Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Polinômios Ortogonais e L-Ortogonais Associados a Medidas Relacionadas

Marcos Henrique Campetti

Orientador: Eliana X. L. de Andrade

Dissertação apresentada ao Instituto de Biologia, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, campus de São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São José do Rio Preto

Janeiro - 2011

Campetti, Marcos Henrique.

Polinômios ortogonais e L-ortogonais associados a medidas relacionadas/ Marcos Henrique Campetti. - São José do Rio Preto: [s.n.], 2011.

115 f.: il. ; 30 cm.

Orientador: Eliana Xavier Linhares de Andrade

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Análise matemática. 2. Funções hiperbólicas. 3. Polinômios ortogonais. I. Andrade, Eliana Xavier Linhares de. II. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.587

Marcos Henrique Campetti

Polinômios ortogonais e L-ortogonais associados a medidas relacionadas

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Análise Aplicada junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Prof^{a}. Dr^{a}. Eliana Xavier Linhares de Andrade
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Fernando Akira Kurokawa
Professor Assistente Doutor
USP - São Paulo

Prof^{a}. Dr^{a}. Cleonice Fátima Bracciali
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto

- São José do Rio Preto, 20 de Janeiro de 2011.

Aos meus pais, Antonio e Maria.

Dedico.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, que me deu a vida e a oportunidade de estudar.

Um agradecimento mais que especial à Prof$^{\underline{a}}$. Dr^{a}. Eliana Xavier Linhares de Andrade, pelos incontáveis esforços, carinho e apoio na orientação deste trabalho.

Aos professores de pós-graduação, Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga e Prof$^{\underline{a}}$. Dr^{a}. Cleonice Fátima Bracciali pelo auxílio e contribuição intelectual.

À minha família que sempre me apoiou e torceu por mim, em especial à Maria Aparecida de Jesus Munhoz que é minha mãe e ao Walter Munhoz.

A Thaisa, pela compreensão, carinho e apoio.

Ao Jaime, Gaucho, João Vitor e a Andrea que foram importantes amigos pra mim.

Aos amigos de pós-graduação Marisa, Regina e Mirela, pela amizade e contribuição intelectual.

A todas as pessoas e funcionários do IBILCE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

À CNPq, pelo auxílio financeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo das propriedades de duas sequências de polinômios, $\{P_n^{\phi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n^{\phi_1}\}_{n=0}^{\infty}$, ortogonais com relação, respectivamente, às medidas $d\phi_0$ e $d\phi_1$, relacionadas entre si, e das propriedades de duas sequências de polinômios L-ortogonais, $\{B_n^{\psi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{B_n^{\psi_1}\}_{n=0}^{\infty}$, quando as medidas associadas, $d\psi_0$ e $d\psi_1$, estão também relacionadas. Para os polinômios ortogonais, foram considerados dois casos: polinômios ortogonais associados a medidas simétricas relacionadas por $d\phi_1(x) = \dfrac{c}{1+qx^2}\, d\phi_0(x)$ e polinômios ortogonais associados a medidas relacionadas por $(x-q)\, d\phi_1(x) = c\, d\phi_0(x)$. Como exemplo, os resultados foram aplicados no estudo de polinômios ortogonais de Sobolev associados a medidas simétricas como os de Gegenbauer e Hermite, e medidas não simétricas como as de Jacobi e Laguerre. Para os polinômios L-ortogonais, considerou-se o estudo de duas sequências de polinômios associados a medidas positivas fortes $d\psi_0$ e $d\psi_1$ relacionadas por $(z-\kappa)\, d\psi_1(z) = c\, d\psi_0(z)$. Como consequência dessas propriedades, algoritmos para gerar qualquer um dos pares de coeficientes das relações de recorrência, $\{\alpha_n^{\psi_0}, \beta_n^{\psi_0}\}$ ou $\{\alpha_n^{\psi_1}, \beta_n^{\psi_1}\}$, dado o outro, foram dados.

Palavras-chave: polinômios ortogonais, polinômios L-ortogonais, polinômios ortogonais de Sobolev, medidas relacionadas.

Abstract

The main purpose of this work is to study some properties of two sequences of polynomials, $\{P_n^{\phi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{P_n^{\phi_1}\}_{n=0}^{\infty}$, orthogonal, respectively, with respect to the related measures $d\phi_0$ and $d\phi_1$, and properties of two sequences of L-orthogonal polynomials, $\{B_n^{\psi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{B_n^{\psi_1}\}_{n=0}^{\infty}$, when the associated measures, $d\psi_0$ and $d\psi_1$, are also related. For the orthogonal polynomials, we considered two cases: orthogonal polynomials associated with symmetric measures related to each other by $d\phi_1(x) = \dfrac{c}{1+qx^2}\, d\phi_0(x)$ and orthogonal polynomials associated with measures related by $(x-q)\, d\phi_1(x) = c\, d\phi_0(x)$. As examples, the results are applied to obtain informations regarding Sobolev orthogonal polynomials associated with symmetric measures as Gegenbauer and Hermite measures, and non-symmetrical measures such as Jacobi and Laguerre measures. For the L-orthogonal polynomials, we considered the study of two sequences of polynomials associated with strong positive measures $d\psi_0$ and $d\psi_1$ and related to each other by $(z-\kappa)\, d\psi_1(z) = c\, d\psi_0(z)$. As a consequence of these properties, algorithms to generate any pair of coefficients of the recurrence relations, $\{\alpha_n^{\psi_0}, \beta_n^{\psi_0}\}$ or $\{\alpha_n^{\psi_1}, \beta_n^{\psi_1}\}$, given the other, were given.

Keywords: orthogonal polynomials, orthogonal L-polynomials, Sobolev orthogonal polynomials, related measures.

Sumário

Introdução

Entre os polinômios associados a uma relação de recorrência de três termos estão os polinômios ortogonais e os L-ortogonais. As aplicações de tais polinômios à Análise Aplicada são muitas e novas aplicações surgem a todo momento.

As aplicações dos polinômios ortogonais associados às chamadas medidas clássicas, como as de Jacobi, Hermite e Laguerre, têm, particularmente, papel fundamental em muitos problemas das ciências e das engenharias.

A introdução do problema forte de momento por Jones, Thron e Waadeland [17] abriu caminho para o estudo de polinômios que têm propriedades semelhantes às dos polinômios ortogonais. Existem poucos exemplos de polinômios L-ortogonais, onde as informações são dadas explicitamente. Mas, neste trabalho, os resultados aqui estudados nos permitem construir novos exemplos a partir de exemplos conhecidos como os mostrados na seção 4.3.

Sejam (a, b) um intervalo real, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, e $\phi(x)$ uma função real limitada, não-decrescente e com infinitos pontos de aumento em (a, b). Se os momentos definidos por

$$\mu_r = \int_a^b t^r d\phi(t)$$

existem para $r = 0, \ldots,$ $d\phi(t)$ é uma distribuição (medida positiva) em (a, b). Se os μ_r existem para $r = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots,$ $d\phi(t)$ é uma medida positiva forte em $[a, b]$. Se, além disso, $[a, b] \subseteq [0, \infty)$ então $d\phi(t)$ é uma medida positiva forte de Stieljes.

Uma sequência de polinômios $\{P_n^\phi\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à medida positiva $d\phi(x)$ no intervalo (a, b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$, se P_n^ϕ é de grau exatamente n e

$$< P_m^\phi, P_n^\phi >_\phi = \int_a^b P_m^\phi(x) P_n^\phi(x) d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{para} \quad m \neq n \\ \rho_n^\phi > 0, & \text{para} \quad m = n \end{cases}$$

Na forma mônica, esses polinômios satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos:

$$P_{n+1}^\phi(x) = (x - \beta_{n+1}^\phi) P_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}^\phi P_{n-1}^\phi(x), \quad n \geq 1, \tag{1}$$

com $P_0^{\phi}(x) = 1$, $P_1^{\phi}(x) = x - \beta_1^{\phi}$, $\beta_n^{\phi} \in \mathbb{R}$ e $\alpha_{n+1}^{\phi} > 0$, $n \geq 1$. Uma distribuição simétrica é aquela que satisfaz $d\phi(x) = -d\phi(-x)$ no intervalo $[-b, b]$, $b > 0$. Como consequência, na relação de recorrência de três termos, $\beta_n^{\phi} = 0$, $n \geq 1$. Para maiores detalhes sobre esses polinômios veja, por exemplo, Chihara [9].

Polinômios ortogonais de Sobolev $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ são polinômios de grau exatamente n, ortogonais com relação ao produto interno de Sobolev dado por:

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}} = \int_a^b f(t)g(t)d\varphi_0(t) + \int_a^b f'(t)g'(t)d\varphi_1(t),$$

com $d\varphi_0(t)$ e $d\varphi_1(t)$ medidas definidas em (a, b).

Seja $d\psi(t)$ uma distribuição forte de Stieltjes, isto é, $(a, b) \subset (0, \infty)$. Definimos uma sequência de polinômios L-ortogonais, $\{B_n^{\psi}\}_{n=0}^{\infty}$, por:

- $B_n^{\psi}(t)$ é mônico de grau n;
- $\sigma_{n,s}^{\psi} = \int_a^b t^{-n+s} B_n^{\psi}(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s = 0, 1, ..., n-1, \\ \sigma_{n,n}^{\psi}, & \text{se} \quad s = n. \end{cases}$

Esses polinômios satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos:

$$B_{n+1}^{\psi}(t) = (t - \beta_{n+1}^{\psi})B_n^{\psi}(t) - \alpha_{n+1}^{\psi} t B_{n-1}^{\psi}(t), \;\; n \geq 1,$$

com $B_0^{\psi}(t) = 1, B_1^{\psi}(t) = t - \beta_1^{\psi}$ e $\beta_n^{\psi}, \alpha_{n+1}^{\psi} > 0$, $n \geq 1$.

Os polinômios ortogonais e L-ortogonais apresentam muitas outras propriedades interessantes tais como:

- Todos os seus zeros são reais e simples e pertencem ao intervalo (a, b);
- Os zeros de dois polinômios de graus consecutivos se entrelaçam;
- Seus zeros são os nós de fórmulas de quadratura de máximo grau de precisão algébrica.

O objetivo deste trabalho é estudar a conexão entre duas sequências de polinômios ortogonais e, também, entre duas sequências de polinômios L-ortogonais.

Para os polinômios ortogonais, estudamos a conexão entre duas sequências $\{P_n^{\phi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n^{\phi_1}\}_{n=0}^{\infty}$ cujas medidas associadas $d\phi_0$ e $d\phi_1$, se relacionam por meio de um polinômio do primeiro ou do segundo graus, da seguinte maneira:

$$(x - q)\, d\phi_1(x) = c\, d\phi_0(x) \tag{2}$$

e

$$d\phi_1(x) = \frac{c}{1 + qx^2}\, d\phi_0(x), \tag{3}$$

respectivamente.

Como exemplos, os resultados são aplicados em polinômios de Sobolev. As principais referências são os artigos [6], para a relação envolvendo um polinômio de grau dois, e [7], para o de primeiro grau. Para os polinômios L-ortogonais, estudamos a conexão entre duas sequências $\{B_n^{\psi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{B_n^{\psi_1}\}_{n=0}^{\infty}$ associados a duas medidas positivas fortes $d\psi_0$ e $d\psi_1$ definidas em $[a,b]$. Mais precisamente, as medidas são relacionadas por $(t-\kappa)d\psi_1(t) = c\,d\psi_0(t)$, onde $(t-\kappa)/c$ é positivo quando $t \in (a,b)$.

Para realizarmos o estudo proposto, organizamos a presente dissertação da seguinte forma.

No Capítulo 1, introduzimos alguns conceitos básicos sobre função gama, polinômios ortogonais na reta real, polinômios L-ortogonais, polinômios ortogonais de Sobolev, frações contínuas e sequências encadeadas. Os conceitos dados neste capítulo são fundamentais para o entendimento e desenvolvimento dos demais capítulos.

No Capítulo 2, estudamos as propriedades de duas sequências de polinômios ortogonais $\{P_n^{\phi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n^{\phi_1}\}_{n=0}^{\infty}$ associados a medidas simétricas relacionadas através da equação (3) .

No Capítulo 3, estudamos as propriedades de duas sequências de polinômios ortogonais associados a medidas não-simétricas relacionadas por (2).

Por fim, no Capítulo 4, estudamos a conexão entre duas sequências de polinômios L-ortogonais, $\{B_n^{\psi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{B_n^{\psi_1}\}_{n=0}^{\infty}$, associados, respectivamente a duas medidas positivas fortes $d\psi_0$ e $d\psi_1$ definidas em $[a,b] \subset [0,\infty]$ e relacionadas por

$$(t-\kappa)\,d\psi_1(t) = c\,d\psi_0(t).$$

A constante não-nula c é arbitrária desde que satisfaça $\dfrac{(t-\kappa)}{c} > 0$ em (a,b).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, faremos um breve estudo sobre a função gama, polinômios ortogonais na reta real, polinômios L-ortogonais, polinômios ortogonais de Sobolev, frações contínuas e sequências encadeadas, pré-requisitos essenciais para o bom entendimento deste trabalho. Apresentaremos a maioria dos resultados sem demonstração que podem ser encontrados em [3], [5], [9], [16], [18], [21], [23] e [24].

1.1 Função gama

A função gama, $\Gamma(x)$, foi descoberta por Euler no estudo do problema de estender o domínio da função fatorial, por volta de 1729 (veja [5]). Para encontrar a generalização do fatorial de Euler, suponhamos $x \geq 0$ e $n \geq 0$ números inteiros. Consideremos o número

$$(a)_n = \begin{cases} 1, & se\ n = 0, \\ a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1), & se\ n > 0, \end{cases}$$

conhecido por *fatorial deslocado* ou *fatorial generalizado* ou, ainda, *símbolo de Pochhammer*, onde a pode ser um número real ou complexo. Podemos, então, escrever

$$x! = \frac{(x+n)!}{(x+1)_n}, \quad \text{pois} \quad \frac{(x+n)!}{(x+1)_n} = \frac{(1)(2)\cdots(x-1)(x)(x+1)\cdots(x+n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

Mas,

$$(x+n)! = (1)(2)\cdots(n-1)(n)(n+1)\cdots(n+x) = n!(n+1)_x$$

e, assim,

$$x! = \frac{n!(n+1)_x}{(x+1)_n} = \frac{n!n^x}{(x+1)_n}\frac{(n+1)_x}{n^x}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)_x}{n^x} = 1$, podemos concluir que

$$x! = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{(x+1)_n}. \tag{1.1}$$

Observe que, se x é um número complexo, mas diferente de um inteiro negativo, então o limite (1.1) existe e o chamamos de $\Gamma(x+1)$. Assim,

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{(x+1)_n}, \tag{1.2}$$

para $x \in \mathbb{C}$ e $x \neq -1, -2, \ldots$.

Propriedade 1.1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
x\Gamma(x) &= x \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{x-1}}{(x)_n} = x \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)} \frac{(x+n)n}{(x+n)n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)(x+n)} \frac{(x+n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{(x+1)_n} \\
&= \Gamma(x+1).
\end{aligned}$$

■

Definição 1.1. *A função gama também pode ser dada como a integral de Euler de segunda espécie*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \tag{1.3}$$

para $x \in \mathbb{C}$ *e* $Re(x) > 0$.

Propriedade 1.2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Demonstração: Aplicando (1.3) em $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, temos que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$. Utilizando a mudança de variáveis $t = z^2$ nesta integral, obtemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-z^2} z^{-1} 2z dz = 2\int_0^\infty e^{-z^2} dz = 2\left[\int_0^\infty e^{-z^2} dz \times \int_0^\infty e^{-y^2} dy\right]^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{I}, \tag{1.4}$$

onde

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(z^2+y^2)} dz dy.$$

Resolveremos I por meio de coordenadas polares. Logo, se $z = rcos(\theta)$ e $y = rsen(\theta)$, obtemos

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta.$$

Fazendo $r^2 = u$, temos que

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{du}{2} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-e^{-u} \Big|_0^{\infty} \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Assim, de (1.4), $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. ■

Notação: Para $x > 0$ e $y > 0$, denotaremos

$$\binom{x}{y} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}. \tag{1.5}$$

Para n inteiro e $x > 0$, vamos denotar

$$\binom{x}{n} = \frac{\Gamma(x+1)}{n!\,\Gamma(x-n+1)}.$$

1.2 Polinômios ortogonais na reta real

Seja ϕ uma função real, limitada, não-decrescente, definida no intervalo (a, b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$, e o conjunto

$$\mathfrak{M}(\phi) = \{x \mid \phi(x+\delta) - \phi(x-\delta) > 0, \quad \text{para todo} \quad \delta > 0\}.$$

Os pontos $x \in \mathfrak{M}$ são chamados pontos de aumento de ϕ.

O produto interno

$$\langle f, g \rangle_{\phi} = \int_a^b f(x)g(x)d\phi(x) \tag{1.6}$$

é definido positivo se o conjunto $\mathfrak{M}$ é infinito. Neste caso, $\mathfrak{M}$ é chamado suporte de $d\phi$. A condição de que a função ϕ tenha infinitos pontos de aumento garante que

$$\int_a^b p(x)d\phi(x) > 0,$$

para qualquer polinômio $p(x) \geq 0$, mas não identicamente nulo em (a, b).

Definição 1.2. *Seja $\phi(t)$ uma função real, limitada, não-decrescente e com infinitos pontos de aumento em (a, b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Definimos momentos pelas integrais*

$$\mu_n^{\phi} = \int_a^b x^n d\phi(x), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{1.7}$$

Se os momentos existem para $n = 0, 1, 2, \ldots$, então $d\phi(x)$ é chamada distribuição (medida positiva) em (a, b). Se os momentos existem para todo n inteiro, $d\phi(x)$ é uma distribuição forte. Se, além disso, $(a, b) \subset (0, \infty)$, $d\phi(x)$ é uma distribuição forte de Stieltjes. Quando $d\phi(x) = w(x)dx$, $w(x)$ é uma função não-negativa, mas não identicamente nula em (a, b), e a chamamos de função peso.

Definição 1.3. *Os determinantes*

$$\mathbf{H}_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m^\phi & \mu_{m+1}^\phi & \cdots & \mu_{m+n-1}^\phi \\ \mu_{m+1}^\phi & \mu_{m+2}^\phi & \cdots & \mu_{m+n}^\phi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m+n-1}^\phi & \mu_{m+n}^\phi & \cdots & \mu_{m+2n-2}^\phi \end{vmatrix}, \quad \forall\, m, n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1, \tag{1.8}$$

são chamados determinantes de Hankel de ordem n.

Teorema 1.1. *Se os momentos μ_k^ϕ existem para $k = 0, 1, \ldots, 2n-2$, então o determinante de Hankel de ordem n, $\mathbf{H}_n^{(0)}$, é diferente de zero.*

Demonstração: Veja [3].

Definição 1.4. *A sequência de polinômios $\{P_n^\phi\}_{n=0}^\infty$ é chamada de sequência de polinômios ortogonais com relação a uma medida $d\phi$ no intervalo (a, b), se P_n^ϕ é de grau exatamente n e*

$$\left\langle P_m^\phi, P_n^\phi \right\rangle_\phi = \int_a^b P_m^\phi(x) P_n^\phi(x) d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n \\ \rho_n^\phi > 0, & \text{para } m = n \end{cases}, \tag{1.9}$$

em que $\rho_n^\phi = \int_a^b [P_n^\phi(x)]^2 d\phi(x)$.

Notação: $P_n^\phi(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k$, $a_{n,n} \neq 0$. Quando $a_{n,n} = 1$, temos uma sequência de polinômios ortogonais mônicos.

Teorema 1.2. *Se os momentos μ_k^ϕ, $k \geq 0$, existem, então existe uma única sequência de polinômios ortogonais $\{P_n^\phi\}_{n=0}^\infty$ no intervalo (a, b) relativamente à distribuição $d\phi(x)$.*

Demonstração: A demonstração segue dos Teoremas 1.1 e 2.4 de [3]. ■

Os polinômios ortogonais satisfazem a muitas propriedades interessantes e, por esta razão, são aplicados na solução de diversos problemas da Matemática e Ciências Aplicadas. Uma das mais importantes é que eles satisfazem a uma relação de recorrência de três termos que, quando são mônicos, é dada por

$$P_{n+1}^{\phi}(x) = (x - \beta_{n+1}^{\phi})P_n^{\phi}(x) - \alpha_{n+1}^{\phi}P_{n-1}^{\phi}(x), \quad n \geq 0, \tag{1.10}$$

com $P_{-1}^{\phi}(x) = 0$ e $P_0^{\phi}(x) = 1$, e os coeficientes α_{n+1}^{ϕ} e β_{n+1}^{ϕ} são tais que

$$\alpha_{n+1}^{\phi} = \frac{\rho_n^{\phi}}{\rho_{n-1}^{\phi}}, \ n \geq 1, \quad \text{e} \quad \beta_{n+1}^{\phi} = \frac{\left\langle xP_n^{\phi}, P_n^{\phi}\right\rangle_{\phi}}{\rho_n^{\phi}}, \ n \geq 0. \tag{1.11}$$

Além disso, ρ_n^{ϕ} satisfaz à seguinte igualdade

$$\rho_n^{\phi} = \int_a^b \left[P_n^{\phi}(x)\right]^2 d\phi(x) = \alpha_{n+1}^{\phi}\alpha_n^{\phi}\ldots\alpha_3^{\phi}\alpha_2^{\phi}\mu_0^{\phi}, \quad n \geq 1. \tag{1.12}$$

De fato, da equação para α_{n+1}^{ϕ} em (1.11), temos que

$$\rho_n^{\phi} = \alpha_{n+1}^{\phi}\rho_{n-1}^{\phi}, \quad n \geq 1.$$

Assim, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \rho_n^{\phi} &= \alpha_{n+1}^{\phi}\rho_{n-1}^{\phi} = \alpha_{n+1}^{\phi}\alpha_n^{\phi}\rho_{n-2}^{\phi} \\ &= \ldots = \alpha_{n+1}^{\phi}\alpha_n^{\phi}\ldots\alpha_3^{\phi}\alpha_2^{\phi}\mu_0^{\phi}, \end{aligned}$$

pois

$$\rho_0^{\phi} = \int_a^b \left[P_0^{\phi}(x)\right]^2 d\phi(x) = \int_a^b 1 \ d\phi(x) = \mu_0^{\phi}.$$

Teorema 1.3. *Sejam $P_0^{\phi}, P_1^{\phi}, \ldots, P_m^{\phi}$ pertencentes a uma sequência de polinômios ortogonais com relação a uma medida $d\phi$ em (a,b). Então, $\{P_j^{\phi}\}_{j=0}^{m}$ é um conjunto linearmente independente.*

Demonstração: Sejam c_j, $j = 0, 1, \ldots, m$, constantes reais tais que $\displaystyle\sum_{j=0}^{m} c_j P_j^{\phi}(x) = 0$. Logo, para cada polinômio $P_k^{\phi}(x)$, $k \geq 0$, obtemos

$$\left\langle \sum_{j=0}^{m} c_j P_j^{\phi}(x), P_k^{\phi} \right\rangle_{\phi} = \left\langle 0, P_k^{\phi}\right\rangle_{\phi} = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{j=0}^{m} c_j \left\langle P_j^{\phi}, P_k^{\phi}\right\rangle_{\phi} = 0. \tag{1.13}$$

Por definição, $\left\langle P_j^{\phi}, P_k^{\phi} \right\rangle_{\phi} = 0$ para $j \neq k$ e $\left\langle P_k^{\phi}, P_k^{\phi} \right\rangle_{\phi} > 0$. Logo, de (1.13), para $k = 0, 1, \ldots, m$,

$$0 = \sum_{j=0}^{m} c_j \left\langle P_j^{\phi}, P_k^{\phi} \right\rangle_{\phi} = c_k \left\langle P_k^{\phi}, P_k^{\phi} \right\rangle_{\phi}.$$

Portanto, obtemos $c_k = 0,\ k = 0, \ldots, m$. ■

O teorema anterior nos diz que os polinômios ortogonais $P_k^{\phi}(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$, formam uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a m, $\mathbb{P}_m$.

Como consequência desse resultado, podemos enunciar o corolário a seguir.

Corolário 1.1. *Sejam $\{Q_n^{\phi}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n^{\phi}\}_{n=0}^{\infty}$ duas sequências de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação a uma mesma distribuição $d\phi(x)$. Então,*

$$Q_j^{\phi}(x) = c_j P_j^{\phi}(x), \quad j = 0, 1, \ldots,$$

em que

$$c_j = \frac{\left\langle Q_j^{\phi}, P_j^{\phi} \right\rangle_{\phi}}{\left\langle P_j^{\phi}, P_j^{\phi} \right\rangle_{\phi}}$$

é uma constante que depende apenas de j.

Usando a definição de polinômios ortogonais e o Teorema 1.3, podemos demonstrar facilmente o resultado a seguir.

Teorema 1.4. *Seja $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios e $d\phi(x)$ uma distribuição no intervalo (a, b). Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma sequência de polinômios ortogonais com relação a $d\phi(x)$ em (a, b);*

(b) $\left\langle P_n^{\phi}, \pi \right\rangle_{\phi} = 0,\ \forall\, \pi(x) \in \mathbb{P}_{n-1},\ n \geq 1$;

(c) $\langle x^m, P_n \rangle_{\phi} = \displaystyle\int_a^b x^m P_n(x) d\phi(x) = \begin{cases} 0, & se\ 0 \leq m \leq n-1, \\ \tilde{\rho}_n \neq 0, & se\ m = n. \end{cases}$

Sobre os zeros dos polinômios ortogonais, podemos demonstrar muitos resultados interessantes. Vamos enunciar, aqui, apenas dois, cujas demonstrações podem ser encontradas, por exemplo, em [3].

Teorema 1.5. *Seja $P_n^{\phi}(x)$, $n \geq 1$, um polinômio pertencente a uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação à medida positiva $d\phi(x)$. Então, as raízes de $P_n^{\phi}(x)$ são reais, distintas e pertencem ao intervalo (a, b).*

Teorema 1.6. *Seja $\{P_j^{\phi}\}_{j=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais. Então, entre dois zeros consecutivos do polinômio de grau $n-1$, $P_{n-1}^{\phi}(x)$, existe somente um zero de $P_n^{\phi}(x)$.*

1.2.1 Polinômios ortogonais simétricos

Definição 1.5. *Uma distribuição $d\phi(x)$ definida em um intervalo $[-b, b]$, $b > 0$, é simétrica se $d\phi(x) = -d\phi(-x)$. Se $d\phi(x) = w(x)dx$, então $w(x) = w(-x)$.*

Teorema 1.7. *Se uma distribuição $d\phi(x)$, definida em $[-b, b]$, é simétrica, então os momentos de ordem ímpar são nulos, ou seja, $\mu_{2n+1}^{\phi} = 0$, $\forall n \geq 0$.*

Demonstração: Sabemos que, $\mu_{2n+1} = \int_{-b}^{b} x^{2n+1} d\phi(x)$, $n \geq 0$. Se tomarmos $x = -y$, temos

$$\begin{aligned}\mu_{2n+1} &= \int_{-b}^{b} x^{2n+1} d\phi(x) = \int_{b}^{-b} (-y)^{2n+1} d\phi(-y) \\ &= -\int_{-b}^{b} y^{2n+1} d\phi(y) = -\mu_{2n+1}.\end{aligned}$$

Logo, $\mu_{2n+1} = 0$, $\forall\ n \geq 0$. ■

Teorema 1.8. *Seja $\{P_n^{\phi}\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais com relação a uma distribuição $d\phi(x)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $d\phi(x)$ é simétrica;

b) $P_n^{\phi}(-x) = (-1)^n P_n^{\phi}(x)$, $n \geq 0$;

c) na fórmula de recorrência (1.10), $\beta_n^{\phi} = 0$, $n \geq 1$.

Demonstração: Vamos mostrar que $a) \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow c)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, $P_n(x)$ mônicos para $n \geq 0$.
$a) \Rightarrow b)$ Como $d\phi(x)$ é simétrica, então $d\phi(x) = -d\phi(-x)$. Considerando a mudança de variáveis $x = -y$, obtemos

$$\int_{-b}^{b} P_m^{\phi}(x) P_n^{\phi}(x) d\phi(x) = \int_{b}^{-b} P_m^{\phi}(-y) P_n^{\phi}(-y) d\phi(-y) = \int_{-b}^{b} P_m^{\phi}(-y) P_n^{\phi}(-y) d\phi(y).$$

Pelo Corolário 1.1, $P_n^{\phi}(-x) = c_n P_n^{\phi}(x)$, em que c_n é uma constante. Assim, como

$$P_n^{\phi}(x) = x^n + a_{n,n-1} x^{n-1} + \ldots + a_{n,1} x + a_{n,0},$$

comparando os coeficientes dos termos de maior grau de $P_n^{\phi}(-x)$ e de $c_n P_n^{\phi}(x)$, obtemos $c_n = (-1)^n$.

Portanto,

$$P_n^{\phi}(-x) = (-1)^n P_n^{\phi}(x), \; n \geq 0.$$

b) $\Rightarrow$ *a)* Temos que $P_n^{\phi}(-x) = (-1)^n P_n^{\phi}(x), \; n \geq 0$. Queremos mostrar que $\mu_{2k+1} = 0, \; k = 0, 1, \ldots$. Faremos isso por indução sobre n.

- Para $n = 1$, temos

$$P_1^{\phi}(-x) = (-1)P_1^{\phi}(x) \Rightarrow -x + a_{1,0} = -x - a_{1,0} \Rightarrow a_{1,0} = 0. \text{ Logo, } P_1^{\phi}(x) = x.$$

  Além disso,

$$0 = \int_{-b}^{b} P_0^{\phi}(x) P_1^{\phi}(x) d\phi(x) = \int_{-b}^{b} P_1^{\phi}(x) d\phi(x) = \int_{-b}^{b} x d\phi(x) = \mu_1.$$

- Agora, vamos supor que nossa hipótese de indução seja verdadeira para $\mu_1, \ldots, \mu_{2k-1}$, isto é, $\mu_1 = \mu_3 = \ldots = \mu_{2k-1} = 0, \; k \geq 1$.

Assim, como $P_{2k+1}^{\phi}(x) = x^{2k+1} + \sum_{j=1}^{k} a_{2k+1,2j-1} x^{2j-1}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mu_{2k+1} &= \int_{-b}^{b} x^{2k+1} d\phi(x) = \int_{-b}^{b} \left[P_{2k+1}^{\phi}(x) - \sum_{j=1}^{k} a_{2k+1,2j-1} x^{2j-1} \right] d\phi(x) \\ &= \int_{-b}^{b} P_{2k+1}^{\phi}(x) d\phi(x) - \sum_{j=1}^{k+1} a_{2k+1,2j-1} \mu_{2j-1} = 0, \; k \geq 1. \end{aligned}$$

Portanto, $d\phi(x)$ é simétrica.

b) $\Leftrightarrow$ *c)* Usando a fórmula de recorrência (1.10), obtemos

$$(-1)^n P_n^{\phi}(-x) = (-1)^n (-x - \beta_n^{\phi}) P_{n-1}^{\phi}(-x) - (-1)^n \alpha_n^{\phi} P_{n-2}^{\phi}(-x).$$

Logo,

$$(-1)^n P_n^{\phi}(-x) = (-1)^{n-1} (x + \beta_n^{\phi}) P_{n-1}^{\phi}(-x) - \alpha_n^{\phi} (-1)^{n-2} P_{n-2}^{\phi}(-x).$$

Seja $R_n^{\phi}(x) = (-1)^n P_n^{\phi}(-x)$. Então,

$$R_n^{\phi}(x) = (x + \beta_n^{\phi}) R_{n-1}^{\phi}(x) - \alpha_n^{\phi} R_{n-2}^{\phi}(x), \; n \geq 1, \tag{1.14}$$

com $R_{-1}^{\phi}(x) = 0$ e $R_0^{\phi}(x) = 1$. Como $P_n^{\phi}(x) = (-1)^n P_n^{\phi}(-x)$, então $R_n^{\phi}(x) = P_n^{\phi}(x), \; \forall \; n$. Comparando as relações de recorrência (1.10) e (1.14), obtemos $\beta_n^{\phi} = 0, \; n \geq 1$. Logo, *b)* $\Rightarrow$ *c)*.

c) $\Rightarrow$ *b)* Temos que $\beta_n^\phi = 0,\ n \geq 1$. Se $R_n^\phi(x) = (-1)^n P_n^\phi(-x),\ n \geq 0$, então, por (1.14), temos

$$R_n^\phi(x) = xR_{n-1}^\phi(x) - \alpha_n^\phi R_{n-2}^\phi(x),\ n \geq 1.$$

Observe que é a mesma relação de recorrência para $P_n^\phi(x)$ com $\beta_n^\phi = 0$. Como $R_{-1}^\phi(x) = P_{-1}^\phi(x)$ e $R_0^\phi(x) = P_0^\phi(x)$, obtemos

$$P_n^\phi(x) = R_n^\phi(x) = (-1)^n P_n^\phi(-x),\ n \geq 0.$$

■

1.2.2 Polinômios associados aos ortogonais

Definição 1.6. *Dada uma sequência de polinômios ortogonais, $\{P_n^\phi\}_{n=0}^\infty$, definimos o polinômio associado a $P_n^\phi(x)$ por*

$$Q_n^\phi(x) = \int_a^b \frac{P_n^\phi(t) - P_n^\phi(x)}{t - x}\, d\phi(t),\ n \geq 0. \tag{1.15}$$

Não é difícil mostrar que $Q_n^\phi(x)$ é um polinômio de grau $n-1$, para $n \geq 1$.

Teorema 1.9. *Seja $\{P_n^\phi\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais mônicos. Os polinômios associados $Q_n^\phi(x)$ satisfazem à mesma relação de recorrência dos polinômios ortogonais mônicos $P_n^\phi(x)$, mas com condições inicias $Q_0^\phi(x) = 0$ e $Q_1^\phi(x) = \mu_0^\phi$.*

Demonstração: veja [3]. ■

Neste trabalho, vamos considerar somente polinômios ortogonais P_n^ϕ mônicos, ou seja, com $a_{n,n} = 1$.

1.3 Polinômios ortogonais clássicos

Segundo Chihara [9], os polinômios de Jacobi (incluindo os casos especiais de Legendre, Chebyshev de primeira e segunda espécies e Gegenbauer), de Laguerre e de Hermite são chamados de polinômios ortogonais clássicos. No trabalho de Agarwal e Milovanović [1], encontramos a seguinte definição para polinômios ortogonais clássicos.

Definição 1.7. *Polinômios ortogonais com respeito a uma medida $d\phi(x) = w(x)dx$ no intervalo (a, b) são chamados de polinômios ortogonais clássicos se a função peso, $w(x)$, satisfaz à seguinte equação diferencial*

$$\frac{d}{dx}(M(x)w(x)) = N(x)w(x),$$

em que

$$M(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & se\ (a,b) = (-1,1) \\ x, & se\ (a,b) = (0,\infty) \\ 1, & se\ (a,b) = (-\infty,\infty) \end{cases}$$

e $N(x)$ é um polinômio de grau 1.

Facilmente verifica-se que as funções peso dos polinômios de Jacobi, de Laguerre e de Hermite satisfazem às condições acima.

1.3.1 Polinômios de Jacobi

Os polinômios de Jacobi, denotados por $P_n^{(\alpha,\beta)}$, são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à função peso

$$w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \quad \alpha > -1, \ \ \beta > -1.$$

Esses polinômios podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta)}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}]$$

quando estão na forma mônica, sendo $\Gamma(t)$ é a conhecida função gama.

Eles também podem ser dados explitamente por

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \begin{pmatrix} 2n+\alpha+\beta \\ n \end{pmatrix}^{-1} \sum_{m=0}^{n} \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+\beta \\ m \end{pmatrix} (x-1)^m(x+1)^{n-m}. \tag{1.16}$$

Os polinômios de Jacobi, quando estão na forma mônica, satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade

$$\begin{aligned} \left\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)} \right\rangle_{(\alpha,\beta)} &= \int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \rho_n^{(\alpha,\beta)} \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

Aqui,

$$\rho_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{2n+\alpha+\beta+1}n!\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}. \tag{1.18}$$

Os polinômios de Jacobi podem, ainda, ser obtidos através da relação de recorrência de três termos

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = \left(x - \beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)}\right) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)} P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 1,$$

em que

$$\alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = \frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)}\,, \tag{1.19}$$

$$\beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)}, \tag{1.20}$$

$P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$ e $P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = x + \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta+2}$.

Esses polinômios satisfazem à seguinte relação diferencial

$$P_n'^{(\alpha,\beta)}(x) = nP_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x).$$

Casos especiais dos polinômios de Jacobi são:

- os polinômios de Legendre, P_n, com $\alpha = \beta = 0$,
- os polinômios de Chebyshev de primeira espécie, T_n, com $\alpha = \beta = -\dfrac{1}{2}$,
- os polinômios de Chebyshev de segunda espécie, U_n, com $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$,
- os polinômios de Gegenbauer, também conhecidos como polinômios Ultrasféricos, $G_n^{(\lambda)}$, com $\alpha = \beta = \lambda - \dfrac{1}{2}$, $\lambda > -\dfrac{1}{2}$.

1.3.2 Polinômios de Gegenbauer

Os polinômios de Gegenbauer, ou polinômios Ultrasféricos, são um caso especial dos polinômios de Jacobi, com $\alpha = \beta = \lambda - \dfrac{1}{2} > -1$. São, então, ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à função peso $w(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$.

A notação usual para os polinômios Gegenbauer é $G_n^{(\lambda)}(x)$ e são dados por

$$G_n^{(\lambda)}(x) = \binom{2\alpha}{\alpha}^{-1} \binom{n+2\alpha}{\alpha} P_n^{(\alpha,\alpha)}(x),$$

sendo $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ os polinômios de Jacobi com $\beta = \alpha$. Logo, por (1.9), quando estão na forma mônica, satisfazem à seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\left\langle G_n^{(\lambda)}, G_m^{(\lambda)} \right\rangle_\lambda = \int_{-1}^{1} G_n^{(\lambda)}(x) G_m^{(\lambda)}(x)(1-x)^{\lambda-1/2}dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \rho_n^{(\lambda)} \neq 0, & \text{se } m = n, \end{cases} \tag{1.21}$$

em que,

$$\rho_n^{(\lambda)} = \left\langle G_n^{(\lambda)}, G_n^{(\lambda)} \right\rangle_\lambda = \frac{2^{2n+2\lambda} n!\, \Gamma^2(n+\lambda+1/2)\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2n+2\lambda+1)\Gamma(2n+2\lambda)}. \tag{1.22}$$

Lembrando que

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}, \quad a \geq b,$$

podemos, então, escrever os polinômios de Gegenbauer como

$$\begin{aligned} G_n^{(\lambda)}(x) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)} P_n^{(\alpha,\alpha)}(x) \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})} P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})}(x), \quad \alpha = \lambda - \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos

$$G_{n+1}^{(\lambda)}(x) = xG_n^{(\lambda)}(x) - \frac{n(n+2\lambda-1)}{4(n+\lambda)(n+\lambda-1)} G_{n-1}^{(\lambda)}(x), \ \ n \geq 0, \tag{1.24}$$

com as condições iniciais $G_{-1}^{(\lambda)}(x) = 0$ e $G_0^{(\lambda)} = 1$.

Em termos da função hipergeométrica (veja Szegő [23]), pag.83), os polinômios mônicos de Gegenbauer são dados por

$$G_{2n}^{(\lambda)}(x) = \left(\frac{-1}{4}\right)^n \frac{(2n)!}{n!} \frac{(\lambda)_n}{(\lambda)_{2n}} \ {}_2F_1(-n, n+\lambda; 1/2; x^2), \quad n \geq 1, \tag{1.25}$$

$$G_{2n+1}^{(\lambda)}(x) = \left(\frac{-1}{4}\right)^n \frac{(2n+1)!}{n!} \frac{(\lambda)_{n+1}}{(\lambda)_{2n+1}} x \ {}_2F_1(-n, n+\lambda+1; 3/2; x^2), \quad n \geq 1, \tag{1.26}$$

onde ${}_2F_1(a,b;c;x) = 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+j-1)b(b+1)\dots(b+j-1)}{1.2\dots j \quad c(c+1)\dots(c+j-1)}\, x^j$.

1.3.3 Polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre, denotados por $L_n^{(\alpha)}$, são ortogonais no intervalo $(0,\infty)$ com relação à função peso

$$w(x) = x^\alpha e^{-x}, \quad \alpha > -1,$$

Eles podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues, que é dada por

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}[x^{n+\alpha} e^{-x}].$$

Explicitamente, podem ser escritos como

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n n! \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{n+\alpha}{n-m} x^m.$$

A relação de ortogonalidade para os polinômios de Laguerre mônicos é dada por

$$\left\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \right\rangle_\alpha = \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \rho_n^{(\alpha)}, & \text{se } m = n, \end{cases} \tag{1.27}$$

em que

$$\rho_n^{(\alpha)} = n!\Gamma(n+\alpha+1). \tag{1.28}$$

Esses polinômios também podem ser obtidos através da relação de recorrência de três termos

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = \left(x - \beta_{n+1}^{(\alpha)}\right) L_n^{(\alpha)}(x) - \alpha_{n+1}^{(\alpha)} L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1, \tag{1.29}$$

com

$$\alpha_{n+1}^{(\alpha)} = n(n+\alpha), \ n \geq 1, \ \ \beta_{n+1}^{(\alpha)} = 2n+\alpha+1, \ n \geq 0, \tag{1.30}$$

$L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $L_1^{(\alpha)}(x) = x - (\alpha+1)$.

Os polinômios de Laguerre satisfazem, ainda, à seguinte relação diferencial

$$L_n'^{(\alpha)}(x) = nL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x), \ \ n \geq 1,$$

e a relação

$$L_n^{(\alpha)}(x) + nL_{n-1}^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha-1)}(x), \ \ n \geq 1. \tag{1.31}$$

1.3.4 Polinômios de Hermite

Os polinômios de Hermite, denotados por H_n, são ortogonais no intervalo $(-\infty, \infty)$ com relação à função peso

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues por

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{e^{x^2}}{2^n} \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}]$$

quando estão na forma mônica, e são dados explicitamente por

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k n!}{4^k k!(n-2k)!} x^{n-2k}, \tag{1.32}$$

em que $\lfloor n/2 \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a $\dfrac{n}{2}$.

Os polinômios de Hermite mônicos satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade

$$\langle H_n, H_m \rangle_{\mathbb{H}} = \int_{-\infty}^\infty H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & se\ m \neq n, \\ \dfrac{\sqrt{\pi} n!}{2^n}, & se\ m = n. \end{cases} \tag{1.33}$$

Podem, também, ser obtidos através da relação de recorrência de três termos

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - \frac{n}{2}H_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{1.34}$$

com $H_0(x) = 1$ e $H_1(x) = x$.

Os polinômios de Hermite satisfazem, ainda, à seguinte relação diferencial

$$H_n'(x) = nH_{n-1}(x).$$

1.4 Polinômios ortogonais de Sobolev

Sejam $d\phi_k$, $k = 0, 1, \ldots, N$, medidas na reta real $\mathbb{R}$ e consideremos o espaço $\mathbb{H}_N(\mathbb{R})$ das funções diferenciáveis até ordem N em $\mathbb{R}$ satisfazendo

$$\sum_{k=0}^{N} \int_{\mathbb{R}} [f^{(k)}(x)]^2 d\phi_k(x) < \infty,$$

na qual $f^{(k)}$ denota a k-ésima derivada da função f. Tal espaço é chamado espaço de Sobolev. Note que, o espaço dos polinômios $\mathbb{P}$ é um subespaço de $\mathbb{H}_N(\mathbb{R})$.

Consideremos $\mathbb{P}$ munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}} = \sum_{k=0}^{N} \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) d\phi_k(x), \quad f, \ g \ \in \ \mathbb{P}.$$

A sequência de polinômios $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ é chamada sequência de polinômios ortogonais de Sobolev, se S_n é de grau exatamente n e

$$\langle S_m, S_n \rangle_{\mathbb{S}} = \begin{cases} 0, & \text{para} \quad m \neq n, \\ \rho_n^{\mathbb{S}} > 0, & \text{para} \quad m = n. \end{cases}$$

Consideramos, neste trabalho, o caso especial deste produto interno onde $N = 1$ e que usualmente é dado da seguinte forma

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{\mathbb{S}} &= \langle f, g \rangle_{\theta_1} + \lambda \langle f', g' \rangle_{\theta_2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\theta_1(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)d\theta_2(x), \end{aligned} \tag{1.35}$$

onde $\lambda \geq 0$. Note que, o parâmetro λ pode ser embutido na medida $d\theta_2$.

Os polinômios ortogonais de Sobolev, em geral, não satisfazem às mesmas propriedades dos polinômios ortogonais associados ao produto interno (1.6). Por exemplo, eles não possuem uma relação de recorrência de três termos e os zeros desses polinômios podem não pertencer ao intervalo de ortogonalidade. Em 1991, Iserles *et al.* [16] introduziu os conceitos de par coerente e par simetricamente coerente de medidas e, utilizando esses conceitos, encontrou uma relação para os polinômios ortogonais de Sobolev envolvendo os polinômios ortogonais relacionados à medida $d\theta_1$.

A seguir, apresentamos alguns resultados obtidos em [16].

1.4.1 Par coerente e simétricamente coerente de medidas

Sejam $\{P_n^{\theta_1}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n^{\theta_2}\}_{n=0}^{\infty}$ as sequências de polinômios ortogonais mônicos associados às medidas $d\theta_1$ e $d\theta_2$, respectivamente. Então, o par $\{d\theta_1, d\theta_2\}$ é chamado par coerente de medidas se existem constantes não nulas σ_n, $n \geq 1$, tais que

$$P_n^{\theta_2}(x) = \frac{1}{n+1}\left[P'^{\,\theta_1}_{n+1}(x) + \sigma_n P'^{\,\theta_1}_{n}(x)\right], \quad n \geq 1. \tag{1.36}$$

Então, os polinômios ortogonais mônicos de Sobolev satisfazem à seguinte relação

$$S_{n+1}(x) + a_n S_n(x) = P_{n+1}^{\theta_1}(x) + \sigma_n P_n^{\theta_1}(x), \quad n \geq 0, \tag{1.37}$$

onde os coeficientes a_n podem ser obtidos recursivamente por

$$a_n = \frac{\sigma_n \rho_n^{\theta_1}}{\rho_n^{\theta_1} + \lambda n^2 \rho_{n-1}^{\theta_2} + \sigma_{n-1}^2 \rho_{n-1}^{\theta_1} - \sigma_{n-1}\rho_{n-1}^{\theta_1} a_{n-1}}, \quad n \geq 1,$$

com $a_0 = \sigma_0$.

Da mesma forma, um par de medidas $\{d\theta_1, d\theta_2\}$ é chamado de par simetricamente coerente de medidas, se existem constantes não nulas σ_n, $n \geq 0$, tais que

$$P_n^{\theta_2}(x) = \frac{1}{n+1}\left[P'^{\,\theta_1}_{n+1}(x) + \sigma_{n-1} P'^{\,\theta_1}_{n-1}(x)\right], \quad n \geq 1.$$

Também para este caso, são válidas propriedades semelhantes ao caso da coerência, entre elas a relação

$$S_{n+1}(x) + a_{n-1} S_{n-1}(x) = P_{n+1}^{\theta_1}(x) + \sigma_{n-1} P_{n-1}^{\theta_1}(x), \quad n \geq 1, \tag{1.38}$$

onde os coeficientes a_n podem ser obtidos recursivamente pela expressão

$$a_n = \frac{\sigma_n \rho_n^{\theta_1}}{\rho_n^{\theta_1} + \lambda n^2 \rho_{n-1}^{\theta_2} + \sigma_{n-2}^2 \rho_{n-2}^{\theta_1} - \sigma_{n-2}\rho_{n-2}^{\theta_1} a_{n-2}}, \quad n \geq 2,$$

com $a_1 = \dfrac{\rho_1^{\theta_1}\sigma_1}{\rho_1^{\theta_1} + \lambda \rho_0^{\theta_2}}$ e $a_0 = \sigma_0$. Neste caso, os polinômios S_n também são simétricos, ou seja, $S_n(-x) = (-1)^n S_n(x)$, $n \geq 0$.

Em 1997, no trabalho de Meijer [19], os pares coerentes e simetricamente coerentes de medidas foram completamente determinados. Meijer mostrou que pelo menos uma das medidas $d\theta_1$ ou $d\theta_2$ deve ser clássica.

A seguir, descrevemos os pares coerentes de medidas que envolvem as medidas de Jacobi e de Laguerre. As medidas do tipo $d\theta(x) = w(x)dx + M\delta(k)$ são interpretadas da seguinte forma

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)d\theta(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x)w(x)dx + MF(k).$$

Caso Jacobi

Tipo I
$$d\theta_1(x) = |x-\xi|(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx, \quad \text{com} \quad |\xi| > 1 \quad \text{e} \tag{1.39}$$
$$d\theta_2(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx.$$

Tipo II
$$d\theta_1(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx \quad \text{e} \tag{1.40}$$
$$d\theta_2(x) = \frac{1}{|x-\xi|}(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx + M\delta(\xi), \quad \text{com} \quad |\xi| \geq 1 \ \text{ e} \tag{1.41}$$
$M \geq 0$.

Tipo III
$$d\theta_1(x) = (1-x)^{\alpha}dx + M\delta(-1), \quad \text{com} \quad M \geq 0 \quad \text{e} \tag{1.42}$$
$$d\theta_2(x) = (1-x)^{\alpha+1}dx.$$

Tipo IV
$$d\theta_1(x) = (1+x)^{\beta}dx + M\delta(1), \quad \text{com } M \geq 0 \quad \text{e} \tag{1.43}$$
$$d\theta_2(x) = (1+x)^{\beta+1}dx.$$

Caso Laguerre

Tipo I
$$d\theta_1(x) = (x-\xi)x^{\alpha}e^{-x}dx, \quad \text{com} \quad \xi < 0 \quad \text{e} \tag{1.44}$$
$$d\theta_2(x) = x^{\alpha+1}e^{-x}dx.$$

Tipo II
$$d\theta_1(x) = x^{\alpha}e^{-x}dx \quad \text{e} \tag{1.45}$$
$$d\theta_2(x) = \frac{1}{x-\xi}x^{\alpha+1}e^{-x}dx + M\delta(\xi), \quad \text{com} \quad \xi \leq 0 \ \text{ e } \ M \geq 0.$$

Tipo III
$$d\theta_1(x) = e^{-x}dx + M\delta(0), \quad \text{com} \quad M \geq 0 \quad \text{e} \tag{1.46}$$
$$d\theta_2(x) = e^{-x}dx.$$

Descrevemos, agora, os pares simetricamente coerentes de medidas que envolvem medidas de Hermite e de Gegenbauer.

Caso Hermite

$$\text{Tipo I} \quad d\theta_1(x) = (x^2+\xi^2)e^{-x^2}dx \quad \text{e}$$
$$d\theta_2(x) = e^{-x^2}dx. \tag{1.47}$$

$$\text{Tipo II} \quad d\theta_1(x) = e^{-x^2}dx \quad \text{e} \tag{1.48}$$
$$d\theta_2(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^2+\xi^2}dx, \quad \text{com} \ \ \xi \neq 0.$$

Caso Gegenbauer

$$\text{Tipo I} \quad d\theta_1(x) = (x^2+\xi^2)(1-x^2)^{\alpha}dx \quad \text{e} \tag{1.49}$$
$$d\theta_2(x) = (1-x^2)^{\alpha+1}dx.$$

$$\text{Tipo II} \quad d\theta_1(x) = (1-x^2)^{\alpha}dx \quad \text{e} \tag{1.50}$$
$$d\theta_2(x) = \frac{(1-x^2)^{\alpha+1}}{x^2+\xi^2}dx, \quad \text{com} \ \ \xi \neq 0.$$

$$\text{Tipo III} \quad d\theta_1(x) = (1-x^2)^{\alpha}dx \quad \text{e} \tag{1.51}$$
$$d\theta_2(x) = \frac{(1-x^2)^{\alpha+1}}{\xi^2-x^2}dx + M\left[\delta(\xi)+\delta(-\xi)\right], \quad \text{com} \ \ |\xi| \geq 1 \ \text{ e } \ M \geq 0.$$

$$\text{Tipo IV} \quad d\theta_1(x) = (\xi^2-x^2)(1-x^2)^{\alpha}dx, \quad \text{com} \ \ |\xi| > 1 \quad \text{e} \tag{1.52}$$
$$d\theta_2(x) = (1-x^2)^{\alpha+1}dx.$$

$$\text{Tipo V} \quad d\theta_1(x) = dx + M\left[\delta(1)+\delta(-1)\right], \quad \text{com} \ \ M \geq 0 \quad \text{e} \tag{1.53}$$
$$d\theta_2(x) = dx.$$

1.5 Polinômios L-ortogonais

Nesta seção, estudaremos os polinômios similares aos ortogonais, ou L-ortogonais, tendo como referência os trabalhos de Andrade [2], Andrade e Bracciali [3] e de Sri Ranga [21].

Definição 1.8. *Seja $d\psi(t)$ uma distribuição forte de Stieltjes em (a,b). Definimos uma sequência de polinômios L-ortogonais, $\{B_n^{\psi}\}_{n=0}^{\infty}$ por*

i) $B_n^{\psi}(t)$ *é mônico de grau exatamente n, $n \geq 0$,*

$$ii)\ \sigma_{n,s}^{\psi} = \int_a^b t^{-n+s} B_n^{\psi}(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & se\ s = 0, 1, ..., n-1, \\ \sigma_{n,n}^{\psi} > 0, & se\ s = n. \end{cases} \tag{1.54}$$

Além disso, como estamos considerando os polinômios $B_n^{\psi}(t)$ mônicos, se $B_n^{\psi}(t) = \sum_{i=0}^{n} b_{n,i} t^i$, então $b_{n,n} = 1$.

Teorema 1.10. *Para as distribuições fortes de Stieltjes $d\psi(t)$, se os momentos μ_m^{ψ}, $m \in \mathbb{Z}$, existem, então os determinantes de Hankel definidos em (1.8) satisfazem $\mathbf{H}_n^{(m)} > 0$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 0$.*

Demonstração: Sabemos que uma matriz $\mathbf{A}$ é positiva definida se $\langle x, Ax \rangle > 0$, para todo $x \not\equiv 0$. Além disso, $det(A) > 0$ (veja [10]).

Mostremos, então, que a matriz

$$\mathcal{H}_n^{(m)} = \begin{pmatrix} \mu_m^{\psi} & \mu_{m+1}^{\psi} & \cdots & \mu_{m+n-1}^{\psi} \\ \mu_{m+1}^{\psi} & \mu_{m+2}^{\psi} & \cdots & \mu_{m+n}^{\psi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m+n-1}^{\psi} & \mu_{m+n}^{\psi} & \cdots & \mu_{m+2n-2}^{\psi} \end{pmatrix}$$

é positiva definida. Seja $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})^t \in \mathbb{R}^n$, $x \not\equiv 0$. Então,

$$\begin{aligned} \left\langle x, \mathcal{H}_n^{(m)} x \right\rangle &= x^t \mathcal{H}_n^{(m)} x \\ &= x_0 \sum_{i=0}^{n-1} \mu_{m+i}^{\psi} x_i + x_1 \sum_{i=0}^{n-1} \mu_{m+1+i}^{\psi} x_i + \ldots + x_{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \mu_{m+n-1+i}^{\psi} x_i \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \mu_{m+i+j}^{\psi} x_i x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b t^{m+i+j} x_i x_j d\psi(t) \\ &= \int_a^b t^m \left(\sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j \right) \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i t^i \right) d\psi(t) = \int_a^b \underbrace{t^m}_{>0} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k \right)^2}_{>0} \underbrace{d\psi(t)}_{>0} > 0. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{H}_n^{(m)}$ é positiva definida e, portanto, $\mathbf{H}_n^{(m)} = det(\mathcal{H}_n^{(m)}) > 0$. ■

Teorema 1.11. *Sob as hipótese do teorema anterior, os polinômios L-ortogonais $B_n^{\psi}(t),\ n \geq 0$, existem e são únicos.*

1.5.1 Polinômios associados aos L-ortogonais

Definição 1.9. *Os polinômios $A_n^{\psi}(t)$ associados aos polinômios L-ortogonais $B_n^{\psi}(t)$ são definidos por*

$$A_n^{\psi}(t) = \int_a^b \frac{B_n^{\psi}(z) - B_n^{\psi}(t)}{z-t}\, d\psi(z). \tag{1.55}$$

Teorema 1.12. *$A_n^{\psi}(t)$ é um polinômio de grau $n-1,\ n \geq 1$.*

Observe que os coeficientes dos termos de maior grau dos polinômios $A_n^{\psi}(t)$ são iguais a μ_0^{ψ}.

Para construirmos uma sequência de polinômios mônicos associados aos L-ortogonais basta definí-los da seguinte forma:

$$A_n^{\psi}(t) = \frac{1}{\mu_0^{\psi}} \int_a^b \frac{B_n^{\psi}(z) - B_n^{\psi}(t)}{z-t}\, d\psi(z).$$

Teorema 1.13. *Os polinômios associados $A_n^{\psi}(t)$ satisfazem, ainda,*

$$A_n^{\psi}(t) = \int_a^b z^{-m} \frac{t^m B_n^{\psi}(z) - z^m B_n^{\psi}(t)}{z-t}\, d\psi(z), \quad 0 \leq m \leq n,\ \ n \geq 1. \tag{1.56}$$

1.5.2 Algumas propriedades dos polinômios L-ortogonais e associados

Os polinômios L-ortogonais e associados possuem muitas propriedades semelhantes às dos polinômios ortogonais e associados. A seguir, enunciaremos algumas delas.

Teorema 1.14. *Os polinômios $B_n^{\psi}(t)$ e $A_n^{\psi}(t)$ satisfazem às seguintes relações de recorrência de três termos para $n \geq 1$:*

$$B_{n+1}^{\psi}(t) = (t - \beta_{n+1}^{\psi}) B_n^{\psi}(t) - \alpha_{n+1}^{\psi}\, t\, B_{n-1}^{\psi}(t),\ n \geq 1, \tag{1.57}$$

$$A_{n+1}^{\psi}(t) = (t - \beta_{n+1}^{\psi}) A_n^{\psi}(t) - \alpha_{n+1}^{\psi}\, t\, A_{n-1}^{\psi}(t),\ n \geq 1, \tag{1.58}$$

com

$$A_0^{\psi}(t) = 0, \quad A_1^{\psi}(t) = \mu_0^{\psi}, \quad B_0^{\psi}(t) = 1, \quad B_1^{\psi}(t) = t - \beta_1^{\psi};$$

e

$$\beta_1^{\psi} = \frac{\sigma_{0,0}^{\psi}}{\sigma_{0,-1}^{\psi}} = \frac{\mu_0^{\psi}}{\mu_{-1}^{\psi}}, \quad \alpha_{n+1}^{\psi} = \frac{\sigma_{n,n}^{\psi}}{\sigma_{n-1,n-1}^{\psi}}, \quad \beta_{n+1}^{\psi} = -\alpha_{n+1}^{\psi} \frac{\sigma_{n-1,-1}^{\psi}}{\sigma_{n,-1}^{\psi}}, \quad n \geq 1,$$

lembrando que, $\sigma_{n,s}^{\psi} = \int_a^b t^{-n+s} B_n^{\psi}(t) d\psi(t)$. Observe que, $\beta_n^{\psi} > 0$ e $\alpha_{n+1}^{\psi} > 0$ para $n \geq 1$.

Como consequência das relações de recorrência de três termos para $B_n^{\psi}(t)$ e $A_n^{\psi}(t)$, podemos estabelecer resultados a seguir.

$$(-1)^n B_n^{\psi}(0) = \beta_1^{\psi}\beta_2^{\psi}\ldots\beta_n^{\psi} > 0, \quad n \geq 1. \tag{1.59}$$

Teorema 1.15. *A seguinte relação é válida*

$$A_n^{\psi}(t)B_{n-1}^{\psi}(t) - A_{n-1}^{\psi}(t)B_n^{\psi}(t) = \alpha_n^{\psi}\alpha_{n-1}^{\psi}\alpha_{n-2}^{\psi}\ldots\alpha_2^{\psi}\mu_0^{\psi}\, t^{n-1}, \qquad n \geq 2 \tag{1.60}$$

Demonstração: De (1.57) e (1.58), obtemos

$$\begin{aligned}
A_n(t)^{\psi}B_{n-1}^{\psi}(t) - A_{n-1}^{\psi}(t)B_n(t) &= [(t-\beta_n^{\psi})A_{n-1}^{\psi}(t) - \alpha_n^{\psi}\, t\, A_{n-2}^{\psi}(t)]B_{n-1}^{\psi}(t) \\
&\quad -A_{n-1}^{\psi}(t)[(t-\beta_n^{\psi})B_{n-1}^{\psi}(t) - \alpha_n^{\psi}\, t\, B_{n-2}^{\psi}(t) \\
&= \alpha_n^{\psi} t[A_{n-1}^{\psi}(t)B_{n-2}^{\psi}(t) - A_{n-2}^{\psi}(t)B_{n-1}^{\psi}(t)] \\
&= \cdots \\
&= \alpha_n^{\psi}\alpha_{n-1}^{\psi}\alpha_{n-2}^{\psi}\ldots\alpha_2^{\psi}t^{n-1}[A_1^{\psi}(t)B_0^{\psi}(t) - A_0^{\psi}(t)B_1^{\psi}(t)].
\end{aligned}$$

Como $A_1^{\psi}(t) = \mu_0^{\psi}$, $B_0^{\psi}(t) = 1$, $A_0^{\psi}(t) = 0$ e $B_1^{\psi}(t) = t - \beta_1^{\psi}$, chegamos à relação (1.60).

$$A_n^{\psi}(t)B_{n-1}^{\psi}(t) - A_{n-1}^{\psi}(t)B_n^{\psi}(t) = \alpha_n^{\psi}\alpha_{n-1}^{\psi}\alpha_{n-2}^{\psi}\ldots\alpha_2^{\psi}t^{n-1}\mu_0^{\psi}, \; n \geq 2.$$

■

Teorema 1.16. *Os zeros do polinômio L-ortogonal $B_n^{\psi}(t)$, $n \geq 1$, são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b).*

Teorema 1.17. *Se $t_{n,i}$ é um zero do polinômio $B_n^{\psi}(t)$ para $n \geq 1$, então ele é diferente dos zeros de $A_n^{\psi}(t)$ e dos zeros de $B_{n-1}^{\psi}(t)$.*

Teorema 1.18. *Os zero dos polinômios $B_{n-1}^{\psi}(t)$ e $B_n^{\psi}(t)$ se entrelaçam.*

Teorema 1.19. *Os zeros dos polinômios L-ortogonais $B_n^{\psi}(t)$, $n \geq 1$, são os autovalores da matriz de Hessenberg*

$$\mathcal{H}_n = \begin{pmatrix}
\alpha_2^{\psi}+\beta_1^{\psi} & \alpha_3^{\psi}+\beta_2^{\psi} & \ldots & \alpha_{n-1}^{\psi}+\beta_{n-2}^{\psi} & \alpha_n^{\psi}+\beta_{n-1}^{\psi} & \beta_n^{\psi} \\
\alpha_2^{\psi} & \alpha_3^{\psi}+\beta_2^{\psi} & \ldots & \alpha_{n-1^{\psi}}+\beta_{n-2}^{\psi} & \alpha_{n^{\psi}}+\beta_{n-1}^{\psi} & \beta_n^{\psi} \\
0 & \alpha_3^{\psi} & \ldots & \alpha_{n-1^{\psi}}+\beta_{n-2^{\psi}} & \alpha_n^{\psi}+\beta_{n-1}^{\psi} & \beta_n^{\psi} \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & \alpha_{n-1}^{\psi} & \alpha_n^{\psi}+\beta_{n-1}^{\psi} & \beta_n^{\psi} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_n^{\psi} & \beta_n^{\psi}
\end{pmatrix}. \tag{1.61}$$

Demonstração: Consideremos os polinômios de Laurent

$$\tilde{B}_n^{\psi}(t) = t^{-n} B_n^{\psi}(t) = (t - \beta_n^{\psi})\, t^{-n}\, B_{n-1}^{\psi}(t) - \alpha_n^{\psi}\, t^{-n+1}\, B_{n-2}^{\psi}(t).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} t\tilde{B}_n^{\psi}(t) &= (t - \beta_n^{\psi})\, t^{-(n-1)}\, B_{n-1}^{\psi}(t) - \alpha_n^{\psi}\, t^{-(n-2)}\, B_{n-2}^{\psi}(t) \\ &= (t - \beta_n^{\psi})\tilde{B}_{n-1}^{\psi}(t) - \alpha_n^{\psi}\tilde{B}_{n-2}^{\psi}(t). \end{aligned}$$

Disso, obtemos

$$t\,[\tilde{B}_{n-1}^{\psi}(t) - \tilde{B}_n^{\psi}(t)] = \beta_n^{\psi}\tilde{B}_{n-1}^{\psi}(t) + \alpha_n^{\psi}\tilde{B}_{n-2}^{\psi}(t).$$

Assim,

- $t\,[\tilde{B}_0^{\psi}(t) - \tilde{B}_1^{\psi}(t)] = \beta_1^{\psi}\,\tilde{B}_0^{\psi}(t)$
- $t\,[\tilde{B}_1^{\psi}(t) - \tilde{B}_2^{\psi}(t)] = \beta_2^{\psi}\,\tilde{B}_1^{\psi}(t) + \alpha_2^{\psi}\,\tilde{B}_0^{\psi}(t)$
- $t\,[\tilde{B}_2^{\psi}(t) - \tilde{B}_3^{\psi}(t)] = \beta_3^{\psi}\,\tilde{B}_{2^{\psi}}(t) + \alpha_{3^{\psi}}\,\tilde{B}_1^{\psi}(t)$

  $\vdots$
- $t\,[\tilde{B}_{n-1}^{\psi}(t) - \tilde{B}_n^{\psi}(t)] = \beta_n^{\psi}\,\tilde{B}_{n-1}^{\psi}(t) + \alpha_n^{\psi}\,\tilde{B}_{n-2}^{\psi}(t).$

Na forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} \beta_1^{\psi} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2^{\psi} & \beta_2^{\psi} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_3^{\psi} & \beta_3^{\psi} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n^{\psi} & \beta_n^{\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_0^{\psi}(t) \\ \tilde{B}_1^{\psi}(t) \\ \tilde{B}_2^{\psi}(t) \\ \vdots \\ \tilde{B}_{n-1}^{\psi}(t) \end{pmatrix}$$

$$= t \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_0^{\psi} v(t) \\ \tilde{B}_1^{\psi}(t) \\ \tilde{B}_2^{\psi}(t) \\ \vdots \\ \tilde{B}_{n-1}^{\psi}(t) \end{pmatrix} - t\tilde{B}_n^{\psi}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$F\ \tilde{B}^{\psi}(t) = t\,G\ \tilde{B}^{\psi}(t) - t\,\tilde{B}_n^{\psi}(t)\,e_n, \tag{1.62}$$

onde e_n é o vetor unitário $(0,0,\ldots,0,1)^t \in \mathbb{R}^n$,

$$F = \begin{pmatrix} \beta_1^\psi & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_2^\psi & \beta_2^\psi & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_3^\psi & \beta_3^\psi & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_n^\psi & \beta_n^\psi \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $\tilde{B}^\psi(t) = \left(\tilde{B}_0^\psi(t), \tilde{B}_1^\psi(t), \tilde{B}_2^\psi(t), \cdots, \tilde{B}_{n-1}^\psi(t)\right)^t$.

Calculando a equação (1.62) em cada zero $t_{n,j}$ de B_n^ψ, temos

$$F\ \tilde{B}^\psi(t_{n,j}) = t_{n,j}\, G\ \tilde{B}^\psi(t_{n,j}).$$

Então, cada zero $t_{n,j}$ de $B_n^\psi(t)$ é um autovalor da matriz $G^{-1}F$ associado ao autovetor $\tilde{B}(t_{n,j})$, onde a matriz $G^{-1}F$ é a matriz de Hessenberg (1.61). ■

1.6 Frações contínuas

O século XIX provavelmente tenha sido a idade de ouro das frações contínuas. Como Claude Brezinski escreveu em seu livro *History of Continued Fractions and Padé Approximants* ([8]), "o século dezenove pode ser considerado o período popular das frações contínuas". Foi uma época em que "o assunto era conhecido por todos os matemáticos". Como consequência, houve uma explosão no crescimento deste campo.

Veremos, nesta seção, alguns conceitos básicos sobre frações contínuas.

Uma fração contínua é uma expressão da forma

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots}}},$$

onde $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ são sequências de números complexos ou funções complexas simples com $a_n \neq 0$. Uma fração contínua pode, também, ser denotada das seguintes formas:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{a_2}{b_2} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{\cdots} \tag{1.63}$$

ou

$$b_0 + K_{n=1}^\infty \left(\frac{a_n}{b_n}\right).$$

Os números a_n e b_n são chamados de elementos da fração contínua. O valor

$$C_n = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}} \tag{1.64}$$

é chamado de n-ésimo convergente ou aproximante da fração contínua (1.63).

Podemos usar as seguintes notações

$$C_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1} \, \frac{a_2}{+\, b_2} \, + \, \cdots \, \frac{a_n}{+\, b_n} \qquad \text{ou} \qquad C_n = b_0 + K_{j=1}^{n}\left(\frac{a_j}{b_j}\right).$$

Podemos escrever $C_n = \dfrac{A_n}{B_n}$, $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$, onde $A_0 = b_0,\ B_0 = 1;\quad A_1 = b_0 b_1 + a_1,\ B_1 = b_1;\quad A_2 = b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2,\ B_2 = b_1 b_2 + a_2$. Em geral, A_n e B_n são polinômios em $a_i,\ b_j$.

Agora, podemos escrever

$$A_1 = b_1 A_0 + a_1 A_{-1}, \quad \text{na qual} \quad A_{-1} = 1, \quad B_1 = b_1 B_0 + a_1 B_{-1} \quad \text{em que} \quad B_{-1} = 0.$$

Suponhamos que, para algum $n \geq 1$,

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \quad A_{-1} = 1, \quad B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \quad B_{-1} = 0. \tag{1.65}$$

Então, desde que, C_{n+1} pode ser obtida de C_n substituindo-se b_n por $b_n + a_{n+1}/b_{n+1}$, podemos escrever

$$C_{n+1} = \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \frac{A_n^*}{B_n^*},$$

onde, por (1.65),

$$\begin{aligned} A_n^* &= \left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) A_{n-1} + a_n A_{n-2} \\ &= b_{n+1}^{-1}[b_{n+1}(b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}) + a_{n+1} A_{n-1}] \\ &= b_{n+1}^{-1}[b_{n+1} A_n + a_{n+1} A_{n-1}]. \end{aligned}$$

Procedendo da mesma maneira, obtemos $B_n^* = b_{n+1}^{-1}[b_{n+1} B_n + a_{n+1} B_{n-1}]$. Assim,

$$C_{n+1} = \frac{b_{n+1} A_n + a_{n+1} A_{n-1}}{b_{n+1} A_n + a_{n+1} A_{n-1}}.$$

Segue, por indução, que, se $b_i \neq 0$ para $i \geq 1$, então as fórmulas em (1.65) são válidas para $n \geq 1$. A_n e B_n são chamados, respectivamente, n-ésimos numerador e denominador parciais.

Multiplicando a primeira equação em (1.65) por B_{n-1}, a segunda equação por A_{n-1} e, em seguida, subtraindo a segunda da primeira, obtemos

$$A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} = -a_n[A_{n-1} B_{n-2} - B_{n-1} A_{n-2}],$$

Daí,

$$A_nB_{n-1} - B_nA_{n-1} = (-1)^{n+1}a_1a_2\dots a_n, \quad n \geq 1.$$

Logo, podemos escrever

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1}a_1a_2\dots a_n}{B_{n-1}B_n}.$$

Lembrando que $A_0/B_0 = b_0$, obtemos a importante fórmula

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}a_1a_2\dots a_k}{B_{k-1}B_k},$$

contanto que $b_i \neq 0$ e $B_i \neq 0, \; 1 \leq i \leq n$.

1.6.1 Conexão com polinômios ortogonais

A fórmula de Wallis (1.65) estabelece uma conexão entre os polinômios ortogonais e as frações continuas. Consideremos, então, a sequência de polinômios ortogonais com relação à medida positiva $d\phi(x)$ em (a,b), $\{P_n^\phi\}_{n=0}^\infty$. Tomando, em (1.63),

$$b_0 = 0, \quad a_1 = \alpha_1^\phi \neq 0, \quad a_{n+1} = -\alpha_{n+1}^\phi \neq 0 \quad \text{e} \quad b_n = x - \beta_n^\phi, \quad n \geq 1,$$

obtemos a fração continua

$$\frac{\alpha_1^\phi}{x-\beta_1^\phi} - \frac{\alpha_2^\phi}{x-\beta_2^\phi} - \frac{\alpha_3^\phi}{x-\beta_3^\phi} - \cdots - \frac{\alpha_n^\phi}{x-\beta_n^\phi} - \cdots,$$

cujo n-ésimo denominador parcial, $B_n = P_n^\phi(x)$, satisfaz

$$P_n^\phi(x) = (x-\beta_n^\phi)P_{n-1}^\phi(x) - \alpha_n^\phi P_{n-2}^\phi(x), \quad n = 1,2,3,\dots$$

com $P_{-1}^\phi(x) = 0, \; P_0^\phi(x) = 1$.

1.6.2 Conexão com polinômios L-ortogonais

Vamos obter, agora, a conexão entre os polinômios L-ortogonais e as frações contínuas. Retornemos às fórmulas de Wallis. Tomando, em (1.63),

$$b_0 = 0, \quad a_1 = \mu_0^\psi \neq 0, \quad a_{n+1} = -\alpha_{n+1}^\psi z \neq 0 \quad \text{e} \quad b_n = z - \beta_n^\psi, \quad n \geq 1,$$

onde α_{n+1}^ψ e β_n^ψ, $n \geq 1$, são os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios L-ortogonais $B_n^\psi(t)$ com relação a distribuição $d\psi(t)$, obtemos a fração contínua,

$$\frac{\mu_0^\psi}{t-\beta_1^\psi} - \frac{\alpha_2^\psi t}{t-\beta_2^\psi} - \frac{\alpha_3^\psi t}{t-\beta_3^\psi} - \cdots - \frac{\alpha_n^\psi t}{t-\beta_n^\psi} - \cdots. \tag{1.66}$$

Observe que os *n-ésimos* numerador e denominador parciais são, respectivamente, o polinômio associado de grau $n-1$, $A_n(z)$, e o polinômio L-ortogonal de grau n, $B_n(z)$. Portanto, eles satisfazem às relações de recorrência (1.58) e (1.57), respectivamente.

Conhecendo-se, pois, as relações de recorrência de polinômios ortogonais ou L-ortogonais, é possível construir a correspondente fração contínua a partir dos coeficientes dessas relações.

Assim,
$$\frac{A_n^{\psi}(t)}{B_n^{\psi}(t)} = \frac{\mu_0^{\psi}}{t-\beta_1^{\psi}} - \frac{\alpha_2^{\psi} t}{t-\beta_2^{\psi}} - \frac{\alpha_3^{\psi} t}{t-\beta_3^{\psi}} - \cdots - \frac{\alpha_n^{\psi} t}{t-\beta_n^{\psi}}. \tag{1.67}$$

1.7 Sequências encadeadas

Nesta sessão vamos estudar um tipo particular de sequência denominada sequência encadeada. O desenvolvimento sistemático da teoria das sequências encadeadas é devido a H.S. Wall [24]. Vamos omitir as demonstrações dos resultados aqui enunciados, mas podem ser encontrados em Chihara [9].

Definição 1.10. *Uma sequência* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *é chamada uma sequência encadeada se existe uma sequência* $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ *tal que*

$$\begin{array}{lll} (i) & 0 \le g_0 < 1, \quad 0 < g_n < 1, & n \ge 1 \\ (ii) & a_n = (1-g_{n-1})g_n, & n = 1, 2, 3, \ldots \end{array} \tag{1.68}$$

$\{g_k\}$ *é chamada uma sequência de parâmetro para* $\{a_n\}$ *e* g_0 *é chamada uma sequência de parâmetro inicial.*

Embora seja trivial construir exemplos de sequências encadeadas, é sempre difícil determinar se uma sequência dada é uma sequência encadeada. Em alguns casos, pode-se determinar uma sequência de parâmetros indutivamente tomando $g_0 = 0$, $g_1 = a_1$ e tentar resolver (1.68) sucessivamente para os g_i, $i = 2, 3, \ldots$. Por exemplo, se tentarmos isso com a sequência constante, $\{1/4\}$, encontramos
$$g_0 = 0, \;\; g_1 = \frac{1}{4}, \;\; g_2 = \frac{1}{3}, \;\; g_3 = \frac{3}{8}, \;\ldots$$
e, a partir daqui, é fácil deduzir que $g_n = n/[2(n+1)]$. Assim $\{1/4\}$ é uma sequência encadeada. No entanto, essa sequência encadeada também tem uma sequência de parâmetros mais simples $\{1/2\}$. Mais geralmente, podemos notar as identidades
$$a = \left(1 - \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2} = \left(1 - \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}.$$

Assim, a sequência constante $\{a\}$ é uma sequência encadeada se $0 < a \leq 1/4$.

Observamos, a partir dos exemplos acima, que uma sequência encadeada não precisa ter uma única sequência de parâmetros.

Teorema 1.20. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência encadeada e sejam $\{g_k\}$ e $\{h_k\}$ sequências de parâmetros para $\{a_n\}$. Então,*

$$g_k < h_k \ \text{ para } \ k \geq 1 \ \text{ se, e somente se, } \ g_0 < h_0.$$

Teorema 1.21. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência encadeada. Se $\{a_n\}$ tem uma sequência de parâmetros $\{g_k\}$ que satisfaz $g_0 > 0$, então para cada h_0 tal que $0 \leq h_0 < g_0$, existe uma sequência de parâmetros correspondente, $\{h_n\}$.*

De acordo com o teorema anterior, cada sequência encadeada tem uma sequência de parâmetros $\{m_k\}$ tal que $m_0 = 0$ e, pelo Teorema 1.20, temos então $m_n < g_n$ para qualquer outra sequência de parâmetros $\{g_k\}$.

Definição 1.11. *A correspondente sequência de parâmetros $\{m_k\}$ para a sequência encadeada $\{a_n\}$, com $m_0 = 0$, é chamada de sequência minimal de parâmetros.*

Uma sequência encadeada é dita ter seus parâmetros unicamente determinados se a única sequência de parâmetros é $\{m_k\}$. Se $\{a_n\}$ não tem seus parâmetros unicamente determinados, então o Teorema 1.21 assegura que o conjunto dos parâmetros iniciais é conexo.

Definição 1.12. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência encadeada. Uma sequência de parâmetros $\{M_k\}$ que satisfaz $M_k > g_k$ $(k \geq 0)$ para qualquer outra sequência de parâmetros $\{g_k\}$ é chamada de sequência maximal de parâmetros.*

Teorema 1.22. *Toda sequência encadeada tem uma sequência maximal de parâmetros.*

Capítulo 2

Polinômios ortogonais associados a medidas simétricas relacionadas

Neste capítulo, estudamos as propriedades de duas sequências de polinômios ortogonais associados a medidas simétricas relacionadas. O estudo foi baseado, principalmente, no artigo [7].

Considere $d\phi_0$ e $d\phi_1$ duas medidas simétricas definidas no mesmo suporte $E \subseteq [-b, b]$ e satisfazendo

$$d\phi_1(x) = \frac{c}{1 + qx^2} \quad d\phi_0(x), \tag{2.1}$$

onde q admite qualquer valor real tal que $1 + qx^2$ não muda de sinal em E e a constante c é tal que $(1 + qx^2)/c$ é não negativa em E.

Sejam $\{P_n^{\phi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n^{\phi_1}\}_{n=0}^{\infty}$ sequências de polinômios ortogonais mônicos com relação, respectivamente, às medidas $d\phi_0$ e $d\phi_1$.

2.1 Resultados preliminares

Primeiramente, mostraremos algumas identidades que serão usadas nas demonstrações dos resultados mais importantes desta seção.

Lema 2.1. *Os polinômios $P_n^{\phi_0}$ e $P_n^{\phi_1}$, $n \geq 0$, satisfazem à seguinte fórmula de Christoffel:*

$$(1 + qx^2)P_n^{\phi_0}(x) = \frac{q}{P_n^{\phi_1}(\sqrt{-1/q})}\{P_n^{\phi_1}(\sqrt{-1/q})P_{n+2}^{\phi_1}(x) - P_{n+2}^{\phi_1}(\sqrt{-1/q})P_n^{\phi_1}(x)\}. \tag{2.2}$$

Demonstração: Desde que $(1+qx^2)P_n^{\phi_0}(x)$ é um polinômio de grau $n+2$, podemos escrevê-lo como combinação linear dos polinômios $P_0^{\phi_1}, P_1^{\phi_1}, \ldots, P_{n+2}^{\phi_1}$, isto é,

$$(1+qx^2)P_n^{\phi_0}(x) = \sum_{j=0}^{n+2} b_j P_j^{\phi_1}(x). \tag{2.3}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade anterior por $P_k^{\phi_1}$ e integrando com relação à medida $d\phi_1$, de (1.9) obtemos

$$\int_{-b}^{b} P_n^{\phi_0}(x)P_k^{\phi_1}(x)(1+qx^2)d\phi_1(x) = \sum_{j=0}^{n+2} b_j \int_{-b}^{b} P_j^{\phi_1}(x)P_k^{\phi_1}(x)d\phi_1(x) = b_k \int_{-b}^{b} [P_k^{\phi_1}(x)]^2 d\phi_1(x),$$

para $k = 0, 1, \ldots, n+2$. Logo, como $d\phi_1(x) = \dfrac{c}{1+qx^2}\, d\phi_0(x)$, temos que

$$b_k = \frac{c\int_{-b}^{b} P_n^{\phi_0}(x)P_k^{\phi_1}(x)d\phi_0(x)}{\int_{-b}^{b}[P_k^{\phi_1}(x)]^2 d\phi_1(x)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n+2.$$

Assim, pelo Teorema 1.4, $b_k = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Segue, então, por (2.3), que

$$(1+qx^2)P_n^{\phi_0}(x) = b_n P_n^{\phi_1}(x) + b_{n+1}P_{n+1}^{\phi_1}(x) + b_{n+2}P_{n+2}^{\phi_1}(x).$$

Mas, como se tratam de medidas simétricas, pelo Teorema 1.8 concluímos que $b_{n+1} = 0$. Assim,

$$(1+qx^2)P_n^{\phi_0}(x) = b_{n+2}P_{n+2}^{\phi_1}(x) + b_n P_n^{\phi_1}(x). \tag{2.4}$$

Comparando os termos de maior grau em ambos os lados da igualdade acima, concluímos que $b_{n+2} = q$. Agora, tomando $x = \sqrt{-1/q}$ na relação (2.4), obtemos

$$0 = qP_{n+2}^{\phi_1}(\sqrt{-1/q}) + b_n P_n^{\phi_1}(\sqrt{-1/q}),$$

o que implica que $b_n = -q\dfrac{P_{n+2}^{\phi_1}(\sqrt{-1/q})}{P_n^{\phi_1}(\sqrt{-1/q})}$. Substituindo os valores obtidos para b_n e b_{n+2} em (2.4), obtemos a relação (2.2). ∎

Lema 2.2. *Os polinômios das sequências* $\{P_n^{\phi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ *e* $\{P_n^{\phi_1}\}_{n=0}^{\infty}$ *satisfazem à seguinte relação:*

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_0}(x) + d_{n-2}P_{n-2}^{\phi_0}(x), \qquad n \geq 2, \tag{2.5}$$

com

$$d_{n-2} = \frac{q\rho_n^{\phi_1}}{c\rho_{n-2}^{\phi_0}},\ n \geq 2. \tag{2.6}$$

Demonstração: Expressando $P_n^{\phi_1}$ por uma combinação linear de $P_r^{\phi_0}$, $r = 0, 1, \ldots, n$, obtemos

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_0}(x) + \sum_{r=0}^{n-1} d_r P_r^{\phi_0}(x). \tag{2.7}$$

Daí, usando a propriedade de ortogonalidade (1.9), para $j = 0, 1, \ldots, n-1$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{-b}^{b} P_n^{\phi_1}(x) P_j^{\phi_0}(x) d\phi_0(x) &= \int_{-b}^{b} \left[P_n^{\phi_0}(x) + \sum_{r=0}^{n-1} d_r P_r^{\phi_0}(x) \right] P_j^{\phi_0}(x) d\phi_0(x) \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} d_r \int_{-b}^{b} P_r^{\phi_0}(x) P_j^{\phi_0}(x) d\phi_0(x) \\
&= d_j \int_{-b}^{b} [P_j^{\phi_0}(x)]^2 d\phi_0(x) = d_j \rho_j^{\phi_0}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_{-b}^{b} P_n^{\phi_1}(x) P_j^{\phi_0}(x) d\phi_0(x) &= \int_{-b}^{b} P_n^{\phi_1}(x) P_j^{\phi_0}(x) \frac{(1+qx^2)}{c} d\phi_1(x) \\
&= \frac{q}{c} \int_{-b}^{b} P_n^{\phi_1}(x) x^2 P_j^{\phi_0}(x) d\phi_1(x),\ j = 0, \ldots, n-1.
\end{aligned}$$

Então,

$$d_j = \frac{q}{c} \frac{\int_{-b}^{b} P_n^{\phi_1}(x) x^2 P_j^{\phi_0}(x) d\phi_1(x)}{\int_{-b}^{b} [P_j^{\phi_0}(x)]^2 d\phi_0(x)}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.8}$$

Pelo Teorema 1.4, obtemos $d_j = 0$ para $j = 0, 1, \ldots, n-3$.

Logo, de (2.7), temos

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_0}(x) + d_{n-2} P_{n-2}^{\phi_0}(x), \qquad n \geq 2,$$

pois $d_{n-1} = 0$, devido à propriedade de simetria $P_n^{\phi_0}(x) = (-1)^n P_n^{\phi_0}(-x)$.

Assim, por (2.8), temos

$$d_{n-2} = \frac{q}{c} \frac{\int_{-b}^{b} P_n^{\phi_1}(x) x^2 P_{n-2}^{\phi_0}(x) d\phi_1(x)}{\rho_{n-2}^{\phi_0}}, \quad n \geq 2. \tag{2.9}$$

Como $R_n(x) = x^2 P_{n-2}^{\phi_0}(x)$ é um polinômio mônico de grau n, podemos expressá-lo como

$$R_n(x) = P_n^{\phi_1}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} c_j P_j^{\phi_1}(x).$$

Da propriedade de ortogonalidade (1.9), temos

$$\begin{aligned}\int_{-b}^{b} P_n^{\phi_1}(x)R_n(x)d\phi_1(x) &= \int_{-b}^{b} P_n^{\phi_1}(x)P_n^{\phi_1}(x)d\phi_1(x) + \sum_{j=0}^{n-1} c_j \int_{-b}^{b} P_n^{\phi_1}(x)P_j^{\phi_1}(x)d\phi_1(x)\\ &= \int_{-b}^{b} [P_n^{\phi_1}(x)]^2 d\phi_1(x) = \rho_n^{\phi_1}.\end{aligned}$$

Substituindo em (2.9), obtemos (2.6). ■

Definamos $\alpha_1^{\phi_1} = \mu_0^{\phi_1}$ e $\alpha_1^{\phi_0} = c\mu_0^{\phi_0}$. De (1.11), temos que $\alpha_2^{\phi_1} = \dfrac{\mu_2^{\phi_1}}{\mu_0^{\phi_1}}$. Assim,

$$\begin{aligned}\alpha_1^{\phi_0} - \alpha_1^{\phi_1} &= c\mu_0^{\phi_0} - \alpha_1^{\phi_1} = c\int_{-b}^{b} d\phi_0(x) - \alpha_1^{\phi_1} = c\int_{-b}^{b} \frac{1+qx^2}{c} d\phi_1(x) - \alpha_1^{\phi_1}\\ &= \mu_0^{\phi_1} + q\mu_2^{\phi_1} - \alpha_1^{\phi_1} = q\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Estamos, agora, em condições de demonstrar os próximos dois resultados, que relacionam os coeficientes da equação (2.5) com os coeficientes das relações de recorrência para os polinômios $P_n^{\phi_0}$ e $P_n^{\phi_1}$.

2.2 Propriedades entre os coeficientes relacionados

Teorema 2.1. *Dadas $d\phi_0(x)$ e $d\phi_1(x)$ tais que (2.1) seja válido, então os coeficientes da relação (2.5) satisfazem*

$$\frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_0}}, \quad n \geq 2 \tag{2.11}$$

e

$$d_{n-1} - d_{n-2} = \alpha_{n+1}^{\phi_0} - \alpha_{n+1}^{\phi_1}, \quad n \geq 2, \tag{2.12}$$

com $d_0 = \dfrac{q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_1^{\phi_0}} = \alpha_2^{\phi_0} - \alpha_2^{\phi_1}$.

Demonstração: Por (2.6) e (1.12),

$$\begin{aligned}d_{n-2} &= \frac{q\rho_n^{\phi_1}}{c\rho_{n-2}^{\phi_0}} = \frac{q\alpha_{n+1}^{\phi_1}\alpha_n^{\phi_1}\ldots\alpha_2^{\phi_1}\mu_0^{\phi_1}}{c\alpha_{n-1}^{\phi_0}\alpha_{n-2}^{\phi_0}\ldots\alpha_2^{\phi_0}\mu_0^{\phi_0}}\\ &= \frac{q\alpha_{n+1}^{\phi_1}\alpha_n^{\phi_1}\ldots\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{c\alpha_{n-1}^{\phi_0}\alpha_{n-2}^{\phi_0}\ldots\alpha_2^{\phi_0}\dfrac{\alpha_1^{\phi_0}}{c}} = q\frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}\alpha_n^{\phi_1}\ldots\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_{n-1}^{\phi_0}\alpha_{n-2}^{\phi_0}\ldots\alpha_2^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}}, \quad n \geq 2,\end{aligned} \tag{2.13}$$

pois, por definição, $\alpha_1^{\phi_1} = \mu_0^{\phi_1}$ e $\alpha_1^{\phi_0} = c\mu_0^{\phi_0}$.

Da relação (2.13), a expressão para d_0 é evidente. De fato, se fizermos $n = 2$, obtemos

$$d_0 = \frac{q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_1^{\phi_0}}.$$

De (2.13),

$$\frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} = \frac{\rho_{n+1}^{\phi_1}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}}\frac{\rho_{n-2}^{\phi_0}}{\rho_n^{\phi_1}} = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}\alpha_{n+1}^{\phi_1}\ldots\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_0}\alpha_{n-1}^{\phi_0}\ldots\alpha_2^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}}\frac{\alpha_{n-1}^{\phi_0}\alpha_{n-2}^{\phi_0}\ldots\alpha_2^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}}{\alpha_{n+1}^{\phi_1}\alpha_n^{\phi_1}\ldots\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}} = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_0}}, \quad n \geq 2,$$

o que demonstra (2.11).

Agora, de (1.10), temos

$$P_{n-2}^{\phi_0}(x) = \frac{xP_{n-1}^{\phi_0}(x)}{\alpha_n^{\phi_0}} - \frac{P_n^{\phi_0}(x)}{\alpha_n^{\phi_0}}.$$

Usando este resultado em (2.5), obtemos

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_0}(x) + d_{n-2}\left[\frac{xP_{n-1}^{\phi_0}(x)}{\alpha_n^{\phi_0}} - \frac{P_n^{\phi_0}(x)}{\alpha_n^{\phi_0}}\right].$$

Logo,

$$P_n^{\phi_1}(x) = \left[1 - \frac{d_{n-2}}{\alpha_n^{\phi_0}}\right]P_n^{\phi_0}(x) + \frac{d_{n-2}}{\alpha_n^{\phi_0}}xP_{n-1}^{\phi_0}(x), \qquad n \geq 2. \tag{2.14}$$

Usando (2.5) e (2.14) na relação de recorrência (1.10) para $P_n^{\phi_1}$, temos

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{\phi_0}(x) + d_{n-1}P_{n-1}^{\phi_0}(x) &= P_{n+1}^{\phi_1}(x) = xP_n^{\phi_1}(x) - \alpha_{n+1}^{\phi_1}P_{n-1}^{\phi_1}(x) \\ &= x\left[P_n^{\phi_0}(x) + d_{n-2}P_{n-2}^{\phi_0}(x)\right] \\ &\quad -\alpha_{n+1}^{\phi_1}\left[\left(1 - \frac{d_{n-3}}{\alpha_{n-1}^{\phi_0}}\right)P_{n-1}^{\phi_0}(x) + \frac{d_{n-3}}{\alpha_{n-1}^{\phi_0}}xP_{n-2}^{\phi_0}(x)\right]. \end{aligned}$$

Isto implica que, para $n \geq 3$,

$$P_{n+1}^{\phi_0}(x) = xP_n^{\phi_0}(x) - \left[\alpha_{n+1}^{\phi_1} - d_{n-3}\frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\alpha_{n-1}^{\phi_0}} + d_{n-1}\right]P_{n-1}^{\phi_0}(x) + x\left[d_{n-2} - d_{n-3}\frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\alpha_{n-1}^{\phi_0}}\right]P_{n-2}^{\phi_0}(x).$$

Portanto, de (2.11), tem-se que $d_{n-2} = \dfrac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\alpha_{n-1}^{\phi_0}}d_{n-3}$ e, então,

$$P_{n+1}^{\phi_0}(x) = xP_n^{\phi_0}(x) - \left[\alpha_{n+1}^{\phi_1} - d_{n-2} + d_{n-1}\right]P_{n-1}^{\phi_0}(x).$$

Comparando a relação acima com (1.10), obtemos

$$d_{n-1} - d_{n-2} = \alpha_{n+1}^{\phi_0} - \alpha_{n+1}^{\phi_1}, \quad n \geq 3. \tag{2.15}$$

Similarmente, de (2.5), com $P_0^{\phi_1}(x) = P_0^{\phi_0}(x) = 1$ e $P_1^{\phi_1}(x) = P_1^{\phi_0}(x) = x$, a relação (2.12) para $n = 2$ e $d_0 = \alpha_2^{\phi_0} - \alpha_2^{\phi_1}$ são também obtidas. De fato, por (1.10), temos

$$P_2^{\phi_1}(x) = xP_1^{\phi_1}(x) - \alpha_2^{\phi_1}P_0^{\phi_1}(x) = x^2 - \alpha_2^{\phi_1}$$

e

$$P_2^{\phi_0}(x) = xP_1^{\phi_0}(x) - \alpha_2^{\phi_0}P_0^{\phi_0}(x) = x^2 - \alpha_2^{\phi_0}.$$

Por (2.5), $P_2^{\phi_1}(x) = P_2^{\phi_0}(x) + d_0$, o que implica que

$$d_0 = P_2^{\phi_1}(x) - P_2^{\phi_0}(x) = \alpha_2^{\phi_0} - \alpha_2^{\phi_1}.$$

Ainda de (1.10), temos

$$P_3^{\phi_1}(x) = xP_2^{\phi_1}(x) - \alpha_3^{\phi_1}x \quad \text{e} \quad P_3^{\phi_0}(x) = xP_2^{\phi_0}(x) - \alpha_3^{\phi_0}x.$$

Mas, de (2.5), temos que $P_3^{\phi_1}(x) = P_3^{\phi_0}(x) + d_1x$. Logo,

$$xP_2^{\phi_1}(x) - \alpha_3^{\phi_1}x = xP_2^{\phi_0}(x) - \alpha_3^{\phi_0}x + d_1x,$$

o que implica que

$$d_0 = \left[P_2^{\phi_1}(x) - P_2^{\phi_0}(x)\right] = d_1 + \alpha_3^{\phi_1} - \alpha_3^{\phi_0}.$$

Portanto,

$$d_1 - d_0 = \alpha_3^{\phi_0} - \alpha_3^{\phi_1}. \tag{2.16}$$

De (2.15) e (2.16), vemos que (2.12) se verifica, completando, assim, a demonstração. ■

Teorema 2.2. *Dadas $d\phi_0$ e $d\phi_1$ tais que* (2.1) *seja válido, então*

$$(\alpha_3^{\phi_1} - d_0)\alpha_1^{\phi_0} = \alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}, \qquad (\alpha_4^{\phi_1} - d_1)\alpha_2^{\phi_0} = \alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1},$$

e

$$(\alpha_{n+2}^{\phi_1} - d_{n-1})\alpha_n^{\phi_0} = \alpha_{n+2}^{\phi_1}(\alpha_n^{\phi_1} - d_{n-3}), \quad n \geq 3.$$

Consequentemente,

$$(\alpha_{2n+1}^{\phi_1} - d_{2n-2})\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\dots\alpha_3^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0} = \alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\dots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}, \quad n \geq 1 \tag{2.17}$$

$$(\alpha_{2n+2}^{\phi_1} - d_{2n-1})\alpha_{2n}^{\phi_0}\dots\alpha_4^{\phi_0}\alpha_2^{\phi_0} = \alpha_{2n+2}^{\phi_1}\alpha_{2n}^{\phi_1}\dots\alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}, \quad n \geq 1. \tag{2.18}$$

Demonstração: Como, pelo Teorema 2.1, $d_0 = \dfrac{q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_1^{\phi_0}}$, de (2.10) segue que

$$d_0 = \frac{q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_1^{\phi_0}} = \frac{\alpha_3^{\phi_1}(\alpha_1^{\phi_0} - \alpha_1^{\phi_1})}{\alpha_1^{\phi_0}}.$$

Isto implica que $d_0\alpha_1^{\phi_0} = \alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_0} - \alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}$. Logo,

$$(\alpha_3^{\phi_1} - d_0)\alpha_1^{\phi_0} = \alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}. \tag{2.19}$$

Agora, usando (2.11) e como $d_0 = \alpha_2^{\phi_0} - \alpha_2^{\phi_1}$, segue que $\dfrac{d_1}{d_0} = \dfrac{\alpha_4^{\phi_1}}{\alpha_2^{\phi_0}}$, o que implica que $d_1\alpha_2^{\phi_0} = \alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_0} - \alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}$. Logo,

$$(\alpha_4^{\phi_1} - d_1)\alpha_2^{\phi_0} = \alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}. \tag{2.20}$$

De (2.11), obtemos

$$\alpha_n^{\phi_0}\alpha_{n+2}^{\phi_1} + d_{n-1}\alpha_n^{\phi_0} = \alpha_{n+2}^{\phi_1}d_{n-2} + \alpha_n^{\phi_0}\alpha_{n+2}^{\phi_1},$$

o que implica que

$$\alpha_{n+2}^{\phi_1}(\alpha_n^{\phi_0} - d_{n-2}) = \alpha_n^{\phi_0}(\alpha_{n+2}^{\phi_1} - d_{n-1}).$$

Como, por (2.12), $d_{n-2} - d_{n-3} = \alpha_n^{\phi_0} - \alpha_n^{\phi_1}$, então $\alpha_n^{\phi_0} - d_{n-2} = \alpha_n^{\phi_1} - d_{n-3}$, para $n \geq 3$. Logo,

$$(\alpha_{n+2}^{\phi_1} - d_{n-1})\alpha_n^{\phi_0} = \alpha_{n+2}^{\phi_1}(\alpha_n^{\phi_1} - d_{n-3}), \quad n \geq 3. \tag{2.21}$$

Concluímos, assim, a demonstração da primeira parte do teorema.

Agora, de (2.21), obtemos

$$\begin{aligned}
(\alpha_{2n+2}^{\phi_1} - d_{2n-1})\alpha_{2n}^{\phi_0} &= \alpha_{2n+2}^{\phi_1}(\alpha_{2n}^{\phi_1} - d_{2n-3}) \\
&= \alpha_{2n+2}^{\phi_1}\frac{\alpha_{2n}^{\phi_1}}{\alpha_{2n-2}^{\phi_0}}(\alpha_{2n-2}^{\phi_1} - d_{2n-5}) \\
&= \dots \\
&= \alpha_{2n+2}^{\phi_1}\frac{\alpha_{2n}^{\phi_1}}{\alpha_{2n-2}^{\phi_0}}\frac{\alpha_{2n-2}^{\phi_1}}{\alpha_{2n-4}^{\phi_0}}\dots\frac{\alpha_6^{\phi_1}}{\alpha_4^{\phi_0}}(\alpha_4^{\phi_1} - d_1).
\end{aligned}$$

Como, por (2.20), $(\alpha_4^{\phi_1} - d_1) = \dfrac{\alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}}{\alpha_2^{\phi_0}}$, segue que

$$(\alpha_{2n+2}^{\phi_1} - d_{2n-1})\alpha_{2n}^{\phi_0} = \alpha_{2n+2}^{\phi_1}\frac{\alpha_{2n}^{\phi_1}}{\alpha_{2n-2}^{\phi_0}}\frac{\alpha_{2n-2}^{\phi_1}}{\alpha_{2n-4}^{\phi_0}}\dots\frac{\alpha_6^{\phi_1}}{\alpha_4^{\phi_0}}\frac{\alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}}{\alpha_2^{\phi_0}}$$

e, então,

$$(\alpha_{2n+2}^{\phi_1} - d_{2n-1})\alpha_{2n}^{\phi_0}\alpha_{2n-2}^{\phi_0}\alpha_{2n-4}^{\phi_0}\ldots\alpha_4^{\phi_0}\alpha_2^{\phi_0} = \alpha_{2n+2}^{\phi_1}\alpha_{2n}^{\phi_1}\alpha_{2n-2}^{\phi_1}\ldots\alpha_6^{\phi_1}\alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1},$$

o que demonstra (2.18).

De maneira análoga, de (2.21) e (2.19) mostramos (2.17), concluindo, assim, a demonstração do teorema. ■

Consideremos, agora, a sequência de números reais $\{\ell_n\}_{n=0}^{\infty}$ tais que

$$\ell_0 = 1, \qquad (\ell_1 - 1) = 2q\alpha_2^{\phi_1}, \qquad (\ell_2 - 1) = \frac{2q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_1^{\phi_0}} \tag{2.22}$$

e

$$(\ell_{n+1} - 1) = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_0}}(\ell_{n-1} - 1), \qquad n \geq 2. \tag{2.23}$$

Usando (2.23) e (2.11), temos que

$$\frac{(\ell_{n+1} - 1)}{(\ell_{n-1} - 1)} = \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}, \qquad n \geq 2. \tag{2.24}$$

De (2.22) e (2.23), obtemos

$$\begin{aligned}
(\ell_{n+1} - 1) &= \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_0}}(\ell_{n-1} - 1) = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_0}}\frac{\alpha_n^{\phi_1}}{\alpha_{n-2}^{\phi_0}}(\ell_{n-3} - 1) = \ldots \\
&= \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_0}}\frac{\alpha_n^{\phi_1}}{\alpha_{n-2}^{\phi_0}}\ldots\frac{\alpha_4^{\phi_1}}{\alpha_2^{\phi_0}}(\ell_1 - 1) = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_0}}\frac{\alpha_n^{\phi_1}}{\alpha_{n-2}^{\phi_0}}\ldots\frac{\alpha_4^{\phi_1}}{\alpha_2^{\phi_0}}2q\alpha_2^{\phi_1}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\ell_n - 1) &= \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\alpha_{n-1}^{\phi_0}}(\ell_{n-2} - 1) = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\alpha_{n-1}^{\phi_0}}\frac{\alpha_{n-1}^{\phi_1}}{\alpha_{n-3}^{\phi_0}}(\ell_{n-4} - 1) = \ldots \\
&= \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\alpha_{n-1}^{\phi_0}}\frac{\alpha_{n-1}^{\phi_1}}{\alpha_{n-3}^{\phi_0}}\ldots\frac{\alpha_5^{\phi_1}}{\alpha_3^{\phi_0}}(\ell_2 - 1) = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\alpha_{n-1}^{\phi_0}}\frac{\alpha_{n-1}^{\phi_1}}{\alpha_{n-3}^{\phi_0}}\ldots\frac{\alpha_5^{\phi_1}}{\alpha_3^{\phi_0}}\frac{2q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_1^{\phi_0}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$(\ell_{n+1} - 1)(\ell_n - 1) = q\frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}\alpha_{n+1}^{\phi_1}\alpha_n^{\phi_1}\ldots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_0}\alpha_{n-1}^{\phi_0}\alpha_{n-2}^{\phi_0}\ldots\alpha_3^{\phi_0}\alpha_2^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}}4q.$$

De (2.13), concluímos que

$$(\ell_{n+1} - 1)(\ell_n - 1) = 4qd_{n-1}, \qquad n \geq 1. \tag{2.25}$$

A seguir, nos Teoremas 2.3 e 2.4, demonstraremos como os coeficientes das relações de recorrência para $P_n^{\phi_0}$ e $P_n^{\phi_1}$, $n \geq 0$, se relacionam com os elementos da sequência $\{\ell_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Teorema 2.3. *Dadas $d\phi_0$ e $d\phi_1$ tais que* (2.1) *seja válido, então, para $n \geq 1$, os elementos da sequência $\{\ell_n\}$, definidos por* (2.22) *e* (2.23), *satisfazem*

$$\frac{(\ell_{2n+1}-1)}{2} = q\frac{\alpha_{2n+2}^{\phi_1}\alpha_{2n}^{\phi_1}\dots\alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}}{\alpha_{2n}^{\phi_0}\dots\alpha_4^{\phi_0}\alpha_2^{\phi_0}}, \qquad \frac{(\ell_{2n}-1)}{2} = q\frac{\alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\dots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\dots\alpha_3^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}}, \tag{2.26}$$

$$\frac{(\ell_{2n-1}+1)}{2} = \frac{\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\alpha_{2n-3}^{\phi_0}\dots\alpha_1^{\phi_0}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\alpha_{2n-3}^{\phi_1}\dots\alpha_1^{\phi_1}} \quad e \quad \frac{(\ell_{2n}+1)}{2} = \frac{\alpha_{2n}^{\phi_0}\alpha_{2n-2}^{\phi_0}\dots\alpha_2^{\phi_0}}{\alpha_{2n}^{\phi_1}\alpha_{2n-2}^{\phi_1}\dots\alpha_2^{\phi_1}}. \tag{2.27}$$

Demonstração: De (2.23), temos que

$$\frac{(\ell_{2n+1}-1)}{2} = q\frac{\alpha_{2n+2}^{\phi_1}\alpha_{2n}^{\phi_1}\dots\alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}}{\alpha_{2n}^{\phi_0}\dots\alpha_4^{\phi_0}\alpha_2^{\phi_0}} \tag{2.28}$$

e

$$\frac{(\ell_{2n}-1)}{2} = q\frac{\alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\dots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\dots\alpha_3^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}}. \tag{2.29}$$

Agora, de (2.25) e (2.12), segue que

$$\frac{(\ell_{2n+1}-1)}{2} = \frac{qd_{2n-1}}{(\ell_{2n}-1)/2} = \frac{q[\alpha_{2n+1}^{\phi_0}-\alpha_{2n+1}^{\phi_1}+d_{2n-2}]}{(\ell_{2n}-1)/2}, \qquad n \geq 1.$$

Portanto, de (2.29),

$$\begin{aligned}
\frac{(\ell_{2n+1}-1)}{2} &= \frac{q[\alpha_{2n+1}^{\phi_0}-\alpha_{2n+1}^{\phi_1}+d_{2n-2}]}{(\ell_{2n}-1)/2} \\
&= q[\alpha_{2n+1}^{\phi_0}-\alpha_{2n+1}^{\phi_1}+d_{2n-2}]\frac{\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\dots\alpha_3^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}}{q\alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\dots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}} \\
&= \frac{\alpha_{2n+1}^{\phi_0}\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\dots\alpha_3^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}}{\alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\dots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}} + \frac{[d_{2n-2}-\alpha_{2n+1}^{\phi_1}]\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\dots\alpha_3^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}}{\alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\dots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}} \\
&= \frac{\alpha_{2n+1}^{\phi_0}\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\dots\alpha_3^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}}{\alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\dots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}} - 1,
\end{aligned}$$

pois, por (2.17), $\dfrac{[d_{2n-2}-\alpha_{2n+1}^{\phi_1}]\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\dots\alpha_3^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}}{\alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\dots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}} = -1$. Logo,

$$\frac{(\ell_{2n+1}+1)}{2} = \frac{\alpha_{2n+1}^{\phi_0}\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\dots\alpha_3^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}}{\alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\dots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}$$

e, assim,

$$\frac{(\ell_{2n-1}+1)}{2} = \frac{\alpha_{2n-1}^{\phi_0}\alpha_{2n-3}^{\phi_0}\dots\alpha_1^{\phi_0}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_1}\alpha_{2n-3}^{\phi_1}\dots\alpha_1^{\phi_1}}, \quad n \geq 1. \tag{2.30}$$

De maneira análoga, concluímos, também, que

$$\frac{(\ell_{2n}+1)}{2} = \frac{\alpha_{2n}^{\phi_0}\alpha_{2n-2}^{\phi_0}\dots\alpha_2^{\phi_0}}{\alpha_{2n}^{\phi_1}\alpha_{2n-2}^{\phi_1}\dots\alpha_2^{\phi_1}}, \quad n \geq 1. \tag{2.31}$$

Verifiquemos, agora, os resultados para $\dfrac{\ell_1+1}{2}$ e $\dfrac{\ell_2+1}{2}$. Fazendo $n=1$ em (2.31), temos que $\dfrac{\ell_2+1}{2} = \dfrac{\alpha_2^{\phi_0}}{\alpha_2^{\phi_1}}$ e isto implica que

$$\frac{\ell_2-1}{2} = \frac{\alpha_2^{\phi_0}}{\alpha_2^{\phi_1}} - 1 = \frac{\alpha_2^{\phi_0}-\alpha_2^{\phi_1}}{\alpha_2^{\phi_1}}.$$

Como, pelo Teorema 2.1, $\alpha_2^{\phi_0}-\alpha_2^{\phi_1} = \dfrac{q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_1^{\phi_0}}$, concluímos que

$$(\ell_2-1) = \frac{2q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_1^{\phi_0}}. \tag{2.32}$$

Agora, fazendo $n=1$ em (2.30), obtemos $\dfrac{\ell_1-1}{2} = \dfrac{\alpha_1^{\phi_0}-\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_1^{\phi_1}}$. Como, por definição, $\alpha_1^{\phi_0}-\alpha_1^{\phi_1} = q\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}$, segue que

$$(\ell_1-1) = 2q\alpha_2^{\phi_1}. \tag{2.33}$$

Dos resultados obtidos em (2.28),(2.29),(2.30),(2.31),(2.32) e (2.33) concluímos que o teorema está demonstrado. ■

Teorema 2.4. *Dadas as distribuições simétricas $d\phi_0$ e $d\phi_1$ tais que* (2.1) *seja válido, então existe uma sequência de números reais $\{\ell_n = \ell_n(q)\}_{n=0}^{\infty}$ tal que*

$$\alpha_{n+1}^{\phi_1} = \frac{1}{4q}(\ell_n-1)(\ell_{n-1}+1), \qquad \alpha_{n+1}^{\phi_0} = \frac{1}{4q}(\ell_n-1)(\ell_{n+1}+1), \qquad n \geq 1,$$

e

$$d_{n-1} = d_{n-1}(q) = \frac{1}{4q}(\ell_n-1)(\ell_{n+1}-1), \qquad n \geq 1,$$

com $\ell_0 = 1$ e $\ell_1 = 1 + 2q\alpha_2^{\phi_1}$.

Demonstração: Por (2.29), temos que

$$\frac{(\ell_n-1)}{2} = q\frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}\alpha_{n-1}^{\phi_1}\dots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_{n-1}^{\phi_0}\dots\alpha_3^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}}$$

e, de (2.30), segue que

$$\frac{(\ell_{n-1}+1)}{2} = \frac{\alpha_{n-1}^{\phi_0}\alpha_{n-3}^{\phi_0}\cdots\alpha_1^{\phi_0}}{\alpha_{n-1}^{\phi_1}\alpha_{n-3}^{\phi_1}\cdots\alpha_1^{\phi_1}}.$$

Assim,

$$(\ell_{n-1}+1)(\ell_n-1) = 2\frac{\alpha_{n-1}^{\phi_0}\alpha_{n-3}^{\phi_0}\cdots\alpha_1^{\phi_0}}{\alpha_{n-1}^{\phi_1}\alpha_{n-3}^{\phi_1}\cdots\alpha_1^{\phi_1}}2q\frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}\alpha_{n-1}^{\phi_1}\cdots\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_{n-1}^{\phi_0}\cdots\alpha_3^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0}} = 4q\alpha_{n+1}^{\phi_1}.$$

Logo,

$$\alpha_{n+1}^{\phi_1} = \frac{1}{4q}(\ell_{n-1}+1)(\ell_n-1), \qquad n \geq 1.$$

De maneira análoga, obtemos

$$\alpha_{n+1}^{\phi_0} = \frac{1}{4q}(\ell_n-1)(\ell_{n+1}+1), \qquad n \geq 1,$$

com $\ell_0 = 1$ e $\ell_1 = 1 + 2q\alpha_2^{\phi_1}$. De (2.25), concluímos a demonstração do teorema. ■

Conhecendo-se os coeficientes da relação de recorrência para $P_n^{\phi_1}(P_n^{\phi_0})$, o próximo teorema mostra como obter os coeficientes da relação de recorrência para $P_n^{\phi_0}(P_n^{\phi_1})$.

Teorema 2.5. *Consideremos as distribuições simétricas $d\phi_1$ e $d\phi_0$ satisfazendo* (2.1). *Então, dada a sequência de coeficientes $\{\alpha_{n+1}^{\phi_1}\}_{n=1}^{\infty}$, a sequência $\{\alpha_{n+1}^{\phi_0}\}_{n=1}^{\infty}$ pode ser gerada por*

$$\alpha_{n+1}^{\phi_0} = \frac{b_{n-1}^{(1)}b_{n+2}^{(1)}}{b_n^{(1)}b_{n+1}^{(1)}}\alpha_{n+1}^{\phi_1}, \quad n \geq 1,$$

em que os números $b_n^{(1)}$ satisfazem $b_0^{(1)} = b_1^{(1)} = 1$ e $b_{n+1}^{(1)} = b_n^{(1)} + q\alpha_{n+1}^{\phi_1}b_{n-1}^{(1)}, \quad n \geq 1$.

Similarmente, dada a sequência de coeficientes $\{\alpha_{n+1}^{\phi_0}\}_{n=1}^{\infty}$, a sequência $\{\alpha_{n+1}^{\phi_1}\}_{n=1}^{\infty}$ pode ser gerada por

$$\alpha_2^{\phi_1} = \frac{b_2^{(2)}}{b_1^{(2)}}\alpha_2^{\phi_0}, \qquad \alpha_{n+2}^{\phi_1} = \frac{b_{n-1}^{(2)}b_{n+2}^{(2)}}{b_n^{(2)}b_{n+1}^{(2)}}\alpha_{n+2}^{\phi_0}, \quad n \geq 1,$$

com $b_n^{(2)}$ satisfazendo $b_0^{(2)} = 1, \quad b_1^{(2)} = \mu_0^{\phi_1}/(c\mu_0^{\phi_0})$ e $b_{n+1}^{(2)} = [-b_n^{(2)} + b_{n-1}^{(2)}]/[q\alpha_{n+1}^{\phi_0}], \quad n \geq 1$.

Demonstração: Dada a sequência $\{\alpha_{n+1}^{\phi_1}\}_{n=1}^{\infty}$, do Teorema 2.4 obtemos

$$(\ell_n - 1) = \frac{4q\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{(\ell_{n-1}+1)} = \frac{4q\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{2+(\ell_{n-1}-1)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}(\ell_n - 1) = \frac{4q\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{2+(\ell_{n-1}-1)} &= \frac{4q\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{2} \underset{+}{} \frac{4q\alpha_n^{\phi_1}}{2+(\ell_{n-2}-1)} = \ldots \\ &= \frac{4q\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{2} \underset{+}{} \frac{4q\alpha_n^{\phi_1}}{2} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{4q\alpha_3^{\phi_1}}{2} \underset{+}{} \frac{4q\alpha_2^{\phi_1}}{2}, \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

Desta fração contínua, facilmente obtemos

$$\frac{\ell_n+1}{2} = 1 + \frac{q\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{1} {}_{+} \frac{q\alpha_n^{\phi_1}}{1} {}_{+} \cdots {}_{+} \frac{q\alpha_3^{\phi_1}}{1} {}_{+} \frac{q\alpha_2^{\phi_1}}{1}, \quad n \geq 1. \tag{2.34}$$

Mostremos, por indução em n, que podemos escrever

$$\frac{(\ell_n+1)}{2} = \frac{b_{n+1}^{(1)}}{b_n^{(1)}}, \quad n \geq 0, \tag{2.35}$$

em que $b_{n+1}^{(1)} = b_n^{(1)} + q\alpha_{n+1}^{\phi_1} b_{n-1}^{(1)}$, $n \geq 1$, com $b_0^{(1)} = b_1^{(1)} = 1$. De fato,

- para $n = 1$, temos
$$\frac{\ell_1+1}{2} = 1 + q\alpha_2^{\phi_1} = \frac{b_2^{(1)}}{b_1^{(1)}},$$
o que implica em $b_2^{(1)} = b_1^{(1)} + q\alpha_2^{\phi_1} b_0^{(1)}$.

- Suponha válido para $n = k$, isto é,
$$\frac{\ell_k+1}{2} = 1 + \frac{q\alpha_{k+1}^{\phi_1}}{1} {}_{+} \frac{q\alpha_k^{\phi_1}}{1} {}_{+} \cdots {}_{+} \frac{q\alpha_3^{\phi_1}}{1} {}_{+} \frac{q\alpha_2^{\phi_1}}{1} = \frac{b_{k+1}^{(1)}}{b_k^{(1)}},$$
com $b_{k+1}^{(1)}$ satisfazendo $b_{k+1}^{(1)} = b_k^{(1)} + q\alpha_{k+1}^{\phi_1} b_{k-1}^{(1)}$.

- Provemos, então, para $n = k + 1$.
$$\begin{aligned} \frac{\ell_{k+1}+1}{2} &= 1 + \frac{q\alpha_{k+2}^{\phi_1}}{1} {}_{+} \frac{q\alpha_{k+1}^{\phi_1}}{1} {}_{+} \frac{q\alpha_k^{\phi_1}}{1} {}_{+} \cdots \frac{q\alpha_3^{\phi_1}}{1} {}_{+} \frac{q\alpha_2^{\phi_1}}{1} \\ &= 1 + \frac{q\alpha_{k+2}^{\phi_1}}{(\ell_k+1)/2} = 1 + \frac{q\alpha_{k+2}^{\phi_1} b_k^{(1)}}{b_{k+1}^{(1)}} = \frac{b_{k+2}^{(1)}}{b_{k+1}^{(1)}}, \end{aligned}$$
em que $b_{k+2}^{(1)} = b_{k+1}^{(1)} + q\alpha_{k+2}^{\phi_1} b_k^{(1)}$.

Do Teorema 2.4, segue que $\alpha_{n+1}^{\phi_0} = \dfrac{\ell_{n+1}+1}{\ell_{n-1}+1}\alpha_{n+1}^{\phi_1}$. Usando (2.35), concluímos que

$$\alpha_{n+1}^{\phi_0} = \frac{b_{n+2}^{(1)}}{b_{n+1}^{(1)}} \frac{b_{n-1}^{(1)}}{b_n^{(1)}} \alpha_{n+1}^{\phi_1}, \quad n \geq 1, \tag{2.36}$$

na qual $b_n^{(1)}, n \geq 0$, são dados por (2.35).

Analogamente, mostramos que, dada a sequência de coeficientes $\{\alpha_{n+1}^{\phi_0}\}_{n=1}^{\infty}$, a sequência $\{\alpha_{n+1}^{\phi_1}\}_{n=1}^{\infty}$ pode ser gerada por

$$\alpha_2^{\phi_1} = \frac{b_2^{(2)}}{b_1^{(2)}}\alpha_2^{\phi_0}, \qquad \alpha_{n+2}^{\phi_1} = \frac{b_{n-1}^{(2)}b_{n+2}^{(2)}}{b_n^{(2)}b_{n+1}^{(2)}}\alpha_{n+2}^{\phi_0}, \quad n \geq 1, \tag{2.37}$$

na qual os $b_n^{(2)}$ satisfazem $b_0^{(2)} = 1, \quad b_1^{(2)} = \mu_0^{\phi_1}/(c\mu_0^{\phi_0})$ e $b_{n-1}^{(2)} = b_n^{(2)} + q\alpha_{n+1}^{\phi_0}b_{n+1}^{(2)}, \quad n \geq 1.$

Portanto, de (2.36) e (2.37), concluímos a demonstração. ■

Em certas situações, este teorema pode ser usado para obter resultados explícitos . Vejamos alguns exemplos.

2.2.1 Exemplos

Exemplo 2.2.1. Consideremos $d\phi_1(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}dx, \lambda > 0$, definida no intervalo $[-1, 1]$. Os polinômios ortogonais mônicos $P_n^{\phi_1}$, $n \geq 0$, associados com $d\phi_1$, são os polinômios mônicos de Gegenbauer, $G_n^{(\lambda)}$, dados explicitamente pela fórmula de recorrência (1.24). Da relação de recorrência para $b_n^{(1)}$ no Teorema 2.5, obtemos

$$b_n^{(1)} = (\sqrt{-q})^n G_n^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q}), \quad n \geq 0.$$

De fato, se tomarmos $x = \dfrac{1}{\sqrt{-q}}$ em (1.24), temos que

$$G_{n+1}^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q}) = (1/\sqrt{-q})G_n^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q}) - \alpha_{n+1}^{(\lambda)}G_{n-1}^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q}).$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por $(\sqrt{-q})^{n+1}$, obtemos

$$\begin{aligned}(\sqrt{-q})^{n+1}G_{n+1}^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q}) &= (\sqrt{-q})^n G_n^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q}) - \alpha_{n+1}^{(\lambda)}G_{n-1}^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q})(\sqrt{-q})^{n-1}(\sqrt{-q})^2 \\ &= (\sqrt{-q})^n G_n^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q}) + \alpha_{n+1}^{(\lambda)}\, q\, G_{n-1}^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q})(\sqrt{-q})^{n-1}.\end{aligned}$$

Comparando com a relação de recorrência para $b_n^{(1)}$ no Teorema 2.5, concluímos que

$$b_n^{(1)} = (\sqrt{-q})^n G_n^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q}), \quad n \geq 0. \tag{2.38}$$

Portanto, para a distribuição $d\phi_0(x) = c^{-1}(1+qx^2)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx, \quad \lambda > 0$, obtemos os resultados a seguir.

Pelo Teorema 2.5 e de (2.38),

$$\begin{aligned}
\alpha_{2n}^{\phi_0} &= \frac{b_{2n-2}^{(1)} b_{2n+1}^{(1)}}{b_{2n-1}^{(1)} b_{2n}^{(1)}} \alpha_{2n}^{\phi_1} \\
&= \frac{(\sqrt{-q})^{2n-2} G_{2n-2}^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q})}{(\sqrt{-q})^{2n-1} G_{2n-1}^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q})} \frac{(\sqrt{-q})^{2n+1} G_{2n+1}^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q})}{(\sqrt{-q})^{2n} G_{2n}^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q})} \alpha_{2n}^{\phi_1} \\
&= \frac{G_{2n-2}^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q})}{G_{2n-1}^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q})} \frac{G_{2n+1}^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q})}{G_{2n}^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q})} \alpha_{2n}^{\phi_1}. \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

Agora, usando (1.25) e (1.26), obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha_{2n}^{\phi_0} &= \frac{(2n-2)!\, {}_2F_1(-n+1, n+\lambda-1; 1/2; -1/q)}{(2n-1)!\, {}_2F_1(-n+1, n+\lambda; 3/2; -1/q)} \\
&\quad \times \frac{(2n+1)!\, {}_2F_1(-n, n+\lambda+1; 3/2; -1/q)}{(2n)!\, {}_2F_1(-n, n+\lambda; 1/2; -1/q)} \alpha_{2n}^{\phi_1} \\
&= \frac{(2n+1)}{(2n-1)} \frac{{}_2F_1(-n+1, n+\lambda-1; 1/2; -1/q)}{{}_2F_1(-n+1, n+\lambda; 3/2; -1/q)} \\
&\quad \times \frac{{}_2F_1(-n, n+\lambda+1; 3/2; -1/q)}{{}_2F_1(-n, n+\lambda; 1/2; -1/q)} \alpha_{2n}^{\phi_1}.
\end{aligned}$$

Como, por (1.24), $\alpha_{2n}^{\phi_1} = \dfrac{(2n-1)(2n+2\lambda-2)}{4(2n+\lambda-1)(2n+\lambda-2)}$, segue que

$$\begin{aligned}
\alpha_{2n}^{\phi_0} &= \frac{1}{4} \frac{(2n+1)(2n+2\lambda-2)}{(2n+\lambda-2)(2n+\lambda-1)} \frac{{}_2F_1(-n+1, n+\lambda-1; 1/2; -1/q)}{{}_2F_1(-n+1, n+\lambda; 3/2; -1/q)} \\
&\quad \times \frac{{}_2F_1(-n, n+\lambda+1; 3/2; -1/q)}{{}_2F_1(-n, n+\lambda; 1/2; -1/q)}.
\end{aligned}$$

De maneira análoga, obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha_{2n+1}^{\phi_0} &= \frac{1}{4} \frac{(2n)(2n+2\lambda-1)}{(2n+\lambda)(2n+\lambda-1)} \frac{{}_2F_1(-n+1, n+\lambda; 3/2; -1/q)}{{}_2F_1(-n, n+\lambda; 1/2; -1/q)} \\
&\quad \times \frac{{}_2F_1(-n-1, n+\lambda+1; 1/2; -1/q)}{{}_2F_1(-n, n+\lambda+1; 3/2; -1/q)}, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.2.2. Se considerarmos $d\phi_1(x) = e^{-x^2}dx$, definida no intervalo $(-\infty, \infty)$, os polinômios ortogonais mônicos $P_n^{\phi_1}, n \geq 0$, são os polinômios mônicos de Hermite, como visto anteriormente na forma explicita em (1.32) e através da relação de recorrência de três termos (1.34). Logo, $\alpha_{n+1}^{\phi_1} = \dfrac{n}{2}$.

Usando a mesma análise anterior, obtemos

$$b_n^{(1)} = (\sqrt{-q})^n H_n(1/\sqrt{-q}).$$

Assim, para a distribuição $d\phi_0(x) = c^{-1}(1+qx^2)e^{-x^2}dx$, usando o Teorema 2.5 e a relação para $b_n^{(1)}$, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}^{\phi_0} &= \frac{n}{2}\frac{(\sqrt{-q})^{n-1}H_{n-1}(1/\sqrt{-q})(\sqrt{-q})^{n+2}H_{n+2}(1/\sqrt{-q})}{(\sqrt{-q})^{n}H_{n}(1/\sqrt{-q})(\sqrt{-q})^{n+1}H_{n+1}(1/\sqrt{-q})} \\ &= \frac{n}{2}\frac{H_{n-1}(1/\sqrt{-q})H_{n+2}(1/\sqrt{-q})}{H_{n}(1/\sqrt{-q})H_{n+1}(1/\sqrt{-q})}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Observe que, mesmo quando $q > 0$, as frações em (2.39) e (2.40) são números reais, pois os polinômios de Gegenbauer, $G_n^{\lambda}(x)$, e de Hermite, $H_n(x)$, são funções pares se n é par, e ímpares se n é ímpar. Podemos, por exemplo, escrever

$$G_{2n}^{(\lambda)}(x) = x^{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{2n,2k}^{(G)}\, x^{2k} \quad \text{e} \quad G_{2n+1}^{(\lambda)}(x) = x\left[x^{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{2n+1,2k+1}^{(G)}\, x^{2k}\right].$$

Logo,

$$G_{2n}^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q}) = (-1/q)^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{2n,2k}^{(G)}\,(-1/q)^k,$$

que é um número real, e

$$G_{2n+1}^{(\lambda)}(1/\sqrt{-q}) = -(i/\sqrt{q})\left[(-1/q)^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{2n+1,2k+1}^{(G)}\,(-1/q)^k\right],$$

cujo termo entre colchetes também é real.

Analogamente para Hermite.

2.3 Aplicações a polinômios ortogonais de Sobolev

2.3.1 Caso I: medidas relacionadas por $\mathbf{d}\psi(\mathbf{x}) = (\mathbf{1}+\mathbf{qx^2})\,\mathbf{d}\phi(\mathbf{x})$.

A partir do resultados do Teorema 2.4, o teorema a seguir nos dá uma das duas diferentes maneiras de explorar os polinômios ortogonais de Sobolev associados a pares de distribuições simétricas.

Teorema 2.6. *Sejam $d\phi_1$ e $d\psi_1$ duas distribuições simétricas clássicas tais que os polinômios ortogonais mônicos $P_n^{\psi_1}$ e $P_n^{\phi_1}$ satisfaçam à relação diferencial*

$$P_n^{\prime\,\phi_1}(x) = nP_{n-1}^{\psi_1}(x),\ n \geq 1. \tag{2.41}$$

Se a distribuição $d\psi_0$ é dada por

$$d\psi_0(x) = (1+qx^2)d\phi_1(x), \tag{2.42}$$

então os polinômios ortogonais de Sobolev mônicos, S_n, associados com o produto interno

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{S}} = \langle f, g\rangle_{\psi_0+k_1\phi_1} + k_2\langle f^{'}, g^{'}\rangle_{\psi_1}, \tag{2.43}$$

satisfazem $S_0 = 1, S_1(x) = x$ e

$$S_{n+1}(x) - a_{n-1}(q, k_1, k_2)S_{n-1}(x) = P_{n+1}^{\phi_1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x), \quad n \geq 1.$$

Aqui, $d_{n-1}(0) = a_{n-1}(0, k_1, k_2) = 0$ para $n \geq 1$ e, quando $q \neq 0$, $a_n = a_n(q, k_1, k_2)$ satisfaz

$$a_{n+1} = -\frac{q\alpha_{n+3}^{\phi_1}\alpha_{n+4}^{\phi_1}d_{n+1}(q)}{q\alpha_{n+3}^{\phi_1}\alpha_{n+4}^{\phi_1} + d_{n+1}(q)[k_1 + (n+1)^2(\rho_n^{\psi_1}/\rho_{n+1}^{\phi_1})k_2 + qd_{n-1}(q) + qa_{n-1}]}, \ n \geq 1,$$

em que

$$a_0(q, k_1, k_2) = \frac{-d_0(q)q\alpha_2^{\phi_1}\alpha_3^{\phi_1}}{q\alpha_2^{\phi_1}\alpha_3^{\phi_1} + d_0(q)k_1} \quad e \quad a_1(q, k_1, k_2) = \frac{-d_1(q)q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_4^{\phi_1}}{q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_4^{\phi_1} + d_1(q)[k_1 + (\rho_0^{\psi_1}/\rho_1^{\phi_1})k_2]}.$$

Os coeficientes $d_n(q)$ podem ser obtidos por

$$d_{n-1}(q) = q^{-1}\tilde{\ell}_n(q)\tilde{\ell}_{n+1}(q), \quad n \geq 1,$$

em que

$$\tilde{\ell}_n(q) = -1 + \frac{q\alpha_n^{\psi_0}}{\tilde{\ell}_{n-1}(q)} = \frac{q\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\tilde{\ell}_{n-1}(q) + 1}, \quad n \geq 2, \quad e \quad \tilde{\ell}_1(q) = q\alpha_2^{\phi_1}.$$

As constantes q, k_1 e k_2 devem ser tais que $d\psi_0$ é uma distribuição positiva e o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{S}}$ é definido positivo.

Demonstração: De (2.42) e (2.5), temos que

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\psi_0}(x) + d_{n-2}(q)P_{n-2}^{\psi_0}(x), \qquad n \geq 2. \tag{2.44}$$

Como $P_n^{'\phi_1}(x) = nP_{n-1}^{\psi_1}(x)$, concluímos que

$$P_{n-1}^{\psi_1}(x) = \frac{1}{n}P_n^{'\psi_0}(x) + \frac{d_{n-2}(q)}{n}P_{n-2}^{'\psi_0}(x), \qquad n \geq 2.$$

Considerando $\tilde{\ell}_n(q) = (\ell_n - 1)/2$, então, pelo Teorema 2.4, temos que

$$d_{n-1}(q) = \frac{1}{q}\frac{(l_n - 1)}{2}\frac{(l_{n+1} - 1)}{2} = q^{-1}\tilde{\ell}_n(q)\tilde{\ell}_{n+1}(q). \tag{2.45}$$

Usando novamente o Teorema 2.4, obtemos

$$\tilde{\ell}_n(q) = \frac{(l_n - 1)}{2} = \frac{(l_n + 1)}{2} - 1 = \frac{q\alpha_n^{\psi_0}}{\tilde{\ell}_{n-1}(q)} - 1.$$

Por outro lado,

$$\tilde{\ell}_n(q) = \frac{q\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{(\ell_{n-1}+1)/2} = \frac{q\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{1+(\ell_{n-1}-1)/2} = \frac{q\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{1+\tilde{\ell}_{n-1}(q)}.$$

Assim,

$$\tilde{\ell}_n(q) = -1 + \frac{q\alpha_n^{\psi_0}}{\tilde{\ell}_{n-1}(q)} = \frac{q\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{1+\tilde{\ell}_{n-1}(q)}, \quad n \geq 2, \tag{2.46}$$

e, por definição, segue que

$$\tilde{\ell}_1(q) = (\ell_1 - 1)/2 = \frac{2q\alpha_2^{\phi_1}}{2} = q\alpha_2^{\phi_1}. \tag{2.47}$$

Expandindo $P_{n+1}^{\phi_1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x)$ por uma combinação linear dos polinômios S_n, obtemos

$$P_{n+1}^{\phi_1}(x) = S_{n+1}(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j S_j(x). \tag{2.48}$$

Daí, usando a propriedade de ortogonalidade (1.9), para $i = 0, 1, \ldots, n$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle P_{n+1}^{\phi_1}, S_i\rangle_{\mathbb{S}} &= \langle S_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} a_j S_j, S_i\rangle_{\mathbb{S}} \\
&= -\sum_{j=0}^{n} a_j \langle S_j, S_i\rangle_{\mathbb{S}} = -a_i\langle S_i, S_i\rangle_{\mathbb{S}}.
\end{aligned}$$

Além disso, de (2.43), (2.41), (2.5) e do Teorema 1.4,

$$\begin{aligned}
\langle P_{n+1}^{\phi_1}, S_i\rangle_{\mathbb{S}} &= \langle P_{n+1}^{\phi_1}, S_i\rangle_{\psi_0} + k_1\langle P_{n+1}^{\phi_1}, S_i\rangle_{\phi_1} \\
&\quad + k_2\langle P_{n+1}^{'\phi_1}, S_i^{'}\rangle_{\psi_1} \\
&= \langle P_{n+1}^{\psi_0}, S_i\rangle_{\psi_0} + d_{n-1}(q)\langle P_{n-1}^{\psi_0}, S_i\rangle_{\psi_0} \\
&\quad + k_1\langle P_{n+1}^{\phi_1}, S_i\rangle_{\phi_1} + k_2\langle (n+1)P_n^{\psi_1}, S_i\rangle_{\psi_1} \\
&= d_{n-1}(q)\langle P_{n-1}^{\psi_0}, S_i\rangle_{\psi_0}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$a_i = -\frac{d_{n-1}(q)\langle P_{n-1}^{\psi_0}, S_i\rangle_{\psi_0}}{\langle S_i, S_i\rangle_{\mathbb{S}}}, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.49}$$

Podemos observar que $a_i = 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n-2$. Portanto, de (2.48), temos que

$$P_{n+1}^{\phi_1}(x) = S_{n+1}(x) - a_{n-1}S_{n-1}(x), \qquad n \geq 1, \tag{2.50}$$

pois $a_n = 0$, devido à propriedade de simetria.

Tomando $i = n-1$ em (2.49), obtemos, ainda, que

$$a_{n-1} = -\frac{d_{n-1}(q)\langle P_{n-1}^{\psi_0}, S_{n-1}\rangle_{\psi_0}}{\langle S_{n-1}, S_{n-1}\rangle_{\mathbb{S}}}, \quad n \geq 1, \tag{2.51}$$

ou seja,

$$a_n = a_n(q, k_1, k_2) = -\frac{d_n(q)\rho_n^{\psi_0}}{\rho_n^{\mathbb{S}}}, \quad n \geq 0. \tag{2.52}$$

Fazendo $q = 0$ em (2.42) e (2.44), obtemos, respectivamente,

$$d\psi_0(x) = d\phi_1(x) \quad \text{e} \quad P_{n+1}^{\phi_1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1}(0)P_{n-1}^{\psi_0}(x).$$

Assim,

$$d_{n-1}(0)P_{n-1}^{\psi_0}(x) = P_{n+1}^{\phi_1}(x) - P_{n+1}^{\psi_0}(x) = 0,$$

o que implica que $d_{n-1}(0) = 0$.

Além disso, fazendo $q = 0$ em (2.51), obtemos

$$a_{n-1}(0, k_1, k_2) = -\frac{d_{n-1}(0)\langle P_{n-1}^{\psi_0}, S_{n-1}\rangle_{\psi_0}}{\langle S_{n-1}, S_{n-1}\rangle_{\mathbb{S}}} = 0.$$

Logo,

$$d_{n-1}(0) = a_{n-1}(0, k_1, k_2) = 0, \quad n \geq 1.$$

Como $\rho_n^{\mathbb{S}} = \langle S_n, S_n\rangle_{\mathbb{S}}$, utilizando (2.44), (2.50) e as hipóteses deste teorema, para $n \geq 1$ e $q \neq 0$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\rho_n^{\mathbb{S}} &= \langle P_n^{\psi_0} + d_{n-2}(q)P_{n-2}^{\psi_0} + a_{n-2}S_{n-2}, S_n\rangle_{\mathbb{S}} \\
&= \langle P_n^{\psi_0} + d_{n-2}(q)P_{n-2}^{\psi_0}, S_n\rangle_{\mathbb{S}} \\
&= \langle P_n^{\psi_0} + d_{n-2}(q)P_{n-2}^{\psi_0}, P_n^{\psi_0} + d_{n-2}(q)P_{n-2}^{\psi_0} + a_{n-2}S_{n-2}\rangle_{\psi_0} \\
&\quad + k_1\langle P_n^{\phi_1}, S_n\rangle_{\phi_1} + k_2\langle nP_{n-1}^{\psi_1}, nP_{n-1}^{\psi_1} + a_{n-2}S_{n-2}'\rangle_{\psi_1} \\
&= \langle P_n^{\psi_0}, P_n^{\psi_0}\rangle_{\psi_0} + d_{n-2}^2(q)\langle P_{n-2}^{\psi_0}, P_{n-2}^{\psi_0}\rangle_{\psi_0} \\
&\quad + d_{n-2}(q)a_{n-2}\langle P_{n-2}^{\psi_0}, S_{n-2}\rangle_{\psi_0} + k_1\langle P_n^{\phi_1}, S_n\rangle_{\phi_1} \\
&\quad + k_2 n^2\langle P_{n-1}^{\psi_1}, P_{n-1}^{\psi_1}\rangle_{\psi_1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\rho_n^{\mathbb{S}} = \rho_n^{\psi_0} + d_{n-2}^2(q)\rho_{n-2}^{\psi_0} + d_{n-2}(q)a_{n-2}\rho_{n-2}^{\psi_0} + k_1\rho_n^{\phi_1} + k_2 n^2\rho_{n-1}^{\psi_1}, \ n \geq 2,$$

e, para $n = 0$, $\rho_0^{\mathbb{S}} = \langle S_0, S_0\rangle_{\mathbb{S}} = \rho_0^{\psi_0} + k_1\rho_0^{\phi_1}$.

Assim, por (2.52), para $n \geq 1$, obtemos

$$a_{n+1} = -\frac{d_{n+1}(q)\rho_{n+1}^{\psi_0}}{\rho_{n+1}^{\psi_0} + d_{n-1}^2(q)\rho_{n-1}^{\psi_0} + k_1\rho_{n+1}^{\phi_1} + k_2(n+1)^2\rho_n^{\psi_1} + d_{n-1}(q)\rho_{n-1}^{\psi_0}a_{n-1}}.$$

De (2.9), segue que $d_n(q) = \dfrac{q\rho_{n+2}^{\phi_1}}{\rho_n^{\psi_0}}$, o que implica que $\rho_n^{\psi_0} = \dfrac{q\rho_{n+2}^{\phi_1}}{d_n(q)}$. Disso, obtemos

$$a_{n+1} = \frac{-q\rho_{n+3}^{\phi_1}}{\dfrac{q\rho_{n+3}^{\phi_1}}{d_{n+1}(q)} + d_{n-1}(q)\,q\,\rho_{n+1}^{\phi_1} + k_1\rho_{n+1}^{\phi_1} + k_2(n+1)^2\rho_n^{\psi_1} + q\rho_{n+1}^{\phi_1}a_{n-1}}.$$

Como, por (1.12), $\rho_{n+3}^{\phi_1} = \alpha_{n+4}^{\phi_1}\alpha_{n+3}^{\phi_1}\rho_{n+1}^{\phi_1}$, concluímos que, para $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{-q\alpha_{n+3}^{\phi_1}\alpha_{n+4}^{\phi_1}d_{n+1}(q)}{q\alpha_{n+3}^{\phi_1}\alpha_{n+4}^{\phi_1} + d_{n+1}(q)[k_1 + (n+1)^2(\rho_n^{\psi_1}/\rho_{n+1}^{\phi_1})k_2 + qd_{n-1}(q) + qa_{n-1}]}.$$

Agora, fazendo $n = 0$ em (2.52), temos que $a_0(q, k_1, k_2) = -\dfrac{d_0(q)\rho_0^{\psi_0}}{\rho_0^{\mathbb{S}}}$.

Como $\rho_0^{\mathbb{S}} = \rho_0^{\psi_0} + k_1\rho_0^{\phi_1}$ e $\rho_0^{\psi_0} = \dfrac{q\rho_2^{\phi_1}}{d_0(q)}$, segue que

$$a_0(q, k_1, k_2) = \frac{-d_0(q)(q\rho_2^{\phi_1})/d_0(q)}{(q\rho_2^{\phi_1})/d_0(q) + k_1\rho_0^{\phi_1}} = \frac{-d_0(q)q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}\rho_0^{\phi_1}}{q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}\rho_0^{\phi_1} + k_1d_0(q)\rho_0^{\phi_1}}.$$

Portanto,

$$a_0(q, k_1, k_2) = \frac{-d_0(q)q\alpha_2^{\phi_1}\alpha_3^{\phi_1}}{q\alpha_2^{\phi_1}\alpha_3^{\phi_1} + d_0(q)k_1}.$$

Do mesmo modo, fazendo $n = 1$ em (2.52), temos que $a_1(q, k_1, k_2) = -\dfrac{d_1(q)\rho_1^{\psi_0}}{\rho_1^{\mathbb{S}}}$.
Agora, pelo produto interno de Sobolev definido nas hipóteses do teorema, segue que

$$\rho_1^{\mathbb{S}} = \langle S_1, S_1\rangle_{\mathbb{S}} = \langle S_1, S_1\rangle_{\psi_0} + k_1\langle S_1, S_1\rangle_{\phi_1} + k_2\langle S_1^{'}, S_1^{'}\rangle_{\psi_1}.$$

Como, $S_0(x) = 1$ e $S_1(x) = x$, temos que

$$\rho_1^{\mathbb{S}} = \rho_1^{\psi_0} + k_1\rho_1^{\phi_1} + k_2\langle 1, 1\rangle_{\psi_1} = \rho_1^{\psi_0} + k_1\rho_1^{\phi_1} + k_2\langle S_0, S_0\rangle_{\psi_1} = \rho_1^{\psi_0} + k_1\rho_1^{\phi_1} + k_2\rho_0^{\psi_1}.$$

Portanto, $\rho_1^{\mathbb{S}} = \rho_1^{\psi_0} + k_1\rho_1^{\phi_1} + k_2\rho_0^{\psi_1}$ e $\rho_1^{\psi_0} = (q\rho_3^{\phi_1})/d_1(q)$.

Assim,

$$a_1(q,k_1,k_2) = -\frac{d_1(q)\rho_1^{\psi_0}}{\rho_1^{\mathbb{S}}} = -\frac{d_1(q)(q\rho_3^{\phi_1})/d_1(q)}{(q\rho_3^{\phi_1})/d_1(q) + k_1\rho_1^{\phi_1} + k_2\rho_0^{\psi_1}}.$$

Por (1.12), obtemos

$$a_1(q,k_1,k_2) = \frac{-d_1(q)q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_4^{\phi_1}}{q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_4^{\phi_1} + d_1(q)[k_1 + (\rho_0^{\psi_1}/\rho_1^{\phi_1})k_2]}.$$

Concluímos, assim, a demonstração do teorema. ■

2.3.2 Casos particulares

2.3.2.1 Polinômios de Hermite

Um caso particular do teorema anterior é quando seus resultados estão relacionados com os polinômios de Hermite. Se considerarmos $d\phi_1(x) = d\psi_1(x) = e^{-x^2}dx$ e $d\psi_0(x) = (1 + qx^2)d\phi_1(x) = (1+qx^2)e^{-x^2}dx$, para $q \geq 0$, então $P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\psi_1}(x) = H_n(x)$. Logo, de (1.34) e (1.33),

$$\alpha_{n+1}^{\phi_1} = \alpha_{n+1}^{\psi_1} = \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\rho_n^{\psi_1}}{\rho_{n+1}^{\phi_1}} = \frac{2}{n+1}.$$

Pelo Teorema 2.6 e usando as expressões acima, obtemos

$$a_{n+1} = -\frac{q(n+2)(n+3)d_{n+1}(q)}{q(n+2)(n+3) + 4d_{n+1}(q)[k_1 + 2(n+1)k_2 + qd_{n-1}^{H_1}(q) + qa_{n-1}]}.$$

Além disso,

$$a_0 = -\frac{d_0(q)q\alpha_2^{\phi_1}\alpha_3^{\phi_1}}{q\alpha_2^{\phi_1}\alpha_3^{\phi_1} + d_0(q)k_1} = -\frac{d_0(q)q(1/2)(1)}{q(1/2)(1) + d_0(q)k_1} = -\frac{qd_0(q)}{q + 2d_0(q)k_1}$$

e

$$a_1 = -\frac{d_1(q)q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_4^{\phi_1}}{q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_4^{\phi_1} + d_1(q)[k_1 + (\rho_0^{\psi_1}/\rho_1^{\phi_1})k_2]} = -\frac{3qd_1(q)}{3q + 2d_1(q)[k_1 + 2k_2]}.$$

Podemos, então, enunciar o seguinte corolário do Teorema 2.6

Corolário 2.1. *Dado o produto interno*

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{SH}_1} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)(1 + k_1 + qx^2)e^{-x^2}dx + k_2\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)e^{-x^2}dx,$$

na qual $q \geq 0$, então os polinômios ortogonais de Sobolev que correspondem a este produto interno, $S_n^{H_1}(x)$, $n \geq 0$, satisfazem $S_0^{H_1} = 1$, $S_1^{H_1}(x) = x$ e

$$S_{n+1}^{H_1}(x) - a_{n-1}^{H_1}(q,k_1,k_2)S_{n-1}^{H_1}(x) = H_{n+1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x), \quad n \geq 1.$$

Aqui, $d_{n-1}(0) = a_{n-1}^{H_1}(0, k_1, k_2) = 0$ *para* $n \geq 1$ *e, quando* $q \neq 0$, $a_{n+1}^{H_1} = a_{n+1}^{H_1}(q, k_1, k_2)$ *satisfaz*

$$a_{n+1}^{H_1} \quad = \quad -\frac{q(n+2)(n+3)d_{n+1}(q)}{q(n+2)(n+3) + 4d_{n+1}(q)[k_1 + 2(n+1)k_2 + qd_{n-1}(q) + qa_{n-1}^{H_1}]}, \quad n \geq 1,$$

em que

$$a_0^{H_1}(q, k_1, k_2) = -\frac{qd_0(q)}{q + 2d_0(q)k_1} \quad e \quad a_1^{H_1}(q, k_1, k_2) = -\frac{3qd_1(q)}{3q + 2d_1(q)[k_1 + 2k_2]}.$$

Os coeficientes $d_n(q)$ *satisfazem*

$$d_{n-1}(q) = q^{-1}\tilde{\ell}_n(q)\tilde{\ell}_{n+1}(q), \quad n \geq 1,$$

na qual

$$\tilde{\ell}_1(q) = \frac{q}{2} \quad e \quad \tilde{\ell}_n(q) = \frac{q(n/2)}{\tilde{\ell}_{n-1}(q) + 1}, \quad n \geq 2.$$

Além disso, $k_2 \geq 0$, $1 + k_1 \geq 0$ *se* $q > 0$ *e* $1 + k_1 > 0$ *se* $q = 0$.

Quando $q > 0$, o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{SH}_1}$ pode ser dado na seguinte forma

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{SH}_1} = q\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\left(\frac{1+\kappa_1}{q} + x^2\right)e^{-x^2}dx + \frac{k_2}{q}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)e^{-x^2}dx\right\}.$$

Podemos observar que, quando $1 + \kappa_1 > 0$, as medidas

$$d\theta_1(x) = \left(\frac{1+\kappa_1}{q} + x^2\right)e^{-x^2}dx \quad \text{e} \quad d\theta_2(x) = e^{-x^2}dx$$

formam par coerente de Hermite do tipo I (veja (1.47)).

Quando $1 + \kappa_1 = 0$ ou $q = 0$ as medidas envolvidas não formam par coerente.

Note que a relação $S_{n+1}^{H_1}(x) - a_{n-1}^{H_1}(q, k_1, k_2)S_{n-1}^{H_1}(x) = H_{n+1}(x)$ é mais simples do que a usualmente obtida com pares coerentes de medidas simétricas.

2.3.2.2 Polinômios de Gegenbauer

Agora, outro caso particular do Teorema 2.6 está relacionado com os polinômios de Gegenbauer. Se tomarmos $d\psi_1(x) = (1-x^2)^{\lambda+1/2}dx$, $d\phi_1(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}dx$ e $d\psi_0(x) = (1 + qx^2)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx$ para qualquer $q \geq -1$, então o polinômio $P_n^{\phi_1}$ é igual ao polinômio mônico de Gegenbauer de parâmetro λ, denotado por $G_n^{(\lambda)}$, ou seja $P_n^{\phi_1} = G_n^{(\lambda)}$.

Além disso, de (1.24) e (1.22), os coeficientes estão relacionados por

$$\alpha_{n+1}^{\phi_1} = \alpha_{n+1}^{(\lambda)} = \frac{1}{4}\frac{n(n+2\lambda-1)}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)} \quad \text{e} \quad \frac{\rho_n^{\psi_1}}{\rho_{n+1}^{\phi_1}} = \frac{\rho_n^{(\lambda+1)}}{\rho_{n+1}^{(\lambda)}} = \frac{n+2\lambda+1}{n+1}.$$

Do Teorema 2.6 e usando as expressões anteriores, obtemos

$$a_{n+1}^{G_1} = -\frac{q\alpha_{n+3}^{(\lambda)}\alpha_{n+4}^{(\lambda)}d_{n+1}^{(\lambda)}(q)}{q\alpha_{n+3}^{(\lambda)}\alpha_{n+4}^{(\lambda)} + d_{n+1}^{(\lambda)}(q)[k_1 + (n+1)(n+2\lambda+1)k_2 + qd_{n-1}^{(\lambda)}(q) + qa_{n-1}^{G_1}]}.$$

Além disso,

$$a_0^{G_1} = -\frac{d_0^{(\lambda)}(q)q\alpha_2^{\phi_1}\alpha_3^{\phi_1}}{q\alpha_2^{\phi_1}\alpha_3^{\phi_1} + d_0^{(\lambda)}(q)k_1} = -\frac{q\alpha_2^{(\lambda)}\alpha_3^{(\lambda)}d_0^{(\lambda)}(q)}{q\alpha_2^{(\lambda)}\alpha_3^{(\lambda)} + d_0^{(\lambda)}(q)k_1}$$

e

$$a_1^{G_1} = -\frac{d_1^{(\lambda)}(q)q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_4^{\phi_1}}{q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_4^{\phi_1} + d_1^{(\lambda)}(q)[k_1 + (\rho_0^{\psi_1}/\rho_1^{\phi_1})k_2]} = -\frac{q\alpha_3^{(\lambda)}\alpha_4^{(\lambda)}d_1^{(\lambda)}(q)}{q\alpha_3^{(\lambda)}\alpha_4^{(\lambda)} + d_1^{(\lambda)}(q)[k_1 + (2\lambda+1)k_2]}.$$

Podemos, então, enunciar o corolário a seguir.

Corolário 2.2. *Dado o produto interno*

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_{\mathbb{S}\mathbb{G}_1} &= \langle f,g\rangle_{\mathbb{S}\mathbb{G}_1(q,k_1,k_2)} = \langle f,g\rangle_{\psi_0+k_1\phi_1} + k_2\langle f', g'\rangle_{\psi_1}\\ &= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1+k_1+qx^2)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx\\ &\quad +k_2\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)(1-x^2)^{\lambda+1/2}dx,\end{aligned}$$

na qual $q \geq -1$, os polinômios ortogonais de Sobolev correspondentes, $S_n^{G_1}(x)$, $n \geq 0$, satisfazem $S_0^{G_1} = 1$, $S_1^{G_1}(x) = x$ e

$$S_{n+1}^{G_1}(x) - a_{n-1}^{G_1}(q,k_1,k_2)S_{n-1}^{G_1}(x) = G_{n+1}^{(\lambda)}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1}^{(\lambda)}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x), \quad n \geq 1.$$

Aqui, $d_{n-1}^{(\lambda)}(0) = a_{n-1}^{G_1}(0,k_1,k_2) = 0$ para $n \geq 1$ e, quando $q \neq 0$, $a_{n+1}^{G_1} = a_{n+1}^{G_1}(q,k_1,k_2)$ satisfaz

$$a_{n+1}^{G_1} = -\frac{q\alpha_{n+3}^{(\lambda)}\alpha_{n+4}^{(\lambda)}d_{n+1}^{(\lambda)}(q)}{q\alpha_{n+3}^{(\lambda)}\alpha_{n+4}^{(\lambda)} + d_{n+1}^{(\lambda)}(q)[k_1 + (n+1)(n+2\lambda+1)k_2 + qd_{n-1}^{(\lambda)}(q) + qa_{n-1}^{G_1}]}$$

para $n \geq 1$, em que

$$a_0^{G_1}(q,k_1,k_2) = -\frac{q\alpha_2^{(\lambda)}\alpha_3^{(\lambda)}d_0^{(\lambda)}(q)}{q\alpha_2^{(\lambda)}\alpha_3^{(\lambda)} + d_0^{(\lambda)}(q)k_1}$$

e

$$a_1^{G_1}(q,k_1,k_2) = -\frac{q\alpha_3^{(\lambda)}\alpha_4^{(\lambda)}d_1^{(\lambda)}(q)}{q\alpha_3^{(\lambda)}\alpha_4^{(\lambda)} + d_1^{(\lambda)}(q)[k_1 + (2\lambda+1)k_2]}.$$

Os coeficientes $d_n^{(\lambda)}(q)$ satisfazem

$$d_{n-1}^{(\lambda)}(q) = q^{-1}\tilde{\ell}_n(q)\tilde{\ell}_{n+1}(q), \quad n \geq 1,$$

na qual

$$\tilde{\ell}_1(q) = q\alpha_2^{(\lambda)} \quad e \quad \tilde{\ell}_n(q) = \frac{q\alpha_{n+1}^{(\lambda)}}{\tilde{\ell}_{n-1}(q)+1}, \quad n \geq 2.$$

Se $k_1 = -1$, então $q > 0$ e $k_2 \geq 0$ e, se $k_1 \neq -1$, então $q/(1+k_1) \geq -1$ e $k_2/(1+k_1) \geq 0$.

Quando $q \neq 0$, o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{SG}_1}$ pode ser dado na seguinte forma

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{SG}_1} = q\left\{\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\left(\frac{1+\kappa_1}{q}+x^2\right)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx + \frac{k_2}{q}\int_{-1}^{1} f^{'}(x)g^{'}(x)(1-x^2)^{\lambda+1/2}dx\right\}.$$

Podemos observar que, quando $1+\kappa_1 > 0$, as medidas

$$d\theta_1(x) = \left(\frac{1+\kappa_1}{q}+x^2\right)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx \quad \text{e} \quad d\theta_2(x) = (1-x^2)^{\lambda+1/2}dx$$

formam par coerente de Gegenbauer do tipo I (veja (1.49)).

Quando $1+\kappa_1 = 0$ ou $q = 0$ as medidas envolvidas não formam par coerente.

2.3.3 Caso II: medidas relacionadas por $\mathbf{d}\psi(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+qx^2}}\,\mathbf{d}\phi(\mathbf{x})$.

A partir dos resultados do Teorema 2.4, o próximo teorema nos dá outra maneira de estudar os polinômios ortogonais de Sobolev associados com pares de medidas simétricas.

Teorema 2.7. *Sejam $d\phi_0(x)$ e $d\psi_0(x)$ duas medidas simétricas clássicas tais que os correspondentes polinômios ortogonais mônicos $P_n^{\phi_0}$ e $P_n^{\psi_0}$ satisfazem à relação diferencial $P_n^{'\psi_0}(x) = nP_{n-1}^{\phi_0}(x)$, $n \geq 1$. Se a distribuição $d\psi_1$ é dada por*

$$d\psi_1(x) = \frac{1}{1+qx^2}\, d\phi_0(x), \tag{2.53}$$

então os polinômios ortogonais de Sobolev mônicos, S_n, $n \geq 0$, associados com o produto interno

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{S}} = \langle f, g\rangle_{\psi_0} + \langle f^{'}, g^{'}\rangle_{k_1\phi_0+k_2\psi_1},$$

satisfazem $S_0(x) = 1, S_1(x) = x$, $S_2(x) = P_2^{\psi_0}(x)$ e

$$S_{n+1}(x) - a_{n-1}(q,k_1,k_2)S_{n-1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \tilde{d}_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x), \quad n \geq 2.$$

Aqui, $\tilde{d}_{n-1}(0) = a_{n-1}(0,k_1,k_2) = 0$ para $n \geq 2$ e, quando $q \neq 0$, $a_n = a_n(q,k_1,k_2)$ satisfaz

$$a_{n+1} = -\frac{v_{n+1}(k_1)\alpha_n^{\phi_0}\alpha_{n+1}^{\phi_0}\tilde{d}_{n+1}(q)}{v_{n+1}(k_1)\alpha_n^{\phi_0}\alpha_{n+1}^{\phi_0} + \tilde{d}_{n-1}(q)\left\{(n^2-1)q^{-1}k_2 + v_{n-1}(k_1)(\tilde{d}_{n-1}(q)+a_{n-1})\right\}}$$

para $n \geq 2$, em que

$$a_1(q,k_1,k_2) = -\frac{v_1(k_1)\tilde{d}_1(q)}{v_1(k_1)+k_2\rho_0^{\psi_1}/\rho_0^{\phi_0}}, \quad a_2(q,k_1,k_2) = -\frac{v_2(k_1)\tilde{d}_2(q)}{v_2(k_1)+4k_2\rho_1^{\psi_1}/\rho_1^{\phi_0}}$$

e $v_n(k_1) = n^2k_1 + \rho_n^{\psi_0}/\rho_{n-1}^{\phi_0}$, $n \geq 1$. Os coeficientes $\tilde{d}_n(q)$ são tais que

$$\tilde{d}_{n-1}(q) = \frac{n+1}{n-1}d_{n-2}(q) = \frac{n+1}{n-1}q^{-1}\tilde{\ell}_{n-1}(q)\tilde{\ell}_n(q), \quad n \geq 2,$$

na qual

$$\tilde{\ell}_1(q) = q\alpha_2^{\psi_1} \quad e \quad \tilde{\ell}_n(q) = -1 + \frac{q\alpha_n^{\phi_0}}{\tilde{\ell}_{n-1}(q)} = \frac{q\alpha_{n+1}^{\psi_1}}{\tilde{\ell}_{n-1}(q)+1}, \quad n \geq 2.$$

As constantes q, k_1 *e* k_2 *são tais que a medida* $d\psi_1$ *e o produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{S}}$ *permanecem positivos definidos.*

Demonstração: Por (2.53) e lembrando do resultado (2.5), podemos afirmar que

$$P_n^{\psi_1}(x) = P_n^{\phi_0}(x) + d_{n-2}(q)P_{n-2}^{\phi_0}(x) \quad n \geq 2.$$

Como, por hipótese, $P_n^{'\psi_0}(x) = nP_{n-1}^{\phi_0}(x)$, segue que

$$P_n^{\psi_1}(x) = \frac{1}{n+1}P_{n+1}^{'\psi_0}(x) + d_{n-2}(q)\frac{1}{n-1}P_{n-1}^{'\psi_0}(x).$$

Podemos escrever a relação acima como

$$P_n^{\psi_1}(x) = (n+1)^{-1}[P_{n+1}^{'\psi_0}(x) + \tilde{d}_{n-1}(q)P_{n-1}^{'\psi_0}(x)],$$

na qual $\tilde{d}_{n-1}(q) = \dfrac{n+1}{n-1}d_{n-2}(q)$, $n \geq 2$. Logo,

$$P_n^{\psi_1}(x) = P_n^{\phi_0}(x) + d_{n-2}(q)P_{n-2}^{\phi_0}(x) = (n+1)^{-1}[P_{n+1}^{'\psi_0}(x) + \tilde{d}_{n-1}(q)P_{n-1}^{'\psi_0}(x)], \tag{2.54}$$

$n \geq 2$. Pelos resultados obtidos em (2.45), temos que

$$\tilde{d}_{n-1}(q) = \frac{n+1}{n-1}d_{n-2}(q) = \frac{n+1}{n-1}q^{-1}\tilde{\ell}_{n-1}(q)\tilde{\ell}_n(q), \quad n \geq 2,$$

e, de (2.53), (2.46) e (2.47), procedendo da mesma forma, concluímos que

$$\tilde{\ell}_1(q) = q\alpha_2^{\psi_1} \quad e \quad \tilde{\ell}_n(q) = -1 + \frac{q\alpha_n^{\phi_0}}{\tilde{\ell}_{n-1}(q)} = \frac{q\alpha_{n+1}^{\psi_1}}{\tilde{\ell}_{n-1}(q)+1}, \quad n \geq 2.$$

Agora, considerando $R_{n+1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \tilde{d}_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x)$ e o expandindo como combinação linear dos polinômios S_n, obtemos

$$R_{n+1}(x) = S_{n+1}(x) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j S_j(x). \tag{2.55}$$

Então, para $i = 0, \ldots, n-1$,

$$\langle R_{n+1}, S_i \rangle_{\mathbb{S}} = \langle S_{n+1}, S_i \rangle_{\mathbb{S}} - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \langle S_j, S_i \rangle_{\mathbb{S}} = -a_i \langle S_i, S_i \rangle_{\mathbb{S}}.$$

Das hipóteses do teorema e da relação (2.54), temos

$$\begin{aligned}
\langle R_{n+1}, S_i\rangle_{\mathbb{S}} &= \langle R_{n+1}, S_i\rangle_{\psi_0} + k_1\langle R^{'}_{n+1}, S^{'}_i\rangle_{\phi_0} + k_2\langle R^{'}_{n+1}, S^{'}_i\rangle_{\psi_1}\\
&= \langle P^{\psi_0}_{n+1} + \tilde{d}_{n-1}(q)P^{\psi_0}_{n-1}, S_i\rangle_{\psi_0}\\
&\quad +k_1\langle P^{'\psi_0}_{n+1} + \tilde{d}_{n-1}(q)P^{'\psi_0}_{n-1}, S^{'}_i\rangle_{\phi_0}\\
&\quad +k_2\langle P^{'\psi_0}_{n+1} + \tilde{d}_{n-1}(q)P^{'\psi_0}_{n-1}, S^{'}_i\rangle_{\psi_1}\\
&= \langle \tilde{d}_{n-1}(q)P^{\psi_0}_{n-1}, S_i\rangle_{\psi_0}\\
&\quad +\langle k_1(n+1)[P^{\phi_0}_n + d_{n-2}(q)P^{\phi_0}_{n-2}], S^{'}_i\rangle_{\phi_0}\\
&\quad +k_2\langle (n+1)P^{\psi_1}_n, S^{'}_i\rangle_{\psi_1}\\
&= \langle \tilde{d}_{n-1}(q)P^{\psi_0}_{n-1}, S_i\rangle_{\psi_0} + k_1(n+1)d_{n-2}(q)\langle P^{\phi_0}_{n-2}, S^{'}_i\rangle_{\phi_0}\\
&= \tilde{d}_{n-1}(q)\langle P^{\psi_0}_{n-1}, S_i\rangle_{\psi_0} + k_1(n-1)\tilde{d}_{n-1}(q)\langle P^{\phi_0}_{n-2}, S^{'}_i\rangle_{\phi_0}.
\end{aligned}$$

Assim, para $i = 0, \ldots, n-1$,

$$a_i = -\tilde{d}_{n-1}(q)\frac{\langle P^{\psi_0}_{n-1}, S_i\rangle_{\psi_0} + k_1(n-1)\langle P^{\phi_0}_{n-2}, S^{'}_i\rangle_{\phi_0}}{\langle S_i, S_i\rangle_{\mathbb{S}}}. \tag{2.56}$$

Podemos observar que $a_i = 0$ para $i = 0, \ldots, n-2$. Logo, de (2.55),

$$R_{n+1}(x) = S_{n+1}(x) - a_{n-1}(q,k_1,k_2)S_{n-1}(x) = P^{\psi_0}_{n+1}(x) + \tilde{d}_{n-1}(q)P^{\psi_0}_{n-1}(x),\ n \geq 2. \tag{2.57}$$

Tomando $i = n-1$ em (2.56), obtemos

$$a_{n-1} = a_{n-1}(q,k_1,k_2) = -\tilde{d}_{n-1}(q)\frac{\rho^{\psi_0}_{n-1} + k_1(n-1)^2\rho^{\phi_0}_{n-2}}{\langle S_{n-1}, S_{n-1}\rangle_{\mathbb{S}}},\ n \geq 1. \tag{2.58}$$

Agora, substituindo $q = 0$ em (2.53), temos que $d\psi_1(x) = d\phi_0(x)$. Usando este fato em (2.54), obtemos

$$0 = P^{\psi_1}_n(x) - P^{\phi_0}_n(x) = P^{\phi_0}_n(x) + d_{n-2}(0)P^{\phi_0}_{n-2}(x),$$

o que implica que $d_{n-2}(0) = 0$ e, como $\tilde{d}_{n-1}(0) = \dfrac{n+1}{n-1}d_{n-2}(0)$, segue que $\tilde{d}_{n-1}(0) = 0$.

Por outro lado,

$$a_{n-1}(0,k_1,k_2) = -\tilde{d}_{n-1}(0)\frac{\rho^{\psi_0}_{n-1} + k_1(n-1)^2\rho^{\phi_0}_{n-2}}{\langle S_{n-1}, S_{n-1}\rangle_{\mathbb{S}}} = 0.$$

Logo,

$$\tilde{d}_{n-1}(0) = a_{n-1}(0,k_1,k_2) = 0, \quad n \geq 2.$$

Usando as relações (2.57),(2.54) e as hipóteses do teorema, obtemos

$$\begin{aligned}
\rho^{\mathbb{S}}_{n-1} &= \langle S_{n-1}, S_{n-1}\rangle_{\mathbb{S}} = \langle P^{\psi_0}_{n-1} + \tilde{d}_{n-3}(q)P^{\psi_0}_{n-3} + a_{n-3}S_{n-3}, S_{n-1}\rangle_{\mathbb{S}} \\
&= \langle P^{\psi_0}_{n-1} + \tilde{d}_{n-3}(q)P^{\psi_0}_{n-3}, S_{n-1}\rangle_{\mathbb{S}} \\
&= \langle P^{\psi_0}_{n-1} + \tilde{d}_{n-3}(q)P^{\psi_0}_{n-3}, P^{\psi_0}_{n-1} + \tilde{d}_{n-3}(q)P^{\psi_0}_{n-3} + a_{n-3}S_{n-3}\rangle_{\psi_0} \\
&\quad + k_1\langle (n-1)[P^{\phi_0}_{n-2} + d_{n-4}(q)P^{\phi_0}_{n-4}], S'_{n-1}\rangle_{\phi_0} + k_2\langle (n-1)P^{\psi_1}_{n-2}, S'_{n-1}\rangle_{\psi_1} \\
&= \langle P^{\psi_0}_{n-1}, P^{\psi_0}_{n-1}\rangle_{\psi_0} + \tilde{d}^2_{n-3}(q)\langle P^{\psi_0}_{n-3}, P^{\psi_0}_{n-3}\rangle_{\psi_0} + \tilde{d}_{n-3}(q)a_{n-3}\langle P^{\psi_0}_{n-3}, S_{n-3}\rangle_{\psi_0} \\
&\quad + k_1\langle (n-1)[P^{\phi_0}_{n-2} + d_{n-4}(q)P^{\phi_0}_{n-4}], (n-1)[P^{\phi_0}_{n-2} + d_{n-4}(q)P^{\phi_0}_{n-4}] + a_{n-3}S'_{n-3}\rangle_{\phi_0} \\
&\quad + k_2\langle (n-1)P^{\psi_1}_{n-2}, (n-1)P^{\psi_1}_{n-2} + a_{n-3}S'_{n-3}\rangle_{\psi_1},
\end{aligned}$$

na qual $a_n = a_n(q, k_1, k_2)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\rho^{\mathbb{S}}_{n-1} &= \rho^{\psi_0}_{n-1} + \tilde{d}^2_{n-3}(q)\rho^{\psi_0}_{n-3} + \tilde{d}_{n-3}(q)a_{n-3}\rho^{\psi_0}_{n-3} + k_1(n-1)^2\langle P^{\phi_0}_{n-2}, P^{\phi_0}_{n-2}\rangle_{\phi_0} \\
&\quad + k_1(n-1)^2 d^2_{n-4}(q)\langle P^{\phi_0}_{n-4}, P^{\phi_0}_{n-4}\rangle_{\phi_0} + k_1(n-1)d_{n-4}(q)a_{n-3}\langle P^{\phi_0}_{n-4}, S'_{n-3}\rangle_{\phi_0} \\
&\quad + k_2(n-1)^2\langle P^{\psi_1}_{n-2}, P^{\psi_1}_{n-2}\rangle_{\psi_1} \\
&= \rho^{\psi_0}_{n-1} + \tilde{d}^2_{n-3}(q)\rho^{\psi_0}_{n-3} + \tilde{d}_{n-3}(q)a_{n-3}\rho^{\psi_0}_{n-3} + k_1(n-1)^2\rho^{\phi_0}_{n-2} \\
&\quad + k_1(n-1)^2 d^2_{n-4}(q)\rho^{\phi_0}_{n-4} + k_1(n-1)d_{n-4}(q)a_{n-3}(n-3)\rho^{\phi_0}_{n-4} + k_2(n-1)^2\rho^{\psi_1}_{n-2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\rho^{\mathbb{S}}_{n+1} &= \rho^{\psi_0}_{n+1} + \tilde{d}^2_{n-1}(q)\rho^{\psi_0}_{n-1} + \tilde{d}_{n-1}(q)a_{n-1}\rho^{\psi_0}_{n-1} + k_1(n+1)^2\rho^{\phi_0}_{n} \\
&\quad + k_1(n+1)^2 d^2_{n-2}(q)\rho^{\phi_0}_{n-2} + k_1(n+1)d_{n-2}(q)a_{n-1}(n-1)\rho^{\phi_0}_{n-2} + k_2(n+1)^2\rho^{\psi_1}_{n} \\
&= \rho^{\psi_0}_{n+1} + \tilde{d}^2_{n-1}(q)\rho^{\psi_0}_{n-1} + \tilde{d}_{n-1}(q)a_{n-1}\rho^{\psi_0}_{n-1} + k_1(n+1)^2\rho^{\phi_0}_{n} \\
&\quad + k_1(n-1)^2 \tilde{d}^2_{n-1}(q)\rho^{\phi_0}_{n-2} + k_1(n+1)d_{n-2}(q)a_{n-1}(n-1)\rho^{\phi_0}_{n-2} + k_2(n+1)^2\rho^{\psi_1}_{n}.
\end{aligned}$$

Como, de (2.53) e (2.9), $d_{n-2}(q) = q\rho^{\psi_1}_n/\rho^{\phi_0}_{n-2}$, segue que

$$\begin{aligned}
\rho^{\mathbb{S}}_{n+1} &= \rho^{\psi_0}_{n+1} + \tilde{d}^2_{n-1}(q)\rho^{\psi_0}_{n-1} + \tilde{d}_{n-1}(q)a_{n-1}\rho^{\psi_0}_{n-1} + k_1(n+1)^2\rho^{\phi_0}_{n} \\
&\quad + k_1(n-1)^2 \tilde{d}^2_{n-1}(q)\rho^{\phi_0}_{n-2} + k_1(n+1)(n-1)qa_{n-1}\rho^{\psi_1}_{n} + k_2(n+1)^2\rho^{\psi_1}_{n}.
\end{aligned}$$

Então,

$$a_{n+1} = a_{n+1}(q, k_1, k_2) = -\tilde{d}_{n+1}(q)\frac{\rho^{\psi_0}_{n+1} + k_1(n+1)^2\rho^{\phi_0}_{n}}{\rho^{\mathbb{S}}_{n+1}}.$$

Agora, multiplicando e dividindo a_{n+1} por $\rho^{\phi_0}_n$ e definindo $v_n(k_1) = n^2k_1 + \rho^{\psi_0}_n/\rho^{\phi_0}_{n-1}$, $n \geq 1$, obtemos

$$a_{n+1}(q, k_1, k_2) = -\frac{v_{n+1}(k_1)\tilde{d}_{n+1}(q)}{\rho^{\mathbb{S}}_{n+1}/\rho^{\phi_0}_n}.$$

Assim, multiplicando e dividindo a relação anterior por $\rho_n^{\phi_0}/\rho_{n-2}^{\phi_0}$ e lembrando que, por (1.12), $\rho_n^{\phi_0}/\rho_{n-2}^{\phi_0} = \alpha_{n+1}^{\phi_0}\alpha_n^{\phi_0}$, obtemos

$$a_{n+1}(q,k_1,k_2) = -\frac{v_{n+1}(k_1)\alpha_n^{\phi_0}\alpha_{n+1}^{\phi_0}\tilde{d}_{n+1}(q)}{\rho_{n+1}^{\mathbb{S}}/\rho_{n-2}^{\phi_0}}.$$

Como, por (2.53) e (2.9), $d_{n-2}(q) = q\rho_n^{\psi_1}/\rho_{n-2}^{\phi_0}$, obtemos $\dfrac{\rho_n^{\psi_1}}{\rho_{n-2}^{\phi_0}} = q^{-1}\dfrac{(n-1)}{(n+1)}\tilde{d}_{n-1}(q)$.

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_{n+1}^{\mathbb{S}}}{\rho_{n-2}^{\phi_0}} &= \frac{\rho_{n+1}^{\psi_0}}{\rho_{n-2}^{\phi_0}} + k_1(n+1)^2\frac{\rho_n^{\phi_0}}{\rho_{n-2}^{\phi_0}} + k_1(n^2-1)qa_{n-1}\frac{\rho_n^{\psi_1}}{\rho_{n-2}^{\phi_0}} + k_2(n+1)^2\frac{\rho_n^{\psi_1}}{\rho_{n-2}^{\phi_0}} \\
&\quad + \tilde{d}_{n-1}(q)[a_{n-1}\frac{\rho_{n-1}^{\psi_0}}{\rho_{n-2}^{\phi_0}} + \tilde{d}_{n-1}(q)\frac{\rho_{n-1}^{\psi_0}}{\rho_{n-2}^{\phi_0}} + k_1(n-1)^2\tilde{d}_{n-1}(q)] \\
&= \left[(n+1)^2k_1 + \frac{\rho_{n+1}^{\psi_0}}{\rho_n^{\phi_0}}\right]\frac{\rho_n^{\phi_0}}{\rho_{n-2}^{\phi_0}} + k_1(n-1)^2a_{n-1}\tilde{d}_{n-1}(q) + k_2(n^2-1)q^{-1}\tilde{d}_{n-1}(q) \\
&\quad + \tilde{d}_{n-1}(q)\left[a_{n-1}\frac{\rho_{n-1}^{\psi_0}}{\rho_{n-2}^{\phi_0}} + \tilde{d}_{n-1}(q)\frac{\rho_{n-1}^{\psi_0}}{\rho_{n-2}^{\phi_0}} + k_1(n-1)^2\tilde{d}_{n-1}(q)\right] \\
&= \left[(n+1)^2k_1 + \frac{\rho_{n+1}^{\psi_0}}{\rho_n^{\phi_0}}\right]\frac{\rho_n^{\phi_0}}{\rho_{n-2}^{\phi_0}} + \tilde{d}_{n-1}(q) \\
&\quad \times\left\{(n^2-1)q^{-1}k_2 + k_1(n-1)^2a_{n-1} + a_{n-1}\frac{\rho_{n-1}^{\psi_0}}{\rho_{n-2}^{\phi_0}} + \tilde{d}_{n-1}(q)\left[\frac{\rho_{n-1}^{\psi_0}}{\rho_{n-2}^{\phi_0}} + k_1(n+1)^2\right]\right\} \\
&= v_{n+1}(k_1)\alpha_n^{\phi_0}\alpha_{n+1}^{\phi_0} + \tilde{d}_{n-1}(q)\left[(n^2-1)q^{-1}k_2 + v_{n-1}(k_1)\left(\tilde{d}_{n-1}(q) + a_{n-1}\right)\right], \quad n \geq 2.
\end{aligned}$$

Podemos, então, escrever

$$a_{n+1} = -\frac{v_{n+1}(k_1)\alpha_n^{\phi_0}\alpha_{n+1}^{\phi_0}\tilde{d}_{n+1}(q)}{v_{n+1}(k_1)\alpha_n^{\phi_0}\alpha_{n+1}^{\phi_0} + \tilde{d}_{n-1}(q)\left\{(n^2-1)q^{-1}k_2 + v_{n-1}(k_1)[\tilde{d}_{n-1}(q) + a_{n-1}]\right\}}, \; n \geq 2.$$

Fazendo $n = 2$ em (2.58), obtemos

$$a_1(q,k_1,k_2) = -\tilde{d}_1(q)\frac{\rho_1^{\psi_0} + k_1\rho_0^{\phi_0}}{\rho_1^{\mathbb{S}}}.$$

Multiplicando e dividindo a relação anterior por $\rho_0^{\phi_0}$, podemos escrever

$$a_1(q,k_1,k_2) = -\tilde{d}_1(q)\frac{\rho_1^{\psi_0}/\rho_0^{\phi_0} + k_1}{\rho_1^{\mathbb{S}}/\rho_0^{\phi_0}} = -\frac{v_1(k_1)\tilde{d}_1(q)}{\rho_1^{\mathbb{S}}/\rho_0^{\phi_0}}.$$

Como $\rho_1^{\mathbb{S}} = \langle x,x\rangle_{\mathbb{S}} = \langle x,x\rangle_{\psi_0} + k_1\langle 1,1\rangle_{\phi_0} + k_2\langle 1,1\rangle_{\psi_1} = \rho_1^{\psi_0} + k_1\rho_0^{\phi_0} + k_2\rho_0^{\psi_1}$, então

$$\frac{\rho_1^{\mathbb{S}}}{\rho_0^{\phi_0}} = \frac{\rho_1^{\psi_0}}{\rho_0^{\phi_0}} + k_1 + k_2\frac{\rho_0^{\psi_1}}{\rho_0^{\phi_0}} = v_1(k_1) + k_2\frac{\rho_0^{\psi_1}}{\rho_0^{\phi_0}}.$$

Assim, concluímos que

$$a_1(q,k_1,k_2) = -\frac{v_1(k_1)\tilde{d}_1(q)}{v_1(k_1) + k_2\dfrac{\rho_0^{\psi_1}}{\rho_0^{\phi_0}}}. \tag{2.59}$$

Do mesmo modo, fazendo $n = 3$ em (2.58), obtemos

$$a_2(q,k_1,k_2) = -\tilde{d}_2(q)\frac{\rho_2^{\psi_0}/\rho_1^{\phi_0} + 4k_1}{\rho_2^{\mathbb{S}}/\rho_1^{\phi_0}} = -\frac{v_2(k_1)\tilde{d}_2(q)}{\rho_2^{\mathbb{S}}/\rho_1^{\phi_0}}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\rho_2^{\mathbb{S}} = \langle S_2, S_2\rangle_{\mathbb{S}} &= \langle S_2', S_2'\rangle_{\phi_0} + k_2\langle S_2', S_2'\rangle_{\psi_1} \\
&= \langle P_2^{\psi_0}, P_2^{\psi_0}\rangle_{\psi_0} + k_1\langle P_2'^{\psi_0}, P_2'^{\psi_0}\rangle_{\phi_0} + k_2\langle P_2'^{\psi_0}, P_2'^{\psi_0}\rangle_{\psi_1} \\
&= \rho_2^{\psi_0} + 4k_1\langle P_1^{\phi_0}, P_1^{\phi_0}\rangle_{\phi_0} + k_2\langle P_1^{\phi_0}, P_1^{\phi_0}\rangle_{\psi_1} \\
&= \rho_2^{\psi_0} + 4k_1\rho_1^{\phi_0} + 4k_2\rho_1^{\psi_1},
\end{aligned}$$

então

$$\frac{\rho_2^{\mathbb{S}}}{\rho_1^{\phi_0}} = \frac{\rho_2^{\psi_0}}{\rho_1^{\phi_0}} + 4k_1 + 4k_2\frac{\rho_1^{\psi_1}}{\rho_1^{\phi_0}} = v_2(k_1) + 4k_2\frac{\rho_1^{\psi_1}}{\rho_1^{\phi_0}}.$$

Logo,

$$a_2(q,k_1,k_2) = -\frac{v_2(k_1)\tilde{d}_2(q)}{v_2(k_1) + 4k_2\dfrac{\rho_1^{\psi_1}}{\rho_1^{\phi_0}}}, \tag{2.60}$$

concluindo, assim, a demonstração do teorema. ■

2.3.4 Casos particulares

2.3.4.1 Polinômios de Hermite

Um caso particular do teorema anterior é quando seus resultados estão relacionados com os polinômios de Hermite. Se considerarmos $d\phi_0(x) = d\psi_0(x) = e^{-x^2}dx$ e $d\psi_1(x) = (1 + qx^2)^{-1}d\phi_0(x) = (1+qx^2)^{-1}e^{-x^2}dx$, para $q \geq 0$, então $P_n^{\phi_0}(x) = P_n^{\psi_0}(x) = H_n(x)$.

Logo, de (1.34) e (1.33), obtemos

$$\alpha_{n+1}^{\phi_0} = \alpha_{n+1}^{\psi_0} = \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\rho_n^{\psi_0}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}} = \frac{n}{2}.$$

Pelo Teorema 2.7, usando as expressões anteriores, multiplicando e dividindo a_{n+1} por $\dfrac{8}{n-1}$ e definindo $\tilde{v}_n(k_1) = 1 + 2nk_1$, obtemos

$$a_{n+1}^{H_2} = \frac{-n(n+1)\tilde{v}_{n+1}(k_1)\tilde{d}_{n+1}(q)}{n(n+1)\tilde{v}_{n+1}(k_1) + 4\tilde{d}_{n-1}(q)\left\{2(n+1)q^{-1}k_2 + \tilde{v}_{n-1}(k_1)[\tilde{d}_{n-1}(q) + a_{n-1}^{H_2}]\right\}},$$

para $n \geq 2$. Além disso, por (2.59),

$$a_1^{H_2}(q,k_1,k_2) = -\frac{\tilde{v}_1(k_1)\tilde{d}_1(q)}{\tilde{v}_1(k_1) + k_2\dfrac{\rho_0^{\psi_1}}{\rho_0^{\phi_0}}} = \frac{-(k_1+\rho_1^{\psi_0}/\rho_0^{\phi_0})\tilde{d}_1(q)}{k_1+\rho_1^{\psi_0}/\rho_0^{\phi_0}+k_2\rho_0^{\psi_1}/\rho_0^{\phi_0}} = \frac{-(k_1+1/2)\tilde{d}_1(q)}{k_1+1/2+k_2\rho_0^{\psi_1}/\rho_0^{\phi_0}}.$$

Multiplicando e dividindo a relação anterior por 2 e como, por (1.33), $\rho_0^{\phi_0} = \sqrt{\pi}$, obtemos

$$a_1^{H_2}(q,k_1,k_2) = -\frac{(2k_1+1)\tilde{d}_1(q)}{2k_1+1+2k_2\rho_0^{\psi_1}/\rho_0^{\phi_0}} = -\frac{\tilde{v}_1(k_1)\tilde{d}_1(q)}{\tilde{v}_1(k_1)+2k_2\dfrac{\rho_0^{\psi_1}}{\sqrt{\pi}}}.$$

Do mesmo modo, por (2.60), como $\rho_1^{\phi_0} = \rho_0^{\phi_0}/2 = \sqrt{\pi}/2$, temos que

$$\begin{aligned} a_2^{H_2}(q,k_1,k_2) &= -\frac{\tilde{v}_2(k_1)\tilde{d}_2(q)}{\tilde{v}_2(k_1)+4k_2\dfrac{\rho_1^{\psi_1}}{\rho_1^{\phi_0}}} = -\frac{(4k_1+\rho_2^{\psi_0}/\rho_1^{\phi_0})\tilde{d}_2(q)}{4k_1+\rho_2^{\psi_0}/\rho_1^{\phi_0}+4k_2\rho_1^{\psi_1}/\rho_1^{\phi_0}} \\ &= -\frac{(4k_1+1)\tilde{d}_2(q)}{4k_1+1+4k_2\rho_1^{\psi_1}/\rho_1^{\phi_0}} = -\frac{\tilde{v}_2(k_1)\tilde{d}_2(q)}{\tilde{v}_2(k_1)+8k_2\dfrac{\rho_1^{\psi_1}}{\sqrt{\pi}}}. \end{aligned}$$

Podemos, então, enunciar o corolário do Teorema 2.7 a seguir.

Corolário 2.3. *Dado o produto interno*

$$\begin{aligned} \langle f,g\rangle_{\mathbb{S}\mathbb{H}_2} &= \langle f,g\rangle_{\psi_0} + \langle f',g'\rangle_{k_1\phi_0+k_2\psi_1} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)\frac{(k_1+k_2)+k_1qx^2}{1+qx^2}e^{-x^2}dx, \end{aligned}$$

em que $q \geq 0$, então os polinômios ortogonais correspondentes $S_n^{H_2}(x)$ satisfazem

$$S_{n+1}^{H_2}(x) - a_{n-1}^{H_2}(q,k_1,k_2)S_{n-1}^{H_2}(x) = H_{n+1}(x) + \tilde{d}_{n-1}(q)H_{n-1}(x), \quad n \geq 2.$$

Aqui, $\tilde{d}_{n-1}(0) = a_{n-1}^{H_2}(0,k_1,k_2) = 0$ para $n \geq 2$ e, quando $q \neq 0$, $a_{n+1}^{H_2} = a_{n+1}^{H_2}(q,k_1,k_2)$ satisfaz

$$a_{n+1}^{H_2} = \frac{-n(n+1)\tilde{v}_{n+1}(k_1)\tilde{d}_{n+1}(q)}{n(n+1)\tilde{v}_{n+1}(k_1)+4\tilde{d}_{n-1}(q)\left\{2(n+1)q^{-1}k_2+\tilde{v}_{n-1}(k_1)[\tilde{d}_{n-1}(q)+a_{n-1}^{H_2}]\right\}}, \quad n \geq 2,$$

com

$$a_1^{H_2}(q,k_1,k_2) = -\frac{\tilde{v}_1(k_1)\tilde{d}_1(q)}{\tilde{v}_1(k_1)+2k_2\dfrac{\rho_0^{\psi_1}}{\sqrt{\pi}}} \quad e \quad a_2^{H_2}(q,k_1,k_2) = -\frac{\tilde{v}_2(k_1)\tilde{d}_2(q)}{\tilde{v}_2(k_1)+8k_2\dfrac{\rho_1^{\psi_1}}{\sqrt{\pi}}},$$

em que $\tilde{v}_n(\kappa_1) = 1+2n\kappa_1,\ n \geq 1$.

Os coeficientes $\tilde{d}_n(q)$ são tais que

$$\tilde{d}_{n-1}(q) = \frac{n+1}{n-1}q^{-1}\tilde{\ell}_{n-1}(q)\tilde{\ell}_n(q), \quad n \geq 2,$$

onde

$$\tilde{\ell}_1(q) = q\alpha_2^{\psi_1} \quad e \quad \tilde{\ell}_n(q) = -1 + \frac{(n-1)q}{2\tilde{\ell}_{n-1}(q)}, \quad n \geq 2.$$

As constantes k_1 e k_2 são tais que $k_1 \geq 0$ e $k_1 + k_2 \geq 0$ para que o produto interno $\mathbb{SH}_2$ seja definido positivo.

Quando $\kappa_1 = 0$, o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{SH}_2}$ pode ser dado na seguinte forma

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{SH}_2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx + k_2 \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)\frac{1}{1+qx^2}e^{-x^2}dx.$$

Podemos observar que as medidas, para $q > 0$,

$$d\theta_1(x) = e^{-x^2}dx \quad \text{e} \quad d\theta_2(x) = \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{q} + x^2}dx$$

formam par simétricamente coerente de Hermite do tipo II com $\lambda = \dfrac{\kappa_2}{q}$ (veja (1.48)).

Quando $\kappa_1 \neq 0$ ou $q = 0$ as medidas envolvidas não formam par simetricamente coerente.

2.3.4.2 Polinômios de Gegenbauer

Agora, outro caso particular do Teorema 2.7 está relacionado com os polinômios de Gegenbauer. Se tomarmos $d\phi_0(x) = (1-x^2)^{\lambda+1/2}dx$, $\quad d\psi_0(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}dx$, seja a medida $d\psi_1$ tal que

$$\int F(x)d\psi_1(x) = \int_{-1}^{1} F(x)\frac{(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{(1+qx^2)}dx, \quad q \geq 0$$

e, para $-1 \leq q \leq 0$,

$$\int F(x)d\psi_1(x) = \int_{-1}^{1} F(x)\frac{(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{(1+qx^2)}dx + k_3\left[F\left(\sqrt{-1/q}\right) + F\left(-\sqrt{-1/q}\right)\right], \text{ com } k_3 \geq 0.$$

Então, o polinômio $P_n^{\psi_0}$ é igual ao polinômio mônico de Gegenbauer de parâmetro λ, $G_n^{(\lambda)}$. Além disso, de (1.24) e (1.22), os coeficientes estão relacionados por

$$\alpha_{n+1}^{\psi_0} = \alpha_{n+1}^{(\lambda)} = \frac{1}{4}\frac{n(n+2\lambda-1)}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)}, \quad \alpha_{n+1}^{\phi_0} = \alpha_{n+1}^{(\lambda+1)} \quad \text{e} \quad \frac{\rho_n^{\psi_0}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}} = \frac{\rho_n^{(\lambda)}}{\rho_{n-1}^{(\lambda+1)}} = \frac{n}{n+2\lambda}.$$

Do Teorema 2.7, usando as expressões acima e definindo $v_n^{(\lambda)}(k_1) = n^2k_1 + n/(n+2\lambda)$, $n \geq 1$, obtemos

$$a_{n+1} = -\frac{v_{n+1}^{(\lambda)}(k_1)\alpha_n^{(\lambda+1)}\alpha_{n+1}^{\lambda+1}\tilde{d}_{n+1}^{(\lambda)}(q)}{v_{n+1}^{(\lambda)}(k_1)\alpha_n^{(\lambda+1)}\alpha_{n+1}^{(\lambda+1)} + \tilde{d}_{n-1}^{(\lambda)}(q)[(n^2-1)q^{-1}k_2 + v_{n-1}^{(\lambda)}(k_1)[\tilde{d}_{n-1}^{(\lambda)}(q) + a_{n-1}]]}, \; n \geq 2.$$

Além disso,

$$a_1 = -\frac{v_1^{(\lambda)}(k_1)\tilde{d}_1^{(\lambda)}(q)}{v_1^{(\lambda)}(k_1) + k_2\dfrac{\rho_0^{(\psi_1)}}{\rho_0^{(\lambda+1)}}} \quad \text{e} \quad a_2 = -\frac{v_2^{(\lambda)}(k_1)\tilde{d}_2^{(\lambda)}(q)}{v_2^{(\lambda)}(k_1) + 4k_2\dfrac{\rho_1^{\psi_1}}{\rho_1^{(\lambda+1)}}}.$$

Obtemos, então, o seguinte resultado, consequência do Teorema 2.7.

Corolário 2.4. *Considere o produto interno* $\langle f, g\rangle_{\mathbb{S}\mathbb{G}_2} = \langle f, g\rangle_{\psi_0} + \langle f', g'\rangle_{k_1\phi_0+k_2\psi_1}$ *dado por*

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx + \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)\frac{(k_1+k_2)+k_1qx^2}{1+qx^2}(1-x^2)^{\lambda+1/2}dx,$$

se $q \geq 0$, *ou por*

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx + \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)\frac{(k_1+k_2)+k_1qx^2}{1+qx^2}(1-x^2)^{\lambda+1/2}dx$$
$$+k_2k_3\left[f'\left(\sqrt{-1/q}\right)g'\left(\sqrt{-1/q}\right) + f'\left(-\sqrt{-1/q}\right)g'\left(-\sqrt{-1/q}\right)\right],$$

para $-1 \leq q \leq 0$ *e* $k_3 \geq 0$. *Então, os polinômios ortogonais de Sobolev correspondentes,* $S_n^{G_2}(x)$, $n \geq 0$, *satisfazem*

$$S_{n+1}^{G_2}(x) - a_{n-1}^{G_2}(q,k_1,k_2,k_3)S_{n-1}^{G_2}(x) = G_{n+1}^{(\lambda)}(x) + \tilde{d}_{n-1}^{(\lambda)}(q)G_{n-1}^{(\lambda)}(x), \quad n \geq 2.$$

Aqui, $\tilde{d}_{n-1}^{(\lambda)}(0) = a_{n-1}^{G_2}(0,k_1,k_2,k_3) = 0$ *para* $n \geq 2$ *e, quando* $q \neq 0$, $a_{n+1}^{G_2} = a_{n+1}^{G_2}(q,k_1,k_2,k_3)$ *satisfaz*

$$a_{n+1}^{G_2} = \frac{-v_{n+1}^{(\lambda)}(k_1)\alpha_n^{(\lambda+1)}\alpha_{n+1}^{\lambda+1}\tilde{d}_{n+1}^{(\lambda)}(q)}{v_{n+1}^{(\lambda)}(k_1)\alpha_n^{(\lambda+1)}\alpha_{n+1}^{(\lambda+1)} + \tilde{d}_{n-1}^{(\lambda)}(q)\left\{(n^2-1)q^{-1}k_2 + v_{n-1}^{(\lambda)}(k_1)[\tilde{d}_{n-1}^{(\lambda)}(q) + a_{n-1}^{G_2}]\right\}}, \ n \geq 2,$$

com

$$a_1^{G_2}(q,k_1,k_2,k_3) = -\frac{v_1^{(\lambda)}(k_1)\tilde{d}_1^{(\lambda)}(q)}{v_1^{(\lambda)}(k_1) + k_2\dfrac{\rho_0^{(\psi_1)}}{\rho_0^{(\lambda+1)}}} \ \ e \ \ a_2^{G_2}(q,k_1,k_2,k_3) = -\frac{v_2^{(\lambda)}(k_1)\tilde{d}_2^{(\lambda)}(q)}{v_2^{(\lambda)}(k_1) + 4k_2\dfrac{\rho_1^{\psi_1}}{\rho_1^{(\lambda+1)}}},$$

em que $v_n^{(\lambda)}(\kappa_1) = n^2\kappa_1 + n/(n+2\lambda)$, $n \geq 1$. *Os coeficientes* $\tilde{d}_n^{(\lambda)}(q)$ *são tais que*

$$\tilde{d}_{n-1}^{(\lambda)}(q) = \frac{n+1}{n-1}q^{-1}\tilde{\ell}_{n-1}(q)\tilde{\ell}_n(q), \quad n \geq 2,$$

com

$$\tilde{\ell}_1(q) = q\alpha_2^{\psi_1} \quad e \quad \tilde{\ell}_n(q) = -1 + q\alpha_n^{(\lambda)}/\tilde{\ell}_{n-1}(q), \, n \geq 2.$$

Para que o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{S}\mathbb{G}_2}$ *seja positivo definido, os parâmetros* k_1 *e* k_2 *devem ser tais que* $k_1q \geq 0$ *se* $k_1+k_2 = 0$ *e* $k_1q/(k_1+k_2) \geq -1$ *se* $k_1+k_2 > 0$.

- **Caso** $q \geq 0$

  Quando $\kappa_1 = 0$ e $q > 0$, as medidas $d\theta_1(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}dx$ e $d\theta_2(x) = \dfrac{(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{\frac{1}{q}+x^2}dx$ formam par simétricamente coerente de Gegenbauer do Tipo II (veja (1.50)).

  Se $\kappa_1 \neq 0$ ou $q = 0$, não formam par simétricamente coerente.

- **Caso** $-1 \leq q \leq 0$

  Quando $\kappa_1 = 0$ e $q < 0$, as medidas $d\theta_1$ e $d\theta_2$ formam par simétricamente coerente do Tipo III (veja (1.51)), onde

  $$d\theta_1(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}dx \quad \text{e} \quad d\theta_2(x) = \frac{(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{-\frac{1}{q}-x^2}dx + \kappa_2\kappa_3\left[\delta\left(\sqrt{-1/q}\right) + \delta\left(-\sqrt{-1/q}\right)\right],$$

  com $\xi = \pm\sqrt{-1/q}$ e $M = \kappa_2\kappa_3 \geq 0$.

  Quando $\kappa_1 \neq 0$ ou $q = 0$ as medidas envolvidas não formam par simetricamente coerente.

Novamente, note que, neste corolário, qualquer cálculo direto envolvendo a distribuição $d\psi_1$ aparece apenas nas condições iniciais $a_1^{G_2}$, $a_2^{G_2}$ e $\tilde{\ell}_1(q)$. Nessas condições iniciais, $\rho_0^{\psi_1} = \mu_0^{\psi_1}$, $\rho_1^{\psi_1} = \mu_2^{\psi_1}$ e $\alpha_2^{\psi_1} = \mu_2^{\psi_1}/\mu_0^{\psi_1}$, onde

$$\mu_0^{\psi_1} = \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{1+qx^2}\,dx, \quad \mu_2^{\psi_1} = \int_{-1}^{1} \frac{x^2(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{1+qx^2}\,dx, \quad q \geq 0,$$

e

$$\mu_0^{\psi_1} = \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{1+qx^2}\,dx + 2\kappa_3, \quad \mu_2^{\psi_1} = \int_{-1}^{1} \frac{x^2(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{1+qx^2}\,dx - 2\kappa_3/q, \quad -1 \leq q < 0.$$

Capítulo 3

Polinômios ortogonais associados a medidas não-simétricas relacionadas

Neste capítulo, estudamos as propriedades de duas sequências de polinômios ortogonais associados a medidas não simétricas relacionadas. O estudo foi baseado no artigo [6].

3.1 Resultados preliminares

Sejam $d\phi_0$ e $d\phi_1$ duas medidas definidas no mesmo suporte $E \subseteq [a, b]$, $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, satisfazendo

$$(x - q)\, d\phi_1(x) = c\, d\phi_0(x), \tag{3.1}$$

com q qualquer valor real tal que $x - q$ não muda de sinal em E. A constante c deve ser escolhida de forma que $\dfrac{x-q}{c}$ seja finito e não-negativo em E. Isto é, se $q \geq b$ então $c < 0$, (pois $\dfrac{x-q}{c}$ não muda de sinal em E e é não-negativa em E) e se $q \leq a$ então $c > 0$.

Sejam $\{P_n^{\phi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n^{\phi_1}\}_{n=0}^{\infty}$ sequências de polinômios ortogonais mônicos com relação, respectivamente, às medidas $d\phi_0$ e $d\phi_1$.

Primeiramente, mostraremos algumas identidades que serão usados na demonstração dos resultados mais importantes dessa seção.

Lema 3.1. *Os polinômios $P_n^{\phi_0}(x)$ e $P_n^{\phi_1}(x)$ satisfazem à seguinte fórmula de Christoffel:*

$$P_n^{\phi_1}(q) P_n^{\phi_0}(x) = \frac{P_{n+1}^{\phi_1}(x) P_n^{\phi_1}(q) - P_{n+1}^{\phi_1}(q) P_n^{\phi_1}(x)}{x - q},\ n \geq 0. \tag{3.2}$$

Demonstração: Desde que $(x-q)P_n^{\phi_0}(x)$ é um polinômio de grau $n+1$, podemos escrevê-lo como

$$(x-q)P_n^{\phi_0}(x) = \sum_{j=0}^{n+1} b_j P_j^{\phi_1}(x). \tag{3.3}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade anterior por $P_k^{\phi_1}(x)$ e integrando com relação à medida $d\phi_1(x)$, obtemos

$$\int_a^b P_n^{\phi_0}(x)P_k^{\phi_1}(x)(x-q)d\phi_1(x) = \sum_{j=0}^{n+1} b_j \int_a^b P_j^{\phi_1}(x)P_k^{\phi_1}(x)d\phi_1(x) = b_k \int_a^b [P_k^{\phi_1}(x)]^2 d\phi_1(x),$$

para $k = 0, 1, \ldots, n+1$.

Logo, como $d\phi_1(x) = \dfrac{c}{x-q}\, d\phi_0(x)$,

$$b_k = \frac{c\int_a^b P_n^{\phi_0}(x)P_k^{\phi_1}(x)d\phi_0(x)}{\int_a^b [P_k^{\phi_1}(x)]^2 d\phi_1(x)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Assim, $b_k = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Segue, então, por (3.3), que

$$(x-q)P_n^{\phi_0}(x) = b_n P_n^{\phi_1}(x) + b_{n+1}P_{n+1}^{\phi_1}(x). \tag{3.4}$$

Comparando os termos de maior grau, concluímos que $b_{n+1} = 1$. Agora, tomando $x = q$ na relação (3.4), obtemos

$$0 = b_n P_n^{\phi_1}(q) + P_{n+1}^{\phi_1}(q),$$

o que implica que $b_n = -\dfrac{P_{n+1}^{\phi_1}(q)}{P_n^{\phi_1}(q)}$. Substituindo os valores obtidos para b_n e b_{n+1} em (3.4), obtemos a relação (3.2). ∎

Lema 3.2. *Os polinômios das sequências* $\{P_n^{\phi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ *e* $\{P_n^{\phi_1}\}_{n=0}^{\infty}$ *satisfazem à seguinte relação:*

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_0}(x) + b_{n-1}P_{n-1}^{\phi_0}(x), \; n \geq 1, \tag{3.5}$$

com

$$b_{n-1} = \frac{\rho_n^{\phi_1}}{c\rho_{n-1}^{\phi_0}}, n \geq 1. \tag{3.6}$$

Demonstração: Demonstração análoga à do Lema 2.2. ∎

3.1.1 Os coeficientes relacionados

Utilizando os dois lemas anteriores, obtemos, a seguir, como se relacionam os coeficientes associados aos polinômios $P_n^{\phi_0}$ e $P_n^{\phi_1}$.

O próximo teorema relaciona os coeficientes b_n aos coeficientes das relações de recorrência para $P_n^{\phi_0}$ e $P_n^{\phi_1}$.

Teorema 3.1. *Sejam $d\phi_0$ e $d\phi_1$ tais que* (3.1) *seja válido. Então, os coeficientes b_n da relação* (3.5) *satisfazem*

i) $\dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \dfrac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}$,

ii) $b_n - b_{n-1} = \beta_{n+1}^{\phi_0} - \beta_{n+1}^{\phi_1}$,

iii) $(\beta_{n+1}^{\phi_1} - \beta_n^{\phi_0})b_{n-1} = \alpha_{n+1}^{\phi_0} - \alpha_{n+1}^{\phi_1}$,

para $n \geq 1$, *onde* $b_0 = \beta_1^{\phi_0} - \beta_1^{\phi_1} = \alpha_2^{\phi_1}/(\beta_1^{\phi_1} - q)$.

Demonstração: De (3.6), obtemos

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\rho_{n+1}^{\phi_1}}{c\rho_n^{\phi_0}}\,\frac{c\rho_{n-1}^{\phi_0}}{\rho_n^{\phi_0}} = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}.$$

De (3.5) e da fórmula de recorrência (1.10) para $P_n^{\phi_0}$, obtemos

$$\begin{aligned} P_n^{\phi_1}(x) &= P_n^{\phi_0}(x) + b_{n-1}\left[\frac{(x-\beta_{n+1}^{\phi_0})}{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}P_n^{\phi_0}(x) - \frac{P_{n+1}^{\phi_0}(x)}{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}\right] \\ &= \left[1 + \frac{b_{n-1}}{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}(x-\beta_{n+1}^{\phi_0})\right]P_n^{\phi_0}(x) - \frac{b_{n-1}}{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}P_{n+1}^{\phi_0}(x),\ n \geq 1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Substituindo o resultado (3.7) e (3.5) na relação de recorrência (1.10) para $P_n^{\phi_1}$, temos que

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{\phi_0}(x) + b_n P_n^{\phi_0}(x) &= P_{n+1}^{\phi_1}(x) = (x-\beta_{n+1}^{\phi_1})P_n^{\phi_1}(x) - \alpha_{n+1}^{\phi_1}P_{n-1}^{\phi_1}(x) \\ &= (x-\beta_{n+1}^{\phi_1})[P_n^{\phi_0}(x) + b_{n-1}P_{n-1}^{\phi_0}(x)] \\ &\quad -\alpha_{n+1}^{\phi_1}\left[P_{n-1}^{\phi_0}(x)\left[1 + \frac{b_{n-2}}{\alpha_n^{\phi_0}}(x-\beta_n^{\phi_0})\right] - \frac{b_{n-2}}{\alpha_n^{\phi_0}}P_n^{\phi_0}(x)\right] \\ &= P_n^{\phi_0}(x)\left[x - \beta_{n+1}^{\phi_1} + \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_0}}b_{n-2}\right] \\ &\quad +P_{n-1}^{\phi_0}(x)\left[(x-\beta_{n+1}^{\phi_1})b_{n-1} - \alpha_{n+1}^{\phi_1} - \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_0}}b_{n-2}(x-\beta_n^{\phi_0})\right]. \end{aligned}$$

Usando a identidade do item *i)* no último membro da relação anterior, obtemos

$$P_{n+1}^{\phi_0}(x) = \left[x - \left(\beta_{n+1}^{\phi_1} + b_n - b_{n-1}\right)\right] P_n^{\phi_0}(x) + \left[b_{n-1}\left(\beta_n^{\phi_0} - \beta_{n+1}^{\phi_1}\right) - \alpha_{n+1}^{\phi_1}\right] P_{n-1}^{\phi_0}(x).$$

Comparando essa relação com a relação de recorrência (1.10) para $P_n^{\phi_0}$, mostramos os resultados dos itens *ii)* e *iii)*.

Para mostrarmos a primeira condição inicial, consideremos a relação (3.5) para $n = 1$ e as condições iniciais das relações de recorrência para $P_n^{\phi_0}$ e $P_n^{\phi_1}$. Obtemos, então,

$$b_0 = P_1^{\phi_1}(x) - P_1^{\phi_0}(x) = \beta_1^{\phi_0} - \beta_1^{\phi_1}.$$

Já para a segunda condição inicial, como, por hipótese,

$$\beta_1^{\phi_1} = \frac{\int_a^b xP_0^{\phi_1}(x)P_0^{\phi_1}(x)d\phi_1(x)}{\rho_0^{\phi_1}} = \frac{\int_a^b xd\phi_1(x)}{\int_a^b d\phi_1(x)},$$

usando (3.1) e (3.6), temos que

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{\rho_1^{\phi_1}}{c\rho_0^{\phi_0}} = \frac{\alpha_2^{\phi_1}\mu_0^{\phi_1}}{c\mu_0^{\phi_0}} = \frac{\alpha_2^{\phi_1}\int_a^b d\phi_1(x)}{c\int_a^b d\phi_0(x)} = \frac{\alpha_2^{\phi_1}\int_a^b d\phi_1(x)}{\int_a^b (x-q)d\phi_1(x)} \\ &= \frac{\alpha_2^{\phi_1}\int_a^b d\phi_1(x)}{\int_a^b xd\phi_1(x) - q\int_a^b d\phi_1(x)} = \frac{\alpha_2^{\phi_1}}{\frac{\int_a^b xd\phi_1(x)}{\int_a^b d\phi_1(x)} - q} = \frac{\alpha_2^{\phi_1}}{(\beta_1^{\phi_1} - q)}. \end{aligned}$$

Portanto, $b_0 = \beta_1^{\phi_0} - \beta_1^{\phi_1} = \alpha_2^{\phi_1}/(\beta_1^{\phi_1} - q)$. ■

O resultado a seguir mostra como os coeficientes b_n podem ser gerados a partir dos coeficientes da relação de recorrência de $P_n^{\phi_0}$ ou $P_n^{\phi_1}$.

Teorema 3.2. *Sejam $d\phi_0$ e $d\phi_1$ tais que* (3.1) *seja válido. Então,*

$$\frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{b_n} - \beta_{n+1}^{\phi_1} + b_{n-1} = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}{b_{n-1}} - \beta_{n+1}^{\phi_0} + b_n = -q.$$

Consequentemente, os coeficientes b_n, $n \geq 1$, podem ser gerados por

$$b_n = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{-q + \beta_{n+1}^{\phi_1} - b_{n-1}} \quad ou \quad b_n = \beta_{n+1}^{\phi_0} - q - \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}{b_{n-1}}.$$

Demonstração: Do item *i)* do Teorema 3.1,

$$b_n\alpha_{n+1}^{\phi_0} - b_{n-1}\alpha_{n+2}^{\phi_0} = b_{n-1}(\alpha_{n+2}^{\phi_1} - \alpha_{n+2}^{\phi_0}),\ n \geq 1.$$

Usando, agora, o resultado *iii*) do lema anterior, temos

$$b_n\alpha_{n+1}^{\phi_0} - b_{n-1}\alpha_{n+2}^{\phi_0} = b_{n-1}b_n\left(\beta_{n+1}^{\phi_0} - \beta_{n+2}^{\phi_1}\right),\ n \geq 1,$$

que é equivalente a

$$b_n\left(\alpha_{n+1}^{\phi_0} - b_{n-1}\beta_{n+1}^{\phi_0}\right) = b_{n-1}\left(\alpha_{n+2}^{\phi_0} - b_n\beta_{n+2}^{\phi_1}\right),\ n \geq 1.$$

De *ii*) do Teorema 3.1, como $\beta_{n+2}^{\phi_1} = \beta_{n+2}^{\phi_0} - b_{n+1} + b_n$, $n \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned} b_n\left(\alpha_{n+1}^{\phi_0} - b_{n-1}\beta_{n+1}^{\phi_0}\right) &= b_{n-1}\left[\alpha_{n+2}^{\phi_0} - b_n(\beta_{n+2}^{\phi_0} - b_{n+1} + b_n)\right] \\ &= b_{n-1}\left(\alpha_{n+2}^{\phi_0} - b_n\beta_{n+2}^{\phi_0} + b_nb_{n+1}\right) - b_{n-1}b_n^2,\ n \geq 1. \end{aligned}$$

Isto mostra que

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_n}\left(\alpha_{n+2}^{\phi_0} - b_n\beta_{n+2}^{\phi_0} + b_{n+1}b_n\right) &= \frac{1}{b_{n-1}}\left(\alpha_{n+1}^{\phi_0} - b_{n-1}\beta_{n+1}^{\phi_0} + b_nb_{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{b_{n-2}}\left(\alpha_n^{\phi_0} - b_{n-2}\beta_n^{\phi_0} + b_{n-1}b_{n-2}\right) \\ &= \ldots \\ &= \frac{1}{b_0}\left(\alpha_2^{\phi_0} - b_0\beta_2^{\phi_0} + b_1b_0\right), \end{aligned} \tag{3.8}$$

é uma constante para $n \geq 1$. Para encontrar o valor desta constante, de *ii*) e *iii*) do Teorema 3.1, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_0}\left(\alpha_2^{\phi_0} - b_0\beta_2^{\phi_0} + b_1b_0\right) &= \frac{1}{b_0}\left(\alpha_2^{\phi_0} - b_0(\beta_2^{\phi_0} - b_1)\right) = \frac{1}{b_0}\left(\alpha_2^{\phi_0} - b_0(\beta_2^{\phi_1} - b_0)\right) \\ &= \frac{1}{b_0}\left(\alpha_2^{\phi_0} - b_0\beta_2^{\phi_1} + b_0^2\right) = \frac{1}{b_0}\left(\alpha_2^{\phi_1} - b_0\beta_1^{\phi_0} + b_0^2\right). \end{aligned}$$

Das condições iniciais do Teorema 3.1, é fácil verificar que

$$\frac{1}{b_0}\left(\alpha_2^{\phi_1} - b_0\beta_1^{\phi_0} + b_0^2\right) = -q.$$

Logo,

$$\frac{1}{b_n}\left(\alpha_{n+2}^{\phi_0} - b_n\beta_{n+2}^{\phi_0} + b_{n+1}b_n\right) = \frac{1}{b_{n-1}}\left(\alpha_{n+1}^{\phi_0} - b_{n-1}\beta_{n+1}^{\phi_0} + b_nb_{n-1}\right) = -q.$$

Finalmente, de *ii*) e *iii*) do Teorema 3.1,

$$\begin{aligned} \alpha_{n+2}^{\phi_1} - b_n\left(\beta_{n+1}^{\phi_1} - b_{n-1}\right) &= \left(\alpha_{n+2}^{\phi_0} - \beta_{n+2}^{\phi_1}b_n + \beta_{n+1}^{\phi_0}b_n\right) - b_n\beta_{n+1}^{\phi_1} + b_nb_{n-1} \\ &= \alpha_{n+2}^{\phi_0} - b_n\left(\beta_{n+2}^{\phi_1} + \beta_{n+1}^{\phi_1} - b_{n-1} - \beta_{n+1}^{\phi_0}\right) = \alpha_{n+2}^{\phi_0} - b_n \\ &\quad \times\left[(\beta_{n+2}^{\phi_0} - b_{n+1} + b_n) + (\beta_{n+1}^{\phi_0} - b_n + b_{n-1}) - b_{n-1} - \beta_{n+1}^{\phi_0}\right] \\ &= \alpha_{n+2}^{\phi_0} - b_n\left(\beta_{n+2}^{\phi_0} - b_{n+1}\right). \end{aligned}$$

Assim, de (3.8), concluímos que

$$\frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{b_n} - \beta_{n+1}^{\phi_1} + b_{n-1} = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}{b_{n-1}} - \beta_{n+1}^{\phi_0} + b_n = -q,$$

o que completa a demonstração. ∎

3.2 Aplicações a polinômios ortogonais de Sobolev

3.2.1 Caso I: Medidas relacionadas por $-\mathbf{q}\mathbf{d}\psi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{q})\mathbf{d}\phi(\mathbf{x})$

Usando os resultados obtidos na seção anterior, vamos fazer um estudo de polinômios ortogonais de Sobolev associados a certos pares de medidas relacionadas

Teorema 3.3. *Sejam $d\phi_1$ e $d\psi_1$ duas medidas clássicas tais que os polinômios ortogonais mônicos associados, $P_n^{\phi_1}$ e $P_n^{\psi_1}$, satisfazem $P_n^{'\phi_1}(x) = nP_{n-1}^{\psi_1}(x)$, $n \geq 1$, e considere a medida $d\psi_0$ dada por*

$$-qd\psi_0(x) = (x-q)d\phi_1(x),$$

onde q é tal que $1 - q^{-1}x$ é finito e não-negativo no conjunto suporte E de $d\phi_1$. Então, os polinômios ortogonais mônicos de Sobolev, S_n, associados ao produto interno

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle_{\mathbb{S}_1} &= \langle f, g\rangle_{\psi_0} + \kappa_1 \langle f, g\rangle_{\phi_1} + \kappa_2 \langle f', g'\rangle_{\psi_1} + \kappa_3 \langle f', xg'\rangle_{\psi_1} \\
&= \int_E f(x)g(x)(1+\kappa_1+\kappa x)d\phi_1(x) + \int_E f'(x)g'(x)(\kappa_2+\kappa_3 x)d\psi_1(x),
\end{aligned}$$

onde $\kappa = -1/q$, satisfazem à seguinte relação:

$$S_{n+1}(x) + a_n S_n(x) = P_{n+1}^{\phi_1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + b_n P_n^{\psi_0}(x), \quad n \geq 0, \tag{3.9}$$

com $S_0(x) = 1$. Os coeficientes

$$a_n = a_n(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \frac{b_n \rho_n^{\psi_0} + n(n+1)\kappa_3 \rho_n^{\psi_1}}{\rho_n^{\mathbb{S}_1}},$$

podem ser gerados por

$$a_n = \frac{[\kappa + n(n+1)\kappa_3 \tau_{n+1}]\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\kappa b_n^{-1}\alpha_{n+2}^{\phi_1} + \kappa b_{n-1} + \kappa_1 + n^2\tau_n[\kappa_2 + \kappa_3\beta_n^{\psi_1}] - [\kappa + n(n-1)\kappa_3\tau_n]a_{n-1}} \tag{3.10}$$

para $n \geq 1$, onde

$$a_0 = \frac{\kappa\alpha_2^{\phi_1}}{\kappa b_0^{-1}\alpha_2^{\phi_1} + \kappa_1} \quad e \quad \tau_n = \frac{\rho_{n-1}^{\psi_1}}{\rho_n^{\phi_1}}, \quad n \geq 1.$$

Os coeficientes b_n *podem ser obtidos por*

$$b_n = \frac{\kappa\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{1+\kappa\beta_{n+1}^{\phi_1} - \kappa b_{n-1}}, \quad n \geq 1, \quad e \quad b_0 = \frac{\kappa\alpha_2^{\phi_1}}{\kappa\beta_1^{\phi_1}+1},$$

sendo $\alpha_{n+1}^{\phi_1}, \beta_{n+1}^{\phi_1}$ *e* $\beta_{n+1}^{\psi_1}$ *os coeficientes da relação de recorrência* (1.10) *para os respectivos polinômios ortogonais mônicos.*

Quando $\kappa = 0$, *temos* $d\phi_1(x) = d\psi_0(x)$ *e, então, devemos tomar* $b_n = 0$ *e* $k^{-1}b_n = \alpha_{n+2}^{\phi_1}$, *para* $n \geq 0$. *Aqui,* κ_1, κ_2 *e* κ_3 *são tais que o produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{S}_1}$ *é definido positivo.*

Demonstração: Por (3.5), temos que

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\psi_0}(x) + b_{n-1}P_{n-1}^{\psi_0}(x) \tag{3.11}$$

e como, por hipótese, $P_n^{'\phi_1}(x) = nP_{n-1}^{\psi_1}(x)$, então, por (3.11),

$$nP_{n-1}^{\psi_1}(x) = P_n^{'\psi_0}(x) + b_{n-1}P_{n-1}^{'\psi_0}(x), \; n \geq 1. \tag{3.12}$$

Como os polinômios ortogonais de Sobolev S_n, $n \geq 0$, formam uma base para o espaço vetorial dos polinômios, podemos escrever

$$P_{n+1}^{\phi_1}(x) = S_{n+1}(x) + \sum_{i=0}^{n} a_i S_i(x), \quad n \geq 0. \tag{3.13}$$

Então, para $j = 0, 1, \ldots, n$,

$$\left\langle P_{n+1}^{\phi_1}, S_j \right\rangle_{\mathbb{S}_1} = \left\langle S_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} a_i S_i, S_j \right\rangle_{\mathbb{S}_1} = \sum_{i=0}^{n} a_i \langle S_i, S_j \rangle_{\mathbb{S}_1} = a_j \langle S_j, S_j \rangle_{\mathbb{S}_1}.$$

Das hipóteses do teorema e da relação (3.11), para $j = 0, 1, \ldots, n$, obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle P_{n+1}^{\phi_1}, S_j \right\rangle_{\mathbb{S}_1} &= \left\langle P_{n+1}^{\phi_1}, S_j \right\rangle_{\psi_0} + \kappa_1 \left\langle P_{n+1}^{\phi_1}, S_j \right\rangle_{\phi_1} + \kappa_2 \left\langle P_{n+1}^{'\phi_1}, S_j^{'} \right\rangle_{\psi_1} + \kappa_3 \left\langle P_{n+1}^{'\phi_1}, xS_j^{'} \right\rangle_{\psi_1} \\ &= b_n \left\langle P_n^{\psi_0}, S_j \right\rangle_{\psi_0} + \kappa_3(n+1) \left\langle P_n^{\psi_1}, xS_j^{'} \right\rangle_{\psi_1}.\end{aligned}$$

Assim,

$$a_j = \frac{b_n \left\langle P_n^{\psi_0}, S_j \right\rangle_{\psi_0} + \kappa_3(n+1) \left\langle P_n^{\psi_1}, xS_j^{'} \right\rangle_{\psi_1}}{\langle S_j, S_j \rangle_{\mathbb{S}_1}}, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Podemos observar que $a_j = 0$ para $j = 0, 1, \ldots, n-1$ e

$$a_n = \frac{b_n \left\langle P_n^{\psi_0}, S_n \right\rangle_{\psi_0} + \kappa_3(n+1) \left\langle P_n^{\psi_1}, xS_n^{'} \right\rangle_{\psi_1}}{\langle S_n, S_n \rangle_{\mathbb{S}_1}} = \frac{b_n\rho_n^{\psi_0} + n(n+1)\kappa_3\rho_n^{\psi_1}}{\rho_n^{\mathbb{S}_1}},$$

pois podemos escrever

$$S_n(x) = P_n^{\psi_0}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} c_j P_j^{\psi_0}(x) \ \text{ e } \ xS_n'(x) = nP_n^{\psi_1}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{c}_j P_j^{\psi_1}(x).$$

Logo, de (3.11) e (3.13), obtemos

$$S_{n+1}(x) + a_n S_n(x) = P_{n+1}^{\phi_1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + b_n P_n^{\psi_0}(x), \quad n \geq 0.$$

Utilizando a relação acima, a relação (3.12), as hipóteses do teorema e a relação de recorrência (1.10) para os polinômios $P_n^{\psi_1}$, obtemos, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\rho_n^{\mathbb{S}_1} &= \langle S_n, S_n \rangle_{\mathbb{S}_1} = \left\langle P_n^{\psi_0} + b_{n-1}P_{n-1}^{\psi_0} - a_{n-1}S_{n-1}, S_n \right\rangle_{\mathbb{S}_1} = \left\langle P_n^{\psi_0} + b_{n-1}P_{n-1}^{\psi_0}, S_n \right\rangle_{\mathbb{S}_1} \\
&= \left\langle P_n^{\psi_0} + b_{n-1}P_{n-1}^{\psi_0}, P_n^{\psi_0} + b_{n-1}P_{n-1}^{\psi_0} - a_{n-1}S_{n-1} \right\rangle_{\psi_0} + \kappa_1 \left\langle P_n^{\phi_1}, S_n \right\rangle_{\phi_1} \\
&\quad + \kappa_2 \left\langle nP_{n-1}^{\psi_1}, nP_{n-1}^{\psi_1} - a_{n-1}S_{n-1}' \right\rangle_{\psi_1} + \kappa_3 \left\langle nP_{n-1}^{\psi_1}, x(nP_{n-1}^{\psi_1} - a_{n-1}S_{n-1}') \right\rangle_{\psi_1} \\
&= \left\langle P_n^{\psi_0}, P_n^{\psi_0} \right\rangle_{\psi_0} + b_{n-1}^2 \left\langle P_{n-1}^{\psi_0}, P_{n-1}^{\psi_0} \right\rangle_{\psi_0} - a_{n-1}b_{n-1} \left\langle P_{n-1}^{\psi_0}, S_{n-1} \right\rangle_{\psi_0} + \kappa_1 \left\langle P_n^{\phi_1}, S_n \right\rangle_{\phi_1} \\
&\quad + n^2\kappa_2 \left\langle P_{n-1}^{\psi_1}, P_{n-1}^{\psi_1} \right\rangle_{\psi_1} + \kappa_3 n^2 \left\langle P_{n-1}^{\psi_1}, P_n^{\psi_1} + \beta_n^{\psi_1} P_{n-1}^{\psi_1} + \alpha_n^{\psi_1} P_{n-2}^{\psi_1} \right\rangle_{\psi_1} - n\kappa_3 a_{n-1} \left\langle P_{n-1}^{\psi_1}, xS_{n-1}' \right\rangle_{\psi_1} \\
&= \rho_n^{\psi_0} + b_{n-1}^2 \rho_{n-1}^{\psi_0} - a_{n-1}b_{n-1}\rho_{n-1}^{\psi_0} + \kappa_1 \rho_n^{\phi_1} + n^2\kappa_2 \rho_{n-1}^{\psi_1} + \kappa_3 n^2 \beta_n^{\psi_1} \rho_{n-1}^{\psi_1} - n(n-1)\kappa_3 a_{n-1} \rho_{n-1}^{\psi_1},
\end{aligned}$$

e, para $n = 0$,

$$\rho_0^{\mathbb{S}_1} = \langle S_0, S_0 \rangle_{\mathbb{S}_1} = \rho_0^{\psi_0} + \kappa_1 \rho_0^{\phi_1}.$$

Assim,

$$a_n = \frac{b_n \rho_n^{\psi_0} + n(n+1)\kappa_3 \rho_n^{\psi_1}}{\rho_n^{\psi_0} + b_{n-1}^2 \rho_{n-1}^{\psi_0} - a_{n-1}b_{n-1}\rho_{n-1}^{\psi_0} + \kappa_1 \rho_n^{\phi_1} + n^2\kappa_2 \rho_{n-1}^{\psi_1} + \kappa_3 n^2 \beta_n^{\psi_1} \rho_{n-1}^{\psi_1} - n(n-1)\kappa_3 a_{n-1} \rho_{n-1}^{\psi_1}}.$$

Utilizando as hipóteses do teorema em (3.6), obtemos

$$\rho_n^{\psi_0} = \frac{\kappa}{b_n} \rho_{n+1}^{\phi_1}, \quad n \geq 0.$$

Lembrando que os coeficientes $\alpha_{n+1}^{\phi_1}$ da relação de recorrência (1.10) satisfazem

$$\alpha_{n+1}^{\phi_1} = \frac{\rho_n^{\phi_1}}{\rho_{n-1}^{\phi_1}}, \quad n \geq 1,$$

então, multiplicando e dividindo a_n por $\rho_n^{\phi_1}$ e utilizando os resultados anteriores, obtemos

$$a_n = \frac{\left[\kappa + n(n+1)\kappa_3 \dfrac{\rho_n^{\psi_1}}{\rho_{n+1}^{\phi_1}}\right] \alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\kappa b_n^{-1} \alpha_{n+2}^{\phi_1} + \kappa b_{n-1} + \kappa_1 + n^2 \dfrac{\rho_{n-1}^{\psi_1}}{\rho_n^{\phi_1}} \left[\kappa_2 + \kappa_3 \beta_n^{\psi_1}\right] - \left[\kappa + n(n-1)\kappa_3 \dfrac{\rho_{n-1}^{\psi_1}}{\rho_n^{\phi_1}}\right] a_{n-1}}.$$

Definindo $\tau_n = \dfrac{\rho_{n-1}^{\psi_1}}{\rho_n^{\phi_1}}$ para $n \geq 1$, obtemos a relação (3.10).

Do mesmo modo, para $n = 0$,

$$a_0 = \frac{b_0 \rho_0^{\psi_0}}{\rho_0^{\psi_0} + \kappa_1 \rho_0^{\phi_1}} = \frac{\kappa \alpha_2^{\phi_1}}{\kappa b_0^{-1} \alpha_2^{\phi_1} + \kappa_1}.$$

Do Teorema 3.2, temos

$$b_n = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{-q + \beta_{n+1}^{\phi_1} - b_{n-1}} = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{-q\left[1 - \dfrac{1}{q}\beta_{n+1}^{\phi_1} - \dfrac{b_{n-1}}{q}\right]} = \frac{\kappa \alpha_{n+2}^{\phi_1}}{1 + \kappa \beta_{n+1}^{\phi_1} - \kappa b_{n-1}}, \; n \geq 1.$$

Finalmente, do Teorema 3.1, obtemos

$$b_0 = \frac{\alpha_2^{\phi_1}}{\beta_1^{\phi_1} - q} = \frac{\alpha_2^{\phi_1}}{-q\left(1 - \dfrac{1}{q}\beta_1^{\phi_1}\right)} = \frac{\kappa \alpha_2^{\phi_1}}{\kappa \beta_1^{\phi_1} + 1}$$

o que completa a demonstração. ■

Este resultado relaciona os polinômios ortogonais de Sobolev a, precisamente, duas escolhas de polinômios ortogonais clássicos, os de Laguerre, $L_n^{(\alpha)}$, e os de Jacobi, $P_n^{(\alpha,\beta)}$. Na primeira escolha, aplicaremos o teorema para os polinômios de Laguerre. Consideremos, então,

$$d\phi_1(x) = x^{\alpha} e^{-x} dx \quad \text{e} \quad d\psi_1(x) = x^{\alpha+1} e^{-x} dx,$$

ou seja, $P_n^{\phi_1}(x) = L_n^{(\alpha)}(x)$ e $P_n^{\psi_1}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x)$, pois $L_n^{\prime(\alpha)}(x) = n L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$.

Seja

$$d\psi_0(x) = (1 + \kappa x) x^{\alpha} e^{-x} dx,$$

para $\kappa \geq 0$. Assim, de (1.30) e (1.28),

$$\alpha_{n+1}^{\phi_1} = \alpha_{n+1}^{(\alpha)} = n(n+\alpha), \quad \beta_{n+1}^{\phi_1} = \beta_{n+1}^{(\alpha)} = 2n + \alpha + 1 \quad \text{e} \quad \tau_n = \frac{\rho_{n-1}^{\psi_1}}{\rho_n^{\phi_1}} = \frac{\rho_{n-1}^{(\alpha+1)}}{\rho_n^{(\alpha)}} = \frac{1}{n}.$$

Pelo Teorema 3.3, usando as expressões acima, obtemos

$$a_n = \frac{(n+1)(n+\alpha+1)(\kappa + n\kappa_3)}{(n+1)(n+\alpha+1)\kappa b_n^{-1} + \kappa b_{n-1} + \kappa_1 + n\kappa_2 + n(2n+\alpha)\kappa_3 - [\kappa + (n-1)\kappa_3]\, a_{n-1}}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\kappa(1+\alpha)}{\kappa b_0^{-1}(1+\alpha) + \kappa_1} = \frac{\kappa(1+\alpha)}{\kappa\left(\dfrac{-q + (1+\alpha)}{1+\alpha}\right)(1+\alpha) + \kappa_1} \\ &= \frac{\kappa(1+\alpha)}{\kappa(1+\alpha) - \kappa q + \kappa_1} = \frac{\kappa(\alpha+1)}{1 + \kappa_1 + \kappa(\alpha+1)} \end{aligned}$$

e

$$b_n = \frac{(n+1)(n+\alpha+1)\kappa}{1+(2n+\alpha+1)\kappa-\kappa b_{n-1}}, \; n \geq 1, \quad \text{com} \quad b_0 = \frac{\kappa(\alpha+1)}{1+\kappa(\alpha+1)}.$$

Podemos, então, enunciar o seguinte corolário do Teorema 3.3.

Corolário 3.1. *Dado o produto interno*

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{SL}_1} = \int_0^\infty f(x)g(x)(1+\kappa_1+\kappa x)x^\alpha e^{-x}dx + \int_0^\infty f'(x)g'(x)(\kappa_2+\kappa_3 x)x^{\alpha+1}e^{-x}dx,$$

com $\kappa \geq 0$, os correspondentes polinômios ortogonais mônicos de Sobolev, $S_n^{L_1}$, satisfazem $S_0^{L_1}(x) = 1$ e

$$S_{n+1}^{L_1}(x) + a_n^{L_1} S_n(x) = L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + b_n^{(\alpha)} P_n^{\psi_0}(x), \quad n \geq 0. \tag{3.14}$$

Para os coeficientes $a_n^{L_1} = a_n^{L_1}(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$, $n \geq 1$, temos a seguinte relação de recorrência

$$a_n^{L_1} = \frac{(n+1)(n+\alpha+1)(\kappa+n\kappa_3)}{(n+1)(n+\alpha+1)\frac{\kappa}{b_n^{(\alpha)}} + \kappa b_{n-1}^{(\alpha)} + \kappa_1 + n\kappa_2 + n(2n+\alpha)\kappa_3 - [\kappa+(n-1)\kappa_3]\, a_{n-1}^{L_1}},$$

em que

$$a_0^{L_1}(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \frac{\kappa(\alpha+1)}{1+\kappa_1+\kappa(\alpha+1)}.$$

Os coeficientes $b_n^{(\alpha)}$ satisfazem

$$b_0^{(\alpha)} = \frac{\kappa(\alpha+1)}{1+\kappa(\alpha+1)} \quad e \quad b_n^{(\alpha)} = \frac{(n+1)(n+\alpha+1)\kappa}{1+(2n+\alpha+1)\kappa - b_{n-1}}, \; n \geq 1.$$

Quando $\kappa = 0$, devemos tomar $b_n^{(\alpha)} = 0$ e $\dfrac{b_n^{(\alpha)}}{\kappa} = (n+1)(n+\alpha+1)$ para $n \geq 0$. Para $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathbb{SL}_1}$ ser positivo definido, as constantes $\kappa, \kappa_1, \kappa_2$ e κ_3 devem satisfazer às restrições $\kappa_2 \geq 0, \kappa_3 \geq 0$, $1+\kappa_1 \geq 0$ se $\kappa > 0$ e $1+\kappa_1 > 0$ se $\kappa = 0$.

Quando $\kappa_3 = 0$ e $\kappa \neq 0$, podemos escrever $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathbb{SL}_1}$ na seguinte forma

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{SL}_1} = \kappa \left\{ \int_0^\infty f(x)g(x)\left(x + \frac{1+\kappa_1}{\kappa}\right) x^\alpha e^{-x}dx + \frac{\kappa_2}{\kappa}\int_0^\infty f'(x)g'(x)x^{\alpha+1}e^{-x}dx \right\},$$

assim, podemos observar que,

$$d\theta_1(x) = \left(x + \frac{1+\kappa_1}{\kappa}\right) x^\alpha e^{-x}dx \quad \text{e} \quad d\theta_2(x) = x^{\alpha+1}e^{-x}dx$$

formam par coerente de Laguerre do tipo I com $\xi = -\dfrac{1+\kappa_1}{\kappa}$ e $\lambda = \dfrac{\kappa_2}{\kappa}$ (veja (1.44)).

Quando $\kappa_3 \neq 0$ as medidas envolvidas não formam par coerente.

Para aplicarmos o Teorema 3.3 aos polinômios ortogonais mônicos de Jacobi, $P_n^{(\alpha,\beta)}$, consideremos

$$d\psi_1(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx \quad \text{e} \quad d\phi_1(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx,$$

ou seja, $P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ e $P_n^{\psi_1}(x) = P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$, pois $P_n^{\prime(\alpha,\beta)}(x) = nP_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$. Tomemos $d\psi_0(x) = (1+\kappa x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$, para $-1 \leq \kappa \leq 1$. Assim, de (1.19), (1.20) e (1.18), obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1}^{\phi_1} &= \alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = \frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)}\,, \\
\beta_{n+1}^{\phi_1} &= \beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

e

$$\tau_n = \frac{\rho_{n-1}^{\psi_1}}{\rho_n^{\phi_1}} = \frac{\rho_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}}{\rho_n^{(\alpha,\beta)}} = \frac{n+\alpha+\beta+1}{n}.$$

Pelo Teorema 3.3, usando as expressões acima, obtemos

$$a_n = \frac{[\kappa+\theta_n(\kappa)\kappa_3]\alpha_{n+2}^{(\alpha,\beta)}}{\frac{\kappa}{b_n^{(\alpha,\beta)}}\alpha_{n+2}^{(\alpha,\beta)}+\kappa b_{n-1}^{(\alpha,\beta)}+\kappa_1+n(n+\alpha+\beta+1)(\kappa_2+\beta_n^{(\alpha+1,\beta+1)}\kappa_3)-[\theta_{n-1}(\kappa)\kappa_3]\,a_{n-1}},$$

com $\theta_n(\kappa) = \kappa + n(n+\alpha+\beta+2)$, $n \geq 1$. Além disso,

$$a_0 = \frac{\kappa\alpha_2^{(\alpha,\beta)}}{\kappa(b_0)^{-1}\alpha_2^{(\alpha,\beta)}+\kappa_1}$$

e

$$b_n = \frac{\kappa\alpha_{n+2}^{(\alpha,\beta)}}{1+\kappa\beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)}-\kappa b_{n-1}},\ n\geq 1, \quad \text{com} \quad b_0 = \frac{\kappa\alpha_2^{(\alpha,\beta)}}{1+\kappa\beta_1^{(\alpha,\beta)}}.$$

Podemos, então, enunciar mais um corolário do Teorema 3.3, associado, agora, aos polinômios de Jacobi.

Corolário 3.2. *Dado o produto interno*

$$\begin{aligned}
\langle f,g\rangle_{\mathbb{SJ}_1} &= \langle f,g\rangle_{\mathbb{SJ}_1(\kappa,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3)} = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1+\kappa_1+\kappa x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx \\
&\quad + \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)(\kappa_2+\kappa_3 x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx,
\end{aligned}$$

na qual $-1 \leq \kappa \leq 1$, *então os polinômios ortogonais mônicos de Sobolev,* $S_n^{J_1}$, *satisfazem à seguinte relação*

$$S_{n+1}^{J_1}(x) + a_n^{J_1}S_n^{J_1}(x) = P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + b_n^{(\alpha,\beta)}P_n^{\psi_0}(x), \quad n \geq 0,$$

com $S_0^{J_1}(x) = 1$*. Os coeficientes* $a_n^{J_1} = a_n^{J_1}(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$*, para* $n \geq 1$*, satisfazem*

$$a_n^{J_1} = \frac{\theta_n(\kappa)\,\kappa_3 \alpha_{n+2}^{(\alpha,\beta)}}{\frac{\kappa}{b_n^{(\alpha,\beta)}}\alpha_{n+2}^{(\alpha,\beta)} + \kappa b_{n-1}^{(\alpha,\beta)} + \kappa_1 + n(n+\alpha+\beta+1)(\kappa_2 + \beta_n^{(\alpha+1,\beta+1)}\kappa_3) - [\kappa + \theta_{n-1}(\kappa)\kappa_3]\, a_{n-1}^{J_1}},$$

com

$$a_0^{J_1}(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \frac{\kappa \alpha_2^{(\alpha,\beta)}}{\kappa b_0^{(\alpha,\beta)^{-1}} \alpha_2^{(\alpha,\beta)} + \kappa_1} \quad e \quad \theta_n(\kappa) = \kappa + n(n+\alpha+\beta+2),\ n \geq 1.$$

Os coeficientes $b_n^{(\alpha,\beta)}$ *podem ser gerados por*

$$b_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{\kappa \alpha_{n+2}^{(\alpha,\beta)}}{1 + \kappa \beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)} - \kappa b_{n-1}^{(\alpha,\beta)}}, \quad n \geq 1, \quad e \quad b_0^{(\alpha,\beta)} = \frac{\kappa \alpha_2^{(\alpha,\beta)}}{1 + \kappa \beta_1^{(\alpha,\beta)}}.$$

Quando $1 + \kappa_1 \geq |\kappa| > 0$ *e* $\kappa_2 \geq |\kappa_3|$*, o produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{SJ}_1}$ *é definido positivo. Entretanto, se* $\kappa = 0$ *então devemos tomar* $b_n^{(\alpha,\beta)} = 0$ *e* $\kappa^{-1} b_n^{(\alpha,\beta)} = \alpha_{n+2}^{(\alpha,\beta)}$ *para* $n \geq 0$*, e, além disso, devemos tomar* $1 + \kappa_1 > 0$ *e* $\kappa_2 \geq |\kappa_3|$ *para este produto interno ser definido positivo.*

Quando $\kappa_3 = 0$ e $\kappa \neq 0$, podemos escrever $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{SJ}_1}$ na seguinte forma

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{\mathbb{SJ}_1} &= \kappa \left\{ \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \left(x + \frac{1+\kappa_1}{\kappa} \right) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \right. \\ &\left. + \frac{\kappa_2}{\kappa} \int_{-1}^{1} f'(x) g'(x) (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} dx \right\}, \end{aligned}$$

assim, podemos observar que as medidas

$$d\theta_1(x) = \left(x + \frac{1+\kappa_1}{\kappa} \right) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \quad \text{e} \quad d\theta_2(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} dx$$

formam par coerente de Jacobi do tipo I com $\xi = -\dfrac{1+\kappa_1}{\kappa}$ e $\lambda = \dfrac{\kappa_2}{\kappa}$ (veja (1.39)).

Quando $\kappa_3 \neq 0$ as medidas envolvidas não formam par coerente.

3.2.2 Caso II: Medidas relacionadas por $(\mathbf{x} - \mathbf{q})\mathbf{d}\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{q})\mathbf{d}\phi(\mathbf{x})$

Apresentamos, aqui, um outro exemplo de produto interno de Sobolev que também envolve medidas que satisfazem a relação (3.1).

O próximo teorema usa os resultados da seção 3.1 para obter informações sobre os polinômios ortogonais de Sobolev associados com pares de distribuições não simétricas.

Teorema 3.4. *Sejam $d\phi_0$ e $d\psi_0$ duas distribuições clássicas tais que $P_n'^{\psi_0}(x) = nP_{n-1}^{\phi_0}(x)$, para $n \geq 1$. Considere a distribuição $d\psi_1$ definida por*

$$(x-q)d\psi_1(x) = c(q)d\phi_0, \tag{3.15}$$

na qual q e $c(q)$ são tais que $(x-q)/c(q)$ é finito e não-negativo no interior do suporte de $d\psi_1$. Então, a sequência de polinômios ortogonais mônicos de Sobolev, $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, associados com o produto interno

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle_{\mathbb{S}_2} &= \langle f, g\rangle_{\psi_0} + \kappa_1\langle f', g'\rangle_{\phi_0} + \kappa_2\langle f', g'\rangle_{\psi_1} \\ &= \int_E f(x)g(x)d\psi_0(x) + \int_E f'(x)g'(x)\left[c(q)^{-1}\kappa_1(x-q) + \kappa_2\right] d\psi_1(x), \end{aligned}$$

satisfazem à seguinte relação

$$S_{n+1}(x) + a_n S_n(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \tilde{b}_n P_n^{\psi_0}(x), \quad n \geq 1,$$

com $S_0(x) = 1$ e $S_1(x) = P_1^{\psi_0}(x)$. Os coeficientes $a_n = a_n(q, \kappa_1, \kappa_2)$ satisfazem

$$a_n = \frac{v_n(\kappa_1)\alpha_n^{\phi_0}\tilde{b}_n}{v_n(\kappa_1)\alpha_n^{\phi_0} + \tilde{b}_{n-1}\left[n(n-1)\kappa_2 c(q) + v_{n-1}(\kappa_1)(\tilde{b}_{n-1} - a_{n-1})\right]}, \quad n \geq 2,$$

em que

$$a_1(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{\tilde{b}_1 v_1(\kappa_1)}{\left(v_1(\kappa_1) + \kappa_2(\rho_0^{\psi_1}/\rho_0^{\phi_0})\right)} \quad e \quad v_n(\kappa_1) = n^2\kappa_1 + \frac{\rho_n^{\psi_0}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}}, \quad n \geq 1.$$

Os coeficientes $\tilde{b}_n$ são tais que $\tilde{b}_n = \dfrac{n+1}{n}\, b_{n-1}$, onde

$$b_0 = \frac{\alpha_2^{\psi_1}}{\beta_1^{\psi_1} - q} \quad e \quad b_n = \beta_{n+1}^{\phi_0} - q - \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}{b_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Aqui, κ_1 e κ_2 são tais que o produto interno $\langle \cdot\,, \cdot\rangle_{\mathbb{S}_2}$ é definido positivo.

Demonstração: De (3.5) e da hipótese $P_n'^{\psi_0}(x) = nP_{n-1}^{\phi_0}(x)$, temos

$$\begin{aligned} P_n^{\psi_1}(x) &= P_n^{\phi_0}(x) + b_{n-1}P_{n-1}^{\phi_0}(x) \\ &= \frac{1}{n+1}P_{n+1}'^{\psi_0}(x) + b_{n-1}\frac{1}{n}P_n'^{\psi_0}(x) \\ &= \frac{1}{n+1}\left[P_{n+1}'^{\psi_0}(x) + \tilde{b}_n P_n'^{\psi_0}(x)\right], \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

em que

$$\tilde{b}_n = \frac{n+1}{n}\, b_{n-1} = \frac{n+1}{n}\frac{\rho_n^{\psi_1}}{c(q)\rho_{n-1}^{\phi_0}}, \quad n \geq 1$$

e $P_0^{\psi_1}(x) = P_0^{\phi_0}(x) = P_1^{'\psi_0}(x) = 1$. Assim, expandindo $P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \tilde{b}_n P_n^{\psi_0}(x)$ como combinação linear dos polinômios de Sobolev da sequência $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, obtemos

$$P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \tilde{b}_n P_n^{\psi_0}(x) = S_{n+1}(x) + \sum_{i=0}^{n} a_i S_i(x), \quad n \geq 1. \tag{3.16}$$

Então, para $j = 0, 1, \ldots, n$,

$$\left\langle P_{n+1}^{\psi_0} + \tilde{b}_n P_n^{\psi_0}, S_j \right\rangle_{\mathbb{S}_2} = \left\langle S_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} a_i S_i, S_j \right\rangle_{\mathbb{S}_2} = \sum_{i=0}^{n} a_i \langle S_i, S_j \rangle_{\mathbb{S}_2} = a_j \langle S_j, S_j \rangle_{\mathbb{S}_2}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left\langle P_{n+1}^{\psi_0} + \tilde{b}_n P_n^{\psi_0}, S_j \right\rangle_{\mathbb{S}_2} &= \left\langle P_{n+1}^{\psi_0} + \tilde{b}_n P_n^{\psi_0}, S_j \right\rangle_{\psi_0} + \kappa_1 \left\langle (n+1)\left(P_n^{\phi_0} + b_{n-1} P_{n-1}^{\phi_0}\right), S_j' \right\rangle_{\phi_0} \\
&\quad + \kappa_2 \left\langle (n+1) P_n^{\psi_1}, S_j' \right\rangle_{\psi_1} \\
&= \tilde{b}_n \left\langle P_n^{\psi_0}, S_j \right\rangle_{\psi_0} + (n+1)\kappa_1 b_{n-1} \left\langle P_{n-1}^{\phi_0}, S_j' \right\rangle_{\phi_0}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$a_j = \frac{\tilde{b}_n \left\langle P_n^{\psi_0}, S_j \right\rangle_{\psi_0} + (n+1)\kappa_1 b_{n-1} \left\langle P_{n-1}^{\phi_0}, S_j' \right\rangle_{\phi_0}}{\langle S_j, S_j \rangle_{\mathbb{S}_2}}, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

e $a_j = 0$ para $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Além disso,

$$a_n = \frac{\tilde{b}_n \left\langle P_n^{\psi_0}, S_n \right\rangle_{\psi_0} + (n+1)\kappa_1 b_{n-1} \left\langle P_{n-1}^{\phi_0}, S_n' \right\rangle_{\phi_0}}{\langle S_n, S_n \rangle_{\mathbb{S}_2}} = \frac{\tilde{b}_n \rho_n^{\psi_0} + n(n+1)\kappa_1 b_{n-1} \rho_{n-1}^{\phi_0}}{\rho_n^{\mathbb{S}_2}}. \tag{3.17}$$

Então, de (3.16), obtemos

$$S_{n+1}(x) + a_n S_n(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \tilde{b}_n P_n^{\psi_0}(x), \quad n \geq 1. \tag{3.18}$$

Precisamos mostrar que $S_1(x) = P_1^{\psi_0}(x)$. De fato, considerando $S_1(x) = P_1^{\psi_0}(x) + d_0 P_0^{\psi_0}(x)$, temos

$$0 = \langle S_1, S_0 \rangle_{\mathbb{S}_2} = \left\langle P_1^{\psi_0} + d_0 P_0^{\psi_0}, S_0 \right\rangle_{\psi_0} = d_0 \left\langle P_0^{\psi_0}, S_0 \right\rangle_{\psi_0} = d_0 \rho_0^{\psi_0}$$

e, como $\rho_0^{\psi_0} \neq 0$, temos $d_0 = 0$. Portanto, $S_1(x) = P_1^{\psi_0}(x)$. Utilizando a relação (3.18) e as hipóteses do teorema, para $n \geq 2$ obtemos

$$\begin{aligned}
\rho_n^{\mathbb{S}_2} &= \langle S_n, S_n \rangle_{\mathbb{S}_2} \\
&= \rho_n^{\psi_0} + \tilde{b}_{n-1}^2 \rho_{n-1}^{\psi_0} - a_{n-1} \tilde{b}_{n-1} \rho_{n-1}^{\psi_0} + \kappa_1 n^2 \rho_{n-1}^{\phi_0} \\
&\quad + n^2 \kappa_1 b_{n-2}^2 \rho_{n-2}^{\phi_0} - n(n-1)\kappa_1 a_{n-1} b_{n-2} \rho_{n-2}^{\phi_0} + \kappa_2 n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1}
\end{aligned}$$

e, para $n = 1$,

$$\rho_1^{\mathbb{S}_2} = \langle S_1, S_1 \rangle_{\mathbb{S}_2} = \rho_1^{\psi_0} + \kappa_1 \rho_0^{\phi_0} + \kappa_2 \rho_0^{\psi_1}.$$

Assim,

$$a_n = \frac{\tilde{b}_n \rho_n^{\psi_0} + n(n+1)\kappa_1 b_{n-1} \rho_{n-1}^{\phi_0}}{\rho_n^{\psi_0} + \tilde{b}_{n-1}^2 \rho_{n-1}^{\psi_0} - a_{n-1}\tilde{b}_{n-1}\rho_{n-1}^{\psi_0} + \kappa_1 n^2 \rho_{n-1}^{\phi_0} + n^2 \kappa_1 b_{n-2}^2 \rho_{n-2}^{\phi_0} - n(n-1)\kappa_1 a_{n-1} b_{n-2} \rho_{n-2}^{\phi_0} + \kappa_2 n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1}}.$$

Multiplicando e dividindo a_n por $\rho_{n-2}^{\phi_0}$, lembrando que

$$\alpha_{n+1}^{\phi_0} = \frac{\rho_n^{\phi_0}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}}, \quad \tilde{b}_n = \frac{n+1}{n}\, b_{n-1} = \frac{n+1}{n}\frac{\rho_n^{\psi_1}}{c(q)\rho_{n-1}^{\phi_0}}$$

e escrevendo

$$v_n(\kappa_1) = n^2 \kappa_1 + \frac{\rho_n^{\psi_0}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}},$$

obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{v_n(\kappa_1)\alpha_n^{\phi_0}\tilde{b}_n}{v_n(\kappa_1)\alpha_n^{\phi_0} + \tilde{b}_{n-1}\left[n(n-1)c(q)\kappa_2 + (n-1)^2\kappa_1(\tilde{b}_{n-1} - a_{n-1}) + \frac{\rho_{n-1}^{\psi_0}}{\rho_{n-2}^{\phi_0}}(\tilde{b}_{n-1} - a_{n-1})\right]} \\ &= \frac{v_n(\kappa_1)\alpha_n^{\phi_0}\tilde{b}_n}{v_n(\kappa_1)\alpha_n^{\phi_0} + \tilde{b}_{n-1}\left[n(n-1)\kappa_2 c(q) + v_{n-1}(\kappa_1)(\tilde{b}_{n-1} - a_{n-1})\right]}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Além disso, por (3.17), temos que

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\tilde{b}_1 \rho_1^{\psi_0} + 2\kappa_1 b_0 \rho_0^{\phi_0}}{\rho_1^{\psi_0} + \kappa_1 \rho_0^{\phi_0} + \kappa_2 \rho_0^{\psi_1}} = \frac{\tilde{b}_1(\rho_1^{\psi_0}/\rho_0^{\phi_0}) + 2\kappa_1 b_0}{(\rho_1^{\psi_0}/\rho_0^{\phi_0}) + \kappa_1 + \kappa_2(\rho_0^{\psi_1}/\rho_0^{\phi_0})} \\ &= \frac{\tilde{b}_1\left(\kappa_1 + (\rho_1^{\psi_0}/\rho_0^{\phi_0})\right)}{\left(\kappa_1 + (\rho_1^{\psi_0}/\rho_0^{\phi_0})\right) + \kappa_2(\rho_0^{\psi_1}/\rho_0^{\phi_0})} = \frac{\tilde{b}_1 v_1(\kappa_1)}{\left(v_1(\kappa_1) + \kappa_2(\rho_0^{\psi_1}/\rho_0^{\phi_0})\right)}. \end{aligned}$$

Os coeficientes b_n, $n \geq 1$, são dados pelo Teorema 3.2 e b_0 pelo Teorema 3.1. ■

Assim como para o Teorema 3.3, o teorema anterior relaciona os polinômios ortogonais de Sobolev aos polinômios de Laguerre, $L_n^{(\alpha)}(x)$, e aos de Jacobi, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Aplicaremos, primeiramente, o teorema aos polinômios de Laguerre. Tomemos

$$d\phi_0(x) = x^{\alpha+1}e^{-x}dx \quad \text{e} \quad d\psi_0(x) = x^{\alpha}e^{-x}dx,$$

ou seja, $P_n^{\phi_0}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x)$ e $P_n^{\psi_0}(x) = L_n^{(\alpha)}(x)$, pois $L_n'^{(\alpha)}(x) = nL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$. Consideremos $d\psi_1(x)$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)d\psi_1(x) = \int_0^{\infty} F(x)\frac{c(q)}{x-q}x^{\alpha+1}e^{-x}dx + \kappa_3[F(-\kappa)],$$

onde $\kappa \geq 0$ e $\kappa_3 \geq 0$. Assim, de (1.30) e (1.28), obtemos

$$\alpha_{n+1}^{\phi_0} = \alpha_{n+1}^{(\alpha+1)} = n(n+\alpha+1), \quad \beta_{n+1}^{\phi_0} = \beta_{n+1}^{(\alpha+1)} = 2n+\alpha+2 \quad \text{e} \quad \frac{\rho_n^{\psi_0}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}} = \frac{\rho_n^{(\alpha)}}{\rho_{n-1}^{(\alpha+1)}} = n.$$

Obtemos, então, o seguinte resultado.

Corolário 3.3. *Dado o produto interno*

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_{\mathbb{SL}_2} &= \langle f,g\rangle_{\psi_0} + \kappa_1\langle f',g'\rangle_{\phi_0} + \kappa_2\langle f',g'\rangle_{\psi_1} \\ &= \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha e^{-x}dx \\ &\quad + \int_0^\infty f'(x)g'(x)\frac{\kappa_1(x+\kappa)+\kappa_2}{x+\kappa}x^{\alpha+1}e^{-x}dx + \kappa_2\kappa_3[f'(-\kappa)g'(-\kappa)],\end{aligned}$$

em que $\kappa, \kappa_1, \kappa_2$ e κ_3 são não-negativos, os polinômios ortogonais de Sobolev mônicos, $S_n^{L_2}$, correspondentes a este produto interno, satisfazem

$$S_{n+1}^{L_2}(x) + a_n^{L_2}S_n^{L_2}(x) = L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + \tilde{b}_n L_n^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1,$$

com $S_0^{L_2}(x) = 1$ e $S_1^{L_2}(x) = L_1^{(\alpha)}(x)$. Para os coeficientes $a_n^{L_2} = a_n^{L_2}(\kappa,\kappa_1,\kappa_2)$, temos a seguinte relação

$$a_n^{L_2} = \frac{(n-1)(n+\alpha)v_n(\kappa_1)\tilde{b}_n}{(n-1)(n+\alpha)v_n(\kappa_1) + \tilde{b}_{n-1}[n(n-1)\kappa_2 + v_{n-1}(\kappa_1)[\tilde{b}_{n-1} - a_{n-1}^{L_2}]]}, \quad n \geq 2,$$

em que

$$a_1^{L_2}(\kappa,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{v_1(\kappa_1)\tilde{b}_1}{v_1(\kappa_1) + \dfrac{\kappa_2\rho_0^{\psi_1}}{\Gamma(\alpha+2)}} \quad \text{e} \quad v_n(\kappa_1) = n(1+n\kappa_1), \quad n \geq 1.$$

Aqui, $\tilde{b}_n$ são tais que $\tilde{b}_n = \dfrac{n+1}{n}b_{n-1} = \dfrac{(n+1)\rho_n^{\psi_1}}{n\rho_{n-1}^{(\alpha+1)}}$ e, ainda,

$$b_0 = \frac{\alpha_2^{\psi_1}}{\beta_1^{\psi_1}+\kappa} \quad \text{e} \quad b_n = \beta_{n+1}^{(\alpha+1)} + \kappa - \frac{\alpha_{n+1}^{(\alpha+1)}}{b_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Observe que a medida $d\psi_1$ aparece somente nas condições iniciais a_1 e b_0.

Quando $\kappa_1 = 0$, o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{SL}_2}$ pode ser dado na seguinte forma

$$\langle f,g\rangle_{\mathbb{SL}_2} = \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha e^{-x}dx + \kappa_2\left\{\int_0^\infty f'(x)g'(x)\frac{1}{x+\kappa}x^{\alpha+1}e^{-x}dx + \kappa_3[f'(-\kappa)g'(-\kappa)]\right\}.$$

Podemos observar que, as medidas

$$d\theta_1(x) = x^\alpha e^{-x}dx \quad \text{e} \quad d\theta_2(x) = \frac{1}{x+\kappa}x^{\alpha+1}e^{-x}dx + \kappa_3\delta(-\kappa)$$

formam par coerente de Laguerre do tipo II, onde $\xi = -\kappa$, $\lambda = \kappa_2$ e $M = \kappa_3$ (veja (1.45)).

Quando $\kappa_1 \neq 0$ as medidas envolvidas não formam par coerente.

Apliquemos, agora, o Teorema 3.4 aos polinômios mônicos de Jacobi, $P_n^{(\alpha,\beta)}$. Lembrando que $P_n'^{(\alpha,\beta)}(x) = nP_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$, tomemos, então,

$$d\phi_0(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx, \quad d\psi_0(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$$

e consideremos $d\psi_1(x)$ tal que

$$\int F(x)d\psi_1(x) = \int_{-1}^{1} F(x)\frac{c(q)}{x-q}(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx + \kappa_3[F(\kappa)],$$

em que $|\kappa| \geq 1$ e $\kappa_3 \geq 0$. Assim, de (1.19), (1.20) e (1.18),

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1}^{\phi_0} &= \alpha_{n+1}^{(\alpha+1,\beta+1)} = \frac{4n(n+\alpha+1)(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)^2(2n+\alpha+\beta+3)}, \\
\beta_{n+1}^{\phi_0} &= \beta_{n+1}^{(\alpha+1,\beta+1)} = \frac{(\beta+1)^2-(\alpha+1)^2}{(2n+\alpha+\beta+4)(2n+\alpha+\beta+2)}
\end{aligned}$$

e

$$\frac{\rho_n^{\psi_0}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}} = \frac{\rho_n^{(\alpha,\beta)}}{\rho_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}} = \frac{n}{n+\alpha+\beta+1}.$$

Portanto, com $q = \kappa$ e $c(q) = -\kappa$, obtemos o seguinte corolário do Teorema 3.4.

Corolário 3.4. *Dado o produto interno*

$$\begin{aligned}
\langle f,g\rangle_{\mathbb{S}\mathbb{J}_2} &= \langle f,g\rangle_{\psi_0} + \kappa_1\langle f',g'\rangle_{\phi_0} + \kappa_2\langle f',g'\rangle_{\psi_1} \\
&= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx \\
&\quad + \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)\frac{(\kappa_1+\kappa_2)\kappa-\kappa_1 x}{\kappa-x}(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx + \kappa_2\kappa_3[f'(\kappa)g'(\kappa)],
\end{aligned}$$

em que $|\kappa| \geq 1$, $\kappa_2 \geq 0$, $\kappa_3 \geq 0$ *e* $\kappa_1 \geq -|\kappa|(1+|\kappa|)^{-1}\kappa_2$, *então os polinômios ortogonais mônicos de Sobolev,* $S_n^{J_2}$, *correspondentes a este produto interno, satisfazem*

$$S_{n+1}^{J_2}(x) + a_n^{J_2}S_n^{J_2}(x) = P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + \tilde{b}_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 1,$$

com $S_0^{J_2}(x) = 1$ *e* $S_1^{J_2}(x) = P_1^{(\alpha,\beta)}(x)$. *Para os coeficientes* $a_n^{J_2} = a_n^{J_2}(\kappa,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3)$ *temos a seguinte relação*

$$a_n^{J_2} = \frac{v_n(\kappa_1)\tilde{b}_n\alpha_n^{(\alpha+1,\beta+1)}}{v_n(\kappa_1)\alpha_n^{(\alpha+1,\beta+1)} + \tilde{b}_{n-1}\left[-n(n-1)\kappa_2\kappa + v_{n-1}(\kappa_1)(\tilde{b}_{n-1}-a_{n-1}^{J_2})\right]}, \quad n \geq 2,$$

em que

$$a_1^{J_2}(\kappa,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3) = \frac{v_1(\kappa_1)\tilde{b}_1}{v_1(\kappa_1)+\kappa_2(\rho_0^{\psi_1}/\rho_0^{(\alpha+1,\beta+1)})} \quad e \quad v_n(\kappa_1) = n^2\kappa_1 + \frac{n}{n+\alpha+\beta+1}, \quad n \geq 1.$$

Aqui, $\tilde{b}_n$ *são tais que* $\tilde{b}_n = \dfrac{n+1}{n}b_{n-1} = -\dfrac{(n+1)\rho_n^{\psi_1}}{\kappa n\rho_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}}$ *e, ainda,*

$$b_0 = \frac{\alpha_2^{\psi_1}}{\beta_1^{\psi_1}-\kappa} \quad e \quad b_n = \beta_{n+1}^{(\alpha+1,\beta+1)} - \kappa - \frac{\alpha_{n+1}^{(\alpha+1,\beta+1)}}{b_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Quando $\kappa_1 = 0$, o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{SJ}_2}$ torna-se

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_{\mathbb{SJ}_2} &= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx \\ &+\kappa_2\,|\kappa|\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)\frac{1}{|x-\kappa|}(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx + \kappa_2\kappa_3[f'(\kappa)g'(\kappa)],\end{aligned}$$

Podemos observar que as medidas

$$d\theta_1(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx \quad \text{e} \quad d\theta_2(x) = \frac{1}{|x-\kappa|}(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx + \kappa_2\kappa_3\delta(\kappa)$$

formam par coerente de Jacobi do tipo II, onde $|\xi| = |\kappa| \geq 1$ e $M = \kappa_2\kappa_3 \geq 0$ (veja (1.40)).

Quando $\kappa_1 \neq 0$ as medidas envolvidas não formam par coerente.

No próximo capítulo, estudamos várias propriedades de duas sequências de polinômios L-ortogonais associados a medidas relacionadas.

Capítulo 4

Polinômios L-ortogonais associados a medidas relacionadas

Neste capítulo estudamos a conexão entre duas sequências de polinômios L-ortogonais, $\{B_n^{\psi_1}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{B_n^{\psi_0}\}_{n=0}^{\infty}$, associadas a duas medidas positivas fortes ψ_1 e ψ_0 definidas em $[a,b] \subset [0,\infty]$ e relacionadas por

$$(z-\kappa)\, d\psi_1(z) = c\, d\psi_0(z). \tag{4.1}$$

A constante não-nula c é arbitrária desde que satisfaça $\dfrac{(z-\kappa)}{c} > 0$ em (a,b).

Note que, os momentos $\mu_n^{\psi_i} = \int_a^b z^n d\psi_i(z)$ satisfazem

$$\mu_{n+1}^{\psi_1} - \kappa\mu_n^{\psi_1} = c\,\mu_n^{\psi_0},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{4.2}$$

De fato, usando (4.1), temos que

$$\begin{aligned}
\mu_{n+1}^{\psi_1} - \kappa\mu_n^{\psi_1} &= \int_a^b z^{n+1} d\psi_1(z) - \kappa \int_a^b z^n d\psi_1(z) = c\int_a^b z^n \frac{z}{z-\kappa} d\psi_0(z) - c\int_a^b z^n \frac{\kappa}{z-\kappa} d\psi_0(z) \\
&= c\int_a^b z^n \left[\frac{z}{z-\kappa} - \frac{\kappa}{z-\kappa}\right] d\psi_0(z) = c\int_a^b z^n\, d\psi_0(z) = c\,\mu_n^{\psi_0}.
\end{aligned}$$

O estudo foi baseado, principalmente, no artigo [4].

4.1 Resultados preliminares

Sejam $\{B_n^{\psi}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{A_n^{\psi}\}_{n=0}^{\infty}$, respectivamente, as sequências de polinômios mônicos L-ortogonais e associados aos L-ortogonais , com relação à medida $d\psi$ em (a,b).

Teorema 4.1. *Seja* $\mathbb{T}_n^{\psi}(z) = (z-\beta_1^{\psi})\dfrac{A_n^{\psi}(z)}{B_n^{\psi}(z)}$, $n \geq 0$. *Logo,* $\mathbb{T}_0^{\psi}(z) = 0$, $\mathbb{T}_1^{\psi}(z) = 1$ *e podemos escrever*

$$\mathbb{T}_n^{\psi}(z) = \frac{1}{1} \, {}_{-} \, \frac{a_1(z)}{1} \, {}_{-} \, \frac{a_2(z)}{1} \, {}_{-} \cdots {}_{-} \, \frac{a_{n-1}(z)}{1}, \quad n \geq 2,$$

em que $a_n^{\psi}(z) = \dfrac{\alpha_{n+1}^{\psi}\, z}{(z-\beta_n^{\psi})(z-\beta_{n+1}^{\psi})}$, $n \geq 1$. *Além disso,*

$$\mathbb{T}_n^{\psi}(z) - \mathbb{T}_{n-1}^{\psi}(z) = \frac{\alpha_2^{\psi}\alpha_3^{\psi}\ldots\alpha_n^{\psi}(z-\beta_1^{\psi})z^{n-1}}{B_{n-1}^{\psi}(z)B_n^{\psi}(z)}, \quad \mathbb{T}_n^{\psi}(z) = 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_2^{\psi}\alpha_3^{\psi}\ldots\alpha_j^{\psi}(z-\beta_1^{\psi})z^{j-1}}{B_{j-1}^{\psi}(z)B_j^{\psi}(z)}, \quad n \geq 2.$$

Demonstração: Como, por (1.67),

$$\frac{A_n^{\psi}(z)}{B_n^{\psi}(z)} = \frac{1}{z-\beta_1^{\psi}} \, {}_{-} \, \frac{\alpha_2^{\psi} z}{z-\beta_2^{\psi}} \, {}_{-} \cdots {}_{-} \, \frac{\alpha_n^{\psi} z}{z-\beta_n^{\psi}},$$

segue que

$$\mathbb{T}_n^{\psi}(z) = (z-\beta_1^{\psi})\frac{A_n^{\psi}(z)}{B_n^{\psi}(z)} = \frac{(z-\beta_1^{\psi})}{z-\beta_1^{\psi}} \, {}_{-} \, \frac{\alpha_2^{\psi} z}{z-\beta_2^{\psi}} \, {}_{-} \cdots {}_{-} \, \frac{\alpha_n^{\psi} z}{z-\beta_n^{\psi}}\ .$$

Dividindo numerador e denominador por $(z-\beta_1^{\psi})$, obtemos

$$\mathbb{T}_n^{\psi}(z) = \frac{1}{1} \, {}_{-} \, \frac{\alpha_2^{\psi}\, z/(z-\beta_1^{\psi})}{z-\beta_2^{\psi}} \, {}_{-} \, \frac{\alpha_3^{\psi} z}{z-\beta_3^{\psi}} \, {}_{-} \cdots {}_{-} \, \frac{\alpha_n^{\psi} z}{z-\beta_n^{\psi}}\ .$$

Agora, dividindo numerador e denominador da fração do denominador de $\mathbb{T}_n^{\psi}(z)$ por $(z-\beta_2^{\psi})$, temos que

$$\mathbb{T}_n^{\psi}(z) = \frac{1}{1} \, {}_{-} \, \frac{\alpha_2^{\psi}\, z/[(z-\beta_1^{\psi})(z-\beta_2^{\psi})]}{1} \, {}_{-} \, \frac{\alpha_3^{\psi} z/(z-\beta_2^{\psi})}{z-\beta_3^{\psi}} \, {}_{-} \cdots {}_{-} \, \frac{\alpha_n^{\psi} z}{z-\beta_n^{\psi}}\ .$$

Prosseguindo desta forma, obtemos

$$\mathbb{T}_n^{\psi}(z) = \frac{1}{1} \, {}_{-} \, \frac{a_1^{\psi}(z)}{1} \, {}_{-} \, \frac{a_2^{\psi}(z)}{1} \, {}_{-} \cdots {}_{-} \, \frac{a_{n-1}^{\psi}(z)}{1}, \quad n \geq 2,$$

em que $a_n^{\psi}(z) = \dfrac{\alpha_{n+1}^{\psi} z}{(z-\beta_n^{\psi})(z-\beta_{n+1}^{\psi})}$, $n \geq 1$. Agora, usando (1.60), temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_n^{\psi}(z) - \mathbb{T}_{n-1}^{\psi}(z) &= (z-\beta_1^{\psi})\left[\frac{A_n^{\psi}(z)}{B_n^{\psi}(z)} - \frac{A_{n-1}^{\psi}(z)}{B_{n-1}^{\psi}(z)}\right] \\
&= (z-\beta_1^{\psi})\frac{A_n^{\psi}(z)B_{n-1}^{\psi}(z) - A_{n-1}^{\psi}(z)B_n^{\psi}(z)}{B_n^{\psi}(z)B_{n-1}^{\psi}(z)} \\
&= (z-\beta_1^{\psi})\frac{\alpha_2^{\psi}\alpha_3^{\psi}\ldots\alpha_n^{\psi} z^{n-1}}{B_n^{\psi}(z)B_{n-1}^{\psi}(z)}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_n^{\psi}(z) &= \mathbb{T}_{n-1}^{\psi}(z) + \frac{\alpha_2^{\psi}\alpha_3^{\psi}\dots\alpha_n^{\psi}(z-\beta_1^{\psi})z^{n-1}}{B_n^{\psi}(z)B_{n-1}^{\psi}(z)} \\
&= \mathbb{T}_{n-2}^{\psi}(z) + \frac{\alpha_2^{\psi}\alpha_3^{\psi}\dots\alpha_n^{\psi}(z-\beta_1^{\psi})z^{n-1}}{B_n^{\psi}(z)B_{n-1}^{\psi}(z)} + \frac{\alpha_2^{\psi}\alpha_3^{\psi}\dots\alpha_{n-1}^{\psi}(z-\beta_1^{\psi})z^{n-2}}{B_{n-1}^{\psi}(z)B_{n-2}^{\psi}(z)} = \dots \\
&= \mathbb{T}_1^{\psi}(z) + \sum_{j=2}^{n}\frac{\alpha_2^{\psi}\alpha_3^{\psi}\dots\alpha_j^{\psi}(z-\beta_1^{\psi})z^{j-1}}{B_{j-1}(z)B_j^{\psi}(z)} = 1 + \sum_{j=2}^{n}\frac{\alpha_2^{\psi}\alpha_3^{\psi}\dots\alpha_j^{\psi}(z-\beta_1^{\psi})z^{j-1}}{B_{j-1}^{\psi}(z)B_j^{\psi}(z)}.
\end{aligned}$$

■

Verifiquemos, agora, que $\beta_n^{\psi} \in (a,b),\ n \geq 1$. De fato, pela relação de recorrência (1.57), temos que $B_{n+1}^{\psi}(b) = (b-\beta_{n+1}^{\psi})B_n^{\psi}(b) - \alpha_{n+1}^{\psi}\, b\, B_{n-1}^{\psi}(b)$, Disto, segue que

$$b - \beta_{n+1}^{\psi} = \frac{B_{n+1}^{\psi}(b) + \alpha_{n+1}^{\psi} b B_{n-1}^{\psi}(b)}{B_n^{\psi}(b)} > 0.$$

Logo, $\beta_{n+1}^{\psi} < b$.

Procedendo da mesma forma, obtemos $a < \beta_{n+1}^{\psi}$. Portanto, $a < \beta_{n+1}^{\psi} < b$.

Estamos, agora, em condições de demonstrar o seguinte lema.

Lema 4.1. *Seja $X^{\psi} = (0,a] \cup [b,\infty)$, $X^{\psi} \neq \emptyset$. Então, para todo $z \in X^{\psi}$, temos*

$$1 = \mathbb{T}_1^{\psi}(z) < \mathbb{T}_2^{\psi}(z) < \dots < \mathbb{T}_n^{\psi}(z).$$

Para todo z no interior de X^{ψ}

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{T}_n^{\psi}(z) = \mathbb{T}^{\psi}(z) = \frac{z-\beta_1^{\psi}}{\mu_0^{\psi}}\int_a^b \frac{1}{z-t}\,d\psi(t).$$

Além disso, se $\mathbb{T}^{\psi}(a)$ existe, então $\lim_{n\to\infty}\mathbb{T}_n^{\psi}(a) = \mathbb{T}^{\psi}(a)$ e se $\mathbb{T}^{\psi}(b)$ existe, então $\lim_{n\to\infty}\mathbb{T}_n^{\psi}(b) = \mathbb{T}^{\psi}(b)$.

Demonstração: Primeiramente, consideremos os seguintes casos:

- Caso 1: se $0 < z < a$ então $z - \beta_1^{\psi} < 0$ e $B_n^{\psi}(z)B_{n-1}^{\psi}(z) < 0$.
- Caso 2: se $b < z < \infty$ então $z - \beta_1^{\psi} > 0$ e $B_n^{\psi}(z)B_{n-1}^{\psi}(z) > 0$.

Assim, para todo $z \in X^{\psi}$, teremos

$$\frac{\alpha_2^{\psi}\alpha_3^{\psi}\dots\alpha_n^{\psi}(z-\beta_1^{\psi})z^{n-1}}{B_{n-1}^{\psi}(z)B_n^{\psi}(z)} > 0.$$

Como $\mathbb{T}_n^{\psi}(z) - \mathbb{T}_{n-1}^{\psi}(z) = \dfrac{\alpha_2^{\psi}\alpha_3^{\psi}\ldots\alpha_n^{\psi}(z-\beta_1^{\psi})z^{n-1}}{B_{n-1}^{\psi}(z)B_n^{\psi}(z)} > 0,\ n \geq 2$, segue que

$$1 = \mathbb{T}_1^{\psi}(z) < \mathbb{T}_2^{\psi}(z) < \ldots < \mathbb{T}_n^{\psi}(z).$$

A convergência de $\mathbb{T}_n^{\psi}(z)$ para $\mathbb{T}^{\psi}(z)$ no interior de X^{ψ} vale porque a medida é determinada. Veja detalhes da demonstração em [17]. ■

Usando a mesma idéia usada para polinômios ortogonais definidos na reta real, podemos mostrar que $a_n^{\psi}(z) = \dfrac{\alpha_{n+1}^{\psi} z}{(z-\beta_n^{\psi})(z-\beta_{n+1}^{\psi})}$, $n \geq 1$, é uma sequência encadeada para todo $z \in X^{\psi}$, com sequência minimal de parâmetros $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$g_n(z) = 1 - \frac{B_{n+1}^{\psi}(z)}{B_n^{\psi}(z)(z-\beta_{n+1}^{\psi})}, \quad n \geq 0.$$

De fato: como, por (1.57),

$$B_{n+1}^{\psi}(z) = (z-\beta_{n+1}^{\psi})B_n^{\psi}(z) - \alpha_{n+1}^{\psi}\, z\, B_{n-1}^{\psi}(z), \quad n \geq 1,$$

segue que

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{n+1}^{\psi} z}{(z-\beta_{n+1}^{\psi})} &= \frac{B_n^{\psi}(z)}{B_{n-1}^{\psi}(z)} - \frac{B_{n+1}^{\psi}(z)}{B_{n-1}^{\psi}(z)(z-\beta_{n+1}^{\psi})} \\ &= \left[1 - \frac{B_{n+1}^{\psi}(z)}{B_n^{\psi}(z)(z-\beta_{n+1}^{\psi})}\right]\frac{B_n^{\psi}(z)}{B_{n-1}^{\psi}(z)}. \end{aligned}$$

Portanto, para $z \in X^{\psi}$,

$$0 < \frac{\alpha_{n+1}^{\psi} z}{(z-\beta_n^{\psi})(z-\beta_{n+1}^{\psi})} = \left[1 - \frac{B_{n+1}^{\psi}(z)}{B_n^{\psi}(z)(z-\beta_{n+1}^{\psi})}\right]\frac{B_n^{\psi}(z)}{B_{n-1}^{\psi}(z)(z-\beta_n^{\psi})}. \tag{4.3}$$

Consideremos, agora,

$$g_n(z) = 1 - \frac{B_{n+1}^{\psi}(z)}{B_n^{\psi}(z)(z-\beta_{n+1}^{\psi})}, \quad n \geq 1. \tag{4.4}$$

Assim,

$$(1 - g_{n-1}(z)) = \frac{B_n^{\psi}(z)}{B_{n-1}^{\psi}(z)(z-\beta_n^{\psi})}.$$

Por (4.4), lembrando dos Casos 1 e 2, temos que $1 - g_n(z) = \dfrac{B_{n+1}^{\psi}(z)}{B_n^{\psi}(z)(z-\beta_{n+1}^{\psi})} > 0$. Logo,

$$g_n(z) = 1 - \frac{B_{n+1}^{\psi}(z)}{B_n^{\psi}(z)(z-\beta_{n+1}^{\psi})} < 1.$$

Como $\dfrac{\alpha^{\psi}_{n+1} z}{(z-\beta^{\psi}_{n+1})(z-\beta^{\psi}_{n})} > 0$ e $\dfrac{B^{\psi}_{n}(z)}{B^{\psi}_{n-1}(z)(z-\beta^{\psi}_{n})} > 0$, de (4.3) segue que $g_n(z) > 0$, ou seja, $0 < g_n(z) < 1, \;\; n \geq 1$.

Para obter g_0, temos a seguinte situação: $a_1(z) = (1 - g_0(z))\, g_1(z)$, o que implica que

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^{\psi}_{2} z}{(z-\beta^{\psi}_{2})(z-\beta^{\psi}_{1})} &= (1-g_0(z)) \left[1 - \frac{B^{\psi}_{2}(z)}{B^{\psi}_{1}(z)(z-\beta^{\psi}_{2})}\right] \\
&= (1-g_0(z)) \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha^{\psi}_{2} z}{(z-\beta^{\psi}_{1})(z-\beta^{\psi}_{2})}\right)\right] \\
&= (1-g_0(z)) \left[\frac{\alpha^{\psi}_{2} z}{(z-\beta^{\psi}_{1})(z-\beta^{\psi}_{2})}\right].
\end{aligned}$$

Portanto, $1 - g_0(z) = 1$, o que implica que $g_0(z) = 0$.

Assim, $\{a^{\psi}_{n}\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada com sequência minimal de parâmetros $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $g_0(z) = 0$ e $g_n(z) = 1 - \dfrac{B^{\psi}_{n+1}(z)}{B^{\psi}_{n}(z)(z-\beta^{\psi}_{n+1})}$, $n \geq 1$.

Lema 4.2. *Para todo $n \geq 1$, o conjunto de polinômios $\{z^{n-j}B^{\psi}_{j}(z)\}_{j=0}^{n}$ é linearmente independente.*

Demonstração: O conjunto considerado é $\{z^n B^{\psi}_{0}(z), z^{n-1}B^{\psi}_{1}(z), \ldots, z^0 B^{\psi}_{n}(z)\}$. Observe que, todos os polinômios deste conjunto são polinômios mônicos de grau n.

Supondo que, $\sum_{j=0}^{n} \delta_j\, z^{n-j} B^{\psi}_{j}(z) = 0$, então, multiplicando por z^{-n+m} e integrando com respeito a $d\psi$, obtemos

$$\sum_{j=0}^{n} \delta_j \int_a^b z^{-j+m} B^{\psi}_{j}(z) d\psi(z) = \sum_{j=0}^{n} \delta_j \sigma^{\psi}_{j,m} = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Agora, usando (1.54) na relação acima, temos os seguintes resultados:

- $m = 0 \Rightarrow \delta_0\sigma^{\psi}_{0,0} + \delta_1\sigma^{\psi}_{1,0} + \ldots + \delta_n\sigma^{\psi}_{n,0} = \delta_0\sigma^{\psi}_{0,0} = 0,$
- $m = 1 \Rightarrow \delta_0\sigma^{\psi}_{0,1} + \delta_1\sigma^{\psi}_{1,1} + \delta_2\sigma^{\psi}_{2,1} + \ldots \delta_n\sigma^{\psi}_{n,1} = \delta_0\sigma^{\psi}_{0,1} + \delta_1\sigma^{\psi}_{1,1} = 0,$
- $m = 2 \Rightarrow \delta_0\sigma^{\psi}_{0,2} + \delta_1\sigma^{\psi}_{1,2} + \delta_2\sigma^{\psi}_{2,2} + \ldots + \delta_n\sigma^{\psi}_{n,2} = \delta_0\sigma^{\psi}_{0,2} + \delta_1\sigma^{\psi}_{1,2} + \delta_2\sigma^{\psi}_{2,2} = 0,$

  $\vdots$
- $m = n \Rightarrow \delta_0\sigma^{\psi}_{0,n} + \delta_1\sigma^{\psi}_{1,n} + \delta_2\sigma^{\psi}_{2,n} + \ldots + \delta_n\sigma^{\psi}_{n,n} = 0.$

Obtemos, então, o sistema linear

$$\begin{pmatrix} \sigma^{\psi}_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma^{\psi}_{0,1} & \sigma^{\psi}_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \sigma^{\psi}_{0,2} & \sigma^{\psi}_{1,2} & \sigma^{\psi}_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^{\psi}_{0,n} & \sigma^{\psi}_{1,n} & \sigma^{\psi}_{2,n} & \dots & \sigma^{\psi}_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

que é um sistema triangular inferior, cuja diagonal é formada pelos elementos $\sigma_{m,m} \neq 0,\ m = 0, 1, \dots, n$. Logo, o sistema possui apenas a solução trivial $\delta_m = 0,\ m = 0, 1, \dots, n$.

Portanto, o conjunto $\{z^{n-j} B^{\psi}_j(z)\}_{j=0}^{n}$ é linearmente independente. ■

Lema 4.3. *Sejam* $q_n(z) = (z - x_1)(z - x_2) \dots (z - x_n)$ *e* $q_{n-1}(z) = (z - y_1)(z - y_2) \dots (z - y_{n-1})$, *para* $n \geq 2$, *cujos zeros satisfazem*

$$0 < x_1 < y_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n.$$

Então, para toda constante real $\tau < 1$, *o polinômio mônico* $Q_n(\tau; z) = (1 - \tau)\, q_n(z) + \tau\, z\, q_{n-1}(z)$ *tem* n *zeros positivos* $0 < \xi_1(\tau) < \xi_2(\tau) < \dots < \xi_{n-1}(\tau) < \xi_n(\tau)$ *que se entrelaçam com os zeros de* $q_{n-1}(z)$. *Em particular,*

i) Se $0 < \tau < 1$, *então* $0 < \xi_1(\tau) < x_1$ *e* $y_{r-1} < \xi_r(\tau) < x_r,\ r = 2, \dots, n$ *;*

ii) Se $\tau < 0$, *então* $x_r < \xi_r(\tau) < y_r,\ r = 1, \dots, n-1$ *e* $x_n < \xi_n(\tau)$.

Além disso, cada $\xi_r(\tau)$ *é uma função estritamente decrescente de* τ.

Demonstração: Como $Q_n(0; z) = q_n(z)$, o entrelaçamento dos zeros de $Q_n(0; z)$ com os zeros de $q_{n-1}(z)$ é óbvio. Provemos o item *i*), isto é, quando $0 < \tau < 1$. Temos que

- $sgn[Q_n(\tau; x_r)] = sgn[q_{n-1}(x_r)] = (-1)^{n-r},\ r = 1, 2, \dots, n$;
- $sgn[Q_n(\tau; 0)] = sgn[q_n(0)] = (-1)^n$;
- $sgn[Q_n(\tau; y_r)] = sgn[q_n(y_r)] = (-1)^{n-r},\ r = 1, 2, \dots, n-1$.

A Figura 4.1 a seguir mostra o esboço de como devem ser os gráficos dos polinômios $q_n(z)$, $q_{n-1}(z)$ e $Q_n(\tau; z)$ para n par, quando $0 < \tau_n < 1$.

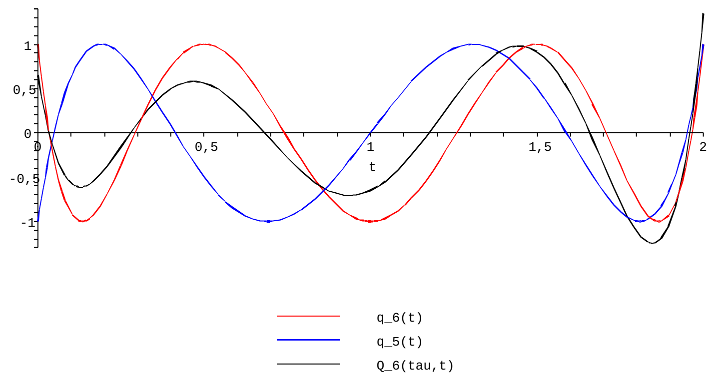

Figura 4.1: Comportamento dos polinômios $q_n(z)$, $q_{n-1}(z)$ e $Q_n(\tau; z)$ para n par ($n = 6$) e $0 < \tau_n < 1$.

Portanto, existe um zero de $Q_n(\tau; z)$, $\xi_1(\tau)$, no intervalo $(0, x_1)$ e existem zeros de $Q_n(\tau; z)$ em cada intervalo (y_{r-1}, x_r), $r = 2, \ldots, n$. Como esses já somam n zeros de $Q_n(\tau; z)$, o resultado $i)$ está demonstrado. Isto também significa que $\xi_r(\tau) > 0$, $sgn[q_n(\xi_r(\tau))] = (-1)^{n-r+1}$ e $sgn[q_{n-1}(\xi_r(\tau))] = (-1)^{n-r}$, $r = 1, 2, \ldots, n$.

A prova do item $ii)$ é similar e significa que $\xi_r(\tau) > 0$, $sgn[q_n(\xi_r(\tau))] = (-1)^{n-r}$ e $sgn[q_{n-1}(\xi_r(\tau))] = (-1)^{n-r}$, $r = 1, 2, \ldots, n$.

Observemos que, quando $\tau < 0$, segue que

- $sgn[Q_n(\tau; 0)] = (-1)^n$;
- $sgn[Q_n(\tau; x_r)] = (-1)^{n-r+1}$;
- $sgn[Q_n(\tau; y_r)] = (-1)^{n-r}$.

A Figura 4.2 mostra o comportamento dos polinômios $q_n(z)$, $q_{n-1}(z)$ e $Q_n(\tau; z)$ para n ímpar e quando $\tau_n < 0$.

Vamos provar, agora, a monotonicidade dos zeros de $Q_n(\tau; z)$ em relação a τ. Observe que

$$Q_n(\tau; z) = q_n(z) - \tau[q_n(z) - zq_{n-1}(z)].$$

Logo, para $\tau > 0$, temos

$$sgn[Q_n(\xi_r(\tau)) - \xi_r(\tau)q_{n-1}(\xi_r(\tau))] = \frac{sgn[q_n(\xi_r(\tau))]}{sgn(\tau)} = (-1)^{n-r+1}.$$

Considerando o polinômio

$$Q_n(\tau + \epsilon; z) = (1 - \tau - \epsilon)q_n(z) + (\tau + \epsilon)zq_{n-1}(z) = Q_n(\tau; z) - \epsilon[q_n(z) - tq_{n-1}(z)],$$

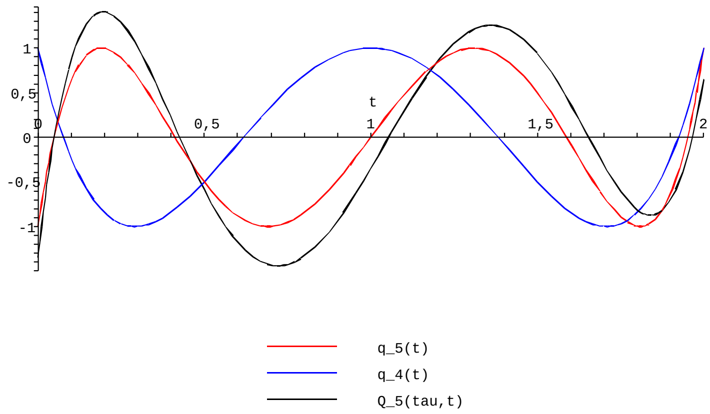

Figura 4.2: Comportamento dos polinômios $q_n(z)$, $q_{n-1}(z)$ e $Q_n(\tau; z)$ para n ímpar ($n = 5$) e $\tau_n < 0$.

temos que $Q_n(\tau+\epsilon;\xi_r(\tau)) = -\epsilon[q_n(\xi_r(\tau)) - \xi_r(\tau)q_{n-1}(\xi_r(\tau))]$ e, então,

$$sgn(Q_n(\tau+\epsilon;\xi_r(\tau))) = (-1)^{n-r} sgn(\epsilon). \tag{4.5}$$

Supondo ϵ suficientemente pequeno e $\tau+\epsilon < 1$, como os zeros $\xi_r(\tau+\epsilon)$ de $Q_n(\tau+\epsilon; z)$ são todos positivos e distintos, segue, por (4.5), que

$$\xi_r(\tau+\epsilon) < \xi_r(\tau) \text{ quando } \epsilon > 0 \quad \text{e} \quad \xi_r(\tau+\epsilon) > \xi_r(\tau) \text{ quando } \epsilon < 0.$$

Observemos que

- $sgn[Q_n(\tau+\epsilon;\xi_r(\tau))] = (-1)^{n-r}$ se $\epsilon > 0$;
- $sgn[Q_n(\tau+\epsilon;\xi_r(\tau))] = (-1)^{n-r+1}$ se $\epsilon < 0$.

A Figura 4.3 mostra o comportamento estritamente decrescente dos zeros $\xi_r(\tau)$, $r = 1, 2, \ldots, n$, dos polinômios $Q_n(\tau; z)$ em relação a τ quando n é par.

Portanto, a prova do lema está completa. ■

O resultado do lema anterior pode ser estendido para $n = 1$ se tomarmos $q_0(z) = 1$, $q_1(z) = z - x_1$ e $Q_1(\tau; z) = (1-\tau)\,q_1(z) + \tau\,z\,q_0(z) = z - x_1 + \tau\,x_1 = z - \xi_1(\tau)$, com $0 < x_1$, onde $\xi_1(\tau) = (1-\tau)x_1$.

Podemos verificar facilmente que $\xi_1(\tau) = (1-\tau)x_1$ é tal que $0 < \xi_1(\tau) < x_1$ se $0 < \tau < 1$, e $x_1 < \xi_1(\tau)$ se $\tau < 0$. Além disso, $\xi_1(\tau)$ é uma função estritamente decrescente. De fato,

$$0 = Q_1(\tau;\xi_1(\tau)) = (1-\tau)(\xi_1(\tau) - x_1) + \tau\xi_1(\tau) = \xi_1(\tau) - (1-\tau)x_1,$$

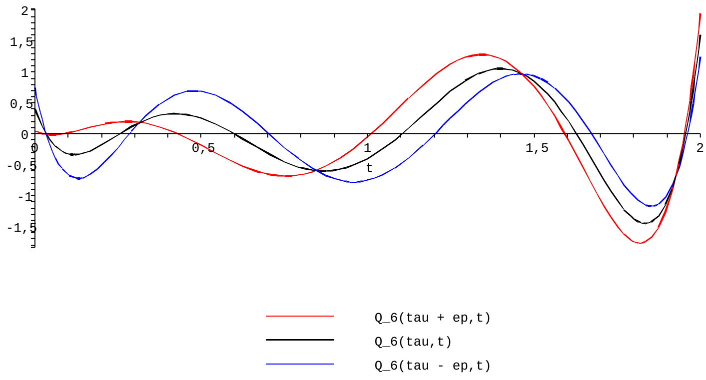

Figura 4.3: Comportamento dos polinômios $Q_n(\tau+\epsilon; z)$, $Q_n(\tau; z)$ e $Q_n(\tau-\epsilon; z)$ para $\epsilon > 0$ e n par $(n = 6)$.

o que implica que $\xi_1(\tau) = (1-\tau)x_1$.

Agora, se $0 < \tau < 1$, temos

- $sgn(Q_1(\tau; 0)) = sgn(q_1(0)) = -1$;
- $sgn(Q_1(\tau; x_1)) = sgn(\tau x_1) = +1$.

Assim, $0 < \xi_1(\tau) < x_1$ (veja Figura 4.4 a seguir).

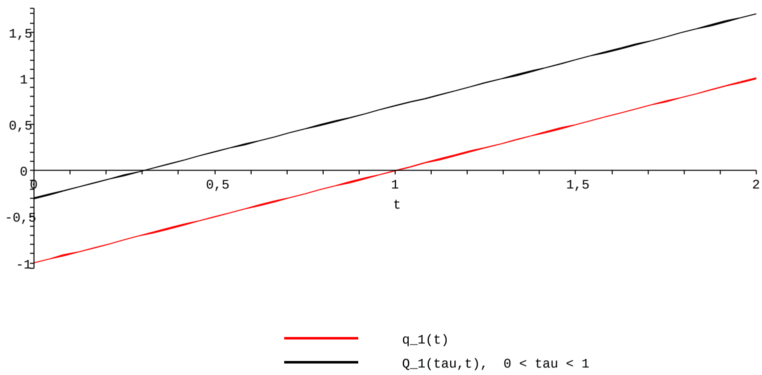

Figura 4.4: $0 < \xi_1(\tau) < x_1$ para $0 < \tau < 1$.

Se $\tau < 0$, então

- $sgn(Q_1(\tau; 0)) = -1$;
- $sgn(Q_1(\tau; x_1)) = -1$.

Logo, $x_1 < \xi_1(\tau)$ (veja Figura 4.5).

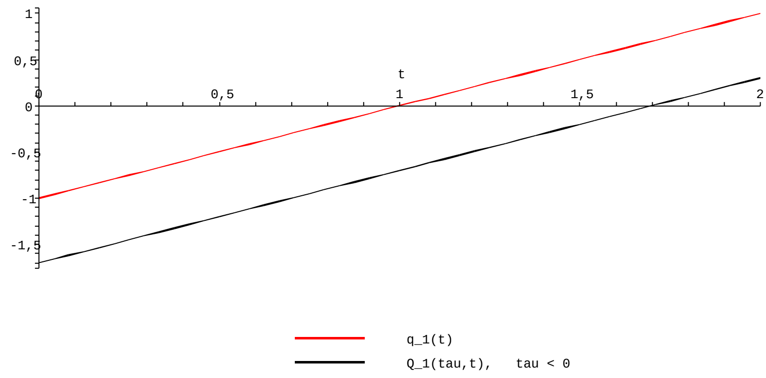

Figura 4.5: $x_1 < \xi_1(\tau)$ para $\tau < 0$.

Verifiquemos, agora, a monotocidade dos zeros de $Q_1(\tau; z)$ em relação a τ. Observe que $Q_1(\tau; z) = q_1(z) - \tau[q_1(z) - z]$. Logo, para $0 < \tau < 1$,

$$sgn[q_1(\xi_1(\tau)) - \xi_1(\tau)] = \frac{sgn[q_1(\xi_1(\tau))]}{sgn(\tau)} = -1.$$

Considerando o polinômio $Q_1(\tau+\epsilon; z) = Q_1(\tau; z) - \epsilon[q_1(z) - z]$, temos que $Q_1(\tau+\epsilon; \xi_1(\tau)) = -\epsilon[q_1(\xi_1(\tau)) - \xi_1(\tau)]$ e $sgn[Q_1(\tau+\epsilon; \xi_1(\tau))] = sgn(\epsilon)$. Assim,

- $sgn[Q_1(\tau+\epsilon; \xi_1(\tau))] = +1$ se $\epsilon > 0$;
- $sgn[Q_1(\tau+\epsilon; \xi_1(\tau))] = -1$ se $\epsilon < 0$.

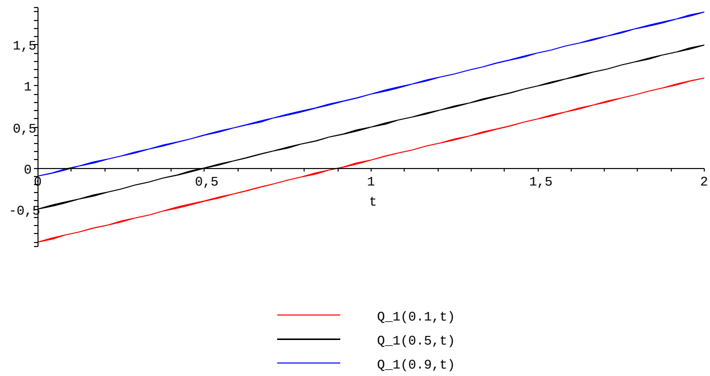

Figura 4.6: Comportamento estritamente decrescente de $\xi_1(\tau)$ em relação a $0 < \tau < 1$.

Portanto, $\xi_1(\tau+\epsilon) < \xi_1(\tau)$ quando $\epsilon > 0$ e $\xi_1(\tau+\epsilon) > \xi_1(\tau)$ quando $\epsilon < 0$ (veja Figura 4.6).

4.2 Polinômios L-ortogonais e os coeficientes de conexão

Primeiramente, vamos expressar (4.1) de uma maneira mais detalhada. Sejam $0 \leq a_0 < b_0 \leq \infty$, $d\psi_0$ e $d\psi_1$ duas medidas cujos suportes estão em $[a_0, b_0]$ e em $[a, b] \supseteq [a_0, b_0]$, respectivamente, tais que

$$\int_a^b f(z)\, d\psi_1(z) = \frac{M}{M+1} f(\kappa) + c \int_{a_0}^{b_0} (z-\kappa)^{-1} f(z)\, d\psi_0(z), \tag{4.6}$$

para todo polinômio L-ortogonal f, com $\kappa \in (-\infty, a_0] \cup [b_0, \infty)$.

Considera-se $sgn(c) = sgn[\int_{a_0}^{b_0} (z-\kappa)^{-1}\, d\psi_0(z)]$, $M = 0$ se $\kappa \leq 0$ e $M \geq 0$ se $\kappa \in (0, a_0] \cup [b_0, \infty)$. Assim, $(a, b) \subseteq (0, \infty)$ é tal que

- $[a, b] = [\kappa, b_0]$ se $M > 0$ e $0 < \kappa < a_0$;
- $[a, b] = [a_0, \kappa]$ se $M > 0$ e $b_0 < \kappa < \infty$;
- $[a, b] = [a_0, b_0]$, caso contrário.

Portanto, $\int_a^b f(z)(z-\kappa) d\psi_1(z) = \int_{a_0}^{b_0} f(z)\, c\, d\psi_0(z)$ e (4.1) é válido desde que $\int_a^b f(z) d\psi_0(z) = \int_{a_0}^{b_0} f(z) d\psi_0(z)$. Quando $\kappa = a_0$ (ou $\kappa = b_0$), precisamos supor a existência de $\int_{a_0}^{b_0} (a_0 - \kappa)^{-1} d\psi_0(z)$ ou $\int_{a_0}^{b_0} (b_0 - \kappa)^{-1} d\psi_0(z)$.

Observe que, quando $\kappa > 0$ e $M > 0$, a medida $d\psi_1$ tem um salto de $M/(M+1)$ em κ. Além disso, se c é escolhido como sendo $c(\psi_0; \kappa, M) = \dfrac{1}{(M+1) \int_{a_0}^{b_0} (z-\kappa)^{-1} d\psi_0(z)}$, então o salto total $\mu_0^{\psi_1}$ é igual a 1.

Teorema 4.2. *Sejam $\{B_n^{\psi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{B_n^{\psi_1}\}_{n=0}^{\infty}$ duas sequências de polinômios L-ortogonais com relação às medidas fortes ψ_0 e ψ_1, respectivamente. Então, temos a seguinte fórmula de conexão entre eles.*

$$B_n^{\psi_1}(z) = (1 - \tau_n) B_n^{\psi_0}(z) + \tau_n\, z\, B_{n-1}^{\psi_0}(z), \ n \geq 1, \tag{4.7}$$

onde $\tau_n = c^{-1} \dfrac{\sigma_{n,n}^{\psi_1}}{\sigma_{n-1,n-1}^{\psi_0}}$. Aqui, $\sigma_{n,m}^{\psi_i} = \int_a^b z^{-n+m} B_n^{\psi_i}(z) d\psi_i(z)$, $i = 0, 1$.

Os coeficientes τ_n, $n \geq 1$, satisfazem

$$0 < \tau_n < 1 \ \text{ se } \ \kappa \leq a_0 \quad \text{e} \quad \tau_n < 0 \ \text{ se } \ \kappa \geq b_0,$$

e são tais que

$$\tau_{n+1} \alpha_{n+1}^{\psi_0} = \tau_n \alpha_{n+2}^{\psi_1}, \qquad (1 - \tau_{n+1}) \beta_{n+1}^{\psi_0} = (1 - \tau_n) \beta_{n+1}^{\psi_1}, \ \ n \geq 1, \tag{4.8}$$

com $\tau_1\, c\, \mu_0^{\psi_0} = \mu_0^{\psi_1} \alpha_2^{\psi_1}$ e $(1 - \tau_1) \beta_1^{\psi_0} = \beta_1^{\psi_1}$.

Demonstração: Expressando $B_n^{\psi_1}$ como uma combinação linear da sequência linearmente independente de polinômios $\{z^{n-j}Q_j^{\psi_0}(z)\}_{j=0}^{n}$ e usando (1.54), obtemos (4.7). De fato, podemos escrever $B_n^{\psi_1}$ como

$$B_n^{\psi_1}(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j\, z^{n-j} B_j^{\psi_0}(z). \tag{4.9}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por z^{-n+s} e integrando com relação a $d\psi_0$, obtemos

$$\int_{a_0}^{b_0} z^{-n+s} B_n^{\psi_1}(z) d\psi_0(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j \int_{a_0}^{b_0} z^{-j+s} B_j^{\psi_0}(z) d\psi_0(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j \sigma_{j,s}^{\psi_0}. \tag{4.10}$$

De (4.6), temos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b z^{-n+s}(z-\kappa) B_n^{\psi_1}(z) d\psi_1(z) &= \frac{M}{M+1} \kappa^{-n+s}(\kappa-\kappa) B_n^{\psi_1}(\kappa) \\
&\quad + c\int_{a_0}^{b_0} (z-\kappa)^{-1} z^{-n+s}(z-\kappa) B_n^{\psi_1}(z) d\psi_0(z) \\
&= c\int_{a_0}^{b_0} z^{-n+s} B_n^{\psi_1}(z) d\psi_0(z).
\end{aligned}$$

Logo, de (4.10) e da relação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\int_a^b z^{-n+s}(z-\kappa) B_n^{\psi_1}(z) d\psi_1(z) &= \frac{1}{c}\int_a^b z^{-n+s+1} B_n^{\psi_1}(z) d\psi_1(z) - \frac{\kappa}{c}\int_a^b z^{-n+s} B_n^{\psi_1}(z) d\psi_1(z) \\
&= \sum_{j=0}^{n} c_j \sigma_{j,s}^{\psi_0}.
\end{aligned}$$

Agora, como, por (1.54),

$$\int_a^b z^{-n+s+1} B_n^{\psi_1}(z) d\psi_1(z) = 0, \quad -1 \le s \le n-2$$

e

$$\int_a^b z^{-n+s} B_n^{\psi_1}(z) d\psi_1(z) = 0, \quad 0 \le s \le n-1,$$

segue que

$$\begin{pmatrix}
\sigma_{0,0}^{\psi_0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\sigma_{0,1}^{\psi_0} & \sigma_{1,1}^{\psi_0} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\sigma_{0,n-1}^{\psi_0} & \sigma_{1,n-1}^{\psi_0} & \dots & \sigma_{n-1,n-1}^{\psi_0} & 0 \\
\sigma_{0,n}^{\psi_0} & \sigma_{1,n}^{\psi_0} & \dots & \sigma_{n-1,n}^{\psi_0} & \sigma_{n,n}^{\psi_0}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{c}\sigma_{n,n}^{\psi_1} \\ \frac{1}{c}\sigma_{n,n+1}^{\psi_1} - \frac{\kappa}{c}\sigma_{n,n}^{\psi_1} \end{pmatrix}.$$

Portanto, (4.9) pode ser escrito como $B_n^{\psi_1}(z) = c_{n-1}\, z\, B_{n-1}^{\psi_0}(z) + c_n\, B_n^{\psi_0}(z)$, pois $c_j = 0$ para $j = 0, 1, \ldots, n-2$, onde $c_{n-1} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\sigma_{n,n}^{\psi_1}}{\sigma_{n-1,n-1}^{\psi_0}} = \tau_n$, ou seja, chegamos que

$$B_n^{\psi_1}(z) = c_n\, B_n^{\psi_0}(z) + \tau_n\, z\, B_{n-1}^{\psi_0}(z).$$

Comparando os coeficientes dos termos de grau n em ambos os lados da espressão acima, obtemos $1 = c_n + \tau_n$. Logo,

$$B_n^{\psi_1}(z) = (1-\tau_n)B_n^{\psi_0}(z) + \tau_n\, z\, B_{n-1}^{\psi_0}(z).$$

Como $c = \Big[(M+1)\int_{a_0}^{b_0}(z-\kappa)^{-1}d\psi_0(z)\Big]^{-1}$, isto significa que $c > 0$ se $\kappa \leq a_0$ e $c < 0$ se $\kappa \geq b_0$. Desde que $c\,\tau_n = \dfrac{\sigma_{n,n}^{\psi_1}}{\sigma_{n-1,n-1}^{\psi_0}}$, temos que $\tau_n > 0$ se $\kappa \leq a_0$ e $\tau_n < 0$ se $\kappa \geq b_0$.

O conjunto suporte de ambas as medidas está contido em $[0, \infty]$ e, portanto, os zeros de $B_n^{\psi_0}$ e $B_n^{\psi_1}$ pertencem a $(0, \infty)$. Segue que, $sgn(B_n^{\psi_0}(0)) = sgn(B_n^{\psi_1}(0)) = (-1)^n$ e, portanto, usando (4.7), temos que $\tau_n < 1$.

Agora, usando os coeficientes da relação de recorrência (1.57), temos

$$\frac{\alpha_{n+1}^{\psi_0}}{\alpha_{n+2}^{\psi_1}} = \frac{\sigma_{n,n}^{\psi_1}}{\sigma_{n-1,n-1}^{\psi_0}}\frac{\sigma_{n,n}^{\psi_0}}{\sigma_{n+1,n+1}^{\psi_1}} = \frac{\sigma_{n,n}^{\psi_1}}{\sigma_{n-1,n-1}^{\psi_0}}\frac{\sigma_{n,n}^{\psi_0}}{\sigma_{n+1,n+1}^{\psi_1}} = \frac{\tau_n}{\tau_{n+1}}.$$

Isto implica que $\tau_{n+1}\, \alpha_{n+1}^{\psi_0} = \tau_n\, \alpha_{n+2}^{\psi_1}$, $n \geq 1$.

Para a condição inicial, temos que

$$\tau_1\, c = \frac{\sigma_{1,1}^{\psi_1}}{\sigma_{0,0}^{\psi_0}} = \frac{\alpha_2^{\psi_1}\sigma_{0,0}^{\psi_1}}{\sigma_{0,0}^{\psi_0}} = \frac{\alpha_2^{\psi_1}\mu_0^{\psi_1}}{\mu_0^{\psi_0}},$$

o que implica que $\tau_1\, c\, \mu_0^{\psi_0} = \mu_0^{\psi_1}\alpha_2^{\psi_1}$.

Agora, fazendo $z = 0$ em (4.7), obtemos

$$B_n^{\psi_1}(0) = (1-\tau_n)B_n^{\psi_0}(0).$$

Usando o resultado (1.59) na relação acima, segue que

$$\beta_1^{\psi_1}\beta_2^{\psi_1}\ldots\beta_n^{\psi_1} = (1-\tau_n)\beta_1^{\psi_0}\beta_2^{\psi_0}\ldots\beta_n^{\psi_0}, \quad n \geq 1. \tag{4.11}$$

Logo, $\dfrac{1-\tau_{n+1}}{1-\tau_n} = \dfrac{\beta_{n+1}^{\psi_1}}{\beta_{n+1}^{\psi_0}}$, o que implica que

$$(1-\tau_{n+1})\beta_{n+1}^{\psi_0} = (1-\tau_n)\beta_{n+1}^{\psi_1}, \quad n \geq 1.$$

Para a condição inicial, segue, de (4.11), que $(1-\tau_1)\beta_1^{\psi_0} = \beta_1^{\psi_1}$.

Concluimos, assim, a demonstração do teorema. ■

Existe uma outra fórmula de conexão entre $B_n^{\psi_1}$ e $B_n^{\psi_0}$, análoga à fórmula de Christoffel, dada por

$$(z-\kappa)B_n^{\psi_0}(z) = B_{n+1}^{\psi_1}(z) + \hat{\tau}_n B_n^{\psi_1}(z),$$

onde $\hat{\tau}_n = c\dfrac{\sigma_{n,-1}^{\psi_0}}{\sigma_{n,-1}^{\psi_1}} = -\dfrac{B_{n+1}^{\psi_1}(\kappa)}{B_n^{\psi_1}(\kappa)}$. A demonstração deste fato é análoga à do Lema 3.1.

Agora, usando a relação de recorrência de três termos (1.57) para $B_n^{\psi_0}$ em (4.7), obtemos

$$\begin{aligned} B_n^{\psi_1}(z) &= (1-\tau_n)B_n^{\psi_0}(z) + \frac{\tau_n}{\alpha_{n+1}^{\psi_0}}\left[-B_{n+1}^{\psi_0}(z) + (z-\beta_{n+1}^{\psi_0})B_n^{\psi_0}(z)\right] \\ &= \left[(1-\tau_n) + \frac{\tau_n}{\alpha_{n+1}^{\psi_0}}(z-\beta_{n+1}^{\psi_0})\right]B_n^{\psi_0}(z) - \frac{\tau_n}{\alpha_{n+1}^{\psi_0}}B_{n+1}^{\psi_0}(z). \end{aligned}$$

Como, por (4.8), $\dfrac{\tau_n}{\alpha_{n+1}^{\psi_0}} = \dfrac{\tau_n+1}{\alpha_{n+2}^{\psi_1}}$, segue que

$$B_n^{\psi_1}(z) = \left[(1-\tau_n) + \frac{\tau_{n+1}}{\alpha_{n+2}^{\psi_1}}(z-\beta_{n+1}^{\psi_0})\right]B_n^{\psi_0}(z) - \frac{\tau_{n+1}}{\alpha_{n+2}^{\psi_1}}B_{n+1}^{\psi_0}(z), \quad n \geq 0, \tag{4.12}$$

na qual devemos ter $\tau_0 = 0$.

Substituindo (4.7) e (4.12) em (1.57) e usando (4.8), temos que

$$\begin{aligned} B_{n+1}^{\psi_1}(z) &= (z-\beta_{n+1}^{\psi_1})B_n^{\psi_1}(z) - \alpha_{n+1}^{\psi_1}\, z\, B_{n-1}^{\psi_1}(z) \\ &= (z-\beta_{n+1}^{\psi_1})\left[(1-\tau_n)B_n^{\psi_0}(z) + \tau_n\, z\, B_{n-1}^{\psi_0}(z)\right] \\ &\quad -\alpha_{n+1}^{\psi_1} z\left[\left((1-\tau_{n-1}) + \frac{\tau_{n-1}}{\alpha_n^{\psi_0}}(z-\beta_n^{\psi_0})\right)B_{n-1}^{\psi_0}(z) - \frac{\tau_{n-1}}{\alpha_n^{\psi_0}}B_n^{\psi_0}(z)\right]. \end{aligned}$$

Como, por (4.7), $B_{n+1}^{\psi_1}(z) = (1-\tau_{n+1})B_{n+1}^{\psi_0}(z) + \tau_{n+1}\, z\, B_n^{\psi_0}(z)$, segue que

$$\begin{aligned} (1-\tau_{n+1})B_{n+1}^{\psi_0}(z) &= \left[-\tau_{n+1}\, z + (1-\tau_n)(z-\beta_{n+1}^{\psi_1}) + \left(\frac{\tau_{n-1}}{\alpha_n^{\psi_0}}\alpha_{n+1}^{\psi_1}\right)z\right]B_n^{\psi_0}(z) \\ &\quad +B_{n-1}^{\psi_0}(z)\left[(z-\beta_{n+1}^{\psi_1})\tau_n\, z - \alpha_{n+1}^{\psi_1}z(1-\tau_{n-1}) - \left(\frac{\tau_{n-1}}{\alpha_n^{\psi_0}}\alpha_{n+1}^{\psi_1}\right)z(z-\beta_n^{\psi_0})\right] \\ &= B_n^{\psi_0}(z)\left[-\tau_{n+1}\, z + z - \beta_{n+1}^{\psi_1} - \tau_n\, z + \tau_n\beta_{n+1}^{\psi_1} + \tau_n\, z\right] \\ &\quad +B_{n-1}^{\psi_0}(z)\left[\tau_n z^2 - \tau_n\beta_{n+1}^{\psi_1}z - \alpha_{n+1}^{\psi_1}z(1-\tau_{n-1}) - \tau_n z^2 + \tau_n z\beta_n^{\psi_0}\right] \\ &= B_n^{\psi_0}(z)\left[(1-\tau_{n+1})z - (1-\tau_n)\beta_{n+1}^{\psi_1}\right] \\ &\quad -zQ_{n-1}^{\psi_0}(z)\left[\tau_n(\beta_{n+1}^{\psi_1} - \beta_n^{\psi_0}) + (1-\tau_{n-1})\alpha_{n+1}^{\psi_1}\right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} B_{n+1}^{\psi_0}(z) &= \left[z - \frac{(1-\tau_n)}{(1-\tau_{n+1})}\beta_{n+1}^{\psi_1}\right] B_n^{\psi_0}(z) \\ &\quad - \left[\frac{\tau_n}{1-\tau_{n+1}}(\beta_{n+1}^{\psi_1} - \beta_n^{\psi_0}) + \frac{1-\tau_{n-1}}{1-\tau_{n+1}}\alpha_{n+1}^{\psi_1}\right] z\, B_{n-1}^{\psi_0}(z). \end{aligned}$$

Comparando esta relação com a relação de recorrência de três termos para $B_n^{\psi_0}(z)$ em (1.57), obtemos

$$\frac{\tau_n}{1-\tau_{n+1}}(\beta_{n+1}^{\psi_1} - \beta_n^{\psi_0}) + \frac{1-\tau_{n-1}}{1-\tau_{n+1}}\alpha_{n+1}^{\psi_1} = \alpha_{n+1}^{\psi_0},$$

o que implica que

$$\tau_n\,(\beta_{n+1}^{\psi_1} - \beta_n^{\psi_0}) + (1-\tau_{n-1})\,\alpha_{n+1}^{\psi_1} = (1-\tau_{n+1})\,\alpha_{n+1}^{\psi_0}.$$

Logo,

$$\tau_n\,\beta_n^{\psi_0} + (1-\tau_{n+1})\,\alpha_{n+1}^{\psi_0} = \tau_n\,\beta_{n+1}^{\psi_1} + (1-\tau_{n-1})\,\alpha_{n+1}^{\psi_1}, \quad n \geq 1. \tag{4.13}$$

Como consequência de (4.13) e dos resultados do Teorema 4.2, seguem as seguintes propriedades invariantes.

Teorema 4.3.

$$\left[\tau_n\beta_{n+1}^{\psi_0} - (1-\tau_n)\alpha_{n+1}^{\psi_0}\right]\frac{1-\tau_{n+1}}{\tau_n} = \left[\tau_n\beta_n^{\psi_1} - (1-\tau_n)\alpha_{n+1}^{\psi_1}\right]\frac{1-\tau_{n-1}}{\tau_n} = \kappa, \tag{4.14}$$

para $n \geq 1$, *com* $\tau_0 = 0$. *Além disso,*

$$\left[\beta_1^{\psi_0} - c\,\frac{\mu_0^{\psi_0}}{\mu_0^{\psi_1}}\right](1-\tau_1) = \kappa.$$

Demonstração: Seja $\Omega_n = \left[\tau_n\beta_{n+1}^{\psi_0} - (1-\tau_n)\alpha_{n+1}^{\psi_0}\right]\dfrac{1-\tau_{n+1}}{\tau_n}$, $n \geq 1$. Logo,

$$\Omega_n = (1-\tau_{n+1})\beta_{n+1}^{\psi_0} - \frac{(1-\tau_n)(1-\tau_{n+1})}{\tau_n}\,\alpha_{n+1}^{\psi_0}.$$

Usando (4.8) e (4.13), obtemos

$$\Omega_n = (1-\tau_n)\beta_{n+1}^{\psi_1} - \frac{(1-\tau_n)}{\tau_n}\left[-\tau_n\beta_n^{\psi_0} + \tau_n\beta_{n+1}^{\psi_1} + (1-\tau_{n-1})\alpha_{n+1}^{\psi_1}\right].$$

Assim,

$$\Omega_n = \left[\tau_n\beta_n^{\psi_0} - (1-\tau_{n-1})\alpha_{n+1}^{\psi_1}\right]\frac{1-\tau_n}{\tau_n}, \; n \geq 1. \tag{4.15}$$

De (4.8), substituindo $(1-\tau_n)\,\beta_n^{\psi_0}$ por $(1-\tau_{n-1})\,\beta_n^{\psi_1}$ em (4.15), obtemos

$$\Omega_n = \left[\tau_n\beta_n^{\psi_1} - (1-\tau_n)\alpha_{n+1}^{\psi_1}\right]\frac{1-\tau_{n-1}}{\tau_n}, \; n \geq 1.$$

Voltando em (4.15), usando o Teorema 4.2, podemos substituir $\alpha_{n+1}^{\psi_1}$ por $\dfrac{\tau_n\alpha_n^{\psi_0}}{\tau_{n-1}}$. Logo,

$$\begin{aligned}\Omega_n &= \left[\tau_n\beta_n^{\psi_0} - (1-\tau_{n-1})\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}\alpha_n^{\psi_0}\right]\frac{1-\tau_n}{\tau_n}\\ &= \left[\beta_n^{\psi_0} - (1-\tau_{n-1})\frac{\alpha_n^{\psi_0}}{\tau_{n-1}}\right](1-\tau_n)\\ &= \left[\tau_{n-1}\beta_n^{\psi_0} - (1-\tau_{n-1})\alpha_n^{\psi_0}\right]\frac{1-\tau_n}{\tau_{n-1}} \;=\; \Omega_{n-1},\;\; n\geq 2.\end{aligned}$$

Agora, vamos verificar que $\Omega_1 = \left[\tau_1\beta_1^{\psi_1} - (1-\tau_1)\alpha_2^{\psi_1}\right]/\tau_1 = \kappa$. Temos que

$$\Omega_1 = \frac{\tau_1\beta_1^{\psi_1} - (1-\tau_1)\alpha_2^{\psi_1}}{\tau_1} = \beta_1^{\psi_1} - \frac{(1-\tau_1)}{\tau_1}\alpha_2^{\psi_1} = \beta_1^{\psi_1} - \frac{\alpha_2^{\psi_1}}{\tau_1} + \alpha_2^{\psi_1}.$$

De (1.57), temos que $\alpha_2^{\psi_1} = \dfrac{\sigma_{1,1}^{\psi_1}}{\sigma_{0,0}^{\psi_1}} = \dfrac{\mu_1^{\psi_1} - \beta_1^{\psi_1}\mu_0^{\psi_1}}{\mu_0^{\psi_1}}$. Usando este resultado, o Teorema 4.2 e a equação (4.2), obtemos

$$\Omega_1 = \beta_1^{\psi_1} - c\frac{\mu_0^{\psi_0}}{\mu_0^{\psi_1}} + \frac{\mu_1^{\psi_1} - \beta_1^{\psi_1}\mu_0^{\psi_1}}{\mu_0^{\psi_1}} = \frac{\mu_1^{\psi_1} - c\mu_0^{\psi_0}}{\mu_0^{\psi_1}} = \kappa.$$

Finalmente, de (4.15),

$$\kappa = \left[\tau_1\beta_1^{\psi_0} - \alpha_2^{\psi_1}\right]\frac{(1-\tau_1)}{\tau_1} = \left[\beta_1^{\psi_0} - \frac{\alpha_2^{\psi_1}}{\tau_1}\right](1-\tau_1) = \left[\beta_1^{\psi_0} - c\frac{\mu_0^{\psi_0}}{\mu_0^{\psi_1}}\right](1-\tau_1).$$

■

Quando $c = c(\psi_0;\kappa,M)$, a ultima equação do teorema anterior pode ser escrita como

$$\left[\beta_1^{\psi_0} - c(\psi_0;\kappa,M)\mu_0^{\psi_0}\right](1-\tau_1) = \kappa.$$

4.3 Geração numérica dos coeficientes e exemplos

Dada uma medida positiva forte $d\psi$, conhecer os coeficientes $\{\alpha_n^{\psi},\beta_n^{\psi}\}$ das relações de recorrência de três termos para os polinômios L-ortogonais associados é muito útil em vários contextos, tais como na geração numérica dos valores dos polinômios, seus zeros, etc.

Como consequência imediata dos Teoremas 4.2 e 4.3, temos técnicas simples para gerar qualquer um dos pares de coeficientes $\{\alpha_n^{\psi_0},\beta_n^{\psi_0}\}$ ou $\{\alpha_n^{\psi_1},\beta_n^{\psi_1}\}$, dado o outro.

Algoritmo 4.3.1. *Suponhamos que* $\{\alpha_n^{\psi_1}\}_{n=2}^{N+1}$ *e* $\{\beta_n^{\psi_1}\}_{n=1}^{N}$ *sejam conhecidos. Então, os coeficientes* $\{\alpha_n^{\psi_0}\}_{n=2}^{N}$ *e* $\{\beta_n^{\psi_0}\}_{n=1}^{N}$ *podem ser calculados por*

$$\alpha_n^{\psi_0} = \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}\,\alpha_{n+1}^{\psi_1}, \quad n = 2, 3, \ldots, N, \qquad \beta_n^{\psi_0} = \frac{1-\tau_{n-1}}{1-\tau_n}\,\beta_n^{\psi_1}, \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

em que $\{\tau_n\}_{n=1}^{N}$ *pode ser gerado por*

$$\tau_n = \frac{\alpha_{n+1}^{\psi_1}(1-\tau_{n-1})}{(\beta_n^{\psi_1}+\alpha_{n+1}^{\psi_1})(1-\tau_{n-1})-\kappa}, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \tag{4.16}$$

com $\tau_0 = 0$.

Algoritmo 4.3.2. *Seja a medida* $d\psi_1$ *em* (4.6) *tal que* $c = c(\psi_0; \kappa, M)$. *Suponhamos que* $c\,\mu_0^{\psi_0}$, $\{\alpha_n^{\psi_0}\}_{n=2}^{N}$ *e* $\{\beta_n^{\psi_0}\}_{n=1}^{N}$ *sejam conhecidos. Então, os coeficientes* $\{\alpha_n^{\psi_1}\}_{n=2}^{N+1}$ *e* $\{\beta_n^{\psi_1}\}_{n=1}^{N}$ *podem ser calculados por*

$$\alpha_2^{\psi_1} = \tau_1\,\beta_1^{\psi_0} - \frac{\kappa\,\tau_1}{1-\tau_1}, \qquad \alpha_n^{\psi_1} = \frac{\tau_{n-1}}{\tau_{n-2}}\,\alpha_{n-1}^{\psi_0}, \quad n = 3, 4, \ldots, N+1,$$

$$\beta_1^{\psi_1} = (1-\tau_n)\,\beta_1^{\psi_0}, \qquad \beta_n^{\psi_1} = \frac{1-\tau_n}{1-\tau_{n-1}}\,\beta_n^{\psi_0}, \quad n = 2, 3, \ldots, N,$$

em que $\tau_n = \dfrac{\alpha_{n+1}^{\psi_0}}{\alpha_{n+1}^{\psi_0}+\beta_{n+1}^{\psi_0}}$, $n = 1, 2, \ldots, N$ *se* $\kappa = 0$ *e* $\{\tau_n\}_{n=1}^{N}$, *para* $\kappa \neq 0$, *pode ser gerado por*

$$\tau_1 = 1 - \frac{\kappa}{\beta_1^{\psi_0} - c\,\mu_0^{\psi_0}}, \quad \tau_n = 1 - \frac{\kappa\,\tau_{n-1}}{(\beta_n^{\psi_0}+\alpha_n^{\psi_0})\tau_{n-1} - \alpha_n^{\psi_0}}, \quad n = 2, 3, \ldots, N. \tag{4.17}$$

Demonstração: Por (4.14), temos

$$\left[\tau_1\,\beta_1^{\psi_1} - (1-\tau_1)\alpha_2^{\psi_1}\right] - \kappa\,\tau_1 = 0$$

e, isto implica que, $\alpha_2^{\psi_1}(1-\tau_1) = \tau_1\,\beta_1^{\psi_1} - \kappa\,\tau_1$. Logo,

$$\alpha_2^{\psi_1} = \frac{\tau_1\,\beta_1^{\psi_1}}{1-\tau_1} - \frac{\kappa\,\tau_1}{1-\tau_1}. \tag{4.18}$$

Como, pelo Teorema 4.2, $\beta_1^{\psi_0} = \dfrac{\beta_1^{\psi_1}}{1-\tau_1}$, então (4.18) pode ser escrito como

$$\alpha_2^{\psi_1} = \tau_1\,\beta_1^{\psi_0} - \frac{\kappa\,\tau_1}{1-\tau_1}.$$

Por (4.8), temos

$$\alpha_n^{\psi_1} = \frac{\tau_{n-1}}{\tau_{n-2}}\alpha_{n-1}^{\psi_0}, \quad n = 3, 4, \ldots, N+1.$$

Ainda por (4.8),

$$\beta_n^{\psi_1} = \frac{1-\tau_n}{1-\tau_{n-1}}\,\beta_n^{\psi_0}, \quad n = 2, 3, \ldots, N,$$

com $\beta_1^{\psi_1} = \dfrac{1-\tau_1}{1-\tau_0}\,\beta_1^{\psi_0}$. Logo,

$$\beta_n^{\psi_1} = \frac{1-\tau_n}{1-\tau_{n-1}}\,\beta_n^{\psi_0}, \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

Agora, fazendo $\kappa = 0$ em (4.14), temos

$$\tau_n\,\beta_{n+1}^{\psi_0} - (1-\tau_n)\alpha_{n+1}^{\psi_0} = 0,$$

o que implica que $\tau_n = \dfrac{\alpha_{n+1}^{\psi_0}}{\beta_{n+1}^{\psi_0} + \alpha_{n+1}^{\psi_0}}$, $n = 1, 2, \ldots, N$.

Usando ainda os resultados do Teorema 4.3 para $\kappa \neq 0$, obtemos $\tau_1 = 1 - \dfrac{\kappa}{\beta_1^{\psi_0} - c\,\mu_0^{\psi_0}}$.

Por (4.14), temos que

$$\left[\tau_{n-1}\,\beta_n^{\psi_0} - (1-\tau_{n-1})\alpha_n^{\psi_0}\right](1-\tau_n) = \kappa\,\tau_{n-1},$$

o que implica em $\left[\tau_{n-1}\,(\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0}) - \alpha_n^{\psi_0}\right](1-\tau_n) = \kappa\,\tau_{n-1}$. Assim,

$$1 - \tau_n = \frac{\kappa\,\tau_{n-1}}{\tau_{n-1}\,(\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0}) - \alpha_n^{\psi_0}}\,.$$

Logo, $\tau_n = 1 - \dfrac{\kappa\,\tau_{n-1}}{\tau_{n-1}\,(\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0}) - \alpha_n^{\psi_0}}$, $n = 2, 3, \ldots, N$. ■

Do Teorema 4.2, temos que $0 < \tau_n < 1$, $n \geq 1$ se $\kappa \leq a_0$. Entretanto, usando os resultados do Algoritmo 4.3.2, podemos observar que

$$\frac{\alpha_{n+1}^{\psi_0}}{\beta_{n+1}^{\psi_0} + \alpha_{n+1}^{\psi_0}} < \frac{\alpha_{n+1}^{\psi_0}}{\beta_{n+1}^{\psi_0} + \alpha_{n+1}^{\psi_0} - \kappa} < \tau_n < 1, \quad n \geq 1, \text{ se } 0 < \kappa \leq a_0.$$

De fato, como $0 < \tau_n < 1$, segue de (4.17) que

$$0 < \frac{\kappa\,\tau_{n-1}}{\tau_{n-1}\,(\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0}) - \alpha_n^{\psi_0}} < 1, \quad n = 2, 3, \ldots, N.$$

Então,

$$\kappa\,\tau_{n-1} < (\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0})\tau_{n-1} - \alpha_n^{\psi_0}$$

ou, ainda,

$$(\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0} - \kappa)\tau_{n-1} > \alpha_n^{\psi_0} > 0, \tag{4.19}$$

o que implica que $\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0} - \kappa > 0$, pois $\tau_{n-1} > 0$.

Portanto, de (4.19), para $\kappa > 0$ temos que

$$1 > \tau_{n-1} > \frac{\alpha_n^{\psi_0}}{\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0} - \kappa} > \frac{\alpha_n^{\psi_0}}{\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0}}, \quad n = 2, 3, \ldots, N.$$

Substituindo n por $n+1$ nas desigualdades anteriores, obtemos

$$1 > \tau_n > \frac{\alpha_{n+1}^{\psi_0}}{\beta_{n+1}^{\psi_0} + \alpha_{n+1}^{\psi_0} - \kappa} > \frac{\alpha_{n+1}^{\psi_0}}{\beta_{n+1}^{\psi_0} + \alpha_{n+1}^{\psi_0}}, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1,$$

se $0 < \kappa \leq a_0$.

Conhecendo-se os coeficientes $\{\alpha_n^{\psi_0}\}_{n=2}^N$ e $\{\beta_n^{\psi_0}\}_{n=1}^N$ e o coeficiente de conexão τ_N, podemos gerar os zeros do polinômio $B_N^{\psi_1}$. De fato, de (4.7) e da relação de recorrência de três termos para $B_n^{\psi_0}$, temos que

$$\begin{aligned}
B_N^{\psi_1}(z) &= (1-\tau_N)B_N^{\psi_0}(z) + \tau_N\, z\, B_{N-1}^{\psi_0}(z) \\
&= (1-\tau_N)\Big[(z-\beta_N^{\psi_0})B_{N-1}^{\psi_0}(z) - \alpha_N^{\psi_0}\, z\, B_{N-2}^{\psi_0}(z)\Big] + \tau_N\, z\, B_{N-1}^{\psi_0}(z) \\
&= B_{N-1}^{\psi_0}(z)\Big[(1-\tau_N)(z-\beta_N^{\psi_0}) + \tau_N\, z\Big] - (1-\tau_N)\alpha_N^{\psi_0}\, z\, B_{N-2}^{\psi_0}(z) \\
&= \Big[z - (1-\tau_N)\beta_N^{\psi_0}\Big]\, B_{N-1}^{\psi_0}(z) - (1-\tau_N)\alpha_N^{\psi_0}\, z\, B_{N-2}^{\psi_0}(z) \\
&= (z - \tilde{\beta}_N^{\psi_0})\, B_{N-1}^{\psi_0}(z) - \tilde{\alpha}_N^{\psi_0}\, z\, B_{N-2}^{\psi_0}(z),
\end{aligned}$$

onde $\tilde{\beta}_N^{\psi_0} = (1-\tau_N)\,\beta_N^{\psi_0}$ e $\tilde{\alpha}_N^{\psi_0} = (1-\tau_N)\,\alpha_N^{\psi_0}$.

Usando o Teorema 1.19, podemos ver que os zeros de $B_N^{\psi_1}$ são os autovalores da matriz

$$\mathbf{H}_N^{\psi_0}(\kappa) = \begin{pmatrix}
\alpha_2^{\psi_0} + \beta_1^{\psi_0} & \alpha_3^{\psi_0} + \beta_2^{\psi_0} & \ldots & \alpha_{N-1}^{\psi_0} + \beta_{N-2}^{\psi_0} & \tilde{\alpha}_N^{\psi_0} + \beta_{N-1}^{\psi_0} & \tilde{\beta}_N^{\psi_0} \\
\alpha_2^{\psi_0} & \alpha_3^{\psi_0} + \beta_2^{\psi_0} & \ldots & \alpha_{N-1}^{\psi_0} + \beta_{N-2}^{\psi_0} & \tilde{\alpha}_N^{\psi_0} + \beta_{N-1}^{\psi_0} & \tilde{\beta}_N^{\psi_0} \\
0 & \alpha_3^{\psi_0} & \ldots & \alpha_{N-1}^{\psi_0} + \beta_{N-2}^{\psi_0} & \tilde{\alpha}_N^{\psi_0} + \beta_{N-1}^{\psi_0} & \tilde{\beta}_N^{\psi_0} \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & \alpha_{N-1}^{\psi_0} & \tilde{\alpha}_N^{\psi_0} + \beta_{N-1}^{\psi_0} & \tilde{\beta}_N^{\psi_0} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \tilde{\alpha}_N^{\psi_0} & \tilde{\beta}_N^{\psi_0}
\end{pmatrix}.$$

Exemplo 4.3.1. Em [20] Pastro considerou os polinômios ortogonais de Laurent associados à distribuição log-normal. Vamos considerar, neste exemplo, os polinômios L-ortogonais $B_n^{\psi_1}$ com respeito à medida forte $d\psi_1$ dada pela distribuição log-normal deslocada (modificada)

$$d\psi_1(z) = \frac{1}{2\,\omega\,\sqrt{\pi}}\, z^{-1}\, e^{-[\ln(z)/(2\omega)]^2} dz,$$

definida em $[a,b] = [0,\infty]$, com $\omega \in \mathbb{C}$ uma constante. Dos resultados de Pastro [20] e, também, de resultados dados em Common e McCabe [11] e Cooper, Jones e Thron [12], os polinômios

L-ortogonais $B_n^{\psi_1}$ relacionados a $d\psi_1$ são dados explicitamente por

$$B_n^{\psi_1} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r q^{-r(n-r)} \left\{ \begin{array}{c} n \\ r \end{array} \right\}_q q^{r/2} z^{n-r}, \quad n \geq 1,$$

ou através da relação de recorrência de três termos

$$B_{n+1}^{\psi_1}(z) = (z - q^{1/2}) B_n^{\psi_1}(z) - q^{1/2}(q^{-n} - 1)\, z\, B_{n-1}^{\psi_1}(z), \; n \geq 1,$$

com $B_1^{\psi_1}(z) = z - q^{1/2}$. Aqui, $q = e^{-2\omega^2}$ e $\left\{ \begin{array}{c} n \\ r \end{array} \right\}_q$ são os coeficientes q-binomiais dados por

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ r \end{array} \right\}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_r (q;q)_{n-r}}, \quad r = 0, 1, \ldots, n,$$

onde

$$(a;q)_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}), & \text{se } n = 1, 2, \ldots, \\ \left[(1-aq^{-1})(1-aq^{-2})\cdots(1-aq^{n})\right]^{-1}, & \text{se } n = -1, -2, \ldots. \end{cases}$$

Para mais detalhes veja [15].

Podemos usar o Algoritmo 4.3.1 para obter os coeficientes $\beta_n^{\psi_0}$ e $\alpha_n^{\psi_0}$ associados aos polinômios L-ortogonais, $B_n^{\psi_0}$, relacionados à medida $d\psi_0(z)$ dada por

$$d\psi_0(z) = \; z^{-1}\, e^{-[\ln(z)/(2\omega)]^2} (z - \kappa)\, dz$$

em $[a_0, b_0] = [0, \infty]$, onde $\kappa \leq 0$.

Temos que $\beta_{n+1}^{\psi_1} = q^{1/2}$ e $\alpha_{n+1}^{\psi_1} = q^{1/2}\,(q^{-n} - 1)$. Daí, pelo Algoritmo 4.3.1,

$$\alpha_n^{\psi_0} = \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}\, \alpha_{n+1}^{\psi_1} = \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}\, q^{1/2}(q^{-n} - 1), \; n \geq 2 \quad \text{e} \quad \beta_n^{\psi_0} = \frac{1 - \tau_{n-1}}{1 - \tau_n}\, q^{1/2}, \, n \geq 1,$$

em que

$$\tau_n = \frac{q^{1/2}\,(q^{-n} - 1)(1 - \tau_{n-1})}{[q^{1/2} + q^{1/2}\,(q^{-n} - 1)]\,(1 - \tau_{n-1}) - \kappa} = \frac{q^{1/2}\,(q^{-n} - 1)\,(1 - \tau_{n-1})}{q^{1/2}\, q^{-n}\,(1 - \tau_{n-1}) - \kappa}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 1 - \tau_n \; &= \; \frac{q^{1/2}\, q^{-n}\,(1 - \tau_{n-1}) - \kappa - q^{1/2}\,(q^{-n} - 1)(1 - \tau_{n-1})}{q^{1/2}\, q^{-n}\,(1 - \tau_{n-1}) - \kappa} \\ &= \; \frac{q^{1/2}\,(1 - \tau_{n-1})[q^{-n} - q^{-n} + 1] - \kappa}{q^{1/2}\, q^{-n}\,(1 - \tau_{n-1}) - \kappa} \\ &= \; \frac{q^{1/2}\,(1 - \tau_{n-1}) - \kappa}{q^{1/2}\, q^{-n}\,(1 - \tau_{n-1}) - \kappa}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

com $\tau_0 = 0$.

Exemplo 4.3.2. Dados $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, sejam $a = (\sqrt{\alpha+\beta} - \sqrt{\alpha})^2$ e $b = (\sqrt{\alpha+\beta} + \sqrt{\alpha})^2$. Para $\lambda \geq 0$, consideramos a medida $d\psi_1$ em $[a, b]$ dada por

$$d\psi_1(z) = c\, z^\lambda\, (b-z)^{\lambda-1/2}(z-a)^{\lambda-1/2}dz,$$

onde a constante positiva c pode ser arbitrariamente escolhida do ponto de vista dos polinômios L-ortogonais associados. Mas, se a escolhemos igual a $\left[\int_a^b z^\lambda(b-z)^{\lambda-1/2}(z-a)^{\lambda-1/2}dz\right]^{-1}$, então $\mu_0^{\psi_1} = 1$.

No artigo [22], o autor demonstrou que os polinômios L-ortogonais $B_n^{\psi_1}$ associados a esta medida têm como coeficientes da relação de recorrência de três termos

$$\beta_n^{\psi_1} = \beta, \quad \frac{\alpha_{n+1}^{\psi_1}}{\alpha} = \alpha_{n+1}^{(\lambda)} = \frac{n(n+2\lambda-1)}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)}, \ \ n \geq 1.$$

Suponhamos que $\alpha_2^{(0)} = 2$.

Podemos usar o Algoritmo 4.3.1 para obter os coeficientes $\beta_n^{\psi_0}$ e $\alpha_n^{\psi_0}$ associados aos polinômios L-ortogonais $B_n^{\psi_0}$ com respeito à medida $d\psi_0$ dada por

$$d\psi_0(z) = c\, z^\lambda\, (b-z)^{\lambda-1/2}(z-a)^{\lambda-1/2}\, |z-\kappa|\, dz$$

em $[a_0, b_0] = [a, b]$, onde κ é uma constante real fora de (a, b). Temos que

$$\alpha_n^{\psi_0} = \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}\, \alpha_{n+1}^{(\lambda)}\, \alpha, \ \ n \geq 2, \quad \beta_n^{\psi_0} = \frac{1-\tau_{n-1}}{1-\tau_n}\, \beta, \ \ n \geq 1,$$

em que τ_n satisfaz $\tau_n = \dfrac{\alpha\, \alpha_{n+1}^{(\lambda)}(1-\tau_{n-1})}{(\beta + \alpha\, \alpha_{n+1}^{(\lambda)})(1-\tau_{n-1}) - \kappa}$. Logo,

$$1 - \tau_n = \frac{\beta\,(1-\tau_{n-1}) - \kappa}{(\beta + \alpha\, \alpha_{n+1}^{(\lambda)})(1-\tau_{n-1}) - \kappa}, \ \ n \geq 1,$$

com $\tau_0 = 0$.

Existem casos especiais onde os τ_n podem ser dados explicitamente. Quando $\kappa = 0$ e $\lambda \geq 0$, obtemos

$$\tau_n = \frac{\alpha\, \alpha_{n+1}^{(\lambda)}}{\beta + \alpha\, \alpha_{n+1}^{(\lambda)}}, \ \ n \geq 1$$

e quando $\kappa = -\beta$ e $\lambda = 0$, considerando a expansão em fração contínua de $(1-\tau_n)(\beta+\alpha)/\beta$ (veja [18], pag. 194), obtemos

$$\tau_n = \frac{\alpha/\beta}{\sqrt{1+\alpha/\beta}}\, \frac{(1+\sqrt{1+\alpha/\beta})^{n-1} + (1-\sqrt{1+\alpha/\beta})^{n-1}}{(1+\sqrt{1+\alpha/\beta})^{n} - (1-\sqrt{1+\alpha/\beta})^{n}}, \ \ n \geq 1.$$

Exemplo 4.3.3. Dados $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, sejam $a_0 = (\sqrt{\alpha+\beta} - \sqrt{\alpha})^2$ e $b_0 = (\sqrt{\alpha+\beta} + \sqrt{\alpha})^2$. Para $\lambda \geq 0$, consideremos a medida $d\psi_0$ em $[a_0, b_0]$ dada por

$$d\psi_0(z) = z^\lambda\,(b_0 - z)^{\lambda-1/2}(z-a_0)^{\lambda-1/2}dz. \tag{4.20}$$

Os coeficientes da relação de recorrência de três termos dos polinômios L-ortogonais $B_n^{\psi_0}$ associados a $d\psi_0$ são dados por

$$\beta_n^{\psi_0} = \beta, \qquad \frac{\alpha_{n+1}^{\psi_0}}{\alpha} = \alpha_{n+1}^{(\lambda)} = \frac{n(n+2\lambda-1)}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)}, \quad n \geq 1,$$

onde $\alpha_2^{(0)} = 2$.

Podemos usar o Algoritmo 4.3.2 para obter os coeficientes $\beta_n^{\psi_1}$ e $\alpha_n^{\psi_1}$ associados aos polinômios L-ortogonais, $B_n^{\psi_1}$, com respeito à medida $d\psi_1$ dada por

$$\int_a^b f(z)d\psi_1(z) = \frac{M}{M+1}f(\kappa) + c(\lambda,\kappa,M)\int_{a_0}^{b_0} f(z)\frac{z^\lambda(b_0-z)^{\lambda-1/2}(z-a_0)^{\lambda-1/2}}{z-\kappa}dz, \tag{4.21}$$

onde $c(\lambda,\kappa,M) = [(M+1)\int_{a_0}^{b_0}(z-\kappa)^{-1}z^\lambda(b_0-z)^{\lambda-1/2}(z-a_0)^{\lambda-1/2}dz]^{-1}$. Além disso, $M \geq 0$ e $(a,b) \subseteq (0,\infty)$ são tais que, quando $\kappa \leq 0$, então $[a,b] = [a_0,b_0]$ e $M = 0$, e, quando $\kappa > 0$, então

- $[a,b] = [a_0,b_0]$ se $M = 0$;
- $[a,b]$ é o menor intervalo contendo $[a_0,b_0]$ e κ se $M > 0$.

Assim, temos

$$\alpha_2^{\psi_1} = \tau_1\,\beta - \frac{\kappa\,\tau_1}{1-\tau_1}, \quad \alpha_{n+2}^{\psi_1} = \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}\,\alpha_{n+1}^{(\lambda)}\,\alpha, \quad n \geq 1, \quad \beta_n^{\psi_1} = \frac{1-\tau_n}{1-\tau_{n-1}}\,\beta, \quad n \geq 1,$$

onde

$$\tau_1 = 1 - \frac{\kappa}{\beta - c(\lambda,\kappa,M)\mu_0^{\psi_0}} \quad \text{e} \quad \tau_{n+1} = 1 - \frac{\kappa\,\tau_n}{[\beta + \alpha_{n+1}^{(\lambda)}\,\alpha]\tau_n - \alpha_{n+1}^{(\lambda)}\,\alpha}, \quad n \geq 1.$$

Na próxima seção, estudaremos o comportamento dos coeficientes τ_n e dos zeros dos polinômios L-ortogonais $B_n^{\psi_1}$ com relação aos parâmetros κ e M.

4.4 Alguns resultados de monotonicidade

Dada uma medida positiva forte $d\psi_0$ cujo suporte é $[a_0, b_0] \subseteq [a, b]$, seja uma medida positiva forte $d\psi_1$ dada por (4.6) com $c = c(\psi_0; \kappa, M)$. Sabemos que, os polinômios L-ortogonais $B_n^{\psi_0}$ e $B_n^{\psi_1}$ estão relacionados por (4.7).

Os coeficientes desta relação, τ_n, que dependem de ψ_0, são funções dos parâmetros κ e M. Consequentemente, também os polinômios $B_n^{\psi_1}$ e seus zeros são funções de κ e M.

Para a demonstração dos teoremas a seguir, vamos precisar dos lemas a seguir.

Lema 4.4. *Seja* $\int_a^b f(x,y)d\psi(x)$ *convergente quando* $y_1 \leq y \leq y_2$ *e* $\int_a^b \dfrac{df(x,y)}{dy} d\psi(x)$ *uniformemente convergente em* $y_1 \leq y \leq y_2$*. Então, em* $y_1 \leq y \leq y_2$*, temos*

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)d\psi(x) = \int_a^b \frac{df(x,y)}{dy} d\psi(x).$$

Demonstração: A prova deste lema para $d\psi(x) = dx$ pode ser encontrada em Ferrar [14] e Widder [25]. ■

Em [13], Dimitrov e Sri Ranga demonstraram o seguinte resultado.

Lema 4.5. *Seja* $B_n(\tau; z)$, $n = 0, 1, \ldots$ *satisfazendo a propriedade* (1.54) *com respeito à distribuição forte* $d\psi(\tau; z)$,

$$d\psi(\tau; z) = \omega(\tau; z)d\psi(z),$$

onde $\omega(\tau; z)$ *é positiva e têm a primeira derivada contínua, com respeito a* τ*, para* $z \in (a, b)$ *e* $\tau \in (p, q)$*. Suponha que a integral*

$$\int_a^b z^j \left(\partial\omega(\tau; z)/\partial\tau\right) d\psi(z), \; j = -n, -n+1, \ldots, 0, \ldots, n-1 \tag{4.22}$$

converge uniformemente em todo subconjunto compacto de (p, q)*. Se*

$$\frac{\partial \ln \omega(\tau; z)}{\partial \tau}$$

é uma função crescente(decrescente) de z*,* $z \in (a, b)$*, então para todo* r*,* $1 \leq r \leq n$*, os zeros de* $B_n(\tau; z)$*,* $\xi_r(\tau)$*, é uma função crescente(decrescente) de* τ*.*

Teorema 4.4. *Sejam* τ_n*,* $n \geq 1$*, os coeficientes da relação* (4.7)*. Logo,*

1. *Se* $\kappa \geq b_0$*, então* τ_n *é uma função estritamente decrescente de* M*, para* $n \geq 1$*;*

2. *Se* $0 < \kappa \leq a_0$*, então* τ_n *é uma função estritamente crescente de* M*, para* $n \geq 1$*;*

3. *Se $M > 0$ é tal que $\hat{\sigma}_M = -1 + (M+1)\beta_1^{\psi_0}/b_0 > 0$, então τ_n é uma função estritamente decrescente de κ, para todo $n \geq 1$, quando κ varia no intervalo $[\hat{\kappa}(M), \infty)$, onde $\hat{\kappa}(M) > b_0$ satisfaz*

$$\hat{\kappa}(M) = \frac{M\,\beta_1^{\psi_0} + \hat{\sigma}_M \beta_2^{\psi_0} - \alpha_2^{\psi_0} + \sqrt{(M\,\beta_1^{\psi_0} + \hat{\sigma}_M \beta_2^{\psi_0} - \alpha_2^{\psi_0})^2 - 4M\hat{\sigma}_M \beta_1^{\psi_0}\beta_2^{\psi_0}}}{2\hat{\sigma}_M}.$$

4. *Seja $\check{\sigma}_M = -1 + (M+1)\beta_1^{\psi_0}/a_0 > 0$. Se $M > 0$, então τ_n é uma função estritamente decrescente de κ, para $n \geq 1$, quando κ varia no intervalo $(0, \check{\kappa}(M)]$, onde $0 < \check{\kappa}(M) < a_0$ satisfaz*

$$\check{\kappa}(M) = \frac{M\,\beta_1^{\psi_0} + \check{\sigma}_M \beta_2^{\psi_0} - \alpha_2^{\psi_0} - \sqrt{(M\,\beta_1^{\psi_0} + \check{\sigma}_M \beta_2^{\psi_0} - \alpha_2^{\psi_0})^2 - 4M\check{\sigma}_M \beta_1^{\psi_0}\beta_2^{\psi_0}}}{2\check{\sigma}_M}.$$

Demonstração: Suponha $\kappa \geq b_0$. De (4.17), temos que

$$\tau_n = 1 - \frac{\kappa\,\tau_{n-1}}{(\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0})\tau_{n-1} - \alpha_n^{\psi_0}}, \quad n \geq 2.$$

Supondo τ_{n-1} uma função estritamente decrescente de M, então $\dfrac{d\tau_{n-1}}{dM} < 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_n}{dM} &= -\frac{\kappa \dfrac{d\tau_{n-1}}{dM}\left[(\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0})\tau_{n-1}(M) - \alpha_n^{\psi_0}\right] - \kappa\tau_{n-1}(M)(\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0})\dfrac{d\tau_{n-1}}{dM}}{\left[(\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0})\tau_{n-1}(M) - \alpha_n^{\psi_0}\right]^2} \\ &= \frac{\kappa\,\alpha_n^{\psi_0}\,\dfrac{d\tau_{n-1}}{dM}}{\left[(\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0})\tau_{n-1}(M) - \alpha_n^{\psi_0}\right]^2} < 0. \end{aligned}$$

Portanto, se τ_{n-1} é uma função estritamente decrescente de M, então τ_n também é uma função estritamente decrescente de M, para $n \geq 2$.

Resta mostrar que τ_1 é uma função estritamente decrescente de M, onde

$$\tau_1 = 1 - \frac{\kappa}{\beta_1^{\psi_0} - c(\psi_0; \kappa, M)\,\mu_0^{\psi_0}}.$$

Quando $\kappa \geq b_0$, temos que $c(\psi_0; \kappa, M) = \dfrac{1}{(M+1)\int_{a_0}^{b_0}(z-\kappa)^{-1}d\psi_0(z)} < 0$. Assim,

$$\frac{d}{dM}\,c(\psi_0; \kappa, M) = -\frac{1}{(M+1)^2}\left[\int_{a_0}^{b_0}(z-\kappa)^{-1}d\psi_0(z)\right]^{-1} > 0.$$

Logo,

$$\frac{d\tau_1}{dM} = \frac{-\kappa\,\dfrac{dc(\psi_0; \kappa, M)}{dM}}{(\beta_1^{\psi_0} - c(\psi_0; \kappa, M)\,\mu_0^{\psi_0})^2} < 0.$$

Portanto, τ_1 é uma função decrescente de M.

Analogamente, provamos que se $0 < \kappa \leq a_0$, então $\tau_n,\ n \geq 1$, é uma função estritamente crescente de M.

Para provar a parte 3, observemos, primeiramente, que, usando o Lema 4.4, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\kappa}\, c(\psi_0;\kappa,M) &= \frac{d}{d\kappa}\left[\frac{1}{(M+1)\int_{a_0}^{b_0}(z-\kappa)^{-1}d\psi_0(z)}\right] \\
&= -\frac{1}{M+1}\,\frac{\frac{d}{d\kappa}\left[\int_{a_0}^{b_0}(z-\kappa)^{-1}d\psi_0(z)\right]}{\left[\int_{a_0}^{b_0}(z-\kappa)^{-1}d\psi_0(z)\right]^2} \\
&= -\frac{1}{M+1}\left[\int_{a_0}^{b_0}(z-\kappa)^{-1}d\psi_0(z)\right]^{-2}\int_{a_0}^{b_0}(z-\kappa)^{-2}d\psi_0(z), \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

para κ fora de (a_0,b_0). Como $\tau_1 = 1 - \dfrac{\kappa}{\beta_1^{\psi_0} - c(\psi_0;\kappa,M)\,\mu_0^{\psi_0}}$, segue que

$$\frac{d\tau_1}{d\kappa} = \left[\beta_1^{\psi_0} - \mu_0^{\psi_0}c(\psi_0;\kappa,M)\right]^{-2}\left[-\beta_1^{\psi_0} + \mu_0^{\psi_0}c(\psi_0;\kappa,M) - \mu_0^{\psi_0}\frac{dc(\psi_0;\kappa,M)}{d\kappa}\kappa\right],$$

ou seja, $\dfrac{d\tau_1}{d\kappa} < 0$ para $\kappa > b_0$ se, e somente se,

$$g(\kappa) = -\beta_1^{\psi_0} + \mu_0^{\psi_0}c(\psi_0;\kappa,M) - \mu_0^{\psi_0}\frac{dc(\psi_0;\kappa,M)}{d\kappa}\kappa < 0 \quad \text{para} \quad \kappa > b_0.$$

Como, para $\kappa > b_0$,

$$\begin{aligned}
\int_{a_0}^{b_0}(z-\kappa)^{-2}d\psi_0(z) &= \int_{a_0}^{b_0}(\kappa-z)^{-2}d\psi_0(z) = \int_{a_0}^{b_0}(\kappa-z)^{-1}(\kappa-z)^{-1}d\psi_0(z) \\
&< \frac{1}{\kappa-b_0}\int_{a_0}^{b_0}(\kappa-z)^{-1}d\psi_0(z) = \frac{1}{b_0-\kappa}\int_{a_0}^{b_0}(z-\kappa)^{-1}d\psi_0(z),
\end{aligned}$$

então, de (4.23),

$$-\frac{d}{d\kappa}\, c(\psi_0;\kappa,M) < \frac{1}{M+1}\left[\int_{a_0}^{b_0}(z-\kappa)^{-1}d\psi_0(z)\right]^{-1}(b_0-\kappa)^{-1} = -c(\psi_0;\kappa,M)(\kappa-b_0)^{-1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
g(\kappa) &< -\beta_1^{\psi_0} + \mu_0^{\psi_0}c(\psi_0;\kappa,M) - \mu_0^{\psi_0}(\kappa-b_0)^{-1}c(\psi_0;\kappa,M) \\
&= -\beta_1^{\psi_0} + \mu_0^{\psi_0}c(\psi_0;\kappa,M)\left[1 - \frac{\kappa}{\kappa-b_0}\right] \\
&= -\beta_1^{\psi_0} - \frac{b_0}{\kappa-b_0}\,\mu_0^{\psi_0}\,c(\psi_0;\kappa,M), \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

para $\kappa > b_0$. Assim, usando o Lema 4.1 com $d\psi(z) = d\psi_0(z)$, temos que

$$\begin{aligned} c(\psi_0; \kappa, M) &= \frac{1}{M+1}\left[\int_{a_0}^{b_0} \frac{1}{z-\kappa} d\psi_0(z)\right]^{-1} = -\frac{1}{M+1}\left[\int_{a_0}^{b_0} \frac{1}{\kappa - z} d\psi_0(z)\right]^{-1} \\ &= -\frac{1}{M+1}\left[\frac{\kappa - \beta_1^{\psi_0}}{\mu_0^{\psi_0}} \frac{1}{\mathbb{T}^{\psi_0}(\kappa)}\right]. \end{aligned}$$

Voltando em (4.24), como, pelo Lema 4.1, $\mathbb{T}_2^{\psi_0}(\kappa) < \mathbb{T}^{\psi_0}(\kappa)$, obtemos

$$g(\kappa) < -\beta_1^{\psi_0} + \frac{b_0}{M+1} \frac{\kappa - \beta_1^{\psi_0}}{\kappa - b_0} \frac{1}{\mathbb{T}^{\psi_0}(\kappa)} < -\beta_1^{\psi_0} + \frac{b_0}{M+1} \frac{\kappa - \beta_1^{\psi_0}}{\kappa - b_0} \frac{1}{\mathbb{T}_2^{\psi_0}(\kappa)} = g_1(\kappa),$$

para $\kappa > b_0$, onde $\mathbb{T}_2^{\psi_0}(z) = \dfrac{(z-\beta_1^{\psi_0})(z-\beta_2^{\psi_0})}{(z-\beta_1^{\psi_0})(z-\beta_2^{\psi_0}) - \alpha_2^{\psi_0} z}$. Vamos, então, analisar os valores de $\kappa > b_0$ tais que $g_1(\kappa) < 0$. Observamos que

$$\begin{aligned} g_1(\kappa) &= -\beta_1^{\psi_0} + \frac{b_0}{M+1} \frac{\kappa - \beta_1^{\psi_0}}{\kappa - b_0} \left[\frac{(\kappa - \beta_1^{\psi_0})(\kappa - \beta_2^{\psi_0}) - \alpha_2^{\psi_0} \kappa}{(\kappa - \beta_1^{\psi_0})(\kappa - \beta_2^{\psi_0})}\right] \\ &= \frac{-\beta_1^{\psi_0}(M+1)(\kappa - b_0)(\kappa - \beta_2^{\psi_0}) + b_0(\kappa - \beta_1^{\psi_0})(\kappa - \beta_2^{\psi_0}) - \alpha_2^{\psi_0} \kappa b_0}{(M+1)(\kappa - b_0)(\kappa - \beta_2^{\psi_0})} \\ &= -\frac{b_0}{(M+1)(\kappa - b_0)(\kappa - \beta_2^{\psi_0})} \\ &\quad \times \left[(M+1)\frac{\beta_1^{\psi_0}}{b_0}(\kappa - b_0)(\kappa - \beta_2^{\psi_0}) - (\kappa - \beta_1^{\psi_0})(\kappa - \beta_2^{\psi_0}) + \alpha_2^{\psi_0} \kappa\right]. \end{aligned}$$

Seja $\hat{\sigma}_M = -1 + (M+1)\beta_1^{\psi_0}/b_0 > 0$. Logo, devemos procurar os valores de $\kappa > b_0$ tais que

$$\begin{aligned} \hat{p}_2(\kappa) &= (\hat{\sigma}_M + 1)(\kappa - b_0)(\kappa - \beta_2^{\psi_0}) - (\kappa - \beta_1^{\psi_0})(\kappa - \beta_2^{\psi_0}) + \alpha_2^{\psi_0} \kappa \\ &= \hat{\sigma}_M \kappa^2 + (-M\,\beta_1^{\psi_0} - \hat{\sigma}_M\,\beta_2^{\psi_0} + \alpha_2^{\psi_0})\kappa + M\,\beta_1^{\psi_0}\beta_2^{\psi_0} > 0. \end{aligned}$$

Esse é um polinômio de grau 2 com coeficiente de maior grau igual a $\hat{\sigma}_M > 0$ e é tal que

- $\hat{p}_2(0) = (M+1)\beta_1^{\psi_0}\beta_2^{\psi_0} - \beta_1^{\psi_0}\beta_2^{\psi_0} = M\beta_1^{\psi_0}\beta_2^{\psi_0} > 0$,
- $\hat{p}_2(b_0) = -(b_0 - \beta_1^{\psi_0})(b_0 - \beta_2^{\psi_0}) + \alpha_2^{\psi_0} b_0 < 0$, pois, por (4.3), vemos que

$$0 < a_1(b_0) = \frac{\alpha_2^{\psi_0} b_0}{(b_0 - \beta_1^{\psi_0})(b_0 - \beta_2^{\psi_0})} < 1.$$

Além disso, para κ suficientemente grande, temos $\hat{p}_2(\kappa) > 0$, pois $\hat{p}_2$ tem grau par e seu coeficiente de maior grau é positivo. Logo, $\hat{p}_2$ possui sua maior raiz em $\hat{\kappa}(M) > b_0$ que é dada por

$$\hat{\kappa}(M) = \frac{M\,\beta_1^{\psi_0} + \hat{\sigma}_M \beta_2^{\psi_0} - \alpha_2^{\psi_0} + \sqrt{(M\,\beta_1^{\psi_0} + \hat{\sigma}_M \beta_2^{\psi_0} - \alpha_2^{\psi_0})^2 - 4M\hat{\sigma}_M \beta_1^{\psi_0}\beta_2^{\psi_0}}}{2\hat{\sigma}_M}$$

e $\hat{p}_2(\kappa) > 0$ para $\kappa \geq \hat{\kappa}(M)$.

Consequentemente, para $\kappa \geq \hat{\kappa}(M)$, temos $\dfrac{d\tau_1}{d\kappa} < 0$, isto é, τ_1 é uma função estritamente decrescente de κ quando κ varia no intervalo $[\hat{\kappa}(M), \infty)$.

Usando, agora, (4.17), notamos que τ_n é uma função estritamente decrescente de κ, para todo $n \geq 1$ e κ variando no intervalo $[\hat{\kappa}(M), \infty)$. De fato, por (4.17),

$$\tau_n = 1 - \frac{\kappa\, \tau_{n-1}}{(\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0})\tau_{n-1} - \alpha_n^{\psi_0}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{d\tau_n}{d\kappa} &= -\frac{\left[\tau_{n-1} + \kappa \dfrac{d\tau_{n-1}}{d\kappa}\right]\left[(\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0})\tau_{n-1} - \alpha_n^{\psi_0}\right] - \kappa\tau_{n-1}(\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0})\dfrac{d\tau_{n-1}}{d\kappa}}{\left[(\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0})\tau_{n-1} - \alpha_n^{\psi_0}\right]^2} \\
&= -\frac{(\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0})\tau_{n-1}^2 - \tau_{n-1}\alpha_n^{\psi_0} - \kappa\alpha_n^{\psi_0}\dfrac{d\tau_{n-1}}{d\kappa}}{\left[(\beta_n^{\psi_0} + \alpha_n^{\psi_0})\tau_{n-1} - \alpha_n^{\psi_0}\right]^2} < 0.
\end{aligned}$$

Isso completa a demonstração da parte 3 do teorema.

A prova da parte 4 é análoga, desde que κ varia no intervalo $(0, a_0)$, ou seja, devemos obter para quais valores de κ tem-se $\dfrac{d\tau_1}{d\kappa} < 0$ quando $\kappa \in (0, a_0)$. Como no caso anterior, mostra-se que a resolução do problema é feita encontrando-se os valores de κ em $(0, a_0)$ tais que

$$\check{p}_2(\kappa) = (\check{\sigma}_M + 1)(\kappa - a_0)(\kappa - \beta_2^{\psi_0}) - (\kappa - \beta_1^{\psi_0})(\kappa - \beta_2^{\psi_0}) + \alpha_2^{\psi_0}\,\kappa > 0.$$

Isso conclui a demonstração do teorema. ■

Para $i = 0, 1$, sejam $z_{n,r}^{\psi_i}$, $r = 1, 2, \ldots, n$, os zeros do n-ésimo polinômio L-ortogonal $B_n^{\psi_i}$, dados em ordem crescente. Claramente, os $z_{n,r}^{\psi_1}$, que dependem de $d\psi_0$, também são funções de κ e M.

Vamos, agora, estudar as propriedades de monotonicidade de $z_{n,r}^{\psi_1}$ com relação aos parâmetros κ e M. Para isso, usamos o Lema 4.3 e o comportamento monotônico de τ_n com respeito a κ e a M obtidos no Teorema 4.4.

Teorema 4.5. *Sejam* $\hat{\kappa}(M)$ *e* $\check{\kappa}(M)$ *como no* Teorema 4.4. *Logo,*

1. *se* $\kappa \geq b_0$, *então*

$$z_{n,r}^{\psi_0} < z_{n,r}^{\psi_1} < z_{n-1,r}^{\psi_0},\ \ r = 1, \ldots, n-1 \quad e \quad z_{n,n}^{\psi_0} < z_{n,n}^{\psi_1};$$

2. *se* $\kappa \leq a_0$, *então*

$$0 < z_{n,1}^{\psi_1} < z_{n,1}^{\psi_0}, \quad e \quad z_{n-1,r-1}^{\psi_0} < z_{n,r}^{\psi_1} < z_{n,r}^{\psi_0}, \;\; r = 2, \ldots, n\,;$$

3. *se* $\kappa \geq b_0$, *então* $z_{n,r}^{\psi_1}$ *é uma função estritamente crescente de* M;

4. *se* $0 < \kappa \leq a_0$, *então* $z_{n,r}^{\psi_1}$ *é uma função estritamente decrescente de* M;

5. *se* $M = 0$, *então* $z_{n,r}^{\psi_1}$ *é uma função estritamente decrescente de* κ;

6. *se* $M > -1 + \dfrac{b_0}{\beta_1^{\psi_0}}$, *então* $z_{n,r}^{\psi_1}$ *é uma função estritamente crescente de* κ, *quando* κ *varia no intervalo* $[\hat{\kappa}(M), \infty)$;

7. *se* $M > 0$, *então* $z_{n,r}^{\psi_1}$ *é uma função estritamente crescente de* κ, *quando* κ *varia no intervalo* $(0, \check{\kappa}(M)]$.

Demonstração: Segue, do Teorema 4.2, que se $\kappa \geq b_0$ ($\kappa \leq a_0$), então $\tau_n < 0$ ($0 < \tau_n < 1$), respectivamente. Daí, os ítens 1 e 2 seguem diretamente do Lema 4.3.

Quando $\kappa \geq b_0$ ($0 < \kappa \leq a_0$), segue, do Teorema 4.4, que τ_n é uma função estritamente decrescente (crescente) de M. Mas, pelo item *ii*) do Lema 4.3, temos que $z_{n,r}^{\psi_1}$ é uma função estritamente decrescente de τ_n. Logo, $z_{n,r}^{\psi_1}$ é uma função estritamente crescente (decrescente) de M. De fato,

- Para $\kappa \geq b_0$, considere $M_1 \leq M_2$, então $\tau_n(M_1) \geq \tau_n(M_2)$. Como $z_{n,r}^{\psi_1}$ é uma função estritamente decrescente de τ_n, temos que $z_{n,r}^{\psi_1}[\tau_n(M_1)] \leq z_{n,r}^{\psi_1}[\tau_n(M_2)]$.

- Para $0 < \kappa \leq a_0$, considerando novamente $M_1 \leq M_2$, então $\tau_n(M_1) \leq \tau_n(M_2)$. Mas, $z_{n,r}^{\psi_1}$ é uma função estritamente decrescente de τ_n, de onde segue que $z_{n,r}^{\psi_1}[\tau_n(M_1)] \geq z_{n,r}^{\psi_1}[\tau_n(M_2)]$.

Isto prova os ítens 3 e 4 do teorema.

Analogamente ao que foi feito para os ítens 3 e 4, para demonstrar os ítens 6 e 7, observemos que se $M > (-1 + b_0/\beta_1^{\psi_0})$ ou $M > 0$, então, pelas partes 3 e 4 do Teorema 4.4, vemos que τ_n é uma função estritamente decrescente de κ quando κ varia no intervalo $[\hat{\kappa}(M), \infty)$ ou $(0, \check{\kappa}(M)]$. Novamente, como, pelo ítem *ii*) do Lema 4.3, $z_{n,r}^{\psi_1}$ é uma função estritamente decrescente de τ_n, o resultado segue.

Finalmente, a parte 5 segue como consequência do Lema 4.5. De fato, observe que, quando $M = 0$, de (4.6)

$$d\psi_1(z) = d\psi_1(z; \kappa, 0) = \frac{c}{z - \kappa}\, d\psi_0(z).$$

Daí,

$$\frac{\partial \ln\left(c/(z-\kappa)\right)}{\partial \kappa} = \frac{1}{z-\kappa},$$

que é uma função estritamente decrescente de z. Logo, pelo Lema 4.5, cada um dos zeros $z_{n,r}^{\psi_1}$ de $B_n^{\psi_1}(z)$ é uma função estritamente decrescente de κ. ■

Considerando a medida $d\psi_1$ dada no Exemplo 4.3.3, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 4.1. *Sejam $d\psi_i$, $i=0,1$, as medidas dadas respectivamente por* (4.20) *e* (4.21). *Suponhamos $z_{n,r}^{\psi_i}$, $r=1,2,\ldots,n$, os zeros do n-ésimo polinômio L-ortogonal, $B_n^{\psi_i}$, $i=0,1$, ordenados em ordem crescente.*

1. *Se $\kappa \geq b_0 = (\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha})^2$, então*

$$z_{n,r}^{\psi_0} < z_{n,r}^{\psi_1} < z_{n-1,r}^{\psi_0}, \;\; r=1,\ldots,n-1 \quad e \quad z_{n,n}^{\psi_0} < z_{n,n}^{\psi_1}\,.$$

2. *Se $\kappa \leq a_0 = (\sqrt{\alpha+\beta}-\sqrt{\alpha})^2$, então*

$$0 < z_{n,1}^{\psi_1} < z_{n,1}^{\psi_0}, \quad e \quad z_{n-1,r-1}^{\psi_0} < z_{n,r}^{\psi_1} < z_{n,r}^{\psi_0}, \;\; r=2,\ldots,n\,.$$

3. *Se $\kappa \geq b_0$, então $z_{n,r}^{\psi_1}$ é uma função estritamente crescente de M.*
4. *Se $0 < \kappa \leq a_0$, então $z_{n,r}^{\psi_1}$ é uma função estritamente decrescente de M.*
5. *Se $M = 0$, então $z_{n,r}^{\psi_1}$ é uma função estritamente decrescente de κ.*
6. *Se $M > -1 + \dfrac{b_0}{\beta}$, então $z_{n,r}^{\psi_1}$ é uma função estritamente crescente de κ, quando κ varia no intervalo $[\hat{\kappa}(M), \infty)$.*
7. *Se $M > 0$, então $z_{n,r}^{\psi_1}$ é uma função estritamente crescente de κ, quando κ varia no intervalo $(0, \check{\kappa}(M)]$.*

Aqui,

$$\hat{\kappa}(M) = \frac{M+\hat{\sigma}_M - 2(1+\lambda)^{-1}\alpha/\beta + \sqrt{(M+\hat{\sigma}_M - 2(1+\lambda)^{-1}\alpha/\beta)^2 - 4M\hat{\sigma}_M}}{2\hat{\sigma}_M/\beta},$$

$$\check{\kappa}(M) = \frac{M+\check{\sigma}_M - 2(1+\lambda)^{-1}\alpha/\beta - \sqrt{(M+\check{\sigma}_M - 2(1+\lambda)^{-1}\alpha/\beta)^2 - 4M\check{\sigma}_M}}{2\check{\sigma}_M/\beta},$$

com $\hat{\sigma}_M = -1 + (M+1)\beta/b_0$ e $\check{\sigma}_M = -1 + (M+1)\beta/a_0$.

Considerações finais

Como considerações finais, faremos um breve resumo do que foi estudado por nós neste trabalho. Em primeiro lugar, estudamos as propriedades de duas sequências de polinômios, $\{P_n^{\phi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n^{\phi_1}\}_{n=0}^{\infty}$, ortogonais com relação, respectivamente, às medidas $d\phi_0$ e $d\phi_1$, relacionadas entre si. Em seguida, passamos ao estudo das propriedades de duas sequências de polinômios L-ortogonais, $\{B_n^{\psi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{B_n^{\psi_1}\}_{n=0}^{\infty}$, quando as medidas associadas, $d\psi_0$ e $d\psi_1$, estão também relacionadas.

Para os polinômios ortogonais, estudamos dois casos:

- Caso 1: quando as medidas são simétricas

  Consideramos $d\phi_0$ e $d\phi_1$ duas distribuições simétricas definidas em $[-b,b]$, $b>0$, relacionadas por
  $$d\phi_1(x) = \frac{c}{1+qx^2}\, d\phi_0(x), \tag{4.25}$$
  com $q \in \mathbb{R}$ tal que $1+qx^2$ não muda de sinal em $(-b,b)$ e a constante c é tal que $(1+qx^2)/c$ é não negativa em $(-b,b)$. Expressando $P_n^{\phi_1}(x)$ como combinação linear de $\{P_k^{\phi_0}\}_{k=0}^{n}$, obtemos a seguinte relação entre as duas sequências de polinômios ortogonais $\{P_n^{\phi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n^{\phi_1}\}_{n=0}^{\infty}$:
  $$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_0}(x) + d_{n-2}\, P_{n-2}^{\phi_0}(x), \quad \text{com} \quad d_{n-2} = \frac{q\,\rho_n^{\phi_1}}{c\,\rho_{n-2}^{\phi_0}},\ n \geq 2. \tag{4.26}$$

  A partir da relação para d_n em (4.26) e, em seguida, usando (1.10) em conjunto com a relação entre $\{P_n^{\phi_0}\}$ e $\{P_n^{\phi_1}\}$, várias relações entre os coeficientes de conexão d_n e os das relações de recorrência puderam ser obtidas, tais como:
  $$(i)\ \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_0}}, \qquad (ii)\ d_{n-1} - d_{n-2} = \alpha_{n+1}^{\phi_0} - \alpha_{n+1}^{\phi_1},$$
  par $n \geq 2$, onde $d_0 = \dfrac{q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_1^{\phi_0}} = \alpha_2^{\phi_0} - \alpha_2^{\phi_1}$;
  $$(iii)\ (\alpha_3^{\phi_1} - d_0)\alpha_1^{\phi_0} = \alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}, \qquad (iv)\ (\alpha_4^{\phi_1} - d_1)\alpha_2^{\phi_0} = \alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1},$$

$$(v)\ \ (\alpha_{n+2}^{\phi_1} - d_{n-1})\alpha_n^{\phi_0} = \alpha_{n+2}^{\phi_1}(\alpha_n^{\phi_1} - d_{n-3}), \quad n \geq 3,$$

consequentemente,

$$(vi)\ \ (\alpha_{2n+1}^{\phi_1} - d_{2n-2})\alpha_{2n-1}^{\phi_0} \ldots \alpha_3^{\phi_0}\alpha_1^{\phi_0} \quad = \quad alpha_{2n+1}^{\phi_1}\alpha_{2n-1}^{\phi_1} \ldots \alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}, \quad n \geq 1,$$

$$(vii)\ \ (\alpha_{2n+2}^{\phi_1} - d_{2n-1})\alpha_{2n}^{\phi_0} \ldots \alpha_4^{\phi_0}\alpha_2^{\phi_0} \quad = \quad \alpha_{2n+2}^{\phi_1}\alpha_{2n}^{\phi_1} \ldots \alpha_4^{\phi_1}\alpha_2^{\phi_1}, \quad n \geq 1.$$

Definindo a sequência de números reais $\{\ell_n\}_{n=0}^{\infty}$ tais que

$$\ell_0 = 1, \qquad (\ell_1 - 1) = 2q\alpha_2^{\phi_1}, \qquad (\ell_2 - 1) = \frac{2q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_1^{\phi_0}}$$

e

$$(\ell_{n+1} - 1) = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\phi_0}}(\ell_{n-1} - 1), \qquad n \geq 2,$$

obtém-se que os elementos desta sequência se relacionam com os coeficientes da relação de recorrência para $P_n^{\phi_0}$ e $P_n^{\phi_1}$, $n \geq 0$, e com os coeficientes d_n (veja os Teoremas 2.3 e 2.4).

Como exemplo, esses resultados foram aplicados no estudo de polinômios ortogonais de Sobolev associados a medidas simétricas como os de Gegenbauer e Hermite. Ainda, através do Teorema 2.4, é possível mostrar que, conhecendo-se a sequência de coeficientes $\{\alpha_{n+1}^{\phi_1}\}_{n=1}^{\infty}$, podemos gerar a sequência de coeficientes $\{\alpha_{n+1}^{\phi_0}\}_{n=1}^{\infty}$ e vice-versa (veja Teorema 2.5).

Como exemplo do Teorema 2.5, resultados explícitos para os polinômios de Gegenbauer e Hermite foram estudados.

- Caso 2: quando as medidas não são simétricas

  O mesmo estudo foi feito agora considerando $d\phi_0$ e $d\phi_1$ duas medidas positivas em $[a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, relacionadas por

$$(x - q)\, d\phi_1(x) = c\, d\phi_0(x), \tag{4.27}$$

com q e c constantes reais, $c \neq 0$, tais que $(x - q)/c \geq 0$ para $x \in (a, b)$.

Assim, também é possível expressar $P_n^{\phi_1}(x)$ como combinação linear de $\{P_k^{\phi_0}\}_{k=0}^{n}$, obtendo a seguinte relação entre as duas sequências de polinômios ortogonais $\{P_n^{\phi_0}\}$ e $\{P_n^{\phi_1}\}$:

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_0}(x) + b_{n-1}\, P_{n-1}^{\phi_0}(x), \quad \text{com} \quad b_{n-1} = \frac{\rho_n^{\phi_1}}{c\,\rho_{n-1}^{\phi_0}},\ n \geq 1. \tag{4.28}$$

A partir da relação para b_n em (4.28) e, em seguida, usando (1.10) em conjunto com a relação entre $\{P_n^{\phi_0}\}$ e $\{P_n^{\phi_1}\}$, várias relações entre os coeficientes de conexão b_n e os das relações de recorrência podem ser obtidas, tais como:

$$(i)\,\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}, \quad (ii)\, b_n - b_{n-1} = \beta_{n+1}^{\phi_0} - \beta_{n+1}^{\phi_1}, \quad (iii)\,(\beta_{n+1}^{\phi_1} - \beta_n^{\phi_0})b_{n-1} = \alpha_{n+1}^{\phi_0} - \alpha_{n+1}^{\phi_1}$$

para $n \geq 1$, onde $b_0 = \beta_1^{\phi_0} - \beta_1^{\phi_1} = \alpha_2^{\phi_1}/(\beta_1^{\phi_1} - q)$.

Usando esses resultados, chega-se às seguintes relações de recorrência para gerarmos os coeficientes b_n:

$$b_n = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{-q + \beta_{n+1}^{\phi_1} - b_{n-1}} \quad \text{ou} \quad b_n = \beta_{n+1}^{\phi_0} - q - \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}{b_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Como exemplo, esses resultados foram aplicados para obter informações sobre polinômios ortogonais de Sobolev associados a medidas não-simétricas, como, por exemplo, Jacobi e Laguerre.

Agora, para os polinômios L-ortogonais, estudamos a conexão entre duas sequências de polinômios $\{B_n^{\psi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{B_n^{\psi_1}\}_{n=0}^{\infty}$ associadas a duas medidas positivas fortes $d\psi_0$ e $d\psi_1$ definidas em $[a,b] \subset [0,\infty]$ e relacionadas por

$$(z-\kappa)\, d\psi_1(z) = c\, d\psi_0(z), \tag{4.29}$$

onde a constante não-nula c é arbitrária desde que satisfaça $\dfrac{z-\kappa}{c} > 0$ em (a,b).

Para realizarmos esses estudo, consideramos o polinômio mônico

$$Q_n(\tau; z) = (1-\tau)\, q_n(z) + \tau\, z\, q_{n-1}(z),$$

em que $q_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - x_i)$ e $q_{n-1}(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - y_i)$, para $n \geq 2$, cujos zeros se entrelaçam.

Mostramos que $Q_n(\tau; z)$ têm n zeros positivos, $\xi_r(\tau)$, $r = 1, \ldots, n$, que se entrelaçam com os zeros de $q_{n-1}(z)$ e cada $\xi_r(\tau)$ é uma função estritamente decrescente de τ. Estudamos a monotonocidade dos zeros de $Q_n(\tau; z)$ em relação a τ.

Vamos, agora, expressar (4.29) de uma maneira mais geral, ou seja, considere $0 \leq a_0 < b_0 \leq \infty$, $d\psi_0$ e $d\psi_1$ duas medidas cujos suportes estão em $[a_0, b_0]$ e em $[a,b] \supseteq [a_0, b_0]$, respectivamente, tais que

$$\int_a^b f(z)\, d\psi_1(z) = \frac{M}{M+1} f(\kappa) + c \int_{a_0}^{b_0} (z-\kappa)^{-1} f(z)\, d\psi_0(z), \tag{4.30}$$

para todo polinômio L-ortogonal f, com $\kappa \in (-\infty, a_0] \cup [b_0, \infty)$.

Expressando $B_n^{\psi_1}$ como combinação linear da sequência $\{z^{n-j}Q_j^{\psi_0}(z)\}_{j=0}^{n}$, linearmente independente, obtemos a seguinte relação entre as duas sequências de polinômios L-ortogonais $\{B_n^{\psi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{B_n^{\psi_1}\}_{n=0}^{\infty}$:

$$B_n^{\psi_1}(z) = (1-\tau_n)B_n^{\psi_0}(z) + \tau_n\, z\, B_{n-1}^{\psi_0}(z),\ n \geq 1, \tag{4.31}$$

onde $\tau_n = c^{-1}\dfrac{\sigma_{n,n}^{\psi_1}}{\sigma_{n-1,n-1}^{\psi_0}}$, $n \geq 1$. Aqui, $\sigma_{n,m}^{\psi_i} = \int_a^b z^{-n+m}B_n^{\psi_i}(z)d\psi_i(z),\ i = 0,1.$

De (4.31) e (1.57) é possível obter relações entre os coeficientes de conexão τ_n e os das relações de recorrência para $B_n^{\psi_0}$ e $B_n^{\psi_1}$, tais como

$$(i)\ \ \tau_{n+1}\alpha_{n+1}^{\psi_0} = \tau_n\alpha_{n+2}^{\psi_1}, \quad (ii)\ \ (1-\tau_{n+1})\beta_{n+1}^{\psi_0} = (1-\tau_n)\beta_{n+1}^{\psi_1},\ \ n \geq 1,$$

onde $\tau_1\, c\, \mu_0^{\psi_0} = \mu_0^{\psi_1}\alpha_2^{\psi_1}$ e $(1-\tau_1)\beta_1^{\psi_0} = \beta_1^{\psi_1}$. Usando esses resultados, chegamos às seguintes propriedades invariantes,

$$\left[\tau_n\beta_{n+1}^{\psi_0} - (1-\tau_n)\alpha_{n+1}^{\psi_0}\right]\frac{1-\tau_{n+1}}{\tau_n} = \left[\tau_n\beta_n^{\psi_1} - (1-\tau_n)\alpha_{n+1}^{\psi_1}\right]\frac{1-\tau_{n-1}}{\tau_n} = \kappa,$$

para $n \geq 1$, com $\tau_0 = 0$. Além disso,

$$\left[\beta_1^{\psi_0} - c\,\frac{\mu_0^{(0)}}{\mu_0^{(1)}}\right](1-\tau_1) = \kappa.$$

Como consequência imediata desses resultados, obtém-se algoritmos para geração numérica dos pares de coeficientes $\{\alpha_n^{\psi_0}, \beta_n^{\psi_0}\}$ a partir de $\{\alpha_n^{\psi_1}, \beta_n^{\psi_1}\}$ e vice-versa. Estudamos três exemplos onde esses algoritmos foram aplicados.

Vimos, também, alguns resultados de monotonocidade, onde foi estudado o comportamento dos coeficientes τ_n e dos zeros dos polinômios L-ortogonais $B_n^{\psi_1}$ com relação aos parâmetros κ e M.

Referências Bibliográficas

[1] AGARWAL, R.P.; MILOVANOVIĆ, V. Extremal problems, inequalities, and classical orthogonal polynomials, **Appl. Math. Comput.,** v. 128, p. 151–166, 2002.

[2] ANDRADE, E.X.L. **Sobre Polinômios Similares aos Ortogonais Associados a uma Classe Especial de Distribuições**. Tese (Doutorado) - IMECC, UNICAMP, Campinas, 1995.

[3] ANDRADE, E.X.L.; BRACCIALI, C.F. **Polinômios Ortogonais e Similares:** Propriedades e Aplicações. Apostila Versão 2.4, 2008.

[4] ANDRADE, E.X.L.; COSTA, M.S.; SRI RANGA, A. L-orthogonal polynomials associated with related measures, **Appl. Num. Math.,** v. 60, p. 1041–1052, 2010.

[5] ANDREWS, G.E.; ASKEY, R.; ROY, R. **Special Functions**, Encyclopedia of Mathematics and Applications, Cambridge Universty Press, 1999.

[6] BERTI, A.C.; BRACCIALI, C.F.; SRI RANGA, A. Orthogonal polynomials associated with related measures and Sobolev orthogonal polynomials, **Numer. Algorithms,** v. 34, p. 203–216, 2003.

[7] BERTI, A.C.; SRI RANGA, A. Companion orthogonal polynomials: some applications, **Appl. Num. Math.,** v. 39, p. 127–149, 2001

[8] BREZINSKI, C. **History of Continued Fractions and Padé Approximants**, Springer, 1991.

[9] CHIHARA, T.S. **An Introduction to Orthogonal Polynomials**, Mathematics and its Applications Series. New York: Gordon and Breach, 1978.

[10] COIMBRA, A.L. **Espaços Vetoriais**, Editora Edgard Blücher Ltda, 1994.

[11] COMMON, A.K.; McCABE, J.H. The symmetric strong moment problem, **J. Comput. Appl. Math.**, v. 67, p. 327–341, 1996.

[12] COOPER, S.C.; JONES, W.B.; THRON, W.J. Asymptotics of orthogonal L-polynomials for log-normal distributions, **Constr. Approx.** v. 8, p. 59–67, 1992.

[13] DIMITROV, D.K.; SRI RANGA, A. Monotonicity of zeros of orthogonal Laurent polynomials, **Methods Appl. Anal.,** v. 9, p. 1–12, 2002.

[14] FERRAR, W.L. **Integral Calculus,** Oxford University Press, London, 1958.

[15] GASPER, G.; RAHMAN, M. **Basic Hypergeometric Series**, 2ª Edição, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 96, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[16] ISERLES, A.; KOCH, P.E.; NØRSETT, S.P.; SANZ-SERNA, J.M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products, **J. Approx. Theory,** v. 65, p. 151–175, 1991.

[17] JONES, W.B.; THRON, W.J.; WAADELAND, H. A strong Stieltjes moment problem, **Trans. Amer. Math. Soc.,** v. 261, p. 503–528, 1980.

[18] LORENTZEN, L.; WAADELAND, H. **Continued Fractions with Applications**, North-Holland, 1992.

[19] MEIJER, H.G. Determination of all coherent pairs, **J. Approx. Theory,** v. 89, p. 321–343, 1997.

[20] PASTRO, P.I. Orthogonal Polynomials and some q-beta integrals of Ramanujan, **J. Math. Anal. Appl.**, v. 112, p. 517–540, 1985.

[21] SRI RANGA, A. **Polinômios Ortogonais e Similares.** Tese (Livre-Docência), Universidade de São Paulo, São Carlos (SP), 1990.

[22] SRI RANGA, A. Symmetric Orthogonal Polynomials and the Associated Orthogonal L-polynomials, **Proc. Amer. Math. Soc.,** v. 123, p. 3135–3141, 1995.

[23] SZEGŐ, G. **Orthogonal Polynomials,** American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 23, Providence, RI, USA, 1975.

[24] WALL, H.S. **Analytic Theory of Continued Fractions,** D. van Nostrand Co, New York, 1948.

[25] WIDDER, D.V. **Advance Calculus,** Dover, New York, 1989.