}^r h_a^{(0)} \otimes E_{\gamma}^{(-1)} + C \otimes E_{\gamma}^{(-1)} + \sum_{\{m \geq 0\}} \{X^+\}^{\{m\}} \otimes \{X^+\}^{\{-m-1\}}. \end{aligned} \quad (8.74)$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} & [C^-, I \otimes E_{\gamma}^{(-1)} + E_{\gamma}^{(-1)} \otimes I] \\ &= - \sum_{a=1}^r E_{\gamma}^{(-1)} \otimes h_a^{(0)} + E_{\gamma}^{(-1)} \otimes C + \sum_{\{n \geq 0\}} \{X^+\}^{\{-n-1\}} \otimes \{X^+\}^{\{n\}}. \end{aligned} \quad (8.75)$$

Somando (8.74)-(8.75) e comparando com (8.50), vemos que:

$$\sum_{\{m \geq 0\}} \{X^+\}^{\{m\}} \otimes \{X^+\}^{\{-m-1\}} + \sum_{\{n \geq 0\}} \{X^+\}^{\{-n-1\}} \otimes \{X^+\}^{\{n\}} = 0. \quad (8.76)$$

Observe, porém, que no primeiro termo todos os operadores escada no lado esquerdo do produto direto possuem índice $m=(0,1,2,\dots)$, enquanto que o segundo termo é tal que no lado esquerdo do produto direto todos os operadores escada possuem índice na forma $(-1,-2,\dots)$. Portanto os dois termos são linearmente independentes:

$$\sum_{\{m \geq 0\}} \{X^+\}^{\{m\}} \otimes \{X^+\}^{\{-m-1\}} = 0 \quad (8.77)$$

e

$$\sum_{\{n \geq 0\}} \{X^+\}^{\{-n-1\}} \otimes \{X^+\}^{\{n\}} = 0. \quad (8.78)$$

Portanto, o último termo em (8.74) é zero, o mesmo ocorrendo com o último termo em (8.75). Consequentemente,

$$\begin{aligned}
& [C^+ - C^-, I \otimes E_\gamma^{(-1)} + E_\gamma^{(-1)} \otimes I] \\
&= \sum_{a=1}^r (E_\gamma^{(-1)} \otimes h_a^{(0)} - h_a^{(0)} \otimes E_\gamma^{(-1)}) + C \otimes E_\gamma^{(-1)} - E_\gamma^{(-1)} \otimes C.
\end{aligned} \tag{8.79}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
& [C^+ - C^-, I \otimes E_{-\gamma}^{(1)} + E_{-\gamma}^{(1)} \otimes I] \\
&= \sum_{a=1}^r (E_{-\gamma}^{(1)} \otimes h_a^{(0)} - h_a^{(0)} \otimes E_{-\gamma}^{(1)}) + C \otimes E_{-\gamma}^{(1)} - E_{-\gamma}^{(1)} \otimes C.
\end{aligned} \tag{8.80}$$

Denotamos

$$\beta = \alpha_2 + \dots + \alpha_r \tag{8.81}$$

e calculamos $[C^+, I \otimes E_\beta^{(-1)} + E_\beta^{(-1)} \otimes I]$ por partes:

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j,l=1}^r (\eta^{-1})_{j,l} h_j^{(m)} \otimes h_l^{(-m)}, I \otimes E_\beta^{(-1)} + E_\beta^{(-1)} \otimes I \right] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^r \left[-(\eta^{-1})_{1,l} + (\eta^{-1})_{2,l} + (\eta^{-1})_{r,l} \right] \left(h_l^{(m)} \otimes E_\beta^{(-1-m)} + E_\beta^{(m-1)} \otimes h_l^{(-m)} \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=2}^r \left(h_l^{(m)} \otimes E_\beta^{(-1-m)} + E_\beta^{(m-1)} \otimes h_l^{(-m)} \right),
\end{aligned} \tag{8.82}$$

onde utilizamos as relações

$$[h_i^{(0)}, E_\beta^{(-1)}] = (-\delta_{i,1} + \delta_{i,2} + \delta_{i,r}) E_\beta^{(-1)} \tag{8.83}$$

e

$$-(\eta^{-1})_{1,l} + (\eta^{-1})_{2,l} + (\eta^{-1})_{r,l} = 1 - \delta_{1,l}; \tag{8.84}$$

$$\left[\sum_{\alpha > 0} E_\alpha^{(0)} \otimes E_{-\alpha}^{(0)}, I \otimes E_\beta^{(-1)} + E_\beta^{(-1)} \otimes I \right]$$

$$= - \sum_{a=2}^r E_{\beta}^{(0)} \otimes h_a^{(-1)} + \sum \{X^+\}^{(0)} \otimes \{X^+\}^{(-1)} - E_{\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{(0)} \otimes E_{-\alpha_1}^{(-1)} + E_{\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{(-1)} \otimes E_{-\alpha_1}^{(0)}, \quad (8.85)$$

onde utilizamos

$$\epsilon(-\alpha_1 - \dots - \alpha_r, \alpha_2 + \dots + \alpha_r) = -1 \quad (8.86)$$

e

$$\epsilon(\alpha_1, \alpha_2 + \dots + \alpha_r) = 1; \quad (8.87)$$

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\alpha > 0} E_{\alpha}^{(m)} \otimes E_{-\alpha}^{(-m)}, I \otimes E_{\beta}^{(-1)} + E_{\beta}^{(-1)} \otimes I \right] \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=2}^r E_{\beta}^{(m)} \otimes h_a^{(-m-1)} + \sum_{\{m \geq 1\}} \{X^+\}^{\{m\}} \otimes \{X^+\}^{\{-m-1\}} + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(-E_{\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{(m)} \otimes E_{-\alpha_1}^{(-m-1)} + E_{\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{(m-1)} \otimes E_{-\alpha_1}^{(-m)} \right); \quad (8.88) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\alpha > 0} E_{-\alpha}^{(m)} \otimes E_{\alpha}^{(-m)}, I \otimes E_{\beta}^{(-1)} + E_{\beta}^{(-1)} \otimes I \right] \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=2}^r h_a^{(m-1)} \otimes E_{\beta}^{(-m)} + \sum_{\{m \geq 1\}} \{X^+\}^{\{m-1\}} \otimes \{X^+\}^{\{-m\}} + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(E_{-\alpha_1}^{(m)} \otimes E_{\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{(-1-m)} - E_{-\alpha_1}^{(m-1)} \otimes E_{\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{(-m)} \right) + C \otimes E_{\beta}^{(-1)}. \quad (8.89) \end{aligned}$$

Somando (8.82), (8.85) e (8.88)-(8.89), obtemos:

$$\begin{aligned} & \left[C^+, I \otimes E_{\beta}^{(-1)} + E_{\beta}^{(-1)} \otimes I \right] \\ &= - \sum_{a=2}^r h_a^{(0)} \otimes E_{\beta}^{(-1)} + \sum_{\{m \geq 0\}} \{X^+\}^{\{m\}} \otimes \{X^+\}^{\{-m-1\}} + \end{aligned}$$

$$+C \otimes E_{\beta}^{(-1)} - E_{-\alpha_1}^{(0)} \otimes E_{\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{(-1)} + E_{\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{(-1)} \otimes E_{-\alpha_1}^{(0)}. \quad (8.90)$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} & \left[C^-, I \otimes E_{\beta}^{(-1)} + E_{\beta}^{(-1)} \otimes I \right] \\ &= - \sum_{a=2}^r E_{\beta}^{(-1)} \otimes h_a^{(0)} + \sum_{\{m \geq 0\}} \{X^+\}^{\{-m-1\}} \otimes \{X^+\}^{\{m\}} + \\ &+ E_{\beta}^{(-1)} \otimes C - E_{\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{(-1)} \otimes E_{-\alpha_1}^{(0)} + E_{-\alpha_1}^{(0)} \otimes E_{\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{(-1)}. \end{aligned} \quad (8.91)$$

Somando (8.90)-(8.91) e comparando com (8.50), obtemos:

$$\sum_{\{m \geq 0\}} \{X^+\}^{\{m\}} \otimes \{X^+\}^{\{-m-1\}} + \sum_{\{m \geq 0\}} \{X^+\}^{\{-m-1\}} \otimes \{X^+\}^{\{m\}} = 0. \quad (8.92)$$

Entretanto, observe que no primeiro termo os operadores escada no lado esquerdo do produto direto possuem índice $m=(0,1,\dots)$, enquanto que no segundo termo os operadores escada no lado esquerdo do produto direto possuem índice $(-1,-2,\dots)$. Portanto, os dois termos são linearmente independentes:

$$\sum_{\{m \geq 0\}} \{X^+\}^{\{m\}} \otimes \{X^+\}^{\{-m-1\}} = 0 \quad (8.93)$$

e

$$\sum_{\{m \geq 0\}} \{X^+\}^{\{-m-1\}} \otimes \{X^+\}^{\{m\}} = 0. \quad (8.94)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \left[C^+ - C^-, I \otimes E_{\beta}^{(-1)} + E_{\beta}^{(-1)} \otimes I \right] \\ &= \sum_{a=2}^r \left(E_{\beta}^{(-1)} \otimes h_a^{(0)} - h_a^{(0)} \otimes E_{\beta}^{(-1)} \right) + C \otimes E_{\beta}^{(-1)} - E_{\beta}^{(-1)} \otimes C + \\ &+ 2 \left(E_{\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{(-1)} \otimes E_{-\alpha_1}^{(0)} - E_{-\alpha_1}^{(0)} \otimes E_{\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{(-1)} \right). \end{aligned} \quad (8.95)$$

Similarmente,

$$\left[C^+ - C^-, I \otimes E_{-\beta}^{(1)} + E_{-\beta}^{(1)} \otimes I \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{a=2}^r \left(E_{-\beta}^{(1)} \otimes h_a^{(0)} - h_a^{(0)} \otimes E_{-\beta}^{(1)} \right) + C \otimes E_{-\beta}^{(1)} - E_{-\beta}^{(1)} \otimes C + \\
&\quad + 2 \left(E_{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_r)}^{(1)} \otimes E_{\alpha_1}^{(0)} - E_{\alpha_1}^{(0)} \otimes E_{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_r)}^{(1)} \right), \quad (8.96)
\end{aligned}$$

onde utilizamos

$$\epsilon(\alpha_1 + \dots + \alpha_r, -\alpha_2 - \dots - \alpha_r) = 1 \quad (8.97)$$

e

$$\epsilon(-\alpha_1, -\alpha_2 - \dots - \alpha_r) = -1. \quad (8.98)$$

Agora, estamos aptos a comparar

$\left[-\frac{2\pi}{k} (C^+ - C^-), A_x'''(y, t) \otimes I + I \otimes A_x'''(z, t) \right] \delta(y - z)$ com (6.71), onde A_x''' é dado por (6.66). Temos que

$$\begin{aligned}
&\left[-\frac{2\pi}{k} (C^+ - C^-), (I \otimes I + \sigma) \left\{ -\frac{4\pi}{k} \Pi_\eta C - \frac{4\pi}{k} \Pi_\nu D - \frac{4\pi}{k} \sum_{l,k=1}^{r-1} (\tilde{\eta}^{-1})_{l,k} \Pi_{\varphi_{(k+1)}} h_{l+1}^{(0)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2\pi}{k} \frac{r+1}{r} \left(\tilde{\psi} \Pi_{\tilde{\psi}} + \tilde{\chi} \Pi_{\tilde{\chi}} \right) \frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2} \right\} \otimes I \right] = 0, \quad (8.99)
\end{aligned}$$

conforme (8.40)-(8.41), (8.43) e (8.45), onde σ foi definido em (5.35);

$$\left[-\frac{2\pi}{k} (C^+ - C^-), \right.$$

$$\begin{aligned}
&(I \otimes I + \sigma) \mu \sum_{i=1}^{r-1} \exp \left(- \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\tilde{K}_{i,j} \varphi_{j+1}}{2} \right) \left(E_{\alpha_{(i+1)}}^{(0)} + E_{-\alpha_{(i+1)}}^{(0)} \right) \otimes I \\
&= \frac{2\pi\mu}{k} \sum_{i=1}^{r-1} \exp \left(- \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\tilde{K}_{i,j} \varphi_{j+1}}{2} \right) (I \otimes I - \sigma) \left(E_{\alpha_{(i+1)}}^{(0)} + E_{-\alpha_{(i+1)}}^{(0)} \right) \otimes h_{i+1}^{(0)}, \quad (8.100)
\end{aligned}$$

conforme (8.65)-(8.66). Vemos que este termo consta em (6.71);

$$\begin{aligned}
&\left[-\frac{2\pi}{k} (C^+ - C^-), -\frac{4\pi}{k} e^{\varphi_2/2} (I \otimes I + \sigma) \left(\Pi_{\tilde{\chi}} E_{\alpha_1}^{(0)} + \Pi_{\tilde{\psi}} E_{-\alpha_1}^{(0)} \right) \right] \\
&= -\frac{8\pi^2}{k^2} e^{\varphi_2/2} (I \otimes I - \sigma) \left[\Pi_{\tilde{\chi}} E_{\alpha_1}^{(0)} + \Pi_{\tilde{\psi}} E_{-\alpha_1}^{(0)} \right] \otimes h_1^{(0)}, \quad (8.101)
\end{aligned}$$

conforme (8.65)-(8.66). Procurando este termo em (6.71), vemos que o mesmo está presente, dado que

$$\frac{r+1}{r} \frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2} - \sum_{l=1}^{r-1} (\tilde{\eta}^{-1})_{l,1} h_{l+1}^{(0)} = h_1^{(0)}. \quad (8.102)$$

Esta relação decorre de

$$h_1^{(0)} = \frac{r+1}{r} \frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2} - \sum_{l=1}^{r-1} \frac{r-l}{r} h_{l+1}^{(0)} \quad (8.103)$$

e

$$(\tilde{\eta}^{-1})_{l,1} = \frac{r-l}{r}; \quad (8.104)$$

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{2\pi}{k} (C^+ - C^-), \mu \exp\left(\frac{\varphi_r}{2} - \frac{\eta}{2}\right) (I \otimes I + \sigma) \left(\tilde{\psi} E_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r}^{(-1)} + \tilde{\chi} E_{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_r)}^{(1)} \right) \right] \\ &= -\frac{2\pi}{k} \mu \exp\left(\frac{\varphi_r}{2} - \frac{\eta}{2}\right) (I \otimes I - \sigma) \\ & \cdot \left[\left(\tilde{\psi} E_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r}^{(-1)} + \tilde{\chi} E_{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_r)}^{(1)} \right) \otimes \left(\sum_{a=1}^r h_a^{(0)} - C \right) \right], \end{aligned} \quad (8.105)$$

conforme (8.79)-(8.80). Observamos que este termo está presente em (6.71), dado que

$$\sum_{a=1}^r h_a^{(0)} = \frac{r+1}{r} \frac{2\lambda_1 \cdot H^{(0)}}{\alpha_1^2} + \sum_{l=1}^{r-1} (\tilde{\eta}^{-1})_{l,r-1} h_{l+1}^{(0)}. \quad (8.106)$$

Esta última relação é válida por (8.103), dado que

$$(\tilde{\eta}^{-1})_{l,r-1} = \frac{l}{r}; \quad (8.107)$$

$$\left[-\frac{2\pi}{k} (C^+ - C^-), \right.$$

$$\left. \mu \exp\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_r - \eta}{2}\right) (I \otimes I + \sigma) \left\{ I \otimes \left(E_{\alpha_2 + \dots + \alpha_r}^{(-1)} + E_{-(\alpha_2 + \dots + \alpha_r)}^{(1)} \right) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2\pi\mu}{k} \exp\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_r - \eta}{2}\right) (I \otimes I - \sigma) \{ \\
&C \otimes \left(E_{\alpha_2+\dots+\alpha_r}^{(-1)} + E_{-(\alpha_2+\dots+\alpha_r)}^{(1)}\right) + 2E_{\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{(-1)} \otimes E_{-\alpha_1}^{(0)} + \\
&+ 2E_{-(\alpha_1+\dots+\alpha_r)}^{(1)} \otimes E_{\alpha_1}^{(0)} + \left(E_{\alpha_2+\dots+\alpha_r}^{(-1)} + E_{-(\alpha_2+\dots+\alpha_r)}^{(1)}\right) \otimes \sum_{a=2}^r h_a^{(0)} \}, \quad (8.108)
\end{aligned}$$

conforme (8.95)-(8.96). Vemos que este termo está presente em (6.71), dado que

$$(\tilde{\eta}^{-1})_{l,1} + (\tilde{\eta}^{-1})_{l,r-1} = 1. \quad (8.109)$$

Portanto, verificamos que a matriz r para o modelo em questão é realmente dada por (6.73).

CÁLCULO DOS ELEMENTOS DE MATRIZ

Neste apêndice, discutiremos o cálculo dos elementos de matriz associados aos modelos de sine-Gordon, Lund-Regge e às três soluções apresentadas do modelo não abeliano singular $A_r^{(1)}$. Os cálculos utilizam as propriedades das representações da álgebra $A_r^{(1)}$, discutidas no apêndice "Definições Algébricas".

É conveniente relembrar algumas somatórias úteis:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}. \quad (8.110)$$

Consequentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}. \quad (8.111)$$

Derivando (8.110) e multiplicando por x , obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}. \quad (8.112)$$

A soma dos termos de uma progressão geométrica é dada por:

$$\sum_{n=0}^N xq^n = \frac{x(1-q^{N+1})}{(1-q)}. \quad (8.113)$$

Utilizaremos, também, a seguinte notação:

$$\gamma_{i,j} = \frac{\gamma_i}{\gamma_j}. \quad (8.114)$$

a) modelo de sine-Gordon:

$$\begin{aligned} & \langle \lambda_0 | F^\pm(\gamma) | \lambda_0 \rangle \\ &= \langle \lambda_0 | \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \pm (\gamma)^{-2n-1} \left(E_{\alpha_1}^{(n)} - E_{-\alpha_1}^{(n+1)} \right) + (\gamma)^{-2n} \left(h^{(n)} - \frac{C}{2} \delta_{n,0} \right) \right\} | \lambda_0 \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle \lambda_0 | C | \lambda_0 \rangle = -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (8.115)$$

e

$$\langle \lambda_1 | F^\pm(\gamma) | \lambda_1 \rangle = \langle \lambda_1 | h^{(0)} - \frac{C}{2} | \lambda_1 \rangle = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \quad (8.116)$$

b) modelo de Lund-Regge:

$$\langle \lambda_i | F^-(\gamma_1) | \lambda_i \rangle = \langle \lambda_i | F^+(\gamma_2) | \lambda_i \rangle = 0, \quad i=(0,1); \quad (8.117)$$

$$\langle \lambda_1 | F^-(\gamma_1) E_{-\alpha_1}^{(0)} | \lambda_1 \rangle = \langle \lambda_1 | E_{\alpha_1}^{(0)} F^+(\gamma_2) | \lambda_1 \rangle = 0; \quad (8.118)$$

$$\begin{aligned} & \langle \lambda_1 | F^+(\gamma_2) E_{-\alpha_1}^{(0)} | \lambda_1 \rangle \\ &= \langle \lambda_1 | \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\gamma_2)^{-n} E_{\alpha_1}^{(n)} E_{-\alpha_1}^{(0)} | \lambda_1 \rangle = \langle \lambda_1 | \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_2)^{-n} E_{\alpha_1}^{(n)} E_{-\alpha_1}^{(0)} | \lambda_1 \rangle \\ &= \langle \lambda_1 | \left[\sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_2)^{-n} E_{\alpha_1}^{(n)}, E_{-\alpha_1}^{(0)} \right] | \lambda_1 \rangle = \langle \lambda_1 | \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_2)^{-n} h^{(n)} | \lambda_1 \rangle = 1; \end{aligned} \quad (8.119)$$

$$\langle \lambda_1 | E_{\alpha_1}^{(0)} F^-(\gamma_1) | \lambda_1 \rangle = 1; \quad (8.120)$$

$$\langle \lambda_0 | F^-(\gamma_1) F^+(\gamma_2) | \lambda_0 \rangle = \langle \lambda_0 | \left[\sum_{n=1}^{\infty} E_{-\alpha_1}^{(n)} (\gamma_1)^{-n}, \sum_{m=-\infty}^{-1} E_{\alpha_1}^{(m)} (\gamma_2)^{-m} \right] | \lambda_0 \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-1}^{\infty} (\gamma_1)^{-n} (\gamma_2)^{-m} \langle \lambda_0 | -h^{(n+m)} + nC\delta_{n+m,0} | \lambda_0 \rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^n = \frac{\gamma_{2,1}}{(1 - \gamma_{2,1})^2}; \tag{8.121}
\end{aligned}$$

$$\langle \lambda_1 | F^-(\gamma_1) F^+(\gamma_2) | \lambda_1 \rangle = \frac{(\gamma_{2,1})^2}{(1 - \gamma_{2,1})^2}; \tag{8.122}$$

$$\langle \lambda_1 | F^-(\gamma_1) F^+(\gamma_2) E_{-\alpha_1}^{(0)} | \lambda_1 \rangle = \langle \lambda_1 | E_{\alpha_1}^{(0)} F^-(\gamma_1) F^+(\gamma_2) | \lambda_1 \rangle = 0. \tag{8.123}$$

c) modelo não abeliano singular $A_r^{(1)}$:

$$\langle \lambda_j | \widehat{F}_{1,r}(\gamma_1) | \lambda_j \rangle = \langle \lambda_j | \overline{F}_{1,r}(\gamma_2) | \lambda_j \rangle = 0, \quad (j=0, \dots, r); \tag{8.124}$$

$$\langle \lambda_0 | F_{d,r}(\gamma_3) | \lambda_0 \rangle = \langle \lambda_1 | F_{d,r}(\gamma_3) | \lambda_1 \rangle = \frac{1}{w^d - 1}; \tag{8.125}$$

$$\langle \lambda_j | F_{d,r}(\gamma_3) | \lambda_j \rangle = \sum_{p=1}^{j-1} w^{d(j-1-p)} + \frac{1}{w^d - 1} = \frac{w^{d(j-1)}}{w^d - 1}, \quad (j = 2, \dots, r); \tag{8.126}$$

$$\begin{aligned}
&\langle \lambda_1 | E_{\alpha_1}^{(0)} \widehat{F}_{1,r}(\gamma_1) | \lambda_1 \rangle = \langle \lambda_1 | E_{\alpha_1}^{(0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{-\alpha_1}^{(n)} (\gamma_1)^{-rn} | \lambda_1 \rangle \\
&= \langle \lambda_1 | \left[E_{\alpha_1}^{(0)}, \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{-\alpha_1}^{(n)} (\gamma_1)^{-rn} \right] | \lambda_1 \rangle = \langle \lambda_1 | \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1^{(n)} (\gamma_1)^{-rn} | \lambda_1 \rangle = 1; \tag{8.127}
\end{aligned}$$

$$\langle \lambda_1 | \overline{F}_{1,r}(\gamma_2) E_{-\alpha_1}^{(0)} | \lambda_1 \rangle = 1; \tag{8.128}$$

$$\langle \lambda_1 | \widehat{F}_{1,r}(\gamma_1) E_{-\alpha_1}^{(0)} | \lambda_1 \rangle = \langle \lambda_1 | E_{\alpha_1}^{(0)} \overline{F}_{1,r}(\gamma_2) | \lambda_1 \rangle = 0; \tag{8.129}$$

$$\langle \lambda_1 | E_{\alpha_1}^{(0)} F_{d,r}(\gamma_3) | \lambda_1 \rangle = \langle \lambda_1 | F_{d,r}(\gamma_3) E_{-\alpha_1}^{(0)} | \lambda_1 \rangle = 0; \tag{8.130}$$

$$\begin{aligned}
& \langle \lambda_0 | \hat{F}_{1,r}(\gamma_1) \bar{F}_{1,r}(\gamma_2) | \lambda_0 \rangle \\
&= \sum_{n>0, m<0} (\gamma_1)^{-rn} (\gamma_2)^{-rm} \sum_{p=0}^{r-1} (\gamma_{1,2})^p \langle \lambda_0 | E_{-[\alpha_1+\dots+\alpha_{(1+p)}]}^{(n)} E_{\alpha_1+\dots+\alpha_{(1+p)}}^{(m)} | \lambda_0 \rangle.
\end{aligned} \tag{8.131}$$

Podemos trocar o produto dos operadores escada pelo comutador, pois, como $n>0$, $E_{-[\alpha_1+\dots+\alpha_{(1+p)}]}^{(n)}$ aniquila $|\lambda_0\rangle$:

$$= \sum_{n>0, m<0} (\gamma_1)^{-rn} (\gamma_2)^{-rm} \sum_{p=0}^{r-1} (\gamma_{1,2})^p \langle \lambda_0 | nC\delta_{n+m,0} - \sum_{j=1}^{p+1} h_j^{(n+m)} | \lambda_0 \rangle. \tag{8.132}$$

Os $h_j^{(n+m)}$ aniquilam $|\lambda_0\rangle$ e $\langle \lambda_0|$. Portanto, na expressão anterior temos:

$$= \sum_{n>0} n (\gamma_{2,1})^{rn} \sum_{p=0}^{r-1} (\gamma_{1,2})^p = \frac{(\gamma_{2,1})^r}{[1 - (\gamma_{2,1})^r]^2} \frac{[1 - (\gamma_{1,2})^r]}{(1 - \gamma_{1,2})}. \tag{8.133}$$

Multiplicando e dividindo por $(\gamma_{1,2})^{2r}$ e notando que

$$\gamma_{a,b}\gamma_{b,c} = \gamma_{a,c}, \tag{8.134}$$

obtemos:

$$\langle \lambda_0 | \hat{F}_{1,r}(\gamma_1) \bar{F}_{1,r}(\gamma_2) | \lambda_0 \rangle = \frac{(\gamma_{1,2})^r}{(1 - \gamma_{1,2}) [1 - (\gamma_{1,2})^r]}; \tag{8.135}$$

$$\langle \lambda_1 | \hat{F}_{1,r}(\gamma_1) \bar{F}_{1,r}(\gamma_2) | \lambda_1 \rangle$$

$$= \sum_{n>0, m<0} (\gamma_1)^{-rn} (\gamma_2)^{-rm} \sum_{p=0}^{r-1} (\gamma_{1,2})^p \langle \lambda_1 | nC\delta_{n+m,0} - \sum_{j=1}^{p+1} h_j^{(n+m)} | \lambda_1 \rangle. \tag{8.136}$$

Observe que para todo p o elemento de matriz contém $h_1^{(n+m)}$. Portanto,

$$= \sum_{n>0} (\gamma_{2,1})^{rn} \sum_{p=0}^{r-1} (\gamma_{1,2})^p \langle \lambda_1 | nC - h_1^{(0)} | \lambda_1 \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n>0} (n-1) (\gamma_{2,1})^{rn} \sum_{p=0}^{r-1} (\gamma_{1,2})^p \\
&= \frac{(\gamma_{2,1})^{2r}}{[1 - (\gamma_{2,1})^r]^2} \frac{[1 - (\gamma_{1,2})^r]}{(1 - \gamma_{1,2})} = \frac{1}{(1 - \gamma_{1,2}) [1 - (\gamma_{1,2})^r]}. \quad (8.137)
\end{aligned}$$

Observe que podemos reescrever este último resultado como:

$$\frac{(\gamma_{2,1})^{2r}}{[1 - (\gamma_{2,1})^r]^2} \left\{ 1 + \gamma_{1,2} + (\gamma_{1,2})^2 + \dots + (\gamma_{1,2})^{r-1} \right\}; \quad (8.138)$$

$$\langle \lambda_2 | \hat{F}_{1,r}(\gamma_1) \bar{F}_{1,r}(\gamma_2) | \lambda_2 \rangle$$

$$= \sum_{n>0, m<0} (\gamma_1)^{-rn} (\gamma_2)^{-rm} \sum_{p=0}^{r-1} (\gamma_{1,2})^p \langle \lambda_2 | nC \delta_{n+m,0} - \sum_{j=1}^{p+1} h_j^{(n+m)} | \lambda_2 \rangle. \quad (8.139)$$

Observe que, com exceção de $p=0$, para os outros valores de p temos o gerador $h_2^{(n+m)}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n>0} (\gamma_{2,1})^{rn} \langle \lambda_2 | nC | \lambda_2 \rangle + \sum_{n>0} (\gamma_{2,1})^{rn} \sum_{p=1}^{r-1} (\gamma_{1,2})^p \langle \lambda_2 | nC - h_2^{(0)} | \lambda_2 \rangle \\
&= \frac{(\gamma_{2,1})^r}{[1 - (\gamma_{2,1})^r]^2} + \frac{(\gamma_{2,1})^{2r}}{[1 - (\gamma_{2,1})^r]^2} \left\{ \gamma_{1,2} + (\gamma_{1,2})^2 + \dots + (\gamma_{1,2})^{r-1} \right\} \\
&= \frac{(\gamma_{2,1})^{2r}}{[1 - (\gamma_{2,1})^r]^2} \left\{ (\gamma_{1,2})^r + \gamma_{1,2} + (\gamma_{1,2})^2 + \dots + (\gamma_{1,2})^{r-1} \right\}. \quad (8.140)
\end{aligned}$$

Comparando esta última equação com (8.138), vemos que

$$[(8.140)] = \gamma_{1,2} [(8.138)]. \quad (8.141)$$

Portanto,

$$\langle \lambda_2 | \hat{F}_{1,r}(\gamma_1) \bar{F}_{1,r}(\gamma_2) | \lambda_2 \rangle = \frac{\gamma_{1,2}}{(1 - \gamma_{1,2}) [1 - (\gamma_{1,2})^r]}; \quad (8.142)$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
 & \langle \lambda_3 | \widehat{F}_{1,r}(\gamma_1) \overline{F}_{1,r}(\gamma_2) | \lambda_3 \rangle \\
 &= \frac{(\gamma_{2,1})^r}{[1 - (\gamma_{2,1})^r]^2} \{1 + \gamma_{1,2}\} + \frac{(\gamma_{2,1})^{2r}}{[1 - (\gamma_{2,1})^r]^2} \{(\gamma_{1,2})^2 + \dots + (\gamma_{1,2})^{r-1}\} \\
 &= \frac{(\gamma_{2,1})^{2r}}{[1 - (\gamma_{2,1})^r]^2} \{(\gamma_{1,2})^r + (\gamma_{1,2})^{r+1} + (\gamma_{1,2})^2 + \dots + (\gamma_{1,2})^{r-1}\} \\
 &= \frac{(\gamma_{1,2})^2}{(1 - \gamma_{1,2}) [1 - (\gamma_{1,2})^r]}; \tag{8.143}
 \end{aligned}$$

Pode-se verificar que, em geral, para $i=(1,\dots,r)$,

$$\langle \lambda_i | \widehat{F}_{1,r}(\gamma_1) \overline{F}_{1,r}(\gamma_2) | \lambda_i \rangle = \frac{(\gamma_{1,2})^{i-1}}{(1 - \gamma_{1,2}) [1 - (\gamma_{1,2})^r]}; \tag{8.144}$$

$$\langle \lambda_1 | E_{\alpha_1}^{(0)} \widehat{F}_{1,r}(\gamma_1) \overline{F}_{1,r}(\gamma_2) | \lambda_1 \rangle = 0; \tag{8.145}$$

$$\langle \lambda_1 | \widehat{F}_{1,r}(\gamma_1) \overline{F}_{1,r}(\gamma_2) E_{-\alpha_1}^{(0)} | \lambda_1 \rangle = 0; \tag{8.146}$$

$$\langle \lambda_j | \widehat{F}_{1,r}(\gamma_1) F_{d,r}(\gamma_3) | \lambda_j \rangle = 0, (j = 0, \dots, r); \tag{8.147}$$

$$\langle \lambda_j | F_{d,r}(\gamma_3) \overline{F}_{1,r}(\gamma_2) | \lambda_j \rangle = 0, (j = 0, \dots, r); \tag{8.148}$$

$$\langle \lambda_1 | \widehat{F}_{1,r}(\gamma_1) F_{d,r}(\gamma_3) E_{-\alpha_1}^{(0)} | \lambda_1 \rangle = 0; \tag{8.149}$$

$$\langle \lambda_1 | E_{\alpha_1}^{(0)} F_{d,r}(\gamma_3) \overline{F}_{1,r}(\gamma_2) | \lambda_1 \rangle = 0; \tag{8.150}$$

$$\langle \lambda_1 | E_{\alpha_1}^{(0)} \widehat{F}_{1,r}(\gamma_1) F_{d,r}(\gamma_3) | \lambda_1 \rangle$$

$$= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} (\gamma_1)^{-rn} (\gamma_3)^{-rm} \langle \lambda_1 | [E_{\alpha_1}^{(0)}, \{ \sum_{p=0}^{r-2} (\gamma_{1,3})^{p+1} E_{-\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{(2+p)}}^{(n)} E_{\alpha_2+\dots+\alpha_{(2+p)}}^{(m)} +$$

$$+E_{-\alpha_1}^{(n)} \left(\frac{C\delta_{m,0}}{w^d - 1} + \sum_{i=1}^{r-1} h_{i+1}^{(m)} \sum_{p=1}^i w^{d(i-p)} \right) \} |\lambda_1\rangle. \quad (8.151)$$

Consideremos os dois termos nesta equação separadamente. O termo que contém somente operadores escada é dado por:

$$\begin{aligned} & \sum_{n>0, m<0} (\gamma_1)^{-rn} (\gamma_3)^{-rm} \langle \lambda_1 | \sum_{i=1}^{r-1} (\gamma_{1,3})^i \{ E_{-\alpha_1 - \dots - \alpha_{(1+i)}}^{(n)} E_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{(1+i)}}^{(m)} + \\ & \quad - E_{-\alpha_2 - \dots - \alpha_{(1+i)}}^{(n)} E_{\alpha_2 + \dots + \alpha_{(1+i)}}^{(m)} \} | \lambda_1 \rangle \\ & \quad = \sum_{n>0, m<0} (\gamma_1)^{-rn} (\gamma_3)^{-rm} \\ & \quad \langle \lambda_1 | \sum_{i=1}^{r-1} (\gamma_{1,3})^i \left(-nC + nC + \sum_{p=2}^{i+1} h_p^{(n+m)} - \sum_{p=1}^{i+1} h_p^{(n+m)} \right) | \lambda_1 \rangle \\ & \quad = - \sum_{n>0} (\gamma_{3,1})^{rn} \sum_{i=1}^{r-1} (\gamma_{1,3})^i = - \frac{(\gamma_{3,1})^r}{[1 - (\gamma_{3,1})^r]} \sum_{i=1}^{r-1} (\gamma_{1,3})^i. \end{aligned} \quad (8.152)$$

O segundo termo em (8.151), envolvendo a carga central e os geradores de Cartan é dado por:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{w^d - 1} + \\ & + \sum_{n>0, m<0} (\gamma_1)^{-rn} (\gamma_3)^{-rm} \langle \lambda_1 | \left\{ h_1^{(n)} \left(\sum_{i=1}^{r-1} h_{i+1}^{(m)} \sum_{p=1}^i w^{d(i-p)} \right) + E_{-\alpha_1}^{(n)} E_{\alpha_1}^{(m)} \right\} | \lambda_1 \rangle \\ & \quad = \frac{1}{w^d - 1} + \sum_{n>0} (\gamma_{3,1})^{rn} (-n + n - 1) \\ & \quad = \frac{1}{w^d - 1} - \frac{(\gamma_{3,1})^r}{[1 - (\gamma_{3,1})^r]}. \end{aligned} \quad (8.153)$$

Somando (8.152)-(8.153), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{w^d - 1} - \frac{(\gamma_{3,1})^r}{[1 - (\gamma_{3,1})^r]} \sum_{i=0}^{r-1} (\gamma_{1,3})^i \\ &= \frac{1}{w^d - 1} + \frac{1}{(1 - (\gamma_{1,3})^r)} \frac{[1 - (\gamma_{1,3})^r]}{(1 - \gamma_{1,3})}. \end{aligned} \quad (8.154)$$

Portanto,

$$\langle \lambda_1 | E_{\alpha_1}^{(0)} \widehat{F}_{1,r}(\gamma_1) F_{d,r}(\gamma_3) | \lambda_1 \rangle = \frac{(w^d - \gamma_{1,3})}{(w^d - 1)(1 - \gamma_{1,3})}; \quad (8.155)$$

$$\langle \lambda_1 | F_{d,r}(\gamma_3) \overline{F}_{1,r}(\gamma_2) E_{-\alpha_1}^{(0)} | \lambda_1 \rangle = \frac{w^d(1 - \gamma_{3,2})}{(w^d - 1)[1 - \gamma_{3,2}w^d]}; \quad (8.156)$$

$$\langle \lambda_1 | E_{\alpha_1}^{(0)} \widehat{F}_{1,r}(\gamma_1) F_{d,r}(\gamma_3) \overline{F}_{1,r}(\gamma_2) | \lambda_1 \rangle = 0; \quad (8.157)$$

$$\langle \lambda_1 | \widehat{F}_{1,r}(\gamma_1) F_{d,r}(\gamma_3) \overline{F}_{1,r}(\gamma_2) E_{-\alpha_1}^{(0)} | \lambda_1 \rangle = 0; \quad (8.158)$$

O último cálculo a ser efetuado é extremamente complexo. O procedimento é o mesmo que utilizamos até aqui, mas o número de termos envolvidos é muito grande. Portanto, apenas apresentamos os resultados:

$$\begin{aligned} & \langle \lambda_j | \widehat{F}_{1,r}(\gamma_1) F_{d,r}(\gamma_3) \overline{F}_{1,r}(\gamma_2) | \lambda_j \rangle \\ &= \frac{(w^d - \gamma_{1,3})(1 - \gamma_{3,2})(w^d \gamma_{1,2})^{j-1}}{[1 - (\gamma_{1,2})^r](w^d - 1)(1 - \gamma_{1,2})(1 - \gamma_{1,3})(1 - w^d \gamma_{3,2})}, \end{aligned} \quad (8.159)$$

para $j=(1,...,r)$ e

$$\begin{aligned} & \langle \lambda_0 | \widehat{F}_{1,r}(\gamma_1) F_{d,r}(\gamma_3) \overline{F}_{1,r}(\gamma_2) | \lambda_0 \rangle \\ &= \frac{(w^d - \gamma_{1,3})(1 - \gamma_{3,2})(w^d \gamma_{1,2})^r}{[1 - (\gamma_{1,2})^r](w^d - 1)(1 - \gamma_{1,2})(1 - \gamma_{1,3})(1 - w^d \gamma_{3,2})}, \end{aligned} \quad (8.160)$$

onde $[(w^d)^r = 1]$ no numerador foi explicitado apenas para indicar a simetria com (8.159).

REFERÊNCIAS

- [1]- E. Witten. Commun. Math. Phys. 92, 455 (1984).
- [2]- J. Wess e B. Zumino. Phys. Lett. B 37, 95 (1971);
- S. P. Novikov. Sov. Math. Dock. 24, 222 (1981).
- [3]- A. M. Polyakov e P. B. Wiegman. Phys. Lett. B 141, 223 (1984).
- [4]- A. A. Belavin, A. M. Polyakov e A. B. Zamolodchikov. Nucl. Phys. B 241, 333 (1984).
- [5]- P. Di Francesco, P. Mathieu e D. Sénéchal. Conformal Field Theory, Springer-Verlag, New York (1997).
- [6]- V. G. Knizhnik e A. B. Zamolodchikov. Nucl. Phys. B 247, 83 (1984).
- [7]- O. Babelon e L. Bonora. Phys. Lett. B 244, 1220 (1990).
- [8]- H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomes e A. H. Zimerman. Phys. Lett. B 254, 372 (1991);
- [9]- V. G. Kac e D. H. Peterson. Symposium on Anomalies, Geometry and Topology, ed. W. A. Bardeen e A. R. White, World Scientific, 276 (1985);
- V. G. Kac. Infinite Dimensional Lie Algebras, Cambridge University Press, Cambridge (1990).
- [10]- P. Goddard e D. Olive. Int. J. Mod. Phys. A 1, 303 (1986);
- J. F. Cornwell. Group Theory in Physics, 3 volumes, Academic Press, London (1984);
- J. Fuchs. Affine Lie Algebras and Quantum Groups, Cambridge University Press, Cambridge (1992).
- [11]- J. Balog, L. Feher, P. Forgacs, L. O'Raifeartaigh e A. Wipf. Phys. Lett. B 227, 214 (1989)/ Phys. Lett B 244, 435 (1990)/ Ann. Phys. 203, 76 (1990).
- [12]- A. N. Leznov e M. V. Saveliev. Lett. Math. Phys. 3, 489 (1979)/ Commun. Math. Phys. 89, 59 (1983).
- [13]- D. Olive e N. Turok. Nucl. Phys. B 220 [FS8], 491 (1983)/ Nucl. Phys. B 257 [FS14], 277 (1985).
- [14]- E. Witten. Phys. Rev. D 44, 314 (1991);
- J. L. Gervais e M. V. Saveliev. Phys. Lett. B 286, 271 (1992);
- A. Bilal. Nucl. Phys. B 422, 258 (1994).
- [15]- J. F. Gomes, G. M. Sotkov e A. H. Zimerman. Ann. Phys. 274, 289 (1999)/ Phys. Lett. B 435, 49 (1998);
- J. F. Gomes, F. E. Mendonça da Silveira, G. M. Sotkov e A. H. Zimerman. IFT-P-064/98, hep-th/9810057 e IFT-P-065/98, hep-th/9810011.
- [16]- R. Rajaraman. Solitons and Instantons, North-Holland, Amsterdam (1982).
- [17]- F. Lund e T. Regge. Phys. Rev. D 14, 1524 (1976);
- F. Lund. Phys. Rev. Lett. 38, 1175 (1977);

- B. S. Getmanov, JETP Lett. 25, 119 (1977);
- H. J. de Vega e J. M. Maillet. Phys. Lett. B 101, 302 (1981)/
Phys. Rev. D 28, 1441 (1983).
- [18]- N. Dorey e J. Hollowood. Nucl. Phys. B 440, 215 (1995).
- [19]- T. Hollowood. Nucl. Phys. B 384, 523 (1992);
 - H C. Liao, D. Olive e N. Turok. Phys. Lett. B 298, 95 (1993);
 - D. Olive, N. Turok e J. W. R. Underwood. Nucl. Phys. B 401, 663 (1993)/ Nucl. Phys. B 409 [FS], 509 (1993);
 - N. J. Mackay e W. A. Mcghee. Int. J. Mod. Phys. A 8 , 2791 (1993);
 - M. A. C. Kneipp e D. I. Olive. Nucl. Phys. B 408, 565 (1993).
- [20]- V. I. Arnold. Mathematical Methods of Classical Mechanics,
Springer-Verlag (1978).
- [21]- L. D. Faddeev, Les Houches Lectures (1982), Elsevier, Amsterdam (1984);
 - L. D. Faddeev e L. Takhtajan. Hamiltonian Methods in the Theory of
Solitons, Springer-Verlag, Berlin (1987);
 - A. Das. Integrable Models, World Scientific, Singapore (1989).
- [22]- C. Itzykson e J. B. Zuber. Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New
York (1980).
- [23]- V. E. Zakharov e A. B. Shabat. Functional Analysis and its application
13, 166 (1979);
 - E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara e T. Miwa. Proc. Japan. Acad.
57 A , 3806 (1981)/ Physica D 4, 343 (1982)/ Publ. Rims. Kyoto Univ.
18, 1077 (1982);
 - M. Semenov-Tian-Shansky. Functional Analysis and its application 17,
259 (1983)/ Publ. Rims Kyoto Univ. 21, 1237 (1985);
 - O. Babelon e D. Bernard. Phys. Lett. B 260, 81 (1991)/ Commun.
Math. Phys. 149, 279 (1992)/ Int. J. Mod. Phys. A 8, 507 (1993).
- [24]- L. A. Ferreira, J. L. Miramontes e J. S. Guillén. Nucl. Phys. B 449, 631
(1995).
- [25]- H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomes e A. H. Zimerman.
Supersymmetry and Integrable Models, Lectures notes in Physics 502,
ed. H. Aratyn *et al* , Springer-Verlag, Berlin, 197 (1998)/ J. Phys. A,
Math. Gen. 31, 9483 (1998).
- [26]- V. A. Fateev. Nucl. Phys. B 479 [FS], 594 (1996).
- [27]- J. F. Gomes, E. P. Gueuvoghlianian, F. E. Mendonça da Silveira, G. M.
Sotkov e A. H. Zimerman. "Singular Conformal, Affine and Conformal
Affine Non-Abelian Toda Theories", memorial de M. V. Saveliev (1999).
- [28]- J. F. Gomes, E. P. Gueuvoghlianian, G. M. Sotkov e A. H. Zimerman.
"Algebraic structure of non abelian Toda theories", a ser publicado no
Turkish Journal of Physics, proc. of the VI Wigner International
Symposium, Istambul, Turquia (1999).
- [29]- J. F. Gomes, E. P. Gueuvoghlianian, G. M. Sotkov e A. H. Zimerman.

- “Electrically Charged Topological Solitons”, preprint-IFT, em preparação.
- [30]- J. F. Gomes, E. P. Gueuvoghlianian, G. M. Sotkov e A. H. Zimerman.
“Dyonic Integrable Models”, preprint-IFT, em preparação.
- [31]- M. A. C. Kneipp e D. Olive. Commun. Math. Phys. 177, 561 (1996).
- [32]- L. A. Ferreira, J. F. Gomes, A. Schwimmer, A. H. Zimerman. Phys. Lett. B 274, 65 (1992).
- [33]- R. V. Churchill. Complex variables and applications, segunda edição, McGraw-Hill, New York (1966).

