



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Jennifer Cristina Borges

Um Estudo sobre Métodos de Solução para o
Problema de Corte de Estoque Biobjetivo

São José do Rio Preto
2021

Jennifer Cristina Borges

Um Estudo sobre Métodos de Solução para o
Problema de Corte de Estoque Biobjetivo

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Maria do Socorro Nogueira Rangel

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2021

B732e Borges, Jennifer Cristina
 Um Estudo sobre Métodos de Solução para o Problema de Corte de
 Estoque Biobjetivo / Jennifer Cristina Borges. -- São José do Rio
 Preto, 2021
 188 p. : il., tabs.

 Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
 Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio
 Preto
 Orientadora: Maria do Socorro Nogueira Rangel

 1. Problema de corte de estoque. 2. Otimização Multiobjetivo. 3.
 Métodos de Escalarização. 4. Invidade. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Jennifer Cristina Borges

Um Estudo sobre Métodos de Solução para o
Problema de Corte de Estoque Biobjetivo

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Maria do Socorro Nogueira Rangel
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr. Angelo Aliano Filho
UTFPR - Apucarana

Profa. Dra. Gislaine Mara Melega
UFSCar - São Carlos

Profa. Dra. Kelly Cristina Poldi
UNICAMP - IMECC - Campinas

Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
20 de agosto de 2021

Dedico aos meus pais e a mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar à Deus que iluminou o meu caminho durante esta longa caminhada.

Agradeço aos meus pais e a minha irmã, que com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu concluísse todas as etapas da minha vida. Mesmo distante nunca deixaram de dar apoio nos momentos de insegurança.

Agradeço ao meu namorado pela enorme paciência e palavras de incentivo, principalmente nessa reta final.

Um agradecimento muito especial à minha orientadora e amiga Profa. Dra. Maria do Socorro Nogueira Rangel pelos grandes ensinamentos acadêmicos e pessoais. Agradeço pelos “puxões de orelha” que me tornaram uma professora e pesquisadora, e principalmente por acreditar quando eu mesma não acreditava em mim.

Agradeço a todos os professores da UNESP que tive a honra de conhecer, em especial agradeço ao Prof. Dr. Silvio Araújo por ter sido tão receptivo e por ter me aceito como orientada (mesmo por pouco tempo), por proporcionar as melhores confraternizações e por ter aceito o convite para compor a banca de defesa. Agradeço ao Prof. Dr. Valeriano Antunes pela colaboração na parte de “Invexidade” desenvolvida nessa tese. Agradeço ao Prof. Dr. Luiz Leduino pela colaboração no desenvolvimento do Apêndice C que resultou em um artigo apresentado no CNMAC2019.

Agradeço ao Prof. Dr. Angelo Aliano Filho e à Profa. Dra. Kelly Poldi por aceitarem o convite para compor a banca de defesa.

Agradeço aos meus amigos pelo apoio e ensinamentos compartilhados. Em especial agradeço a Gislaine por ser a primeira pessoa a me acolher em São José do Rio Preto e por tornar uma grande amiga, pela imensa ajuda no desenvolvimento desse estudo e por aceitar o convite para compor a banca examinadora. Agradeço ao meu amigo Rodrigo pela imensa ajuda com a parte computacional e por ajudar nas dúvidas mesmo sem entender, as vezes, o que estava falando. Ao Nicolas pela paciência e prestatividade todas as vezes que solicitei sua ajuda independente do dia e horário.

Agradeço as minhas amigas Ana e Bruninha pela estadia em São Carlos todas as vezes que participava de um evento na USP. Agradeço à Jéssica que mesmo distante sempre esteve presente. Agradeço as minhas grandes amigas matemáticas Marcela e Camila, que mesmo distantes estiveram sempre comigo. Enfim, agradeço a todos os amigos que Rio Preto me deu de presente e fizeram parte dos 5 anos mais desafiadores da minha vida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*A ciência poderá ter encontrado a cura
para a maioria dos males,
mas não achou ainda o remédio
para o pior de todos:
a apatia dos seres humanos.*
Helen Keller

RESUMO

Nessa tese é feita uma breve revisão sobre as principais características do Problema de Corte de Estoque (PCE) Unidimensional e Bidimensional. Apresentam-se modelos de otimização matemática utilizados para gerar os padrões de corte unidimensionais e bidimensionais e diferentes critérios de otimização. Os critérios considerados são: minimizar o número total de objetos cortados, *setups* e ciclos da serra que são conflitantes entre si, e utiliza-se a abordagem multiobjetivo para resolver o PCE Unidimensional e Bidimensional. Na revisão de literatura verificou-se que o Problema de Corte de Estoque Bidimensional Multiobjetivo (PCEM-2D) é pouco abordado na literatura. Os artigos que tratam o caso unidimensional (PCEM-1D) usando métodos de escalarização desconsideram a geração dinâmica de colunas para a matriz de restrições do problema. Assim, a partir da revisão da literatura sobre métodos de escalarização para problemas de otimização inteira multiobjetivo são selecionados os métodos ϵ -Restrito Lexicográfico, Tchebycheff Ponderado Aumentado e Particionamento da Fronteira para resolver o PCEM-1D e o PCEM-2D, considerando que os padrões de corte são gerados dinamicamente. Através de simulações computacionais foi possível concluir que a geração de padrões de corte dinâmica resulta em uma melhor aproximação da fronteira de Pareto do que a geração de colunas *a priori*, e que o método que usa a estratégia *branch and cut* obteve o melhor desempenho quando comparado a outros dois métodos para os casos unidimensional e bidimensional. Outra contribuição dessa tese é a utilização de conceitos de invexidade para provar resultados de otimalidade parcial para o problema de corte de estoque biobjetivo. Dessa forma reitera-se conexões entre a otimização discreta e a otimização contínua multiobjetivo.

Palavras-chave: Problema de corte de estoque, Otimização Multiobjetivo, Métodos de Escalarização, Invexidade.

ABSTRACT

In this thesis, a review of the main features of the one dimensional and the two dimensional Cutting Stock Problem (CSP) is presented. Mathematical optimization models to generate one-dimensional and two-dimensional cutting patterns as well as different optimization criteria are discussed. The criteria considered are: minimize the total number of objects cut, of setups and of saw cycles that conflict with each other, therefore a multiobjective approach is proposed to solve the One-dimensional and Two-dimensional CSP. In the literature few papers address the Two-Dimensional Multiobjective Cutting Stock Problem (MCSP-2D). The papers that propose scalarization methods for the one-dimensional case (MCSP-1D) do not consider a dynamic generation of columns for the problem constraint matrix. Thus, from the literature review about scalarization methods, the ϵ -Lexicographical Restricted, Augmented Weighted Tchebycheff and Frontier Partitioning methods were selected to solve the MCSP-1D and the MCSP-2D considering that the cutting patterns are dynamically generated. Through the computer simulations it was possible to conclude that the dynamic generation of cutting patterns results in a better approximation of the Pareto frontier. The method based on a branch and cut strategy had the best performance compared to the other two methods for both problems. Another contribution of this thesis is the use of invexity concepts to prove partial optimality results for the biobjective cutting stock problem. Thus reiterating connections between discrete optimization and multiobjective continuous optimization.

Keywords: Cutting stock problem, Multiobjective Optimization, Scalarization methods, Invexity.

Lista de Figuras

2.1	Ilustração de um Problema de corte de estoque unidimensional.	21
2.2	Problema de corte de estoque bidimensional.	22
2.3	Problema de corte de estoque tridimensional.	22
2.4	Padrão de corte homogêneo maximal.	23
2.5	Padrão de corte guilhotinado e não guilhotinado.	24
2.6	Padrão de corte guilhotinado ortogonal e não ortogonal.	25
2.7	Padrão de corte guilhotinado dois estágios.	25
2.8	Máquina utilizada no processo de corte.	33
3.1	Espaço decisão (\mathcal{X}) de (3.4)	41
3.2	Espaço critério (\mathcal{Z}) de (3.4)	41
3.3	Representação da fronteira de Pareto e dos vetores ideal e nadir.	42
3.4	Divisão horizontal do triângulo.	46
3.5	Fronteira de Pareto (SP).	49
3.6	Fronteira de Pareto (ER).	50
3.7	Primeira iteração do método FPA^* para $k = 0$	57
3.8	Segunda iteração do método FPA^* para $k = 1$	57
3.9	Terceira iteração do método FPA^* para $k = 2$	58
3.10	Quarta iteração do método FPA^* para $k = 3$	58
3.11	Quinta iteração do método FPA^* para $k = 4$	58
3.12	Sexta iteração do método FPA^* para $k = 5$	58
4.1	Esquema para o método de GC multiobjetivo geral.	68
5.1	Perfil de desempenho do método ERL para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = 4$).	83
5.2	Perfil de desempenho do método FPA^* para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = 4$).	84
5.3	Perfil de desempenho do método TPA para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = 4$).	85
5.4	Perfil de desempenho do método ERL para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = 7$).	86
5.5	Perfil de desempenho do método ERL para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = d_{max}$).	87
5.6	Perfil de desempenho do método FPA^* para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = 7$).	88
5.7	Perfil de desempenho do método FPA^* para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = d_{max}$).	89

5.8	Perfil de desempenho do método TPA para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = 7$).	90
5.9	Perfil de desempenho do método TPA para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = d_{max}$).	91
5.10	Aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelo método FPA^* utilizando a GCd e a GCs para $c = 7$ (classe P, $m = 60$).	92
5.11	Aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelo método FPA^* utilizando a GCd e a GCs para $c = d_{max}$ (classe P, $m = 60$).	92
5.12	Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA^* e TPA para o $PCEB_c^L - 1D$ com GCd em relação ao tempo ($c = 4$).	94
5.13	Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA^* e TPA para para o $PCEB_c^L - 1D$ com GCd em relação ao tempo ($c = 7$).	95
5.14	Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA^* e TPA para o $PCEB_c^L - 1D$ com GCd em relação ao tempo ($c = d_{max}$).	97
5.15	Aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelos métodos FPA^* , ERL e TPA utilizando a GCd para $c = 7$ (classe P, $m = 100$).	98
5.16	Aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelos métodos FPA^* , ERL e TPA utilizando a GCd para $c = d_{max}$ (classe P, $m = 100$).	99
5.17	Perfil de desempenho das variações FPA_{var1}^* e FPA_{var2}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = 7$).	115
5.18	Perfil de desempenho das variações FPA_{var1}^* e FPA_{var3}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = 7$).	116
5.19	Perfil de desempenho das variações FPA_{var1}^* e FPA_{var4}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = 7$).	117
5.20	Perfil de desempenho das variações FPA_{var2}^* e FPA_{var3}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = 7$).	117
5.21	Perfil de desempenho das variações FPA_{var2}^* e FPA_{var4}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = 7$).	118
5.22	Perfil de desempenho das variações FPA_{var3}^* e FPA_{var4}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = 7$).	119
5.23	Perfil de desempenho das variações FPA_{var1}^* e FPA_{var2}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = d_{max}$).	124
5.24	Perfil de desempenho das variações FPA_{var1}^* e FPA_{var3}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = d_{max}$).	125
5.25	Perfil de desempenho das variações FPA_{var1}^* e FPA_{var4}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = d_{max}$).	126
5.26	Perfil de desempenho das variações FPA_{var2}^* e FPA_{var3}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = d_{max}$).	127
5.27	Perfil de desempenho das variações FPA_{var2}^* e FPA_{var4}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = d_{max}$).	128
5.28	Perfil de desempenho das variações FPA_{var3}^* e FPA_{var4}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = d_{max}$).	129
5.29	Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA_{var2}^* e TPA para o ($PCEB_c^L - 2D$) em relação ao tempo ($c = 7$).	133
5.30	Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA_{var2}^* e TPA para o ($PCEB_c^L - 2D$) em relação ao hipervolume (σ^2) com $c = 7$	136
5.31	Aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelos métodos FPA_{var2}^* , ERL e TPA utilizando a GCd para $c = 7$ ($id = 11$, $m = 100$).	136

5.32	Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA_{var3}^* e TPA ($PCEB_c^L - 2D$) em relação ao tempo ($c = d_{max}$).	137
5.33	Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA_{var3}^* e TPA em relação ao hipervolume (σ^2) com $c = d_{max}$	139
5.34	Aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelos métodos FPA_{var3}^* , ERL e TPA utilizando a GCd para $c = d_{max}$ ($id = 14$, $m = 100$).	139
C.1	Gráfico da função f	171
C.2	Esquema de implicações entre os conjuntos de funções.	174
C.3	Gráfico da função $\phi(t)$ com $M = 50$	178
C.4	Gráfico da função $\phi_2(t)$ com $c = 5$ e $m = 100$	181

Lista de Tabelas

2.1	Elementos para classificação de Problemas de Corte e Empacotamento. . .	20
3.1	Método da Soma Ponderada aplicado ao Exemplo 3.16.	48
3.2	Método ϵ -Restrito aplicado ao Exemplo 3.16.	50
3.3	Resumo da Literatura sobre o PCE multiobjetivo.	63
3.4	Resumo dos métodos de escalarização encontrados na literatura e suas variações.	65
3.5	Comparação entre BBM, MRV e FPA que utilizam técnicas de decomposição ou divisão do espaço critério.	66
5.1	Resultados obtidos pelo método <i>ERL</i> para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4$	81
5.2	Resultados obtidos pelo método <i>FPA*</i> para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 7$	82
5.3	Resultados obtidos pelo método <i>TPA</i> para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = d_{max}$	83
5.4	Resultados obtidos pelos métodos <i>ERL</i> , <i>FPA*</i> e <i>TPA</i> para o $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4, 7$	93
5.5	Resultados obtidos pelos métodos <i>ERL</i> , <i>FPA*</i> e <i>TPA</i> para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4, 7$ através das métricas σ^1 , σ^2 e σ^4	94
5.6	Resultados obtidos pelos métodos <i>ERL</i> , <i>FPA*</i> e <i>TPA</i> para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = d_{max}$	96
5.7	Resultados obtidos pelos métodos <i>ERL</i> , <i>FPA*</i> e <i>TPA</i> para o $PCEB_c^L - 1D$ e $c = d_{max}$, das métricas σ^1 , σ^2 e σ^4	96
5.8	Resultados obtidos pelos métodos <i>ERL</i> , <i>FPA*</i> e <i>TPA</i> para o $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4, 7, d_{max}$, das métricas σ^5 e σ^6	98
5.9	Formatos e tamanhos para o objeto e os itens no gerador 2DCPackGen (SILVA; OLIVEIRA; WÄSCHER, 2014).	101
5.10	Formatos e tamanhos para os itens de acordo com Martello e Vigo (1998) e a correspondência com o gerador 2DCPackGen.	102
5.11	Classificação das dimensões w_i e l_i em função de W e L (FIGUEIREDO, 2006).	102
5.12	Classificação das Instâncias da indústria.	103
5.13	Conjunto de instâncias do $(PCEB_c^L)$ -2D utilizadas no estudo computacional.	104
5.14	Resultados obtidos pelo método <i>ERL</i> (GCs) para o $(PCEB_c^L - 2D)$ considerando 16 tipos de itens, $m = 10$	106
5.15	Resultados obtidos pelo método <i>ERL</i> (GCd) para o $(PCEB_c^L - 2D)$ considerando 16 tipos de itens, $m = 10$	107
5.16	Método <i>ERL</i> (GCs X GCd) para itens nos formatos 1, 3, 6 e 13.	108

5.17	Método ERL (GCs X GCd) para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com a variação de m .	109
5.18	Resultados obtidos pelo método ERL(GCd) para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com a variação de c , $id_{item} = 1$.	111
5.19	Número de variáveis e restrições após o pré-processamento das instâncias do modelo M1-rot (2.22)-(2.26) do conjunto C.	112
5.20	Variações do método FPA^* considerando as permutações de objetos e ciclos e os valores de ζ_i para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = 7$.	114
5.21	Métricas relativas as variações do método FPA^* considerando as permutações de objetos e ciclos e os valores de ζ_i para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = 7$.	120
5.22	Métricas σ^5 e σ^6 para as quatro variações do FPA^* para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = 7$.	121
5.23	Variações do método FPA^* considerando as permutações de objetos e ciclos e os valores de ζ_i para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = d_{max}$.	123
5.24	Métricas relativas as variações do método FPA^* considerando as permutações de objetos e ciclos e os valores de ζ_i para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = d_{max}$.	130
5.25	Resultados obtidos pelos métodos ERL , FPA_{var2}^* e TPA para o $PCEB_c^L - 2D$ e $c = 7$.	132
5.26	Métricas relativas aos variações dos métodos ERL , FPA_{var2}^* e TPA para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = 7$.	134
5.27	Métricas σ^5 e σ^6 relativas aos métodos ERL , FPA_{var2}^* e TPA para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = 7$.	135
5.28	Métricas relativas aos variações dos métodos ERL , FPA_{var3}^* e TPA para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = d_{max}$.	138
B.1	Resultados obtidos pelo método FPA para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4$.	155
B.2	Resultados obtidos pelo método TPA para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4$.	156
B.3	Resultados obtidos pelo método ERL para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 7$.	157
B.4	Resultados obtidos pelo método FPA^* para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 7$.	158
B.5	Resultados obtidos pelo método TPA para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 7$.	159
B.6	Resultados obtidos pelo método ERL para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = d_{max}$.	160
B.7	Resultados obtidos pelo método FPA para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = d_{max}$.	161
B.8	Resultados obtidos pelo método TPA para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = d_{max}$.	162
B.9	Resultados obtidos pelos métodos ERL , FPA^* e TPA para o $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4, 7$.	163
B.10	Resultados obtidos pelos métodos ERL , FPA^* e TPA para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4, 7$ através das métricas σ^1 , σ^2 e σ^4 .	164
B.11	Método ERL (GCs X GCd) para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com a variação de m .	166

LISTA DE SIGLAS

BBM	<i>Balanced Box Method</i>
ER	ϵ –Restrito
ERL	ϵ –Restrito Lexicográfico
FPA	<i>Frontier Partitioner Algorithm</i>
FPA*	<i>Frontier Partitioner Algorithm</i> (considerando a Soma Ponderada Personalizada)
GC	Geração de Colunas
GCa	Geração de Colunas <i>a priori</i>
GCd	Geração de Colunas dinâmica
GCs	Geração de Colunas estática
MRV	<i>Multiple Reference Vectors</i>
OM	Otimização Multiobjetivo
OIM	Otimização Inteira Multiobjetivo
OIMM	Otimização Inteira Mista Multiobjetivo
PCE	Problema de Corte de Estoque
PCEB	Problema de Corte de Estoque Biobjetivo
PCEB _c	Problema de Corte de Estoque Biobjetivo (Minimização do número total de objetos e ciclos da serra)
PCEB ^L	Problema de Corte de Estoque Biobjetivo Linearizado
PCEB-1D	Problema de Corte de Estoque Unidimensional Biobjetivo
PCEB-2D	Problema de Corte de Estoque Bidimensional Biobjetivo
PCEB _c ^L	Problema de Corte de Estoque Biobjetivo Linearizado (Minimização do número total de objetos e ciclos da serra)
PCEM-1D	Problema de Corte de Estoque Unidimensional Multiobjetivo
PCEM-2D	Problema de Corte de Estoque Bidimensional Multiobjetivo
PCEM ^L	Problema de Corte de Estoque Multiobjetivo Linearizado
PCGR	Problema de Corte Guilhotinado e Restrito
PCKT	Ponto Crítico de Kuhn-Tucker
PMR	Problema Mestre Restrito
POIB	Problema de Otimização Inteira Biobjetivo
POM	Problema de Otimização Multiobjetivo
POLM	Problema de Otimização Linear Multiobjetivo
SP	Soma Ponderada
SPP	Soma Ponderada Personalizada
TPA	Tchebycheff Ponderado Aumentado

Sumário

1	Introdução	17
2	Problema de Corte de Estoque	19
2.1	Características do PCE	21
2.2	Modelagem matemática do problema de corte de estoque unidimensional e bidimensional monobjetivo	25
2.3	Geração de colunas no contexto da otimização monobjetivo para o PCE (1D e 2D)	28
2.4	Geração de padrões de corte 1D e 2D	29
2.5	Outros Critérios de otimização para o PCE	32
3	Otimização Multiobjetivo	36
3.1	Conceitos e definições	37
3.2	Buscas no espaço critério e no espaço de decisão	43
3.3	Métodos de escalarização	46
3.3.1	Método da soma ponderada	47
3.3.2	Método ϵ -restrito	47
3.3.3	Método de Tchebycheff	51
3.4	Métodos que combinam técnicas de decomposição do espaço critério e escalarizações	52
3.4.1	Método de particionamento da fronteira (FPA)	53
3.5	Métricas de desempenho	58
3.6	Problema de corte de estoque multiobjetivo	60
3.7	Conclusões	64
4	Métodos de Escalarização Aplicados ao PCE Biobjetivo (1D e 2D)	67
4.1	Geração de colunas no contexto da otimização multiobjetivo para o PCE (1D e 2D)	68
4.2	Descrição dos métodos de escalarização para o $PCEB_c^L$	73
4.2.1	Método ϵ -Restrito Lexicográfico	73
4.2.2	Método de Particionamento da Fronteira	74
4.2.3	Método Tchebycheff Ponderado Aumentado	77
5	Estudo Computacional	79
5.1	Estudo computacional $PCEB_c^L$ -1D	79
5.1.1	Descrição das instâncias	80
5.1.2	Resultados e discussão	81
5.2	Estudo computacional $PCEB_c^L$ -2D	100
5.2.1	Descrição das instâncias	100

5.2.2	Resultados e discussão	105
5.3	Conclusões	139
6	Considerações Finais	141
	Referências	143
	Apêndice A Variações dos Métodos de Escalarização	151
A.1	Variações do método da Soma Ponderada	151
A.2	Variações do método ϵ -Restrito	151
A.3	Variações do método da Métrica de Tchebycheff	154
	Apêndice B Tabelas Complementares	155
B.1	Resultados para os Métodos ERL, FPA^* e TPA aplicados ao $PCEB_c^L$ -1D	155
B.2	Resultados para os Métodos ERL, FPA^* e TPA aplicados ao $PCEB_c^L$ -2D	165
	Apêndice C Teoria de Invexidade Aplicada ao PCE Biobjetivo	168
C.1	Convexidade e convexidade generalizada (Invexidade)	168
C.1.1	Convexidade e invexidade de funções	168
C.1.2	Relações entre convexidade e invexidade	172
C.2	Problemas de otimização multiobjetivo e invexidade	174
C.3	Problema auxiliar para o PCEB (<i>Setup</i>)	177
C.4	Problema auxiliar para o $PCEB_c$ (ciclos)	179
C.5	Conclusões	185

1 Introdução

Em alguns processos industriais, a produção inclui um estágio no qual é necessário cortar objetos grandes em partes menores otimizando um ou mais critérios a fim de atender uma demanda pré-determinada. Esse estágio envolve a solução de um problema de otimização matemática conhecido na literatura como Problema de Corte de Estoque (PCE). O PCE é um dos problemas mais estudados na área da otimização combinatória devido a sua grande aplicabilidade em indústrias de móveis, papel, aço, vidros, plásticos, tecidos, colchões entre outras. Alguns pontos importantes do planejamento da produção no qual o problema de corte de estoque está presente são os custos do desperdício de material e a produtividade do equipamento de corte. Essa produtividade pode ser afetada, dentre outros motivos, pelo tipo e número de diferentes padrões usados no corte dos objetos conhecido como *setup* e também pelo número de objetos que podem ser cortados simultaneamente na máquina de corte (ciclos da serra). Assim, como critério de otimização para tratar essas características pode se considerar a minimização do número total de objetos, e (ou) minimização do número total de *setups*, e (ou) minimização de ciclos da serra, entre outros critérios. Um melhor aproveitamento da capacidade da serra (ciclos completos de serra) pode implicar no aumento do número de objetos cortados. E ao minimizar o número de diferentes padrões de corte pode implicar em um aumento na frequência dos padrões de cortes utilizados assim aumentando o número de objetos cortados. Isso mostra um conflito entre os critérios, ou seja, quando um critério é individualmente otimizado, o outro é piorado. Frequentemente esses critérios conflitantes são considerados simultaneamente em um problema de otimização monobjetivo. Uma forma de abordar explicitamente o conflito entre esses objetivos é considerar a Otimização Multiobjetivo. A principal característica dos problemas de Otimização Multiobjetivo é que a solução é dada por um conjunto não unitário de soluções, ditas eficientes no sentido de Pareto.

O foco dessa tese é a solução do PCE unidimensional e bidimensional multiobjetivo considerando a característica não linear da função objetivo que representa o número de ciclos da serra e sua versão linearizada. Através da revisão de métodos de escalarização para solução de problemas de otimização multiobjetivo, seleciona-se três métodos para resolver o PCE unidimensional e bidimensional multiobjetivo linearizado ($PCEM^L$). Uma das contribuições dessa tese é a proposta de um algoritmo de Geração de colunas multiobjetivo baseado em métodos de escalarizações para resolver o $PCEM^L$. A análise do desempenho dos métodos é feita através das métricas de comparação propostas na literatura que analisam a qualidade da aproximação da fronteira de Pareto. Outra contribuição dessa tese é a utilização de resultados que garantem a eficiência parcial de uma solução factível do PCE Biobjetivo a partir do conceito de convexidade generalizada também conhecida como invexidade. Essa abordagem é apresentada no Apêndice C como um estudo inicial que pode ser empregada futuramente de duas formas: obter uma aproximação da fronteira de Pareto através da resolução de um sistema de equações não lineares; utilizar essa abordagem para classificar soluções factíveis obtidas por métodos heurísticos e assim

obter uma aproximação da fronteira de Pareto.

Os capítulos dessa tese estão organizados da seguinte maneira. No Capítulo 2 é feita uma revisão das características do Problema de Corte de Estoque unidimensional e bidimensional. Modelos matemáticos de otimização para os problemas de corte de estoque e para o subproblema *price* associado ao método de geração de colunas são também apresentados. No Capítulo 3 são descritos os principais conceitos e definições da Otimização Multiobjetivo incluindo a descrição de métodos de busca no espaço critério e no espaço de decisão, e métricas de avaliação da qualidade da aproximação da fronteira de Pareto. No Capítulo 4 é apresentado o algoritmo de geração de colunas dinâmica e a descrição dos métodos escolhidos para aplicar ao PCE Biobjetivo. Uma análise dos resultados do estudo computacional proposto para avaliar a qualidade das aproximações da Fronteira de Pareto obtidas é apresentado no Capítulo 5. Por fim, no Capítulo 6 são feitas as considerações finais e são apresentadas propostas futuras.

2 Problema de Corte de Estoque

A importância econômica e operacional do PCE, bem como a dificuldade de resolução despertaram grande interesse na comunidade acadêmica desta área. O PCE é um dos problemas mais estudados na área da Otimização Combinatória, os trabalhos pioneiros são Kantorovich (1960), Gilmore e Gomory (1961, 1963). Devido a sua aplicabilidade no ambiente industrial, a interação entre pesquisadores do meio acadêmico e os responsáveis pelo processo industrial se torna cada vez mais recorrente.

Considerando o grande aumento de publicações nessa área e as várias terminologias utilizadas para um mesmo problema, Dyckhoff (1990) propôs uma tipologia para classificar os problemas e padronizar a nomenclatura de acordo com a sua estrutura lógica. Sua tipologia é baseada em 4 características principais, que são: dimensionalidade (número de dimensões relevantes no processo de corte), tipo de alocação (seleção de objetos e itens), variedade de objetos (característica do objeto) e variedade de itens (característica do item). Posteriormente, Wäscher, Haußner e Schumann (2007) apresentaram modificações na tipologia de Dyckhoff, refinando os aspectos analisados dos problemas. A nova tipologia, apresentada de forma resumida na Tabela 2.1, é baseada nas ideias originais de Dyckhoff, porém bem mais abrangente e precisa, visto que para cada problema tem-se uma única representação, o que não acontecia anteriormente.

Desta forma, no desenvolvimento desse estudo utiliza-se dois tipos de problemas segundo a tipologia de Wäscher, Haußner e Schumann (2007): O Problema de Corte unidimensional e bidimensional classificado como $(\{1, 2\}, B, \{C, R, F\}, U, R)$ e o Problema de Corte de Estoque unidimensional e bidimensional pode ser classificado como $(\{1, 2\}, L, \{C, R, F\}, V, R)$. Além das características dos objetos, dos itens e a dimensão relevante no corte, outro elemento importante para o PCE é o critério de otimização. O critério mais comum é a minimização do número total de objetos cortados, mas outros critérios podem ser considerados, como por exemplo, a minimização do número total de ciclos da serra e a minimização do número total de *setups*. Se considerarmos apenas um critério, o PCE é denominado monobjetivo, caso sejam considerados vários critérios o PCE é denominado multiobjetivo.

Nesse capítulo é apresentada uma introdução ao Problema de corte de estoque, com suas principais características e conceitos, assim como alguns modelos matemáticos.

Tabela 2.1: Elementos para classificação de Problemas de Corte e Empacotamento.
Elementos da Tipologia de Wäscher, Haußner e Schumann (2007)

Dimensão	uni, bi ou tridimensional, definida como o número de dimensões relevantes no processo de corte
Tipos de atribuição	<ul style="list-style-type: none"> • Maximização dos resultados (B): Muitos itens diferentes sendo retirados de objetos maiores, que não são suficientes para acomodar todos os itens. • Minimização das entradas (L): Muitos itens diferentes sendo retirados de objetos maiores, que são suficientes para acomodar todos os itens.
Classificação dos itens	<ul style="list-style-type: none"> • tipo C: todos os itens têm a mesma forma e tamanho (itens idênticos); • tipo R: itens que podem ser classificados em poucas classes de tamanhos variados (itens fracamente heterogêneos); • tipo F: itens com muita variabilidade no tamanho e forma (itens fortemente heterogêneos).
Classificação de objetos	<ul style="list-style-type: none"> • Um único objeto em estoque (U); • Vários objetos em estoque (V).
Geometria dos itens (apenas para os casos bi e tri-dimensional)	<ul style="list-style-type: none"> • Regulares (R)(retângulos, triângulos, círculos, cubos, esferas, cilindros, etc.); • Irregulares (I).

Fonte: Adaptado de Aliano-Filho (2016), Wäscher, Haußner e Schumann (2007).

2.1 Características do PCE

Uma das características mais importantes, se não a mais importante no PCE, é a dimensionalidade no processo de corte que não necessariamente consiste na dimensão dos objetos cortados, mas sim as dimensões que são relevantes para o processo de corte. A seguir as principais dimensões utilizadas no PCE são exemplificadas.

Em um PCE, os itens gerados no processo são requeridos de modo a atender uma determinada demanda e otimizar uma função objetivo. Estes itens, por sua vez, podem ser combinados nos objetos maiores numa quantidade finita de vezes, respeitando-se os limites físicos do objeto sem sobreposição e as características do equipamento de corte. A combinação de itens no objeto dá-se o nome de **padrão de corte** e é definido como:

Definição 2.1. (**Padrão de corte** (GILMORE; GOMORY, 1961)): A combinação geométrica dos itens em um objeto, sem sobreposições e respeitando os limites do objeto, é chamado de padrão de corte. A cada padrão de corte é associado um vetor m -dimensional (A_j) que contabiliza a quantidade de itens produzidos.

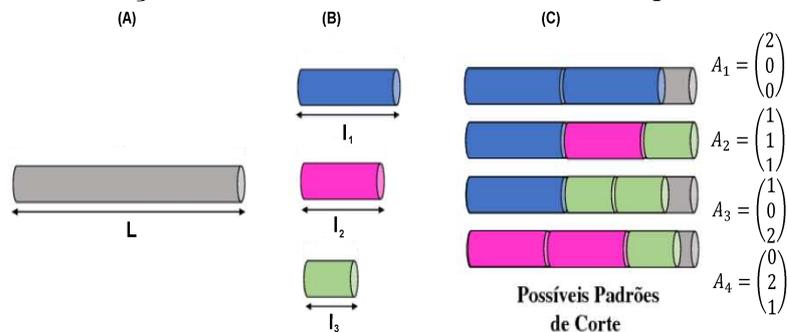
$$A_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$$

em que, α_{ij} é a quantidade do item i cortado com o padrão de corte A_j .

Os objetos podem ser de um único tipo ou de vários tipos, podendo ou não estar disponíveis em grande quantidade. No que se diz respeito à dimensão do objeto, podem possuir uma, duas, três ou mais dimensões relevantes no processo do corte, que são os chamados problema de corte unidimensional, bidimensional, tridimensional, etc., detalhados a seguir.

No problema de corte de estoque unidimensional apenas uma das dimensões do objeto é relevante no processo de corte. As aplicações para este problema ocorrem nas indústrias de papel, fios de cobre e bobinas de aço. Na Figura 2.1, tem-se objetos em estoque de tamanho L (A), três itens de comprimento l_1 , l_2 e l_3 (B) e três possíveis padrões de corte (C).

Figura 2.1: Ilustração de um Problema de corte de estoque unidimensional.

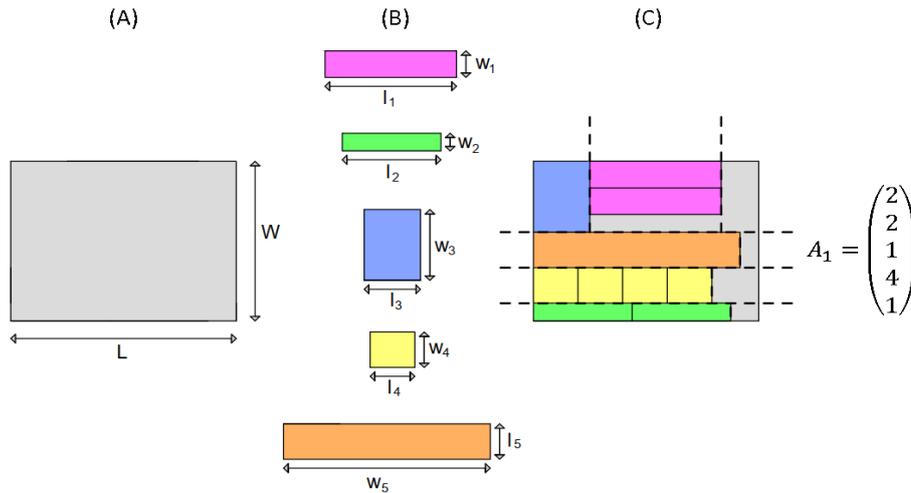


Fonte: Elaborado pela autora.

O problema de corte bidimensional é assim chamado, porque duas dimensões (comprimento e largura) do objeto são relevantes no processo de corte, o comprimento (L do termo

em inglês *Length* é o eixo horizontal do plano cartesiano e largura (*W* do termo em inglês *Width*) o eixo vertical. Uma vez que todas as peças cortadas têm a mesma espessura, resolver este tipo de problema, consiste em combinar geometricamente os itens ao longo do comprimento e da largura dos objetos em estoque, sem sobreposição. Problemas de corte bidimensional podem ocorrer em indústrias de placas de vidro, alumínio, madeira, etc (GILMORE; GOMORY, 1965; RANGEL; FIGUEIREDO, 2008). A Figura 2.2 ilustra este tipo de problema, exibindo uma placa retangular, de dimensões $L \times W$ (A), que deve ser cortada em peças retangulares menores (itens), de dimensões $l_1 \times w_1, l_2 \times w_2, \dots, l_5 \times w_5$ (B), a disposição destes itens no objeto produz um possível padrão de corte (C).

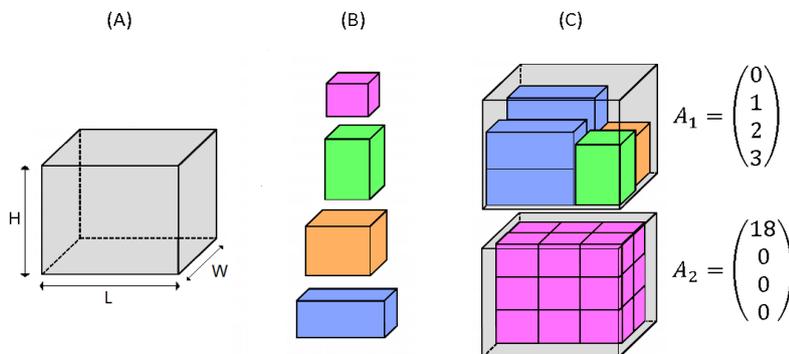
Figura 2.2: Problema de corte de estoque bidimensional.



Fonte: Elaborado pela autora.

Um problema de corte é dito ser tridimensional quando três dimensões são levadas em consideração no processo de corte (Figura 2.3). Este problema consiste em arranjar (ou cortar) itens espaciais, sem sobrepô-los, dentro de objetos maiores. Este tipo de problema pode ser encontrado nas indústrias de colchões, travesseiros, alocação de caixas em contêineres entre outras (MARTIN, 2019; LIBERALINO et al., 2008).

Figura 2.3: Problema de corte de estoque tridimensional.



Fonte: Elaborado pela autora.

Nessa tese o enfoque está em problemas de corte de estoque unidimensional e bidimensionais. Um outro elemento importante no processo de modelagem de um PCE é a característica dos padrões de corte, que são apresentadas a seguir.

Definição 2.2. (Padrão de corte homogêneo): Um padrão de corte é dito ser homogêneo se produz apenas um tipo de item, o vetor associado é da forma:

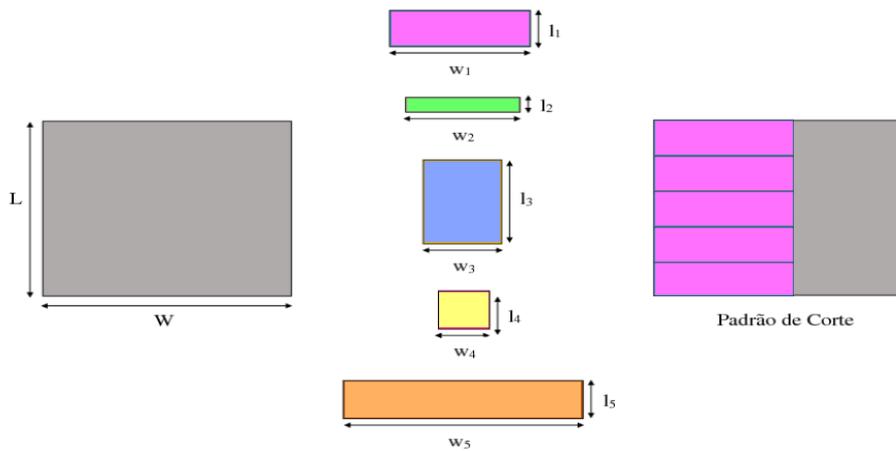
$$A_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha_{ij} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ em que } \alpha_{ij} \neq 0.$$

Note que os vetores associados aos padrões de corte homogêneos definem uma matriz $m \times m$ diagonal. Quando o número de vezes que o item aparece no padrão homogêneo é o maior possível, esse padrão é chamado **padrão de corte homogêneo maximal**, se $\alpha_{ij} = 1$ o padrão de corte é dito unitário.

Exemplo 2.3. No caso unidimensional podemos observar que o padrão A_1 na Figura 2.1 é homogêneo maximal. No caso bidimensional, um padrão de corte homogêneo maximal

pode ser representado pelo vetor $A_j = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Figura 2.4: Padrão de corte homogêneo maximal.



Fonte: Elaborado pela autora.

Outro conceito é o de padrão de corte restrito (Definição 2.4) importante, por exemplo, em heurísticas residuais (WÄSCHER; GAU, 1996; HINXMAN, 1980; CHAVES, 2019).

Definição 2.4. Chama-se padrão de corte restrito, um padrão de corte que para cada item i , a quantidade máxima do item i que pode-se ter no padrão é $r_i, i = 1, \dots, m$, isto é, $\alpha_{ij} \leq r_i, \forall i$. Caso contrário, o padrão de corte é dito irrestrito.

Observação 2.5. Observe que para o caso unidimensional o j -ésimo padrão de corte homogêneo maximal é dado pelo número:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \lfloor \frac{L}{l_i} \rfloor, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Caso o padrão de corte seja restrito, $\alpha_{ij} = \min\{\lfloor \frac{L}{l_i} \rfloor, r_i\}$, sendo r_i a quantidade máxima de itens do tipo i que pode-se ter no padrão de corte. Para o caso bidimensional, o j -ésimo padrão de corte homogêneo maximal (CINTRA et al., 2008) é dado pelo número:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \lfloor \frac{L}{l_i} \rfloor \cdot \lfloor \frac{W}{w_i} \rfloor, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

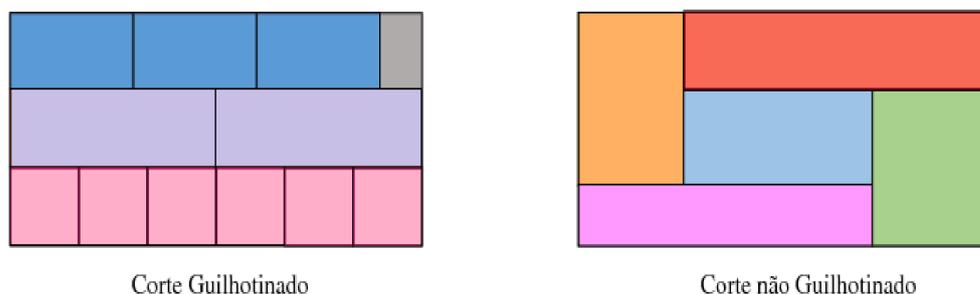
Caso o padrão seja restrito $\alpha_{ij} = \min\{\lfloor \frac{L}{l_i} \rfloor \cdot \lfloor \frac{W}{w_i} \rfloor, r_i\}$.

Para o caso bidimensional é importante destacar outras características dos padrões de corte, que envolvem restrições relacionadas ao equipamento utilizado no processo de corte. Essas características são apresentadas nas definições a seguir.

Definição 2.6. (Padrão de corte guilhotinado (MORABITO; ARENALES, 1996)): Um corte é dito ser guilhotinado ortogonal ou simplesmente guilhotinado, quando este é feito paralelamente a um dos lados do objeto retangular e o divide o objeto em novos retângulos. Um padrão de corte composto apenas por cortes guilhotinados é chamado de padrão de corte guilhotinado.

Na Figura 2.5 é possível ver a diferença de um padrão de corte guilhotinado e um padrão de corte não guilhotinado, onde cada corte é feito paralelo à um dos lados do objeto, enquanto no outro padrão de corte isso não ocorre. Na Figura 2.6 é apresentado um padrão de corte guilhotinado ortogonal e um não ortogonal.

Figura 2.5: Padrão de corte guilhotinado e não guilhotinado.



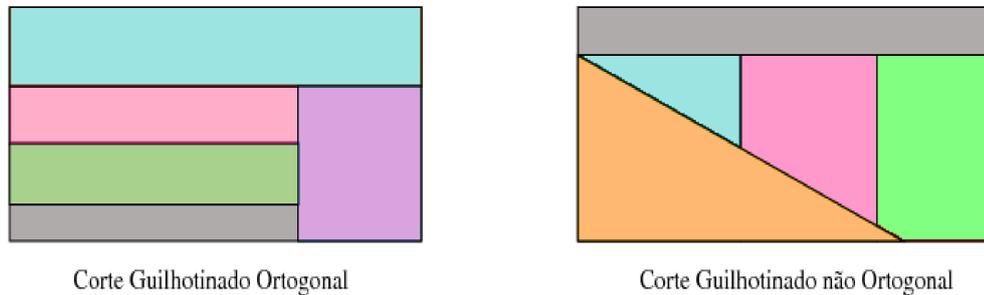
Fonte: Elaborado pela autora.

Os padrões de corte guilhotinado podem ser classificados de acordo com o número de estágios, que é determinado pela quantidade de vezes que o objeto (ou serra) deve ser rotacionado para realizar todos os cortes necessários para que todos os itens do padrão de corte sejam obtidos (LODI; MONACI, 2003; YANASSE; MORABITO, 2008).

Definição 2.7. Considere R o número de giros de 90° necessários para que todos os itens de um padrão de corte sejam produzidos. Dizemos que $k = R + 1$ é o número de estágios do padrão de corte (MORABITO; ARENALES, 1996).

A Figura 2.7 ilustra um padrão de corte no qual é necessário uma única mudança de direção do objeto, caracterizando um padrão de corte dois estágios. No primeiro estágio,

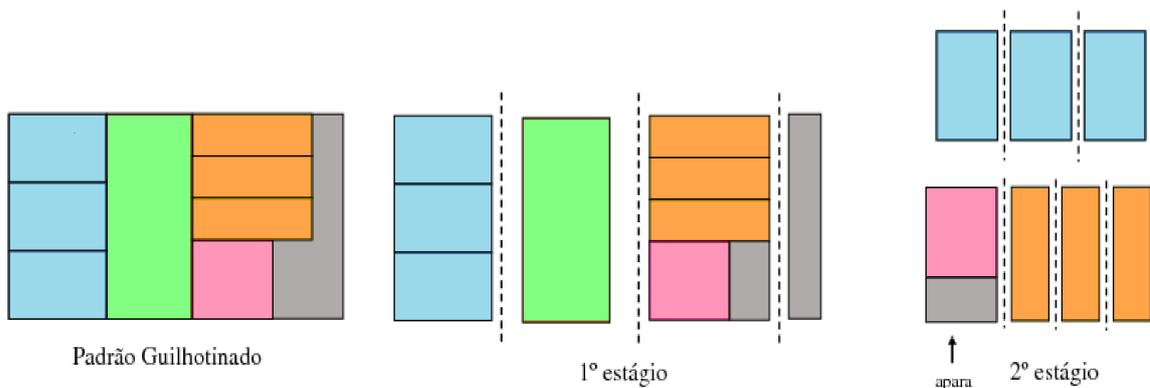
Figura 2.6: Padrão de corte guilhotinado ortogonal e não ortogonal.



Fonte: Elaborado pela autora.

o corte guilhotinado vertical resulta em um conjunto de faixas verticais. No segundo estágio, é necessário rotacionar as faixas em 90° para que os cortes guilhotinados verticais em cada faixa obtenham os itens (MALAGUTI; DURÁN; TOTH, 2014). Um último corte a ser realizado, indicado na figura por “apara”, não é considerado um estágio de corte, pois geralmente esses cortes finais menores são feitos em máquinas secundárias a fim de ajustar a peça as dimensões corretas do item. Padrões de corte que apresentam “aparas” são chamados de padrões de corte **não-exatos** e, os que não necessitam deste corte adicional são chamados de **padrões de corte exatos**.

Figura 2.7: Padrão de corte guilhotinado dois estágios.



Fonte: Elaborado pela autora.

2.2 Modelagem matemática do problema de corte de estoque unidimensional e bidimensional monobjetivo

Por volta da década de 40, o problema de corte de estoque unidimensional começou a ser estudado, Kantorovich (1960) provavelmente foi um dos primeiros autores a apresentar

um modelo matemático para o PCE unidimensional.

Este problema consiste em cortar objetos de comprimento L , para produzir m tipos de itens de comprimento l_i , de modo a atender pedidos com demanda d_i para $i = 1, \dots, m$. Uma solução para o PCE consiste em determinar a melhor maneira de cortar os itens a partir de objetos para que as demandas sejam atendidas, visando otimizar uma certa função objetivo. Na literatura, o modelo matemático para o PCE unidimensional apresentado a seguir foi atribuído a Kantorovich (1960). Neste modelo é necessário estabelecer um limitante superior (K) para a quantidade de objetos, e o objetivo é minimizar o número de objetos cortados.

Problema de corte de estoque unidimensional - Modelo atribuído a Kantorovich

Para descrever o modelo são necessários os seguintes índices e variáveis de decisão:
Índices:

- $i = 1, \dots, m$: m é números de tipos de itens;
- $k = 1, \dots, K$: K é quantidade de objetos.

Variáveis de decisão:

- y_k : variável binária indicando se o objeto k é utilizado no processo de corte, ou não;
- h_{ik} : quantidade de vezes que o item i é cortado do objeto k .

A Formulação do PCE Unidimensional atribuído a Kantorovich (KT) é dada por (2.1) - (2.4).

$$\min \sum_{k=1}^K y_k \quad (2.1)$$

$$s.a. \sum_{k=1}^K h_{ik} = d_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^m l_i h_{ik} \leq L y_k, \quad k = 1, \dots, K \quad (2.3)$$

$$h_{ik} \in \mathbb{Z}_+, y_k \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, K \quad (2.4)$$

A função objetivo (2.1) representa a minimização da quantidade de objetos utilizados no processo do corte. As restrições (2.2) garantem que a quantidade cortada de cada item em todos os objetos satisfaça a demanda. O conjunto de restrições (2.3) é conhecido como restrições de limitação física do objeto, ou seja, se um objeto for utilizado no processo de corte, a combinação dos itens a serem cortados não deve exceder seu comprimento L . Por fim as restrições (2.4) representam o domínio das variáveis.

Problema de corte de estoque unidimensional - Modelo de Gilmore e Gomory

Alguns anos depois apareceram os mais repercutimos trabalhos a tratar o PCE unidimensional, Gilmore e Gomory (1961, 1963), o quais são um grande marco na literatura,

sendo extensivamente citados desde então. A modelagem matemática proposta para o PCE é composta de duas etapas. Primeiro, deve-se definir todas as maneiras possíveis de se cortar os objetos em estoque, ou seja, definir todos os possíveis padrões de corte. Na segunda etapa, é necessário decidir quantas vezes cada padrão de corte deve ser utilizado

a fim de atender a demanda de cada item ($d = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$).

Um vetor $A_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{mj})^T$ é associado a um padrão de corte unidimensional, sempre que satisfaz as restrições físicas do problema, que são:

$$l_1\alpha_{1j} + l_2\alpha_{2j} + \dots + l_m\alpha_{mj} \leq L, \quad (2.5)$$

$$\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_+, i = 1, \dots, m. \quad (2.6)$$

Assim, a primeira etapa da modelagem proposta por Gilmore e Gomory (1961) consiste em determinar os vetores A_1, A_2, \dots, A_n (2.7), que representam as possíveis soluções para as restrições (2.5) - (2.6), isto é, n possíveis padrões de corte.

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Na segunda etapa define-se a variável de decisão:

x_j : indica o número de objetos cortados de acordo com o padrão de corte j .

A partir desta definição, a formulação para o PCE unidimensional proposto por Gilmore e Gomory (1961) é dada por (2.8) - (2.10).

$$\min \sum_{j=1}^n x_j \quad (2.8)$$

$$s.a. \sum_{j=1}^n A_j x_j = d \quad (2.9)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

A função objetivo (2.8) minimiza o número total de objetos a serem cortados, as restrições (2.9) garantem que a quantidade de cada item a ser cortado seja igual a sua respectiva demanda. O conjunto de restrições (2.10) representam o domínio das variáveis de decisão. Na formulação GG, os parâmetros referentes a j -ésima coluna $A_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{mj})^T$ compõem o padrão de corte associado a variável x_j , isto é, α_{ij} representa a quantidade de itens do tipo i cortadas segundo o padrão de corte j .

Problema de corte de estoque bidimensional

O objetivo do PCE bidimensional é encontrar o número mínimo de objetos retangulares em estoque, de dimensões $L \times W$, necessários para o atendimento da demanda d_i de m itens retangulares menores, de dimensões $l_i \times w_i$, para $i = 1, 2, \dots, m$. A solução deste problema nos dá o número mínimo de objetos necessários, como também especifica como os objetos em estoque serão cortados, isto é, o padrão de corte. A estratégia de modelagem

matemática proposta por Gilmore e Gomory apresentada na Seção 2.2 pode ser adaptada para o PCE bidimensional, o que os difere é a forma como são gerados os padrões de corte para o problema bidimensional (GILMORE; GOMORY, 1965). Silva, Alvelos e Carvalho (2010) propõe um estratégia diferente para modelar o PCE2D que é baseado no modelo “one cut” proposto em Dyckhoff (1981) para o caso unidimensional. Na Seção 2.3 são apresentados os modelos matemáticos para gerar padrões de corte unidimensionais e bidimensionais.

2.3 Geração de colunas no contexto da otimização monobjetivo para o PCE (1D e 2D)

Todo o estudo desenvolvido nesse trabalho utiliza o modelo (2.8) - (2.10). A relaxação linear da formulação (2.8)-(2.10) produz um limitante inferior melhor que o fornecido pela relaxação linear do modelo de Kantorovich (CARVALHO, 2002). Porém o número de colunas do problema cresce exponencialmente, devido ao grande número de possíveis padrões de corte. Deste modo, tratar o problema com todas as colunas se torna inviável. Para contornar esta dificuldade, Gilmore e Gomory foram os pioneiros a utilizarem a técnica de geração de colunas (ver Seção 2.3) para o PCE unidimensional. Esta técnica é aplicada a problemas lineares, assim a solução obtida constitui um limitante inferior para o problema e a técnica é usualmente um ponto de partida para obter uma solução heurística e de boa qualidade para o problema inteiro. Posteriormente em 1965, Gilmore e Gomory adaptaram os métodos desenvolvidos para um estudo de caso em uma indústria de papel, acrescentando restrições para o problema em questão, como limitação do número de facas.

Outra dificuldade é a integralidade da variável x_j , que indica a frequência do padrão de corte. Assim o método de Geração de Colunas (GC) é usado para obter uma solução para o problema relaxado e alguma técnica para obter uma solução inteira (heurísticas ou o método *branch and price*). O método de GC para o PCE unidimensional e bidimensional proposto por Gilmore e Gomory (1961, 1963, 1965) consiste em relaxar a integralidade da variável x_j e considerar uma matriz inicial de padrões de corte, obtendo assim um problema de otimização linear contínuo denominado Problema Mestre Restrito (PMR). O PMR é resolvido através do método Simplex e a variável dual associada à solução ótima é utilizada para obter uma nova coluna (padrão de corte) resolvendo um subproblema denominado de *pricing*, as colunas atrativas (com menor custo reduzido) são adicionadas ao PMR a cada iteração para melhorar a solução atual. O PMR é o mesmo independente do número de dimensões relevantes no processo de corte, o que diferencia é o subproblema *pricing*, pois ele depende da dimensionalidade do PCE. A cada iteração do método GC aplicado ao PCE é resolvido um Problema de corte em que se supõe que há disponível um único objeto e o objetivo é maximizar o seu uso. Ao final da GC se a solução do PMR é fracionária, pode-se usar heurísticas de arredondamento (WÄSCHER; GAU, 1996; POLDI; ARENALES, 2009; CHAVES, 2019). Outra estratégia é utilizar um procedimento *branch and price*, que combina o procedimento de geração de coluna dentro de uma abordagem *branch and bound* (DEGRAEVE; PEETERS, 2003; BELOV; SCHEITHAUER, 2006) para obter uma solução inteira.

Para o caso unidimensional, o subproblema *pricing* é um problema da mochila inteira (GILMORE; GOMORY, 1961, 1963; MARTELLO; TOTH, 1990). Para os casos em que é considerado dimensões maiores a dificuldade relacionada ao número de colunas não

pode ser contornada de modo geral, uma vez que o problema da mochila generalizado não pode ser resolvido de modo eficiente para dimensões maiores. Existem também a necessidade de considerar restrições relacionadas ao equipamento de corte e as características do sistema produtivo adotado pela indústria que precisam ser consideradas. As restrições relacionadas ao equipamento de corte podem, por exemplo, estar relacionadas ao número de facas ou ao corte guilhotinado. No último caso, o número de estágios pode ser limitado a um número inteiro positivo k (caso k -estagiado) ou não (caso não-estagiado). Pode ocorrer ainda que, um tipo de item pode ter sua produção limitada a um número de vezes em que pode ser cortado do objeto (caso restrito) ou não (caso irrestrito). Na Seção 2.4 apresentamos os modelos matemáticos para resolver o subproblema *pricing* no caso unidimensional e bidimensional usados nesse estudo. O Algoritmo 1 descreve o esquema geral da geração de colunas.

Algoritmo 1: Geração de Colunas

Entrada: dados PCE

Saída: A (matriz de padrões de corte) e solução ótima relaxada

- 1 $A =$ matriz inicial com padrões de corte homogêneos ;
 - 2 **Resolva** PMR até a otimalidade e obtenha a solução e a variável dual associada pelo método Simplex ;
 - 3 **Resolva** Problema *pricing* e obtenha um padrão de corte e o custo reduzido associado;
 - 4 **se** *custo reduzido* ≥ 0 **então**
 - 5 | **PARE!** A solução do PMR é ótima
 - 6 **senão**
 - 7 | **Insira** o padrão de corte na matriz A no PMR e volte a linha 2
 - 8 **fim**
-

2.4 Geração de padrões de corte 1D e 2D

Para gerar padrões de corte para o PCE, é necessário resolver o problema *pricing* (2.11), em que π é a variável dual associada às restrições de demanda (2.9).

$$\text{Max}\{\pi^T A_j | A_j \text{ é um padrão de corte}\} \quad (2.11)$$

Para saber se um padrão de corte A_j^* obtido em (2.11) deve entrar para a matriz de restrições do PMR, A_j^* deve satisfazer à condição (2.12).

$$cr = 1 - \pi^T A_j^* < 0 \quad (2.12)$$

No caso unidimensional, o problema *pricing* é o problema da mochila (2.13)-(2.15).

$$\text{max} \quad \pi^T A_j \quad (2.13)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^m l_i \cdot \alpha_{ij} \leq L, \quad (2.14)$$

$$\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_+^m, \quad (2.15)$$

sendo m a quantidade de itens, L o comprimento do objeto, l_i o comprimento de cada item $i = 1, \dots, m$, π o vetor de variáveis duais associadas a solução ótima do PMR, e α_{ij} o número de vezes que o item i aparece no padrão de corte A_j .

Visto que a geração de padrões de corte tem importância fundamental na resolução do problema de corte de estoque, muitos trabalhos da literatura tratam de modelos e heurísticas para gerar padrões de corte bidimensionais, com as mais diversas imposições, ou restrições sobre eles. Contribuições heurísticas são encontradas em Gilmore e Gomory (1965), Morabito e Arenales (1996), Rangel e Figueiredo (2008), Assis e Rangel (2020). Modelos matemáticos de otimização para a geração destes padrões de corte são propostos em Lodi e Monaci (2003), Yanasse e Morabito (2006, 2008), Martin et al. (2020a), Martin, Morabito e Munari (2020), Martin et al. (2020b).

Em Martin (2019) é apresentado um estudo dos modelos, e métodos de solução para os Problemas de Corte Guilhotinado e Restritos (PCGR). São apresentados experimentos computacionais para analisar o desempenho das formulações propostas comparando-as com as formulações da literatura. Os modelos propostos para o caso de padrões de corte 2-estágios foram comparados ao Modelo 1 (M1) de Lodi e Monaci (2003), os resultados mostraram que o modelo M1 superou os resultados dos modelos propostos obtendo menor tempo computacional e otimalidade em todas as instâncias, visto que M1 foi projetado especificamente para este tipo de padrão de corte. Desta forma, o subproblema *pricing* utilizado na GC para resolver o PCE bidimensional é o modelo M1 com rotação dos itens discutido em Lodi e Monaci (2003), apresentado a seguir.

Em Lodi e Monaci (2003) são propostos dois modelos para problemas de corte bidimensionais guilhotinados 2-estágios, sendo o modelo M1 obtendo melhor desempenho nos testes realizados. No modelo M1 os itens são considerados todos distintos (mesmo quando houver itens com dimensões idênticas). Usa-se então o parâmetro m para definir o número de tipos de itens de acordo o número de dimensões $l_i \times w_i$ diferentes, e o parâmetro n para a quantidade total de itens demandados, isto é $n = \sum_{i=1}^m d_i$, em que d_i é a demanda do item i (esse passo é denominado nesse estudo como replicação dos itens). Os itens são ordenados de forma não crescente de acordo com a largura w_i ($w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_m$). Considera-se que podem ser inicializadas n possíveis faixas, sendo cada faixa k inicializada pelo item de largura w_k , $k \in \{1, \dots, n\}$. Logo, a variável de decisão que representa o corte dos itens demandados em faixas é dada por:

$$x_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se o item } j \text{ é cortado a partir da faixa } k, j \geq k, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O modelo M1 representado por (2.16)-(2.20) descreve a formulação de Lodi e Monaci (2003) para padrões de corte 2-estágios.

$$\max \sum_{j=1}^n v_j \sum_{k=1}^j x_{jk} \quad (2.16)$$

$$s.a. \sum_{k=1}^j x_{jk} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.17)$$

$$\sum_{j=k+1}^n l_j x_{jk} \leq (L - l_k) x_{kk}, \quad k = 1, \dots, n - 1 \quad (2.18)$$

$$\sum_{k=1}^n w_k x_{kk} \leq W, \quad (2.19)$$

$$x_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.20)$$

Em que v_j é o valor do item j , a função objetivo (2.16) maximiza a soma total do valor dos itens cortados. As restrições (2.17) indicam que cada item é cortado apenas uma vez,

e eles são cortados apenas de faixas que possuem larguras maiores ou iguais à largura do item. As restrições (2.18) garantem que o comprimento de cada faixa é respeitado enquanto a restrição (2.19) garante que a largura do objeto é respeitada. As restrições (2.20) indicam o domínio das variáveis. Para considerar o caso em que a rotação dos itens é permitida, para cada item j o item complementar $j + n$ é considerado de tal forma que, $l_{j+n} = w_j$ e $w_{j+n} = l_j$ (passo denominado rotação dos itens), e os $2n$ itens são ordenados de forma não crescente de acordo com a largura. O modelo M1 com rotação (M1-rot) de itens é obtido substituindo as restrições (2.17) pelas restrições (2.21) e substituindo n por $2n$.

$$\sum_{k=1}^j x_{jk} + \sum_{k=1}^{\theta_j} x_{\theta_j k} \leq 1 \quad j = 1, \dots, 2n \text{ e } j < \theta_j, \quad (2.21)$$

em que θ_j indica o item rotacionado correspondente ao item j . Portanto o modelo M1-rot é dado por (2.22)-(2.26):

$$\max \sum_{j=1}^{2n} v_j \sum_{k=1}^j x_{jk} \quad (2.22)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{k=1}^j x_{jk} + \sum_{k=1}^{\theta_j} x_{\theta_j k} \leq 1 \quad j = 1, \dots, 2n \text{ e } j < \theta_j, \quad (2.23)$$

$$\sum_{j=k+1}^{2n} l_j x_{jk} \leq (L - l_k) x_{kk}, \quad k = 1, \dots, 2n - 1 \quad (2.24)$$

$$\sum_{k=1}^{2n} w_k x_{kk} \leq W, \quad (2.25)$$

$$x_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, 2n \quad k = 1, \dots, 2n. \quad (2.26)$$

No contexto do PCE, ao aplicar a GC utilizando o modelo M1-rot para gerar os padrões de corte, é necessário fazer um pré-processamento dos dados do problema, dividido em três passos. O primeiro passo é realizar a replicação dos itens de acordo com a demanda de cada item, porém é necessário um cuidado nessa etapa pois o número de variáveis do modelo está diretamente relacionado ao número de cópias criadas a partir da demanda de cada item. Isso pode ser amenizado alterando as demandas apenas para a geração do padrão de corte. O controle do atendimento da demanda é feito no PMR através da equação (2.27) e tomando $n = \sum_{j=1}^m \bar{d}_j$.

$$\bar{d}_j = \min \left\{ d_j, \left\lfloor \frac{L \cdot W}{l_j \cdot w_j} \right\rfloor \right\}, j = 1, \dots, m. \quad (2.27)$$

O segundo passo é a rotação dos itens associando cada item j com seu respectivo rotacionado θ_j e o terceiro passo é a ordenação de forma não crescente de acordo com a largura w_j .

Devido a grande quantidade de padrões de corte, estratégias para diminuir o número de padrões de corte irrelevantes podem ser extremamente úteis. Algumas regras para evitar a construção de padrões de corte equivalentes, como a utilização dos efeitos de simetria, ordenação e de corte normal que reduzem consideravelmente o número de padrões de corte possíveis foram apresentados em Christofides e Whitlock (1977). Outros estudos do problema de corte de estoque bidimensional e/ou da geração de padrões de corte bidimensionais podem ser encontrados em Gilmore e Gomory (1965), Yanasse, Zinober e Harris (1991), Mosquera e Rangel (2007), Chaves (2019).

2.5 Outros Critérios de otimização para o PCE

Os modelos apresentados anteriormente consideram como critério de otimização a minimização do número total de objetos cortados. Outro critério importante que pode ser considerado é a minimização do número total de *setups* da máquina de corte. O *setup* está associado ao processo de troca de um padrão de corte para outro, ou seja, à ele está associado uma série de paradas na máquina de corte para que sejam realizados ajustes necessários a fim de efetuar outros tipos de padrões de corte. O número de *setups* tem uma grande importância quando são necessárias várias mudanças de padrões de corte para se atender à demanda de itens e o preparo da máquina tenha um custo considerável, em termos de tempo de produção. No modelo matemático, a contagem de *setup* pode ser realizada pela variável binária (2.28) e indica se o padrão de corte j foi utilizado ou não no processo de corte (VANDERBECK, 2000; ARANA-JIMÉNEZ; SALLES-NETO, 2017; ALIANO-FILHO; MORETTI; PATO, 2015).

$$\delta(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_j > 0 \\ 0, & \text{se } x_j = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

Assim a formulação para esse caso é dado da seguinte forma:

$$\min \sum_{j=1}^n \delta(x_j) \quad (2.29)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n A_j x_j = d, \quad (2.30)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.31)$$

É possível reformular o problema usando o modelo linear (2.32)-(2.36).

$$\min \sum_{j=1}^n y_j \quad (2.32)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n A_j x_j = d, \quad (2.33)$$

$$x_j \leq N y_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.34)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.35)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.36)$$

em que N é um limite superior para x_j .

Outro critério de otimização relacionado as características da máquina de corte é minimizar o número de ciclos da serra. O conceito de ciclo da serra, se faz presente em ambientes nos quais a máquina de corte pode cortar vários objetos idênticos simultaneamente. Vamos apresentar alguns modelos que consideram em sua estrutura o número de ciclos da serra.

Na área industrial, como a de móveis (MOSQUERA; RANGEL, 2007), a máquina de corte tem capacidade de cortar simultaneamente vários objetos. Dada a altura da serra, h , e a espessura t do objeto, o número máximo de objetos que podem ser empilhados na máquina e cortados simultaneamente, de acordo com um padrão de corte, é chamado de capacidade da máquina de corte ou capacidade da serra (representada na Figura 2.8), e é

dada por:

$$c = \left\lfloor \frac{h}{t} \right\rfloor.$$

Figura 2.8: Máquina utilizada no processo de corte.



Fonte: (HOMAG, 2019).

Definição 2.8. (YANASSE; ZINOBER; HARRIS, 1991): O conjunto de todas as operações necessárias para cortar um, ou mais objetos, segundo um mesmo padrão de corte, incluindo o ato de carregar a máquina de corte com um determinado número de objetos e cortá-los simultaneamente é chamado de ciclo da serra.

Definição 2.9. (TOSCANO; RANGEL; YANASSE, 2017): O número mínimo de ciclos da serra, C_j , necessários para cortar x_j , de acordo com um determinado padrão de corte j e a capacidade da serra cap é calculado por:

$$C_j = \left\lceil \frac{x_j}{c} \right\rceil, j = 1, \dots, n. \quad (2.37)$$

Ao verificar a redução do número de padrões de corte diferentes na solução final, pode-se dizer que alguns padrões de corte estão sendo utilizados repetidamente a fim de atender a demanda dos itens. Sendo assim os objetos em estoque podem ser cortados simultaneamente, o que pode diminuir o tempo de utilização da serra, uma vez que o tempo que seria gasto para cortar um único objeto é utilizado para cortar cap objetos. Logo, a prática desta atividade implica em economia de energia elétrica entre outros, isto é, a redução de custos operacionais presentes no problema de corte de estoque, além de reduzir o número de ciclos da serra significativamente. O modelo apresentado a seguir foi proposto por Mosquera e Rangel (2007) para reduzir o número de ciclos da serra. Este modelo utiliza uma estratégia que consiste em cortar um número de objetos segundo um mesmo padrão de corte que seja múltiplo da capacidade da serra, tal modelo foi denominado Modelo de Multiplicidade.

$$\min \sum_{j=1}^n (x_j + z_j) \quad (2.38)$$

$$s.a. \sum_{j=1}^n A_j x_j \geq d, \quad (2.39)$$

$$x_j = c \cdot z_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.40)$$

$$x_j, z_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.41)$$

Ao observar este modelo, o mesmo consiste em uma variação do modelo proposto por Gilmore e Gomory (2.8)-(2.10) onde as restrições (2.40) impõem que o número de vezes que o objeto é utilizado seja um múltiplo da capacidade da serra.

O modelo apresentado a seguir foi proposto por Yanasse (2008), o qual minimiza o número de ciclos da serra e em suas restrições permite-se a demanda em excesso.

$$\min \sum_{j=1}^n \left\lceil \frac{x_j}{c} \right\rceil \quad (2.42)$$

$$s.a. \sum_{j=1}^n A_j x_j \geq d, \quad (2.43)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.44)$$

Yanasse (2008) reescreve o modelo (2.42)-(2.44) através do modelo linear a seguir:

$$\min \sum_{j=1}^n z_j \quad (2.45)$$

$$s.a. \sum_{j=1}^n A_j x_j \geq d, \quad (2.46)$$

$$z_j \geq \frac{x_j}{c}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.47)$$

$$x_j, z_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.48)$$

Ainda nesse estudo é mostrado a equivalências entre o modelo (2.45)-(2.48) e o modelo (2.49)-(2.51).

$$\min \sum_{j=1}^n z_j \quad (2.49)$$

$$s.a. \sum_{j=1}^n A_j z_j \geq \left\lceil \frac{d}{c} \right\rceil, \quad (2.50)$$

$$z_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.51)$$

Em Rangel e Sáez-Aguado (2017b) é apresentado um estudo comparativo envolvendo quatro modelos propostos na literatura para resolver o PCE considerando a minimização do número total de ciclos e objetos, definindo se os modelos propostos representam adequadamente o problema observando o tempo e a qualidade da solução. Os resultados realizados pelos autores indicaram que o modelo M2 (descrito pelo modelo (2.52)-(2.56)), obteve o melhor comportamento.

$$\min \sum_{j=1}^n x_j + \sum_{j=1}^n z_j \quad (2.52)$$

$$s.a. \sum_{j=1}^n A_j x_j \geq d, \quad (2.53)$$

$$\sum_{j=1}^n A_j z_j \geq \left\lceil \frac{d}{c} \right\rceil, \quad (2.54)$$

$$x_j \leq c z_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.55)$$

$$x_j, z_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.56)$$

No contexto de aplicações práticas no meio industrial é importante a minimização da perda de matéria-prima assim como é importante maximizar a produtividade do equipamento utilizado no processo de corte, tornando assim, necessário utilizar um modelo que descreva essa situação. Porém, é fácil perceber que ao minimizar o número total de *setup* pode acarretar em um aumento do número de objetos a ser cortados, ou seja, ocorrerá um aumento do desperdício da matéria-prima. Ou então, ao utilizar capacidade máxima da serra cortando vários objetos simultaneamente, pode também contribuir com o aumento do desperdício de matéria-prima. Assim, usando uma abordagem monobjetiva é improvável encontrar uma solução satisfatória considerando todos esses critérios de otimização simultaneamente.

O uso da abordagem multiobjetivo pode contornar essa dificuldade, já que a solução de um Problema de Otimização Multiobjetivo (POM) é dada por um conjunto não unitário de soluções e assim, o decisor pode escolher a solução que melhor atende as suas necessidades de acordo com o cenário no momento da decisão. No Capítulo 3 são apresentadas as principais definições e características da teoria de otimização multiobjetivo, bem como o Problema de Corte de Estoque Multiobjetivo abordado nessa tese.

3 Otimização Multiobjetivo

Na área de otimização busca-se encontrar a melhor solução de acordo com algum critério (maximização ou minimização) dentre todas as soluções possíveis (factíveis) de um problema estudado. Problemas de várias áreas da ciência podem ser representados através de um modelo de otimização matemática. Ao estudar um problema, é necessário ter todas as informações e características possíveis, para que o modelo matemático represente o problema de forma mais fiel possível. O modelo deve ser detalhado ao máximo para captar os elementos essenciais do problema mas, de tal forma que ainda seja tratável pelos métodos de resolução (WILLIAMS, 2013). Ao modelar matematicamente um problema é preciso distinguir variáveis decisivas (variáveis controláveis), das não decisivas, pois em uma situação de produção, por exemplo, a quantidade a ser produzida é uma variável controlável, porém a demanda ou o preço considerado pelo mercado são exemplos de variáveis não controláveis (considerados parâmetros do modelo).

Vários problemas podem ser modelados minimizando ou maximizando uma função objetivo sobre um conjunto que é chamado de conjunto factível, essa única função objetivo geralmente agrega mais de uma característica (Problema de Otimização Monobjetivo (RANGEL; SÁEZ-AGUADO, 2017b; TEIXEIRA; POLDI, 2020)). Como exemplo, considere a situação em que decidimos comprar um celular, temos várias opções, dentre elas considere apenas duas (maximizar a capacidade de armazenamento (c), minimizar o preço (p)). É fácil perceber que essas duas características são conflitantes entre si, assim seria difícil encontrar uma solução ótima para os dois objetivos simultaneamente. Essa é a característica de um problema de Otimização Multiobjetivo (DEB, 2001; EHRGOTT; GANDIBLEUX, 2003).

A solução de um problema multiobjetivo é dada por um conjunto não unitário de soluções, ditas eficientes no sentido de Pareto ou Pareto ótima. Esse termo deriva do economista italiano Pareto que em 1896 introduziu o conceito na economia (BEN-TAL, 1980). A otimalidade de Pareto, relacionada com o equilíbrio competitivo, seguiu sendo extensivamente estudada por economistas e hoje continua sendo estudada em várias áreas da ciência.

Nos problemas monobjetivo, mesmo que outros critérios sejam considerados, uma única função é otimizada (minimizada ou maximizada) buscando encontrar uma solução ótima, e mesmo que um determinado problema possua um conjunto de soluções ótimas, o valor ótimo correspondente a esse conjunto é o mesmo. Já nos problemas multiobjetivo busca-se minimizar (ou maximizar) um vetor com p funções objetivo encontrando um conjunto de soluções ótimas (no sentido de Pareto), cujo valores ótimos são diferentes porém não é possível dizer que um é melhor que outro. Outro aspecto importante é que na otimização multiobjetivo a busca por soluções pode ser realizada tanto no espaço das variáveis quanto nos espaços dos objetivos, enquanto em problemas com um único objetivo realiza-se a busca por soluções apenas em um espaço.

Uma breve revisão das pesquisas e avanços até o ano 2000, na área de Otimização

Combinatória Multiobjetivo é realizada em Ehrgott e Gandibleux (2000). Nesse artigo são apresentadas de maneira resumida as definições dos problemas de Otimização Combinatória multiobjetivo destacando as principais metodologias de solução (exata e heurística) e uma classificação da literatura utilizada. Algumas das direções futuras apontadas foram: necessidade de resultados teóricos relacionados com caracterização de soluções eficientes, e ao número de soluções eficientes, topologia da fronteira e a aplicação em problemas considerando mais de dois objetivos.

Neste capítulo, apresenta-se uma revisão das principais definições e conceitos da Otimização Multiobjetivo (OM). O critério de otimização dessa classe de problemas envolve um vetor de funções objetivo. Assim, é necessário definir quando um vetor é considerado menor (maior) que ou outro, ou seja, definir uma relação de ordem e com isso podemos determinar quando uma solução é ótima no sentido de Pareto. São listados artigos que realizam a busca de soluções no espaço critério e no espaço de decisão.

3.1 Conceitos e definições

Nesta seção todos os conceitos necessários no desenvolvimento dos métodos de solução para um Problema de Otimização Multiobjetivo são definidos. Todas as definições e conceitos foram baseadas em Ehrgott e Gandibleux (2000), Deb (2001), Aliano-Filho (2016).

Definição 3.1. (Problema geral de otimização multiobjetivo (POM)): Um (POM) tem um número $p > 1$ de funções objetivos que devem ser minimizadas, sujeito a um conjunto viável $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. A forma geral é dada por:

$$(POM) \quad \begin{array}{ll} \min & F(x) \\ \text{s.a.} & x \in \mathcal{X}, \end{array} \quad (3.1)$$

em que

- Ω é um conjunto aberto do \mathbb{R}^n
- $\mathcal{X} = \{x \in \Omega : G(x) \leq 0\}$: espaço de decisão ou factível
- $F = (f_1, f_2, \dots, f_p) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $G = (g_1, g_2, \dots, g_m) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Em um (POM), supõe-se que todas as funções objetivo são conflitantes entre si, ou seja, sempre que um objetivo é minimizado conseqüentemente pelo menos um dos outros objetivos sofre um aumento.

Definição 3.2. (Espaço critério): O espaço $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^p$ gerado pela aplicação das p funções objetivos no espaço \mathcal{X} é chamado espaço critério ou objetivo. ($\mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{R}^p \text{ e } x \in \mathcal{X} : z = F(x)\}$)

É definido a seguir um vetor bastante utilizado nos métodos de solução para (POM), o vetor ideal. Geralmente ele é usado como um ponto referência e/ou para delimitar a busca no espaço critério.

Definição 3.3. (Vetor ideal): O vetor $z^I = (z_1^I, \dots, z_p^I)^T \in \mathcal{Z}$ é dito Ideal quando sua k -ésima coordenada é o valor mínimo da k -ésima função objetivo, ou seja, é o valor ótimo do seguinte problema monobjetivo:

$$z_k^I = \min \quad f_k(x) \quad (3.2) \\ \text{s.a.} \quad x \in \mathcal{X}$$

Para determinar entre as soluções factíveis quais são as melhores, precisa-se da definição de solução Pareto-Ótima (solução eficiente), e relações de eficiência (eficiência fraca e eficiência parcial). Para essas definições, é necessário considerar as seguintes relações de ordem em \mathbb{R}^p (ARANA-JIMÉNEZ; SALLES-NETO, 2017), (ARANA-JIMÉNEZ et al., 2008) e (YU; ZELENY, 1974):

Sejam $x = (x_1, \dots, x_p), y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$, então

- a) $x = y \Leftrightarrow x_i = y_i \quad \forall i = 1, \dots, p;$
- b) $x < y \Leftrightarrow x_i < y_i \quad \forall i = 1, \dots, p;$
- c) $x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \quad \forall i = 1, \dots, p;$
- d) $x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \quad \forall i = 1, \dots, p$, e existe algum j tal que $x_j < y_j$;
- e) $x \leq_j y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \quad \forall i = 1, \dots, p$, e $x_j < y_j$, com $j \in \{1, \dots, p\}$;
- f) $x \leq_{lex} y \Leftrightarrow$ se existe algum j tal que $x_i = y_i$, para $i = 1, \dots, j - 1$ e $x_j < y_j$ (ordenação lexicográfica (BEN-TAL, 1980)).

Definição 3.4. (Solução eficiente): Um ponto factível, x^* , é dito solução eficiente para (POM) se **não** existe nenhum outro ponto factível, x , tal que $F(x) \leq F(x^*)$.

Definição 3.5. Quando dados $x, x^* \in \mathcal{X}$ tem-se que $F(x^*) \leq F(x)$, dizemos que x^* domina x , e pode ser denotado por $x^* \preceq x$.

Definição 3.6. (Solução parcial- i eficiente): Um ponto factível, x^* , é dito solução parcial- i eficiente para (POM) com $i \in \{1, \dots, p\}$, se **não** existe nenhum outro ponto factível, x , tal que $F(x) \leq_i F(x^*)$.

Definição 3.7. (Solução fracamente eficiente): Um ponto factível, x^* , é dito solução fracamente eficiente para (POM) se **não** existe nenhum outro ponto factível, x , tal que $F(x) < F(x^*)$.

Note que Solução eficiente \Rightarrow Solução parcial- i eficiente \Rightarrow Solução fracamente eficiente mas a recíproca não é válida: De fato, seja \bar{x} uma solução eficiente, ou seja, não existe outro ponto $x \in \mathcal{X}$ tal que $F(x) \leq F(\bar{x})$. Se a desigualdade anterior não acontece para (\leq) então também não vai acontecer para (\leq_i) muito menos para $(<)$. A seguir um exemplo é apresentado para mostrar que a recíproca é falsa.

Exemplo 3.8. Considere o problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & (f_1(x_1), f_2(x_2)) = (x_1, x_2) \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \leq 6 \\ & x \in \mathbb{Z}_+^2 \end{aligned}$$

Seja $\bar{x} = (1, 6)$, é fácil verificar que \bar{x} não é uma solução eficiente, pois existe um ponto factível $x = (1, 5)$, tal que

$$F(1, 5) = (1, 5) \leq (1, 6) = F(1, 6) = F(\bar{x}).$$

Por outro lado, temos que \bar{x} é uma solução parcial-1 eficiente pois não existe nenhum ponto factível $x = (x_1, x_2)$ tal que

$$F(x) \leq_1 (1, 6) = F(\bar{x}).$$

Agora seja $\bar{x} = (7, 0)$, é fácil ver que \bar{x} é uma solução fracamente eficiente pois não existe nenhum ponto factível $x = (x_1, x_2)$ tal que

$$F(x) < (7, 0) = F(\bar{x}).$$

Mas \bar{x} não é uma solução parcial-1 eficiente pois existe um ponto factível $x = (6, 0)$, tal que

$$F(6, 0) = (6, 0) \leq_1 (7, 0) = F(7, 0) = F(\bar{x}).$$

A partir do vetor ideal pode-se definir o vetor utópico, que é estritamente melhor que qualquer solução eficiente, isto é, domina estritamente qualquer solução eficiente, assim alguns métodos de resolução podem preferir utilizar o vetor utópico e não o vetor ideal. Note que, o vetor utópico e o vetor ideal são utilizados como ponto de referência nos métodos de resolução, mas eles não pertencem ao espaço critério, considerando que os objetivos são conflitantes entre si.

Definição 3.9. (Vetor utópico) O vetor $z^U = (z_1^U, \dots, z_p^U)^T \in \mathcal{Z}$ é chamado Utópico e sua k -ésima componente é tal que $z_k^U = z_k^I - \epsilon_k$ para todo $k = 1, \dots, p$ e $\epsilon_k > 0$.

A seguir são apresentadas algumas definições relacionadas à definição de solução eficiente.

Definição 3.10. (Ponto não dominado): Um ponto z^* no espaço de critério \mathcal{Z} é chamado de não dominado se sua imagem inversa é uma solução eficiente, ou seja, $z^* = F(x^*)$.

Definição 3.11. (Conjunto eficiente): O conjunto eficiente ou Pareto-Ótimo é denotado por \mathcal{X}^* contém todos os elementos de \mathcal{X} que não são dominados por nenhum outro elemento de \mathcal{X} , ou seja, $\mathcal{X}^* = \{x^* \in \mathcal{X} : x \not\leq x^*, \forall x \in \mathcal{X}\}$.

Definição 3.12. (Conjunto não dominado): A imagem do conjunto eficiente \mathcal{X}^* é o conjunto $\mathcal{Z}^* \subset \mathcal{Z}$ conhecido como conjunto não dominado (ou Fronteira de Pareto), ou seja, $\mathcal{Z}^* = \{z^* \in \mathbb{R}^p \text{ e } x^* \in \mathcal{X}^* : z^* = F(x^*)\}$.

Definição 3.13. (Soluções e pontos suportados): Uma solução $x^* \in \mathcal{X}^*$ é eficiente e suportada, se existe algum $w = (w_1, \dots, w_p)^T > 0$ de maneira que x^* seja solução do seguinte problema monobjetivo:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = w^T F(x) \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathcal{X} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dizemos que o vetor objetivo resultante $z^* = F(x^*)$ é um ponto suportado. Caso contrário, x^* e z^* são chamados de solução eficiente não suportada e ponto não suportado, respectivamente.

Definição 3.14. (Vetor nadir): O vetor $z^N \in \mathcal{Z}$ é chamado de nadir e sua k -ésima coordenada é o maior valor da função objetivo k no conjunto eficiente.

Note que, o vetor nadir é encontrado a partir do conjunto eficiente, o que torna difícil de obtê-lo na prática. O Teorema a seguir mostra que para o caso biobjetivo ($p = 2$) é possível obter tanto o vetor ideal quanto o vetor nadir (BEENSON, 1971).

Teorema 3.15. (BEENSON, 1971) *Seja um (POM) com $p = 2$ dado por:*

$$\begin{aligned} \min \quad & F = (f_1(x), f_2(x)) \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

Se $x^1 \in \mathcal{X}$ é mínimo global único para $f_1(x)$, e $x^2 \in \mathcal{X}$ é mínimo global único para $f_2(x)$, então $f_2(x^1)$ e $f_1(x^2)$ são os valores máximos no conjunto de soluções eficientes para f_2 e f_1 .

Demonstração. Seja $x^1 \in \mathcal{X}$ o único mínimo global de $f_1(x)$ então $\forall x \in \mathcal{X}$ tal que $x \neq x^1$ temos que $f_1(x^1) < f_1(x)$. Agora, suponha que exista um $\bar{x} \in \mathcal{X}$ tal que $f_2(\bar{x}) \geq f_2(x^1)$, então \bar{x} não pode ser uma solução eficiente, logo x^1 maximiza $f_2(x)$. Para o ponto x^2 a demonstração é análoga. \square

O Exemplo 3.16 ilustra as definições apresentadas até o momento.

Exemplo 3.16. Considere o seguinte problema de otimização biobjetivo:

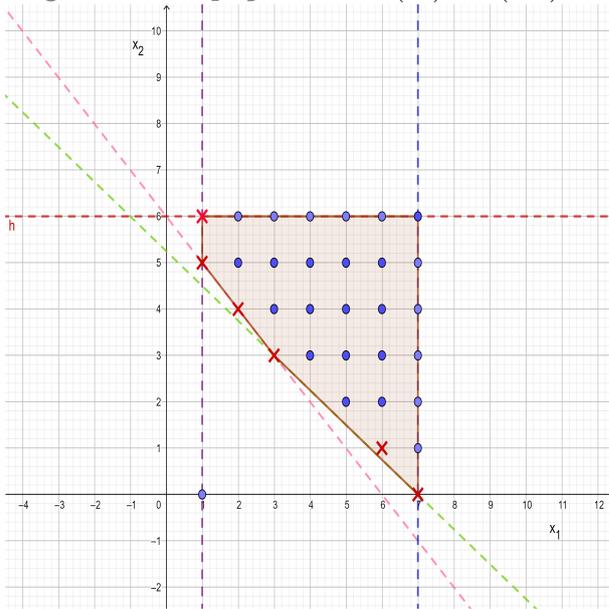
$$\begin{aligned} \min \quad & (f_1(x_1), f_2(x_2)) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2) \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 21 \\ & 1 \leq x_1 \leq 7 \\ & 0 \leq x_2 \leq 6 \\ & x \in \mathbb{Z}^2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

A Figura 3.1 mostra o espaço de decisão \mathcal{X} , os pontos e os “x” representam todas as soluções factíveis para o problema (3.4). A imagem de todas as soluções factíveis podem ser vistas na Figura 3.2 representando o espaço critério \mathcal{Z} , os pontos de $A - F$ são as imagens dos “x” destacados no espaço de decisão. O ponto I (vetor ideal) é o menor valor obtido para cada função objetivo e o ponto S é o maior valor em cada função objetivo dentre todos os pontos factíveis. O ponto N (vetor nadir) é o maior valor de cada função objetivo dentre os pontos de $A - F$.

O vetor ideal (z^I) e o vetor nadir (z^N) são obtidos resolvendo os problemas (3.5) e (3.6).

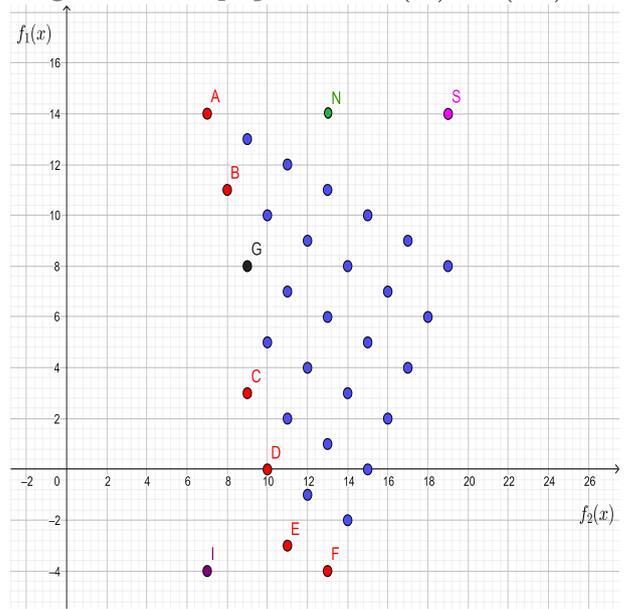
$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 21 \\ & 1 \leq x_1 \leq 7 \\ & 0 \leq x_2 \leq 6 \\ & x \in \mathbb{Z}^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Figura 3.1: Espaço decisão (\mathcal{X}) de (3.4) .



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 3.2: Espaço critério (\mathcal{Z}) de (3.4) .



Fonte: Elaborado pela autora.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f_2(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \\
 \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \geq 6 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \geq 21 \\
 & 1 \leq x_1 \leq 7 \\
 & 0 \leq x_2 \leq 6 \\
 & x \in \mathbb{Z}^2
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

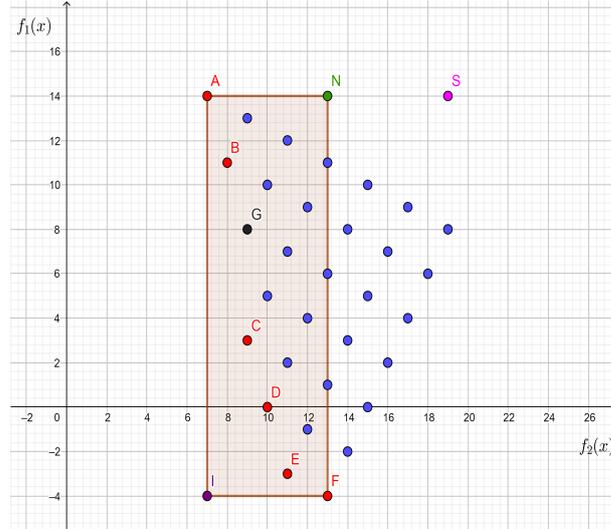
Na Figura 3.1 observe que a solução do problema (3.5) é $x^1 = (7, 0)$ com $F(x^1) = (f_1(x^1), f_2(x^1)) = (7, 14)$ representado pelo ponto A na Figura 3.2, a solução do problema (3.6) é $x^2 = (1, 6)$ com $F(x^2) = (f_1(x^2), f_2(x^2)) = (13, -4)$ representado pelo ponto F na Figura 3.2, ou seja, o vetor ideal representado na Figura 3.2 pelo ponto destacado I é dado por $z^I = (\min f_1, \min f_2) = (7, -4)$ e o vetor nadir representado na Figura 3.2 pelo ponto N é dado por $z^N = (\max f_1, \max f_2) = (13, 14)$ (Pelo Teorema 3.15). Os pontos A e F são chamados pontos lexicográficos da fronteira de Pareto.

Observe que o ponto S tem coordenadas igual a $(\max f_1(x), \max f_2(x)) = (19, 14)$ que não deve ser confundido com o vetor nadir, pois o vetor nadir é o máximo de cada componente da função objetivo com $x \in \mathcal{X}^*$ (não $x \in \mathcal{X}$) e o ponto G = (9, 8) é um ponto fracamente eficiente e não eficiente.

O conjunto eficiente \mathcal{X}^* é formado pelos pontos $\{(7, 0), (6, 1), (3, 3), (2, 4), (1, 5), (1, 6)\}$ representados pelos “x” na Figura 3.1. O conjunto não dominado \mathcal{Z}^* é formado pelos pontos $\{A, B, C, D, E, F\}$ na Figura 3.3. Note que não é possível melhorar uma coordenada sem que a outra coordenada piore. Os pontos de \mathcal{Z}^* formam a fronteira de Pareto e podemos ver que B está na parte não convexa da fronteira de Pareto, ou seja, é um ponto não suportado. Note também que o retângulo formado pelos pontos A, I, F e N contém a fronteira de Pareto, isso pode ser útil para reduzir o espaço critério, facilitando a busca pelos pontos não dominados (ver Figura 3.3).

Outro conceito importante na teoria da otimização multiobjetivo é a minimização lexicográfica, que está relacionada com a ordenação lexicográfica.

Figura 3.3: Representação da fronteira de Pareto e dos vetores ideal e nadir.



Fonte: Elaborado pela autora.

Definição 3.17. (Minimização lexicográfica (Biobjetivo) (BOLAND; CHARKHGARD; SAVELSBERGH, 2015a)): Considere o problema biobjetivo:

$$\begin{aligned} \min \quad & F = (f_1(x), f_2(x)) \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (3.7)$$

O ponto $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ é dito mínimo lexicográfico de (3.7) se corresponde a uma solução de menor valor para $f_2(x)$ dentre todas as soluções com menor valor para $f_1(x)$ dentre todas as soluções factíveis.

Se \bar{z} existir, ele pode ser encontrado resolvendo dois problemas de otimização monoobjetivo na sequência:

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 = \min \quad & f_1(x) \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_2 = \min \quad & f_2(x) \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathcal{X} \\ & z_1(x) \leq \bar{z}_1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Notação: $\text{lex} - \min_{x \in \mathcal{X}} \{f_1(x), f_2(x)\}$ analogamente podemos definir $\text{lex} - \min_{x \in \mathcal{X}} \{f_2(x), f_1(x)\}$.

A partir da Definição 3.17 é possível pensar na minimização lexicográfica para o caso multiobjetivo. Supondo que existam p objetivos, para cada ordem de prioridade escolhida no conjunto $\{1, 2, \dots, p\}$, resolve-se p subproblemas sequenciais de forma que a função com maior prioridade é otimizada com as suas restrições originais. Na sequência sua solução ótima é utilizada como restrição na otimização da segunda função com maior prioridade, e assim sucessivamente até à última função.

No contexto da otimização multiobjetivo os métodos de solução são classificados em três categorias “*a priori*”, “*a posteriori*” e “interativo” de acordo com o papel do tomador de decisão no processo de resolução do problema. Os métodos *a priori* são aqueles em

que o tomador de decisão fornece informações e preferências a respeito do problema antes do processo de resolução, ou seja, as técnicas de solução buscam uma solução com base nesses parâmetros. Nos métodos *a posteriori* o conjunto de todas as soluções eficientes é gerado e ao final o tomador de decisão analisa o conjunto de acordo com suas preferências naquele momento. Os métodos iterativos são aqueles em que o tomador de decisão introduz as preferências durante o processo de solução, ou seja, o decisor pode articular o processo de otimização de uma forma interativa definindo as prioridades antes de cada iteração, guiando a busca na direção das regiões onde existam soluções relevantes. Esse estudo foca nos métodos *a posteriori*, ou seja, o objetivo é obter a Fronteira de Pareto para que o decisor tenha em mãos um conjunto de soluções que podem ser selecionadas de acordo com a preferência em um determinado momento, e que seja possível escolher outra solução caso as preferências se alterem em um momento posterior.

A minimização lexicográfica da forma como está definida em 3.17 é considerada como um método *a priori* quando o decisor fornece a ordem de prioridade das funções antes do processo de solução. Porém, na Seção 3.4 são citados dois métodos de solução *a posteriori* que usam minimização lexicográfica.

O termo “Métodos de Escalarização” é utilizado exaustivamente durante todo o desenvolvimento da abordagem multiobjetivo, assim uma definição formal adaptada de Aliano-Filho (2016), Sáez-Aguado e Trandafir (2018) é feita na Definição 3.18.

Definição 3.18. (Métodos de escalarização) Os métodos de escalarização são métodos que transformam um (*POM*) em uma sequência de problemas monobjetivo, que sob certas condições, geram soluções eficientes.

Na otimização multiobjetivo tem-se o espaço de decisão \mathcal{X} e o critério \mathcal{Z} , com isso existem métodos de resolução que trabalham com o conjunto \mathcal{X} e outros que trabalham com o conjunto \mathcal{Z} . Ou seja, resolver o (*POM*) consiste em encontrar todos os pontos não dominados correspondentes as soluções eficientes. Na Seção 3.2 uma breve revisão bibliográfica explicitando em qual espaço é feita a busca por soluções eficientes (correspondentes a pontos não dominados) é apresentada. Os métodos de escalarização citados na Seção 3.2 serão descritos na Seção 3.3.

3.2 Buscas no espaço critério e no espaço de decisão

Uma breve revisão da literatura sobre a busca por soluções eficientes (correspondentes a pontos não dominados) de um problema (*POM*) no espaço de critério ou no espaço de decisão é apresentada nessa seção. O principal método de busca no espaço de decisão para problemas de otimização linear multiobjetivo (funções objetivo e restrições lineares com variáveis reais) (*POLM*), são baseados no método Simplex. Em Ehrgott (2000) é apresentada uma breve revisão dos principais resultados de otimização linear monobjetivo e o algoritmo simplex. Em seguida é proposto um algoritmo simplex para um problema biobjetivo linear chamado Simplex Paramétrico, baseado em resultados que relaciona problemas (*POLM*) com a sua escalarização através da soma ponderada. E por fim é apresentado um algoritmo Simplex para problemas (*POLM*). Evans e Steuer (1973) afirmam que na sequência de soluções básicas factíveis geradas antes do ponto ótimo utilizando o algoritmo Simplex Paramétrico, pode haver um ou mais pontos eficientes. No entanto, isso não seria detectado a menos que um teste de eficiência seja aplicado a cada solução viável básica. Com isso, uma condição necessária e suficiente para um ponto ser

eficiente é proposta no desenvolvimento de um algoritmo simplex revisado para problemas (POLM), obtendo o conjunto de pontos eficientes. Yu e Zeleny (1974) apresentam uma versão generalizada do método simplex, o Método Multiobjetivo Simplex, para gerar o conjunto de todas as soluções não dominadas para problemas (POLM) com uma simples subrotina de não dominância para testar a não dominância de qualquer solução. Resultados de testes computacionais realizados pelos autores mostram que o conjunto de todos os pontos não dominados pode ser gerado de forma bastante eficiente.

Para problemas de Otimização inteira Multiobjetivo (OIM), foram encontrados vários métodos de busca no espaço de decisão baseados em adaptações do método *branch and bound* proposto para o problema monoobjetivo. Mavrotas e Diakoulaki (1998) apresentam um algoritmo *Branch and Bound* para a geração do conjunto eficiente em problemas de otimização misto zero-um multiobjetivo. Em cada nó da árvore de busca o vetor ideal é calculado. Se o vetor ideal é dominado por qualquer um dos pontos já encontrados, então o nó específico é considerado e o ramo correspondente é terminado. Para a resolução do subproblema correspondente a cada nó, é utilizado o método simplex proposto em Zeleny (1974). A diferença para o método *Branch and Bound* proposto em Sourd e Spanjaard (2008) é a utilização de um conjunto de pontos (denotado por UB), ao invés de usar apenas o vetor ideal, para descartar um nó. Esses pontos são obtidos calculando-se os pontos lexicográficos (com as soluções eficientes correspondentes). A partir desses dois pontos, obtêm-se uma nova solução utilizando um método de escalarização (Soma Ponderada). Os experimentos numéricos dos autores mostram a eficiência da abordagem considerando um problema biobjetivo.

Jozefowicz, Laporte e Semet (2012) descrevem um algoritmo *Branch and Cut* modificado para problemas de Otimização Inteira Multiobjetivo. Essa modificação é proposta através de definições de limitantes inferior e superior e algumas estratégias adicionais de aceleração. O algoritmo é aplicado a um problema de roteamento e comparado com um dos métodos clássicos de escalarização, o método ϵ - Restrito. A comparação mostra que o tempo médio gasto pelo algoritmo proposto é menor que o tempo médio gasto utilizando o método ϵ - Restrito. Uma pesquisa dos métodos *Branch and Bound* desenvolvidos para problema de Otimização Inteira Mista Multiobjetivo (OIMM) é apresentada em Stidsen, Andersen e Dammann (2014), e os autores apresentam um novo método *Branch and Bound* para resolver uma subclasse de problemas de (OIMM). O método consiste em, a cada nó, resolver uma escalarização similar à Soma Ponderada. Testes computacionais foram realizados pelos autores, em um grande número de instâncias de seis classes diferentes de problemas da subclasse considerada. É feita uma comparação com um método genérico de duas fases e o método proposto funciona melhor em 5 das 6 classes de problemas considerados.

Na revisão de literatura foi observado que os métodos de busca no espaço critério são baseados em métodos de escalarização. Em Aneja e Nair (1979) é proposto um algoritmo para resolver o problema do transporte triobjetivo em duas etapas. Na etapa 1 é considerado um problema biobjetivo, cujo passo inicial é encontrar as soluções da minimização lexicográfica tanto com relação a primeira função objetiva quanto com relação a segunda função objetiva. Na sequência os pontos não dominados do problema biobjetivo são encontrados. Na etapa 2 um novo algoritmo é proposto introduzindo o terceiro objetivo. Benson e Sun (2002) apontam algumas vantagens de se trabalhar no espaço de critério, como por exemplo, o número de elementos do espaço de decisão (\mathcal{X}) cresce exponencialmente com o tamanho do problema enquanto que o número de elementos do espaço critério (\mathcal{Z}) geralmente é menor, apresentar ao decisor o conjunto (\mathcal{Z}^*) pode ser menos

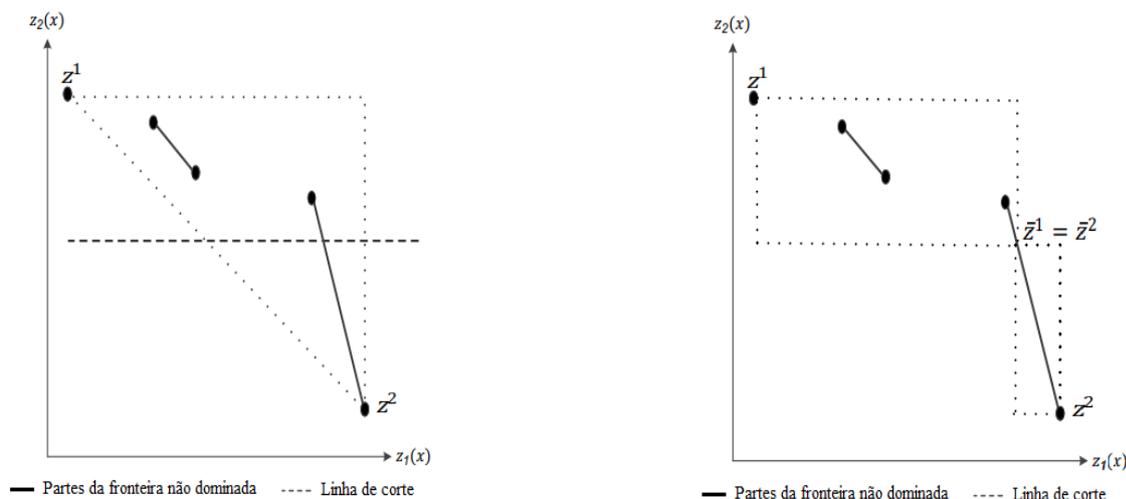
confuso que apresentar o conjunto (\mathcal{X}^*) como solução, a busca em (\mathcal{X}) pode obter vários pontos com mesmo valor em (\mathcal{Z}). Com isso, é proposta uma abordagem de decomposição básica de pesos no método da Soma Ponderada para gerar o conjunto de todos os pontos não dominados de um problema de otimização linear multiobjetivo. Essa abordagem é validada e seu aspecto mais exigente é a necessidade da implementação do algoritmo *Branch and Bound* para efetuar o passo que obtém os pesos.

O método de Sylva&Crema (SYLVA; CREMA, 2004) é desenvolvido para problemas de Otimização Combinatória Multiobjetivo a partir de um conjunto de pontos não dominados determinados a priori. Outras soluções são obtidas utilizando o método da Soma ponderada e adicionando restrições que eliminam do conjunto factível as regiões do espaço (\mathcal{Z}) que são dominadas pelos pontos não dominados do conjunto inicial. Esse método obtém todas as soluções eficientes, porém a cada iteração ele se torna mais difícil de ser resolvido, pois aumenta o número de variáveis binárias e o número de restrições. Ehrgott (2006) apresentam métodos de solução para problemas de Otimização Inteira Multiobjetivo baseados em métodos de escalarização. Uma formulação geral que engloba maior parte dos métodos de escalarização é proposta e uma nova técnica de escalarização é descrita, o método das Restrições Elásticas, mostrando que essa nova técnica é capaz de encontrar todas as soluções eficientes e supera o custo computacional dos métodos que usam restrições em valores objetivos.

Alguns trabalhos realizam a busca no espaço critério considerando um retângulo inicial que contenha \mathcal{Z} , e a cada iteração, esse retângulo é dividido em retângulos menores. Métodos de escalarização são aplicados considerando esses sub-retângulos. Em Hamacher, Pedersen e Ruzika (2007) esse método é chamado Método da Caixa e considera problemas de Otimização Inteira Biobjetivo. O primeiro passo é realizar a minimização lexicográfica para encontrar os pontos lexicográficos, que formam o retângulo inicial. A busca inicial é feita nesse retângulo utilizando uma variação do método ϵ -Restrito. A cada ponto não dominado encontrado, o retângulo (caixa) é dividido em retângulos menores. O algoritmo é finalizado quando a área do maior dos sub-retângulos é menor que uma tolerância pré-definida. O método proposto em Boland, Charkhgard e Savelsbergh (2014, 2015b) para resolver problemas de Otimização Inteiro Misto Biobjetivo chamado *Triangle Splitting* considera a busca em triângulos e retângulos (a busca é feita prioritariamente no retângulo) e uma direção de divisão (horizontal ou vertical) é definida. A busca inicial é feita no retângulo definido pelos pontos lexicográficos, usando o método da Soma Ponderada para encontrar os pontos extremos não dominados suportados. Depois, divide-se o retângulo em um ou mais triângulos, os pontos não dominados são adicionados à lista e os triângulos são adicionados na fila de prioridade. A busca no triângulo é feita nos pontos da hipotenusa utilizando a minimização lexicográfica. Se os pontos forem não dominados a lista de pontos é atualizada, caso contrário o triângulo é dividido em 2 retângulos utilizando a direção de divisão horizontal (ver Figura 3.4), que são adicionados à fila de prioridade. Os resultados computacionais mostraram que o método resolve instâncias grandes em um tempo razoavelmente pequeno.

O método proposto em Boland, Charkhgard e Savelsbergh (2015a) estende o Método da Caixa proposto por Hamacher, Pedersen e Ruzika (2007). A busca no espaço critério é feita em retângulos, mas antes de dividir o retângulo, explora-se a característica dos solucionadores de otimização inteira gerais de gerar múltiplas soluções, soluções ótimas alternativas ou outras soluções de alta qualidade. Esse recurso é chamado de coleta de soluções. Para tentar reduzir o número de problemas inteiros que precisam ser resolvidos ou para tentar fornecer soluções viáveis de maior qualidade resolve-se um subproblema.

Figura 3.4: Divisão horizontal do triângulo.



Fonte: (BOLAND; CHARKHGARD; SAVELSBERGH, 2014).

Em seguida as soluções que não são eficientes são removidas em ordem decrescente de segundo valor de função objetivo. Só então é feita a divisão do retângulo. De acordo com os autores o método tem várias vantagens. A facilidade de ser implementado, a rápida convergência para o conjunto completo dos pontos não dominados. O cálculo da fronteira eficiente exata é mais rápido que os outros métodos de busca no espaço critério testados por eles, produz rapidamente uma fronteira eficiente aproximada de alta qualidade e produz a fronteira eficiente exata ou uma fronteira eficiente aproximada com garantia de qualidade. Os autores apresentam os resultados computacionais utilizando instâncias de diferentes classes de problemas de Otimização Combinatória e comparam com os métodos ϵ -Restrito, Tchebycheff Ponderado Aumentado e Busca Perpendicular.

Na Seção 3.3 é apresentada uma revisão dos métodos de escalarização mais utilizados na literatura e as suas variações.

3.3 Métodos de escalarização

Nessa Seção são apresentados métodos de escalarização para resolver problemas de Otimização Multiobjetivo com base em Deb (2001), Ehrgott (2006), Aliano-Filho (2016), Sáez-Aguado e Trandafir (2018). Muitos desses métodos são variações dos métodos mais conhecidos, como por exemplo o Método da Soma Ponderada e o Método ϵ -Restrito. Em Aliano-Filho (2016) são apresentados seis métodos da literatura, um novo método é proposto e aplicado ao Problema de Corte de Estoque Unidimensional Multiobjetivo. Deb (2001) apresenta os principais métodos de escalarização, apontando vantagens e desvantagens. Sáez-Aguado e Trandafir (2018) discutem os principais métodos de escalarização para problemas de Otimização Inteira Biobjetivo, apresentando seis variações do Método ϵ -Restrito encontradas na literatura e a complexidade de cada variante em relação a outros métodos exatos. Por fim, são propostas três novas variações do Método ϵ -Restrito.

3.3.1 Método da soma ponderada

O método da Soma Ponderada (SP) consiste em atribuir pesos $w_k \geq 0$ para cada objetivo $f_k(x)$, transformando o problema (*POM*) em um problema monobjetivo ponderado (ANEJA; NAIR, 1979). Note que é realizada uma combinação de cada função-objetivo considerada através dos pesos w_k , que quando variado, permitirá a geração de outras soluções eficientes distintas. Esse método é muito utilizado por ser de fácil implementação. Porém uma grande desvantagem desse método é a dificuldade em determinar a variação dos pesos que retornem soluções eficientes. O (*POM*) é transformado em uma sequência de subproblemas de otimização monoobjetivo, do tipo (3.10).

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^p w_k f_k(x) \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Vários resultados importantes que garantem a obtenção de uma solução eficiente através da resolução de (3.10) são apresentados em Aliano-Filho (2016), como por exemplo:

- i) Se $w_k > 0, \forall k = 1, \dots, p$ então a solução ótima de (3.10) é eficiente.
- ii) Se para um dado $w = (w_1, \dots, w_p)$ o problema (3.10) tem solução única x^* , então x^* é eficiente.
- iii) O método é capaz de encontrar todas as soluções eficientes para (*POM*) convexos (e a fronteira de Pareto será convexa) desde que w seja adequadamente variado.
- iv) Realizando uma normalização dos objetivos, Os pesos podem ser variados considerando que $\sum_{k=1}^p w_k = 1$ sem perda de generalidade, facilitando assim a variação dos pesos.

Como o método SP encontra somente pontos suportados, a classe de problemas que podem ser resolvidos por esse método é pequena. Mas a combinação dele com outros métodos podem apresentar bons resultados. Duas variações do método SP apresentadas em Sáez-Aguado e Trandafir (2018) são obtidas com restrições adicionais (Var 1 e Var. 2 que podem ser encontradas no Apêndice A).

3.3.2 Método ϵ -restrito

O Método ϵ -Restrito consiste em minimizar uma das funções objetivos e incluir as demais como restrição com limitantes especificados (CHANKONG; HAIMES, 2008). A escalarização ϵ -Restrita é dada em (3.11).

$$\begin{aligned} P(\epsilon) \quad \min \quad & f_i(x) \\ \text{s.a.} \quad & f_k(x) \leq \epsilon_k, k = 1, \dots, p, \quad k \neq i \\ & x \in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Resultados são apresentados em Aliano-Filho (2016), Ehrgott (2006) que garantem a obtenção de uma solução eficiente (ou fracamente eficiente) através da resolução de (3.11):

- i) Toda solução ótima de (3.11) é fracamente eficiente e existe alguma solução ótima de (3.11) que é eficiente.
- ii) Se o problema (3.11) tem solução única x^* , então x^* é eficiente.

Conforme os limitantes ϵ_k variam, diferentes soluções eficientes podem ser obtidas com esta escalarização, desde que a solução seja única. Uma diferença crucial entre esse método e o método da SP é que a região admissível do problema escalarizado varia e ele é capaz de obter soluções não suportadas.

O Exemplo 3.19 faz uma comparação entre o método da Soma Ponderada (SP) e o método ϵ -Restrito (ER).

Exemplo 3.19. Retornando ao Exemplo 3.16, aplica-se o método da SP e o método ER para mostrar a dificuldade do método SP para encontrar soluções não suportadas. Considere a escalarização obtida pelo método da SP, dada em (3.12).

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w_1(x_1 + 2x_2) + w_2(2x_1 - x_2) \\
 \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \geq 6 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \geq 21 \\
 & 1 \leq x_1 \leq 7 \\
 & 0 \leq x_2 \leq 6 \\
 & x \in \mathbb{Z}^2
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Considere w sendo os escalares de uma combinação convexa, ou seja, $w_1 + w_2 = 1$, e as funções objetivo normalizadas de acordo com (3.13) (ALIANO-FILHO, 2016):

$$f_k^{norm} = \frac{f_k - z_k^I}{z_k^N - z_k^I}, \tag{3.13}$$

para cada valor de w os resultados exibidos na Tabela 3.1 são obtidos.

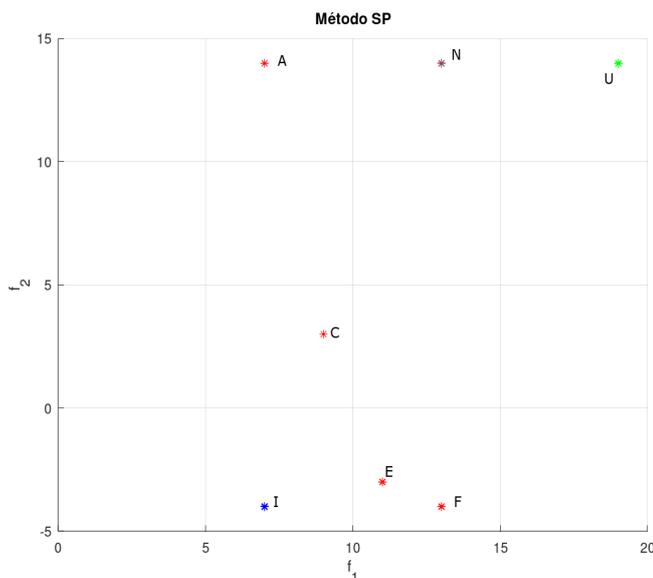
Tabela 3.1: Método da Soma Ponderada aplicado ao Exemplo 3.16.

Método da Soma Ponderada		
Variação dos pesos $w = (w_1, w_2)$	Solução	Ponto correspondente em \mathcal{Z} (Figura 3.2)
$w = (0; 1)$	$x^1 = (7, 0)$	A
$w = (0, 1; 0, 9)$	$(7, 0)$	A
$w = (0, 2; 0, 8)$	$(7, 0)$	A
$w = (0, 3; 0, 7)$	$(7, 0)$	A
$w = (0, 4; 0, 6)$	$(3, 3)$	C
$w = (0, 5; 0, 5)$	$(1, 5)$	E
$w = (0, 6; 0, 4)$	$(1, 5)$	E
$w = (0, 7; 0, 3)$	$(1, 5)$	E
$w = (0, 8; 0, 2)$	$(1, 5)$	E
$w = (0, 9; 0, 1)$	$(1, 6)$	F
$w = (1; 0)$	$(1, 6)$	F

Fonte: Elaborado pela autora.

Na Tabela 3.1 percebe-se que não foram gerados todos os pontos não dominados. Mesmo fazendo a variação de 0,01 em w os pontos B e D (Figura 3.5) não são encontrados. A fronteira (pontos $\{A, C, E, F\}$) obtida pode ser vista na Figura 3.5 em que N é o vetor

Figura 3.5: Fronteira de Pareto (SP).



Fonte: Elaborado pela autora.

nadir, U é o vetor composto pelo valor máximo para cada função objetivo e I é o vetor ideal.

Aplicando o método ER, resulta na escalarização (3.14).

$$\begin{aligned}
 \min \quad & x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \geq 6 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \geq 21 \\
 & 1 \leq x_1 \leq 7 \\
 & 0 \leq x_2 \leq 6 \\
 & 2x_1 - x_2 \leq \epsilon \\
 & x \in \mathbb{Z}^2
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Os pontos lexicográficos A e F , calculados no Exemplo 3.16, são usados para limitar a variação de ϵ , ou seja, $-4 < \epsilon < 14$. Os resultados obtidos são exibidos na Tabela 3.2.

Observe na Tabela 3.2 que todos os pontos da fronteira (Figura 3.6) foram gerados considerando poucas variações de ϵ . Os pontos B e D (pontos não suportados) não foram obtidos pelo método da SP. Assim pode-se concluir que é mais vantajoso trabalhar com o método ER no caso em que existem soluções não suportadas, a menos que sejam consideradas variações do método SP que corrigem essa falha. Observe que o ponto G é fracamente dominado pelo ponto C assim ele deve ser excluído da fronteira de Pareto.

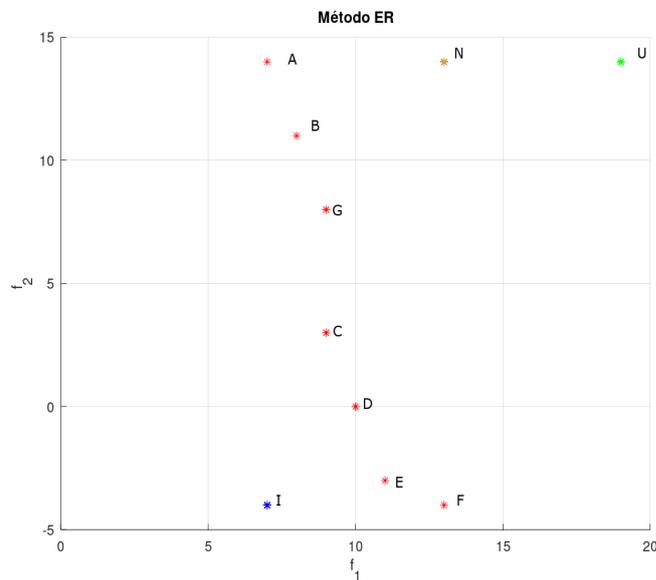
Um contraponto do método ER é que ele pode obter pontos dominados, sendo necessário eliminá-los ao final do processo de resolução. Para contornar essa falha, foram propostas variações do método ϵ -Restrito. As variações apresentadas em Sáez-Aguado e Trandafir (2018) consideram problemas de Otimização Inteira e são descritas no Apêndice A. A Variação 2 é descrita a seguir por ser uma variação clássica do método, e será utilizada no estudo computacional para avaliar se seu desempenho é prejudicado pela necessidade de resolução de dois subproblemas a cada iteração para o caso biobjetivo.

Tabela 3.2: Método ϵ -Restrito aplicado ao Exemplo 3.16.

Método ϵ -Restrito		
Variação de ϵ	Solução	Ponto correspondente em \mathcal{Z} (Figura 3.2)
$\epsilon = -4$	$x^1 = (1, 6)$	F
$\epsilon = -1$	$x^2 = (1, 5)$	E
$\epsilon = 2$	$x^3 = (2, 4)$	D
$\epsilon = 5$	$x^4 = (3, 3)$	C
$\epsilon = 8$	$x^4 = (5, 2)$	G
$\epsilon = 11$	$x^4 = (6, 1)$	B
$\epsilon = 14$	$x^4 = (7, 0)$	A

Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 3.6: Fronteira de Pareto (ER).



Fonte: Elaborado pela autora.

Var. 2: (Método ϵ -Restrito lexicográfico)

Na seção 3.2 vimos que a minimização lexicográfica é bastante utilizada em problemas de Otimização Multiobjetivo. O Método ϵ -Restrito lexicográfico consiste em resolver uma sequência de subproblemas dados por (3.15).

$$\begin{aligned}
 (LEX - P(\epsilon)) \quad & \text{lex} - \min (f_1(x), \dots, f_p(x)) \\
 \text{s.a.} \quad & f_k(x) \leq \epsilon_k, k = 1, \dots, p, \quad k \neq i \\
 & x \in \mathcal{X}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Qualquer solução ótima do problema $(LEX - P(\epsilon))$ é eficiente para (POM) biobjetivo.

Os resultados computacionais apresentados por Sáez-Aguado e Trandafir (2018) foram obtidos utilizando as variações 2, 3, 8 e 9, aplicadas ao problema das p -mediana com máxima cobertura biobjetivo. Os autores justificam a escolha das variações dizendo que

consideraram os métodos que produzem apenas pontos não dominados e que garantem que todos os pontos não dominados são gerados. Além disso, é considerada uma abordagem parecida com a abordagem de coleta de soluções apresentada por Boland, Charkhgard e Savelsbergh (2015a), que os autores chamam de implementação avançada. A implementação avançada consiste em salvar as soluções possíveis geradas em uma iteração para carregar a melhor delas na iteração seguinte. Assim com a melhoria da solução inicial o número de nós da árvore de busca a serem examinados é reduzido e o tempo de execução também é reduzido. Os resultados mostrados pelos autores comprovam que dentre as variações consideradas, a variação 9 teve o menor tempo computacional no geral inclusive com a implementação avançada. A variação 2 foi a que apresentou o pior tempo.

3.3.3 Método de Tchebycheff

Muitos métodos citados na Seção 3.2 iniciam sua busca calculando pontos de referência do espaço critério como por exemplo os pontos lexicográficos, conseqüentemente obtendo o vetor ideal. Além de considerar ponderações convexas dos objetivos, podemos também combinar os objetivos numa função escalar utilizando as normas ponderadas l_α em espaços euclidianos. Considerando pesos não negativos, uma escalarização pode ser obtida minimizando a distância entre o vetor objetivo de uma solução x factível e o vetor ideal z^I , com respeito à norma ponderada α , conforme (3.16).

$$\begin{aligned} \min \quad & \left[\sum_{k=1}^p w_k (f_k(x) - z_k^I)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

em que α denota a métrica ponderada que é utilizada e seu valor é fornecido *a priori* tal que $1 \leq \alpha < \infty$ ou $\alpha = \infty$. Para $\alpha = 1$, caímos no método da Soma Ponderada. No caso em que $\alpha = \infty$, temos a norma l_∞ que é conhecida como norma de Tchebycheff. A escalarização utilizando a norma de Tchebycheff é dada em (3.17).

$$\begin{aligned} \min \quad & \max_{1 \leq k \leq p} \{w_k (f_k(x) - z_k^I)\} \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Alguns trabalhos que abordam esse método utilizam um modelo equivalente, que é uma linearização de (3.17), inserindo uma variável auxiliar $v \in \mathbb{R}_+$ e obtendo-se (3.18).

$$\begin{aligned} \min \quad & v \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathcal{X} \\ & w_k (f_k(x) - z_k^I) \leq v \end{aligned} \quad (3.18)$$

Em Aliano-Filho (2016) são demonstrados os seguintes resultados:

- Se $w_k > 0$, $\forall k = 1, \dots, p$, então a solução de (3.18) é eficiente.
- Se (3.18) tem solução única x^* , então x^* é eficiente.

Assim como no método da Soma Ponderada e no método ϵ -Restrito, é necessário garantir que a escalarização de Tchebycheff tenha uma única solução. O Método de Tchebycheff Ponderado Aumentado descrito a seguir é uma variação clássica do método e será utilizada no estudo computacional (as demais variações são descritas no Apêndice A).

VarT. 1: (*Método de Tchebycheff Ponderado Aumentado (TPA)*)

Esse método apresenta uma característica importante que é capacidade de garantir que todas as soluções eficientes sejam encontradas, mesmo aquelas que estão na região não convexa da fronteira de Pareto, desde que haja uma variação adequada dos pesos. Ele é representado pela escalarização (3.19).

$$\begin{aligned} \min \quad & v + \rho \sum_{k=1}^p (f_k(x) - z_k^I) \\ \text{s.a.} \quad & w_k (f_k(x) - z_k^I) \leq v \\ & x \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

O resultado demonstrado em Aliano-Filho (2016) garante que se $x^* \in \mathcal{X}$ é uma solução eficiente então existe $w > 0$ tal que x^* é uma solução para o problema (3.19), em que o ponto referência é o vetor utópico z^U .

Os resultados apresentados por Aliano-Filho, Moretti e Pato (2018) mostram que a VarT. 2 obtém uma melhor aproximação da fronteira de Pareto comparado ao *TPA* aplicado ao Problema de Corte de Estoque Biobjetivo Unidimensional considerando a minimização do número total de objetos cortados e a minimização do número de *setups*.

3.4 Métodos que combinam técnicas de decomposição do espaço critério e escalarizações

A partir da revisão da literatura sobre métodos de solução para problemas de otimização multiobjetivo encontram-se várias contribuições no contexto de algoritmos de busca no espaço critério dadas por Boland, Charkhgard e Savelsbergh (2015a, 2015b, 2016, 2017a, 2017b). Os algoritmos desenvolvidos são baseados em formas diferentes de decompor ou dividir o espaço critério e aplicar as escalarizações conhecidas e usadas na solução de problemas de otimização multiobjetivo inteiros e inteiro-mistos. O método da caixa balanceada proposto em Boland, Charkhgard e Savelsbergh (2015a) é citado por Santis, Grani e Palagi (2020) como um dos métodos mais modernos para problemas de otimização matemática linear inteira biobjetivo. Em Santis, Grani e Palagi (2020) é proposto um método que também utiliza técnicas de decomposição do espaço critério através de um algoritmo *Branch and Cut* que realiza um particionamento da fronteira, introduzindo inequações. O estudo computacional realizado compara o método desenvolvido com método da caixa balanceada. Os estudos desenvolvidos em Aliano-Filho (2016), Aliano-Filho, Moretti e Pato (2018), Aliano-Filho et al. (2021) são baseados em variações do método de Tchebycheff incluindo técnicas de decomposição do espaço critério, sendo alguns dos poucos trabalhos que aplicam os métodos propostos no problema de corte de estoque biobjetivo unidimensional. Até onde se sabe, o método de múltiplos vetores de referência proposto em Aliano-Filho et al. (2021) é o método mais recente usado para resolver o PCE biobjetivo unidimensional. As principais características e resultados do método de particionamento da fronteira (FPA do termo em inglês *Frontier Partitioner Algorithm*) são descritos na Seção 3.4.1. O método FPA é usado na Seção 4.2 para resolver o problema do corte de estoque bidimensional.

3.4.1 Método de particionamento da fronteira (FPA)

Santis, Grani e Palagi (2020) desenvolveram um algoritmo *Branch and Cut* para problemas de otimização biobjetivo inteiro denominado FPA. O método consiste em introduzir cortes (inequações) induzindo uma partição do espaço critério e utilizando uma técnica de escalarização para obter um ponto não dominado. As técnicas de escalarização utilizadas foram a Soma Ponderada, a Léxicográfica e uma terceira técnica que combina as duas, chamada de Soma Ponderada Personalizada.

Considere o Problema de Otimização Biobjetivo Inteiro (POIB) dado em (??).

$$(POIB) \quad \begin{aligned} \min \quad & F(x) = (f_1(x), f_2(x)) \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathcal{X} \cap \mathbb{Z}^n, \end{aligned} \quad (3.20)$$

em que $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ e as funções $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas.

Para garantir que o método seja capaz de produzir toda a fronteira de Pareto \mathcal{Z}^* , considera-se duas suposições básicas sobre o problema.

Suposição 3.20. (Existência do vetor ideal) Vamos assumir que os valores objetivo ideal $z_i^I, i = 1, 2$ existe.

Além da existência do vetor ideal supõe-se que exista um valor positivo que seja maior que a distância entre a imagem de duas soluções factíveis. Logo considera-se a classe de funções γ -positivas (Definição 3.21).

Definição 3.21. (Função γ -positiva) Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função γ -positiva sobre $\mathcal{X} \cap \mathbb{Z}^n$ se existe um $\gamma \in \mathbb{R}$ positivo tal que $|f(x) - f(y)| \geq \gamma$, para todo $x, y \in \mathcal{X} \cap \mathbb{Z}^n$ com $f(x) \neq f(y)$.

Suposição 3.22. (Valor *gap* positivo) As funções $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$ no problema (POIB) são funções γ -positivas.

Considerando as Suposições 3.20 e 3.22 mostra-se que a fronteira de Pareto é finita, esse resultado é frequentemente utilizado para definir e mostrar a convergência de métodos exatos.

Proposição 3.23. *Sejam as Suposições 3.20 e 3.22 satisfeitas. Então a fronteira de Pareto \mathcal{Z}^* é um conjunto finito.*

Demonstração. Pela Suposição 3.20 existe o vetor ideal z^I , ou seja existem \hat{x}^1, \hat{x}^2 soluções dos problemas que minimizam cada objetivo, respectivamente. Logo $z^I = (f_1(\hat{x}^1), f_2(\hat{x}^2))$ e conseqüentemente existem os valores $M_1 = f_1(\hat{x}^2)$ e $M_2 = f_2(\hat{x}^1)$ de tal forma que a fronteira de Pareto está contida no retângulo $[z_1^I, M_1] \times [z_2^I, M_2]$ cujo os lados medem $(M_i - z_i^I + 1)$, e portanto a fronteira é limitada, . Por outro lado, da Suposição 3.22 temos que existe $\gamma_i > 0$ tal que $|f_i(x) - f_i(y)| \geq \gamma_i, \forall x, y \in \mathcal{X} \cap \mathbb{Z}^n$ com $f_i(x) \neq f_i(y)$, ou seja, a diferença em cada coordenada dos pontos no espaço critério (que são imagem das soluções factíveis) é no mínimo γ_i . Logo cada f_i assume no máximo $\frac{M_i - z_i^I + 1}{\gamma_i}$ valores distintos, implicando que $|\mathcal{Z}^*|$ é no máximo $\frac{(M_1 - z_1^I + 1)(M_2 - z_2^I + 1)}{\gamma_1 \gamma_2}$ provando que a fronteira é finita. \square

Para utilizar o algoritmo FPA pode-se escolher qualquer escalarização padrão encontrada na literatura. Santis, Grani e Palagi (2020) se baseiam na soma ponderada e na lexicográfica. A escalarização lexicográfica foi definida de uma forma alternativa se diferenciando da Definição 3.17 apenas na ordem de prioridade e permutação considerada.

Definição 3.24. Dado (POIB) e uma permutação (i_1, i_2) no conjunto $\{0, 1\}$, o problema lexicográfico é definido de acordo com (3.21)-(3.22). **Notação:** $lexmin_{x \in \mathcal{X} \cap \mathbb{Z}^n}(f_{i_1}, f_{i_2})$

$$\begin{aligned} \min \quad & f_{i_1}(x) \\ \text{s.a.} \quad & f_{i_2} = z_{i_2}^I, \\ & x \in \mathcal{X} \cap \mathbb{Z}^n, \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} z_{i_2}^I = \min \quad & f_{i_2}(x) \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathcal{X} \cap \mathbb{Z}^n. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Supondo que a permutação escolhida na Definição 3.24 seja $(1, 2)$ logo o problema lexicográfico $lexmin_{x \in \mathcal{X} \cap \mathbb{Z}^n}(f_1, f_2)$ considera a minimização de f_1 dentre o menor valor de f_2 , ou seja, a ordem de prioridade seria $2 - 1$ uma vez que olha-se primeiramente para o melhor valor de f_2 para então minimizar f_1 . Assim, o problema lexicográfico de acordo com a Definição 3.17 é $lex - min_{x \in \mathcal{X} \cap \mathbb{Z}^n}(f_2, f_1)$ que diz respeito a ordem de prioridade e não à permutação escolhida. Nessa seção, o problema lexicográfico é considerado de acordo com a Definição 3.24 para melhor entendimento do método FPA.

Uma nova escalarização chamada de soma ponderada personalizada que combina a SP e o problema lexicográfico é usada para melhorar a versão básica do FPA.

Definição 3.25. (Soma Ponderada Personalizada) Seja $\hat{x} \in \mathcal{X} \cap \mathbb{Z}^n$ qualquer solução ótima do problema lexicográfico com respeito a permutação (i_1, i_2) no conjunto $\{0, 1\}$. A escalarização da Soma Ponderada Personalizada (SPP) é definida por:

$$\begin{aligned} \min \quad & w_1^* f_1(x) + w_2^* f_2(x) \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathcal{X} \cap \mathbb{Z}^n, \end{aligned} \tag{3.23}$$

em que $W^* = (w_1^*, w_2^*)$ pertence ao conjunto (3.24)

$$\{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}_{>}^2 : \hat{x} \in argmin_{x \in \mathcal{X} \cap \mathbb{Z}^n} w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x)\}. \tag{3.24}$$

Para facilitar, vamos nos referir aos subproblemas resultantes da aplicação, da SP como (IIP_w) , do problema lexicográfico como (IIP^L) e da SPP como (IIP^*) , assim como em Santis, Grani e Palagi (2020). Observe que a SPP representa uma correspondências entre as duas escalarizações combinadas, ou seja, dada uma solução \hat{x} de (IIP^L) existem pesos positivos tais que \hat{x} é solução de (IIP_w) . A ideia principal da SPP é reduzir o custo computacional gasto para resolver (IIP^L) uma vez que é necessário resolver dois subproblemas na sequência, e assim se w_i^* são conhecidos basta resolver um único subproblema. Além da ideia de particionar o espaço critério durante a busca pela fronteira outro ponto importante do FPA é a descoberta de pesos adequados w^* que são calculados apenas uma vez, continuam válidos para os subproblemas criados durante a execução do método. Descreve-se, a seguir, como os pesos para (IIP^*) são calculados.

Dada uma permutação (i_1, i_2) do conjunto $\{1, 2\}$ seja \hat{x} solução de $lexmin_{x \in \mathcal{X} \cap \mathbb{Z}^n}(f_{i_1}, f_{i_2})$ e \bar{x} solução de $lexmin_{x \in \mathcal{X} \cap \mathbb{Z}^n}(f_{i_2}, f_{i_1})$ (permutação reversa). Assim, temos que \hat{z} e \bar{z} tais

que $\hat{z} = F(\hat{x})$ e $\bar{z} = F(\bar{x})$ são não dominados e diferentes (caso contrário o vetor ideal seria solução ótima de (POIB)).

Seja $\gamma = \min_{i=1,2}\{\gamma_i\} > 0$ (Suposição 3.22). Para qualquer $\zeta \in (0, \gamma)$ defina $w(\zeta) \in \mathbb{R}_{>}^2$ como:

$$w(\zeta)_i = \begin{cases} \frac{\gamma - \zeta}{\hat{z}_{i_1} - \bar{z}_{i_1}}, & \text{se } i = i_1 \\ 1, & \text{se } i = i_2 \end{cases} \quad (3.25)$$

Os autores mostraram que os pesos calculados conforme definidos em (3.25) são válidos para a SPP, ou seja, $w(\zeta) \in W^*, \forall \zeta \in (0, \gamma)$ mostrando uma correspondência entre a SPP e o problema lexicográfico. Outro resultado importante é a validade de $w(\zeta)$ para definir o (IIP*) em um subconjunto de $\mathcal{X} \cap \mathbb{Z}^n$. Assim, pode-se aplicar o (IIP*) no esquema de ramificação, pois os pesos são válidos para cada nó.

O FPA parte de um ponto não dominado, define dois subproblemas de forma que o ponto não dominado escolhido e todos os pontos que são dominados por ele sejam infactíveis para os dois subproblemas. Sendo assim, considere um nó genérico k da ramificação da árvore, o subproblema (POIB^k) é representado em (3.26).

$$(POIB^k) \quad \min \quad F(x) = (f_1(x), f_2(x)) \quad (3.26) \\ \text{s.a.} \quad x \in \mathcal{X}^k \cap \mathbb{Z}^n,$$

em que $\mathcal{X}^k \subseteq \mathcal{X}$ é o conjunto obtido da interseção de \mathcal{X} com as desigualdades definidas em (3.27). Para $k = 0$, ou seja, no nó raiz temos que (POIB⁰)=(POIB) e $\mathcal{X}^0 = \mathcal{X}$.

Para calcular um ponto não dominada de (POIB⁰), pode-se usar (IIP_W), (IIP*) ou (IIP^L) para obter (IIP)^k. Com isso, é necessário considerar a Suposição 3.26 para garantir a convergência do método.

Suposição 3.26. (Solucionabilidade do (IIP)^k) Existe um oráculo que retorna uma solução ótima de (IIP)^k ou certifica a inviabilidade do problema (IIP)^k.

Sob a Suposição 3.26 tem-se que (IIP)^k tem solução ótima ou é infactível. No primeiro caso, o nó k pode ser ramificado gerando dois nós filhos. Seja $\hat{x}^k \in \mathcal{X}^k \cap \mathbb{Z}^n$ solução ótima de (IIP)^k e $\hat{z}^k = F(\hat{x}^k)$. Tome $\epsilon_i \in (0, \gamma_i], i = 1, 2$ (γ_i satisfazendo a Suposição 3.22), considere as inequações:

$$f_i(x) \leq \hat{z}_i - \epsilon_i, i = 1, 2. \quad (3.27)$$

Logo, os dois subproblemas gerados para os dois nós filhos obtidos do nó k são:

$$\min \quad F(x) = (f_1(x), f_2(x)) \quad (3.28) \\ \text{s.a.} \quad x \in \mathcal{X}_1^k \cap \mathbb{Z}^n,$$

$$\mathcal{X}_1^k = \mathcal{X}^k \cap \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) \leq \hat{z}_1^k - \epsilon_1\},$$

$$\min \quad F(x) = (f_1(x), f_2(x)) \quad (3.29) \\ \text{s.a.} \quad x \in \mathcal{X}_2^k \cap \mathbb{Z}^n,$$

$$\mathcal{X}_2^k = \mathcal{X}^k \cap \{x \in \mathbb{R}^n : f_2(x) \leq \hat{z}_2^k - \epsilon_2\}.$$

Para analisar a convergência do método FPA os autores mostram que as inequações utilizadas para gerar os nós filhos definem uma partição no espaço decisão e cada nó examinado pode ser podado ou produz um ponto não dominado ainda não encontrado.

Com isso, considerando as Suposições 3.20, 3.22 e 3.26 válidas, mostra-se que o número máximo de subproblemas resolvidos pelo FPA é $2|\mathcal{Z}^*| + 1$ considerando qualquer uma das técnicas de escalarização citadas. Uma importante observação é que o número de subproblemas resolvidos quando aplica-se a SPP é reduzido para $|\mathcal{Z}^*| + 1$ (melhor limitante encontrado até o momento) e não é necessária a resolução de um dos subproblemas gerado em cada nó, nesse caso o método é denominado FPA^* apresentado no Algoritmo 6.

Algoritmo 2: FPA^*

Entrada: $(POIB^0) = (POIB)$, $\mathcal{X}^0 = \mathcal{X}$, $\mathcal{Z}^* = \emptyset$,

$\gamma_i > 0$, $\epsilon_i \in (0, \gamma_i]$, $\zeta_i \in (0, \gamma_i)$, $i = 1, 2$

$\{i_1, i_2\}$ permutação de $\{1, 2\}$, $k = 0$

Saída: Fronteira de Pareto \mathcal{Z}^* de $(POIB)$

1 **Resolva** $\hat{x}_j = \operatorname{argmin}_{x \in \mathcal{X} \cap \mathbb{Z}^n} f_j(x)$, $j = i_1, i_2$;

2 **Calcule**

$$w_i^* = \begin{cases} \frac{\gamma - \zeta}{\hat{z}_{i_1} - \bar{z}_{i_1}}, & \text{se } i = i_1 \\ 1, & \text{se } i = i_2 \end{cases}$$

enquanto $f_{i_1}(x^k) > z_{i_1}^I$ **faça**

3 **Resolva** $(IIP^*)^k$ e seja \hat{x}^k a solução ótima;

4 **Atualize** $\mathcal{Z}^* = \mathcal{Z}^* \cup \{\hat{z}^k\}$, onde $\hat{z}^k = F(\hat{x}^k)$;

5 **Construa** $(POIB)^{k+1}$ de $(POIB)^k$;

6 $(POIB)^{k+1} := \min\{F(x) : x \in \mathcal{X}^{k+1} \cap \mathbb{Z}^n\}$;

7 onde $\mathcal{X}^{k+1} := \mathcal{X}^k \cup \{x \in \mathbb{R}^n : f_{i_1}(x) \leq \hat{z}_{i_1}^k - \epsilon_{i_1}\}$;

8 **Atualize** $k = k + 1$

9 **fim**

10 **Retorne** \mathcal{Z}^*

Santis, Grani e Palagi (2020) apresenta um estudo computacional comparando o desempenho do método FPA^* com as versões alternativas FPA_W (variação de pesos fornecidos a priori), SFPA (combina as escalarizações SP e SPP), e o método da caixa balanceada (BBM). A comparação foi realizada considerando o tempo computacional para avaliar a eficiência dos métodos utilizando o perfil de desempenho (DOLAN; MORÉ, 2002) mostrando que o método FPA^* superou todos os outros métodos. No Exemplo 3.27, ilustramos o método FPA^* aplicado ao (POM) do Exemplo 3.16.

Exemplo 3.27. Retomando ao Exemplo 3.16 vamos aplicar o método FPA^* para obter a fronteira de Pareto. Primeiro devemos mostrar que as funções f_1 e f_2 são γ -positivas. Como as duas funções objetivo são da forma $c^T x$, $c \in \mathbb{Z}^2$ (lineares), então elas são γ -positivas para $\gamma \geq 1$ (SANTIS; GRANI; PALAGI, 2020). Desta forma, considera-se a permutação $(1, 2)$, $\gamma_i = 1$, $\epsilon_i = 1$ e $\zeta = 0.3$ (valor usado em (SANTIS; GRANI; PALAGI, 2020)). Assim, obtemos $w^* = \left(\frac{1 - 0.3}{13 - 7}, 1\right) = (0.11\bar{6}, 1)$.

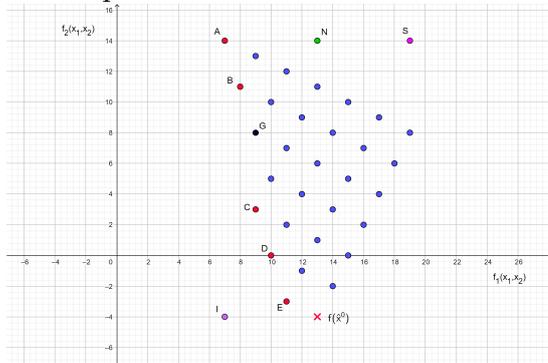
Na primeira iteração para $k = 0$ temos que o $(IIP^*)^0$ dado por:

$$\begin{aligned}
 (IIP^*)^0 \quad & \min \quad w_1^*(x_1 + 2x_2) + w_2^*(2x_1 - x_2) \\
 \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \geq 6 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \geq 21 \\
 & 1 \leq x_1 \leq 7 \\
 & 0 \leq x_2 \leq 6 \\
 & x \in \mathbb{Z}^2
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

A solução de $(IIP^*)^0$ é $x^0 = (1, 6)$ com $z^0 = (13, -4) = F$, o ponto não dominado pode ser visto na Figura 3.7 representado por “x”. Na Figura 3.8 pode-se notar como fica a inclusão da inequação $f_1(x) \leq y_1^0 - \epsilon_1$ gerando o problema $(IIP^*)^1$ dado em (3.31).

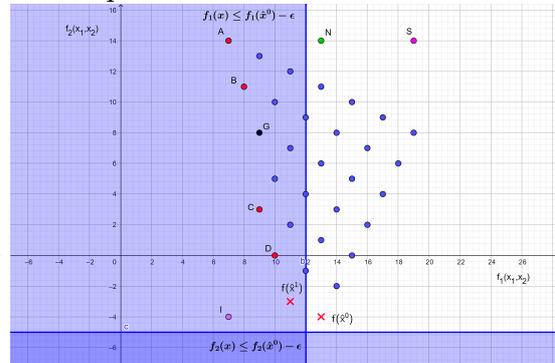
$$\begin{aligned}
 (IIP^*)^1 \quad & \min \quad w_1^*(x_1 + 2x_2) + w_2^*(2x_1 - x_2) \\
 \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \geq 6 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \geq 21 \\
 & 1 \leq x_1 \leq 7 \\
 & 0 \leq x_2 \leq 6 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
 & x \in \mathbb{Z}^2
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

Figura 3.7: Primeira iteração do método FPA^* para $k = 0$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 3.8: Segunda iteração do método FPA^* para $k = 1$.

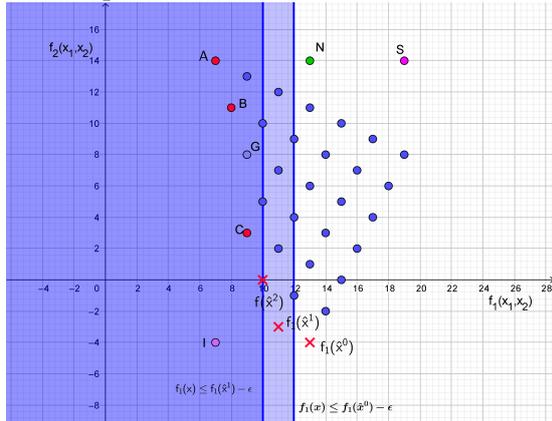


Fonte: Elaborado pela autora.

Lembre que a proposta inicial do método FPA era gerar dois nós filhos que são obtidos por inclusão de duas inequações, uma incluída no $(IIP^*)^1$ e a outra seria $f_2(x) \leq y_2^0 - \epsilon_2$, porém pode-se notar na Figura 3.8 que o subproblema definido nesse nó não possui nenhum ponto não dominado, mostrando que em cada ramificação sempre pode-se descartar um lado da ramificação. A Figura 3.9 mostra a terceira iteração do método FPA^* , depois de 6 iterações o método retorna toda a fronteira de Pareto (As demais iterações podem ser vistas nas Figuras 3.10-3.12).

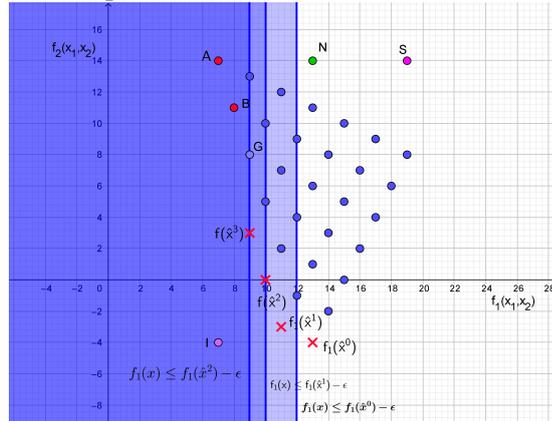
Uma breve revisão sobre as métricas de desempenho utilizadas na literatura para comparar métodos de solução para (POM) é apresentada na Seção 3.5.

Figura 3.9: Terceira iteração do método FPA^* para $k = 2$.



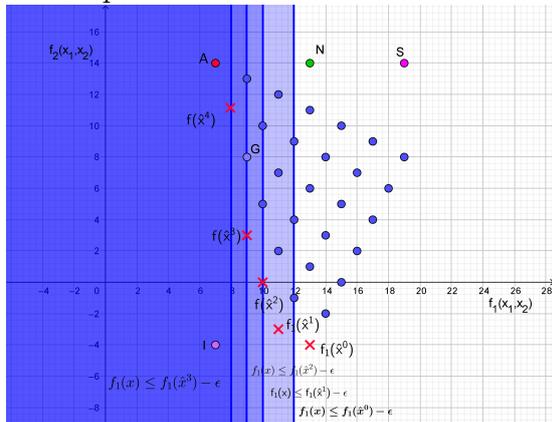
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 3.10: Quarta iteração do método FPA^* para $k = 3$.



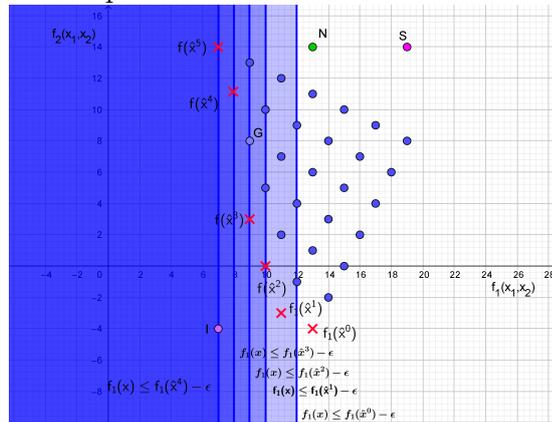
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 3.11: Quinta iteração do método FPA^* para $k = 4$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 3.12: Sexta iteração do método FPA^* para $k = 5$.



Fonte: Elaborado pela autora.

3.5 Métricas de desempenho

Ao estudar os métodos de solução para problemas multiobjetivos é encontrada uma grande variedade de métodos de escalarização. Com isso, torna-se necessário estabelecer medidas de qualidade para comparar os conjuntos de soluções obtidos. Mesmo ao utilizar um método exato, algumas soluções podem ser perdidas devido a não convexidade da fronteira, tipo de técnica de escalarização escolhida, ou até mesmo porque os subproblemas gerados pela escalarização são interrompidos antes que a solução ótima seja encontrada. No caso do PCEM proposto, a comparação dos métodos se torna ainda mais necessária. O método da geração de colunas proposto nessa tese no Capítulo 4 é usado de forma heurística e portanto apenas uma aproximação da fronteira de Pareto é obtida.

As métricas de desempenho utilizadas na literatura consideram três aspectos: convergência, distribuição das soluções eficientes na Fronteira de Pareto e número de soluções eficientes. Como observado em Riquelme, Lüken e Baran (2015), dificilmente uma única métrica irá medir os três aspectos, assim os autores apresentam uma revisão contendo 54 métricas discutindo o uso, tendência, vantagens e desvantagens das mais citadas. Esse estudo indica que o hipervolume é a métrica mais utilizada. Em Deb (2001) e Aliano-Filho

(2016) são apresentadas algumas métricas que comparam as soluções eficientes obtidas tomando por base as soluções não dominadas. A seguir, apresentamos as métricas: *Cardinalidade*, *Hipervolume*, *Amplitude dos objetivos*, *Número de subproblemas resolvidos*, *Número de pontos não dominados por tempo de execução*, *Número de pontos não dominados por subproblema resolvido* e *Distanciamento médio*. Considere \mathcal{Z}_1 , um conjunto de pontos não dominados obtido por algum método de escalarização.

- Métrica da *Cardinalidade* (σ^1): determina a cardinalidade da fronteira \mathcal{Z}_1 , ou seja, $\sigma^1 = |\mathcal{Z}_1|$. Quanto maior o valor de σ^1 melhor é o desempenho do método.
- Métrica do *Hipervolume* (σ^2): calcula o hipervolume coberto pelos pontos não dominados de \mathcal{Z}_1 , utilizando um vetor referência u , cuja coordenada k é dada pelo máximo da função objetivo k . Quanto maior σ^2 melhor é o desempenho do método. Para o caso biobjetivo, considere os pontos não dominados $z^1, \dots, z^{|\mathcal{Z}_1|}$, ordenados em ordem crescente de acordo com a primeira função objetivo. Esta métrica calcula a soma das áreas dos retângulos (caso bidimensional), utilizando o vetor referência u cuja cada coordenada k é dada por $\max z_k$, $k = 1, 2$ conforme expresso em (3.32).

$$\sigma^2 = (u_1 - z_1^1) \cdot (u_2 - z_2^1) + \sum_{j=2}^{|\mathcal{Z}_1|} (u_1 - z_1^j) \cdot (z_2^{j-1} - z_2^j). \quad (3.32)$$

- Métrica da *Amplitude dos objetivos* (σ^3): calcula as amplitudes dos pontos lexicográficos da fronteira \mathcal{Z}_1 . Quanto maior o valor de σ^3 melhor é o desempenho do método.
- Métrica do *Número de subproblemas resolvidos* (σ^4): determina o número de subproblemas resolvidos para obter a fronteira \mathcal{Z}_1 . Quanto menor o valor de σ^4 melhor o desempenho do método.
- Métrica do *Número de pontos não dominados por tempo de execução* (σ^5): determina o número de pontos não dominados encontrados por unidade de tempo de execução do método, $\sigma^5 = \frac{\sigma^1}{\text{tempototal}}$. Essa métrica é um indicador de qualidade do método que analisa os valores para σ^1 em função do tempo computacional gasto para obter a fronteira \mathcal{Z}_1 . Quanto maior o valor de σ^5 melhor o desempenho do método.
- Métrica do *Número de pontos não dominados por subproblema resolvido* (σ^6): determina o número de pontos não dominados obtidos por subproblema resolvido, $\sigma^6 = \frac{\sigma^1}{\sigma^4}$. Quanto maior o valor de σ^6 melhor o desempenho do método.
- Métrica do *Distanciamento médio* (σ^7): calcula a distância média entre duas fronteiras de Pareto. Esta métrica é útil para o caso em que se tem a fronteira ótima (\mathcal{Z}_*) e queremos comparar com a fronteira \mathcal{Z}_1 . Quanto menor o valor de σ^7 mais próximos os pontos de \mathcal{Z}_1 estão de \mathcal{Z}_* .

No estudo computacional desenvolvido no Capítulo 4 utiliza-se as métricas σ^1 , σ^2 , σ^3 , σ^4 , σ^5 e σ^6 . A métrica σ^7 não é considerada porque não são conhecidas as fronteiras ótimas das instâncias do PCEM resolvido.

3.6 Problema de corte de estoque multiobjetivo

Até onde sabemos o PCEM é um problema ainda pouco abordado na literatura, apesar de estar presente no dia a dia das empresas. A Tabela 3.3 apresenta um resumo dos artigos encontrados, destacando os critérios de otimização e os métodos de solução aplicados. Observe que poucos usam com as técnicas de escalarização. Para os trabalhos que utilizam as escalarizações pode-se observar que o método escolhido é o ER. Kolen e Spijksma (2000) consideram o PCE unidimensional biobjetivo com minimização de perdas e minimização de *setup*. Em Respicio e Captivo (2005) é estudado o problema unidimensional biobjetivo, com a minimização do número máximo de pilhas abertas e a minimização do *order spread* médio. Muñoz et al. (2007) consideram a minimização do número máximo de pilhas abertas, total de perdas, e número total de padrões de corte. Ainda no caso unidimensional, Salles-Neto, Araujo e Golfeto (2014) resolvem o PCE minimizando o total de sobras, número total de padrões de corte e número total de ciclos da serra. Rangel e Sáez-Aguado (2017b, 2017a) abordam o PCE unidimensional utilizando como critérios de otimização a minimização de objetos e ciclos da serra. Para o caso do PCE bidimensional Gomez e Terashima-Maríns (2010) consideram a minimização de desperdício e de tempo para gerar padrões de corte enquanto que Toscano, Rangel e Yanasse (2017) consideram a minimização de desperdício e o número de ciclos da serra. Arana-Jiménez e Salles-Neto (2017) apresentam uma condição suficiente para definir soluções parcialmente eficientes para o problema (*PCEB*) no caso unidimensional. Essa abordagem inspirou o desenvolvimento apresentado no Capítulo C que aborda o modelo não linear utilizando resultados sobre invexidade para determinar se uma solução factível pode ser parcialmente eficiente.

O Problema de corte de estoque multiobjetivo apresentado nessa seção tem como critérios de otimização minimizar: o número total de objetos cortados para atender a demanda (ψ_1), o número total de diferentes padrões de corte (*setup* (ψ_2)) e o número total de ciclos da serra (ψ_3). Observe que os critérios de otimização são conflitantes. Por exemplo, quando minimizamos o número de *setups* se torna necessário aumentar a frequência do padrão de corte para atender a demanda, ou se, minimizamos o número de ciclos da serra é necessário empilhar mais objetos para serem cortados acarretando no aumento da frequência do padrão de corte. Dito de outra forma, não existe uma solução que minimiza ψ_1 , ψ_2 e ψ_3 ao mesmo tempo.

Para formular um modelo de otimização matemática que represente o PCE multiobjetivo, suponha que existem n padrões de corte possíveis que foram gerados a priori. Cada padrão de corte $j = 1, \dots, n$ pode ser representado por vetor coluna a_j , de dimensão m com cada elemento α_{ij} sendo o número de itens do tipo i no padrão de corte j , $j = 1, \dots, n$.

Sejam x_j , $\delta(x_j)$ e $\left\lceil \frac{x_j}{c} \right\rceil$ número de objetos, *setups* e ciclos da serra associado ao padrão de corte a_j , respectivamente.

Considere:

$$\psi_1(x) = \sum_{j=1}^n x_j, \quad \psi_2(x) = \sum_{j=1}^n \delta(x_j), \quad \psi_3(x) = \sum_{j=1}^n \left\lceil \frac{x_j}{c} \right\rceil, \quad \text{onde } \delta(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_j > 0 \\ 0, & \text{se } x_j = 0 \end{cases}$$

O modelo de otimização matemática para o problema de corte multiobjetivo é obtido a

partir do modelo (2.8) - (2.10) proposto por Gilmore e Gomory (1961) é dado em (3.33)

$$(PCEM) \quad \min \quad \psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)) = \left(\sum_{j=1}^n x_j, \sum_{j=1}^n \delta(x_j), \sum_{j=1}^n \left\lceil \frac{x_j}{c} \right\rceil \right) \quad (3.33)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq d,$$

$$x_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, m,$$

São considerados também dois modelos biobjetivos, um considerando a minimização do número total de objetos e minimização do número total de *setups*, e o outro considerando a minimização do número total de objetos e minimização do número total de ciclos da serra, dados em (3.34) e (3.35), respectivamente.

$$(PCEB) \quad \min \quad \psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x)) \quad (3.34)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq d,$$

$$x_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$(PCEB_c) \quad \min \quad \psi(x) = (\psi_1(x), \psi_3(x)) \quad (3.35)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq d,$$

$$x_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, m,$$

Salles-Neto, Araujo e Golfeto (2014) demonstram dois resultados teóricos importantes que provam a equivalência entre as linearizações dos problemas (PCEB) e (PCEB_c). E através do estudo computacional verifica-se que os três objetivos são dois a dois conflitantes. As linearizações são descritas por (PCEB^L) e (PCEB_c^L) e os resultados são enunciados nas Proposições 3.28 e 3.29.

$$(PCEB^L) \quad \min \quad \left(\sum_{j=1}^n x_j, \sum_{j=1}^n y_j \right) \quad (3.36)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n A_j x_j \geq d, \quad (3.37)$$

$$x_j \leq M \cdot y_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.38)$$

$$x_j \in \mathbb{N}, y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.39)$$

$$(PCEB_c^L) \quad \min \quad \left(\sum_{j=1}^n x_j, \sum_{j=1}^n z_j \right) \quad (3.40)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n A_j x_j \geq d, \quad (3.41)$$

$$x_j \leq c \cdot z_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.42)$$

$$x_j, z_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.43)$$

Proposição 3.28. *Se c é maior ou igual a $d_i, \forall i$, então os problemas $(PCEB^L)$ e $(PCEB_c^L)$ são equivalentes.*

Demonstração. Seja (x^*, z^*) solução eficiente do $(PCEB_c^L)$ e $d_{max} = \max_{i=1\dots m} \{d_i\}$, da hipótese $c \geq d_i, \forall i = 1, \dots, m$ logo $c \geq d_{max}$. Como $x_j^* \leq d_{max}, \forall j = 1, \dots, n$, tem-se que $x_j^* \leq d_{max} \leq c, \forall j = 1, \dots, n$, assim a demonstração é concluída mostrando a equivalência de I, II e III:

$$\text{I } c \geq x_j^*, \forall j = 1, \dots, n;$$

$$\text{II } z_j^* = 0 \text{ se } x_j^* = 0 \text{ e } z_j^* = 1 \text{ se } x_j^* > 0;$$

III (x^*, z^*) é solução eficiente de $(PCEB^L)$.

I \Rightarrow II De I tem-se que $c \geq x_j^*, \forall j = 1, \dots, n$ então se $x_j^* = 0$ significa que a frequência do padrão de corte j é zero, ou seja, o padrão de corte j não é utilizado, assim não pode haver ciclos da serra que utilize o padrão de corte j , logo $z_j^* = 0$. Se $x_j^* > 0$ significa que a frequência do padrão de corte j é positiva, ou seja, o padrão de corte j é utilizado. Então pode haver ciclos da serra para esse padrão de corte j . Como $x_j^* \leq c$ então pode haver no máximo um ciclo da serra para o padrão de corte j , ou seja, $z_j^* = 1$. Portanto $z_j^* = 0$ se $x_j^* = 0$ e $z_j^* = 1$ se $x_j^* > 0$ que corresponde a definição da função $\delta(x_j)$ (*setup*).

II \Rightarrow III Por hipótese temos que $z_j^* = \begin{cases} 1, & \text{se } x_j^* > 0 \\ 0, & \text{se } x_j^* = 0 \end{cases}$, logo $\sum_{j=1}^n z_j^* = \delta(x^*)$. Assim (x^*, z^*) é solução eficiente do (PCEB) e como $(PCEB^L)$ é a linearização do (PCEB), ou seja, são equivalentes. Obtem-se que (x^*, z^*) também é solução eficiente de $(PCEB^L)$.

III \Rightarrow I Pelas hipóteses (x^*, z^*) é solução eficiente de $(PCEB_c^L)$ e $(PCEB^L)$, de (3.42) tem-se que $x_j^* \leq c \cdot z_j^*$. Se $x_j^* > 0$ e como (x^*, z^*) é solução eficiente de $(PCEB^L)$ então $z_j^* = 1$, logo $x_j^* \leq c$. Se $x_j^* = 0$ é claro que $0 \leq c$. Portanto $c \geq x_j^*, \forall j = 1, \dots, n$.

□

Proposição 3.29. *Sejam $h_i = \lfloor \frac{L}{l_i} \rfloor$, $s_i = \lfloor \frac{d_i}{h_i} \rfloor$ e $s = \sum_{i=1}^m s_i$. Se $c \geq s$, os problemas $(PCEB^L)$ e $(PCEB_c^L)$ são equivalentes.*

A Proposição 3.28 é usada para simular o problema (PCEB) sem precisar implementá-lo pois basta calcular o $d_{max} = \max_{i=1\dots m} \{d_i\}$ e fazer $c = d_{max}$. Os resultados obtidos para esse caso são mostrados no Capítulo 4.

Em Aliano-Filho, Moretti e Pato (2015) e Aliano-Filho (2016) é proposta uma nova es-
 calarização para o PCE unidimensional biobjetivo apresentando comparações com outros métodos utilizando algumas métricas de comparação.

Tabela 3.3: Resumo da Literatura sobre o PCE multiobjetivo.

Autor (ano)	Problema considerado	Método de solução
Kolen e Spieksma (2000)	PCE unidimensional com minimização de perdas e minimização de setup .	Algoritmo <i>Branch and Bound</i>
Respicio e Captivo (2005)	PCE unidimensional com sequenciamento de padrões de corte, com a minimização do número máximo de pilhas abertas e a minimização do espalhamento da ordem .	Algoritmo Evolutivo
Muñoz et al. (2007)	PCE unidimensional com minimização do número máximo de pilhas abertas , total de perdas , e número total de padrões de corte .	Algoritmo Genético
Gomez e Terashima-Maríns (2010)	PCE bidimensional com minimização de perdas e de tempo para gerar padrões de corte .	Algoritmos Evolutivos
Salles-Neto, Araujo e Golfeto (2014)	PCE unidimensional minimizando o total de sobras , número total de padrões de corte e número total de ciclos da serra .	Algoritmo Genético
Aliano-Filho (2016)	PCE unidimensional com minimização de perdas e minimização de setup .	Comparação entre 7 métodos de escalarização sendo um deles proposto pelo autor
Arana-Jiménez e Salles-Neto (2017)	PCE unidimensional com minimização de objetos e de setup .	Abordagem baseada em conexões entre otimização multiobjetivo discreta e otimização multiobjetivo contínua para obter soluções eficientes parciais.
Toscano, Rangel e Yagnasse (2017)	PCE bidimensional com minimização de objetos e de ciclos da serra .	Heurística
Rangel e Sáez-Aguado (2017a)	PCE unidimensional com minimização de objetos e de ciclos da serra .	ϵ -Restrito
Mellouli, Mellouli e Masmoudi (2019)	PCE bidimensional com minimização de perdas e de setup .	Algoritmo genético
Aliano-Filho, Moretti e Pato (2018), Aliano-Filho et al. (2021)	PCE unidimensional com minimização de perdas e minimização de setup .	Cada um dos trabalhos citados comparam 4 métodos de escalarização sendo um deles proposto pelo o autor

Fonte: Elaborado pela autora.

3.7 Conclusões

A Tabela 3.7 resume os métodos de escalarização discutidos nesse capítulo destacando os métodos escolhidos para o desenvolvimento do estudo computacional apresentado no Capítulo 4. Destacamos a VarT. 2 pois ela é importante para uma das proposta de continuidade do estudo computacional mencionado nas conclusões do Capítulo 4. Essa proposta consiste em utilizar a estratégia do FPA para obter um novo método em que a variação dos pesos seja desnecessária e com os esquema de ramificação do FPA é necessário inserir apenas uma inequação ao invés de duas inequações como pode ser visto em (A.9). A Var. 8 também está destacada por ter apresentado um melhor desempenho dentre as variações do método ER considerando o tempo computacional apresentado em Sáez-Aguado e Trandafir (2018). A Tabela 3.5 apresenta um resumo comparativo entre o método FPA, o método da caixa balanceada (BBM do termo em inglês *Balanced Box Method*) e o método dos múltiplos vetores de referência (MRV do termo em inglês *Multiple Reference Vectors*). As informações contidas na Tabela 3.5 mostram o tipo de problema considerado em cada artigo e onde foram obtidas as instâncias utilizadas nos respectivos testes computacionais. Observe que para as instâncias utilizadas nas simulações do método FPA e o BBM a fronteira exata é conhecida, os resultados comprovam que para a classe de problemas considerados, os métodos são capazes de encontrar a fronteira de Pareto completa. Com isso se torna desnecessário o uso das métricas de comparação e os autores utilizam os perfis de desempenho propostos por Dolan e Moré (2002) para comparar o desempenho dos métodos implementados com relação ao tempo computacional. Note que são informados também os métodos da literatura implementados para comparar com o método proposto em cada artigo. O estudo desenvolvido em Aliano-Filho et al. (2021) utiliza uma seleção de métricas para determinar a eficiência dos métodos pois os métodos fornecem uma aproximação da fronteira. As conclusões obtidas através dos estudos computacionais realizados em cada artigo são ilustrados na tabela, mostrando que os métodos propostos obtiveram um melhor desempenho dentre os métodos comparados.

Para resolver o PCE multiobjetivo, foram selecionados: o método ERL por ser uma variação clássica do método ER, e com o intuito de avaliar se seu desempenho é prejudicado pela necessidade de resolução de dois subproblemas a cada iteração. Outro método escolhido é o TPA que também é uma variação clássica que inspirou os estudos desenvolvidos em Aliano-Filho (2016), Aliano-Filho, Moretti e Pato (2018), Aliano-Filho et al. (2021) e obteve melhor tempo computacional comparado com o BBM para obter uma aproximação da fronteira de Pareto. Por fim, o método FPA^* é escolhido pela facilidade de implementação e pelo fato de ter um melhor desempenho quando comparado com o método BBM. Até onde se sabe, não há estudos aplicados ao ($PCEB_c$) que introduzam a geração de colunas dinâmica e que comparem esses três métodos.

Tabela 3.4: Resumo dos métodos de escalarização encontrados na literatura e suas variações.

Métodos de escalarização e suas variações		
Método	Escalarização	Variações
Método da Soma Ponderada (SP)	$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^p w_k f_k(x) \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathcal{X} \end{aligned}$	<p>VarP. 1: Método da soma ponderada com restrições adicionais. ($f_k(x) \leq v_k, k = 1, \dots, p$) (SÁEZ-AGUADO; TRANDAFIR, 2018)</p> <p>VarP. 2: Método de Particionamento da Fronteira(FPA).(SANTIS; GRANI; PALAGI, 2020)</p>
Método ϵ -Restrito (ER)	$\begin{aligned} \min \quad & f_i(x) \\ \text{s.a.} \quad & f_k(x) \leq \epsilon_k, \\ & x \in \mathcal{X} \end{aligned}$ <p>onde, $k = 1, \dots, p, \quad k \neq i$</p>	<p>(SÁEZ-AGUADO; TRANDAFIR, 2018)</p> <p>Var. 1: Método ER com eliminação de pontos dominados;</p> <p>Var. 2: Método ER lexicográfico ;</p> <p>Var. 3: Método ER aumentado com parâmetro fixo (adicionar uma penalização na função objetivo);</p> <p>Var. 4: Método ER aumentado com parâmetro dependendo de dados (adicionar uma penalização na função objetivo);</p> <p>Var. 5: Método ER com variável de folga;</p> <p>Var. 6: Método ER com restrições elásticas;</p> <p>Var. 7: Método ER aumentado com parâmetro fixo dependendo de dados (relaxado);</p> <p>Var. 8: Método ER aumentado com parâmetro dependendo de dados atualizados (relaxado);</p> <p>Var. 9: Método ER aumentado com restrições elásticas e parâmetro atualizado (relaxado).</p>
Método de Tchebycheff	$\begin{aligned} \min \quad & v \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathcal{X} \\ & w_k (f_k(x) - z_k^I) \leq v \end{aligned}$	<p>VarT. 1: Método de Tchebycheff Ponderado Aumentado. (ALIANO-FILHO, 2016)</p> <p>VarT. 2: Método de Tchebycheff Modificado.(ALIANO-FILHO; MORETTI; PATO, 2018)</p> <p>VarT. 3: Método de Tchebycheff sem Ponderações ou Método de Múltiplos Pontos de Referência (MPR).(ALIANO-FILHO et al., 2021; ALIANO-FILHO, 2016)</p>
Método Lexicográfico	$\begin{aligned} \bar{z}_1 = \min \quad & f_1(x) \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathcal{X} \end{aligned}$ $\begin{aligned} \bar{z}_2 = \min \quad & f_2(x) \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathcal{X} \\ & z_1(x) \leq \bar{z}_1 \end{aligned}$ <p>$\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \text{lex} - \min_{x \in \mathcal{X}} \{f_1(x), f_2(x)\}$</p>	<p>VarL. 1: Método da Caixa Balanceada (BBM). (BOLLAND; CHARKHGARD; SAVELSBERGH, 2015a)</p>

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 3.5: Comparação entre BBM, MRV e FPA que utilizam técnicas de decomposição ou divisão do espaço critério.

Características	BBM (BOLAND; CHARKHGARD; SAVELSBERGH, 2015a)	MRV (ALIANO-FILHO et al., 2021)	FPA (SANTIS; GRANI; PALAGI, 2020)
Aplicação	Problema da Mochila Biobjetivo Bidimensional e Problema de Atribuição Biobjetivo	Problema de Corte de Estoque Biobjetivo Unidimensional e Problema de Dimensionamento de Lotes Biobjetivo	Problema Biobjetivo Linear Inteiro e Problema Biobjetivo Quadrático Inteiro
Instâncias	As instâncias com seus conjuntos de pontos não dominados estão disponíveis (< http://hdl.handle.net/1959.13/1036183 >)	Instâncias geradas aleatoriamente por meio de uma adaptação do gerador CUTGEN (Gau e Wascher (1995)).	Disponíveis em < http://home.ku.edu.tr/~lijmoolibrary/ > (até 65 pontos não dominados) e disponíveis em < https://github.com/GiorgioGrani/Biobjective_Instâncias > (entre 75 e mil pontos não dominados).
Métodos Implementados para comparação	<ul style="list-style-type: none"> Método ϵ-Restrito Método da Busca perpendicular Método de Tchebycheff Ponderado Aumentado BBM 	<ul style="list-style-type: none"> Método de Benson Modificado Método da Restrição Normal Método de Tchebycheff Modificado MRV 	<ul style="list-style-type: none"> Método da Caixa Balanceada FPA (e suas variações FPA^* e SFPA)
Número de Subproblemas	$3 \mathcal{Y}_N $	$2 \mathcal{Y}_N $	$ \mathcal{Y}_N + 2$
Parâmetros de comparação (desempenho)	tempo computacional	tempo de execução em cada subproblema e total, número de soluções por segundo e número de soluções por subproblema	tempo computacional
Métricas de comparação de fronteiras	cardinalidade	cardinalidade, proximidade do vetor ideal, espaçamento, número de subproblemas resolvidos	Não utiliza métricas pois o método retorna a fronteira exata.
Conclusão	<ul style="list-style-type: none"> Instâncias com fronteira exata conhecida: O BBM obteve o melhor tempo computacional; fronteira aproximada: O método de Tchebycheff Ponderado Aumentado obteve melhor tempo porém o BBM obteve mais pontos não dominados. 	<ul style="list-style-type: none"> Para instâncias do PCE o MRV foi o segundo melhor comparado com o método de Tchebycheff modificado (tempo, número de soluções por segundo), porém \mathcal{Z}^* e a média de soluções por subproblema obtidas pelo MRV é maior. Para as instâncias do problema de dimensionamento de lotes o MRV teve melhor desempenho. 	<ul style="list-style-type: none"> O FPA* obteve o melhor tempo comparando com o algoritmo FPA e o BBM.

Fonte: Elaborado pela autora.

4 Métodos de Escalarização Aplicados ao PCE Biobjetivo (1D e 2D)

Através do desenvolvimento realizado no Capítulo 3, três métodos de escalarização foram selecionados para analisar seus desempenhos afim de identificar o mais adequado para o PCE, sendo eles o método *ERL*, *FPA** e o *TPA*. Na busca bibliográfica realizada foram encontrados poucos trabalhos que abordam o PCEM bidimensional. Toscano, Rangel e Yanasse (2017) utilizam uma heurística que combina a geração de padrões de corte e inequações que controlam os ciclos da serra associados. Rangel e Sáez-Aguado (2017a) utilizam o método ϵ -Restrito para resolver um PCE biobjetivo unidimensional, o algoritmo proposto consiste em gerar os padrões de corte de Gilmore e Gomory a priori (*GCa*), em seguida o método ϵ -Restrito é aplicado. Os estudos desenvolvidos em Aliano-Filho, Moretti e Pato (2015), Aliano-Filho (2016), Aliano-Filho, Moretti e Pato (2018), Aliano-Filho et al. (2021) são os mais próximos da proposta desenvolvida nesse capítulo, e diferenciam-se desta tese pela forma como a geração de colunas é desenvolvida, pelos critérios de otimização considerados e pela dimensionalidade do PCE.

O modelo utilizado nesse estudo definido por (4.1)-(4.5), é a linearização do ($PCEB_c^L$), apresentado no Capítulo 3 reescrita com a inclusão das restrições (4.3). A inclusão desse conjunto de restrições foi considerada devido ao estudo desenvolvido em Rangel e Sáez-Aguado (2017b) baseado na comparação de modelos de otimização matemática que representam a minimização de objetos e ciclos da serra. Esse estudo revelou que a inclusão dessas restrições resultam em um modelo com melhor comportamento comparando o tempo computacional e a qualidade da solução.

$$(PCEB_c^L) \quad \min \left(\sum_{j=1}^n x_j, \sum_{j=1}^n z_j \right) \quad (4.1)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n A_j x_j \geq d, \quad (4.2)$$

$$\sum_{j=1}^n A_j z_j \geq \left\lceil \frac{d}{c} \right\rceil, \quad (4.3)$$

$$x_j \leq c z_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

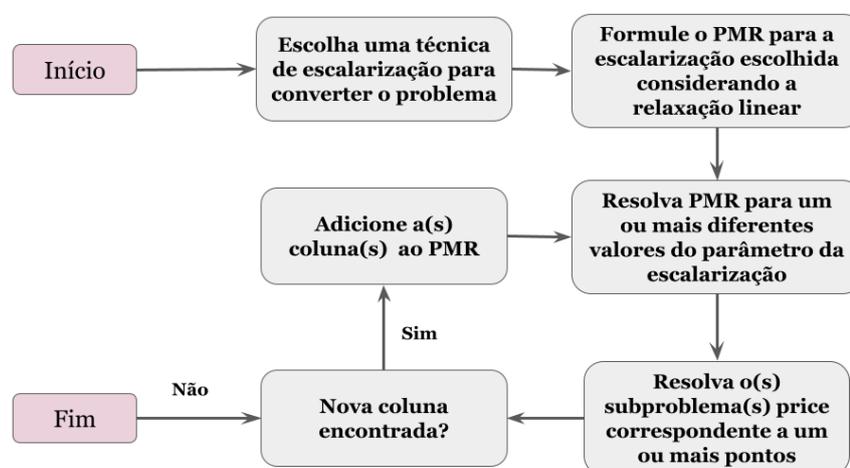
$$x_j, z_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

A principal contribuição nesse capítulo é a proposta de integração entre a técnica de geração de colunas com os métodos *ERL*, *FPA** e o *TPA*. A Seção 4.1 apresenta o algoritmo de geração de colunas multiobjetivo. E nas Seções 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3 são apresentadas as escalarizações aplicadas ao PCE e seus respectivos algoritmos incorporando a geração de colunas dinâmica.

4.1 Geração de colunas no contexto da otimização multiobjetivo para o PCE (1D e 2D)

A técnica de Geração de Colunas (GC) é um método pouco utilizado na solução de problemas de otimização multiobjetivo. O estudo apresentado em Artigues, Jozefowicz e Sarpong (2018) mostra que as poucas técnicas de GC que são encontradas na literatura seguem uma estrutura básica que pode ser resumida através do esquema representado na Figura 4.1. Primeiro, transforma-se o problema multiobjetivo em um problema monoobjetivo utilizando alguma técnica de escalarização e, em seguida, aplica-se a GC no subproblema gerado, para cada parâmetro da escalarização, e considerando a relaxação linear.

Figura 4.1: Esquema para o método de GC multiobjetivo geral.



Fonte: Adaptado de Artigues, Jozefowicz e Sarpong (2018).

O que diferencia uma técnica da outra é a forma com que a GC é aplicada. A técnica chamada “busca ponto a ponto” consiste em aplicar o ER clássico e para cada variação de ϵ aplica-se a geração de colunas. Os autores destacam algumas desvantagens como, a necessidade da convergência da GC para cada ϵ considerado, ou seja, o método não avança para outro subproblema enquanto a GC do problema atual não convergir. Não considera a possibilidade de aproveitar as semelhanças que alguns subproblemas podem ter para diferentes valores de ϵ .

A segunda técnica descrita é a “busca ponto a ponto aprimorada” que propõe o uso de heurísticas para gerar de forma rápida novas colunas, melhorando o desempenho da GC ou até mesmo propor heurísticas capazes de gerar rapidamente outras colunas que são interessantes para o subproblema atual e também para outros subproblemas. A terceira técnica nomeada como “Resolver uma vez, gerar para todos” resolve o PMR (problema resultante da escalarização e relaxação das variáveis) para todos os valores de ϵ , escolhe um subproblema para resolver e a coluna encontrada é modificada várias vezes através de heurísticas que combinem informações da coluna principal com o vetor de variáveis duais referente a outros pontos encontrados ao resolver os PMRs. Assim em cada iteração, um conjunto de colunas que são relevantes para um grande número de pontos é adicionado ao PMR. A dificuldade dessa estratégia está na construção dessas heurísticas, pois elas dependem do problema específico a ser tratado.

A estratégia utilizada nessa tese segue a ideia da “busca ponto a ponto”, é chamada de geração de colunas dinâmica (GCD) e consiste em três passos principais:

- Geração de colunas *a priori* para obter uma matriz de padrões de corte iniciais que compõem o PMR. Esse procedimento é denotado como *GCa* e é descrito no Algoritmo 3.
- Cálculo dos pontos lexicográficos.
- Aplicar a estratégia da “busca ponto a ponto” para resolver o PCEM.

O Algoritmo 3 descreve a *GCa* que consiste em realizar duas GC independentes, sendo uma para cada critério de otimização, obtendo as matrizes de padrões de corte correspondentes a cada GC (A_o e A_c). Ao final é realizada a junção das duas matrizes eliminando-se colunas iguais. Os dados GC considerados na inicialização do algoritmo são as informações de limitação do solver “CPLEX” (tempo máximo de execução e *gap*) e a decisão de gerar colunas considerando o primeiro e (ou) o segundo critério. Caso a GC com relação à minimização de número de objetos (número de ciclos) for considerada, tem-se $GCo = 1$ ($GCc = 1$), caso contrário, $GCo = 0$ ($GCc = 0$).

Algoritmo 3: Geração de Colunas a priori (*GCa*)

Entrada: dados PCE e dados GC
Saída: A_3 (matriz de padrões de corte)

- 1 $A_1 =$ matriz de padrões de corte homogêneos maximais \cup
matriz de padrões de corte homogêneos unitários ;
- 2 **se** $GCo = 1$ **então**
- 3 **Chame** Algoritmo 1 para realizar a geração de colunas (*min* objetos) a partir
de A_1 ;
Saída: A_o (matriz A_1 atualizada com os padrões de corte gerados)
- 4 **fim**
- 5 **se** $GCc = 1$ **então**
- 6 **Chame** Algoritmo 1 para realizar a geração de colunas (*min* ciclos) a partir
de A_1 ;
Saída: A_c (matriz A_1 atualizada com os padrões de corte gerados)
- 7 **fim**
- 8 **se** $GCo = 1$ e $GCc = 1$ **então**
- 9 **Faça** $A_3 = A_o \cup A_c - A_o \cap A_c$;
Saída: A_3 (matriz de padrões de corte)
- 10 **fim**
- 11 **se** $GCo = 1$ e $GCc = 0$ **então**
- 12 $A_3 = A_o$;
Saída: A_3 (matriz de padrões de corte)
- 13 **fim**
- 14 **se** $GCo = 0$ e $GCc = 1$ **então**
- 15 $A_3 = A_c$;
Saída: A_3 (matriz de padrões de corte)
- 16 **fim**

Para descrever o procedimento *GCD* é necessário construir o PMR e o subproblema *pricing* (*subpricing*). Assim, defina o Problema Interno Escalarizado (PIE) construído a partir de algum dos métodos (*ERL*, *FPA** e *TPA*), o PMR é obtido considerando o (PIE) relaxando as variáveis x e z ($x_j, z_j \in \mathbb{R}_+, \forall j = 1, \dots, n$). Para o caso unidimensional, o

subpricing é o problema da mochila (Seção 2.4) e para o caso bidimensional o *subpricing* é o modelo M1-rot (Seção 2.4). O Algoritmo 4 mostra a técnica da GCd que é utilizada nos subproblemas. Os dados GC que são considerados na inicialização do algoritmo são os mesmos dados considerados no Algoritmo 3 com informações adicionais relacionadas a decisão de, a cada iteração gerar uma coluna relacionada ao primeiro critério e (ou) gerar uma coluna relacionada ao segundo critério ($GCd_o = 0$ ou 1 e $GCd_c = 0$ ou 1). A diferença entre os Algoritmos 3 e 4 está no PMR pois na GCa têm-se dois PMR independentes para cada critério de otimização e na GCd as variáveis duais são obtidas do mesmo PMR obtido do problema escalarizado. Logo, a cada iteração da GCd há a possibilidade de duas colunas serem adicionadas ao PMR simultaneamente, quando $GCd_o = 1$ e $GCd_c = 1$.

Algoritmo 4: Geração de Colunas multiobjetivo para o $PCEB_c^L$.

Entrada: dados PCE e dados GC
Saída: A_3 atualizada

- 1 **Chame** Algoritmo 3 e obtenha A_3 ;
- 2 **Resolva** PMR com A_3 e calcule (\bar{x}^r, \bar{z}^r) , π_o e π_c ;
- 3 **se** PMR não possui solução ótima **então**
- 4 | **PARE!** (PMR infactível)
- 5 **senão**
- 6 | **se** $GCd_o = 1$ **então**
- 7 | | **Resolva** subpricing (objetos);
- 8 | | **Saída:** A_j^o, cr_o
- 9 | **fim**
- 10 | **se** $GCd_c = 1$ **então**
- 11 | | **Resolva** subpricing (ciclos);
- 12 | | **Saída:** A_j^c, cr_c
- 13 | **fim**
- 14 | **se** $GCd_o = 1$ e $GCd_c = 1$ **então**
- 15 | | **se** $cr_o \geq tolcr$ e $cr_c \geq tolcr$ **então**
- 16 | | | **PARE!** (\bar{x}^r, \bar{z}^r) é ótima
- 17 | | **fim**
- 18 | | **se** $cr_o < tolcr$ e $cr_c < tolcr$ **então**
- 19 | | | $r = r + 1$;
- 20 | | | Insira A_j^o e A_j^c no PMR e volte a linha 1
- 21 | | **fim**
- 22 | | **se** $cr_o < tolcr$ e $cr_c > tolcr$ **então**
- 23 | | | $r = r + 1$;
- 24 | | | Insira A_j^o no PMR e volte a linha 1
- 25 | | **fim**
- 26 | | **se** $cr_o > tolcr$ e $cr_c < tolcr$ **então**
- 27 | | | $r = r + 1$;
- 28 | | | Insira A_j^c no PMR e volte a linha 1
- 29 | | **fim**
- 30 | **fim**
- 31 | **se** $GCd_o = 1$ **então**
- 32 | | **se** $cr_o \geq tolcr$ **então**
- 33 | | | **PARE!** (\bar{x}^r, \bar{z}^r) é ótima
- 34 | | **senão**
- 35 | | | Insira A_j^o no PMR e volte a linha 1
- 36 | | **fim**
- 37 | **fim**
- 38 | **se** $GCd_c = 1$ **então**
- 39 | | **se** $cr_c \geq tolcr$ **então**
- 40 | | | **PARE!** (\bar{x}^r, \bar{z}^r) é ótima
- 41 | | **senão**
- 42 | | | Insira A_j^c no PMR e volte a linha 1
- 43 | | **fim**
- 44 | **fim**

Para o desenvolvimento dos métodos de escalarização é necessário calcular os pontos lexicográficos. Para tal, define-se os quatro subproblemas que precisam ser resolvidos: $y^{lex1} = lex - \min_{x \in \mathcal{X}} \{f_1(x), f_2(x)\}$ (obtido resolvendo (4.6) e (4.8)), $y^{lex2} = lex - \min_{x \in \mathcal{X}} \{f_2(x), f_1(x)\}$ (obtido resolvendo (4.7) e (4.9)). Consequentemente, o vetor ideal é $y^I = (y_1^{lex1}, y_2^{lex2})$. No caso em que a GCd é utilizada, o Algoritmo 4 é aplicado a cada um dos subproblemas de (4.6)-(4.9).

$$\begin{aligned}
 y_1^{lex1} &= \min \sum_{j=1}^n x_j & y_2^{lex2} &= \min \sum_{j=1}^n z_j \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n A_j x_j \geq d, & \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n A_j x_j \geq d, \\
 & \sum_{j=1}^n A_j z_j \geq \left\lceil \frac{d}{c} \right\rceil, & & \sum_{j=1}^n A_j z_j \geq \left\lceil \frac{d}{c} \right\rceil, \\
 & x_j \leq cz_j, \quad j = 1, \dots, n & & x_j \leq cz_j, \quad j = 1, \dots, n \\
 & x_j, z_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, n. & & x_j, z_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{4.6} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
 y_2^{lex1} &= \min \sum_{j=1}^n z_j & y_1^{lex2} &= \min \sum_{j=1}^n x_j \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n A_j x_j \geq d, & \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n A_j x_j \geq d, \\
 & \sum_{j=1}^n A_j z_j \geq \left\lceil \frac{d}{c} \right\rceil, & & \sum_{j=1}^n A_j z_j \geq \left\lceil \frac{d}{c} \right\rceil, \\
 & x_j \leq cz_j, \quad j = 1, \dots, n & & x_j \leq cz_j, \quad j = 1, \dots, n \\
 & \sum_{j=1}^n x_j \leq y_1^{lex1} & & \sum_{j=1}^n z_j \leq y_2^{lex2} \\
 & x_j, z_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, n. & & x_j, z_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{4.8} \tag{4.9}$$

Nas Seções 4.2.1-4.2.3, apresenta-se as escalarizações usadas para resolver o ($PCEB_c^L$) e os respectivos algoritmos usados para obter uma aproximação da fronteira de Pareto. O motivo pelo qual a fronteira obtida é aproxima e não exata se dá pelo fato que o $PCEB_c^L$ está sendo resolvido utilizando a GC de forma heurística, pois através das limitações de tempo de execução consideradas não tem-se a garantia que os subproblemas *pricing* estão sendo resolvidos na otimalidade. Além da limitação de tempo, também é considerada a limitação de cinco iterações quando a GC obtém a mesma variável dual para evitar a não convergência da GC, quando ocorrer. A GC é um dos métodos mais populares para calcular bons limites inferiores para problemas monobjetivos que possam ser modelados por problemas lineares inteiros com um número exponencial de variáveis (ARTIGUES; JOZEFOWIEZ; SARPONG, 2018).

4.2 Descrição dos métodos de escalarização para o $PCEB_c^L$

4.2.1 Método ϵ -Restrito Lexicográfico

O método ϵ -Restrito Lexicográfico (ERL) consiste em resolver dois subproblemas na sequência. O primeiro descrito por (4.10)-(4.15). O valor de ϵ é inicializado com um valor suficientemente grande ($\epsilon = 9999$).

$$(subp1^{ERL}) \quad \min \sum_{j=1}^n x_j \quad (4.10)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n A_j x_j \geq d, \quad (4.11)$$

$$\sum_{j=1}^n A_j z_j \geq \left\lceil \frac{d}{c} \right\rceil, \quad (4.12)$$

$$x_j \leq cz_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.13)$$

$$\sum_{j=1}^n z_j \leq \epsilon \quad (4.14)$$

$$x_j, z_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.15)$$

Dados (\bar{x}, \bar{z}) solução de $(subp1^{ERL})$, o segundo subproblema a ser resolvido é descrito por (4.16)-(4.21).

$$(subp2^{ERL}) \quad \min \sum_{j=1}^n z_j \quad (4.16)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n A_j x_j \geq d, \quad (4.17)$$

$$\sum_{j=1}^n A_j z_j \geq \left\lceil \frac{d}{c} \right\rceil, \quad (4.18)$$

$$x_j \leq cz_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.19)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq \sum_{j=1}^n \bar{x}_j \quad (4.20)$$

$$x_j, z_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.21)$$

As relaxação do subproblema $(subp1^{ERL})$ é dada apenas pela substituição da restrição (4.15) pela restrição (4.22). Denotamos a relaxação por $(\overline{subp1^{ERL}})$.

$$x_j, z_j \in \mathbb{R}_+, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.22)$$

O pseudocódigo do método ERL é apresentado no Algoritmo 5. A cada iteração do método o $(\overline{subp1^{ERL}})$ é resolvido pelo Algoritmo 4, caso a GCd esteja ativada ($GCd = 1$), para obter a matriz de padrões de corte. Assim, são adicionadas ao PMR duas colunas ($GCd_o = 1$ e $GCd_c = 1$) ou apenas uma coluna é adicionada ao PMR ($GCd_o = 1$ ou $GCd_c = 1$). Na sequência, o $(subp1^{ERL})$ é resolvido e a sua solução é utilizada como solução inicial para resolver o $(subp2^{ERL})$ obtendo um ponto não dominado. O valor $ncol(A_3)$ indicado na linha 13 é o número de colunas da matriz A_3 .

Algoritmo 5: Método ϵ -Restrito Lexicográfico (ERL) para o $PCEB_c^L$

Entrada: dados PCE, ϵ , $\mathcal{Z}^* = \emptyset$, dados GC
Saída: \mathcal{Z}^* (Fronteira de Pareto);
 y^{lex1} , y^{lex2} , y^I e A_3 (atualizada)

- 1 **Chame** Algoritmo 3 e obtenha A_3 ;
- 2 **se** $Gcd = 1$ **então**
- 3 **Chame** Algoritmo 4 para resolver ((4.6)-(4.9) relaxados) e obtenha A_3
 atualizada;
- 4 **Resolva** (4.6)-(4.9) e obtenha y^{lex1} , y^{lex2} , y^I ;
- 5 **senão**
- 6 **Resolva** (4.6)-(4.9) e obtenha y^{lex1} , y^{lex2} , y^I ;
- 7 **fim**
- 8 **enquanto** $\epsilon > y_2^I$ **faça**
- 9 **se** $Gcd = 1$ **então**
- 10 **Chame** Algoritmo 4 para resolver ($\overline{subp1^{ERL}}$) e obtenha A_3 atualizada;
- 11 **fim**
- 12 **Resolva** ($subp1^{ERL}$) obtendo a solução eficiente (\bar{x}, \bar{z}) ;
- 13 **Resolva** ($subp2^{ERL}$) fornecendo (\bar{x}, \bar{z}) como solução inicial e obtendo (x^*, z^*) e
- $$y^* = \left(\sum_{j=1}^{ncol(A_3)} x_j^*, \sum_{j=1}^{ncol(A_3)} z_j^* \right);$$
- 14 **Atualize** $\mathcal{Z}^* \leftarrow \mathcal{Z}^* \cup \{y^*\}$;
- 15 $\epsilon \leftarrow \sum_{j=1}^n z_j^* - 1$;
- 16 **fim**

4.2.2 Método de Particionamento da Fronteira

Para definir o Método FPA^* aplicado ao $(PCEB_c^L)$ é necessário calcular os pesos w^* . Assim, dada uma permutação $\{i_1, i_2\}$ de $\{1, 2\}$ calcula-se os pesos de acordo com (3.25). Para o PCE temos que $\gamma_1 = 1$ e $\gamma_2 = 1$, pois as duas funções objetivo são da forma $c^T x$, $c \in \mathbb{Z}^2$ (lineares), logo elas são γ -positivas para $\gamma \geq 1$ (SANTIS; GRANI; PALAGI, 2020). A partir do valor de γ , deve-se escolher um valor para $\zeta_i \in (0, \gamma_i)$ e um valor para $\epsilon_i \in (0, \gamma_i]$ e conhecer y^{lex1} , y^{lex2} e y^I .

A escalarização na primeira iteração ($k = 0$) é dada por (4.23)-(4.27).

$$(FPA^*)^0 \quad \min \quad w_1^* \sum_{j=1}^n x_j + w_2^* \sum_{j=1}^n z_j \quad (4.23)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n A_j x_j \geq d, \quad (4.24)$$

$$\sum_{j=1}^n A_j z_j \geq \left\lceil \frac{d}{c} \right\rceil, \quad (4.25)$$

$$x_j \leq c z_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.26)$$

$$x_j, z_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.27)$$

Seja a solução (\bar{x}, \bar{z}) de $(FPA^*)^k$ tal que $\bar{y} = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{z}))$. O subproblema a ser resolvido na iteração $(K + 1)$ é dado por (4.28)- (4.33).

$$(FPA^*)^{k+1} \quad \min \quad w_1^* \sum_{j=1}^n x_j + w_2^* \sum_{j=1}^n z_j \quad (4.28)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n A_j x_j \geq d, \quad (4.29)$$

$$\sum_{j=1}^n A_j z_j \geq \left\lceil \frac{d}{c} \right\rceil, \quad (4.30)$$

$$x_j \leq cz_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.31)$$

$$f_{i_1} \leq \bar{y}_{i_1}^k - \epsilon_{i_1} \quad (4.32)$$

$$x_j, z_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.33)$$

Assim como no método ERL, a relaxação do $(FPA^*)^k$ é dada pela substituição da restrição (4.33) pela restrição (4.22) e denotada por $(\overline{FPA^*})^k$.

O pseudocódigo do método FPA^* é apresentado no Algoritmo 6 e mostra como a GCD é incorporada no método. O algoritmo é inicializado com os pontos lexicográficos obtidos no Algoritmo 5. Essa estratégia foi utilizada pois nos testes computacionais preliminares realizados para instâncias do PCE-2D notou-se que os pontos lexicográficos obtidos na execução de cada método de forma independente são diferentes. Isso pode ocorrer quando define-se um limite de tempo de execução para os subproblemas *pricing* e a execução é interrompida antes da solução ótima ser obtida (IBM... , 2018). Ao limitar o tempo de processamento, notou-se que os subproblemas *pricing* modelados por M1-rot interrompem a busca por limite de tempo e ao final a matriz de padrões de corte é diferente nas execuções subsequentes, obtendo diferentes pontos lexicográficos. Nos testes preliminares realizados para instâncias do PCE-1D, não houve esse problema pois os subproblemas *pricing* modelados pelo problema da mochila são resolvidos até a otimalidade fornecendo as mesmas matrizes ao final de execuções subsequentes. Para resolver essa questão, gera-se os pontos lexicográficos no Algoritmo 5 salvando em um arquivo de dados para uso nos demais métodos.

Para o PCE unidimensional considera-se a permutação $\{2, 1\}$ que representa a preferência na minimização de objetos e $\zeta_i = 0, 3, i = 1, 2$ (baseado em Santis, Grani e Palagi (2020)). Para o PCE bidimensional considera-se 4 variações para o método FPA^* variando ζ_i e a permutação. Denota-se FPA_{var1}^* a variação considerando a permutação e o ζ_i do caso unidimensional. A partir do valor de ζ_i varia-se em 0, 2 para baixo e 0, 2 para cima e mantêm-se a mesma permutação, resultando nas variações FPA_{var3}^* ($\zeta_1 = 0, 1$) e FPA_{var4}^* ($\zeta_1 = 0, 5$). E por fim considera-se $\zeta_i = 0, 3, i = 1, 2$, e a permutação $\{1, 2\}$ priorizando-se a minimização de ciclos resultando no FPA_{var2}^* .

Algoritmo 6: Método FPA^* para resolver o $PCEB_c^L$

Entrada: dados PCE, $\mathcal{Z}^* = \emptyset$, dados GC ;

$$A_3, y^{lex1}, y^{lex2}, y^I ;$$

$$\gamma_i > 0, \zeta_i \in (0, \gamma_i), \epsilon_i \in (0, \gamma_i], i = 1, 2 \text{ e a permutação } (i_1, i_2)$$

Saída: \mathcal{Z}^* (Fronteira de Pareto)

```

1 se  $y^{lex1} = y^{lex2}$  então
2   | PARE! O problema possui apenas um ponto não dominado
3 senão
4   | para  $i = 1 \dots 2$  faça
5     | se  $i = i_1$  então
6       |  $w_i = \frac{\gamma_i - \zeta_i}{|y_{i_1}^{lex1} - y_{i_1}^{lex2}|}$ 
7       | fim
8     | se  $i = i_2$  então
9       |  $w_i = 1$ 
10    | fim
11   | fim
12   |  $k = 0$ ;
13   | se  $Gcd = 1$  então
14     | Chame Algoritmo 4 para resolver  $(\overline{FPA^*})^0$  e obtenha  $A_3$ 
15     | fim
16   | Resolva  $(FPA^*)^0$  e obtenha  $(\bar{x}^0, \bar{z}^0)$  e  $\bar{y}^0 = \left( \sum_{j=1}^{ncol(A_3)} \bar{x}_j^0, \sum_{j=1}^{ncol(A_3)} \bar{z}_j^0 \right)$ ;
17   | Atualize  $\mathcal{Z}^* \leftarrow \mathcal{Z}^* \cup \{\bar{y}^0\}$ ;
18   | enquanto  $f_{i_1}(\bar{x}^{k+1}, \bar{z}^{k+1}) > y_{i_1}^I$  faça
19     | se  $Gcd = 1$  então
20       | Chame Algoritmo 4 para resolver  $(\overline{FPA^*})^{k+1}$  e obtenha  $A_3$ 
21       | fim
22     | Resolva  $(FPA^*)^{k+1}$  e obtenha  $(\bar{x}^{k+1}, \bar{z}^{k+1})$  e
23       |  $\bar{y}^{k+1} = \left( \sum_{j=1}^{ncol(A_3)} \bar{x}_j^{k+1}, \sum_{j=1}^{ncol(A_3)} \bar{z}_j^{k+1} \right)$ ;
24     | Atualize  $\mathcal{Z}^* \leftarrow \mathcal{Z}^* \cup \{\bar{y}^{k+1}\}$ ;
25     |  $k \leftarrow k + 1$ ;
26   | fim
27 fim

```

4.2.3 Método Tchebycheff Ponderado Aumentado

O método de Tchebycheff Ponderado Aumentado consiste em resolver os subproblemas (4.34)-(4.40) para cada peso w escolhido.

$$(TPA) \quad \min \quad u + \rho \left(\beta_1 \left(\sum_{j=1}^n x_j - y_1^I \right) + \beta_2 \left(\sum_{j=1}^n z_j - y_2^I \right) \right) \quad (4.34)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n A_j x_j \geq d, \quad (4.35)$$

$$\sum_{j=1}^n A_j z_j \geq \left\lceil \frac{d}{c} \right\rceil, \quad (4.36)$$

$$x_j \leq c z_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.37)$$

$$\beta_1 w \left(\sum_{j=1}^n x_j - y_1^I \right) \leq u \quad (4.38)$$

$$\beta_2 (1 - w) \left(\sum_{j=1}^n z_j - y_2^I \right) \leq u \quad (4.39)$$

$$x_j, z_j \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{R}_+ \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.40)$$

Algoritmo 7: Método TPA

Entrada: dados PCE, $Z^* = \emptyset$, dados GC ;

$A_3, y^{lex1}, y^{lex2}, y^I$;

ρ, Δ, w e β_1, β_2 (constante de normalização dos objetivos conforme (A.8))

Saída: Z^* (Fronteira de Pareto)

```

1 se  $y^{lex1} = y^{lex2}$  então
2   | PARE! O problema possui apenas um ponto não dominado
3 senão
4   | se  $\Delta = 1$  então
5     | PARE!  $Z^*$  contém apenas  $y^{lex1}, y^{lex2}$  ;
6     | Saída:  $Z^* = \{y^{lex1}, y^{lex2}\}$ 
7   | senão
8     |  $t = 0$ ;
9     | enquanto  $w \geq \Delta$  faça
10    |   | se  $GCD = 1$  então
11    |   |   | Chame Algoritmo 4 para resolver  $(\overline{TPA})$  obtendo  $A_3$ 
12    |   |   | fim
13    |   |   | Resolva  $(TPA)$  obtendo  $(x^t, z^t)$  e  $y^t = \left( \sum_{j=1}^{ncol(A_3)} x_j^t, \sum_{j=1}^{ncol(A_3)} z_j^t \right)$ ;
14    |   |   | Saída:
15    |   |   | Atualize  $Z^* \leftarrow Z^* \cup \{y^t\}$ ;
16    |   |   |  $w \leftarrow w - \Delta$ ;
17    |   |   |  $t \leftarrow t + 1$ 
18    |   | fim
19   | fim
20 fim
    
```

O pseudocódigo do método TPA é apresentado no Algoritmo 7 e mostra como a GCD é incorporada no método. As constantes de normalização $\beta_i, i = 1, 2$ calculadas em (A.8)

são utilizadas para que a variação dos pesos possa ser realizada no intervalo $[0, 1]$. Assim, dado um valor Δ (tamanho do passo) que é calculado por (4.41), o valor inicial para w é $1 - \Delta$ e a cada iteração w é atualizado conforme a linha 14 no Algoritmo 7. Para o parâmetro ρ , considera-se o valor 0,001, baseado em Aliano-Filho, Moretti e Pato (2018).

$$\Delta = \frac{1}{f_2^{lex1} - f_2^{lex2}}. \quad (4.41)$$

No Capítulo 5 são apresentadas as instâncias utilizadas para o PCE-1D e o PCE-2D, os testes computacionais realizados utilizando os Algoritmos 5, 6 e 7 para resolver o $PCEB_c^L - 1D$ e $PCEB_c^L - 2D$ e a análise dos resultados determinando qual método obtém o melhor desempenho e a análise da melhoria dos métodos ERL , FPA^* e o TPA utilizando a GCD .

5 Estudo Computacional

Nesse capítulo aplica-se os Algoritmos 5, 6 e 7 dos métodos descritos no Capítulo 4 com a GCd incorporada para resolver o ($PCEB_c^L$) Unidimensional e Bidimensional. Os estudos computacionais são apresentados nas Seções 5.1 ($PCEB_c^L - 1D$) e 5.2 ($PCEB_c^L - 2D$), e descreve-se as respectivas instâncias utilizadas. Finalmente, na Seção 5.3 são discutidas as conclusões e propostas futuras para continuidade desse estudo.

5.1 Estudo computacional $PCEB_c^L-1D$

Nesta seção apresentam-se os resultados do estudo computacional realizado para avaliar o desempenho dos métodos ERL , FPA^* e TPA para resolver o $PCEB_c^L - 1D$. Este estudo busca analisar três aspectos:

- A importância da GCd obtendo uma melhor aproximação da fronteira de Pareto.
- A influência da variação da capacidade da serra c nos três métodos e ao considerar $c = d_{max}$ (equivalência de ciclos e *setup*) mostra-se resultados próximos ao obtido em Aliano-Filho (2016), Aliano-Filho et al. (2021).
- O desempenho dos três métodos para determinar qual é o mais adequado para o $PCEB_c^L - 1D$ considerando as métricas de comparação e o tempo computacional.

Os Algoritmos 5, 6 e 7 foram implementados em Julia com o auxílio do pacote JuMP (Versão 0.6.3.1) (JULIA, 2018), e os subproblemas envolvidos foram resolvidos pelo CPLEX versão 12.6.1 (IBM, 2014). As simulações foram executadas em um computador com processador Intel Core i7-3770 (3.40GHz), 12 GB de RAM, sob Sistema Operacional Windows de 64 bits.

Para comparação das aproximações das fronteiras de Pareto utiliza-se as seguintes métricas apresentadas na Seção 3.5:

- σ^1 : cardinalidade da fronteira obtida ($|\mathcal{Z}^*|$);
- σ^2 : hipervolume (para o caso biobjetivo representa as áreas delimitadas pelas fronteiras);
- σ_o^3, σ_c^3 : amplitudes dos pontos lexicográficos relacionadas a cada objetivo (σ_o^3 (objetos), σ_c^3 ciclos);
- σ^4 : número de subproblemas resolvidos pelo método.

Para analisar a qualidade dos métodos utiliza-se ainda dois indicadores que buscam combinar a análise das métricas e o tempo computacional.

- $\sigma^5 = \frac{\sigma^1}{Tempototal}$: número de soluções por tempo de execução;
- $\sigma^6 = \frac{\sigma^1}{\sigma^4}$: número de soluções por subproblema.

O perfil de desempenho também é utilizado nesse estudo como uma técnica de comparação dos métodos implementados. No relatório desenvolvido em Munari-Junior (2009) discute-se os cálculos necessários e como interpretar os gráficos de acordo com a técnica proposta por Dolan e Moré (2002). Munari-Junior (2009) propõe a planilha “perfis.xlsx” que cria o gráfico de perfis de desempenho de forma automática. Essa planilha é utilizada para obter os perfis de desempenho para o tempo computacional e para o hipervolume.

5.1.1 Descrição das instâncias

As instâncias para o PCE-1D foram geradas utilizando o gerador CUTGEN1 proposto por Gau e Wäscher (1995) frequentemente usado na literatura e que pode ser obtido dos autores tanto no código-fonte quanto como uma versão executável no MS-DOS. Os parâmetros necessários para gerar as instâncias são:

- m : número de diferentes tipos de itens;
- L : Comprimento do objeto;
- v_1 : limite inferior para o tamanho relativo dos comprimentos dos itens em relação a L , ou seja, $l_i \geq v_1 \cdot L (i = 1, \dots, m)$;
- v_2 : limite superior para o tamanho relativo dos comprimentos dos itens em relação a L , ou seja, $l_i \leq v_2 L (i = 1, \dots, m)$;
- \bar{d} : demanda média por comprimento do item.

Como os valores para v_1 e v_2 definem o tamanho que o menor e o maior comprimento de cada item pode assumir em relação ao tamanho do comprimento padrão L . De acordo com os valores de v_1 e v_2 obtêm-se as seguintes classes de problemas segundo Foerster e Wascher (2000):

- se $v_1 = 0.01$ e $v_2 = 0.2$: itens pequenos (P);
- se $v_1 = 0,01$ e $v_2 = 0,8$: itens de tamanhos variados (M);
- se $v_1 = 0,2$ e $v_2 = 0,8$: itens médios e grandes (G).

Nas instâncias geradas, tomou-se $m = 100$, $L = 10000$, $\bar{d} = 100$ e geramos 1 instância para cada tamanho (P, M, G). Para cada uma das três instâncias, 6 novas instâncias considerando subconjuntos com os 10 primeiros itens, os 20 primeiros itens, 40 primeiros, e assim por diante. Logo, obtêm-se 18 instâncias considerando tipos de itens P, M e G, com $m = 10, 20, 40, 60, 80$ e 100. Cada um dos três métodos foi simulado para capacidade da serra $c = 4, 7, d_{max}$ e considerando a geração de coluna estática ($Gcd = 0$) e dinâmica ($Gcd = 1$) em cada um dos três métodos, resultando em 324 ($18 \times 3 \times 2 \times 3$) simulações.

5.1.2 Resultados e discussão

Alguns parâmetros do CPLEX foram modificados para resolver os subproblemas. Todas as simulações realizadas nessa seção utilizam a limitação no tempo de execução e o *gap* dos *subpricing* em 15 segundos e 0,01 (os demais subproblemas em 60 segundos e 0,0001). Se essa limitação não fosse considerada, os subproblemas obteriam um tempo considerável para serem otimizados completamente.

Nesta primeira etapa de simulações computacionais, analisa-se a influência da GCd em cada método para cada capacidade da serra, para então realizar a comparação entre os métodos *ERL*, *FPA** e *TPA* para resolver o $PCEB_c^L - 1D$. Para o método *FPA**, considera-se a permutação $\{2, 1\}$ que representa a preferência na minimização de objetos e $\zeta_i = 0, 3$ (Variação 1) (baseado em Santis, Grani e Palagi (2020)).

A Tabela 5.1 apresenta o resultado obtido considerando as gerações de colunas dinâmica (GCd) e estática (GCs) para o método *ERL* com $c = 4$, nas colunas da Tabela 5.1 são exibidos o tempo computacional (Tempo total), o número de colunas totais geradas (n° colunas), número de iterações (it) do método *ERL* e as métricas σ^1 , σ_o^3 e σ_c^3 . O tempo computacional gasto ao realizar as gerações de colunas estática e dinâmica não possui uma variação significativa. O aumento máximo no tempo para GCd foi de 30,5% ($id = G, m = 80$) em relação a GCs. Para as instâncias da classe P, com $m = 40$ e $m = 60$ há uma redução do tempo computacional (28% e 7,1%, respectivamente) ao considerar a geração de colunas dinâmica. Essa redução se dá pelo fato da GCd realizar uma iteração a menos.

Tabela 5.1: Resultados obtidos pelo método *ERL* para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4$.

.id item	m	n° colunas		Tempo total (s)		it (<i>ERL</i>)		σ^1		σ_o^3		σ_c^3	
		GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd
P	10	10	10	23,29	23,45	1	1	1	1	0	0	0	0
P	20	20	20	23,36	23,55	1	1	1	1	0	0	0	0
P	40	127	134	893,44	641,14	6	5	5	5	8	8	17	19
P	60	155	170	999,07	927,92	6	5	4	5	15	14	31	26
P	80	167	191	643,42	686,91	3	3	3	3	19	21	23	29
P	95	195	225	687,66	688,32	3	3	3	3	20	21	29	30
M	10	10	10	23,33	23,60	1	1	1	1	0	0	0	0
M	20	20	20	23,38	23,49	1	1	1	1	0	0	0	0
M	40	40	40	23,37	23,52	1	1	1	1	0	0	0	0
M	60	166	166	25,26	24,95	1	1	1	1	0	0	0	0
M	80	230	230	28,68	28,65	1	1	1	1	0	0	0	0
M	99	373	373	33,56	33,73	1	1	1	1	0	0	0	0
G	10	10	10	23,71	25,32	1	1	1	1	0	0	0	0
G	20	20	20	23,47	26,50	1	1	1	1	0	0	0	0
G	40	40	40	23,58	26,48	1	1	1	1	0	0	0	0
G	60	78	80	23,72	27,42	2	1	2	1	1	0	1	0
G	80	315	319	28,09	36,66	1	1	1	1	0	0	0	0
G	97	315	319	47,79	47,76	3	1	3	1	2	0	2	0

Fonte: Elaborado pela autora.

Observe que os resultados obtidos para as instâncias compostas por itens das classes M

e G indicam a ausência de conflito entre a minimização de objetos e ciclos considerando a capacidade da serra igual a 4. Para as instâncias compostas por itens da classe P há uma pequena variação da cardinalidade ($\sigma^1 \in [1, 5]$). As demais tabelas apresentadas nesse capítulo serão filtradas excluindo-se as instâncias em que a aproximação da fronteira obtém apenas um ponto não dominado ($\sigma^1 = 1$). As tabelas completas podem ser vistas no Apêndice B. O método *FPA** obteve resultados que mostram uma melhora do tempo computacional em algumas instâncias, e para as instâncias em que ocorre o aumento do tempo, esse aumento não ultrapassa a 50% (Ver Tabela B.1 no Apêndice B). Para o método de *TPA*, a geração de colunas dinâmica também obtém melhora na aproximação da fronteira sem obter um aumento significativo no tempo computacional, sendo o maior aumento em torno de 10% (Ver Tabela B.2 no Apêndice B).

Nas Tabelas 5.2 e 5.3 são exibidos os resultados para o *FPA* ($c = 7$) e *TPA* ($c = d_{max}$). Os resultados dos métodos para os demais valores da capacidade da serra podem ser vistos no Apêndice B. Considerando as métricas σ^1 e σ^3 , o comportamento dos métodos relativos a GCs e a GCd são similares e independem do valor da capacidade da serra. A diferença entre as duas estratégias de geração de colunas pode ser melhor avaliada considerando a métrica σ^2 .

Tabela 5.2: Resultados obtidos pelo método *FPA** para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 7$.

id item	m	nº colunas		Tempo total (s)		it		σ^1		σ_o^3		σ_c^3	
		GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd
P	40	134	154	960,41	761,66	12	10	5	5	13	10	29	29
P	60	153	178	1116,57	1093,70	15	14	7	8	24	23	31	36
P	80	175	197	935,29	998,42	11	12	5	5	22	38	27	30
P	95	207	251	825,90	697,53	10	7	6	4	42	33	31	46
G	60	78	78	31,28	32,13	3	3	3	3	9	9	2	2
G	80	314	315	35,02	36,21	0	2	1	2	0	2	0	1
G	97	292	306	41,13	39,09	6	3	5	3	14	3	4	2

Fonte: Elaborado pela autora.

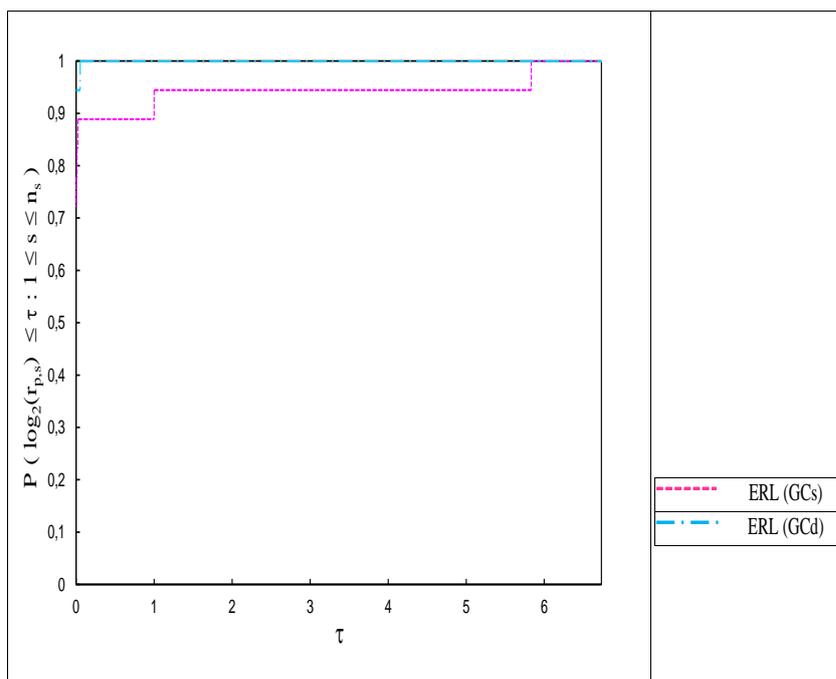
A qualidade da aproximação da fronteira pode ser observada através dos perfis de desempenho para o hipervolume (σ^2) apresentados nas Figuras 5.1, 5.2 e 5.3. Note que *FPA** e *TPA* obtiveram o melhor hipervolume em 100% das instâncias e o *ERL* em 95%. Esse comportamento é observado também para $c = 7$ e $c = d_{max}$ como mostra os perfis de desempenho nas Figuras 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8 e 5.9. Verifica-se também que instâncias compostas por itens da classe P têm uma amplitude (σ_o^3 e σ_c^3) maior em ambas as funções objetivo do que nas instâncias compostas por itens das classes M e G. A amplitude interfere no grau de dificuldade dos algoritmos, ou seja, instâncias em que a amplitude dos lexicográficos são pequenas são mais rápidas de serem resolvidas do aquelas com maior amplitude, pois é necessária a solução de um número maior de problemas inteiros. Com isso, pode-se concluir que realizar GCd melhora a aproximação de fronteira de Pareto.

Tabela 5.3: Resultados obtidos pelo método TPA para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = d_{max}$.

id item	m	nº colunas		Tempo total (s)		it		σ^1		σ_o^3		σ_c^3	
		GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd
P	40	145	148	2981,93	2117,83	43	38	17	18	645	645	45	40
P	60	170	178	4070,87	3401,67	71	63	27	26	1506	1464	72	64
P	80	188	191	3071,98	3020,45	59	63	30	30	1449	1590	61	64
P	95	233	240	3947,56	4078,03	75	82	30	32	1995	2395	76	83
M	60	173	175	101,44	105,84	7	6	7	7	310	310	8	8
M	80	294	294	1172,16	1153,62	19	19	15	15	614	614	21	21
M	99	379	379	1996,60	2007,88	33	33	20	20	950	950	35	35
G	60	78	78	24,60	24,95	3	3	4	4	112	112	4	4
G	80	327	328	682,265	672,23	15	15	12	12	414	414	16	16
G	97	430	431	1426,84	1426,86	23	23	17	17	599	599	25	24

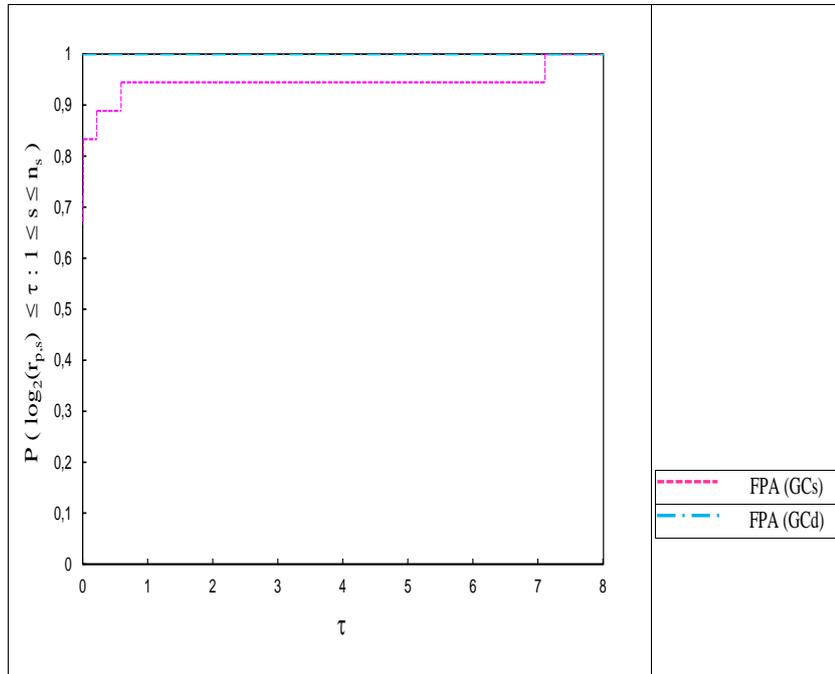
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.1: Perfil de desempenho do método ERL para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = 4$).



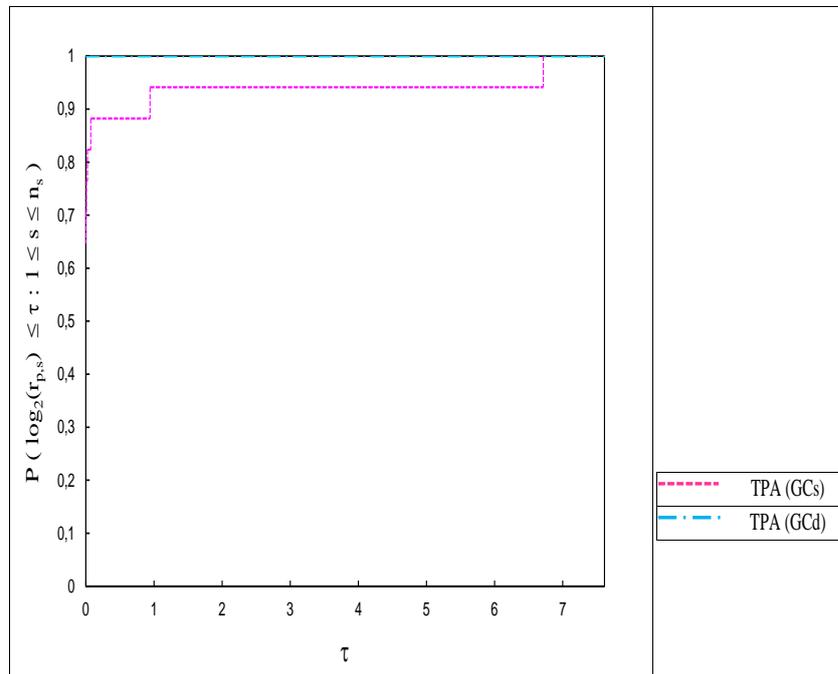
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.2: Perfil de desempenho do método FPA^* para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = 4$).



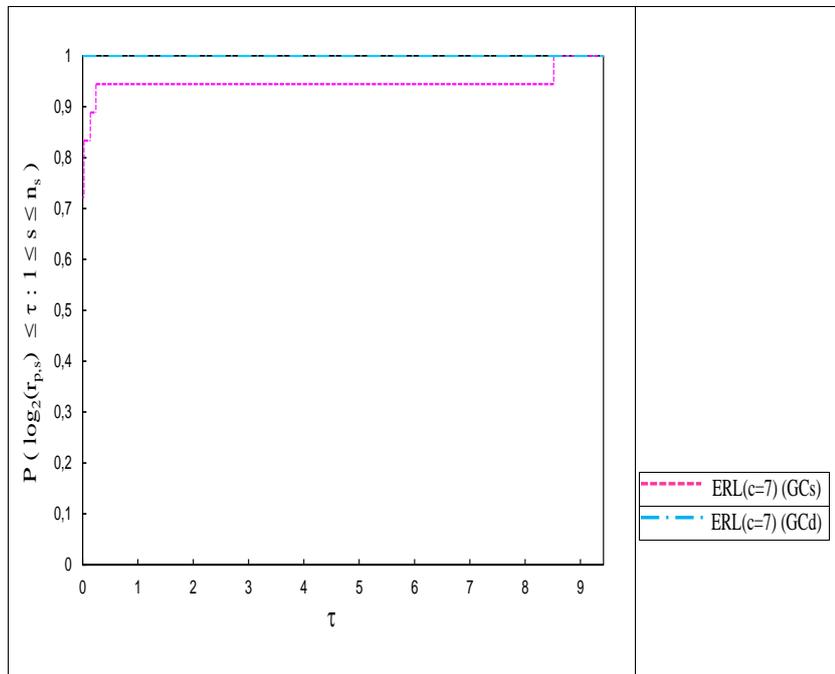
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.3: Perfil de desempenho do método TPA para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = 4$).



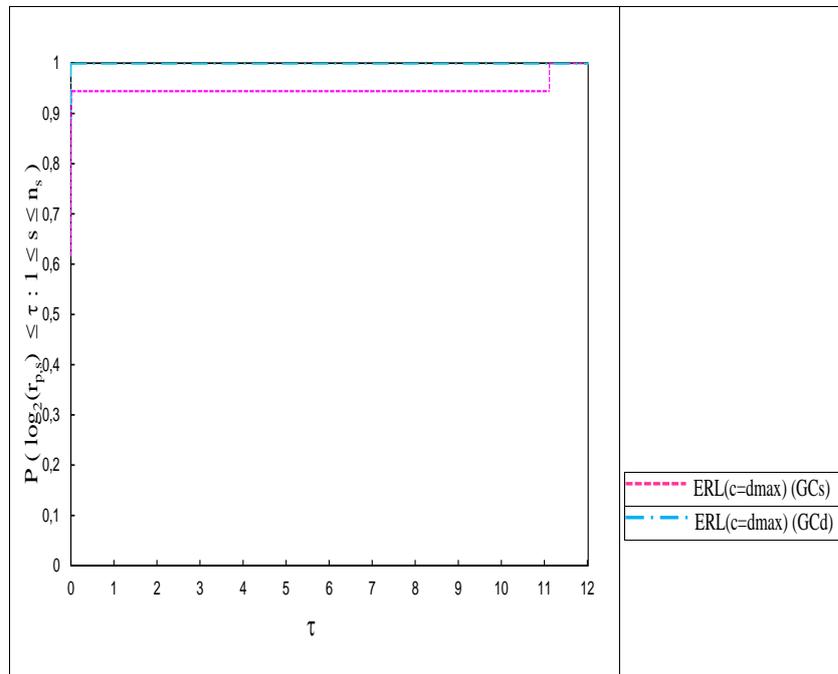
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.4: Perfil de desempenho do método ERL para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = 7$).



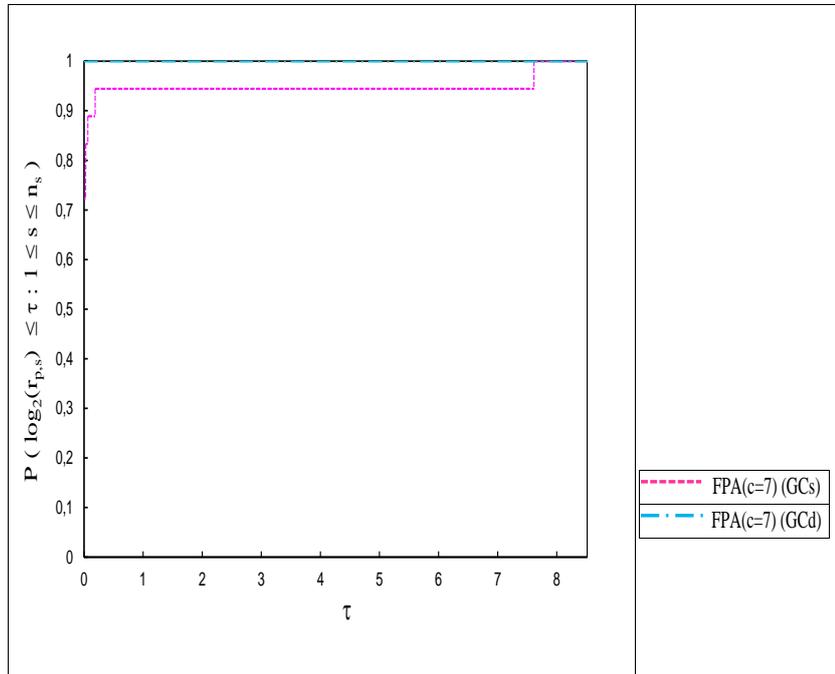
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.5: Perfil de desempenho do método ERL para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = d_{max}$).



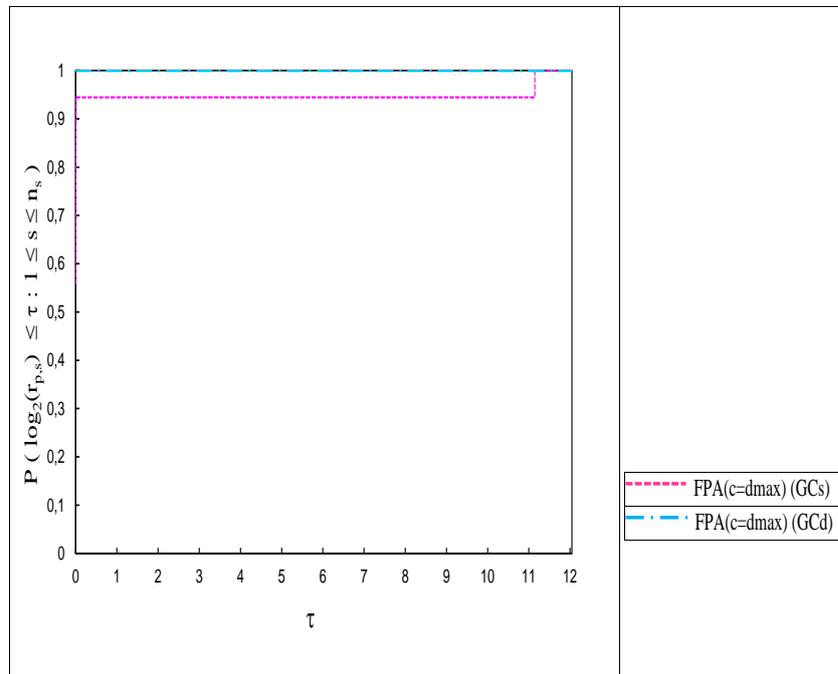
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.6: Perfil de desempenho do método FPA^* para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = 7$).



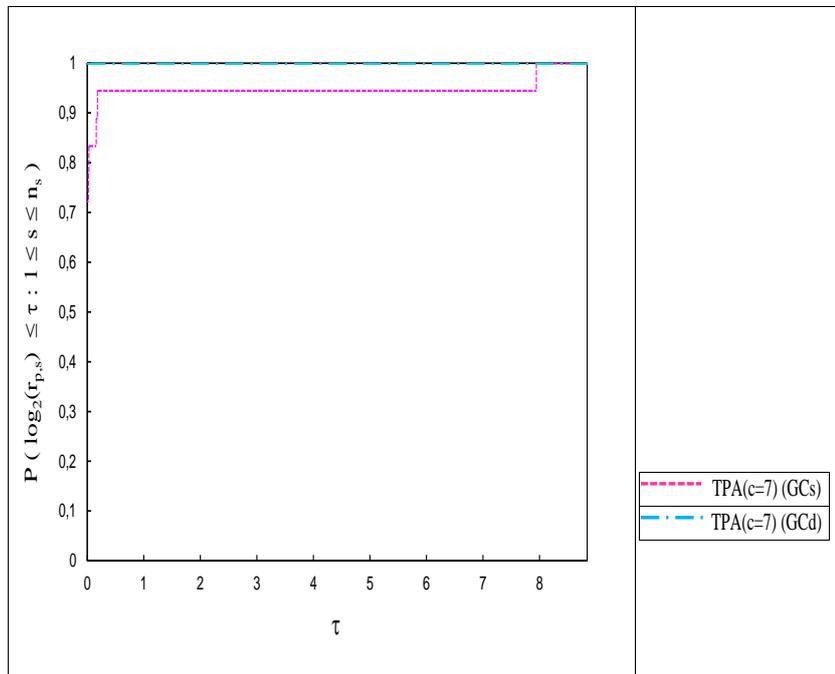
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.7: Perfil de desempenho do método FPA^* para GCd e GCs para o $PCEB_c^L-1D$ com relação a σ^2 ($c = d_{max}$).



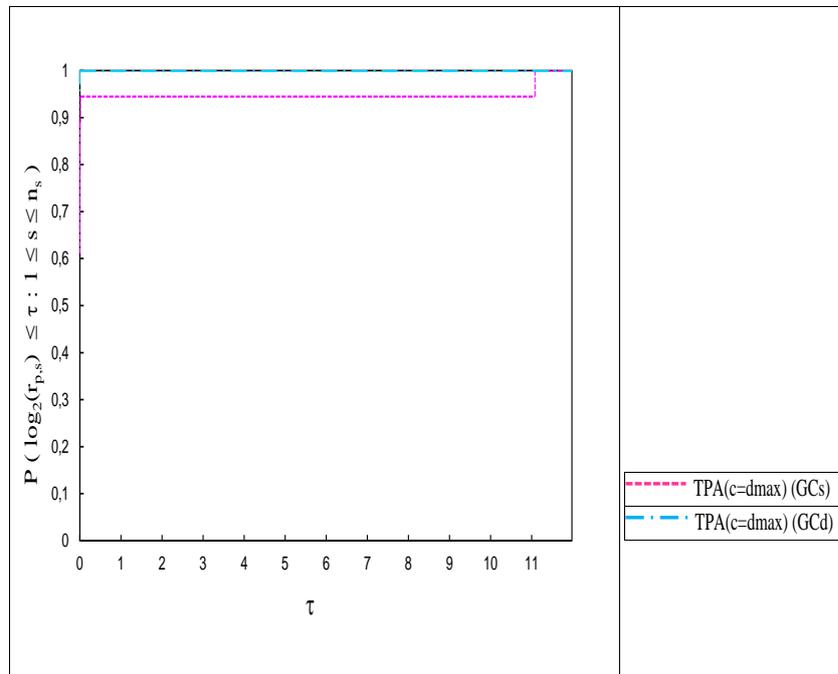
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.8: Perfil de desempenho do método TPA para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = 7$).



Fonte: Elaborado pela autora.

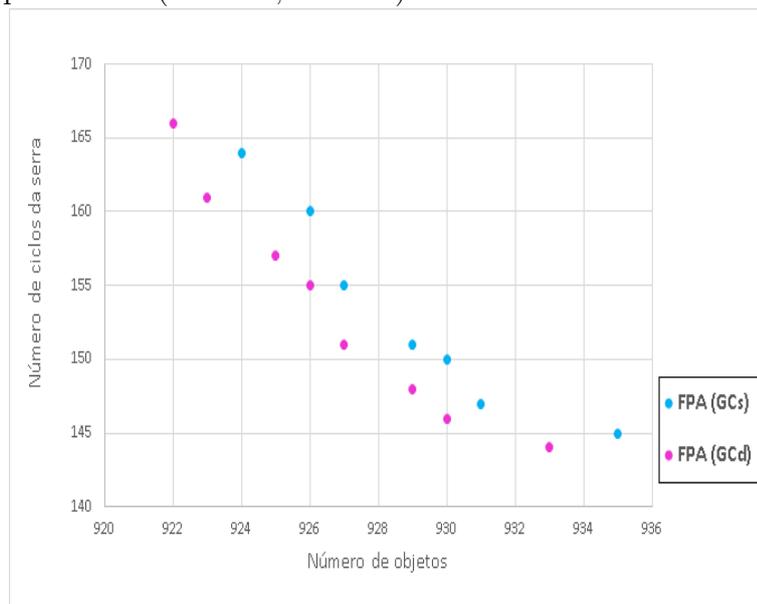
Figura 5.9: Perfil de desempenho do método TPA para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = d_{max}$).



Fonte: Elaborado pela autora.

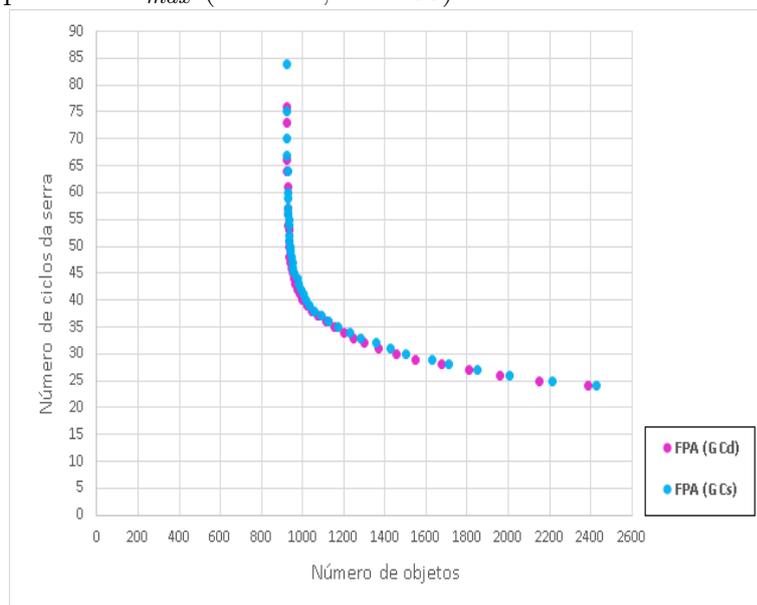
A Figura 5.10 apresenta as aproximações das fronteiras considerando a GCd e a GCs para $c = 7$ obtidas pelo método FPA^* . Observe que a fronteira obtida utilizando a GCd é mais inferior e possui um ponto não dominado a mais, ou seja, todos os pontos dominam os pontos da fronteira obtida utilizando a GCs, confirmando que a GCd resulta em uma aproximação melhor da fronteira. Para $c = d_{max}$ (Figura 5.11) pode-se notar que a aproximação da fronteira obtida pela GCd, apesar de parecer muito próxima da aproximação obtida pela GCs, obtém maior cardinalidade e hipervolume.

Figura 5.10: Aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelo método FPA^* utilizando a GCd e a GCs para $c = 7$ (classe P, $m = 60$).



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.11: Aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelo método FPA^* utilizando a GCd e a GCs para $c = d_{max}$ (classe P, $m = 60$).



Fonte: Elaborado pela autora.

Na comparação dos três métodos as amplitudes (σ_o^3 e σ_c^3) são omitidas pois os três métodos utilizaram exatamente os mesmos pontos lexicográficos. A Tabela 5.4 apresenta o número de colunas (coluna “n° colunas”) totais geradas, o tempo total gasto (coluna “Tempo total”) e o número de iterações (coluna “it (met)”) para cada método considerando $c = 4$ e $c = 7$. Para todas as instâncias nota-se que o FPA^* gerou a mesma quantidade ou mais colunas que os métodos ERL e TPA destacando-se nas instâncias com itens pequenos. Outra questão importante é o número de iterações que o método

TPA utiliza para obter uma aproximação da fronteira que chega a ser 9 vezes maior que o número de iterações do ERL e 6 vezes maior que o número de iterações do FPA^* .

Tabela 5.4: Resultados obtidos pelos métodos ERL , FPA^* e TPA para o $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4, 7$.

id item	m	c	nº colunas			Tempo total (s)			it (met)		
			ERL	FPA^*	TPA	ERL	FPA^*	TPA	ERL	FPA^*	TPA
P	40	4	134	136	134	641,14	643,70	1245,41	5	8	18
P	60	4	170	174	170	927,92	634,42	2271,91	5	6	24
P	80	4	191	198	191	686,91	754,79	2023,54	3	8	29
P	95	4	225	226	225	688,32	636,97	2022,69	3	6	29
P	40	7	154	154	154	2290,54	761,66	1787,79	13	10	26
P	60	7	178	178	178	2104,47	1093,70	2372,22	10	14	35
P	80	7	197	197	197	928,10	998,42	2082,42	5	12	30
P	95	7	248	251	245	931,85	697,53	2989,69	5	7	45
G	60	7	78	78	78	23,99	32,13	25,01	3	3	1
G	80	7	315	315	315	28,59	36,21	28,96	2	2	0
G	97	7	306	306	306	90,44	39,09	90,15	3	3	1

Fonte: Elaborado pela autora.

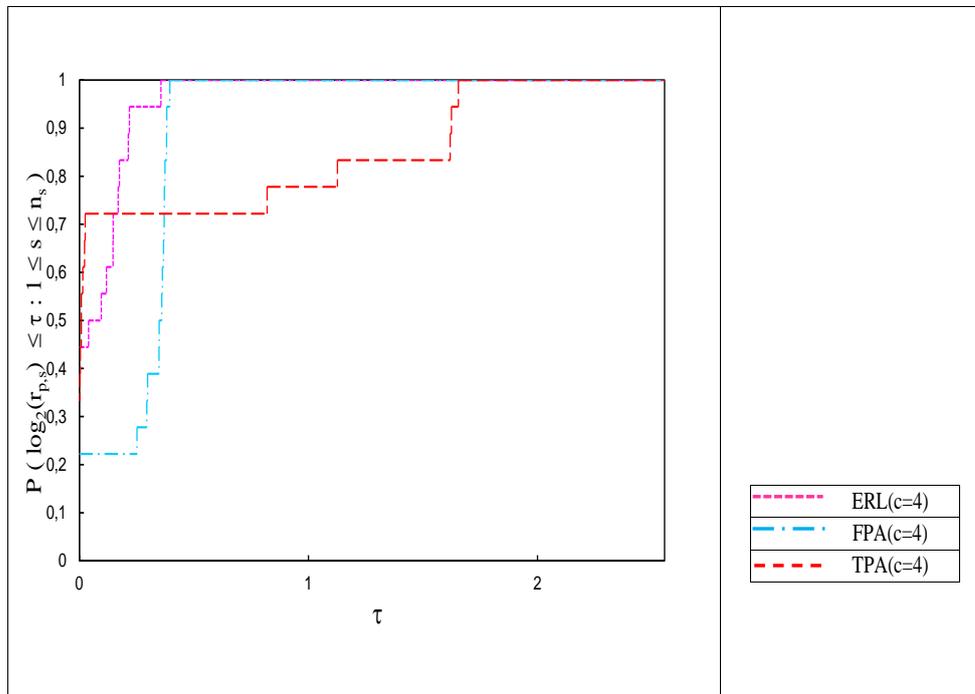
Nas Figuras 5.12 e 5.13 têm-se a comparação do tempo gasto por cada método através do perfil de desempenho. Para $c = 4$ o método ERL teve melhor desempenho em 45% das instâncias contra 22% para o FPA^* e 33% para o TPA , e os métodos ERL e FPA^* foram capazes de resolver todas as instâncias dentro de um fator menor que 2 do melhor desempenho obtido entre os três métodos, sendo esse fator bem próximo entre os métodos, enquanto que o TPA resolve todas as instâncias dentro de um fator próximo de 4. Para $c = 7$, o método ERL continua com um melhor desempenho em 68% das instâncias, porém o método FPA^* resolve todas as instâncias em um fator menor que 2, sendo o menor dentre os demais.

A comparação da qualidade da fronteira aproximada para $c = 4$ e $c = 7$ pode ser observada na Tabela 5.5 através dos valores das métricas σ^1 , σ^2 e σ^4 , respectivamente. O método TPA obteve uma melhor aproximação para quase todas as instâncias, com exceção da $(id, m, c) = (P, 40, 7)$, considerando que a cardinalidade (σ^1) e o hipervolume (σ^2) são maiores. Isso explica o maior número de iterações gasto pelo método e consequentemente o número elevado de subproblemas resolvidos, indicado pela métrica σ^4 que é igual ao número de iterações do método.

Os resultados para $c = d_{max}$ são exibidos na Tabela 5.6. Esse caso foi considerado com o objetivo de validar os algoritmos utilizados comparando os resultados desse estudo com os resultados obtidos em Aliano-Filho (2016), Aliano-Filho et al. (2021) que mostrou uma grande variedade de pontos não dominados para o problema $PCEB$ (objetos X *setup*). A Tabela 5.6 mostra que os três métodos obtiveram o mesmo número de colunas. Com relação ao tempo, o método TPA apresenta maior tempo na maior parte das instâncias e para as instâncias compostas por itens da classe P tem mais iterações para obter a aproximação da fronteira do que os outros dois métodos.

A Figura 5.14 apresenta o perfil de desempenho dos três métodos com relação ao tempo computacional, veja que o método ERL obteve melhor desempenho em 42% das instâncias contra 39% do FPA^* e 19% do TPA , porém o FPA^* resolve todas as instâncias

Figura 5.12: Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA^* e TPA para o $PCEB_c^L - 1D$ com GCd em relação ao tempo ($c = 4$).



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 5.5: Resultados obtidos pelos métodos ERL , FPA^* e TPA para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4, 7$ através das métricas σ^1 , σ^2 e σ^4 .

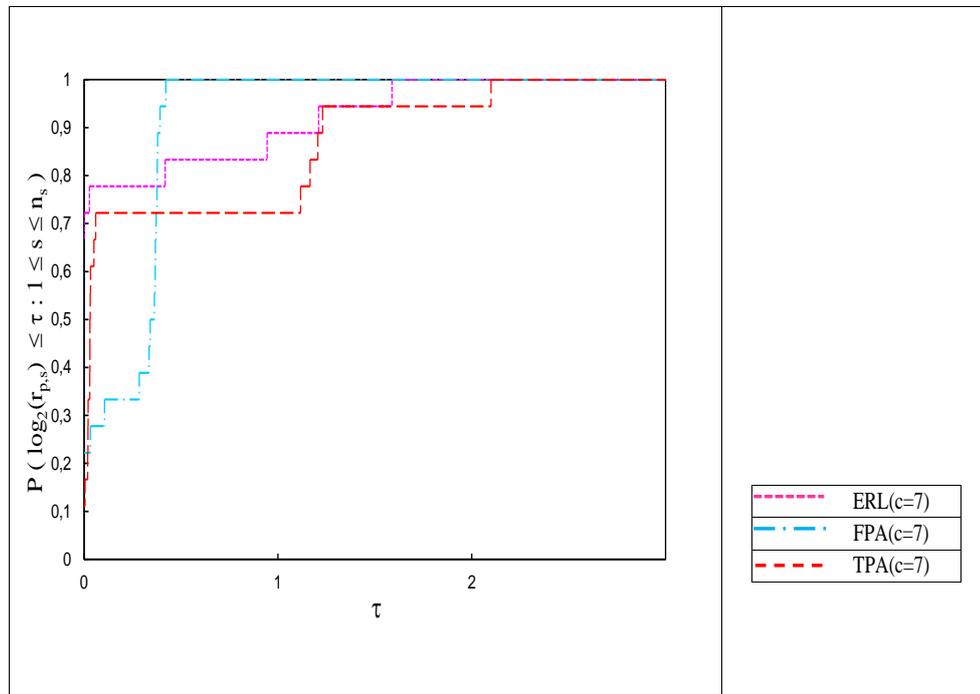
id item	m	c	σ^1			σ^2			σ^4		
			ERL	FPA^*	TPA	ERL	FPA^*	TPA	ERL	FPA^*	TPA
P	40	4	5	6	6	109	121	123	14	12	22
P	60	4	5	4	10	252	287	310	14	10	28
P	80	4	3	5	10	351	440	486	10	12	33
P	95	4	3	4	9	364	361	549	10	10	33
P	40	7	6	5	8	270	300	295	30	14	30
P	60	7	7	8	10	658	696	757	24	18	39
P	80	7	5	5	13	834	817	1006	14	16	34
P	95	7	4	4	14	1405	1237	1571	14	11	49
G	60	7	3	3	3	7	7	6	10	7	5
G	80	7	2	2	2	0	0	0	8	6	4
G	97	7	3	3	3	52	52	52	10	7	5

Fonte: Elaborado pela autora.

em um fator menor que 2 do melhor desempenho obtido entre os três métodos, sendo o menor fator.

A qualidade da fronteira obtida por cada método para $c = d_{max}$ pode ser analisada através dos resultados apresentados na Tabela 5.7. Note que a aproximação da fronteira obtida pelo FPA^* teve maior (ou igual) hipervolume em todas as instâncias, e com o

Figura 5.13: Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA^* e TPA para para o $PCEB_c^L - 1D$ com GCd em relação ao tempo ($c = 7$).



Fonte: Elaborado pela autora.

menor número de subproblemas resolvidos.

Tabela 5.6: Resultados obtidos pelos métodos ERL , FPA^* e TPA para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = d_{max}$.

id item	m	nº colunas			Tempo total (s)			it (met)		
		ERL	FPA^*	TPA	ERL	FPA^*	TPA	ERL	FPA^*	TPA
P	10	10	10	10	23,54	30,43	23,93	1	0	0
P	20	20	20	20	23,60	30,45	23,88	1	0	0
P	40	148	148	148	3164,51	1381,61	2117,83	31	28	38
P	60	178	178	178	3339,27	1906,62	3401,67	43	44	63
P	80	191	191	191	2969,49	1849,75	3020,45	46	48	63
P	95	240	240	240	3723,53	2200,61	4078,03	52	56	82
M	10	10	10	10	23,95	30,55	23,88	1	0	0
M	20	20	20	20	23,37	30,55	23,83	1	0	0
M	40	40	40	40	23,63	30,37	23,76	1	0	0
M	60	175	175	175	46,88	40,51	105,84	9	9	6
M	80	294	294	294	1595,46	1133,96	1153,62	20	26	19
M	99	379	379	379	3736,20	2268,57	2007,88	34	39	33
G	10	10	10	10	23,50	30,44	23,90	1	0	0
G	20	20	20	20	23,49	30,52	23,96	1	0	0
G	40	40	40	40	23,46	30,40	23,80	1	0	0
G	60	78	78	78	24,27	31,63	24,95	5	5	3
G	80	328	328	328	373,85	104,99	672,23	17	19	15
G	97	431	431	431	2605,68	1486,87	1426,86	26	30	23

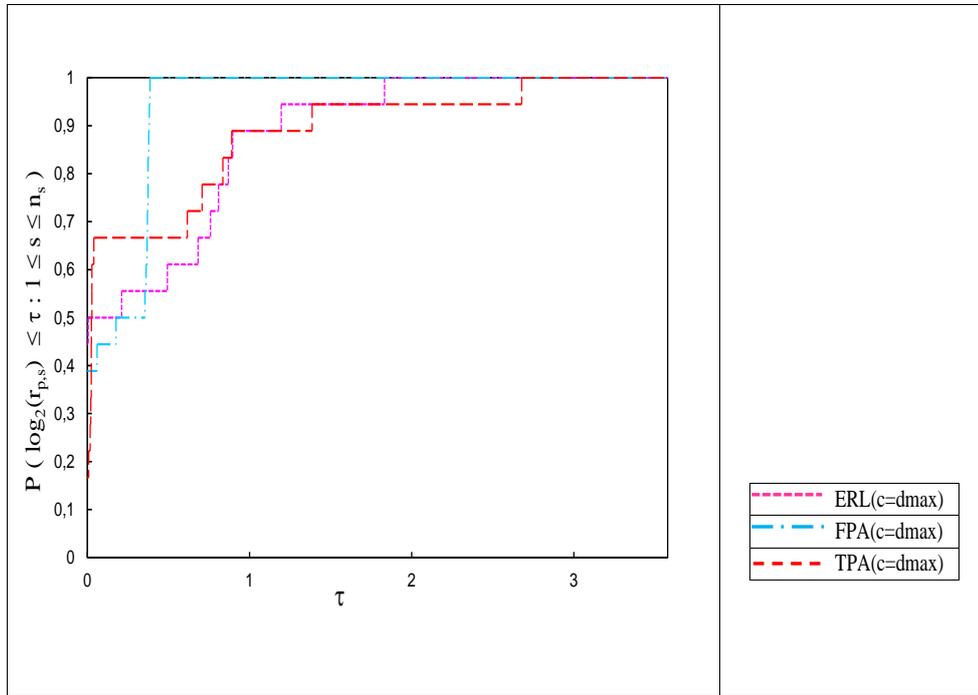
Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 5.7: Resultados obtidos pelos métodos ERL , FPA^* e TPA para o $PCEB_c^L - 1D$ e $c = d_{max}$, das métricas σ^1 , σ^2 e σ^4 .

id item	m	σ^1			σ^2			σ^4		
		ERL	FPA^*	TPA	ERL	FPA^*	TPA	ERL	FPA^*	TPA
P	10	1	1	1	0	0	0	6	4	4
P	20	1	1	1	0	0	0	6	4	4
P	40	23	22	18	26421	26455	26324	66	32	42
P	60	33	36	26	99201	99201	98855	90	48	67
P	80	39	39	30	90968	91006	90641	96	52	67
P	95	42	41	32	180792	180827	180337	108	60	86
M	10	1	1	1	0	0	0	6	4	4
M	20	1	1	1	0	0	0	6	4	4
M	40	1	1	1	0	0	0	6	4	4
M	60	9	9	7	1831	1831	1787	22	13	10
M	80	20	21	15	10698	10751	10529	44	30	23
M	99	27	28	20	29802	29884	29340	72	43	37
G	10	1	1	1	0	0	0	6	4	4
G	20	1	1	1	0	0	0	6	4	4
G	40	1	1	1	0	0	0	6	4	4
G	60	5	5	4	271	271	270	14	9	7
G	80	17	17	12	5092	5093	5037	38	23	19
G	97	22	24	17	12053	12142	11961	56	34	27

Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.14: Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA^* e TPA para o $PCEB_c^L-1D$ com GCd em relação ao tempo ($c = d_{max}$).



Fonte: Elaborado pela autora.

Para finalizar a comparação dos métodos selecionamos apenas as instâncias que apresentaram maior diferença no desempenho das métricas, analisando os indicadores de qualidade σ^5 e σ^6 . Esses resultados podem ser vistos na Tabela 5.8. Pode-se concluir que o método FPA^* obteve o maior número de pontos não dominados por tempo de execução e por subproblema em mais de 80% das instâncias. Portanto o método FPA^* se mostrou o método mais adequado comparado aos métodos ERL e TPA considerando as seis métricas de comparação utilizadas e mesmo nos casos em que o tempo computacional não foi o menor obteve-se maior hipervolume, resultando em uma melhor aproximação da fronteira.

A Figura 5.15 apresenta as aproximações das fronteiras obtidas pelos três métodos considerando $c = 7$, note que a fronteira obtida pelo método FPA possui alguns pontos que dominam pontos das outras duas fronteiras, porém o TPA obtém mais pontos não dominados, assim obtendo um hipervolume maior. A Figura 5.16 ilustra as aproximações da fronteira obtida pelos três métodos para $c = d_{max}$. Veja que a aproximação da fronteira obtida pelo método FPA^* é melhor que as aproximações obtidas pelos métodos ERL e TPA , obtendo maior cardinalidade mesmo a cardinalidade sendo menor.

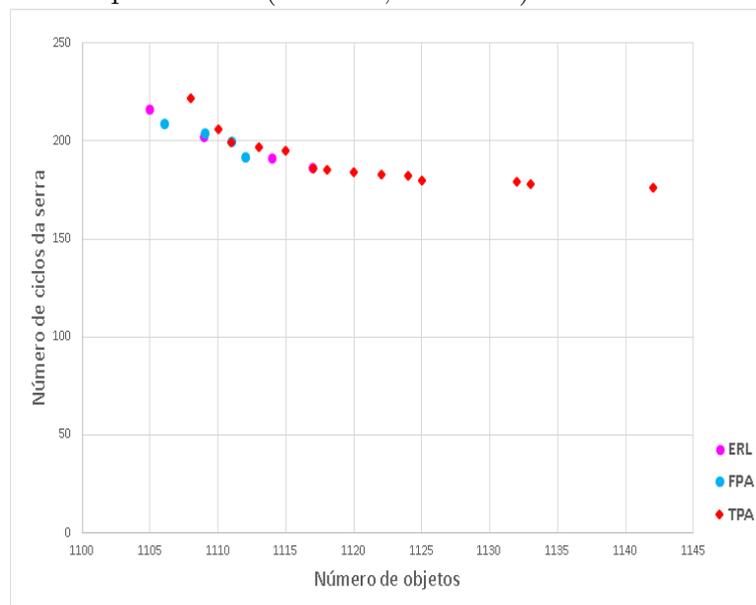
Com os resultados apresentados nessa seção, conclui-se que a GCd resultou em aproximação melhor da fronteira de Pareto para todos os métodos estudados. Mostrou que a capacidade da serra influencia diretamente na cardinalidade da fronteira, quanto maior a capacidade da serra mais pontos não dominados são obtidos. E para o caso em que $c = d_{max}$, os resultados foram próximos aos resultados encontrados na literatura (ALIANO-FILHO, 2016; ALIANO-FILHO; MORETTI; PATO, 2018; ALIANO-FILHO et al., 2021). Por fim, concluiu-se que o método FPA^* obteve melhor desempenho comparado aos métodos

Tabela 5.8: Resultados obtidos pelos métodos ERL , FPA^* e TPA para o $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4, 7, d_{max}$, das métricas σ^5 e σ^6 .

id item	m	c	σ^5			σ^6		
			ERL	FPA^*	TPA	ERL	FPA^*	TPA
P	40	4	0,008	0,009	0,005	0,357	0,500	0,273
P	60	4	0,005	0,006	0,004	0,357	0,400	0,357
P	80	4	0,004	0,008	0,005	0,300	0,417	0,303
P	95	4	0,004	0,006	0,004	0,300	0,400	0,273
P	40	7	0,003	0,007	0,004	0,200	0,357	0,267
P	60	7	0,003	0,007	0,004	0,292	0,444	0,256
P	80	7	0,005	0,005	0,006	0,357	0,312	0,382
P	95	7	0,004	0,006	0,005	0,286	0,364	0,286
P	40	d_{max}	0,007	0,016	0,008	0,348	0,687	0,429
P	60	d_{max}	0,010	0,019	0,008	0,367	0,750	0,388
P	80	d_{max}	0,013	0,021	0,010	0,406	0,750	0,448
P	95	d_{max}	0,011	0,019	0,008	0,389	0,683	0,372
M	60	d_{max}	0,192	0,222	0,066	0,409	0,692	0,700
M	80	d_{max}	0,012	0,018	0,013	0,454	0,700	0,652
M	99	d_{max}	0,007	0,012	0,010	0,375	0,651	0,540
G	60	d_{max}	0,206	0,158	0,160	0,357	0,556	0,571
G	80	d_{max}	0,045	0,162	0,018	0,447	0,739	0,632
G	97	d_{max}	0,008	0,016	0,012	0,393	0,706	0,630

Fonte: Elaborado pela autora.

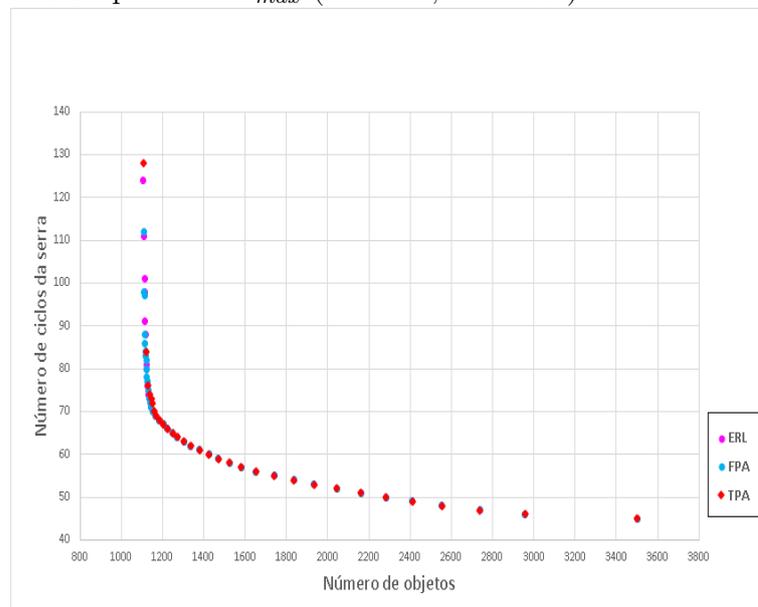
Figura 5.15: Aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelos métodos FPA^* , ERL e TPA utilizando a GCd para $c = 7$ (classe P, $m = 100$).



Fonte: Elaborado pela autora.

ERL e TPA . Portanto, para o PCE bidimensional, seleciona-se $c = 7, d_{max}$ e são feitos apenas alguns testes preliminares para reforçar a importância da GCd.

Figura 5.16: Aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelos métodos FPA^* , ERL e TPA utilizando a Gcd para $c = d_{max}$ (classe P, $m = 100$).



Fonte: Elaborado pela autora.

5.2 Estudo computacional $PCEB_c^L$ -2D

Nessa seção apresenta-se os resultados do estudo computacional para avaliar o desempenho dos métodos ERL , FPA^* e TPA para resolver o $PCEB_c^L - 2D$. Este estudo está dividido em três etapas: a Etapa 1 tem como objetivo analisar a influência de quatro fatores que estão diretamente ligados ao desempenho dos métodos: os formatos dos itens (id), o número de diferentes tipos de itens (m), o tempo de execução do *subpricing* na geração de colunas e o valor da capacidade da serra. A partir dos resultados da Etapa 1, um novo conjunto de instâncias é gerado a partir dos parâmetros estudados para seguir com as Etapas 2 e 3. Os testes desta etapa são realizados utilizando o ERL . A Etapa 2 avalia as quatro variações do FPA^* para determinar qual é a mais adequada para ser utilizada na comparação dos três métodos. E por fim na Etapa 3 apresenta o desempenho dos três métodos (ERL , FPA^* e TPA) para determinar qual é o mais adequado para o $PCEB_c^L - 2D$ considerando as métricas de comparação e o tempo computacional.

Os Algoritmos 5, 6 e 7 foram implementados em Julia com o auxílio do pacote JuMP (Versão 0.6.3.1) (JULIA, 2018), e os subproblemas foram resolvidos pelo CPLEX versão 12.6.1 (IBM, 2014). Os testes preliminares com relação a variação do id (formato e tamanho) dos itens e a variação de m na Etapa 1 foram executados em um computador com processador Intel Core i3-4210 (1.70GHz), 4 GB de RAM, sob Sistema Operacional Windows de 64 bits. Porém, para algumas instâncias, essa capacidade de memória não foi suficiente. Portanto, as demais simulações foram executadas em um computador com processador Intel Core i7-3770 (3.40GHz), 12 GB de RAM, sob Sistema Operacional Windows de 64 bits.

Na Seção 5.2.1 é apresentada a metodologia utilizada na geração das instâncias que são usadas nas Etapas 1, 2 e 3. Na Seção 5.2.2 são apresentados os resultados e discussões.

5.2.1 Descrição das instâncias

As instâncias para o PCE-2D foram geradas utilizando o gerador 2DCPackGen proposto em Silva, Oliveira e Wäscher (2014). O 2DCPackGen foi proposto para gerar diferentes tipo de problemas de corte e empacotamento retangular bidimensional definidos de acordo com a tipologia proposta por Wäscher, Haußner e Schumann (2007) identificando os parâmetros relevantes do problema. O gerador usado é baseado na amostragem de uma distribuição de probabilidade contínua com função de densidade de probabilidade, conhecida como distribuição beta, de acordo com as dimensões mínimas e máximas do objeto e dos itens. De acordo com as variações dos parâmetros α e β da distribuição beta obtêm-se diferentes formas e tamanhos para o objeto e os itens, representados por um número de identificação (id) conforme resumido na Tabela 5.9.

Os parâmetros necessários para gerar as instâncias no 2DCPackGen são:

- dimensão do problema;
- id do tipo de problema (nesse estudo temos $id = 10$ que representa o Single Stock Size Cutting Stock Problem (SSSCSP));
- semente (número inteiro menor que 2.147.483.647);
- número de instâncias;
- tamanhos mínimo e máximo para as dimensões (L, W) do objeto;

Tabela 5.9: Formatos e tamanhos para o objeto e os itens no gerador 2DCPackGen (SILVA; OLIVEIRA; WÄSCHER, 2014).

id	Formato
1	Pequeno e quadrado
2	Longo e estreito
3	Comp. Médio e estreito
4	Pequeno e quadrado ou Longo e estreito
5	Curto e alto
6	Grande e quadrado
7	Comp. Médio e alto
8	Curto e alto ou Longo e alto
9	Curto e altura média
10	Longo e altura média
11	Tamanho médio e quadrado
12	Curto e altura média ou Longo e altura média
13	Curto e estreito ou Curto e alto
14	Longo e estreito ou Longo e alto
15	Comp. Médio e estreito ou Comp. Médio e alto
16	Pequeno e quadrado ou Curto e alto ou Longo e estreito ou Grande e quadrado

Fonte: Elaborado pela autora.

- tamanhos mínimo e máximo para as dimensões (l, w) dos itens;
- id dos itens;
- id do objeto;
- números mínimo e máximo de diferentes tipos de itens (m) ;
- números mínimo e máximo para a demanda (d) de cada tipo de item;
- id da distribuição beta para m ;
- id da distribuição beta para d .

Em Martello e Vigo (1998) é proposto um gerador de instâncias para problemas de empacotamento retangular, onde o comprimento e a largura dos objetos são fixados em 100 e quatro tipos de itens são considerados de acordo com a relação entre as dimensões dos itens e dos objetos. Assim como no gerador 2DCPackGen, a distribuição de probabilidade uniforme é utilizada para gerar o comprimento e a largura dos itens. A Tabela 5.10 ilustra os formatos e tamanho dos itens, na coluna “id (S)” apresenta o *id* correspondente aos formatos considerados no 2DCPackGen.

Em Rangel e Figueiredo (2008), Figueiredo (2006) são discutidas características do PCE-2D no contexto de indústria de móveis do pólo moveleiro de Votuporanga-SP. É feita uma classificação das dimensões dos itens relativa às dimensões do objeto, os itens

Tabela 5.10: Formatos e tamanhos para os itens de acordo com Martello e Vigo (1998) e a correspondência com o gerador 2DCPackGen.

Tipo	intervalo	formato	id (S)
1	$\frac{2}{3L} \leq l_i \leq L$ e $1 \leq w_i \leq \frac{1}{2W}$	longo e curto	14
2	$1 \leq l_i \leq \frac{1}{2L}$ e $\frac{2}{3W} \leq w_i \leq W$	alto e estreito	8
3	$\frac{1}{2L} \leq l_i \leq L$ e $\frac{1}{2W} \leq w_i \leq W$	quadrado e longo	6
4	$1 \leq l_i \leq \frac{1}{2L}$ e $1 \leq w_i \leq \frac{1}{2W}$	quadrado e pequeno	1

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 5.11: Classificação das dimensões w_i e l_i em função de W e L (FIGUEIREDO, 2006).

Classificação com relação ao Comprimento (idem para Largura)	
$\left\lfloor \frac{L}{l_i} \right\rfloor < 2$	l_i é uma dimensão grande (grd)
$3 \leq \left\lfloor \frac{L}{l_i} \right\rfloor \leq 7$	l_i é uma dimensão média (med)
$8 \leq \left\lfloor \frac{L}{l_i} \right\rfloor \leq 10$	l_i é uma dimensão pequena (peq)
$3 < \left\lfloor \frac{L}{l_i} \right\rfloor$	l_i é uma dimensão muito pequena (mpq)

Fonte: Elaborado pela autora.

são classificados como: grande, médio, pequeno e muito pequeno, conforme a Tabela 5.2.1.

Na Tabela 5.12 apresenta-se a reclassificação das instâncias usadas em Figueiredo (2006) de acordo com os ids definidos por Silva, Oliveira e Wäscher (2014). A coluna “Classificação F” apresenta a classificação dada por Figueiredo (2006), na coluna “id (F e S)” relaciona-se os ids com a classificação F, e na coluna “id (S e MV)” relaciona-se os ids com a classificação dada em Martello e Vigo (1998). Observe que os ids mais frequentes nas duas classificações são: 1, 10, 11, 14, 15. Os objetos são classificados com id=10. Essa classificação é utilizada para guiar a escolha dos parâmetros necessários no gerador 2DCPackGen.

Martin (2019) utiliza o 2DCPackGen para gerar o conjunto de instâncias usado no estudo computacional desenvolvido, para avaliar o modelo M1 (LODI; MONACI, 2003). O conjunto de instâncias gerado pelo autor foi baseado nos seguintes parâmetros:

- dimensões mínima e máxima dos objetos: 100 e 200;
- dimensões mínima e máxima dos itens: 25 e 100;
- formato id dos objetos (os): 2 e 6;
- formato id dos itens (is): 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12 e 16;

- número de tipos de itens (m): 10, 20 e 40.

Tabela 5.12: Classificação das Instâncias da indústria.

Instâncias da indústria							Classificação F		Classificação S	
<i>L</i>	<i>W</i>	Instancia	nº itens	<i>l</i>	<i>w</i>	<i>d</i>	class <i>l</i>	class <i>w</i>	id (F e S)	id (S e MV)
2750	1830	P1-03	3	710	535	320	med	med	11	1
				1062	530	320	grd	med	10	1
				647	453	960	med	med	11	1
2750	1830	P1-09	3	630	50	480	med	mpeq	15	1
				433	50	320	med	mpeq	15	1
				295	50	480	peq	mpeq	13	1
2750	1830	P1-12	6	440	65	320	med	mpeq	15	1
				635	50	160	med	mpeq	15	1
				454	180	960	med	peq	15	1
				635	180	480	med	peq	15	1
				454	135	640	med	mpeq	15	1
				635	135	320	med	mpeq	15	1
2750	1830	P1-15	7	970	570	320	grd	med	10	1
				700	75	160	med	mpeq	15	1
				700	212	480	med	peq	15	1
				700	163	320	med	mpeq	15	1
				600	400	0	med	med	11	1
				430	60	0	med	mpeq	15	1
				500	60	0	med	mpeq	15	1
2750	1830	P2-03	8	2500	565	240	grd	med	14	14
				647	453	160	med	med	11	1
				710	454	80	med	med	11	1
				454	454	80	med	med	11	1
				1080	454	200	grd	med	14	1
				530	454	200	med	med	11	1
				1050	500	40	grd	med	14	1
				483	215	80	med	peq	15	1
				510	450	40	med	med	11	1
				630	50	0	med	mpeq	15	1
2750	1830	P2-09	4	433	50	0	med	mpeq	15	1
				295	50	0	med	mpeq	15	1
				295	50	0	peq	mpeq	13	1
2750	1830	P2-12	3	454	180	320	med	peq	15	1
				635	180	160	med	peq	15	1
				454	135	0	med	mpeq	15	1
2750	1850	P2-15	9	1049	452	200	grd	med	10	1
				499	452	200	med	med	11	1
				452	429	80	med	med	11	1
				1050	535	80	grd	med	10	1
				535	500	80	med	med	11	1
				535	430	80	med	med	11	1
				700	212	160	med	peq	15	1
				430	60	0	med	mpeq	15	1
				500	60	0	med	mpeq	15	1
2750	1830	P2-20	9	2500	60	480	grd	mpeq	14	14
				445	60	480	med	mpeq	15	1
				445	40	1040	med	mpeq	15	1
				490	60	40	med	mpeq	15	1
				500	60	120	med	mpeq	15	1
				1050	60	200	grd	mpeq	14	1
				430	60	120	med	mpeq	15	1
				440	60	160	med	mpeq	15	1
				1060	60	80	grd	mpeq	14	1
				430	60	80	med	mpeq	15	1
2750	1830	P2-25	3	500	60	160	med	mpeq	15	1
				500	60	160	med	mpeq	15	1
				1050	60	160	grd	mpeq	14	1

Fonte: Elaborado pela autora.

Na Tabela 5.13 são apresentados os parâmetros usados para gerar cinco conjuntos de instâncias. A construção do conjunto de instâncias A foi baseado em Martin (2019), para os intervalos das dimensões do objeto e dos itens, na classificação das instâncias da indústria para o id do objeto (id=10), considerando 16 tipos de itens.

Tabela 5.13: Conjunto de instâncias do ($PCEB_c^L$)-2D utilizadas no estudo computacional.

Conjunto de Instâncias					
Parâmetros	A	B	C	D	E
id(o)	10	10	10	10	10
id(i)	1 ao 16	1, 3 e 6	1	1, 3, 6, 11 e 14	1, 3, 6, 11 e 14
m	10	10, 20, 30, 40, 50, 60 e 100	20, 30, 50 e 100	100	20, 30, 50 e 100
L e W	[100,200]	[100,200]	[100,200]	[100,200]	[100,200]
l e w	[25,100]	[25,100]	[25,100]	[25,100]	[25,100]
d	[10,200]	[10,200]	[10,200]	[10,200]	[10,200]
c	7	7	1, 2, 4, 7 e d_{max}	7	7 e d_{max}

Fonte: Elaborado pela autora.

O conjunto de instâncias B foi definido após uma análise de resultados para as instâncias do conjunto A. Selecionou-se o pior e o melhor caso considerando a cardinalidade ($id = 1$ e 3) e o tempo computacional ($id = 6$). Para cada id é feita a variação de m no conjunto $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 100\}$. A construção do conjunto de instâncias C foi feita através do pior caso considerando o tempo computacional e a dificuldade na GC ($id = 1$) na análise de resultados para o conjunto B. Para $id = 1$ considera-se m variando no conjunto $\{20, 30, 50, 100\}$ e a capacidade da serra variando no conjunto $\{1, 2, 4, 7, d_{max}\}$. A construção do conjunto de instâncias D foi feita através da composição dos ids considerados no conjunto B e a classificação das instâncias de Figueiredo (2006), apresentadas na Tabela 5.12. Assim considera-se os ids 1 (pequeno e quadrado), 3 (comprimento médio e estreito), 6 (grande e quadrado), 11 (tamanho médio e quadrado) e 14 (longo e estreito ou longo e alto), com $m = 100$. E por fim o conjunto E é construído a partir do conjunto D, variando o valor de m . As instâncias são nomeadas de acordo com o id(número) que representa o formato do item.

5.2.2 Resultados e discussão

Na Etapa 1, limita-se o tempo de execução e o *gap* dos subproblemas *pricing* em 5 segundos e 0,1 (os demais subproblemas em 60 segundos e 0,0001). Ao realizar o estudo da variação do limite de tempo do subproblema *pricing* na Etapa 1, atualiza-se o limite de tempo para 15 segundos para a comparação dos diferentes valores de capacidade e para a comparação dos métodos realizada nas Etapas 2 e 3.

Etapa 1: Análise dos parâmetros

O primeiro fator a ser analisado é a influência do formato dos itens no desempenho do método *ERL*. Nas simulações computacionais, foi aplicado o método *ERL* considerando a GCs (Tabela 5.14) e a GCd (Tabela 5.15) usando o conjunto A. Nessas tabelas, são descritos: o número de iterações da GCa (*itGCa*), número de colunas geradas em cada passo (GCa, para $GCd = 0$) e (*a priori*, *lex* e *ER* para $GCd = 1$), o tempo computacional gasto em cada etapa do algoritmo (Tempo GCa, Tempo *lex* e Tempo *ER*), Tempo total, número de iterações (*itER*) e a cardinalidade da aproximação da fronteira (σ^1). A aproximação da fronteira obtida pelo método *ERL* (GCs) foi similar para todos os tipos de itens considerando a cardinalidade (σ^1). Há uma pequena variação para as instâncias 1, 3 e 13 com maior cardinalidade ($\sigma^1 = 3$). É importante também analisar o tempo total gasto na obtenção da aproximação da fronteira. Nesse aspecto, nota-se que o tempo gasto na execução da instância 1 (maior tempo) é cerca de 4 vezes maior que o tempo gasto na execução da instância 6 (menor tempo). Como o formato dos itens na instância 1 é pequeno e quadrado, espera-se que o tempo gasto para realizar a GC seja maior que o tempo na instância 6, cujo os itens têm formato grande e quadrado. Isso pode ser comprovado observando a coluna referente ao Tempo GCa. Note também que a geração de colunas é responsável pela maior parte do tempo gasto pelo método, variando entre 19% e 74% do tempo total. Isso mostra a dificuldade em obter padrões de corte bidimensional, indicando que o modelo utilizado no subproblema *pricing* é fundamental para um bom desempenho do método. Para o caso em que a GCd é realizada, considerando a cardinalidade da fronteira mostrada na Tabela 5.15, conclui-se que os resultados são semelhantes quando comparados aos resultados da GCs. Para avaliar melhor a GCd, foram selecionadas as instâncias 1, 3, 6 e 13 para comparar os resultados considerando as métricas σ^2 , σ_o^3 e σ_c^3 apresentadas na Tabela 5.16. Observa-se que ao realizar a GCd a cardinalidade é reduzida nas instâncias 3 e 6, o que não significa que a aproximação da fronteira obtida considerando GCd é pior que para a GCs, pois o hipervolume (σ^2) para a GCd é maior, resultando em uma aproximação melhor. Apesar de ocorrer um aumento do tempo gasto ao considerar a GCd, nota-se uma melhora dos resultados para o hipervolume, principalmente para a instância 3. Isso pode ser analisado em todas as instâncias onde o aumento do tempo é inferior a 50% quando comparado com o tempo no caso da GCs, com exceção da instância 1 que obteve um aumento de aproximadamente 107%. Isto indica a necessidade de analisar a GCd considerando instâncias com maior número de itens ($m > 10$).

Tabela 5.14: Resultados obtidos pelo método ERL(GCs) para o ($PCEB_c^L - 2D$) considerando 16 tipos de itens, $m = 10$.

id _{item}	m	itGCa (total)	n ^o colunas <i>a priori</i>	Total	Tempo GCa (s)	Tempo lex (s)	Tempo ER (s)	Tempo total (s)	itERL	σ^1
1	10	50	39	39	88,374	18,849	33,411	140,635	3	3
2	10	32	25	25	12,914	16,355	9,187	38,456	2	2
3	10	26	19	19	12,94	15,918	8,13	36,988	3	3
4	10	47	36	36	41,391	17,551	9,853	68,795	2	2
5	10	33	31	31	12,576	16,796	9,268	38,64	2	2
6	10	20	19	19	5,793	15,997	8,161	29,951	2	2
7	10	28	23	23	8,19	16,044	8,128	32,361	2	2
8	10	28	23	23	9,089	16,106	8,472	33,667	2	2
9	10	40	36	36	38,803	17,032	9,941	65,776	2	2
10	10	25	22	22	7,947	15,865	8,229	32,041	1	1
11	10	44	37	37	17,816	17,201	9,142	44,159	2	2
12	10	45	32	32	21,514	16,296	8,838	46,648	2	2
13	10	50	35	35	79,385	16,924	10,395	106,704	3	3
14	10	42	33	33	10,836	15,946	7,893	34,676	1	1
15	10	37	30	30	23,755	16,798	8,924	49,477	2	2
16	10	52	33	33	15,957	16,999	9,487	42,442	2	2

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 5.15: Resultados obtidos pelo método ERL(GCd) para o $(PCEB_c^L - 2D)$ considerando 16 tipos de itens, $m = 10$.

id _{item}	m	n° iterações(total)		n° colunas		Tempo GCa (s)	Tempo lex (s)	Tempo ER (s)	Tempo total (s)	itER $\sigma^1(Z)$					
		itGCa	itGClex	apriori	lex						Total	ER			
1	10	50	11	3	8	39	8	0	47	87,58	84,207	120,04	291,826	3	3
2	10	32	11	1	4	25	4	0	29	13,033	20,423	8,065	41,521	1	1
3	10	26	20	10	4	19	4	0	23	12,871	23,745	11,268	47,884	2	2
4	10	47	13	2	5	36	5	0	41	39,717	40,968	11,978	92,663	2	2
5	10	33	11	2	5	31	5	0	36	12,59	22,798	10,997	46,384	2	2
6	10	20	7	1	3	19	3	0	22	5,853	16,639	8,004	30,496	1	1
7	10	28	7	2	3	23	3	0	26	8,331	17,301	8,307	33,938	2	2
8	10	28	10	1	3	23	3	0	26	9,058	18,659	8,059	35,776	1	1
9	10	40	13	3	7	36	7	1	44	38,894	43,428	24,802	107,123	2	2
10	10	25	9	1	3	22	3	0	25	8,147	18,25	7,964	34,36	1	1
11	10	44	8	2	1	37	1	0	38	17,696	22,833	10,343	50,872	2	2
12	10	45	4	2	0	32	0	0	32	29,502	19,795	13,704	63,001	2	2
13	10	50	13	3	6	35	6	0	41	90,288	49,483	16,737	156,507	3	3
14	10	42	4	1	0	33	0	0	33	10,624	16,815	8,186	35,625	1	1
15	10	37	4	2	0	30	0	0	30	24,264	18,477	9,445	52,186	2	2
16	10	52	20	10	3	33	3	0	36	15,272	23,677	12,203	51,152	2	2

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 5.16: Método ERL (GCs X GCd) para itens nos formatos 1, 3, 6 e 13.

id item	n ^o colunas		Tempo total		σ^1		σ^2		σ_o^3		σ_c^3	
	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd
1	39	47	140,635	291,826	3	3	3	4	2	2	4	3
3	19	23	36,988	47,884	3	2	2	11	2	1	3	1
6	19	22	29,951	30,496	2	1	0	1	1	0	1	0
13	35	41	106,704	156,507	3	3	5	6	2	2	6	5

Fonte: Elaborado pela autora.

Os resultados obtidos para GCs e GCd exibidos na Tabela 5.17 considerando o conjunto B, mostraram, de modo geral, que para $m = 20$ e 30 a cardinalidade da aproximação da fronteira é maior, sendo o maior impacto na instância 3. Há um aumento na cardinalidade da aproximação da fronteira à medida que m aumenta. Nas instâncias 1 e 3, dependendo do valor de m , a matriz de padrões se mantém na matriz inicial, ou seja, o conjunto de padrões utilizados no método ERL são os homogêneos, concluindo que novas colunas não estão sendo geradas. Os resultados obtidos com o conjunto de instâncias B indicam que a variação de m no conjunto $\{20, 30, 50, 100\}$ é adequada para as próximas análises.

Tabela 5.17: Método ERL (GCs X GCd) para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com a variação de m .

Id item	m	GCd=0				GCd=1					
		n° colunas	Tempo total (s)	σ^1	σ_1^3	σ_2^3	n° colunas	Tempo total (s)	σ^1	σ_1^3	σ_2^3
1	10	39	140,258	3	2	4	47	291,461	3	2	3
1	20	39	224,14	4	5	4	68	1417,821	4	5	11
3	10	19	34,886	3	2	3	23	48,751	2	1	1
3	20	52	609,402	5	5	8	63	811,403	4	4	8
3	30	46	190,679	4	8	3	81	1929,776	8	11	13
3	40	47	140,823	2	1	1	51	262,228	3	2	2
6	10	19	38,079	2	1	1	22	28,909	1	0	0
6	20	39	43,4	3	3	2	44	33,513	2	1	1
6	30	78	55,229	5	5	6	86	152,748	4	3	4
6	40	103	120,613	3	3	2	106	61,889	2	2	1
6	50	135	201,528	2	1	1	135	206,068	2	1	1
6	60	148	130,866	2	1	1	152	138,477	1	0	0
6	100	321	988,265	2	1	5	321	1198,581	3	1	5

Fonte: Elaborado pela autora.

Para análise da influência da capacidade da serra aplica-se o método ERL com GCd, e limita-se o tempo de execução do *subpricing* em 15 segundos, utilizando o conjunto C ($id_{item} = 1$). Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 5.18. Veja que a capacidade da serra influencia diretamente na cardinalidade da fronteira, quanto maior a capacidade da serra maior a cardinalidade. Com $c = d_{max}$, temos o ciclos da serra equivalente ao *setup* indicando que há um conflito maior entre minimização de objetos e *setup*, que na minimização de objetos e ciclos da serra. Outra observação importante é o aumento da cardinalidade a medida que m aumenta, com exceção de $m = 100$, pelo fato de não gerar colunas adicionais. Além disso, a maior parte do tempo gasto concentra-se na GCa e no cálculo dos pontos lexicográficos, concluindo que o tempo computacional gasto na execução do método em si é pequeno, em média 25%.

Tabela 5.18: Resultados obtidos pelo método ERL(GCd) para o ($PCEB_c^L - 2D$) com a variação de c , $id_{item} = 1$.

c	m	n° iterações (total)		n° colunas		Tempo		Tempo lex	Tempo ER	Tempo total	itER	σ^1
		itGCa	itGClex	itGCER	apriori	lex	ER					
1	20	74	4	1	56	0	0	28,782	11,163	304,334	1	1
	20	74	22	2	56	19	0	287,953	186,583	739,55	2	2
	4	20	91	23	10	90	14	257,712	842,978	1484,591	6	3
	7	20	97	34	6	128	27	915,556	710,443	3019,146	6	5
	d_{max}	20	78	12	15	89	8	193,378	1247,814	1769,147	15	12
2	30	138	10	1	98	6	0	425,135	146,299	1892,882	1	1
	30	91	38	2	96	35	0	1093,506	287,309	2277,899	2	2
	4	30	124	22	7	129	20	775,005	698,162	2693,728	5	4
	7	30	142	47	11	193	44	1763,286	1526,289	5640,337	10	5
	d_{max}	30	135	40	29	155	33	704,663	3025,069	5043,978	23	18
4	50	8	28	1	53	41	0	1070,075	43,272	1282,349	1	1
	50	8	36	2	53	29	0	1560,552	130,051	1859,693	2	2
	4	50	8	5	53	1	0	184,521	78,986	433,705	2	2
	7	50	61	14	6	145	7	725,042	993,627	2965,964	6	5
	d_{max}	50	60	11	27	145	4	511,512	1527,75	3267,221	25	25
7	100	2	4	1	100	0	0	608,778	241,59	938,373	1	1
	100	2	4	1	100	0	0	629,168	245,291	962,494	1	1
	4	100	2	4	100	0	0	629,953	241,965	959,64	1	1
	7	100	2	4	100	0	0	612,724	236,244	935,509	1	1
	d_{max}	100	2	4	100	0	0	599,402	241,526	926,041	1	1

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 5.19: Número de variáveis e restrições após o pré-processamento das instâncias do modelo M1-rot (2.22)-(2.26) do conjunto C.

Id do item	m	nº variáveis	nº restrições
1	20	460	690
1	30	726	1089
1	50	1144	1716
1	100	2304	3428
3	20	336	479
3	30	530	770
3	50	834	1226
3	100	1700	2525
6	20	134	201
6	30	214	321
6	50	336	504
6	100	692	1032
11	20	246	369
11	30	396	594
11	50	606	909
11	100	1300	1946
14	20	198	297
14	30	326	489
14	50	478	717
14	100	1038	1555

Fonte: Elaborado pela autora.

Um ponto observado nos testes anteriores foi a dificuldade na GC para algumas instâncias, sendo maior para $id = 1$. Assim, é necessário determinar o tempo de execução do subproblema *pricing* para esse conjunto. Os testes realizados para o conjunto D com variação do tempo de execução do subproblema *pricing* mostrou que, quanto maior tempo, melhor é a aproximação da fronteira, ou seja, a cardinalidade se mantém ou aumenta e o hipervolume aumenta. Para as instâncias com $id = 1$ e 3, notou-se que o tempo não foi suficiente para gerar novas colunas. Realizou-se testes adicionais considerando tempos maiores (tempo *pricing* igual a 30 e 40 segundos), e ainda assim ocorre o mesmo problema. Isso pode ser justificado pela Tabela 5.19 que indica o número de variáveis e restrições que compõem o modelo M1-rot (subproblema *pricing*) em cada uma das instâncias. Note que as instâncias $id = 1$ e 3, $m = 100$, resultam em um maior número de variáveis e restrições, assim o tempo da GC é maior que em outras instâncias. Esse número elevado de variáveis é devido à necessidade do pré-processamento das instâncias descrito no Capítulo 2, resultante das especificações do modelo.

A seguir são descritos os resultados da Etapa 2, que busca analisar o impacto da escolha da permutação e do parâmetro $\zeta_i, i = 1, 2$, para o método FPA^* através da comparação das variações do FPA^* ($FPA^*_{var1}, FPA^*_{var2}, FPA^*_{var3}, FPA^*_{var4}$) definidas na Seção 4.2.2 considerando o conjunto E de instâncias obtido através da análise dos parâmetros.

Etapa 2: Comparação das variações do FPA^*

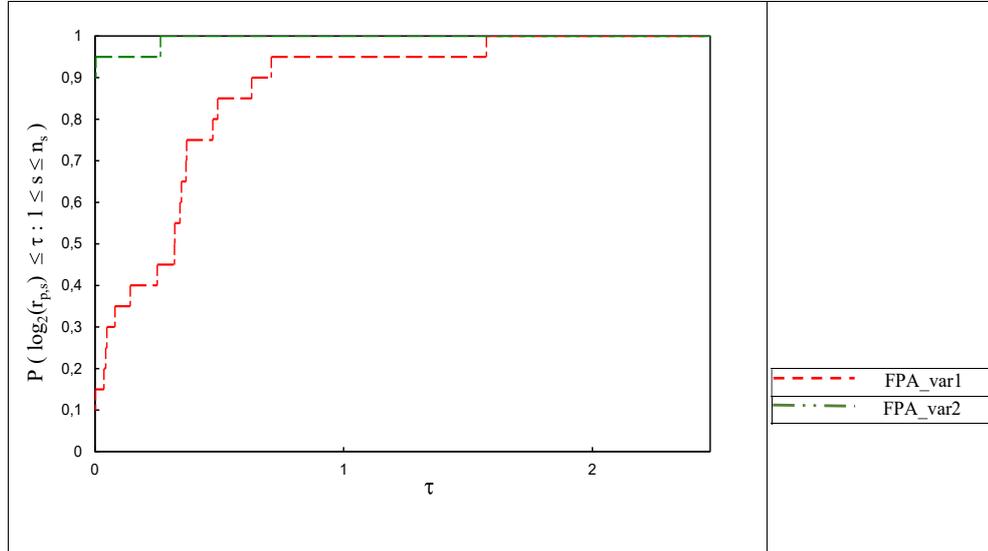
A comparação das variações do FPA^* é realizada para cada valor da capacidade da serra ($c = 7$ e $c = d_{max}$) para avaliar a influência da capacidade da serra no desempenho de cada variação do método. A Tabela 5.21 apresenta o número de colunas, o tempo total e o número de iterações para cada variação do método FPA^* . Observe que em 30% das instâncias as quatro variações do FPA^* retornaram o mesmo número de colunas. Para os métodos FPA_{var1}^* e o FPA_{var2}^* , o número de colunas geradas é igual sendo esse número maior em 35% das instâncias. Com relação ao número de iterações o método FPA_{var2}^* encontrou uma aproximação da fronteira de Pareto realizando um número menor de iterações em 45% das instâncias. Note também que a maior diferença no número de colunas está na instância com $id = 3$ e $m = 50$, onde as variações 1 e 2 obtiveram 19 colunas a mais do que as Variações 3 e 4. O FPA_{var2}^* obteve o menor tempo computacional para 18 das 20 instâncias e o menor número de iterações. Nas Figuras 5.17-5.22 são apresentados os gráficos dos perfis de desempenho com relação ao tempo computacional comparando as variações duas a duas. A Figura 5.17 mostra que o FPA_{var2}^* obteve melhor desempenho que FPA_{var1}^* em 90% das instâncias. Na comparação da Variação 1 com a Variação 3 mostrada na Figura 5.18, nota-se que a Variação 3 obteve melhor desempenho em 65% das instâncias, e a Variação 4 obteve melhor desempenho em 80% das instâncias (Figura 5.19). Na comparação entre a Variação 2 e a Variação 3 mostrada na Figura 5.20, o método FPA_{var2}^* obteve melhor desempenho em 75% das instâncias e na comparação com a Variação 4 a porcentagem é de 70% (Figura 5.21). Na Figura 5.22, pode-se verificar a comparação entre as Variações 3 e 4 mostrando um melhor desempenho para o FPA_{var4}^* em 60% das instâncias. Com relação ao tempo computacional, conclui-se que o FPA_{var2}^* obteve o melhor desempenho comparado às outras três variações. Para concluir a eficiência da Variação 2 é necessário avaliar outros aspectos relacionados a qualidade da fronteira que são avaliados através das métricas definidas na Seção 5.1.

Tabela 5.20: Variações do método FPA^* considerando as permutações de objetos e ciclos e os valores de ζ_i para o ($PCEB_c^L - 2D$) com $c = 7$.

id item	m	n° colunas				Tempo total (s)				it (met)			
		FPA^*_{var1}	FPA^*_{var2}	FPA^*_{var3}	FPA^*_{var4}	FPA^*_{var1}	FPA^*_{var2}	FPA^*_{var3}	FPA^*_{var4}	FPA^*_{var1}	FPA^*_{var2}	FPA^*_{var3}	FPA^*_{var4}
1	20	144	144	142	141	1169,271	1106,143	1228,859	1148,189	6	5	7	6
	30	238	238	233	233	3005,073	3000,625	2988,988	2917,835	8	7	9	8
	50	151	151	151	151	2883,021	2422,742	4323,807	4617,728	12	9	10	11
3	100	200	200	200	200	696,99	679,504	679,491	679,483	0	0	0	0
	20	109	109	103	103	615,04	492,731	472,685	597,992	6	4	5	6
	30	203	203	201	199	2004,274	1605,233	1681,22	1641,123	8	6	5	7
6	50	282	282	263	261	7027,081	6369,71	7117,522	6650,201	10	7	12	9
	100	199	199	199	199	589,129	571,696	571,687	571,702	0	0	0	0
	20	71	71	71	71	112,247	134,684	127,713	15,851	2	2	2	2
11	30	136	136	137	137	306,961	198,309	270,358	213,033	2	2	2	2
	50	187	187	188	187	228,224	177,023	201,622	158,627	2	2	2	2
	100	356	356	369	366	3159,459	1061,548	2196,671	1893,902	9	7	9	8
14	20	134	134	136	142	513,228	364,427	407,155	474,68	3	2	2	2
	30	228	228	220	217	1556,662	1223,242	1451,889	1466,827	6	6	6	8
	50	366	366	374	368	2897,183	2285,461	2481,784	2645,704	15	9	11	14
100	357	357	356	356	7977,497	7716,79	7733,184	7738,386	13	11	12	12	
	20	120	120	120	120	35,782	35,874	35,878	35,866	0	0	0	0
	30	215	215	221	219	866,378	529,819	1261,595	508,476	4	3	4	2
50	249	249	249	249	683,04	491,869	618,962	683,862	5	2	4	5	
	100	906	906	934	951	18476,09	14308,69	22321,96	22252,44	5	12	7	7

Fonte: Elaborado pela autora.

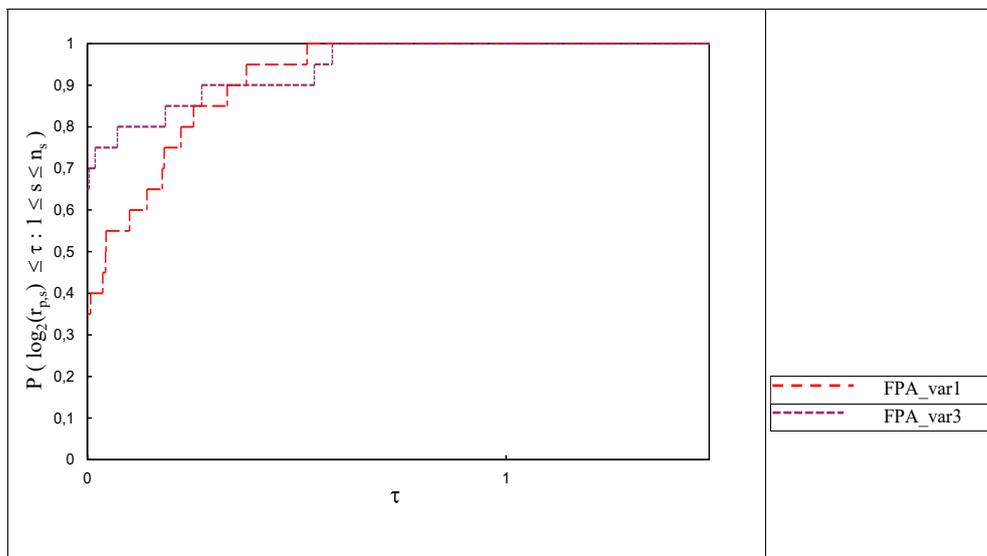
Figura 5.17: Perfil de desempenho das variações FPA_{var1}^* e FPA_{var2}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = 7$).



Fonte: Elaborado pela autora.

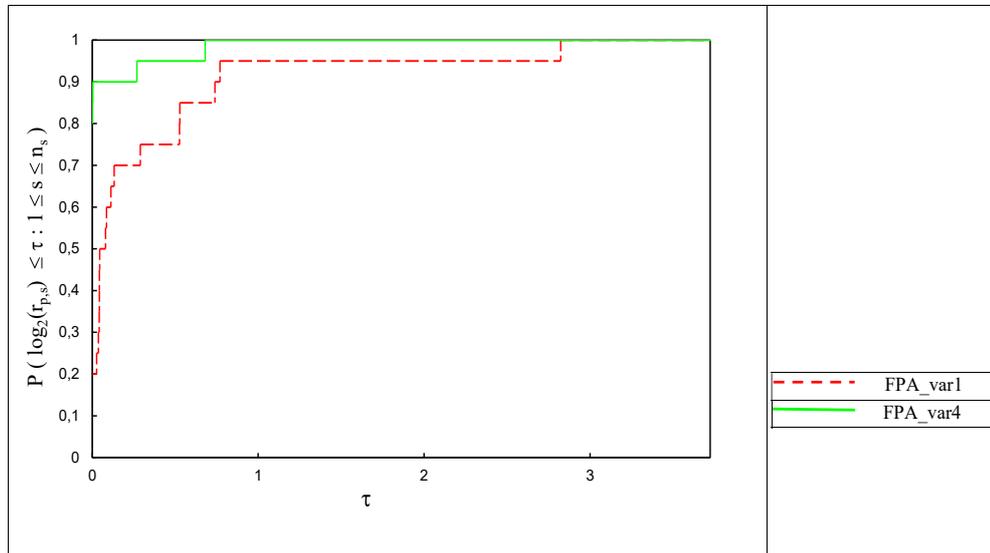
A Tabela 5.21 mostra os valores das métricas σ^1 (cardinalidade), σ^2 (hipervolume) e σ^4 (número de subproblemas) utilizadas na comparação da qualidade das aproximações das fronteiras obtidas com as quatro variações do método FPA^* . Com relação aos valores de σ^1 e σ^2 , pode-se perceber que as variações do FPA^* obtiveram valores muito próximos, sendo a maior variação na instância com $id = 14$ e $m = 100$ com a cardinalidade duas vezes maior ($\sigma^1 = 10$) e com uma diferença de $172u.a$ (unidades de área) no hipervolume obtida no FPA_{var2}^* . O método FPA_{var2}^* obteve a aproximação da fronteira resolvendo o menor número de subproblemas em 45% das instâncias e em 40% das instâncias resolveu o mesmo número de subproblemas que as demais variações com menor número de σ^4 . Na Tabela 5.22, são apresentados os resultados para as métricas σ^5 e σ^6 que representam o desempenho de cada variação considerando a qualidade da fronteira (σ^1 e σ^2) em relação ao tempo computacional. Note que o FPA_{var2}^* obteve o maior número de soluções por unidade de tempo de execução em 65% das instâncias (σ^5). Em 55% das instâncias o FPA_{var2}^* obteve maior número de soluções por subproblemas resolvidos (σ^6) sendo a variação com melhor desempenho considerando essa métrica. Com isso, pode-se concluir que a Variação 2 obteve melhor desempenho dentre as demais para $c = 7$ considerando: tempo computacional, número de iterações e todas as métricas de comparação considerada. Logo, a comparação do método FPA^* com os métodos ERL e TPA é realizada utilizando a variação 2 para $c = 7$.

Figura 5.18: Perfil de desempenho das variações FPA_{var1}^* e FPA_{var3}^* para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com relação ao tempo ($c = 7$).



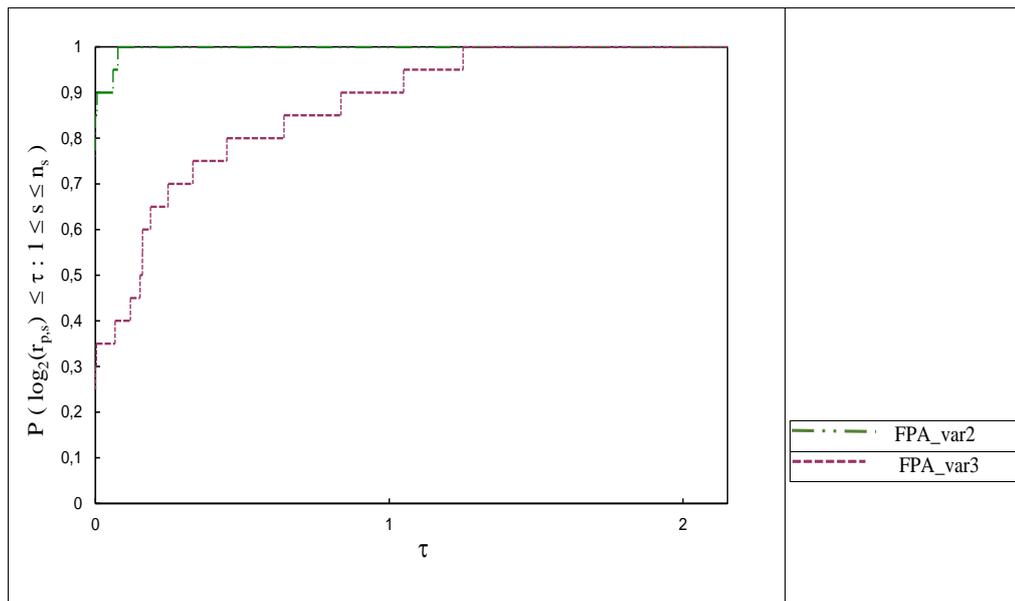
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.19: Perfil de desempenho das variações FPA_{var1}^* e FPA_{var4}^* para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com relação ao tempo ($c = 7$).



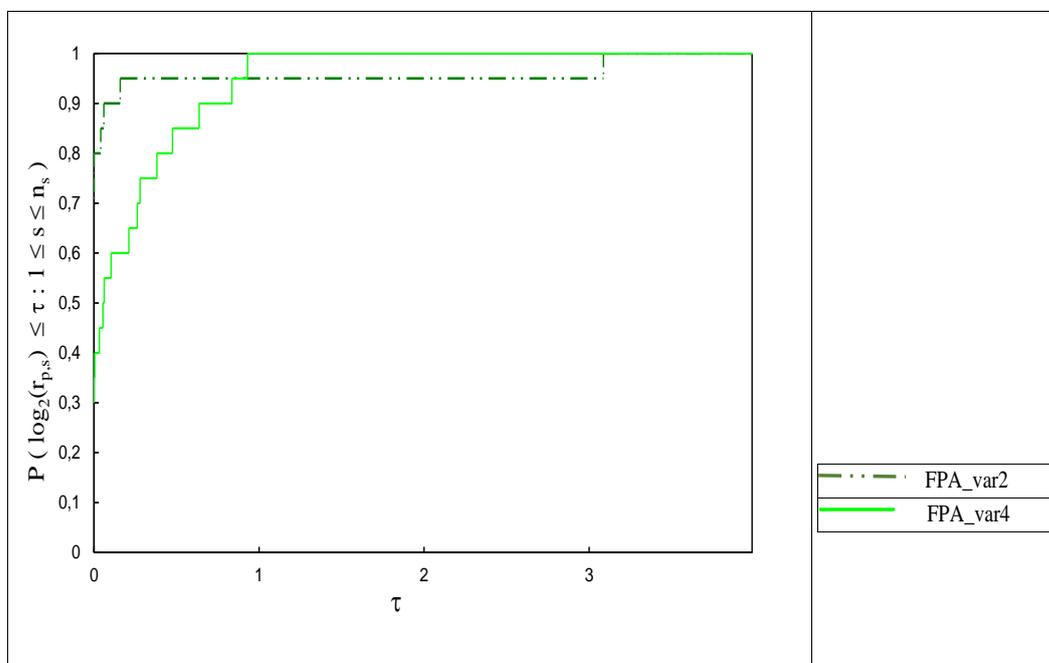
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.20: Perfil de desempenho das variações FPA_{var2}^* e FPA_{var3}^* para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com relação ao tempo ($c = 7$).



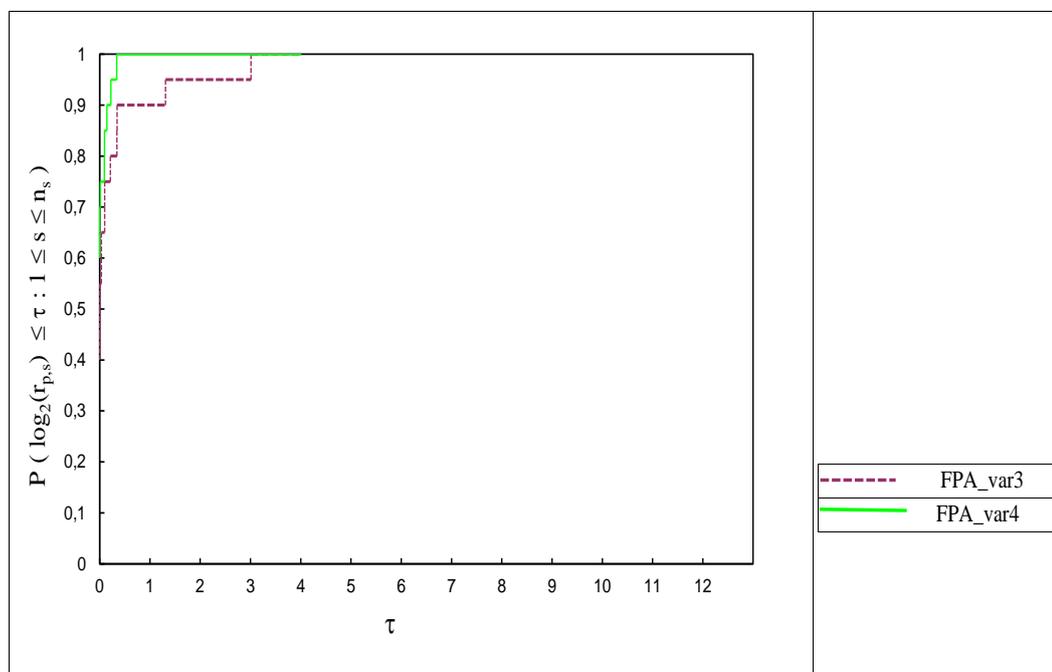
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.21: Perfil de desempenho das variações FPA_{var2}^* e FPA_{var4}^* para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com relação ao tempo ($c = 7$).



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.22: Perfil de desempenho das variações FPA_{var3}^* e FPA_{var4}^* para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com relação ao tempo ($c = 7$).



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 5.21: Métricas relativas as variações do método FPA^* considerando as permutações de objetos e ciclos e os valores de ζ_i para o ($PCEB_c^L - 2D$) com $c = 7$.

id itêm	m	σ^1				σ^2				σ^4			
		FPA_{var1}^*	FPA_{var2}^*	FPA_{var3}^*	FPA_{var4}^*	FPA_{var1}^*	FPA_{var2}^*	FPA_{var3}^*	FPA_{var4}^*	FPA_{var1}^*	FPA_{var2}^*	FPA_{var3}^*	FPA_{var4}^*
1	20	3	4	4	4	23	18	22	23	10	9	11	10
	30	4	7	4	5	83	67	82	80	12	11	13	12
	50	9	8	8	9	247	240	239	247	16	13	14	15
	100	1	1	1	1	0	0	0	0	4	4	4	4
3	20	4	4	3	4	24	25	24	23	10	8	9	10
	30	6	4	3	4	66	48	76	64	12	10	9	11
	50	5	6	7	5	189	199	189	194	14	11	16	13
	100	1	1	1	1	0	0	0	0	4	4	4	4
6	20	2	2	2	2	0	0	0	0	6	6	6	6
	30	2	2	2	2	0	0	0	0	6	6	6	6
	50	2	2	2	2	0	0	0	0	6	6	6	6
	100	3	5	8	4	84	58	68	87	13	11	13	12
11	20	2	2	2	2	1	0	1	0	7	6	6	6
	30	3	4	4	3	26	14	22	26	10	10	10	12
	50	8	7	7	7	334	297	316	295	19	13	15	18
	100	7	7	6	7	337	436	357	360	17	15	16	16
14	20	1	1	1	1	0	0	0	0	4	4	4	4
	30	3	3	3	2	4	6	5	7	8	7	8	6
	50	2	2	2	2	1	0	1	0	9	6	8	9
	100	3	10	4	4	1110	2310	1067	1138	9	16	11	11

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 5.22: Métricas σ^5 e σ^6 para as quatro variações do FPA^* para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = 7$.

id item	m	σ^5				σ^6			
		FPA_{var1}^*	FPA_{var2}^*	FPA_{var3}^*	FPA_{var4}^*	FPA_{var1}^*	FPA_{var2}^*	FPA_{var3}^*	FPA_{var4}^*
1	20	0,0026	0,0036	0,0032	0,0035	0,3000	0,4444	0,3636	0,4000
	30	0,0013	0,0023	0,0013	0,0017	0,3333	0,6364	0,3077	0,4167
	50	0,0031	0,0033	0,0018	0,0019	0,5625	0,6154	0,5714	0,6000
	100	0,0014	0,0015	0,0015	0,0015	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500
3	20	0,0065	0,0081	0,0063	0,0067	0,4000	0,5000	0,3333	0,4000
	30	0,0030	0,0025	0,0018	0,0024	0,5000	0,4000	0,3333	0,3636
	50	0,0008	0,0010	0,0010	0,0007	0,3571	0,5454	0,4375	0,3846
	100	0,0017	0,0017	0,0017	0,0017	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500
6	20	0,0178	0,0148	0,0157	0,1262	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333
	30	0,0065	0,0101	0,0074	0,0094	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333
	50	0,0088	0,0113	0,0099	0,0126	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333
	100	0,0010	0,0047	0,0036	0,0021	0,2308	0,4545	0,6154	0,3333
11	20	0,0039	0,0055	0,0050	0,0042	0,2857	0,3333	0,3333	0,3333
	30	0,0019	0,0033	0,0027	0,0020	0,3000	0,4000	0,4000	0,2500
	50	0,0028	0,0031	0,0028	0,0026	0,4210	0,5385	0,4667	0,3889
	100	0,0009	0,0009	0,0008	0,0009	0,4118	0,4667	0,3750	0,4375
14	20	0,0279	0,0279	0,0279	0,0279	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500
	30	0,0035	0,0057	0,0024	0,0039	0,3750	0,4286	0,3750	0,3333
	50	0,0029	0,0041	0,0032	0,0030	0,2222	0,3333	0,2500	0,2222
	100	0,0002	0,0001	0,0002	0,0002	0,3333	0,6250	0,3636	0,3636

Fonte: Elaborado pela autora.

A Tabela 5.23 apresenta o número de colunas, o tempo total e o número de iterações para cada variação do método FPA^* , considerando $c = d_{max}$. Observe que as quatro variações do FPA^* retornaram o mesmo número de colunas em 50% das instâncias. Apenas para a instância com $id = 3$ e $m = 100$ houve uma diferença expressiva, na qual a Variação 2 gerou 45 colunas a mais que as demais variações. A Variação 3 obteve uma aproximação da fronteira com o menor número de iterações em 45% das instâncias e em 40% as variações obtiveram o mesmo número de iterações.

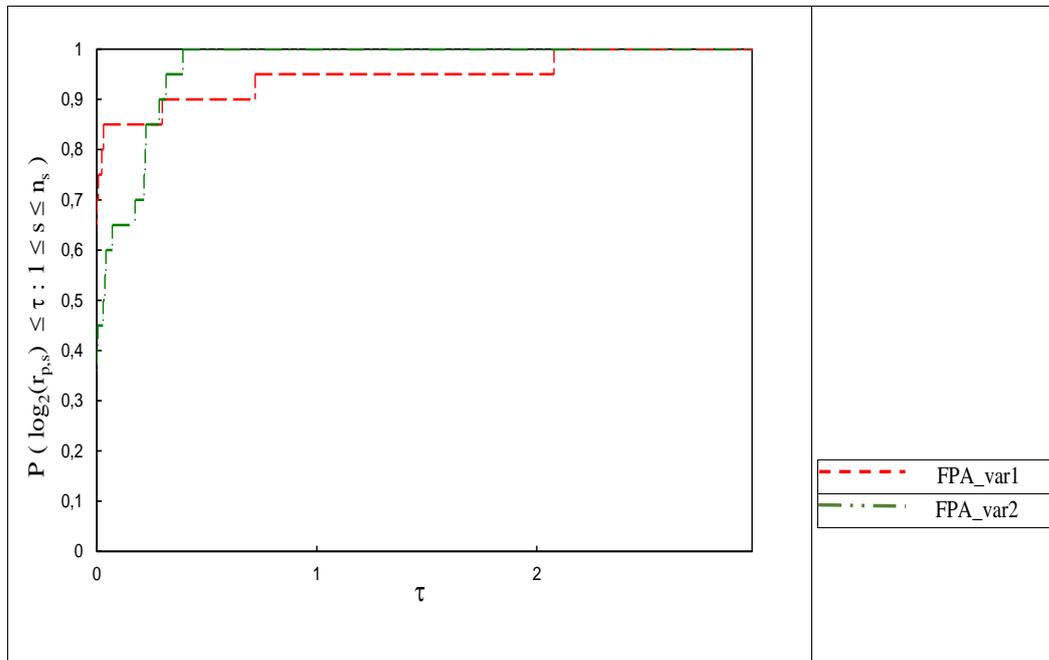
Tabela 5.23: Variações do método FPA^* considerando as permutações de objetos e ciclos e os valores de ζ_i para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = d_{max}$.

id itêm	m	nº colunas				Tempo total (s)				it (met)			
		FPA_{var1}^*	FPA_{var2}^*	FPA_{var3}^*	FPA_{var4}^*	FPA_{var1}^*	FPA_{var2}^*	FPA_{var3}^*	FPA_{var4}^*	FPA_{var1}^*	FPA_{var2}^*	FPA_{var3}^*	FPA_{var4}^*
1	20	133	138	135	135	1246,398	1227,352	1209,725	1364,142	14	14	13	15
	30	226	234	230	231	3786,567	3797,625	3642,319	3647,754	22	19	19	19
	50	151	149	151	151	3286,709	3219,004	3303,011	3296,687	25	21	25	25
	100	200	200	200	200	679,696	679,699	679,692	679,692	0	0	0	0
	20	111	109	111	109	895,836	728,913	863,488	756,751	15	14	14	14
3	30	211	208	217	217	2579,619	2566,731	2581,101	2804,699	21	22	20	23
	50	225	270	225	226	10635,47	10848,12	10927,78	11073,52	36	29	37	37
	100	199	199	199	199	573,221	573,22	573,221	573,225	0	0	0	0
6	20	77	77	77	77	84,191	19,935	53,063	84,155	8	8	8	8
	30	128	128	128	128	209,479	215,626	193,262	224,777	14	14	14	14
	50	185	185	185	185	1611,891	1692,853	1550,661	1465,568	15	17	14	15
	100	364	364	365	364	4941,054	6145,353	9345,994	4921,644	46	62	44	47
	20	154	152	155	157	872,766	1062,132	879,046	846,639	14	17	12	14
11	30	244	241	257	242	2327,105	2715,942	2422,03	2538,683	20	26	19	23
	50	334	334	334	334	3775,706	4381,306	3988,421	3915,002	33	41	36	35
	100	337	338	337	337	10196,63	10456,81	10210,19	10213,67	51	52	51	51
	20	131	128	130	130	665,538	404,214	512,763	553,109	10	10	10	10
	30	239	243	239	239	3098,733	3608,688	3033,936	3097,508	20	27	19	20
14	50	257	257	257	257	1777,42	2331,253	1628,777	1701,023	24	33	22	23
	100	661	668	661	661	12868,13	14515,59	12796,03	13236,64	64	77	63	66

Fonte: Elaborado pela autora.

O tempo computacional é analisado nas Figuras 5.23-5.28 através dos perfis de desempenho com relação ao tempo computacional, as variações são comparadas duas a duas. A Figura 5.23 mostra que a Variação 1 obtém melhor desempenho em 65% das instâncias. A Variação 3 apresenta melhor tempo em 60% das instâncias (Figura 5.24). A comparação entre as Variações 1 e 4 apresentada na Figura 5.25 mostra que ambas obtiveram melhor desempenho em 50% das instâncias. Ao comparar a Variação 2 com as Variações 3 e 4 verifica-se nas Figuras 5.26 e 5.27 que FPA_{var3}^* e FPA_{var}^* obtêm melhor tempo em 60% e 55% das instâncias, respectivamente. Note que as Variações 3 e 4 obtiveram melhor desempenho quando comparadas as Variações 1 e 2. Assim, através da Figura 5.28 que mostra o melhor desempenho da Variação 3 em 70% das instâncias, conclui-se a comparação das quatro variações, com a indicação que o método FPA_{var3}^* obtém melhor desempenho dentre as quatro variações considerando o tempo computacional para o problema $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = d_{max}$.

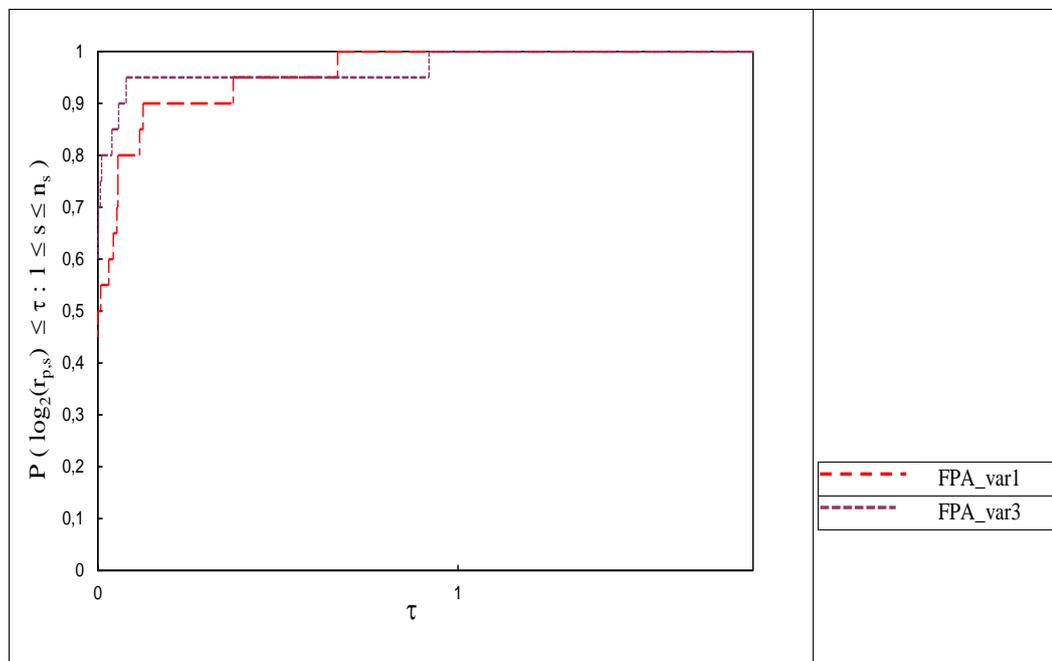
Figura 5.23: Perfil de desempenho das variações FPA_{var1}^* e FPA_{var2}^* para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com relação ao tempo ($c = d_{max}$).



Fonte: Elaborado pela autora.

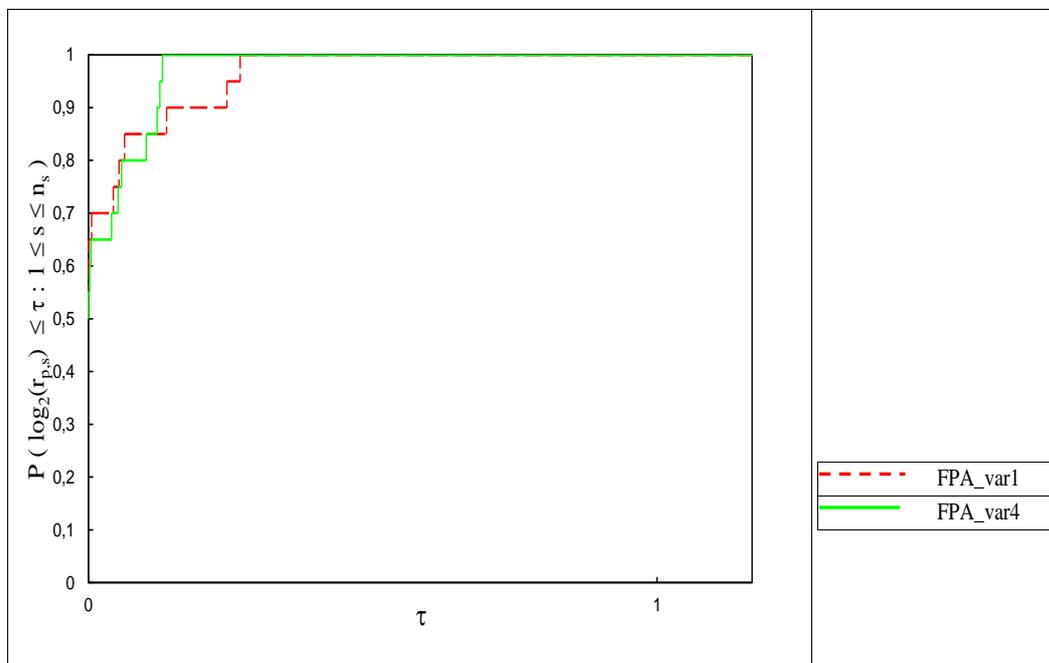
A Tabela 5.24 apresenta os valores obtidos para as métricas σ^1 (cardinalidade), σ^2 (hipervolume) e σ^4 (número de subproblemas) que são utilizadas para comparação da qualidade das aproximações das fronteiras. Observe que as Variações 3 e 4 obtêm valores muito próximos para σ^1 e σ^2 e são as variações que apresentam valores maiores ou iguais em 75% das instâncias. Com relação aos valores de σ^4 , percebe-se que em 85% das instâncias a Variação 3 encontra a aproximação da fronteira de Pareto resolvendo o menor número de subproblemas. Logo, pode-se concluir que o método FPA_{var3}^* obteve melhor desempenho e assim é a variação mais adequada para a comparação com os métodos ERL e TPA no caso em que $c = d_{max}$.

Figura 5.24: Perfil de desempenho das variações FPA_{var1}^* e FPA_{var3}^* para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com relação ao tempo ($c = d_{max}$).



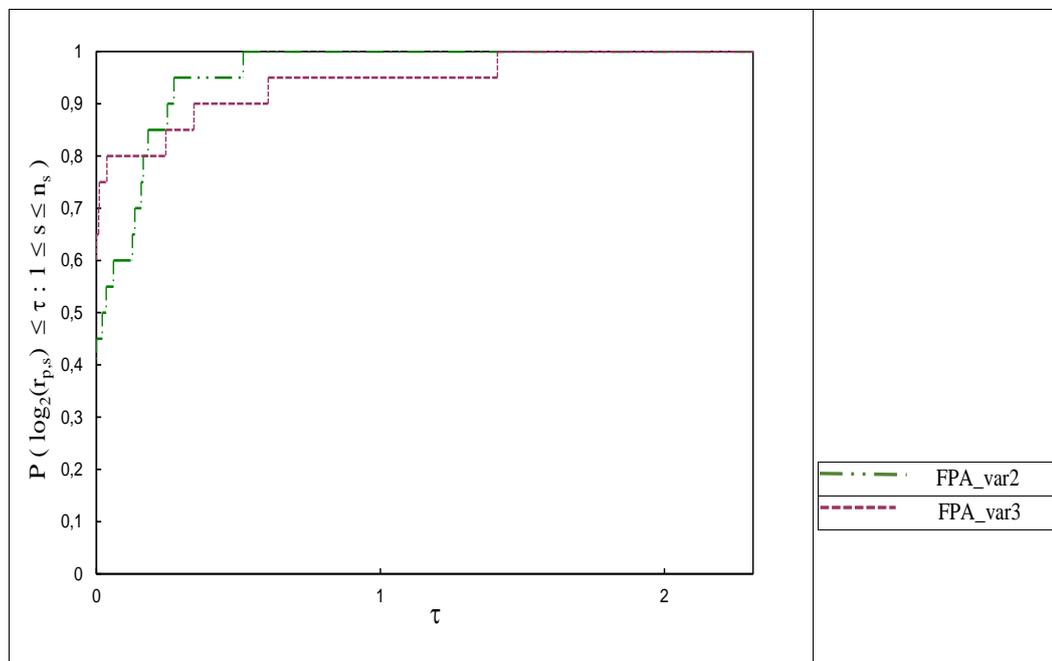
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.25: Perfil de desempenho das variações FPA_{var1}^* e FPA_{var4}^* para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com relação ao tempo ($c = d_{max}$).



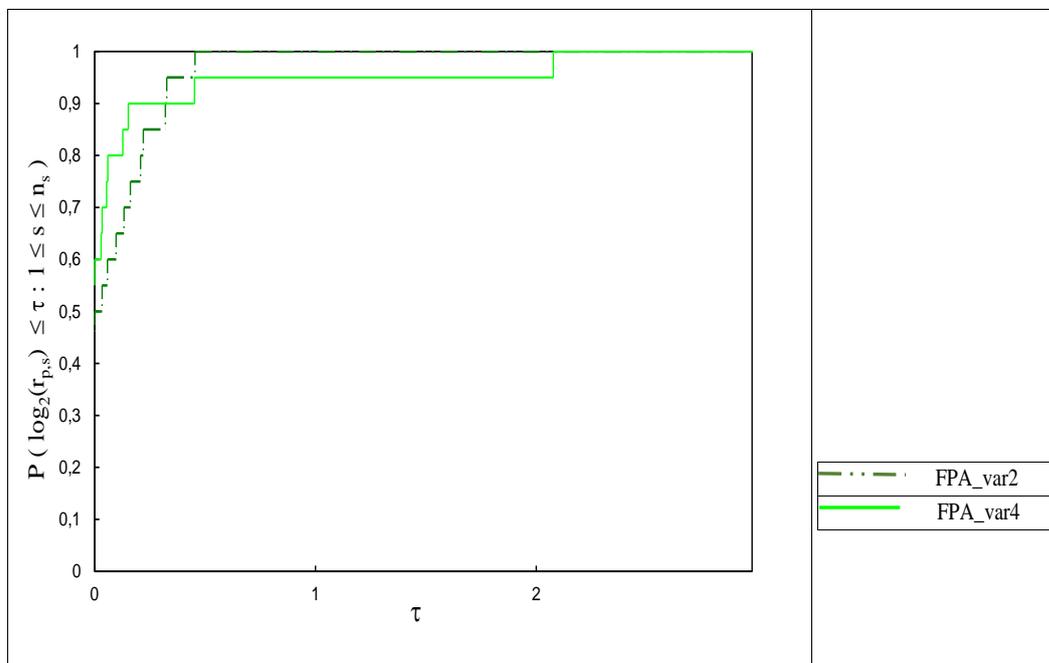
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.26: Perfil de desempenho das variações FPA_{var2}^* e FPA_{var3}^* para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com relação ao tempo ($c = d_{max}$).



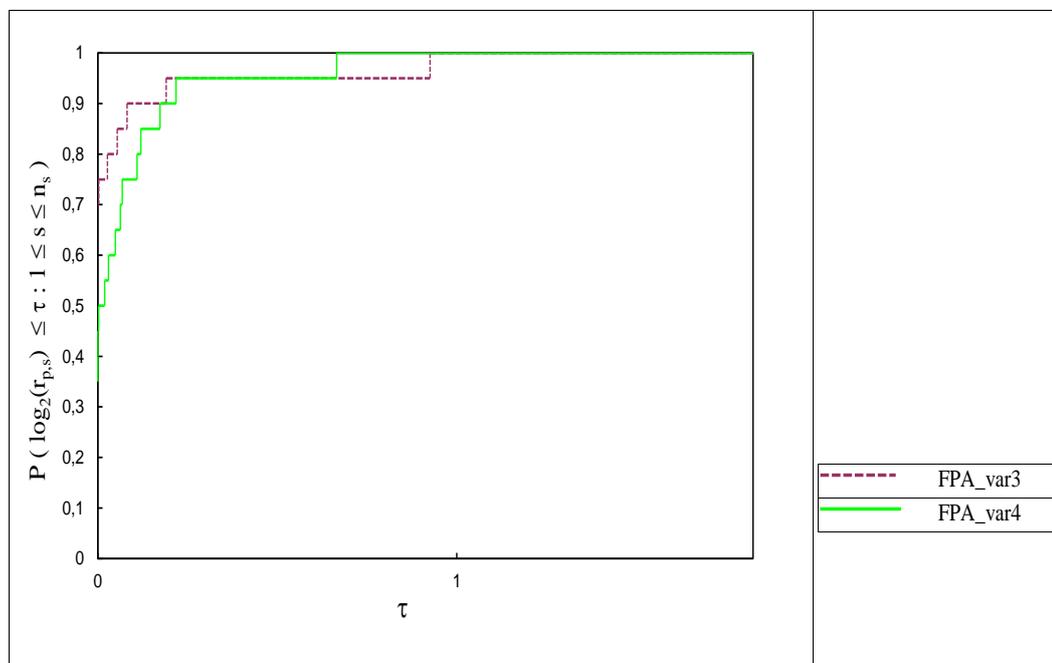
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.27: Perfil de desempenho das variações FPA_{var2}^* e FPA_{var4}^* para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com relação ao tempo ($c = d_{max}$).



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.28: Perfil de desempenho das variações FPA_{var3}^* e FPA_{var4}^* para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com relação ao tempo ($c = d_{max}$).



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 5.24: Métricas relativas as variações do método FPA^* considerando as permutações de objetos e ciclos e os valores de ζ_i para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = d_{max}$.

id item	m	σ^1				σ^2				σ^4			
		FPA_{var1}^*	FPA_{var2}^*	FPA_{var3}^*	FPA_{var4}^*	FPA_{var1}^*	FPA_{var2}^*	FPA_{var3}^*	FPA_{var4}^*	FPA_{var1}^*	FPA_{var2}^*	FPA_{var3}^*	FPA_{var4}^*
1	20	11	10	12	12	2872	2856	2872	2873	18	18	17	19
	30	18	10	15	17	6091	6036	6139	6136	26	23	23	23
	50	25	20	25	25	9354	9216	9354	9354	29	25	29	29
	100	1	1	1	1	0	0	0	0	4	4	4	4
3	20	14	13	14	14	3133	3112	3132	3114	19	18	18	18
	30	16	13	15	18	5844	5572	6067	5915	25	26	24	27
	50	29	17	30	29	20035	19874	20028	20060	40	33	41	41
	100	1	1	1	1	0	0	0	0	4	4	4	4
6	20	8	8	8	8	778	778	778	778	12	12	12	12
	30	14	14	14	14	2705	2705	2705	2705	18	18	18	18
	50	14	14	14	15	3103	3113	3106	3113	19	21	18	19
	100	37	36	39	37	35365	35318	35380	35461	50	66	48	51
11	20	13	12	12	12	1807	1780	1800	1820	18	21	16	18
	30	17	16	15	16	6057	5954	6244	6043	24	30	23	27
	50	28	18	22	22	17716	17298	17673	17621	37	45	40	39
	100	46	35	47	48	50693	50244	50709	50712	55	56	55	55
14	20	10	10	10	10	1527	1492	1526	1496	14	14	14	14
	30	17	18	17	17	6504	6458	6473	6479	24	31	23	24
	50	17	17	17	19	7600	7507	7594	7632	28	37	26	27
	100	34	24	36	37	108457	101548	108051	108052	68	81	67	70

Fonte: Elaborado pela autora.

A seguir são descritos os resultados da Etapa 3, apresentando a comparação dos métodos ERL , FPA^* e TPA considerando o conjunto E de instâncias obtido na Etapa 1 e considerando a variação FPA_{var2}^* para $c = 7$ e a variação FPA_{var3}^* para $c = d_{max}$ conforme resultados dessa etapa.

Etapa 3: Comparação dos métodos

- Comparação dos métodos ERL , FPA_{var2}^* e TPA para $c = 7$.

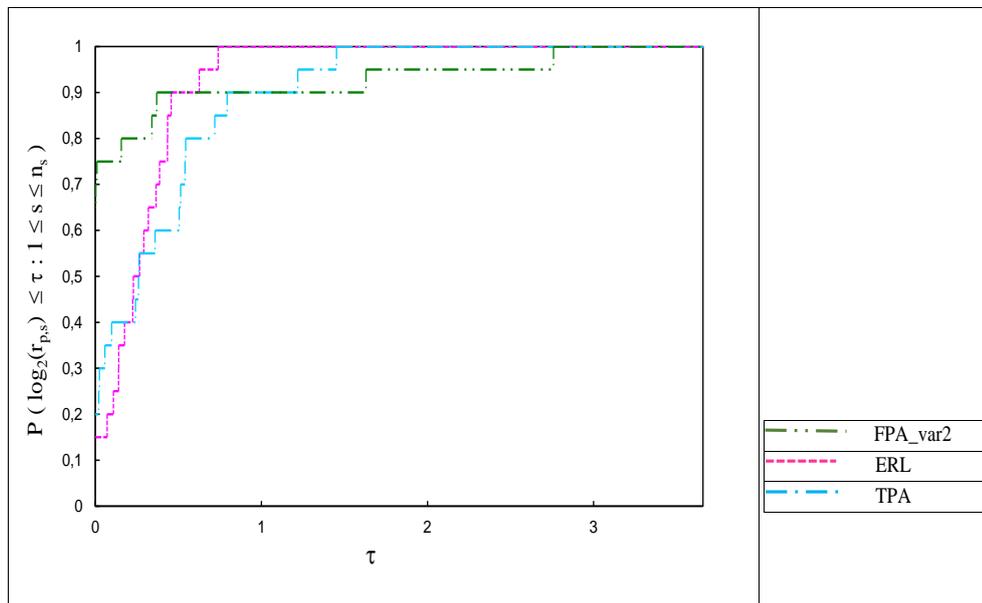
A Tabela 5.25 mostra o número de colunas geradas, o tempo computacional e o número de iterações obtidos em cada um dos métodos ERL , TPA e FPA_{var2}^* considerando a capacidade da serra (c) igual a 7. O método FPA_{var2}^* gerou um maior número de colunas em 50% das instâncias e no restante das instâncias o número de colunas geradas é igual além disso o método obtém a aproximação da fronteira de Pareto com um número menor de iterações em 65% das instâncias. O método TPA obteve a aproximação da fronteira com número de iterações em média duas vezes maior que os outros métodos. O perfil de desempenho considerando o tempo computacional apresentado na Figura 5.29 mostra que o método FPA_{var2}^* obteve um melhor desempenho em 65% das instâncias, mesmo gerando um maior número de colunas, enquanto que os métodos ERL e TPA obtiveram melhor desempenho em apenas 15% e 20% das instâncias, respectivamente.

Tabela 5.25: Resultados obtidos pelos métodos ERL , FPA_{var2}^* e TPA para o $PCEB_c^L - 2D$ e $c = 7$.

id item	m	nº colunas			Tempo total (s)			it (met)		
		ERL	FPA_{var2}^*	TPA	ERL	FPA_{var2}^*	TPA	ERL	FPA_{var2}^*	TPA
1	20	141	144	141	1446,65	1106,14	2574,89	6	5	10
	30	233	238	233	3508,47	3000,62	4283,53	8	7	14
	50	151	151	151	2965,84	2422,74	3987,24	9	9	15
	100	200	200	200	918,73	679,50	689,24	1	0	0
3	20	103	109	103	760,65	492,73	1347,98	6	4	9
	30	198	203	189	2202,39	1605,23	2339,90	9	6	10
	50	260	282	260	6868,03	6369,71	8174,31	7	7	22
	100	199	199	199	713,35	571,70	581,65	1	0	0
6	20	71	71	71	33,23	134,68	19,90	2	2	0
	30	136	136	136	208,35	198,31	212,34	2	2	1
	50	185	187	185	57,24	177,02	59,58	2	2	0
	100	356	356	356	1244,33	1061,55	1270,89	6	7	10
11	20	133	134	13	360,34	364,43	326,92	2	2	1
	30	209	228	204	1214,67	1223,24	1723,26	6	6	9
	50	366	366	366	3088,93	2285,46	3962,55	11	9	32
	100	356	357	356	8717,08	7716,79	11216,70	12	11	31
14	20	120	120	120	43,07	35,87	35,79	1	0	0
	30	215	215	215	528,47	529,82	410,06	2	3	1
	50	249	249	249	542,20	491,87	590,04	2	2	3
	100	838	906	838	11301,48	14308,69	13361,87	3	12	27

Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.29: Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA_{var2}^* e TPA para o $(PCEB_c^L - 2D)$ em relação ao tempo ($c = 7$).



Fonte: Elaborado pela autora.

A Tabela 5.26 apresenta os valores para σ^1 , σ^2 e σ^4 obtidos em cada método. A maior diferença de σ^1 foi para instância $id = 11$ e $m = 100$ onde o método TPA obteve o dobro de pontos não dominados ($\sigma^2 = 16$), porém ao olhar os valores de σ^2 observa-se que o maior hipervolume ($\sigma^2 = 1464$) é obtido pelo método FPA_{var2}^* . Isso mostra a necessidade de se utilizar mais de uma métrica para analisar a qualidade da fronteira e o desempenho do método. A Figura 5.30 mostra o perfil de desempenho com relação ao hipervolume. Os métodos ERL e TPA obtiveram o mesmo desempenho (cerca de 55%) enquanto o método FPA_{var2}^* obteve um desempenho um pouco inferior (cerca de 50%). Note que apesar do método TPA apresentar um melhor desempenho com relação ao número de soluções e valor do hipervolume o método resolve um número maior de subproblemas comparado ao método FPA_{var2}^* .

Tabela 5.26: Métricas relativas aos variações do métodos métodos ERL , FPA_{var2}^* e TPA para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = 7$.

id item	m	σ^1			σ^2			σ^4		
		ERL	FPA_{var2}^*	TPA	ERL	FPA_{var2}^*	TPA	ERL	FPA_{var2}^*	TPA
1	20	4	4	5	22	18	20	16	9	14
	30	4	7	5	80	67	74	20	11	18
	50	8	8	10	261	260	268	22	13	19
	100	1	1	1	0	0	0	6	4	4
3	20	5	4	4	21	25	22	16	8	13
	30	6	4	4	90	78	79	22	10	14
	50	5	6	7	134	153	145	18	11	26
	100	1	1	1	0	0	0	6	4	4
6	20	2	2	2	0	0	0	8	6	4
	30	2	2	2	0	0	0	8	6	5
	50	2	2	2	0	0	0	8	6	4
	100	5	5	4	44	46	58	16	11	14
11	20	2	2	2	1	0	0	8	6	5
	30	4	4	5	24	18	19	16	10	13
	50	6	7	10	392	399	393	26	13	36
	100	8	7	16	1157	1464	1290	28	15	35
14	20	1	1	1	0	0	0	6	4	4
	30	2	3	2	0	1	2	8	7	5
	50	2	2	3	4	4	5	8	6	7
	100	2	10	10	504	805	827	10	16	31

Fonte: Elaborado pela autora.

A Figura 5.31 mostra as aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelos métodos FPA_{var2}^* , ERL e TPA considerando $c = 7$ ($id = 11$ e $m = 100$, por ser a instância com maior variação de cardinalidade e hipervolume), note que a fronteira obtida pelo método FPA_{var2}^* apesar de obter uma quantidade menor de pontos não dominados, o hipervolume é maior.

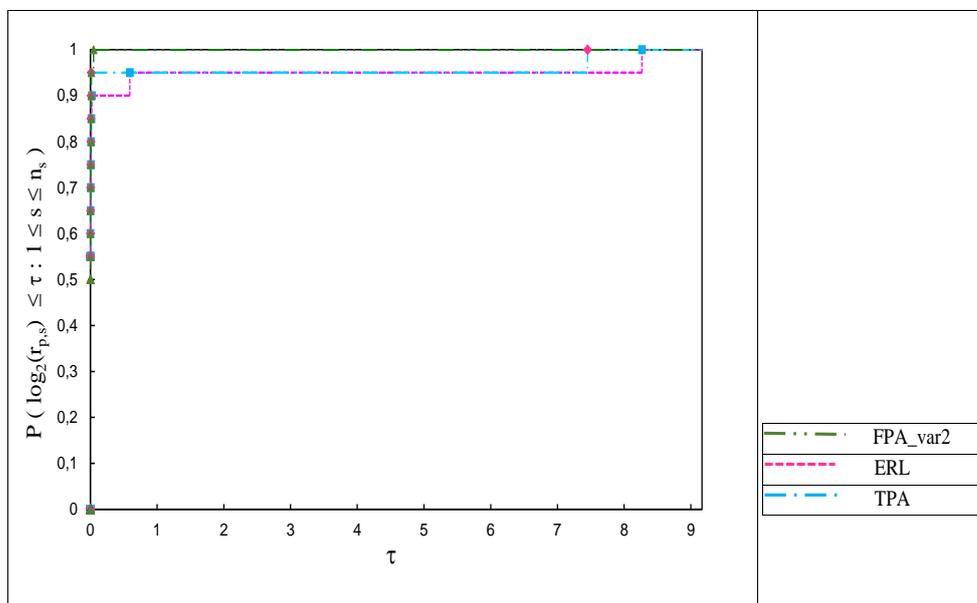
Para finalizar a comparação dos três métodos considerando $c = 7$, utiliza-se as métricas σ^5 e σ^6 para avaliar o desempenho de cada método com relação a qualidade da fronteira e o tempo computacional. A Tabela 5.27 mostra que o número de soluções por unidade de tempo de execução do método FPA_{var2}^* foi maior em 55% das instâncias contra 25% e 20% para os métodos TPA e ERL , respectivamente. Para o número de soluções por subproblema (σ^6) o método FPA_{var2}^* obteve melhor desempenho em 60% das instâncias enquanto o método TPA obteve melhor desempenho em apenas 25%. Portanto, pode-se concluir que o método FPA_{var2}^* obteve melhor desempenho de modo geral, pois o método foi inferior aos demais somente em relação ao hipervolume e com uma diferença de apenas 5%. Em todos os outros aspectos o método FPA_{var2}^* obteve melhor desempenho.

Tabela 5.27: Métricas σ^5 e σ^6 relativas aos métodos ERL , FPA_{var2}^* e TPA para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = 7$.

id item	m	σ^5			σ^6		
		ERL	FPA_{var2}^*	TPA	ERL	FPA_{var2}^*	TPA
1	20	0,0028	0,0036	0,0020	0,2500	0,4444	0,3571
	30	0,00114	0,0023	0,0012	0,200	0,6364	0,2778
	50	0,002697	0,0033	0,0025	0,3636	0,6154	0,5263
	100	0,001088	0,0015	0,0014	0,1667	0,2500	0,2500
3	20	0,0066	0,0081	0,0030	0,3125	0,0005	0,3077
	30	0,0027	0,0025	0,0017	0,2727	0,4000	0,2857
	50	0,0007	0,0009	0,0008	0,2778	0,5454	0,2692
	100	0,0014	0,0017	0,0017	0,1667	0,2500	0,2500
6	20	0,0602	0,0148	0,1005	0,2500	0,3333	0,5000
	30	0,0096	0,0101	0,0094	0,2500	0,3333	0,4000
	50	0,0349	0,0113	0,0336	0,2500	0,3333	0,5000
	100	0,0040	0,0047	0,0031	0,3125	0,4545	0,2857
11	20	0,0055	0,0055	0,0061	0,2500	0,3333	0,4000
	30	0,0033	0,0033	0,0029	0,2500	0,4000	0,3846
	50	0,0019	0,0031	0,0025	0,2308	0,5385	0,2778
	100	0,0009	0,0009	0,0014	0,2857	0,4667	0,4571
14	20	0,0232	0,0279	0,0280	0,1667	0,2500	0,2500
	30	0,0038	0,0057	0,0049	0,2500	0,4286	0,4000
	50	0,0037	0,0041	0,0051	0,2500	0,3333	0,4286
	100	0,0002	0,0007	0,0007	0,2000	0,6250	0,3226

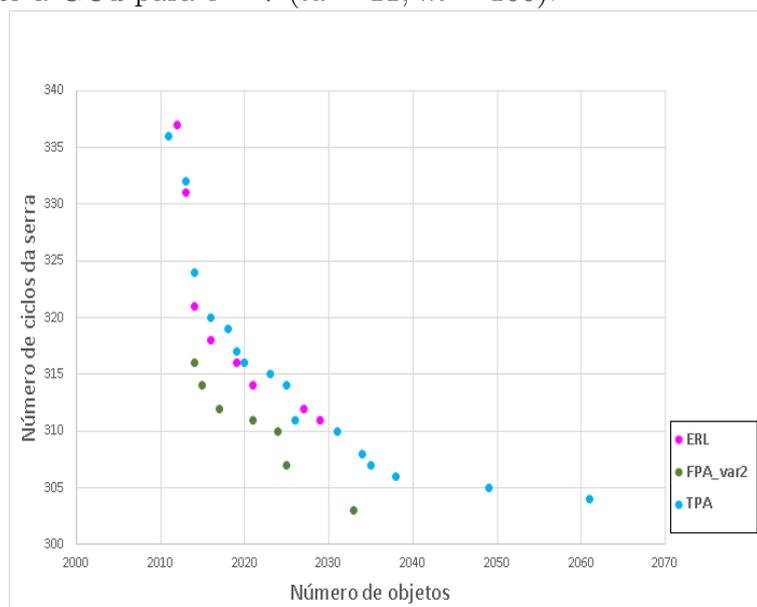
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.30: Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA_{var2}^* e TPA para o $(PCEB_c^L - 2D)$ em relação ao hipervolume (σ^2) com $c = 7$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.31: Aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelos métodos FPA_{var2}^* , ERL e TPA utilizando a GCd para $c = 7$ ($id = 11$, $m = 100$).

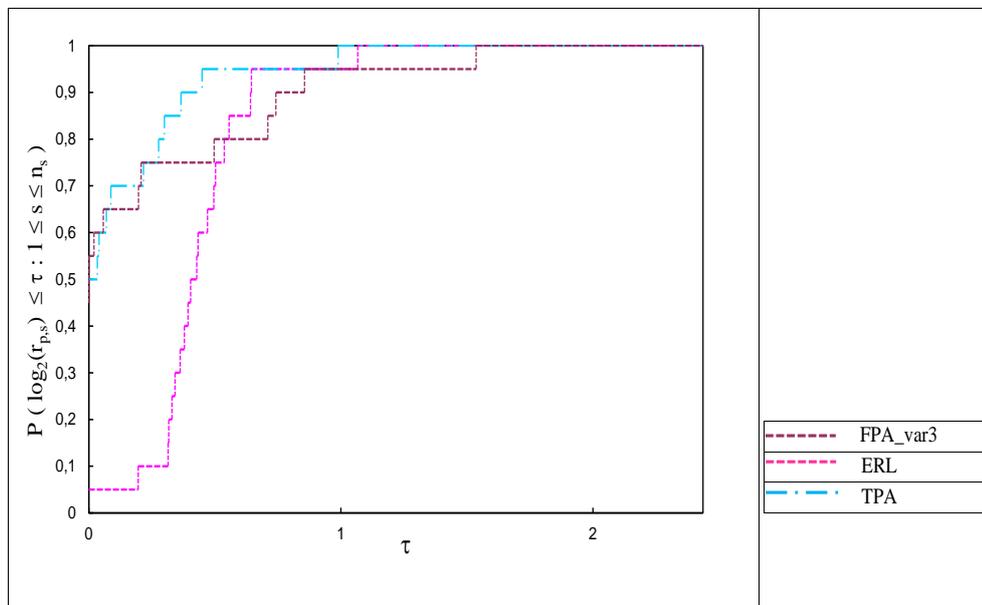


Fonte: Elaborado pela autora.

- Comparação dos métodos ERL , FPA_{var3}^* e TPA para $c = d_{max}$.

O método FPA_{var3}^* gerou um maior número de colunas e obteve a aproximação da fronteira de Pareto com um número menor de iterações assim como no caso em que $c = 7$. Na Figura 5.32 é apresentado o perfil de desempenho comparando o tempo computacional gasto pelos métodos ERL , FPA_{var3}^* e TPA , note que o método TPA obteve um melhor desempenho em 50% das instâncias, enquanto que os métodos ERL e FPA_{var3}^* obtiveram melhor desempenho em 5% e 45% das instâncias, respectivamente. Para analisar melhor os desempenho dos métodos, são apresentados os valores das métricas σ^1 , σ^2 e σ^4 para analisar a qualidade da aproximação da fronteira na Tabela 5.28. O método FPA_{var3}^* obtém valores maiores ou iguais para σ^1 em 70% das instâncias e em 65% das instâncias foi necessário resolver o menor (ou igual) números de subproblemas.

Figura 5.32: Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA_{var3}^* e TPA ($PCEB_c^L - 2D$) em relação ao tempo ($c = d_{max}$).



Fonte: Elaborado pela autora.

O perfil de desempenho com relação ao hipervolume é mostrado na Figura 5.33. Note que o método FPA_{var3}^* obtém melhor desempenho em 70% das instâncias. Assim, o método FPA_{var3}^* também obtém melhor desempenho considerando as métricas σ^5 e σ^6 , obtendo o maior número de soluções por unidade de tempo de execução em 75% das instâncias e o maior número de soluções por subproblemas em 100% das instâncias. Concluindo-se que é o método mais adequado para o caso em que $c = d_{max}$.

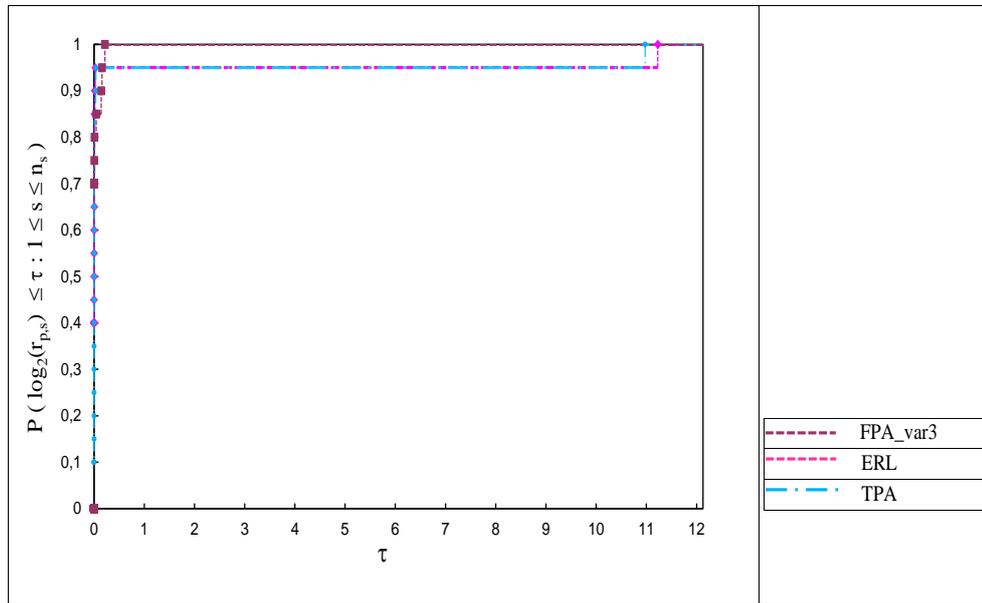
A Figura 5.34 mostra as aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelos métodos FPA_{var2}^* , ERL e TPA considerando $c = d_{max}$. Note que, a fronteira obtida pelo método FPA_{var3}^* , apesar de parecer bem próxima das outras fronteiras, apresenta uma quantidade maior de pontos não dominados, e possui um hipervolume maior (fronteira mais inferior).

Tabela 5.28: Métricas relativas aos variações do métodos métodos ERL , FPA_{var3}^* e TPA para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = d_{max}$.

id item	m	σ^1			σ^2			σ^4		
		ERL	FPA_{var3}^*	TPA	ERL	FPA_{var3}^*	TPA	ERL	FPA_{var3}^*	TPA
1	20	12	12	10	3456	3074	3404	32	17	22
	30	19	15	14	7069	4927	7016	48	23	35
	50	25	25	19	9354	9822	9177	54	29	30
	100	1	1	1	0	0	0	6	4	4
3	20	14	14	9	3115	3365	3062	32	18	19
	30	18	15	14	9556	10667	9015	52	24	35
	50	27	30	23	25647	19424	25411	76	41	49
	100	1	1	1	0	0	0	6	4	4
6	20	8	8	6	770	934	763	20	12	10
	30	14	14	10	2705	2960	2669	32	18	17
	50	14	14	11	3085	3106	3019	32	18	17
	100	38	39	26	36134	36341	35938	92	48	49
11	20	12	12	10	1840	1643	1740	30	16	17
	30	18	15	12	6038	6832	5959	50	23	22
	50	28	22	18	22117	16134	22023	76	40	43
	100	43	47	34	51650	47213	50913	110	55	63
14	20	10	10	7	1492	1747	1463	24	14	11
	30	17	17	12	6475	6479	6360	40	23	22
	50	20	17	13	7539	7640	7584	54	26	22
	100	34	36	29	76743	79140	77128	132	67	77

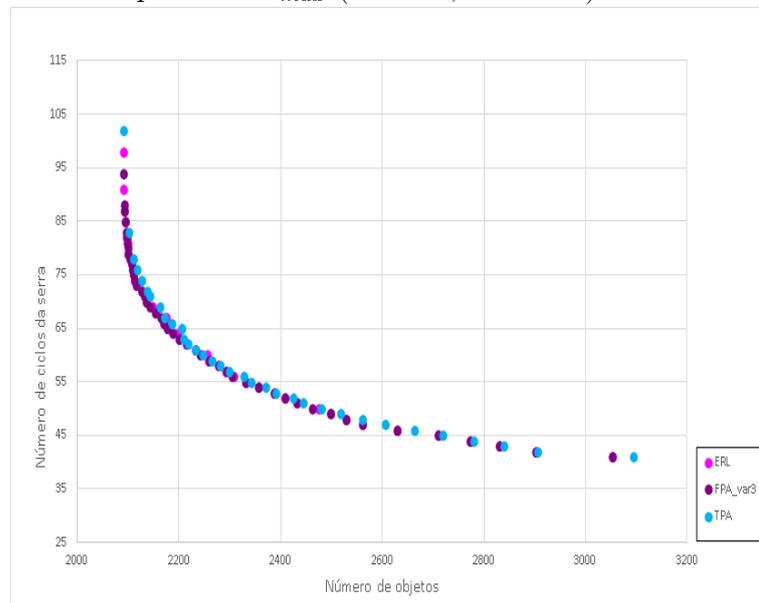
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.33: Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA_{var3}^* e TPA em relação ao hipervolume (σ^2) com $c = d_{max}$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 5.34: Aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelos métodos FPA_{var3}^* , ERL e TPA utilizando a GCd para $c = d_{max}$ ($id = 14$, $m = 100$).



Fonte: Elaborado pela autora.

5.3 Conclusões

Nesse capítulo apresenta-se um algoritmo para realização da GC dinâmica considerando os métodos ERL , FPA e TPA para a resolução do $PCEB_c$ unidimensional e bi-

dimensional. O estudo computacional realizado no caso unidimensional permitiu analisar a influência da geração de colunas dinâmica, mostrando que a aproximação da fronteira obtida é melhor do que quando se considera apenas a GC a priori (GCs). Mostrou-se também a influência da capacidade da serra na obtenção de uma fronteira com maior variedade de soluções (maior cardinalidade). Notou-se que quanto maior a capacidade da serra maior é a cardinalidade da fronteira. Ao considerar a capacidade da serra como sendo a demanda máxima (d_{max}), a cardinalidade das aproximações da fronteira de Pareto foram similares às obtidas em Aliano-Filho (2016), Aliano-Filho et al. (2021). A comparação entre os métodos *ERL*, *FPA** e *TPA* mostrou que aplicar técnicas de decomposição no espaço critério combinadas às técnicas de escalarização resulta em métodos mais rápidos que retornam uma aproximação melhor da fronteira de Pareto (método *FPA**). Com isso conclui-se que o método mais adequado para se resolver os Problemas de Corte de Estoque Biobjetivo unidimensional e bidimensional tanto para a minimização de (objetos, ciclos) quanto para a minimização de (objetos, *setup*) é o *FPA**.

Devido à dificuldade em obter padrões de corte bidimensionais discutida no Capítulo 2, foi possível ver através dos resultados mostrados nesse capítulo que para o caso bidimensional o tempo é prejudicado pelo modelo escolhido para gerar os padrões de corte (subproblema *price*). Uma proposta para contornar esse problema é testar outros modelos ou heurísticas para gerar os padrões de corte.

Os resultados para o caso unidimensional mostraram que o método *TPA* obteve uma boa aproximação da fronteira de Pareto, porém o desempenho com relação ao tempo computacional foi pior que o *FPA* devido ao grande número de subproblemas resolvidos, resultando em um número menor de soluções por unidade de tempo de execução e por subproblema. O próximo passo é verificar a viabilidade da utilização da estratégia do método *FPA* no método *TPA*, utilizando a ideia de decomposição do espaço critério e o cálculo dos pesos realizado apenas uma vez, evitando que os pesos utilizados no método *TPA* sejam variados a cada iteração. Por fim, pretende-se aplicar o método obtido da junção dos métodos *FPA* e *TPA* no Problema de Corte de Estoque Bidimensional Multiobjetivo (com mais de dois objetivos).

6 Considerações Finais

Nesta tese abordou-se as principais características do Problema de Corte de Estoque através de uma revisão da literatura e o método mais utilizado na sua resolução que é o método de Geração de Colunas. Apresentou-se os principais conceitos da Otimização Multiobjetivo destacando os métodos de solução mais utilizados que são os métodos de escalarização. O estudo das técnicas de escalarização mostrou uma variedade de métodos e poucos artigos que aplicam essas técnicas no PCEM-2D. Através da revisão realizada sobre os métodos de escalarização foi possível selecionar três métodos para o desenvolvimento do estudo computacional apresentado. Essa revisão, apresentada no Capítulo 3, serviu de inspiração para um minicurso ministrado na “XXXI SEMAT” (BORGES; RANGEL, 2019), e resultou no artigo (BORGES; RANGEL, 2020).

Um algoritmo de Geração de Colunas multiobjetivo foi proposto e incorporado nos métodos *ERL*, *FPA** e *TPA* aplicados ao ($PCEB_c^L$) unidimensional e bidimensional, Capítulo 4. Através do estudo computacional desenvolvido foi possível concluir que a geração de colunas dinâmica obteve aproximações da fronteira com maior qualidade do que quando se considera apenas a GC a priori (GCs), a qualidade da fronteira foi avaliada utilizando seis métricas de desempenho. Mostrou-se também como a cardinalidade da aproximação da fronteira pode ser afetada pelo valor da capacidade da serra, quanto maior a capacidade da serra maior é a cardinalidade. Através da alteração da capacidade da serra para o valor da demanda máxima no algoritmo proposto foi possível aplicar os métodos *ERL*, *FPA** e *TPA* para obter uma aproximação da fronteira para o *PCEB* (objetos, *setup*) obtendo resultados similares aos da literatura. A comparação entre os métodos *ERL*, *FPA** e *TPA* mostrou que aplicar técnicas de decomposição no espaço critério combinadas às técnicas de escalarização resulta em métodos mais rápidos que retornam uma aproximação melhor da fronteira de Pareto (método *FPA**). Com isso, conclui-se que o método mais adequado para se resolver os Problemas de Corte de Estoque Biobjetivo unidimensional e bidimensional tanto para a minimização de (objetos, ciclos) quanto para a minimização de (objetos, *setup*) é o *FPA**.

Os resultados para o caso unidimensional mostraram uma aproximação da fronteira de boa qualidade obtida pelo *TPA* porém ele não obtém um bom desempenho considerando os indicadores de desempenho número de soluções por tempo de execução (σ^5) e número de soluções por subproblema resolvido (σ^6), e o tempo computacional devido ao grande número de subproblemas resolvidos, resultando em um número menor de soluções por unidade de tempo de execução e por subproblema. Esse desempenho se dá por causa da dificuldade em determinar uma variação adequada dos pesos necessários na escalarização do método. Uma maneira de contornar pode ser verificando a possibilidade de aplicar a estratégia utilizada no método *FPA** ao método *TPA*. Utilizando a decomposição do espaço critério e o cálculo dos pesos realizado apenas uma vez, evita-se que os pesos no método *TPA* sejam variados a cada iteração do método.

Uma revisão sobre convexidade e convexidade generalizada (invexidade) é apresentado

e através desses conceitos são provados resultados de otimalidade parcial para o PCEB. Esses resultados permitem estabelecer conexões entre a otimização discreta e a otimização contínua multiobjetivo. No Apêndice C, o PCEB e o $PCEB_c$ são considerados em sua natureza não linear e não diferenciável. Uma suavização da função ciclos da serra e os resultados de otimalidade parcial são usados para encontrar soluções parcialmente eficientes através da solução de um sistema de equações não lineares. Resultados parciais desse apêndice foram publicados em Borges, Rangel e Neto (2020), Florentino et al. (2019).

Principais contribuições da tese:

- Revisão da teoria de otimização Multiobjetivo e métodos de escalarização;
- Desenvolvimento e implementação de um algoritmo de geração de colunas multi-objetivo aplicado em três métodos de escalarização da literatura para resolver o $PCEB_c^L$ unidimensional e bidimensional sendo facilmente adaptado para simular o $PCEB^L$ (objetos, *setup*).
- Comparação dos três métodos (ERL , FPA^* e TPA) através de um conjunto de métricas que comparam a qualidade da aproximação da fronteira e o desempenho dos métodos, determinando o método mais adequado.
- Desenvolvimento de uma estratégia para determinar soluções parcialmente eficientes que considera a característica não linear e não diferenciável do $PCEB_c$ propondo uma suavização para a função ciclos da serra.

Ainda há várias lacunas a serem preenchidas relativas ao PCE-2D multiobjetivo, entre elas, destacam-se:

- Melhoria no algoritmo de geração de colunas que pode ser obtida utilizando a estratégia “busca ponto a ponto aprimorada” descrita em Artigues, Jozefowicz e Sarpong (2018).
- Devido à dificuldade em obter padrões de corte bidimensionais discutida no Capítulo 2, foi possível ver através dos resultados mostrados nesse Capítulo 4 que para o caso bidimensional o tempo é prejudicado pelo modelo escolhido para gerar os padrões de corte (subproblema *price*). Uma proposta para contornar esse problema é testar outros modelos ou heurísticas para gerar os padrões de corte.
- Combinar os métodos FPA^* e TPA .
- Aplicar outras escalarizações como a Var.8 do ER que obteve melhor desempenho de acordo com Sáez-Aguado e Trandafir (2018).
- Considerar o PCE-2D triobjetivo, considerando, por exemplo, a minimização de (objetos, ciclos, *setup*).

Referências

- ALIANO-FILHO, A. *Novas extensões de técnicas de escalarização no problema de corte unidimensional inteiro multiobjetivo*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, IMECC, Campinas, 2016.
- ALIANO-FILHO, A.; MORETTI, A.; PATO, M. Aplicação do algoritmo ϵ -restrito com uma heurística de arredondamento no problema de corte unidimensional inteiro multiobjetivo. In: *Anais do XLVII SBPO. SOBRAPO - Brazilian Operational Research Society*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 3983–3994.
- ALIANO-FILHO, A.; MORETTI, A. C.; PATO, M. V. A comparative study of exact methods for the bi-objective integer one-dimensional cutting stock problem. *Journal of the Operational Research Society*, Taylor & Francis, v. 69, n. 1, p. 91–107, 2018.
- ALIANO-FILHO, A. et al. An exact scalarization method with multiple reference points for bi-objective integer linear optimization problems. *Annals of Operations Research*, v. 296, n. 1, p. 35–69, 2021.
- ANEJA, Y. P.; NAIR, K. P. K. Bicriteria transportation problem. *Management Science*, v. 25, n. 1, p. 73–78, 1979.
- ARANA-JIMÉNEZ, M. et al. Pseudoinvexity, optimality conditions and efficiency in multiobjective problems; duality. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, v. 68, p. 24–34, 2008.
- ARANA-JIMÉNEZ, M.; SALLES-NETO, L. Sufficient condition for partial efficiency in a bicriteria nonlinear cutting stock problem. *RAIRO-Operations Research*, EDP Sciences, v. 51, n. 3, p. 709–717, 2017.
- ARTIGUES, C.; JOZEFOWIEZ, N.; SARPONG, B. M. Column generation algorithms for bi-objective combinatorial optimization problems with a min–max objective. *EURO Journal on Computational Optimization*, v. 6, n. 2, p. 117–142, 2018.
- ASSIS, N. S.; RANGEL, S. Uma revisão sobre o uso da programação dinâmica na solução do problema de corte. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 7, n. 1, 2020.
- BEENSON, R. *Optimization with respect to multiple criteria*. Tese (Doutorado) — University of Southern California, Los Angeles, California, 1971.
- BELOV, G.; SCHEITHAUER, G. A branch-and-cut-and-price algorithm for one-dimensional stock cutting and two-dimensional two-stage cutting. *European Journal of Operational Research*, v. 171, n. 1, p. 85 – 106, 2006.

- BEN-TAL, A. Characterization of pareto and lexicographic optimal solutions. In: FANDEL, G.; GAL, T. (Ed.). *Multiple Criteria Decision Making Theory and Application*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1980. p. 1 – 11.
- BENSON, H. P.; SUN, E. A weight set decomposition algorithm for finding all efficient extreme points in the outcome set of a multiple objective linear program. *European Journal of Operational Research*, v. 139, n. 1, p. 26 – 41, 2002.
- BOLAND, N.; CHARKHGARD, H.; SAVELSBERGH, M. The triangle splitting method for biobjective mixed integer programming. In: LEE, J.; VYGEN, J. (Ed.). *Integer Programming and Combinatorial Optimization*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2014. p. 162 – 173.
- BOLAND, N.; CHARKHGARD, H.; SAVELSBERGH, M. A criterion space search algorithm for biobjective integer programming: The balanced box method. *INFORMS Journal on Computing*, v. 27, n. 4, p. 735–754, 2015.
- BOLAND, N.; CHARKHGARD, H.; SAVELSBERGH, M. A criterion space search algorithm for biobjective mixed integer programming: The triangle splitting method. *INFORMS Journal on Computing*, v. 27, n. 4, p. 597–618, 2015.
- BOLAND, N.; CHARKHGARD, H.; SAVELSBERGH, M. The l-shape search method for triobjective integer programming. *Mathematical Programming Computation*, v. 8, p. 217–251, 2016.
- BOLAND, N.; CHARKHGARD, H.; SAVELSBERGH, M. A new method for optimizing a linear function over the efficient set of a multiobjective integer program. *European Journal of Operational Research*, v. 260, n. 3, p. 904–919, 2017.
- BOLAND, N.; CHARKHGARD, H.; SAVELSBERGH, M. The quadrant shrinking method: A simple and efficient algorithm for solving tri-objective integer programs. *European Journal of Operational Research*, v. 260, n. 3, p. 873–885, 2017.
- BORGES, J.; RANGEL, S. Introdução aos problemas de otimização matemática multiobjetivo. In: *XXXI SEMAT - Semana da Matemática*. [S.l.: s.n.], 2019. Realizada no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Câmpus de São José do Rio Preto, IBILCE - UNESP.
- BORGES, J.; RANGEL, S. Uma revisão sobre métodos de escalarização para o problema de corte de estoque bidimensional multiobjetivo. In: *Anais do LII Simpósio Brasileiro de pesquisa Operacional - SBPO*. [s.n.], 2020. Visitada pela última vez em 22/07/2021. Disponível em: <<https://proceedings.science/sbpo-2020/papers/>>.
- BORGES, J. C.; RANGEL, S.; NETO, L. L. de S. A teoria da invexidade aplicada ao problema de corte de estoque biobjetivo. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 7, n. 1, 2020.
- CARVALHO, J. V. de. Lp models for bin packing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, v. 141, n. 2, p. 253 – 273, 2002.
- CERVELATI, J.; MEDAR, M. R. Funções invexas diferenciáveis e o teorema de karush-kuhn-tucker1. *Trends in Applied and Computational Mathematics*, v. 7, n. 1, 2006.

- CHANKONG, V.; HAIMES, Y. Y. *Multiobjective decision making: theory and methodology*. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2008.
- CHAVES, C. *Um estudo sobre heurísticas residuais para o problema de corte de estoque bidimensional*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2019.
- CHRISTOFIDES, N.; WHITLOCK, C. An algorithm for two-dimensional cutting problems. *Operations Research*, v. 25, n. 1, p. 30 – 44, 1977.
- CINTRA, G. et al. Algorithms for two-dimensional cutting stock and strip packing problems using dynamic programming and column generation. *European Journal of Operational Research*, v. 191, n. 1, p. 61 – 85, 2008.
- CRAVEN, B. Invex functions and constrained local minima. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Cambridge University Press, v. 24, n. 3, p. 357 – 366, 1981.
- DEB, K. *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- DEGRAEVE, Z.; PEETERS, M. Optimal integer solutions to industrial cutting-stock problems: Part 2, benchmark results. *INFORMS Journal on Computing*, v. 15, n. 1, p. 58–81, 2003.
- DOLAN, E. D.; MORÉ, J. J. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, v. 91, n. 2, p. 201–213, 2002.
- DYCKHOFF, H. A new linear programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research*, v. 29, p. 1092–1104, 12 1981.
- DYCKHOFF, H. Cutting and packing a typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 44, n. 2, p. 145 – 159, 1990.
- EGUDO, R.; HANSON, M. Multiobjective duality with invexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 126, n. 2, p. 469 – 477, 1987.
- EHRGOTT, M. *Multicriteria Optimization*. Berlin: Springer, 2000.
- EHRGOTT, M. A discussion of scalarization techniques for multiple objective integer programming. *Annals of Operations Research*, v. 147, n. 1, p. 343 – 360, 2006.
- EHRGOTT, M.; GANDIBLEUX, X. A survey and annotated bibliography of multiobjective combinatorial optimization. *OR-Spektrum*, v. 22, n. 4, p. 425 – 460, 2000.
- EHRGOTT, M.; GANDIBLEUX, X. Multiple objective combinatorial optimization - a tutorial. In: *Multi-Objective Programming and Goal Programming*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2003. p. 3 – 18.
- EVANS, J. P.; STEUER, R. E. A revised simplex method for linear multiple objective programs. *Mathematical Programming*, v. 5, n. 1, p. 54 – 72, 1973.
- FIGUEIREDO, A. G. d. *Análise de produtividade de padrões de corte na indústria de móveis*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2006.

- FLORENTINO, H. et al. Modelando e resolvendo sistemas não lineares com técnicas de programação por metas. In: *Anais do XXXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC*. [S.l.: s.n.], 2019.
- FOERSTER, H.; WASCHER, G. Pattern reduction in one-dimensional cutting stock problems. *International journal of production research*, Taylor & Francis, v. 38, n. 7, p. 1657–1676, 2000.
- GAU, T.; WÄSCHER, G. Cutgen1: A problem generator for the standard one-dimensional cutting stock problem. *European Journal of Operational Research*, v. 84, n. 3, p. 572–579, 1995.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research*, v. 9, n. 6, p. 849 – 859, 1961.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting stock problema - part ii. *Operations Research*, v. 11, n. 6, p. 863 – 888, 1963.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations Research*, v. 13, n. 1, p. 94 – 120, 1965.
- GOMEZ, J. C.; TERASHIMA-MARINS, H. Approximating multi-objective hyper-heuristics for solving 2d irregular cutting stock problems. In: SIDOROV, G. e. a. (Ed.). *Advances in Soft Computing*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2010. p. 349 – 360.
- HAMACHER, H. W.; PEDERSEN, C. R.; RUZIKA, S. Finding representative systems for discrete bicriterion optimization problems. *Operations Research Letters*, v. 35, n. 3, p. 336 – 344, 2007.
- HANSON, M. A. On sufficiency of the kuhn-tucker conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 80, n. 2, p. 545 – 550, 1981.
- HINXMAN, A. The trim-loss and assortment problems: A survey. *European Journal of Operational Research*, v. 5, n. 1, p. 8–18, 1980.
- HOMAG. 2019. Visitada pela última vez em: 04/06/2019. Disponível em: <<https://www.homag.com/pt/detalhes-do-produto/seccionadora-de-paines-sawteq-b-300/>>.
- IBM, C. *CPLEX*. [S.l.], 2014. Visitada pela última vez em: 13/03/2019. Disponível em: <<http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer/>>.
- IBM Support. 2018. Visitada pela última vez em: 11/05/2021. Disponível em: <<https://www.ibm.com/support/pages/note-reproducibility-cplex-runs>>.
- JOZEFOWIEZ, N.; LAPORTE, G.; SEMET, F. A generic branch-and-cut algorithm for multiobjective optimization problems: Application to the multilabel traveling salesman problem. *INFORMS Journal on Computing*, v. 24, p. 554 – 564, 2012.
- JULIA, C. *JuMP*. [S.l.], 2018. Visitada pela última vez em: 09/10/2020. Disponível em: <<https://juliacomputing.com/products/juliapro/>>.
- KANTOROVICH, L. V. Mathematical methods of organizing and planning production. *Management Science*, v. 6, n. 4, p. 366 – 422, 1960.

- KOLEN, A. W. J.; SPIEKSMAN, F. C. R. Solving a bi-criterion cutting stock problem with open-ended demand: a case study. *Journal of the Operational Research Society*, v. 51, n. 11, p. 1238 – 1247, 2000.
- LIBERALINO, C. H. P. et al. Uso de dicas do usuário na otimização do problema bin packing tridimensional. *SBPO-A PESQUISA OPERACIONAL E O USO RACIONAL DE RECURSOS HIDRICOS, XL*, p. 1942–1950, 2008.
- LODI, A.; MONACI, M. Integer linear programming models for 2-staged two-dimensional knapsack problems. *Mathematical Programming*, Springer-Verlag, v. 94, n. 2-3, p. 257–278, 2003.
- MALAGUTI, E.; DURÁN, R. M.; TOTH, P. Approaches to real world two-dimensional cutting problems. *Omega*, v. 47, p. 99 – 115, 2014.
- MARTELLO, S.; TOTH, P. *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations*. USA: John Wiley & Sons, Inc., 1990. ISBN 0471924202.
- MARTELLO, S.; VIGO, D. Exact solution of the two-dimensional finite bin packing problem. *Management Science*, v. 44, n. 3, p. 388–399, 1998.
- MARTIN, M. et al. Models for the two-dimensional rectangular single large placement problem with guillotine cuts and constrained pattern. *International Transactions in Operational Research*, v. 27, n. 2, p. 767–793, 2020.
- MARTIN, M. et al. The constrained two-dimensional guillotine cutting problem with defects: an ilp formulation, a benders decomposition and a cp-based algorithm. *International Journal of Production Research*, Taylor & Francis, v. 58, n. 9, p. 2712–2729, 2020.
- MARTIN, M.; MORABITO, R.; MUNARI, P. A bottom-up packing approach for modeling the constrained two-dimensional guillotine placement problem. *Computers & Operations Research*, v. 115, p. 104851, 2020.
- MARTIN, M. P. *Problemas de corte guilhotinado e restritos: formulações matemáticas e métodos de solução*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de São Carlos, São carlos, 2019.
- MAVROTAS, G.; DIAKOULAKI, D. A branch and bound algorithm for mixed zero-one multiple objective linear programming. *European Journal of Operational Research*, v. 107, n. 3, p. 530 – 541, 1998.
- MELLOULI, A.; MELLOULI, R.; MASMOUDI, F. An innovative genetic algorithm for a multi-objective optimization of two-dimensional cutting-stock problem. *Applied Artificial Intelligence*, Taylor & Francis, v. 33, n. 6, p. 531–547, 2019.
- MISHRA, S. K.; GIORGI, G. *Nonconvex Optimization and its Applications. Inconvity and Optimization*. Berlin: Springer Verlag, 2008.
- MORABITO, R.; ARENALES, M. N. Staged and constrained two-dimensional guillotine cutting problems: An and/or-graph approach. *European Journal of Operational Research*, v. 94, n. 3, p. 548 – 560, 1996.

- MOSQUERA, G.; RANGEL, S. Redução de ciclos da serra no problema de corte de estoque bidimensional na indústria de móveis. In: *Anais do XXX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC*. [S.l.: s.n.], 2007.
- MUNARI-JUNIOR, P. A. Comparação de softwares científicos utilizando perfis de desempenho: automatização dos cálculos pela planilha perfis. xls. São Carlos, SP, Brasil., 2009.
- MUÑOZ, C. et al. Improving cutting-stock plans with multi-objective genetic algorithms. In: MIRA J. AND ÁLVAREZ, J. R. (Ed.). *Bio-inspired Modeling of Cognitive Tasks*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007. p. 528 – 537.
- OSUNA-GÓMEZ, R.; BEATO-MORENO, A.; RUFIAN-LIZANA, A. Generalized convexity in multiobjective programming. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 233, n. 1, p. 205 – 220, 1999.
- POLDI, K. C.; ARENALES, M. N. Heuristics for the one-dimensional cutting stock problem with limited multiple stock lengths. *Computers & Operations Research*, v. 36, n. 6, p. 2074 – 2081, 2009.
- RANGEL, S.; FIGUEIREDO, A. G. d. O problema de corte de estoque em indústrias de móveis de pequeno e médio portes. *Pesquisa Operacional*, scielo, v. 28, p. 451 – 472, 2008.
- RANGEL, S.; SÁEZ-AGUADO, J. Biobjective approaches for the cutting stock problem minimizing total number of objects and saw cycles. *INFORMS 2017 Technical Program*, v. 1, p. 165–165, 2017a.
- RANGEL, S.; SÁEZ-AGUADO, J. Unidimensional cutting stock problem: Mathematical models to minimize the number of saw cycles and objects. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 5, n. 1, 2017b.
- RESPICIO, A.; CAPTIVO, E. Bi-objective sequencing of cutting patterns. In: *METAHEURISTICS: progress as real problem solvers*. [S.l.]: Springer, 2005. p. 227 – 241.
- RIQUELME, N.; LÜCKEN, C. V.; BARAN, B. Performance metrics in multi-objective optimization. In: *2015 Latin American Computing Conference (CLEI)*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 1–11.
- SÁEZ-AGUADO, J.; TRANDAFIR, P. C. Variants of the ϵ -constraint method for biobjective integer programming problems: application to ρ -median-cover problems. *Mathematical Methods of Operations Research*, v. 87, n. 2, p. 251 – 283, 2018.
- SALLES-NETO, L. L.; ARAUJO, S.; GOLFETO, R. Um problema de corte de estoque multiobjetivo. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, v. 6, n. 2, p. 183 – 201, 2014.
- SANTIS, M. D.; GRANI, G.; PALAGI, L. Branching with hyperplanes in the criterion space: The frontier partitioner algorithm for biobjective integer programming. *European Journal of Operational Research*, v. 283, n. 1, p. 57–69, 2020.

- SILVA, E.; ALVELOS, F.; CARVALHO, J. V. de. An integer programming model for two- and three-stage two-dimensional cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, v. 205, n. 3, p. 699–708, 2010.
- SILVA, E.; OLIVEIRA, J. F.; WÄSCHER, G. 2dcpackgen: A problem generator for two-dimensional rectangular cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 237, n. 3, p. 846–856, 2014.
- SLIMANI, H.; RADJEF, M. S. *Multiobjective Programming under Generalized Inconvexity: Optimality, Duality, Applications*. [S.l.]: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2010.
- SOLAND, R. M. Multicriteria optimization: A general characterization of efficient solutions. *Decision sciences*, Wiley Online Library, v. 10, n. 1, p. 26 – 38, 1979.
- SOURD, F.; SPANJAARD, O. A multiobjective branch-and-bound framework: Application to the biobjective spanning tree problem. *INFORMS Journal on Computing*, v. 20, n. 3, p. 472 – 484, 2008.
- STIDSEN, T.; ANDERSEN, K. A.; DAMMANN, B. A branch and bound algorithm for a class of biobjective mixed integer programs. *Management Science*, v. 60, n. 4, p. 1009 – 1032, 2014.
- SYLVA, J.; CREMA, A. A method for finding the set of non-dominated vectors for multiple objective integer linear programs. *European Journal of Operational Research*, v. 158, n. 1, p. 46 – 55, 2004.
- TEIXEIRA, F. L.; POLDI, K. C. O problema de corte de estoque associado ao problema de minimizar o número de pilhas abertas. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 7, n. 1, 2020.
- TOSCANO, A.; RANGEL, S.; YANASSE, H. H. A heuristic approach to minimize the number of saw cycles in small-scale furniture factories. *Annals of Operations Research*, v. 258, n. 2, p. 719–746, 2017.
- VANDERBECK, F. Exact algorithm for minimising the number of setups in the one-dimensional cutting stock problem. *Operations Research*, v. 48, n. 6, p. 915–926, 2000.
- WÄSCHER, G.; GAU, T. Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: A computational study. *Operations-Research-Spektrum*, Springer-Verlag, v. 18, n. 3, p. 131–144, 1996.
- WÄSCHER, G.; HAUSSNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 183, n. 3, p. 1109 – 1130, 2007.
- WILLIAMS, H. P. *Model building in mathematical programming*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- YANASSE, H.; MORABITO, R. Linear models for one-group two-dimensional guillotine cutting problems. *International Journal of Production Research*, v. 44, p. 3471 – 3491, 2006.

YANASSE, H.; ZINOBER, A.; HARRIS, R. G. Two-dimensional cutting stock with multiple stock sizes. *Journal of The Operational Research Society - J OPER RES SOC*, v. 42, p. 673 – 683, 1991.

YANASSE, H. H. A note on the minimization of the number of cutting cycles problem. *Livro de resumos do XI Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha - SPOLM*, 2008.

YANASSE, H. H.; MORABITO, R. A note on linear models for two-group and three-group two-dimensional guillotine cutting problems. *International Journal of Production Research*, v. 46, n. 21, p. 6189–6206, 2008.

YU, P.; ZELENY, M. The techniques of linear multiobjective programming. *Revue française d'automatique, informatique et recherche opérationnelle*, v. 3, p. 51 – 71, 1974.

ZELENY, M. *Linear Multiobjrctivr Programming*. Berlim: Springer Verlag, 1974.

Apêndice A - Variações dos Métodos de Escalarização

Neste apêndice são apresentadas as variações baseadas nos métodos Soma Ponderada, ϵ -Restrito e Métrica de Tchebycheff encontradas na literatura.

A.1 Variações do método da Soma Ponderada

VarP. 1: Essa variação é baseada na adição de restrições que consistem em considerar limitantes (v_k) para as funções objetivo, resultando na escalarização (A.1).

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^p w_k f_k(x) \\ \text{s.a.} \quad & f_k(x) \leq v_k, k = 1, \dots, p \\ & x \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Em Soland (1979) é mostrado que toda solução de (A.1) é uma solução eficiente, e reciprocamente, toda solução eficiente é solução ótima de um problema do tipo (A.1).

VarP. 2: Dados dois pontos não dominados $z^1 \in \mathcal{Z}$ e $z^2 \in \mathcal{Z}$, e considerando $w_k > 0, \forall k = 1, \dots, p$, para garantir que as soluções eficientes serão obtidas resolve-se a escalarização (A.2).

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^p w_k f_k(x) \\ \text{s.a.} \quad & f_k(x) \leq z_k - 1, k = 1, \dots, p \\ & x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{A.2}$$

em que $z_k = \max(z_k^1, z_k^2)$.

Considerando variações do método SP é possível melhorar a busca pela fronteira de Pareto.

A.2 Variações do método ϵ -Restrito

Para listar as variações do método, Sáez-Aguado e Trandafir (2018) diferenciam a implementação em dois tipos:

Tipo 1: Inicialmente encontram-se os pontos extremos não dominados, ou seja, os pontos lexicográfico, z^1 e z^N . Considera-se $\epsilon_{1k} = z_k^N$ e $\epsilon_{2k} = z_k^1$, e cada ϵ_k irá variar no intervalo $[\epsilon_{1k}, \epsilon_{2k}]$ com $k = 1, \dots, p$ e $k \neq i$ (i é o índice da função objetivo escolhida como critério de otimização) para resolver $P(\epsilon)$.

Tipo 2: ϵ_k é iniciado com valor igual a ∞ ou um limitante superior para $f_k(x)$ para resolver $P(\epsilon)$, o algoritmo termina quando o subproblema correspondente é infactível.

A seguir apresentamos nove Variações do Método clássico ϵ -Restrito.

Var. 1: (*Método clássico ϵ -Restrito com eliminação de pontos dominados*)

Essa variação é a abordagem clássica, que consiste em resolver para cada ϵ o problema $P(\epsilon)$ utilizando a implementação do Tipo 2. Ao final é necessário adicionar um passo para eliminar as possíveis soluções dominadas obtidas.

Var. 3 e 4: (*Método ϵ -Restrito Aumentado*)

O Método ϵ -Restrito Aumentado consiste em incluir uma ponderação ($0 < \rho \in \mathbb{R}^{p-1}$) dos objetivos $f_k(x)$, $k \neq i$ como uma penalização na função objetivo, assim obtendo a escalarização (A.3).

$$P(\epsilon, \rho) \quad \min \quad f_i(x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p \rho_k f_k(x) \quad (\text{A.3})$$

$$s.a. \quad f_k(x) \leq \epsilon_k, k = 1, \dots, p, \quad k \neq i$$

$$x \in \mathcal{X}$$

Dependendo da escolha do vetor ρ outras variações podem ser obtidas como por exemplo:

Var. 3 *Parâmetro fixo:* Resolve o problema $P(\epsilon, \rho)$ considerando ρ entre 10^{-3} e 10^{-6} . Sáez-Aguado e Trandafir (2018) afirma que para discriminar soluções fracamente eficientes, alguns autores simplesmente resolvem a escalarização $P(\epsilon, \rho)$ com um pequeno valor positivo ρ para garantir que todas as soluções geradas sejam eficientes.

Var. 4 *Parâmetro dependendo de dados:* Outra variação pode ser obtida considerando que o parâmetro ρ é calculado a partir de dados do problema como por exemplo: calculando os pontos $z_k^L = \min\{f_k(x) : x \in \mathcal{X}\}$ e $z_k^U = \max\{f_k(x) : x \in \mathcal{X}\}$, $\rho_k^0 = \frac{1}{z_k^U - z_k^L + 1}$ e resolve-se o problema $P(\epsilon, \rho^0)$.

Var. 5: (*Método ϵ -Restrito com variável de folga*)

O Método ϵ -Restrito com variável de folga é representado pela escalarização (A.4).

$$P^+(\epsilon, \rho) \quad \min \quad f_i(x) - \rho^T s \quad (\text{A.4})$$

$$s.a. \quad f_k(x) + s_k \leq \epsilon_k, k = 1, \dots, p, \quad k \neq i$$

$$x \in \mathcal{X}, 0 \leq s \in \mathbb{R}^{p-1}.$$

No caso biobjetivo, se $\rho > 0$, toda solução ótima (x^*, s^*) de $P^+(\epsilon, \rho)$ satisfaz $f_2(x^*) + s^* = \epsilon$, e x^* é uma solução eficiente do problema biobjetivo. Note que se $\rho > 0$ temos que $s = \epsilon - f_2(x)$ e o problema $P^+(\epsilon, \rho)$ é equivalente ao problema (A.5).

$$P^+(\epsilon, \rho) \quad \min \quad f_1(x) + \rho f_2(x) - \rho \epsilon \quad (\text{A.5})$$

$$s.a. \quad f_2(x) \leq \epsilon,$$

$$x \in \mathcal{X},$$

eliminando o termo $-\rho \epsilon$ da função objetivo temos que $P(\epsilon, \rho^0) = P^+(\epsilon, \rho)$.

Var. 6: (*Método ϵ -Restrito com restrições elásticas*)

O Método ϵ -Restrito com restrições elásticas consiste em introduzir uma variável de excesso $s \geq 0$ e penalizar a função objetivo com um coeficiente $0 \leq \pi \in \mathbb{R}^{p-1}$ é representado pela escalarização (A.6).

$$\begin{aligned} P^-(\epsilon, \pi) \quad \min \quad & f_i(x) + \pi^T s \\ \text{s.a.} \quad & f_k(x) - s_k \leq \epsilon_k, k = 1, \dots, p, \quad k \neq i \\ & x \in \mathcal{X}, 0 \leq s \in \mathbb{R}^{p-1}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Para o caso biobjetivo tem-se os seguintes resultados:

- . Para alguma solução ótima (x^*, s^*) de $P^-(\epsilon, \pi)$, x^* é uma solução fracamente eficiente para o problema biobjetivo.
- . Se (x^*, s^*) é única então x^* é eficiente.
- . Se $s^* > 0$ para alguma solução ótima de $P^-(\epsilon, \pi)$, então x^* é eficiente.

A partir das variações Var1-Var6 encontradas na literatura, Sáez-Aguado e Trandafir (2018) propõem três novas variações: Var 7 - Var 9.

Var. 7: (*Método (ER) aumentado com parâmetro fixo dependendo de dados (versão relaxada)*)

O método proposto é resolver a escalarização $P(\epsilon, \rho)$ com $\rho_k = \frac{1}{\bar{z}_k - \underline{z}_k + 1}$ onde $\underline{z}_k = \min\{f_k(x) : x \in \bar{\mathcal{X}}, k \neq i\}$ e $\bar{z}_k = \max\{f_k(x) : x \in \bar{\mathcal{X}}, k \neq i\}$ e $\bar{\mathcal{X}}$ é a relaxação linear do conjunto \mathcal{X} iniciado com $\epsilon_k = \bar{z}_k$. A cada iteração, o valor de ϵ é atualizado por $\epsilon_k = f_k(x^*) - 1$ (x^* solução da iteração anterior).

Var. 8: (*Método (ER) aumentado com parâmetro dependendo de dados atualizado*)

A diferença desse método para o anterior é que o parâmetro ρ é calculado em cada iteração por isso o nome atualizado, enquanto que o método anterior calcula o parâmetro ρ apenas no passo inicial. Assim, como o valor de ϵ é atualizado por $\epsilon_k = f_k(x^*) - 1$, a atualização do parâmetro ρ é dada por, $\rho_k = \frac{1}{\epsilon_k - \underline{z}_k + 1}, k \neq i$.

Var. 9: (*Método (ER) aumentado com restrições elásticas e parâmetro atualizado*)

O método proposto é representado pelas escalarização (A.7).

$$\begin{aligned} P^-(\epsilon, \rho, \pi) \quad \min \quad & f_i(x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p \rho_k f_k(x) + \pi^T s \\ \text{s.a.} \quad & f_k(x) - s_k \leq \epsilon_k, k = 1, \dots, p, \quad k \neq i \\ & x \in \mathcal{X}, s \geq 0. \end{aligned} \tag{A.7}$$

O parâmetro π é calculado apenas uma vez através da equação $\pi = \bar{z}_i - \underline{z}_i + 1$, iniciado com $\epsilon_k = \bar{z}_k, k \neq i$. A cada iteração o problema $P^-(\epsilon, \rho, \pi)$ é resolvido com $\rho_k = \frac{1}{\epsilon_k - \underline{z}_k + 1}, k \neq i$ e o valor de ϵ é atualizado por $\epsilon_k = f_k(x^*) - 1, k \neq i$.

Para o caso biobjetivo, se $\rho > 0$ e $\pi > 0$, então para qualquer solução ótima (x^*, s^*) de $P^-(\epsilon, \rho, \pi)$, x^* é eficiente.

A.3 Variações do método da Métrica de Tchebycheff

VarT. 2: (*Método de Tchebycheff Modificado* (ALIANO-FILHO; MORETTI; PATO, 2018))
 Esse método foi proposto por Aliano-Filho, Moretti e Pato (2018) para contornar a dificuldade na variação dos pesos (w_k) necessários no método *TPA*. Considerando $p = 2$ e dados os pontos lexicográficos $z^{lex1} = (z_1^-, z_2^+)$ e $z^{lex2} = (z_1^+, z_2^-)$, a ideia é normalizar as funções objetivos de acordo com os fatores de normalização dados na equação (A.8).

$$\beta_i = \frac{1}{z_i^+ - z_i^-}, i = 1, 2. \quad (\text{A.8})$$

O peso w é considerado variando uniformemente no intervalo $[0, 1]$, assim a medida que os pesos estão sendo variados, os pontos não dominados são obtidos da esquerda para a direita, ou seja, o primeiro ponto não dominado obtido é z^{lex1} e o último é z^{lex2} . Considere que em uma dada iteração $k > 1$ com seu respectivo peso w , o ponto não dominado $z^k = (f_1(x^k), f_2(x^k))$ já é conhecido. A escalarização é definida em (A.9) para a iteração $k + 1$, com $k > 1$.

$$\begin{aligned} \min \quad & v + \rho \sum_{k=1}^2 \beta_i \cdot f_k(x) & (\text{A.9}) \\ \text{s.a.} \quad & w^{k+1} \cdot \beta_1 \cdot f_1(x) \leq v \\ & (1 - w^{k+1}) \cdot \beta_2 \cdot f_2(x) \leq v \\ & f_1(x) \geq z_1^k + 1 \\ & f_2(x) \leq z_2^k - 1 \\ & x \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Esse método utiliza um ponto não dominado encontrado anteriormente para guiar a busca por outros pontos não dominados de modo que o ponto já conhecido não seja encontrado em iterações subseqüentes. Com isso o número de subproblemas a serem resolvidos é reduzido.

Apêndice B - Tabelas Complementares

Nesse apêndice encontra-se as tabelas complementares do estudo computacional apresentado na Seção 5.1 e 5.2.

B.1 Resultados para os Métodos ERL, FPA^* e TPA aplicados ao $PCEB_c^L-1D$

Tabela B.1: Resultados obtidos pelo método FPA para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4$.

.id item	m	nº colunas		Tempo total		it		σ^1		σ_o^3		σ_c^3	
		GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd
P	10	10	10	30,83	30,41	0	0	1	1	0	0	0	0
P	20	20	20	30,52	30,50	0	0	1	1	0	0	0	0
P	40	127	136	834,90	643,70	11	8	6	6	8	8	15	19
P	60	155	174	825,28	634,42	10	6	7	4	15	13	31	26
P	80	167	198	590,32	754,79	6	8	4	5	19	21	23	30
P	95	195	226	634,24	636,97	6	6	4	4	20	17	29	29
M	10	10	10	30,45	30,42	0	0	1	1	0	0	0	0
M	20	20	20	30,35	30,25	0	0	1	1	0	0	0	0
M	40	40	40	30,62	30,34	0	0	1	1	0	0	0	0
M	60	166	166	32,26	32,59	0	0	1	1	0	0	0	0
M	80	230	230	35,21	35,38	0	0	1	1	0	0	0	0
M	99	373	373	39,04	39,39	0	0	1	1	0	0	0	0
G	10	10	10	30,40	32,98	0	0	1	1	0	0	0	0
G	20	20	20	30,46	33,76	0	0	1	1	0	0	0	0
G	40	40	40	30,42	34,71	0	0	1	1	0	0	0	0
G	60	78	80	31,23	37,85	2	0	2	1	1	0	1	0
G	80	315	319	35,12	52,06	0	0	1	1	0	0	0	0
G	97	315	319	41,20	37,36	3	0	3	1	2	0	2	0

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela B.2: Resultados obtidos pelo método *TPA* para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4$.

id item	m	nº colunas		Tempo total		it		σ^1		σ_o^3		σ_c^3	
		GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd
P	10	10	10	23,85	23,78	0	0	1	1	0	0	0	0
P	20	20	20	23,62	24,53	0	0	1	1	0	0	0	0
P	40	127	134	1131,30	1245,41	16	18	7	6	8	8	17	19
P	60	155	170	2534,15	2271,91	29	24	11	10	15	13	31	26
P	80	167	191	1858,26	2023,54	26	29	10	10	21	21	28	30
P	95	195	225	1954,60	2022,69	28	29	10	9	20	22	29	30
M	10	10	10	23,73	24,06	0	0	1	1	0	0	0	0
M	20	20	20	23,73	23,79	0	0	1	1	0	0	0	0
M	40	40	40	23,65	23,89	0	0	1	1	0	0	0	0
M	60	166	166	25,33	25,43	0	0	1	1	0	0	0	0
M	80	230	230	28,69	28,80	0	0	1	1	0	0	0	0
M	99	373	373	32,80	32,75	0	0	1	1	0	0	0	0
G	10	10	10	23,69	23,89	0	0	1	1	0	0	0	0
G	20	20	20	23,92	23,75	0	0	1	1	0	0	0	0
G	40	40	40	23,91	23,85	0	0	1	1	0	0	0	0
G	60	78	80	24,29	24,20	0	0	2	1	1	0	1	0
G	80	315	319	28,64	28,72	0	0	1	1	0	0	0	0
G	97	315	319	89,91	29,91	1	0	3	1	2	0	2	0

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela B.3: Resultados obtidos pelo método *ERL* para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 7$.

id item	m	nº colunas		Tempo total		it		σ^1		σ_o^3		σ_c^3	
		GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd
P	10	10	10	23,28	23,54	1	1	1	1	0	0	0	0
P	20	20	20	23,54	23,49	1	1	1	1	0	0	0	0
P	40	134	154	3032,72	2290,54	12	13	9	6	13	10	27	28
P	60	153	178	1491,21	2104,47	10	10	8	7	24	23	31	36
P	80	175	197	926,24	928,10	5	5	5	5	22	40	27	31
P	95	207	248	760,61	931,85	4	5	4	4	39	34	38	46
M	10	10	10	23,81	23,62	1	1	1	1	0	0	0	0
M	20	20	20	23,38	23,50	1	1	1	1	0	0	0	0
M	40	40	40	23,34	23,47	1	1	1	1	0	0	0	0
M	60	167	168	24,85	25,00	1	1	1	1	0	0	0	0
M	80	285	285	28,71	29,22	1	1	1	1	0	0	0	0
M	99	381	381	43,83	322,14	1	1	1	1	0	0	0	0
G	10	10	10	23,39	23,40	1	1	1	1	0	0	0	0
G	20	20	20	23,45	24,04	1	1	0	1	0	0	0	0
G	40	40	40	23,55	23,41	1	1	1	1	0	0	0	0
G	60	78	78	23,73	23,99	3	3	3	3	9	9	2	2
G	80	314	315	28,30	28,59	1	2	1	2	0	2	0	1
G	97	292	306	33,54	90,44	5	3	5	3	14	3	4	2

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela B.4: Resultados obtidos pelo método FPA^* para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 7$.

id item	m	nº colunas		Tempo total		it		σ^1		σ_o^3		σ_c^3	
		GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd
P	10	10	10	30,58	30,46	0	0	1	1	0	0	0	0
P	20	20	20	30,62	30,56	0	0	1	1	0	0	0	0
P	40	134	154	960,41	761,66	12	10	5	5	13	10	29	29
P	60	153	178	1116,57	1093,70	15	14	7	8	24	23	31	36
P	80	175	197	935,29	998,42	11	12	5	5	22	38	27	30
P	95	207	251	825,90	697,53	10	7	6	4	42	33	31	46
M	10	10	10	30,38	30,46	0	0	1	1	0	0	0	0
M	20	20	20	30,47	30,32	0	0	1	1	0	0	0	0
M	40	40	40	30,32	30,79	0	0	1	1	0	0	0	0
M	60	167	168	32,00	32,15	0	0	1	1	0	0	0	0
M	80	285	285	35,68	35,58	0	0	1	1	0	0	0	0
M	99	381	381	45,01	323,27	0	0	1	1	0	0	0	0
G	10	10	10	30,79	30,37	0	0	1	1	0	0	0	0
G	20	20	20	30,25	30,33	0	0	1	1	0	0	0	0
G	40	40	40	30,49	30,42	0	0	1	1	0	0	0	0
G	60	78	78	31,28	32,13	3	3	3	3	9	9	2	2
G	80	314	315	35,02	36,21	0	2	1	2	0	2	0	1
G	97	292	306	41,13	39,09	6	3	5	3	14	3	4	2

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela B.5: Resultados obtidos pelo método TPA para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 7$.

id item	m	nº colunas		Tempo total		it		σ^1		σ_o^3		σ_c^3	
		GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd
P	10	10	10	23,91	24,04	0	0	1	1	0	0	0	0
P	20	20	20	23,80	23,84	0	0	1	1	0	0	0	0
P	40	134	154	1953,60	1787,79	26	26	7	8	13	10	27	28
P	60	153	178	2552,89	2372,22	30	35	11	10	24	23	31	36
P	80	175	197	1834,99	2082,42	26	30	9	13	22	37	27	31
P	95	207	245	2456,16	2989,69	37	45	13	14	39	34	38	46
M	10	10	10	23,91	23,95	0	0	1	1	0	0	0	0
M	20	20	20	24,30	23,97	0	0	1	1	0	0	0	0
M	40	40	40	23,80	24,31	0	0	1	1	0	0	0	0
M	60	167	168	25,15	25,58	0	0	1	1	0	0	0	0
M	80	285	285	28,95	29,31	0	0	1	1	0	0	0	0
M	99	381	381	38,62	316,06	0	0	1	1	0	0	0	0
G	10	10	10	23,79	23,89	0	0	1	1	0	0	0	0
G	20	20	20	23,98	24,04	0	0	1	1	0	0	0	0
G	40	40	40	23,75	23,93	0	0	1	1	0	0	0	0
G	60	78	78	24,28	25,01	1	1	3	3	9	9	2	2
G	80	314	315	28,52	28,96	0	0	1	2	0	2	0	1
G	97	292	306	166,49	90,15	3	1	5	3	14	3	4	2

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela B.6: Resultados obtidos pelo método *ERL* para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = d_{max}$.

id item	m	nº colunas		Tempo total		it		σ^1		σ_o^3		σ_c^3	
		GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd
P	10	10	10	23,55	23,54	1	1	1	1	0	0	0	0
P	20	20	20	23,48	23,60	1	1	1	1	0	0	0	0
P	40	145	148	3525,93	3164,51	30	31	20	23	645	644	45	36
P	60	170	178	4290,84	3339,27	45	43	34	33	1506	1464	72	64
P	80	188	191	3004,29	2969,49	45	46	41	39	1449	1590	61	64
P	95	233	240	3552,62	3723,53	50	52	41	42	1995	2396	76	87
M	10	10	10	23,30	23,95	1	1	1	1	0	0	0	0
M	20	20	20	24,26	23,37	1	1	1	1	0	0	0	0
M	40	40	40	23,58	23,63	1	1	1	1	0	0	0	0
M	60	173	175	41,96	46,88	9	9	9	9	310	310	8	8
M	80	294	294	1725,63	1595,45	621	20	20	20	614	614	21	21
M	99	379	379	3608,26	3736,20	33	34	24	27	950	950	35	35
G	10	10	10	23,37	23,50	1	1	1	1	0	0	0	0
G	20	20	20	23,34	23,49	1	1	1	1	0	0	0	0
G	40	40	40	23,74	23,46	1	1	1	1	0	0	0	0
G	60	78	78	24,27	24,27	5	5	5	5	112	112	4	4
G	80	327	328	343,59	373,85	17	17	17	17	414	414	16	16
G	97	430	431	2455,94	2605,68	24	26	23	22	599	599	25	25

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela B.7: Resultados obtidos pelo método FPA para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = d_{max}$.

id item	m	nº colunas		Tempo total		it		σ^1		σ_o^3		σ_c^3	
		GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd
P	10	10	10	30,8	30,43	0	0	1	1	0	0	0	0
P	20	20	20	31,85	30,45	0	0	1	1	0	0	0	0
P	40	145	148	1251,14	1381,61	27	28	22	22	645	644	45	35
P	60	170	178	2042,94	1906,62	47	44	40	36	1506	1464	72	64
P	80	188	191	1961,91	1849,75	49	48	41	39	1449	1590	61	64
P	95	233	240	2062,89	2200,61	54	56	41	41	1995	2395	76	83
M	10	10	10	30,6	30,55	0	0	1	1	0	0	0	0
M	20	20	20	30,31	30,55	0	0	1	1	0	0	0	0
M	40	40	40	30,46	30,37	0	0	1	1	0	0	0	0
M	60	173	175	39,68	40,51	10	9	9	9	310	310	8	8
M	80	294	294	1145,63	1133,96	26	26	22	21	614	614	21	21
M	99	379	379	3040,25	2268,57	39	39	32	28	950	950	35	35
G	10	10	10	51,59	30,44	0	0	1	1	0	0	0	0
G	20	20	20	59,97	30,52	0	0	1	1	0	0	0	0
G	40	40	40	59,24	30,40	0	0	1	1	0	0	0	0
G	60	78	78	58,79	31,63	5	5	5	5	112	112	4	4
G	80	327	328	303,90	104,99	19	19	17	17	414	414	16	16
G	97	430	431	1767,72	1486,87	31	30	23	24	599	599	26	25

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela B.8: Resultados obtidos pelo método *TPA* para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = d_{max}$.

id item	m	nº colunas		Tempo total		it		σ^1		σ_o^3		σ_c^3	
		GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd	GCs	GCd
P	10	10	10	23,88	23,93	0	0	1	1	0	0	0	0
P	20	20	20	24,06	23,88	0	0	1	1	0	0	0	0
P	40	145	148	2981,93	2117,83	43	38	17	18	645	645	45	40
P	60	170	178	4070,87	3401,67	71	63	27	26	1506	1464	72	64
P	80	188	191	3071,98	3020,45	59	63	30	30	1449	1590	61	64
P	95	233	240	3947,56	4078,03	75	82	30	32	1995	2395	76	83
M	10	10	10	24,47	23,88	0	0	1	1	0	0	0	0
M	20	20	20	23,92	23,83	0	0	1	1	0	0	0	0
M	40	40	40	23,78	23,76	0	0	1	1	0	0	0	0
M	60	173	175	101,44	105,84	7	6	7	7	310	310	8	8
M	80	294	294	1172,16	1153,62	19	19	15	15	614	614	21	21
M	99	379	379	1996,60	2007,88	33	33	20	20	950	950	35	35
G	10	10	10	23,98	23,90	0	0	1	1	0	0	0	0
G	20	20	20	23,84	23,96	0	0	1	1	0	0	0	0
G	40	40	40	24,03	23,80	0	0	1	1	0	0	0	0
G	60	78	78	24,60	24,95	3	3	4	4	112	112	4	4
G	80	327	328	682,265	672,23	15	15	12	12	414	414	16	16
G	97	430	431	1426,84	1426,86	23	23	17	17	599	599	25	24

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela B.9: Resultados obtidos pelos métodos *ERL*, *FPA** e *TPA* para o $PCEB_c^L-1D$ e $c = 4, 7$.

id item	m	c	nº colunas			Tempo total			it (met)		
			<i>ERL</i>	<i>FPA*</i>	<i>TPA</i>	<i>ERL</i>	<i>FPA*</i>	<i>TPA</i>	<i>ERL</i>	<i>FPA*</i>	<i>TPA</i>
P	10	4	10	10	10	23,45	30,41	23,78	1	0	0
P	20	4	20	20	20	23,55	30,49	24,53	1	0	0
P	40	4	134	136	134	641,14	643,70	1245,41	5	8	18
P	60	4	170	174	170	927,92	634,42	2271,91	5	6	24
P	80	4	191	198	191	686,91	754,79	2023,54	3	8	29
P	95	4	225	226	225	688,32	636,97	2022,69	3	6	29
M	10	4	10	10	10	23,60	30,42	24,06	1	0	0
M	20	4	20	20	20	23,49	30,25	23,79	1	0	0
M	40	4	40	40	40	23,52	30,34	23,89	1	0	0
M	60	4	166	166	166	24,95	32,59	25,43	1	0	0
M	80	4	230	230	230	28,65	35,38	28,80	1	0	0
M	99	4	373	373	373	33,73	39,39	32,75	1	0	0
G	10	4	10	10	10	25,32	32,98	23,89	1	0	0
G	20	4	20	20	20	26,50	33,76	23,75	1	0	0
G	40	4	40	40	40	26,48	34,71	23,85	1	0	0
G	60	4	80	80	80	27,42	37,85	24,20	1	0	0
G	80	4	319	319	319	36,66	52,06	28,72	1	0	0
G	97	4	319	319	319	47,76	37,36	29,91	1	0	0
P	10	7	10	10	10	23,54	30,46	24,04	1	0	0
P	20	7	20	20	20	23,49	30,56	23,84	1	0	0
P	40	7	154	154	154	2290,54	761,66	1787,79	13	10	26
P	60	7	178	178	178	2104,47	1093,70	2372,22	10	14	35
P	80	7	197	197	197	928,10	998,42	2082,42	5	12	30
P	95	7	248	251	245	931,85	697,53	2989,69	5	7	45
M	10	7	10	10	10	23,62	30,46	23,95	1	0	0
M	20	7	20	20	20	23,50	30,32	23,97	1	0	0
M	40	7	40	40	40	23,47	30,79	24,31	1	0	0
M	60	7	168	168	168	25,00	32,15	25,58	1	0	0
M	80	7	285	285	285	29,22	35,58	29,31	1	0	0
M	99	7	381	381	381	322,14	323,27	316,06	1	0	0
G	10	7	10	10	10	23,40	30,37	23,89	1	0	0
G	20	7	20	20	20	24,044	30,33	24,04	1	0	0
G	40	7	40	40	40	23,412	30,416	23,93	1	0	0
G	60	7	78	78	78	23,99	32,13	25,01	3	3	1
G	80	7	315	315	315	28,59	36,21	28,96	2	2	0
G	97	7	306	306	306	90,44	39,09	90,15	3	3	1

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela B.10: Resultados obtidos pelos métodos ERL , FPA^* e TPA para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4, 7$ através das métricas σ^1 , σ^2 e σ^4 .

id item	m	c	σ^1			σ^2			σ^4		
			ERL	FPA^*	TPA	ERL	FPA^*	TPA	ERL	FPA^*	TPA
P	10	4	1	1	1	0	0	0	6	4	4
P	20	4	1	1	1	0	0	0	6	4	4
P	40	4	5	6	6	109	121	123	14	12	22
P	60	4	5	4	10	252	287	310	14	10	28
P	80	4	3	5	10	351	440	486	10	12	33
P	95	4	3	4	9	364	361	549	10	10	33
M	10	4	1	1	1	0	0	0	6	4	4
M	20	4	1	1	1	0	0	0	6	4	4
M	40	4	1	1	1	0	0	0	6	4	4
M	60	4	1	1	1	0	0	0	6	4	4
M	80	4	1	1	1	0	0	0	6	4	4
M	99	4	1	1	1	0	0	0	6	4	4
G	10	4	1	1	1	0	0	0	6	4	4
G	20	4	1	1	1	0	0	0	6	4	4
G	40	4	1	1	1	0	0	0	6	4	4
G	60	4	1	1	1	1	1	1	6	4	4
G	80	4	1	1	1	0	0	0	6	4	4
G	97	4	1	1	1	4	4	4	6	4	4
P	10	7	1	1	1	0	0	0	6	4	4
P	20	7	1	1	1	0	0	0	6	4	4
P	40	7	6	5	8	270	300	295	30	14	30
P	60	7	7	8	10	658	696	757	24	18	39
P	80	7	5	5	13	834	817	1006	14	16	34
P	95	7	4	4	14	1405	1237	1571	14	11	49
M	10	7	1	1	1	0	0	0	6	4	4
M	20	7	1	1	1	0	0	0	6	4	4
M	40	7	1	1	1	0	0	0	6	4	4
M	60	7	1	1	1	0	0	0	6	4	4
M	80	7	1	1	1	0	0	0	6	4	4
M	99	7	1	1	1	0	0	0	6	4	4
G	10	7	1	1	1	0	0	0	6	4	4
G	20	7	1	1	1	0	0	0	6	4	4
G	40	7	1	1	1	0	0	0	6	4	4
G	60	7	3	3	3	7	7	6	10	7	5
G	80	7	2	2	2	0	0	0	8	6	4
G	97	7	3	3	3	52	52	52	10	7	5

Fonte: Elaborado pela autora.

B.2 Resultados para os Métodos ERL, FPA^* e TPA aplicados ao $PCEB_c^L-2D$

Tabela B.11: Método ERL (GCs X GCd) para o ($PCEB_c^L - 2D$) com a variação de m .

Id item	m	GCd=0						GCd=1					
		n° colunas	Tempo total (s)	σ^1	σ_1^3	σ_2^3	n° colunas	Tempo total (s)	σ^1	σ_1^3	σ_2^3		
1	10	39	140,258	3	2	4	47	291,461	3	2	3		
1	20	39	224,14	4	5	4	68	1417,821	4	5	11		
1	30	30	43,21	1	0	0	30	95,924	1	0	0		
1	40	40	46,768	1	0	0	40	130,628	1	0	0		
1	50	50	49,522	1	0	0	50	183,641	1	0	0		
1	60	60	56,88	1	0	0	60	309,876	1	0	0		
1	100	100	124,3	1	0	0	100	907,947	1	0	0		
3	10	19	34,886	3	2	3	23	48,751	2	1	1		
3	20	52	609,402	5	5	8	63	811,403	4	4	8		
3	30	46	190,679	4	8	3	81	1929,776	8	11	13		
3	40	47	140,823	2	1	1	51	262,228	3	2	2		
3	50	50	45,79	1	0	0	52	155,071	2	1	1		
3	60	60	46,219	1	0	0	60	133,132	1	0	0		
3	100	100	71,615	1	0	0	100	18494,62	1	0	0		
6	10	19	38,079	2	1	1	22	28,909	1	0	0		
6	20	39	43,4	3	3	2	44	33,513	2	1	1		
6	30	78	55,229	5	5	6	86	152,748	4	3	4		
6	40	103	120,613	3	3	2	106	61,889	2	2	1		
6	50	135	201,528	2	1	1	135	206,068	2	1	1		
6	60	148	130,866	2	1	1	152	138,477	1	0	0		
6	100	321	988,265	2	1	5	321	1198,581	3	1	5		

Fonte: Elaborado pela autora.

No Apêndice C é apresentado o conceito de convexidade generalizada explicitando garantias de otimalidade para problemas de Corte de Estoque Biobjetivo Unidimensional e Bidimensional considerando a minimização simultânea do número total de objetos e de ciclos da serra

Apêndice C - Teoria de Invexidade Aplicada ao PCE Biobjetivo

Neste apêndice é apresentada uma extensão para o $PCEB_c$ de uma abordagem proposta inicialmente por (ARANA-JIMÉNEZ; SALLES-NETO, 2017) que consiste em aplicar conceitos de invexidade para provar resultados de otimalidade parcial para o problema de corte de estoque biobjetivo. Essa abordagem permite estabelecer conexões entre otimização discreta e otimização contínua multiobjetivo, tratando assim a natureza não linear e não diferenciável das funções $\psi_2(x)$ (ciclos) e $\psi_3(x)$ (*setup*). São discutidas as definições de convexidade e invexidade, estabelecendo relações entre essas classes de funções e resultados importantes que relacionam a teoria à problemas de Otimização Multiobjetivo.

C.1 Convexidade e convexidade generalizada (Invexidade)

Hanson (1981) introduziu uma nova classe de funções em 1981, e mostrou que essa classe é maior que a classe de funções convexas diferenciáveis. Essa descoberta foi o ponto de partida para a investigação de garantias de otimalidade para problemas de otimização matemática considerando essa nova classe de funções. Baseado nessas descobertas, Craven (1981) chamou de invexidade a propriedade satisfeita por essas funções, e tais funções foram dominadas funções invexas.

O conceito de invexidade é uma generalização do conceito de convexidade, por isso é comum encontrar trabalhos que trocam a palavra invexidade por convexidade generalizada. Os estudos desenvolvidos em Cervelati e Medar (2006), Craven (1981), Hanson (1981) mostram que a invexidade nos permite considerar uma classe de problemas maior na otimização monobjetivo nos quais as condições de Kuhn-Tucker são suficientes para a otimalidade. Em Arana-Jiménez et al. (2008), os autores estabelecem caracterizações para soluções eficientes para problemas de Otimização Multiobjetivo generalizando as caracterizações conhecidas para problemas monobjetivos, definindo algumas classes de funções e de problemas utilizando como base a propriedade das funções invexas, uma continuação a esse estudo foi proposta em Arana-Jiménez e Salles-Neto (2017), onde alguns resultados são estendidos e aplicados em um problema de corte de estoque biobjetivo.

C.1.1 Convexidade e invexidade de funções

Nesta seção os principais conceitos de convexidade e invexidade são revisados e exemplificados, necessários para o desenvolvimento de resultados usados na abordagem proposta nessa pesquisa e descrita no Capítulo 4. Assim apresenta-se em paralelo a convexidade e a convexidade generalizada baseado em Mishra e Giorgi (2008), Slimani e Radjef

(2010), Cervelati e Medar (2006), Arana-Jiménez e Salles-Neto (2017).

Definição C.1. (Função convexa e côncava): Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada convexa se para quaisquer pares de vetores x e y e $\lambda \in [0, 1]$ a seguinte condição é verdadeira

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Uma função é côncava se $-f$ é convexa.

Definição C.2. (Função invexa): Dizemos que f é invexa em $x \in \Omega$ se, para todo $y \in \Omega$, existe uma função $\eta : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T \eta(y, x).$$

Teorema C.3. : Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexo. A função f é convexa em Ω se, e somente se, para todos $x, y \in \Omega$,

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y - x).$$

Demonstração. \Rightarrow Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então para $x, y \in \Omega$ e $t \in [0, 1]$, definindo $d = y - x$, ou seja, $x + td \in \Omega$, pois Ω é convexo. Assim, temos que,

$$\begin{aligned} f(x + td) &= f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y), \\ &\Rightarrow f(x + td) \leq (1 - t)f(x) + tf(y), \\ &\Rightarrow f(x + td) \leq f(x) - tf(x) + tf(y), \\ &\Rightarrow f(x + td) - f(x) \leq t(f(y) - f(x)) \text{ (dividindo por } t), \\ &\Rightarrow \frac{f(x + td) - f(x)}{t} \leq (f(y) - f(x)) \text{ (tomando o limite)}, \\ &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + td) - f(x)}{t} \leq (f(y) - f(x)), \\ &\Rightarrow f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T d = \nabla f(x)^T (y - x). \end{aligned}$$

\Leftarrow) Dados $x, y \in \Omega$, considere $z = (1 - t)x + ty$ e observe que,

$$f(x) \geq f(z) + \nabla f(z)^T (x - z) \text{ e } f(y) \geq f(z) + \nabla f(z)^T (y - z),$$

Multiplicando a primeira desigualdade por $(1 - t)$ e a segunda desigualdade por t temos que,

$$\begin{aligned} (1 - t)f(x) &\geq (1 - t)f(z) + (1 - t)\nabla f(z)^T (x - z), \\ tf(y) &\geq tf(z) + t\nabla f(z)^T (y - z), \end{aligned}$$

Somando as duas desigualdades obtemos,

$$\begin{aligned} (1 - t)f(x) + tf(y) &\geq f(z) + \nabla f(z)^T [(1 - t)(x - z) + t(y - z)], \\ &\Rightarrow (1 - t)f(x) + tf(y) \geq f((1 - t)x + ty) + \nabla f(z)^T [(1 - t)x + ty - z], \\ &\Rightarrow (1 - t)f(x) + tf(y) \geq f((1 - t)x + ty). \end{aligned}$$

Portanto f é convexa. □

Teorema C.4. f é invexa em Ω se e somente se todo ponto estacionário de f é um mínimo global em Ω .

Demonstração. \Rightarrow) Seja $\bar{x} \in \Omega$ um ponto estacionário, ou seja, $\nabla f(\bar{x}) = 0$, como f é invexa por hipótese temos que,

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \nabla f(\bar{x})^T \eta(x, \bar{x}), \forall x \in \Omega,$$

Como $\nabla f(\bar{x}) = 0$ segue que $f(x) - f(\bar{x}) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(\bar{x}), \forall x \in \Omega$. Portanto \bar{x} é mínimo global.

\Leftarrow) Por hipótese todo ponto estacionário é mínimo global. Seja $\bar{x} \in \Omega$, considerando dois casos:

- \bar{x} é ponto estacionário, ou seja, $\nabla f(\bar{x}) = 0$, o que implica que a função f é invexa pois para qualquer função $\eta(x, \bar{x})$ temos que $f(x) - f(\bar{x}) \neq 0 \cdot \eta(x, \bar{x})$.
- \bar{x} não é ponto estacionário, ou seja, $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$.

Considerando $\eta(x, \bar{x}) = \frac{(f(x) - f(\bar{x}))\nabla f(\bar{x})}{\nabla f(\bar{x})^T \nabla f(\bar{x})}$, segue que,

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x})^T \eta(x, \bar{x}) &= \nabla f(\bar{x})^T \frac{(f(x) - f(\bar{x}))\nabla f(\bar{x})}{\nabla f(\bar{x})^T \nabla f(\bar{x})} = \frac{(f(x) - f(\bar{x}))}{\nabla f(\bar{x})^T \nabla f(\bar{x})} \nabla f(\bar{x})^T \nabla f(\bar{x}) \\ &\Rightarrow \nabla f(\bar{x})^T \eta(x, \bar{x}) = f(x) - f(\bar{x}). \end{aligned}$$

Portanto f é invexa. □

Exemplo C.5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$. deve-se mostrar que f é convexa.

Sejam $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in [0, 1]$, então segue que

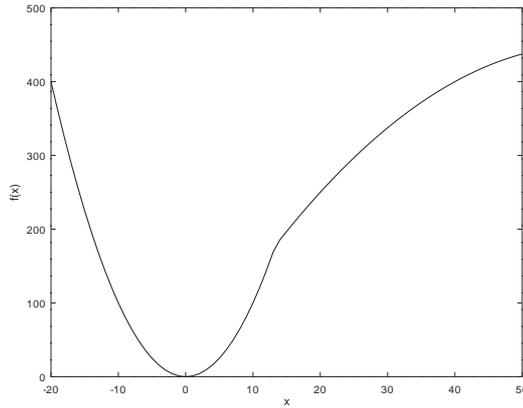
$$\begin{aligned} f((1 - \lambda)(x, y) + \lambda(\bar{x}, \bar{y})) &= f(x + \lambda(\bar{x} - x), y + \lambda(\bar{y} - y)) \\ &= (x + \lambda(\bar{x} - x))^2 + (y + \lambda(\bar{y} - y))^2 \\ &= x^2 + 2\lambda x(\bar{x} - x) + \lambda^2(\bar{x} - x)^2 + y^2 + 2\lambda y(\bar{y} - y) + \lambda^2(\bar{y} - y)^2 \\ &\geq x^2 + 2\lambda x(\bar{x} - x) + \lambda(\bar{x} - x)^2 + y^2 + 2\lambda y(\bar{y} - y) + \lambda(\bar{y} - y)^2 \\ &= x^2 - \lambda x^2 + \lambda \bar{x}^2 + y^2 - \lambda y^2 + \lambda \bar{y}^2 \\ &= (1 - \lambda)(x^2 + y^2) + \lambda(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \\ &= (1 - \lambda)f(x, y) + \lambda f(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

Portanto f é convexa.

Note que toda função convexa é também uma função invexa, considerando $\eta(y, x) = (y - x)$. Com o exemplo dado a seguir mostra-se que a recíproca não é verdadeira.

Exemplo C.6. Considere a função $f : [-20, 40] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -20 \leq x \leq \frac{40}{3} \\ -\frac{1}{8}x^2 + 15x, & \frac{40}{3} \leq x \leq 50 \end{cases}$$

Figura C.1: Gráfico da função f .

Fonte: Elaborado pela autora.

Pelo Teorema C.4 é fácil ver que f é invexa, pois $x = 0$ é o único ponto estacionário contido no domínio da função f e é mínimo global, isso pode ser facilmente calculado e observado na Figura C.1. Agora suponha que f seja convexa, então dados quaisquer pontos $x, y \in [-20, 40]$, pelo Teorema C.3 temos que,

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T(y - x).$$

Seja $x = 10$ e $y = 20$ então, $f(y) - f(x) = 150 \leq 200 = \nabla f(x)^T(y - x)$ o que é uma contradição. Portanto f não é convexa.

Definição C.7. (Função Quasi-convexa): f é quasi-convexa em $x \in \Omega$ se $\forall y \in \Omega$,

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow \nabla f(x)(y - x) \leq 0.$$

Exemplo C.8. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$, deve-se mostrar que f é quasi-convexa. De fato, sejam $x, y \in \mathbb{R}$ se $f(y) \leq f(x)$ então, $y^3 \leq x^3 \Rightarrow y \leq x$, por outro lado, $\nabla f(x)(y - x) = 2x^2(y - x) \leq 0$.

Definição C.9. (Função Quasi-invexa): f é quasi-invexa em $x \in \Omega$ se existe $\eta : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ para todo $y \in \Omega$ tal que

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow \nabla f(x)\eta(y, x) \leq 0.$$

Observe que considerando o Exemplo C.8, $\exists \eta(y, x) = (y - x)$ tal que $f(y) \leq f(x) \Rightarrow \nabla f(x)\eta(y, x) \leq 0$, logo $f = x^3$ é quasi-invexa.

Definição C.10. (Função Pseudo-convexa): f é pseudo-convexa em $x \in \Omega$ se $\forall y \in \Omega$,

$$\nabla f(x)(y - x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x).$$

Exemplo C.11. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + 2x$, deve-se mostrar que f é pseudo-convexa. De fato, sejam $x, y \in \mathbb{R}$ se $\nabla f(x)(y - x) \geq 0$ então, $(3x^2 + 2)(y - x) \geq 0$, ou seja $y \geq x \Rightarrow y^3 \geq x^3$, portanto $f(y) \geq f(x)$.

Definição C.12. (Função Pseudo-invexa): f é pseudo-invexa em $x \in \Omega$ se existe $\eta : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ para todo $y \in \Omega$ tal que

$$\nabla f(x)\eta(y, x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x).$$

Observe que considerando o Exemplo C.11, $\exists \eta(y, x) = (y - x)$ tal que $\nabla f(x)\eta(y, x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$, logo $f = x^3 + 2x$ é pseudo-invexa.

As definições apresentadas a seguir são importantes para relação de invexidade em problemas de Otimização Multiobjetivo.

Definição C.13. (Pseudoinvexidade-I) Seja $F = (f_1, \dots, f_p) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma função diferenciável no aberto Ω . Então a função vetorial F é dita pseudoinvexa-I quando existe uma função $\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\forall x, y \in \Omega$,

$$F(y) - F(x) < 0 \Rightarrow \nabla F(x)^T \eta(y, x) < 0.$$

Definição C.14. (Pseudoinvexidade-II) Seja $F = (f_1, \dots, f_p) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma função diferenciável no aberto Ω . Então a função vetorial F é dita pseudoinvexa-II quando existe uma função $\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\forall x, y \in \Omega$,

$$F(y) - F(x) \leq 0 \Rightarrow \nabla F(x)^T \eta(y, x) < 0.$$

Note que a classe das funções Pseudoinvexa-I está contida na classe das funções Pseudoinvexa-II, pois a pseudoinvexidade-I é um caso particular de pseudoinvexidade-II.

Na próxima seção as relações entre os conceitos vistos acima são demonstradas.

C.1.2 Relações entre convexidade e invexidade

As relações entre convexidade e invexidade são apresentadas e demonstradas na sequência.

Teorema C.15. *Convexidade \Rightarrow Pseudo-convexidade \Rightarrow Quasi-convexidade.*

Demonstração. • Convexidade \Rightarrow Pseudo-convexidade

Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (aberto), f diferenciável e convexa. Assim, dado $x \in \Omega$, $\forall y \in \Omega$, temos que:

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)(y - x) \tag{C.1}$$

Devemos mostrar que $\nabla f(x)(y - x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$. Logo se $\nabla f(x)(y - x) \geq 0$ temos que:

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\stackrel{(C.1)}{\geq} \nabla f(x)(y - x) \geq 0 \\ f(y) - f(x) &\geq 0 \\ f(y) &\geq f(x) \end{aligned}$$

Portanto f é Pseudo-convexa.

• Pseudo-convexidade \Rightarrow Quasi-convexidade

Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (aberto), f diferenciável e Pseudo-convexa. Assim dado $x \in \Omega$, $\forall y \in \Omega$, temos que:

$$\nabla f(x)(y - x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x) \tag{C.2}$$

Devemos mostrar que $f(y) \leq f(x) \Rightarrow \nabla f(x)(y - x) \leq 0$. Logo, se $f(y) \leq f(x)$ pela contrapositiva de (C.2), temos que $\nabla f(x)(y - x) \leq 0$. Portanto, f é Quasi-convexa. \square

Teorema C.16. *Pseudo-convexidade \Rightarrow Invexidade.*

Demonstração. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (aberto), f diferenciável e Pseudo-convexa. Assim dado $u \in \Omega$, $\forall y \in \Omega$, temos que: $\nabla f(x)(y - x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$. Pelo Teorema C.4 temos que f é invexa se, e somente se, todo ponto estacionário é mínimo global. Assim, suponha que $x \in \Omega$ seja ponto estacionário de f , ou seja, $\nabla f(x) = 0$ e, assim, temos que $f(y) - f(x) \geq 0$, ou seja, $f(y) \geq f(x)$, $\forall y \in \Omega$, logo x é mínimo global de f . Portanto, f é invexa. \square

Teorema C.17. *A classe das funções Pseudo-invexas coincide com a classe das funções invexas.*

Demonstração. \Rightarrow) Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (aberto), f diferenciável e Pseudo-convexa. Assim, dado $x \in \Omega$ existe $\eta(y, x) : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\nabla f(x)\eta(y, x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x), \forall x \in \Omega \quad (\text{C.3})$$

Como $u \in \Omega$ é arbitrário, considere que x é um ponto estacionário, então $\nabla f(x) = 0$, ou seja, $\nabla f(x)\eta(y, x) = 0$, $\forall y \in \Omega$, satisfazendo (C.3). Assim, $f(y) \geq f(x)$, $\forall y \in \Omega$ o que implica que x é mínimo global. Portanto, f é invexa.

\Leftarrow) Seja f uma função invexa no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, assim, dado $x \in \Omega$ existe $\eta(y, x) : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)\eta(y, x), \forall y \in \Omega. \quad (\text{C.4})$$

Devemos mostrar que $\nabla f(x)\eta(y, x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$.

Logo, se $\nabla f(x)\eta(y, x) \geq 0$ de (C.4), temos que

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\geq \nabla f(x)\eta(y, x) \geq 0, \forall y \in \Omega \\ f(y) - f(x) &\geq 0, \forall y \in \Omega \\ f(y) &\geq f(x), \forall y \in \Omega \end{aligned}$$

Portanto, f é Pseudo-invexa. \square

Teorema C.18. *Quasi-convexidade \Rightarrow Quasi-invexidade. Invexidade \Rightarrow Quasi-invexidade. As recíprocas não são verdadeiras.*

Demonstração. • Quasi-convexidade \Rightarrow Quasi-invexidade

Seja f uma função quasi-convexa no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, assim dado $x \in \Omega$,

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow \nabla f(x)(y - x) \leq 0, \forall y \in \Omega \quad (\text{C.5})$$

Para mostrar que f é quasi-invexa em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, basta ver que existe,

$$\begin{aligned} \eta(y, x) : \Omega \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (y, x) &\rightarrow (y - x) \end{aligned}$$

que satisfaz, $f(y) \leq f(x) \Rightarrow \nabla f(x)\eta(y, x) = \nabla f(x)(y - x) \leq 0$, $\forall y \in \Omega$. Portanto, f é quasi-invexa.

- Invidade \Rightarrow Quasi-invidade

Seja f uma função invexa em $x \in \Omega$, assim $\forall y \in \Omega$ existe $\eta(y, x) : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)\eta(y, x) \quad (\text{C.6})$$

Devemos mostrar que $f(y) \leq f(x) \Rightarrow \nabla f(x)\eta(y, x) \leq 0$.

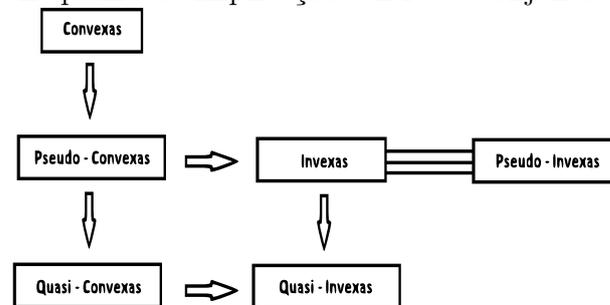
Logo, se $f(y) \leq f(x)$ temos que $f(y) - f(x) \leq 0$. Assim, de (C.6), temos que:

$$\nabla f(x)\eta(y, x) \leq f(y) - f(x) \leq 0.$$

Portanto, f é quasi-invexa. □

A Figura C.2 mostra um esquema que facilita a visualização das implicações mostradas anteriormente.

Figura C.2: Esquema de implicações entre os conjuntos de funções.



Fonte: (CERVELATI; MEDAR, 2006).

Todos os conceitos necessário para entender como o a invexidade pode ser útil no estudo de problemas de Otimização Multiobjetivo(OM) foram apresentados. Na próxima seção, garantias de otimalidade para problemas (OM) utilizando essa classe de funções são descritas.

C.2 Problemas de otimização multiobjetivo e invexidade

Nessa seção utiliza-se os novos tipos de funções baseadas em invexidade para problemas de otimização multiobjetivo. Para isso considerando novamente o Problema de Otimização Multiobjetivo (POM) dado por:

$$\begin{aligned}
 (POM) \quad & \min F(x) \\
 & \text{s.a. } g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \\
 & x \in \Omega,
 \end{aligned}$$

em que Ω é um conjunto aberto do \mathbb{R}^n , $F = (f_1, f_2, \dots, f_p) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $G = (g_1, g_2, \dots, g_m) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são diferenciáveis.

O objetivo é encontrar condições de otimalidade para o problema (POM), utilizando as ideias das condições para problemas escalares, de modo a considerar uma classe de funções que é caracterizada por ter cada ponto crítico como uma solução eficiente de

(*POM*)(ou reslações de eficiência). Para isso, é necessário estender o tipo de funções KT-inconvex, usar o ponto crítico e Kuhn-Tucker como condições de otimalidade para problemas multiobjetivo (ARANA-JIMÉNEZ et al., 2008).

Definição C.19. (Ponto Crítico de Kuhn-Tucker): Um ponto factível, \bar{x} para (*POM*), é dito ponto crítico de Kuhn-Tucker (PCKT) se existe $\lambda \in \mathbb{R}^p$, $\mu \in \mathbb{R}^m$, tal que

$$\begin{aligned} \lambda^T \nabla F(\bar{x}) + \mu^T \nabla G(\bar{x}) &= 0 \\ \mu^T G(\bar{x}) &= 0 \\ \mu &\geq 0 \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

Quando $\lambda > 0$, \bar{x} é dito ponto estrito de Kuhn-Tucker (SKT).

Alguns resultados para problemas de (OM) considerando invexidade, foram mostrados em Egudo e Hanson (1987) e uma questão que ficou em aberto era encontrar uma classe de funções que fosse possível verificar não apenas que um ponto crítico seja uma solução eficiente, mas também que as funções sejam caracterizadas por isso. Então, alguns anos depois, Osuna-Gómez, Beato-Moreno e Rufian-Lizana (1999) mostram que, para soluções fracamente eficientes, essa busca foi resolvida pela classe KT-pseudoinvex-I, definida da seguinte maneira (ARANA-JIMÉNEZ et al., 2008).

Definição C.20. (Problema KT-pseudoinvexo-I)

O problema (*POM*) é dito KT-pseudoinvexo-I se existe uma função $\eta : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\forall x_1, x_2$ factível

$$F(x_1) - F(x_2) < 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla F(x_2)\eta(x_1, x_2) < 0 \\ \nabla g_j(x_2)\eta(x_1, x_2) \leq 0 \end{cases} \quad \forall j \in I(x_2),$$

em que $I(x_2) = \{j : j = 1, \dots, m \text{ tal que } g_j(x_2) = 0\}$.

Como a classe das funções Pseudoinvexo-II contém a classe das funções Pseudoinvexo-I, Arana-Jiménez et al. (2008) apresentam a seguinte definição para estudar a eficiência de soluções de (*POM*) a partir das condições de otimalidade dos pontos de Kuhn-Tucker.

Definição C.21. (Problema KT-pseudoinvexo-II)

O problema (*POM*) é dito KT-pseudoinvexo-II se existe uma função $\eta : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\forall x_1, x_2$ factível

$$F(x_1) - F(x_2) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla F(x_2)\eta(x_1, x_2) < 0 \\ \nabla g_j(x_2)\eta(x_1, x_2) \leq 0 \end{cases} \quad \forall j \in I(x_2).$$

A partir das definições acima e do estudo do trabalho desenvolvido em Arana-Jiménez et al. (2008), Arana-Jiménez e Salles-Neto (2017) apresentam um estudo considerando problemas com a seguinte característica.

Definição C.22. (Problema parcial-*i* SKT-pseudoinvexo)

Dado $i \in \{1, \dots, p\}$, o problema (*POM*) é dito parcial-*i* SKT-pseudoinvexo em \bar{x} se existe uma função $\eta : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\forall x$ factível

$$F(x) - F(\bar{x}) \leq_i 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla F(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \leq 0 \\ \nabla g_j(\bar{x})\eta(x, \bar{x}) \leq 0 \end{cases} \quad \forall j \in I(\bar{x}),$$

em que $I(\bar{x}) = \{j : j = 1, \dots, m \text{ tal que } g_j(\bar{x}) = 0\}$.

As demonstraões dos teoremas dadas a seguir apresentam a mesma estrutura, com isso, apresenta-se a demonstraão do Teorema C.25 que é utilizado para obter os resultados da próxima seão. As demonstraões podem ser encontradas em Osuna-Gómez, Beato-Moreno e Rufian-Lizana (1999), Arana-Jiménez et al. (2008), Arana-Jiménez e Salles-Neto (2017), respectivamente.

Teorema C.23. *Todo ponto de Kuhn-Tucker é uma soluão fracamente eficiente para (POM) se, e somente se, (POM) é KT-pseudoinvexoI.*

Teorema C.24. *Todo ponto de Kuhn-Tucker é uma soluão eficiente para (POM) se, e somente se, (POM) é KT-pseudoinvexoII.*

Teorema C.25. *Todo ponto estrito de Kuhn-Tucker é uma soluão parcial- i eficiente para (POM) se, e somente se, (POM) é parcial- i SKT-pseudoinvexo.*

Demonstraão. \Rightarrow) Devemos mostrar que dado x^* factível se tivermos $F(x) \leq_i F(x^*)$, devemos garantir que o seguinte aconteça:

$$\begin{cases} \nabla F(x^*)\eta(x, x^*) \leq 0 \\ \nabla g_j(x^*)\eta(x, x^*) \leq 0 \quad \forall j \in I(x^*), \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

Como x^* é factível temos dois casos:

– x^* é parcial- i eficiente

Nesse caso não existe x factível tal que $F(x) \leq_i F(x^*)$, ou seja, não existe x factível tal que $F(x) - F(x^*) \leq_i 0$, portanto trivialmente (POM) é parcial- i SKT-pseudoinvexo, pois não há a necessidade de garantir que (C.7) aconteça.

– x^* não é parcial- i eficiente

Neste caso existe x factível tal que $F(x) - F(x^*) \leq_i 0$, logo devemos mostrar que (C.7) acontece. Como x^* não é parcial- i eficiente, então x^* não é ponto estrito de Kuhn-Tucker por hipótese, ou seja, (C.8) não tem soluão $\lambda > 0$ e $\mu \geq 0$

$$\lambda^T \nabla F(\bar{x}) + \mu^T \nabla G(\bar{x}) = 0. \quad (\text{C.8})$$

Considerando o sistema (C.7) e o sistema (C.8), podemos aplicar o Teorema de alternativa de Tucker (enunciado a seguir), assim como (C.8) não tem soluão, temos que (C.7) tem soluão. Portanto (POM) é parcial- i SKT-Pseudoinvexo.

\Leftarrow) Seja x^* um ponto estrito de Kuhn-Tucker, ou seja, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^p, \mu \in \mathbb{R}^m$ tal que,

$$\begin{cases} \lambda^T \nabla F(x^*) + \mu^T \nabla G(x^*) = 0 \\ \mu^T G(x^*) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \lambda > 0, \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

Suponha que (POM) é parcial- i SKT-Pseudoinvexo em x^* , ou seja, existe uma função $\eta : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\forall x$ factível $\exists i \in \{1, \dots, p\}$ tal que,

$$F(x) - F(x^*) \leq_i 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla F(x^*)\eta(x, x^*) \leq 0 \\ \nabla g_j(x^*)\eta(x, x^*) \leq 0 \quad \forall j \in I(x^*), \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

Suponha por absurdo que x^* não é uma solução parcial- i eficiente para (POM), então existe \bar{x} factível tal que, $F(\bar{x}) \leq_i F(x^*) \Rightarrow F(\bar{x}) - F(x^*) \leq_i 0$. Multiplicando a primeira desigualdade do lado direito da implicação (C.10) por λ , segue que,

$$\begin{aligned} \lambda^T \nabla F(x^*) \eta(\bar{x}, x^*) &\leq 0, \text{ por (C.9) temos que } \lambda^T \nabla F(x^*) = -\mu^T \nabla G(x^*) \\ &\Rightarrow -\mu^T \nabla G(x^*) \eta(\bar{x}, x^*) \leq 0, \\ &\Rightarrow \nabla G(x^*) \eta(\bar{x}, x^*) \geq 0 \text{ Absurdo! (por (C.10))}. \end{aligned}$$

□

Portanto, x^* é parcial- i eficiente para (POM).

C.3 Problema auxiliar para o PCEB (Setup)

As condições de otimalidade baseadas em pontos de Kuhn-Tucker são aplicadas para problemas contínuos de otimização, assim essas condições de otimalidade não podem ser aplicadas diretamente no problema de corte biobjetivo discreto (PCEB). Com isso, é proposto um problema multiobjetivo auxiliar contínuo em Arana-Jiménez e Salles-Neto (2017) dado por:

$$\begin{aligned} (PCEB_{aux})_M \quad \min \quad \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) &= \left(\sum_{j=1}^n x_j, \sum_{j=1}^n \phi(x_j) \right) \\ \text{s.a.} \quad x_j &\in X_{aux}, \end{aligned}$$

$$\text{em que, } \phi(x_j) = \begin{cases} 0, & x_j < 0 \\ (M+1)\text{sen}^2(\pi x_j), & 0 \leq x_j < \frac{1}{2} \\ 1 + (M)\text{sen}^2(\pi x_j), & x_j \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ em que } \forall M \in \mathbb{R}, M > 0,$$

$$X_{aux} = \{x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0 : \sum_{j=1}^n a_{ji}x_j - d_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}.$$

Proposição C.26. Para $x \in \mathbb{N}^n$, $\min \varphi_2(x) = \min \psi_2(x)$.

Demonstração. Primeiro note que:

$$\min \varphi_2(x) = \sum_{j=1}^n \min \phi(x_j).$$

Fazendo $x_j = t$, calculando os pontos críticos de $\phi(t)$.

$$\phi'(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2\pi(M+1)\text{sen}(\pi t)\cos(\pi t), & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 2\pi(M)\text{sen}(\pi t)\cos(\pi t), & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\phi'(t) = 0 \Leftrightarrow 2\pi(M)\text{sen}(\pi t)\cos(\pi t) = 0 \text{ ou } t = 0$$

$$\text{sen}(\pi t) = 0 \text{ ou } \cos(\pi t) = 0$$

$$\pi t = k\pi, k \in \mathbb{Z}_+ \text{ ou } \pi t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}_+$$

$$t_1 = k, k \in \mathbb{Z}_+ \text{ ou } t_2 = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}_+$$

Temos então que os pontos críticos são $t_0 = 0$, $t_1 = k$ e $t_2 = \frac{1}{2} + k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Para verificar se os pontos encontrados são de máximo ou de mínimo, precisa-se calcular a segunda derivada:

$$\phi''(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2\pi^2(M+1)(\cos^2(\pi t) - \sin^2(\pi t)), & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 2\pi^2(M)(\cos^2(\pi t) - \sin^2(\pi t)), & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

E, temos que:

- i) $\phi''(t_0) = 2\pi^2(M+1) > 0$, t_0 é ponto de mínimo;
- ii) $\phi''(t_1) = 2\pi^2(M)(\cos^2(\pi k) - \sin^2(\pi k)) = 2\pi^2(M)(-1)^{2k} = 2\pi^2(M) > 0$, t_1 é ponto de mínimo;
- iii) $\phi''(t_2) = 2\pi^2(M)(\cos^2((\frac{1}{2} + k)\pi) - \sin^2((\frac{1}{2} + k)\pi)) = 2\pi^2(M)(-((-1)^{2k+1})^2) = -2\pi^2(M) < 0$, t_2 é ponto de máximo.

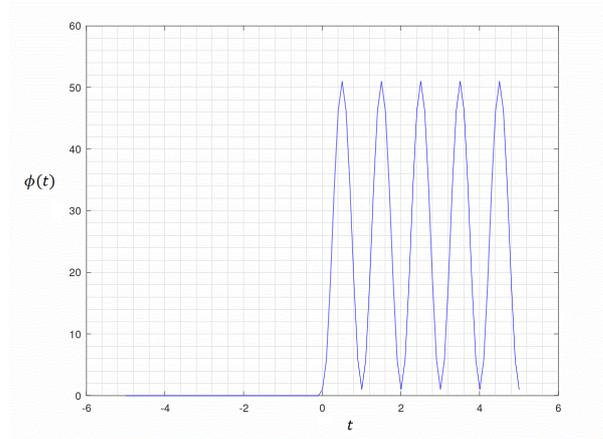
Assim, quando $t = k$, $k \in \mathbb{N}$, temos que $\phi(t) = 1$, logo

$$\varphi_2(x) = \sum_{j=1}^n \phi(x_j) = \psi_2(x)$$

quando $x_j \in \mathbb{N}$.

O gráfico da função $\phi(t)$ está representado na Figura C.3 (obtida usando o *software* livre GeoGebra). □

Figura C.3: Gráfico da função $\phi(t)$ com $M = 50$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Os resultados a seguir envolvendo o problema $(PCEB)$ e o problema $(PCEB_{aux})_M$ são demonstrados em Arana-Jiménez e Salles-Neto (2017). As demonstrações são omitidas porque na próxima seção são demonstradas esses mesmos resultados considerando outro problema auxiliar, sendo assim as demonstrações seguem a mesma estrutura.

Teorema C.27. *Seja $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, e $x^* \in \mathbb{Z}^n$ um ponto factível de $(PCEB_{aux})_M$. Se x^* é uma solução parcial-1 eficiente de $(PCEB_{aux})_M$, então x^* é solução parcial-1 eficiente de $(PCEB)$.*

Teorema C.28. *Seja $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, e $x^* \in \mathbb{Z}^n$ um ponto factível de $(PCEB_{aux})_M$, então $(PCEB_{aux})_M$ é parcial-1 SKT-pseudoinvexo em x^* .*

Teorema C.29. *Seja $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, e $x^* \in \mathbb{Z}^n$ um ponto factível de $(PCEB_{aux})_M$. Se x^* é um ponto estrito de Kuhn-Tucker de $(PCEB_{aux})_M$, então x^* é solução parcial-1 eficiente de $(PCEB)$.*

A seguir apresenta-se o exemplo proposto em Arana-Jiménez e Salles-Neto (2017), que mostra como obter soluções parciais-1 eficientes utilizando os resultados apresentados acima.

Na próxima seção propõe-se um problema auxiliar para o problema de corte, considerando como critérios de otimização, a minimização do número total de objetos cortados e minimização do número total de ciclos da serra.

C.4 Problema auxiliar para o $PCEB_c$ (ciclos)

Baseado na abordagem da seção anterior o problema auxiliar proposto para o problema $(PCEB_c)$ é dado por:

$$(PCEB_{aux_c})_M \quad \min \quad \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_3(x)) = \left(\sum_{j=1}^n x_j, \sum_{j=1}^n \phi_2(x_j) \right)$$

$$s.a. \quad x_j \in X_{aux},$$

$$\text{em que, } \phi_2(x_j) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ (M+1)\text{sen}^2(\pi x_j), & 0 \leq x_j < \frac{1}{2} \\ x_j c + (M)\text{sen}^2(\pi x_j), & x_j \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ em que } \forall M \in \mathbb{R}, M > 0,$$

$$X_{aux} = \{x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0 : \sum_{j=1}^n a_{ji}x_j - d_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}.$$

Proposição C.30. *Para $x \in \mathbb{N}^n$ e M suficientemente grande, $\min \varphi_3(x) = \min \psi_3(x)$.*

Demonstração. Note que:

$$\min \varphi_3(x) = \sum_{j=1}^n \min \phi_2(x_j)$$

Fazendo $x_j = t$, e considerando M suficientemente grande, deve-se calcular os pontos críticos de $\phi_2(t)$.

$$\phi_2'(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2\pi(M+1)\text{sen}(\pi t)\cos(\pi t), & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ c + 2\pi(M)\text{sen}(\pi t)\cos(\pi t), & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\phi_2'(t) = 0 \Leftrightarrow c + 2\pi(M)\text{sen}(\pi t)\cos(\pi t) = 0 \quad \text{ou} \quad t = 0$$

$$2\text{sen}(\pi t)\cos(\pi t) = \frac{-c}{M\pi}$$

$$\text{sen}(2\pi t) = \frac{-c}{M\pi}$$

$$t_1 = \frac{2\pi k - \text{sen}^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)}{2\pi}, k \in \mathbb{Z}_+ \text{ ou } t_2 = \frac{2\pi k + \pi + \text{sen}^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)}{2\pi}, k \in \mathbb{Z}_+$$

Temos então que os pontos críticos são $t_0 = 0$, t_1 e t_2 . Para verificar se os pontos são de máximo ou de mínimo, precisa-se calcular a segunda derivada:

$$\phi''(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2\pi^2(M+1)(\cos^2(\pi t) - \text{sen}^2(\pi t)), & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 2\pi^2(M)(\cos^2(\pi t) - \text{sen}^2(\pi t)), & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim temos que:

i) $\phi_2''(t_0) = 2\pi^2(M+1) > 0$, t_0 é ponto de mínimo;

ii)

$$\begin{aligned} \phi_2''(t_1) &= 2\pi^2(M) \cos\left(2k\pi - \text{sen}^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)\right) \\ \phi_2''(t_1) &= 2\pi^2(M) \left(\cos(2k\pi) \cos\left(\text{sen}^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)\right) + \text{sen}(2k\pi) \text{sen}\left(\text{sen}^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)\right)\right) \\ \phi_2''(t_1) &= 2\pi^2(M) \underbrace{\cos(2k\pi)}_1 \underbrace{\cos\left(\text{sen}^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)\right)}_{>0} > 0 \end{aligned}$$

Logo t_1 é ponto de mínimo;

iii)

$$\begin{aligned} \phi_2''(t_2) &= 2\pi^2(M) \underbrace{\cos\left((2k+1)\pi + \text{sen}^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)\right)}_* \\ \phi_2''(t_2) &= 2\pi^2(M) \underbrace{\cos((2k+1)\pi)}_{-1} \underbrace{\cos\left(\text{sen}^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)\right)}_{>0} < 0 \end{aligned}$$

$$* = \left(\cos((2k+1)\pi) \cos\left(\text{sen}^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)\right) - \text{sen}((2k+1)\pi) \text{sen}\left(\text{sen}^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)\right)\right)$$

Logo, t_2 é ponto de máximo;

Assim, quando $t_1 = \frac{2\pi k - \text{sen}^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)}{2\pi}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, temos que :

$$\phi_2(t_1) = c \left(\frac{2k\pi - \text{sen}^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)}{2\pi}\right) + M \text{sen}^2\left(\frac{2k\pi - \text{sen}^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)}{2}\right).$$

Precisa-se analisar o comportamento da expressão $\text{sen}^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right)$ para M suficientemente grande. Da continuidade da função sen^{-1} , temos que:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \text{sen}^{-1}\left(\frac{c}{M\pi}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{c}{M\pi}\right) = \text{sen}^{-1}0 = 0 \quad (\text{C.11})$$

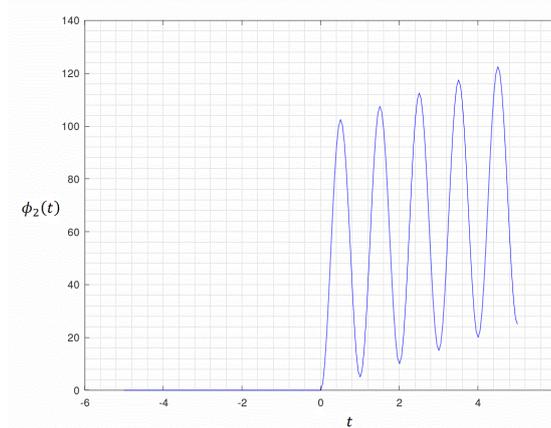
Considerando $c = 5$ e $M = 100$, podemos perceber que $\phi_2(t_1)$ fica próximo do valor ck , com $k \in \mathbb{Z}_+$, de fato,

$$\begin{aligned} \phi_2(t_1) &= 5 \left(\frac{2k\pi - \text{sen}^{-1}\left(\frac{5}{100\pi}\right)}{2\pi} \right) + \underbrace{M \text{sen}^2\left(\frac{2k\pi - \text{sen}^{-1}\left(\frac{5}{100\pi}\right)}{2}\right)}_{\cong 0,0000633} \\ \phi_2(t_1) &= 5k - \underbrace{\frac{5\text{sen}^{-1}\left(\frac{5}{100\pi}\right)}{2\pi}}_{\cong 0,01267} + 100(0,00633) \\ \phi_2(t_1) &= 5k - 0,00633703 \end{aligned}$$

Dado que $\text{sen}^{-1}\left(\frac{5}{100\pi}\right) \cong 0,015916\text{rad}$. Portanto, quanto maior o valor de M , temos que $\phi_2(t) \cong 5k$, ou seja, para $k \in \mathbb{N}$ e M suficientemente grande $\varphi_3 = \psi_3$.

O gráfico da função $\phi_2(t)$ está representado na Figura C.4 (obtida usando o *software* livre GeoGebra). □

Figura C.4: Gráfico da função $\phi_2(t)$ com $c = 5$ e $m = 100$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Nos Teoremas C.31, C.32 e C.33 mostra-se que os resultados apresentados na Seção 4.1 também são válidos com as devidas adaptações envolvendo o problema $(PCEB_c)$ e o problema $(PCEB_{aux_c})_M$.

Teorema C.31. *Seja $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ (Suficientemente grande), e $x^* \in \mathbb{Z}^n$ um ponto factível de $(PCEB_{aux_c})_M$. Se x^* é uma solução parcial-1 eficiente de $(PCEB_{aux_c})_M$, então x^* é solução parcial-1 eficiente de $(PCEB_c)$.*

Demonstração. Seja $M > 0$ suficientemente grande e $x^* \in \mathbb{Z}^n$ uma solução parcial-1 eficiente para $(PCEB_{aux_c})_M$. Supondo que x^* não é solução parcial-1 eficiente para o problema $(PCEB_c)$. Ou seja, existe $\bar{x} \in X$ tal que $(\psi_1(\bar{x}), \psi_3(\bar{x})) \leq_1 (\psi_1(x^*), \psi_3(x^*))$

Como $x^* \in \mathbb{Z}^n$ e $x^* \in X_{aux}$, temos que $x^* \in X$, ou seja, x^* é factível para $(PCEB_c)$, assim temos, pela Proposição C.30, que

$$\varphi_3(x^*) = \psi_3(x^*) \text{ e } \varphi_3(\bar{x}) = \psi_3(\bar{x}).$$

Então,

$$(\varphi_1(\bar{x}), \varphi_3(\bar{x})) = (\psi_1(\bar{x}), \psi_3(\bar{x})) \leq_1 (\psi_1(x^*), \psi_3(x^*)) = (\varphi_1(x^*), \varphi_3(x^*)),$$

ou seja, $(\varphi_1(\bar{x}), \varphi_3(\bar{x})) \leq_1 (\varphi_1(x^*), \varphi_3(x^*))$, que é um absurdo, pois x^* é solução parcial-1 eficiente para $(PCEB_{aux_c})_M$ por hipótese. Portanto, x^* é uma solução parcial-1 eficiente para $(PCEB_c)$. \square

Teorema C.32. *Seja $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ (Suficientemente grande), e $x^* \in \mathbb{Z}^n$ um ponto factível de $(PCEB_{aux_c})_M$, então $(PCEB_{aux_c})_M$ é parcial-1 SKT-pseudoinvexo em x^* .*

Demonstração. Seja x^* um ponto factível para $(PCEB_{aux_c})_M$, com $M \in \mathbb{R}_+$ suficientemente grande. Observe que:

$$\nabla\varphi_1(x) = (1 \ 1 \ \dots \ 1) \text{ e } \nabla\varphi_2(x) = (\phi'(x_1) \ \phi'(x_2) \ \dots \ \phi'(x_n))$$

em que

$$\phi'(x_j) = \begin{cases} 0, & x_j < 0 \\ 2\pi(M+1)\text{sen}(\pi x_j)\text{cos}(\pi x_j), & 0 \leq x_j < \frac{1}{2} \\ c + 2\pi(M)\text{sen}(\pi x_j)\text{cos}(\pi x_j), & x_j \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Como $x \in \mathbb{Z}^n$, temos que $\phi_2'(x_j) = \begin{cases} 0, & x_j = 0 \\ c, & x_j \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

Seja $g = (g_1, \dots, g_m, g_{m+1}, \dots, g_{m+n}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ uma função definida como:

$$g_i(x) = \begin{cases} d_i - \sum a_{ij}x_j, & i = 1, \dots, m \\ -x_{i-m}, & i = m + 1, \dots, m + n \end{cases}$$

Com isso, o conjunto factível de $(PCEB_{aux_c})_M$ é definido como

$$X_{aux} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m + n\}$$

Para provar que $(PCEB_{aux_c})_M$ é parcial-1 SKT-Pseudoinvexo, supondo que exista $\bar{x} \in X_{aux}$ tal que $\varphi(\bar{x}) \leq_1 \varphi(x^*)$.

Sob essa hipótese, temos que encontrar $\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{cases} \nabla\varphi(x^*)\eta(\bar{x}, x^*) \leq 0 \\ \nabla g_i(x^*)\eta(\bar{x}, x^*) \leq 0, i \in I(x^*) \end{cases} \tag{C.12}$$

em que $I(x^*) = \{i = 1, \dots, m + n : g_i(x^*) = 0\}$. Observe que,

$$\begin{aligned} \nabla g_i(x^*) &= (-a_{i1}, \dots, -a_{in}), i = 1, \dots, m \\ \nabla g_{m+1}(x^*) &= (-1, 0, \dots, 0) \\ \nabla g_{m+2}(x^*) &= (0, -1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \nabla g_{m+n}(x^*) &= (0, 0, \dots, -1) \end{aligned}$$

Por hipótese $\varphi(\bar{x}) \leq_1 \varphi(x^*)$, então temos que $\varphi_1(\bar{x}) < \varphi_1(x^*)$. Definindo $\eta(\bar{x}, x^*) = \bar{x} - x^*$, devemos mostrar que:

i) $\nabla\varphi(x^*)\eta(\bar{x}, x^*) \leq 0$

De fato,

Para $i = 1$, temos que

$$\nabla\varphi_1(x^*)\eta(\bar{x}, x^*) = (1 \ 1 \ \cdots \ 1) \begin{pmatrix} \bar{x}_1 - x_1^* \\ \vdots \\ \bar{x}_n - x_n^* \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \bar{x}_j - x_j^* < 0$$

Para $i = 2$, temos que

$$\nabla\varphi_3(x^*)\eta(\bar{x}, x^*) = (\phi'(x_1) \ \phi'(x_2) \ \cdots \ \phi'(x_n)) \begin{pmatrix} \bar{x}_1 - x_1^* \\ \vdots \\ \bar{x}_n - x_n^* \end{pmatrix} \leq 0$$

ii) Se $i = 1, \dots, m$ e $i \in I(x^*)$, então

$$\begin{aligned} \nabla g_i(x^*)\eta(\bar{x}, x^*) &= \sum_{j=1}^n -a_{ij}(\bar{x}_j - x_j^*), \quad i = 1, \dots, m \\ &= \sum_{j=1}^n -a_{ij}\bar{x}_j + a_{ij}x_j^*, \quad i = 1, \dots, m \\ &= \sum_{j=1}^n -a_{ij}\bar{x}_j + d_i, \quad i = 1, \dots, m \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Se $i = m + 1, \dots, m + n$ e $i \in I(x^*)$, então $g_i(x^*) = 0$, ou seja, $\eta(\bar{x}, x^*) = \bar{x}$. Logo,

$$\nabla g_i(x^*)\eta(\bar{x}, x^*) = -\bar{x}_i \leq 0, \quad i = m + 1, \dots, m + n.$$

Consequentemente, temos que a função η definida por $\eta(\bar{x}, x^*) = \bar{x} - x^*$ satisfaz (C.12) e portanto $(PCEB_{aux_c})_M$ é parcial-1 SKT-Pseudoinvexo.

□

Teorema C.33. *Seja $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ (Suficientemente grande), e $x^* \in \mathbb{Z}^n$ um ponto factível de $(PCEB_{aux_c})_M$. Se x^* é um ponto estrito de Kuhn-Tucker de $(PCEB_{aux_c})_M$, então x^* é solução parcial-1 eficiente de $(PCEB_c)$.*

Demonstração. Seja $M \in \mathbb{R}_+$ suficientemente grande e $x^* \in \mathbb{Z}^n$ um ponto estrito de Kuhn-Tucker para $(PCEB_{aux_c})_M$. Como $(PCEB_{aux_c})_M$ é parcial-1 SKT-Pseudoinvexo pelo Teorema C.32 temos que x^* é solução parcial-1 eficiente para $(PCEB_{aux_c})_M$ pelo Teorema C.25. Finalmente pelo Teorema C.31 temos que x^* é solução parcial-1 eficiente para $(PCEB_c)$. □

Exemplo 1 (Ciclos da serra)

Considere o seguinte problema de corte de estoque:

$$\begin{aligned} \min \quad \psi(x) &= (\psi_1(x), \psi_3(x)) = \left(\sum_{j=1}^4 x_j, \sum_{j=1}^4 \left\lceil \frac{x_j}{c} \right\rceil \right) \\ \text{s.a.} \quad & 6x_1 + 5x_2 \geq 102 \\ & 2x_3 + x_4 \geq 200 \\ & x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 150 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Escrevendo o problema auxiliar associado ao problema (C.13), com $M = 100$ e $c = 5$:

$$\begin{aligned} \min \quad \varphi(x) &= (\varphi_1(x), \varphi_3(x)) = \left(\sum_{j=1}^4 x_j, \sum_{j=1}^4 \phi_2(x_j) \right) \\ \text{s.a.} \quad & -6x_1 - 5x_2 + 102 \leq 0 \\ & -2x_3 - x_4 + 200 \leq 0 \\ & -x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 150 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \\ & -x_3 \leq 0 \\ & -x_4 \leq 0 \end{aligned}$$

Deve-se mostrar que o ponto factível $x^* = (17, 0, 100, 0)$ é um ponto estrito de Kuhn-Tucker. Para isso, devemos mostrar que existem $\mu \geq 0$ e $\lambda > 0$ tal que:

$$\begin{cases} \lambda^T \nabla F(x^*) + \mu^T \nabla G(x^*) = 0 \\ \mu^T G(x^*) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

Considerando $F(x) = \varphi(x)$ e $G(x)$ as restrições de atendimento à demanda e não negatividade das variáveis em (C.14) temos que,

$$\nabla \varphi(x) = \begin{pmatrix} \nabla \varphi_1(x) \\ \nabla \varphi_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\text{onde, } \nabla \varphi_1(x) = (1 \ 1 \ 1 \ 1) \text{ e } \nabla \varphi_2(x) = (\phi'(x_1) \ \phi'(x_2) \ \phi'(x_3) \ \phi'(x_4))$$

$$\nabla G(x) = \begin{pmatrix} \nabla g_1(x) \\ \nabla g_2(x) \\ \nabla g_3(x) \\ \nabla g_4(x) \\ \nabla g_5(x) \\ \nabla g_6(x) \\ \nabla g_7(x) \end{pmatrix} \text{ em que, } \begin{cases} \nabla g_1(x) = (-6 \ -5 \ 0 \ 0) \\ \nabla g_2(x) = (0 \ 0 \ -2 \ -1) \\ \nabla g_3(x) = (0 \ -1 \ -2 \ -3) \\ \nabla g_4(x) = (-1 \ 0 \ 0 \ 0) \\ \nabla g_5(x) = (0 \ -1 \ 0 \ 0) \\ \nabla g_6(x) = (0 \ 0 \ -1 \ 0) \\ \nabla g_7(x) = (0 \ 0 \ 0 \ -1) \end{cases}$$

Substituindo as derivadas acima em (C.14), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} (\lambda_1 \ \lambda_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (\mu_1 \ \mu_2 \ \mu_3 \ \mu_4 \ \mu_5 \ \mu_6 \ \mu_7) \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \\ (\mu_1 \ \mu_2 \ \mu_3 \ \mu_4 \ \mu_5 \ \mu_6 \ \mu_7) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -50 \\ -17 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \lambda > 0, \mu \geq 0 \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

A solução de (C.4) é:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \\ \mu_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{50}\mu_4 - \frac{3}{2}\mu_5 - \frac{33}{4}\mu_6 + \frac{5}{2}\mu_7 \\ \frac{71}{250}\mu_4 - \frac{3}{10}\mu_5 + \frac{3}{20}\mu_6 + \frac{1}{10}\mu_7 \\ \frac{2}{25}\mu_4 - \frac{1}{2}\mu_5 - \frac{5}{4}\mu_6 + \frac{1}{2}\mu_7 \\ \frac{27}{25}\mu_4 - \frac{3}{2}\mu_5 - \frac{9}{4}\mu_6 + \frac{3}{2}\mu_7 \\ -\frac{17}{50}\mu_4 - 2\mu_6 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \\ \mu_7 \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

Fixando $\mu_4 = 0$, $\mu_5 = 1$, $\mu_6 = 0$ e $\mu_7 = 4$, obtemos

$$\lambda^* = \left(\frac{17}{2}, \frac{1}{10}\right), \mu^* = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 0, 0, 1, 0, 4\right).$$

Portanto, x^* é um ponto estrito de Kuhn-Tucker e, pelo Teorema C.33, é uma solução parcial-1 eficiente para o problema de corte de estoque (C.13).

Nesse estudo podemos ver que essa abordagem pode ser útil para classificar soluções factíveis obtidas por métodos heurísticos e assim obter uma aproximação da Fronteira de Pareto. Na próxima seção algumas direções para melhorar essa abordagem são discutidas.

C.5 Conclusões

Alguns estudos que podem ser feitos para melhorar a abordagem de solução para $PCEB_c$ propostas nesse capítulo são discutidas nessa seção. As propostas são baseadas em maneiras de resolver o sistema (C.14) admitindo que a solução factível x seja desconhecida. Nesse caso é necessário resolver o seguinte sistema de equações não lineares.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \phi'_2(x_1)\lambda_2 - 6\mu_1 - \mu_4 = 0 \\ \lambda_1 + \phi'_2(x_2)\lambda_2 - 5\mu_1 - \mu_3 - \mu_5 = 0 \\ \lambda_1 + \phi'_2(x_3)\lambda_2 - 2\mu_2 - 2\mu_3 - \mu_6 = 0 \\ \lambda_1 + \phi'_2(x_4)\lambda_2 - \mu_2 - 3\mu_3 - \mu_7 = 0 \\ \mu_1(-6x_1 - 5x_2 + 102) + \mu_2(-2x_3 - x_4 + 200) + \mu_3(-x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 150) - \\ -\mu_4x_1 - \mu_5x_2 - \mu_6x_3 - \mu_7x_4 = 0 \\ \lambda > 0, \mu \geq 0, x \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \quad (\text{C.17})$$

Algumas observações relacionadas com o sistema (C.17) são :

Observação C.34. Observe que:

- O Exemplo C.4 apresenta apenas alguns padrões de corte que compõem as restrições, assim a solução seria melhorada se introduzirmos outros padrões de corte nas restrições.

- A presença da função $\phi'_2(x)$ no sistema que depende das variáveis agora consideradas incógnitas e dificulta a resolução do sistema.
- A solução do sistema não necessariamente é factível, então seria necessário adicionar as restrições do problema.

Com base nessas observações são citadas algumas maneiras de resolver o sistema (C.17) incluindo as restrições do problema para o $(PCEB_c)$:

- Proposta 1: Trabalhar com padrões de corte conhecidos a priori utilizando uma aproximação da função $\phi'_2(x)$. Para isso, devemos verificar se essa aproximação não afeta os teoremas mostrados na seção anterior.
- Proposta 2: Dado uma matriz inicial de padrões de corte, realizar um procedimento iterativo que resolve o sistema (C.17), recupera o multiplicador μ associado as restrições, e gera uma nova coluna a cada iteração.
- Proposta 3: Usar Gilmore e Gomory para gerar soluções e utilizar os sistema (C.17) para testar a qualidade das soluções.
- Proposta 4: Em Florentino et al. (2019) é proposta uma metodologia para obter soluções factíveis para sistemas de equações lineares e não lineares baseada em Programação por Metas. Essa abordagem pode ser usada para comparar os resultados obtidos nas outras propostas.
- Proposta 5: A metodologia proposta até agora pode ser aplicada para resolver o PCE nos casos unidimensional e bidimensional. A alteração necessária se dá no processo de obtenção dos padrões de corte.