UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Givanildo Donizeti de Melo

Sobre a dimensão do quadrado de um espaço métrico compacto X de dimensão n e o conjunto dos mergulhos de X em $\mathbb{R}^{2n}$

São José do Rio Preto
2016

Givanildo Donizeti de Melo

Sobre a dimensão do quadrado de um espaço métrico compacto X de dimensão n e o conjunto dos mergulhos de X em $\mathbb{R}^{2n}$

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profª Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis

São José do Rio Preto

2016

Melo, Givanildo Donizeti de.
Sobre a dimensão do quadrado de um espaço métrico compacto X de dimensão n e o conjunto dos mergulhos de X em R^{2n} / Givanildo Donizeti de Melo. -- São José do Rio Preto, 2016
79 f. : il.

Orientador: Thaís Fernanda Mendes Monis
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Topologia algébrica. 3. Teoria da dimensão (Topologia). 4. Mergulhos (Matemática) 5. Espaços de funções. I. Monis, Thaís Fernanda Mendes. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 513.831

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Givanildo Donizeti de Melo

Sobre a dimensão do quadrado de um espaço métrico compacto X de dimensão n e o conjunto dos mergulhos de X em $\mathbb{R}^{2n}$

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

COMISSÃO EXAMINADORA

Profa. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis
UNESP - Rio Claro
Orientadora

Prof. Dr. Thiago de Melo
UNESP - Rio Claro

Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo
UFSCar - São Carlos

São José do Rio Preto
23 de março de 2016

Resumo

Nesse trabalho nós estudamos o seguinte resultado: para um espaço métrico compacto X, de dimensão n, o subespaço dos mergulhos de X em $\mathbb{R}^{2n}$ é denso no espaço das funções contínuas de X em $\mathbb{R}^{2n}$ se, e somente se, $\dim(X \times X) < 2n$. A demonstração apresentada é aquela dada por J. Krasinkiewicz e por S. Spiez.

Palavras-chave: Dimensão. Mergulhos. Espaços métricos compactos.

Abstract

In this work we study the following result: given a compact metric space X of dimension n, the subspace consisting of all embeddings of X into $\mathbb{R}^{2n}$ is dense in the space of all continuous maps of X into $\mathbb{R}^{2n}$ if and only if $\dim(X \times X) < 2n$. The presented proof is the one given by J. Krasinkiewicz e por S. Spiez.

Keywords: Dimension. Embeddings. Compact metric space.

Sumário

Introdução

A teoria de dimensão apresenta um resultado clássico, devido a K. Menger e G. Nöbeling, que estabelece que todo espaço métrico compacto X de dimensão n pode ser mergulhado em $\mathbb{R}^{2n+1}$. Mais forte, o resultado estabelece que toda função contínua de X em $\mathbb{R}^{2n+1}$ pode ser aproximada por um mergulho. Se denotamos por $C(X, \mathbb{R}^{2n+1})$ o espaço de todas as funções contínuas de X em $\mathbb{R}^{2n+1}$, munido da métrica da convergência uniforme

$$\rho(f,g) = \sup_{x \in X}\{\|f(x) - g(x)\|\},$$

e se denotamos por $E(X, \mathbb{R}^{2n+1})$ o subespaço de $C(X, \mathbb{R}^{2n+1})$ consistindo dos mergulhos de X em $\mathbb{R}^{2n+1}$, então o Teorema de Menger–Nöbeling nos diz que $E(X, \mathbb{R}^{2n+1})$ é denso em $C(X, \mathbb{R}^{2n+1})$. A prova do Teorema de Menger–Nöbeling (Teorema 1.32) é uma aplicação do Teorema da Categoria de Baire (Teorema 1.26).

Estabelecido o Teorema de Menger–Nöbeling, uma pergunta natural é: para quais espaços métricos compactos X tem-se a propriedade de que toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}^N$ pode ser aproximada por um mergulho? Por ora, sabemos apenas que uma condição suficiente é que N seja maior que o dobro da dimensão de X. Em 1983, D. McCullough e L. R. Rubin [9] estabeleceram que essa condição também seria necessária no caso em que N é par. Acontece que alguns anos depois de publicado o artigo [9], J. Krasinkiewicz e K. Lorentz encontraram um "furo" na demonstração de um dos lemas cruciais para a conclusão do resultado. Mais tarde, D. McCullough e L. R. Rubin encontraram por si mesmos um contra-exemplo para o resultado que haviam estabelecido em [9]: para cada $n \geq 2$, eles determinaram um espaço métrico compacto X com $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ denso em $C(X, \mathbb{R}^{2n})$. Curiosamente, todos os contra-exemplos X dados por McCullough e Rubin possuíam a propriedade de que a dimensão do produto cartesiano $X \times X$ era menor do que o dobro da dimensão de X. Denotando por $\dim(X)$ a dimensão do espaço métrico compacto X, a conjectura que então estabeleu-se foi:

"Dado um espaço métrico compacto X de dimensão n, tem-se $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ denso em $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ se, e somente se, $\dim(X \times X) < 2\dim(X)$."

A conjectura acima foi provada verdadeira em [1] por A. N. Dranisnikov, D. Repovs e E.V. Scepin, nos seguintes termos:

[[1], Teorema 1.1] *Seja* X *um espaço métrico compacto com* $\dim(X) = n$, $n \geq 1$. *Então,* $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ *é denso em* $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ *se, e somente se,* $\dim(X \times X) < 2n$.

Independentemente, J. Krasinkiewicz provou em [4] uma das implicações da conjectura:

[4] *Seja* X *um espaço métrico compacto de dimensão* n, $n \geqslant 1$. *Se o subespaço* $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ *é denso em* $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ *então* $\dim(X \times X) < 2n$.

E S. Spiez, também independentemente, provou em [11] a outra implicação da conjectura, com a condição de que $\dim(X) \geq 3$:

[11] *Se* X *é um espaço métrico compacto de dimensão* $n \geqslant 3$ *e* $\dim(X \times X) < 2n$ *então o espaço* $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ *é denso em* $C(X, \mathbb{R}^{2n})$.

O objetivo desse trabalho é o de apresentar as demonstrações de J. Krasinkiewicz e de S. Spiez dadas em [4] e [11], respectivamente.

O trabalho está organizado do seguinte modo: no Capítulo 1, apresentamos uma discussão razoável sobre a teoria de dimensão. Tal apresentação é baseada em [3]. A teoria de dimensão é um ramo da Topologia especializado na definição e no estudo da noção de dimensão em certas classes de espaços topológicos. Veremos que é possível definir a dimensão de um espaço topológico X de três modos diferentes: via a pequena dimensão indutiva $\mathrm{ind}(X)$, via a grande dimensão indutiva $\mathrm{Ind}(X)$ ou via a dimensão de cobertura $\dim(X)$. Essas três funções dimensão coincidem na classe dos espaços métricos separáveis, i.e., $\mathrm{ind}(X) = \mathrm{Ind}(X) = \dim(X)$ para todo espaço métrico separável X. Uma vez que todo espaço métrico compacto X é separável, quando estivermos tratando dos resultados de [4] e [11], todos os resultados discutidos para $\mathrm{ind}(X)$, $\mathrm{Ind}(X)$ e $\dim(X)$ poderão ser utilizados pois, nesse caso, esses números coincidem. O Teorema de Menger–Nöbeling é estabelecido ao final do capítulo, na Subseção 1.8.3 - Teorema 1.32. O Capítulo 2 é devotado propriamente aos resultados de [4] e [11].

Capítulo 1

Teoria de dimensão

Na teoria de dimensão existem três definições diferentes de dimensão topológica: a pequena dimensão indutiva, a grande dimensão indutiva e a dimensão por cobertura. Neste capítulo apresentaremos também alguns resultados desta teoria como o Teorema da Soma, do Produto Cartesiano, de coincidência entre outros.

1.1 A pequena dimensão indutiva

Definição 1.1. *Para todo espaço regular X a pequena dimensão indutiva de X, denotada por* $\operatorname{ind} X$*, é um número inteiro maior ou igual a -1 ou o "número infinto" ∞. Definimos a dimensão* ind *da seguinte forma:*

$(MU1)$ $\operatorname{ind} X = -1 \Leftrightarrow X = \emptyset$*;*

$(MU2)$ $\operatorname{ind} X \leqslant n$*, onde $n = 0, 1, \ldots$, se para todo $x \in X$ e cada vizinhança $V \subset X$ de x existe um conjunto aberto $U \subset X$ tal que*

$$x \in U \subset V \qquad e \qquad \operatorname{ind} \partial U \leqslant n - 1;$$

$(MU3)$ $\operatorname{ind} X = n$ *se* $n - 1 < \operatorname{ind} X \leqslant n$*;*

$(MU4)$ $\operatorname{ind} X = \infty$ *se* $\operatorname{ind} X > n$ *para todo* $n = -1, 0, 1, \ldots$*.*

A pequena dimensão indutiva ind *é também chamada de dimensão de Menger–Urysohn.*

Dizemos que $\operatorname{ind} X > n-1$ quando $\operatorname{ind} X \leqslant n-1$ não é satisfeito. Assumimos que as fórmulas $n \leqslant \infty$ e $n+\infty = \infty + n = \infty + \infty = \infty$ são verdadeiras para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Sejam X e Y espaços regulares. Se X e Y são homeomorfos então $\operatorname{ind} X = \operatorname{ind} Y$, i.e., a pequena dimensão indutiva é um invariante topológico.

Exemplo 1.1. *Se X é um espaço discreto então* $\operatorname{ind} X = 0$.

A reciproca é falsa. Provaremos neste trabalho que $\operatorname{ind} Q = 0$, assim como $\mathbb{Q}$ não é um espaço discreto temos um contra-exemplo para a reciproca do exemplo acima.

Sabemos que todo subespaço M de um espaço regular X é também regular. Assim, se a dimensão ind é definida para X, ela também é definida para todo subespaço M de X.

Teorema 1.1. *Para todo subespaço M de um espaço regular X tem-se* $\operatorname{ind} M \leqslant \operatorname{ind} X$.

Demonstração. O teorema é óbvio se $\operatorname{ind} X = \infty$. Assim, consideraremos o caso $\operatorname{ind} X < \infty$. Usaremos indução finita sobre $\operatorname{ind} X$ para provar o resultado.

Claramente, a desigualdade é verdadeira se $\operatorname{ind} X = -1$. Suponha por hipótese de indução que o teorema é válido para todo espaço regular com dimensão $\leqslant n-1$. Suponha que $\operatorname{ind} X = n$. Sejam M um subespaço de X, $x \in M$ e uma vizinhança $V \subset M$ de x. Pela definição de topologia do subespaço, existe $V_1 \subset X$ aberto de X tal que $V = M \cap V_1$. Como $\operatorname{ind} X \leqslant n$, existe $U_1 \subset X$ aberto de X tal que

$$x \in U_1 \subset V_1 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{ind}(\partial U_1) \leqslant n-1.$$

O conjunto $U = M \cap U_1$ é aberto em M e satisfaz $x \in U \subset V$. A fronteira do conjunto U em M, $\partial_M(U) = M \cap (\overline{M \cap U_1}) \cap (\overline{M \backslash U_1})$. Assim a fronteira $\partial_M(U)$ é um subespaço de $\partial(U_1)$. Como $\operatorname{ind}(\partial U_1) \leqslant n-1$ segue por hipótese de indução que $\operatorname{ind}(\partial_M(U)) \leqslant \operatorname{ind}(\partial U_1) \leqslant n-1$. Logo, $\operatorname{ind} M \leqslant n$.

Portanto, $\operatorname{ind} M \leqslant \operatorname{ind} X = n$. □

Definição 1.2. *Seja X um espaço topológico. Sejam A e B subespaços disjuntos de X. Dizemos que um conjunto $L \subset X$ é uma partição entre A e B se existem conjuntos abertos U, $W \subset X$ satisfazendo as condições*

$$A \subset U, \quad B \subset W, \quad U \cap W = \emptyset \quad \text{e} \quad X \backslash L = U \cup W. \tag{1.1}$$

Claramente, a partição L é um subconjunto fechado de X.

Proposição 1.1. *Um espaço regular X tem a pequena dimensão* $\operatorname{ind} X \leqslant n$, *com* $n \geqslant 0$ *se, e somente se, para todo* $x \in X$ *e cada conjunto fechado* $B \subset X$ *tal que* $x \notin B$, *existe uma partição* L *entre* x *e* B *tal que* $\operatorname{ind} L \leqslant n-1$.

Demonstração. Seja X um espaço regular tal que $\operatorname{ind} X \leqslant n$ com $n \geqslant 0$. Considere $x \in X$ e um conjunto fechado $B \subset X$ tal que $x \notin B$. Como X é regular, existe uma vizinhança $V \subset X$ de x tal que $\overline{V} \subset X \backslash B$. Por hipótese $\operatorname{ind} X \leqslant n$, logo existe um conjunto aberto $U \subset X$ tal que $x \in U \subset V$ e $\operatorname{ind}(\partial U) \leqslant n-1$.

Note que o conjunto $L = \partial U$ é uma partição entre x e B, pois os conjuntos abertos U e $W = X \backslash \overline{U}$ satisfazem:

$$\{x\} \subset U, \quad B \subset X \backslash \overline{V} \subset X \backslash \overline{U} = W, \quad U \cap W = \emptyset \quad \text{e} \quad X \backslash L = U \cup W.$$

Reciprocamente, suponha que para todo $x \in X$ e cada conjunto fechado $B \subset X$ tal que $x \notin B$, existe uma partição L entre x e B tal que $\operatorname{ind} L \leqslant n-1$. Assim, dado x e uma vizinhança $V \subset X$ de x, existe L uma partição entre x e $B = X \backslash V$ tal que $\operatorname{ind} L \leqslant n-1$, com isso existem conjuntos abertos U e W satisfazendo as condições de (1.1). Temos,

$$x \in U \subset X \backslash W \subset X \backslash B = V \qquad \text{e}$$

$$\partial U = (\overline{X \backslash U}) \cap \overline{U} \subset (X \backslash U) \cap (X \backslash W) = X \backslash (U \cup W) = L,$$

assim $\operatorname{ind} \partial U \leqslant n-1$. Portanto, $\operatorname{ind} X \leqslant n$. □

Observação 1.1. *Obviamente, um espaço regular X satisfaz* $\operatorname{ind} X \leqslant n$ *com* $n \geqslant 0$ *se, e só se, X possui uma base $\mathscr{B}$ tal que* $\operatorname{ind} \partial U \leqslant n-1$ *para todo* $U \in \mathscr{B}$.

Lema 1.1. *Se um espaço topológico X tem base enumerável, então toda base $\mathscr{B}$ de X contém uma família enumerável $\mathscr{B}_0$ que é uma base para X*

Demonstração. Ver [3], página 6. □

A partir do lema acima, reescrevemos a Observação 1.1 na seguinte forma:

Teorema 1.2. *Um espaço métrico separável X satisfaz* $\operatorname{ind} X \leqslant n$ *com* $n \geqslant 0$ *se, e somente se, X tem base enumerável $\mathscr{B}$ tal que* $\operatorname{ind} \partial U \leqslant n-1$ *para todo* $U \in \mathscr{B}$.

1.2 Teoremas de separação e de alargamento para dimensão zero

Um espaço regular X tal que $\operatorname{ind} X = 0$ será chamado um espaço de dimensão zero. Abaixo, reescrevemos os resultados da seção anterior para os espaços de dimensão zero.

Proposição 1.2. *Um espaço regular X é um espaço de dimensão zero se, e somente se, X é não vazio e para todo $x \in X$ e cada vizinhança $V \subset X$ de x existe um conjunto aberto e fechado $U \subset X$ tal que $x \in U \subset V$.*

Proposição 1.3. *Todo subespaço não vazio de um espaço de dimensão zero é também de dimensão zero.*

Proposição 1.4. *Um espaço regular X é de dimensão zero se, e somente se, X é não vazio e para todo $x \in X$ e cada conjunto fechado $B \subset X$ tal que $x \notin B$ o conjunto vazio é uma partição entre x e B.*

Proposição 1.5. *Um espaço métrico separável X é de dimensão zero se, e somente se, X é não vazio e tem uma base enumerável de conjuntos abertos e fechados.*

Nesta seção introduziremos os teoremas de separação e o teorema de alargamento para dimensão zero. Antes disso, apresentamos alguns exemplos de espaços de dimensão zero.

Exemplo 1.2. *O espaço dos números irracionais, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, é de dimensão zero pois possui uma base enumerável que consiste de conjuntos abertos e fechados. A saber, os conjuntos da forma $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap (a, b)$, onde a, $b \in \mathbb{Q}$.*

Similarmente, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é de dimensão zero. Também $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ é de dimensão zero. Mais geralmente, se um espaço métrico (X, d) não vazio possui cardinalidade menor que a de $\mathbb{R}$, então $\operatorname{ind} X = 0$. *De fato, para todo $x \in X$ e cada vizinhança $V \subset X$ de x existe um número positivo r tal que $B(x, r) \subset V$, já que V é aberto. Também existe $t < r$ tal que $d(x, y) \neq t$ para todo $y \in X$, pois caso contrário todas as esferas de raio menor que r possuiriam um elemento de X e, assim, a cardinalidade de X seria pelo menos a do intervalo $(0, r)$, que por sua vez é igual a de $\mathbb{R}$, o que contradiz a hipótese. Note que $U = B(x, t)$ satisfaz a condição $x \in U \subset V$, é aberto e fechado, pois*

$$\partial U \subset \{y \in X \mid d(x, y) = t\} = \emptyset \Rightarrow \operatorname{ind} \partial U = -1.$$

Portanto, X é de dimensão zero.

Proposição 1.6. *Um subespaço $X \subset \mathbb{R}$ não vazio é de dimensão zero se, e somente se, ele não contém nenhum intervalo.*

Demonstração. De fato, suponha $X \subset \mathbb{R}$ de dimensão zero e contendo um intervalo (a, b). Pela Proposição 1.3, $\operatorname{ind}(a, b) = 0$. Assim, para todo $x \in X$ e cada $V \subset (a, b)$ vizinhança de x existe um conjunto aberto e fechado $U \subsetneq X$ tal que $x \in U \subset V$, o que contradiz a conexidade do intervalo (a, b). Logo, X não contém nenhum intervalo.

Reciprocamente, suponha que $X \subset \mathbb{R}$ não contém nenhum intervalo. Dado $x \in X$, os conjuntos da forma $X \cap (a, b)$, onde $a < x < b$ com a e $b \in \mathbb{R}$, constituem uma base para o espaço X no ponto x. Para cada $V = X \cap (a, b)$ pode–se encontrar um conjunto aberto e fechado $U \subset V$ tal que $x \in U \subset V$. Basta definir $U = X \cap (c, d)$, onde $c \in (a, x)\backslash X$ e $d \in (x, b)\backslash X$. Note que c e d existem pois X não contém nenhum intervalo e, daí, $(a, x) \nsubseteq X$ e $(x, b) \nsubseteq X$. Portanto, $\operatorname{ind} X = 0$. □

Exemplo 1.3. *O conjunto de Cantor $C \subset \mathbb{R}$ consiste de todos os números de $I = [0, 1]$ que tem uma extensão triádica em que o algarismo 1 não ocorre, isto é, o conjunto dos números da forma $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2x_i}{3^i}$, onde x_i é igual a 0 ou 1. Note que $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$, onde o conjunto F_1 é obtido de I removendo o intervalo do "meio" $(1/3, 2/3)$, o conjunto F_2 é obtido de F_1 removendo os intervalos do "meio" $(1/9, 2/9)$ e $(7/9, 8/9)$ de ambas as partes de F_1, e assim por diante.*

O conjunto F_i consiste de 2^i intervalos disjuntos de comprimento $1/3^i$.

Como C é fechado em I, temos que o conjunto de Cantor é subespaço compacto de $\mathbb{R}$. Observe também que o conjunto de Cantor é de dimensão zero pois não contém nenhum intervalo.

Teorema 1.3 (O primeiro teorema de separação para dimensão 0)**.** *Se X é um espaço métrico separável de dimensão zero, então para todo par A, B de subconjuntos disjuntos fechados em X, o conjunto vazio é uma partição entre A e B, isto é, existe um conjunto aberto e fechado $U \subset X$ tal que $A \subset U$ e $B \subset X\backslash U$.*

Demonstração. Para todo $x \in X$ temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$. Suponha que $x \notin B$ e tome $V = X \setminus B$. Logo, existe um conjunto aberto e fechado $W_x \subset X$ tal que $x \in W_x$ e

$$A \cap W_x = \emptyset \qquad \text{ou} \qquad B \cap W_x = \emptyset. \tag{1.2}$$

A cobertura aberta $\{W_x\}_{x \in X}$ de X possui uma subcobertura enumerável $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, pois X é um espaço métrico separável. Os conjuntos

$$U_i = W_{x_i} \setminus \left(\bigcup_{j<i} W_{x_j} \right) \subset W_{x_i}, \text{ onde } i \in \mathbb{N},$$

são abertos e constituem uma cobertura do espaço X. Defina

$$U = \bigcup \{U_i \mid A \cap U_i \neq \emptyset\} \qquad \text{e} \qquad W = \bigcup \{U_i \mid A \cap U_i = \emptyset\}.$$

Obviamente, $A \subset U$ e segue de (1.2) que $B \subset W$. Uma vez que os conjuntos U_i's são dois a dois disjuntos, $W = X \setminus U$, implicando que o conjunto U é aberto e fechado e $B \subset X \setminus U$. □

Observação 1.2. *Note que na prova do Teorema 1.3 a hipótese de X ser um espaço métrico separável pode ser substituída pela condição de X ser espaço de Lindelöf, isto é, um espaço regular que tem a propriedade que toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura enumerável.*

Definição 1.3. *Dois subconjuntos A e B de um espaço topológico X estão separados se*

$$A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B.$$

Os conjuntos A e B são separados se, e somente se, eles são disjuntos e abertos (ou fechados) em sua união, isto é, se $A \cap B = \emptyset$ e o conjunto vazio é uma partição entre A e B no subespaço $A \cup B$ de X.

O segundo teorema de separação para dimensão zero será deduzido dos dois seguintes lemas:

Lema 1.2. *Para todo par A, B de subconjuntos separados no espaço métrico (X, d) existem conjuntos abertos U, $W \subset X$ tais que*

$$A \subset U, \qquad B \subset W \qquad e \qquad U \cap W = \emptyset.$$

Demonstração. Defina $f : X \to \mathbb{R}^+$ por $f(x) = d(x, A)$ e $g : X \to \mathbb{R}^+$ por $g(x) = d(x, B)$, onde $d(x, Z)$ denota a distância do ponto x a um conjunto Z. Sabemos que f e g são contínuas, pois são funções lipschitzianas. Assim, os conjuntos

$$U = \{x \in X \mid f(x) - g(x) < 0\} \qquad \text{e} \qquad W = \{x \in X \mid f(x) - g(x) > 0\}$$

são abertos. Note que $A \subset U$ e $B \subset W$ pois $f^{-1}(0) = \overline{A}$, $g^{-1}(0) = \overline{B}$ e A e B são separados. A igualdade $U \cap W = \emptyset$ segue diretamente da definição de U e W. $\square$

Lema 1.3. *Sejam M um subespaço de um espaço métrico X e A, B um par de subconjuntos disjuntos fechados de X. Para toda partição L' no espaço M entre $M \cap \overline{V_1}$ e $M \cap \overline{V_2}$, onde V_1, V_2 são subconjuntos abertos de X tais que $A \subset V_1$, $B \subset V_2$ e $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$, existe uma partição L no espaço X entre A e B a qual satisfaz $M \cap L \subset L'$.*

Se M é um subespaço fechado de um espaço métrico X e A, B um par de subconjuntos disjuntos fechados de X, então para toda partição L' no espaço M entre $M \cap A$ e $M \cap B$ existe uma partição L no espaço X entre A e B satisfazendo $M \cap L \subset L'$.

Demonstração. Seja L' uma partição qualquer no espaço M entre $M \cap \overline{V_1}$ e $M \cap \overline{V_2}$. Então existem subconjuntos abertos U', W' de M tais que

$$M \cap \overline{V_1} \subset U', \quad M \cap \overline{V_2} \subset W', \quad U' \cap W' = \emptyset \quad \text{e} \quad M \backslash L' = U' \cup W'.$$

Provemos que

$$A \cap \overline{W'} = \emptyset = B \cap \overline{U'}. \tag{1.3}$$

De fato, sabemos que $V_1 \cap W' = M \cap V_1 \cap W' \subset U' \cap W' = \emptyset$ e, como o conjunto V_1 é aberto, temos $V_1 \cap \overline{W'} = \emptyset$, que implica $A \cap \overline{W'} = \emptyset$. Do mesmo modo prova-se $B \cap \overline{U'} = \emptyset$.

Os conjuntos U' e W' são disjuntos e abertos na sua união, assim eles estão separados, isto é,

$$U' \cap \overline{W'} = \emptyset = \overline{U'} \cap W'. \tag{1.4}$$

Os subconjuntos $A \cup U'$ e $B \cup W'$ estão separados. Com efeito, seja $x \in (A \cup U') \cap (\overline{B \cup W'})$. Se $x \in A$ então, por (1.3), $x \notin \overline{W'}$. Sabe-se também que $x \in \overline{B \cup W'} \subset \overline{B} \cup \overline{W'}$. Logo, $x \in \overline{B} = B$ é absurdo, pois $A \cap B = \emptyset$. Agora se $x \in U'$, por (1.3) temos $x \notin B = \overline{B}$ e por (1.4) $x \notin \overline{W'}$. Logo, $x \notin \overline{B \cup W}$, absurdo. Portanto, $(A \cup U') \cap (\overline{B \cup W'}) = \emptyset$. Do mesmo modo prova-se que $(\overline{A \cup U'}) \cap (B \cup W') = \emptyset$.

Pelo Lema 1.2, existem conjuntos abertos U, $W \subset X$ tais que

$$A \cup U' \subset U, \qquad B \cup W' \subset W \qquad \text{e} \qquad U \cap W = \emptyset.$$

O conjunto $L = X \backslash (U \cup W)$ é uma partição no espaço X entre A e B. Note que

$$M \cap L = M \backslash (U \cup W) \subset M \backslash (U' \cup W') = L'.$$

O que prova a primeira parte do Lema 1.3.

Para provar a segunda parte, seja L' uma partição entre $M \cap A$ e $M \cap B$ em M, ou seja, existem conjuntos abertos U_1, W_1 em M satisfazendo:

$$M \cap A \subset U_1, \quad M \cap B \subset W_1, \quad U_1 \cap W_1 = \emptyset \quad \text{e} \quad M \backslash L' = U_1 \cup W_1.$$

Como $A \cap (M \backslash U_1) = \emptyset$, $B \cap (M \backslash W_1) = \emptyset$ e X é um espaço métrico (e assim, X é normal) existem conjuntos abertos V_1, V_2 em X tais que

$$A \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset X \backslash (M \backslash U_1),$$

$$B \subset V_2 \subset \overline{V_2} \subset X \backslash (M \backslash W_1) \text{ e } \overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset.$$

Obviamente, L' é uma partição entre $M \cap \overline{V_1}$ e $M \cap \overline{V_2}$ em M pois os abertos U_1, W_1 em M satisfazem às condições de (1.1).

Aplicando a primeira parte do Lema 1.3, existe uma partição L entre A e B em X e $M \cap L \subset L'$. $\square$

Teorema 1.4 (O segundo teorema de separação para dimensão 0)**.** *Se X é um espaço métrico arbitrário e Z é um subespaço separável e de dimensão zero de X, então para todo par A, B de subconjuntos fechados disjuntos de X existe uma partição L entre A e B tal que $L \cap Z = \emptyset$.*

Demonstração. Considere os conjuntos abertos $V_1, V_2 \subset X$ tais que $A \subset V_1$, $B \subset V_2$ e $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$. Pelo Teorema 1.3, o conjunto vazio é uma partição no espaço Z entre $Z \cap \overline{V_1}$ e $Z \cap \overline{V_2}$. Aplicando a primeira parte do Lema 1.3, obtemos a partição L desejada. $\square$

Proposição 1.7. *Seja M um subespaço separável de um espaço métrico X. Então M é de dimensão zero se, e somente se, $M \neq \emptyset$ e para todo $x \in M$ e cada vizinhança V de x no espaço X existe um conjunto aberto U em X tal que*

$$x \in U \subset V \qquad e \qquad M \cap \partial U = \emptyset.$$

Demonstração. Dado $x \in M$ e V uma vizinhança de x em X, tome $B = X \backslash V$. Assim, $\{x\}$ e B são fechados disjuntos do espaço métrico X. Pelo segundo teorema de separação, existe uma partição L entre $\{x\}$ e B tal que $L \cap M = \emptyset$. Ou seja, existem conjuntos abertos U, $W \subset X$ tal que

$$\{x\} \subset U, \quad B \subset W, \quad U \cap W = \emptyset \quad \text{e} \quad X \backslash L = U \cup W.$$

Para provar que $M \cap \partial U = \emptyset$ basta mostrar que $\partial U \subset L$, ou seja, $X \backslash L \subset X \backslash \partial U$. De fato, seja $x \in X \backslash L = U \cup W$. Então $x \in U$ ou $x \in W$. Se $x \in U$, como U é aberto, segue que $x \notin \partial U$. Agora, se $x \in W$, como W é aberto, segue que $x \notin \partial U$.

Portanto, $x \in U \subset V$ e $M \cap \partial U = \emptyset$.

Reciprocamente, suponha M não vazio e que para todo $x \in M$ e cada vizinhança V de x no espaço X existe um conjunto aberto U em X tal que $x \in U \subset V$ e $M \cap \partial U = \emptyset$. Seja V' uma vizinhança de x em M, i.e., $V' = V \cap M$ para algum aberto V de X contendo x. Então, para U aberto em X tal que $x \in U \subset V$ e $M \cap \partial U = \emptyset$, temos que $U' = U \cap M$ é uma vizinhança de x em M, $U' \subset V'$ e $\partial U'$ em M é vazia. Portanto, $\operatorname{ind} M = 0$. □

Proposição 1.8. *Um subespaço M de um espaço métrico separável X é de dimensão zero se, e somente se, $M \neq \emptyset$ e X tem uma base enumerável $\mathscr{B}$ tal que*

$$M \cap \partial U = \emptyset, \text{ para todo } U \in \mathscr{B}.$$

Demonstração. Suponha M de dimensão zero. Então, para todo $x \in M$ e cada vizinhança V de x no espaço X, existe um conjunto aberto $U \subset X$ tal que $x \in U \subset V$ e $\partial_M(U) = M \cap \partial U = \emptyset$. Assim $\mathscr{C} = \{U \subset X \text{ aberto} \mid \partial U \cap M = \emptyset\}$ é uma base de X. Como X é separável segue que X tem base enumerável. Pelo Lema 1.1, $\mathscr{C}$ contém uma família enumerável $\mathscr{B}$ que é uma base para X.

Reciprocamente, suponha $M \neq \emptyset$ e que X tem uma base enumerável $\mathscr{B}$ tal que $M \cap \partial U = \emptyset$, para todo $U \in \mathscr{B}$. Então, $\mathscr{B}_M = \{U \cap M \mid U \in \mathscr{B}\}$ é uma base enumerável para M e $\partial_M(U \cap M) = M \cap \partial U = \emptyset$. Logo, pelo Teorema 1.2, segue que $\operatorname{ind} M = 0$. □

Podemos perguntar neste momento se todo subespaço de dimensão zero de um espaço pode ser ampliado para um subespaço de dimensão zero com alguma propriedade. O exemplo do subespaço $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ mostra que, geralmente, subespaços de dimensão zero não podem ser ampliados a subespaços de dimensão zero fechados. O teorema abaixo mostra que estes subespaços podem ser ampliados para G_δ–conjuntos de dimensão zero.

Definição 1.4. *Um subconjunto A do espaço X é um G_δ–conjunto se A é uma interseção enumerável de conjuntos abertos de X. E, A é um F_δ–conjunto se A é uma união enumerável de conjuntos fechados.*

Exemplo 1.4. *Seja (X, d) um espaço métrico. Todo subconjunto fechado $B \subset X$ é um G_δ–conjunto e todo subconjunto aberto $U \subset X$ é um F_δ–conjunto.*

O conjunto dos números irracionais, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, é um G_δ–conjunto. De fato, como $\mathbb{Q}$ é enumerável, podemos escrever $\mathbb{Q} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$. Considere $U_i = \mathbb{R} \backslash \{x_i\}$, que é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. Portanto,

$$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i.$$

Teorema 1.5 (O teorema de alargamento para dimensão 0)**.** *Para todo subespaço separável de dimensão zero Z de um espaço métrico X, existe um G_δ–conjunto Z^* em X tal que $Z \subset Z^*$ e Z^* é de dimensão zero.*

Demonstração. Como todo subconjunto fechado de um espaço métrico é um G_δ–conjunto, temos que $\overline{Z}$ é G_δ–conjunto em X. Se existe um G_δ–conjunto em um subespaço que é um G_δ–conjunto em X, então este subconjunto é um G_δ–conjunto no espaço X. Assim, podemos assumir que $\overline{Z} = X$, com isso X é separável. Pela Proposição 1.8, temos uma base enumerável $\mathscr{B}$ em X tal que $Z \cap \partial U = \emptyset$ para todo $U \in \mathscr{B}$.

Note que $F = \cup\{\partial U \mid U \in \mathscr{B}\}$ é um F_δ–conjunto, e seu complementar, $Z^* = X \backslash F$, é um G_δ–conjunto que contém o conjunto Z. Da Proposição 1.8, segue que Z^* é de dimensão zero pois X tem base enumerável $\mathscr{B}$ e $Z^* \cap \partial U = \emptyset$ para todo $U \in \mathscr{B}$. $\square$

O Teorema 1.3 fornece duas propriedades equivalentes para espaços métricos separáveis de dimensão zero: a propriedade que o conjunto vazio é uma partição entre quaisquer dois conjuntos fechados disjuntos A, B e a propriedade que o conjunto vazio é uma partição entre todo $x \in X$ e cada conjunto fechado B tal que $x \notin B$.

Exemplo 1.5. *Considere o espaço de Hilbert H cujos elementos são sequências $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de números reais tais que a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ é convergente. Para todo $x = (x_i) \in H$, a norma de x é*

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2},$$

e a distância entre $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$ é definida por

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}.$$

Com isso, (H, d) é um espaço métrico.

Mostraremos que no subespaço $H_0 = \{x \in H \mid x_i \in \mathbb{Q}, \forall i \in \mathbb{N}\}$ de H, o conjunto vazio é uma partição entre quaisquer dois pontos distintos x, y e ainda H_0 não é de dimensão zero.

Considere um par $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ de pontos distintos de H_0. Então, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Sem perda de generalidade, pode-se assumir que $x_{i_0} < y_{i_0}$. Tome $t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tal que $x_{i_0} < t < y_{i_0}$, e defina

$$W = \{z \in H_0 \mid z_{i_0} < t\}.$$

Veja que W é um conjunto aberto e fechado em H_0.

Como $x \in W \subset H_0\backslash\{y\}$, o conjunto vazio é uma partição entre x e y. Agora, seja $x_0 \in H_0$ a sequência cujos termos são todos iguais a zero e seja $V = B(x_0, 1) = \{x \in H_0 \mid \|x\| < 1\}$. Mostremos que toda vizinhança U de x_0 que está contida em V possui fronteira não nula, ou seja, $\partial U \neq \emptyset$.

Definiremos, por indução, uma sequência a_1, a_2, $\ldots$ de números racionais tal que

$$x_k = (a_1, a_2, \ldots, a_k, 0, 0, \ldots) \in U \qquad e \qquad d(x_k, H_0\backslash U) \leqslant 1/k, \tag{1.5}$$

para $k = 1, 2, \ldots$. As condições em (1.5) estão satisfeitas para $k = 1$ se $a_1 = 0$. Suponha que os números racionais a_1, a_2, $\ldots$, a_{m-1} satisfazem as condições em (1.5) para $k \leqslant m-1$. A sequência

$$x_i^m = (a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, i/m, 0, 0, \ldots)$$

é um elemento de H_0 para $i = 1, 2, \ldots, m$. Como $x_0^m = x_{m-1} \in U$ e $x_m^m \notin U$ pois $\|x_m^m\| \geqslant 1$, existe um $i_0 < m$ tal que $x_{i_0}^m \in U$ e $x_{i_0+1}^m \notin U$.

Para $k = m$ e $a_m = \frac{i_0}{m}$ vemos facilmente que as condições em (1.5) estão satisfeitas e, assim, a sequência a_1, a_2, $\ldots$ está definida. Da primeira parte de (1.5) segue que $\sum_{i=1}^{k} a_i^2 < 1$ para $k = 1, 2, \ldots$, daí $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \leqslant 1$. Logo, $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in H_0$ e $a \in \overline{U}$. Por outro lado, da segunda parte de (1.5), segue que $a \in \overline{H_0\backslash U}$. Deste modo, $a \in \partial U$ e, portanto, $\partial U \neq \emptyset$.

Logo, H_0 não é de dimensão zero.

1.3 Resultados da teoria de dimensão para espaços de dimensão zero

Provaremos nesta seção dois resultados importantes para espaços de dimensão zero: o Teorema da Soma e o Teorema do Produto Cartesiano. Nas próximas seções provaremos estes resultados para espaços de dimensões quaisquer.

Outro teorema abordado será o Teorema do Espaço Universal para dimensão zero: o conjunto de Cantor e o espaço dos números irracionais são espaços universais para a classe dos espaços métricos separáveis de dimensão zero. Este resultado foi estabelecido por W. Sierpiński em 1921.

Teorema 1.6 (O teorema da soma para dimensão 0). *Se X é um espaço métrico separável tal que $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$, onde os F_i's são subespaços fechados de dimensão zero, então X é de dimensão zero.*

Demonstração. Considere um par de subconjuntos fechados disjuntos A, B no espaço X. Para concluir que X é de dimensão zero, vamos mostrar que o conjunto vazio é uma partição entre A e B, isto é, existem conjuntos abertos U, W de X tais que

$$A \subset U, \quad B \subset W, \quad U \cap W = \emptyset \quad \text{e} \quad X = U \cup W. \tag{1.6}$$

Sejam U_0, W_0 conjuntos abertos de X tais que

$$A \subset U_0, \qquad B \subset W_0, \qquad \text{e} \qquad \overline{U_0} \cap \overline{W_0} = \emptyset. \tag{1.7}$$

Vamos definir indutivamente duas sequências $U_0, U_1, U_2, \ldots$ e $W_0, W_1, W_2, \ldots$ de subconjuntos abertos de X satisfazendo as seguintes condições para $i = 0, 1, 2, \ldots$:

$$U_{i-1} \subset U_i, \quad W_{i-1} \subset W_i \quad \text{se } i \geqslant 1 \quad \text{e} \quad \overline{U}_i \cap \overline{W}_i = \emptyset. \tag{1.8}$$

$$F_i \subset U_i \cup W_i, \qquad \text{onde} \qquad F_0 = \emptyset. \tag{1.9}$$

Claramente os conjuntos U_0, W_0 definidos acima satisfazem ambas as condições para $i = 0$. Suponha, por hipótese de indução, que os conjuntos U_i, W_i satisfazem (1.8) e (1.9) para todo $i < k$.

Como F_k é de dimensão zero e os conjuntos $\overline{U}_{k-1} \cap F_k$ e $\overline{W}_{k-1} \cap F_k$ são fechados e disjuntos em F_k, existe um subconjunto aberto e fechado V de F_k (pelo Teorema 1.3) tal que

$$\overline{U}_{k-1} \cap F_k \subset V \qquad \text{e} \qquad \overline{W}_{k-1} \cap F_k \subset F_k \backslash V. \tag{1.10}$$

O conjunto F_k sendo fechado em X, implica que os conjuntos V e $F_k\backslash V$ são também fechados em X; segue de (1.10) que

$$(\overline{U}_{k-1} \cup V) \cap [\overline{W}_{k-1} \cup (F_k\backslash V)] = (V \cap \overline{W}_{k-1}) \cup [\overline{U}_{k-1} \cap (F_k\backslash V)] = \emptyset,$$

assim existem conjuntos abertos U_k, $W_k \subset X$ satisfazendo

$$\overline{U}_{k-1} \cup V \subset U_k, \qquad \overline{W}_{k-1} \cup (F_k\backslash V) \subset W_k \quad \text{e} \quad \overline{U}_k \cap \overline{W}_k = \emptyset.$$

Os conjuntos U_k, W_k satisfazem (1.8) e (1.9) para $i = k$, assim podemos construir as sequências U_0, U_1, U_2, ... e W_0, W_1, W_2, ... desejadas.

Segue de (1.7), (1.8) e (1.9) que

$$U = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i \qquad \text{e} \qquad W = \bigcup_{i=0}^{\infty} W_i$$

satisfazem (1.6). $\square$

Corolário 1.1. *Se um espaço métrico separável X pode ser representado como a união de uma sequência F_1, F_2, ... de subespaços de dimensão zero, onde F_i é F_δ–conjunto $\forall i$, então X é de dimensão zero.*

Corolário 1.2. *Se um espaço métrico separável $X = A \cup B$, onde A e B são subespaços de dimensão zero, com um deles fechado, então X é de dimensão zero.*

Demonstração. Suponha que A é fechado. O conjunto aberto $X\backslash A \subset B$ é de dimensão zero pois B é de dimensão zero. Como todo subconjunto aberto de um espaço métrico é um F_δ–conjunto e $X = A \cup (X\backslash A)$, segue do Corolário 1.1 que X é de dimensão zero. $\square$

Corolário 1.3. *Se juntarmos um número finito de pontos a um espaço métrico separável de dimensão zero, obtemos então um espaço métrico separável de dimensão zero.*

Demonstração. Seja $X = Y \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$, onde Y é um espaço métrico separável de dimensão zero. Como Y é separável, segue que X também o é. O subconjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é fechado de X. Então, pelo Corolário 1.2, X é de dimensão zero. $\square$

Teorema 1.7 (O teorema do produto cartesiano para dimensão 0)**.** *O produto cartesiano $X = \prod_{i \in J} X_i$ de uma família $\{X_i\}_{i\in J}$ de espaços regulares é de dimensão zero se, e somente se, todos espaços X_i são de dimensão zero.*

Demonstração. Suponha X de dimensão zero. Logo, X é não vazio e, então, cada X_i é homeomorfo a um subespaço não vazio de X. Logo, todos os subespaços X_i são de dimensão zero.

Por outro lado, se todos os X_i's são de dimensão zero, então existem bases $\mathscr{B}_i$ de X_i formadas por conjuntos abertos e fechados de X_i. Logo, os conjuntos da forma

$$\prod_{i\in S} U_i \times \prod_{i\in J-S} X_i,$$

onde S é um subconjunto finito de J e $U_i \in \mathscr{B}_i$ para $i \in S$, constituem uma base para X e são abertos e fechados em X.

Portanto, X é de dimensão zero. $\square$

Seja $(I, \leqslant)$ um conjunto dirigido. Dado uma família $(X_i)_{i\in I}$ de espaços topológicos, se existir uma família de funções contínuas $\pi_j^i : X_j \to X_i$ para todo $i \leqslant j$ com as seguintes propriedades

(1) π_i^i é a identidade em X_i para todo i;

(2) $\pi_j^i = \pi_k^i \circ \pi_j^k$ para todo $i \leqslant k \leqslant j$;

então o par (X_i, π_j^i) é chamado de sequência inversa de espaços topológicos e funções contínuas sobre I.

O limite da sequência inversa (ou limite inverso) é um par (X, π_i), onde X é um espaço topológico e $\{\pi_i : X \to X_i\}_{i\in I}$ é uma família de funções contínuas satisfazendo $\pi_i = \pi_j^i \circ \pi_j$ para todo $i \leqslant j$ e, além disso, se (Y, ψ_i) é outro limite para a sequência inversa, então existe uma única função contínua $\varphi : Y \to X$ tal que o diagrama comute (equivalentemente $\psi_i = \pi_i \circ \varphi$ para todo i)

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ddl, "\psi_j"'] \arrow[ddr, "\psi_i"] & \\
 & X \arrow[dl, "\pi_j"'] \arrow[dr, "\pi_i"] & \\
X_j \arrow[rr, "\pi_j^i"'] & & X_i.
\end{tikzcd}$$

Observamos que o limite inverso pode ser visto como um subconjunto do produto cartesiano $\prod\limits_{i\in I} X_i$. De fato, sejam

$$X = \left\{ x \in \prod_{i\in I} X_i \mid x_i = \pi_j^i(x_j), \forall i \leqslant j \in I \right\}$$

e $\pi_i : X \to X_i$ a restrição em X da projeção canônica, para $i \in I$. Note que $\pi_i = \pi^i_j \circ \pi_j$ para todo $i \leqslant j$. Agora, se (Y, ψ) é um limite para a sequência inversa (X_i, π^i_j), provemos que existe uma função contínua $\varphi : Y \to X$ tal que $\psi_i = \pi_i \circ \varphi$. De fato, defina $\varphi : Y \to X$ por $\varphi(y) = (\psi_i(y))_{i \in I}$. Veja que φ é contínua porque suas funções coordenadas o são e $\varphi(y) = (\psi_i(y))_{i \in I} \in X$, pois para $i \leqslant j$, $\pi^i_j(\psi_j(y)) = \psi_i(y)$.

Obviamente $\psi_i = \pi_i \circ \varphi$ e, portanto, (X, π_i) é o limite inverso.

Corolário 1.4. *O limite de uma sequência inversa (X_i, π^i_j) de espaços de dimensão zero é ou de dimensão zero ou vazio.*

Demonstração. Como o limite inverso é um subconjunto do produto $\prod\limits_{i \in I} X_i$, que é de dimensão zero, segue imediatamente que o limite da sequência inversa (X_i, π^i_j) é ou de dimensão zero ou vazio. $\square$

Agora com os Teoremas da soma e do produto cartesiano temos mais exemplos de espaços de dimensão zero.

Exemplo 1.6. *Para todo par k, $n \in \mathbb{Z}$ satisfazendo $0 \leqslant k \leqslant n$ e $n \geqslant 1$, denote por $\mathbb{Q}^n_k$ o subespaço de $\mathbb{R}^n$ consistindo de todos pontos que tem exatamente k coordenadas racionais. Provaremos que $\mathbb{Q}^n_k$ é um espaço de dimensão zero.*

Para cada escolha de k números naturais distintos $i_1, \ldots, i_k$ não maiores que n e cada escolha de k números racionais $r_1, \ldots, r_k$, o produto cartesiano $\prod\limits_{i=1}^{n} R_i$, onde $R_{i_j} = \{r_j\}$ para $j = 1, \ldots, k$ e $R_i = \mathbb{R}$ para $i \neq i_j$, é um subespaço fechado de $\mathbb{R}^n$. Assim, $\mathbb{Q}^n_k \cap \prod\limits_{i=1}^{n} R_i$ é um subespaço fechado de $\mathbb{Q}^n_k$.

Como o espaço $\mathbb{Q}^n_k \cap \prod\limits_{i=1}^{n} R_i$ é homeomorfo ao subespaço de $\mathbb{R}^{n-k}$ com todas as coordenadas irracionais, segue do Exemplo 1.2 e Teorema 1.7 que este espaço é de dimensão zero. Veja que $\mathbb{Q}^n_k$ é a união enumerável dos subespaços $\mathbb{Q}^n_k \cap \prod\limits_{i=1}^{n} R_i$ e, assim, pelo Teorema 1.6, $\mathbb{Q}^n_k$ é de dimensão zero.

Definição 1.5. *Dizemos que um espaço topológico X é universal em uma classe $\mathscr{K}$ de espaços topológicos se X pertence a $\mathscr{K}$ e todo espaço na classe $\mathscr{K}$ é homeomorfo a um subespaço de X.*

Provaremos agora que o conjunto de Cantor, C, e o espaço dos números irracionais, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, são espaços universais para a classe de todos espaços métricos separáveis de dimensão zero. Para isso usaremos o fato que ambos espaços podem ser representados como produto cartesiano enumerável de espaços discretos.

Proposição 1.9. *O conjunto de Cantor C é homeomorfo ao produto cartesiano $D^{\aleph_0} = \prod_{i=1}^{\infty} D_i$, onde $D_i = \{0, 1\}$ para $i = 1, 2, \ldots$.*

Demonstração. Para cada $x \in C$ a representação na forma $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2x_i}{3^i}$, onde os x_i's são iguais a 0 ou 1, é única. Assim, podemos definir uma função bijetora

$$\begin{aligned} f : D^{\aleph_0} &\to C \\ \{x_i\} &\mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2x_i}{3^i}. \end{aligned}$$

Defina $f_j : D^{\aleph_0} \to I = [0, 1]$ por $f_j(\{x_i\}) = \frac{2x_j}{3^j}$ para $j = 1, 2, \ldots$. Observe que f_j é contínua para todo j e que a série $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ é uniformemente convergente para f. Logo, f é contínua. Como $D^{\aleph_0}$ é compacto e C é Hausdorff, segue que f é um homeomorfismo. $\square$

Concluímos que o conjunto de Cantor é de dimensão zero pois $D^{\aleph_0}$ é de dimensão zero.

Lema 1.4. *Sejam d uma métrica arbitrária no espaço $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ que gera a topologia induzida de $\mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$. Para todo conjunto aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, existe uma sequência $F_1, F_2, \ldots$ de subconjuntos simultaneamente abertos e fechados de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, não vazios, dois a dois disjuntos, tais que $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ e os diâmetros de todos os conjuntos F_i com respeito a d são menores que ϵ.*

Demonstração. Considere um intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ com extremidades racionais tais que $(a, b) \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \subset U$ e o divida em $\aleph_0$ intervalos não vazios, dois a dois disjuntos, $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$, com extremidades racionais. Assim temos

$$(a, b) \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

onde $A_i = (a_i, b_i) \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, com a_i, $b_i \in \mathbb{Q}$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ quando $i \neq j$. Considere $A_0 = U\backslash(a, b)$, os conjuntos A_0, A_1, A_2, $\ldots$ são aberto em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e pela Proposição 1.5 para cada $i = 0, 1, 2, \ldots$ existem conjuntos abertos e fechados $A_{i,1}$, $A_{i,2}$, $\ldots$ em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ todos de diâmetro menores que ϵ tais que $A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$. Considere

$$B_{i,j} = A_{i,j} \backslash \bigcup_{k<j} A_{i,k}$$

para $j = 1, 2, \ldots$. Os subconjuntos $B_{i,j}$ são abertos e fechados em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, dois a dois disjuntos, cuja união é igual a A_i. Para completar a prova basta organizar todos os conjuntos não vazios $B_{i,j}$ em uma simples sequência F_1, F_2, $\ldots$. □

Definição 1.6. *Um espaço topológico (X, τ) é completamente metrizável se existe uma métrica d em X tal que (X, d) é um espaço métrico completo e d induz a topologia τ.*

Lema 1.5. *Todo G_δ–conjunto X em um espaço completamente metrizável X_0 é também completamente metrizável.*

Demonstração. Sejam d uma métrica no espaço X_0 tal que (X_0, d) seja completo e $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$, onde G_i é aberto em X_0 para $i = 1, 2, \ldots$.

Definimos os conjuntos fechados $F_i = X_0\backslash G_i$ e as funções contínuas $f_i : X \to \mathbb{R}$ por $f_i(x) = \dfrac{1}{d(x, F_i)}$ para $i = 1, 2, \ldots$. Note que $f(x) = (x, f_1(x), f_2(x), \ldots)$ define um mergulho $f : X \to \prod_{i=0}^{\infty} X_i$, onde $X_i = \mathbb{R}$ para $i \geqslant 1$.

Como o produto cartesiano de uma quantia enumerável de espaços completamente metrizáveis e um subespaço fechado de um espaço completamente metrizável são completamente metrizáveis, para completar a prova é suficiente mostrar que $f(X)$ é um subconjunto fechado de $\prod_{i=0}^{\infty} X_i$.

Mostremos que todo $x = \{x_i\} \in \prod_{i=0}^{\infty} X_i\backslash f(X)$ possui uma vinhança V contida no complementar de $f(X)$.

Primeiro considere o caso onde $x_0 \in X$. Como $x \notin f(X)$, existe $k > 0$ tal que $x_k \neq f_k(x_0)$. Sejam U_1 e U_2 vizinhanças disjuntas de x_k e $f_k(x_0)$ em $\mathbb{R}$. Como a função f_k é contínua, existe uma vizinhança $U_0 \subset X_0$ de x_0 tal que $f_k(U_0 \cap X) \subset U_2$. Facilmente verifica-se que

$$x = \{x_i\} \in V = p_0^{-1}(U_0) \cap p_k^{-1}(U_1) \subset \prod_{i=0}^{\infty} X_i\backslash f(X),$$

onde p_i denota a projeção de $\prod_{i=0}^{\infty} X_i$ em X_i.

Agora, considere o caso onde $x_0 \notin X$. Assim, $x_0 \in F_k$ para algum $k > 0$. Considere um número $r > 0$ tal que $x_k + 1 < 1/r$ e seja $U_0 = B(x_0, r)$ e $U_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < x_k + 1\}$. Logo,

$$x = \{x_i\} \in V = p_0^{-1}(U_0) \cap p_k^{-1}(U_1) \subset \prod_{i=0}^{\infty} X_i\backslash f(X),$$

que conclui a prova. $\square$

Proposição 1.10. *Um espaço métrico X é completo se, e somente se, para toda sequência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$ de subconjuntos fechados não vazios de X, com $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, existe um ponto $a \in X$ tal que*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}.$$

Demonstração. Ver [8], página 189. $\square$

Proposição 1.11. *O espaço dos números irracionais $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é homeomorfo ao produto cartesiano $\mathbb{N}^{\aleph_0} = \prod_{i=1}^{\infty} N_i$, onde N_i é o espaço discreto dos números naturais $\mathbb{N}$, para $i = 1, 2, \ldots$.*

Demonstração. Sabemos que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é um G_δ–conjunto. Assim, pelo Lema 1.5, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é completamente metrizável, isto é, existe uma métrica d em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tal que $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, d)$ é um espaço métrico completo.

Pelo Lema 1.4, para $\epsilon = 1$, existem subconjuntos não vazios, abertos e fechados $F_1, F_2, \ldots$ em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, dois a dois disjuntos, tais que

$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \bigcup_{k_1=1}^{\infty} F_{k_1} \quad \text{e} \quad \operatorname{diam}(F_{k_1}) < 1.$$

Como F_{k_1} é aberto, então pelo mesmo lema, para $\epsilon = 1/2$ existem subconjuntos com as mesma propriedades tais que

$$F_{k_1} = \bigcup_{k_2=1}^{\infty} F_{k_1k_2} \quad \text{e} \quad \operatorname{diam}(F_{k_2}) < \frac{1}{2}.$$

Aplicando o mesmo raciocínio sucessivamente temos, para toda sequência $k_1, k_2, \ldots, k_i$ de números naturais existe um subconjunto aberto e fechado $F_{k_1k_2\ldots k_i}$ em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tal que

$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \bigcup_{k_1=1}^{\infty} F_{k_1} \quad \text{e} \quad F_{k_1k_2\ldots k_i} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{k_1k_2\ldots k_ik} \tag{1.11}$$

$$F_{k_1k_2\ldots k_i} \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \operatorname{diam}(F_{k_1k_2\ldots k_i}) < \frac{1}{i} \tag{1.12}$$

$$F_{k_1\ldots k_i} \cap F_{m_1\ldots m_i} = \emptyset \quad \text{se} \quad (k_1, \ldots, k_i) \neq (m_1, \ldots, m_i). \tag{1.13}$$

Segue de (1.11) e (1.12) que para todo $(k_i) \in \mathbb{N}^{\aleph_0}$ os subconjuntos $F_{k_1}, F_{k_1k_2}, \ldots$ de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ formam uma sequência $F_{k_1} \supset F_{k_1k_2} \supset F_{k_1k_2k_3} \supset \ldots$ de conjuntos fechados não vazios com o diâmetro convergindo para zero. Então, pela Proposição 1.10, o conjunto $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_{k_1k_2\ldots k_i}$ contém exatamente um ponto, que denotaremos por $f((k_i))$. Assim, definimos a função $f : \mathbb{N}_0^{\aleph} \to \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Note que f é injetora por (1.13) e sobrejetora por (1.11).

Provemos que os subconjuntos $F_{k_1k_2\ldots k_n}$ formam uma base para $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Dado $x \in U$, onde U é aberto de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon/2) \subset U$. Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$. Assim,

$$F_{k_1\ldots k_n} \subset B(x, \epsilon/2) \Rightarrow x \in F_{k_1\ldots k_n} \subset U.$$

Agora, seja $y \in F_{k_1\ldots k_i} \cap F_{m_1\ldots m_j}$ com $i < j$. Então, $F_{k_1\ldots k_i} \cap F_{m_1\ldots m_i} \neq \emptyset$ e, assim, $(k_1 \ldots k_i) = (m_1 \ldots m_i)$. Sabemos que $F_{k_1\ldots k_i \ldots m_j} \subset F_{k_1\ldots k_i}$, logo $x \in F_{m_1\ldots m_j} = F_{k_1\ldots k_i} \cap F_{m_1\ldots m_j}$.

A função f é um homeomorfismo, pois

$$f^{-1}(F_{k_1\ldots k_j}) = \{k_1\} \times \{k_2\} \times \ldots \times \{k_j\} \times \prod_{i=j+1}^{\infty} N_i \quad \text{e}$$

$$f\left(\{k_1\} \times \{k_2\} \times \ldots \times \{k_j\} \times \prod_{i=j+1}^{\infty} N_i\right) = F_{k_1\ldots k_j}.$$

$\square$

Temos que o espaço dos números irracionais é de dimensão zero pois $\mathbb{N}^{\aleph_0}$ é de dimensão zero.

Corolário 1.5. *O conjunto de Cantor é homeomorfo a um subespaço do espaço dos números irracionais.*

Teorema 1.8 (O teorema do espaço universal para dimensão 0)**.** *O conjunto de Cantor e o espaço dos números irracionais são espaços universais para a classe dos espaços métricos separáveis de dimensão zero.*

Demonstração. Pelo Corolário 1.5, é suficiente mostrar que para todo espaço métrico separável de dimensão zero X existe um mergulho $f : X \to D^{\aleph_0}$.

Segue da Proposição 1.5 que o espaço X tem base enumerável $\mathscr{B} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ formada por conjuntos abertos e fechados. Para cada $i = 1, 2, \ldots$ defina uma função contínua $f_i : X \to D_i = \{0, 1\}$ por

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in U_i, \\ 0, & \text{se } x \in X\backslash U_i \end{cases},$$

ou seja, $f_i = \chi_{U_i}$. Considere a função contínua $f : X \to D^{\aleph_0}$ definida por

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots).$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$f(U_k) = f(X) \cap \{\{x_i\} \in D^{\aleph_0} \mid x_k = 1\}.$$

Logo, a função f é injetora e aberta, pois $\{\{x_i\} \in D^{\aleph_0} \mid x_k = 1\}$ é um conjunto aberto em $D^{\aleph_0}$. Portanto, f é um mergulho. $\square$

Pala demonstração do Teorema 1.8, temos que o conjunto dos números irracionais pode ser mergulhado no conjunto de Cantor. Por isso dizemos que ambos espaços são universais para a classe dos espaços métricos separáveis de dimensão zero.

Os Teoremas de compactificação e de mergulho são consequências do Teorema do espaço universal.

Teorema 1.9 (O teorema de compactificação para dimensão 0). *Para todo espaço métrico separável de dimensão zero X existe uma compactificação de dimensão zero $\widetilde{X}$, isto é, um espaço métrico compacto $\widetilde{X}$ de dimensão zero que contém um subespaço denso homeomorfo a X.*

Demonstração. Como C é universal, seja $f : X \to C$ um mergulho do espaço X de dimensão zero no conjunto de Cantor C. Como o conjunto de Cantor é compacto, segue que $\overline{f(X)}$ é compacto e, assim, $\widetilde{X} = \overline{f(X)}$ é uma compactificação de X. Note que $\widetilde{X}$ é de dimensão zero, pois $\widetilde{X} \subset C$ e $\widetilde{X} \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 1.10 (O teorema do mergulho para dimensão 0). *Todo espaço métrico separável de dimensão zero pode ser mergulhado em $\mathbb{R}$.*

Observe que a teoria desenvolvida nesta seção é obtida principalmente dos seguintes teoremas: os teoremas de separação, da soma e do espaço universal. Todos os outros resultados ou são elementares ou decorrem diretamente destes.

1.4 Vários tipos de desconexidade

Vamos comparar a classe de espaços de dimensão zero com outras três classes de espaços de Hausdorff desconexos. Primeiramente definiremos uma quase componente de um espaço X.

Definição 1.7. *Dizemos que $x \sim y$ se, e somente se, não existe separação $X = A \cup B$ tal que $x \in A$ e $y \in B$. A classe de equivalência de x, denotada por $[x]$, é chamada quase componente.*

Equivalentemente, um conjunto não vazio $K \subset X$ é uma quase componente de X se K pode ser representado como a interseção de conjuntos abertos e fechados e para todo conjunto aberto e fechado $U \subset X$ tal que $K \cap U \neq \emptyset$ temos $K \subset U$.

Definição 1.8. *Um espaço topológico X é chamado totalmente desconexo se para todo par distinto x e y em X, existe um conjunto aberto e fechado $U \subset X$ tal que $x \in U$ e $y \in X \backslash U$, isto é, se o conjunto vazio é uma partição entre quaisquer dois pontos distintos do espaço X.*

Claramente, todo espaço de dimensão zero é totalmente desconexo. Espaços totalmente desconexos são caracterizados pela propriedade que suas quase componentes são conjuntos unitários. As quase componentes de um espaço X constituem uma decomposição de X em subconjuntos fechados dois a dois disjuntos.

Definição 1.9. *Um espaço topológico X é chamado hereditariamente desconexo se X não contém nenhum subespaço conexo de cardinalidade maior do que um.*

Todo espaço totalmente desconexo é hereditariamente desconexo. De fato, se X é totalmente desconexo, então para cada subespaço $M \subset X$ que contém pelo menos dois pontos distintos x, y, os conjuntos $M \cap U$ e $M \backslash U$, onde U é um subconjunto aberto e fechado de X tal que $x \in U$ e $y \in X \backslash U$, formam uma decomposição do espaço M em dois subconjuntos abertos não vazios. Assim, o espaço M não é conexo.

Espaços hereditariamente desconexos são caracterizados pela propriedade que suas componentes conexas são conjuntos unitários. Lembremos que a componente conexa do ponto x em um espaço topológico X é definida como o maior subconjunto conexo, não vazio, de X contendo x. As componentes conexas de um espaço X constituem uma decomposição para este em subconjuntos fechados, dois a dois disjuntos.

Definição 1.10. *Um espaço topológico X é chamado puntiforme, ou descontínuo, se X não contém nenhum subespaço continuum de cardinalidade maior do que um.*

Claramente, todo espaço hereditariamente desconexo é puntiforme. Se o espaço for compacto, a recíproca é verdadeira.

Podemos facilmente verificar que as três classes de espaços acima são fechadas com respeito a operação subespaço.

Agora, mostraremos que nos espaços localmente compactos não vazios, as três classes coincidem com a classe de espaços de dimensão zero.

Definição 1.11. *Um espaço X é dito localmente compacto se para todo $x \in X$ existem $K \subset X$ compacto e $V \subset X$ aberto tais que $x \in V \subset K$.*

Lema 1.6. *Em todo espaço Hausdorff compacto, as quase componentes e as componentes conexas coincidem.*

Demonstração. Para começar, provemos que em um espaço topológico arbitrário X as quase componentes contém as componentes. Considere uma componente S do espaço X. Sejam $x \in S$ e K a quase componente de X que contém x. Mostremos que $S \subset K$. Com efeito, dado um conjunto aberto e fechado $U \subset X$ que contém x, os conjuntos $S \cap U$ e $S \backslash U$ são abertos disjuntos em S e $S \cap U \neq \emptyset$. Segue da conexidade de S que $S \backslash U = \emptyset$, ou seja, $S \subset U$. Como K é a interseção de todos os subconjuntos abertos e fechados de X que contém x, temos $S \subset K$.

Para completar a prova é suficiente mostrar que as quase componentes de um espaço compacto são conexas. Suponha que existe uma separação $K = A \cup B$ com A, B fechados disjuntos em K e $A \neq \emptyset$. Pela normalidade dos espaços compactos de Hausdorff, existem conjuntos abertos V, $W \subset X$ tais que

$$A \subset V, \quad B \subset W \quad \text{e} \quad V \cap W = \emptyset.$$

Denote por $\mathscr{U}$ a família de subconjuntos abertos e fechados de X satisfazendo $\cap \mathscr{U} = K$. Como $\cap \mathscr{U} = K = A \cup B \subset V \cup W$, a família $\mathscr{F} = \{U \backslash (V \cup W) \mid U \in \mathscr{U}\}$ de subconjuntos fechados de X tem interseção vazia, ou seja, $\cap (U \backslash (V \cup W) = \cap \mathscr{U} \backslash (V \cup W) = \emptyset$.

Segue da compacidade de X que uma subfamília finita de $\mathscr{F}$ também tem interseção vazia, isto é, existe um número finito de conjuntos $U_1, \ldots, U_k \in \mathscr{U}$ satisfazendo

$$U = U_1 \cap \ldots \cap U_k \subset V \cup W$$

e o conjunto U é aberto e fechado. Note que

$$\overline{V \cap U} \subset \overline{V} \cap U = \overline{V} \cap [(V \cup W) \cap U] = [(\overline{V} \cap V) \cup (\overline{V} \cap W)] \cap U = V \cap U,$$

e assim, o conjunto $V \cap U$ é aberto e fechado. Sabemos que $\emptyset \neq A \subset V \cap U \Rightarrow K \subset V \cap U$, e daí

$$B \subset K \cap W \subset V \cap U \cap W \subset V \cap W = \emptyset.$$

Portanto, a quase componente K é conexa. $\square$

Teorema 1.11. *Zero dimensionalidade, total desconexidade, hereditariamente desconexidade e puntiforme são classes equivalentes em espaços localmente compactos não vazios.*

Demonstração. É suficiente provar que todo espaço localmente compacto puntiforme não vazio é de dimensão zero. Suponha que X é puntiforme. Sejam $x \in X$ e $V \subset X$ uma vizinhança de x. Pela compacidade local do espaço X, existe uma vizinhança $W \subset X$ de x tal que $\overline{W} \subset V$ e $\overline{W}$ é compacto. O subespaço $M = \overline{V \cap W}$ do espaço X é compacto e puntiforme, assim ele é hereditariamente desconexo. Pelo Lema 1.6, a componente $\{x\}$ do espaço M pode ser representada como a interseção de uma família $\mathscr{U}$ de subconjuntos abertos e fechados de M. Segue da compacidade de M que existe um número finito de conjuntos $U_1, U_2, \ldots, U_k \in \mathscr{U}$ tal que a interseção $U = U_1 \cap \cdots \cap U_k$ é disjunta do conjunto $M \backslash (V \cap W)$. O conjunto U é fechado em M e, assim, é fechado em X, mas por outro lado U é aberto em $V \cap W$. Logo, U é aberto e fechado em X. Como $x \in U \subset V$, o espaço X é de dimensão zero. $\square$

1.5 Os teoremas da soma, decomposição, adição, alargamento, separação e produto cartesiano

Sabemos que todo subespaço M de um espaço regular X tem $\operatorname{ind} M \leqslant \operatorname{ind} X$. Com isso, podemos perguntar se entre os subespaços de um espaço X de dimensão n pode-se encontrar subespaços de todas as dimensões entre 0 e $n-1$. A resposta é sim e, além disso, o próximo teorema garante que existem subespaços fechados de dimensões intermediárias.

Teorema 1.12. *Se X é um espaço regular e* $\operatorname{ind} X = n \geqslant 1$*, então para cada $k = 0, 1, \ldots, n-1$ o espaço X contém um subespaço fechado M tal que* $\operatorname{ind} M = k$.

Demonstração. É suficiente mostrar que X contém um subespaço fechado M tal que $\operatorname{ind} M = n-1$. Como $\operatorname{ind} X > n-1$, existe um ponto $x \in X$ e uma vizinhança $V \subset X$ de x tal que para todo conjunto aberto $U \subset X$ satisfazendo a condição $x \in U \subset X$ temos $\operatorname{ind} \partial U > n-2$. Por outro lado, como $\operatorname{ind} X \leqslant n$, existe um conjunto aberto $U \subset X$ satisfazendo a condição acima e tal que $\operatorname{ind} \partial U \leqslant n-1$. O subespaço fechado $M = \partial U$ do espaço X tem a dimensão $\operatorname{ind} M = n-1$. $\square$

Lema 1.7. *Se $X = Y \cup Z$ é um espaço métrico separável, onde* $\operatorname{ind} Y \leqslant n-1$ *e* $\operatorname{ind} Z \leqslant 0$*, então* $\operatorname{ind} X \leqslant n$.

Demonstração. Considere um ponto $x \in X$ e uma vizinhança $V \subset X$ do ponto x. Pelo Teorema 1.4, existem conjuntos abertos disjuntos $U, W \subset X$ tais que $x \in U$, $X \backslash V \subset W$ e $[X \backslash (U \cup W)] \cap Z = \emptyset$. Claramente, $x \in U \subset V$ e, como

$$\partial U \subset [X \backslash (U \cup W)] \subset X \backslash Z \subset Y,$$

temos $\operatorname{ind} \partial U \leqslant \operatorname{ind} Y \leqslant n - 1$. Segue que $\operatorname{ind} X \leqslant n$. □

Teorema 1.13 (Teorema da Soma). *Se $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ é um espaço métrico separável, onde os F_i's são subespaços fechados tais que* $\operatorname{ind} F_i \leqslant n$, *então* $\operatorname{ind} X \leqslant n$.

Demonstração. Vamos aplicar indução sobre n. Para $n = 0$ o teorema já foi provado. Assuma que o teorema vale para dimensões menores que n e considere um espaço $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, onde F_i é fechado e $\operatorname{ind} F_i \leqslant n$ com $n \geqslant 1$ para $i = 1, 2, \ldots$. Aplicando o Teorema 1.2, escolha para cada i, uma base enumerável $\mathscr{B}_i$ de F_i tal que $\operatorname{ind} \partial U \leqslant n - 1$ para todo $U \in \mathscr{B}_i$. Pela hipótese de indução, o subespaço $Y = \bigcup \{\partial U : U \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}_i\}$ do espaço X satisfaz a desigualdade $\operatorname{ind} Y \leqslant n-1$. Considere $Z_i = F_i \backslash Y$; como F_i tem base enumerável $\mathscr{B}_i$ tal que $Z_i \cap \partial U \subset Z_i \cap Y = \emptyset$, para todo $U \in \mathscr{B}_i$, segue da Proposição 1.8 que $\operatorname{ind} Z_i \leqslant 0$. Logo, pelo Teorema da soma para dimensão 0, o subespaço $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i = X \backslash Y$ do espaço X também satisfaz $\operatorname{ind} Z \leqslant 0$, pois os subespaços $Z_i = F_i \backslash Y = F_i \cap Z$ são fechados em Z. Assim, pelo Lema 1.7, temos $\operatorname{ind} X \leqslant n$. □

Corolário 1.6. *Se $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ é um espaço métrico separável, onde os F_i's são F_δ–conjuntos tais que* $\operatorname{ind} F_i \leqslant n$, *então* $\operatorname{ind} X \leqslant n$.

Demonstração. Note que $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{i,j}$, onde $E_{i,j}$ é fechado. Como $\operatorname{ind} E_{i,j} \leqslant \operatorname{ind} F_i \leqslant n$, segue do Teorema 1.13 que $\operatorname{ind} X \leqslant n$. □

Corolário 1.7. *Se $X = A \cup B$ é um espaço métrico separável, um deles fechado, tal que* $\operatorname{ind} A \leqslant n$ *e* $\operatorname{ind} B \leqslant n$, *então* $\operatorname{ind} X \leqslant n$.

Demonstração. Suponha que A é fechado, então B é aberto. Logo, A e B são F_δ–conjuntos. Portanto, $\operatorname{ind} X \leqslant n$ pelo Corolário 1.6. □

Corolário 1.8. *Se $Y = X \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$, onde X é um espaço métrico separável tal que* $\operatorname{ind} X \leqslant n$ *e $\{a_1, \ldots, a_n\}$ é um número finito de pontos em X, então Y é um espaço métrico separável e* $\operatorname{ind} Y \leqslant n$.

Demonstração. $Y = X \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$ é um espaço métrico separável pois X é métrico e separável. Como $\operatorname{ind}\{a_1, \ldots, a_n\} = 0 \leqslant n$, $\operatorname{ind} X \leqslant n$ e $\{a_1, \ldots, a_n\}$ é fechado, segue do Corolário 1.7 que $\operatorname{ind} Y \leqslant n$. □

Notemos que o Teorema da soma desempenha um papel importante na teoria de dimensão dos espaço métricos separáveis. De fato, todos os resultados desta seção seguem ou do Teorema da soma ou de um dos teoremas de decomposição que são consequências do Teorema da soma.

Aplicando o Teorema da soma, mostra-se que a condição no Lema 1.7 caracteriza espaço métricos separáveis de dimensão $\leqslant n$:

Teorema 1.14 (O primeiro teorema da decomposição). *Um espaço métrico separável X satisfaz $\operatorname{ind} X \leqslant n$ com $n \geqslant 0$ se, e somente se, $X = Y \cup Z$ tais que $\operatorname{ind} Y \leqslant n-1$ e $\operatorname{ind} Z \leqslant 0$.*

Demonstração. Considere um espaço métrico separável X tal que $\operatorname{ind} X \leqslant n$, com $n \geqslant 0$. Pelo Teorema 1.2, o espaço X tem base enumerável $\mathscr{B}$ tal que $\operatorname{ind} \partial U \leqslant n-1$ para todo $U \in \mathscr{B}$. Segue do Teorema da soma que o subespaço $Y = \bigcup\{\partial U \mid U \in \mathscr{B}\}$ tem dimensão $\leqslant n-1$ e, da Proposição 1.8, o subespaço $Z = X \backslash Y$ tem dimensão $\leqslant 0$. A recíproca já foi provada no Lema 1.7. □

Teorema 1.15 (O segundo teorema da decomposição). *Um espaço métrico separável X satisfaz $\operatorname{ind} X \leqslant n$ com $n \geqslant 0$ se, e somente se,*

$$X = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i, \quad \textit{tal que} \quad \operatorname{ind} Z_i \leqslant 0, \ \forall i.$$

Demonstração. Como $\operatorname{ind} X \leqslant n$ segue do Teorema 1.14 que $X = Y_1 \cup Z_1$ com $\operatorname{ind} Y_1 \leqslant n-1$ e $\operatorname{ind} Z_1 \leqslant 0$. De mesmo modo, como $\operatorname{ind} Y_1 \leqslant n-1$ segue que $Y_1 = Y_2 \cup Z_2$ com $\operatorname{ind} Y_2 \leqslant n-2$ e $\operatorname{ind} Z_2 \leqslant 0$. Sucessivamente temos

$$\operatorname{ind} Y_{n-1} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad Y_{n-1} = Y_n \cup Z_n \quad \text{com} \quad \operatorname{ind} Y_n \leqslant 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{ind} Z_n \leqslant 0.$$

Chame $Y_n = Z_{n+1}$, logo $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i$, com $\operatorname{ind} Z_i \leqslant 0$.

Reciprocamente, suponha que $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i$, tal que $\operatorname{ind} Z_i \leqslant 0$. Usaremos a indução sobre n para provar que $\operatorname{ind} X \leqslant n$. Para $n = 0$, claramente o resultado é válido. Por hipótese de indução, suponha válido para n, isto é, se $X = \bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ com $\operatorname{ind} Z_i \leqslant 0$ então $\operatorname{ind} X \leqslant n-1$. Agora se $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} Z_i\right) \bigcup Z_{n+1}$ então pelo primeiro teorema da decomposição $\operatorname{ind} X \leqslant n$. □

Exemplo 1.7. *Uma decomposição de $\mathbb{R}^n$ em $n+1$ subespaços de dimensão zero como no segundo teorema de decomposição é dada por:*

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{Q}_0^n \cup \mathbb{Q}_1^n \cup \cdots \cup \mathbb{Q}_n^n,$$

lembrando que $\mathbb{Q}_k^n$ é o subespaço de $\mathbb{R}^n$ consistindo de todos pontos que tem exatamente k coordenadas racionais. Portanto, $\operatorname{ind} \mathbb{R}^n \leqslant n$.

Para todo par k, n de inteiros satisfazendo $0 \leqslant k \leqslant n$ e $n \geqslant 1$, defina

$$\mathbb{N}_k^n = \mathbb{Q}_0^n \cup \mathbb{Q}_1^n \cup \cdots \cup \mathbb{Q}_k^n \quad e \quad \mathbb{L}_k^n = \mathbb{Q}_k^n \cup \mathbb{Q}_{k+1}^n \cup \cdots \cup \mathbb{Q}_n^n.$$

Assim $\mathbb{N}_k^n$ é o subespaço de $\mathbb{R}^n$ consistindo de todos os pontos que tem no máximo k coordenadas racionais e $\mathbb{L}_k^n$ é o subespaço de $\mathbb{R}^n$ consistindo de todos os pontos que tem no mínimo k coordenadas racionais. Do segundo teorema de decomposição segue que $\operatorname{ind} \mathbb{N}_k^n \leqslant n$ e $\operatorname{ind} \mathbb{L}_k^n \leqslant n-k$.

Note que o Teorema da adição segue imediatamente do segundo Teorema da decomposição:

Teorema 1.16 (O teorema da adição)**.** *Para todo par X, Y de subespaços separáveis de um espaço métrico temos*

$$\operatorname{ind}(X \cup Y) \leqslant \operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y + 1.$$

Demonstração. Se $\operatorname{ind} X = \infty$ ou $\operatorname{ind} Y = \infty$ o resultado é válido. Suponha que $\operatorname{ind} X = n$ e $\operatorname{ind} Y = k$. Pelo segundo teorema de decomposição temos que X é a união de $n+1$ subespaços de dimensão $\leqslant 0$ e Y é a união de $k+1$ subespaços de dimensão $\leqslant 0$. Assim,

$$X \cup Y = \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{k} F_j\right) \cup F_{k+1}.$$

Como $\operatorname{ind} F_{k+1} \leqslant 0$ e $\operatorname{ind}\left((\cup Z_i) \cup (\cup F_i)\right) \leqslant n+k$ segue que $\operatorname{ind}(X \cup Y) \leqslant n+k+1$. Portanto,

$$\operatorname{ind}(X \cup Y) \leqslant \operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y + 1.$$

□

Teorema 1.17 (O teorema de alargamento)**.** *Para todo subespaço separável M de um espaço métrico X satisfazendo* $\operatorname{ind} M \leqslant n$*, existe um G_δ-conjunto M^* em X tal que $M \subset M^*$ e* $\operatorname{ind} M^* \leqslant n$.

Demonstração. Pelo primeiro teorema de decomposição $M = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i$, onde $\operatorname{ind} Z_i \leqslant 0$ para $i = 1, \ldots, n+1$. Aplicando o teorema 1.5, alargamos cada Z_i a um G_δ-conjunto Z_i^* em X tal que $\operatorname{ind} Z_i^* \leqslant 0$. A união $M^* = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i^*$ tem a propriedade desejada pois, pelo Teorema 1.15, temos $\operatorname{ind} M^* \leqslant n$ e, além disso, M^* é G_δ-conjunto pois união finita de G_δ-conjuntos também o é (veja [2], página 75, 6.3 item b). $\square$

Teorema 1.18 (Primeiro Teorema de Separação)**.** *Se X é um espaço métrico separável tal que* $\operatorname{ind} X \leqslant n$ *com $n \geqslant 0$, então para todo par A, B de subconjuntos fechados disjuntos de X existe uma partição L entre A e B tal que* $\operatorname{ind} L \leqslant n-1$.

Demonstração. Pelo Primeiro Teorema de Decomposição, temos $X = Y \cup Z$, onde $\operatorname{ind} Y \leqslant n-1$ e $\operatorname{ind} Z \leqslant 0$. Aplicando o Teorema 1.4, obtemos uma partição L entre A e B no espaço X tal que $L \cap Z = \emptyset$. Como $L \subset X \backslash Z \subset Y$, temos $\operatorname{ind} L \leqslant \operatorname{ind} Y \leqslant n-1$. $\square$

Teorema 1.19 (Segundo Teorema de Separação)**.** *Se X é um espaço métrico separável e M é um subespaço separável de X tal que* $\operatorname{ind} M \leqslant n$ *com $n \geqslant 0$, então para todo par A, B de subconjuntos fechados em X existe uma partição L entre A e B tal que* $\operatorname{ind}(L \cap M) \leqslant n-1$.

Demonstração. Pelo Primeiro Teorema de Decomposição, existe uma partição L' entre $M \cap A$ e $M \cap B$ em M tal que $\operatorname{ind} L' \leqslant n-1$. Pela segunda parte do Lema 1.3, existe uma partição L entre A e B em X tal que $M \cap L \subset L'$. Portanto, $\operatorname{ind}(M \cap L) \leqslant n-1$. $\square$

Observe que o Primeiro Teorema de Separação é um caso especial do Segundo. E o Segundo Teorema de Separação caracteriza a dimensão dos subespaços em termos das vizinhanças em todo o espaço. O teorema abaixo é uma generalização da Proposição 1.7.

Proposição 1.12. *Um subespaço separável M de um espaço métrico X satisfaz* $\operatorname{ind} M \leqslant n$ *com $n \geqslant 0$ se, e somente se, para todo $x \in M$ e cada vizinhança V de x no espaço X existe um conjunto aberto $U \subset X$ tal que*

$$x \in U \subset V \qquad e \qquad \operatorname{ind}(M \cap \partial U) \leqslant n-1.$$

Demonstração. Sejam $x \in M$ e $V \subset X$ uma vizinhança de x qualquer. Então, pelo Segundo Teorema de Separação, existe uma partição L entre $\{x\}$ e $X \backslash V$ tal que $\operatorname{ind}(M \cap L) \leqslant n-1$, isto é, existem conjuntos abertos disjuntos U e W em X tais que

$$x \in U \subset V, \qquad X \backslash V \subset W, \qquad X \backslash L = U \cup W \quad \text{e}$$

$$M \cap \partial U \subset M \cap [X \backslash (U \cup W)] \subset M \cap L.$$

Logo, $\operatorname{ind}(M \cap \partial U) \leqslant n-1$.

A reciproca é imediata. $\square$

A Proposição 1.12 e o Lema 1.1 implicam na seguinte generalização da Proposição 1.8.

Proposição 1.13. *Um subespaço M de um espaço métrico separável X satisfaz $\operatorname{ind} M \leqslant n$ com $n \geqslant 0$ se, e somente se, X tem uma base enumerável $\mathscr{B}$ tal que $\operatorname{ind}(M \cap \partial U) \leqslant n-1$, para todo $U \in \mathscr{B}$.*

Demonstração. Suponha $\operatorname{ind} M \leqslant n$. Então, para todo $x \in M$ e cada $V \subset X$ vizinhança de x, existe um conjunto aberto $U \subset X$ tal que $x \in U \subset V$ e $\operatorname{ind}(M \cap \partial U) \leqslant n-1$. A família $\mathscr{C} = \{U \subset X \text{ aberto } \mid \operatorname{ind}(M \cap \partial U) \leqslant n-1\}$ é uma base do espaço X. Assim, X possui base enumerável, uma vez que X é um espaço métrico separável. Pelo Lema 1.1, $\mathscr{C}$ contém uma base enumerável $\mathscr{B}$ de X com a propriedade desejada.

A recíproca segue imediatamente da Proposição 1.12. $\square$

Teorema 1.20 (O Teorema do Produto Cartesiano)**.** *Para todo par X, Y de espaços métricos separáveis, dos quais pelo menos um é não vazio, temos*

$$\operatorname{ind}(X \times Y) \leqslant \operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y.$$

Demonstração. O teorema é óbvio se um dos espaços tem dimensão ∞, assim podemos supor que $K(X,Y) = \operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y$ é finita. Aplicaremos indução sobre este número $K(X,Y)$. Se $K(X,Y) = -1$ então ou $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$, e nossa desigualdade é verdadeira. Assuma que a desigualdade é válida para todo par de espaços métricos separáveis tal que a soma das dimensões é menor que $k \geqslant 0$ e considere os espaços métricos separáveis X e Y tais que $\operatorname{ind} X = n \geqslant 0$,

$\operatorname{ind} Y = m \geqslant 0$ e $n+m=k$. Seja $(x,y) \in X \times Y$ e $W \subset X \times Y$ uma vizinhança de (x,y). Existem vizinhanças $U, U' \subset X$ de x e $V, V' \subset Y$ de y tais que $U' \times V' \subset W$, $U \subset U'$, $V \subset V'$, $\operatorname{ind} \partial U \leqslant n-1$ e $\operatorname{ind} \partial V \leqslant m-1$. Note que

$$\partial(U \times V) \subset (X \times \partial V) \cup (\partial U \times Y)\,.$$

Pelo Teorema da Soma, temos $\operatorname{ind}((X \times \partial V) \cup (\partial U \times Y)) \leqslant k-1$ pois, por hipótese de indução, $\operatorname{ind}(X \times \partial V) \leqslant k-1$ e $\operatorname{ind}(\partial U \times Y) \leqslant k-1$. Logo, $\operatorname{ind} \partial(U \times V) \leqslant k-1$. Portanto, $\operatorname{ind}(X \times Y) \leqslant k$, concluindo que

$$\operatorname{ind}(X \times Y) \leqslant \operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y.$$

□

Daremos um exemplo de um espaço métrico separável H_0 tal que

$$\operatorname{ind}(H_0 \times H_0) < \operatorname{ind} H_0 + \operatorname{ind} H_0.$$

Exemplo 1.8. *Considere o subespaço H_0 do espaço de Hilbert H assim como definido no exemplo 1.5. Provemos que* $\operatorname{ind} H_0 = 1$. *Para isso, é suficiente mostrar que* $\operatorname{ind} H_0 \leqslant 1$, *pois* $\operatorname{ind} H_0 > 0$.

Para todo ponto $x \in H_0$ podemos transportado por uma translação para o ponto $x_0 \in H$ que é a sequência nula, é suficiente mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a fronteira

$$F_n = \left\{ x \in H_0 \mid \|x\| = \frac{1}{n} \right\}$$

da bola aberta com centro em x_0 e raio $1/n$,

$$U_n = \left\{ x \in H_0 \mid \|x\| < \frac{1}{n} \right\}$$

é de dimensão zero.

Como $\operatorname{ind} \mathbb{Q}^{\aleph_0} = 0$ *e a função contínua $h : F_n \to \mathbb{Q}^{\aleph_0}$ definida por $h((x_i)) = (x_i)$ é um mergulho, temos que* $\operatorname{ind} F_n = \operatorname{ind} h(F_n) \leqslant \operatorname{ind} \mathbb{Q}^{\aleph_0} = 0$.

Agora, mostraremos que H_0 é homeomorfo a $H_0 \times H_0$. Dado $(x,y) = ((x_i),(y_i)) \in H_0 \times H_0$, defina $\varphi(x,y) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) \in H_0$. Claramente $\varphi : H_0 \times H_0 \to H_0$ é uma bijeção. Provemos *que φ é contínua. Sejam $(a,b) \in H_0 \times H_0$ e $\epsilon > 0$. Existe $\delta = \epsilon > 0$ tal que para todo $(x,y) \in H_0 \times H_0$, $d((x,y),(a,b)) < \delta \Rightarrow \sqrt{d(x,a)^2 + d(y,b)^2} < \delta \Rightarrow$*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - a_i)^2 + \sum_{i=1}^{\infty}(y_i - b_i)^2} < \delta,$$

então $d(\varphi(x,y),\varphi(a,b)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - a_i)^2 + (y_i - b_i)^2} < \delta = \epsilon$. Do mesmo modo conclui-se que φ^{-1} é contínua. Portanto, H_0 é homeomorfo a $H_0 \times H_0$ e, assim, $\mathrm{ind}(H_0 \times H_0) = 1$.

Observe que os produtos cartesianos $H_0^2, H_0^3, H_0^4, \ldots$ são todos homeomorfos a H_0, então a dimensão destes espaços é 1.

1.6 Caracterização da dimensão em termos de funções em esferas

Nesta seção iremos relacionar a dimensão de um espaço X com o problema de extensão de funções contínuas definidas em subconjuntos fechados de X e com valores em esferas para todo o espaço X.

Dizemos que uma função contínua $f : A \to Y$, onde A é um subespaço fechado de X, possui extensão contínua sobre X se existe uma função contínua $F : X \to Y$ tal que $F|A = f$, isto é, $F(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. Um resultado importante sobre extensão de funções é o Teorema de Tietze–Urysohn, que afirma: toda função contínua $f : A \to I$, onde A é um subespaço fechado de um espaço normal X e I é o intervalo fechado $[0,1]$, possui extensão contínua sobre X. O Lema de Urysohn é um caso especial deste teorema. Ele afirma que para todo par A, B de subconjuntos fechados disjuntos de um espaço normal X existe uma função contínua $f : X \to I$ tal que $f(A) \subset \{0\}$ e $f(B) \subset \{1\}$. Quando X é um espaço métrico, a função f do Lema de Urysohn pode ser obtida da seguinte maneira:

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

O Teorema de Tietze–Urysohn implica que toda função contínua $f : A \to I^n$, onde A é um subespaço fechado do espaço normal X, possui uma extensão contínua $F : X \to I^n$ de f sobre X. De fato, para cada $i = 1, \ldots, n$, a função contínua $p_i \circ f : A \to I$, onde $p_i : I^n \to I$ é a projeção na i-ésima coordenada, possui uma extensão contínua $F_i : X \to I$. Portanto, $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$ é uma extensão contínua de f sobre X.

Já quando consideramos funções em esferas, isto é, X normal, $A \subset X$ fechado e $f : A \to S^n$ contínua, o que conseguimos em termos de extensão é o seguinte: para toda função contínua $f : A \to S^n$ existe um conjunto aberto $U \subset X$ contendo A tal que f possui extensão contínua sobre U. Com efeito, como S^n é homeomorfo a ∂I^{n+1}, podemos considerar $f : A \to I^{n+1}$ e, pela observação acima, existe uma função contínua $F_0 : X \to I^{n+1}$ tal que $F_0(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. Considere o conjunto aberto $U = F_0^{-1}(I^{n+1} \backslash \{a\}) \subset X$, onde $a = (1/2, \ldots, 1/2)$. Seja p a projeção radial de $I^{n+1} \backslash \{a\}$ em $\partial I^{n+1} \approx S^n$. Assim, $F = p \circ F_0|U : U \to S^n$ é a extensão desejada.

Em geral, funções contínuas em esferas não podem ser estendidas de um subespaço fechado para todo o espaço. Vamos mostrar que estender tais funções depende exclusivamente da dimensão do complementar do subespaço fechado.

Lema 1.8. *Seja X um espaço métrico separável e A um subespaço fechado de X tal que* $\operatorname{ind}(X \backslash A) \leqslant n$ *com $n \geqslant 0$. Para todo par A_1, A_2 de subconjuntos fechados de A tal que $A = A_1 \cup A_2$, existem subespaços fechados X_1, X_2 do espaço X que satisfazem às condições:*

$$X = X_1 \cup X_2, \quad A_1 \subset X_1, \quad A_2 \subset X_2, \quad A_1 \cap X_2 = A_1 \cap A_2 = X_1 \cap A_2 \tag{1.14}$$

e

$$\operatorname{ind}\left[(X_1 \cap X_2) \backslash (A_1 \cap A_2)\right] \leqslant n - 1. \tag{1.15}$$

Demonstração. Os conjuntos $A_1 \backslash A_2 = A_1 \backslash (A_1 \cap A_2)$ e $A_2 \backslash A_1 = A_2 \backslash (A_1 \cap A_2)$ são disjuntos e fechados no subespaço $X \backslash (A_1 \cap A_2)$ de X. Pelo Segundo Teorema de Separação, existe uma partição L entre $A_1 \backslash A_2$ e $A_2 \backslash A_1$ em $X \backslash (A_1 \cap A_2)$ tal que $\operatorname{ind}\left[L \cap (X \backslash A)\right] \leqslant n - 1$. Uma vez que

$$L \cap A = [L \cap (A_1 \backslash A_2)] \cup [L \cap (A_2 \backslash A_1)] \cup [L \cap (A_1 \cap A_2)] = \emptyset,$$

podemos reescrever a última desigualdade como $\operatorname{ind} L \leqslant n - 1$.

Considere os conjuntos abertos disjuntos U, $V \subset X \backslash (A_1 \cap A_2)$ que satisfazem:

$$A_1 \backslash A_2 \subset U, \quad A_2 \backslash A_1 \subset V \quad \text{e} \quad [X \backslash (A_1 \cap A_2)] \backslash L = U \cup V.$$

Note que os conjuntos U e V são abertos em X. Mostraremos que os seus complementares $X_1 = X \backslash V$ e $X_2 = X \backslash U$ satisfazem (1.14) e (1.15).

Primeiro,

$$X_1 \cup X_2 = (X \backslash V) \cup (X \backslash U) = X \backslash (U \cap V) = X,$$

$$A_1 = (A_1 \backslash A_2) \cup (A_1 \cap A_2) \subset U \cup [X \backslash (U \cup V)] \subset X \backslash V = X_1,$$

e similarmente $A_2 \subset X_2$. Então,

$$A_1 \cap A_2 \subset A_1 \cap X_2 = A_1 \backslash U \subset A_1 \backslash (A_1 \backslash A_2) = A_1 \cap A_2;$$

assim $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap X_2$ e similarmente $A_1 \cap A_2 = X_1 \cap A_2$. Finalmente, como $X_1 \cap X_2 = X \backslash (U \cup V) = L \cup (A_1 \cap A_2)$, temos $[(X_1 \cap X_2) \backslash (A_1 \cap A_2)] = L$ e, portanto, $\operatorname{ind}[(X_1 \cap X_2) \backslash (A_1 \cap A_2)] \leqslant n-1$. □

Teorema 1.21. *Se X é um espaço métrico separável e A é um subespaço fechado de X tal que $\operatorname{ind}(X \backslash A) \leqslant n$ com $n \geqslant 0$, então para toda função contínua $f : A \to S^n$ existe uma extensão contínua $F : X \to S^n$ de f sobre X.*

Demonstração. Vamos aplicar indução com respeito a n. Quando $n = 0$, a função f toma valores no espaço $S^0 = \{-1, 1\}$ e segue do Lema 1.8, aplicado aos conjuntos $A_1 = f^{-1}(\{1\})$ e $A_2 = f^{-1}(\{-1\})$, que existem subespaços fechados X_1, X_2 do espaço X tais que $X = X_1 \cup X_2$, $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$ e $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. A função contínua $F : X \to S^0$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in X_1, \\ -1, & \text{se} \quad x \in X_2, \end{cases}$$

é uma extensão contínua de f.

Considere agora $n \geqslant 1$ e assuma que o teorema é válido para toda função contínua $h : A \to S^{n-1}$. Seja $f : A \to S^n$ uma função contínua definida num subespaço fechado A de um espaço métrico separável X tal que $\operatorname{ind}(X \backslash A) \leqslant n$. Denote por S^n_+ e S^n_- os hemisférios superior e inferior de S^n, respectivamente. Seja $A_1 = f^{-1}(S^n_+)$ e $A_2 = f^{-1}(S^n_-)$. Como $S^n_+ \cap S^n_- = S^{n-1}$, temos a restrição $g = f|A_1 \cap A_2 : A_1 \cap A_2 \to S^{n-1}$. Aplicando o Lema 1.8, obtemos subespaços fechados X_1, $X_2 \subset X$ que satisfazem (1.14) e (1.15). De (1.15) e por hipótese de indução segue que a função contínua $g : A_1 \cap A_2 \to S^{n-1}$ tem uma extensão contínua $G : X_1 \cap X_2 \to S^{n-1}$ sobre o subespaço $X_1 \cap X_2$ do espaço X. Desde que $A_1 \cap X_2 = A_1 \cap A_2 = X_1 \cap A_2$, as funções $f_1 : A_1 \cup (X_1 \cap X_2) \to S^n_+$ e $f_2 : A_2 \cup (X_1 \cap X_2) \to S^n_-$ definidas por

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad x \in A_1, \\ G(x), & \text{se} \quad x \in X_1 \cap X_2, \end{cases} \quad \text{e} \quad f_2(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad x \in A_2, \\ G(x), & \text{se} \quad x \in X_1 \cap X_2, \end{cases}$$

são contínuas.

Os hemisférios S_+^n e S_-^n são homeomorfos a I^n. Com isso, segue do Teorema de extensão de Tietze–Urysohn que existem extensões contínuas $F_1 : X_1 \to S_+^n$ e $F_2 : X_2 \to S_-^n$ de f_1 e f_2, respectivamente. Assim, definimos a função contínua $F : X \to S^n$ por

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & \text{se} \quad x \in X_1, \\ F_2(x), & \text{se} \quad x \in X_2. \end{cases}$$

Portanto, a função F é uma extensão contínua de f. $\square$

Teorema 1.22 (Teorema sobre a extensão de funções contínuas em esferas)**.** *Um espaço métrico separável X satisfaz $\operatorname{ind} X \leqslant n$ com $n \geqslant 0$ se, e somente se, para todo subespaço fechado A do espaço X e para cada função contínua $f : A \to S^n$ existe uma extensão contínua $F : X \to S^n$ de f sobre X.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.21, é suficiente provar que a capacidade de extensão das funções implicam que $\operatorname{ind} X \leqslant n$. Para isso vamos aplicar o Teorema das Partições.

Seja $(A_1, B_1), \ldots, (A_{n+1}, B_{n+1})$ uma sequência de $n+1$ pares de subconjuntos fechados de X disjuntos. Defina $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n+1} (A_i \cup B_i)$ e, para cada $i = 1, \ldots, n+1$, considere uma função contínua $f_i : A \to I$ tal que

$$f_i(A_i) \subset \{0\} \qquad \text{e} \qquad f_i(B_i) \subset \{1\}.$$

Defina $f : A \to \partial I^{n+1}$ por $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x))$. Como ∂I^{n+1} é homeomorfo a S^n, a função f tem uma extensão contínua de $F : X \to S^n$. A composição $F_i = p_i \circ F : X \to I$, onde $p_i : S^n \approx \partial I^{n+1} \to I$ é a projeção na i-ésima coordenada, é uma extensão contínua de f_i para $i = 1, \ldots, n+1$. Assim, o conjunto $L_i = F_i^{-1}(\{1/2\})$ é uma partição entre A_i e B_i. Como $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n+1} L_1 = \emptyset$, temos $\operatorname{ind} X \leqslant n$ pelo Teorema das partições. $\square$

Observação 1.3. *Mostramos na demonstração acima que se X é um espaço normal com a propriedade que para todo subespaço fechado A de X e cada função contínua $f : A \to S^n$ existe uma extensão contínua $F : X \to S^n$ de f sobre X, então para toda sequência (A_1, B_1), ..., (A_{n+1}, B_{n+1}) de $n+1$ pares de subconjunto fechados de X disjuntos, existem conjuntos L_1, ..., L_{n+1} tais que L_i é uma partição entre A_i e B_i, e $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n+1} L_i = \emptyset$.*

1.7 Grande dimensão indutiva

Nesta seção iremos introduzir a grande dimensão indutiva (Ind) para espaços normais. Na classe dos espaços métricos separáveis as dimensões ind e Ind coincidem, o que mostraremos no Teorema 1.24.

Definição 1.12. *Para todo espaço normal X a grande dimensão indutiva de X, denotada por* $\operatorname{Ind} X$, *é um número inteiro maior ou igual a -1 ou o "número infinito ∞". Definimos a dimensão* Ind *da seguinte forma:*

$(BC1)$ $\operatorname{Ind} X = -1$ *se, e somente se,* $X = \emptyset$;

$(BC2)$ $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, *onde* $n = 0, 1, \ldots$ *se para todo conjunto fechado $A \subset X$ e cada conjunto aberto $V \subset X$ que contém A existe um conjunto aberto $U \subset X$ tal que*

$$A \subset U \subset V \qquad e \qquad \operatorname{Ind} \partial U \leqslant n - 1;$$

$(BC3)$ $\operatorname{Ind} X = n$ *se* $n - 1 < \operatorname{Ind} X \leqslant n$;

$(BC4)$ $\operatorname{Ind} X = \infty$ *se* $\operatorname{Ind} X > n$, *para* $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$

A grande dimensão indutiva é também chamada de dimensão de Brouwer–Cech.

Aplicando indução em $\operatorname{Ind} X$, pode-se facilmente verificar que se os espaços normais X e Y são homeomorfos, então $\operatorname{Ind} X = \operatorname{Ind} Y$, isto é, a grande dimensão indutiva é um invariante topológico.

Modificando ligeiramente a prova da Proposição 1.1, obtém-se:

Proposição 1.14. *Um espaço normal X satisfaz que* $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ *com* $n \geqslant 0$ *se, e somente se, para todo par A, B de subconjuntos fechados disjuntos de X existir uma partição L entre A e B tal que* $\operatorname{Ind} L \leqslant n - 1$.

O teorema abaixo justifica os nomes de pequena e grande dimensão indutiva.

Teorema 1.23. *Para todo espaço normal X temos* $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$.

Demonstração. Faremos a prova aplicando indução sobre $\operatorname{Ind} X$. Podemos supor que $\operatorname{Ind} X < \infty$. Se $\operatorname{Ind} X = -1$ então $X = \emptyset$, isto é, $\operatorname{ind} X = -1$. Suponha por hipótese de indução que a desigualdade é válida para todo espaço normal X tal que $\operatorname{Ind} X < n$.

Agora, se $\operatorname{Ind} X = n$ então dados $x \in X$ e V uma vizinhança de x em X existe U vizinhança de x tal que

$$x \subset U \subset V \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Ind} \partial U \leqslant n - 1.$$

Por hipótese de indução $\operatorname{ind} \partial U \leqslant \operatorname{Ind} \partial U \leqslant n - 1$.

Portanto, $\operatorname{ind} X \leqslant n$, ou seja, $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$. □

Teorema 1.24. *Para todo espaço métrico separável X temos* $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$.

Demonstração. É suficiente mostrar que $\operatorname{Ind} X \leqslant \operatorname{ind} X$. Claramente, pode-se supor que $\operatorname{ind} X < \infty$. Aplicaremos o processo de indução sobre $\operatorname{ind} X$. A desigualdade é válida se $\operatorname{ind} X = -1$. Assuma que a desigualdade está provada para todos os espaços métricos separáveis de pequena dimensão indutiva menor que $n \geqslant 0$ e considere um espaço métrico separável X tal que $\operatorname{ind} X = n$. Sejam A, B um par de subconjuntos disjuntos fechados de X. Pelo Primeiro Teorema de separação, existe uma partição L entre A e B tal que $\operatorname{ind} L \leqslant n - 1$. Segue por hipótese de indução que $\operatorname{Ind} L \leqslant n - 1$, assim $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ pela Proposição 1.14. Com isso $\operatorname{Ind} X \leqslant \operatorname{ind} X$, o que completa a prova. □

Usando a dimensão Ind, podemos reformular o Teorema 1.3 no seguinte:

Teorema 1.25. *Para todo espaço Lindelöf X, as condições* $\operatorname{ind} X = 0$ *e* $\operatorname{Ind} X = 0$ *são equivalentes.*

Demonstração. Se $\operatorname{ind} X = 0$ então, pelo Teorema 1.3, para todo par de conjuntos fechados disjuntos A e B em X, o conjunto vazio é uma partição entre eles, isto é, existe um conjunto aberto e fechado U tal que

$$A \subset U, \quad B \subset X \backslash U \quad \text{e} \quad X \backslash \emptyset = U \cup X \backslash U.$$

Para $V = X \backslash B$ aberto de X, temos $A \subset U \subset V$. Falta provar que $\operatorname{Ind} \partial U \leqslant -1$, ou seja, $\partial U = \emptyset$. Note que

$$\partial U \subset \overline{U} \cap \overline{X \backslash U} = U \cap X \backslash U = \emptyset \Rightarrow \partial U = \emptyset.$$

Logo, $\operatorname{Ind} X = 0$.

Agora, suponha que $\operatorname{Ind} X = 0$. pela Proposição 1.14, para todo par A e B de conjuntos fechados disjuntos de X existe uma partição L entre A e B tal que $\operatorname{ind} L \leqslant -1$, isto é, $L = \emptyset$. Assim, pelo Teorema 1.3, segue que $\operatorname{ind} X = 0$. □

1.8 Dimensão por cobertura

Além das pequena e grande dimensões indutivas, na teoria de dimensão existe também o conceito de dimensão por cobertura, denotada por dim, para espaços normais. Antes de falarmos em dimensão por cobertura, introduziremos as noções de espaços de Baire e de mergulhos de variedades, os quais serão úteis nesta seção.

1.8.1 Espaço de Baire

Definição 1.13. *Se A é um subconjunto do espaço topológico X, o interior de A é definido como sendo a união de todos os conjuntos abertos de X que estão contidos em A. Dizemos que A tem interior vazio quando A não contém nenhum conjunto aberto de X diferente do conjunto vazio. Equivalentemente, A tem interior vazio se todo ponto de A é um ponto de acumulação do complementar de A, isto é, se o complementar de A é denso em X.*

Exemplo 1.9. *O conjunto $\mathbb{Q}$ tem interior vazio como um subconjunto de $\mathbb{R}$, mas o intervalo $[0,1]$ não tem interior vazio em $\mathbb{R}$. O subconjunto $[0,1] \times \{0\}$ tem interior vazio em $\mathbb{R}^2$, assim como $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$.*

Definição 1.14. *Um espaço X é dito um espaço de Baire se para qualquer coleção enumerável $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos fechados de X, onde A_n tem interior vazio para todo $n \in \mathbb{N}$, a sua união $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ também tem interior vazio em X.*

Exemplo 1.10. *O espaço $\mathbb{Q}$ não é espaço de Baire. Para cada $p \in \mathbb{Q}$, o conjunto $\{p\}$ é fechado e tem interior vazio em $\mathbb{Q}$; e $\mathbb{Q}$ é a união enumerável destes conjuntos, mas $\mathbb{Q}$ não possui interior vazio nele mesmo.*

O espaço $\mathbb{Z}_+$, por outro lado, é um espaço de Baire, pois todo subconjunto de $\mathbb{Z}_+$ é aberto e, assim, não existe subconjuntos de $\mathbb{Z}_+$ tendo interior vazio, exceto o conjunto vazio. Portanto, $\mathbb{Z}_+$ satisfaz a condição de Baire, por vacuidade.

A terminologia originalmente usada por *R. Baire* para este conceito envolve a palavra "categoria". Um subconjunto A de um espaço X é dito de *primeira categoria* em X se ele estiver contido na união de uma coleção enumerável de conjuntos fechados de X, tendo esses interior vazio em X; caso contrário, é dito de *segunda categoria* em X. Usando esta terminologia, podemos dizer o seguinte:

Um espaço X é um espaço de Baire se, e somente se, todo conjunto aberto não vazio em X é de segunda categoria.

Na definição de espaço de Baire utilizamos conjuntos fechados. Também existe uma formulação envolvendo conjuntos abertos:

Lema 1.9. *X é um espaço de Baire se, e somente se, para qualquer coleção enumerável $\{U_n\}$ de conjuntos abertos em X, onde cada U_n é denso em X, sua interseção $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ também é densa em X.*

Demonstração. Suponha que X seja um espaço de Baire. Dada uma coleção enumerável $\{U_n\}$ de conjuntos abertos, onde cada U_n é denso em X, temos que $F_n = X - U_n$ possui interior vazio em X.

Considere a coleção enumerável $\{F_n\}$ de conjuntos fechados de X. Logo, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ possui interior vazio em X. Portanto, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ é denso em X.

Reciprocamente, seja $\{F_n\}$ uma coleção enumerável de conjuntos fechados de X, onde cada F_n tem interior vazio em X, isto é, $X - F_n$ é denso em X.

Por hipótese, a coleção enumerável $\{X - F_n\}$ de conjuntos abertos de X tem $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X - F_n)$ densa em X. Logo, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ tem interior vazio em X. Portanto, X é um espaço de Baire. □

Definição 1.15. *Uma família $\mathscr{A} = \{Y_i\}_{i\in J}$ de subconjuntos de X, onde J é um conjunto qualquer de índices, possui a propriedade da interseção finita (PIF) se toda interseção finita de elementos de $\mathscr{A}$ é não vazia.*

Lema 1.10. *Todo espaço compacto Hausdorff é regular.*

Demonstração. Ver [10], capítulo 4, página 202. □

Lema 1.11. *X é compacto se, e somente se, toda família de fechados de X com a PIF possui interseção não vazia.*

Demonstração. Ver [10], capítulo 3, páginas 169–170. □

Teorema 1.26 (Teorema da categoria de Baire)**.** *Se X é um espaço compacto de Hausdorff ou um espaço métrico completo, então X é um espaço de Baire.*

Demonstração. Dada uma coleção enumerável $\{A_n\}$ de conjuntos fechados de X, com interiores vazios em X, queremos mostrar que $\cup A_n$ também tem interior vazio em X. Para isso, provemos que $\cup A_n$ não contém nenhum conjunto aberto de X.

Seja U_0 um aberto de X qualquer. Como A_1 possui interior vazio, segue que A_1 não contém U_0. Portanto, existe $y \in U_0$ tal que $y \notin A_1$. Se X for compacto de Hausdorff então X é regular. Logo, como A_1 é fechado, existe U_1 vizinhança de y em X tal que

$$\overline{U_1} \cap A_1 = \emptyset \qquad \text{e} \qquad \overline{U_1} \subset U_0.$$

Agora, se X for métrico, escolhemos U_1 suficientemente pequeno para que seu diâmetro seja menor que 1. Em geral, dado o conjunto aberto não vazio U_{n-1}, escolhemos um ponto de U_{n-1} que não pertence ao conjunto fechado A_n e, então, escolhemos U_n uma vizinhança deste ponto tal que

$$\overline{U_n} \cap A_n = \emptyset \quad \text{e} \quad U_n \subset U_{n-1}, \qquad \operatorname{diam} U_n < 1/n \text{ no caso métrico.}$$

Note que se $\cap \overline{U_n}$ é não vazio, conclui-se o resultado. Com efeito, se $x \in \cap \overline{U_n}$ então $x \in U_0$ pois $\overline{U_1} \subset U_0$. E, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x \notin A_n$, uma vez que $\overline{U_n}$ é disjunto de A_n. Assim, $\cup A_n$ não contém nenhum aberto de X. Logo, $\cup A_n$ tem interior vazio o que implica que X é um espaço de Baire.

Provaremos que $\cap \overline{U_n} \neq \emptyset$ nos dois caso: X compacto de Hausdorff ou X métrico completo.

Se X for compacto de Hausdorff, considere a sequência encaixante

$$\overline{U_1} \supset \overline{U_2} \supset \overline{U_3} \supset \dots$$

de subconjuntos não vazios de X. A coleção $\{\overline{U_n}\}$ tem a propriedade da interseção finita; uma vez que X é compacto, a interseção $\cap \overline{U_n}$ deve ser não vazia.

Já no caso em que X é um espaço métrico completo, aplicamos o seguinte lema. □

Lema 1.12. *Seja $C_1 \supset C_2 \supset \dots$ uma sequência encaixada de conjuntos fechados não vazios em um espaço métrico completo X. Se $\operatorname{diam} C_n \to 0$, então*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escolha $x_n \in C_n$. Dado $\epsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{diam} C_N < \epsilon$. Para $n, m \geqslant N$ temos x_n, $x_m \in C_N$ e

$$d(x_n, x_m) < \operatorname{diam} C_N < \epsilon.$$

Logo, (x_n) é uma sequência de Cauchy em X. Assim $x_n \to x \in X$, pois X é completo. Então dado $k \in \mathbb{N}$ qualquer, a subsequência x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, ... também converge para x. Assim, $x \in \overline{C_k} = C_k$. Portanto, $x \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} C_k$. $\square$

Exemplo 1.11. *$\mathbb{R}$ é um espaço de Baire, pois é espaço métrico e completo. Também, todo subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ é um espaço de Baire.*

Lema 1.13. *Todo subespaço aberto Y de um espaço de Baire X é também um espaço de Baire.*

Demonstração. Seja $\{A_n\}$ uma coleção enumerável de conjuntos fechados de Y que possuem interiores vazios em Y. Mostremos que $\cup A_n$ possui interior vazio em Y.

Seja $\overline{A_n}$ o fecho de A_n em X. Então $\overline{A_n} \cap Y = A_n$. O conjunto $\overline{A_n}$ possui interior vazio em X. De fato, suponha que exista U aberto não vazio de X contido em $\overline{A_n}$, então $U \cap A_n \neq \emptyset$. Assim $U \cap Y$ é um aberto não vazio de Y contido em A_n, contradizendo o fato de A_n possuir interior vazio em Y.

Se $\cup A_n$ contém um conjunto aberto não vazio W de Y, então $W \subset \cup\overline{A_n}$ e W é aberto em X, pois Y é aberto em X. Isso contradiz o fato de X ser um espaço de Baire.

Portanto, Y é um espaço de Baire. $\square$

Faremos agora uma aplicação da teoria de espaço de Baire:
Seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções contínuas tal que $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in [0,1]$. Note que f não precisa ser contínua. De fato, considere $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{se} \quad x \geqslant 1/n, \\ (1-n)x + 1, & \text{se} \quad x < 1/n. \end{cases} .$$

A sequência (f_n) de funções contínuas $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in [0,1]$, onde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = 0$ se $x \in (0,1]$ e $f(0) = 1$. Agora, de modo geral, gostaríamos de saber em quantos pontos f pode ser descontínua?

Teorema 1.27. *Sejam X um espaço topológico e (Y,d) um espaço métrico. Sejam $f_n : X \to Y$ funções contínuas tais que $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$, onde $f : X \to Y$. Se X é um espaço de Baire, o conjunto de pontos em que f é contínua é denso em X.*

Demonstração. Dado um inteiro positivo N e dado $\epsilon > 0$, defina

$$A_N(\epsilon) = \{x \in X \mid d(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \epsilon, \forall n, m \geqslant N\}.$$

Note que $A_N(\epsilon)$ é fechado em X pois, para cada n, m, o conjunto

$$\{x \in X \mid d(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \epsilon\}$$

é fechado em X (pela continuidade das funções d, f_n e f_m) e $A_N(\epsilon)$ é a interseção destes conjuntos com n, $m \geqslant N$.

Para ϵ fixo, considere os conjuntos $A_1(\epsilon) \subset A_2(\epsilon) \subset \dots$. Mostremos que a união destes conjuntos é todo o X. Obviamente, $\cup A_n(\epsilon) \subset X$. Agora, dado $x_0 \in X$, o fato de $f_n(x_0) \to f(x_0)$ implica que a sequência $(f_n(x_0))$ é de Cauchy. Logo, $x_0 \in A_N(\epsilon)$ para algum N. Assim, provamos que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(\epsilon).$$

Agora, seja

$$U(\epsilon) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \operatorname{int} A_n(\epsilon).$$

Queremos provar que:

(1) $U(\epsilon)$ é aberto e denso em X.

(2) A função f é contínua em cada ponto do conjunto

$$C = U(1) \cap U(1/2) \cap U(1/3) \cap \dots$$

Para mostrar que $U(\epsilon)$ é denso em X, é suficiente mostrar que para todo conjunto aberto não vazio V de X existe N tal que o conjunto $V \cap \operatorname{int}(A_N(\epsilon))$ é não vazio. Para isso, note que, para cada N, o conjunto $V \cap A_N(\epsilon)$ é fechado em V. Por V ser um espaço de Baire, pelo Lema 1.13, pelo menos um desses conjuntos, digamos $V \cap A_M(\epsilon)$, deve conter um conjunto não vazio W aberto em V. De V ser aberto, segue que W é aberto em X e, portanto, $W \subset \operatorname{int} A_M(\epsilon)$.

Mostraremos agora que se $x_0 \in C$, então f é contínua em x_0. Dado $\epsilon > 0$, devemos encontrar uma vizinhança W de x_0 tal que $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ para $x \in W$.

Primeiro, escolha k de modo que $\dfrac{1}{k} < \dfrac{\epsilon}{5}$. Temos que $x_0 \in \operatorname{int} A_N(1/k)$ para algum N. Finalmente, a continuidade da função f_N possibilita escolhermos uma vizinhança W de x_0, contida em $A_N(1/k)$, tal que

$$d(f_N(x), f_N(x_0)) < \frac{\epsilon}{5}, \qquad \text{para } x \in W. \tag{1.16}$$

O fato que $W \subset A_N(1/k)$ implica que

$$d(f_n(x), f_N(x)) \leqslant \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{5}, \qquad \text{para } x \in W. \tag{1.17}$$

Daí temos

$$d(f(x_0), f_N(x_0)) \leqslant d(f(x_0), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f_N(x_0)) < \frac{2\epsilon}{5}. \tag{1.18}$$

Aplicando a desigualdade triangular em (1.16), (1.17) e (1.18) obtemos:

$$d(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

□

1.8.2 Mergulho de Variedades

Nesta seção, provaremos que dado uma variedade compacta X, esta pode ser mergulhada em um espaço euclidiano de dimensão finita. Para isso definiremos variedade e partição da unidade.

Definição 1.16. *Uma $m-$variedade é um espaço de Hausdorff X com uma base enumerável tal que cada ponto de $x \in X$ tem uma vizinhança que é homeomorfa a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$.*

Uma $1-$variedade é normalmente chamada uma *curva*, e uma $2-$variedade é chamada uma *superfície*.

Se $\phi : X \to \mathbb{R}$, então o suporte de ϕ é definido como sendo o fecho do conjunto $\phi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$. Assim, se $x \notin \text{suporte}\,\phi$, existe alguma vizinhança de x em que ϕ se anula.

Definição 1.17. *Seja $\{U_1, \ldots, U_n\}$ uma cobertura aberta do espaço X. Uma família indexada de funções contínuas*

$$\phi_i : X \to [0,1] \quad \textit{para} \quad i = 1, \ldots, n,$$

é dita uma partição da unidade dominada por $\{U_i\}$ se:

(1) $(\text{suporte}\,\phi_i) \subset U_i$ *para cada i;*

(2) $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$ *para cada x.*

Teorema 1.28 (Existência de partição da unidade finita). *Seja $\{U_1, \dots, U_n\}$ uma cobertura aberta finita de um espaço normal X. Então existe uma partição da unidade dominada por $\{U_i\}$.*

Demonstração. Ver [10], capítulo 4, página 225. $\square$

Teorema 1.29. *Se X é uma $m-$variedade compacta, então X pode ser mergulhado em $\mathbb{R}^N$ para algum $N \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Cubra X por uma quantidade finita $\{U_1, \dots, U_n\}$ de conjuntos abertos, cada um dos quais é homeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^m$. Considere os mergulhos $g_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ para cada i, determinados por estes homeomorfismo. Sendo compacto e Hausdorff, X é normal. Pelo teorema 1.28, existem $\phi_1, \dots, \phi_n$ partição da unidade dominada por $\{U_i\}$; seja $A_i = \text{suporte}\, \phi_i = \overline{\phi_i^{-1}(\mathbb{R}^m - \{0\})}$. Para cada $i = 1, \dots, n$, defina a função $h_i : X \to \mathbb{R}^m$ por:

$$h_i(x) = \begin{cases} \phi_i(x)g_i(x) & \text{para} \quad x \in U_i \\ (0, \dots, 0) & \text{para} \quad x \in X - A_i. \end{cases}$$

A função h_i está bem definida pois para $x \in (X - A_i) \cap U_i$ temos $\phi_i(x)g_i(x) = 0$ uma vez que $\phi_i(x) = 0$. E h_i é contínua pois suas restrições aos conjuntos abertos U_i e $X - A_i$ são contínuas.

Agora defina

$$F : X \to (\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{vezes}} \times \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{n-\text{vezes}})$$

por $F(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x), h_1(x), \dots, h_n(x))$. Claramente F é contínua. Para provar que F é um mergulho precisamos mostrar somente que F é injetora (pois X é compacto). Suponha que $F(x) = F(y)$. Então $\phi_i(x) = \phi_i(y)$ e $h_i(x) = h_i(y)$ para todo i. Agora $\phi_i(x) > 0$ para algum i (desde que $\sum \phi_i(x) = 1$). Portanto, $\phi_i(y) > 0$ e assim x, $y \in U_i$, pois x, $y \in \text{suporte}\, \phi_i \subset U_i$. Então,

$$\phi_i(x)g_i(x) = h_i(x) = h_i(y) = \phi_i(y)g_i(y).$$

Daí, $g_i(x) = g_i(y)$. Como $g_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ é injetora, segue que $x = y$. $\square$

1.8.3 Teorema de Merger–Nöbeling

O principal resultado desta subseção é o teorema, devido a K. Menger e G. Nöbeling, que estabelece que qualquer espaço métrico compacto de dimensão m pode ser mergulhado em $\mathbb{R}^N$ para $N =$

$2m + 1$, (esta é uma generalização do Teorema 1.29). Sua demonstração é uma aplicação do Teorema de Baire.

Primeiramente, apresentaremos a noção de ordem em uma família de conjuntos, que será necessária para definir a dimensão por cobertura.

Definição 1.18. *Seja X um conjunto e $\mathscr{A}$ uma família de subconjuntos de X. Definimos a ordem da família $\mathscr{A}$ como sendo o maior inteiro n tal que a família $\mathscr{A}$ contém $n+1$ conjuntos com interseção não vazia; se não existir tal inteiro, dizemos que $\mathscr{A}$ tem ordem ∞. A ordem de $\mathscr{A}$ é denotada por* $\operatorname{ord}\mathscr{A}$.

Assim, se a ordem de uma família $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ é igual a n, para cada $n+2$ índices distintos $s_1, \ldots, s_{n+2} \in S$ temos $A_{s_1} \cap A_{s_2} \cap \cdots \cap A_{s_{n+2}} = \emptyset$. Em particular, uma família de ordem -1 consiste somente do conjunto vazio, e uma família de ordem 0 consiste de conjuntos dois a dois disjuntos que não são todos vazios.

Uma cobertura $\mathscr{B}$ é um refinamento de outra cobertura $\mathscr{A}$ do mesmo espaço se para todo $B \in \mathscr{B}$ existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $B \subset A$. Claramente, toda subcobertura $\mathscr{A}_0$ de $\mathscr{A}$ é um refinamento de $\mathscr{A}$.

Definição 1.19. *Para todo espaço normal X atribui-se a dimensão por cobertura de X, denotada por $\dim X$, que é um número inteiro $\geqslant -1$ ou o "número infinito ∞". Definimos a dimensão* $\dim$ *da seguinte forma:*

$(CL1)$ $\dim X \leqslant n$, *onde $n = -1, 0, 1, \ldots$, se toda cobertura aberta finita do espaço X tem um refinamento aberto finito de ordem $\leqslant n$;*

$(CL2)$ $\dim X = n$, *se $n - 1 < \dim X \leqslant n$;*

$(CL3)$ $\dim X = \infty$ *se $\dim X > n$ para todo $n = -1, 0, 1, \ldots$*

A dimensão por cobertura dim é também chamada de dimensão de Čech–Lebesgue.

Se os espaços normais X e Y são homeomorfos, então $\dim X = \dim Y$, isto é, a dimensão por cobertura é um invariante topológico. Claramente, $\dim X = -1$ se, e somente se, $X = \emptyset$.

Exemplo 1.12. *Todo subespaço compacto X de $\mathbb{R}$ tem dimensão topológica no máximo 1. De fato, começaremos definindo uma cobertura aberta de $\mathbb{R}$ de ordem 1. Seja $\mathcal{A}_1$ a coleção de todos os intervalos abertos da forma $(n, n+1)$ em $\mathbb{R}$, onde $n \in \mathbb{Z}$. Seja $\mathcal{A}_0$ a coleção de todos os intervalos abertos da forma $(n-1/2, n+1/2)$ em $\mathbb{R}$, para $n \in \mathbb{Z}$. Então $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$ é uma cobertura aberta* *de $\mathbb{R}$ por conjuntos de diâmetro 1. Note que todos os elementos de $\mathcal{A}_1$ são disjuntos e todos os elementos de $\mathcal{A}_0$ também são. Logo, $\mathcal{A}$ tem ordem 1.*

Agora seja X um subespaço compacto de $\mathbb{R}$. Dado $\mathcal{C}$ cobertura de X formada por conjuntos abertos em X, existe um número de Lebesgue δ para esta cobertura. Isso significa que toda coleção de subconjuntos de X que têm diâmetros menores que δ é automaticamente um refinamento de $\mathcal{C}$. Considere o homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $f(x) = \frac{\delta}{2}x$. A imagem dos elementos da coleção $\mathcal{A}$ por f forma uma cobertura aberta de $\mathbb{R}$ de ordem 1 cujos elementos possuem diâmetro $\delta/2$; interceptando cada um desses elementos com X formamos a cobertura aberta de X desejada.

Exemplo 1.13. *O intervalo $X = [0,1]$ tem dimensão topológica 1. De fato, sabemos que $\dim X \leqslant 1$. Para mostrar $\dim X = 1$, seja $\mathcal{A}$ a cobertura de X formada pelos conjuntos $[0,1)$ e $(0,1]$. Mostremos que se $\mathcal{B}$ é uma cobertura aberta qualquer de X que refina $\mathcal{A}$, então $\mathcal{B}$ tem ordem pelo menos 1.*

Desde que a cobertura $\mathcal{B}$ refina $\mathcal{A}$, ela deve conter mais do que um elemento. Seja U um destes elementos de $\mathcal{B}$ e seja V a união dos outros. Se $\mathcal{B}$ tem ordem 0, então os conjuntos U e V são disjuntos e, assim, formam uma cisão para X, o que contradiz a conexidade de X.

Portanto, concluímos que $\mathcal{B}$ tem ordem pelo menos 1.

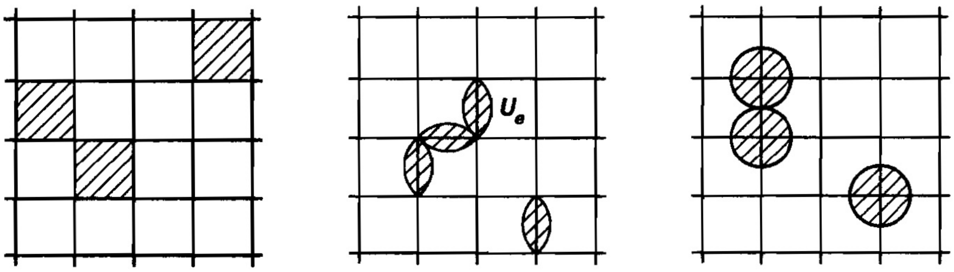
Exemplo 1.14. *Todo subespaço compacto X de $\mathbb{R}^2$ tem dimensão topológica no máximo 2. Para provar este fato, construiremos uma certa cobertura aberta $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$ que tem ordem 2. Começamos definindo $\mathcal{A}_2$ como sendo a coleção de todos os quadrados abertos unitários de $\mathbb{R}^2$ da seguinte forma:*

$$\mathcal{A}_2 = \{(n, n+1) \times (m, m+1) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Note que os elementos de $\mathcal{A}_2$ são disjuntos. Então, definimos uma coleção $\mathcal{A}_1$ tomando cada lado E de um destes quadrados,

$$E = \{n\} \times (m, m+1) \qquad \textit{ou} \qquad E = (n, n+1) \times \{m\},$$

e expandindo-o levemente para um conjunto aberto U_E de $\mathbb{R}^2$, tendo o cuidado de garantir que se $E \neq E'$, os conjuntos U_E e U'_E sejam disjuntos. Também escolhemos cada U_E de modo que seu diâmetro seja no máximo 2. Finalmente, defina $\mathcal{A}_0$ como sendo a coleção consistindo de todas bolas abertas de raio $1/2$ sobre o ponto $n \times m$. Veja figura:



A coleção dos conjuntos abertos $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ cobrem $\mathbb{R}^2$. Cada um destes elementos tem diâmetro no máximo 2. E tem ordem 2, desde que nenhum ponto de $\mathbb{R}^2$ pode pertencer a mais do que um conjunto de cada $\mathcal{A}_i$. Agora seja X um subespaço compacto de $\mathbb{R}^2$. Dado uma cobertura aberta de X, existe um número de Lebesgue δ. Considere o homeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $f(x) = \frac{\delta}{3}x$. A imagem da coleção $\mathcal{A}$ por f forma uma cobertura aberta de $\mathbb{R}^2$ por conjuntos de diâmetro menor que δ. Interceptando cada um desses conjuntos com X formamos a cobertura aberta de X desejada.

Teorema 1.30. *Seja X um espaço de dimensão finita. Se Y é um subespaço fechado de X, então Y tem dimensão finita e* $\dim Y \leqslant \dim X$.

Demonstração. Digamos $\dim X = m$. Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura de Y por conjuntos abertos em Y. Para cada $A \in \mathcal{A}$, escolha um conjunto aberto A' de X tal que $A' \cap Y = A$. Cubra X pelos conjuntos abertos A', juntamente com o conjunto aberto $X - Y$. Seja $\mathcal{B}$ um refinamento desta cobertura que é uma cobertura aberta de X e tem ordem no máximo m. Então, a coleção

$$\{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

é uma cobertura de Y por conjuntos abertos em Y, tem ordem no máximo m, e refina $\mathcal{A}$. □

Teorema 1.31. *Seja $X = Y \cup Z$, onde Y e Z são subespaços fechados de X tendo dimensão topológica finita. Então,*

$$\dim X = \max\{\dim Y, \dim Z\}.$$

Demonstração. Seja $m = \max\{\dim Y, \dim Z\}$. Devemos mostrar que X possui dimensão finita e tem dimensão topológica no máximo m. Pelo Teorema 1.30, temos $m \leqslant \dim X$. Provaremos agora que $\dim X \leq m$ e, assim, concluiremos $\dim X = \max\{\dim Y, \dim Z\}$.

Se $\mathcal{A}$ é uma cobertura aberta de X, dizemos que $\mathcal{A}$ possui ordem no máximo m em pontos de Y se nenhum ponto de Y encontra-se em mais de m elementos de $\mathcal{A}$.

Passo 1: Mostremos que se $\mathcal{A}$ é uma cobertura aberta de X, então existe uma cobertura aberta de X que refina $\mathcal{A}$ e tem ordem no máximo m em pontos de Y.

Para provar este fato, considere a coleção

$$\{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

Esta é uma cobertura aberta de Y, então existe um refinamento $\mathcal{B}$ que é uma cobertura aberta de Y e possui ordem no máximo m. Dado $B \in \mathcal{B}$, escolha um conjunto aberto U_B de X tal que $U_B \cap Y = B$. Escolha também um elemento $A_B \in \mathcal{A}$ tal que $B \subset A_B$. Seja $\mathcal{C}$ a coleção de todos os conjuntos $U_B \cap A_B$, para $B \in \mathcal{B}$, juntamente com todos os conjuntos $A - Y$, para $A \in \mathcal{A}$.

Então $\mathcal{C}$ é a cobertura desejada.

Passo 2: Agora, seja $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta de X. Construiremos uma cobertura aberta $\mathcal{D}$ de X que refina $\mathcal{A}$ e tem ordem no máximo m.

Seja $\mathcal{B}$ uma cobertura aberta de X que refina $\mathcal{A}$ e tem ordem no máximo m em pontos de Y. Então seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta de X que refina $\mathcal{B}$ e tem ordem no máximo m em pontos de Z.

Formamos uma nova cobertura $\mathcal{D}$ de X do seguinte modo: Defina $f : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ escolhendo para cada $C \in \mathcal{C}$ um elemento $f(C)$ de $\mathcal{B}$ tal que $C \subset f(C)$. Dado $B \in \mathcal{B}$, defina $D(B)$ sendo a união de todos os elementos C de $\mathcal{C}$ para os quais $f(C) = B$. Seja $\mathcal{D}$ a coleção de todos os conjuntos $D(B)$, para $B \in \mathcal{B}$.

Agora, $\mathcal{D}$ refina $\mathcal{B}$ pois $D(B) \subset B$ para cada B. Logo, $\mathcal{D}$ refina $\mathcal{A}$. Também, $\mathcal{D}$ cobre X porque $\mathcal{C}$ cobre X e $C \subset D(f(C))$ para cada $C \in \mathcal{C}$. Mostremos que $\mathcal{D}$ tem ordem no máximo m. Suponha $x \in D(B_1) \cap \cdots \cap D(B_k)$, onde os conjuntos $D(B_i)$ são distintos. Desejamos provar que $k \leqslant m$. Note que os conjuntos $B_1, \ldots, B_k$ devem ser distintos porque os conjuntos $D(B_i)$ o são. Assim, se $x \in D(B_i)$, podemos escolher para cada i, um conjunto $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C_i$ e $f(C_i) = B_i$. Os conjuntos C_i são distintos porque os B_i's são. Além disso,

$$x \in (C_1 \cap \cdots \cap C_k) \subset (D(B_1) \cap \cdots \cap D(B_k)) \subset (B_1 \cap \cdots \cap B_k).$$

Se x estiver em Y, então $k \leqslant m$ porque $\mathcal{B}$ tem ordem no máximo m em pontos de Y, e se $x \in Z$, então $k \leqslant m$, pois $\mathcal{C}$ tem ordem no máximo m em pontos de Z. □

Corolário 1.9. *Seja $X = Y_1 \cup \cdots \cup Y_k$, onde cada Y_i é um subespaço fechado de X e possui dimensão finita. Então,*

$$\dim X = \max\{\dim Y_1, \ldots, \dim Y_k\}.$$

Demonstração. Se $X = Y_1 \cup Y_2$ então $\dim X = \max\{\dim Y_1, \dim Y_2\}$ pelo Teorema 1.31. Suponha que o resultado é válido para todo espaço que é a união de $k-1$ subespaços fechados de dimensão finita. Se $X = Y_1 \cup \cdots \cup Y_k$, onde cada Y_i é um subespaço fechado de X e possui dimensão finita, então $\dim Z = \max\{\dim Y_1, \ldots, \dim Y_{k-1}\}$, onde $Z = Y_1 \cup \cdots \cup Y_{k-1}$. Logo, $X = Z \cup Y_k$ e, assim, $\dim X = \max\{\dim Z, \dim Y_k\} = \max\{\dim Y_1, \ldots, \dim Y_k\}$, como desejado. □

Exemplo 1.15. *Toda $1-$variedade compacta X tem dimensão topológica 1. Note que o espaço X pode ser escrito como uma união finita de espaços que são homeomorfos ao intervalo $[0,1]$. De fato, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança V_x de x homeomorfa ao intervalo aberto $(0,1)$. Assim, $\overline{V}_x$ é homeomorfo ao intervalo $[0,1]$. Logo, $X = \bigcup_{x \in X} \overline{V_x}$. Como X é uma variedade compacta, segue que $X = \overline{V}_{x_1} \cup \cdots \cup \overline{V}_{x_k}$. Aplicando o Corolário 1.9, temos que a dimensão de X é 1.*

Exemplo 1.16. *Toda $2-$variedade compacta X tem dimensão topológica no máximo 2. De modo análogo ao exemplo anterior, o espaço X pode ser escrito como uma união finita de espaços que são homeomorfos a bola unitária fechada em $\mathbb{R}^2$. Então, aplicando o corolário 1.9, concluímos o desejado.*

Para provar o Teorema do Mergulho, precisamos definir a noção de posição geral em $\mathbb{R}^N$. Esta envolve um pouco de geometria analítica em $\mathbb{R}^N$. Por exemplo, um conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ está em posição geral se nenhum subconjunto de três pontos de S são colineares e nenhum subconjunto de quatro pontos de S são coplanares. Antes de definir quando um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ está em posição geral, precisamos introduzir a noção de geometricamente independente.

Definição 1.20. *Um conjunto $\{x_0, \ldots, x_k\}$ de pontos de $\mathbb{R}^N$ é dito geometricamente independente se as equações*

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x_i = 0 \qquad e \qquad \sum_{i=0}^{k} a_i = 0$$

são válidas apenas se cada $a_i = 0$.

Obviamente, um conjunto unitário $\{x\}$ é geometricamente independente. Mas o que significa um conjunto ser geometricamente independente em geral?

Da segunda equação obtemos $a_0 = -\sum_{i=1}^{k} a_i$ e, substituindo a_0 na primeira equação, temos

$$\left(-\sum_{i=1}^{k} a_i\right) x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i(x_i - x_0) = 0$$

apenas se cada $a_i = 0$. Esta é a definição de linearmente independente para o conjunto de vetores $\{x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0\}$ do espaço $\mathbb{R}^N$. Isto nos ajuda na visualização de um conjunto geometricamente independente: Quaisquer dois pontos distintos formam um conjunto geometricamente independente. Três pontos de $\mathbb{R}^N$ formam um conjunto geometricamente independente se os pontos não são colineares e quatro pontos formam um conjunto geometricamente independente se eles não são coplanares. E isso vale sucessivamente. Segue-se a partir daí que os pontos

$$\begin{aligned}
0 &= (0, 0, \ldots, 0)\\
e_1 &= (1, 0, \ldots, 0)\\
&\vdots\\
e_N &= (0, 0, \ldots, 1)
\end{aligned}$$

formam um conjunto geometricamente independente em $\mathbb{R}^N$. Também segue que qualquer conjunto de pontos geometricamente independente em $\mathbb{R}^N$ não contém mais do que $N + 1$ pontos.

Definição 1.21. *Seja $\{x_0, \ldots, x_k\} \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto de pontos geometricamente independente. O plano P determinado por estes pontos é definido como sendo o conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}^N$ tais que*

$$x = \sum_{i=0}^{k} t_ix_i, \ \textit{onde} \ \sum_{i=0}^{k} t_i = 1.$$

É simples provar que P também pode ser expresso como o conjunto de todos os pontos x tais que

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i(x_i - x_0). \tag{1.19}$$

Assim, P pode ser descrito não somente como "o plano determinado pelos pontos x_0, ..., x_k", mas também como "o plano passando por x_0 paralelo aos vetores $x_1 - x_0$, ..., $x_k - x_0$."

Considere o homeomorfismo $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ definido por $T(x) = x - x_0$. Chamamos T de uma translação em $\mathbb{R}^N$. A expressão (1.19) mostra que esta aplicação leva o plano P sobre o subespaço vetorial V^k de $\mathbb{R}^N$ tendo como base os vetores $x_1 - x_0$, ..., $x_k - x_0$. Por esta razão, chamaremos P de um k–plano em $\mathbb{R}^N$.

Dois fatos seguem imediatamente: primeiro, se $k < N$, o k–plano P necessariamente tem interior vazio em $\mathbb{R}^N$. E segundo, se $y \in \mathbb{R}^N - P$ então o conjunto $\{x_0, \ldots, x_k, y\}$ é geometricamente independente. Como $y \notin P$ então $T(y) = y - x_0 \notin V^k$. Por um teorema de Álgebra Linear, os vetores $\{x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0, y - x_0\}$ são linearmente independente.

Definição 1.22. *Um conjunto A de pontos de $\mathbb{R}^N$ está em posição geral no $\mathbb{R}^N$ se todo subconjunto de A contendo no máximo $N + 1$ pontos é geometricamente independente.*

Lema 1.14. *Dado um conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}^N$ e dado $\delta > 0$, existe um conjunto $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ que está em posição geral em $\mathbb{R}^N$ tal que $|x_i - y_i| < \delta$ para todo i.*

Demonstração. Faremos a prova por indução. Para n=1, temos: dados $\{x_1\} \subset \mathbb{R}^N$ e $\delta > 0$ tome $y_1 = x_1$. Suponha por hipótese de indução que o resultado seja válido $p < n$. Assim, existe $\{y_1, \ldots, y_p\} \subset \mathbb{R}^N$ que está em posição geral. Considere o conjunto de todos os planos em $\mathbb{R}^N$ determinados por subconjuntos de $\{y_1, \ldots, y_p\}$ que contém N ou menos elementos. Cada um desses subconjuntos é geometricamente independente pois $\{y_1, \ldots, y_p\}$ está em posição geral em $\mathbb{R}^N$. E determinam um k–plano de $\mathbb{R}^N$ para algum $k \leqslant N - 1$. Cada um destes planos possui interior vazio em $\mathbb{R}^N$. A união destes planos também possui interior vazio pois $\mathbb{R}^N$ é espaço de Baire e a quantidade desses planos é finita. Assim, podemos escolher $y_{p+1} \in \mathbb{R}^N$ tal que $|x_{p+1} - y_{p+1}| < \delta$ e y_{p+1} não pertence a nenhum destes planos. Temos que o conjunto

$$C = \{y_1, \ldots, y_p, y_{p+1}\}$$

está em posição geral em $\mathbb{R}^N$. De fato, seja D um subconjunto qualquer de C contendo $N + 1$ ou menos elementos. Se $y_{p+1} \notin D$, então D é geometricamente independente pela hipótese de indução. Se $y_{p+1} \in D$, então $D - \{y_{p+1}\}$ contém N ou menos elementos e y_{p+1} não está no plano determinado por estes elementos, por construção. Então, como referimos acima, D é geometricamente independente. $\square$

Teorema 1.32 (Teorema de Menger–Nöbeling)**.** *Seja X um espaço métrico compacto de dimensão topológica n. Então, dados $f : X \to \mathbb{R}^{2n+1}$ contínua e $\epsilon > 0$, existe $g : X \to \mathbb{R}^{2n+1}$ um mergulho tal que $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Seja $N = 2n+1$. Vamos escolher a métrica do máximo em $\mathbb{R}^N$, que é definida por

$$|x - y| = \max\{|x_i - y_i|; i = 1, \ldots, N\}.$$

Seja ρ a métrica do sup no espaço $C(X, \mathbb{R}^N)$ das funções contínuas de X em $\mathbb{R}^N$:

$$\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in X\}.$$

Denotando por $E(X, \mathbb{R}^N)$ o subespaço de $C(X, \mathbb{R}^N)$ consistindo dos mergulhos de X em $\mathbb{R}^N$, o que desejamos provar é que $E(X, \mathbb{R}^N)$ é denso em $C(X, \mathbb{R}^N)$.

Note que o espaço $C(X, \mathbb{R}^N)$ é completo na métrica ρ pois $\mathbb{R}^N$ é completo na métrica do máximo.

Seja d a métrica de X. Por X ser compacto, segue que d é limitada. Dada uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}^N$, definimos

$$\Delta(f) = \sup\{\operatorname{diam} f^{-1}(\{z\}) \mid z \in f(X)\}.$$

Note que $\operatorname{diam} f^{-1}(\{z\})$ é limitado pois d é limitada. Assim, $\Delta(f)$ está bem definido. O número $\Delta(f)$ mede o quanto f 'desvia' de ser injetora no sentido de que se $\Delta(f) = 0$ então cada conjunto $f^{-1}(\{z\})$ consiste de exatamente um ponto e, assim, f é injetora.

Agora, dado $\epsilon > 0$, defina $U_\epsilon = \{f \in C(X, \mathbb{R}^N) \mid \Delta(f) < \epsilon\}$. Este consiste de todas as funções contínuas que 'desviam' de ser injetora por menos que ϵ. Provaremos que U_ϵ é aberto e denso em $C(X, \mathbb{R}^N)$. Provado esse fato, como $C(X, \mathbb{R}^N)$ é um espaço métrico completo, temos do Teorema da Categoria de Baire que $C(X, \mathbb{R}^N)$ é um espaço de Baire, resultando assim que a interseção

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{1/n}$$

é densa em $C(X, \mathbb{R}^N)$. Mas veja que tal interseção é exatamente o conjunto dos mergulhos de X em $\mathbb{R}^N$, i.e.,

$$E(X, \mathbb{R}^N) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{1/n}.$$

De fato, se f é um elemento desta interseção então $\Delta(f) < 1/n$ para todo n. Portanto, $\Delta(f) = 0$ e, assim, f é injetora. Como X é compacto e $\mathbb{R}^N$ é Hausdorff, segue que f é um mergulho. Desse modo, concluiremos a prova.

(1) U_ϵ é aberto em $C(X, \mathbb{R}^N)$.

De fato, dado $f \in U_\epsilon$, desejamos encontrar alguma bola $B_\rho(f, \delta) \subset U_\epsilon$. Primeiro escolha um número b tal que $\Delta(f) < b < \epsilon$. Note que se $f(x) = f(y) = z$, então x e y pertencem ao conjunto

$f^{-1}(\{z\})$, de modo que $d(x,y) < b$, pois $d(x,y) \leqslant \operatorname{diam} f^{-1}(\{z\}) \leqslant \Delta(f) < b$. Segue-se que, se deixarmos A ser o seguinte subconjunto de $X \times X$,

$$A = \{(x,y) \mid d(x,y) \geqslant b\},$$

então a função $|f(x) - f(y)|$ é positiva em A. Agora A é fechado em $X \times X$ e, portanto, compacto. Daí a função $|f(x) - f(y)|$ tem um mínimo positivo em A. Seja

$$\delta = \frac{1}{2} \min\{|f(x) - f(y)|; (x,y) \in A\}.$$

Afirmamos que este valor de δ será suficiente.

Suponha que g é uma função contínua tal que $\rho(f,g) < \delta$. Se $(x,y) \in A$, então $|f(x) - f(y)| \geqslant 2\delta$ por definição. Como $|f(x) - g(x)| < \delta$ e $|f(y) - g(y)| < \delta$ segue que $|g(x) - g(y)| > 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(y)| + |g(y) - f(y)| \\ &< 2\delta + |g(x) - g(y)| \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |g(x) - g(y)| > |f(x) - f(y)| - 2\delta > 0.$$

Logo, a função $|g(x) - g(y)|$ é positiva em A. Portanto, se x e y são dois pontos tais que $g(x) = g(y)$, então $d(x,y) < b \Rightarrow \Delta(g) \leqslant b < \epsilon$.

(2) U_ϵ é denso em $C(X, \mathbb{R}^N)$.

Seja $f \in C(X, \mathbb{R}^N)$. Dados $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ desejamos encontrar uma função $g \in C(X, \mathbb{R}^N)$ tal que $g \in U_\epsilon$ e $\rho(f,g) < \delta$.

Cubra $\mathbb{R}^N$ pela coleção $\{B(y, \delta/4) \mid y \in \mathbb{R}^N\}$. Dado $x \in X$ então $f(x) \in B(y, \delta/4)$ para algum $y \in \mathbb{R}^N$. Como f é contínua, existe $r > 0$ tal que $f(B_d(x,r)) \subset B(y, \delta/4)$. Considere a família

$$V = \{B_d(x, \mu) \mid x \in X\},$$

onde $\mu = \min\{r, \epsilon/4\}$, que é uma cobertura aberta de X. Por hipótese, $\dim X = m$. Então, existe um refinamento aberto $\mathcal{U}$ de V que cobre X tendo ordem no máximo $m+1$. Como X é compacto, existe uma quantidade finita $U_1, \ldots, U_n$ tal que $X \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n$. Assim, o conjunto $\{U_1, \ldots, U_n\}$ satisfaz

(1) $\operatorname{diam} U_i < \epsilon/2$ em X,

(2) $\operatorname{diam} f(U_i) < \delta/2$ em $\mathbb{R}^N$,

(3) $\{U_1, \ldots, U_n\}$ tem ordem $\leqslant m+1$.

Sejam $\{\phi_i\}$ uma partição da unidade dominada por $\{U_i\}$. Para cada i, escolha um ponto $x_i \in U_i$. Então escolha, para cada i, um ponto $z_i \in \mathbb{R}^N$ tal que $|z_i - f(x_i)| < \delta/2$ e tal que o conjunto $\{z_1, \ldots, z_n\}$ está em posição geral em $\mathbb{R}^N$. Finalmente, defina $g : X \to \mathbb{R}^N$ por

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) z_i.$$

Afirmamos que g é a função desejada.

Primeiro, mostremos que $\rho(f,g) < \delta$. Note que

$$g(x) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) z_i - \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) f(x),$$

pois $\sum \phi_i(x) = 1$. Então

$$g(x) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)(z_i - f(x_i)) + \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)(f(x_i) - f(x)).$$

Agora, $|z_i - f(x_i)| < \delta/2$ para cada i, pela escolha dos pontos z_i's. E se i é um índice tal que $\phi(x) \neq 0$, então $x \in U_i$. Porque temos $\operatorname{diam} f(U_i) < \delta/2$, segue que $|f(x_i) - f(x)| < \delta/2$. Uma vez que $\sum \phi_i(x) = 1$, concluímos que $|g(x) - g(y)| < \delta$. Portanto, $\rho(f,g) < \delta$.

Mostraremos que $g \in U_\epsilon$. Devemos provar que se x, $y \in X$ e $g(x) = g(y)$, então x e y pertencem a um dos conjuntos abertos U_i, assim necessariamente $d(x,y) < \epsilon/2$ (desde que $\operatorname{diam} U_i < \epsilon/2$). Como um resultado, $\Delta(g) < \epsilon/2 < \epsilon$, como queríamos.

Assim, suponha $g(x) = g(y)$. Então

$$\sum_{i=1}^{n} [\phi_i(x) - \phi_i(y)] z_i = 0.$$

Pois a cobertura $\{U_i\}$ tem ordem no máximo $m+1$, no máximo $m+1$ dos números $\phi_i(x)$ são não nulos, e no máximo $m+1$ dos números $\phi_i(y)$ são não nulos. Assim, $\sum [\phi_i(x) - \phi_i(y)] z_i$ tem no máximo $2m+2$ termos não nulos. Note que a soma dos coeficientes desaparecem porque

$$\sum_{i=1}^{n} [\phi_i(x) - \phi_i(y)] = 1 - 1 = 0.$$

Os pontos z_i estão em posição geral em $\mathbb{R}^N$, assim todo subconjunto deles tendo $N+1$ ou menos elementos é geometricamente independente. E, por hipótese, $N+1 = 2m+2$. Portanto, concluímos que

$$\phi_i(x) - \phi_i(y) = 0$$

para todo i.

Agora $\phi_i(x) > 0$ para algum i, assim que $x \in U_i$. Desde que $\phi_i(x) = \phi_i(y)$, temos também $y \in U_i$, como afirmado. $\square$

Definição 1.23. *Um encolhimento da cobertura $\{A_s\}_{s\in S}$ de um espaço topológico X é qualquer cobertura $\{B_s\}_{s\in S}$ do espaço X tal que $B_s \subset A_s$, $\forall s \in S$. Um encolhimento é aberto (fechado) se todos os elementos são subconjuntos abertos (fechados) do espaço X.*

Obviamente, todo encolhimento $\mathscr{B}$ de uma cobertura $\mathscr{A}$ é um refinamento de $\mathscr{A}$ e satisfaz a desigualdade $\operatorname{ord}\mathscr{B} \leqslant \operatorname{ord}\mathscr{A}$.

Proposição 1.15. *Para todo espaço normal X as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\dim X \leqslant n$.

(b) *Toda cobertura aberta finita do espaço X tem um refinamento aberto de ordem $\leqslant n$.*

(c) *Toda cobertura aberta finita do espaço X tem um encolhimento aberto de ordem $\leqslant n$.*

Demonstração. As implicações $(a) \Rightarrow (b)$ e $(c) \Rightarrow (a)$ são óbvias. Considere um espaço normal X que satisfaz (b). Sejam $\{U_i\}_{i=1}^k$ uma cobertura aberta finita de X e $\mathscr{V}$ um refinamento aberto desta cobertura com $\operatorname{ord}\mathscr{V} \leqslant n$. Para todo $V \in \mathscr{V}$ escolha $i(V) \leqslant k$ tal que $V \subset U_{i(v)}$ e defina $V_i = \cup\{V : i(V) = i\}$. Obviamente $\{V_i\}_{i=1}^k$ é um encolhimento de $\{U_i\}_{i=1}^k$ e temos $\operatorname{ord}\{V_i\} \leqslant n$, e assim, concluímos que $(b) \Rightarrow (c)$. $\square$

Para provar que $\dim X \leqslant n$ basta considerar $n+2$ elementos da cobertura.

Teorema 1.33. *Um espaço normal X satisfaz $\dim X \leqslant n$ se, e somente se, toda cobertura aberta com $n+2$ elementos $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$ do espaço X possui um encolhimento aberto $\{W_i\}_{i=1}^{n+2}$ de ordem $\leqslant n$, isto é, tal que $\bigcap_{i=1}^{n+2} W_i = \emptyset$.*

Demonstração. É suficiente mostrar que todo espaço normal X com $\dim X > n$ possui uma cobertura aberta com $n+2$ elementos $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$ com a propriedade que cada encolhimento aberto $\{W_i\}_{i=1}^{n+2}$ de $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$ satisfaz a condição

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} W_i \neq \emptyset.$$

Suponha que $\dim X > n$, pela Proposição 1.15 existe uma cobertura aberta $\mathscr{V} = \{V_i\}_{i=1}^{k}$ do espaço X que não possui encolhimento aberto de ordem $\leqslant n$. Além disso, pode-se assumir que se $\mathscr{V}' = \{V_i'\}_{i=1}^{k}$ é um encolhimento de $\{V_i\}_{i=1}^{k}$ então

$$V_{i_1}' \cap V_{i_2}' \cap \cdots \cap V_{i_m}' \neq \emptyset \quad \text{sempre que} \quad V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \cdots \cap V_{i_m} \neq \emptyset, \tag{1.20}$$

onde $i_1, \ldots, i_m$ é uma sequência de números naturais menores ou iguais a k. De fato, se $\mathscr{V}$ tem um encolhimento aberto $\mathscr{V}'$ que não satisfaz (1.20), substitua $\mathscr{V}$ por $\mathscr{V}'$ e continue este procedimento até obter uma cobertura aberta com as propriedades desejadas. Tal cobertura existe pois o número de interseções em (1.20) é finita.

Como $\operatorname{ord}\mathscr{V} > n$, reorganizando, se necessário, os membros de $\mathscr{V}$, temos

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} V_i \neq \emptyset. \tag{1.21}$$

Mostraremos que a cobertura aberta com $n+2$ elementos $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$ do espaço X, onde $U_i = V_i$ para $i \leqslant n+1$ e $U_{n+2} = \displaystyle\bigcup_{i=n+2}^{k} V_i$, tem a propriedade desejada. Considere um encolhimento $\{W_i\}_{i=1}^{n+2}$ de $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$. A cobertura

$$\{W_1, W_2, \ldots, W_{n+1}, W_{n+2} \cap V_{n+2}, W_{n+2} \cap V_{n+3}, \ldots, W_{n+2} \cap V_k\}$$

do espaço X é um encolhimento de $\mathscr{V}$, deste modo por (1.20) e (1.21) temos

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} W_i \supset \left(\bigcap_{i=1}^{n+1} W_i\right) \cap (W_{n+2} \cap V_{n+2}) \supset \left(\bigcap_{i=1}^{n+1} V_i\right) \cap (V_{n+2}) \neq \emptyset.$$

□

Teorema 1.34. *Para todo espaço normal X, as condições* $\operatorname{Ind} X = 0$ *e* $\dim X = 0$ *são equivalentes.*

Demonstração. Suponha que $\dim X = 0$. Considere um conjunto fechado $A \subset X$ e um conjunto aberto $V \subset X$ que contém A. Note que $\{V, X \backslash A\}$ é uma cobertura aberta para X, logo pelo Teorema 1.33 existe um encolhimento $\{U, W\}$ de ordem $\leqslant 0$, isto é, $U \subset V$, $W \subset X \backslash A$ e $U \cap W = \emptyset$. Assim, $A \subset U \subset V$ e $\operatorname{Ind} \partial U = -1$, ou seja, $\operatorname{Ind} X = 0$.

Reciprocamente, suponha que $\operatorname{Ind} X = 0$. Dado uma cobertura aberta $\{U_1, U_2\}$ do espaço X, seja $A = X \backslash U_1$ e $V = U_2$. Por hipótese, existe um conjunto aberto $U \subset X$ tal que $A \subset U \subset V$ e $\partial U = \emptyset$. Logo, $\{U, X \backslash U\}$ é um encolhimento de $\{U_1, U_2\}$ (pois, $U \subset V = U_2$ e $X \backslash U \subset X \backslash A = U_1$) de ordem 0. Portanto, pelo Teorema 1.33 temos $\dim X = 0$. □

Os dois resultados abaixo se encontram em [3] no capítulo 1 na seção 7.

Teorema 1.35 (O Teorema de Coincidência). *Para todo espaço métrico separável X temos*

$$\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = \dim X.$$

Teorema 1.36 (Teorema das Partições). *Um espaço métrico separável X satisfaz* $\operatorname{ind} X \leqslant n$ *com $n \geqslant 0$ se, e somente se, para toda sequência (A_1, B_1), $(A_2, B_2), \ldots, (A_{n+1}, B_{n+1})$ de $n+1$ pares de subconjuntos fechados disjuntos de X existem conjuntos fechados $L_1, \ldots, L_{n+1}$ tais que L_i é uma partição entre A_i e B_i e $\bigcap_{i=1}^{n+1} L_i = \emptyset$.*

Capítulo 2

A dimensão do produto cartesiano e mergulhos em $\mathbb{R}^n$

Para um espaço métrico compacto X de dimensão n, vamos relacionar a dimensão do produto cartesiano $X \times X$ com os mergulhos em $\mathbb{R}^n$ através do seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Seja X um espaço métrico compacto de dimensão $n \geqslant 3$. O espaço $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ é denso em $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ se, e somente se, $\dim(X \times X) < 2n$.*

A demonstração deste Teorema será dividida nas próximas duas seções: na seção 2.1 demonstraremos que $\overline{E(X, \mathbb{R}^{2n})} = C(X, \mathbb{R}^{2n}) \Rightarrow \dim(X \times X) < 2n$ e na seção 2.2 a reciproca.

Agora, introduziremos alguns conceitos que serão necessários nestas seções.

Definição 2.1. *Uma função contínua $f : X \to I^p$, onde X é um espaço métrico e $I^p = [-1, 1]^p$ é o cubo p–dimensional, é dita não essencial (inessencial) se existe uma função contínua $g : X \to \partial I^p$ (∂I^p denota a fronteira de I^p) tal que $g(x) = f(x)$ para cada $x \in f^{-1}(\partial I^p)$.*

Dizemos que f é essencial quando não existe g satisfazendo a definição acima.

Note que uma função $f : X \to I^p$ é não essencial se existe uma extensão contínua de $\widetilde{f}$ sobre X, onde $\widetilde{f} = f|_{f^{-1}(\partial I^p)} : f^{-1}(\partial I^p) \to \partial I^p$, isto é, se existe uma função contínua $g : X \to \partial I^p$ comutando o diagrama:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(\partial I^p) \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, hook, "i"'] & \partial I^p . \\ X \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Observação 2.1. *Seja X um espaço métrico separável. Se $\dim X \leqslant p-1$ então toda função contínua $f : X \to I^p$ é não essencial. De fato, sabemos que ∂I^p é homeomorfo a S^{p-1}. Como $f^{-1}(\partial I^p)$ é um subconjunto fechado de X e $f|_{f^{-1}(\partial I^p)} : f^{-1}(\partial I^p) \to S^{p-1}$ é contínua segue, pelo Teorema 1.22, que existe $g : X \to S^{p-1}$ comutando o diagrama*

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(\partial I^p) \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & S^{p-1} \\ X \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd} .$$

Portanto, f é não essencial.

Exemplo 2.1. *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to I$ contínua definida por*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (\infty, -1], \\ x, & x \in [-1, 1] - \{0\}, \\ 1, & x \in [1, \infty). \end{cases} .$$

Note que a função contínua $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \{-1, 1\}$ definida por $g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$ satisfaz $g(x) = f(x)$ para $x \in f^{-1}(\partial I) = f^{-1}(\{-1, 1\})$. Assim, f é não essencial.

Proposição 2.1. *Seja $f : (I^p, \partial I^p) \to (I^p, \partial I^p)$ uma função contínua. Se $\widetilde{f}_* : H_{p-1}(\partial I^p) \to H_{p-1}(\partial I^p)$ é um homomorfismo não nulo então f é essencial.*

Demonstração. Considere a sequência longa de homologia do par $(I^p, \partial I^p)$:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_p(\partial I^p) \arrow[r] & H_p(I^p) \arrow[r] & H_p(I^p, \partial I^p) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & H_{p-1}(\partial I^p) \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{f}_*"'] & H_{p-1}(I^p) \arrow[r] & \cdots \\ & & 0 \arrow[r] & H_p(I^p, \partial I^p) \arrow[r] & H_{p-1}(\partial I^p) \arrow[r] & 0 & \end{tikzcd}$$

onde $\widetilde{f} = f|_{\partial I^p}$.

Como $H_p(I^p) = 0 = H_{p-1}(I^p)$ segue que $H_p(I^p, \partial I^p) \simeq H_{p-1}(\partial I^p) \simeq \mathbb{Z}$.

Suponha que f é não essencial, isto é, existe $g : I^p \to \partial I^p$ tal que $g(x) = \widetilde{f}(x)$, para todo $x \in \partial I^p$. Assim, $\widetilde{f} = g \circ i \Rightarrow \widetilde{f}_* = g_* \circ i_*$, onde $i : \partial I^p \to I^p$ é a inclusão e $\widetilde{f}_*$, g_*, i_* indicam as induzidas das funções $\widetilde{f}$, g, i em homologia. Logo, os diagramas abaixo são comutativos:

$$\begin{tikzcd} H_{p-1}(\partial I^p) \arrow[r, "\widetilde{f}_*"] \arrow[d, "i_*"'] & H_{p-1}(\partial I^p) \\ H_{p-1}(I^p) \arrow[ur, "g_*"'] & \end{tikzcd} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\widetilde{f}_*"] \arrow[d, "i_*"'] & \mathbb{Z} \\ 0 \arrow[ur, "g_*"'] & \end{tikzcd} .$$

Como g_* é nula segue que $\widetilde{f}_*$ é nula, o que contradiz a hipótese. Portanto, f é essencial. $\square$

Definição 2.2. *Duas funções contínuas* $f : X \to I^p$ *e* $g : Y \to I^q$ *são ditas transversalmente triviais se existem duas funções contínuas* $F : X \to I^p \times I^q$ *e* $G : Y \to I^p \times I^q$ *satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $F|_{f^{-1}(\partial I^p)} = (f, 0)|_{f^{-1}(\partial I^p)}$*;*

(ii) $G|_{g^{-1}(\partial I^q)} = (0, g)|_{g^{-1}(\partial I^q)}$*;*

(iii) $F(X) \cap G(Y) = \emptyset$*.*

Dizemos que f é transversalmente trivial quando f e f são transversalmente triviais. E quando f e g não são transversalmente triviais dizemos que elas são transversalmente essenciais.

Exemplo 2.2. *As funções contínuas* $f, g : I \to I$ *definidas por* $f(x) = 1$ *e* $g(x) = x$*, onde* $I = [-1, 1]$*, são transversalmente triviais. De fato, existem funções contínuas* $F, G : I \to I^2$ *definidas por* $F(x) = (f(x), 0)$ *e* $G(x) = (0, g(x))$*, obviamente, as condições (i) e (ii) da Definição 2.2 estão satisfeitas. Provaremos agora que* $F(I) \cap G(I) = \emptyset$*. Com efeito, se* $a \in F(I) \cap G(I)$*, então* $a = F(b) = G(c)$ *para* $b, c \in I$*. Daí,* $a = (f(b), 0) = (0, g(c)) \Rightarrow f(b) = 0$*, absurdo. Portanto,* f *e* g *são transversalmente triviais.*

2.1 A densidade dos mergulhos em $\mathbb{R}^{2n}$ de um espaço métrico compacto X de dimensão n implica $\dim(X \times X) < 2n$

Nesta seção provaremos a seguinte implicação do Teorema 2.1:

Teorema 2.2. *Seja* X *um espaço métrico compacto de dimensão* n*,* $n \geqslant 1$*. Se o subespaço* $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ *é denso em* $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ *então* $\dim(X \times X) < 2n$*.*

Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que Y é um retrato de vizinhança euclidiano, ou que Y é do tipo ENR, quando existe uma retração $r : V \to Y$, onde V é uma vizinhança de Y em $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.1 (Borsuk)**.** *Sejam* $Y \subset \mathbb{R}^n$ *um espaço do tipo ENR,* A *um subconjunto fechado de um espaço métrico* X *e* $f, g : A \to Y$ *duas funções contínuas homotópicas. Se* f *tem uma extensão contínua* $F : X \to Y$ *então* g *também admite extensão contínua.*

Demonstração. Ver [7], página 16. □

Lema 2.2. *Sejam $f : X \to I^m \times I^n$ e $g : Y \to I^m \times I^n$ duas funções contínuas tais que $f(X) \cap g(Y) = \emptyset$. Se $f = (f_1, f_2)$ e $g = (g_1, g_2)$ então $f_1 \times g_2 : X \times Y \to I^m \times I^n$ é não essencial.*

Demonstração. Como $f(X) \cap g(Y) = \emptyset$, para todo $(x, y) \in X \times Y$ tem-se $f_1(x) \neq g_1(y)$ ou $f_2(x) \neq g_2(y)$. Assim, $(f_1(x), g_2(y)) \neq (g_1(y), f_2(x))$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. Considere a função $h : X \times Y \to \partial(I^m \times I^n)$ dada pelo seguinte: $h(x, y) \in \partial(I^m \times I^n)$ é exatamente o ponto de interseção da semi-reta que começa em $(g_1(y), f_2(x))$ e com sentido $(f_1(x), g_2(y)) - (g_1(y), f_2(x))$. Note que a função h é contínua e, para $(x, y) \in (f_1 \times g_2)^{-1}(\partial(I^m \times I^n))$, $h(x, y) = (f_1(x), g_2(y))$, i.e., h é uma extensão contínua de $f_1 \times g_2 : (f_1 \times g_2)^{-1}(\partial(I^m \times I^n)) \to \partial(I^m \times I^n)$.

Portanto, $f_1 \times g_2$ é não essencial. □

$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(0, x) \leqslant 1\}$ é o disco de $\mathbb{R}^n$ centrado em $0 \in \mathbb{R}^n$ com raio 1.

Proposição 2.2. *Se $f \times g : X \times Y \to D^m \times D^n$ é essencial então f e g são transversalmente essenciais.*

Demonstração. Suponha que f e g são transversalmente triviais, isto é, existem funções contínuas $F = (f_1, f_2)$ e $G = (g_1, g_2)$ satisfazendo os itens da Definição 2.2. Como $F(X) \cap G(Y) = \emptyset$, segue do Lema 2.2 que $f_1 \times g_2 : X \times Y \to D^m \times D^n$ é não essencial. Por (i) e (ii) da Definição 2.2, temos $f_1|_{f^{-1}(\partial D^m)} = f|_{f^{-1}(\partial D^m)}$ e $g_2|_{g^{-1}(\partial D^n)} = g|_{g^{-1}(\partial D^n)}$.

Note que $A = (f \times g)^{-1}(\partial(D^m \times D^n)) \subset (f_1 \times g_2)^{-1}(\partial(D^m \times D^n))$ pois se $(x, y) \in (f \times g)^{-1}(\partial(D^m \times D^n))$ então $(f, g)(x, y) \in (\partial D^m \times D^n) \cup (D^m \times \partial D^n)$. Daí, ou $f(x) \in \partial D^m$ ou $g(y) \in \partial D^n$. Assim, $f(x) = f_1(x)$ ou $g(x) = g_2(x)$ e, portanto, $(f_1, g_2)(x, y) \in (\partial(D^m \times D^n))$.

Provemos que $f \times g : A \to \partial(D^m \times D^n)$ e $f_1 \times g_2 : A \to \partial(D^m \times D^n)$ são homotópicas. De fato, $A = (f^{-1}(\partial D^m) \times Y) \cup (X \times g^{-1}(\partial D^n))$. Defina $H : A \times I \to \partial(D^m \times D^n)$ por

$$H((x, y), t) = \begin{cases} (f(x), g(y) + t(g_2(x) - g(y))), & \text{se} \quad (x, y) \in f^{-1}(\partial D^m) \times Y, \\ (f(x) + t(f_1(x) - f(x), g(y))), & \text{se} \quad (x, y) \in X \times g^{-1}(\partial D^n). \end{cases}$$

Note que H é contínua, $H(x, 0) = (f \times g)(x)$ e $H(x, 1) = (f_1 \times g_2)(x)$ para todo $x \in A$. Como $f \times g \sim f_1 \times g_2$, $\partial(D^m \times D^n)$ é do tipo ENR e $f_1 \times g_2$ é não essencial, segue do Lema de Borsuk que $f \times g$ é não essencial. □

Definição 2.3. *Uma função $f : X \to Y$ é dita ϵ-próxima a $g : X \to Y$ se $d(f(x), g(x)) < \epsilon$, para todo $x \in X$.*

Proposição 2.3. *Se $f : X \to D^m$ e $g : Y \to D^n$ são transversalmente essenciais então existe $\epsilon > 0$ tal que para toda função contínua $F : X \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ϵ-próxima a $(f, 0) : X \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, e toda função contínua $G : Y \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ϵ-próxima a $(0, g) : Y \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ temos $F(X) \cap G(Y) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Tome $\epsilon = 1/6$. Considere $F = (f_1, f_2) : X \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e $G = (g_1, g_2) : Y \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ funções contínuas tais que F e G são ϵ-próximas a $(f, 0)$ e $(0, g)$, respectivamente. Sejam $\alpha, \beta : [0, \infty) \to [0, 1]$ definidas por

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ 6t - 3, & 1/2 \leqslant t \leqslant 2/3, \\ 1, & t \geqslant 2/3, \end{cases} \quad \text{e} \quad \beta(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ -6t + 4, & 1/2 \leqslant t \leqslant 2/3, \\ 0, & t \geqslant 2/3. \end{cases}$$

Defina também $F' : X \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e $G' : Y \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ por

$$F'(x) = ([1 - \alpha(\|f_1(x)\|)]f_1(x) + \alpha(\|f_1(x)\|)f(x), \beta(\|f_1(x)\|)f_2(x)),$$

$$G'(y) = (\beta(\|g_2(y)\|)g_1(y), [1 - \alpha(\|g_2(y)\|)]g_2(y) + \alpha(\|g_2(y)\|)g(y)).$$

Observe que α, β, F' e G' são funções contínuas.

Provemos que $\operatorname{Im} F' \cup \operatorname{Im} G' \subset D^m \times D^n$. Primeiro mostraremos $([1 - \alpha(\|f_1(x)\|)]f_1(x) + \alpha(\|f_1(x)\|)f(x), \beta(\|f_1(x)\|)f_2(x)) \in D^m \times D^n$. Faremos esta demonstração em casos:

1º)Caso:

$$\|\beta(\|f_1(x)\|)f_2(x)\| \leqslant \|f_2(x)\| \leqslant \frac{1}{6}.$$

Logo, $\beta(\|f_1(x)\|)f_2(x) \in D^n$.

2º)Caso: Se $\|f_1(x)\| \leqslant 1/2$ então

$$\|[1 - \alpha(\|f_1(x)\|)]f_1(x) + \alpha(\|f_1(x)\|)f(x)\| = \|f_1(x)\| \leqslant 1/2 < 1.$$

3º)Caso: Se $1/2 \leqslant \|f_1(x)\| \leqslant 2/3$ então $0 \leqslant 6\|f_1(x)\| - 3 \leqslant 1$.

$$\begin{aligned} \|[1 - \alpha(\|f_1(x)\|)]f_1(x) + \alpha(\|f_1(x)\|)f(x)\| &\leqslant \|f_1(x)\| + \|f(x) - f_1(x)\| \\ &\leqslant \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} < 1. \end{aligned}$$

4º)Caso: Se $\|f_1(x)\| \geqslant 2/3$ então

$$\|[1-\alpha(\|f_1(x)\|)]f_1(x)+\alpha(\|f_1(x)\|)f(x)\| = \|f(x)\| \leqslant 1.$$

Portanto, $\|[1-\alpha(\|f_1(x)\|)]f_1(x)+\alpha(\|f_1(x)\|)f(x)\| \in D^m$.

Analogamente, prova-se que $\operatorname{Im} G' \subset D^m \times D^n$.

Se $f(x) \in \partial D^m$ então $F'(x) = (f(x), 0)$, pois $\|f(x)\| = 1$ implica que $\|f_1(x)\| \geqslant \|f(x)\| - \|f_1(x) - f(x)\| \geqslant 1 - 1/6 = 5/6 > 2/3$, e daí, $\alpha(\|f_1(x)\|) = 1$ e $\beta(\|f_1(x)\|) = 0$. Do mesmo modo prova-se $g(x) \in \partial D^n \Rightarrow G'(x) = (0, g(x))$. Como f e g são transversalmente essenciais e F' e G' satisfazem os itens (i) e (ii) da Definição 2.2, existe $(x,y) \in X \times Y$ tal que $F'(x) = G'(y)$. Então, temos

$$\begin{aligned}\|[1-\alpha(\|f_1(x)\|)]f_1(x)+\alpha(\|f_1(x)\|)f(x)\| &= \|\beta(\|g_2(y)\|)g_1(y)\| \\ &= |\beta(\|g_2(y)\|)|.\|g_1(y)\| \\ &\leqslant \|g_1(y)\| \leqslant \epsilon = 1/6.\end{aligned}$$

Se $\|f_1(x)\| \leqslant 1/2$ e $\|g_2(x)\| \leqslant 1/2$, concluímos que $F(x) = F'(x) = G'(y) = G(y)$ e, portanto, $F(X) \cap G(Y) \neq \emptyset$. Com efeito, sabemos

$$\|f_1(x)\| - \alpha(\|f_1(x)\|)\|f_1(x) - f(x)\| \leqslant \|f_1(x) - \alpha(\|f_1(x)\|)(f_1(x) - f(x))\| \Rightarrow$$

$$\|f_1(x)\| - \alpha(\|f_1(x)\|)\|f_1(x) - f(x)\| \leqslant \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\|f_1(x)\| \leqslant \frac{1}{6} + \|f_1(x) - f(x)\| \leqslant \frac{1}{6} + \frac{1}{6} < \frac{1}{2}.$$

Do mesmo modo prova-se que $\|g_2(x)\| \leqslant 1/2$. □

Proposição 2.4. *Seja X um espaço compacto e seja Y um espaço métrico. No conjunto $C(X,Y)$, a topologia compacto-aberto e a topologia uniformemente convergente coincidem.*

Demonstração. Ver [10], página 285. □

Proposição 2.5. *Se X é um espaço métrico compacto tal que $E(X,\mathbb{R}^{2n})$ é denso em $C(X,\mathbb{R}^{2n})$ então quaisquer duas funções contínuas $f_1 : X_1 \to D^n$ e $f_2 : X_2 \to D^n$, onde X_1 e X_2 são subespaços fechados de X disjuntos, são transversalmente triviais. Em particular, $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to D^n \times D^n$ é não essencial.*

Demonstração. Suponha f_1 e f_2 transversalmente essenciais. Seja $\epsilon > 0$ satisfazendo a Proposição 2.3 para f_1 e f_2. Defina a função contínua $h : X \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ por

$$h(x) = \begin{cases} (f_1(x), 0), & \text{se } x \in X_1; \\ (0, f_2(x)), & \text{se } x \in X_2. \end{cases}$$

Como $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ é denso em $C(X, \mathbb{R}^{2n})$, existe um mergulho $H : X \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ que é ϵ-próxima a h. Então, $F = H|_{X_1}$ e $G = H|_{X_2}$ são ϵ-próximas a $(f_1, 0)$ e $(0, f_2)$, respectivamente, com $F(X_1) \cap G(X_2) = \emptyset$ pois se existisse $a \in F(X_1) \cap G(X_2)$ então $a = H(x) = H(y)$ para $x \in X_1$ e $y \in X_2$ e, como H é mergulho, temos $x = y \in X_1 \cap X_2 = \emptyset$, absurdo.

O fato de $F(X_1) \cap G(X_2) = \emptyset$ contradiz a Proposição 2.3 e, portanto, f_1 e f_2 são transversalmente triviais.

Pela contra positiva da Proposição 2.2, temos que $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to D^n \times D^n$ é não essencial. □

Lema 2.3. *Seja* $f : X \to \prod_{j \in J} M_j$ *e para cada* $j \in J$ *seja* $N_j \subset M_j$ *uma variedade com* $\dim N_j = \dim M_j$. *Se* f *é essencial então sua restrição* $f| : f^{-1}\left(\prod_{j \in J} N_j\right) \to \prod_{j \in J} N_j$ *também é essencial.*

Demonstração. Ver [5], página 382. □

Definição 2.4. *Sejam* $f : X \to Y$ *uma função contínua de um espaço métrico* X *em um espaço topológico* Y *e* $\epsilon > 0$ *um número. Dizemos que* f *é uma* ϵ*–aplicação se* $\operatorname{diam}(f^{-1}(y)) < \epsilon$ *para todo* $y \in Y$.

As demonstrações dos dois próximos lemas se encontram em [3], páginas 107 e 108.

Lema 2.4. *Se* X *é um espaço métrico compacto e se para todo número* $\epsilon > 0$ *existe uma* ϵ*-aplicação* $f : X \to Y$, *onde* Y *é um espaço compacto tal que* $\dim Y \leqslant n$, *então* $\dim X \leqslant n$.

Lema 2.5. *Um espaço métrico compacto* X *satisfaz* $\dim X \leqslant n$ *se, e somente se, para todo número* $\epsilon > 0$ *existe uma* ϵ*-aplicação de* X *em um poliedro de dimensão* $\leqslant n$.

Lema 2.6. *Seja* $f : X \to Y$ *uma* ϵ*-aplicação, onde* X *e* Y *são espaços métricos compactos. Então existe* $\epsilon_1 > 0$ *tal que para todo conjunto* $B \subset Y$ *de diâmetro* $\leqslant \epsilon_1$ *temos que* $\operatorname{diam}(f^{-1}(B)) < \epsilon$.

Demonstração. Suponha que ϵ_1 não existe. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um subconjunto $B_n \subset Y$ de diâmetro $< 1/n$ tal que $A_n = f^{-1}(B_n)$ tem diâmetro $\geqslant \epsilon$.

Sejam x_n, $x'_n \in \overline{A_n}$ tais que $d(x_n, x'_n) = \operatorname{diam} A_n \geqslant \epsilon$. Como X é compacto, existem subsequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que convergem para $x \in X$ e $x' \in X$, respectivamente. Desde que $d(f(x_n), f(x'_n)) < 1/n$ para todo n, segue que $f(x) = f(x') = y$. Como $\operatorname{diam} f^{-1}(y) < \epsilon$ (pois f é ϵ-aplicação), conclui-se que $d(x, x') < \epsilon$, absurdo, já que $d(x, x') \geqslant \epsilon$. □

Proposição 2.6. *Para um espaço métrico compacto X de dimensão n, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $\dim(X \times X) < 2n$;

(2) *Para toda função contínua $f : X \to D^n$, seu quadrado $f \times f : X \times X \to D^n \times D^n$ é não essencial;*

(3) *Para quaisquer duas funções contínuas $f_1 : X_1 \to D^n$ e $f_2 : X_2 \to D^n$, onde X_1 e X_2 são subespaços fechados de X disjuntos, $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to D^n \times D^n$ é não essencial.*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2): Seja $f : X \to D^n$ contínua. Por hipótese, $\dim(X \times X) \leqslant 2n - 1$ então, pela Observação 2.1, a função contínua $f : X \times X \to D^n \times D^n$ é não essencial.

(2) $\Rightarrow$ (3): Suponha que $f_1 \times f_2$ é essencial. Seja $f : X \to D^n$ uma extensão contínua qualquer da função contínua $X_1 \cup X_2 \to D^n$ dada por f_1 e f_2 (O Teorema de Tietze–Urysohn garante a existência da função f). Como $(f \times f)|_{X_1 \times X_2} = f_1 \times f_2$ temos que $(f \times f)|_{X_1 \times X_2}$ é essencial. Logo, $f \times f$ é essencial, contradizendo a hipótese. Portanto, $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to D^n \times D^n$ é não essencial.

(3) $\Rightarrow$ (1): Suponha que $\dim(X \times X) = 2n$. Assim $\dim(X \times X) > 2n - 1$, pelo Lema 2.4, existe $\epsilon_n - 0 > 0$ tal que para toda ϵ_0-aplicação $F : X \times X \to Y$ temos

$$\dim(F(X \times X)) \geqslant 2n. \tag{2.1}$$

Existe $\eta > 0$ tal que para toda η-aplicação $f : X \to P$ (onde P é um poliedro) temos que

$$f \times f : X \times X \to P \times P \tag{2.2}$$

é uma ϵ_0-aplicação.

Pelo Lema 2.5, existem um poliedro compacto P de dimensão n e uma η-aplicação $f : X \to P$. Pelo Lema 2.6 existe $\epsilon_1 > 0$ tal que

$$(A \subset P \times P) \quad \text{e} \quad (\operatorname{diam} A < \epsilon_1) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{diam}[(f \times f)^{-1}(A)] < \epsilon_0. \tag{2.3}$$

Seja K um complexo simplicial finito tal que $|K| = P$, e $K \times K$ denota o complexo celular composto de todas as células $s_1 \times s_2 \subset P \times P$, onde $s_1,\ s_2 \in K$.

Para $\sigma \in K \times K$ o "star" da célula σ em $K \times K$, denotado por $st(\sigma, K \times K)$, é a união de todas as células de $K \times K$ tendo σ como face.

Usando a subdivisão baricêntrica podemos escolher K tão fino que

$$\operatorname{diam}(st(\sigma, K \times K)) < \epsilon_1, \tag{2.4}$$

para cada $\sigma \in K \times K$.

Mostraremos que existem dois n-simplexos $s_1,\ s_2 \in K$ tais que

$$f \times f : (f \times f)^{-1}(s_1 \times s_2) \to s_1 \times s_2 \quad \text{é essencial.} \tag{2.5}$$

Suponha que para quaisquer dois simplexos $s_1,\ s_2 \in K$, $f \times f : (f \times f)^{-1}(s_1 \times s_2) \to s_1 \times s_2$ é não essencial. Ou seja, para quaisquer $s_1, s_2 \in K$ existe $F_{(s_1,s_2)} : (f \times f)^{-1}(s_1 \times s_2) \to \partial(s_1 \times s_2)$ extensão de $(f \times f)|_{(f\times f)^{-1}(\partial(s_1 \times s_2))}$.

Defina a função contínua $F : X \times X \to |(K \times K)^{(2n-1)}|$ como a colagem das funções $F_{(s_1,s_2)}$. E para cada $z \in X \times X$, $F(z)$ e $(f \times f)(z)$ pertencem a uma mesma célula de $K \times K$, pois dado $z \in X \times X$ temos $(f \times f)(z) \in s_1 \times s_2$ e assim $F(z) = F_{(s_1,s_2)}(z) \in \partial(s_1 \times s_2) \subset s_1 \times s_2$ (onde $(K \times K)^{(2n-1)}$ é a coleção de todos os simplexos em $K \times K$ de dimensão no máximo $2n - 1$, chamado de $(2n - 1)$-esqueleto).

Note que F é uma ϵ_0-aplicação.

De fato, seja $y \in F(X \times X)$. Então $y = F(z)$, para algum $z \in X \times X$ e existe uma célula $\sigma \in K \times K$ contendo $y = F(z)$ e $(f \times f)(z)$ que implica $z \in (f \times f)^{-1}(\sigma) \subset (f \times f)^{-1}(st(\sigma, K \times K))$. Logo,

$$F^{-1}(\{y\}) \subset (f \times f)^{-1}(st(\sigma, K \times K)).$$

Como $\operatorname{diam}(st(\sigma, K \times K)) < \epsilon_1$ (por (2.4)) e $[st(\sigma, K \times K)] \subset P \times P$ segue, por (2.3), $\operatorname{diam}[(f \times f)^{-1}(st(\sigma, K \times K))] < \epsilon_0$. Portanto, F é uma ϵ_0-aplicação.

Por (2.1), segue que $\dim(F(X \times X)) \geqslant 2n$ absurdo, pois $F(X \times X) \subset |(K \times K)^{(2n-1)}|$ e $\dim(|(K \times K)^{(2n-1)}|) \leqslant 2n-1$. Assim, vale a afirmação (2.5).

Considere dois n-simplexos $\tau_1 \subset s_1$ e $\tau_2 \subset s_2$ de modo que $\tau_1 \cap \tau_2 = \emptyset$ e seja $X_1 = f^{-1}(\tau_1)$, $X_2 = f^{-1}(\tau_2)$. Então X_1 e X_2 são subconjuntos fechados de X disjuntos.

Sejam $f_1 : X_1 \to \tau_1$ e $f_2 : X_2 \to \tau_2$ as restrições correspondentes de f. Por (2.5), $f \times f : (f \times f)^{-1}(s_1 \times s_2) \to s_1 \times s_2$ é essencial e, pelo Lema 2.3, segue que $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to \tau_1 \times \tau_2$ é essencial. Pela contra positiva, segue o resultado. □

O Teorema 2.2 no início desta seção segue imediatamente das Proposições 2.5 e 2.6.

Lema 2.7. *Seja X um espaço métrico compacto de dimensão n. Suponha que quaisquer duas funções $f_1 : X_1 \to D^n$ e $f_2 : X_2 \to D^n$, onde X_1 e X_2 são subconjuntos disjuntos fechados em X, são transversalmente triviais. Então, $E(X \times \{0,1\}, \mathbb{R}^{2n})$ é denso em $C(X \times \{0,1\}, \mathbb{R}^{2n})$.*

Demonstração. Ver [4], página 250. □

Dizemos que duas funções contínuas $f, g : X \to Y$ tem a propriedade de imagens disjuntas se para todo $\epsilon > 0$ existem funções contínuas $f', g' : X \to Y$ com imagens disjuntas e tais que $d(f, f') < \epsilon$ e $d(g, g') < \epsilon$.

Teorema 2.3. *Seja $n \geqslant 1$. Para todo espaço métrico compacto X de dimensão n, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *quaisquer duas funções contínuas $f, g : X \to \mathbb{R}^{2n}$ tem a propriedade de imagens disjuntas;*

(2) *quaisquer duas funções contínuas $f, g : X \to D^n$ são transversalmente triviais;*

(3) *toda função contínua $f : X \to D^n$ é transversalmente trivial;*

(4) *quaisquer duas funções contínuas $f_1 : X_1 \to D^n$ e $f_2 : X_2 \to D^n$, onde X_1 e X_2 são subconjuntos disjuntos fechados em X, são transversalmente triviais;*

(5) *$E(X \times \{0,1\}, \mathbb{R}^{2n})$ é denso em $C(X \times \{0,1\}, \mathbb{R}^{2n})$;*

(6) *$E(X, \mathbb{R}^{2n})$ é denso em $C(X, \mathbb{R}^{2n})$.*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Sejam $f, g : X \to D^n$ funções contínuas quaisquer. Suponha que f, g são transversalmente essenciais. Pela Proposição 2.3, existe $\epsilon > 0$ tal que para toda função contínua $F : X \to \mathbb{R}^{2n}$ ϵ-próxima a $(f, 0) : X \to \mathbb{R}^{2n}$ e para toda função contínua $G : X \to \mathbb{R}^{2n}$ ϵ-próxima a $(0, g) : X \to \mathbb{R}^{2n}$ temos $F(X) \cap G(Y) \neq \emptyset$. Assim, $(f, 0)$ e $(0, g)$ não têm a propriedade de imagens disjuntas.

(2) $\Rightarrow$ (3) Trivial.

(3) $\Rightarrow$ (4) Sejam $f_1 : X_1 \to D^n$ e $f_2 : X_2 \to D^n$ funções contínuas quaisquer, onde X_1 e X_2 são subespaços disjuntos fechados em X. Pelo Teorema de Tietze–Uryson, existe uma extensão contínua $f : X \to D^n$ da função $f_1 \cup f_2 : X_1 \cup X_2 \to D^n$. Por hipótese, f é transversalmente trivial. Assim, existem funções contínuas $F, G : X \to D^n \times D^n$ satisfazendo:

(i) $F(x) = (f(x), 0)$ se $x \in f^{-1}(\partial D^n)$;

(ii) $G(x) = (0, f(x))$ se $x \in f^{-1}(\partial D^n)$;

(iii) $F(X) \cap G(X) = \emptyset$.

Defina as funções contínuas $F_1 = F|_{X_1}$ e $F_2 = G|_{X_2}$ que satisfazem

(i) $F_1(x) = (f_1(x), 0)$ se $x \in f_1^{-1}(\partial D^n)$;

(ii) $F_2(x) = (0, f_2(x))$ se $x \in f_2^{-1}(\partial D^n)$;

(iii) $F_1(X) \cap F_2(X) = \emptyset$.

Portanto, f_1 e f_2 são transversalmente triviais.

(4) $\Rightarrow$ (5) Segue do Lema 2.7.

(5) $\Rightarrow$ (6) Seja $f \in C(X, \mathbb{R}^{2n})$. Defina $f' : X \times \{0, 1\} \to \mathbb{R}^{2n}$ por $f'(x, i) = f(x)$ para $x \in X$ e $i \in \{0, 1\}$. Como f' é contínua e $\overline{E(X \times \{0, 1\}, \mathbb{R}^{2n})} = C(X \times \{0, 1\}, \mathbb{R}^{2n})$ existe um mergulho $g' : X \times \{0, 1\} \to \mathbb{R}^{2n}$ ϵ-próximo a f'. Defina $g : X \to \mathbb{R}^{2n}$ por $g(x) = g'(x, 0)$. Note que $g \in E(X, \mathbb{R}^{2n})$ e $d(f(x), g(x)) = d(f'(x, 0), g'(x, 0)) < \epsilon$. Assim, $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ é denso em $C(X, \mathbb{R}^{2n})$.

(6) $\Rightarrow$ (1) Pela Proposição 2.5, temos que (6) $\Rightarrow$ (4). Desde que (4) $\Rightarrow$ (5) e (5) $\Rightarrow$ (1), concluímos o desejado.

Provemos que (5) $\Rightarrow$ (1). De fato, sejam $f, g : X \to \mathbb{R}^{2n}$ funções contínuas. Defina a função contínua $h : X \times \{0, 1\} \to \mathbb{R}^{2n}$ por $h(x, 0) = f(x)$ e $h(x, 1) = g(x)$. Por hipótese, existe um mergulho $h' : X \times \{0,1\} \to \mathbb{R}^{2n}$ ϵ-próxima a h. Defina $f', g' : X \to \mathbb{R}^{2n}$ por $f'(x) = h'(x,0)$ e $g'(x) = h'(x,1)$. Assim, f' e g' são ϵ-próxima a f e g, respectivamente. Veja que $f'(X) \cap g'(X) = \emptyset$. Com efeito, suponha que existe $y = f'(a) = g'(b)$ para a, $b \in X$, então $f'(a) = g'(b) \Rightarrow h'(a,0) = h'(b,1) \Rightarrow a = b$ e $0 = 1$, absurdo. Portanto, f e g tem a propriedade de imagens disjuntas. $\square$

2.2 Funções transversalmente triviais e mergulhos em $\mathbb{R}^{2n}$

Nesta seção daremos uma condição suficiente para que duas funções contínuas de espaços métricos compactos em discos sejam transversalmente triviais. Como um corolário, concluiremos que todo espaço métrico compacto X de dimensão n com $\dim(X \times X) < 2n$ admite um conjunto denso de mergulhos de X em $\mathbb{R}^{2n}$, para $n \geqslant 3$. Ou seja, concluímos a reciproca do Teorema 2.1.

Abaixo, definimos o número de interseção para classes de homologia em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.5. *Sejam X, Y subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, $A \subset X$ e $B \subset Y$ tais que $A \cap Y = \emptyset = X \cap B$. Considere a função contínua $d : (X \times Y, Z) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ definida por $d(x,y) = x - y$, onde $Z = (A \times Y) \cup (X \times B)$. A composição*

$$H_{n-i}(X,A) \times H_i(Y,B) \xrightarrow{\times} H_n(X \times Y, Z) \xrightarrow{(-1)^i d_*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$$

é chamada de homomorfismo "intersection pairing". Escrevemos

$$\psi \wedge \eta = (-1)^i d_*(\psi \times \eta), \quad \textit{para } \psi \in H_{n-i}(X,A), \quad \eta \in H_i(Y,B),$$

e chamamos $\psi \wedge \eta$ de número de interseção de ψ e η.

Note que este elemento está em $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$.

Sejam (K, K_0), (L, L_0) pares de complexos simpliciais e $f : |K| \to \mathbb{R}^n$, $g : |L| \to \mathbb{R}^n$ funções contínuas tais que

(i) $f(|K|) \cap g(|L_0|) = \emptyset = f(|K_0|) \cap g(|L|)$,

(ii) $f(|\sigma|) \cap g(|\tau|) = \emptyset$ sempre que σ é um p-simplexo de K, τ é um q-simplexo de L e $p + q < n$.

Pode-se definir uma n-cocadeia $c(f,g)$ em $(K, K_0) \times (L, L_0)$ com coeficientes inteiros pela fórmula

$$c(f,g)(\sigma \times \tau) = (-1)^q f(\sigma) \wedge g(\tau)$$

onde σ é um p-simplexo orientado de K e τ é um q-simplexo orientado de L e $p + q = n$.

Aqui consideramos o grupo das m-cocadeias (relativas) em $(K, K_0) \times (L, L_0)$ como o subgrupo de $C^m(K \times L)$ consistindo daquelas cocadeias que se anulam em cada m-célula orientada $\sigma \times \tau$ de $(K \times L_0) \cup (K_0 \times L)$.

A demonstração do lema abaixo está no artigo [11], página 106.

Lema 2.8. *A cocadeia $c(f, g)$ é um cociclo em $(K, K_0) \times (L, L_0)$.*

O cociclo $c(f, g)$ será chamado cociclo da interseção de f e g com respeito a (K, K_0) e (L, L_0). A classe de cohomologia

$$[c(f, g)] \in H^n((K, K_0) \times (L, L_0))$$

será chamada classe de cohomologia da interseção de f e g com respeito a (K, K_0), (L, L_0).

Definição 2.6. *Sejam dois pares $(|K|, |K_0|)$ e $(|L|, |L_0|)$ de complexos simpliciais finitos com $\dim K = p$, $\dim L = q$, $p + q = n$, e duas PL-aplicações $f : |K| \to M$, $g : |L| \to M$, onde M é uma variedade PL de dimensão m. Dizemos que f, g estão em posição geral com respeito a (K, K_0) e (L, L_0) se as seguintes condições são satisfeitas:*

(G1) $f(|K|) \cap g(|L_0|) = \emptyset = f(|K_0|) \cap g(|L|)$,

(G2) $f^{-1}(\partial M) \subset |K_0|$ *e* $g^{-1}(\partial M) \subset |L_0|$,

(G3) $f(|K|) \cap g(S(g)) = \emptyset = g(|L|) \cap f(S(f))$,

(G4) $\dim(S(f) \backslash |K_0|) \leqslant \max\{p - q, 1\}$,
$\dim(S(g) \backslash |L_0|) \leqslant \max\{q - p, -1\}$,

(G5) $f|_{|\sigma|}$ *e* $g|_{|\tau|}$ *são mergulhos PL e* $f(|\partial\sigma|) \backslash \partial M \neq \emptyset$ *para todo simplexo* σ *de* $K \backslash K_0$ *e para todo simplexo* τ *de* $L \backslash L_0$,

(G6) $f(|\sigma|)$ *e* $g(|\tau|)$ *são transversais para todo simplexo* σ *de* $K \backslash K_0$ *e todo simplexo* $\tau \in L \backslash L_0$.

As notações $S(f)$ e $S(g)$ referem-se aos conjuntos

$$S(f) = \overline{\{x \in |K| \mid f^{-1}(f(x)) \neq x\}}$$

e

$$S(g) = \overline{\{y \in |L| \mid g^{-1}(g(y)) \neq y\}}.$$

Os Lemas 2.9 e 2.10 também estão em [11].

Lema 2.9. *Sejam* (K, K_0), (L, L_0) *pares de complexos simpliciais finitos com* $\dim K = p \geqslant 3$, $\dim L = q \geqslant 2$. *Suponha que* $f : |K| \to I^n$ *e* $g : |L| \to I^n$ *são aplicações* PL *em posição geral com respeito a* (K, K_0), (L, L_0), *e* $n = p+q$. *Se* $[c(f, g)] = 0$ *então existem aplicações* PL $f' : |K| \to I^n$ *e* $g' : |L| \to I^n$ *com imagens disjuntas e tais que*

(a) $f'|_{|K_0|} = f|_{|K_0|}$ *e* $g'|_{|L_0|} = g|_{|L_0|}$,

(b) $(f')^{-1}(\partial I^m) \subset |K_0|$ *e* $(g')^{-1}(\partial I^m) \subset |L_0|$.

Lema 2.10. *Sejam* $f : (X, A) \to (I^p, \partial I^p)$ *e* $g : (Y, B) \to (I^q, \partial I^q)$ *funções contínuas de pares de espaços métricos compactos tais que o homomorfismo* $H^n(f \times g)$ *de grupos de cohomologia relativa é trivial, onde* $n = p + q$. *Então existem dois pares de complexos simpliciais* (K, K_0), (L, L_0) *com* $\dim K \leqslant \dim X$, $\dim L \leqslant \dim Y$ *e fatorações*

(i) $(X, A) \xrightarrow{\varphi} (|K|, |K_0|) \xrightarrow{f'} (I^p, \partial I^p)$,

(ii) $(Y, B) \xrightarrow{\psi} (|L|, |L_0|) \xrightarrow{g'} (I^q, \partial I^q)$,

tais que $f' \circ \varphi$ *e* $g' \circ \psi$ *são homotópicas (como funções contínuas de pares) a* f *e* g*, respectivamente, e o homomorfismo* $H^n(f' \times g')$ *de grupos de cohomologia é trivial.*

Agora podemos provar o seguinte Teorema:

Teorema 2.4. *Sejam* X *e* Y *espaços métricos compactos com* $\dim X = p$ *e* $\dim Y = q$. *Suponha que* $f : X \to I^p$ *e* $g : Y \to I^q$ *são funções contínuas tais que* $f \times g : X \times Y \to I^p \times I^q$ *é não essencial. Se* $p \geqslant 3$, $q \geqslant 2$ *então* f, g *são transversalmente triviais.*

Demonstração. Sejam $A = f^{-1}(\partial I^p)$ e $B = g^{-1}(\partial I^q)$. Como $f \times g : X \times Y \to I^p \times I^q$ é não essencial, a função contínua

$$f \times g : (X, A) \times (Y, B) \to (I^p, \partial I^p) \times (I^q, \partial I^q)$$

induz o homomorfismo trivial $H^m(f \times g)$ nos grupos de cohomologia relativa, onde $m = p+q$. De fato, veja que o diagrama abaixo é comutativo, pelo axioma de Eilenberg–Steenrod e por $f \times g$

ser não essencial.

$$\begin{tikzcd}
 & H^{m-1}(X\times Y) \arrow[d, "i^*"] \\
H^{m-1}(S^{m-1}) \arrow[ur, "F^*"] \arrow[r, "H^{m-1}(f\times g)|"'] \arrow[d, "h"'] & H^{m-1}(Z) \arrow[d, "s"] \\
H^m(D^m, S^{m-1}) \arrow[r, "H^m(f\times g)"'] & H^m(X\times Y, Z),
\end{tikzcd}$$

onde $Z = (X\times B)\cup(A\times Y)$. Note que h é um isomorfismo e $H^m(D^m, S^{m-1}) \simeq H^m((I^p, \partial I^p)\times (I^q, \partial I^q))$, pois $(I^p, \partial I^p)\times(I^q, \partial I^q) = (I^p\times I^q, (\partial I^p\times I^q)\cup(I^p\times\partial I^q)) = (I^m, \partial I^m)$. Como a sequência do par em cohomologia é exata temos $s\circ i^* = 0$.

$$\cdots \to H^{m-1}(X\times Y) \xrightarrow{i^*} H^{m-1}(Z) \xrightarrow{s} H^m(X\times Y, Z) \to H^m(X\times Y) \to \cdots$$

Portanto, $H^m(f\times g) = s\circ(i^*\circ F^*)\circ h^{-1} = 0$.

Pelo Lema 2.10, existem dois pares de complexos simpliciais (K, K_0), (L, L_0) com $\dim K \leqslant p$, $\dim L \leqslant q$ e fatorações $(X, A) \xrightarrow{\varphi} (|K|, |K_0|) \xrightarrow{f'} (I^p, \partial I^p)$ e $(Y, B) \xrightarrow{\psi} (|L|, |L_0|) \xrightarrow{g'} (I^q, \partial I^q)$ com $f'\circ\varphi \sim f$ e $g'\circ\psi \sim g$ e $H^m(f'\times g')$ trivial.

Podemos assumir que f', g' são lineares em cada simplexo de K e L, respectivamente, e que $0\notin f'(|\sigma|)$ para qualquer $(p-1)$-simplexo σ de K e que $0 \notin g'(|\tau|)$ para qualquer $(q-1)$-simplexo τ de L.

Considerem as inclusões $i_1 : I^p \to I^p\times I^q$ e $i_2 : I^q \to I^p \times I^q$ definidas por $i_1(x) = (x, 0)$ e $i_2(y) = (0, y)$. Observamos que para qualquer $\eta > 0$ existem funções contínuas

$$f'' : |K| \to I^m \qquad \text{e} \qquad g'' : |L| \to I^m \qquad \text{tais que}$$

(a) f'' e g'' estão em posição geral com respeito a $(|K|, |K_0|)$, $(|L|, |L_0|)$, adicionalmente elas são lineares em cada simplexo de K e L, respectivamente, e $(f'')^{-1}(\partial I^m) = |K_0|$, $(g'')^{-1}(\partial I^m) = |L_0|$,

(b) f'' é η-próxima a $i_1\circ f'$ e g'' é η-próxima a $i_2\circ g'$.

Sejam $|\sigma_1|, \ldots, |\sigma_k|$ todos os p-simplexos de K tais que 0 de I^p pertence a $f'(|\sigma_i|)$ para todo $i = 1, \ldots, k$ e sejam $|\tau_1|, \ldots, |\tau_l|$ todos os q-simplexos de L tais que 0 de I^q pertence a $g'(|\tau_j|)$ para todo $j = 1, \ldots, l$. Vamos assumir que a orientação de cada σ_i é coerente (pela função contínua

$f')$ com a orientação em I^p, e que a orientação em cada τ_i é coerente (pela função contínua g') com a orientação em I^q. Se η é suficientemente pequeno então $f''(|\sigma_i|)$ e $g''(|\tau_j|)$ se encontram transversalmente e

$$f''(\sigma_i) \wedge g''(\tau_j) = (i_1 \circ f'(\sigma_i)) \wedge (i_2 \circ g'(\tau_j)) = 1$$

para cada i e j, e também $f''(|\sigma|) \cap g''(|\tau|) = \emptyset$ para quaisquer dois simplexos σ de K e τ de L tais que $|\sigma| \notin \{|\sigma_1|, \ldots, |\sigma_k|\}$ ou $|\tau| \notin \{|\tau_1|, \ldots, |\tau_l|\}$. Assim, o cociclo de interseção $c(f'', g'')$ é dado por

$$c(f'', g'')(\sigma \times \tau) = 1 \cdot (-1)^q \quad \text{se} \quad \sigma \in \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\} \quad \text{e} \quad \tau \in \{\tau_1, \ldots, \tau_l\},$$
$$c(f'', g'')(\sigma \times \tau) = 0 \quad \text{se} \quad |\sigma| \notin \{|\sigma_1|, \ldots, |\sigma_k|\} \quad \text{ou} \quad |\tau| \notin \{|\tau_1|, \ldots, |\tau_l|\}$$

e $c(i_1 \circ f', i_2 \circ g') = c(f'', g'')$.

Por outro lado (pela fórmula de Künneth), temos

$$H^m(f' \times g')(e) = H^p(f')(e_1) \otimes H^q(g')(e_2)$$

onde e_1, e_2 e e são os geradores de $H^p(I^p, \partial I^p)$, $H^q(I^q, \partial I^q)$ e $H^m(I^m, \partial I^m)$, respectivamente, induzidos pela orientação de I^p, I^q e $I^m = I^p \times I^q$ (aqui identificamos os grupos $H^p(|K|, |K_0|) \otimes H^q(|L|, |L_0|)$ e $H^m((|K|, |K_0|) \times (|L|, |L_0|))$ pelo isomorfismo natural). Observe que

$$H^p(f')(e_1) = \left[\sum_{i=1}^{k} x_i^p\right], \qquad H^q(g')(e_2) = \left[\sum_{j=1}^{l} x_j^q\right],$$

onde x_i^p é a p-cocadeia de (K, K_0) dada por

$$x_i^p(\sigma_i) = 1 \qquad \text{e} \qquad x_i^p(\sigma) = 0 \quad \text{se} \quad |\sigma| \neq |\sigma_i|$$

e x_j^q é a q-cocadeia de (L, L_0) dada por

$$x_j^q(\tau_j) = 1 \qquad \text{e} \qquad x_j^q(\tau) = 0 \quad \text{se} \quad |\tau| \neq |\tau_j|.$$

Assim,

$$H^m(f' \times g')(e) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \left([x_i^p] \otimes [x_j^q]\right) = [c(f'', g'')]\,.$$

Uma vez que $H^m(f' \times g')$ é trivial, segue que $[c(f'', g'')] = 0$.

Como f'' e g'' estão em posição geral com respeito a (K, K_0), (L, L_0) em I^m, pelo Lema 2.9, existem aplicações PL $\widetilde{f} : |K| \to I^m$ e $\widetilde{g} : |L| \to I^m$ com imagens disjuntas e tais que

$$\widetilde{f}|_{|K_0|} = f''|_{|K_0|}, \qquad \widetilde{g}|_{|L_0|} = g''|_{|L_0|}$$

e

$$(\widetilde{f})^{-1}(\partial I^m) = |K_0|, \qquad (\widetilde{g})^{-1}(\partial I^m) = |L_0|.$$

Agora, vamos obter funções contínuas f^* e g^* com imagens disjuntas tais que f^* coincide com $i_1 \circ f$ em A e g^* coincide com $i_2 \circ g$ em B. Podemos assumir que (é suficiente tomar $\eta < 1/2$)

$$f''(|K_0|) \subset \partial I^p \times D^q \qquad \text{e} \qquad g''(|L_0|) \subset D^p \times \partial I^q,$$

onde $D^p = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^p$ e $D^q = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^q$, pois f'' é η-próximo a $i_1 \circ f'$ e $f''(|K_0|) \subset \partial I^m$. O mesmo vale para g''.

Uma vez que

$$\widetilde{f}(|K|) \cap (I^p \times \partial I^q) = \emptyset \qquad \text{e} \qquad \widetilde{g}(|L|) \cap (\partial I^p \times I^q) = \emptyset,$$

segue que existem vizinhanças abertas V de ∂I^p em I^p e W de ∂I^q em I^q tais que

$$\widetilde{f}(|K|) \cap (I^p \times W) = \emptyset \qquad \text{e} \qquad \widetilde{g}(|L|) \cap (V \times I^q) = \emptyset.$$

Observe que

$$(\widetilde{f} \circ \varphi)(A) \subset f''(|K_0|) \subset V \times D^q \qquad \text{e} \qquad (\widetilde{g} \circ \psi)(B) \subset g''(|L_0|) \subset D^p \times W.$$

Existem vizinhanças fechadas A' de A em X e B' de B em Y tais que

$$(\widetilde{f} \circ \varphi)(A') \subset V \times D^q \qquad \text{e} \qquad (\widetilde{g} \circ \psi)(B') \subset D^p \times W.$$

Assuma que $(\widetilde{f} \circ \varphi)|_A$ é homotópico a $(i_1 \circ f)|_A$ em $\partial I^p \times D^q$ (basta tomar η suficientemente pequeno). Defina a função contínua $\gamma : A \cup \partial A' \to \partial I^p \times D^q$ por

$$\gamma(x) = \begin{cases} (i_1 \circ f)(x) & \text{se } x \in A \\ (\widetilde{f} \circ \varphi)(x) & \text{se } x \in \partial A', \end{cases}$$

assim γ é homotópica a $(\widetilde{f} \circ \varphi)|_{A \cup \partial A'}$ e daí, pelo Teorema de extensão de homotopia de Borsuk (Lema 2.1) existe uma função contínua $\widehat{f} : A' \to V \times D^q$ que estende a função γ, isto é,

$$\widehat{f}|_A = (i_1 \circ f)|_A \qquad \text{e} \qquad \widehat{f}|_{\partial A'} = (\widetilde{f} \circ \varphi)|_{\partial A'}.$$

Similarmente, existe uma função contínua $\widehat{g} : B' \to D^p \times W$ tal que

$$\widehat{g}|_B = (i_2 \circ g)|_B \qquad \text{e} \qquad \widehat{g}|_{\partial B'} = (\widetilde{g} \circ \psi)|_{\partial B'}.$$

Agora definimos as funções contínuas $f^* : X \to I^m$ e $g^* : X \to I^m$ por:

$$f^*|_{A'} = \widehat{f}|_{A'} \qquad \text{e} \qquad f^*|_{(X \setminus A')} = (\widetilde{f} \circ \varphi)|_{(X \setminus A')},$$

$$g^*|_{B'} = \widehat{g}|_{B'} \qquad \text{e} \qquad g^*|_{(Y \setminus B')} = (\widetilde{g} \circ \psi)|_{(Y \setminus B')}.$$

Então f^* e g^* são funções contínuas bem definidas tais que $f^*|_A = (i_1 \circ f)|_A$ e $g^*|_B = (i_2 \circ g)|_B$. Se tomarmos V e W suficientemente pequenos (isto é, tal que a interseção dos conjuntos $V \times D^q$ e $D^p \times W$ é vazia) então f^* e g^* tem imagens disjuntas. Portanto, f e g são transversalmente triviais. $\square$

Obtemos o teorema abaixo como um corolário do Teorema 2.4.

Teorema 2.5. *Se X é um espaço métrico compacto de dimensão $n \geqslant 3$ e $\dim(X \times X) < 2n$ então o espaço $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ é denso em $C(X, \mathbb{R}^{2n})$.*

Demonstração. Suponha que X é um espaço métrico compacto de dimensão n com $\dim(X \times X) < 2n$, onde $n \geqslant 3$. Se $f : X \to I^n$ e $g : X \to I^n$ são funções contínuas quaisquer, então pelo Teorema 1.22 a função contínua $f \times g : X \times X \to I^n \times I^n$ é não essencial. Pelo Teorema 2.4, segue que f e g são transversalmente triviais. Logo, o espaço $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ é denso em $C(X, \mathbb{R}^{2n})$, pelo Teorema 2.3, como desejado. $\square$

Portanto, demonstramos o Teorema 2.1.

2.3 Aplicação do Teorema 2.1

Após demonstramos o Teorema 2.1 que diz: *seja X um espaço métrico compacto de dimensão $n \geqslant 3$. O espaço $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ é denso em $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ se, e somente se,* $\dim(X \times X) < 2n$. Nos perguntamos se existe tal espaço métrico compacto X de dimensão $n \geqslant 3$ satisfazendo $\dim(X \times X) < 2n$. A resposta foi afirmativa. Encontramos na referência [12] espaços que satisfazem a propriedade desejada:

Exemplo 2.3 (Pontrjagin). *Existe um espaço métrico compacto Φ_p tal que $\dim \Phi_p = 2$, para cada p primo, e*

$$\dim(\Phi_p \times \Phi_{p'}) = \begin{cases} 3, & se\ p \neq p'; \\ 4, & se\ p = p'. \end{cases}$$

Exemplo 2.4 (Boltyanskii). *Existe um espaço métrico compacto X de dimensão 2 tal que* $\dim(X \times X) = 3$

A demonstração da existência de tais espaços se encontra em [12] nas páginas 324 e 325, respectivamente.

Índice Alfabético

Referências Bibliográficas

[1] A. N. Dranisnikov, D. Repovs and E.V. Scepin, *On intersections of compacta of complementary dimensions in Euclidean space*, Topology and its Applications **38** (1991) 237-253.

[2] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc. (1966).

[3] R. Engelking, *Dimension Theory*, PWN - Polish Scientific Publishers - Varsóvia (1978).

[4] J. Krasinkiewicz, *Imbeddings into* $\mathbb{R}^n$ *and dimension of products*, Fund. Math. **133** (1989), no. 3, 247-253.

[5] J. Krasinkiewicz, *Essential mappings onto products of manifolds*, Geometric and algebraic topology, Banach Center Publ. **18** (1986), 377-406.

[6] J. Krasinkiewicz e K. Lorentz, *Disjoint membranes in cubes*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **36** (1988), no. 7-8, 397-402.

[7] E. L. Lima, *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*, IMPA.

[8] E. L. Lima, *Espaços métricos*, IMPA: Rio de Janeiro 4.ed (2011).

[9] D. McCullough and L. R. Rubin, *Intersections of separators and essential submanifolds of* I^N, Fund. Math. **116** (1983) 131-142.

[10] J. R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, Inc. (2000).

[11] S. Spiez, *Imbeddings in* $\mathbb{R}^{2m}$ *of* m*-dimensional compacta with* $\dim(X \times X) < 2m$, Fund. Math. **134** (1990), no. 2, 105-115.

[12] R. F. Williams, *A useful functor and three famous examples in topology*, Transactions of the American Mathematical Society. **106**, no. 2 (1963), 319-329.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 02 / 05 / 2016

Givanildo Donizeti de Melo
Assinatura do autor