



BRAZ EDSON PALLADINO

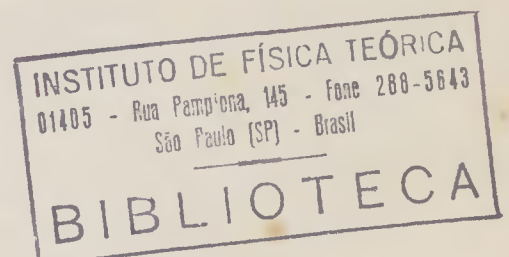
CORREÇÕES DE CENTRO-DE-MASSA NO
MODELO DE POTENCIAL S+V

67



Dissertação de Mestrado
apresentada no Instituto
de Física Teórica.

Orientador: Paulo Leal Ferreira.



SÃO PAULO

FEVEREIRO DE 1987

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao Prof. Paulo Leal Ferreira pela excelente orientação que me ofereceu, na qual dedicou-me sempre muita atenção e amizade.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro durante estes anos.

Não poderia faltar também com um agradecimento especial a todos os colegas e amigos do IFT, que mantém um ambiente agradável e estimulante a pesquisa.

RESUMO

Neste trabalho são discutidas as correções de centro-de-massa para o espectro de massas e propriedades estáticas dos bárions e mésons de estados fundamentais em ondas-S, no contexto de um modelo relativista a quarks independentes, baseado em uma equação de Dirac com um potencial confinante com partes escalar e vetorial igualmente misturadas.

ABSTRACT

Center-of-mass corrections to the mass spectrum and static properties of low-lying S-wave baryons and mesons are discussed in the context of a relativistic, independent quark model, based on a Dirac equation, with equally mixed scalar (S) and vector (V) confining potential.

"Correções de Centro-de-Massa no Modelo de Potencial S+V"

Braz Edson Palladino

Orientador: Prof.Dr. Paulo Leal Ferreira

Í N D I C E

I. Introdução	1
II. O Modelo de Sacola do MIT	5
II-1. Quarks na Sacola	5
II-2. Energias de Interação	15
II-3. Massas Hadrônicas no "MIT bag"	31
III. O Modelo de Potencial S+V	40
III-1. O Potencial Confinante. Equação de Movimento, Au- tofunções e Autovalores da Energia	40
III-2. Interação de Troca de 1 Glúon no Modelo de Poten- cial. "Ground State"	45
III-3. Estados Excitados	57
III-4. Correções do Centro-de-Massa	62
III-5. Resultados	68
IV. Conclusões	73
Apêndices	
1. Quarks em Representações SU(N): Uma Introdução	75
2. Cálculo Explícito da Integral do Potencial Vetor pa- ra o "bag"	78
3. Programa BASIC para Cálculo de Massas Hadrônicas ...	80
Referências	83

- I -

INTRODUÇÃO

Os modelos a quarks surgiram na década de sessenta, visando descrever a estrutura dos hádrons. Fundamentados na idéia de que bárions são sistemas constituídos por três quarks e mésons por um par quark-antiquark, tais modelos¹ alcançaram considerável grau de sucesso.

Já na década seguinte, com a consolidação da Cromodinâmica Quântica² como teoria das interações fortes, os modelos passaram a incorporar hipóteses dinâmicas, tendo os quarks como campos básicos, dotados de "sabor" e de "côr". (PARA MAIS DETALHES VIDE APÊNDICE 1)

Na QCD, as côres servem para descrever a interação entre os quarks. Existem três estados de côr e os quarks interagem através da troca de glúons coloridos. Os glúons, por sua vez, constituem um octeto e se acoplam aos quarks à maneira de um campo de Yang-Mills.

O conceito de côr como grau de liberdade adicional dos quarks, veio dar consistência teórica às hipóteses básicas dos primeiros modelos, enquanto que se fez necessário introduzir determinadas propriedades oriundas da QCD, como a liberdade assintótica, o confinamento da côr e a invariância quiral.

O sucesso da QCD teve maior incidência na região de altas energias, com grandes momentos transferidos. Uma razão para isso vem do fato que a constante de acoplamento entre quark e glúon na aquela região é pequena e, portanto, teoria de perturbação pode ser aplicada. Contudo, o mesmo não pode ser dito sobre o problema da estrutura hadrônica, que está situado a escalas de mais baixas energias (cerca de 1 GeV).

Como desde a época já existia uma grande quantidade de dados experimentais nessa região, surgiu o interesse em estudar modelos que incorporassem propriedades da QCD e ainda pudessem descrever adequadamente a fenomenologia dos hádrons. Desenvolveram-se então dois tipos de modelos "inspirados" na QCD: os modelos do tipo sacola e os modelos do tipo potencial.

Uma propriedade importante dos quarks é o confinamento. Os quarks não são observados isoladamente, por isso, nos modelos a quarks devemos tê-los confinados no interior dos hádrons. A diferença mais fundamental entre os modelos de sacola e os modelos de potencial é a maneira como o confinamento dos quarks é introduzido.

Nos modelos do tipo sacola o hádron é considerado como um "bag", ou sacola, uma região fechada do espaço que contém os quarks e glúons. O confinamento é introduzido através das condições de contorno impostas sobre a superfície do "bag".

Nos modelos de potencial o confinamento dos quarks é descrito pela presença de um potencial confinante na hamiltoniana do problema.

Nesse sentido, podemos comparar os dois tipos de modelo. O "bag" tem um contorno definido, delimitado pela superfície da sacola. Os campos associados aos quarks e glúons estão contidos no interior da região espacial do "bag", não existindo fora dela. A superfície do "bag" delimita uma fronteira sobre a qual existe um comportamento descontínuo entre os campos de dentro e de fora do "bag". Enquanto isso, no modelo de potencial as funções de onda e os campos dos quarks e glúons são definidos sobre toda a espaço e não há uma superfície bem determinada. Poderíamos dizer que a superfície do "bag" é abrupta, enquanto que no modelo de potencial a superfície é suave, difusa.

Destaca-se, entre os primeiros, o modelo de sacola do MIT³ -

Massachusetts Institute of Technology: "MIT bag model", sobre o qual trataremos mais adiante. Entre os modelos do tipo potencial, no domínio não relativístico, não se pode deixar de mencionar o trabalho pioneiro de De Rujula, Georgi and Glashow⁴. Também tiveram destaque as extensivas análises de Isgur e Karl⁵, que alcançaram grande sucesso, embora levantem problemas importantes ainda não completamente resolvidos como, por exemplo, o da introdução do acoplamento spin-órbita, não incluído em seus trabalhos.

Como alternativa aos modelos do tipo "bag", também apareceram os modelos de potencial relativísticos⁶, nos quais, em lugar da superfície bem definida do "bag", introduz-se um potencial escalar de Lorentz do tipo confinante.

Desenvolveremos neste trabalho um modelo de potencial relativista, em que quarks independentes obedecem a uma equação de Dirac com um potencial confinante que é uma mistura, em partes iguais, de um termo escalar de Lorentz (S) e de um vetor de Lorentz (V). É o chamado "modelo de potencial S + V".

A equação de Dirac com um potencial confinante do tipo S + V tem várias propriedades interessantes:

(i) é livre de paradoxo de Klein⁷ para quarks ou antiquarks, o que conduz, portanto, a um esquema de confinamento relativisticamente consistente;

(ii) não há interação spin-órbita de 1 corpo⁸;

(iii) a equação admite soluções exatas quando a correspondente equação de Schrödinger, para o mesmo potencial $V(r)$, é exatamente solúvel⁹;

(iv) independentemente da dependência radial do potencial, a equação dá uma correta simetria de spin $SU(2)$ ⁸;

(v) ela admite uma transformação de Melosh exata¹⁰;

(vi) para altas energias, exibe trajetórias de Regge lineares, para um potencial confinante linear⁷.

Tanto no modelo de potencial $S + V$ quanto no "MIT bag model" os quarks são tratados como partículas independentes. A interação efetiva entre os quarks, que é governada pela QCD, se dá a curtas distâncias e é introduzida nestes modelos através de correções sobre os estados de energia de uma partícula única.

Neste trabalho, calcularemos as energias de interação elétrica e magnética devido à troca de 1 glúon em ambos os modelos e observaremos seu efeito no espectro de massas hadrônicas. Calcularemos também os momentos magnéticos e constantes g_A do octeto de bárions $\frac{1}{2}^+$ e o raio quadrático médio do próton.

Outra correção necessária nos modelos a quarks independentes é a subtração da energia "espúria" devido ao movimento do centro-de-massa. Faremos o cálculo destas correções para o modelo $S+V$, procurando obter um aprimoramento com relação a resultados anteriores.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: na seção II discutimos o modelo de sacola do MIT, na seção III expomos os cálculos do modelo $S + V$ e na seção IV apresentamos as conclusões e perspectivas para próximos desenvolvimentos.

O MODELO DE SACOLA DO MITII-1. Quarks na Sacola

Nesta seção faremos uma descrição inicial do "MIT bag model". Vamos discutir o confinamento e as condições de contorno para um quark no "bag", e em seguida passaremos ao cálculo das autofunções e autovalores do problema.

No "bag model" do MIT um hádron é considerado como uma sacola (bag) constituída pelos quarks. Os quarks estão confinados à sacola e, portanto, não se pode isolá-los.

Um hádron não excitado é tido como esférico, com os quarks constituintes confinados a essa esfera¹¹. Os estados excitados dos hádrons poderão ser vibrações coletivas do estado fundamental^{12,13}.

No modelo de sacola do MIT assume-se que os campos que descrevem a dinâmica dos quarks e glúons não permeiam todo o espaço mas apenas existem no interior dos hádrons, ou do "bag".

Os quarks dentro do "bag" possuem tanto cargas elétricas quanto de côm, portanto a invariância de gauge requer que estejam presentes campos de gauge de côm e eletromagnéticos. Consideremos o caso do eletromagnetismo, o teorema de Gauss aplicado à superfície do "bag" implica que:

$$4\pi Q = \int \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad , \quad (2.1)$$

ou seja: Q , a carga elétrica total dentro do "bag", está associada a um fluxo de linhas de campo elétrico através da superfície. Inversamente, se o campo estivesse confinado ao interior do "bag" a carga total seria nula.

O caso da cromodinâmica é análogo. Se assumimos que não há

corrente de c \bar{o} r atrav \acute{e} s da superf \acute{i} cie e os gl \acute{u} ons est \acute{a} o confina- dos, ent \tilde{a} o o teorema de Gauss nos diz que o sistema deve ter car- ga de c \bar{o} r nula.

Mas como os quarks tem carga de c \bar{o} r n \tilde{a} o-nula, dever \acute{i} amos ter uma corrente atravessando a superf \acute{i} cie. O grupo do MIT introduziu uma press \tilde{a} o B (colocando um novo termo $-g_{\mu\nu}B$ no tensor de ener- gia-momento da teoria) a qual contrabalan \tilde{c} a o fluxo de c \bar{o} r que ha- veria na superf \acute{i} cie. E dessa forma, o sistema como um todo, fica sendo um singlete de c \bar{o} r neutra.

Note que se trata duma imposi \tilde{c} o de uma condi \tilde{c} o de contorno que confinar \acute{a} os gl \acute{u} ons, e que levar \acute{a} , por Gauss, a obtermos o con- finamento dos quarks.

A constante B que \acute{e} introduzida, \acute{e} considerada como uma cons- tante universal, com dimens \tilde{c} o de press \tilde{a} o (densidade de energia), e \acute{e} chamada de "constante do bag".

O confinamento \acute{e} introduzido no modelo atrav \acute{e} s de duas con- di \tilde{c} o de contorno impostas \tilde{a} superf \acute{i} cie do "bag".

A primeira delas \acute{e} uma condi \tilde{c} o de contorno linear, que im- p \tilde{o} e a n \tilde{a} o-exist \tilde{e} ncia de correntes fluindo atrav \acute{e} s da superf \acute{i} cie:

$$n^\mu j_\mu = 0, \text{ na superf\acute{i}cie.} \quad (2.2)$$

(n^μ sendo a normal que aponta para fora da superf \acute{i} cie)

A segunda condi \tilde{c} o de contorno \acute{e} uma condi \tilde{c} o de equil \acute{i} brio, ela determina a estabilidade do "bag" em fun \tilde{c} o da densidade de energia do "bag". \acute{E} chamada de condi \tilde{c} o quadr \acute{a} tica de contorno. Ela assegura que a press \tilde{a} o dos campos constituintes do "bag" \acute{e} ba- lanceada na superf \acute{i} cie da sacola pela press \tilde{a} o B. Dessa forma, na superf \acute{i} cie do "bag" devemos ter:

$$\frac{1}{2} \sum_\alpha n^\mu \partial_\mu \bar{\Psi}_\alpha(x) \Psi_\alpha(x) = B, \quad (2.3)$$

onde α é um índice de simetria interna que pode designar spin unitário e côm.

Nós procuraremos soluções para as quais o contorno é uma superfície esférica estática de raio R . Nesse caso, $n^\mu = (0, \hat{r})$ e a condição (2.3) fica:

$$-\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \bar{\Psi}_{\alpha}(x) \Psi_{\alpha}(x) = 2B, \text{ em } r=R. \quad (2.4)$$

Desta igualdade vemos que o primeiro membro deve ser independente do tempo e da direção para $r = R$. Essa independência angular requer que a partícula no "bag" tenha momento angular total $j = 1/2$. É o caso em que temos simetria esférica, que estaremos tratando aqui.

A consideração dos hádrons como esferas de raio R também é estendida aos primeiros estados excitados, numa aproximação que permite determinar as funções de onda em tais estados (vide, por exemplo, A.J.G. Hey, ref. (12), págs. 167 e 168). O raio da esfera é determinado pela condição de contorno de equilíbrio do "bag", a condição de contorno quadrática (equação (2.3)).

No modelo de sacola do MIT os quarks são considerados como partículas livres e independentes, que obedecem a equação de Dirac para um férmion livre. A seguir encontraremos a função de onda do estado fundamental para um quark no "bag"^{11,14}. Todos os quarks que constituem o hádron no estado fundamental irão satisfazer essa mesma solução. Estarão ocupando o mais baixo modo de vibração inerente a um campo livre de Dirac que está confinado a uma cavidade esférica de raio R .

Começamos escrevendo a equação livre de Dirac, a qual cada um dos quarks de massa m obedecerá:

$$H \Psi(x) = [\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m] \Psi(x). \quad (2.5)$$

Em sua forma covariante, usando a notação "slash" de Feynman, a equação é escrita:

$$i \not{\partial} \Psi(x) = m \Psi(x) \quad (2.6)$$

Tomamos inicialmente a função de onda sob a forma:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(r) Y_{\ell_A}^{j_3} \\ i f(r) Y_{\ell_B}^{j_3} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

e resolvemos as equações radiais:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dr} f(r) - (1-k) \frac{f(r)}{r} = (\omega - m) g(r) & (2.8a) \\ \frac{d}{dr} g(r) + (1+k) \frac{g(r)}{r} = (\omega + m) f(r) & (2.8b) \end{cases} \quad (2.8)$$

onde ω é a energia do quark.

Iremos definir:

$$\frac{x}{R} \equiv \sqrt{\omega^2 - m^2} \quad , \quad (2.9)$$

onde x/R representa o momento de nossa partícula.

As soluções de (2.8) nos levam a encontrar a seguinte função de onda para o estado fundamental:

$$\Psi_{R=-1} = \frac{N}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} i \frac{\sqrt{\omega+m}}{\sqrt{\omega}} j_0\left(\frac{xR}{R}\right) U \\ -\frac{\sqrt{\omega-m}}{\sqrt{\omega}} j_1\left(\frac{xR}{R}\right) \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{r} U \end{pmatrix} e^{-i\omega t/R} \quad , \quad (2.10)$$

onde as funções j_0 e j_1 são as funções esféricas de Bessel:

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad j_1(z) = \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z}. \quad (2.11)$$

A função de onda ψ_{-1} corresponde a um estado $S_{1/2}$, de números quânticos $j = 1/2$, $k = -1$, $\ell_A = 0$. A função angular U em (2.10) é igual a $\sqrt{4\pi} Y_{1/2 0}^j$.

A constante N é independente de r , mas, no entanto, depende de ω e m : $N = N(\omega, m) = N(x)$. Determinamos N pela normalização da função de onda dentro da sacola. Impondo:

$$\int_{\text{Bag}} \psi^\dagger \psi d^3r = 1 \quad (2.12)$$

onde a integração deve ser efetuada sobre o volume do "bag", ou seja, com r variando de 0 a R , encontramos:

$$N^{-2}(x) = R^3 j_0^2(x) \frac{[2\omega(\omega - 1/R) + m/R](\omega + m)}{\omega(\omega - m)(\omega + m)} \cdot \frac{1}{(1/R)^2} \quad (2.13)$$

Aplicando a condição de contorno (2.2) vamos obter os autovalores da energia associados a função de onda (2.10). A condição (2.2) é a condição de contorno linear, ela diz que não deve haver correntes fluindo através da superfície do "bag":

$$n^\mu j_\mu = n^\mu (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi) = 0, \quad \text{para } r=R. \quad (2.14)$$

Esta equação é satisfeita por funções de onda tais que:

$$\Psi = -i \gamma_\mu n^\mu \Psi, \quad \text{em } r=R. \quad (2.15)$$

No caso de uma superfície estática e esférica, que é o que estamos supondo, temos $n^\mu = (0, \hat{r})$ e então a condição de contorno linear é expressa por:

$$\Psi = -i \vec{\gamma} \cdot \hat{n} \Psi, \text{ em } r=R. \quad (2.16)$$

A substituição da função de onda (2.10) nessa condição nos conduz à seguinte relação:

$$j_1(x) = \sqrt{\frac{\omega+m}{\omega-m}} j_0(x) \implies \operatorname{tg} x = \frac{x}{1 - mR - \sqrt{m^2 R^2 + x^2}}. \quad (2.17)$$

A expressão (2.17) nos permite determinar $x(mR)$, que define, via (2.9), a energia do quark (FIG.1). Lembremos que estamos interessados no estado de energia mais baixa e que todos os quarks estarão ocupando esse mesmo estado para um hádron não excitado.

No limite em que as massas dos quarks são muito menores que seu momento ($m \ll x/R$), a relação (2.17) se reduz a:

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1-x}. \quad (2.18)$$

O estado de energia mais baixa, que tem o modo mais baixo de vibração, é aquele com o menor x positivo que é solução de (2.18). Numericamente, o resultado é:

$$x = 2,04. \quad (2.19)$$

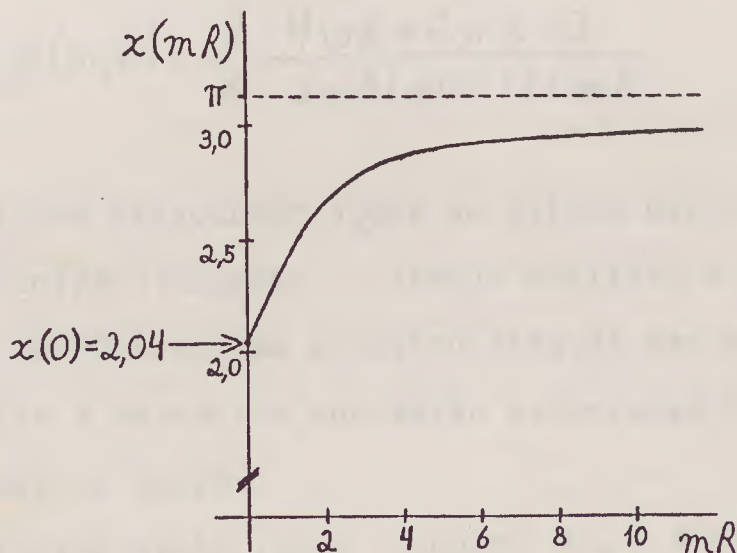


FIG. 1 - Autovalor x em função da massa para a solução ψ_{-1} no modo mais baixo de vibração (ref. 14, pág. 414).

No "MIT bag model" várias grandezas físicas associadas aos quarks tais como o momento magnético, raio quadrático médio, g_A/g_V , etc... são calculadas dependendo parametricamente de R e $x(mR)$.

Mais adiante, quando calcularmos o campo magnético associado aos quarks no "bag" ele será escrito em função do momento magnético dos quarks, por isso é interessante introduzir aqui a expressão do momento magnético para um quark no "bag".

Partindo da definição:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int_{\text{Bag}} \vec{r} \times \vec{j} d^3r = \frac{1}{2} \int_{\text{Bag}} \vec{r} \times (\bar{\Psi} \vec{\gamma} \Psi) d^3r, \quad (2.20)$$

encontramos para os quarks no autoestado dado por (2.10) a seguinte expressão:

$$\mu_z = \frac{1}{3} \frac{N^2 R^3 j_0^2(x)}{\omega(\omega - m)} \left(2\omega + m - \frac{3}{2R} \right) \quad (2.21)$$

Fazendo uso da constante de normalização dada em (2.13) obtemos a expressão para o momento magnético de um quark no "bag" em termos de ω , m e R :

$$\mu(m, R) = \frac{R}{6} \frac{4\omega R + 2mR - 3}{2\omega R(\omega R - 1) + mR} \quad (2.22)$$

Vamos nos direcionar agora ao estudo das correções devidas à interação entre os quarks. Iremos analisar o efeito no espectro de massas hadrônicas que é obtido através das energias de interação elétrica e magnética que estão associadas à troca de um glúon entre um par de quarks.

Na próxima seção vamos calcular ΔE_M , a energia de interação magnética devido à troca de um glúon entre dois quarks na sacola.

Veremos que essas energias trarão contribuições mais sensíveis que as outras para o cálculo da separação de massas dos hádrons.

Antes disso, porém, vamos procurar comentar comparativamente os resultados do "MIT bag model" e da Cromodinâmica Quântica no que diz respeito a estrutura hiperfina dos hádrons:

A principal diferença é que por alguns modelos baseados na QCD (por exemplo, De Rujula et al (1975), Ref. 4) a separação de massa ΔE_M entre dois hádrons é introduzida através da definição:

$$\Delta E_M \equiv \langle \mathcal{H}_{\vec{s}, \vec{s}} \rangle, \quad (2.23)$$

onde
$$\mathcal{H}_{\vec{s}, \vec{s}} = \sum_{i>j} K \alpha_c \frac{8\pi}{3} \delta^3(\vec{r}) \vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j = \sum_{i>j} -\frac{16\pi}{9} N \alpha_c \delta^3(\vec{r}) \vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j$$

é o termo de spin-spin da Hamiltoniana de Fermi-Breit, com

$$K \equiv -\frac{2}{3} N = \begin{cases} -\frac{4}{3}, & \text{para mésons} \\ -\frac{2}{3}, & \text{para bárions} \end{cases};$$

enquanto que, pelo "bag model" os resultados surgirão a partir da fenomenologia do "bag": o termo spin-spin de estrutura hiperfina surge como um resultado do cálculo da energia de interação magnética ΔE_M em função dos campos magnéticos, e não através da definição acima.

Ressaltamos que a separação de massa dada por ΔE_M aparecerá no "MIT bag" diretamente relacionada à constante de acoplamento entre quark e glúon α_c através da expressão para a energia de interação magnética entre dois quarks.

A sistemática que leva às separações de massa entre os hádrons é do mesmo tipo tanto nos modelos de QCD ("QCD models") quanto no modelo do MIT: pela QCD temos $\Delta E_M \propto (w_i w_j)^{-1}$, pelo MIT encontraremos na expressão para ΔE_M o domínio de um termo com $\mu(m_i, R) \cdot \mu(m_j, R) \propto (w_i w_j)^{-1}$. Consequentemente as duas teorias pos

suirão uma fenomenologia similar, contudo os resultados do MIT são relativísticos e trarão fatores de correção às expressões dos "QCD models" com efeitos da ordem de 20%.

No cálculo das energias de interação iremos trabalhar na mais baixa ordem em α_c , onde acoplamentos entre glúons não vão contribuir por serem de ordem mais alta. Como consequência, os glúons estarão atuando como se fossem campos Abelianos de 8 componentes independentes.

Na primeira ordem em α_c temos os seguintes diagramas de interação gluônica: diagrama de troca de 1 glúon entre 2 quarks (FIG. 2-a) e diagrama de autoenergia do glúon (FIG. 2-b).

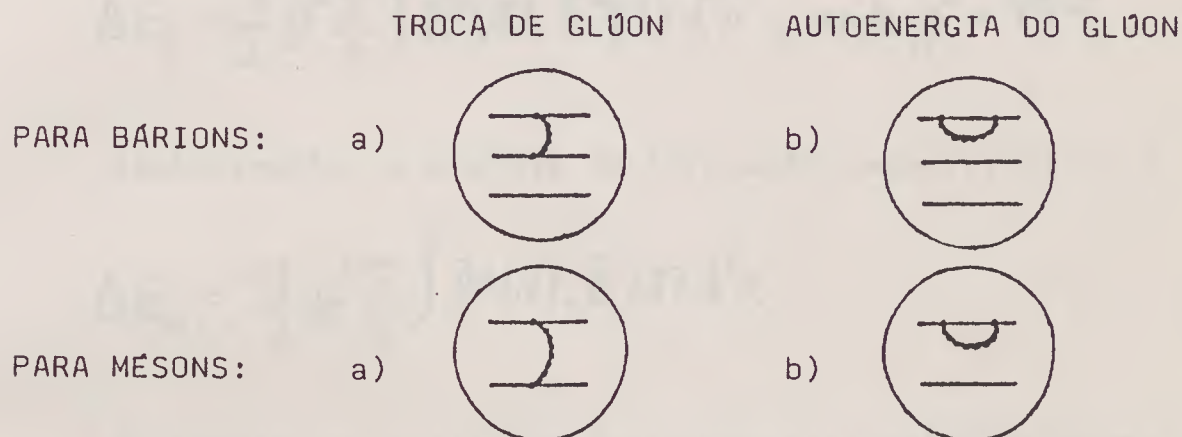


FIG. 2 - Diagramas de interação gluônica de primeira ordem em α_c .

Consideraremos os quarks permanecendo no modo mais baixo de energia da cavidade, conseqüentemente somente a parte estática do propagador dos glúons contribuirá e a corrente nos vértices da Figura 2-a será independente do tempo.

Por isso, estaremos tratando com campos de côm estáticos. Esses campos deverão estar confinados ao interior do "bag". O problema a ser resolvido é análogo ao de um campo eletromagnético em uma cavidade esférica.

Para que não haja correntes de côm atravessando a superfície da sacola os campos elétrico e magnético deverão satisfazer as se

guintes condições de contorno na superfície do "bag":

$$\hat{n} \cdot \vec{E}^a(R) = 0 \quad (2.24a)$$

$$\hat{n} \times \vec{B}^a(R) = 0 \quad , \quad (2.24b) \quad (2.24)$$

o índice a denota côr e vai de 1 a 8.

As condições acima são obtidas escrevendo-se as equações de Maxwell para os campos estáticos $\vec{E}^a(r)$ e $\vec{B}^a(r)$ e impondo que na superfície do "bag" ($r=R$) as correntes $\vec{j}^a(R)$ não fluam através da superfície: $\vec{j}^a(R) \cdot \hat{r} = 0$.

A energia de interação eletrostática de uma distribuição de carga estática é dada por:

$$\Delta E_E = \frac{1}{2} g^2 \sum_a \int \vec{E}^a(\vec{r}) \cdot \vec{E}^a(\vec{r}) d^3r \quad , \quad \text{onde } g^2 = 4\pi\alpha_c \quad (2.25)$$

Similarmente, a energia de interação magnetostática é:

$$\Delta E_M = -\frac{1}{2} g^2 \sum_a \int \vec{B}^a(\vec{r}) \cdot \vec{B}^a(\vec{r}) d^3r \quad (2.26)$$

Na sacola, a energia de interação eletrostática entre um par de quarks (denotados i, j) será:

$$\Delta E_E = \frac{1}{2} g^2 \sum_a \sum_{i,j} \int_{\text{Bag}} \vec{E}_i^a(\vec{r}) \cdot \vec{E}_j^a(\vec{r}) d^3r \quad (2.27)$$

Quando $i=j$ temos os termos de autoenergia elétrica associados às Figuras 2-b.

A energia de interação magnetostática no "MIT bag model" será dada por:

$$\Delta E_M = -g^2 \sum_a \sum_{i>j} \int_{\text{Bag}} \vec{B}_i^a(\vec{r}) \cdot \vec{B}_j^a(\vec{r}) d^3r \quad (2.28)$$

Nesta expressão não estão incluídos os termos de autoenergia magnética. O grupo do MIT considera que o efeito da autoenergia magnética já está incluído nos valores usualmente tomados para as massas dos quarks (para melhor discussão ver ref. 11, De Grand et al (1975), pág. 2065).

No entanto, foi necessário incluir na expressão (2.27) a parte de autoenergia elétrica. Veremos mais adiante que somente com a inclusão da autoenergia elétrica é possível satisfazer a condição de contorno (2.24a).

Vamos passar agora ao cálculo das energias de interação no "bag". Começaremos pela parte magnética e em seguida faremos a parte elétrica.

II-2. Energias de Interação

Calcularemos explicitamente as energias de interação eletromagnéticas para um quark no "bag" devido à troca de 1 glúon. Primeiramente desenvolveremos a parte magnética.

No "MIT bag" a expressão para a energia de interação magnética é escrita em função dos campos magnéticos dos quarks, por isso antes de desenvolvermos o cálculo da energia de interação propriamente dita, é necessário obtermos as expressões da corrente de côm e do campo magnético de um quark no "bag".

Sendo $\vec{B}_i^a(\vec{r})$ o campo magnético de côm gerado pelo i -ésimo quark na sacola (onde a é o índice de côm e varia de 1 a 8), o campo magnético total será escrito:

$$\vec{B}^a(\vec{r}) = \sum_i \vec{B}_i^a(\vec{r}) \quad , \quad (2.29)$$

a somatória em i vai de $i = 1$ até $i = 3$ para bárions, e para mésons de $i = 1$ até $i = 2$.

O campo magnético de cada quark na sacola deve satisfazer as relações de Maxwell para campos \vec{E} e \vec{B} estáticos:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B}_i^\alpha(\vec{r}) &= \vec{j}_i^\alpha(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_i^\alpha(\vec{r}) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(2.30a)} \\ \text{(2.30b)} \end{array} \quad \text{(2.30)}$$

E para que não haja corrente de côm atravessando a superfície da sacola devemos ter: $\vec{\nabla} \times \vec{B}^\alpha|_{r=R} = 0$, essa condição é satisfeita se:

$$\hat{r} \times \sum_i \vec{B}_i^\alpha(\vec{r}) = 0, \quad r=R, \quad \text{(2.31)}$$

pois: $\hat{r} \times \vec{B}^\alpha(R) = 0 \implies \hat{r} \parallel \vec{B}^\alpha(R) \implies \vec{\nabla} \times \vec{B}^\alpha|_{r=R} = 0$.

A corrente de côm gerada pelo i -ésimo quark é dada por:

$$\vec{j}_i^\alpha(\vec{r}) = \lambda_i^\alpha \psi_i^\dagger \vec{\alpha} \psi_i. \quad \text{(2.32)}$$

Usando a relação vetorial $\vec{A} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{A} - \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{A})$ para $\vec{A} = \hat{r}$ e $\vec{B} = \vec{\alpha}$ obtemos:

$$\vec{\alpha} = (\hat{r} \cdot \vec{\alpha})\hat{r} - \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{\alpha}). \quad \text{(2.33)}$$

Substituindo (2.33) em (2.32) chegamos a seguinte expressão para a corrente:

$$\vec{j}_i^\alpha(\vec{r}) = \lambda_i^\alpha \psi_i^\dagger (\hat{r} \cdot \vec{\alpha}) \psi_i \hat{r} - \lambda_i^\alpha \psi_i^\dagger [\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{\alpha})] \psi_i. \quad \text{(2.34)}$$

O primeiro termo do 2º membro desta equação representa a corrente na direção radial. O cálculo explícito deste termo pela substituição da função de onda (2.10) nos mostra que ele é igual

a zero. Ou seja, a corrente na direção radial é zero, até mesmo no interior do "bag".

Vamos escrever a corrente em função do momento magnético dos quarks. Partiremos da definição (2.20), reescrita sob a forma:

$$\vec{\mu} \equiv \frac{\lambda_i^a}{2} \int_{\text{Bag}} \vec{\pi} \times (\Psi_i^\dagger \vec{\alpha} \Psi_i) d^3\pi = \frac{\lambda_i^a}{2} \int_{\text{Bag}} \Psi_i^\dagger (\vec{\pi} \times \vec{\alpha}) \Psi_i d^3\pi, \quad (2.35)$$

ou, igualmente:

$$\vec{\mu}(m_i, R) = \frac{\lambda_i^a}{2} \int_0^R r^2 dr \int \Psi_i^\dagger (\vec{\pi} \times \vec{\alpha}) \Psi_i d\Omega. \quad (2.36)$$

Agora vamos definir $\vec{\mu}(m_i, r)$ e $\vec{\mu}'_i(r)$, tais que:

$$\vec{\mu}(m_i, r) \equiv \frac{\lambda_i^a}{2} \int_0^r r'^2 dr' \int \Psi_i^\dagger (\vec{\pi}' \times \vec{\alpha}) \Psi_i d\Omega, \quad (2.37)$$

$$\vec{\mu}'_i(r) \equiv \frac{d}{dr} \vec{\mu}(m_i, r). \quad (2.38)$$

Segundo as definições acima, $\mu'_i(r)$ é uma densidade de magnetização escalar associada ao i -ésimo quark, enquanto $\mu(m_i, r)$ é o momento magnético do i -ésimo quark integrado sobre r :

$$(2.38) \implies \mu(m_i, r) = \int_0^r \mu'_i(r') dr'. \quad (2.39)$$

Se integrarmos $\mu'_i(r)$ sobre o "bag" (ou seja, com r variando de 0 a R) obteremos o momento magnético $\mu(m_i, R)$

$$\mu(m_i, R) = \int_0^R \mu'_i(r) dr = \frac{R}{6} \frac{4w_i R + 2m_i R - 3}{2w_i R(w_i R - 1) + m_i R}. \quad (2.40)$$

A substituição de (2.37) em (2.38) nos dá:

$$\vec{\mu}'_i(r) = \frac{\lambda_i^a}{2} r^2 \int \psi_i^+ (\vec{r} \times \vec{\alpha}) \psi_i d\Omega, \quad (2.41)$$

multiplicando vetorialmente por \vec{r} nos dois lados desta igualdade temos:

$$\vec{r} \times \vec{\mu}'_i(r) = \frac{\lambda_i^a}{2} r^2 \int \psi_i^+ [\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\alpha})] \psi_i d\Omega. \quad (2.42)$$

Substituindo (2.34) em (2.42) e integrando em $d\Omega$ chegamos à seguinte relação:

$$\vec{j}_i^a(\vec{r}) = -\frac{3}{4\pi r^3} \hat{r} \times \vec{\mu}'_i(r). \quad (2.43)$$

Reescrevendo a densidade de magnetização linear $\vec{\mu}'_i(r)$ como:

$$\vec{\mu}'_i(r) \equiv \lambda_i^a \mu'_i(r) \vec{\sigma}_i, \quad (2.44)$$

finalmente obtemos:

$$\vec{j}_i^a(\vec{r}) = -\frac{3}{4\pi r^3} \lambda_i^a \mu'_i(r) \hat{r} \times \vec{\sigma}_i. \quad (2.45)$$

Determinada a expressão da corrente, passamos então ao cálculo do campo magnético. Vamos escrever $\vec{B}_i^a(\vec{r})$ em termos do potencial vetor:

$$\vec{B}_i^a(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_i^a(\vec{r}). \quad (2.46)$$

Pela substituição de (2.46) em (2.30a) temos a equação para o potencial vetor:

$$\nabla^2 \vec{A}_i^a(\vec{r}) = -\vec{j}_i^a(\vec{r}), \quad (2.47)$$

cuja solução é:

$$\vec{A}_i^{\alpha}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{j_i^{\alpha}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (2.48)$$

No caso que estamos tratando a integração deverá ser feita sobre o volume do "bag".

Substituindo em (2.48) a expressão da corrente dada por (2.45), ficamos com:

$$\vec{A}_i^{\alpha}(\vec{r}) = \frac{3}{(4\pi)^2} \lambda_i^{\alpha} \vec{\sigma}_i \times \int_{\text{Bag}} \frac{\mu_i^{\alpha}(r')}{r'^3} \frac{\hat{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' . \quad (2.49)$$

O cálculo explícito da integral acima é dado no Apêndice 2. A expressão resultante para o potencial vetor é:

$$\vec{A}_i^{\alpha}(\vec{r}) = \frac{\lambda_i^{\alpha}}{4\pi r^3} (\vec{\sigma}_i \times \vec{r}) \mu(m_i, r) + \frac{\lambda_i^{\alpha}}{4\pi} (\vec{\sigma}_i \times \vec{r}) \int_r^R \frac{\mu_i^{\alpha}(r')}{r'^3} dr' . \quad (2.50)$$

Será útil definir:

$$M_i^{\alpha}(r) \equiv \int_r^R \frac{\mu_i^{\alpha}(r')}{r'^3} dr' , \quad (2.51)$$

de maneira que (2.50) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\vec{A}_i^{\alpha}(\vec{r}) = \frac{\lambda_i^{\alpha}}{4\pi r^3} (\vec{\sigma}_i \times \vec{r}) \mu(m_i, r) + \frac{\lambda_i^{\alpha}}{4\pi} (\vec{\sigma}_i \times \vec{r}) M_i^{\alpha}(r) . \quad (2.52)$$

Observemos que a definição (2.51) implica em:

$$\frac{\partial}{\partial r} M_i^{\alpha}(r) = -\frac{\mu_i^{\alpha}(r)}{r^3} = -\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \mu(m_i, r) . \quad (2.53)$$

Calculando o rotacional do potencial vetor dado por (2.52), obtemos a seguinte expressão para o campo magnético:

$$\vec{B}_i^a(\vec{r}) = \frac{\lambda_i^a}{4\pi} \frac{\mu(m_i, r)}{r^3} [3\hat{n}(\vec{\sigma}_i \cdot \hat{n}) - \vec{\sigma}_i] + \frac{\lambda_i^a}{4\pi} \vec{\sigma}_i \cdot 2M_i(r). \quad (2.54)$$

Ressaltamos que esse resultado vale para $r \leq R$. No caso em que $r = R$ temos $M_i(R) = 0$, donde vem que:

$$\vec{B}_i^a(\vec{r} = \vec{R}) = \frac{\lambda_i^a}{4\pi} \frac{\mu(m_i, R)}{R^3} [3\hat{n}(\vec{\sigma}_i \cdot \hat{n}) - \vec{\sigma}_i]. \quad (2.55)$$

Devemos usar agora a condição de contorno: a solução dada em (2.55) deve satisfazer a condição (2.31). Mas, a aplicação da condição de contorno (2.31) em (2.55) dá:

$$\hat{n} \times \vec{B}_i^a(\vec{R}) = -\frac{\lambda_i^a}{4\pi} \frac{\mu(m_i, R)}{R^3} \hat{n} \times \vec{\sigma}_i \neq 0. \quad (2.56)$$

Isso implica que devemos somar um termo constante igual a $\frac{\lambda_i^a}{4\pi} \frac{\mu(m_i, R)}{R^3} \vec{\sigma}_i$, à expressão (2.55) para que ela satisfaça a condição de contorno.

Então, a expressão resultante para $\vec{B}_i^a(\vec{r})$ é:

$$\vec{B}_i^a(\vec{r}) = \frac{\lambda_i^a}{4\pi} \frac{\mu(m_i, r)}{r^3} [3\hat{n}(\vec{\sigma}_i \cdot \hat{n}) - \vec{\sigma}_i] + \frac{\lambda_i^a}{4\pi} \vec{\sigma}_i \left[\frac{\mu(m_i, R)}{R^3} + 2M_i(r) \right]. \quad (2.57)$$

Para calcular a energia de interação magnética por via da expressão (2.28) precisamos fazer inicialmente a seguinte integração:

$$\int_{\text{Bog}} \vec{B}_i^a(\vec{r}) \cdot \vec{B}_j^a(\vec{r}) d^3r = \int_{\text{Bog}} \vec{B}_i^a(\vec{r}) \cdot \vec{B}_j^a(\vec{r}) r^2 dr d\Omega. \quad (2.58)$$

Tomando $\vec{B}_i^a(\vec{r})$ e $\vec{B}_j^a(\vec{r})$ dados por (2.57) calculamos o produto escalar $\vec{B}_i^a(\vec{r}) \cdot \vec{B}_j^a(\vec{r})$. Na parte angular da integral que se obtém, utiliza-se:

$$\int (\vec{\sigma}_i \cdot \hat{n})(\vec{\sigma}_j \cdot \hat{n}) d\Omega = \frac{4\pi}{3} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \quad (2.59)$$

E dessa maneira chegamos à seguinte expressão:

$$\int_{\text{Bog}} \vec{B}_i^a(\vec{r}) \cdot \vec{B}_j^a(\vec{r}) d^3r = \frac{\lambda_i^a \lambda_j^a}{4\pi} (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) \int_0^R \left[4M_i(n)M_j(n) + 2M_i(n) \frac{\mu(m_j, R)}{R^3} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\mu(m_i, R)}{R^3} M_j(n) + \frac{\mu(m_i, R)}{R^3} \frac{\mu(m_j, R)}{R^3} + \right. \\ \left. + 2 \frac{1}{n^6} \mu(m_i, n) \mu(m_j, n) \right] n^2 dn \quad (2.60)$$

Integrando por partes cada um dos termos que aparecem entre colchetes em (2.60), obtemos:

$$\int_{\text{Bog}} \vec{B}_i^a(\vec{r}) \cdot \vec{B}_j^a(\vec{r}) d^3r = 3 \frac{\lambda_i^a \lambda_j^a}{4\pi} (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) \left[\frac{\mu(m_i, R) \mu(m_j, R)}{R^3} + 2 \int_0^R \frac{\mu(m_i, n) \mu(m_j, n)}{n^4} dn \right] \quad (2.61)$$

Substituindo (2.61) na expressão para a energia de interação magnética (2.28), chegamos ao resultado:

$$\Delta E_M = -3\alpha_c \sum_a \sum_{i>j} \lambda_i^a \lambda_j^a (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) \left[\frac{\mu(m_i, R) \mu(m_j, R)}{R^3} + 2 \int_0^R \frac{\mu(m_i, n) \mu(m_j, n)}{n^4} dn \right] \quad (2.62)$$

Definindo:

$$I \equiv I(m_i, R, m_j, R) \equiv 1 + 2 \frac{R^3}{\mu(m_i, R) \mu(m_j, R)} \int_0^R \frac{\mu(m_i, n) \mu(m_j, n)}{n^4} dn \quad (2.63)$$

reescrevemos a expressão para ΔE_M na forma:

$$\Delta E_M = -3\alpha_c \sum_a \sum_{i>j} \lambda_i^a \lambda_j^a (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) \frac{\mu(m_i, R) \mu(m_j, R)}{R^3} I(m_i, R, m_j, R) \quad (2.64)$$

A integral I pode ser feita analiticamente, a expressão resultante é uma função de x_i e x_j , as autofrequências associadas aos quarks i e j, respectivamente.

$$I = 1 + (x_i \operatorname{sen}^2 x_i - \frac{3}{2} y_i)^{-1} \cdot (x_j \operatorname{sen}^2 x_j - \frac{3}{2} y_j)^{-1} \quad (2.65)$$

$$\left\{ -\frac{3}{2} y_i y_j - 2 x_i x_j \operatorname{sen}^2 x_i \operatorname{sen}^2 x_j + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} x_i x_j \left[2 x_i S_i(2x_i) + 2 x_j S_i(2x_j) - (x_i + x_j) S_i(2(x_i + x_j)) - (x_i - x_j) S_i(2(x_i - x_j)) \right] \right\}$$

onde

$$y_i = x_i - \operatorname{sen} x_i \cos x_i \quad ; \quad S_i(2x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt.$$

O valor numérico de (2.65) é avaliado por computador.

Podemos tirar de (2.64) a dependência sobre os índices de cor a , considerando que os hádrons são singletos de cor neutra. Para um singlete de cor mesônico, devemos ter:

$$\sum_{i=1}^2 \lambda_i^a |M\rangle = 0 \implies (\lambda_1^a + \lambda_2^a) |M\rangle = 0. \quad (2.66)$$

Tomando o quadrado de (2.66), obtemos:

$$2 \lambda_1^a \lambda_2^a |M\rangle = -(\lambda_1^{a^2} + \lambda_2^{a^2}) |M\rangle. \quad (2.67)$$

Como os geradores do SU(3) satisfazem a seguinte relação:

$$\sum_a \lambda_i^{a^2} = \frac{16}{3}, \quad (2.68)$$

concluimos que:

$$\sum_a \lambda_1^a \lambda_2^a = -\frac{16}{3}, \quad \text{para mésons.} \quad (2.69)$$

Para um singlete de côr bariônico temos:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i^a |B\rangle = 0 \Rightarrow (\lambda_1^a + \lambda_2^a + \lambda_3^a) |B\rangle = 0 . \quad (2.70)$$

Quadrando (2.70), ficamos com:

$$2(\lambda_1^a \lambda_2^a + \lambda_1^a \lambda_3^a + \lambda_2^a \lambda_3^a) |B\rangle = -(\lambda_1^{a^2} + \lambda_2^{a^2} + \lambda_3^{a^2}) |B\rangle . \quad (2.71)$$

Novamente, somamos em a dos dois lados em (2.71) e usamos (2.68) para obter:

$$\sum_a \sum_{i \neq j} \lambda_i^a \lambda_j^a = -\frac{8}{3} , \text{ para bárions.} \quad (2.72)$$

Os resultados (2.69) e (2.72) podem ser reunidos definindo-se:

$$N = \begin{cases} 1, & \text{para bárions} \\ 2, & \text{para mésons.} \end{cases}$$

E então teremos:

$$\sum_a \sum_{i \neq j} \lambda_i^a \lambda_j^a = -\frac{8}{3} N . \quad (2.73)$$

Com o uso de (2.73), a somatória sobre os índices de côr a em (2.64) pode ser efetuada e ficaremos com:

$$\Delta E_M = 8\alpha_c N \sum_{i>j} (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) \frac{\mu(m_i, R) \mu(m_j, R)}{R^3} I(m_i R, m_j R) . \quad (2.74)$$

Definindo-se também:

$$M_{ij} \equiv 8\alpha_c \frac{\mu(m_i, R) \mu(m_j, R)}{R^3} I(m_i R, m_j R) , \quad (2.75)$$

a energia de interação magnética pode ser escrita simplesmente como:

$$\Delta E_M = N \sum_{i>j} (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) M_{ij} . \quad (2.76)$$

Na expressão acima fica evidenciada a presença do termo de estrutura hiperfina na parte magnética das energias de interação, sendo que o termo de spin-spin veio da parte angular da integração dos campos magnéticos no "bag" (eqs. (2.58) e (2.59)).

A expressão (2.76) é determinada numericamente a partir dos valores da função I , dada em (2.65), e pelos momentos magnéticos $\mu(m_i, R)$. O parâmetro R é fixado em função da constante do "bag" B e as massas m_i tem seus valores conforme o tipo do quark: u , d ou s .

Agora vamos calcular a energia de interação elétrica. Usaremos a expressão (2.27), transcrita a seguir:

$$\Delta E_E = \frac{1}{2} g^2 \sum_a \sum_{i,j} \int_{\text{Bag}} \vec{E}_i^a(\vec{r}) \cdot \vec{E}_j^a(\vec{r}) d^3r . \quad (2.77)$$

Os índices i e j denotam o par de quarks (i, j) que estão interagindo. $\vec{E}_i^a(\vec{r})$ é o campo eletrostático de côm gerado pelo i -ésimo quark. Quando efetuamos a soma sobre os pares (i, j) fazendo $\sum_{i,j}$ em (2.77) estamos incluindo os termos de autoenergia dos quarks ($i = j$). Veremos que isto nos levará a obter $\Delta E_E = 0$ quando todos os quarks no hádron têm a mesma massa.

O campo eletrostático de cada quark deve obedecer as equações:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_i^a(\vec{r}) &= j_i^{a0}(\vec{r}) \\ \vec{\nabla}_x \vec{E}_i^a(\vec{r}) &= 0 \end{aligned} \right\} r < R \quad (2.78)$$

$$(2.78a)$$

$$(2.78b)$$

onde $j_i^{a0}(\vec{r})$ é a densidade de carga de côm do i -ésimo quark.

Também deve ser satisfeita a condição de contorno:

$$\hat{n} \cdot \sum_i \vec{E}_i^a(\vec{r}) = 0, \quad r=R. \quad (2.79)$$

Define-se $\rho_i^a(r)$, uma densidade linear de carga, tal que:

$$\psi_i^\dagger \lambda^a \psi_i = j_i^{a0} \equiv \frac{\lambda_i^a}{4\pi r^2} \rho_i^a(r), \quad (2.80)$$

$$\int_0^R \rho_i^a(r') dr' \equiv 1. \quad (2.81)$$

Define-se também a densidade de carga:

$$\rho_i^a(r) \equiv \int_0^r \rho_i^a(r') dr'. \quad (2.82)$$

Vamos verificar a coerência destas definições e encontrar a expressão do campo elétrico.

Aplicando a Lei de Gauss para uma superfície esférica de raio r , temos:

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_i^a dV = \int \vec{E}_i^a \cdot d\vec{s} = Q_{interna}. \quad (2.83)$$

Por outro lado:

$$Q_{interna} = \int j_i^{a0}(\vec{r}) dV = \int 4\pi r'^2 j_i^{a0}(\vec{r}') dr' = \lambda_i^a \int_0^r \rho_i^a(r') dr' = \lambda_i^a \rho_i^a(r), \quad (2.84)$$

onde, nas duas últimas passagens se fez uso das definições (2.80) e (2.82), respectivamente.

Igualando (2.83) a (2.84) relacionamos o campo elétrico à densidade $\rho_i(r)$:

$$\int \vec{E}_i^a \cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 E_i^a(r) = \lambda_i^a \rho_i(r) . \quad (2.85)$$

Portanto, obtemos:

$$\vec{E}_i^a(\vec{r}) = \frac{\lambda_i^a}{4\pi r^2} \rho_i(r) \hat{A} . \quad (2.86)$$

O campo elétrico de côm total será:

$$\vec{E}^a(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i^a(\vec{r}) = \frac{\hat{A}}{4\pi r^2} \sum_i \lambda_i^a \rho_i(r) . \quad (2.87)$$

No caso particular em que todos os quarks no hádron têm a mesma massa vemos, por (2.80), que $\rho_i(r)$ será o mesmo para todos os quarks, independentemente de i . O índice i torna-se irrelevante nesse caso, então podemos escrever $\rho_i(r) = \rho(r)$ e o campo elétrico total agora será dado por:

$$\vec{E}^a(\vec{r}) = \frac{\rho(r)}{4\pi r^2} \hat{A} \sum_i \lambda_i^a . \quad (2.88)$$

Para um singlete de côm hadrônico devemos ter:

$$\sum_i \lambda_i^a |H\rangle = 0 , \quad (2.89)$$

o que, conseqüentemente nos levará a ter $\vec{E}^a = 0$.

Olhemos agora para (2.77), se efetuamos a soma em i e depois em j , obtemos:

$$\Delta E_E = \frac{1}{2} g^2 \sum_a \int_{\text{Bag}} \vec{E}^a \cdot \vec{E}^a d^3 r \Rightarrow \Delta E_E = 0 . \quad (2.90)$$

Observemos que a inclusão do termo de autoenergia (com $\vec{E}_i^a \cdot \vec{E}_i^a$) possibilitou-nos obter $\Delta E_E = 0$ pois foi possível somar em i independente de j .

Também devemos observar que o campo elétrico (2.86) de um único quark não satisfaz a condição de contorno (2.79):

$$\hat{n} \cdot \vec{E}_i^a(\vec{r}=\vec{R}) = \frac{\lambda_i^a}{4\pi R^2} \rho_i(R) = \frac{\lambda_i^a}{4\pi R^2} \neq 0 , \quad (2.91)$$

enquanto que o campo total (2.88), somado sobre todos os quarks satisfaz:

$$\hat{n} \cdot \sum_i \vec{E}_i^a(\vec{r}) = \sum_i \frac{\rho_i(R)}{4\pi R^2} \lambda_i^a = \frac{1}{4\pi R^2} \sum_i \lambda_i^a = 0 . \quad (2.92)$$

Vimos então que se os quarks no "bag" têm a mesma massa, $\rho_i(r) = \rho_j(r) = \rho(r)$ e ΔE_E é zero. Agora vamos considerar o caso geral, em que os quarks podem ter massas diferentes.

Tomamos a equação (2.77) e separamos a parte de autoenergia da parte de interação entre os pares de quarks:

$$\Delta E_E = \frac{1}{2} g^2 \sum_a \left(\sum_i \int_{\text{Bag}} |\vec{E}_i^a(\vec{r})|^2 d^3 r + 2 \sum_{i>j} \int_{\text{Bag}} \vec{E}_i^a(\vec{r}) \cdot \vec{E}_j^a(\vec{r}) d^3 r \right) . \quad (2.93)$$

Substituindo $\vec{E}_i^a(\vec{r})$ da expressão (2.86) temos:

$$\Delta E_E = \frac{1}{2} g^2 \sum_a \left(\sum_i (\lambda_i^a)^2 \int_0^R \frac{\rho_i^2(r)}{4\pi r^2} dr + 2 \sum_{i>j} \lambda_i^a \lambda_j^a \int_0^R \frac{\rho_i(r) \rho_j(r)}{4\pi r^2} dr \right) . \quad (2.94)$$

Utilizando as relações (2.68) e (2.72) podemos efetuar a soma em a :

$$\Delta E_E = \frac{1}{2} g^2 \left(\frac{16}{3} \sum_i \int_0^R \frac{\rho_i^2(r)}{4\pi r^2} dr + 2 \cdot \left(\frac{-8}{3}\right) N \sum_{i>j} \int_0^R \frac{\rho_i(r)\rho_j(r)}{4\pi r^2} dr \right), \quad (2.95)$$

onde $N = 1$ para um bárion e $N = 2$ para um méson.

Pondo o fator $16/3$ em evidência e substituindo $g^2 = 4\pi \alpha_c$ chegamos à seguinte expressão para a energia de interação elétrica:

$$\Delta E_E = \frac{8}{3} \alpha_c \left(\sum_i \int_0^R \frac{\rho_i^2(r)}{r^2} dr - N \sum_{i>j} \int_0^R \frac{\rho_i(r)\rho_j(r)}{r^2} dr \right). \quad (2.96)$$

Definindo:

$$f(x_i, x_j) \equiv R \int_0^R \frac{\rho_i(r)\rho_j(r)}{r^2} dr, \quad (2.97)$$

podemos escrever a expressão obtida como:

$$\Delta E_E = \frac{8}{3} \alpha_c \left(\frac{1}{R} \sum_i f(x_i, x_i) - N \cdot \frac{1}{R} \sum_{i>j} f(x_i, x_j) \right), \quad (2.98)$$

ou ainda,

$$\Delta E_E = \frac{-8\alpha_c}{3R} \left(N \sum_{i>j} f(x_i, x_j) - \sum_i f(x_i, x_i) \right). \quad (2.99)$$

Notemos que o termo de autoenergia tem sinal oposto ao do termo de interação. Notemos também que a expressão resultante para ΔE_E é dada em função das densidades de carga dos quarks. No desenvolvimento dos cálculos não entrou, até agora, a forma explícita da função de onda dos quarks. É que no "bag model" a dependência sobre o estado dos quarks está contida na densidade de carga. Analogamente, no cálculo de ΔE_M tínhamos o momento magnético dos quarks expressando seus estados.

Para obter resultados numéricos é necessário explicitar a for

ma da densidade de carga. Das definições (2.82) e (2.80) podemos escrever:

$$\rho_i(r) = \int_0^r \rho'_i(r') dr' = \int_0^r \frac{4\pi r'^2}{\lambda_i^3} j_i^{a0} dr' = \int_0^r 4\pi r'^2 \Psi_i^\dagger \Psi_i dr'. \quad (2.100)$$

Substituindo a função de onda dada por (2.10) e integrando, chegamos à seguinte expressão para a densidade de carga do i -ésimo quark:

$$\rho_i(r) = \frac{w_i \left(x_i \frac{r}{R} - \frac{\text{sen}^2(x_i r/R)}{x_i r/R} \right) - m_i \left(\text{sen} \left(\frac{x_i r}{R} \right) \cos \left(\frac{x_i r}{R} \right) - \frac{\text{sen}^2(x_i r/R)}{x_i r/R} \right)}{w_i \left(x_i - \frac{\text{sen}^2 x_i}{x_i} \right) - m_i \left(\text{sen} x_i \cos x_i - \frac{\text{sen}^2 x_i}{x_i} \right)}. \quad (2.101)$$

Para avaliar energias de interação elétrica é necessário calcular as funções $f(x_i, x_j)$, via (2.97). O grupo do MIT calcula as $f(x_i, x_j)$ por computador pois as expressões a serem integradas são bem longas. Os estados dos quarks são expressos através das autofrequências x_i .

Vamos chamar de x_0 a autofrequência de um quark não-estranho (quarks u ou d) e chamaremos de x_s a autofrequência de um quark estranho (quark s). Vamos escrever a expressão de ΔE_E em termos de x_0 e x_s .

Havíamos observado que se as massas dos quarks são iguais então $\rho_i(r) = \rho(r)$, o que implica em $x_i = x_j$ e $\Delta E_E = 0$. Assim sendo, para mésons, que são constituídos por $(u\bar{u})$, $(d\bar{d})$ ou $(s\bar{s})$, teremos $\Delta E_E = 0$.

Para um bárion (sss), de estranheza $S = -3$, também teremos $\Delta E_E = 0$. Para bárions não-estranhos (bárions constituídos apenas por quarks u e d) teremos $\Delta E_E = 0$ desde que consideremos $m_u \approx m_d$; nesse caso a estranheza é $S = 0$.

No caso de estados mesônicos compostos de $(\bar{u}d)$ ou $(u\bar{d})$ também teremos $S = 0$ e $\Delta E_E = 0$. Para estados mesônicos com apenas um dos quarks constituintes do tipo s (ou \bar{s}) teremos $S = \pm 1$ e $\Delta E_E \neq 0$.

ΔE_E será diferente de zero para bárions com 1 ou 2 quarks estranhos, de estranhezas $S = -1$ e $S = -2$, respectivamente.

Todos estes casos podem ser reunidos ao definirmos uma constante b tal que:

$$b = \begin{cases} 0, & \text{se } S = 0 \text{ ou } S = -3 \\ 1, & \text{se } S = +1, S = -1 \text{ ou } S = -2. \end{cases} \quad (2.102)$$

Os valores de b para os hádrons estão dados na tabela da próxima página (TABELA 1).

Analisando a expressão (2.99) para os vários tipos de bárions e de mésons comentados acima, conclui-se que é possível reescrever (2.99) sem perda de generalidade e reunindo todos os casos através da expressão:

$$\Delta E_E = \frac{-8\alpha_c}{3R} b [2f(x_0, x_1) - f(x_0, x_0) - f(x_1, x_1)], \quad (2.103)$$

com $f(x_i, x_j)$ dado por (2.97).

TABELA 1. Estranheza e parâmetro b para os hádrons.

Hádrons	Quarks constituintes	Estranheza S	b
<u>Mésons</u>			
π^+, ρ^+	$u\bar{d}$	0	0
π^-, ρ^-	$\bar{u}d$	0	0
π^0, ρ^0, ω^0	$u\bar{u}, d\bar{d}$	0	0
$\eta^0, \eta_1^0, \eta_8^0, \omega_1^0, \omega_8^0, \phi_8^0$	$u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$	0	0
ϕ^0	$s\bar{s}$	0	0
K^0, K^{*0}	$d\bar{s}$	+1	1
\bar{K}^0, \bar{K}^{*0}	$\bar{d}s$	-1	1
K^+, K^{*+}	$u\bar{s}$	+1	1
K^-, K^{*-}	$\bar{u}s$	-1	1
<u>Bárions</u>			
P, Δ^+	uud	0	0
N, Δ^0	udd	0	0
Δ^-	ddd	0	0
Δ^{++}	uuu	0	0
Σ^+, Σ^{*+}	uus	-1	1
$\Sigma^0, \Sigma^{*0}, \Lambda^0$	uds	-1	1
Σ^-, Σ^{*-}	dds	-1	1
Ξ^0, Ξ^{*0}	uss	-2	1
Ξ^-, Ξ^{*-}	dss	-2	1
Ω^-	sss	-3	0

II-3. Massas Hadrônicas no "MIT bag"

Iremos agora aplicar os resultados obtidos nas seções anteriores descrevendo algumas propriedades das massas hadrônicas.

Primeiramente, vamos nos direcionar à obtenção de uma fórmula de massa para os hádrons a partir das características do "bag".

No "bag model" a massa de um hádron é dada pela soma de vários termos que correspondem a efeitos distintos. Daremos a se-

guir uma breve descrição de cada um desses termos:

1ª) As energias de flutuação do campo contribuem com dois termos que dependem somente do raio do hádron. Há um termo de volume que é dado por:

$$E_v \equiv \frac{4\pi}{3} B R^3, \quad (2.104)$$

onde B é a constante do "bag". O outro termo é a energia de ponto zero, que é:

$$E_0 \equiv -\frac{Z_0}{R}, \quad (2.105)$$

onde Z_0 , outro parâmetro do "bag", é positivo e da ordem da unidade.

2ª) A massa de repouso dos quarks e suas energias cinéticas também contribuem para a massa do hádron. Cada quark de massa m que ocupa um modo da cavidade de raio R , contribui com um termo $w(m,R)$ para a energia do sistema. Pela definição (2.9), para o i -ésimo quark teremos a energia:

$$w_i(m_i, R) = \frac{1}{R} \left[x_i^2 + (m_i R)^2 \right]^{1/2}, \quad (2.106)$$

onde o valor de $x_i(m_i, R)$ é determinado através de (2.17).

Se denotarmos pelo índice o os quarks não-estranhos (u e d) e chamarmos de N_o o número de quarks não-estranhos presentes em certo hádron, N_s o número de quarks estranhos presentes no hádron, m_o a massa dos quarks não estranhos e m_s a massa dos quarks estranhos, então poderemos escrever o termo de energia dos quarks em um hádron como:

$$E_Q = N_o w(m_o, R) + N_s w(m_s, R) = N_o w_o + N_s w_s. \quad (2.107)$$

3º) Por fim, devemos incluir as energias de interação por troca de glúons. Teremos um termo relativo à parte magnética e outro da parte elétrica.

A energia de interação magnética foi calculada na seção II.2 e nós obtivemos como resultado a expressão (2.76). Nessa expressão, as grandezas M_{ij} podem ser de três tipos: M_{00} , que é a interação magnética de côm entre 2 quarks não-estranhos; M_{0s} , que é a interação entre 1 quark não-estranho e 1 estranho e M_{ss} , que é a interação entre 2 quarks estranhos.

Então, avaliando $\sum_{ij} (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) M_{ij}$ em cada estado, podemos definir coeficientes a_{ij} tais que:

$$E_M = a_{00} M_{00} + a_{0s} M_{0s} + a_{ss} M_{ss} . \quad (2.108)$$

Os valores de M_{00} , M_{0s} e M_{ss} podem ser tirados do gráfico dado na Figura 3. Os coeficientes a_{ij} dependem do estado e estão listados na Tabela 2.

A parte elétrica da energia de interação é dada por (2.103). Vimos que quando todos os quarks são do mesmo tipo (têm a mesma massa) temos $\Delta E_E = 0$, o que é dado pelo coeficiente b , que é igual a zero nesses casos. Vamos aqui definir uma grandeza ϵ que desempenha um papel análogo aos M_{ij} da parte magnética:

$$\epsilon \equiv \frac{\Delta E_E}{b} = \frac{-8\alpha_c}{3R} [2f(x_0, x_1) - f(x_0, x_0) - f(x_1, x_1)] . \quad (2.109)$$

De forma que a energia elétrica de côm dos quarks será:

$$E_E = b \epsilon , \quad (2.110)$$

onde $b = 1$ ou 0 , conforme indicado nas Tabelas 1 e 2 e ϵ é determinado em função das $f(x_i, x_j)$.

----- { interação entre 1 quark es
tranho e 1 não-estranho →
 M_{os}

————— { interação entre quarks de
massas iguais → M_{oo} ou M_{ss}

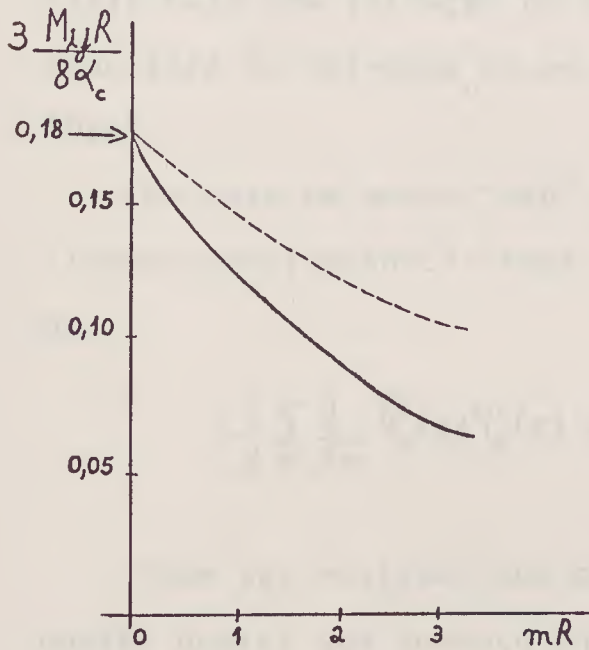


FIG. 3 - Energia de interação magnética entre 2 quarks em função de mR .

TAB. 2 - Valores dos parâmetros a_{ij} e b para hádrons leves.

HÁDRONS	a_{oo}	a_{os}	a_{ss}	b
P, N	-3	0	0	0
Λ	-3	0	0	1
Σ	1	-4	0	1
Ξ	0	-4	1	1
Δ	3	0	0	0
Σ^*	1	2	0	1
Ξ^*	0	2	1	1
Ω^-	0	0	3	0
ρ	2	0	0	0
K^*	0	2	0	1
ω	2	0	0	0
φ	0	0	2	0
π	-6	0	0	0
K	0	-6	0	1

Vamos agora escrever a fórmula de massa de um hádron. Ela deve ser a soma dos termos dados por: (2.104) - termo de volume, (2.105) - energia de ponto zero, (2.107) - energia dos quarks, (2.108) - energia de interação magnética e (2.110) - energia de interação elétrica. Então, a massa de um hádron de raio R é dada por:

$$M(R) = E_v + E_o + E_q + E_M + E_E = E_{\text{bag}}. \quad (2.111)$$

Neste ponto, cabe discutirmos a respeito da determinação do valor do raio de um hádron, pois temos encontrado expressões que são funções de R .

Até o momento não fizemos uso da condição de contorno quadrática, dada por (2.3) mas agora iremos introduzi-la.

Esta condição requer que sobre a superfície do "bag" a pres-

são B contrabalance qualquer variação da energia associada aos campos de côm. Com isso estaremos estabelecendo uma condição de estabilidade para o "bag", já que estaremos impondo que na superfície haja uma situação de equilíbrio energético. Essa condição resultará na obtenção de um raio de equilíbrio $R = R_0$ para o "bag".

No caso em que o "bag" é uma esfera estática (que é o que estamos considerando) temos $n^\mu = (0, \hat{r})$ e a equação (2.3) se torna:

$$-\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \bar{\psi}_{\alpha}(x) \psi_{\alpha}(x) = B, \text{ em } r=R_0. \quad (2.112)$$

Pode ser mostrado que para "bags" esféricos e estáticos, que contém quarks com momento angular 1/2, a condição (2.112) é equivalente a minimizar $M(R)$ com relação a R . Daí pode-se determinar um raio de equilíbrio para o "bag", o qual deverá ser o raio do hádron R_0 .

Ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial R} M(R) = 0 \longrightarrow R_0, \quad (2.113)$$

e a massa do hádron será dada por $M(R_0)$.

A partir de (2.113) encontra-se que o raio do hádron R_0 é inversamente proporcional ao valor da constante do "bag" B elevada à potência 1/4:

$$R_0 \propto B^{-1/4}. \quad (2.114)$$

E então, usando-se as massas observadas de alguns hádrons para fixar os parâmetros B , Z_0 e α_c , procura-se reproduzir todo o espectro de massas hadrônicas.

O grupo do MIT, De Grand et al (ref. 11), calculou em 1975 o espectro de massas dos hádrons "leves", bem como algumas proprie-

dades estáticas. Os resultados obtidos por eles estão dados na Tabela 3.

Recentemente, Bartelski et al (ref. 15), (1984), analisaram a influência da inclusão de correções devidas ao movimento do centro de massa (necessária em um modelo de partículas independentes, como o "MIT bag") e também de correções devidas a nuvem de píons, com cuja inclusão procura-se restaurar a simetria quiral no modelo. Este grupo também realizou um "best fit" do "MIT bag" (sem incluir tais correções), o qual apresentamos aqui na Tabela 4.

Com a finalidade de comparar diferentes "fits" introduziu-se a quantidade $\langle \delta M \rangle$, definida como:

$$\langle \delta M \rangle = \left(\frac{\sum_{\text{HÁDRONS}} (M_{\text{exp}} - M_{\text{modelo}})^2}{N} \right)^{1/2}, \quad (2.115)$$

onde N é o número de hádrons.

No ajuste do MIT¹¹ o valor de $\langle \delta M \rangle$ era de 23 MeV, o "best fit" de Bartelski et al¹⁵ abaixou este valor para 16 MeV. Contudo, na descrição dos parâmetros estáticos o "bag model" não produziu resultados muito bons: $\mu_p^{\text{bag}} = 1,81$ m.n. contra um valor experimental $\mu_p^{\text{exp}} = 2,79$ m.n. (m.n. = magnetons nucleares); $g_A^{\text{bag}} = 1,10$ contra $g_A^{\text{exp}} = 1,25$ e $\langle r^2 \rangle_p^{\text{bag}} = (0,69 \text{ fm})^2$ contra o valor $\langle r^2 \rangle_p^{\text{exp}} = (0,84 \text{ fm})^2$.

Vamos agora apresentar a maneira como foi calculada a correção do movimento do centro de massa na ref. (15), para futura comparação com o procedimento que será adotado no modelo de potencial.

De acordo com as refs. (16), a maneira apropriada para se corrigir a fórmula (2.111) seria dada pela fórmula:

$$E_{\text{bag}} = \langle (M^2 + P^2)^{1/2} \rangle_{\text{wave packet}}, \quad (2.116)$$

TAB. 3 - Massas dos hádrons leves calculadas pelo grupo do MIT (Ref.11) com $m_0 = 0$. Massas em GeV, R_0 em GeV^{-1} . $\langle \delta M \rangle = 23 \text{ MeV}$.

Partícula	M_{exp}	M_{bag}	R_0	E_0	E_V	E_Q	E_M	E_E
p	0.938	0.938	5.00	-0.367	0.234	1.226	-0.155	0
Λ	1.116	1.105	4.95	-0.371	0.227	1.400	-0.156	0.005
Σ^+	1.189	1.144	4.95	-0.371	0.227	1.400	-0.116	0.005
Ξ^0	1.321	1.289	4.91	-0.374	0.222	1.572	-0.136	0.005
Δ	1.236	1.233	5.48	-0.336	0.308	1.119	0.141	0
Σ^*	1.385	1.382	5.43	-0.338	0.301	1.292	0.122	0.005
Ξ^*	1.533	1.529	5.39	-0.341	0.293	1.465	0.106	0.005
Ω^-	1.672	1.672	5.35	-0.343	0.287	1.636	0.092	0
ρ	0.77 ± 0.01	0.783	4.71	-0.390	0.196	0.868	0.110	0
K^*	0.892	0.928	4.65	-0.395	0.189	1.039	0.091	0.004
ω	0.783	0.783	4.71	-0.390	0.196	0.868	0.110	0
ϕ	1.019	1.068	4.61	-0.399	0.183	1.207	0.076	0
K	0.495	0.497	3.26	-0.564	0.065	1.407	-0.415	0.003
π	0.139	0.280	3.34	-0.549	0.070	1.222	-0.462	0

$B^{1/4} = 0.145 \text{ GeV}$, $Z_0 = 1.84$, $\alpha_c = 0.55$, $m_s = 0.279 \text{ GeV}$

TAB. 4 - Resultados do "best fit" do "MIT bag" feito por Bartelski et al (Ref.15). Os valores dos parâmetros são: $m_0 = 11 \text{ MeV}$, $m_s = 282 \text{ MeV}$, $\alpha_s = 1.96$, $Z = 2.01$, $B^{1/4} = 150 \text{ MeV}$. $\langle \delta M \rangle = 16 \text{ MeV}$.

Hádron	Raio do bag (GeV^{-1})	Massa exp. (MeV)	Massas do "fit" (MeV)	Diferença (MeV)
N	4.82	939	965	-26
Λ	4.77	1116	1125	-9
Σ	4.77	1193	1159	34
Ξ	4.73	1318	1302	16
Δ	5.24	1232	1237	-5
Σ^*	5.20	1384	1381	3
Ξ^*	5.16	1533	1527	6
Ω^-	5.13	1672	1672	0
ρ	4.47	768	766	2
ω	4.47	783	766	17
ϕ	4.38	1020	1048	-28
K	3.15	496	500	-4
K^*	4.42	895	906	-11

onde M é a massa física de um determinado hádron.

Bartelski et al mostraram¹⁷ que a substituição:

$$\langle f(v^2) \rangle \simeq f(\langle v^2 \rangle), \quad v = \frac{P}{E} \quad (2.117)$$

dá uma melhor aproximação para o 2º membro da equação (2.116) do que a sua expansão em termos de P^2 . Portanto, eles fazem

$$E_{bag} \simeq (M^2 + \langle P^2 \rangle)^{1/2} \rightarrow M = (E_{bag}^2 - \langle P^2 \rangle)^{1/2}. \quad (2.118)$$

O problema permanece então em como calcular $\langle P^2 \rangle$ num estado da sacola.

Na ref. (15), Bartelski et al simplesmente adotam:

$$\langle P^2 \rangle = \sum_i (E_i^2 - m_i^2) = \sum_i \frac{\alpha_i^2}{R^2}. \quad (2.119)$$

O resultado obtido com essas expressões está dado na Tabela 5.

TAB. 5 - Resultados do "best fit" da Ref.15 para o "MIT bag" incluindo as correções de centro-de-massa. Os valores dos parâmetros são: $m_0 = 0$, $m_b = 286$ MeV, $\alpha_s = 1.56$, $Z = 0.76$, $B^{1/4} = 143$ MeV. $\langle \delta M \rangle = 19$ MeV.

Hádron	Raio do bag (GeV ⁻¹)	Massa exp. (MeV)	Massa do "fit" (MeV)	Diferença (MeV)
N	5.50	939	974	-35
Λ	5.46	1116	1138	-22
Σ	5.46	1193	1172	21
Ξ	5.41	1318	1321	-3
Δ	5.79	1232	1218	14
Σ^*	5.75	1384	1365	19
Ξ^*	5.71	1533	1515	18
Ω^-	5.67	1672	1667	5
ρ	5.15	768	775	-7
ω	5.15	783	775	8
ϕ	5.05	1020	1055	-35
K	4.48	496	481	15
K*	5.10	895	912	-17

Neste ajuste Bartelski et al obtêm um desvio médio um pouco pior do que aquele sem as correções C.M. (TAB. 4, $\langle \delta M \rangle = 16$ MeV), agora $\langle \delta M \rangle = 19$ MeV mas os parâmetros estáticos nesse novo ajuste resultam bem melhorados (exceto pelo raio de carga do próton e do nêutron).

Por exemplo, o momento magnético do próton com a correção de C.M. dá 2,57 m.n., aproximando-se mais do valor experimental (2,79 m.n.) do que no "fit" sem C.M. (onde $\mu_p^{\text{bag}} = 1,81$ m.n.).

Para a constante g_A de decaimento β do nucleon encontraram o valor 1,23 contra um valor experimental de 1,25.

Já para o raio de carga do próton obteve-se um valor muito pequeno em comparação com o experimental: $\langle r^2 \rangle_p^{\text{bag}} \text{ com C.M.} = (0,68 \text{ fm})^2$, valor experimental: $(0,84 \text{ fm})^2$. Para o raio de carga do nêutron o "bag" dá zero, enquanto que experimentalmente sabemos que o valor é $-(0,34 \text{ fm})^2$.

Deixaremos maiores discussões desses resultados para o final da próxima seção, onde estaremos calculando essas grandezas através do nosso modelo de potencial escalar-vetorial, e onde faremos, então, uma comparação entre os resultados obtidos.

O MODELO DE POTENCIAL S+VIII-1. O Potencial Confinante. Equação de Movimento, Autofunções e Autovalores da Energia

Nesta seção iremos desenvolver as propriedades básicas dos modelos de potencial.

Vamos trabalhar especificamente com o potencial chamado potencial escalar-vetorial. Este é um modelo de potencial relativístico, cujas principais propriedades enumeramos a seguir:

- (i) Os bárions (e mésons) são singletos de côr.
- (ii) O grupo SU(3) de sabor é quebrado ao considerar-se as massas dos quarks u e d iguais e a massa do quark s diferente ($m_u = m_d \neq m_s$).
- (iii) Os quarks estão confinados, em uma primeira aproximação, por um potencial relativístico que é dado pela soma de um termo escalar e um vetorial, que no centro-de-massa do sistema tem a forma de um potencial central $U(r) = \frac{1}{2} (1 + \beta) V(r)$.
- (iv) O espectro de massas hadrônicas é corrigido ao levar-se em conta as energias de interação por troca de 1 glúon.

As características (i), (ii) e (iv) estão presentes na maioria dos modelos a quarks. Nós fizemos uso delas no desenvolvimento dos cálculos do "MIT bag model" e também faremos no modelo de potencial.

Mais adiante, estaremos trabalhando no caso em que $V(r)$ é um potencial harmônico $V(r) = V_0 + \frac{1}{2} Kr^2$ (e comentaremos brevemente sobre o potencial linear $V(r) = V'_0 + \lambda r$).

Este modelo irá depender de 5 parâmetros: a massa do quark u: m_u , a massa do quark estranho: m_s , a constante de acoplamento α_c , e dois parâmetros V_0 (ou V'_0) e K (ou λ) descrevendo o

potencial harmônico (ou linear).

A título de comparação, lembremos que no "bag model" os parâmetros eram: m_U , m_S , B , Z_0 e α_c .

Os modelos de potencial se baseiam em descrever cada quark de um hádron através de uma equação de Dirac com um potencial que confina os quarks.

No centro-de-massa do hádron, escrevemos a equação sob a forma:

$$\left[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m + \frac{1}{2} (1+\beta) V(r) \right] \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}), \quad (3.1)$$

onde $\vec{\alpha}$ e β são as usuais matrizes de Dirac e $V(r)$ é o potencial confinante.

A função de onda de quatro componentes $\psi(\vec{r})$ será escrita como $\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$, de forma que (3.1) pode ser re-expressa através do seguinte par de equações:

$$\begin{cases} (E - m - V(r)) \psi'_A - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \psi'_B = 0 & (3.2a) \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \psi'_A - (E + m) \psi'_B = 0 & (3.2b) \end{cases} \quad (3.2)$$

Escrevendo (3.2b) como:

$$\psi'_B = (E + m)^{-1} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \psi'_A, \quad (3.3)$$

e substituindo em (3.2a), obtemos uma equação tipo Schroedinger para a componente superior:

$$\left[p^2 - (E + m)(E - m - V(r)) \right] \psi'_A = 0. \quad (3.4)$$

Tomando as soluções de ondas S, poderemos escrever ψ_A na forma:

$$\psi'_A = \varphi(r) \cdot \chi, \quad (3.5)$$

onde χ é um spinor de Pauli e $\varphi(r)$ é uma solução normalizada de (3.4):

$$p^2 \varphi(r) = (E+m)(E-m-V(r)) \varphi(r) , \quad (3.6)$$

onde p^2 é o operador do momento quadrado em coordenadas esféricas:

$$p^2 = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} . \quad (3.7)$$

A equação (3.6) é uma equação radial de movimento, cujas soluções $\varphi(r)$ podem ser determinadas conforme o tipo de potencial $V(r)$.

Com as equações (3.5) e (3.3) podemos escrever a função de onda:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = N \cdot \begin{pmatrix} \varphi(r) \chi \\ (E+m)^{-1} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi(r) \chi \end{pmatrix} , \quad (3.8)$$

onde N é a constante de normalização. Ela é determinada por:

$$\int \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r = 1 . \quad (3.9)$$

Calculando explicitamente isso nos dará:

$$N^2 = \left[1 + \frac{\langle p^2 \rangle}{(E+m)^2} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{1}{(E+m)} (E-m - \langle V(r) \rangle) \right]^{-1} , \quad (3.10)$$

onde os colchetes $\langle \rangle$ indicam os valores esperados com relação aos estados $\varphi(r)$.

As expressões obtidas até aqui se aplicam a qualquer potencial confinante $V(r)$. Agora vamos particularizar ao caso de um potencial do tipo oscilador harmônico:

$$V(r) = V_0 + \frac{1}{2} K r^2 . \quad (3.11)$$

Nesse caso, as funções de onda radiais $\varphi(r)$ que são soluções de (3.6) podem ser determinadas exatamente. A solução para o i -ésimo quark no estado fundamental será:

$$\varphi_i(r) = \left(\frac{1}{\pi R_i^2} \right)^{3/4} \cdot \exp\left[\frac{-r^2}{2R_i^2} \right] , \quad (3.12)$$

onde o raio R_i está relacionado à constante K por:

$$R_i = \left(\frac{2}{x_i K} \right)^{1/4} , \quad (3.13)$$

$$x_i \equiv E_i + m_i . \quad (3.14)$$

Assumindo que as constantes V_0 e K são as mesmas para todos os quarks constituintes, temos então a relação:

$$R_i = R_j \left(\frac{x_j}{x_i} \right)^{1/4} = R_j \left(\frac{E_j + m_j}{E_i + m_i} \right)^{1/4} . \quad (3.15)$$

Para o estado fundamental do oscilador harmônico temos as funções de onda radiais dadas por (3.12). Calculando:

$$\langle p^2 \rangle = \int_0^\infty \varphi^*(r) p^2 \varphi(r) 4\pi r^2 dr , \quad (3.16)$$

com as funções de onda (3.12) encontramos:

$$\langle p^2 \rangle = \frac{3}{2} \frac{1}{R^2} , \quad (3.17)$$

Para o estado fundamental do oscilador harmônico.

Com esse resultado, a constante de normalização dada por

(3.10) pode ser escrita:

$$N_i^2 = \left[1 + \frac{3}{2} \frac{1}{(E_i + m_i)^2 R_i^2} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{3}{2} \frac{1}{(x_i R_i)^2} \right]^{-1}. \quad (3.18)$$

Também podemos encontrar os autovalores da energia. Pela substituição das funções de onda radiais dadas por (3.12) na equação de movimento (3.6) obtemos:

$$(E_i + m_i)(E_i - m_i - V_0) = \frac{3}{R_i^2}, \quad (3.19)$$

logo:

$$E_i = m_i + V_0 + \frac{3}{(E_i + m_i) R_i^2} = m_i + V_0 + \frac{3}{x_i R_i^2}. \quad (3.20)$$

Um outro exemplo de potencial confinante é o potencial linear:

$$V(r) = V_0' + \lambda r. \quad (3.21)$$

Vamos apenas apresentar o estado fundamental e o 1º estado excitado. (Detalhes podem ser encontrados na referência (18).)

No estado fundamental, todos os quarks devem estar em um estado (1S). No 1º estado excitado, um dos quarks passa para um estado radialmente excitado (2S).

Para o potencial linear, as ondas-S que são autofunções de (3.6) são:

$$\varphi_i(r) = \left(\frac{\beta_i}{4\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{Ai(a_i)} \cdot \frac{1}{r} Ai(\beta_i r + a_i), \quad (3.22)$$

com: $\beta_i \equiv (\lambda x_i)^{1/3}$,

onde Ai é a função de Airy e a_1 é a primeira ou segunda raiz desta função ($a_1 = -2,3381$; $a_2 = -4,0880$), conforme o quark i esteja em um estado (1S) $\rightarrow a_1$, ou em um estado (2S) $\rightarrow a_2$.

Na equação (3.10) temos a expressão para a normalização, que ao ser particularizada ao caso do potencial linear nos dá:

$$N_i^2 = \frac{3x_i}{4E_i + 2m_i - V'_0} . \quad (3.23)$$

Nesse caso, os autovalores da energia são dados por:

$$E_i = m_i + V'_0 - \frac{\lambda a_i}{\beta_i} . \quad (3.24)$$

Notemos que até agora viemos tratando os quarks como partículas independentes. Temos assumido que as únicas forças que agem sobre os quarks vêm do potencial $U(r)$, que faz o papel do potencial médio que cada quark sente. Como o potencial $U(r)$ é o responsável pelo confinamento, esperamos que ele descreva razoavelmente a parte de longo-alcance da interação entre os quarks.

Quando analisarmos o espectro de massas hadrônicas nós iremos considerar também a contribuição da parte de curto-alcance da interação, através da avaliação dos diagramas de interação por troca de 1 glúon. É o que faremos na próxima seção.

III-2. Interação de Troca de 1 Glúon no Modelo de Potencial.

"Ground State"

Nesta seção vamos calcular as energias de interação segundo o modelo de potencial. As hipóteses utilizadas para este cálculo nesse modelo são as mesmas que no "bag model". Os diagramas relevantes na contribuição para as correções de energia por troca glúônica serão, novamente, apenas aqueles de primeira ordem na constante de acoplamento α_c , tal como indicado ao final da seção II.1 pela Figura 2 (FIG. 2, pág. 13).

A contribuição para a massa devido a esses diagramas também

será dada por uma soma de uma parte elétrica e uma magnética, só que as expressões para as energias de interação não serão escritas em função dos campos elétricos e magnéticos, como em (2.27-28), mas serão expressas em função da densidade de cargas e da corrente de côm dos quarks:

$$\Delta E_E = \frac{1}{8\pi} \sum_a \sum_{i,j} \int \frac{\rho_i^a(\vec{r}) \rho_j^a(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r d^3r' , \quad (3.25)$$

$$\Delta E_M = \frac{-1}{8\pi} \sum_a \sum_{i,j} \int \frac{\vec{j}_i^a(\vec{r}) \cdot \vec{j}_j^a(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r d^3r' , \quad (3.26)$$

onde i e j são os índices de sabor dos quarks, a é o índice de côm e os vetores \vec{r} e \vec{r}' são, respectivamente, os vetores-posição das partículas i e j .

No "bag model" a integral radial era restrita ao interior do "bag", tendo r variando de 0 a R . Agora, as integrações em (3.25) e (3.26) são efetuadas sobre todo o espaço e, portanto, r e r' terão limites de 0 a ∞ nas integrais.

Neste cálculo estaremos incluindo a contribuição da autoenergia magnética, que foi excluída no cálculo feito pelo "bag". Isso pode ser visto pela inclusão dos termos com $i = j$ na expressão (3.26).

Iremos obter as expressões das densidades de carga e das correntes de côm partindo da definição do quadri-vetor:

$$j_{i\mu}^a = g \bar{\Psi}_i \lambda_i^a \gamma_\mu \Psi_i . \quad (3.27)$$

Usando $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \beta$ e $\gamma_\mu = (\beta, \beta \vec{\alpha})$ temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{j}_i^a = g \psi_i^+ \vec{\sigma}_i \lambda_i^a \psi_i \end{array} \right. , \quad (3.28a)$$

(3.28)

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i^a \equiv j_i^{a0} = g \psi_i^+ \lambda_i^a \psi_i \end{array} \right. . \quad (3.28b)$$

Pela substituição da função de onda ψ_i , dada na expressão (3.8), obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{j}_i^a(\vec{r}) = \frac{2g \lambda_i^a N_i^2}{X_i} \varphi_i(r) \varphi_i'(r) (\hat{n} \times \vec{\sigma}_i) \end{array} \right. , \quad (3.29a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i^a(\vec{r}) = g \lambda_i^a \frac{N_i^2}{X_i^2} [X_i^2 \varphi_i^2(r) + \varphi_i'^2(r)] \end{array} \right. , \quad (3.29)$$

(3.29b)

onde usamos a notação $\varphi_i'(r) \equiv \frac{d\varphi_i(r)}{dr}$.

Vamos calcular primeiramente a energia de interação magnética. Substituindo (3.29a) em (3.26) encontramos a seguinte expressão:

$$\Delta E_M = -\frac{g^2}{8\pi} \sum_a \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^a \frac{4N_i^2 N_j^2}{X_i X_j} \int \varphi_i(r) \varphi_i'(r) \varphi_j(r) \varphi_j'(r) \frac{(\hat{n} \times \vec{\sigma}_i) \cdot (\hat{n}' \times \vec{\sigma}_j)}{|\vec{n} - \vec{n}'|} d^3n d^3n' . \quad (3.30)$$

Usando $g^2 = 4\pi \alpha_c$ e aplicando a identidade:

$$(\hat{n} \times \vec{\sigma}_i) \cdot (\hat{n}' \times \vec{\sigma}_j) = (\hat{n} \cdot \hat{n}') (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) - (\hat{n}' \cdot \vec{\sigma}_i) (\hat{n} \cdot \vec{\sigma}_j) , \quad (3.31)$$

ficamos com:

$$\Delta E_M = -2\alpha_c \sum_a \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^a \frac{N_i^2 N_j^2}{X_i X_j} \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_i(r) \varphi_i'(r) \varphi_j(r) \varphi_j'(r) r^2 dr r'^2 dr' \cdot \left[(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) \int \frac{(\hat{n} \cdot \hat{n}')}{|\vec{n} - \vec{n}'|} d^3n d^3n' - \int \frac{(\hat{n}' \cdot \vec{\sigma}_i) (\hat{n} \cdot \vec{\sigma}_j)}{|\vec{n} - \vec{n}'|} d^3n d^3n' \right] . \quad (3.32)$$

Para resolver as integrais angulares novamente usamos a expansão (A2.4) e em seguida escrevemos $\mathcal{P}_\ell(\cos\gamma)$ em termos de funções harmônicas esféricas. Fazendo isso, obtivemos que a expressão entre colchetes em (3.32) é igual a:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{(4\pi)^2}{3} \cdot (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) \frac{\pi_{<}}{\pi_{>}^2} \quad (3.33)$$

Então temos:

$$\Delta E_M = -\frac{8}{3} \frac{(4\pi)^2}{6} q_c \sum_a \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^a \frac{N_i^2 N_j^2}{X_i X_j} (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) \underbrace{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\pi_{<}}{\pi_{>}^2} \varphi_i(r) \varphi_i'(r) \varphi_j(r) \varphi_j'(r) r^2 dr r'^2 dr'}_{I_{rad.}} \quad (3.34)$$

Vamos chamar de $I_{rad.}$ as integrais radiais em (3.34). O cálculo de $I_{rad.}$ é feito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} I_{rad} &\equiv \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\pi_{<}}{\pi_{>}^2} \varphi_i(r) \varphi_i'(r) \varphi_j(r) \varphi_j'(r) r^2 dr r'^2 dr' = \\ &= \int_0^\infty \varphi_i(r) \varphi_i'(r) r^2 \left[\int_0^r \frac{r'}{\pi_{>}^2} \varphi_j(r) \varphi_j'(r) r'^2 dr' + \int_r^\infty \frac{r}{\pi_{>}^2} \varphi_j(r) \varphi_j'(r) r'^2 dr' \right] dr = \\ &= \int_0^\infty \varphi_i(r) \varphi_i'(r) r^3 \left[\frac{1}{\pi_{>}^3} \int_0^r \varphi_j(r) \varphi_j'(r) r'^3 dr' + \int_r^\infty \varphi_j(r) \varphi_j'(r) dr' \right] dr. \quad (3.35) \end{aligned}$$

Integrando por partes as integrais em r' , obtemos:

$$I_{rad} = \frac{3}{4} \int_0^\infty \varphi_i^2(r) \varphi_j^2(r) r^2 dr. \quad (3.36)$$

Salientamos que no cálculo das integrais por partes deve-se usar a propriedade assintótica de $\varphi_1^2(r)$, que quando calculada no infinito dá zero:

$$\varphi_i^2(r) \Big|_{r=\infty} \equiv \varphi_i^2(\infty) = 0 . \quad (3.37)$$

Isso vem do fato que as funções de onda radiais $\varphi_i(r)$ estão associadas a um potencial confinante $V(r)$, tal como encontramos em (3.12) e (3.22). A propriedade de confinamento dos quarks pelo potencial se traduz na função de onda $\varphi_i(r)$ através de uma tendência assintótica a zero no infinito, pois a probabilidade de encontrar os quarks no infinito (fora do hádron) deve ser zero: $|\varphi_i(r=\infty)|^2 = \varphi_i^2(\infty) = 0$. As funções de onda (3.12) e (3.22), por exemplo, têm essa característica.

Substituindo a igualdade (3.36) na expressão (3.34) ficamos com:

$$\Delta E_M = -\frac{1}{3} (4\pi)^2 g_c^2 \sum_a \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^a \frac{N_i^2 N_j^2}{x_i x_j} (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) \int_0^\infty \varphi_i^2(r) \varphi_j^2(r) r^2 dr . \quad (3.38)$$

Definindo:

$$J_{ij}^M \equiv \frac{N_i^2 N_j^2}{x_i x_j} \int_0^\infty \varphi_i^2(r) \varphi_j^2(r) r^2 dr , \quad (3.39)$$

também podemos escrever:

$$\Delta E_M = -\frac{1}{3} (4\pi)^2 g_c^2 \sum_a \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^a (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) J_{ij}^M . \quad (3.40)$$

Ou, igualmente,

$$\Delta E_M = -\frac{16\pi^2}{3} g_c^2 \sum_{i,j} \sum_a \lambda_i^a \lambda_j^a (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) J_{ij}^M . \quad (3.41)$$

Separando os termos de autoenergia:

$$\Delta E_M = -\frac{16\pi^2}{3} \kappa_c \left[2 \sum_{i>j} \left(\sum_a \lambda_i^a \lambda_j^a \right) (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) J_{ij}^M + \sum_i \left(\sum_a \lambda_i^a \right) \vec{\sigma}_i \cdot J_{ii}^M \right], \quad (3.42)$$

podemos efetuar a soma sobre os índices de côr usando as relações (2.68) e (2.73), e então obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta E_M &= -\frac{16\pi^2}{3} \kappa_c \left[2 \left(-\frac{8}{3} N \right) \sum_{i>j} (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) J_{ij}^M + \left(\frac{16}{3} \right) \sum_i \vec{\sigma}_i \cdot J_{ii}^M \right] = \\ &= \frac{256\pi^2}{9} \kappa_c \left[N \sum_{i>j} (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) J_{ij}^M - 3 \sum_i J_{ii}^M \right], \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde $N = 1$ para bárions e $= 2$ para mésons.

Na expressão (3.43) as funções J_{ij}^M contém a dependência nas funções de onda dos quarks, conforme o potencial confinante utilizado obtém-se uma certa expressão para J_{ij}^M . Por exemplo, no caso do potencial tipo oscilador harmônico, temos as funções de onda $\varphi_i(r)$ dadas por (3.12) e a normalização dada por (3.18). A substituição dessas expressões na fórmula (3.39) nos leva a obter:

$$\begin{aligned} J_{ij}^M &= \frac{N_i^2 N_j^2}{X_i X_j} \cdot \frac{1}{4\pi^3} \left[\frac{\pi}{(R_i^2 + R_j^2)^3} \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{X_i X_j} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{1}{(X_i R_i)^2} \right]^{-1} \cdot \left[1 + \frac{3}{2} \frac{1}{(X_j R_j)^2} \right]^{-1} \cdot \frac{1}{4\pi^3} \left[\frac{\pi}{(R_i^2 + R_j^2)^3} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde os R_i , R_j , X_i , X_j estão definidos através de (3.13) e (3.14) em função das energias e massas dos quarks e do parâmetro K associado ao potencial.

Quando $i = j$ temos:

$$J_{ii}^M = \frac{1}{8\pi^3} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{R_i} \frac{1}{(x_i R_i)^2} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{1}{(x_i R_i)^2} \right]^{-2} . \quad (3.45)$$

Vejamos como calcular ΔE_M para um bárion. Assumiremos que os bárions no "ground state" são descritos por uma representação irreduzível do $SU(6)$, que corresponde a um multiplete $(56, 0^+)$.

Devemos avaliar os elementos de matriz de (3.43) no estado bariônico que queremos calcular:

$$\Delta E_M = \frac{256\pi^2}{9} \alpha_c \langle B | \sum_{i>j} (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) J_{ij}^M - 3 \sum_i J_{ii}^M | B \rangle . \quad (3.46)$$

Vamos pegar como exemplo o próton P . O próton é constituído por quarks u e d ocupando o estado fundamental. Usando $m_u = m_d \equiv m_0$ teremos $J_{ud}^M = J_{uu}^M = J_{du}^M = J_{dd}^M \equiv J_{oo}^M$, e então:

$$\begin{aligned} \langle P \uparrow | \sum_{i>j} (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) J_{ij}^M - 3 \sum_i J_{ii}^M | P \uparrow \rangle &= \\ &= 9 \langle P \uparrow | \sigma_{i_3} \sigma_{j_3} | P \uparrow \rangle J_{ij}^M - 3 \sum_i J_{ii}^M = \\ &= 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot J_{oo}^M - 9 J_{oo}^M = -3 J_{oo}^M - 9 J_{oo}^M = -12 J_{oo}^M , \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde J_{oo}^M será dado pela expressão (3.45) com índices i substituídos por o . Os parâmetros $x_i = x_o$ e $R_i = R_o$ caracterizarão quarks não estranhos. Substituindo (3.47) em (3.46) temos ΔE_M para o próton:

$$\begin{aligned} \Delta E_M^P &= \frac{256\pi^2}{9} \alpha_c \cdot (-12 J_{oo}^M) = -4 \cdot \frac{256\pi^2}{3} \alpha_c J_{oo}^M = \\ &= -\frac{128}{3\pi} \alpha_c \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{R_o} \frac{1}{(x_o R_o)^2} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{1}{(x_o R_o)^2} \right]^{-2} . \end{aligned} \quad (3.48)$$

Agora iremos calcular a expressão da energia de interação elétrica. Começamos substituindo em (3.25) a densidade de cargas dada por (3.29b), e temos:

$$\Delta E_E = \frac{q^2}{8\pi} \sum_a \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^a \frac{N_i^2 N_j^2}{x_i^2 x_j^2} \int \frac{(x_i^2 \varphi_i^2(r) + \varphi_i'^2(r)) (x_j^2 \varphi_j^2(r) + \varphi_j'^2(r))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r d^3 r' . \quad (3.49)$$

Para fazer a parte angular desta integral mais uma vez usamos a expansão (A2.4) e encontramos que:

$$\int \frac{d\Omega d\Omega'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = (4\pi)^2 \frac{1}{r} , \quad (3.50)$$

e ficamos com

$$\begin{aligned} \Delta E_E &= \frac{q^2}{8\pi} (4\pi)^2 \sum_a \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^a \frac{N_i^2 N_j^2}{x_i^2 x_j^2} \int_0^\infty (x_i^2 \varphi_i^2(r) + \varphi_i'^2(r)) r^2 \cdot \\ &\quad \cdot \left[\int_0^r \frac{1}{r'} (x_j^2 \varphi_j^2(r') + \varphi_j'^2(r')) r'^2 dr' + \int_r^\infty \frac{1}{r'} (x_j^2 \varphi_j^2(r') + \varphi_j'^2(r')) r'^2 dr' \right] dr = \\ &= \frac{(4\pi)^2 q^2}{2} \sum_a \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^a \frac{N_i^2 N_j^2}{x_i^2 x_j^2} \int_0^\infty (x_i^2 \varphi_i^2(r) + \varphi_i'^2(r)) r^2 \cdot \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{r} \int_0^r (x_j^2 \varphi_j^2(r') + \varphi_j'^2(r')) r'^2 dr' + \int_r^\infty (x_j^2 \varphi_j^2(r') + \varphi_j'^2(r')) r' dr' \right] dr . \end{aligned} \quad (3.51)$$

Fazendo integrações por partes obtemos:

$$\Delta E_E = \frac{(4\pi)^2 q^2}{2} \sum_a \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^a \frac{N_i^2 N_j^2}{x_i^2 x_j^2} \cdot x_i x_j \int_0^\infty \frac{1}{r^2} F_i(r) F_j(r) dr , \quad (3.52)$$

onde:

$$F_i(r) \equiv \frac{1}{x_i} \varphi_i(r) \varphi_i'(r) r^2 + \int_0^r (2E_i - V(r')) \varphi_i^2(r') r'^2 dr' . \quad (3.53)$$

Nas passagens acima, fizemos uso da equação de movimento (3.6) e da propriedade (3.37).

Podemos reescrever (3.52) como:

$$\Delta E_E = \frac{(4\pi)^2}{2} \alpha_c \sum_a \sum_{i>j} \lambda_i^a \lambda_j^a \frac{N_i^2 N_j^2}{X_i X_j} \int_0^\infty \frac{1}{\pi^2} F_i(r) F_j(r) dr \quad (3.54)$$

e definindo:

$$J_{ij}^E \equiv \frac{N_i^2 N_j^2}{X_i X_j} \int_0^\infty \frac{1}{\pi^2} F_i(r) F_j(r) dr, \quad (3.55)$$

teremos:

$$\Delta E_E = \frac{(4\pi)^2}{2} \alpha_c \sum_a \sum_{i>j} \lambda_i^a \lambda_j^a J_{ij}^E. \quad (3.56)$$

Ou, igualmente,

$$\Delta E_E = 8\pi^2 \alpha_c \sum_{i>j} \sum_a \lambda_i^a \lambda_j^a J_{ij}^E. \quad (3.57)$$

Separando os termos de autoenergia:

$$\Delta E_E = 8\pi^2 \alpha_c \left[2 \sum_{i>j} \left(\sum_a \lambda_i^a \lambda_j^a \right) J_{ij}^E + \sum_i \left(\sum_a \lambda_i^{a^2} \right) J_{ii}^E \right], \quad (3.58)$$

novamente usamos as relações de soma dos geradores λ_i^a , dadas por (2.68) e (2.73), para obter:

$$\begin{aligned} \Delta E_E &= 8\pi^2 \alpha_c \left[2 \cdot \left(-\frac{8N}{3} \right) \sum_{i>j} J_{ij}^E + \frac{16}{3} \sum_i J_{ii}^E \right] = \\ &= -\frac{128\pi^2}{3} \alpha_c \left[N \sum_{i>j} J_{ij}^E - \sum_i J_{ii}^E \right]. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Para bárions, $N = 1$ e a energia de interação elétrica será dada pelos elementos de matriz:

$$\Delta E_E = -\frac{128\pi^2}{3} \alpha_c \langle B | \sum_{i>j} J_{ij}^E - \sum_i J_{ii}^E | B \rangle. \quad (3.60)$$

Quando todos os quarks no bárion têm a mesma massa temos $J_{ij}^E = J_{uu}^E = J_{ud}^E = J_{dd}^E = J_{ii}^E$ ou $J_{ij}^E = J_{ss}^E = J_{ii}^E$, consequentemente:

$$\sum_{i>j} J_{ij}^E = \sum_i J_{ii}^E = 3J_{ii}^E, \quad (3.61)$$

e portanto resulta, nesse caso:

$$\Delta E_E = 0. \quad (3.62)$$

Este é o mesmo resultado que havíamos observado pelo modelo de sacola (vide equação 2.90): quando os quarks no hádron têm a mesma massa, a energia de interação elétrica por troca de 1 glúon é igual a zero.

Vamos definir:

$$I_{ij}^M \equiv \frac{256\pi^2}{9} J_{ij}^M = \frac{256\pi^2}{9} \frac{N_i^2 N_j^2}{x_i x_j} \int_0^\infty \varphi_i^2(r) \varphi_j^2(r) r^2 dr, \quad (3.63)$$

$$I_{ij}^E \equiv -\frac{128\pi^2}{3} J_{ij}^E = -\frac{128\pi^2}{3} \frac{N_i^2 N_j^2}{x_i x_j} \int_0^\infty \frac{1}{r^2} F_i(r) F_j(r) dr, \quad (3.64)$$

de forma a reescrever os resultados:

$$\Delta E_M = \alpha_c \langle H | N \sum_{i>j} (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) I_{ij}^M - 3 \sum_i I_{ii}^M | H \rangle, \quad (3.65)$$

$$\Delta E_E = \alpha_c \langle H | N \sum_{i>j} I_{ij}^E - \sum_i I_{ii}^E | H \rangle. \quad (3.66)$$

A semelhança do que foi feito no "MIT bag model" podemos definir coeficientes a_{ij} e b_{ij} tais que:

$$\Delta E_M = \alpha_c (a_{00} I_{00}^M + a_{0s} I_{0s}^M + a_{ss} I_{ss}^M), \quad (3.67a)$$

$$\Delta E_E = \alpha_c (b_{00} I_{00}^E + b_{0s} I_{0s}^E + b_{ss} I_{ss}^E). \quad (3.67b)$$

A avaliação dos elementos de matriz de vários bárions¹⁹ e mésons nos dá a tabela dos coeficientes: TAB. 6.

Por exemplo, no caso do próton, pelo cálculo das expressões (3.47) e (3.48) tínhamos encontrado:

$$\Delta E_M^P = \frac{256 \pi^2}{9} \alpha_c (-12 J_{00}^M) = -12 \alpha_c \frac{256 \pi^2}{9} J_{00}^M = -12 \alpha_c I_{00}^M \quad (3.68)$$

Comparando (3.68) com (3.67) vemos que $a_{00} = -12$, $a_{0s} = 0$, e $a_{ss} = 0$, conforme dado na Tabela 6.

Além disso, como o próton é constituído apenas por quarks não-estranhos, cujas massas consideramos iguais ($m_U = m_D$), teremos:

$$\Delta E_E^P = 0, \quad (3.69)$$

que comparando com (3.67) nos mostra que $b_{00} = 0$, $b_{0s} = 0$, e $b_{ss} = 0$, que são os valores dados na Tabela 6.

Com as correções por troca de glúons dadas por (3.67), as massas dos hádrõns serão dadas por:

$$M = E_0 + \Delta E_M + \Delta E_E = E_0 + E_1, \quad (3.70)$$

onde E_0 é a soma das energias de partícula-única (3.20) e E_1 é a energia total por troca de glúons.

TAB. 6 - Coeficientes que aparecem no cálculo das energias elétrica e magnética por troca de 1 glúon.

BÁRIONS	a_{00}	a_{01}	a_{11}	b_{00}	b_{01}	b_{11}
N	-12	0	0	0	0	0
Λ	-9	0	-3	-1	2	-1
Σ	-5	-4	-3	-1	2	-1
Ξ	-3	-4	-5	-1	2	-1
Δ	-6	0	0	0	0	0
Σ^*	-5	2	-3	-1	2	-1
Ξ^*	-3	2	-5	-1	2	-1
Ω	0	0	-6	0	0	0
MÉSONS	a_{00}	a_{01}	a_{11}	b_{00}	b_{01}	b_{11}
ρ	-4	0	0	0	0	0
ω	-4	0	0	0	0	0
ϕ	0	0	-4	0	0	0
K	-3	-6	-3	-1	2	-1
K^*	-3	2	-3	-1	2	-1
π	-12	0	0	0	0	0

Neste trabalho nos restringimos ao cálculo do espectro de massas dos hádrons do estado fundamental de ondas-S, que são descritas no modelo pela função de onda (3.8) com as respectivas funções radiais (3.12). Cálculos dos estados excitados podem ser encontrados nas Refs. (20) - (onde Amaral e Zagury tratam estados radialmente excitados com paridade positiva) e (21) - (paridade negativa). Contudo, esses trabalhos não incluem as relevantes correções devidas ao movimento do centro-de-massa, que é o objetivo de estudo desta tese e cujo cálculo apresentaremos na seção III-4. Antes disso, porém, faremos na seção III-3 uma rápida descrição do cálculo dos estados excitados.

III-3. Estados Excitados

Iremos discutir nesta seção a maneira como é feita a descrição dos primeiros estados radialmente excitados no modelo de potencial^{20,21}.

Para bárions, os 1^{os} estados excitados irão corresponder a situação em que 2 quarks ocupam o estado fundamental do potencial e o 3^o quark está em um estado excitado.

Para estados bariônicos de paridade positiva, os primeiros estados excitados terão 1 dos quarks excitado em um estado de onda S. No limite de simetria SU(6) estes estados corresponderão a multipletos (56, L = 0⁺) e (70, 0⁺).

Os primeiros estados excitados de paridade negativa irão ter 2 quarks no estado fundamental ($S_{1/2}$) e 1 quark num estado excitado ($P_{1/2}$) ou ($P_{3/2}$). No limite SU(6) estes estados aparecerão em multipletos (56, 1⁻) e (70, 1⁻). Contudo, no limite não-relativístico, os estados do multipleteo (56, 1⁻) correspondem a excitações do centro-de-massa do sistema, chamá-los-emos de "estados espú-

rios", que serão descartados.

O modelo que estamos usando é uma descrição não-covariante onde as partículas, em primeira aproximação (sem correções gluônicas), se movem independentemente e sujeitas a um potencial central médio no centro-de-massa do sistema. Por isso, aparecerão soluções que são excitações do centro-de-massa, cujos estados associados chamaremos de "estados espúrios", que devem ser descartados.

Para distinguir quais são os estados espúrios fazemos a seguinte aproximação: consideramos como espúrios aqueles estados que são excitações do centro-de-massa no limite não-relativístico do SU(6).

Da imposição de que os hádrons sejam singletos de cor, vemos que as funções de onda dos bárions devem ser totalmente anti-simétricas nos índices de cor. Nós também consideraremos que a função de onda total dos bárions será anti-simétrica pela troca de 2 quarks quaisquer dentre os 3 quarks do bárion. Isso significa que os quarks deverão ter funções de onda totalmente simétricas em todos os índices, menos no de cor. Isso irá dar, no limite de massas dos quarks consideradas iguais, funções de onda do SU(6).

É necessário construir uma base com essas propriedades para as autofunções da nossa hamiltoniana:

$$H \Psi_i^a(\vec{r}) = \left[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_i + \frac{1}{2} (1 + \beta) V(r) \right] \Psi_i^a(\vec{r}) = E_i \Psi_i^a(\vec{r}). \quad (3.71)$$

Primeiramente associamos os estados de $m_j = \pm \frac{1}{2}$ à representação fundamental de um grupo SU(2) de momento angular, que indicamos por SU(2)¹, e associamos os dois estados de energia de um grupo de "pseudospin" à representação de um outro grupo SU(2)².

Os elementos da base irão estar associados com um produto simétrico das representações de:

$$SU(3)_{\text{sabor}} \otimes SU(2)^1 \otimes SU(2)^2 .$$

No entanto, os elementos desta base serão autofunções da hamiltoniana H da equação (3.71) somente no limite $SU(3)$, ou seja, somente quando tomarmos $m_U = m_D = m_S$. Para obter autofunções de H que mantenham as características de simetria da função de onda total, devemos fazer combinações lineares dos elementos daquela base determinada.

As diferenças de energia no espectro dos bárions serão dadas somente devido à diferença das massas $m_S - m_U$. O "splitting" desses níveis de energia se dará quando levarmos em conta as correções relativas às energias de interação por troca de 1 glúon.

Para avaliar as correções por troca de glúon analisamos separadamente os estados de paridade positiva e negativa.

Na Figura 4 (FIG. 4) mostramos os diagramas de Feynman relevantes para as correções por troca de 1 glúon em estados cuja paridade total é positiva.

O diagrama 4-a representa a situação em que 2 quarks que estão no estado fundamental trocam 1 glúon entre si sem mudarem de estado. No diagrama 4-b, um dos quarks está no estado fundamental e outro está no 1º estado excitado e também trocam 1 glúon sem mudarem de seus estados. No diagrama 4-c os quarks mudam suas energias quando trocam o glúon. Os diagramas 4-d e 4-e são os diagramas de autoenergia dos quarks, respectivamente na situação em que o quark está no estado fundamental ou no 1º estado excitado.

Os diagramas de autoenergia são avaliados na aproximação em que somente estados intermediários que são iguais aos estados iniciais são considerados.

Quando a paridade total é negativa, os diagramas envolvidos são aqueles da Figura 5 (FIG. 5).

No diagrama 5-a temos novamente a situação em que 2 quarks no

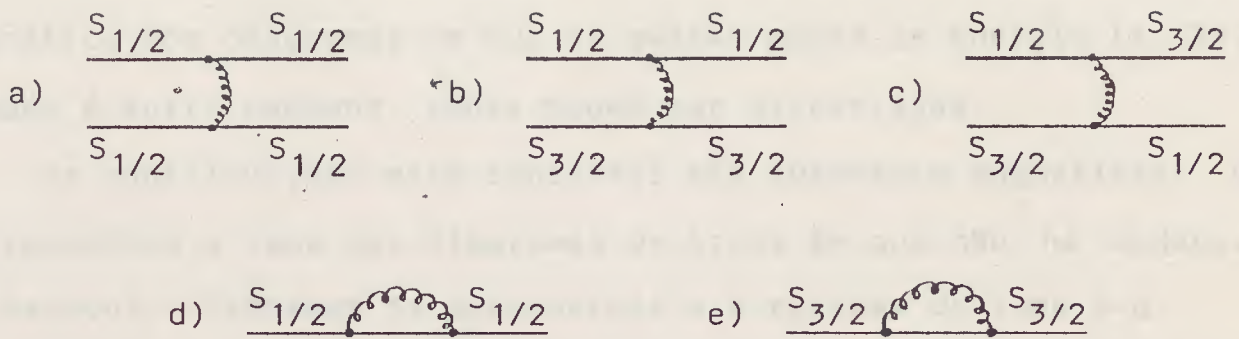


FIG. 4 - Diagramas de troca de 1 glúon. Paridade total positiva.

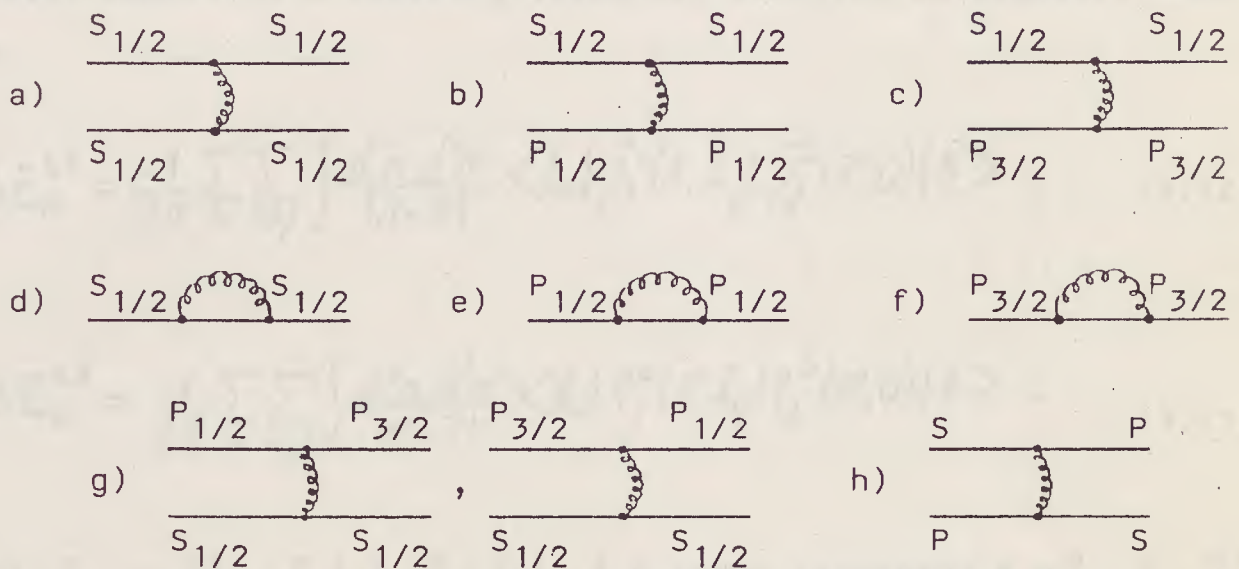


FIG. 5 - Diagramas de troca de 1 glúon. Paridade total negativa.

estado fundamental trocam 1 glúon sem alterarem o seu estado inicial. Nos diagramas 5-b e 5-c, temos situações semelhantes, só que um dos quarks envolvidos ocupa um estado excitado ($P_{1/2}$) ou ($P_{3/2}$), respectivamente. Em 5-d, 5-e, 5-f temos os diagramas de autoenergia. Em 5-g temos a situação em que 1 quark está no estado fundamental e outro num estado excitado P e, pela troca de 1 glúon, o quark do estado excitado muda de ($P_{1/2}$) para ($P_{3/2}$), ou de ($P_{3/2}$) para ($P_{1/2}$), conforme o estado P inicial. Nos diagramas do tipo 5-h ambos os quarks mudam sua energia quando trocam o glúon.

O cálculo das contribuições de cada um destes diagramas²¹ revela que a contribuição elétrica total para muitos dos bárions é

bem pequena, entrando com menos de 3% para a massa total. A parte magnética dos diagramas em que os quarks mudam de energia (4c,5h) também é muito pequena. Ambas podem ser descartadas.

As contribuições mais sensíveis são puramente magnéticas e correspondem a soma dos diagramas de troca em que não há mudança de estados, diagramas de autoenergia e diagramas do tipo 5-g.

Para os diagramas em que o quark muda de energia quando emite um glúon (4c,5g,5h) os elementos de matriz das energias de interação magnética e elétrica devem ser escritos da seguinte maneira:

$$\Delta E_M^{B_0} = \frac{-1}{8\pi} \sum_a \sum_{i \neq j} \int \frac{d^3\vec{\pi} d^3\vec{\pi}'}{|\vec{\pi} - \vec{\pi}'|} \langle B_0 | \vec{j}_i^a(\vec{\pi}, \vec{\tau}_{ij}) \cdot \vec{j}_j^a(\vec{\pi}', 0) | B \rangle, \quad (3.72)$$

$$\Delta E_E^{B_0} = \frac{1}{8\pi} \sum_a \sum_{i \neq j} \int \frac{d^3\vec{\pi} d^3\vec{\pi}'}{|\vec{\pi} - \vec{\pi}'|} \langle B_0 | \rho_i^a(\vec{\pi}, \vec{\tau}_{ij}) \rho_j^b(\vec{\pi}', 0) | B \rangle, \quad (3.73)$$

onde $\tau_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \equiv |\vec{r} - \vec{r}'|$ é o tempo retardado e ρ_i^a e \vec{j}_i^a são densidades e correntes de transição, definidas por

$$\rho_i^a(\vec{\pi}, t) = \frac{\lambda_i^a}{2} \left[\Psi_i^+(\vec{\pi}, t) \Psi_{i^*}(\vec{\pi}, t) + \text{termos hermitianos conjugados} \right], \quad (3.74)$$

$$\vec{j}_i^a(\vec{\pi}, t) = \frac{\lambda_i^a}{2} \left[\Psi_i^+(\vec{\pi}, t) \vec{\alpha} \Psi_{i^*}(\vec{\pi}, t) + \text{termos hermitianos conjugados} \right], \quad (3.75)$$

onde i^* indica o quark i num estado excitado.

Por exemplo, para o caso do diagrama 4-c, temos as seguintes expressões para a densidade e a corrente:

$$\rho_i^a(\vec{\pi}, t) = g \lambda_i^a \frac{N_i N_{i^*}}{X_i X_{i^*}} \left[X_i X_{i^*} \varphi_i(n) \varphi_{i^*}(n) + \varphi_i'(n) \varphi_{i^*}'(n) \right] \cos[(E_i - E_{i^*}) \vec{\tau}_{ij}] \quad (3.76)$$

$$\vec{j}_i^a(\vec{n}, t) = g \lambda_i^a N_i N_{i^*} \left[\frac{\varphi_i(n) \varphi_{i^*}'(n)}{X_{i^*}} + \frac{\varphi_{i^*}'(n) \varphi_i(n)}{X_i} \right] (\hat{n} \times \vec{\sigma}_i) \cos[(E_i - E_{i^*}) \vec{T}_{ij}]. \quad (3.77)$$

Para calcular os autovalores E_i e as correções gluônicas, \underline{u} ma primeira tentativa é a de se considerar os mesmos parâmetros usados no "fitting" do estado fundamental.

No caso do potencial harmônico (linear) os parâmetros eram¹⁹: $m_U = 38(38)$ MeV, $m_S = 211(218)$ MeV, $V_0(V'_0) = 219(93)$ MeV, $K(\lambda) = 0,008 \text{ GeV}^3 (0,048 \text{ GeV}^2)$ e $\alpha_c/\pi = 0,505$.

Contudo, com esses parâmetros encontra-se²⁰ para estados excitados um espectro de massas que é cerca de 200 MeV mais baixo que os resultados experimentais. Para melhorar os resultados é preciso aumentar a constante do potencial $V_0(V'_0)$ para os estados excitados. Isto é, deve-se assumir que quarks excitados estão sujeitos a um potencial maior que quarks no "ground state".

A nova constante encontrada para o potencial harmônico (linear) foi $V_0(V'_0) = 500(396)$ MeV.

III-4. Correções do Centro-de-Massa²²

No modelo de potencial S+V estivemos tratando os quarks como se fossem partículas independentes, portanto, quando calculamos as massas dos hádrons através de (3.70) estamos incluindo uma parcela de energia oriunda do movimento do centro-de-massa. Esta é uma energia espúria, que deve ser subtraída da energia total. Nesta seção calcularemos a expressão da correção do movimento do centro-de-massa no nosso modelo. Essas correções são importantes não somente para o cálculo do espectro de massas, mas também para as propriedades estáticas, tais como a carga axial g_A , momentos magnéticos e o raio quadrático médio do próton.

Na análise das correções do centro-de-massa para o "bag model", Donoghue e Johnson¹⁶ encontraram que em um sistema de quarks independentes, o estado de partícula independente não é diretamente identificado com o hádron ao qual corresponde, mas com um pacote de onda dos estados de momentum do hádron, no qual o CM não está em repouso nem em movimento uniforme, mas flutua em torno de uma posição média. Embora o valor médio do momento total \vec{P} satisfaça $\langle \vec{P} \rangle = 0$, temos $\langle \vec{P}^2 \rangle \neq 0$. Para hádrons de massas m_h suficientemente grandes, isso nos dá uma energia $\langle \vec{P}^2 \rangle / 2m_h$, que, sendo espúria, devemos subtrair da energia total do hádron tal como calculada por (3.70).

Esse tipo de abordagem tem sido discutida em vários trabalhos^{16,17} e é conhecida como o "wave-packet method". Aqui nós seguiremos a formulação do "wave-packet method" como discutida por Wong¹⁶, que corresponde a uma aplicação particular do chamado "generator coordinate method", bem conhecido em física nuclear²³.

O ponto de partida é a decomposição do estado de partícula-única do hádron num dado modelo $|h_M(\vec{x})\rangle$, com centro em \vec{x} , em componentes $\phi(\vec{P})$ dos autoestados de onda plana do momento:

$$|R_M(\vec{x})\rangle = \int d^3\vec{P} e^{i\vec{P}\cdot\vec{x}} \frac{\phi(\vec{P})}{W_R(\vec{P})} |R(\vec{P})\rangle, \quad (3.78)$$

onde $|h(\vec{P})\rangle$ são os autoestados do momento do hádron h e $W_h(\vec{P})$ é a normalização das ondas-planas:

$$\langle R(\vec{P}) | R(\vec{P}') \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{P} - \vec{P}') W_R(\vec{P}), \quad (3.79)$$

com:

$$W_R(\vec{P}) = \begin{cases} 2 w_{\vec{P}} & , \text{ para mésons} \\ E_{\vec{P}} / m_B & , \text{ para bárions.} \end{cases} \quad (3.80)$$

A relação inversa da decomposição (3.78) é:

$$|R(\vec{P})\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{W_R(\vec{P})}{\mathcal{O}(\vec{P})} \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{P}\cdot\vec{x}} |R_M(\vec{x})\rangle, \quad (3.81)$$

substituindo (3.81) em (3.79), encontramos a expressão para $\mathcal{O}(\vec{P})$:

$$\mathcal{O}(\vec{P}) = \left[\frac{1}{(2\pi)^3} W_R(\vec{P}) \tilde{I}(\vec{P}) \right]^{1/2}, \quad (3.82)$$

onde:

$$\tilde{I}(\vec{P}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\pi} e^{-i\vec{\pi}\cdot\vec{P}} \langle h_M(0) | h_M(\vec{\pi}) \rangle. \quad (3.83)$$

é a transformada de Fourier da função de "overlap" de Hill-Wheeler $\langle h_M(0) | h_M(\vec{\pi}) \rangle$.

A partir de (3.83) e (3.78), nós podemos escrever a expressão do valor esperado de uma função $F(\vec{P})$:

$$\langle F(\vec{P}) \rangle = \langle h_M(0) | F(\vec{P}) | h_M(0) \rangle = \int d^3\vec{P} \tilde{I}(\vec{P}) F(\vec{P}). \quad (3.84)$$

Aplicando este formalismo ao modelo S+V, nós temos:

$$I_q(r) \equiv \langle h_M(0) | h_M(\vec{r}) \rangle = \int d^3\vec{a} \psi^\dagger(\vec{a}) \psi(\vec{r}+\vec{a}), \quad (3.85)$$

onde $\psi(\vec{a})$ é dada por (3.8), com as funções radiais (3.12), para o potencial harmônico.

Para uma configuração com n quarks constituintes, fazemos $I_n = [I_q]^n$ e obtemos:

$$\tilde{I}_n(\vec{P}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{\pi} e^{-i\vec{\pi}\cdot\vec{P}} \prod_{\lambda=1}^n I_{q\lambda}(r). \quad (3.86)$$

Essa expressão também se aplica quando temos quarks com diferentes sabores no hádron:

Para configurações contendo quarks estranhos e não-estranhos, no nosso modelo temos para a função de Hill-Wheeler a seguinte expressão:

$$I_n = \left(1 - C_0 \frac{\pi^2}{R_0^2}\right)^{n_0} e^{-n_0 \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{R_0^2}} + \left(1 - C_s \frac{\pi^2}{R_s^2}\right)^{n_s} e^{-n_s \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{R_s^2}}, \quad (3.87)$$

onde:

$$C_0 = \frac{\nu_0^2}{4 + 6\nu_0^2}, \quad \nu_0 = \frac{1}{x_0 R_0}; \quad C_s = \frac{\nu_s^2}{4 + 6\nu_s^2}, \quad \nu_s = \frac{1}{x_s R_s}. \quad (3.88)$$

Aqui, n_0 denota o número de quarks não-estranhos (u e/ou d) no hádron e n_s , o número de quarks estranhos. Portanto satisfazendo: $n_0 + n_s = 3$, para bárions e $n_0 + n_s = 2$, para mésons.

Para avaliar as correções de CM, com (3.87) calculamos a expressão (3.84), usando $F(\vec{P}) = \vec{P}^2$. Dessa forma obtivemos:

$$\langle \vec{P}^2 \rangle_n = \frac{n_0}{R_0^2} \left(\frac{5}{2} - N_0^2 \right) + \frac{n_s}{R_s^2} \left(\frac{5}{2} - N_s^2 \right). \quad (3.89)$$

Para computar esse resultado, seguimos o mesmo procedimento usado por Bartelski et al¹⁷ para o "MIT bag".

Eles mostraram que $\langle f(\vec{v}^2) \rangle \approx f(\langle \vec{v}^2 \rangle)$, onde $\vec{v}^2 = \vec{P}^2/E^2$, é uma aproximação melhor do que expandir em $\langle \vec{P}^2 \rangle/M^2$. Então, ao invés de fazer $E \approx M + \frac{\langle \vec{P}^2 \rangle}{2M}$, nós usamos:

$$E = \langle (M^2 + \vec{P}^2)^{1/2} \rangle \approx (M^2 + \langle \vec{P}^2 \rangle)^{1/2}. \quad (3.90)$$

Assim sendo, para as massas corrigidas do movimento do centro-de-massa, temos a expressão:

$$M = \left[(E_0 + E_1)^2 - \langle \vec{p}^2 \rangle \right]^{1/2} \quad (3.91)$$

com $\langle \vec{p}^2 \rangle$ dado por (3.89). (E_0 e E_1 estão definidos pela equação (3.70).)

Nossa análise das correções de centro-de-massa se completa ao considerarmos a influência dessas correções sobre as propriedades estáticas dos bárions.

Em particular, sem as correções de CM, temos as seguintes expressões no caso do potencial harmônico²⁴:

(i) carga axial do nucleon:

$$g_A = \frac{5}{9} (4N_0^2 - 1) \quad , \quad (3.92)$$

(ii) momento magnético do próton:

$$\mu_p = 2 M_p \frac{N_0^2}{X_0} \quad , \quad (3.93)$$

(iii) raio quadrático médio do próton:

$$\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = \left[\frac{3}{2} N_0^2 \left(R_0^2 + \frac{5}{2} \frac{1}{X_0^2} \right) \right]^{1/2} . \quad (3.94)$$

O índice zero em (3.92) - (3.94) indica que os parâmetros se relacionam a quarks não-estranhos.

Para decaimentos β envolvendo quarks estranhos (decaimentos $-\beta$ hiperônicos), temos a seguinte fórmula para a carga axial:

$$g_A = g_A^{SU(6)} 2\sqrt{2} N_0 N_1 \left(\frac{R_0 R_1}{R_0^2 + R_1^2} \right)^{3/2} \left[1 - \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^4 \frac{1}{X_0^2 (R_0^2 + R_1^2)} \right], \quad (3.95)$$

onde $g_A^{SU(6)}$ indica o elemento de matriz associado com o decaimento correspondente.

A análise das correções de CM para os parâmetros estáticos nos leva a obter as seguintes expressões¹⁷:

$$g_A = g_A^{\text{estático}} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\langle \vec{p}^2 \rangle}{M^2} \right), \quad (3.96)$$

$$\mu = \mu^{\text{est.}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\langle \vec{p}^2 \rangle}{M^2} \right) + Q \frac{\langle \vec{p}^2 \rangle}{6M^2}, \quad (3.97)$$

$$\langle r^2 \rangle = \left(\langle r^2 \rangle^{\text{est.}} - Q \frac{9}{4 \langle \vec{p}^2 \rangle} \right) \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\langle \vec{p}^2 \rangle}{M^2} \right) \quad (3.98)$$

onde Q é a carga do bárion e M a sua massa. As expressões para $g_A^{\text{est.}}$, $\mu^{\text{est.}}$ e $\langle r^2 \rangle^{\text{est.}}$ são justamente as eqs.(3.92)-(3.94), respectivamente.

Os detalhes sobre o "fitting" destas grandezas serão dados ao final da próxima seção, que é dedicada a exposição dos nossos resultados numéricos.

III-5. Resultados

Vamos agora discutir o ajuste dos parâmetros do modelo, expondo os resultados obtidos para as massas dos hádrons, momentos magnéticos e constantes axiais.

Primeiramente lembramos que o modelo tem 5 parâmetros livres: m_0 , m_s , α_c , V_0 e K , onde esses dois últimos caracterizam o potencial harmônico. O "fitting" foi feito tomando-se como "input" as massas do nucleon, Δ e Ω^- , a carga axial do nêutron $g_A(n)$ e o raio de carga do próton $\langle r^2 \rangle_p$. Para isso, fizemos uso das equações (3.91), (3.96) e (3.98).

No modelo S+V harmônico todos os cálculos são factíveis analiticamente, mas para calcular repetidamente as massas dos vários hádrons utilizamo-nos de um programa para microcomputador, exposto no Apêndice 3.

Os resultados obtidos para as massas dos bárions* são mostrados na Tabela 7, onde os correspondentes resultados de Amaral e Zagury¹⁹, calculados sem as correções de CM, também são expostos para comparação.

Embora o acordo entre nossos resultados e os valores experimentais seja muito bom nos casos das partículas Λ , Σ^* e Ξ^* , nosso ajuste é um pouco pior que o da Ref. (19) para as partículas Σ e Ξ . À semelhança do que foi feito no "MIT bag", vamos definir um desvio quadrático médio:

$$\langle \delta M \rangle = \left[\frac{\sum_B (M_B - M_{exp.})^2}{N} \right]^{1/2}, \quad (3.99)$$

onde N é o número de massas ajustadas. Então, vemos que para o

* Nesse trabalho nos restringimos ao cálculo dos estados fundamentais de ondas-S.

TAB. 7 - Resultados para as massas dos bárions (em MeV) .

BÁRIONS	(Ref.19)	Presente cálculo	Experimento (ref.25)
N	INPUT	INPUT	938
Λ	INPUT	1114.6	1116
Σ	1150	1141.8	1193
Ξ	1304	1292.5	1318
Δ	INPUT	INPUT	1232
Σ^*	1393	1397.2	1385
Ξ^*	1547	1533.7	1530
Ω	1693	INPUT	1672

TAB. 8 - Resultados para as massas dos mésons (em MeV) .

MÉSONS	Presente cálculo	Experimento (ref.25)
ρ	763.1	770
ω	763.1	783
ϕ	1065.1	1020
K	560.8	497
K^*	923.4	892
π	267.9	135

nosso "fitting" $\langle \delta M \rangle = 25,7$ MeV, enquanto que na Ref. (19), sem as correções de CM, tinha-se $\langle \delta M \rangle = 23,8$ MeV.

Contudo, os valores numéricos dos parâmetros encontrados pelo nosso ajuste são melhores. Na Ref. (19) eles eram: $m_U = 38$ MeV, $m_S = 211$ MeV, $V_0 = 219$ MeV, $K = 8 \cdot 10^6$ MeV³ e $\alpha_c = 1.586$. No nosso "fitting" obtivemos: $m_U = 27.8$ MeV, $m_S = 229.1$ MeV, $V_0 = 110.3$ MeV, $K = 21,4 \cdot 10^6$ MeV³ e $\alpha_c = 0,82$.

Estes resultados mostram que incluindo as correções de centro-de-massa obtemos uma diminuição na massa do quark u. Além disso, encontramos um valor mais satisfatório para a constante de acoplamento α_c .

Usando os mesmos parâmetros descritos acima, nós também calculamos o espectro de massas dos mésons de ondas-S, com a inclusão das correções de CM. Os resultados estão dados na Tabela 8. Pode-se notar que, a excessão do pión, os resultados são bem razoáveis.

Nas Tabelas 9 e 10 apresentamos os resultados obtidos para os momentos magnéticos do octeto dos bárions de ondas-S e para as constantes axiais g_A relativas ao decaimento β do octeto bariônico $\frac{1}{2}^+$, tais como calculadas respectivamente pelas eqs. (3.97) e (3.96).

No "fitting" sem as correções de CM¹⁹, o momento magnético do próton foi tomado como "input" e um valor $\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = 1,196$ fm foi calculado para o raio de carga (quadrático médio) do próton, enquanto que o valor experimental é 0,877 fm. Portanto, o valor calculado é 36% maior que o experimental.

Em contrapartida, no nosso presente "fitting" $\langle r^2 \rangle_p$ é "input" enquanto o momento magnético μ_p é calculado e dá 3,05 n.m. (n.m. = magnetons nucleares). Como o valor experimental é 2,79 n.m., vemos que o nosso resultado é apenas 9% maior que o valor empírico. Além disso, embora façamos "input" em $\langle r^2 \rangle_p$, os nos-

TAB. 9 - Momentos magnéticos do octeto de bárions de ondas-S em magnetons nucleares (m.n.) .

BÁRIONS	Sem C.M. (Ref. 19)	μ calculado	Experimento (Ref. 25)
p	INPUT	3.05	2.7928
n	-1.86	-1.98	-1.9130
Λ	-0.66	-0.69	-0.613 \pm 0.004
Σ^+	2.70	2.78	2.379 \pm 0.20
Σ^0	0.84	0.85	0.46 \pm 0.28
Σ^-	-1.02	-1.08	-1.10 \pm 0.05
Ξ^0	-1.50	-1.50	-1.250 \pm 0.014
Ξ^-	-0.57	-0.64	(ref. 26) -0.69 \pm 0.04
(Σ^0, Λ)		-1.62	(ref. 27) -1.82 $\begin{matrix} +0.18 \\ -0.25 \end{matrix}$

TAB. 10 - Constantes axiais g_A relativas a decaimentos β dos bárions do octeto $\frac{1}{2}^+$.

DECAIMENTO	Sem C.M. (Ref. 19)	g_A calculado	Experimento (Ref. 25)
$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}$	INPUT	INPUT	1.254 \pm 0.006
$\Lambda \rightarrow n e^- \bar{\nu}$	0.78	0.801	0.694 \pm 0.025
$\Sigma^- \rightarrow n e^- \bar{\nu}$	-0.26	-0.265	\pm 0.372 \pm 0.050
$\Xi^- \rightarrow \Lambda e^- \bar{\nu}$	0.26	0.174	0.25 \pm 0.05
$\Xi^- \rightarrow \Sigma^0 e^- \bar{\nu}$	1.3	1.304	
$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ e^- \bar{\nu}$		1.304	

soos resultados para os momentos magnéticos da Tabela 9 mostram um desvio quadrático médio dos valores experimentais igual a 0,23 n.m. que é similar ao valor da Ref. (19), onde $\langle \delta\mu \rangle = 0,22$ n.m..

Um outro "fitting" que poderíamos indicar para comparação é o de Barik et al²⁸ (1985), onde fazem uso do mesmo modelo S+V com potencial harmônico e aplicam o mesmo tipo de correções de CM que fizemos aqui, contudo os dois ajustes não são iguais pois aqueles autores não incluem em sua análise o espectro de massas, considerando o modelo simplesmente como um modelo do "quark-core" bariônico, e não como um modelo dos bárions propriamente ditos. A par disto, parece-nos que ambos os "fittings" são indicações independentes da viabilidade do modelo S+V harmônico e da relevância das correções de centro-de-massa.

Guardaremos outros comentários para a última seção deste trabalho, que é justamente devotada às discussões finais, conclusões e exposição das perspectivas para próximos desenvolvimentos.

CONCLUSÕES

Como um modelo a quarks relativístico, o modelo de potencial $S+V$ é caracterizado por várias propriedades interessantes e por uma grande simplicidade matemática. Contudo, por ser um modelo a quarks independentes, ele requer a inclusão de correções de centro-de-massa para subtrair essa parcela espúria da energia. Neste trabalho nós mostramos que isto pode ser feito de uma maneira satisfatória pela aplicação do método empregado na seção III-4 - Refs. (16) e (17), não só para o espectro de massas mas também para as propriedades estáticas.

Nosso "fitting" do espectro bariônico possui um desvio médio em relação aos valores experimentais que é $\langle \delta M \rangle = 25,7$ MeV. Este valor é um pouco pior do que aquele obtido sem as correções de CM (23,8 MeV). No entanto, obtivemos valores bem mais satisfatórios para os parâmetros, mostrando uma diminuição na constante de acoplamento α_c e também na massa dos quarks não-estranhos.

Seria interessante estender a presente análise para incluir, por exemplo, o primeiro estado excitado dos bárions (paridade positiva). A avaliação das correções por troca de 1 glúon para tais estados foram efetuadas por Amaral e Zagury²⁰, cujas principais conclusões já comentamos na seção III-3.

Futuramente também seria de interesse estudar a introdução de um termo de interação spin-órbita na hamiltoniana do modelo, já que para um quark individual este não apresenta acoplamento L.S.

Uma outra importante extensão do modelo está relacionada com a introdução de uma nuvem piônica²⁹ ao redor do "quark-core" (caçoço de quarks). Contudo, a contribuição da nuvem de píons modifi

ca o modelo substancialmente e requer um tratamento detalhado em separado. Um cálculo preliminar de tais correções para o modelo S+V foi efetuado por Hatsuda³⁰ e parece indicar resultados promissores.

Dentre as várias possibilidades para próximos desenvolvimentos a mais imediata é a extensão da presente análise das correções por troca de glúon e correções de CM para a faixa da espectroscopia dos hádrons "pesados" (estados do tipo charmônio, botônio, bárions charmosos³¹, etc...). Tais cálculos são similares aos que aqui foram efetuados, necessitando apenas que sejam calculados os elementos de matriz dos novos estados hadrônicos a serem considerados. Há uma boa expectativa de obtermos resultados interessantes também nesta área.

APÊNDICE 1

Quarks em Representação SU(N): Uma Introdução

Os ingredientes básicos da teoria dos quarks são simples: hádrons são compostos de quarks, três constituem um bárion, um par quark-antiquark ($q\bar{q}$) constitui um méson. Diferentes quarks possuem diferentes "sabores", cada qual pode ter três "côres". Gell-Mann e Zweig haviam proposto três quarks: o "down" (d), o "up" (u) e o "strange" (s), mas hoje já sabemos que há mais deles: "charmed" (c), "bottom" (b), "top" (t), Os quarks, ao lado dos léptons, têm sido agrupados em famílias de partículas elementares, ou seja: partículas que não demonstram sinal de uma estrutura interna e com cujas combinações pretendemos explicar a existência das demais partículas da natureza (Tabela A1.1).

Como um hádron não possui côr, seus estados devem ser singletos de côr neutra. Num bárion, cada um dos três quarks assume uma das três côres. A soma das côres vermelha, amarela e azul resulta numa côr total nula, e assim sendo o bárion possuirá côr neutra.

Os mésons, que se constituem por um quark e um antiquark também terão côr neutra pois a côr do quark é anulada pela anti-côr do antiquark (por exemplo, se o quark for vermelho, o antiquark deve ser anti-vermelho, resultando numa côr total neutra).

Os quarks interagem entre si através da troca de glúons coloridos, os quais constituem um octeto e se acoplam aos índices de côr dos quarks à maneira de um campo de Yang-Mills.

A interação entre os quarks deve ser fraca a curtas distâncias para explicar as experiências de espalhamento de léptons, contudo com o aumento da distância entre os quarks deve aumentar a força atrativa entre eles, uma vez que até agora não se conseguiu isolar um quark.

TAB. A1.1 - Famílias de partículas elementares, cada uma consistindo de dois tipos de lépton e dois tipos de quarks.

CARGAS EM UNIDADES DE CARGA DO PRÓTON MASSAS EM GeV		LÉPTONS		QUARKS	
1ª FAMÍLIA	PARTÍCULA	e(ELÉTRON)	ν_e (NEUTRINO ELETRONICO)	u(UP)	d(DOWN)
	CARGA	-1	0	2/3	-1/3
	MASSA	$.51 \times 10^{-3}$	$<.46 \times 10^{-7}$	$\sim .5 \times 10^{-2}$	$\sim 1 \times 10^{-2}$
	DESCOBERTA	1898	1954	PROPOSTA EM 1963	PROPOSTA EM 1963
2ª FAMÍLIA	PARTÍCULA	μ (MU)	ν_μ (NEUTRINO MUONICO)	c(CHARMED)	s(STRANGE)
	CARGA	-1	0	2/3	-1/3
	MASSA	.105	$<.57 \times 10^{-3}$	~ 1.7	$\sim .4$
	DESCOBERTA	1936	1962	1974	1974
3ª FAMÍLIA	PARTÍCULA	τ (TAU)	ν_τ (NEUTRINO DO TAU)	t(TOP OU TRUTH)	b(BOTTOM OU BEAUTY)
	CARGA	-1	0	2/3	-1/3
	MASSA	1.78	$<.164$	—	~ 5.2
	DESCOBERTA	1975	—	198—	1977

O tripleto fundamental de quarks "leves" consiste de um duplete de isospin $I = \frac{1}{2}$ (quarks u e d) e mais um singlete de isospin zero (quark s). As cargas dos quarks, isospin I, projeção do isospin I_3 , número bariônico, estranheza S e os respectivos grupos de classificação SU(N) estão indicados na Tabela A1.2.

O grupo de simetria SU(3) de sabor (quarks u, d, s) nos dá uma classificação para os estados fundamentais dos bárions e mésons, conforme indicado pelas Figuras 1 a 4. É justamente na análise do espectro de massas destes hádrons "leves" que concentramos os esforços desta tese.

TAB. A1.2 - Os quarks e seus números quânticos.

SABOR	u	d	s	c
Carga Q	2/3	-1/3	-1/3	2/3
Isospin I	1/2	1/2	0	0
I_3	+1/2	-1/2	0	0
Número bariônico B	1/3	1/3	1/3	1/3
Estranheza S	0	0	-1	0
"Charm"	0	0	0	1
Grupo SU(N)	<div style="text-align: center;"> $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{SU}(2)}$ $\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{SU}(3)}$ $\underbrace{\hspace{20em}}_{\text{SU}(4)}$ </div>			

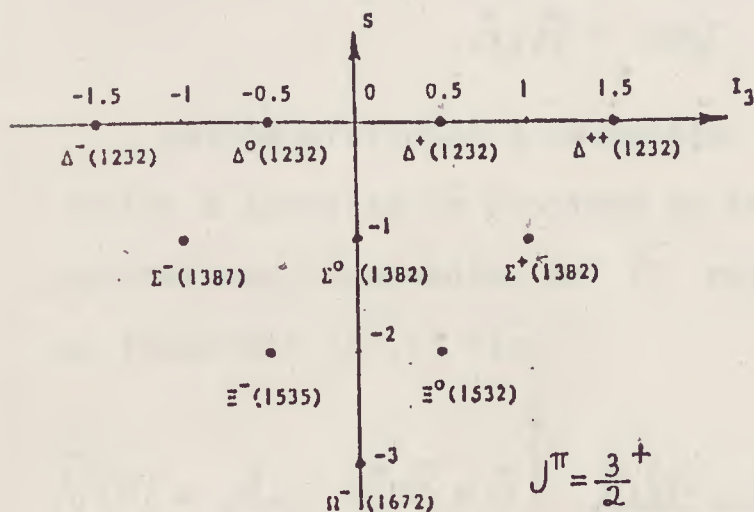


Fig. 1 - Decupeto bariônico.

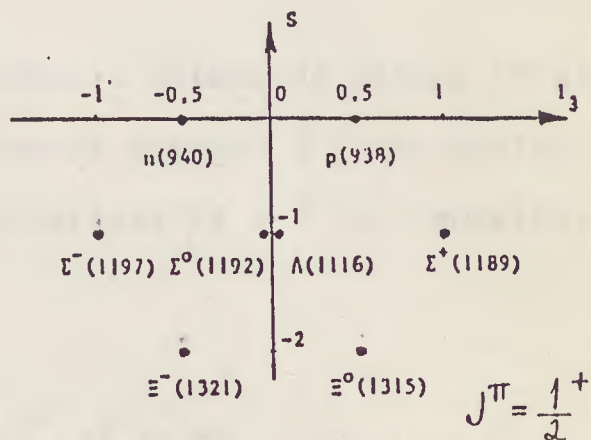


Fig. 2 - Octeto bariônico.

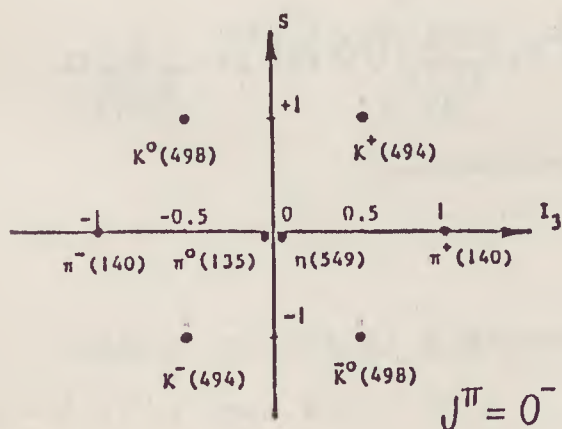


Fig. 3 - Octeto dos mésons pseudo-escalares .

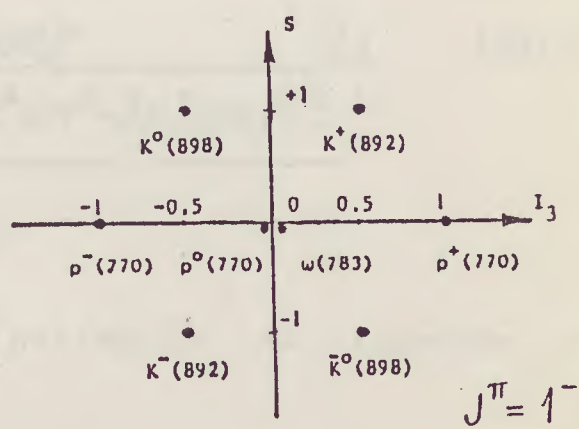


Fig. 4 - Octeto dos mésons pseudo-vetoriais .

APÊNDICE 2

Cálculo Explícito da Integral do Potencial Vetor para o "bag"

Na seção II-2, calculando a parte magnética da energia de interação no "bag", chegamos a seguinte expressão para o potencial vetor:

$$\vec{A}_i^a(\vec{r}) = \frac{3}{(4\pi)^2} \lambda_i^a \vec{\sigma}_i \times \int_{\text{Bag}} \frac{\mu_i'(r')}{r'^3} \frac{\hat{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' . \quad (\text{A2.1})$$

Na integral acima, \vec{r}' é o vetor que vai do ponto de origem até o elemento de integração $dv = d^3r'$. Vamos chamar de γ o ângulo formado pelos vetores \vec{r}' e \vec{r} , de maneira que:

$$\hat{r} \cdot \hat{r}' = \cos\gamma . \quad (\text{A2.2})$$

Quando efetuamos a integração sobre o volume da esfera (bag), devido a simetria do problema em torno da direção \hat{r} , as contribuições das componentes de \hat{r}' perpendiculares a \vec{r} se cancelam, de forma que (A2.1) fica:

$$\begin{aligned} \vec{A}_i^a(\vec{r}) &= \frac{3}{(4\pi)^2} \cdot \lambda_i^a \cdot \vec{\sigma}_i \times \hat{r} \int_{\text{bag}} \frac{\mu_i'(r')}{r'^3} \frac{\hat{r} \cdot \hat{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' = \\ &= \frac{3}{(4\pi)^2} \cdot \lambda_i^a \cdot (\vec{\sigma}_i \times \hat{r}) \underbrace{\int_0^R \frac{\mu_i'(r')}{r'^3} r'^2 dr'}_{I_{\text{Bag}}} \int \frac{\cos\gamma}{[r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma]^{1/2}} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A2.3})$$

Usando em (A2.3) a expansão em polinômios de Legendre de $|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1}$, que é:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{[r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma]^{1/2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos\gamma) , \quad (\text{A2.4})$$

onde $r_<$ e $r_>$ são respectivamente o de menor módulo e o de maior módulo dentre r e r' , a integral I_{Bag} será escrita:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} 2\pi \int_0^R \frac{\mu_i'(r')}{r'^3} r'^2 \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} dr' \int_{-1}^1 \cos\gamma \mathcal{P}_\ell(\cos\gamma) d(\cos\gamma) . \quad (\text{A2.5})$$

Pela ortogonalidade dos polinômios de Legendre, na somatória em ℓ será diferente de zero apenas o termo com $\mathcal{P}_\ell(\cos\gamma) = \cos\gamma$, ou seja: $\ell = 1$. Com isso, a expressão (A2.5) se reduz a:

$$I_{\text{Bag}} = \frac{4\pi}{3} \int_0^R \frac{\mu_i'(r')}{r'^3} r'^2 \frac{r_<}{r_>} dr' . \quad (\text{A2.6})$$

A integral em (A2.6) deve ser feita separada em duas partes: uma integração cujos limites vão de 0 até r (onde $r_< = r'$ e $r_> = r$) mais outra integração que vai de r até R (onde teremos ($r_< = r$ e $r_> = r'$)). Fazendo desse modo obtemos:

$$\begin{aligned} I_{\text{Bag}} &= \frac{4\pi}{3} \left[\frac{1}{r^2} \int_0^r \mu_i'(r') dr' + r \int_r^R \frac{\mu_i'(r')}{r'^3} dr' \right] = \\ &= \frac{4\pi}{3} \left[\frac{1}{r^2} \mu(m_i, r) + r \int_r^R \frac{\mu_i'(r')}{r'^3} dr' \right] . \end{aligned} \quad (\text{A2.7})$$

Substituindo (A2.7) em (A2.3) chegamos à expressão do potencial vetor:

$$\vec{A}_i^a(\vec{r}) = \frac{\lambda_i^a}{4\pi r^3} (\vec{\sigma}_i \times \vec{r}) \mu(m_i, r) + \frac{\lambda_i^a}{4\pi} (\vec{\sigma}_i \times \vec{r}) \int_r^R \frac{\mu_i'(r')}{r'^3} dr' . \quad (\text{A2.8})$$

APÊNDICE 3

Programa BASIC para Cálculo de Massas Hadrônicas

Para calcular as massas dos vários bárions e mésons (conforme eq. (3.91)), ajustando também os parâmetros estáticos (eqs. (3.96) - (3.98)) fizemos uso de um programa bem simples, escrito em linguagem BASIC para um microcomputador pessoal do tipo APPLE II - "craft plus".

Daremos agora a listagem do programa utilizado, seguido de um "RUN" com os parâmetros encontrados para o presente "fitting" de massas.

JLIST

```

1 HOME
2 PRINT "*****"
   *****
   ***** MH4 *****
   *****
3 PRINT " MARCO DE 1986 "
5 PRINT " , , , , , "MO=";
10 INPUT MO
12 VTAB 8: HTAB 4
15 PRINT " ";MO
20 PRINT "MS=";
25 INPUT MS
27 VTAB 9: HTAB 4
30 PRINT " ";MS
35 PRINT "VO=";
40 INPUT VO
42 VTAB 10: HTAB 4
45 PRINT " ";VO
50 PRINT " K=";
55 INPUT K
57 VTAB 11: HTAB 4
60 PRINT " ";K
65 PRINT "AC=";
70 INPUT AC
72 VTAB 12: HTAB 4
75 PRINT " ";AC
80 PRINT " , , ,
85 PRINT "XO=";
90 INPUT XO
92 VTAB 14: HTAB 4
95 PRINT " ";XO
100 PRINT "XS=";
105 INPUT XS
107 VTAB 15: HTAB 4
110 PRINT " ";XS
115 LET RO = (2 / (XO * K)) ^ .2
   5
120 LET RS = (2 / (XS * K)) ^ .2
   5
125 LET ROS = (RO ^ 2 + RS ^ 2) ^
   .5
130 LET NO2 = 1 / (1 + 1.5 * (1 /
   (XO * RO) ^ 2))
132 LET NO4 = NO2 ^ 2
135 LET NS2 = 1 / (1 + 1.5 * (1 /
   (XS * RS) ^ 2))
137 LET NZ4 = NS2 ^ 2
140 LET OO = 1 / (XO * RO) ^ 2
145 LET SS = 1 / (XS * RS) ^ 2
150 LET OOS = 1 / (XO * ROS) ^ 2
155 LET SOS = 1 / (XS * ROS) ^ 2

160 LET EO = XO - MO
165 LET ES = XS - MS
170 LET E = 1 + 1.5 * OO * SS +
   (1 + 1.5 * (RS ^ 2 / RO ^ 2)
   ) * OOS + (1 + 1.5 * (RO ^ 2
   / RS ^ 2)) * SOS + .75 * OO
   S * SOS
175 LET IOOM = 1.4184614 * OO *
   NO4 / RO
180 LET ISSM = 1.4184614 * SS *
   NZ4 / RS
185 LET IOSM = 4.0120149 * NO2 *
   NS2 / (XO * XS * ROS ^ 3)
190 LET JOOE = - .1773076 * (NO
   4 + 2 * NO2 + 9) / RO
195 LET JSSE = - .1773076 * (NZ
   4 + 2 * NS2 + 9) / RS
200 LET JOSE = - 3.0090111 * (E
   * NO2 * NS2) / ROS
202 HOME
205 PRINT " , , ,
210 PRINT "EQO= ";EO,"EQS= ";ES
215 PRINT " , , ,
220 PRINT "RO= ";RO; SPC( 3);"OO
   = ";OO
225 PRINT "RS= ";RS; SPC( 3);"SS
   = ";SS
230 PRINT "NO2= ";NO2; SPC( 5);"
   NO4= ";NO4
235 PRINT "NS2= ";NS2; SPC( 5);"
   NS4= ";NZ4
240 PRINT "ROS= ";ROS; SPC( 1);"
   OOS= ";OOS,, SPC( 4);"SOS= "
   ;SOS
245 PRINT " , , ,
250 PRINT "IOOM= ";IOOM; SPC( 2)
   ;"IOOE= ";JOOE
255 PRINT "IOSM= ";IOSM; SPC( 2)
   ;"IOSE= ";JOSE
260 PRINT "ISSM= ";ISSM; SPC( 2)
   ;"ISSE= ";JSSE
265 PRINT " , , , "PRESS SOMETHING TO
   CONTINUE"
270 GET C#
280 DIM A(14,3)
285 DIM B(14,3)
290 DIM N(14,2)
295 FOR I = 1 TO 8
300 LET B(I,1) = - 1
305 LET B(I,2) = 2

```

(continua)

(continuação)

```

310 LET B(1,3) = - 1
315 NEXT I
320 LET B(12,1) = - 1
325 LET B(12,2) = 2
330 LET B(12,3) = - 1
335 LET B(13,1) = - 1
340 LET B(13,2) = 2
345 LET B(13,3) = - 1
350 FOR I = 1 TO 3
355 LET A(1,I) = 0
360 LET B(1,I) = 0
365 LET A(5,I) = 0
370 LET B(5,I) = 0
375 LET A(8,I) = 0
380 LET B(8,I) = 0
385 NEXT I
390 LET A(1,1) = - 12
395 LET A(5,1) = - 6
400 LET A(8,3) = - 6
405 LET A(2,1) = - 9
410 LET A(2,2) = 0
415 LET A(2,3) = - 3
420 LET A(3,1) = - 5
425 LET A(3,2) = - 4
430 LET A(3,3) = - 3
435 LET A(4,1) = - 3
440 LET A(4,2) = - 4
445 LET A(4,3) = - 5
450 LET A(6,1) = - 5
455 LET A(6,2) = 2
460 LET A(6,3) = - 3
465 LET A(7,1) = - 3
470 LET A(7,2) = 2
475 LET A(7,3) = - 5
480 FOR I = 1 TO 8
485 LET N(1,1) = 2
490 LET N(1,2) = 1
495 NEXT I
500 LET N(1,1) = 3
505 LET N(1,2) = 0
510 LET N(4,1) = 1
515 LET N(4,2) = 2
520 LET N(5,1) = 3
525 LET N(5,2) = 0
530 LET N(7,1) = 1
535 LET N(7,2) = 2
540 LET N(8,1) = 0
545 LET N(8,2) = 3
550 LET N(9,1) = 2
552 LET N(10,1) = 2
554 LET N(11,2) = 2
555 LET N(14,1) = 2
556 LET N(12,1) = 1;N(12,2) = 1
558 LET N(13,1) = 1;N(13,2) = 1
560 LET A(9,1) = - 4
562 LET A(10,1) = - 4
564 LET A(11,3) = - 4
565 LET A(12,1) = - 3;A(12,3) =
- 3
566 LET A(13,1) = - 3;A(13,3) =
- 3
567 LET A(12,2) = - 6
568 LET A(13,2) = 2
570 LET A(14,1) = - 12
572 GOSUB 1500

```

```

575 DIM X(14),Y(14),M(14),E(14),
G(14),P(14)
580 FOR I = 1 TO 14
585 LET X(I) = N(I,1) * EO + N(I
,2) * ES
590 LET M(I) = A(I,1) * IOOM + A
(I,2) * IOSM + A(I,3) * ISSM
595 LET E(I) = B(I,1) * JOOE + B
(I,2) * JOSE + B(I,3) * JSSE
600 LET G(I) = - (M(I) + E(I))
605 LET Y(I) = - G(I) * AC
610 LET P(I) = (N(I,1) * (2.5 -
NO2) / RO ^ 2 + N(I,2) * (2.
5 - NS2) / RS ^ 2)
615 NEXT I
617 GOSUB 1000
620 HOME
625 PRINT " EO EM
EE EG"
630 FOR I = 1 TO 14
635 PRINT X(I); TAB( 10); " ;M(I
); TAB( 20); " ;E(I); TAB( 3
0); " ;G(I)
640 NEXT I
645 DIM R(14)
650 REM SEGUNDO ZAGURY ;
652 PRINT "...PRESS SOMETHING TO
CONTINUE"; GET C$
655 HOME
657 PRINT " WITHOUT C.M. CORRE
CTIONS !",,,,
660 PRINT " EO E1
M"
665 FOR I = 1 TO 14
670 LET R(I) = X(I) + Y(I)
680 PRINT X(I); TAB( 12);Y(I); TAB(
22);R(I)
685 NEXT I
690 PRINT "...PRESS SOMETHING TO
CONTINUE"
695 GET C$
697 HOME
700 PRINT "INCLUDING C.M. CORREC
TIONS",,,,
702 DIM H(14)
705 PRINT " EO E1
<P2> M"
710 FOR I = 1 TO 14
713 IF R(I) ^ 2 < P(I) THEN GOTO
720
715 LET H(I) = (R(I) ^ 2 - P(I))
^ .5
717 LET H(I) = ( INT (H(I) * 100
0) ) / 1000
720 LET P(I) = ( INT (P(I) ^ .5 *
1000) ) / 1000
725 PRINT X(I); TAB( 10);Y(I); TAB(
20);P(I); TAB( 30);H(I)
730 NEXT I
735 PRINT "...PRESS SOMETHING TO
CONTINUE"
740 GET C$

```

```

745 LET GA = 5 * (4 * NO2 - 1) *
(1 + P(I) ^ 2 / (3 * H(I) ^
2)) / 9
750 LET MU = 2 * H(I) * NO2 * (1
+ .5 * P(I) ^ 2 / H(I) ^ 2)
/ XO + P(I) ^ 2 / (6 * H(I)
^ 2)
755 LET R2 = (1.5 * NO2 * ((2.5 -
NO2) / (1 - NO2)) / XO ^ 2 -
9 / (4 * P(I) ^ 2)) * (1 + P
(I) ^ 2 / (3 * H(I) ^ 2))
760 HOME ; VTAB (15)
765 PRINT "GA=";GA
770 PRINT "MU=";MU
775 PRINT "R2=";R2
780 PRINT "....." "PRESS SOMETH
ING TO CONTINUE"
785 GET C$
790 PRINT "OK"
800 END
1000 FOR I = 1 TO 14
1005 LET X(I) = ( INT (X(I) * 10
00) ) / 1000
1010 LET Y(I) = ( INT (Y(I) * 10
00) ) / 1000
1015 LET M(I) = ( INT (M(I) * 10
00) ) / 1000
1020 LET E(I) = ( INT (E(I) * 10
00) ) / 1000
1025 LET G(I) = ( INT (G(I) * 10
00) ) / 1000
1030 LET P(I) = ( INT (P(I) * 10
00) ) / 1000
1035 NEXT I
1040 RETURN
1500 REM IMPRIME TABELA
1505 HOME
1510 PRINT " .....
....."
1515 PRINT " ;AUU;AUS;ASS;BUU;
BUS;BSS;NU;NS;"
1518 PRINT " ;.....
;....."
1520 FOR I = 1 TO 14
1525 PRINT " ;I; TAB( 4);
1530 FOR J = 1 TO 3
1532 HTAB J * 4
1535 PRINT " ;A(I,J);
1540 NEXT J
1545 FOR J = 1 TO 3
1547 HTAB 12 + J * 4
1550 PRINT " ;B(I,J);
1555 NEXT J
1560 PRINT TAB( 28);" ;N(I,1);
TAB( 31);" ;N(I,2); TAB( 3
4);" ;"
1565 NEXT I
1570 PRINT " ;.....
;....."
1575 PRINT "... PRESS SOMETHING
TO CONTINUE"
1580 GET C$
1590 RETURN

```

JRUN

***** MH4 *****

MARCO DE 1986

MO=727.88
27.88

MS=7229.09
229.09

VO=7110.25459
110.25459

K=721.4357E6
21435700

AC=7.82
.82

XO=7575.44
575.44

XS=7896.46
896.46

EQU= 547.56 EQS= 667.37

RO= 3.56839621E-03 OO= .23716673
RS= 3.19404001E-03 SS= .121971247
NO2= .737599063 NO4= .544052378
NS2= .845339357 NS4= .714598629
ROS= 4.78908583E-03 OOS= .131672373
 SOS= .0542541453

I00M= 51.2907361 I00E= -547.528006
I0SM= 44.1494358 I0SE= -585.485909
ISSM= 38.7076505 ISSE= -633.129938

PRESS SOMETHING TO CONTINUE

.....
:AUU:AUS:ASS:BUU:BUS:BSS:NU:NS:
:.....

1 :-12:0 :0 :0 :0 :0 :3 :0 :
2 :-9 :0 :-3 :-1 :2 :-1 :2 :1 :
3 :-5 :-4 :-3 :-1 :2 :-1 :2 :1 :
4 :-3 :-4 :-5 :-1 :2 :-1 :1 :2 :
5 :-6 :0 :0 :0 :0 :0 :3 :0 :
6 :-5 :2 :-3 :-1 :2 :-1 :2 :1 :
7 :-3 :2 :-5 :-1 :2 :-1 :1 :2 :
8 :0 :0 :-6 :0 :0 :0 :0 :3 :
9 :-4 :0 :0 :0 :0 :0 :2 :0 :
10:-4 :0 :0 :0 :0 :0 :2 :0 :
11:0 :0 :-4 :0 :0 :0 :0 :2 :
12:-3 :-6 :-3 :-1 :2 :-1 :1 :1 :
13:-3 :2 :-3 :-1 :2 :-1 :1 :1 :
14:-12:0 :0 :0 :0 :0 :2 :0 :
:.....

PRESS SOMETHING TO CONTINUE

EO	EM	EE	EG
1642.68	-615.489	0	615.488
1762.49	-577.74	9.686	568.053
1762.49	-549.175	9.686	539.488
1882.3	-524.009	9.686	514.322
1642.68	-307.745	0	307.744
1762.49	-284.278	9.686	274.591
1882.3	-259.112	9.686	249.425
2002.109	-232.246	0	232.245
1095.12	-205.163	0	205.162
1095.12	-205.163	0	205.162
1334.739	-154.831	0	154.83
1214.93	-534.892	9.686	525.205
1214.93	-181.697	9.686	172.01
1095.12	-615.489	0	615.488

PRESS SOMETHING TO CONTINUE
WITHOUT C.M. CORRECTIONS :

EO	E1	M
1642.68	-504.701	1137.979
1762.49	-465.804	1296.686
1762.49	-442.381	1320.109
1882.3	-421.745	1460.555
1642.68	-252.351	1390.329
1762.49	-225.166	1537.324
1882.3	-204.529	1677.771
2002.109	-190.442	1811.667
1095.12	-168.234	926.886
1095.12	-168.234	926.886
1334.739	-126.962	1207.777
1214.93	-430.669	784.261
1214.93	-141.049	1073.881
1095.12	-504.701	590.419

PRESS SOMETHING TO CONTINUE
INCLUDING C.M. CORRECTIONS

EO	E1	<P2>	M
1642.68	-504.701	644.376	937.963
1762.49	-465.804	662.575	1114.624
1762.49	-442.381	662.575	1141.788
1882.3	-421.745	680.286	1292.451
1642.68	-252.351	644.376	1231.987
1762.49	-225.166	662.575	1387.212
1882.3	-204.529	680.286	1533.664
2002.109	-190.442	697.549	1671.993
1095.12	-168.234	526.131	763.088
1095.12	-168.234	526.131	763.088
1334.739	-126.962	569.546	1065.053
1214.93	-430.669	548.268	560.773
1214.93	-141.049	548.268	923.375
1095.12	-504.701	526.131	267.918

PRESS SOMETHING TO CONTINUE

GA=1.25401893
MU=3.0506539
R2=1.97006528E-05

PRESS SOMETHING TO CONTINUE

OK

JEND

REFERÊNCIAS

1. J.J. Kokeedee, "The Quark Model", Benjamin, NY (1969).
2. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 31, 494 (1973);
H. Fritzsch, M. Gell-Mann e H. Leutwyler, Phys. Lett 47B, 365 (1973);
D.J. Gross e F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30, 1343 (1973).
3. A. Chodos, R.L. Jaffe, C.B. Thorn e V. Weisskopf, Phys. Rev. D9, 3471 (1974);
A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson e C.B. Thorn, Phys. Rev. D10, 2599 (1974).
4. A. De Rujula, H. Geōrgi e S. Glashow, Phys. Rev. D12, 147 (1975).
5. N. Isgur e G. Karl, Phys. Rev. D18, 4187 (1978); D19, 2653 (1979); D20, 1191 (1979).
6. Citamos, como exemplo:
P.N. Bogolioubov, Anq. Inst. Poincaré 8, 163 (1967);
R. Tegen, R. Brockmann e W. Weise, Z. Phys. A 307, 339 (1982);
E. Eich, D. Rein e R. Rodenberg, Z. Phys. C 28, 225 (1985).
7. P.M. Fishbane, S.G. Gasiorowicz, D.C. Johansen e P. Kaus, Phys. Rev. D27, 2433 (1983);
P. Leal Ferreira, em "Topics on Cosmic Rays", 60th aniversário de C.M.G. Lattes, Vol. 1, p. 187, UNICAMP, Brasil, 1984.
8. J.S. Bell e H. Ruegg, Nucl. Phys. B 98, 151 (1975); B 104, 546 (1976).
9. G.B. Smith e L.F. Tassie, Ann. Phys. 65, 352 (1971);
A.P. Kobushkin, ITP Kiev - 76 - 58E, não publicado;
P. Leal Ferreira, Lett. Nuovo Cimento 20, 157 (1977).
10. G. Eyre e H. Osborn, Nucl. Phys. B 116, 281 (1976).
11. T. De Grand, R.L. Jaffe, K. Johnson e J. Kiskis, Phys. Rev. D12, 2060 (1975).

12. A.J.G. Hey, "Phenomenological Aspects of the MIT bag", Springer-Verlag, Berlin (1978), pág. 155-220.
13. T. De Grand e C. Rebbi, Phys. Rev. D17, 2358 (1978);
P.A.M. Guichon, Phys. Lett. 163B, 221 (1985).
14. F.E. Close, "An Introduction to Quarks and Partons", Academic Press, London (1979); (Cap. 18, no que se refere ao MIT bag).
15. J. Bartelski, A. Szymacha, Z. Ryzak, L. Mankiewicz e S. Tatur Nucl. Phys. A 424, 484 (1984).
16. J.F. Donoghue e K. Johnson, Phys. Rev. D21, 1975 (1980);
C.W. Wong, Phys. Rev. D24, 1416 (1981);
K.F. Liu e C.W. Wong, Phys. Lett. 113B, 1 (1982).
17. J. Bartelski, A. Szymacha, L. Mankiewicz e S. Tatur, Phys. Rev. D29, 1035 (1984).
18. P.L. Ferreira, PREPRINT IFT - P.01/84.
19. M.G. do Amaral e N. Zagury, Phys. Rev. D26, 3119 (1982).
20. M.G. do Amaral e N. Zagury, Phys. Rev. D27, 2668 (1983);
"Quark model with one-gluon corrections. Radially excited states" (Parity + states).
21. M.G. do Amaral e N. Zagury, PUC - NOTA CIENTÍFICA 29/83;
"Quark model for baryons - Negative parity states".
22. B.E. Palladino e P. Leal Ferreira, Phys. Rev. D34, 2168 (1986);
"Center-of-mass corrections in a relativistic potential model".
23. C.W. Wong, Phys. Rep. 15C, 283 (1975).
24. P.L. Ferreira e N. Zagury, Lett. Nuovo Cimento 20, 511 (1977).
25. Particle Data Group, Rev. Mod. Phys. 56, nº 2, part II (1984).
26. Particle Data Group, Phys. Lett. 111B, 1 (1982).
27. F. Dydak et al., Nucl. Phys. B 118, 1 (1977).

28. N. Barik, B.K. Dash e M. Das, Phys. Rev. D31. 1652 (1985).
29. R. Tegen, R. Brockmann e W. Weise, Z. Phys. A 307, "Atoms and Nuclei", 339 (1982).
30. T. Hatsuda, Prog. Theor. Phys. 70, 1685 (1983);
Para um cálculo em "cloudy bag models" ou "chiral bags" vide, por exemplo, K. Saito, Prog. Theor. Phys. 71, 775 (1984).
31. Para um bom apanhado no assunto vide, por exemplo, J.D. Bjorken, FERMILAB - Conf. 85/69 (Separata IFT nº 957, junho, 1985).

INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA
01405 - Rua Pampinea, 145 - Fone 288-5643
São Paulo (SP) - Brasil
BIBLIOTECA

