

unesp 

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

**PROPRIEDADES DE TRANSPORTE CAÓTICO EM
MAPEAMENTOS HAMILTONIANOS NÃO LINEARES**

Laura Helena Pozzo

**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
RIO CLARO**



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Propriedades de Transporte Caótico em Mapeamentos Hamiltonianos Não Lineares

Laura Helena Pozzo

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador
Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Rio Claro - 2020

P894p Pozzo, Laura Helena
Propriedades de Transporte Caótico em Mapeamentos
Hamiltonianos Não Lineares / Laura Helena Pozzo. -- Rio Claro, 2020
42 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Edson Denis Leonel

1. Transporte caótico. 2. Sistema Hamiltoniano. 3. Histogramas. 4.
Probabilidade de sobrevivência. 5. Expoentes dinâmicos. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de
Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Laura Helena Pozzo

Propriedades de Transporte Caótico em mapeamentos Hamiltonianos Não Lineares

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Prof. Dr. Antonio Marcos Batista

Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira

Conceito: Aprovada

Rio Claro/SP, 27 de Fevereiro de 2020

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, especialmente aos meus pais e minha irmã, por todo carinho, apoio e compreensão no decorrer desses anos. Obrigada por sempre acreditarem em mim.

Ao meu amigo e orientador Prof. Dr. Edson Denis Leonel, por toda a dedicação, pelas lições acadêmicas e de vida, pela compreensão e principalmente por ter me aceitado como orientanda. O seu entusiasmo nos faz querer ser sempre pessoas e pesquisadores melhores.

Ao meu melhor amigo e companheiro Henrique Reatto Porcel, uma pessoa muito especial em minha vida, em todos os momentos me apoiou, me incentivou e me encorajou a seguir em frente.

Aos amigos que conheci durante a graduação: Patrícia, Luiza, Laura, Gustavo, Danilo, Murilo, Tardivo, Toso, Rodrigo e José. Obrigada pelos momentos de descontração, alegria e também pelo apoio durante todos esses anos.

Aos amigos do Laboratório de Dinâmica Não-Linear. Célia Kuwana, Anderson Silva, Dr. Diogo Costa e a todos os demais colegas, obrigada pela amizade e pelas conversas e debates sobre nossa pesquisa, aprendi muito com todos vocês.

Agradeço ao Departamento de Física da Unesp de Rio Claro, a todos os professores e funcionários, pela paciência e por partilhar os conhecimentos que levaremos para toda a vida.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

A todos aqueles que de alguma forma estiveram e estão próximos de mim, muito obrigada.

Resumo

O tema principal deste trabalho é o estudo de algumas propriedades de transporte caótico presentes em mapeamentos Hamiltonianos não lineares. O mapeamento discreto de investigação é descrito por duas equações de recorrência, a primeira referente a coordenada ação, J , e a segunda a coordenada ângulo, θ . O sistema tem dois parâmetros de controle, ε que controla a transição de integrável, quando $\varepsilon = 0$, para não integrável, quando $\varepsilon \neq 0$; e γ que fornece a forma da divergência da variável θ . Partículas presentes na região de caos não podem adentrar à região das ilhas de estabilidade, do mesmo modo que não podem cruzar as curvas invariantes, o que acarretaria na violação do teorema de Liouville. Entretanto, quando as partículas passam próximas às ilhas de estabilidade assim como próximas às curvas invariantes elas podem ficar aprisionadas temporariamente afetando as propriedades de transporte ao longo do caos. Investigaremos como ocorre o transporte de partículas em diferentes regiões do caos e a influência das ilhas de estabilidade em tal transporte.

Palavras-chave: Transporte caótico, Sistema Hamiltoniano, Histogramas, Probabilidade de sobrevivência, Exponentes dinâmicos.

Abstract

The main theme of this work is the study of some chaotic transport properties present in nonlinear Hamiltonian mappings. The discrete investigation mapping is described by two recurrence equations, the first one for the action coordinate, J , and the second for the angle coordinate, θ . The system has two control parameters, ε which controls the transition from integrable when $\varepsilon = 0$ to non-integrable when $\varepsilon \neq 0$; and γ which gives the divergence form of the θ variable. Particles present in the region of chaos can not enter the region of the periodic islands as well as can not cross invariant curves, resulting in violation of Liouville's theorem. However when particles pass close to the islands of stability as well as near invariant curves they can be temporarily trapped affecting the transport properties along the chaos. We will investigate how the particle's transport occurs in different regions of chaos such as the influence of stability islands on such transport.

Keywords: Chaotic transport, Hamiltonian system, Histograms, Probability of survival, Dynamical exponents.

Sumário

Introdução	8
1 O modelo	11
1.1 Mapeamento	11
1.2 Pontos fixos	14
1.2.1 Classificação dos pontos fixos	15
1.3 Localização da primeira curva invariante <i>spanning</i>	17
2 Transporte caótico	20
2.1 Conceito e metodologia	20
2.1.1 Histogramas	21
2.1.2 Probabilidade de Sobrevivência	21
2.2 Janelas de origem distantes das ilhas de periodicidade	22
2.2.1 O caso $\gamma = 1$	22
2.2.2 O caso $\gamma = 3/2$	30
2.2.3 O caso $\gamma = 2$	32
2.2.4 Comparação entre valores diferentes de γ	35
3 Conclusão	38
Referências	39

Introdução

Um sistema dinâmico não linear determinístico, pode apresentar sensibilidade a pequenas mudanças de condições iniciais. Esta sensibilidade às condições iniciais caracteriza um comportamento imprevisível e aperiódico e que aparenta ser aleatório. Tal comportamento é denominado caótico e será o objeto de estudo de nosso trabalho [1].

É importante destacar a diferença entre sistemas denominados caóticos de sistemas aleatórios, estocásticos. Um sistema caótico tem como característica ser determinístico, as diretrizes que regem o sistema são conhecidas. Uma particularidade desse sistema é que ao analisarmos duas condições iniciais próximas evoluindo exponencialmente com o tempo, observamos que quando afastadas, a dinâmica do estado de uma das condições não pode dizer nada sobre a outra. Isso demonstra a não linearidade das equações e a sensibilidade a pequenas condições iniciais. Sistemas caóticos são implementados em diversos estudos e pesquisas, como: mercado financeiro, telecomunicação, estudo da genética, aplicações em medicina, em estudos meteorológicos e geológicos, entre outros casos [2, 3]. Já um comportamento aleatório se caracteriza por ser não determinístico, ou seja, o sistema evolui de forma totalmente imprevisível, não havendo equações ou um conjunto de sistemas que regem o movimento. O comportamento aleatório é estudado em física estatística e como ferramenta para calcular a probabilidade de fenômenos ocorrerem [4].

No decorrer da história sobre o estudo de sistemas dinâmicos não lineares, alguns dos pioneiros a estudar essas dinâmicas foram Jules Henri Poincaré e Edward Lorenz. Poincaré, por volta de 1880, foi o primeiro cientista a considerar a possibilidade de um comportamento caótico em sistemas dinâmicos determinísticos, em seus estudos sobre órbitas planetárias [5].

Poincaré pesquisava um problema dinâmico envolvendo três corpos, até o momento a dinâmica para o caso de dois corpos já havia sido resolvida por Isaac Newton, Poincaré considerou em suas análises a introdução de massa gravitacional num sistema duplo. Logo percebeu que sua dinâmica envolvendo três corpos não era integrável e que se tratava de um sistema não-linear, pois o número de equações trabalhadas era insuficiente para explicar o

sistema. Ele percebeu em seus estudos a sensibilidade do sistema as condições iniciais, suas análises sobre o tema eram próximas ao que denominamos hoje de um comportamento caótico.

Outro importante pesquisador a estudar o comportamento caótico de sistemas dinâmicos não lineares foi Edward Lorenz [6, 7], a partir de seus trabalhos com meteorologia. Na época, calculava-se a previsão meteorológica por métodos lineares, utilizando dados experimentais colhidos durante os dias, como a velocidade do vento, a temperatura, a umidade relativa do ar, entre outros parâmetros. Acreditava-se que o método linear para estudar as previsões do tempo eram suficientes para entender e formular soluções da meteorologia. Lorenz estava hesitante quanto essas suposições, em 1956, decidiu selecionar um sistema de equações diferenciais não lineares para avaliar a validação do método linear. As equações que descreveram a dinâmica dos processos atmosféricos foram: A equação de Navier-Stokes, a equação de condução de calor e a equação de conservação da massa.

Com isso, Lorenz utilizou cálculos numéricos para gerar os dados de suas equações. Nas simulações, imaginava-se que quando ocorressem pequenas alterações nas condições iniciais, as mudanças seriam muito pequenas. Mas o que Lorenz obteve foi o contrário, as pequenas modificações nas condições iniciais provocaram efeitos desproporcionais em suas medidas. Lorenz verificou que para intervalos curtos, no caso do experimento refere-se a alguns dias, os efeitos produzidos eram insignificantes, mas para intervalos longos de tempo, no decorrer de um mês, os efeitos produziam resultados completamente diferentes. Chegou-se a essa conclusão após digitar seus dados com algumas casas decimais a menos, esperava-se que o resultado não tivesse muitas alterações, mas a pequena alteração de casas decimais provocou uma grande mudança. Com o decorrer dos anos, cientistas verificaram que a mesma imprevisibilidade que Lorenz obteve em suas simulações eram encontradas em muitos estudos teóricos e experimentais [8, 9, 10].

Assim, no contexto do estudo de sistemas caóticos, nesta dissertação temos por objetivo o estudo de transporte caótico de partículas transitando entre regiões predeterminadas do espaço de fases.

No Capítulo 1, descreveremos sobre o Sistema Hamiltoniano de estudo, falaremos sobre pontos fixos e suas classificações, que serão importantes para a abordagem do transporte próximas as regiões de estabilidade no espaço de fases. Descreveremos também sobre a localização das curvas invariantes *spanning*, elas delimitam a amplitude do mar de caos, confinando-o, e serão de extrema importância para o estudo de transporte quando considerarmos as janelas distantes das ilhas de movimento regular.

O Capítulo 2 abordará os resultados obtidos durante a realização do mestrado, analisamos o transporte caótico através de histogramas e pela probabilidade de sobrevivência, variando inicialmente apenas o parâmetro de perturbação ε e posteriormente variando também o parâmetro γ do nosso mapeamento. Vamos discutir a relação da variação dos parâmetros no transporte caótico das partículas.

O Capítulo 3, será dedicado as conclusões do trabalho e perspectivas para a continuação dos estudos de transportes referentes a esse mapeamento.

Capítulo 1

O modelo

Neste Capítulo apresentaremos o modelo do mapeamento que será objeto de estudo desta dissertação. Descreveremos sobre a conservação de área no espaço de fases a partir do determinante da matriz Jacobiana. Obteremos os pontos fixos e a descrição da curva invariante *spanning*.

1.1 Mapeamento

Para realizarmos a construção do mapeamento discreto consideraremos a hamiltoniana da forma

$$H(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(J_1, J_2) + \varepsilon H_1(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2), \quad (1.1)$$

onde J_i corresponde a variável ação e θ_i a variável angular, sendo $i = 1, 2$. Podemos observar que o parâmetro de controle ε define a magnitude do acoplamento entre H_0 e H_1 assim como controla a transição de um sistema integrável para não integrável [11]. Um sistema integrável é aquele que apresenta o mesmo número de graus de liberdade no sistema em relação ao número de constantes de movimento, caso a igualdade seja satisfeita, o espaço de fases apresenta uma dinâmica regular e está confinado a superfícies toroidais. Quando a igualdade não é válida, o sistema passa a ser não integrável, as superfícies toroidais são aniquiladas no espaço de fases e começam a coexistir ilhas periódicas e regiões de mar de caos. Consideraremos um sistema Hamiltoniano autônomo de dois graus de liberdade. Se este sistema for integrável, a sua Hamiltoniana H pode ser escrita nas variáveis de ação-ângulo $J_1, J_2, \theta_1, \theta_2$. Assim, sendo a energia do sistema constante, a primeira integral de movimento do sistema, a dimensão do espaço de fases é reduzida de quatro para três variáveis dinâmicas. Pode-se então isolar a variável J_2 e reescrever a hamiltoniana sem esta variável.

Espaço de fases será definido neste trabalho como a representação de todos os estados possíveis do sistema dinâmico, seu resultado é o conjunto de todas as órbitas do sistema. A sequência cronológica de um determinado estado inicial que evolui para uma dinâmica que fornece o conjunto de estados seguintes é denominado órbita [12, 4].

Introduziremos uma seção de Poincaré definida pelo plano $J_1 \times \theta_1$ e assumiremos que θ_2 é constante (mod 2π). Um mapeamento bidimensional que descreve qualitativamente o comportamento da Eq. (1.1) é

$$T : \begin{cases} J_{n+1} = J_n + \varepsilon h(\theta_n, J_{n+1}) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + F(J_{n+1}) + \varepsilon p(\theta_n, J_{n+1})] \bmod (2\pi) \end{cases}, \quad (1.2)$$

sendo que h , F e p são funções não lineares de suas variáveis e o índice n retrata a n -ésima iteração do mapeamento. Para que o mapeamento dado na Eq. (1.2) preserve a área no espaço de fases, as expressões de $h(\theta_n, J_{n+1})$ e $p(\theta_n, J_{n+1})$ devem ser relacionadas como

$$\frac{\partial p(\theta_n, J_{n+1})}{\partial \theta_n} + \frac{\partial h(\theta_n, J_{n+1})}{\partial J_{n+1}} = 0. \quad (1.3)$$

A escolha das funções F , h e p pode ser feita conforme o modelo a ser investigado. Escolheremos $h = \sin(\theta_n)$ e $p = 0$. Para o caso de $F = 1/|J_{n+1}|^\gamma$ sendo $\gamma > 0$ um parâmetro arbitrário, é conhecido na literatura que para $\varepsilon = 0$, o sistema é integrável ao passo que $\varepsilon \neq 0$ o sistema exibe espaço de fases misto [13, 14]. Fazendo-se essas considerações o mapeamento é escrito da forma

$$T : \begin{cases} J_{n+1} = J_n + \varepsilon \sin \theta_n \\ \theta_{n+1} = \left[\theta_n + \frac{1}{|J_{n+1}|^\gamma} \right] \bmod (2\pi). \end{cases} \quad (1.4)$$

Este mapeamento será objeto de investigação no decorrer deste trabalho. No limite em que J_{n+1} é suficientemente pequeno, a razão $\frac{1}{|J_{n+1}|^\gamma}$ fica grande fazendo com que a variável angular θ_{n+1} fique descorrelacionada com a variável θ_n . Entretanto, quando a ação J_{n+1} cresce, a razão $\frac{1}{|J_{n+1}|^\gamma}$ fica pequena produzindo correlação entre as variáveis angulares. A existência dessa correlação leva à regularidade no espaço de fases criando as ilhas de estabilidade, assim como as curvas invariantes *spanning*. A Figura 1.1 apresenta o espaço de fases para o mapeamento discreto dado pela Eq. (1.4). A Figura 1.1 (a) possui o parâmetro de controle $\varepsilon = 0$, observa-se que o sistema é regular, a coordenada ação J é constante enquanto a coordenada angular θ está igualmente distribuída ao longo do intervalo de $[0, 2\pi)$. As imagens seguintes, Figuras 1.1 (b) e (c) demonstram os espaços de fases para valores de

parâmetro de controle $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\varepsilon = 10^{-2}$, respectivamente, ambos apresentam um espaço de fases misto em que há ilhas de periodicidade coexistindo com mares de caos. Em todos os casos considerou-se $\gamma = 1$. Nas figuras que exibem uma forma mista, pode-se notar curvas traçadas em vermelho que representam as curvas invariantes *spanning*. Tais curvas delimitam a região do mar de caos no espaço de fases.

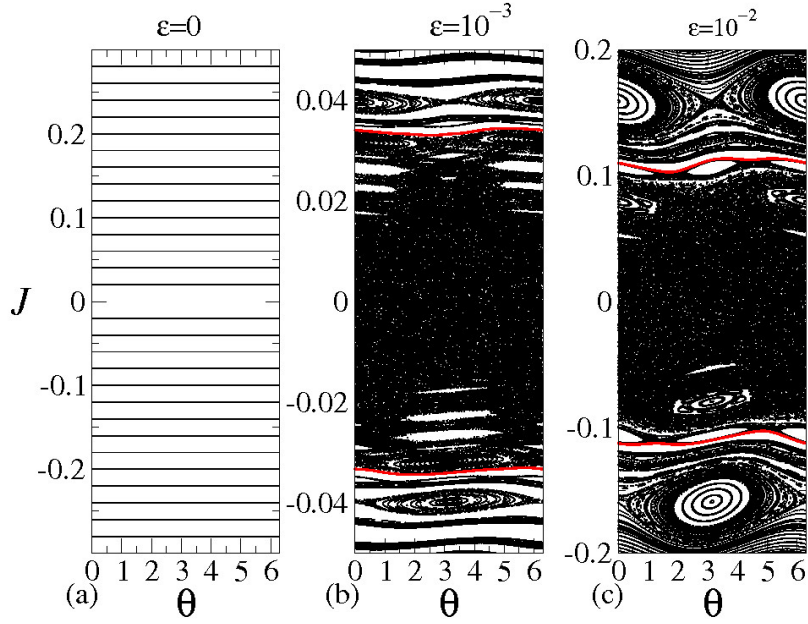


Figura 1.1: Os espaços de fases ilustram a transição de um sistema integrável, referente ao parâmetro de controle $\varepsilon = 0$, para um sistema não integrável, para valores de $\varepsilon \neq 0$, as curvas em vermelho representam as curvas invariantes *spanning*.

Pelo Teorema de Liouville ¹[15], pode-se determinar se o espaço de fases apresenta ou não preservação de área. Podemos determiná-lo através do determinante da matriz Jacobiana, onde,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} & \frac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

¹Teorema de Liouville: é o efeito da evolução temporal de condições iniciais em um sistema mecânico Hamiltoniano, independentemente de sua dinâmica expandir ou contrair no espaço de fases, o sistema será invariante em seu volume.

e os coeficientes são dados por

- $\frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} = 1,$
- $\frac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} = \varepsilon \cos(\theta_n),$
- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n} = -\frac{\gamma}{|J_{n+1}|^{\gamma+1}},$
- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = 1 - \frac{\gamma \varepsilon \cos(\theta_n)}{|J_{n+1}|^{\gamma+1}}.$

Logo,

$$\det J = \frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} - \frac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n}. \quad (1.6)$$

Fazendo a substituição dos coeficientes na Eq. (1.6), obtemos

$$\det J = 1 - \frac{\gamma}{|J_{n+1}|^{\gamma+1}} \varepsilon \cos(\theta_n) + \frac{\gamma}{|J_{n+1}|^{\gamma+1}} \varepsilon \cos(\theta_n),$$

$$\det J = 1. \quad (1.7)$$

Pelo Teorema de Liouville, quando $\det J = 1$ temos a preservação da área no espaço de fases. Isso revela que, independente das mudanças que ocorrem no espaço de fases, quando variamos os parâmetros de controle, a área é preservada.

1.2 Pontos fixos

O mapeamento discreto de investigação é dado pela Eq. (1.4). A condição para se obter pontos fixos de período 1 é [16]:

$$\begin{cases} J_{n+1} = J_n = J, \\ \theta_{n+1} = \theta + 2m\pi, \end{cases} \quad (1.8)$$

sendo $m = 1, 2, 3, \dots$, lembrando que a equação em θ do mapeamento é modulada em 2π , devemos acrescentar o termo $2m\pi$.

Pela primeira equação do mapa (1.4) e utilizando a primeira relação da Eq. (1.8), temos

$$J = J + \varepsilon \sin(\theta). \quad (1.9)$$

Logo,

$$\theta = m\pi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}. \quad (1.10)$$

Pela segunda equação (1.4) e utilizando a segunda relação de (1.8) encontramos

$$\theta_{n+1} = \theta + \frac{1}{|J|^\gamma} = \theta + 2m\pi, \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{|J|^\gamma} = 2m\pi. \quad (1.12)$$

Assim, teremos que

$$J = \pm \left(\frac{1}{2m\pi} \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (1.13)$$

1.2.1 Classificação dos pontos fixos

Faremos a classificação dos pontos fixos pelos autovalores da matriz Jacobiana $\det(J - \lambda I) = 0$ [17]. A matriz Jacobiana e seus respectivos coeficientes foram dados a partir da Eq. (1.5). Dessa maneira, o $\det(J - \lambda I) = 0$ será,

$$\det = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & \varepsilon \cos(\theta) \\ -\frac{\gamma}{|J|^{\gamma+1}} & 1 - \frac{\gamma}{|J|^{\gamma+1}} \varepsilon \cos(\theta) - \lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (1.14)$$

Assim,

$$\lambda_{\pm} = 1 - \frac{\gamma \varepsilon \cos(\theta)}{2|J|^{\gamma+1}} \pm \sqrt{\frac{\gamma \varepsilon \cos(\theta)}{4|J|^{\gamma+1}} \left[\frac{\gamma \varepsilon \cos(\theta)}{|J|^{\gamma+1}} - 4 \right]}. \quad (1.15)$$

Faremos a seguinte consideração:

$$|J| = \begin{cases} J, & \text{se } J \geq 0 \\ -J, & \text{se } J < 0 \end{cases}. \quad (1.16)$$

Para $\theta = 0$ e $|J|$ positivo

$$\left[\frac{\gamma \varepsilon \cos(\theta)}{|J|^{\gamma+1}} - 4 \right] < 0, \quad (1.17)$$

o que conduz à,

$$m < \frac{1}{2\pi} \left(\frac{4}{\gamma \varepsilon} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}. \quad (1.18)$$

Nestas condições temos um ponto fixo elíptico.

Para $\theta = 0$ e $|J|$ negativo

$$\left[\frac{\gamma\varepsilon}{|J|^{\gamma+1}} - 4 \right] > 0, \quad (1.19)$$

o que nos leva a

$$m > -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{4}{\gamma\varepsilon} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}. \quad (1.20)$$

Sabendo-se da relação de valores que m pode assumir, temos neste caso um ponto fixo hiperbólico.

Para $\theta = \pi$ e $|J|$ positivo

$$\left[\frac{\gamma\varepsilon}{|J|^{\gamma+1}} + 4 \right] > 0, \quad (1.21)$$

o que resulta em

$$m > -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{4}{\gamma\varepsilon} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}. \quad (1.22)$$

Assim, nestas circunstância temos um ponto fixo hiperbólico.

Para $\theta = \pi$ e $|J|$ negativo

$$\left[\frac{\gamma\varepsilon}{|J|^{\gamma+1}} + 4 \right] < 0, \quad (1.23)$$

de onde concluimos que,

$$m < \frac{1}{2\pi} \left(\frac{4}{\gamma\varepsilon} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}. \quad (1.24)$$

Nestas condições temos um ponto fixo elíptico.

1.3 Localização da primeira curva invariante *spanning*

Para localizar J_{fisc} , sendo $fisc$ ², o termo utilizado para identificar [18] a primeira curva invariante *spanning*, faremos uma conexão com o mapa padrão. De acordo com a referência [18], no mapa padrão (Chirikov-Taylor) existe um valor $K_c \cong 0,9716..$ onde o sistema exibe uma transição de caos local para caos global [19, 20]. O mapeamento é dado por

$$T : \begin{cases} J_{n+1} = J_n + K \sin \theta_n \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + J_{n+1}] \bmod (2\pi). \end{cases} \quad (1.25)$$

Podemos observar pela Figura 1.2 que para valores de $K < K_c$, Figuras 1.2 (a) e (b), o espaço de fases é misto e o mar de caos está confinado por curvas invariantes *spanning*, enquanto que para $K > K_c$, Figura 1.2 (c), as curvas invariantes *spanning* são destruídas e o mar de caos deixa de ser local e passa a ser global no sistema, onde teremos difusão ao longo de J .

Utilizaremos essa propriedade em $K = K_c$ para descrever localmente a posição de J_{fisc} . Assumindo que J_{fisc} possa ser escrito como $J_{fisc} = J^* + \Delta J$ a variável dinâmica J_{n+1} ao longo do J_{fisc} é $J_{n+1} = J^* + \Delta J_{n+1}$.

Podemos reescrever o mapeamento (1.25) como:

$$\begin{cases} \Delta J_{n+1} = \Delta J_n + \varepsilon \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \left[\theta_n + \frac{1}{(J^* + \Delta J_{n+1})^\gamma} \right] \end{cases} \quad (1.26)$$

Considerando, $J_{n+1} > 0$, podemos reescrever a segunda equação do mapeamento da forma

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{J^{*\gamma}} \left(1 + \frac{\Delta J_{n+1}}{J^*} \right)^{-\gamma}. \quad (1.27)$$

Expandindo em série de Taylor, considerando apenas os termos de 1 ordem e admitindo que $\frac{\Delta J_{n+1}}{J^*} \ll 1$, temos

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{J^{*\gamma}} - \gamma \frac{\Delta J_{n+1}}{J^{*\gamma+1}}. \quad (1.28)$$

Nomearemos J_{n+1} como

$$J_{n+1} = \frac{1}{J^{*\gamma}} - \gamma \frac{\Delta J_{n+1}}{J^{*\gamma+1}}. \quad (1.29)$$

²*fisc*: first invariant spanning curve.

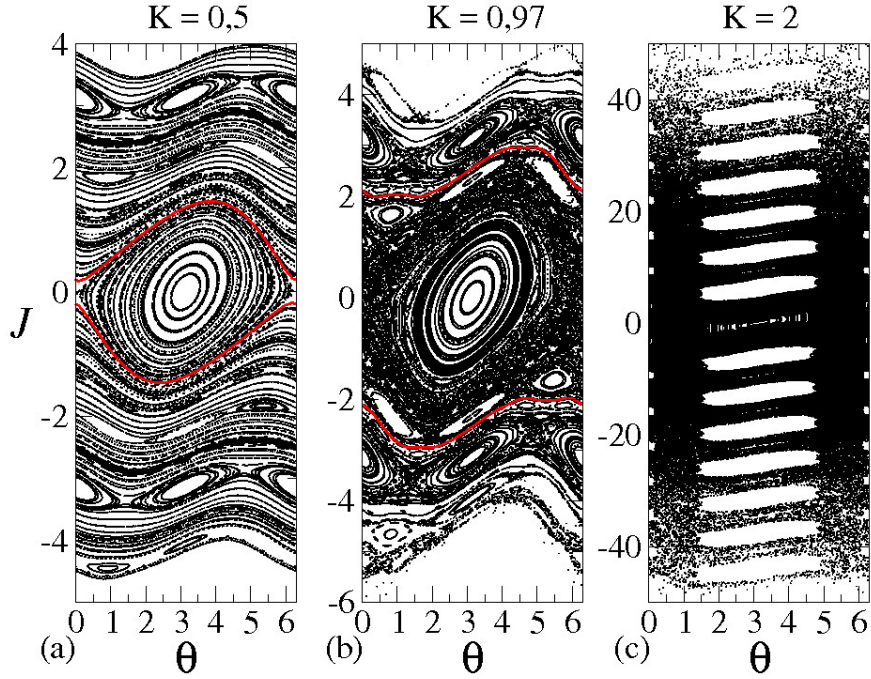


Figura 1.2: Espaços de fases referentes ao mapa padrão para diferentes valores do parâmetro de controle K .

Logo, as duas equações resultantes da aproximação ficam escritas como

$$\begin{cases} \Delta J_{n+1} = \Delta J_n + \varepsilon \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + J_{n+1} \end{cases} \quad (1.30)$$

Para que a primeira equação do mapeamento fique na forma do modelo padrão multiplicaremos tal equação por $\frac{-\gamma}{J^{*\gamma+1}}$ e somaremos com $\frac{1}{J^{*\gamma}}$ assim,

$$J_{n+1} = J_n - \frac{\gamma \varepsilon}{J^{*\gamma+1}} \sin(\theta_n). \quad (1.31)$$

Nomearemos o parâmetro $K_{efetivo}$ como $K_{ef} = \frac{\gamma \varepsilon}{J^{*\gamma+1}}$. Para eliminarmos o sinal negativo da equação, definiremos a variável $\theta_n = \phi_n + \pi$. Portanto,

$$T : \begin{cases} J_{n+1} = J_n + K_{ef} \sin(\phi_n) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + J_{n+1} \end{cases}, \quad (1.32)$$

e a posição da curva invariante é obtida quando

$$K_{ef} = \frac{\gamma\varepsilon}{J^{*\gamma+1}} \cong 0,9716... \quad (1.33)$$

isto é,

$$J^* = \left[\frac{\gamma\varepsilon}{K_{ef}} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}}. \quad (1.34)$$

Se a variação ΔJ for pequena, $J_{fisc} = J^*$, logo

$$J_{fisc} \cong \pm \left[\frac{\gamma\varepsilon}{0,9716..} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}}. \quad (1.35)$$

Esta solução é decisiva para o estudo de transporte caótico (conceito sobre transporte será definido no próximo capítulo), pois a curva invariante descreve a amplitude do mar de caos e deve estar sempre confinada à $J_{caos} \in (-J_{fisc}, +J_{fisc})$. Utilizaremos essas análises para o estudo de transporte caótico que será apresentado no próximo capítulo.

Capítulo 2

Transporte caótico

Neste Capítulo estudaremos sobre as propriedades do transporte caótico, por meio de histogramas e probabilidades de sobrevivência. Faremos uma discussão sobre a influência dos parâmetros de controle no transporte.

2.1 Conceito e metodologia

O transporte é o processo pelo qual as órbitas inicialmente localizadas em uma região (janela) de origem evoluem para uma região (janela) de destino [21]. Para estudarmos as propriedades de transporte será necessário localizarmos no espaço de fase a primeira curva invariante *spanning*, que obtivemos analiticamente pela Equação (1.35). Tal curva descreve a amplitude do mar de caos confinado em $J_{caos} \in (-J_{fisc}, +J_{fisc})$. O mapeamento discreto de investigação, Eq.(1.25) é descrito por duas equações de recorrência, a primeira referente à coordenada ação J e a segunda à coordenada ângulo θ . O sistema apresenta dois parâmetros de controle, sendo eles ε que controla a transição de integrável para não integrável e γ que fornece a forma da divergência da variável θ .

Este capítulo tem por objetivo o estudo de transporte de órbitas caóticas, que é investigado em termos do histograma de transporte e da probabilidade de sobrevivência. O histograma fornece a frequência com que ocorre transporte até a janela de destino em um determinado instante n . A probabilidade de sobrevivência fornece a frequência com que as órbitas não adentram a janela de destino.

Consideramos para a realização das simulações a janela de origem como sendo aproximadamente igual a zero na coordenada J . Em relação a coordenada angular θ sua variação ocorre de 0 à 2π , percorrendo todo o eixo horizontal do espaço de fases. No que se refere a janela de destino, em todos

os casos, sua localização estará abaixo da posição média da curva invariante *spanning*, J_{fisc} , e acima da linha onde $J = \pm J_{fisc} \times 0,75$.

2.1.1 Histogramas

O histograma $H(n)$ fornece o número de órbitas que atingem a região de destino na iteração n [22]. Antes de iniciar o processo iterativo das condições iniciais (CIs), H é definido como zero em todas as componentes. Em seguida, o processo iterativo é iniciado. Se a órbita de uma CI chegar na região de destino então a componente da iterada de H é aumentada pela unidade e a outra órbita é iniciada. $H(n)$ depende do tamanho M do conjunto de CIs. Neste trabalho para todos os casos $M = 10^8$ CIs, o histograma normalizado de transporte é dado por:

$$h(n) = \frac{H(n)}{M}. \quad (2.1)$$

Pela equação do histograma podemos observar que, no início, todas as condições iniciais estarão na janela de origem, logo, o número de órbitas que atingem a região de destino é nula, mas conforme as iterações ocorrem cada vez mais partículas atingem a região de destino. O estudo dessa propriedade será abordado na próxima seção.

2.1.2 Probabilidade de Sobrevivência

O segundo estudo de transporte caótico é realizado através da probabilidade de sobrevivência. Esta fornece a frequência com que as órbitas não adentram a janela de destino em um determinado instante n [23]. Antes de iniciar o processo iterativo das condições iniciais (CIs), N é definido como zero em todas as componentes. Em seguida, o processo iterativo das CIs é iniciado. Se a órbita de uma CI chegar na região de destino, armazenaremos o valor da última iteração sem alcançar a janela de destino e outra órbita é iniciada. A probabilidade de sobrevivência normalizada é dada por:

$$P(n) = \frac{N(n)}{M}. \quad (2.2)$$

Pode-se observar que esta propriedade é oposta ao estudo de histogramas. Enquanto os histogramas fornecem a frequência com que as órbitas adentram as janelas de destino, a probabilidade fornece a frequência com que as órbitas sobrevivem a janela de destino. Agora, quando analisamos a probabilidade de sobrevivência nos instantes iniciais, o seu valor será máximo, pois todas as condições iniciais sobreviverão no espaço de fases. Conforme as iterações

ocorrem observamos um decaimento dessa probabilidade, este decaimento será nosso objeto de estudo.

2.2 Janelas de origem distantes das ilhas de periodicidade

Com a descrição da curva invariante *spanning*, podemos estudar o transporte caótico. Consideramos as janelas de origem distantes das regiões de movimento regular, as janelas de destino serão definidas como uma região do mar de caos localizada no espaço de fase em relação à posição média da curva invariante *spanning*.

2.2.1 O caso $\gamma = 1$

Quando consideramos $\gamma = 1$ obtemos os espaços de fases da Figura 1.1. A Figura 2.1 ilustra o histograma $h(n)$ para seis valores diferentes do parâmetro ε , conforme é demonstrado na legenda da Figura 2.1. Para cada curva de $h(n)$ observamos uma função crescente para n suficientemente pequeno, mas conforme as iterações prosseguem, mais órbitas alcançam a janela de destino. Observamos que cada curva de $h(n)$ atinge um valor máximo e depois se torna uma função decrescente.

Vamos estabelecer h_{max} como o valor máximo de cada curva $h(n)$ e n_p como o valor de n tal que $h(n_p) = h_{max}$. Nas vizinhanças de n_p , as curvas de $h(n)$ são descritas por uma função quadrática com boa aproximação. Assim, com os parâmetros de ajuste dessa função quadrática, obtemos as coordenadas (n_p, h_{max}) da transição do regime de crescimento para decaimento de cada $h(n)$.

A tabela 2.1 refere-se aos valores de n_p e h_{max} para todos os valores de parâmetro de controle ε estudados.

A partir dos dados obtidos na tabela 2.1, pode-se realizar os gráficos das Figuras 2.2(a) e (b). A Figura 2.2(a) exibe o gráfico de n_p em função de ε e a Figura 2.2(b) o gráfico de h_{max} em função de ε . Observamos que as grandezas h_{max} e n_p dependem de ε . Quando aumentamos o parâmetro ε , h_{max} aumenta enquanto n_p diminui.

Pelas Figuras 2.2(a) e (b) pode-se fazer um melhor ajuste dos dados numéricos, em lei de potência, para $n_p \propto \varepsilon^\eta$ com o expoente negativo fornece $\eta = -0,99 \pm 0,05$ e para $h_{max} \propto \varepsilon^\beta$ com o expoente positivo fornece $\beta = 0,96 \pm 0,03$. Com essas novas informações, pode-se apresentar uma descrição de escala de $h(n)$ [15, 24]. Os dados numéricos propõem que o

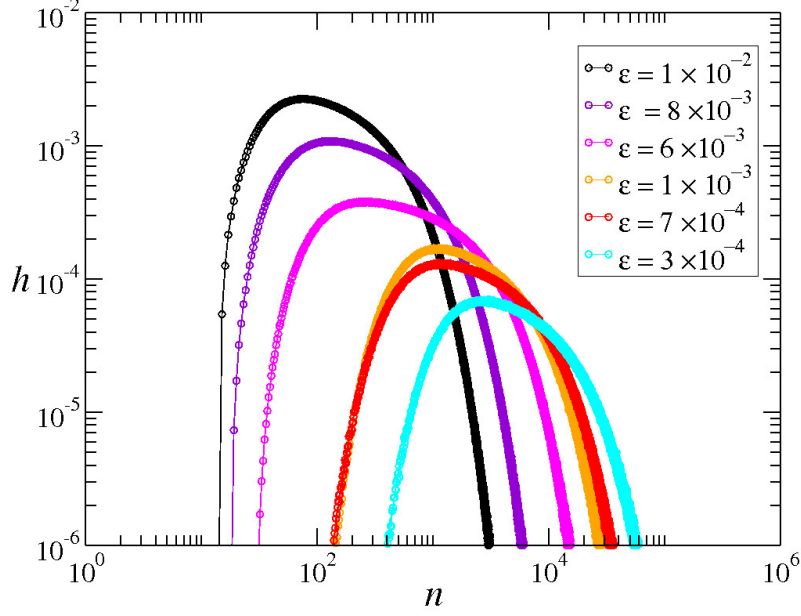


Figura 2.1: Histogramas de transporte para diferentes valores de ε , considerando $M = 10^8$ CIs.

histograma normalizado será descrito por

$$h(n, \varepsilon) = l h(l^a n, l^b \varepsilon) \quad (2.3)$$

sendo l o fator de escala e a e b os expoentes de escala. Como l é um fator de escala podemos escolhê-lo como $l^b \varepsilon = 1$, assim

$$l = \varepsilon^{(-1/b)}. \quad (2.4)$$

A expressão pode ser reescrita como

$$h(n, \varepsilon) = \varepsilon^{(-1/b)} h(l^{-a/b} n, 1), \quad (2.5)$$

para $n \approx n_p$ temos que $h \approx h_{max}$. Comparando este resultado com $h_{max} \propto \varepsilon^\beta$ temos

$$h_{max} \propto \varepsilon^{-1/b}, \quad (2.6)$$

o que nos leva a concluir que

$$\beta = -\frac{1}{b}. \quad (2.7)$$

Tabela 2.1: Valores de n_p e h_{max} para cada parâmetro de controle ε .

Valores de ε	n_p	h_{max}
1×10^{-2}	80	0,00224807
9×10^{-3}	96	0,00191833
8×10^{-3}	143	0,00108142
7×10^{-3}	175	0,000952815
6×10^{-3}	281	0,000378055
5×10^{-3}	889	$8,04287 \times 10^{-5}$
4×10^{-3}	287	0,000558336
3×10^{-3}	245	0,000871362
2×10^{-3}	387	0,000558254
1×10^{-3}	1385	0,00012818
9×10^{-4}	1747	0,0000813318
8×10^{-4}	1287	0,000142333
7×10^{-4}	1166	0,000167164
6×10^{-4}	1324	0,000152871
5×10^{-4}	2148	$8,28344 \times 10^{-5}$
4×10^{-4}	2489	$7,06622 \times 10^{-5}$
3×10^{-4}	2807	$6,79426 \times 10^{-5}$
2×10^{-4}	5000	$3,37145 \times 10^{-5}$
1×10^{-4}	7749	$2,5629 \times 10^{-5}$

O próximo passo será escolher $l^a n = 1$, de modo que

$$l = n^{(-1/a)}. \quad (2.8)$$

A expressão pode ser reescrita como

$$h(n, \varepsilon) = n^{(-1/a)} h(1, l^{-b/a} \varepsilon), \quad (2.9)$$

quando $h \approx h_{max}$ temos $n \approx n_p$. Comparando este resultado com $h_{max} \propto \varepsilon^\beta$ e $n_p \propto \varepsilon^\eta$ encontramos

$$\varepsilon^{-1/b} = \varepsilon^{-\eta/a}, \quad (2.10)$$

o que conduz à

$$\eta = \frac{a}{b}. \quad (2.11)$$

Com essas relações, podemos realizar as transformações de variáveis

$$h \rightarrow h/\varepsilon^{(-1/b)} \rightarrow h/\varepsilon^\beta, \quad (2.12)$$

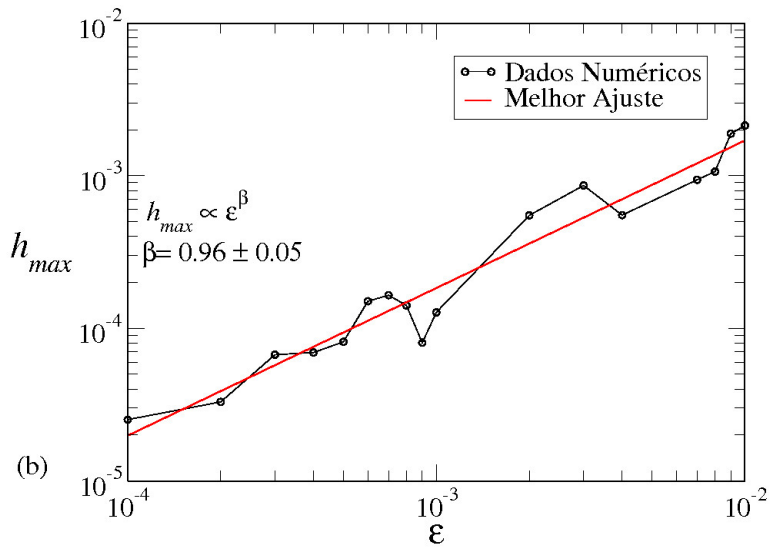
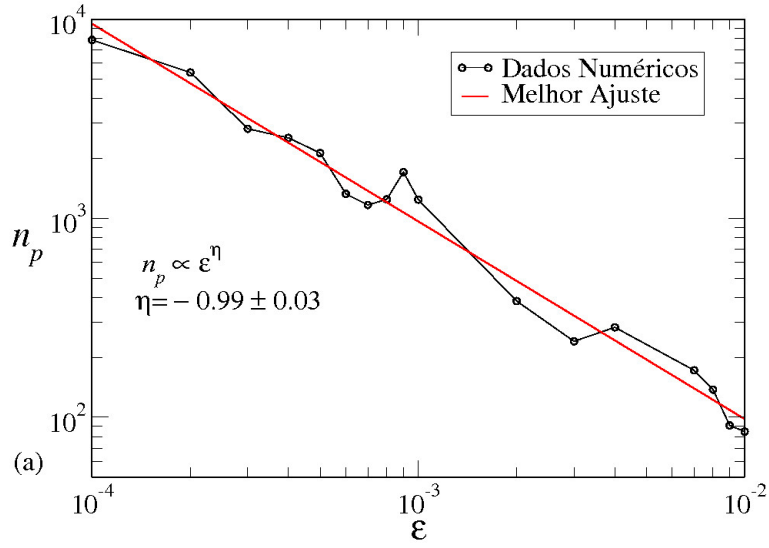


Figura 2.2: A Figura (a) representa n_p em função de ε , (b) representa os valores de h_{max} em função de ε .

e

$$n \rightarrow n\varepsilon^{(-a/b)} \rightarrow n/\varepsilon^\eta. \quad (2.13)$$

Com as transformações de variáveis $h \rightarrow h/\varepsilon^\beta$ e $n \rightarrow n/\varepsilon^\eta$, podemos reconstruir a Figura 2.1 e observamos a sobreposição das curvas de $h(n)$, em uma única curva universal, mostrando uma invariância de escala em relação a $h(n)$ conforme mostrado na Figura 2.3. O sistema ter a característica de ser uma invariância de escala, expressa que independente das mudanças dos parâmetros de controle, as curvas sempre terão como resultado a sua sobreposição.

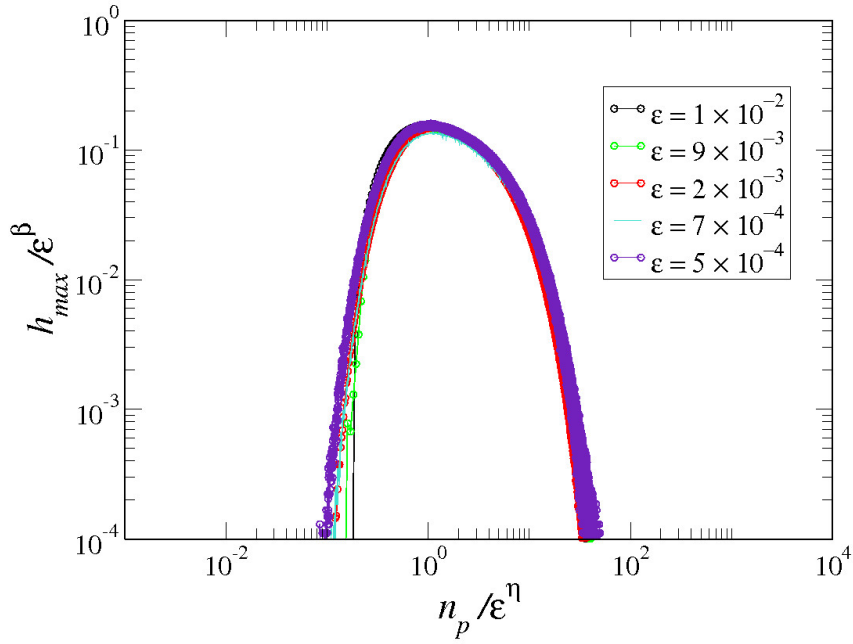


Figura 2.3: Sobreposição das curvas dos histogramas para valores diferentes de ε .

A probabilidade de sobrevivência, $P(n)$, é a probabilidade da partícula sobreviver no espaço de fases sem adentrar à janela de destino. Na Figura 2.4, para $\gamma = 1$, analisamos o transporte para cinco valores diferentes do parâmetro ε .

Observamos que inicialmente, para todas as curvas, a probabilidade é igual a 1. Com o decorrer das iterações a probabilidade de sobrevivência começa a decair, pois cada vez mais condições iniciais chegam a janela de destino. Esse decaimento, para valores pequenos de n , é descrito por decaimentos exponenciais, como observado na Figura 2.5.

Sabendo-se que para valores pequenos de n as curvas se comportam como

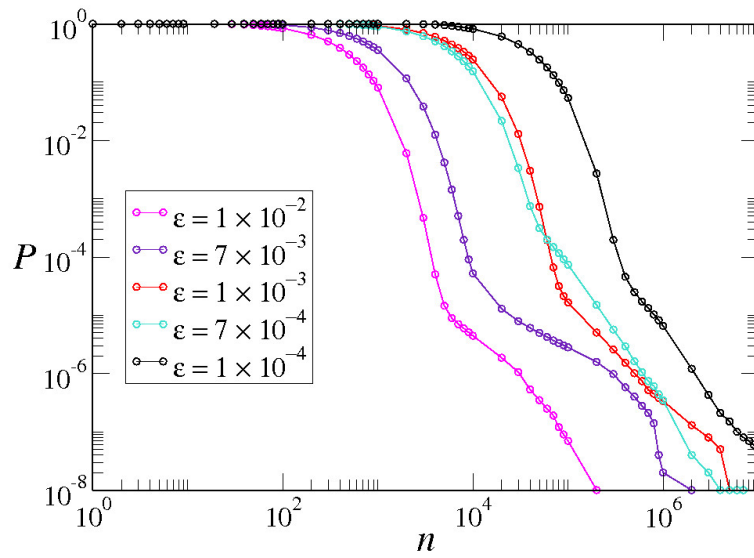


Figura 2.4: Probabilidade de sobrevivência para diferentes valores de ϵ .

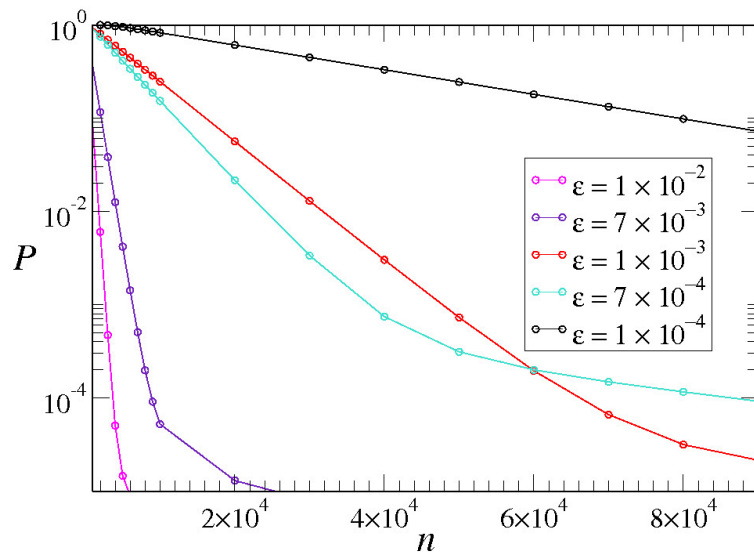


Figura 2.5: Decaimento exponencial da probabilidade de sobrevivência para valores pequenos de n

decaimentos exponenciais, a equação que descreve esse comportamento é dada por $P(n) = Ae^{-\alpha n}$ [25].

Tabela 2.2: Tabela contendo os valores de α e o erro para cada coeficiente encontrado para parâmetro de controle ε .

Valores de ε	α	Erro
1×10^{-2}	0,0025198	$3,98 \times 10^{-6}$
9×10^{-3}	0,0021756	$7,46 \times 10^{-6}$
8×10^{-3}	0,0012166	$2,13 \times 10^{-6}$
7×10^{-3}	0,0011087	$1,76 \times 10^{-6}$
6×10^{-3}	0,00040776	$3,60 \times 10^{-7}$
5×10^{-3}	$8,39 \times 10^{-5}$	$1,47 \times 10^{-7}$
4×10^{-3}	0,00063851	$1,06 \times 10^{-6}$
3×10^{-3}	0,0010389	$2,31 \times 10^{-6}$
2×10^{-3}	0,00066964	$8,75 \times 10^{-7}$
1×10^{-3}	0,00014642	$1,88 \times 10^{-7}$
9×10^{-4}	$8,97 \times 10^{-5}$	$2,23 \times 10^{-7}$
8×10^{-4}	0,00016216	$8,46 \times 10^{-7}$
7×10^{-4}	0,00019333	$8,53 \times 10^{-7}$
6×10^{-4}	0,00018003	$4,33 \times 10^{-7}$
5×10^{-4}	$9,54 \times 10^{-5}$	$2,49 \times 10^{-7}$
4×10^{-4}	$8,12 \times 10^{-5}$	$1,26 \times 10^{-7}$
3×10^{-4}	$7,90 \times 10^{-5}$	$1,94 \times 10^{-7}$
2×10^{-4}	$3,87 \times 10^{-5}$	$9,19 \times 10^{-7}$
1×10^{-4}	$3,02 \times 10^{-5}$	$5,20 \times 10^{-7}$

Na tabela 2.2 descrevemos o comportamento do decaimento exponencial para diferentes valores do parâmetro de controle ε . Pode-se realizar um gráfico do parâmetro de decaimento α em função de ε com os dados numéricos de cada curva e fazer um melhor ajuste em lei de potência desses dados [26, 27], como mostrado na Figura 2.6.

Com essas informações, reescalamos o gráfico da probabilidade de sobrevivência $n \rightarrow n\varepsilon^z$ e obtemos a sobreposição das curvas de $P(n)$ para valores pequenos de n , Figura 2.7.

Para valores grandes de n não foi possível encontrar uma curva universal entre elas, pois se observamos as curvas das probabilidades, elas deixam de ser o decaimento exponencial e passam a se comportar como um decaimento em lei de potência ou uma exponencial esticada. Essa mudança de comportamento de um decaimento exponencial para um decaimento em lei de potência

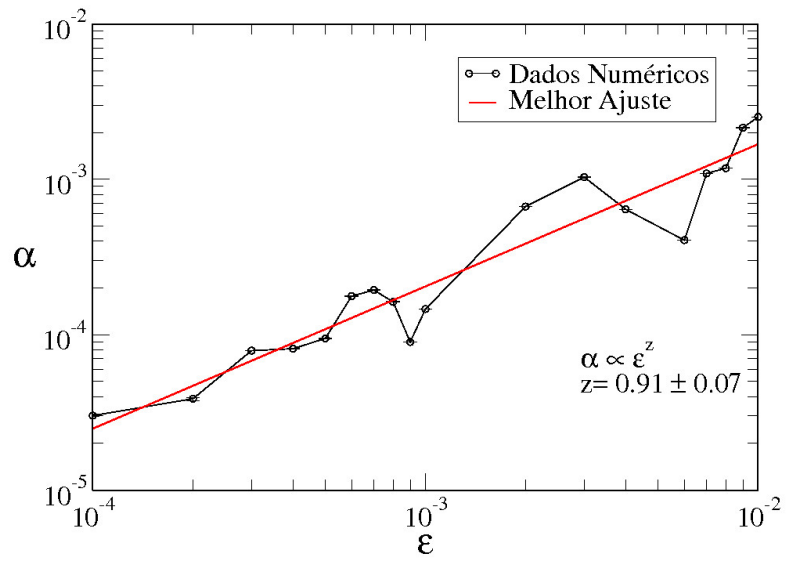


Figura 2.6: Decaimento α em função dos parâmetros de controle ϵ .

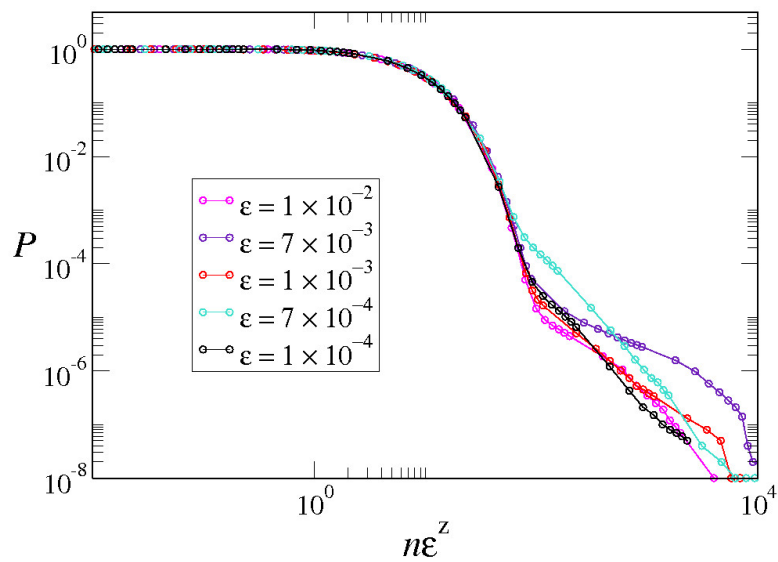


Figura 2.7: Sobreposição das curvas das probabilidades de sobrevivência para valores pequenos de n .

ou uma exponencial esticada se deve ao fato da existência de regiões de periodicidade nos espaços de fases, essa redução da velocidade da probabilidade de sobrevivência está associada ao fenômeno de aprisionamento denominado *stickiness*.

Stickiness é o efeito de aprisionamento das partículas em regiões de estabilidade no espaço de fases. Quando uma condição inicial é iterada no mapa, ela pode ficar confinada por um tempo próximo as ilhas de periodicidade. Esse efeito de aprisionamento é motivo da mudança do decaimento da probabilidade de sobrevivência [26].

2.2.2 O caso $\gamma = 3/2$

Para o estudo de transporte com $\gamma = 3/2$ realizamos o estudo por meio dos histogramas e das probabilidades de sobrevivência, assim como fizemos para $\gamma = 1$. Os espaços de fases da Figura 2.8 descrevem o comportamento do mapeamento quando mudamos o parâmetro ε .

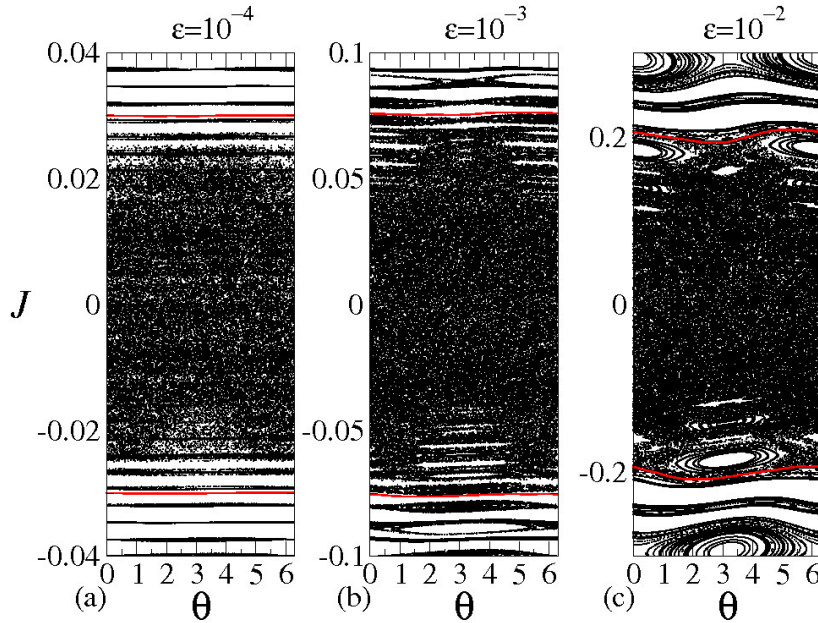


Figura 2.8: Espaços de fases para $\gamma = 3/2$ com diferentes valores de parâmetro de controle ε .

Podemos alegar que os espaços de fases permanecem mistos, com ilhas de estabilidade coexistindo com o mar de caos, as curvas em vermelho represen-

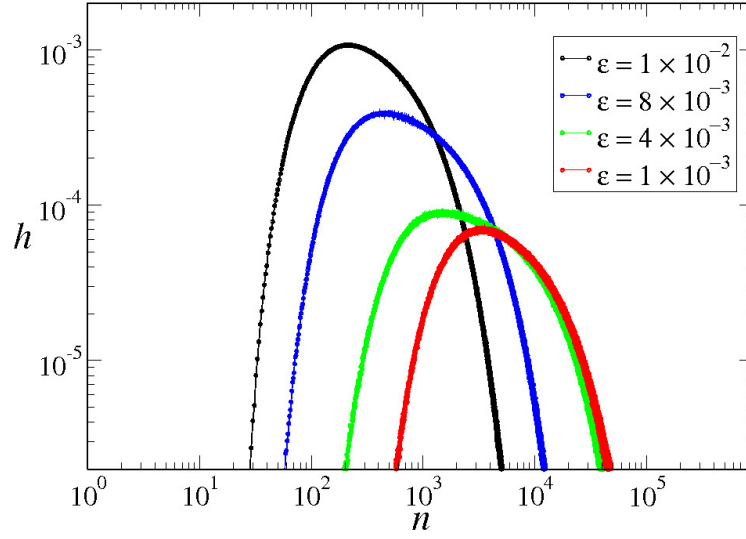


Figura 2.9: Histogramas com $\gamma = 3/2$ para diferentes valores de ε .

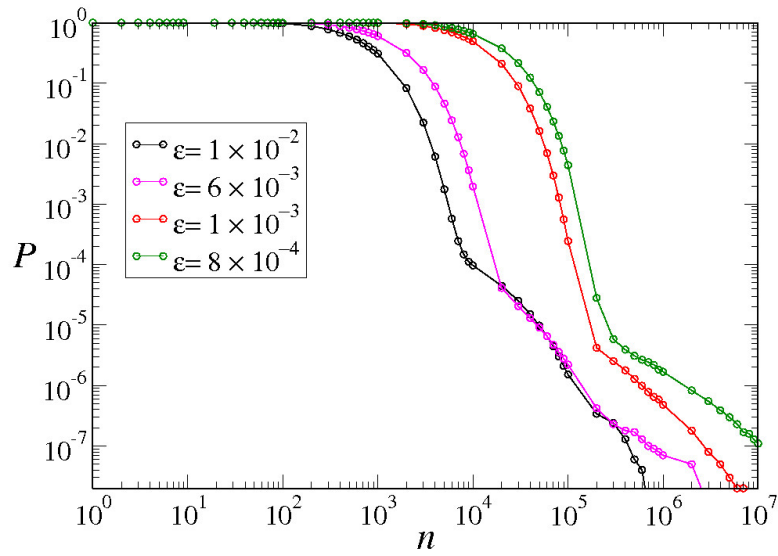


Figura 2.10: Probabilidade de sobrevivência, com $\gamma = 3/2$, para diferentes valores de parâmetro de controle ε .

tam as curvas invariantes *spanning* de menor energia, que serão importantes para o estudo de transporte. Pode-se observar que conforme o parâmetro ε aumenta, ocorre um aumento do mar de caos no espaço de fases em relação a coordenada J e uma diminuição das ilhas de periodicidade, essa mudança nos espaços de fases está relacionada com a dinâmica do estudo de transporte caótico. A Figura 2.9, descreve o comportamento dos histogramas para diferentes valores de ε .

Da mesma forma que no caso anterior, inicialmente a função é crescente, com o desenvolvimento das iterações a função tem um máximo e começa a decrescer. Quanto menor o valor de ε mais iterações são necessárias para que as condições iniciais alcancem a janela de destino, isso está relacionado com a quantidade de ilhas presentes no espaço de fases.

De forma análoga estudamos a probabilidade de sobrevivência para diferentes valores do parâmetro de controle ε , com $\gamma = 3/2$. Podemos observar pela Figura 2.10 que inicialmente o decaimento ocorre exponencialmente para valores curtos de n e posteriormente ela deixa de descrever um decaimento exponencial passando a ser um decaimento exponencial mais lento podendo ser uma lei de potência ou um exponencial esticada. Pode-se observar que conforme diminuimos o parâmetro ε surgem mais ilhas de periodicidade nos espaços de fases, esse aumento de ilhas faz com que as condições iniciais sobrevivam por muito mais tempo sem adentrar as janelas de destino, sendo necessárias mais iterações para que a probabilidade de sobrevivência decresça.

2.2.3 O caso $\gamma = 2$

Para $\gamma = 2$, encontramos os espaços de fases para valores diferentes de ε , representados pela Figura 2.11. Observa-se que para o valor de $\varepsilon = 10^{-4}$ a região do mar de caos é muito pequena quando comparada com a região de $\varepsilon = 10^{-2}$, mas quanto menor o valor de ε mais ilhas de periodicidade há no sistema, a dinâmica dos espaços de fases são equivalentes ao dos casos $\gamma = 1$ e $\gamma = 3/2$.

As análises dos histogramas e das probabilidades de sobrevivência foram equivalentes aos anteriores. Logo, a Figura 2.12, descreve o comportamento do transporte analisado por histogramas.

A Figura 2.12 representa a frequência com que as condições iniciais atingiram a janela de destino, para diferentes valores de parâmetros de controle. Da mesma forma, a Figura 2.13, descreve o comportamento do transporte analisado através da probabilidade de sobrevivência.

Observamos que quando fixamos o valor de parâmetro γ , os espaços de fase e o transporte variam de acordo com o parâmetro de perturbação ε . Nos histogramas vimos que quanto maior o parâmetro de perturbação menor é o

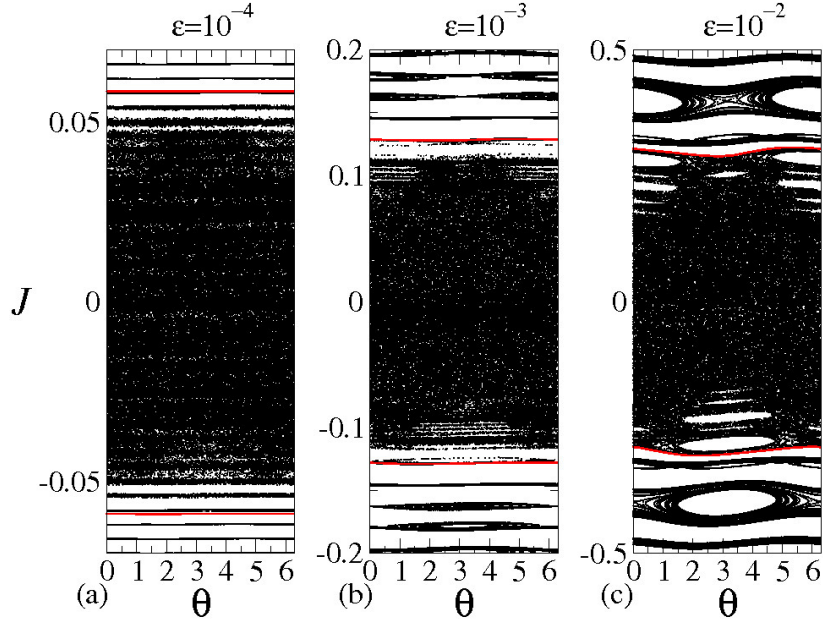


Figura 2.11: Espaços de fases para $\gamma = 2$ com diferentes valores de parâmetro de controle ε .

número de iterações necessárias para que as partículas alcancem as janelas de destino. Quanto menor o parâmetro ε , conseqüentemente, maior o tempo necessário para que as partículas atinjam a janela de destino e menor o pico entre a frequência da função crescente para decrescente. Isso é analisado a partir dos espaços de fase, pois quanto menor o parâmetro ε mais regular é o espaço de fase e mais ilhas de estabilidade se apresentam nele.

Nas probabilidades de sobrevivência a análise dos espaços de fase em relação a variação do parâmetro ε também é válida. Quanto menor o parâmetro, maior é tempo que as partículas sobrevivem no espaço de fases sem alcançar as janelas de destino.

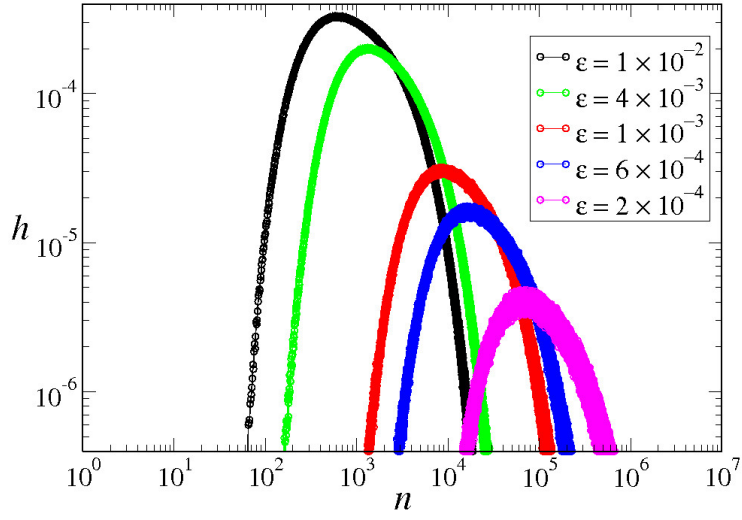


Figura 2.12: Histogramas com $\gamma = 2$ para diferentes valores de parâmetro de controle ε .

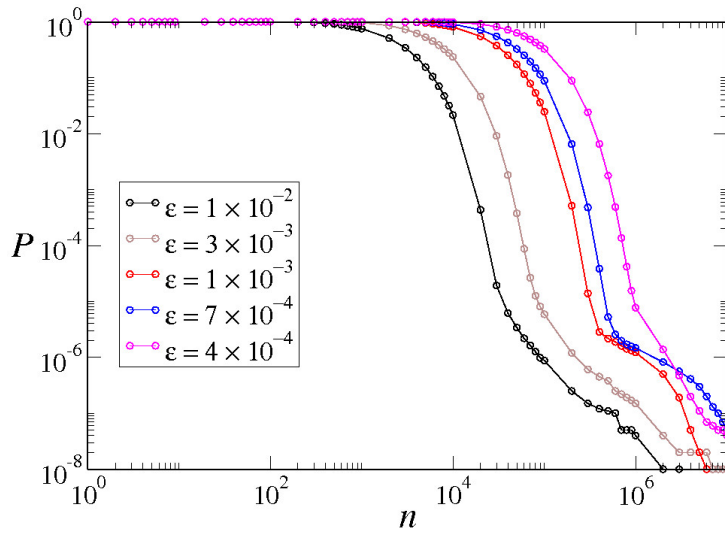


Figura 2.13: Probabilidade de sobrevivência, com $\gamma = 2$, para diferentes valores de parâmetro de controle ε .

2.2.4 Comparação entre valores diferentes de γ

Sabendo-se os resultados para cada valor de γ , podemos analisar a comparação entre o estudo de transporte caótico quando mantemos fixo o valor do parâmetro de controle ε e variamos o parâmetro γ . A Figura 2.14, descreve os histogramas para $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\varepsilon = 10^{-2}$, para valores de $\gamma = 1, 3/2$ e 2.

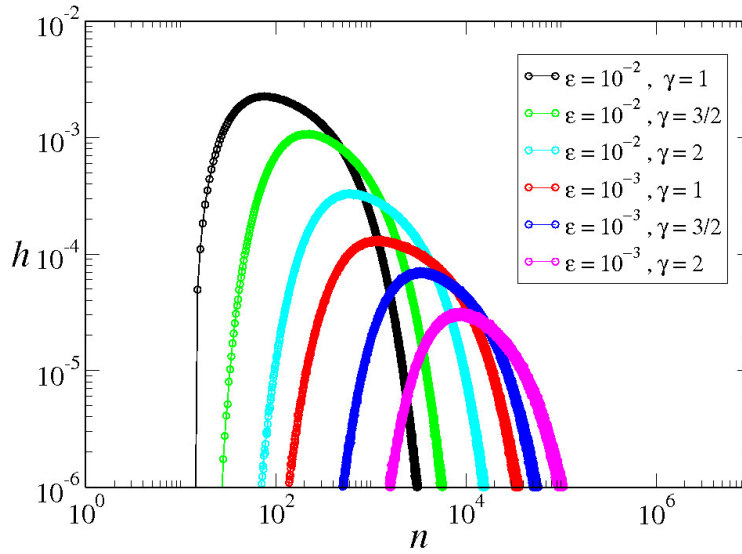


Figura 2.14: Histogramas com diferentes valores de γ para valores fixos do parâmetro de controle ε .

Observa-se que quando fixamos o parâmetro ε e variamos o parâmetro γ , a dinâmica do transporte se define por γ , quanto maior seu valor, mais iterações são necessárias para que as condições iniciais alcancem a janela de destino. Isso se deve pelo efeito do aumento do parâmetro γ no mapeamento de discussão.

Quando analisamos o comportamento da probabilidade de sobrevivência em relação a variação do parâmetro γ , Figura 2.15, observamos a frequência com que as condições iniciais sobrevivem no espaço de fase sem adentrar às janelas de destino.

Quanto maior o valor de γ , maior é o número de iterações para que possamos observar o decrescimento da probabilidade de sobrevivência. Como no caso anterior, isso se deve a menor interação das variáveis ângulo-ação. As

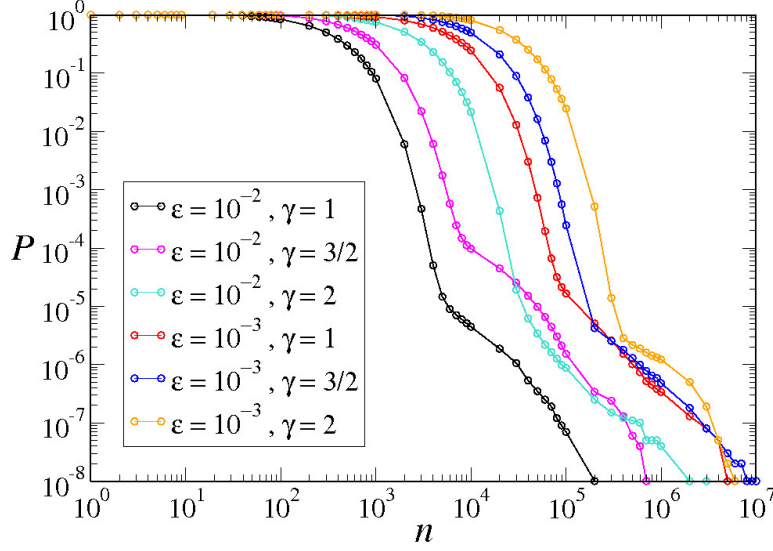


Figura 2.15: Probabilidades de sobrevivência para diferentes valores de γ com valores fixos do parâmetro de controle ε .

Figuras 2.16 e 2.17, demonstram os espaços de fase para $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\varepsilon = 10^{-2}$, respectivamente.

Pelos espaços de fase, pode-se determinar que quanto maior o valor de γ , mais rápido as condições iniciais do sistema se difundem no espaço de fases. Para $\varepsilon = 10^{-3}$, $\gamma = 1$ as curvas invariantes *spanning* estão estimadas em $J_{fisc} \approx \pm 0,03$ enquanto que para $\gamma = 2$, $J_{fisc} \approx \pm 0,12$. Quando analisamos a Figura 2.17, para $\varepsilon = 10^{-2}$, as curvas invariantes *spanning* de menor energia para $\gamma = 1$ é $J_{fisc} \approx \pm 0,1$ enquanto que para $\gamma = 2$, $J_{fisc} \approx \pm 0,30$.

Observamos que conforme aumentamos o valor de γ , com ε fixo, as condições iniciais do sistema se difundem mais rápido, obtendo um espaço de fases com a variável ação crescente e com aumento de ilhas no sistema. Isso está conectado com o estudo de transporte caótico, pois quanto maior o valor de γ , mais ilhas são observadas e maior é o intervalo do mar de caos no espaço de fases. As partículas levam um tempo maior para alcançarem as janelas de destino, como vimos no histograma da Figura 2.14, e a probabilidade de sobrevivência começa a decair com valores maiores de iterações se compararmos a variação do parâmetro γ , como vimos na Figura 2.15, passando de um decaimento exponencial para um decaimento em lei de potência ou uma exponencial esticada, devido ao fenômeno de *stickiness*.

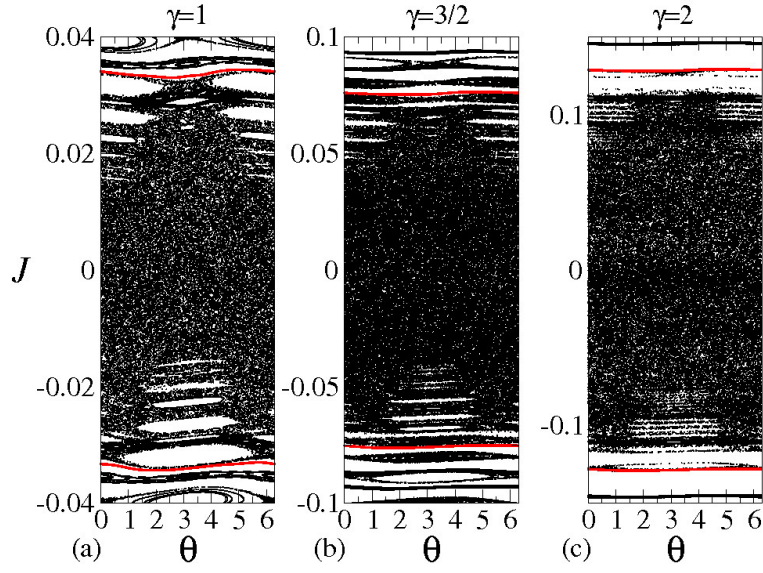


Figura 2.16: Espaços de fases com $\varepsilon = 10^{-3}$ para diferentes valores de γ .

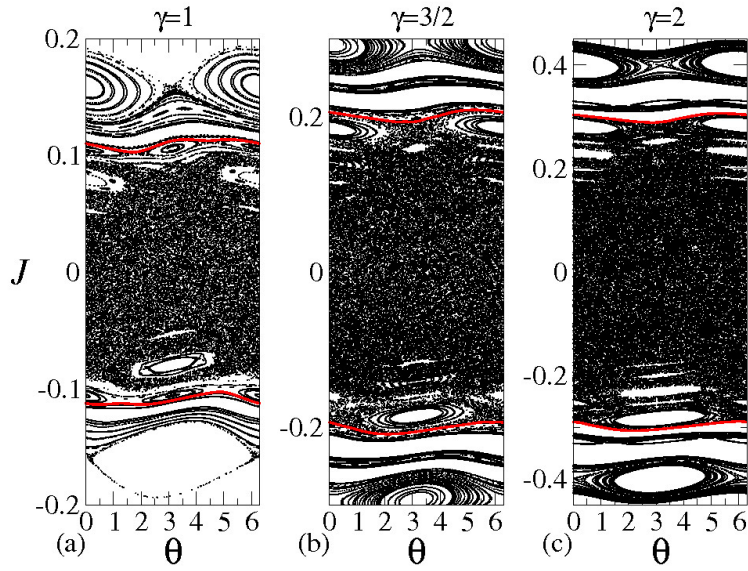


Figura 2.17: Espaços de fases com $\varepsilon = 10^{-2}$ para diferentes valores de γ .

Capítulo 3

Conclusão

Neste trabalho estudamos, a partir de um sistema Hamiltoniano não linear, a investigação do transporte caótico por meio de histogramas e pela probabilidade de sobrevivência.

A partir da conexão do mapeamento de estudo com o mapa padrão foi possível obter a localização da primeira curva invariante *spanning*. Pôde-se definir regiões no espaço de fase para o estudo do transporte caótico. Quando consideramos as janelas de origem distantes das regiões de movimento regular e as janelas de destino como sendo a posição média da curva invariante *spanning*. Encontramos algumas características no estudo de transporte.

Quando fixamos o parâmetro γ e variamos o parâmetro de controle ε , observamos que o histograma normalizado $h(n)$ é uma função crescente para n suficientemente pequeno, pois a maioria das órbitas ainda estão próximas da janela de origem. Cada curva atinge um valor máximo e depois se torna uma função decrescente. Isto é esperado, pois conforme as iterações prosseguem, mais órbitas atingem a janela de destino e menos órbitas ficam remanescentes. Observamos também pela análise dos histogramas que as grandezas h_{max} e n_p , obtidas pela aproximação por uma função quadrática, dependem de ε . Quando aumentamos o parâmetro ε , h_{max} aumenta enquanto n_p diminui. Mostramos, após considerações de escala, que o histograma apresenta um comportamento universal para diferentes valores de ε .

Já a probabilidade de sobrevivência descreve um comportamento de decaimento exponencial para valores pequenos de n . Observamos que para valores grandes de n o decaimento passa ser um decaimento de lei de potência ou uma exponencial esticada, devido ao fenômeno de aprisionamento denominado *stickiness*.

Quando fixamos o valor do parâmetro de controle ε e variamos o parâmetro γ , foi notado que quanto maior o valor de γ mais rápido as condições iniciais do sistema se difundem no espaço de fases. Essa relação foi percebida

ao analisar o transporte caótico, quanto maior o valor de γ , mais ilhas são observadas e maior é o intervalo do mar de caos no espaço de fases. Logo, vimos que as partículas levaram um tempo maior para alcançarem as janelas de destino e a probabilidade de sobrevivência começa a decair com valores maiores de iterações.

Como perspectivas para esse trabalho, estudaremos o transporte caótico próximo das regiões de movimento regular, aproximando as ilhas de estabilidade por elipses inclinadas descritas em coordenadas polares. Analisaremos o comportamento das probabilidades de sobrevivência e posteriormente o processo de difusão próximo e distante das ilhas de movimento regular.

Referências Bibliográficas

- [1] MONTEIRO, L.H.A. *Sistemas Dinâmicos*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2011.
- [2] CANDIDO, R., SILVA, M.T.M., EISENCRAFT, M. *A new encoding and switching scheme for chaos-based communication*. Comp. Appl. Math. **37**: 253, 2018.
- [3] COSTA, D.R., FRANCISCO, M.H.; BATISTA, A.M. *Parametric perturbation in a model that describes the neuronal membrane potential*. Physica A - Statistical Mechanics and its Applications. **515**: 519, 2019.
- [4] LEONEL, E.D. *Invariância de Escala em Sistemas Dinâmicos Não Lineares*. Editora Blucher, São Paulo, 2019.
- [5] AUBIN, D; DALMEDICO, A.D. *Writing the History of Dynamical Systems and Chaos: Longue Dureé and Revolution, Disciplines and Cultures*. Historia Mathematica, **29**: 273, 2002.
- [6] LORENZ, E. *Deterministic nonperiodic flow*. Journal of the Atmospheric Sciences, **20**: 130, 1963.
- [7] GLEICK, J. *Caos - A criação de uma nova ciência*. Editora Campus/Elsevier, Rio de Janeiro, 1989.
- [8] HOWARD, J.E.; LICHTENBERG, A.J.; LIEBERMAN, M.A.; COHEN, R.H. *Four-dimensional mapping model for two-frequency electron cyclotron resonance heating*. Physica D: Nonlinear Phenomena, **20**: 259, 1986.
- [9] ZASLAVSKY, G.M. *Physics of chaos in Hamiltonian systems*. Imperial College Press, New York, 2007.
- [10] STROGATZ, S.H. *Nonlinear Dynamics And Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering*. Westview Press, Massachusetts, 2001.

- [11] OLIVEIRA, D.F.M., LEONEL, E.D. *Boundary crisis and suppression of Fermi acceleration in a dissipative two-dimensional non-integrable time-dependent billiard*. Phys. Lett. A, **374**: 3016, 2010.
- [12] SAVI, M.A. *Dinâmica Não-Linear e Caos*. Editora e-papers, Rio de Janeiro, 2017.
- [13] LEONEL, E.D.; KUWANA, C.M. *An Investigation of Chaotic Diffusion in a Family of Hamiltonian Mappings Whose Angles Diverge in the Limit of Vanishingly Action*. Journal of Statistical Physics **170**: 69, 2018.
- [14] LEONEL, E.D. et al. *A dynamical phase transition for a family of Hamiltonian mappings: A phenomenological investigation to obtain the critical exponents*. Physics Letters A, **379**: 1808, 2015.
- [15] LEONEL, E.D. *Fundamentos da Física Estatística*. Editora Blucher, São Paulo, 2015.
- [16] DE OLIVEIRA, J.A., LEONEL, E.D. *A rescaling of the phase space for Hamiltonian map: Applications on the Kepler map and mappings with diverging angles in the limit of vanishing action*. Applied Mathematics and Computation, **221**: 32, 2013.
- [17] FERRARA, N.F.; DO PRADO, C.P.C. *Caos: Um introdução*. Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1994.
- [18] LICHTENBERG, A.J., LIEBERMAN. M.A. *Regular and stochastic motion*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [19] LICHTENBERG, A.J., LIEBERMAN. M.A. *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [20] ZASLAVSKY, G.M. *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*. Oxford University Press, New York, 2005.
- [21] FARIA, N.B. de et al. *Transport of chaotic trajectories from regions distant from or near to structures of regular motion of the Fermi-Ulam model*. Physical Review E **94**: 042208, 2016.
- [22] DA COSTA, D.R.; DETTMANN, C.P.; LEONEL, E.D. *Transport and dynamical properties for a bouncing ball model with regular and stochastic perturbations*. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, **20**: 871, 2014.

- [23] DE OLIVEIRA, J.A., DA COSTA, D.R., LEONEL, E.D. *Survival probability for chaotic particles in a set of area preserving maps*. The European Physical Journal - Special Topics, **225**: 2751, 2016.
- [24] OLIVEIRA, D.F.M., BIZÃO, R.A, LEONEL, E.D. *Scaling properties of a hybrid Fermi-Ulam-bouncer model*. Mathematical Problems in engineering, **2009**: 213857, 2009.
- [25] LIVORATI, A.L.P. et al. *Investigation of stickiness influence in the anomalous transport and diffusion for a non-dissipative Fermi-Ulam model*. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, **55**: 225, 2018.
- [26] LIVORATI, A.L.P. et al. *Stickiness in a bouncer model: A slowing mechanism for Fermi acceleration*. Physicl Review E, **86**: 036203, 2012.
- [27] LADEIRA, D.G., LEONEL, E.D. *Dynamical properties of a dissipative hybrid Fermi-Ulam-Bouncer model*. Chaos, **17**: 013119, 2009.