

HYAGO RAMOM MARTINS SILVA

**IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA AEROPÊNDULO E MÉTODOS DE CONTROLE
CHAVEADO APLICADOS A SISTEMAS INCERTOS DESCRITOS POR
MODELOS *FUZZY* TAKAGI-SUGENO**

Ilha Solteira
2020

HYAGO RAMOM MARTINS SILVA

**IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA AEROPÊNDULO E MÉTODOS DE CONTROLE
CHAVEADO APLICADOS A SISTEMAS INCERTOS DESCRITOS POR
MODELOS *FUZZY* TAKAGI-SUGENO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Automação.

Prof. Dr. Rodrigo Cardim
Orientador

Ilha Solteira
2020

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

S586i Silva, Hyago Ramom Martins.
Identificação do sistema aeropêndulo e métodos de controle chaveado aplicado a sistemas incertos descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno / Hyago Ramom Martins Silva. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2020
67 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2020

Orientador: Rodrigo Cardim
Inclui bibliografia

1. Sistema aeropêndulo. 2. Identificação de sistemas. 3. Controle chaveado. 4. Saturação dos atuadores. 5. Desigualdades Matriciais Lineares (LMIS). 6. Custo garantido quadrático.


Raiane da Silva Santos

Supervisora Técnica de Seção
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB/8 - 9999

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Identificação do Sistema Aeropêndulo e Métodos de Controle Chaveado Aplicados a Sistemas Incertos Descritos por Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

AUTOR: HYAGO RAMOM MARTINS SILVA

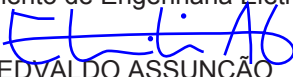
ORIENTADOR: RODRIGO CARDIM

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. RODRIGO CARDIM

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP



Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP



Prof. Dr. CRISTIANO QUEVEDO ANDREA

Faculdade de Engenharia, Arquitetura Urbanismo e Geografia - FAENG / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Ilha Solteira, 28 de agosto de 2020

*Dedico este trabalho aos meus pais, José Eles e Carmen Lúcia;
Aos meus irmãos, Raul Fernandes e Halax Duarte;
Ao meu sobrinho e cunhada, Henrico e Larissa;*

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos a parentes, amigos, colegas, professores e funcionários da FEIS-UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em particular, agradeço:

- A Deus, por ser onipotente, onipresente e onisciente, me dando força e saúde para chegar até aqui.
- Aos meus pais que sempre me apoiaram e forneceram todo o amor e amparo necessário.
- Aos meus irmãos que me acompanharam durante minha infância me fornecendo amizade e companheirismo.
- Aos Professores do Laboratório de Pesquisa em Controle Rodrigo Cardim, Edvaldo Assunção e Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira pelo suporte teórico e pessoal, pela paciência, incentivo e sugestões.
- Aos amigos e colegas do Laboratório de Pesquisa em Controle, Bruno Sereni, Igor Ramos, Leidy Wolmuth, Hadamez Kuzminskas, Marco Beteto, Douglas Bizarro, Gilberto dos Santos, Leonardo Carniato, Lázaro Llins, Ariel Buzetti, Mariana Moraes e Adalberto Lazarini, pela amizade e contribuições que direta ou indiretamente me ajudaram.
- O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) processo nº 2011/17610-0.

*"O mundo gira assim deslumbrante
No fascínio de um instante
Feito uma criança na roda gigante"*

Oriente

*"Eu só queria estar aí
Eu só queria estar chegando
Eu realmente acredito
Nesse lugar que confiamos"*

Selvagens à Procura de Lei

RESUMO

Nesta dissertação são apresentadas metodologias de controle automático aplicáveis a um sistema de suspensão ativa de bancada e a um sistema aeropêndulo com modelagem incerta. Os controladores projetados são do tipo robustos de ganho único ou chaveados que podem ser aplicados a uma classe de sistemas lineares com incertezas politópicas e não lineares incertos descritos por modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno (TS) considerando uma região de operação conhecida. A lei de controle chaveada elimina a necessidade de uso de funções de pertinência, que podem ser incertas ou complexas para encontrá-las ou estimá-las. A dinâmica do sistema aeropêndulo é aproximada por modelos locais lineares para diversos pontos de operação. Desta forma, o sistema não linear é descrito por modelos *fuzzy* TS e o projeto dos controladores é realizado através de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) com base na teoria de Lyapunov. São consideradas algumas restrições e técnicas de projeto para obter resultados satisfatórios tais como taxa de decaimento, restrição da norma dos controladores, saturação dos atuadores e índice de desempenho quadrático relacionado com a saída do sistema. As implementações no sistema aeropêndulo com controladores robustos são apresentadas ao final do trabalho para verificação da teoria estudada e análise dos resultados. Para eliminar o erro em regime permanente apresentado em algumas implementações, é inserida uma nova variável de estado ao sistema relacionada com a integral da diferença entre as saídas medida e desejada para o sistema aeropêndulo. Desta forma é apresentado um sistema aeropêndulo de ordem superior ao sistema identificado. São apresentadas também implementações e simulação do sistema de suspensão ativa de bancada considerando parâmetros incertos e falha no atuador.

Palavras-Chave: Sistema aeropêndulo. Identificação de sistemas. Controle chaveado. Controle robusto de ganho único. Saturação dos atuadores. Sistemas não lineares incertos. Modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). Custo garantido quadrático.

ABSTRACT

In this dissertation, automatic control methodologies applicable to an active bench suspension and an aeropendulum system with uncertain modeling are proposed. The controllers used are the single-gain control or switched control applicable to a class of linear systems with polytopic uncertainties and uncertain nonlinear system described by Takagi-Sugeno (TS) fuzzy models considering a given operation region. The switched control law eliminates the necessity of finding or estimating the membership function, which can be uncertain or complex to obtain. The dynamics of the aeropendulum system is approximated in local linear models at different points of operation. In this way, the nonlinear system is described by TS fuzzy models and the design of the controllers is carried out through Linear Matrix Inequalities (LMIs) based on Lyapunov's theory. Some restrictions and design techniques such as decay rate, restriction of the controller norm, saturation of the actuators and quadratic performance index related to the system output are considered to obtain satisfactory results. The implementations in the aeropendulum system with the robust controllers are presented at the end of the work to verify the studied theory and to analyze the results. A method that eliminates the error in steady state during some implementations is presented. The errors are eliminated by means of insertion of a new state variable related to integral of the difference between measured and desired output into the aeropendulum system. In this way, a higher order aeropendulum system is presented. An implementation and simulation of the active bench suspension system considering uncertain parameters and actuator fault are also presented.

Keywords: Aeropendulum system. System identification. Switched control. Single-gain control. Actuator saturation. Uncertain nonlinear systems. Takagi-Sugeno fuzzy models. Linear Matrix Inequalities (LMIs). Quadratic guaranteed cost.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Sinal de controle saturado para cada entrada $u_l(t)$ do sistema. . . .	26
Figura 2	Trajatória dos estados $x(t)$ e regiões $\mathfrak{X}$ (44), $\mathcal{E}(P, \delta)$ (15), $\mathcal{L}(H_k)$ (14) e $\mathcal{X}$ (5) no plano $x_1(t) \times x_2(t)$	28
Figura 3	Sistema de suspensão ativa de bancada.	41
Figura 4	Limite superior β da função de custo garantido J em relação à falha do atuador aplicado ao sistema de suspensão ativa.	44
Figura 5	Controle de ganho único projetado com os Teoremas 4 e 6 aplicado no sistema de suspensão ativa.	45
Figura 6	Controle chaveado projetado com os Teoremas 4 e 5 aplicado no sistema de suspensão ativa.	46
Figura 7	Sistema aeropêndulo produzido no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) da FEIS-UNESP.	49
Figura 8	Entrada $u_t(t) = 1160\mu s$ para o sistema em malha aberta.	51
Figura 9	Saída $\theta_t(t)$ em malha aberta com $u_t(t) = 1160\mu s$	51
Figura 10	Entradas $u(t) = u_t(t) - u_0$ usada para identificação do sistema com $u_t(t) = 1160\mu s$	51
Figura 11	Saídas $\theta(t)$ usada para identificação do sistema com $u_t(t) = 1160\mu s$	52
Figura 12	$\theta(t)$, $\bar{\theta}(t)$ e $u_t(t)$ para o controle de ganho único projetado com o Teorema 1 aplicado ao sistema original (78).	55
Figura 13	$\theta(t)$, $\bar{\theta}(t)$ e $\hat{u}_t(t)$ para o controle de ganho único projetado com o Teorema 1 aplicado ao sistema aumentado (80).	56
Figura 14	$\theta(t)$ e $\bar{\theta}(t)$ para o controle chaveado projetado com os Teoremas 2, 3 e 4 aplicado ao sistema original (78).	57
Figura 15	$u_{\sigma_t}(t)$ e $\sigma(t)$ para o controle chaveado projetado com os Teoremas 2, 3 e 4 aplicado ao sistema original (78).	58
Figura 16	$\theta(t)$ e $\bar{\theta}(t)$ para o controle chaveado projetado com os Teoremas 2, 3 e 4 aplicado ao sistema aumentado (80).	59
Figura 17	$\hat{u}_{\sigma_t}(t)$ e $\sigma(t)$ para o controle chaveado projetado com os Teoremas 2, 3 e 4 aplicado ao sistema aumentado (80).	59
Figura 18	$\theta(t)$, $\bar{\theta}(t)$ e $\hat{u}_t(t)$ para o controle de ganho único projetado com os Teoremas 4 e 6 aplicado ao sistema aumentado (80).	60

Figura 19	$\theta(t)$ e $\tilde{\theta}(t)$ para o controle chaveado projetado com os Teoremas 4 e 5 aplicado ao sistema aumentado (80).	61
Figura 20	$\hat{u}_{\sigma t}(t)$ e $\sigma(t)$ para o chaveado projetado com os Teoremas 4 e 5 aplicado ao sistema aumentado (80).	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Parâmetros da suspensão ativa de bancada.	42
----------	---	----

LISTA DE ABREVIACÕES E ACRNIMOS

TS	Takagi-Sugeno
LMIs	<i>Linear Matrix Inequalities</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
PID	<i>Proportional-Integral-Derivative</i>
CDP	<i>Compensation Parallel Distributed</i>
ESC	<i>Electronic Speed Control</i>
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i>
CC	Corrente Cont��ua
MatLab [®]	<i>MATrix LABoratory</i>
SeDuMi	<i>Self-Dual Minimization Inequalities</i>
SDPT3	<i>Semidefinite Programming</i> Tutuncu, Toh and Todd
YALMIP	<i>Yet Another LMI Parser</i>
LMILab	<i>Linear Matrix Inequality Laboratory</i>
LPC	Laboratório de Pesquisa em Controle
FEIS	Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^{n_u \times n_x}$	Conjunto de matrizes reais de dimensão $n_u \times n_x$.
$\mathbb{K}_r$	Conjunto $1, 2, \dots, r$, $r \in \mathbb{N}$.
M^T	Transposto da matriz real M .
$M \geq (>) 0$	Matriz simétrica semi-definida (definida) positiva.
$M \leq (<) 0$	Matriz simétrica semi-definida (definida) negativa.
I	Matriz identidade com dimensão apropriada.
$\text{diag}\{M_1, \dots, M_r\}$	Matriz bloco diagonal formada pelas matrizes $M_1, \dots, M_r$.
$M(\alpha)$	$M_\alpha = \sum_i^r \alpha_i M_i$, $\alpha \in \mathbb{R}^r : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, i \in \mathbb{K}_r$.
$\text{co}\{\cdot\}$	Combinação convexa.
$ z $	Valor absoluto de um número real z .
$\ x\ $	Norma euclidiana do vetor $x \in \mathbb{R}_x^n$; $\ x\ = \sqrt{x^T x}$.
$\arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{h_i\}$	Menor índice $j \in \mathbb{K}^r$ que retorna o menor valor entre $\{h_1, \dots, h_r\}$.
$\min_{i \in \mathbb{K}_r} \{h_i\}$	Menor valor h_j entre $\{h_1, \dots, h_r\}$.
$\text{sat}(\cdot)$	Saturação de um sinal.
$\prod$	Produtório entre elementos.
$\sum$	Somatório entre elementos.
$\in$	Pertence.
$\subset$	Está contido.
$\mathcal{D}$	Domínio de um conjunto.
$\mathcal{E}(P, \delta)$	Conjunto elipsoidal formado pelos estados $x \in \mathbb{R}_x^n$, tais que, $x^T P x < \delta$, $P = P^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P > 0$.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	22
2.1	SISTEMAS NÃO LINEARES DESCRITOS POR MODELOS <i>FUZZY TS</i>	22
2.2	TAXA DE DECAIMENTO, CUSTO GARANTIDO E ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES DESCRITO POR MODELOS <i>FUZZY TS</i>	23
2.3	SISTEMAS NÃO LINEARES DESCRITOS POR MODELOS <i>FUZZY TS</i> SUJEITO À SATURAÇÃO DOS ATUADORES	25
2.4	SISTEMA <i>FUZZY TS</i> AUMENTADO PARA O CONTROLE DE SERVO SISTEMAS	28
2.5	CONCLUSÕES PARCIAIS	30
3	CONTROLE DE GANHO ÚNICO E CHAVEADO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS DESCRITO POR MODELOS <i>FUZZY TS</i>	31
3.1	CONTROLE CHAVEADO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES DESCRITO POR MODELOS <i>FUZZY TS</i> SUJEITO À SATURAÇÃO DOS ATUADORES	31
3.2	CONTROLE DE GANHO ÚNICO E CHAVEADO COM CUSTO GARANTIDO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES DESCRITO POR MODELOS <i>FUZZY TS</i> SUJEITO À SATURAÇÃO DOS ATUADORES	36
3.2.1	Implementação dos Controladores Robusto de Ganho Único e Chaveado Sujeito à Saturação dos Atuadores com Custo Garantido na Suspensão Ativa de Bancada	40
3.3	CONCLUSÕES PARCIAIS	47
4	MODELAGEM E IMPLEMENTAÇÃO DO SISTEMA AEROPÊNDULO	48
4.1	DESCRIÇÃO E MODELAGEM DO SISTEMA AEROPÊNDULO	48
4.2	PROJETO E IMPLEMENTAÇÕES PRÁTICAS DOS CONTROLADORES	54
4.3	CONCLUSÕES PARCIAIS	62

5	CONCLUSÕES	63
5.1	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS	64
	REFERÊNCIAS	65

1 INTRODUÇÃO

O projeto de controle de sistemas mecânicos envolvendo pêndulos são considerados problemas clássicos de controle automático de sistemas dinâmicos (JOB; JOSE, 2015) e utilizados em implementações considerando sistemas lineares (CHEN, 1998) e não lineares (SLOTINE; LI *et al.*, 1991). Os sistemas construídos por pêndulos, em geral, são naturalmente não lineares e são aproximados, em alguns casos, por sistemas lineares em torno do respectivo ponto de equilíbrio (ENIKOV; CAMPA, 2012). Outras vertentes para esse tipo de sistemas podem ser citadas como o pêndulo invertido (KUMAR; JEROME, 2013) e o aeropêndulo (FAROOQ *et al.*, 2015). No aeropêndulo existe um propulsor em uma de suas extremidades com o objetivo de posicionar a haste em uma posição desejada. O foco de discussão deste trabalho, além das implementações de controladores robustos de ganho único e chaveado, é descrever, identificar e explorar características do sistema aeropêndulo. Tal sistema ainda é pouco explorado na comunidade científica.

Aspectos construtivos que descrevem o sistema aeropêndulo podem ser encontrados em Job e Jose (2015), Enikov e Campa (2012) e Veiga (2016). Em Job e Jose (2015), além de apresentar uma modelagem para o sistema, controladores PID e LQR são comparados mostrando o desempenho de cada um destes tipos de controle. Farooq *et al.* (2015) apresenta um controle com realimentação de saída uma vez que alguns estados podem ser não mensuráveis como a velocidade angular, desta forma ela é estimada por meio de observadores *fuzzy*. As modelagens para o sistema aeropêndulo expostas em Farooq *et al.* (2015), Job e Jose (2015) e Enikov e Campa (2012) não podem ser utilizadas nesse trabalho, pois os parâmetros físicos do sistema disponível para uso no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) diferem dos parâmetros dos trabalhos mencionados. A modelagem de sistemas pode ser complexa e para cada caso existem modelagens apropriadas à aplicação desejada (AGUIRRE, 2004).

As técnicas de controle escolhidas para uso neste trabalho exigem o conhecimento da planta para projeto dos controladores. Portanto uma identificação do aeropêndulo é necessária para viabilizar as implementações. A identificação do sistema aeropêndulo usada neste trabalho são baseadas nas modelagens apresentadas em Job e Jose (2015) e Enikov e Campa (2012). O *software* MatLab[®] é usado para a identificação dos coeficientes das funções de transferência em diversos pontos de operação considerados para o sistema aeropêndulo. Com a realização na forma canônica controlável (OGATA, 2011), obtêm-se os modelos locais lineares para os diversos pontos de operação (SANTIM *et al.*, 2012) possibilitando a descrição do sistema por modelos *fuzzy* TS (TAKAGI; SUGENO, 1985; TANIGUCHI *et al.*, 2001; TEIXEIRA; ZAK, 1999).

A descrição de sistemas não lineares por modelos *fuzzy* TS é muito utilizada na teoria de controle moderno e possibilita a representação de tais sistemas por uma combinação convexa de modelos locais lineares (TAKAGI; SUGENO, 1985; WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1995) ponderados por uma função de pertinência (TANIGUCHI *et al.*, 2001; WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1996; SANTIM *et al.*, 2012). Logo uma classe de sistemas não lineares podem ser representados por modelos *fuzzy* TS considerando uma região de operação seja por setores de não linearidade, limites físicos ou incertezas do sistema (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015; ALVES *et al.*, 2016). Este tipo de representação possibilita o projeto de controladores considerando uma abordagem linear uma vez que serão considerados modelos locais lineares para projeto dos controladores. Modelagens exatas e aproximadas podem ser utilizadas para descrição dos sistemas não lineares por modelos *fuzzy* TS. A modelagem exata (TANIGUCHI *et al.*, 2001) descreve exatamente o sistema não linear considerando uma região de operação (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015) e as funções dinâmicas que descrevem o sistema. A técnica de controle clássica para sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* TS é a Compensação Distribuída Paralela (CDP) (WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1995, 1996; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998), todavia para utilizar esta técnica as funções de pertinência que descrevem o sistema precisam ser conhecidas ou estimadas.

O sistema não linear aeropêndulo, portanto, é descrito por modelos locais lineares e por funções de pertinência que combinam tais modelos locais, entretanto as funções de pertinência são incertas e impossibilitam o uso de controladores *fuzzy* via CDP (SOUZA *et al.*, 2013, 2014b). Uma solução para tal problema é o uso de controladores robustos de ganho único (BOYD *et al.*, 1994) e chaveados (GEROMEL; DEAECTO, 2009; SOUZA *et al.*, 2014a, 2014b; ALVES *et al.*, 2016; OLIVEIRA *et al.*, 2018). Estes controladores não necessitam das funções de pertinência que descrevem o sistema. Esta não dependência da função de pertinência apresenta uma vantagem comparada aos controladores via CDP. Os controladores chaveados utilizam lei de chaveamento que seleciona o melhor ganho de realimentação para cada instante entre um conjunto de ganhos pré-calculados. Estas leis de chaveamento são baseadas na minimização da derivada da função de Lyapunov atribuída ao sistema (SOUZA *et al.*, 2014a, 2014b). Leis de chaveamento aplicadas a sistemas lineares com incertezas politópicas são apresentadas em Deaecto, Geromel e Daafouz (2011), Souza *et al.* (2013). Em contrapartida, tem-se leis de chaveamento aplicáveis a sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* TS em Souza *et al.* (2014a, 2014b), Alves *et al.* (2016), Oliveira *et al.* (2018).

Outros parâmetros de projeto podem ser adicionados e incorporados ao projeto dos controladores chaveados por exemplo a saturação dos atuadores (ALVES *et al.*, 2016; TARBOURIECH *et al.*, 2011) e atenuação de distúrbios no sistema com minimização da norma H_∞ (OLIVEIRA *et al.*, 2018). Neste trabalho, o projeto dos controladores abordados são os chaveados (SOUZA *et al.*, 2014b) considerando saturação dos atuadores (ALVES *et al.*, 2016; TARBOURIECH *et al.*, 2011), taxa de decaimento (BOYD *et al.*, 1994) e índice de desempenho (OGATA, 2011) com função de custo garantido quadrática relacionada com a energia de saída do sistema (PERES *et al.*, 2019). Um índice de desempenho usualmente utilizado é o regulador quadrático ótimo que prevê boa relação entre desempenho e alocação de autovalores buscando minimizar uma função de custo garantido (CAUN *et al.*, 2018; DEAECTO; GEROMEL; DAAFOUZ, 2011). Em Deaecto *et al.* (2010), a função de custo garantido utilizada está relacionada com a energia dissipada na saída, na forma de calor, em um conversor CC-CC. Neste trabalho, uma função de

custo garantido relacionada com a energia da saída do sistema também é considerada a fim de diminuir tal energia e obter melhores resultados na resposta do sistema controlado.

O aeropêndulo pode possuir pontos de equilíbrio diferentes da origem em determinados instantes e portanto se trata de um servo sistema. Algumas técnicas de projeto para controle de servo sistemas com o objetivo de atingir valores diferentes da origem podem ser utilizadas como mudança de variáveis (FAROOQ *et al.*, 2015), inserção de integrador ao sistema e aumento da dimensão do sistema (OGATA, 2011; TEIXEIRA *et al.*, 2006). Em Ogata (2011), Ohtake, Tanaka e Wang (2009), Teixeira *et al.* (2006) são apresentadas técnicas que aumentam a ordem do sistema com a inserção de uma nova variável de estado à planta para suprimir a diferença no rastreamento do sinal de referência no sistema controlado. Para isso, é utilizada a integral da diferença entre posições medida e desejada (OGATA, 2011; TEIXEIRA *et al.*, 2006). Em Farooq *et al.* (2015) uma mudança de variáveis é utilizada para que o ponto de equilíbrio seja a origem. Esta dissertação busca unir tais métodos no projeto de controle a fim de comparar os resultados e identificar as vantagens de adicionar ou não integrador na planta.

São apresentadas implementações no sistema de suspensão ativa da Quanser (QUANSER, 2010; OLIVEIRA *et al.*, 2018; SILVA *et al.*, 2013) além das implementações do sistema aeropêndulo. Para isso é introduzida uma breve descrição do sistema e do modelo usado nas implementações e simulação. Este modelo é baseado em Oliveira *et al.* (2018) e considera uma função não linear para a constante da mola (ONAT *et al.*, 2009). O projeto dos controladores é feito por meio de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) (BOYD *et al.*, 1994) que são bastante utilizadas na teoria de controle moderno com técnicas de projeto para sistemas em espaço de estados. A resolução numérica das LMIs é feita pelo *software* MatLab[®] junto com o *solver* LMILab (GAHINET *et al.*, 1994) e interface YALMIP (LOFBERG, 2004). Outros *solvers* disponíveis existem e são amplamente usados na literatura como o SeDuMi (STURM, 1999) e o SDPT3 (TOH; TODD; TÛTÛNCÛ, 1999).

Por conveniência, é utilizada a notação $\mathbb{K}_r = \{1, 2, 3, \dots, n_r\}$, que é um conjunto de

números naturais limitados ao número de regras n_r SE-ENTÃO do sistema *fuzzy* TS. No texto existem outros conjuntos de números naturais são eles o número de variáveis de estado n_x , de entradas n_u , de saídas n_y , de elementos n_p do vetor ϕ , de não linearidades/incertezas n_f do sistema e de politopos n_{x_0} do conjunto de condições iniciais.

Para melhor compreensão das informações, o trabalho é organizado em alguns capítulos:

- Capítulo 2: Apresentação de conceitos fundamentais para compreensão do trabalho.
 - ▶ Seção 2.1: Descrição de sistemas não lineares incertos por modelos *fuzzy* TS.
 - ▶ Seção 2.2: Apresentação de alguns parâmetros de projeto e índice de desempenho. Estabilização de sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* TS com controle robusto de ganho único.
 - ▶ Seção 2.3: Sistemas *fuzzy* TS sujeito à saturação dos atuadores.
 - ▶ Seção 2.4: Sistema *fuzzy* TS aumentado para controle de servo sistemas e eliminação do erro em regime permanente.
- Capítulo 3: Projeto de controladores robusto de ganho único e chaveados aplicáveis a sistemas não lineares incertos descritos por modelos *fuzzy* TS.
 - ▶ Seção 3.1: Controle chaveado para sistemas não lineares incertos descritos por modelos *fuzzy* TS sujeito à saturação dos atuadores.
 - ▶ Seção 3.2: Controle robusto de ganho único e chaveado para sistemas não lineares incertos descritos por modelos *fuzzy* TS sujeito à saturação dos atuadores com custo garantido quadrático relacionado com a energia de saída do sistema. Implementação no sistema de suspensão ativa.
- Capítulo 4: Descrição e modelagem do sistema aeropêndulo. Projeto de controladores robustos de ganho único e chaveados. Implementações práticas no sistema aeropêndulo.

- ▶ Seção 4.1: Descrição do sistema aeropêndulo e apresentação do método utilizado para identificação dos modelos locais lineares em espaço de estados.
- ▶ Seção 4.2: Implementação dos controladores robustos de ganho único e chaveados. Discussão dos resultados.
- Por fim, conclusões e perspectivas futuras.

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo, é apresentada uma revisão dos conceitos fundamentais para compreensão do trabalho. Descrição de sistemas não lineares por modelos *fuzzy* TS, índices de desempenho como taxa de decaimento e função de custo garantido quadrático, estabilização de sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* TS, saturação dos atuadores e sistemas *fuzzy* TS aumentado para controle de servo sistemas.

2.1 SISTEMAS NÃO LINEARES DESCRITOS POR MODELOS *FUZZY* TS

Os modelos *fuzzy* TS (TAKAGI; SUGENO, 1985) são descritos por regras SE-ENTÃO. Estes modelos relacionam localmente entradas e saídas do sistema não linear.

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : \text{ SE } z_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_{n_f}(t) \text{ é } \mathcal{M}_{n_f}^i, \\ \text{ENTÃO } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

em que $i \in \mathbb{K}_{n_r}$, $j \in \mathbb{K}_{n_f}$, $\mathcal{M}_j^i$ é o conjunto *fuzzy* j da regra i , $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ são matrizes dos modelos locais lineares, $z_1(t) \dots z_{n_f}(t)$ são variáveis premissas e correspondem às variáveis de estado e aos parâmetros incertos do sistema, $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor entrada de controle e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de saída do sistema. Cada equação linear representada por $A_i x(t) + B_i u(t)$ é chamada de modelo local.

A modelagem *fuzzy* TS consiste na combinação dos modelos locais lineares por meio de funções de pertinência. Dado o par $(x(t), u(t))$, o sistema *fuzzy* é inferido da seguinte forma (TANIGUCHI *et al.*, 2001)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n_r} \omega_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^{n_r} \omega_i(z(t))}, \\ y(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n_r} \omega_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^{n_r} \omega_i(z(t))}, \end{cases} \quad (2)$$

em que $\omega_i(z(t)) = \prod_{j=1}^{n_f} \mathcal{M}_j^i(z_j(t))$, $\sum_{i=1}^{n_r} \omega_i(z(t)) > 0$ e $\omega_i(z(t)) \geq 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$ e $j \in \mathbb{K}_{n_f}$. $\mathcal{M}_j^i(z_j(t))$ é o peso do conjunto *fuzzy* associado à variável premissa $z_j(t)$. A função de pertinência $\alpha_i(z(t))$, $i \in \mathbb{K}_{n_r}$, é representada pelo peso normalizado.

$$\alpha_i(z(t)) = \frac{\omega_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{n_r} \omega_i(z(t))}, \quad (3)$$

em que $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) = 1$ e $\alpha_i(z(t)) \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$. Assim, tem-se em (3) e (4) o sistema não linear descrito por modelos *fuzzy* TS.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) = A(\alpha) x(t) + B(\alpha) u(t), \\ y(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) C_i x(t) = C(\alpha) x(t). \end{cases} \quad (4)$$

em que $(A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha)) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) (A_i, B_i, C_i)$ e n_r é o número de SE-ENTÃO do sistema *fuzzy* TS.

Considere uma região de operação no espaço de estados (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015)

$$\mathcal{X} \triangleq \left\{ x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |N_h x(t)| \leq \phi_h, \quad h \in \mathbb{K}_{n_p} \right\}. \quad (5)$$

em que $N = [N_1^T \ N_2^T \ \dots \ N_{n_p}^T]^T \in \mathbb{R}^{n_p \times n_x}$ e $\phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_{n_p}]^T \in \mathbb{R}^{n_p}$ são conhecidos. Então o sistema descrito por modelos *fuzzy* TS (4) permanece na região de operação $\mathcal{X}$, para todo $t \geq 0$, para condições iniciais pertencentes à região de atração $\mathcal{E}(P, \delta)$ contida em $\mathcal{X}$, ou seja, $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{X}$. Portanto, para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P, \delta)$, o vetor de estados $x(t)$ do sistema permanece na região de operação $\mathcal{X}$ (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015).

2.2 TAXA DE DECAIMENTO, CUSTO GARANTIDO E ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES DESCRITO POR MODELOS FUZZY TS

No projeto dos controladores, além da estabilidade, outros índices de desempenho para o sistema são importantes. Estes índices podem inserir desempenho ou restringir algumas condições de projeto. Uma destas condições é a velocidade de resposta do sistema que pode estar relacionada com a taxa de decaimento (ou maior expoente de Lyapunov). A

taxa de decaimento é definida como um número real $\gamma > 0$ (BOYD *et al.*, 1994), tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma t} \|x(t)\| = 0, \quad (6)$$

para todas as trajetórias de $x(t)$. Pode-se usar uma função de Lyapunov quadrática (28) para estabelecer um limite inferior para a taxa de decaimento do sistema realimentado (BOYD *et al.*, 1994). A condição $\dot{V}(x(t)) \leq -2\gamma V(x(t))$, para todas as trajetórias $x(t)$, é equivalente às especificações de uma taxa de decaimento maior ou igual a γ (BOYD *et al.*, 1994).

Um outro índice de desempenho relacionado a uma função de custo garantido é proposto neste trabalho e inserido ao projeto dos controladores de ganho único e chaveados. No projeto propõe-se minimizar o limitante superior para a função de custo garantido relacionada com a energia de saída do sistema. A função é definida a seguir

$$J = \int_0^\infty y^T(t) R y(t) dt = \int_0^\infty x^T(t) C^T R C x(t) dt, \quad (7)$$

em que $R \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ é uma matriz de ponderação da saída definida positiva.

A função quadrática (7) considera condições iniciais $x(0)$ pertencentes ao conjunto convexo

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n_{x_0}} \lambda_k x_k(0), \quad \sum_{k=1}^{n_{x_0}} \lambda_k = 1, \quad (8)$$

em que $\lambda_k \geq 0$, para todo $k \in \mathbb{K}_{n_{x_0}}$, n_{x_0} é o número de vértices conhecidos do politopo de condições iniciais. A minimização de um limitante superior para a função J (7) impõe transitórios mais rápidos para a saída do sistema.

Um método de controle simples para sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* TS (4) é a realimentação de estados de ganho único. Tal lei de controle é

$$u(t) = -Kx(t), \quad (9)$$

em que $u(t)$ é o sinal de controle, K é o ganho de realimentação e $x(t)$ é o vetor de estados do sistema.

O sistema *fuzzy* TS realimentado com (9) é

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z) (A_i - B_i K) x(t) = (A(\alpha) - B(\alpha) K) x(t) \quad (10)$$

O teorema apresentado a seguir é baseado em Boyd *et al.* (1994) e fornece condições para estabilidade do sistema não linear descrito por modelos *fuzzy* TS (10) realimentado com a lei de controle robusta de ganho único (9) e taxa de decaimento maior ou igual a γ .

Teorema 1. *O sistema não linear descrito por modelos fuzzy TS (10) é quadraticamente estabilizável com taxa de decaimento maior ou igual a γ se, e somente se, existem uma matriz simétrica positiva definida $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e um escalar $\gamma \geq 0$ tais que as LMIs*

$$XA_i^T + A_i X - B_i M - M^T B_i^T + 2\gamma X < 0. \quad (11)$$

sejam factíveis, para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$. O ganho do controlador é obtido por $K = MX^{-1}$.

Demonstração. Similar à prova apresentada em Boyd *et al.* (1994). □

2.3 SISTEMAS NÃO LINEARES DESCRITOS POR MODELOS FUZZY TS SUJEITO À SATURAÇÃO DOS ATUADORES

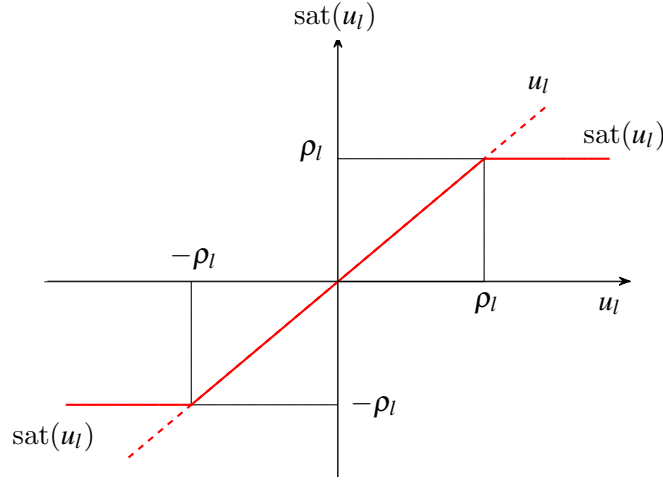
Considere o seguinte sistema não linear descrito por modelos *fuzzy* TS sujeito à saturação dos atuadores

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)\text{sat}(u(t)). \quad (12)$$

A saturação do sinal de controle (13) é representada na Figura 1. O sinal de controle $u(t)$ é limitado por $-\rho_l \leq u_l(t) \leq \rho_l$, então, $|\rho_l|$ é o valor da saturação do atuador para cada entrada u_l do sistema (ALVES *et al.*, 2016).

$$\text{sat}(u(t)) = \begin{bmatrix} \text{sat}(u_1(t)) \\ \vdots \\ \text{sat}(u_{n_u}(t)) \end{bmatrix}, \quad \text{sat}(u_l(t)) \begin{cases} -\rho_l, & \text{se } u_l(t) < -\rho_l, \\ u_l(t), & \text{se } |u_l(t)| \leq \rho_l, \\ \rho_l, & \text{se } u_l(t) > \rho_l, \end{cases} \quad (13)$$

Figura 1 - Sinal de controle saturado para cada entrada $u_l(t)$ do sistema.



Fonte: (ALVES, 2017)

em que ρ_l são constantes positivas e $l \in \mathbb{K}_{n_u}$.

Considere matrizes $H_k = [H_{k_1}^T H_{k_2}^T \dots H_{k_{n_u}}^T]^T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $k \in \mathbb{K}_{n_r}$, uma matriz definida positiva $P = P^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, um vetor conhecido $\rho = [\rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_{n_u}]^T \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\rho_l > 0$, $l \in \mathbb{K}_{n_u}$ e uma constante $\delta > 0$. Os conjuntos $\mathcal{L}(H_k)$ e $\mathcal{E}(P, \delta)$ são definidos (HU; LIN; CHEN, 2002; ALVES *et al.*, 2016).

$$\mathcal{L}(H_k) \triangleq \left\{ x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |H_{k_l} x(t)| \leq \rho_l, \quad l \in \mathbb{K}_{n_u}, k \in \mathbb{K}_{n_r} \right\}, \quad (14)$$

$$\mathcal{E}(P, \delta) \triangleq \left\{ x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : x^T(t) P x(t) \leq \delta \right\}. \quad (15)$$

O conjunto de matrizes $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ é definido tal que cada elemento desse conjunto é D_s , $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$, e os elementos fora da diagonal de D_s são $d_{ij} = 0$ e os elementos da diagonal são $d_{ii} = 0$ ou 1 (HU; LIN; CHEN, 2002). Portanto existem 2^{n_u} elementos em $\mathcal{D}$.

$$\mathcal{D} \triangleq \left\{ D_s \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u} : d_{ii} = 0 \text{ ou } 1 \text{ e } d_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j \right\}. \quad (16)$$

A condição $x(t) \in \mathcal{L}(H_k)$ permite que o sinal de controle saturado seja descrito em uma combinação convexa entre os limites de saturação e o sinal de controle não saturado (HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003). O Lema 1, apresentado a seguir, fornece condições suficientes para $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{L}(H_k)$ (BOYD *et al.*, 1994; HU; LIN; CHEN, 2002; ALVES *et al.*, 2016).

Lema 1. (ALVES et al., 2016) Sejam os conjuntos $\mathcal{E}(P, \delta)$ (15) e $\mathcal{L}(H_k)$ (14). A condição $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{L}(H_k)$ é satisfeita se as LMIs

$$\begin{bmatrix} \rho_l^2 \delta^{-1} & G_{k_l} \\ G_{k_l}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (17)$$

forem factíveis para todo $k \in \mathbb{K}_{n_r}$ e $l \in \mathbb{K}_{n_u}$. $G_{k_l} = H_{k_l}X$ e $X = P^{-1}$.

Demonstração. Pré e pós multiplicando (17) por $\text{diag}\{1, P\}$ e aplicando o complemento de Schur tem-se

$$\begin{aligned} P - H_{k_l}^T \rho_l^{-2} \delta H_{k_l} &\geq 0, \\ P &\geq H_{k_l}^T \rho_l^{-2} \delta H_{k_l}, \\ x^T(t)Px(t) &\geq x^T(t)H_{k_l}^T \rho_l^{-2} \delta H_{k_l}x(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Considerando $x(t) \in \mathcal{E}(P, \delta)$ tem-se $x^T(t)Px(t) \leq \delta$, logo

$$\begin{aligned} \delta &\geq x^T(t)Px(t) \geq \rho_l^{-2} \delta x^T(t)H_{k_l}^T H_{k_l}x(t), \\ \rho_l^2 &\geq x^T(t)H_{k_l}^T H_{k_l}x(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Portanto $x(t) \in \mathcal{L}(H_k)$ e, conseqüentemente, $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{L}(H_k)$. $\square$

A descrição da saturação do sinal de controle em uma combinação convexa pode ser feita utilizando os conjuntos $\mathcal{D}$ (16). Seja o sinal de controle saturado $\text{sat}(u(t)) \in \mathbb{R}^{n_u}$ (13). Para todo $x(t) \in \mathcal{L}(H_k)$, $\text{sat}(u(t))$ pode ser reescrito como (HU; LIN; CHEN, 2002; ALVES et al., 2016)

$$\text{sat}(u(t)) = \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s [D_s(u(t)) + D_s^-(Hx(t))]. \quad (20)$$

Considerando o sinal de controle saturado com realimentação de estados (9)

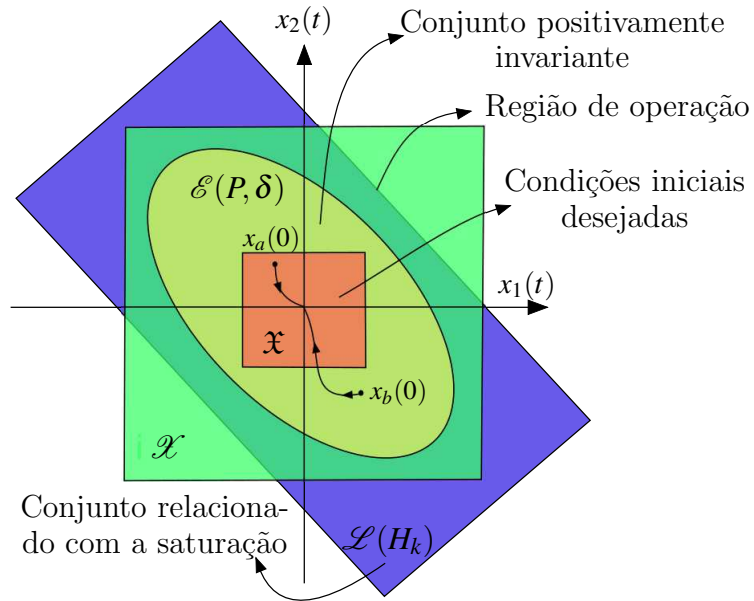
$$\text{sat}(-Kx(t)) = \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s [D_s(-Kx(t)) + D_s^-(Hx(t))], \quad (21)$$

em que $D_s \in \mathcal{D}$, $D_s^- = I - D_s$, $\lambda_s \geq 0$ e $\sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s = 1$.

Duas trajetórias de estados, $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$, são apresentadas na Figura

2 considerando um sistema em malha fechada e exemplificando a teoria discutida neste capítulo sobre os conjuntos apresentados e as condições de pertencimento de cada um deles. Observe que $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{X}$. Logo o conjunto de condições iniciais $\mathfrak{X}$ está contido na região de atração $\mathcal{E}(P, \delta)$, que por sua vez é um subconjunto da região de operação $\mathcal{X}$. Observe que $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{L}(H_k)$, portanto $x(t) \in \mathcal{L}(H_k)$ e a função saturação (13) pode ser descrita como combinação convexa do próprio sinal de controle e dos limites de saturação. A condição inicial $x_a(0)$ pertence ao subconjunto de condições iniciais $\mathfrak{X}$ e a condição $x_b(0)$ pertence ao subconjunto $\mathcal{E}(P, \delta)$. Então as duas condições iniciais pertencem à região de atração $\mathcal{E}(P, \delta)$ e o sistema em malha fechada é assintoticamente estável.

Figura 2 - Trajetória dos estados $x(t)$ e regiões $\mathfrak{X}$ (44), $\mathcal{E}(P, \delta)$ (15), $\mathcal{L}(H_k)$ (14) e $\mathcal{X}$ (5) no plano $x_1(t) \times x_2(t)$.



Fonte: Modificado de (ALVES, 2017)

2.4 SISTEMA FUZZY TS AUMENTADO PARA O CONTROLE DE SERVO SISTEMAS

O sistema aeropêndulo é um servo sistema e a existência de um erro em regime permanente nas implementações é observada. Para resolver esta problemática, é inserida uma ação integral ao sistema de controle aplicado ao sistema aeropêndulo por meio da inserção de uma nova variável de estado ao sistema. Tal técnica é apresentada em Teixeira *et al.* (2006) e a nova variável de estado inserida é $\xi(t)$ representada pela integral do erro entre posições medida e desejada. A técnica elimina o erro em regime permanente garantindo

a operação do sistema em pontos de equilíbrio diferentes da origem. Considere o sistema não linear descrito a seguir

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{22}$$

em que $f(x(t), u(t))$ é continuamente diferenciável, $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$. Suponha que (22) possa ser representado por modelos *fuzzy* TS (4).

Seja (x_e, u_e) , $x_e \in \mathbb{R}^{n_x}$ e $u_e \in \mathbb{R}^{n_u}$, um ponto de equilíbrio do sistema e r_0 uma constante conhecida de referência para o sistema de controle. Deseja-se projetar uma lei de controle $\hat{u}(t)$ tal que

$$\hat{y}(t) = \bar{C}\hat{x}(t) \longrightarrow r_0 \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow +\infty.\tag{23}$$

Entretanto $\hat{u}(t)$ e $\hat{x}(t)$ devem ser limitados ($|\hat{u}(t)|$ e $\|\hat{x}(t)\| < \infty$, para $t \geq 0$).

No projeto do controlador, considerando (23), é adicionada uma nova variável de estado $\xi(t)$ ao sistema (22) de modo a atingir a especificação exigida em (23). Logo o novo sistema é (TEIXEIRA *et al.*, 2006)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \\ \dot{\xi}(t) = Cx(t) - r_0, \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}\tag{24}$$

em que $e(t) = Cx(t) - r_0$ é o erro de trajetória.

Considerando o sistema (24) reescrito por modelos *fuzzy* TS (4) tem-se o seguinte sistema aumentado

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) [\bar{A}_i \hat{x}(t) + \bar{B}_i \hat{u}(t)] + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} r_0, \\ \hat{y}(t) = \bar{C} \hat{x}(t) \end{cases}\tag{25}$$

em que $\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}$, $\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$, $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) = 1$ e $\alpha_i(z(t)) \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$.

O modelo *fuzzy* TS aumentado (25) possui a seguinte lei de controle com realimentação do vetor de estado $\hat{x}(t)$ considerando o novo estado $\xi(t)$

$$\hat{u}(t) = u_1(x(t)) + u_2(\xi(t)) = -\hat{K}\hat{x}(t), \quad (26)$$

em que $u_1(x(t)) = -Kx(t)$, $u_2(\xi(t)) = -K_I\xi(t)$, $\hat{K} = \begin{bmatrix} K & K_I \end{bmatrix}$ e $\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \xi(t) \end{bmatrix}^T$.

De (25) e (26), tem-se o sistema realimentado

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) \{ \bar{A}_i - \bar{B}_i \hat{K} \} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} r_0, \\ \hat{y}(t) = \bar{C}\hat{x}(t) \end{cases} \quad (27)$$

$$\text{em que } \bar{A}_i - \bar{B}_i \hat{K} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K & B_i K_I \\ C & 0 \end{bmatrix}.$$

2.5 CONCLUSÕES PARCIAIS

A descrição de sistemas não lineares por modelos *fuzzy* TS e estabilização de tais sistemas usando controlador de ganho único são usadas neste trabalho. Os índices de desempenho como taxa de decaimento e função de custo garantido quadrático são importantes para as aplicações do trabalho assim como a descrição do sinal de controle por uma combinação convexa. A teoria proposta para aumentar o sistema *fuzzy* TS a fim de controlar servo sistemas aparenta ser uma boa alternativa encontrada como solução para eliminação do erro em regime permanente observado nas implementações. Os conhecimentos expostos neste capítulo são utilizados para o projeto dos controladores de ganho único e chaveados dos próximos capítulos.

3 CONTROLE DE GANHO ÚNICO E CHAVEADO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS DESCRITO POR MODELOS *FUZZY* TS

Nesta seção são apresentados projetos de controladores robustos de ganho único (BOYD *et al.*, 1994) e chaveados (SOUZA *et al.*, 2014b; ALVES *et al.*, 2016) aplicáveis a sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* TS (4). Diferentemente dos controladores robustos de ganho único, os controladores chaveados possuem mais de um ganho e selecionam o melhor ganho de realimentação, entre uma possibilidade de ganhos pré calculados, baseando-se na minimização da derivada da função de Lyapunov

$$V(x) = x^T(t)Px(t). \quad (28)$$

A lei de chaveamento retorna o valor do índice a ser usado na seleção do ganho $K_i, i \in \mathbb{K}_{n_r}$. Uma matriz auxiliar $\bar{Q}_j \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, j \in \mathbb{K}_{n_r}$, é usada para obtenção do índice

$$\sigma(t) = \arg^* \min_{j \in \mathbb{K}_{n_r}} \{x^T(t)\bar{Q}_jx(t)\}. \quad (29)$$

O controlador chaveado é definido a seguir

$$u(t) = u_\sigma(t) = -K_\sigma x(t), \quad \sigma(t) \in \mathbb{K}_{n_r}, \quad (30)$$

em que $\sigma(t)$ é o índice j e resulta no menor valor de $x^T(t)\bar{Q}_jx(t)$. As matrizes de realimentação $K_\sigma, \sigma(t) \in \mathbb{K}_{n_r}$ e decisão $\bar{Q}_i, i \in \mathbb{K}_{n_r}$ são obtidas por meio dos projetos apresentados nas próximas seções.

3.1 CONTROLE CHAVEADO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES DESCRITO POR MODELOS *FUZZY* TS SUJEITO À SATURAÇÃO DOS ATUADORES

Nesta seção, é apresentado um controlador chaveado aplicável a sistemas não lineares incertos descritos por modelos *fuzzy* TS. Todavia, neste caso, é considerado que os atuadores estão sujeitos à saturação (ALVES *et al.*, 2016). O sistema não linear descrito por modelos *fuzzy* TS sujeito à saturação (12) utiliza lei de chaveamento (29) e controle (30).

A saturação do sinal de controle chaveado considerada no projeto dos controladores é

$$\text{sat}(u_{\sigma}(t)) = \text{sat}(-K_{\sigma}x(t)), \quad \sigma(t) \in \mathbb{K}_{n_r}, \quad (31)$$

em que $\sigma(t)$ é o valor do índice j e resulta no menor valor de $x^T(t)\bar{Q}_jx(t)$.

O Teorema 2 é apresentado em Alves *et al.* (2016) e propõe condições para estabilidade assintótica do sistema não linear descrito por modelos *fuzzy* TS (12) com controle chaveado $u_{\sigma}(t)$ (30) sujeito à saturação dos atuadores e lei de chaveamento (29).

Teorema 2. (ALVES et al., 2016) *Dado um sistema não linear incerto descrito por modelos fuzzy TS sujeito à saturação dos atuadores (12) em uma região de operação $x(t) \in \mathcal{X}$ (5). Sejam $\rho_l \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\phi_h \in \mathbb{R}^{n_p}$ e $N \in \mathbb{R}^{n_p \times n_x}$ conhecidos e a faixa de valores dos parâmetros incertos também conhecida. Suponha a existência de matrizes simétricas $X > 0$, Q_i e $Z_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $G_j = [G_{1j}^T \ G_{2j}^T \ \dots \ G_{n_uj}^T]^T$ e $M_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e um escalar $\gamma \geq 0$ tais que as seguintes LMIs*

$$A_iX + XA_i^T + Z_i + Q_i + 2\gamma X < 0, \quad (32)$$

$$B_i[-D_sM_j + D_s^-G_j] + [-D_sM_j + D_s^-G_j]^T B_i^T - Z_i - Q_j \leq 0, \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} \rho_l^2 \delta^{-1} & G_{lj} \\ G_{lj}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 \delta^{-1} & N_h X \\ X N_h^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (35)$$

sejam satisfeitas para todo i e $j \in \mathbb{K}_{n_r}$, $l \in \mathbb{K}_{n_u}$, $h \in \mathbb{K}_{n_p}$, $s \in \mathbb{K}_{2n_u}$, $D_s \in \mathcal{D}$ e $D_s^- = I_{n_u} - D_s$. Então $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{L}(H_k)$ e a lei de controle chaveada (30) torna a origem um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (12) com taxa de decaimento maior ou igual a γ para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P, \delta)$. $\bar{Q}_i = X^{-1}Q_iX^{-1}$ e os ganhos dos controladores são $K_i = M_iX^{-1}$. Então todas as trajetórias de $x(t)$, para $t > 0$, permanece dentro da região de atração $\mathcal{E}(P, \delta)$ (15).

Demonstração. Assuma como candidata a função de Lyapunov (28), sendo $P = P^T \in$

$\mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $P > 0$. Então, a partir do sistema (12) e da lei de controle (30) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T(t)P\dot{x}(t) + \dot{x}^T(t)Px(t) = x^T(t) \left[A^T(\alpha)P + PA(\alpha) \right] x(t) + \\ &+ \text{sat}(-K_\sigma x(t))^T B^T(\alpha)Px(t) + x^T(t)PB(\alpha)\text{sat}(-K_\sigma x(t)). \end{aligned} \quad (36)$$

Se $x(t) \in \mathcal{L}(H_k)$ (14), $k \in \mathbb{K}_{n_r}$, então $x(t) \in \mathcal{L}(H_\sigma)$ e $\text{sat}(-K_\sigma x(t))$ pode ser reescrito a seguir (HU; LIN; CHEN, 2002)

$$\text{sat}(-K_\sigma x(t)) = \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s [D_s(-K_\sigma x(t)) + D_s^-(H_\sigma x(t))], \quad (37)$$

em que $\sigma \in \mathbb{K}_{n_r}$, $D_s \in \mathcal{D}$, $D_s^- = I_{n_u} - D_s$, e $\lambda_s \geq 0$, $\sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s = 1$. Assim, a partir de (36) e (37), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T(t) \{ A^T(\alpha)P + PA(\alpha) \} x(t) \\ &+ \left\{ \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s [D_s(-K_\sigma x(t)) + D_s^-(H_\sigma x(t))]^T B^T(\alpha)P \right\} x(t) \\ &+ x^T(t) \left\{ PB(\alpha) \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s [D_s(-K_\sigma x(t)) + D_s^-(H_\sigma x(t))] \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Pré e pós multiplicando (33) por $P = X^{-1}$ e fazendo as seguintes mudanças de variáveis

$$G_j X^{-1} = H_j, \quad M_j X^{-1} = K_j, \quad \bar{Z}_i = X^{-1} Z_i X^{-1} \quad \text{e} \quad \bar{Q}_i = X^{-1} Q_i X^{-1}, \quad (39)$$

para $j = \sigma$, tem-se

$$[-D_s K_\sigma + D_s^- H_\sigma]^T B_i^T P + P B_i [-D_s K_\sigma + D_s^- H_\sigma] \leq \bar{Z}_i + \bar{Q}_\sigma. \quad (40)$$

Multiplicando (40) por $\alpha_i(z)$, $\alpha_i(z) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z) = 1$ e somando de $i = 1$ a n_r . Multiplicando o resultado por λ_s , $\lambda_s \geq 0$, $\sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s = 1$ e somando de $s = 1$ a 2^{n_u} , obtêm-se

$$\sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s \left\{ [-D_s K_\sigma + D_s^- H_\sigma]^T B^T(\alpha)P + PB(\alpha) [-D_s K_\sigma + D_s^- H_\sigma] \right\} \leq \bar{Z}(\alpha) + \bar{Q}_\sigma, \quad (41)$$

em que $\bar{Z}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z) \bar{Z}_i$.

Da lei de controle (30), $x^T(t) \bar{Q}_\sigma x(t) = \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{ x^T(t) \bar{Q}_i x(t) \} \leq \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z) x^T(t) \bar{Q}_i x(t) = x^T(t) \bar{Q}(\alpha) x(t)$. Então, a partir de (41) e (38), tem-se

$$\dot{V}(x) \leq x^T(t) \left\{ A^T(\alpha)P + PA(\alpha) + Z(\alpha) + Q(\alpha) \right\} x(t). \quad (42)$$

Pré e pós multiplicando (32) por $P = X^{-1}$ e fazendo as mudanças de variáveis (39). Multiplicando o resultado por $\alpha_i(z) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z) = 1$ e fazendo a soma de $i = 1$ a n_r , tem-se

$$A^T(\alpha)P + PA(\alpha) + Z(\alpha) + Q(\alpha) < -2\gamma P. \quad (43)$$

Para uma taxa de decaimento maior ou igual a γ é suficiente que $\dot{V}(x) \leq -2\gamma V(x)$ (BOYD *et al.*, 1994). Logo, a partir de (42) e (43) esta condição é garantida.

Observando o Lema 1, a restrição (34) assegura $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{L}(H_k)$. Então, para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P, \delta)$ tem-se $x(0) \in \mathcal{L}(H_k)$ e a descrição da função saturação em uma combinação convexa (37) pode ser utilizada (HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003). Seguindo passos análogos à prova do Lema 1, a restrição (35) garante $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{X}$ e o sistema não linear sujeito à saturação dos atuadores pode ser exatamente descrito por (12). As restrições (32) e (33) asseguram que $\mathcal{E}(P, \delta)$ é um conjunto positivamente invariante (BLANCHINI, 1999) para o sistema em malha fechada (12) e (30). Estas restrições são suficientes para que toda trajetória iniciada com $x(0) \in \mathcal{E}(P, \delta)$ permaneça em $\mathcal{X}$ para todo $t > 0$ (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015). Durante a trajetória de estado do sistema $V(x) \leq \delta$, para $t \geq 0$, ou seja, não deixa o conjunto $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{X}$. $\square$

Se as condições do Teorema 2 forem satisfeitas, a estabilidade local do sistema não linear incerto (12) com lei de controle chaveada (30) e taxa de decaimento γ é garantida para toda condição inicial $x(0) \in \mathcal{E}(P, \delta)$. Desta forma, é interessante assegurar que o conjunto de condições iniciais $\mathfrak{X}$, definido em (44), esteja contido em $\mathcal{E}(P, \delta)$ e, consequentemente, para qualquer condição inicial $x(0) \in \mathfrak{X}$ tem-se $x(0) \in \mathcal{E}(P, \delta)$. O Teorema 3 apresenta condições suficientes para $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(P, \delta)$.

$$\mathfrak{X} = \varpi \text{ co}\{w_1, \dots, w_{n_{x_0}}\}, \quad \varpi > 0. \quad (44)$$

Teorema 3. (CAO; LIN, 2003) *Seja um conjunto de condições iniciais $\mathfrak{X}$ (44). Então*

$\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(P, \delta)$ é assegurado se as LMIs

$$\begin{bmatrix} \varpi^{-2} \delta & w_l^T \\ w_l & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (45)$$

forem factíveis para todo $l \in \mathbb{K}_{n_{x_0}}$, em que n_{x_0} é o número de vértices conhecidos do politopo de condições iniciais. Observe que ϖ é um fator de escala do conjunto $\text{co}\{w_1, \dots, w_{n_{x_0}}\}$, portanto ϖ pode ser utilizado como uma variável que pode ser maximizada (minimização de ϖ^{-2}) de forma a obter uma estimativa menos conservadora do conjunto de condições iniciais $\mathcal{E}(P, \delta)$.

Demonstração. Qualquer elemento de $\mathfrak{X}$ pode ser escrito como $\varpi w(\alpha) = \varpi \sum_{l=1}^{n_{x_0}} \alpha_l w_l$, $\alpha_l \geq 0$ e $\sum_{l=1}^{n_{x_0}} \alpha_l = 1$. Então, supondo que $\mathfrak{X}$ exista para todo $l \in \mathbb{K}_{n_{x_0}}$, multiplicando a desigualdade (45) por α_l , realizando o somatório de $l = 1$ a n_{x_0} e aplicando complemento de Schur com relação à segunda linha e coluna, tem-se

$$\varpi^{-2} \delta - w(\alpha)^T P w(\alpha) \geq 0,$$

em que $P = X^{-1}$, então $\delta \geq [\varpi w(\alpha)^T] P [\varpi w(\alpha)]$ e consequentemente $\varpi w(\alpha) \in \mathcal{E}(P, \delta)$ qualquer que seja $\varpi w(\alpha) \in \mathfrak{X}$. Portanto $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(P, \delta)$. $\square$

Nas implementações práticas, os controladores podem apresentar valores elevados de ganhos e inviabilizar a realização das implementações pois estes valores elevados resultam em sinais de controle grandes. Tendo em vista essa problemática, os valores elevados para os ganhos são evitados inserindo a restrição $\mathcal{E}(P, \nu) \subset \mathcal{L}(K_j)$. O Teorema 4 impõe condições para que $\mathcal{E}(P, \nu) \subset \mathcal{L}(K_j)$ seja garantido.

Teorema 4. (HU; LIN; CHEN, 2002; OLIVEIRA et al., 2018) *Seja o conjunto $\mathcal{E}(P, \nu)$ (15), $X = P^{-1} > 0$ e um escalar $\nu > 0$. A condição $\mathcal{E}(P, \nu) \subset \mathcal{L}(K_j)$ é imposta se as LMIs*

$$\begin{bmatrix} \rho_l^2 \nu^{-1} & M_{lj} \\ M_{lj}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (46)$$

forem factíveis para todo $j \in \mathbb{K}_{n_r}$ e $l \in \mathbb{K}_{n_u}$. Observe que $\mathcal{L}(K_j)$ é similar a $\mathcal{L}(H_k)$ (14).

Demonstração. A prova deste teorema é similar à prova do Lema 1. $\square$

3.2 CONTROLE DE GANHO ÚNICO E CHAVEADO COM CUSTO GARANTIDO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES DESCRITO POR MODELOS *FUZZY* TS SUJEITO À SATURAÇÃO DOS ATUADORES

Nesta seção, inclui-se o custo garantido (7) ao projeto do sistema de controle. Este índice é minimizado no projeto dos controladores para sistemas *fuzzy* TS (12) incertos sujeitos à saturação dos atuadores com lei de chaveamento (29) e controle (30). Neste trabalho, é proposto o Teorema 5 com condições para estabilidade assintótica da origem com minimização do limite superior β do índice J (7) e taxa de decaimento γ .

Teorema 5. *Considere um sistema não linear incerto sujeito a saturação dos atuadores descrito por modelos fuzzy TS (12) em uma região de operação $\mathcal{X}$ (5) e o índice de performance J (7). Sejam $\rho_l \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\phi_h \in \mathbb{R}^{n_p}$, $N \in \mathbb{R}^{n_p \times n_x}$ e $R \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ conhecidos e a faixa de valores dos parâmetros incertos também conhecida. Suponha a existência de matrizes simétricas $X > 0$, Q_i e $Z_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes G_j e $M_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e escalares $\bar{\beta} = \beta^{-1} > 0$ e $\gamma \geq 0$ tais que as seguintes LMIs*

$$\begin{aligned} & \underset{X, M_i, G_i, Q_i, Z_i}{\text{maximize}} \quad \bar{\beta} \\ & \text{sujeito a} \\ & B_i [-D_s M_j + D_s^- G_j] + [-D_s M_j + D_s^- G_j]^T B_i^T - Z_i - Q_j \leq 0, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{bmatrix} X A_i^T + A_i X + 2\gamma X + Q_i + Z_i & X C^T \\ C X & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (48)$$

$$\begin{bmatrix} \rho_l^2 \bar{\beta} & G_{lj} \\ G_{lj}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \phi_h^2 \bar{\beta} & N_h X \\ X N_h^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\beta} & \bar{\beta} x_k^T(0) \\ x_k(0) \bar{\beta} & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (50)$$

sejam factíveis para todo i e $j \in \mathbb{K}_{n_r}$, $l \in \mathbb{K}_{n_u}$, $h \in \mathbb{K}_{n_p}$, $k \in \mathbb{K}_{n_{x_0}}$, $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$, $D_s \in \mathcal{D}$ e $D_s^- = I - D_s$. Então a lei de controle chaveada (30) torna a origem um ponto de equilíbrio

assintoticamente estável do sistema não linear incerto (12) com taxa de decaimento maior ou igual a γ assegurando o índice de performance $J < \beta$ para todo $x(0)$ pertencente ao conjunto convexo x_0 (8). $\bar{Q}_i = X^{-1}Q_iX^{-1}$ e os ganhos dos controladores são $K_i = M_iX^{-1}$. Então todas as trajetórias de $x(t)$, para $t > 0$, permanece dentro da região de atração $\mathcal{E}(P, \beta)$.

Demonstração. Considere como candidata a função de Lyapunov (28), sendo $P = P^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $P > 0$. A partir do sistema (12) e da lei de controle (30), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) = x^T(t)[A(\alpha)^TP + PA(\alpha)]x(t) \\ &\quad + \text{sat}(-K_\sigma x(t))^TB(\alpha)^TPx(t) + x^T(t)PB(\alpha)\text{sat}(-K_\sigma x(t)). \end{aligned} \quad (51)$$

Se $x(t) \in \mathcal{L}(H_k)$ (14), $k \in \mathbb{K}_{n_r}$, então $x(t) \in \mathcal{L}(H_\sigma)$ e $\text{sat}(-K_\sigma x(t))$ pode ser reescrito a seguir (HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003)

$$\text{sat}(-K_\sigma x(t)) = \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s [D_s(-K_\sigma x(t)) + D_s^-(H_\sigma x(t))], \quad (52)$$

em que $\sigma \in \mathbb{K}_{n_r}$, $D_s \in \mathcal{D}$, $D_s^- = I_{n_u} - D_s$, e $\lambda_s \geq 0$, $\sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s = 1$. A partir de (51) e (52), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T(t)\{A(\alpha)^TP + PA(\alpha)\}x(t) \\ &\quad + \left\{ \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s [D_s(-K_\sigma x(t)) + D_s^-(H_\sigma x(t))]^TB(\alpha)^TP \right\} x(t) \\ &\quad + x^T(t) \left\{ PB(\alpha) \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s [D_s(-K_\sigma x(t)) + D_s^-(H_\sigma x(t))] \right\}. \end{aligned} \quad (53)$$

Supondo que as condições do Teorema 5 sejam satisfeitas e aplicando o complemento de Schur em (48), tem-se

$$XA_i^T + A_iX + 2\gamma X + Q_j + Z_i + XC^TRCX < 0. \quad (54)$$

Pré e pós multiplicando (54) por $P = X^{-1}$ e fazendo as mudanças de variáveis (39). Multiplicando por $\sum_1^{n_r} \alpha_i$ e fazendo o somatório de $i = 1$ a n_r , tem-se

$$A(\alpha)^TP + PA(\alpha) + 2\gamma P + Q(\alpha) + Z(\alpha) + C^TRC < 0. \quad (55)$$

Pré e pós multiplicando (47) por $P = X^{-1}$ e fazendo as mudanças de variáveis (39).

Multiplicando por $\sum_1^{n_r} \alpha_i$, fazendo o somatório de $i = 1$ a n_r e considerando $j = \sigma$, tem-se

$$PB(\alpha)[-D_s K_\sigma + D_s^- H_\sigma] + [-D_s K_\sigma + D_s^- H_\sigma]^T B(\alpha)^T P - Z(\alpha) - Q_\sigma \leq 0. \quad (56)$$

Multiplicando (56) por $\lambda_s, \lambda_s \geq 0$ e $\sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s = 1$, tem-se

$$\sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s \left\{ [-D_s K_\sigma + D_s^- H_\sigma]^T B(\alpha)^T P + PB(\alpha)[-D_s K_\sigma + D_s^- H_\sigma] \right\} \leq Z(\alpha) + Q_\sigma. \quad (57)$$

A partir da lei de chaveamento (29) e sabendo que o mínimo de um conjunto convexo de números reais é menor ou igual que a combinação dos elementos do próprio conjunto (ALVES, 2017), tem-se

$$x^T(t) \bar{Q}_\sigma x(t) = \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{x^T(t) \bar{Q}_i x(t)\} \leq \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z) x^T(t) \bar{Q}_i x(t) = x^T(t) \bar{Q}(\alpha) x(t). \quad (58)$$

A partir de (53), (57) e (58), tem-se

$$\dot{V}(x) \leq x^T(t) \left\{ A(\alpha)^T P + PA(\alpha) + Z(\alpha) + Q(\alpha) \right\} x(t). \quad (59)$$

Considerando (55) e (59), tem-se

$$\dot{V}(x) + 2\gamma V(x) < -x^T(t) C^T R C x(t). \quad (60)$$

De (60), tem-se $\dot{V}(x) + 2\gamma V(x) < 0$. Esta é uma condição suficiente para a estabilidade assintótica da origem do sistema (12) com lei de controle (30) e taxa de decaimento maior ou igual a γ (BOYD *et al.*, 1994). Sabendo que $P > 0$, tem-se $\dot{V}(x) < -x^T(t) C^T R C x(t)$. Integrando ambos os lados de 0 a ∞ e considerando J (7), tem-se

$$J < V(0) = x^T(0) P x(0). \quad (61)$$

Pré e pós multiplicando (50) por $\text{diag}\{\beta, I\}$, multiplicando por $\sum_1^{n_{x_0}} \lambda_k$, fazendo a somatória de $k = 1$ a n_{x_0} , aplicando o complemento de Schur e considerando o conjunto de condições iniciais x_0 (8), tem-se

$$\beta \geq x^T(0) P x(0) = V_\sigma(0) > J. \quad (62)$$

Então, tem-se $J < \beta$ para todo $x(0)$ pertencente ao conjunto x_0 (8).

A partir do Lema 1, a primeira restrição de (49) assegura $\mathcal{E}(P, \beta) \subset \mathcal{L}(H_k)$. Logo para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P, \beta)$ tem-se $x(0) \in \mathcal{L}(H_k)$ e a descrição da função saturação em uma combinação convexa (20) pode ser usada (HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003; ALVES *et al.*, 2016). Seguindo passos análogos à prova do Lema 1, a segunda restrição de (49) garante $\mathcal{E}(P, \beta) \subset \mathcal{X}$ e o sistema não linear sujeito a saturação do atuador pode ser exatamente descrito por (12). As restrições (47) e (48) asseguram que $\mathcal{E}(P, \beta)$ é um conjunto positivamente invariante (BLANCHINI, 1999) para o sistema em malha fechada (12) com lei de chaveamento (29) e controle (30). Estas restrições são suficientes para que toda trajetória iniciada com $x(0) \in \mathcal{E}(P, \beta)$ permaneça em $\mathcal{X}$ para todo $t > 0$ (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015). Durante a trajetória de estado do sistema $V(x) \leq \beta$, para $t \geq 0$, ou seja, não deixa o conjunto $\mathcal{E}(P, \beta) \subset \mathcal{X}$. $\square$

Se os ganhos dos controladores possuírem valores elevados, as implementações práticas podem ser inviabilizadas. Na face deste problema, os valores elevados para os ganhos dos controladores podem ser evitados inserindo a restrição $\mathcal{E}(P, \nu) \subset \mathcal{L}(K_j)$. Para tanto, a LMI (46) do Teorema 4 pode ser adicionada às LMIs do Teorema 5 para inserir a restrição $\mathcal{E}(P, \nu) \subset \mathcal{L}(K_j)$ e, conseqüentemente, diminuir a norma dos ganhos dos controladores.

Além de ser proposto o projeto de controle chaveado para estabilidade assintótica de sistemas não lineares incertos sujeitos à saturação dos atuadores descritos por modelos *fuzzy* TS (12) com minimização do custo garantido quadrático J (7). Também é proposto o projeto para o controle robusto de ganho único (9). O Teorema 6 propõe tais condições para projeto dos controladores aplicáveis ao sistema (12) com índice de performance J e taxa de decaimento γ .

Teorema 6. *Considere um sistema não linear incerto sujeito a saturação do atuador descrito por modelos fuzzy TS (12) em uma região de operação $\mathcal{X}$ (5) e o índice de performance J (7). Sejam $\rho_l \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\phi_h \in \mathbb{R}^{n_p}$, $N \in \mathbb{R}^{n_p \times n_x}$ e $R \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ conhecidos e a faixa de valores dos parâmetros incertos também conhecida. Suponha a existência de uma matriz simétrica $X > 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes G e $M \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e escalares $\beta > 0$ e $\gamma \geq 0$ tais que as*

seguintes LMIs

$$\begin{aligned} & \underset{X, M, G}{\text{maximize}} \quad \bar{\beta} \\ & \text{sujeito a} \\ & \begin{bmatrix} \vartheta & XC^T \\ CX & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{bmatrix} \rho_l^2 \bar{\beta} & G_l \\ G_l^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \phi_h^2 \bar{\beta} & N_h X \\ X N_h^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (64)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\beta} & \bar{\beta} x_k^T(0) \\ x_k(0) \bar{\beta} & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (65)$$

em que $\vartheta = XA_i^T + A_i X + 2\gamma X + B_i[-D_s M + D_s^- G] + [-D_s M + D_s^- G]^T B_i^T$ sejam factíveis para todo $i \in \mathbb{K}_r$, $l \in \mathbb{K}_{nu}$, $h \in \mathbb{K}_{np}$, $k \in \mathbb{K}_{n0}$, $s \in \mathbb{K}_{2nu}$, $D_s \in \mathcal{D}$ e $D_s^- = I_{nu} - D_s$. Então a lei de controle de ganho único (9) torna a origem um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema não linear incerto (12) com taxa de decaimento maior ou igual a γ assegurando que $J < \beta$ para todo $x(0)$ pertencente ao conjunto convexo x_0 (8). O ganho do controlador é $K = MX^{-1}$. Então todas as trajetórias de $x(t)$, para $t > 0$, permanece dentro da região de atração $\mathcal{E}(P, \beta)$.

Demonstração. Similar à prova do Teorema 5. □

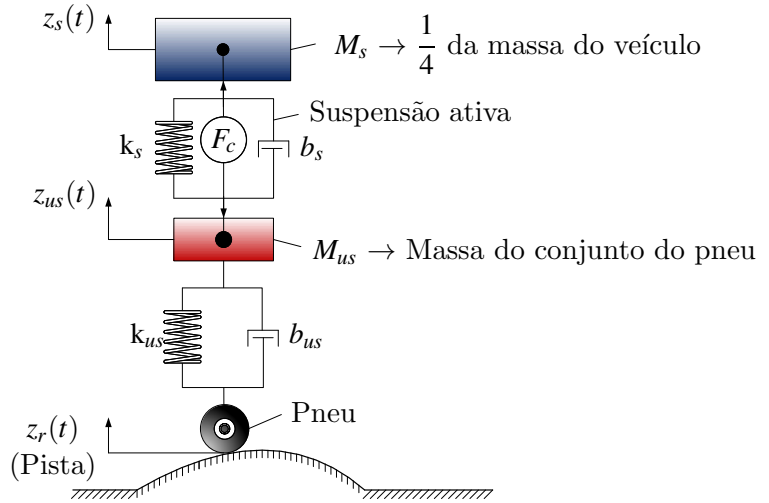
3.2.1 Implementação dos Controladores Robusto de Ganho Único e Chaveado Sujeito à Saturação dos Atuadores com Custo Garantido na Suspensão Ativa de Bancada

A implementação dos controladores robusto de ganho único e chaveado sujeitos à saturação dos atuadores e índice de performance J (7) são realizadas na suspensão ativa de bancada (QUANSER, 2010). Uma não linearidade da constante da mola (ONAT *et al.*, 2009) é considerada. Além das implementações práticas, uma comparação numérica também é apresentada. Esta comparação relaciona os valores de β (limite superior da função de custo garantido) com o incremento de falha nos atuadores. Comparações entre o controle robusto de ganho único (9) e o controle chaveado (30) são apresentadas para

verificação do desempenho de cada um dos controladores ao utilizar mesmos parâmetros de projeto. O sistema de suspensão ativa de bancada produzido pela Quanser[®] (QUANSER, 2010) é representado pelo modelo esquemático da Figura 3.

A proposta do sistema de suspensão ativa é diminuir as oscilações e o desconforto sentido pelos passageiros. O sistema consiste em um conjunto de duas massas, denotadas por M_s e M_{us} . A massa M_s representa 1/4 da massa total de um veículo e é suportada por uma mola com constante k_s e um amortecedor b_s . A massa M_{us} corresponde a massa do pneu e é suportada por uma mola de constante k_{us} e um amortecedor b_{us} . As vibrações causadas pelas irregularidades da pista $z_r(t)$ podem ser atenuadas pelo sistema de suspensão ativa, que é composto por um motor conectado entre as massas M_s e M_{us} e controlado por uma força F_c (OLIVEIRA *et al.*, 2018).

Figura 3 - Sistema de suspensão ativa de bancada.



Fonte: (OLIVEIRA *et al.*, 2018)

De acordo com Onat *et al.* (2009), a constante da mola possui comportamento não linear próximo ao final da mesma. Portanto é adotado um modelo matemático não linear simplificado para a suspensão ativa de bancada considerando a não linearidade da mola (OLIVEIRA *et al.*, 2018). A não linearidade da mola é representada a seguir

$$k_{us}(z_{us} - z_r, \Delta k_{us}) = k_{us0}(1 + \Delta k_{us}|z_{us} - z_r|). \quad (66)$$

Além disso, é considerada falha no atuador resultando em perda de potência. Esta perda de potência é representada por $k_{falha}(t)$ e a falha no atuador pode ser considerada

como incerteza politópica. Supondo a falha no sinal de controle, tem-se

$$u(t)_{falha} = k_{falha}(t)u(t), \quad u(t) = F_c(t). \quad (67)$$

No modelo físico da suspensão ativa, a massa M_s pode assumir valores entre 1,455 kg e 2,45 kg. Portanto a massa M_s é considerada como uma incerteza paramétrica pertencente ao intervalo $1,455 \leq M_s \leq 2,45$ kg. Considerando a modelagem apresentada em Quanser (2010) e as informações contidas em (66) e (67), o modelo dinâmico da suspensão ativa de bancada é

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{b_s}{M_s} & 0 & \frac{b_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{b_s}{M_{us}} & f_{43}(z) & -\frac{(b_s + b_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_{falha}}{M_s} \\ 0 \\ -\frac{k_{falha}}{M_s} \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) = Cx(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \quad f_{43}(z(t)) = -\frac{k_{us0}(1 + \Delta k_{us}|z_{us} - z_r|)}{M_{us}}, \end{aligned} \quad (68)$$

em que o vetor de estados é $x(t) = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) & \dot{z}_s(t) & z_{us}(t) - z_r(t) & \dot{z}_{us}(t) \end{bmatrix}^T$.

Os valores dos parâmetros da suspensão ativa são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 - Parâmetros da suspensão ativa de bancada.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa de 1/4 do veículo (kg)	M_s	1,455 – 2,45
Massa do conjunto do pneu (kg)	M_{us}	1
Constante da mola (N/m)	k_s	900
Constante da mola (N/m)	k_{us0}	2500
Coefficiente de amortecimento (Ns/m)	b_s	7,5
Coefficiente de amortecimento (Ns/m)	b_{us}	5
Parâmetro da mola (m^{-1})	Δk_{us0}	5,71

Fonte: (OLIVEIRA *et al.*, 2018)

A metodologia proposta em Santim *et al.* (2012) é usada para encontrar os modelos locais. Considerando que a falha do atuador pode ser de 0% a 30% de sua potência tem-se $0,7 \leq k_{falha} \leq 1$. A mola da suspensão ativa possui limite físico de comprimento, logo as variáveis de estado $x_1(t)$ e $x_3(t)$ são limitadas ao intervalo $-0,035 \leq x_1(t), x_3(t) \leq 0,035$ m. Sabendo das informações anteriores, tem-se o seguinte domínio $\mathfrak{D}$ de variáveis premissas

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} = \{z(t) = [x^T \Delta k_{us} M_s]^T \in \mathbb{R}^6 : -0,035 \leq x_1(t), x_3(t) \leq 0,035, \\ 0 \leq \Delta k_{us} \leq 5,71, \quad 1,455 \leq M_s \leq 2,45\}. \end{aligned} \quad (69)$$

Os valores máximos e mínimos da função $f_{43}(z(t))$, dada em (68), considerando o domínio $\mathfrak{D}$ são

$$\max_{z(t) \in \mathfrak{D}} \{f_{43}(z(t))\} = -2500, \quad \min_{z(t) \in \mathfrak{D}} \{f_{43}(z(t))\} = -3000. \quad (70)$$

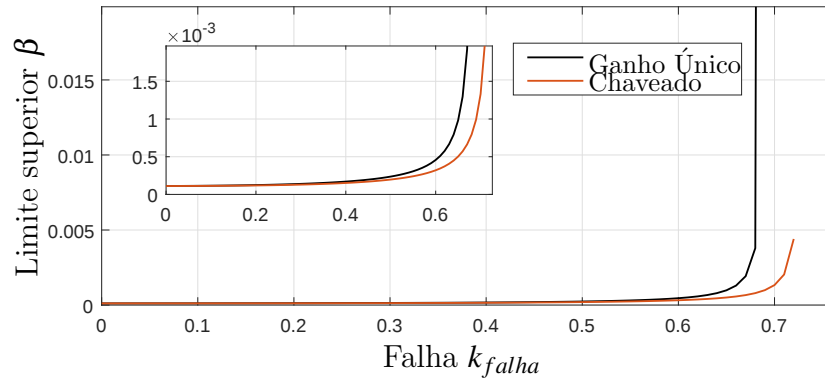
A partir de (68)-(70) e da Tabela 1, os modelos locais da suspensão ativa são

$$\begin{aligned} A_1=A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,34 & -3,06 & 0 & 3,06 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -3000 & -12,5 \end{bmatrix}, & B_1=B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2857 \\ 0 \\ -0,7 \end{bmatrix}, \\ A_2=A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,34 & -3,06 & 0 & 3,06 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, & B_3=B_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4082 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \\ A_5=A_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -618,55 & -5,15 & 0 & 5,15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -3000 & -12,5 \end{bmatrix}, & B_5=B_6 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4811 \\ 0 \\ -0,7 \end{bmatrix}, \\ A_6=A_8 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -618,55 & -5,15 & 0 & 5,15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, & B_7=B_8 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0,6873 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (71)$$

Os parâmetros para projeto dos controladores usados na simulação e implementações são $\rho = 39,2$, $\phi = [0,35 \ 0,35]^T$, $N_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$, $N_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$, $v^{-1} = 50000$, $R = I_{2 \times 2}$, $\gamma = 0$ e x_0 formado considerando os intervalos $-0,02 \leq x_1(0) \leq 0,02$, $-0,02 \leq x_3(0) \leq 0,02$ e $x_2(0) = x_4(0) = 0$. É apresentado na Figura 4 um teste de factibilidade no qual os Teoremas 5 e 6 são comparados e usados juntamente com o Teorema 4.

O limite superior β para a função de custo garantido J com controle chaveado é menor do que com controle robusto de ganho único à medida que o valor da falha aumenta no atuador. Tal problema torna-se infactível para valores maiores que 68% de falha usando controle de ganho único e 73% de falha usando controle chaveado. Portanto, além do controle chaveado apresentar β menor para o índice de performance do custo garantido J , ele também apresenta maior factibilidade em relação ao controle de ganho único.

Figura 4 - Limite superior β da função de custo garantido J em relação à falha do atuador aplicado ao sistema de suspensão ativa.



Fonte: Próprio autor.

As implementações apresentadas nessa seção possuem intervalo de operação entre 0 e 18 segundos e massa $M_s = 2,45$ kg. Para o intervalo de $[0, 6)$ segundos, o sistema está em malha aberta. Para $[6, 12)$ segundos, o sistema está em malha fechada e sem falha no atuador com lei de controle (9) para o controle robusto de ganho único e (30) para o controle chaveado. Por fim, entre $[12, 18]$ segundos, uma falha de 30% é inserida no sinal de controle. A referência $z_r(t)$ produz um sinal de onda quadrada com amplitude 0,02 m, frequência 1/3 Hz e largura de pulso de 50%.

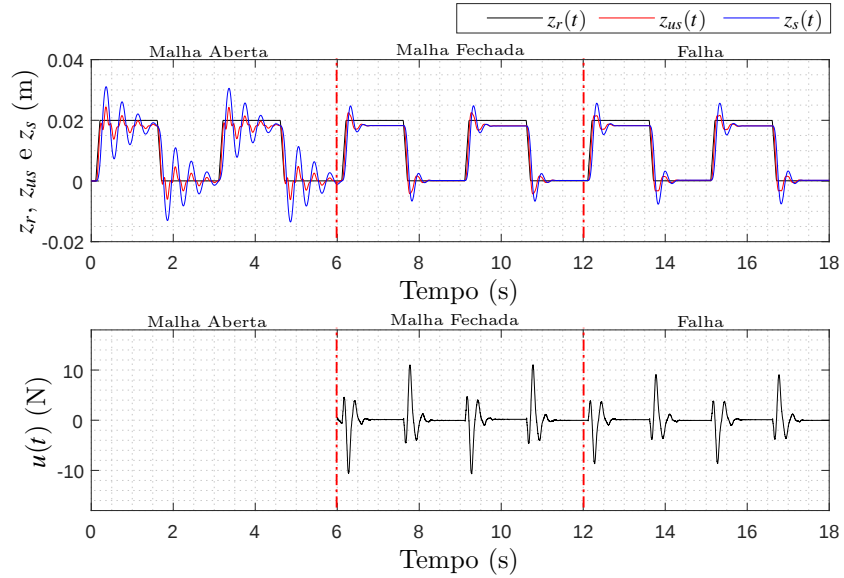
A implementação do controlador robusto de ganho único é a primeira a ser realizada e é considerado falha no atuador de 0% até 30%. Os Teoremas 4 e 6 são usados para o projeto do controlador. A solução encontrada é $\beta = 2,1160 \times 10^{-4}$ com o seguinte ganho

$$K = \begin{bmatrix} 830,774 & 95,510 & -81,668 & -49,313 \end{bmatrix}. \quad (72)$$

As posições relativas $z_s(t)$ e $z_{us}(t)$ das massas M_s e M_{us} e o sinal de controle $u(t)$ para o controlador robusto de ganho único são apresentados na Figura 5. O sistema em

malha aberta é estável porém apresenta uma amplitude de oscilações alta provocando desconforto para os ocupantes do veículo e estresse mecânico. Já quando o controle é acionado, o sistema de suspensão ativa diminui as oscilações causadas pela superfície da pista $z_r(t)$ mostrando a eficácia do controle utilizado com o índice de performance de custo garantido J (7) considerado no projeto. Ao inserir a falha de 30% no sinal de controle, o sistema apresenta um aumento das oscilações, todavia trata-se de um aumento pequeno comparado com o sistema em malha aberta.

Figura 5 - Controle de ganho único projetado com os Teoremas 4 e 6 aplicado no sistema de suspensão ativa.



Fonte: Próprio autor.

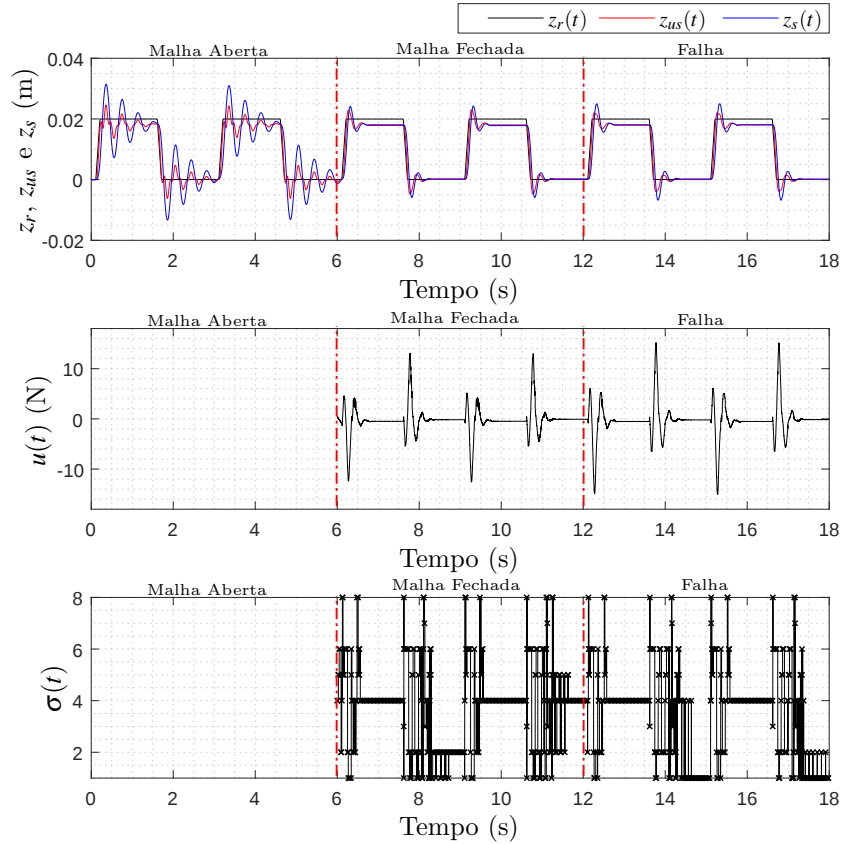
Posteriormente, a implementação do controlador chaveado (30) sujeito a saturação (13) dos atuadores aplicáveis a sistemas não lineares incertos descritos por modelos *fuzzy* TS (12) com lei de chaveamento (29) é realizada. Os mesmos parâmetros de projeto do controlador robusto de ganho único e condições de implementação são usados para o projeto do controlador chaveado. Os Teoremas 4 e 5 foram usados para o projeto do controlador. A solução encontrada é $\beta = 1,3007 \times 10^{-4}$ com os ganhos

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \begin{bmatrix} 1094,582 & 89,234 & 165,869 & -42,256 \end{bmatrix}, \\
 K_2 &= \begin{bmatrix} 1042,260 & 89,071 & -18,835 & -43,725 \end{bmatrix}, \\
 K_3 &= \begin{bmatrix} 997,004 & 87,989 & -49,455 & -44,913 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_4 &= \begin{bmatrix} 896,700 & 85,966 & -385,574 & -49,333 \end{bmatrix}, \\
K_5 &= \begin{bmatrix} 712,390 & 85,543 & -73,171 & -47,118 \end{bmatrix}, \\
K_6 &= \begin{bmatrix} 712,390 & 85,543 & -73,171 & -47,118 \end{bmatrix}, \\
K_7 &= \begin{bmatrix} 654,378 & 83,233 & -250,106 & -49,362 \end{bmatrix}, \\
K_8 &= \begin{bmatrix} 654,378 & 83,233 & -250,106 & -49,362 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{73}$$

Os mesmos tempos de operação em malha aberta, malha fechada sem falha no atuador e com falha de 30% são usados. A referência $z_r(t)$ é escolhida para produzir o mesmo sinal de onda quadrada usada na implementação do controle robusto de ganho único. As posições relativas z_s e z_{us} das massas M_s e M_{us} , o sinal de controle $u_\sigma(t)$ e o índice de chaveamento $\sigma(t)$ são apresentados na Figura 6.

Figura 6 - Controle chaveado projetado com os Teoremas 4 e 5 aplicado no sistema de suspensão ativa.



Fonte: Próprio autor.

O controlador chaveado, além de apresentar diminuição das oscilações causadas pela superfície da pista $z_r(t)$, mostra ser melhor que o controlador robusto de ganho único pois

a diminuição das oscilações foi maior mesmo para o caso de 30% de falha no atuador. O valor do limitando superior β do índice de performance J é menor para o controle chaveado. O sinal de controle chaveado é maior que o controle de ganho único, porém não assume valores excessivamente altos e nem ocorre a saturação. Logo o controlador chaveado também se mostra eficaz para o uso do índice de performance de custo garantido J (7) inserido no projeto de controle.

A função de custo garantido J (7) busca diminuir a diferença entre as posições z_s e z_{us} e entre as posições z_{us} e z_r . Sabendo que a matriz de leitura de saída do sistema C é dado em (68) e a matriz R é uma matriz identidade. Então a tendência deste sistema é também diminuir as oscilações da posição z_{us} e conseqüentemente de z_s . Durante os transitórios, o controle chaveado possui um bom chaveamento entre os ganhos a fim de obter uma minimização da derivada da função de Lyapunov (28). A saturação do sinal de controle não ocorreu, porém ela é considerada no projeto de controle assegurando a estabilidade do sistema caso ela ocorra durante as implementações.

3.3 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo, foram propostas diversas técnicas para projeto de controladores robustos de ganho único e chaveados aplicáveis a sistemas não lineares incertos descritos por modelos *fuzzy* TS. O controle chaveado apresenta maior factibilidade e, conseqüentemente, melhor desempenho em relação ao controle robusto de ganho único ao considerar saturação dos atuadores e função de custo garantido J no projeto dos controladores. Os resultados contidos na Seção 3.2 foram publicados e apresentados no IFAC *World Congress* 2020 (IFAC - *International Federation of Automatic Control*) considerado um dos maiores congressos internacionais na área de controle automático. O congresso foi realizado em Berlim - Alemanha, no período de 11 a 17 de julho de 2020 e as apresentações dos trabalhos foram realizadas remotamente. Foi o primeiro congresso realizado de forma totalmente virtual, denominado 1st *Virtual IFAC World Congress* (IFAC-V 2020). O trabalho publicado é Silva *et al.* (2020a).

4 MODELAGEM E IMPLEMENTAÇÃO DO SISTEMA AEROPÊNDULO

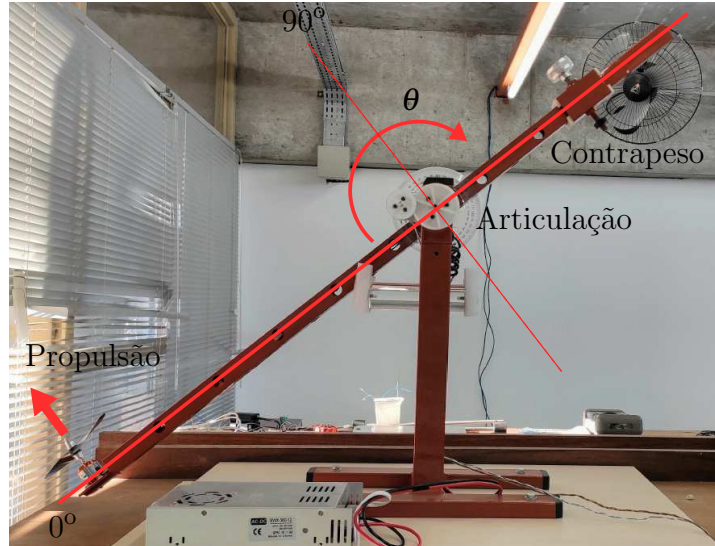
A implementação no sistema aeropêndulo dos controladores robustos de ganho único e chaveados apresentados anteriormente é um dos principais objetivos deste trabalho. Logo, para isso, é necessário descrever e identificar o sistema aeropêndulo, projetar os controladores e implementá-los no sistema. O sistema aeropêndulo foi construído no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS) da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Todos os controladores citados nos capítulos anteriores serão implementados para fins de análise e comparação dos resultados. Deseja-se que o aeropêndulo se estabilize em pontos de operações diferentes da origem para cada instante a depender dos objetivos do projetista. Além da descrição do sistema e da apresentação do método utilizado para obter os modelos locais do aeropêndulo. O uso de integradores também é usado, portanto é inserido uma nova variável de estado ao sistema. Tal método soluciona o problema de erro em regime permanente e melhora os resultados.

4.1 DESCRIÇÃO E MODELAGEM DO SISTEMA AEROPÊNDULO

O sistema aeropêndulo (VEIGA, 2016) apresentado na Figura 7 é composto por uma haste fixa com movimento rotacional em torno de uma articulação central (pivô) na qual existe um potenciômetro linear usado como sensor para fornecimento da posição angular. A haste do aeropêndulo é feita de alumínio e possui 1 metro de comprimento. O pivô é posicionado 0,6 metros de distância do propulsor e 0,4 metros de distância da outra extremidade. Essa assimetria cria um centro de massa não coincidente com a posição do pivô. Na extremidade direita há um propulsor (composto por um motor *brushless* e uma hélice) de modo a atingir uma posição angular desejada para o sistema aeropêndulo. Na outra extremidade há um contrapeso com posição e massa variáveis que permitem alterar

o centro de massa do sistema aumentando ou diminuindo o torque produzido.

Figura 7 - Sistema aeropêndulo produzido no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) da FEIS-UNESP.



Fonte: Próprio autor.

A faixa de operação física do sistema é aproximadamente 90° . E o potenciômetro está ligado a um sistema de engrenagens que melhora a relação mecânica e aumenta a sensibilidade de leitura. A amplitude de rotação passa de 90° para 300° . A posição do sistema inerte é considerada como ponto de referência, ou seja, 0° é a posição do sistema parado. O motor do aeropêndulo é usado em veículos aéreos não tripulados pois ele fornece alta potência utilizando pouco volume e peso. Tal motor possui apenas um sentido de rotação e é acionado por um driver Controlador Eletrônico de Velocidade - *Electronic Speed Controller* (ESC) posicionado no interior da haste e alimentado por uma fonte CC. O ESC converte o sinal CC em alternado a fim de alimentar o motor. O sinal de controle $u_t(t)$ fornecido para alimentar o ESC é um sinal *pulse width modulation* (PWM) com 5 V modulado por largura de pulso entre $1000\mu s$ e $1800\mu s$ e frequência de 500 Hz . O controle em tempo real e a comunicação entre equipamento e microcomputador é feita por uma placa de aquisição de dados Q2-USB. O uso desta placa permite a comunicação do sistema aeropêndulo com o *software* Simulink do MatLab[®]. Mais informações sobre a construção do sistema aeropêndulo da Figura 7 são apresentadas em Veiga (2016).

O sistema aeropêndulo pode ser representada por um sistema não linear de segunda ordem como apresentado em Job e Jose (2015). Todavia a modelagem apresentada em

Job e Jose (2015) não pode ser usada pois os parâmetros do sistema usado neste trabalho diferem dos parâmetros considerados em Job e Jose (2015). O projeto dos controladores robustos de ganho único e chaveados apresentados nos capítulos anteriores são calculados por meio de LMIs. Visto que os parâmetros do sistema são desconhecidos e consequentemente o modelo em espaço de estados também, pretende-se encontrar modelos em espaço de estados que permitem o projeto dos controladores. Para isso, são feitos alguns experimentos e o *software* MatLab[®] é usado para identificar o sistema aeropêndulo. Em Job e Jose (2015), tem-se o seguinte modelo não linear em espaço de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{m l g d \sin(\theta)}{\mathfrak{J} \theta(t)} & \frac{c}{\mathfrak{J}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{\mathfrak{J}} \end{bmatrix} u(t), \quad (74)$$

em que m é o peso do pêndulo (kg), l é o comprimento do pêndulo (m), d é a distância do pivô ao centro de massa (m), c é o coeficiente de amortecimento viscoso (Nms/rad), $\mathfrak{J}$ é momento de inércia (kgm²), g é aceleração da gravidade (m/s²), K_m é o ganho do propulsor (Nm/ μ s), $u(t)$ é a entrada do sistema aeropêndulo (μ s), $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ são as variáveis de estado deslocamento angular (graus) e velocidade angular (graus/s), respectivamente.

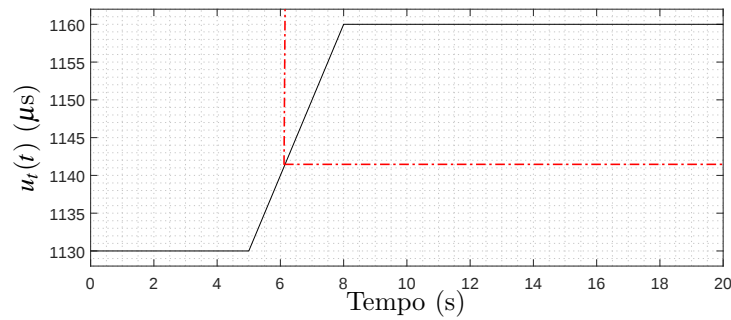
Seja o sistema linearizado em torno do ponto de equilíbrio e representado pela função de transferência correspondente

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{K_m/\mathfrak{J}}{s^2 + (c/\mathfrak{J})s + (m l g d)/\mathfrak{J}}. \quad (75)$$

Os parâmetros da função de transferência são desconhecidos e simplificados pelos coeficientes $a_{21} = (m l g d)/\mathfrak{J}$, $a_{22} = c/\mathfrak{J}$ e $b_{21} = K_m/\mathfrak{J}$. Estes coeficientes são estimados pelo *software* MatLab[®] considerando entradas do tipo rampa no sistema em malha aberta, veja Figura 10. Além do sistema não ser modelado, ele também possui uma zona morta, ou seja, são requeridos entrada inicial u_0 para retirar o sistema do repouso e tratamento dos dados obtidos. Para os mesmos valores de entrada, foram identificados valores diferentes que retiram o sistema da zona morta. O primeiro passo da identificação é determinar o instante e o valor u_0 necessário para retirar o sistema da zona morta. Na Figura 9 é mostrado como tal instante é determinado e, sabendo disto, o valor de u_0 é encontrado por

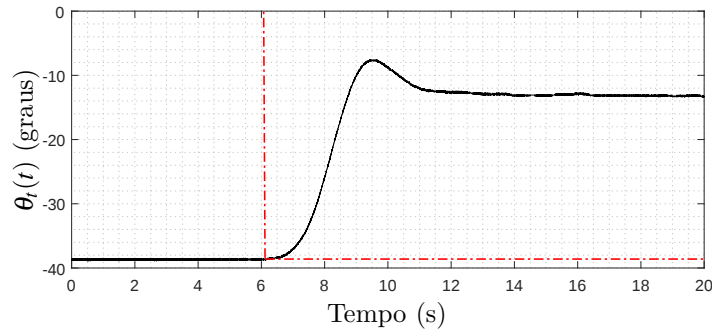
meio da Figura 8. As linhas tracejadas das Figuras 8 e 9 indicam o instante e o valor de u_0 encontrados, portanto ocorre um deslocamento no tempo e uma mudança referencial respeitando as linhas tracejadas obtendo os dados das Figuras 10 e 11 que são usados na identificação. A entrada usada na identificação é $u(t) = u_t(t) - u_0$, em que $u_t(t)$ é a entrada total que inclui a entrada inicial u_0 necessária para retirar o sistema da zona morta. Na Figura 10 são apresentados os dados de entrada $u(t)$ repetidos para um mesmo valor de $u_t(t)$ e na Figura 11 são apresentados os dados de saída do sistema aeropêndulo para cada entrada correspondente.

Figura 8 - Entrada $u_t(t) = 1160\mu s$ para o sistema em malha aberta.



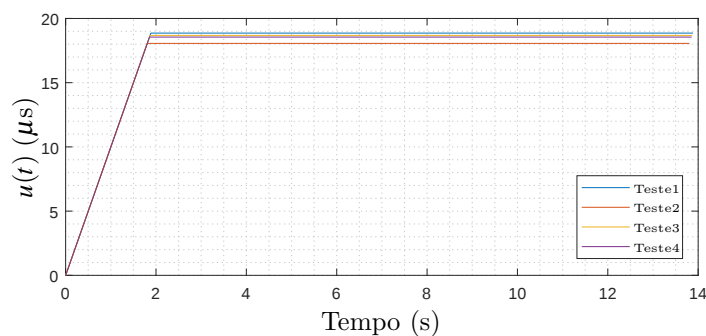
Fonte: Próprio autor.

Figura 9 - Saída $\theta_t(t)$ em malha aberta com $u_t(t) = 1160\mu s$.



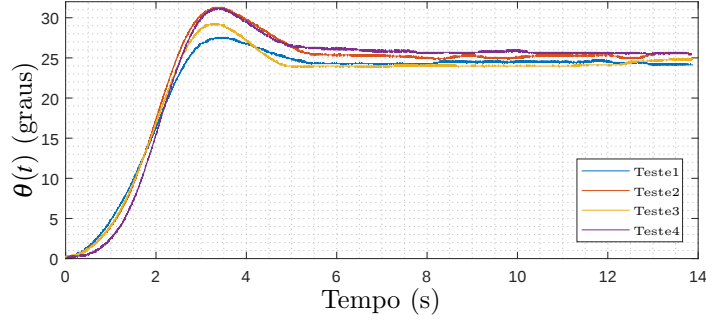
Fonte: Próprio autor.

Figura 10 - Entradas $u(t) = u_t(t) - u_0$ usada para identificação do sistema com $u_t(t) = 1160\mu s$.



Fonte: Próprio autor.

Figura 11 - Saídas $\theta(t)$ usada para identificação do sistema com $u_t(t) = 1160\mu s$.



Fonte: Próprio autor.

O procedimento citado acima para obtenção dos dados de entrada e saída do sistema usados na identificação é repetido para outros valores de $u_t(t)$ respeitando as limitações físicas do sistema. Consequentemente o número de pontos de operações identificados é grande. Os valores de entrada para o sinal de controle $u_t(t)$ variam entre $1145\mu s$ e $1162\mu s$. Os coeficientes da função de transferência (75) são identificados para todas as curvas similares às Figuras 10 e 11. Entre todos os coeficientes obtidos na identificação, selecionam-se os respectivos valores de máximos e mínimos para cada coeficiente. Os resultados encontrados são

$$\begin{aligned} a_{211} &= 2,9138, & a_{221} &= 1,9776, & b_{211} &= 0,0481, \\ a_{212} &= 1,6243, & a_{222} &= 0,8289, & b_{212} &= 0,1076. \end{aligned} \quad (76)$$

Os valores máximos e mínimos dos coeficientes são combinados a fim de obter funções de transferência. Em seguida, transforma-se essas funções de transferência, por meio da realização na forma canônica controlável, em espaço de estados. Desta forma é obtido modelos locais lineares de um sistema *fuzzy* TS com $n_r = 2^3$ regras considerando o número de combinações possíveis entre os máximos e mínimos apresentados em (76). As matrizes A_i e B_i , para $i \in \mathbb{K}_{n_r}$, encontrados para cada modelo local do sistema aeropêndulo são

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2,9138 & -1,9776 \end{bmatrix}, & A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2,9138 & -0,1076 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0481 \end{bmatrix}^T, \\ A_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1,6243 & -1,9776 \end{bmatrix}, & A_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1,6243 & -0,1076 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1076 \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (77)$$

$$A_1 = A_2, \quad A_3 = A_4, \quad A_5 = A_6, \quad A_7 = A_8,$$

$$B_1 = B_3 = B_5 = B_7, \quad B_2 = B_4 = B_6 = B_8.$$

Cada modelo local do sistema aeropêndulo é descrito a seguir

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad (78)$$

em que o vetor de estados é $x(t) = [\theta(t) \quad \dot{\theta}(t)]^T$ e a entrada de controle é $u_t(t)$.

As matrizes apresentadas em (77) são usadas nas implementações do sistema aeropêndulo para os casos em que o integrador não é considerado na planta. A seguir, respeitando a teoria apresentada na Seção 2.4, são apresentadas as matrizes dos modelos locais lineares $\bar{A}_i$ e $\bar{B}_i$, para $i \in \mathbb{K}_{n_r}$ para um sistema aumentado (25), neste caso, é considerada a inserção de uma nova variável de estado $\xi(t)$ ao sistema

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2,9138 & -1,9776 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2,9138 & -0,1076 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0481 \\ 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\bar{A}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1,6243 & -1,9776 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1,6243 & -0,1076 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1076 \\ 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_2, \quad \bar{A}_3 = \bar{A}_4, \quad \bar{A}_5 = \bar{A}_6, \quad \bar{A}_7 = \bar{A}_8, \quad (79)$$

$$\bar{B}_1 = \bar{B}_3 = \bar{B}_5 = \bar{B}_7, \quad \bar{B}_2 = \bar{B}_4 = \bar{B}_6 = \bar{B}_8.$$

Cada modelo local do sistema aeropêndulo aumentado é descrito a seguir

$$\dot{\hat{x}}(t) = \bar{A}_i \hat{x}(t) + \bar{B}_i \hat{u}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T r_0, \quad (80)$$

em que o vetor de estados é $\hat{x}(t) = [\theta(t) \quad \dot{\theta}(t) \quad \xi(t)]^T$ e a entrada de controle é $\hat{u}_t(t)$ (26).

Na próxima seção, são apresentadas as implementações dos controladores robustos de ganho único e chaveados no sistema aeropêndulo. A identificação mostrada nesta seção e as leis de controle robusto de ganho único (9) e chaveado (30) são utilizadas.

Na maior parte das implementações os controladores estão sujeitos à saturação (13) dos atuadores e são usados os modelos tanto com integrador (aumentado) (80) quanto sem integrador (original) (78) para o sistema aeropêndulo. As informações de cada uma das implementação antecedem a apresentação dos resultados.

4.2 PROJETO E IMPLEMENTAÇÕES PRÁTICAS DOS CONTROLADORES

As implementações apresentadas nesta seção seguem a seguinte ordem: A primeira delas utiliza controle robusto de ganho único para os sistemas aeropêndulo original (78) e aumentado (80), em seguida, é feito a implementação do controle chaveado considerando que os atuadores estão sujeitos à saturação (31) para os sistemas aeropêndulo original e aumentado também, por fim, é apresentada a implementação com controladores robusto de ganho único e chaveado apenas para o sistema aumentado (80) considerando o índice de performance J (7) e saturação dos atuados (13). Após as implementações, é possível analisar e comparar os resultados de cada tipo de controle identificando as vantagens e desvantagens, seja usando o sistema aeropêndulo original (78) ou aumentado (80).

Em todas as implementações é usado $u_0 = 1136\mu s$, ou seja, este valor é aplicado como entrada inicial durante todo o tempo de implementação, pois tal valor retira o sistema da zona morta. Sendo essa zona morta, portanto, desconsiderada. Além do valor inicial u_0 , o sistema é bem sensível ao sinal de controle e é necessária uma baixa amplitude do sinal para trabalhar na região de operação. Neste caso, será considerado $\pm 40\mu s$ como um limitante de saturação para o sinal de controle. Logo o intervalo de variação considerado nas implementações é $1096\mu s \leq u_t(t) \leq 1076\mu s$. O sinal de controle a ser aplicado ao sistema é, então, $u_t(t) = u_0 + u(t)$, em que $u(t) = -K_\sigma x(t)$ para o controle chaveado e $u(t) = -Kx(t)$ para o controle robusto de ganho único.

O projeto do controlador robusto de ganho único é obtido por meio do Teorema 1. Os modelos locais (77) e $\gamma = 0,7$ são usados para o projeto utilizando o sistema original (78). No sistema aumentado (80) é usado os modelos locais (79) e $\gamma = 0,2$. As taxas de decaimento foram escolhidas de modo a atingir o melhor resultado possível para cada um

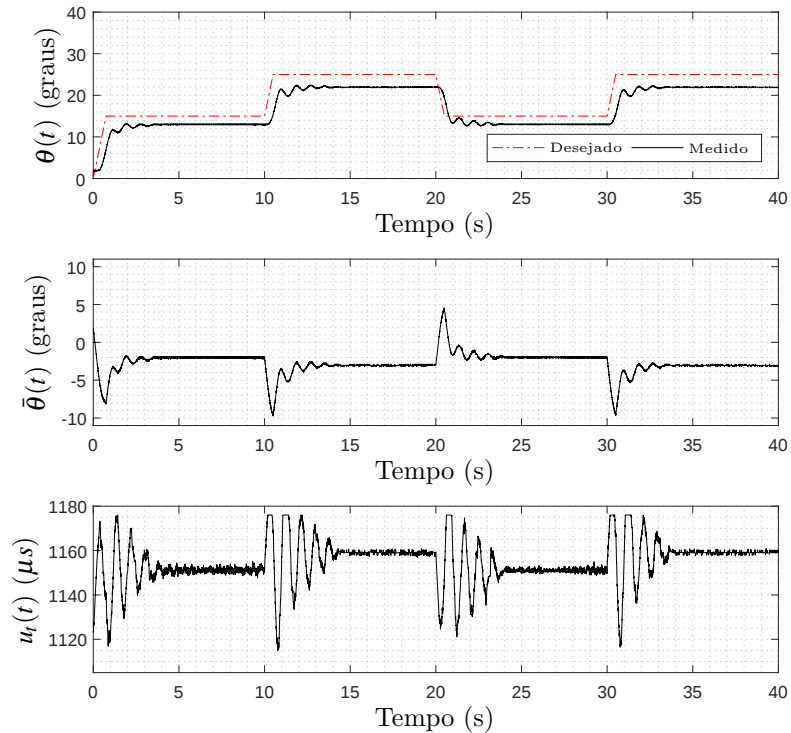
dos sistemas considerados. De modo que para o sistema original ocorresse o menor erro em regime permanente. Os ganhos obtidos para cada um dos projetos do sistema original (78) e aumentado (80) são K e $\hat{K}$, respectivamente.

$$K = \begin{bmatrix} 434,4461 & 195,3918 \end{bmatrix}, \quad (81)$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 233,9010 & 106,1369 & 148,2086 \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Na Figura 12, são apresentados o deslocamento angular $\theta(t)$, a diferença entre posições medida e desejada $\bar{\theta}(t)$ e o sinal de controle $u_t(t)$ aplicado ao sistema original utilizando o ganho K (81). As mesmas respostas para o sistema aumentado são apresentados na Figura 13 e é utilizado o ganho $\hat{K}$ (82). O sistema aumentado (80) elimina o erro em regime permanente observado na implementação do sistema original (78).

Figura 12 - $\theta(t)$, $\bar{\theta}(t)$ e $u_t(t)$ para o controle de ganho único projetado com o Teorema 1 aplicado ao sistema original (78).

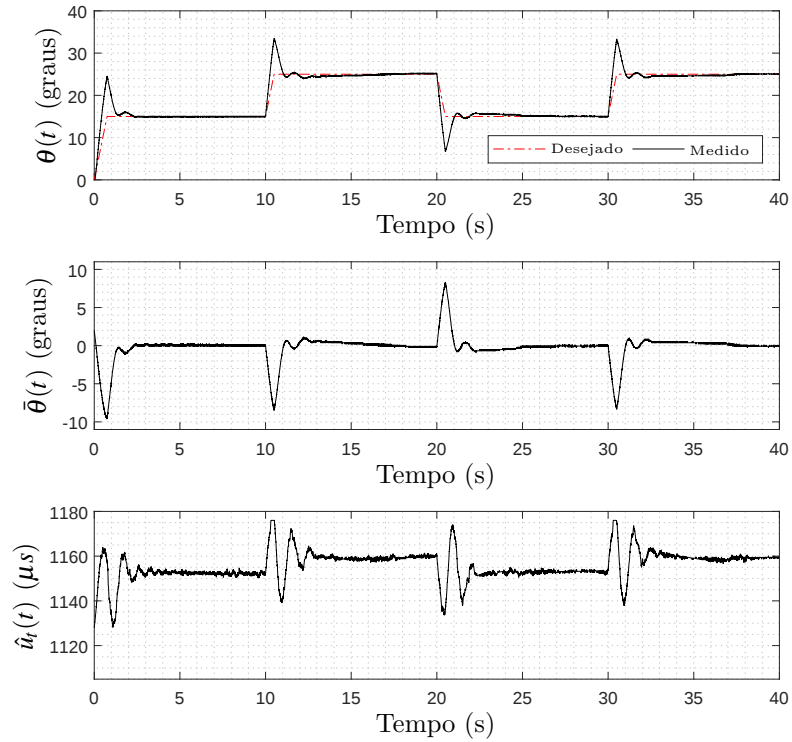


Fonte: Próprio autor.

É visto nas Figuras 12 e 13 que ocorre, em alguns momentos, a saturação dos atuadores. Devido tal existência, é considerada a partir de agora no projeto dos controladores a saturação dos atuadores. O próximo projeto é o controle chaveado sujeito à saturação dos atuadores, o controle chaveado seleciona o melhor ganho entre um conjunto de ganhos

pré calculados a fim de minimizar a derivada da função de Lyapunov. As implementações são feitas tanto para o sistema original (78) quanto para o sistema aumentado (80). Para tal projeto, o Teorema 2 é utilizado em ambos os sistemas com os mesmos parâmetros exceto o valor da taxa de decaimento γ que foi escolhida o máximo valor de modo a atingir $\varpi \approx 1$. Nas implementações, além do Teorema 2, são utilizados os Teoremas 3 e 4 que impõem restrições sobre o conjunto de condições iniciais e sobre a norma dos controladores. O Teorema 3 garante que o sistema permanecerá na região de operação, ou seja, as condições iniciais pertencem à região de atração $\mathcal{E}(P, \delta)$. E o Teorema 4 assegura $\mathcal{E}(P, \nu) \subset \mathcal{L}(K_j)$, esta condição diminui a norma dos controladores.

Figura 13 - $\theta(t)$, $\bar{\theta}(t)$ e $\hat{u}_t(t)$ para o controle de ganho único projetado com o Teorema 1 aplicado ao sistema aumentado (80).



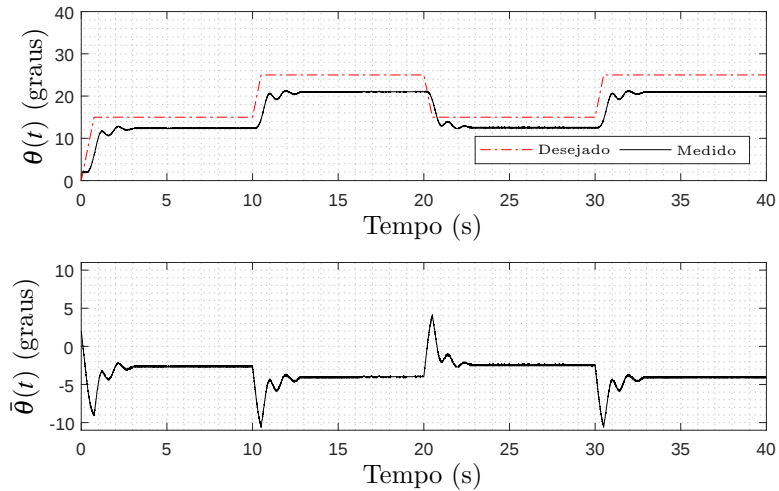
Fonte: Próprio autor.

Os parâmetros usados no projeto do controlador chaveado sujeito à saturação dos atuadores para o sistema aeropêndulo original (78) são $\rho = 40$, $\phi = [70 \ 60]^T$, $N = I_{2 \times 2}$, $\nu^{-1} = 15$, $\delta = 0,35$, $w_1 = [20 \ 1]$, $w_2 = [-20 \ 1]$, $w_3 = [20 \ -1]$, $w_4 = [-20 \ -1]$ e $\gamma = 2$. Utiliza-se também os modelos locais (77). Os resultados encontrados no projeto de controle são $\varpi = 0,9896$ e os ganhos

$$\begin{aligned}
K_1 &= \begin{bmatrix} 291,3090 & 146,6395 \end{bmatrix}, & K_5 &= \begin{bmatrix} 272,7155 & 146,7496 \end{bmatrix}, \\
K_2 &= \begin{bmatrix} 294,3387 & 145,4108 \end{bmatrix}, & K_6 &= \begin{bmatrix} 276,5649 & 145,3070 \end{bmatrix}, \\
K_3 &= \begin{bmatrix} 323,2193 & 146,6156 \end{bmatrix}, & K_7 &= \begin{bmatrix} 305,0972 & 146,2007 \end{bmatrix}, \\
K_4 &= \begin{bmatrix} 329,1714 & 146,3470 \end{bmatrix}, & K_8 &= \begin{bmatrix} 307,5745 & 145,2595 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{83}$$

As Figuras 14 e 15 apresentam o deslocamento angular $\theta(t)$, a diferença entre posições medida e desejada $\bar{\theta}(t)$, o sinal de controle $u_{\sigma t}(t)$ e o índice de chaveamento $\sigma(t)$ da implementação do controlador chaveado sujeito à saturação dos atuadores no sistema aeropêndulo original (78) com ganhos (83). Um erro em regime permanente na saída do sistema é observado. A saturação para este caso também ocorre em determinados momentos, Figura 15, o que não é um problema agravante uma vez que ela é prevista no projeto de controle e a estabilidade local do sistema é garantida mesmo com a ocorrência da saturação dos atuadores.

Figura 14 - $\theta(t)$ e $\bar{\theta}(t)$ para o controle chaveado projetado com os Teoremas 2, 3 e 4 aplicado ao sistema original (78).



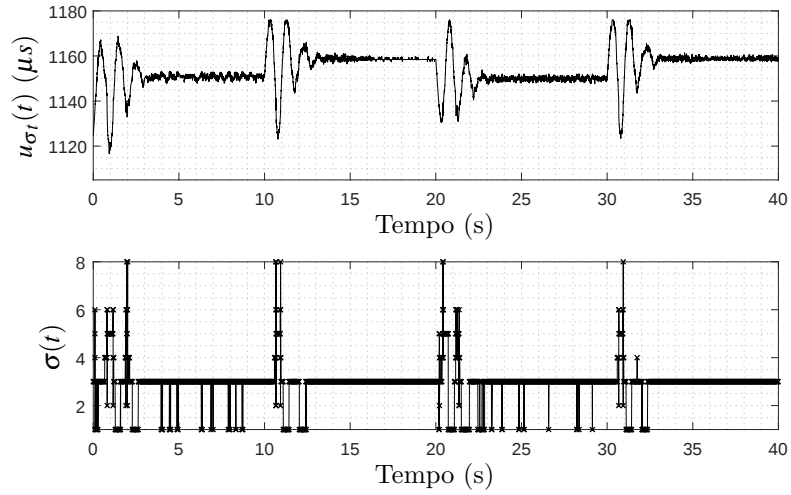
Fonte: Próprio autor.

Para o sistema aeropêndulo aumentado (80), os mesmos Teoremas 2, 3 e 4 são utilizados. Utiliza-se também os modelos locais (79) os seguintes parâmetros $\rho = 40$, $\phi = [70 \ 60 \ 20]^T$, $N = I_{3 \times 3}$, $v^{-1} = 15$, $\delta = 0,35$, $w_1 = [20 \ 1 \ 0]$, $w_2 = [-20 \ 1 \ 0]$, $w_3 = [20 \ -1 \ 0]$, $w_4 = [-20 \ -1 \ 0]$ e $\gamma = 1,2$. Os resultados obtidos no projeto do controlador chaveado

sujeito à saturação dos atuadores são $\varpi = 0,9946$ e os ganhos

$$\begin{aligned} \hat{K}_1 &= \begin{bmatrix} 337,7367 & 128,5171 & 356,5501 \end{bmatrix}, & \hat{K}_5 &= \begin{bmatrix} 321,1317 & 129,1110 & 359,0777 \end{bmatrix}, \\ \hat{K}_2 &= \begin{bmatrix} 323,2072 & 129,3504 & 340,0359 \end{bmatrix}, & \hat{K}_6 &= \begin{bmatrix} 303,3954 & 128,9797 & 338,9064 \end{bmatrix}, \\ \hat{K}_3 &= \begin{bmatrix} 355,6059 & 126,0455 & 375,4061 \end{bmatrix}, & \hat{K}_7 &= \begin{bmatrix} 341,6542 & 127,6322 & 380,5908 \end{bmatrix}, \\ \hat{K}_4 &= \begin{bmatrix} 369,8112 & 125,2588 & 392,0292 \end{bmatrix}, & \hat{K}_8 &= \begin{bmatrix} 357,2668 & 127,3879 & 397,7808 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (84)$$

Figura 15 - $u_{\sigma_t}(t)$ e $\sigma(t)$ para o controle chaveado projetado com os Teoremas 2, 3 e 4 aplicado ao sistema original (78).

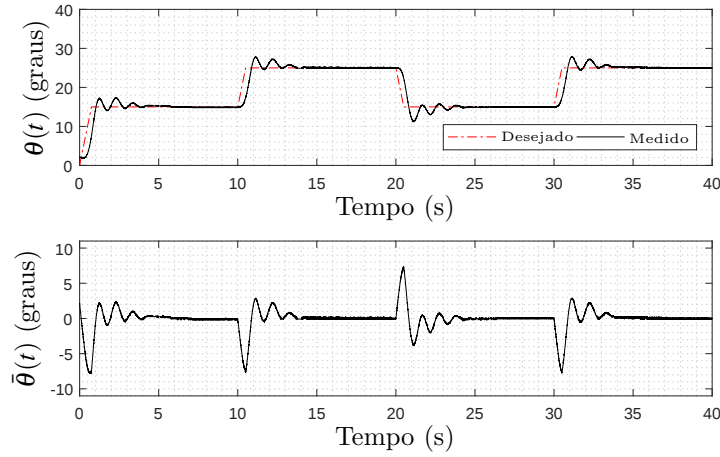


Fonte: Próprio autor.

As Figuras 16 e 17 apresentam os resultados da implementação do controlador chaveado para o sistema aumentado (80) com os ganhos (84). O erro em regime permanente é nulo devido a inserção do integrador ao sistema. Neste caso a saturação dos atuadores ocorre mais vezes do que para o sistema original (78), porém, como dito anteriormente, ela é considerada no projeto de controle. O chaveamento ocorre entre todos os ganhos disponíveis na implementação, fato que não é observado no caso anterior.

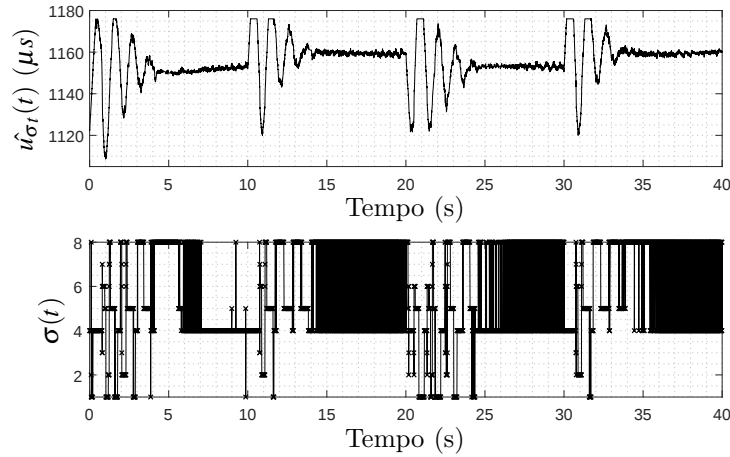
O erro em regime permanente para o controle robusto é menor que o erro para o controle chaveado, todavia não foram usadas as mesmas condições de projeto e esta comparação não é fiel. O controlador chaveado com saturação dos atuadores possui mais restrições de projeto que o controlador robusto de ganho único. Além disso, o controlador chaveado considera saturação dos atuadores enquanto o robusto de ganho único não faz essa consideração.

Figura 16 - $\theta(t)$ e $\bar{\theta}(t)$ para o controle chaveado projetado com os Teoremas 2, 3 e 4 aplicado ao sistema aumentado (80).



Fonte: Próprio autor.

Figura 17 - $\hat{u}_{\sigma t}(t)$ e $\sigma(t)$ para o controle chaveado projetado com os Teoremas 2, 3 e 4 aplicado ao sistema aumentado (80).



Fonte: Próprio autor.

Posteriormente, duas implementações nas quais são consideradas as mesmas condições e parâmetros de projeto tanto para o controle robusto de ganho único quanto para o controle chaveado são apresentadas, em ambos os casos os controladores estão sujeitos à saturação dos atuadores e consideram o índice de performance de custo garantido J (7). Neste caso a comparação entre tais controladores é válida. Sabendo que o uso de integradores resolve o problema do erro em regime permanente observado nas implementações anteriores, apenas o sistema aumentado (80) é utilizado nestas duas últimas implementações. No caso do controle de ganho único, o Teorema 6 é utilizado juntamente com o Teorema 4 que restringe a norma dos controladores. E, no caso do controle chaveado, são usados os Teorema 4 e 5. Os valores dos parâmetros utilizados nos projetos são

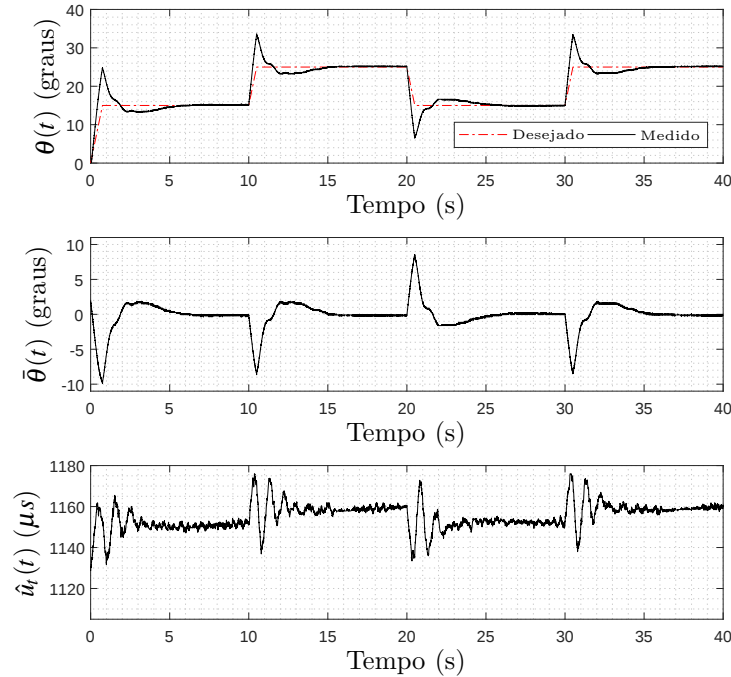
$\rho = 40$, $\phi = [70 \ 60 \ 20]^T$, $N = I_{3 \times 3}$, $v^{-1} = 150$, $R = 1$, $x_1(0) = [20 \ 1 \ 0]$, $x_2(0) = [-20 \ 1 \ 0]$, $x_3(0) = [20 \ -1 \ 0]$, $x_4(0) = [-20 \ -1 \ 0]$ e $\gamma = 0$.

Os resultados obtidos no projeto do controlador robusto de ganho único sujeito à saturação dos atuadores com índice de performance J são $\beta = 0,0850$ e o ganho

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 224,0959 & 157,5277 & 222,5815 \end{bmatrix}. \quad (85)$$

A Figura 18 apresenta os resultados da implementação do controlador robusto de ganho único sujeito à saturação dos atuadores com custo garantido J no sistema aeropêndulo aumentado (80) e os ganhos (85). O erro em regime permanente, como esperado, é nulo pois é utilizado o novo estado $\xi(t)$ no sistema. O tempo de estabelecimento não é menor que nos casos anteriores porém o sistema torna-se menos oscilatório uma vez que é desejado a minimização da função de custo garantido J relacionado com a saída do sistema $y(t) = \bar{\theta}(t)$. Durante um curtíssimo intervalo de tempo é observado a saturação do sinal de controle, todavia a estabilidade está garantida pois a saturação é prevista no projeto.

Figura 18 - $\theta(t)$, $\bar{\theta}(t)$ e $\hat{u}_t(t)$ para o controle de ganho único projetado com os Teoremas 4 e 6 aplicado ao sistema aumentado (80).



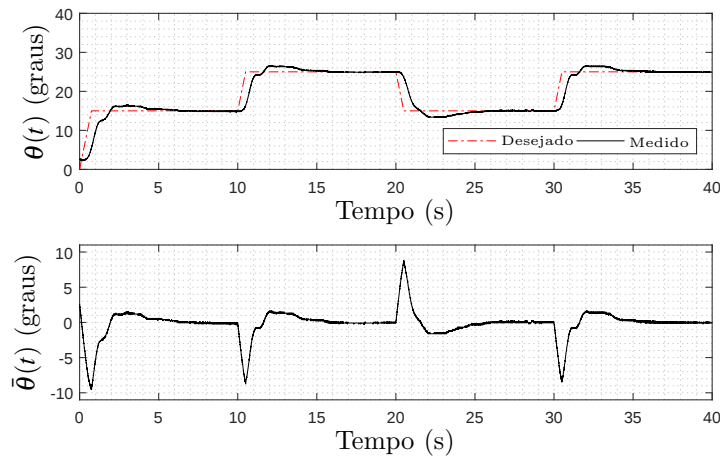
Fonte: Próprio autor.

Os resultados obtidos no projeto do controlador chaveado sujeito à saturação dos atuadores com índice de performance J são $\beta = 0,0740$ e os ganhos

$$\begin{aligned}
\hat{K}_1 &= \begin{bmatrix} 225,6284 & 143,5257 & 186,0325 \end{bmatrix}, & \hat{K}_5 &= \begin{bmatrix} 209,2066 & 144,0358 & 187,7801 \end{bmatrix}, \\
\hat{K}_2 &= \begin{bmatrix} 189,9319 & 145,0246 & 185,5814 \end{bmatrix}, & \hat{K}_6 &= \begin{bmatrix} 174,1391 & 146,9429 & 187,2699 \end{bmatrix}, \\
\hat{K}_3 &= \begin{bmatrix} 203,7920 & 143,1253 & 201,8491 \end{bmatrix}, & \hat{K}_7 &= \begin{bmatrix} 189,7412 & 145,5897 & 205,9873 \end{bmatrix}, \\
\hat{K}_4 &= \begin{bmatrix} 239,0623 & 140,6468 & 202,8638 \end{bmatrix}, & \hat{K}_8 &= \begin{bmatrix} 222,4327 & 142,1776 & 203,6705 \end{bmatrix}. \quad (86)
\end{aligned}$$

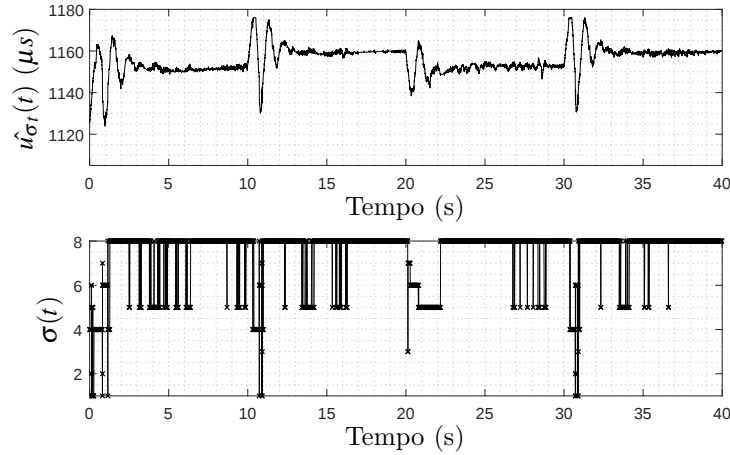
As Figuras 19 e 20 apresentam os resultados da implementação do controlador chaveado sujeito a saturação dos atuadores com custo garantido J no sistema aeropêndulo aumentado (80) e os ganhos (86). A saída $y(t) = \bar{\theta}(t)$ é menos oscilatória do que a saída da Figura 18 pois o valor encontrado para β (limitante superior de função de custo garantido J) é menor para o controlador chaveado. Tal resultado confirma que o controlador chaveado é mais factível que o controlador robusto de ganho único como é observado na simulação da Figura 4. A saturação do sinal de controle também ocorre neste caso, mas a estabilidade está garantida pois ela é prevista no projeto. Durante os transitórios, ocorre o chaveamento entre quase todos os ganhos disponíveis na implementação.

Figura 19 - $\theta(t)$ e $\bar{\theta}(t)$ para o controle chaveado projetado com os Teoremas 4 e 5 aplicado ao sistema aumentado (80).



Fonte: Próprio autor.

Figura 20 - $\hat{u}_{\sigma t}(t)$ e $\sigma(t)$ para o chaveado projetado com os Teoremas 4 e 5 aplicado ao sistema aumentado (80).



Fonte: Próprio autor.

4.3 CONCLUSÕES PARCIAIS

A descrição do sistema aeropêndulo é apresentada a fim de entender o funcionamento do sistema e o método usado para identificação. O método mostra ser eficaz para o projeto de controle e implementação do sistema aeropêndulo. As implementações apresentam boas respostas de controle estabilizando o sistema em um ponto próximo da posição desejada para o sistema original e exatamente na posição desejada para o sistema aumentado. A inserção da nova variável de estado $\xi(t)$ ao sistema melhora significativamente as implementações eliminando o erro em regime permanente. O projeto e implementação dos controladores nos quais consideram saturação dos atuadores com custo garantido diminui as oscilações da saída. O controle chaveado apresenta maior região de factibilidade em função do tamanho da falha no atuador do que o controle robusto de ganho único. Em alguns casos, o sinal de controle satura, portanto é necessário considerar a saturação no projeto dos controladores para garantir a estabilidade do sistema caso a saturação ocorra. O método de identificação contido na Seção 4.1 foi publicado e apresentado no CBA 2020 (CBA - Congresso Brasileiro de Automática) e é o maior congresso na área de Engenharia Elétrica do Brasil. O congresso foi realizado na modalidade de evento virtual, no período de 23 a 26 de novembro de 2020. O trabalho publicado é Silva *et al.* (2020b).

5 CONCLUSÕES

Desafios pertinentes ao controle robusto de ganho único e chaveado são abordados neste trabalho. Tais desafios são a identificação de sistemas, a saturação dos atuadores, o controle de servo sistemas e a adição do índice de desempenho com função de custo garantido quadrática relacionada com a saída do sistema. Todos esses desafios são discutidos e implementados no trabalho. Aspectos físicos do sistema aeropêndulo, funcionamento e identificação são apresentados. A identificação utilizada na obtenção dos modelos locais do sistema para projeto dos controladores permite que o sistema em malha fechada seja estável, todavia um erro em regime permanente é observado. Para eliminação do erro em regime permanente, uma nova variável de estado é inserida ao sistema. Tal variável é construída a partir da integral da diferença entre posições desejada e medida.

A progressão das implementações permite entender a influência de cada tipo de controle e dos parâmetros de projeto no sistema de controle. Portanto são propostas novas condições para o projeto dos controladores nos Teoremas 5 e 6. Algumas condições de projeto melhoram os resultados obtidos durante as implementações como a restrição da norma dos controladores, a saturação dos atuadores e a inserção do índice de desempenho com custo garantido quadrático relacionado com a energia de saída do sistema que diminui as oscilações durante os transitórios. O projeto de controle chaveado apresenta ter região de factibilidade maior do que o controle robusto de ganho único em função do tamanho da falha no atuador. Os resultados obtidos mostram ser eficazes e satisfatórios para o controle do sistema aeropêndulo e da suspensão ativa de bancada tanto para o controle robusto de ganho único quanto para o controle chaveado.

A partir da pesquisa realizada, originaram-se diretamente os trabalhos Silva *et al.* (2020a) e Silva *et al.* (2020b) que foram publicados em anais de congressos.

5.1 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

- Estudar outras metodologias de identificação para o sistema aeropêndulo.
- Determinar os valores dos parâmetros físicos do sistema para serem utilizados nos modelos apresentados por outros autores.
- Provar que a inserção da integral da diferença entre saída medida e desejada como nova variável de estado ao sistema descrito por modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno pode ser utilizada no projeto dos controladores.
- Considerar no projeto dos controladores a zona morta.

REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. *Introdução à identificação de sistemas—Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2004.
- ALVES, U. N. L. T. *Controle chaveado e chaveado suave de sistemas não lineares incertos via modelos fuzzy T-S*. 2017, 107 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira, 2017.
- ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Hoboken, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016.
- BLANCHINI, F. Set invariance in control. *Automatica*, Kidlington, v. 35, n. 11, p. 1747–1767, 1999.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia: SIAM, 1994.
- CAO, Y.-Y.; LIN, Z. Robust stability analysis and fuzzy-scheduling control for nonlinear systems subject to actuator saturation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 11, n. 1, p. 57–67, 2003.
- CAUN, R. P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CAUN, A. P. LQR-LMI control applied to convex-bounded domains. *Cogent Engineering*, London, v. 5, n. 1, p. 1457206, 2018.
- CHEN, C.-T. *Linear system theory and design*. Oxford: Oxford University Press, 1998.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Switched state-feedback control for continuous time-varying polytopic systems. *International Journal of Control*, London, v. 84, n. 9, p. 1500–1508, 2011.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; GARCIA, F. S.; POMILIO, J. A. Switched affine systems control design with application to DC–DC converters. *IET Control Theory & Applications*, Stevenage, v. 4, n. 7, p. 1201–1210, 2010.
- ENIKOV, E. T.; CAMPA, G. Mechatronic aeropendulum: Demonstration of linear and nonlinear feedback control principles with MatLab/Simulink real-time windows target. *IEEE Transactions on Education*, Piscataway, v. 55, n. 4, p. 538–545, 2012.
- FAROOQ, U.; GU, J.; EL-HAWARY, M. E.; LUO, J.; ASAD, M. U. Observer based fuzzy LMI regulator for stabilization and tracking control of an aeropendulum. In: IEEE CANADIAN CONFERENCE ON ELECTRICAL AND COMPUTER ENGINEERING (CCECE), 28th., 2015, Halifax. *Anais...* Piscataway: IEEE, 2015. p. 1508–1513.

GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. The LMI control toolbox. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC), 33rd., 1994, Lake Buena Vista. *Anais...* Piscataway: IEEE, 1994. p. 2038–2041.

GEROMEL, J. C.; DEAECTO, G. S. Switched state feedback control for continuous-time uncertain systems. *Automatica*, Kidlington, v. 45, n. 2, p. 593–597, 2009.

HU, T.; LIN, Z.; CHEN, B. M. Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation. *Systems & Control Letters*, Kidlington, v. 45, n. 2, p. 97–112, 2002.

JOB, M. M.; JOSE, P. S. H. Modeling and control of mechatronic aeropendulum. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INNOVATIONS IN INFORMATION, EMBEDDED AND COMMUNICATION SYSTEMS (ICIIECS), 2015, Coimbatore. *Anais...* Piscataway: IEEE, 2015. p. 1–5.

KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; COUTINHO, D. A T-S fuzzy approach to the local stabilization of nonlinear discrete-time systems subject to energy-bounded disturbances. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Nova York, v. 26, n. 3, p. 191–200, 2015.

KUMAR, E. V.; JEROME, J. Robust LQR controller design for stabilizing and trajectory tracking of inverted pendulum. *Procedia Engineering*, Kidlington, v. 64, p. 169–178, 2013.

LOFBERG, J. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in MatLab. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, 2004, New Orleans. *Anais...* Piscataway: IEEE, 2004. p. 284–289.

OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. São Paulo: Pearson, 2011.

OHTAKE, H.; TANAKA, K.; WANG, H. O. Fuzzy model-based servo and model following control for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, Piscataway, v. 39, n. 6, p. 1634–1639, 2009.

OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ALVES, U. N. L. T.; SOUZA, W. A.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. On local H_∞ switched controller design for uncertain T-S fuzzy systems subject to actuator saturation with unknown membership functions. *Fuzzy Sets and Systems*, Kidlington, v. 344, n. 1, p. 1–26, 2018.

ONAT, C.; KUCUKDEMIRAL, I.; SIVRIOGLU, S.; YUKSEK, I.; CANSEVER, G. LPV gain-scheduling controller design for a non-linear quarter-vehicle active suspension system. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, London, v. 31, n. 1, p. 71–95, 2009.

PERES, J. C.; RAMOS, I. T. M.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Projeto de controlador robusto chaveado com custo garantido para sistemas lineares incertos. In: CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES (DINCON), XIV., 2019, São Carlos. *Anais...* São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 2019.

QUANSER. *Active suspension LQR control using quarc-instructor manual*. 2010. 1–48 p.

- SANTIM, M. P. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SOUZA, W. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Design of a Takagi-Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points. *Mathematical Problems in Engineering*, London, v. 2012, n. 1, p. 1–17, 2012.
- SILVA, E. R. P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R. Robust controller implementation via state-derivative feedback in an active suspension system subjected to fault. In: CONFERENCE ON CONTROL AND FAULT-TOLERANT SYSTEMS (SYSTOL), 2013, Nice. *Anais...* Piscataway: IEEE, 2013. p. 752–757.
- SILVA, H. R. M.; RAMOS, I. T. M.; ALVES, U. N. L. T.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E. Switched control design with guaranteed cost for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. In: IFAC WORLD CONGRESS VIRTUAL (IFAC-V), 21th., 2020, Berlim. *Anais...* Kidlington: Elsevier, 2020. p. 8123–8128.
- SILVA, H. R. M.; RAMOS, I. T. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Identification and switched control of an aeropendulum system. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA (CBA), XXIII., 2020, Porto Alegre. 2020. No prelo.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. *et al.* *Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, 2014b.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. *Mathematical Problems in Engineering*, London, v. 2013, n. 1, p. 1–10, 2013.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Robust switched control design for nonlinear systems using fuzzy models. *Mathematical Problems in Engineering*, London, v. 2014, 2014a.
- STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a MatLab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software*, New York, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Piscataway, v. 15, n. 1, p. 116–132, 1985.
- TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 6, n. 2, p. 250–265, 1998.
- TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 9, n. 4, p. 525–538, 2001.
- TARBOURIECH, S.; GARCIA, G.; JR, J. M. G. da S.; QUEINNEC, I. *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. Berlim: Springer Science & Business Media, 2011.

TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, N. A. P.; ASSUNÇÃO, E.; MACHADO, E. R. Design of fuzzy regulators with optimal initial conditions compensation. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 2006, Vancouver. *Anais...* Piscataway: IEEE, 2006. p. 84–91.

TEIXEIRA, M. C. M.; ZAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 7, n. 2, p. 133–142, 1999.

TOH, K.-C.; TODD, M. J.; TÜTÜNCÜ, R. H. SDPT3 MatLab software package for semidefinite programming, version 1.3. *Optimization methods and software*, New York, v. 11, n. 1-4, p. 545–581, 1999.

VEIGA, D. V. V. *Projeto de controle e implementação de um sistema viga-hélice*. 2016, 79 p. Trabalho de Graduação (Graduação em Engenharia Elétrica) — Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira, 2016.

WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 1995, Yokohama. *Anais...* Piscataway: IEEE, 1995. v. 2, p. 531–538.

WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 4, n. 1, p. 14–23, 1996.