



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

Bárbara Banheti Sant'Anna

**Perturbações escalares e processos de extração
de energia de buracos negros**

Guaratinguetá/Brasil

2024

Bárbara Banheti Sant'Anna

Perturbações escalares e processos de extração de energia de buracos negros

Dissertação de Mestrado apresentada ao Conselho da Pós Graduação em Física e Astronomia da Faculdade de Engenharia e Ciências do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Mestre em Física.

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

Programa de Pós Graduação em Física e Astronomia

Orientador: Prof Dr Rogério Teixeira Cavalcanti

Guaratinguetá/Brasil

2024

S232p	Sant'Anna, Bárbara Banheti Perturbações escalares e processos de extração de energia de buracos negros / Bárbara Banheti Sant'Anna – Guaratinguetá, 2024. 51 f. : il. Bibliografia: f. 43-44 Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2024. Orientador: Prof. Dr. Rogério Teixeira Cavalcanti 1. Buracos negros (Astronomia). 2. Perturbação (Astronomia). 3. Relatividade geral (física). I. Título. CDU 530.12(043)
-------	--

Luciana Máximo
Bibliotecária CRB-8/3595

BÁRBARA BANHETI SANT'ANNA

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRA EM FÍSICA"**

PROGRAMA: FÍSICA

CURSO: MESTRADO

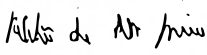
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. ROGÉRIO TEIXEIRA CAVALCANT
Orientador - UNESP


Prof. Dr. ELIAS LEITE MENDONÇA
UNESP


Prof. Dr. ROLDÃO DA ROCHA JÚNIOR
Universidade Federal do ABC

FEVEREIRO de 2024

DADOS CURRICULARES

BÁRBARA BANHETI SANT'ANNA

NASCIMENTO 22/07/1999 - Presidente Prudente/SP

FILIAÇÃO Nivaldo de Paiva Sant'Anna
Angélica Aparecida Banheti Sant'Anna

2017 - 2021 Licenciatura em Física
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

Aos meus avós, para honrar as oportunidades que não tiveram.

Agradecimentos

De maneira geral, meus agradecimentos se estendem a minha família e a todos os amigos que participaram de deste processo, espero que cada um se sinta homenageado neste trabalho. Ainda assim, gostaria de agradecer algumas pessoas em especial.

Ao meu pai e à minha mãe por toda paciência e incentivo que recebo desde criança.

À minha irmã, que continua sendo minha melhor amiga.

À Juliana e Natália por me acolherem desde o primeiro momento que entrei nesta cidade e por cada gesto de carinho.

Aos meus amigos da sala 25, meus companheiros de risadas, de lágrimas e de luta. Agradeço à Duda, João Miguel, Rosi, Lucas e em especial ao Kelvin, por me apoiarem neste caminho com conselhos valorosos e com uma lealdade que só uma amizade verdadeira pode proporcionar.

À Fabíola, por cada minuto e aos meus amigos de Presidente Prudente, sendo impossível citar nomes, uma vez que a saudade aperta igualmente para todos.

Ao Tiago, pela amizade incrível e divertida e ao Ronaldo, pela grande ajuda em cada etapa deste mestrado.

Ao meu orientador, Rogério, por toda a paciência em ensinar, compreender meu processo e topa este projeto.

E por fim, aos professores que fizeram muito mais do que ensinar e me presentearam com lições valiosas e com todo suporte que eu poderia precisar: Agda, Clarissa, Olívia, Elias, Júlio e Rafael Sfair.

Este trabalho contou com o apoio das seguintes entidades:

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

Pró-reitoria de Pós-graduação - UNESP

"It's not a ghost, it's gravity."

Interstellar

Resumo

Uma das teorias físicas mais em evidência atualmente, responsável por reger o domínio das velocidades relativísticas e dos corpos de grande massa, é a Teoria da Relatividade Geral, postulada por Albert Einstein em 1915. Essa teoria introduz um novo conceito de gravidade, apresentando também uma previsão importante para esta pesquisa: a existência de buracos negros. Matematicamente, um buraco negro pode ser descrito por algumas das soluções das equações de Einstein, sendo definido como uma região do espaço-tempo com intensa ação gravitacional, delimitada por um horizonte de eventos. Uma vez que um buraco negro está continuamente interagindo com suas vizinhanças, é possível afirmar que ele também está em constante estado de perturbação, resultando em modos oscilantes neste buraco negro. Apesar da constatação de que nada escapa do horizonte de eventos, uma observação relevante é que, conforme a descrição de um buraco negro pela solução de Kerr das equações de Einstein, é possível extrair energia rotacional deste buraco negro por meio de processos específicos. Neste trabalho é feita uma revisão de alguns aspectos fundamentais e extremamente relevantes na pesquisa atual em relatividade geral, em particular na relacionada à física de buracos negros. Isso inclui a introdução de fatos básicos sobre buracos negros, bem como técnicas perturbativas e extração de energia de buracos negros com rotação.

Palavras-chave: buracos negros, perturbações, superradiância

Abstract

One of the most significant theories today, responsible for governing the realm of relativistic speeds and massive bodies, is the General Theory of Relativity postulated by Albert Einstein in 1915. This theory introduces a new concept of gravity, also presenting a crucial prediction for this research: the existence of black holes. Mathematically, a black hole can be described by some of Einstein's equations solutions, defined as a region in spacetime with intense gravitational action, bounded by an event horizon. As a black hole continuously interacts with its surroundings, it can be stated that it is in a constant state of disturbance, resulting in oscillating modes within this black hole. Despite the observation that nothing escapes the event horizon, a relevant point is that, according to the description of a black hole by the Kerr solution of Einstein's equations, it is possible to extract rotational energy from this black hole through specific processes. This work reviews some fundamental and extremely relevant aspects of current research in general relativity, in particular that related to black hole physics. This includes the introduction of basic facts about black holes, as well as perturbative techniques and energy extraction from rotating black holes.

Keywords: black holes, perturbations, superradiance

Lista de Figuras

Figura 1 – Sombra do buraco negro Sagittarius A* (Imagem retirada de https://phys.org/news/2022-05-astronomers-reveal-image-black-hole.html)	14
Figura 2 – Órbitas das S-stars em torno do candidato a buraco negro supermassivo no centro da Via Láctea (Imagem retirada de Gustavo E. Romero (2014)).	15
Figura 3 – Sombra do buraco negro supermassivo M87* (Imagem retirada de https://www.scielo.br/j/rbef/a/MNc6M6njv79NbCcbLjBW9HB/). . .	16
Figura 4 – Fluxograma de soluções das equações de Einstein	17
Figura 5 – Superfícies do buraco negro de Kerr (Imagem retirada de https://nbviewer.org/github/sage/SM_Kerr_surfaces.ipynb)	23
Figura 6 – Potencial efetivo de um buraco negro perturbado com representação das ondas de entrada e saída.	27
Figura 7 – Modos normais de frequência	28
Figura 8 – Condições de contorno para soluções da equação do tipo Schrödinger .	29
Figura 9 – Representação do processo de Penrose, onde a divisão da partícula ocorre dentro da ergorregião (Imagem retirada de Brito et al. (2020)). .	38

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	BURACOS NEGROS	13
2.1	Formação de buracos negros e classificação pela massa	13
2.1.1	Buracos negros de massa estelar	13
2.1.2	Buracos negros de massa intermediária	13
2.1.3	Buracos negros supermassivos	14
2.2	Evidências da existência de buracos negros	14
2.3	Soluções das Equações de Einstein	16
2.3.1	Solução de Schwarzschild	18
2.3.2	Solução de Reissner-Nordström	20
2.3.3	Solução de Kerr	20
2.3.3.1	Superfícies do buraco negro de Kerr	22
2.3.4	Solução de Kerr-Newman	23
3	PERTURBAÇÕES	25
3.1	Perturbações escalares em buracos negros de simetria esférica	25
3.2	Modos quasinormais	28
3.3	Perturbações escalares em buracos negros de simetria axial	30
3.3.1	Tetradas	30
3.3.2	Formalismo de Newman-Penrose	31
3.3.3	Perturbações em um buraco negro rotativo	33
4	EXTRAÇÃO DE ENERGIA DE BURACOS NEGROS	37
4.1	Processo de Penrose	37
4.2	Superradiância	39
5	CONCLUSÃO	42
	Referências	43
	APÊNDICE A – ESBOÇO DA DERIVAÇÃO DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD	45
	APÊNDICE B – PERTURBAÇÃO DE UM CAMPO ESCALAR MASSIVO	48

1 Introdução

A teoria de Albert Einstein, conhecida como Teoria da Relatividade Geral, foi publicada em 1915 e é responsável por unificar o espaço e o tempo em uma única abordagem e reformular o conceito de gravidade. Na Relatividade Geral, a gravidade deixa de ser conceituada como uma força e passa a ser compreendida como o resultado da curvatura do espaço-tempo gerada pela presença de massa ou energia [Guidry \(2019\)](#).

A Relatividade Geral se fez necessária uma vez que a Lei da Gravitação Universal de Newton já se mostrava inconsistente com os princípios da Relatividade Especial. Ao contrário da mecânica newtoniana, que considerava a ação gravitacional como instantânea e a força entre dois corpos, dependente apenas de sua posição em um determinado instante, a Relatividade Geral ofereceu uma abordagem mais abrangente e precisa [Hartle \(2013\)](#).

A gravidade é uma das quatro interações fundamentais da natureza, caracterizando-se por ser a mais fraca em termos de intensidade. No entanto, ela apresenta propriedades únicas que a distingue das demais. Em primeiro lugar, a gravidade é uma interação de longo alcance, o que significa que sua influência se estende por grandes distâncias. Além disso, a gravidade não está relacionada, por exemplo, a propriedades elétricas ou magnéticas dos corpos. Por fim, a característica universal da gravidade é notável, pois ela atua em todas as massas, independentemente de sua composição ou localização no universo [Guidry \(2019\)](#).

A teoria clássica newtoniana descreve a gravidade como uma força de atração, gerando um campo gravitacional de ação instantânea dependente da massa dos corpos envolvidos. Além da interação gravitacional, há outros conceitos que se diferenciam dentro das teorias de Newton e de Einstein: espaço e tempo. Na teoria newtoniana, o espaço é descrito a partir de um sistema de coordenadas fixo nos termos de um tempo absoluto e imutável. Entretanto, na relatividade introduziu-se o conceito de espaço-tempo, uma abordagem unificada e quadridimensional, onde espaço e tempo estão intrinsicamente ligados. Segundo a Teoria da Relatividade Geral, o espaço-tempo é dinâmico e a gravidade é descrita como a manifestação da curvatura do espaço-tempo. Essa curvatura é gerada pela presença de matéria ou energia, que moldam a geometria do espaço-tempo e determinam o comportamento gravitacional dos corpos [Guidry \(2019\)](#); [Blair \(2005\)](#); [Carroll \(2014\)](#).

Einstein fundamenta sua teoria em dois princípios essenciais: o Princípio da Equivalência e o Princípio de Covariância Geral. O Princípio da Equivalência estabelece que a ação da gravidade não é uma propriedade intrínseca da massa, mas sim uma característica do espaço-tempo em que a gravidade se manifesta. Além disso, de acordo com o Princípio da Equivalência, em um referencial local, não é possível distinguir se um objeto está em

queda livre sob a influência de um campo gravitacional ou em um estado de aceleração uniforme. Isso significa que a experiência de estar em queda livre é indistinguível de estar em um ambiente sem gravidade, onde a sensação de peso desaparece. Já o Princípio de Covariância Geral afirma que as leis da física são as mesmas em todos os referenciais. Isso significa que essas leis devem ser formuladas de maneira consistente e válida em qualquer sistema de coordenadas ou referenciais inerciais [Guidry \(2019\)](#); [Ferrari et al. \(2020\)](#).

Portanto, Einstein conclui que a gravidade está associada a geometria do espaço-tempo: na ausência de interação gravitacional, o espaço-tempo é plano e na sua presença, o tecido é curvo e a trajetória retilínea dos objetos é distorcida em função desta curvatura [Guidry \(2019\)](#).

Seguindo a ideia de que massa deforma o espaço-tempo, uma concentração muito grande de matéria provoca uma curvatura intensa no espaço-tempo. Uma das previsões da Relatividade Geral é a formação de buracos negros a partir de um colapso gravitacional, quando uma alta massa é comprimida a um volume extremamente reduzido até seu raio atingir um tamanho crítico. A partir da mesma teoria, a curvatura do espaço-tempo diverge dentro de um buraco negro. [Hartle \(2013\)](#).

Apesar da diferença significativa de magnitude entre o menor e o maior buraco negro conhecido, todos podem ser descritos por três parâmetros simples: massa, carga e momento angular. Ao classificar buracos negros pela massa, é possível dividi-los em algumas categorias, como buracos negros de massa estelar, buracos negros de massa intermediária e buracos negros supermassivos [Volonteri \(2010\)](#); [Chirenti \(2021\)](#).

A geometria de um buraco negro é descrita a partir de algumas das soluções das equações de Einstein, derivadas da Teoria da Relatividade Geral. Essas soluções descrevem a métrica de um buraco negro segundo três parâmetros simples que podem ser combinados: massa, carga e momento angular. Neste trabalho, são apresentadas quatro soluções divididas entre soluções de vácuo, eletrovácuo, sendo todas assintoticamente planas: solução de Schwarzschild, solução de Reissner-Nordström, solução de Kerr e solução de Kerr-Newman. Estas soluções descrevem a geometria de um buraco negro em equilíbrio que, apesar de ser uma idealização, os estudos a partir dessa ideia oferecem uma boa aproximação da realidade, uma vez que buracos negros estão em contínua interação com seus arredores, levando a um estado que pode ser descrito como uma perturbação de buracos negros isolados. Tal abordagem será estudada no Capítulo 3 [Konoplya and Zhidenko \(2011\)](#).

Uma das consequências dessas perturbações é a extração de energia do buraco negro, que pode ser realizada por meio de dois processos que serão explicados no decorrer do Capítulo 4 deste trabalho: o processo de Penrose e a superradiância [Guidry \(2019\)](#).

2 Buracos Negros

Há mais de dois séculos, John Michell sugeriu que algumas estrelas poderiam se tornar invisíveis para sempre. Esse fato seria justificado se a estrela em questão possuísse uma massa muito elevada e uma intensa atração gravitacional, onde nem a luz seria capaz de escapar. A hipótese da existência dessas estrelas invisíveis foi um dos conceitos pioneiros a respeito do que é conhecido hoje como buraco negro. Pode-se definir buraco negro como uma região do espaço-tempo causalmente desconectada do espaço-tempo restante, ou seja, nenhum evento dentro dessa região pode influenciar eventos que ocorrem fora dela. [Lang and Lang \(2013\)](#); [Gustavo E. Romero \(2014\)](#).

Este capítulo discutirá possíveis hipóteses para a formação de buracos negros, sua classificação, detecção e métricas que descrevem seu espaço-tempo sob a influência destes objetos.

2.1 Formação de buracos negros e classificação pela massa

2.1.1 Buracos negros de massa estelar

O mecanismo mais comum de formação de buracos negros é a partir de um colapso gravitacional gerado no fim da vida de uma estrela na sequência principal. Tal sequência representa a evolução estelar a partir da fusão de átomos de hidrogênio e hélio. Uma estrela comum é estável enquanto as reações de fusão em seu núcleo estiverem fornecendo pressão para contrabalancear a força gravitacional [Gustavo E. Romero \(2014\)](#).

A queima de elementos no núcleo da estrela transforma gradualmente hidrogênio em hélio e, no caso de estrelas massivas ($M > 5M_{\odot}$) transforma também carbono em ferro. A queima do ferro, no entanto, é um processo endotérmico, o que faz com que o núcleo contraia a fim de manter o processo de fusão no mesmo. Neste ponto, a força gravitacional se torna maior do que a pressão gerada pela estrela, levando a um colapso chamado de supernova [Gustavo E. Romero \(2014\)](#).

Estrelas da ordem de $20 - 30M_{\odot}$ podem formar buracos negros de $M > 1.8M_{\odot}$, enquanto estrelas mais massivas com grande spin podem produzir buracos negros com $M > 10M_{\odot}$. [Gustavo E. Romero \(2014\)](#).

2.1.2 Buracos negros de massa intermediária

O colapso gravitacional de estrelas da População III (primeiras estrelas formadas nas galáxias) pode formar buracos negros com massa entre $10^2 - 10^3M_{\odot}$. Buracos negros

mais massivos podem existir fora do núcleo de galáxias ao acretares matéria de suas vizinhanças ou a partir da fusão com outros buracos negros, ou estrelas [Gustavo E. Romero \(2014\)](#).

A taxa de acreção para formar buracos negros de massa intermediária é muito baixa, levando um tempo de formação maior que a idade do Universo. Portanto, a partir dos fatos descritos nessa subseção, a existência de buracos negros de massa intermediária ainda não foi comprovada [Gustavo E. Romero \(2014\)](#).

2.1.3 Buracos negros supermassivos

Este tipo de buraco negro está localizado no centro da maioria das galáxias mais próximas, sendo que sua massa mede em torno de $10^6 - 10^9 M_{\odot}$. Um dos exemplos de buracos negros supermassivos mais próximos está no centro da Via Láctea, possuindo cerca de $4 \times 10^6 M_{\odot}$. Por se localizar perto da constelação de Sagittarius na esfera celeste, foi chamado de Sagittarius A*, sendo mostrado na Figura 1 a seguir. Uma das hipóteses de formação de buracos negros supermassivos é a partir da fusão de buracos negros durante colisões de galáxias, originando buracos negros com massa resultante dessa fusão. [Gustavo E. Romero \(2014\)](#); [Ferrari et al. \(2020\)](#).



Figura 1 – Sombra do buraco negro Sagittarius A* (Imagem retirada de <https://phys.org/news/2022-05-astronomers-reveal-image-black-hole.html>)

2.2 Evidências da existência de buracos negros

Um buraco negro não emite radiação eletromagnética classicamente e para o caso de buracos negros isolados, não há interação com outros objetos, tornando pouco provável sua observação direta. No entanto, grande parte dos buracos negros está cercada de discos

de acreção, objetos como estrelas ou outros buracos negros e o efeito gravitacional sobre estes elementos possibilita sua detecção [Gustavo E. Romero \(2014\)](#); [Guidry \(2019\)](#).

Algumas considerações sobre observações de buracos negros podem ser exemplificadas segundo as categorias a seguir:

- Sistemas binários com intensa emissão de raios X cujo objeto de companhia é invisível, muito massivo e exerce grande influência gravitacional sobre a estrela visível - geralmente uma anã branca ou uma estrela de nêutrons;
- Observação de ondas gravitacionais com propriedades originadas a partir da fusão de dois buracos negros;
- Anomalias observacionais no centro de várias galáxias, onde grandes massas influenciam a velocidade de órbitas das estrelas.

As evidências que sustentam a presença de um objeto massivo no núcleo da Via Láctea, por exemplo, são observáveis quando se analisa o movimento de aproximadamente 20 estrelas dentro do aglomerado estelar. Estas estrelas, classificadas como tipo-B e identificadas como "*S-stars*", ocupam posições mais internas no aglomerado. Ao mapear suas trajetórias orbitais, como se observa na 2, foi possível calcular a existência de uma entidade de massa extrema no centro galáctico [Gustavo E. Romero \(2014\)](#).

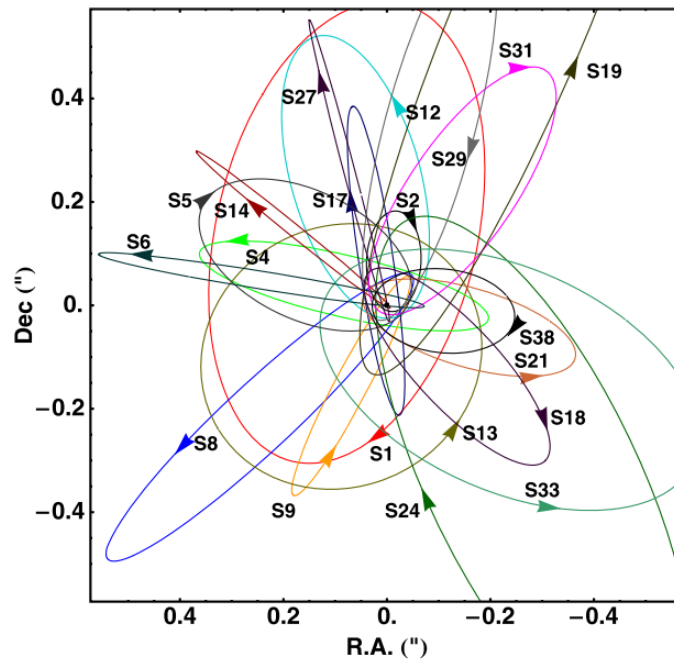


Figura 2 – Órbitas das S-stars em torno do candidato a buraco negro supermassivo no centro da Via Láctea (Imagem retirada de [Gustavo E. Romero \(2014\)](#)).

A colaboração *Event Horizon Telescope - EHT* publicou em 2019 o que seria mais uma das evidências da existência de um buraco negro: a imagem de sua sombra (*shadow*).

Para formá-la, o EHT utilizou oito telescópios dispostos pela América, Havaí, Antártida e Europa que, explorando a rotação da Terra e associando todas as estações, transformaram o planeta num grande radiotelescópio, realizando observações no comprimento de onda de 1.3mm Neves (2020).

A primeira imagem de sombra publicada é do buraco negro supermassivo M87*, localizado no centro da galáxia Messier 87, que pode ser observada na Figura 3. O fenômeno sombra é fruto do desvio de luz devido à ação de um intenso campo gravitacional, onde é necessário o uso de uma métrica que descreve uma massa com rotação Neves (2020).



Figura 3 – Sombra do buraco negro supermassivo M87* (Imagem retirada de <https://www.scielo.br/j/rbef/a/MNc6M6njv79NbCcbLjBW9HB/>).

A sombra do buraco negro é a área escura da imagem, cujo limite interno é chamado de silhueta da sombra. Em seu entorno, há uma região vermelha-alaranjada, formada por gás e poeira, que orbita e cai em direção ao buraco negro. Essa região é chamada de disco de acreção e é possível visualizá-la, pois a matéria emite radiação devido ao seu movimento Neves (2020).

Devido à rotação do buraco negro, sua sombra aparece levemente deformada, tendo um desvio de circularidade menor que 10% para o M87*. Esse fato só é possível para um buraco negro de Kerr, tópico que será discutido no capítulo a seguir Neves (2020).

2.3 Soluções das Equações de Einstein

As equações de campo de Einstein foram publicadas em 1915 com a Teoria da Relatividade Geral e são responsáveis por descrever a métrica de um campo gravitacional e como a presença de matéria é capaz de curvar o espaço-tempo. Essas equações podem

ser expressas da seguinte forma:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

sendo $T_{\mu\nu}$ o tensor energia-momento e $G_{\mu\nu}$ o tensor de Einstein, descrito pelo tensor de Ricci e pelo escalar de curvatura, como mostra a equação a seguir:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.2)$$

As soluções das equações de Einstein são métricas que definem o espaço-tempo, sendo que algumas dessas soluções podem descrever a geometria de um buraco negro. Essas soluções num espaço assintoticamente plano podem ser divididas conforme a Figura 4:

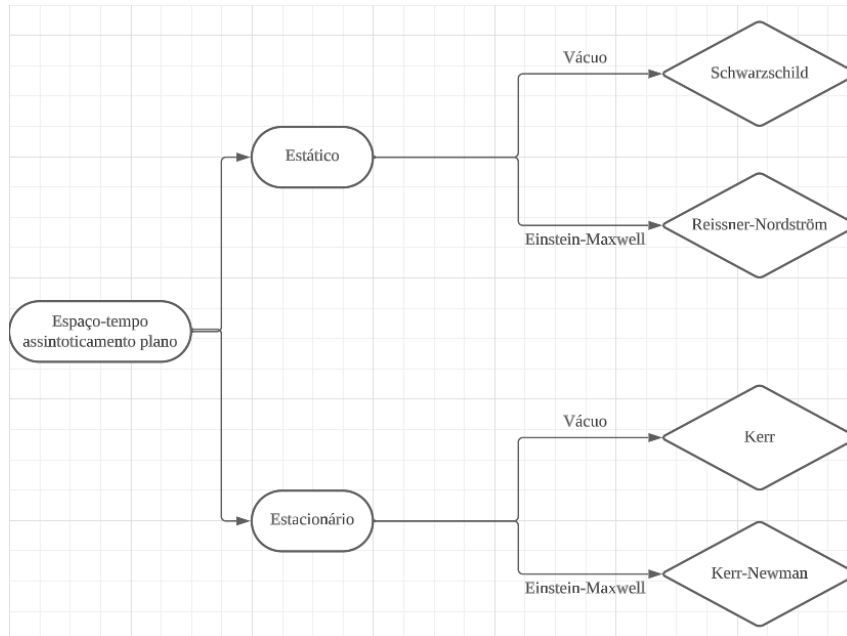


Figura 4 – Fluxograma de soluções das equações de Einstein

Definindo alguns conceitos da figura acima, um espaço é assintoticamente plano quando tomando $r \rightarrow \infty$, a métrica que o descreve é Minkowski. Soluções estacionárias são soluções invariantes no tempo, enquanto soluções estáticas são invariantes também por reversão temporal.

O teorema *no-hair* enuncia que buracos negros estacionários descritos a partir da solução das equações de Einstein-Maxwell podem ser caracterizados a partir de três parâmetros: massa, carga e momento angular. Sendo assim, os buracos negros são classificados em:

- **Buraco negro de Schwarzschild:** descrito apenas pela massa;
- **Buraco negro de Reissner-Nordström:** descrito por massa e carga;

- **Buraco negro de Kerr:** descrito por massa e momento angular;
- **Buraco negro de Kerr-Newman:** descrito por massa, momento angular e carga.

2.3.1 Solução de Schwarzschild

Em 1916, pouco depois da formulação da Teoria da Relatividade Geral, Karl Schwarzschild apresentou a primeira solução para as equações de campo de Einstein. A solução de Schwarzschild é dada pela Equação 2.3 e o esboço de sua dedução pode ser visto no Apêndice A.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.3)$$

sendo m a massa do buraco negro.

No infinito assintótico ($r \rightarrow \infty$), a métrica de Schwarzschild se reduz à métrica de Minkowski [Ferrari et al. \(2020\)](#).

Essa solução descreve o campo gravitacional em torno de um objeto estático e esfericamente simétrico. Além disso, é uma solução de vácuo, o que significa que é válida na ausência de matéria, resultando em um tensor energia-momento igual a zero. Resolver uma solução de vácuo é equivalente a tratar apenas a equação $R_{\mu\nu} = 0$. Isso pode ser demonstrado como:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= 0 \\ g_{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R &= 0 \\ R - \frac{1}{2}4R &= 0 \\ R - 2R &= 0 \\ -R &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Por fim, aplicando o resultado obtido na equação 2.4 nas equações de Einstein para o vácuo, concluímos que:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \cdot 0 &= 0 \\ R_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Devido a esse fato, a solução de Schwarzschild é utilizada para descrever o campo gravitacional próximo de qualquer objeto no vácuo, desde que se desconsidere o momento angular e se assuma que esses objetos são esfericamente simétricos [Guidry \(2019\)](#).

Impor que os coeficientes da métrica esféricamente simétrica satisfaçam as equações de Einstein no vácuo implica no resultado conhecido como teorema de Birkhoff. Esse teorema enuncia que a única geometria do espaço-tempo exterior a uma distribuição de energia-momento com simetria esférica e que satisfaz as equações de Einstein é a solução de Schwarzschild, o que significa que o teorema não só estabelece que a solução de Schwarzschild é a única solução com simetria esférica mas também que a simetria esférica implica numa solução estática.

Um dos elementos importantes nessa métrica é o raio de Schwarzschild, descrito por:

$$R_S = 2m \quad (2.6)$$

O raio de Schwarzschild é o raio crítico que a concentração de massa deve atingir para se tornar um buraco negro de Schwarzschild. Quando uma estrela colapsada tem tamanho inferior a este raio, ela é denominada um buraco negro de Schwarzschild. Nesse contexto, o raio de Schwarzschild coincide com o horizonte de eventos de um buraco negro [Ferrari et al. \(2020\)](#).

A singularidade no raio de Schwarzschild é uma singularidade de coordenadas que pode ser eliminada da solução de Schwarzschild ao escolher um novo sistema de coordenadas para a sua descrição. Um desses sistemas é conhecido como as coordenadas de Eddington-Finkelstein.

Define-se então um novo sistema de coordenadas tal que:

$$\bar{t} \equiv v = t + r + 2 \ln |r - 2m| = t + r^*. \quad (2.7)$$

Sabendo que $\bar{r} = r$, $\bar{\theta} = \theta$ e $\bar{\phi} = \phi$. Assim, em coordenadas de tartaruga r_* , de forma que $r_* = r + 2m \ln \left| \frac{r}{2m} - 1 \right|$, tem-se $t = v - r^* \Rightarrow dt = dv - dr^*$. Logo,

$$dt^2 = dt \otimes dt = (dv - dr^*) \otimes (dv - dr^*) \quad (2.8)$$

Novamente aplicando as coordenadas de tartaruga:

$$dr^* = \frac{dr^*}{dr} dr \quad (2.9)$$

$$\frac{dr^*}{dr} = \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \quad (2.10)$$

Substituindo em $-(1 - \frac{2m}{r})dt^2$:

$$-\left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} \right) dv^2 + dvdr + drdv - \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 \quad (2.11)$$

Portanto, a solução de Schwarzschild em coordenadas de Eddington-Finkelstein é dada por:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 + dvdr + drdv + r^2 d\Omega^2 \quad (2.12)$$

de onde se nota que $r = 2m$ não é singular nessas coordenadas.

2.3.2 Solução de Reissner-Nordström

A métrica de Reissner-Nordström é uma solução esfericamente simétrica assim como a solução de Schwarzschild, no entanto, não é uma solução de vácuo devido à presença de carga elétrica e, portanto, de um campo eletromagnético. O tensor energia-momento deste campo é dado por: ¹

$$T_{\mu\nu} = -\mu_0^{-1} \left(F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right), \quad (2.13)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ é o tensor de intensidade do campo eletromagnético e A_{μ} é o quadripotencial eletromagnético [Gustavo E. Romero \(2014\)](#).

Esta métrica é dada por:

$$ds^2 = \Delta c^2 dt^2 - \Delta^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.14)$$

onde:

$$\Delta = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}. \quad (2.15)$$

sendo M a massa do buraco negro e q a carga elétrica total.

A métrica de Reissner-Nordström possui uma singularidade de coordenadas em $\Delta = 0$, de forma que:

$$r_{\pm} = m \pm (m^2 - q^2)^{1/2}, \quad (2.16)$$

O sinal $\pm$ para o raio do horizonte indica a presença de dois horizontes no buraco negro. Quando esse raio é igual a q , tem-se um buraco negro de Reissner-Nordström extremo, com apenas um horizonte. Para casos como $m^2 > q^2$, este buraco negro possui dois horizontes [Gustavo E. Romero \(2014\)](#).

2.3.3 Solução de Kerr

Para momentos angulares pequenos, é possível descrever o espaço-tempo como uma aproximação da perturbação da métrica de Schwarzschild, mas momentos angulares intensos

¹ Tensor simetrizado pelo método de Belinfante ou obtido pelo método de Einstein-Hilbert derivando a lagrangiana com respeito à métrica

acabam por desviar da simetria esférica. O momento angular implica em energia rotacional e, para a Relatividade Geral, isso significa que a rotação de um campo gravitacional é geradora do próprio campo.

Enquanto a solução de Schwarzschild foi proposta logo após a publicação da Teoria da Relatividade Geral, a solução de Kerr só foi encontrada em 1963, por Roy Kerr. A solução de Kerr é caracterizada por dois parâmetros: massa, interpretada como a massa responsável por gerar o campo gravitacional, e momento angular [Guidry \(2019\)](#).

Assim como a solução de Schwarzschild, a solução de Kerr é uma solução de vácuo das equações de Einstein, válida na ausência de matéria. O teorema de Carter-Robinson enuncia que, se um espaço-tempo assintoticamente plano, estacionário, com simetria axial, for uma solução de vácuo das equações de Einstein, então ele é descrito pela solução de Kerr.

A métrica de Kerr é dada pelo seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{4mra \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi dt + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.17)$$

onde, $a \equiv J/m$ $\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ $\Delta \equiv r^2 - 2mr + a^2$, sendo que as coordenadas (t, r, θ, ϕ) são chamadas de coordenadas de Boyer-Lindquist.

O parâmetro de Kerr a possui unidades de comprimento em unidades geométricas, enquanto J é descrito como momento angular e m é a massa do buraco negro. Se o buraco negro não estiver em rotação, ou seja, se $a = 0$, o elemento de linha de Kerr é reduzido ao elemento de linha de Schwarzschild e para $r \gg m$ e $r \gg a$, a métrica de Kerr se torna assintoticamente plana.

Existe, portanto, um momento angular máximo para o buraco negro de Kerr, dado por:

$$J_{max} = m^2. \quad (2.18)$$

Buracos negros nessas condições são chamados de buracos negros de Kerr extremos e podem ser formados a partir de discos de acreção em um sistema binário ou ao redor de um buraco negro supermassivo que transfira seu momento angular, além de estrelas massivas colapsadas com momento angular inicial significativo [Guidry \(2019\)](#).

Algumas propriedades da métrica de Kerr podem ser deduzidas a partir da Equação 2.17:

- A métrica é axialmente simétrica, ou seja, não depende do ângulo azimutal;

- Não é estática, então não é invariante para a reversão temporal;
- É estacionária, o que significa que não depende do tempo;
- É invariante para inversões simultâneas de tempo e de ângulo azimutal.

O raio do horizonte de eventos de um buraco negro de Kerr é obtido tomando $\Delta \rightarrow 0$:

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}, \quad (2.19)$$

considerando $ds \rightarrow 0$ e $a \leq m$, essa situação corresponde a uma singularidade de coordenadas. Quando $a \rightarrow 0$, observa-se que $r_+ \rightarrow 2m$, o que coincide com o raio de Schwarzschild. Logo, r_+ representa o horizonte que transforma a solução de Kerr em um buraco negro. O raio do horizonte de eventos, dado pela Equação 2.19 só existe para $a \leq m$.

2.3.3.1 Superfícies do buraco negro de Kerr

Devido ao parâmetro de rotação, um buraco negro de Kerr possui distintas superfícies. A medida que se aumenta ou diminui este parâmetro, as superfícies ficam mais ou menos evidentes. São elas:

- Anel singular
- Ergosuperfície interna
- Horizonte interno
- Horizonte externo
- Ergosuperfície externa

Essas superfícies estão representadas na Figura 5 a seguir:

A singularidade ainda é um desafio de compreensão, uma vez que fica localizada numa região fora do alcance da aplicação de leis físicas e matemáticas. Enquanto para o buraco negro de Schwarzschild a singularidade é um ponto de dimensões infinitesimais, para o buraco negro de Kerr ela se comporta como um anel.

A ergosuperfície interna é uma superfície localizada dentro do horizonte interno e assim como ocorre com a singularidade, essa região está fora do domínio das equações físicas.

Também chamado de horizonte de Cauchy, o horizonte interno é uma superfície que oculta a singularidade e também não é visível para um observador externo. A partir do horizonte de Cauchy, as equações de Einstein não são mais válidas para explicar o

Kerr black hole

Outer ergosurface
Outer horizon
Inner horizon
Inner ergosurface
Singular ring

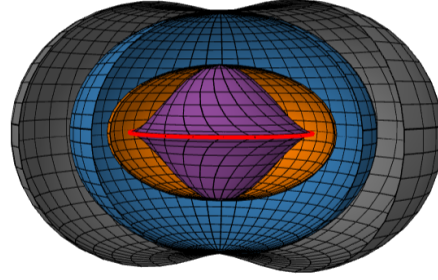


Figura 5 – Superfícies do buraco negro de Kerr (Imagem retirada de https://nbviewer.org/github/sagemanifolds/SageManifolds/blob/master/Notebooks/SM_Kerr_surfaces.ipynb)

que acontece dentro dessa região. Mais externamente ao horizonte interno, há o horizonte externo ou horizonte de eventos. Esta é uma região de quebra de causalidade entre os eventos que acontecem dentro do buraco negro e fora do buraco negro.

A ergossuperfície externa é o limite estático do buraco negro de Kerr. Entre ela e o horizonte de eventos está localizada a ergoregião, onde ocorre um arrasto gravitacional devido à rotação do buraco negro e nenhum observador se mantém estático nessa região, seguindo o mesmo sentido de rotação. A ergossuperfície, juntamente com a ergoregião, formam a ergosfera.

Quando o momento angular é máximo e o buraco negro se torna um buraco negro de Kerr extremo, não havendo mais divisão entre os dois tipos de horizonte, unindo-os em apenas um horizonte que oculta a ergossuperfície interna e o anel singular. No entanto, quando o momento angular tende a zero e o buraco negro se torna um buraco negro de Schwarzschild, o horizonte de eventos coincide com a ergossuperfície externa, restando apenas a singularidade além dessas regiões.

2.3.4 Solução de Kerr-Newman

A solução de Kerr-Newman foi descoberta por Ezra "Ted" Newman em 1965 e descreve um buraco negro caracterizado pelos três parâmetros do teorema *no-hair*: massa M , momento angular J e carga Q . Essa solução pode ser obtida a partir da métrica de Kerr em coordenadas de Boyer-Lindquist com a seguinte substituição:

$$2mr \rightarrow 2mr - q^2, \quad (2.20)$$

sendo que q está relacionado a Q pela Equação ?? Gustavo E. Romero (2014).

Essa métrica é dada por:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\Sigma}(dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma}[adt - (r^2 + a^2)d\varphi]^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (2.21)$$

onde $\Delta(r) \equiv r^2 - 2mr + a^2 + Q^2$ e $\Sigma(r, \theta) \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$.

É uma solução de eletrovácuo devido à carga do buraco negro e ao campo eletromagnético ao seu redor. Como o campo elétrico não pode permanecer estático na ergosfera, um campo magnético é gerado e visto por um observador fora do limite estático. Assim como a solução de Kerr, possui dois horizontes e a presença de uma ergosfera. A métrica de Kerr-Newman representa a solução mais geral das equações de Einstein na presença de um campo eletromagnético para um buraco negro estacionário, axialmente simétrico num espaço-tempo assintoticamente plano [Gustavo E. Romero \(2014\)](#).

3 Perturbações

A maioria dos buracos negros observáveis não estão isolados, uma vez que interagem com a radiação e a matéria em suas vizinhanças, sendo que a matéria pode ser um disco de acreção ou outros objetos. Essa interação implica na existência de perturbações nesses buracos negros.

Ao utilizar aproximações lineares para a métrica de um buraco negro, perturbá-lo significa adicionar campos ao seu espaço-tempo de fundo, sendo a perturbação uma função das coordenadas do espaço-tempo. Ao adicionar um campo escalar a esse espaço-tempo, formam-se perturbações escalares, que são o tipo de perturbação mais simples para um buraco negro. Uma vez perturbado, a resposta do buraco negro a essas perturbações é a emissão de ondas gravitacionais que evoluem no tempo [Konoplya and Zhidenko \(2011\)](#).

A descrição da métrica $g_{\mu\nu}$ de um buraco negro perturbado pode ser feita por

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + \delta g_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

sendo $g_{\mu\nu}^0$ o *background* de um espaço-tempo não-perturbado, quando todas as perturbações foram amortecidas. Um exemplo é definir $g_{\mu\nu}^0$ como as soluções de Schwarzschild ou Kerr. Tomando uma aproximação linear, $\delta g_{\mu\nu}$ é a perturbação, que por sua vez muito menor do que o *background* [Konoplya and Zhidenko \(2011\)](#).

3.1 Perturbações escalares em buracos negros de simetria esférica

Abordando a dinâmica de um campo escalar ψ de massa μ na métrica de Schwarzschild pelas equações de Klein-Gordon, dado pela Equação 3.2, assume-se que ψ é um campo escalar teste, ou seja, sua amplitude é tão pequena que podemos ignorar sua reação na métrica. Variando a ação do campo escalar em relação ao campo ψ , obtemos equações de Klein-Gordon [Ferrari et al. \(2020\)](#).

$$(\square + \mu^2)\psi = 0 \quad (3.2)$$

sendo $\mu = mc/\hbar$.

A equação de Klein-Gordon nos leva a:

$$(\square + \mu^2)\psi \equiv (\nabla_\mu \nabla^\mu + \mu^2)\psi = 0 \quad (3.3)$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \psi + \mu^2 \psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \psi) + \mu^2 \psi = 0 \quad (3.4)$$

Como o determinante $\sqrt{-g}$ não depende do tempo e a métrica é diagonal, tem-se:

$$g^{tt}\partial_t^2\psi + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_r(\sqrt{-g}g^{rr}\partial_r\psi) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\theta(\sqrt{-g}g^{\theta\theta}\partial_\theta\psi) + g^{\phi\phi}\partial_\phi^2\psi + \mu^2\psi = 0 \quad (3.5)$$

Quando se substitui os elementos da métrica inversa de Schwarzschild, obtemos:

$$-f^{-1}(r)\partial_t^2\psi + f\partial_r^2\psi + \partial_r\psi\left(\partial_rf + \frac{2f}{r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\cot\theta\partial_\theta\psi + \partial_\theta^2\psi + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\psi\right] + \mu^2\psi = 0 \quad (3.6)$$

Considerando $\psi(t, r, \theta, \phi) = \frac{\Psi(r)}{r}S(\theta)e^{ik\phi - i\omega t}$ na equação acima, aplicando a separação de variáveis e as coordenadas de tartaruga, obtém-se:

$$\partial_{r_*}^2\Psi + \left[\omega^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\lambda r^{-2} + \frac{2M}{r^3} - \mu^2\right)\right]\Psi = 0 \quad (3.7)$$

Os passos intermediários estão descritos no Apêndice B. A Equação 3.7 tem o mesmo formato que a equação de Schrödinger independente do tempo. Logo, essa equação pode ser resolvida e analisada pelas técnicas da mecânica quântica. O espalhamento de uma onda escalar pelo buraco negro de Schwarzschild pode ser analisado como o espalhamento do pacote de onda do potencial efetivo dado pela Equação 3.8 Ferrari et al. (2020).

$$V_{r_*}^{scalar} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\lambda r^{-2} + \frac{2M}{r^3} - \mu^2\right) \quad (3.8)$$

Buscando soluções assintóticas para a Equação 3.7, próximo ao horizonte de eventos, tem-se que $r \rightarrow 2M$. Neste limite, r_* fica:

$$r_* \xrightarrow{r \rightarrow 2M} -\infty \quad (3.9)$$

E $V(r)$ fica:

$$V(r) \xrightarrow{r \rightarrow 2M} 0 \quad (3.10)$$

A equação de Klein-Gordon irá se tornar:

$$\square(\psi) - \mu^2\psi = 0 \xrightarrow{r \rightarrow 2M} \omega^2\Psi(r_*) + \frac{\partial^2}{(\partial r_*)^2}\Psi(r_*) = 0 \quad (3.11)$$

A solução assintótica do campo escalar Ψ em função de r_* próximo ao horizonte de eventos pode ser observado como:

$$\Psi(r_*) \xrightarrow{r \rightarrow 2M} A_{\text{out}}e^{i r_*\omega} + A_{\text{in}}e^{(-i r_*\omega)} \quad (3.12)$$

onde A_{in} representa a amplitude da onda de entrada no buraco negro e A_{out} representa a amplitude da onda de saída do buraco negro.

Agora para soluções distantes do buraco negro, com $r \rightarrow \infty$:

$$r_* \xrightarrow{r \rightarrow \infty} +\infty \quad (3.13)$$

$$V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \mu^2 \quad (3.14)$$

A equação de Klein-Gordon para este caso é:

$$\square(\psi) - \mu^2 \psi = 0 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -(\mu + \omega)(\mu - \omega)\Psi(r_*) + \frac{\partial^2}{(\partial r_*)^2} \Psi(r_*) = 0 \quad (3.15)$$

A solução assintótica para $r \rightarrow \infty$ é, então:

$$\Psi(r_*) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} B_{out} e^{(i\sqrt{-\mu^2 + \omega^2} r_*)} + B_{in} e^{(-i\sqrt{-\mu^2 + \omega^2} r_*)} \quad (3.16)$$

Se $\omega > \mu$: B_{in} é a amplitude de uma onda se aproximando do infinito. B_{out} é a amplitude de uma onda que se desloca em direção ao infinito.

Se $\omega < \mu$: B_{in} representa um modo exponencial de crescimento no infinito; B_{out} representa um modo exponencial de decaimento no infinito.

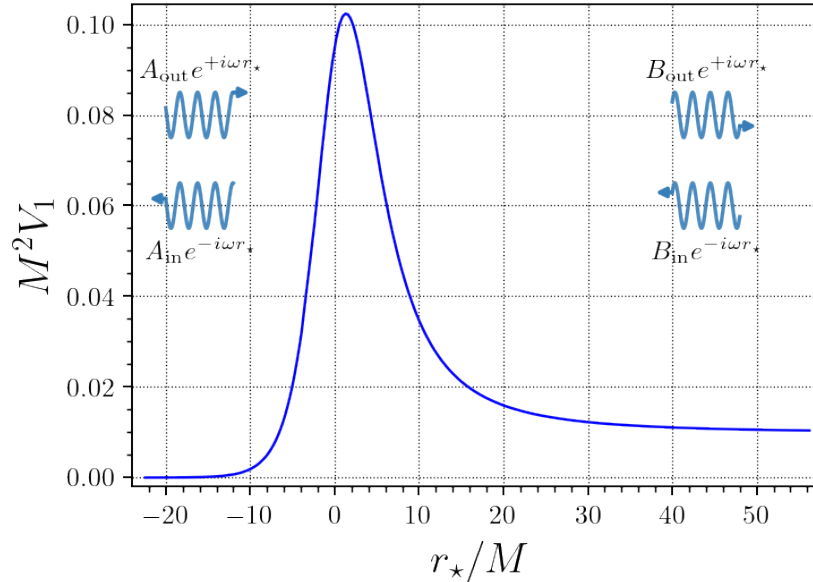


Figura 6 – Potencial efetivo de um buraco negro perturbado com representação das ondas de entrada e saída.

Para produzir oscilações livres no espaço-tempo do buraco negro, as soluções da equação de onda devem ser de saída no infinito e de entrada no horizonte de eventos [Chirenti \(2018\)](#).

3.2 Modos quasinormais

Uma maneira eficiente de estudar o comportamento de buracos negros próximos ao estado de equilíbrio é analisando sua resposta a perturbações externas. Essa resposta ocorre na forma de oscilações com frequências características chamadas de modos quasinormais [Ferrari et al. \(2020\)](#). Antes de descrever o que são modos quasinormais é necessário primeiro relembrar o conceito de modos normais. Estes são os modos de oscilação fundamentais de um sistema físico, presentes na ausência de forças externas. Essas frequências fundamentais podem ser combinadas e assim se constroem configurações muito mais gerais. Isso é feito explicitamente no método de Fourier. A Figura 7 representa os quatro primeiros modos fundamentais de uma corda com extremidades fixas, representando $1/2, 1, 3/2$ e 2 comprimentos de onda respectivamente.

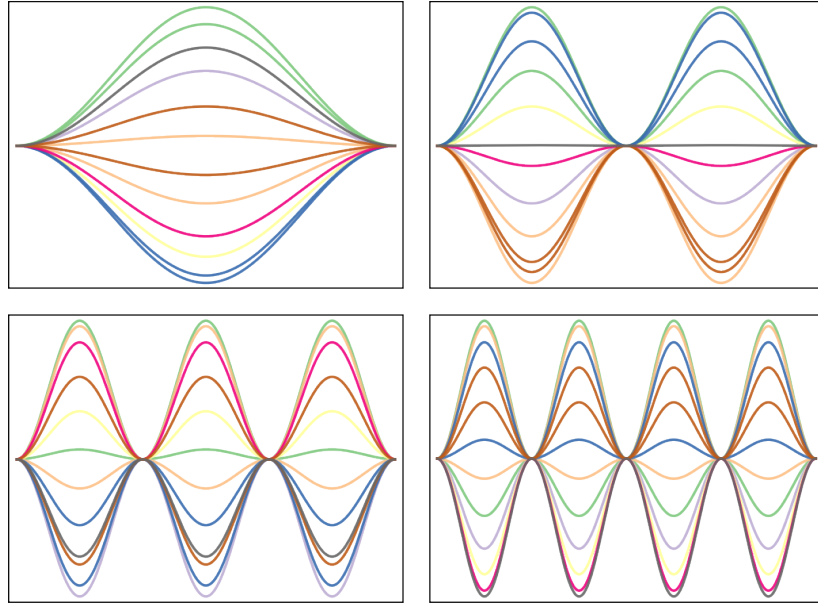


Figura 7 – Modos normais de frequência

Modos quasinormais são soluções de sistemas físicos abertos, que perdem energia por meio de dissipação. Eles aparecem como solução da Equação 3.7, satisfazendo condições de contorno específicas. Para o caso de buracos negros, as frequências quasinormais não dependem da maneira que o campo ou o buraco negro foi perturbado. Logo, os modos quasinormais são determinados apenas pelos parâmetros do buraco negro. [Ferrari et al. \(2020\)](#); [Chirenti \(2018\)](#); [Konoplya and Zhidenko \(2011\)](#).

Considerando a Equação 3.7, sua solução quando $r_* \rightarrow \pm\infty$ é

$$\Psi \simeq A_{in}e^{-i\omega r_*} + A_{out}e^{i\omega r_*}, \quad (3.17)$$

O comportamento assintótico dessa solução levando em conta a dependência temporal é

$$\Psi e^{-i\omega t} \simeq A_{in}e^{-i\omega(r_*+t)} + A_{out}e^{i\omega(r_*-t)}. \quad (3.18)$$

O primeiro termo da solução representa uma onda de entrada com amplitude A_{in} sendo que o segundo termo representa uma onda de saída com amplitude A_{out} . Para oscilações livres em um buraco negro, as condições de contorno impostas são de saída no infinito e de entrada no horizonte de eventos, como se observa na imagem a seguir:

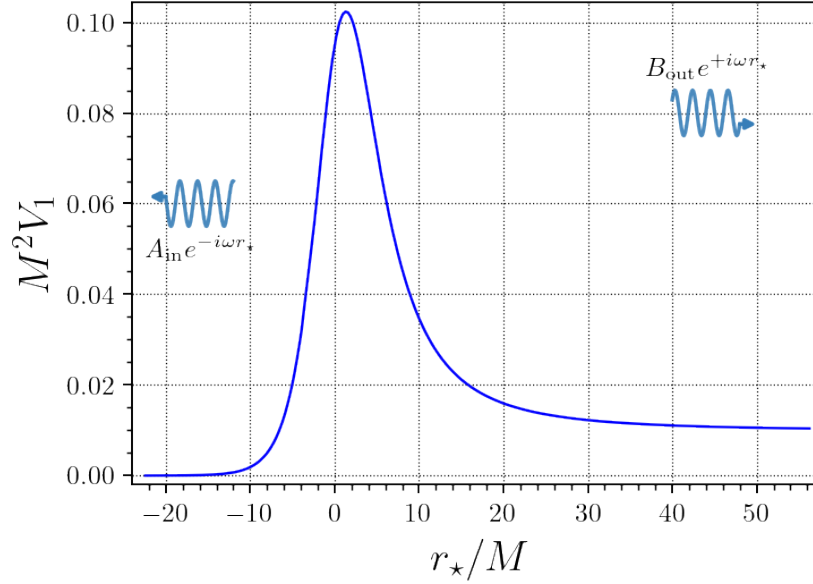


Figura 8 – Condições de contorno para soluções da equação do tipo Schrödinger

Perturbações externas podem excitar os modos quasinormais de buracos negros, aparecendo como oscilações amortecidas como resposta natural do buraco negro. Os modos quasinormais que aparecem na fase *ringdown* da coalescência de um sistema binário de buracos negros são modos característicos de oscilação de um espaço-tempo, o que significa que não há dependência de perturbações iniciais. Além disso, os modos quasinormais são modos de oscilação livre com autofrequências complexas, contrapondo os modos normais, que possuem autofrequências reais [Chirenti \(2018\)](#); [Ferrari et al. \(2020\)](#).

Um buraco negro perturbado pode ser resultado do colapso de uma estrela massiva ou de uma fusão de um sistema binário. O novo buraco negro em geral será não-estacionário, porém é possível que ele adquira uma configuração estacionária emitindo ondas gravitacionais com frequências iguais às oscilações não-radiais até se tornar um buraco negro estacionário. Essas oscilações não-radiais são amortecidas por conta da emissão gravitacional, fazendo com que suas autofrequências sejam complexas. [Ferrari et al. \(2020\)](#).

Tomando essas autofrequências:

$$\omega = \omega_R + i\omega_I \quad (3.19)$$

sendo que $\sim e^{-i\omega t}$ com $\omega_I < 0$ descreve uma oscilação amortecida

$$e^{-i\omega t} = e^{-i\omega_R t} e^{\omega_I t} \quad (3.20)$$

onde a frequência de oscilação é $\nu = \omega_R/(2\pi)$ e o tempo amortecido é

$$\tau = -\frac{1}{\omega_I} \quad (3.21)$$

O sinal de ω_I permite que seja analisada a estabilidade linear do espaço-tempo. Quando $\omega_I > 0$, a perturbação cresce exponencialmente, o que indica que pode haver instabilidade enquanto para $\omega_I < 0$ há um amortecimento exponencial apresentando estabilidade. [Chirenti \(2018\)](#).

3.3 Perturbações escalares em buracos negros de simetria axial

No cálculo de perturbações em buracos negros existem diferentes caminhos para se chegar às equações diferenciais radiais e angulares. O processo para perturbações num buraco negro de Kerr envolve o chamado formalismo de Newman-Penrose, que abrange conceitos de tetradas e da parte sem-traço do escalar de Riemann, chamada de escalar de Weyl. O objetivo é chegar na equação master de Teukolsky, responsável por definir a perturbação em um buraco negro de simetria axial. A descrição desse processo é o enfoque desta seção.

3.3.1 Tetradas

Uma base para um espaço T_p tangente a um ponto p é dada pelas derivadas parciais com respeito as coordenadas deste ponto, sendo $\hat{e}_{(\mu)} = \partial_\mu$. Seguindo a mesma ideia, uma base para um espaço cotangente é dada pelo gradiente da função de coordenadas, ou seja, $\hat{\theta}^\mu = dx^\mu$. É possível continuar definindo inúmeras bases, no entanto, considera-se que para cada ponto da variedade há um conjunto de vetores formando uma base ortonormal $\hat{e}_a$, cujos índices latinos não estão relacionados a nenhum sistema de coordenadas. Quando essa base ortonormal é formada por 4 vetores ela é chamada de tetrada, sendo uma ferramenta fundamental para o estudo do formalismo de Newman-Penrose [Carroll \(2014\)](#).

Novamente, a base $\hat{e}_{(\mu)} = \partial_\mu$ pode ser escrita como

$$\hat{e}_{(\mu)} = e_\mu^a \hat{e}_{(a)}, \quad (3.22)$$

sendo que as componentes e_μ^a formam uma matriz inversível, podendo ser descrita a seguir por

$$e_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu, \quad e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a. \quad (3.23)$$

As expressões acima também servem como componentes dos vetores $\hat{e}_{(a)}$ nas coordenadas da base:

$$\hat{e}_{(a)} = e_a^\mu \hat{e}_{(\mu)} \quad (3.24)$$

Num espaço-tempo lorentziano, η_{ab} representa a métrica de Minkowski. Essa métrica, escrita canonicamente, vem de um produto interno de bases dado por

$$g(\hat{e}_{(a)}, \hat{e}_{(b)}) = \eta_{ab}. \quad (3.25)$$

Nos termos de uma tetrada, tem-se

$$g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu = \eta_{ab}, \quad (3.26)$$

igualmente,

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}. \quad (3.27)$$

3.3.2 Formalismo de Newman-Penrose

O formalismo de Newman-Penrose é um formalismo de tetradas complexas, sendo que a métrica de Minkowski do espaço tangente é dada por

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Essa tetrada é escolhida a partir de um conjunto de quatro vetores nulos, sendo eles $l_\mu, n_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu$ que formam

$$g_{\mu\nu} = -l_\mu n_\nu - n_\mu l_\nu + m_\mu \bar{m}_\nu + \bar{m}_\mu m_\nu \quad (3.29)$$

Como não existe uma base completamente real numa variedade lorentziana, dois desses vetores devem ser complexos e sabendo que a métrica final é real, essas duas tetradas complexas são complexos conjugados. É possível reescrever as derivadas covariantes relacionadas a cada um desses vetores nulos de outra forma, denotadas por [Compère \(2019\)](#)

$$D = l^\mu \nabla_\mu; \quad \Delta = n^\nu \nabla_\nu; \quad \delta = m^\mu \nabla_\mu; \quad \bar{\delta} = \bar{m}^\mu \nabla_\mu. \quad (3.30)$$

Os símbolos de Christoffel para este caso possuem 24 componentes, equivalente a 12 números complexos, onde no formalismo de Newman-Penrose são substituídos por 12 coeficientes complexos de spin, nomeados a seguir [Compère \(2019\)](#):

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{1}{2} (n^\mu l^\nu \nabla_\nu l_\mu + m^\mu l^\nu \nabla_\nu \bar{m}_\mu); \\ \kappa &= -m^\mu l^\nu \nabla_\nu l_\mu; \quad \lambda = -n^\mu \bar{m}^\nu \nabla_\nu \bar{m}_\mu; \\ \sigma &= -m^\mu m^\nu \nabla_\nu l_\mu; \quad \mu = -n^\mu m^\nu \nabla_\nu \bar{m}_\mu; \\ \rho &= -m^\mu \bar{m}^\nu \nabla_\nu l_\mu; \quad \nu = -n^\mu n^\nu \nabla_\nu \bar{m}_\mu; \\ \tau &= -m^\mu n^\nu \nabla_\nu l_\mu; \quad \varpi = -n^\mu l^\nu \nabla_\nu \bar{m}_\mu; \\ \gamma &= -\frac{1}{2} (n^\mu n^\nu \nabla_\nu l_\mu + m^\mu n^\nu \nabla_\nu \bar{m}_\mu); \\ \alpha &= -\frac{1}{2} (n^\mu \bar{m}^\nu \nabla_\nu l_\mu + m^\mu \bar{m}^\nu \nabla_\nu \bar{m}_\mu); \\ \beta &= -\frac{1}{2} (n^\mu m^\nu \nabla_\nu l_\mu + m^\mu m^\nu \nabla_\nu \bar{m}_\mu). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Analisando os tensores de curvatura para um espaço quadridimensional, o tensor de Riemann possui 20 componentes reais independentes, enquanto o tensor de Ricci, simetricamente, possui 10 componentes reais. Ao tomar a parte sem-traço do tensor de Riemann, obtém-se o tensor de Weyl com 10 componentes reais ou 5 componentes complexas, definido por [Compère \(2019\)](#)

$$W_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} - g_{\mu[\rho}R_{\sigma]\nu} + g_{\nu[\rho}R_{\sigma]\mu} + \frac{1}{3}Rg_{\mu[\rho}g_{\sigma]\nu}. \quad (3.32)$$

Alternativamente, para representar um tensor de Weyl utiliza-se uma base de 5 escalares complexos denominados escalares de Weyl-Newman-Penrose, definidos por

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= W_{\alpha\beta\gamma\delta}l^\alpha m^\beta l^\gamma m^\delta, \\ \Psi_1 &= W_{\alpha\beta\gamma\delta}l^\alpha n^\beta l^\gamma m^\delta, \\ \Psi_2 &= W_{\alpha\beta\gamma\delta}l^\alpha m^\beta \bar{m}^\gamma n^\delta, \\ \Psi_3 &= W_{\alpha\beta\gamma\delta}l^\alpha n^\beta \bar{m}^\gamma n^\delta, \\ \Psi_4 &= W_{\alpha\beta\gamma\delta}n^\alpha \bar{m}^\beta n^\gamma \bar{m}^\delta. \end{aligned} \quad (3.33)$$

sendo que estes escalares não são invariantes sob uma mudança de tetrada. Pode-se gerar uma transformação de Lorentz em cada ponto do espaço-tempo, o que rotaciona a tetrada. Essa transformação define seis números reais em cada ponto, categorizados em três tipos:

- Rotações tipo I com l^μ constante:

$$\begin{aligned} l^\mu &\rightarrow l^\mu, \quad n^\mu \rightarrow n^\mu + a^*m^\mu + a\bar{m}^\mu + aa^*l^\mu, \\ m^\mu &\rightarrow m^\mu + al^\mu, \quad \bar{m}^\mu \rightarrow \bar{m}^\mu + a^*l^\mu. \end{aligned} \quad (3.34)$$

- Rotações tipo II com n^μ constante:

$$\begin{aligned} n^\mu &\rightarrow n^\mu, \quad l^\mu \rightarrow l^\mu + b^*m^\mu + b\bar{m}^\mu + bb^*l^\mu, \\ m^\mu &\rightarrow m^\mu + bn^\mu, \quad \bar{m}^\mu \rightarrow \bar{m}^\mu + b^*n^\mu. \end{aligned} \quad (3.35)$$

- Rotações tipo III deixando as direções de l^μ e n^μ constantes e rotacionando m^μ no plano $m^\mu, \bar{m}^\mu$:

$$l^\mu \rightarrow l^\mu, \quad n^\mu \rightarrow n^\mu, \quad m^\mu \rightarrow e^{i\theta}m^\mu, \quad \bar{m}^\mu \rightarrow e^{-i\theta}\bar{m}^\mu. \quad (3.36)$$

Como essas tetradas preservam as condições de normalidade, a métrica do espaço tangente também é preservada. Portanto, as leis de transformação dos escalares de Weyl-Newman-Penrose sob as rotações tipos I, II e III são [Compère \(2019\)](#):

$$\begin{aligned} \Psi_0 &\rightarrow \Psi_0; \\ \Psi_1 &\rightarrow \Psi_1 + a^*\Psi_0; \\ \Psi_2 &\rightarrow \Psi_2 + 2a^*\Psi_1 + (a^*)^2\Psi_0; \\ \Psi_3 &\rightarrow \Psi_3 + 3a^*\Psi_2 + 3(a^*)^2\Psi_1 + (a^*)^3\Psi_0; \\ \Psi_4 &\rightarrow \Psi_4 + 4a^*\Psi_3 + 6(a^*)^2\Psi_2 + 4(a^*)^3\Psi_1 + (a^*)^4\Psi_0; \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &\rightarrow \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4; \\
\Psi_1 &\rightarrow \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4; \\
\Psi_2 &\rightarrow \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4; \\
\Psi_3 &\rightarrow \Psi_3 + b\Psi_4; \\
\Psi_4 &\rightarrow \Psi_4;
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &\rightarrow A^2 e^{-2i\theta} \Psi_0, \\
\Psi_1 &\rightarrow A^{-1} e^{i\theta} \Psi_1, \\
\Psi_2 &\rightarrow \Psi_2, \\
\Psi_3 &\rightarrow A e^{-i\theta} \Psi_3, \\
\Psi_4 &\rightarrow A^2 e^{-2i\theta} \Psi_4.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

3.3.3 Perturbações em um buraco negro rotativo

A descrição de perturbações gerais em buracos negros rotativos é feita a partir da equação master de Teukolsky, que utiliza do formalismo de Newman-Penrose previamente enunciado. O conjunto de equações de Newman-Penrose é um sistema de equações diferenciais de primeira ordem acopladas ligadas às tetradas, os coeficientes de spin (em específico os coeficientes de rotação de Ricci), o tensor de Weyl, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura. Para aplicar a teoria de perturbação neste formalismo, especifica-se a geometria perturbada em $l = l^A + l^B$, $n = n^A + n^B$, etc., enquanto as quantidades de Newman-Penrose são escritas da seguinte forma: $\psi_2 = \psi_2^A + \psi_2^B$, $D = D^A + D^B$. O conjunto completo das equações de perturbação é obtido a partir das equações de Newman-Penrose mantendo apenas os termos de primeira ordem B [Teukolsky \(1973\)](#).

No ponto de vista de formalismo de Newman-Penrose, as métricas de Schwarzschild e de Kerr são bem similares, o que permite que as equações da métrica de Kerr desacopladas sejam derivadas para ψ_0^B e ψ_4^B . Os passos matemáticos para a obtenção da equação master de Teukolsky foram retirados de [LIMA \(2019\)](#); [Paiva \(2022\)](#); [Teukolsky \(1973\)](#).

Tomando l e n como vetores de uma tetrada sem perturbação ao longo das principais direções nulas do tensor de Weyl, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\psi_0^A &= \psi_1^A = \psi_3^A = \psi_4^A = 0 \\
\kappa^A &= \sigma^A = \nu^A = \lambda^A = 0
\end{aligned} \tag{3.40}$$

O procedimento para chegar a equação master de Teukolsky depende de cada tipo de perturbação. Os processos aqui apresentados se referem a uma perturbação descrita

pelas equações de Maxwell, ou seja, vetoriais de spin 1. Sob as definições do formalismo de Newman-Penrose, as componentes do tensor de Maxwell F é caracterizado por três escalares complexos [Paiva \(2022\)](#):

$$\phi_0 = F_{ij}l^i m^j, \quad \phi_1 = \frac{1}{2}F_{ij}(l^i n^j + \bar{m}^i m^j), \quad \phi_2 = F_{ij}\bar{m}^i n^j, \quad (3.41)$$

onde as equações de Maxwell são dadas por:

$$F_{[ij|k]} = 0, \quad \eta^{lm}F_{il|m} = 0, \quad (3.42)$$

sendo $F_{a|b} = e_a{}^\mu(\nabla_\nu F_\mu)e_b{}^\nu$ chamada de derivada intrínseca. Como a amplitude do tensor-energia eletromagnético é de segunda ordem no campo eletromagnético, a mudança na geometria de *background* causada pela perturbação eletromagnética também é de segunda ordem. Portanto, essa mudança em primeira ordem na geometria pode ser desprezada nas equações de Maxwell.

Se satisfeitas as Equações 3.40, as equações de Maxwell são dadas por:

$$(D - 2\rho)\phi_1 - (\bar{\delta} + \pi - 2\alpha)\phi_0 = 2\pi J_l, \quad (3.43)$$

$$(\delta - 2\tau)\phi_1 - (\Delta + \mu - 2\gamma)\phi_0 = 2\pi J_m, \quad (3.44)$$

$$(D - \rho + 2\epsilon)\phi_2 - (\bar{\delta} + 2\pi)\phi_1 = 2\pi J_{\bar{m}}, \quad (3.45)$$

$$(\delta - \tau + 2\beta)\phi_2 - (\Delta + 2\mu)\phi_1 = 2\pi J_m \quad (3.46)$$

onde ϕ são os campos-teste de primeira ordem, sendo J_μ a densidade de quadricorrente. Após manipular as equações acima, obtêm-se as equações desacopladas:

$$[(D - \epsilon + \bar{\epsilon} - 2\rho + \bar{\rho})(\Delta + \mu - 2\gamma) - (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})(\bar{\delta} + \pi - 2\alpha)]\phi_0 = 2\pi J_0, \quad (3.47)$$

$$[(\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})(D - \rho + 2\epsilon) - (\bar{\delta} + \alpha + \beta + 2\pi - \bar{\tau})(\delta - \bar{\tau} + 2\beta)]\phi_2 = 2\pi J_2. \quad (3.48)$$

Retomando a métrica de Kerr apresentada no Capítulo 1, tem-se:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\rho^2}d\phi dt + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right)\sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.49)$$

e sabendo que qualquer tetrad de Newman-Penrose deve satisfazer as relações de ortogonalidade:

$$l \cdot n = 1, \quad m \cdot \bar{m} = -1 \quad (3.50)$$

onde os demais produtos são iguais a zero. Então, a métrica pode ser escrita como:

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + n^\mu l^\nu - m^\mu \bar{m}^\nu - \bar{m}^\mu m^\nu. \quad (3.51)$$

Utilizando a chamada tetrada de Kinnersley, um conjunto de bases onde apenas Ψ_2 não zera, dado por:

$$l^\mu = \frac{1}{\Delta}(r^2 + a^2, \Delta, 0, a), \quad (3.52)$$

$$n^\mu = \frac{1}{2\Sigma}(r^2 + a^2, -\Delta, 0, a), \quad (3.53)$$

$$m^\mu = \frac{-\bar{\rho}}{\sqrt{2}} \left(ia \sin \theta, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right), \quad (3.54)$$

sendo os coeficientes de spin não-nulos:

$$\begin{aligned} \rho &= -1/(r - ia \cos \theta), \\ \beta &= -\bar{\rho} \cot \theta / (2\sqrt{2}), \\ \pi &= ia\rho^2 \sin \theta / \sqrt{2}, \\ \tau &= \rho\bar{\rho} \sin \theta / \sqrt{2}, \\ \mu &= \rho^2 \bar{\rho} \Delta / 2, \\ \gamma &= \mu + \rho\bar{\rho}(r - M)/2, \\ \alpha &= \pi - \bar{\beta}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

enquanto

$$\psi_2 = M\rho^3. \quad (3.56)$$

A primeira equação nas Equações 3.47 é separável, enquanto a segunda equação se torna separável substituindo ϕ_2 por $\psi_2 = \phi_2 \rho^2$. O processo para perturbações gravitacionais é semelhante de ser feito. Portanto, escrevendo a equação master de Teukolsky como resultado de todo esse processo, em coordenadas de Boyer-Lindquist, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \partial_t^2 \psi + \frac{4Mar}{\Delta} \partial_t \partial_\phi \psi + \left[\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \partial_\phi^2 \psi \\ & - \Delta^{-s} \partial_r (\Delta^{s+1} \partial_r \psi) - \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) - 2s \left[\frac{a(r - M)}{\Delta} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \partial_\phi \psi \\ & - 2s \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right] \partial_t \psi + (s^2 \cot^2 \theta - s) \psi = 4\pi \Sigma T \end{aligned} \quad (3.57)$$

sendo s o spin do campo responsável pela perturbação e T o termo da fonte. A equação master de Teukolsky pode ser separada a partir de:

$$\psi = e^{i\omega t} e^{im\phi} S(\theta) R(r), \quad (3.58)$$

onde $S(\theta)$ é a parte angular e $R(r)$ é a parte radial. Portanto, as equações separadas para a parte radial e angular são Para $R(r)$:

$$\Delta^{-s} d_r (\Delta^{s+1} d_r R) + \left(\frac{K^2 - 2is(r - M)K}{\Delta} + 4is\omega r - s \lambda_{lm} \right) R = 0 \quad (3.59)$$

Para $S(\theta)$:

$$\frac{1}{\sin \theta} d_\theta (\sin \theta d_\theta S) + \left(a^2 \omega^2 \cos^2 \theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - 2a\omega s \cos \theta - \frac{2ms \cos \theta}{\sin^2 \theta} - s^2 \cot^2 \theta + s + {}_s A_{lm} \right) S = 0 \quad (3.60)$$

tomando $K \equiv (r^2 + a^2)\omega - am$, ${}_s A_{lm}$ é a constante de separação e $\lambda \equiv {}_s A_{lm} + a^2 \omega^2 - 2am\omega$. A partir da solução da equação radial encontram-se os valores complexos das autofrequências ω , sendo estes os modos quasinormais do buraco negro de Kerr.

4 Extração de energia de buracos negros

É impossível remover algo de um buraco negro de Schwarzschild por meio de processos clássicos devido à existência do horizonte de eventos. No entanto, para um buraco negro de Kerr é possível extrair sua energia rotacional em função das diferentes superfícies que dividem o limite estático, a ergosfera e o horizonte de eventos. A ergosfera, segundo a descrição do Capítulo 2, é o conjunto da ergosuperfície com a ergorregião, sendo esta última uma área de arrasto gravitacional devido à rotação do buraco negro. Extrações clássicas de energia de um buraco negro funcionam da mesma forma como na Mecânica Newtoniana, convertendo trabalho em energia vinculada a um objeto orbitando outro. Essas extrações podem ser feitas por processos inteiramente clássicos que serão discutidos neste capítulo: o processo de Penrose e a superradiância [Guidry \(2019\)](#); [Brito et al. \(2020\)](#).

4.1 Processo de Penrose

A extração de energia de um buraco negro rotativo foi proposta por Roger Penrose em 1969 [Penrose \(1969\)](#), alguns anos antes do descobrimento da superradiância e está relacionada a presença de uma partícula com energia negativa na ergorregião, que reduz o momento angular do buraco negro neste processo de extração de energia. A energia negativa, como será esclarecido adiante, é resultado da mudança de sinal do vetor de Killing na região. [Brito et al. \(2020\)](#).

Uma das etapas do processo de Penrose se baseia em uma partícula de massa μ_0 , energia $\mathcal{E}$ e momento angular $\mathcal{L}$, que sai do infinito em direção ao buraco negro e se desintegra em outras duas partículas dentro da ergorregião. Uma das partículas cai com energia negativa rumo ao buraco negro enquanto a outra escapa de volta para o infinito com uma energia maior do que a energia da partícula inicial, como pode ser observado na Figura 9.

E e L , energia e momento angular conservados para partículas massivas são definidos como

$$E = -K^\mu p_\mu, \quad L = m^\mu p_\mu \quad (4.1)$$

sendo $p_\mu = m \frac{dx_\mu}{d\tau}$ o quadrimomento da partícula, m^μ e K^μ são vetores de Killing associados à conservação de momento angular e energia respectivamente. Tanto a energia quanto o momento angular são conservados no processo e o sinal negativo na definição de E aparece porque, no infinito, tanto o vetor de Killing quanto o quadrimomento são tipo-tempo, fazendo com que seu produto seja negativo e a energia seja enfim positiva. O que leva a energia de uma das partículas ser negativa é que K^μ se torna um vetor tipo-espaco na

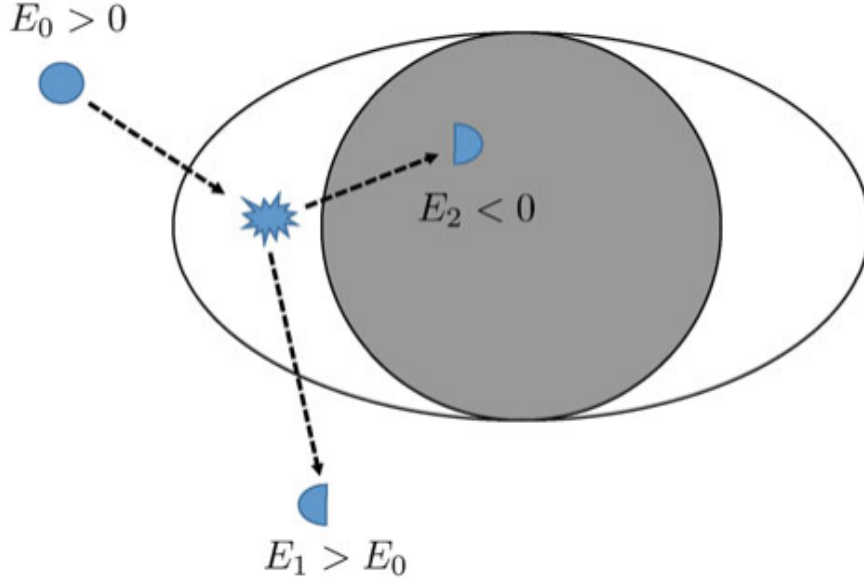


Figura 9 – Representação do processo de Penrose, onde a divisão da partícula ocorre dentro da ergorregião (Imagem retirada de Brito et al. (2020)).

ergorregião, fazendo com que agora a contração do vetor de Killing com o quadrimomento seja negativo. Carroll (2014)

Como a partícula está inicialmente em repouso, o parâmetro adimensional de sua energia conservada é dado por $E = \mathcal{E}_0/\mu_0 = 1$, sendo $\mathcal{E}$ e $\mathcal{L}$ a energia e o momento angular dimensionais. Os parâmetros de energia e momento angular adimensionais são dados para as partículas que surgem após o decaimento como $(E_1, L_1) = (\mathcal{E}_1/\mu_f, \mathcal{L}_1/\mu_f)$ e $(E_2, L_2) = (\mathcal{E}_2/\mu_f, \mathcal{L}_2/\mu_f)$. Tomando $r = r_0$, o parâmetro de momento angular das partículas é dado por:

$$L_0 = \frac{1}{r_0 - 2M} \left(-2aM + \sqrt{2mr_0\Delta} \right),$$

$$L_{1,2} = \frac{\pm 2aME_{1,2} + \sqrt{r_0\Delta \left(2M + r \left((E_{1,2})^2 - 1 \right) \right)}}{r_0 - 2M} \quad (4.2)$$

Sabendo que o quadrimomento das partículas se conserva segundo

$$p_0 = p_1 + p_2, \quad (4.3)$$

a energia e o momento angular também se conservam.

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mu_0, \quad \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \quad (4.4)$$

A energia das partículas desintegradas é dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \frac{\mu_0}{2} \left(\pm \sqrt{\frac{2M(1 - 4\mu_f^2/\mu_0)}{r_0}} \right), \\ \mathcal{E}_2 &= \frac{\mu_0}{2} \left(\mp \sqrt{\frac{2M(1 - 4\mu_f^2/\mu_0)}{r_0}} \right)\end{aligned}\quad (4.5)$$

Portanto, fica evidente que a energia de uma dessas partículas será maior do que a energia da partícula inicial. Essa energia é ganha às custas da energia rotacional, uma vez que o buraco negro sofre uma redução do seu momento angular para equilibrar a energia e o momento angular negativos da partícula capturada. A eficiência η do processo de Penrose é dada por uma relação entre a energia das partículas, que pode ser mostrada a seguir:

$$\eta = \frac{E_2 - E}{E} = -\frac{E_1}{E} \quad (4.6)$$

O ganho máximo de energia ocorre quando a divisão acontece no horizonte, sendo que a eficiência máxima do processo é Brito et al. (2020); Sang et al. (2023)

$$\eta_{max} = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_0} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2M(1 - 4\mu^2 f/\mu_0^2)}{r_+}} - 1 \right). \quad (4.7)$$

Essa eficiência máxima se dá quando as partículas desintegradas são convertidas em fótons. No processo de Penrose, as partículas se movem em geodésicas onde a energia é conservada, como foi mostrado anteriormente. A partícula com energia negativa, no entanto, deve ser originada na ergorregião, único domínio do espaço-tempo onde ela pode existir. Vale ressaltar, no caso geral de interação entre matéria ou campos, que uma energia negativa no horizonte não implica em energia negativa em qualquer outro lugar Guidry (2019); Lasota et al. (2014).

A partir da ideia de que o processo de Penrose diminui o momento angular do buraco negro em rotação, é possível concluir que uma série de processos de Penrose podem extrair todo o momento angular de um buraco negro de Kerr, reduzindo-o a um buraco negro de Schwarzschild Guidry (2019).

4.2 Superradiância

Uma das primeiras ideias do processo de superradiância é dada pelo paradoxo de Klein. Esse paradoxo aborda um feixe de elétrons se propagando numa região com uma grande barreira de potencial. No entanto, o feixe não possuiria o amortecimento exponencial esperado de um tunelamento quântico relativístico, embora o processo seja independente dos detalhes da barreira de potencial. O termo superradiância foi primeiramente proposto

por Dicke (1954), referindo-se à amplificação de ondas devido à coerência do meio de emissão. Brito et al. (2020); Bekenstein and Schiffer (1998).

Enquanto o processo de Penrose consiste numa divisão de partículas dentro da ergoregião, a superradiância envolve o espalhamento de ondas em um buraco negro rotativo, ocorrendo para qualquer onda de spin inteiro, seja escalar, eletromagnética ou gravitacional. Apesar de aparecer em outros tipos de sistemas, a superradiância em buracos negros foi primeiro descoberta por Yakov Zel'dovich em 1971. O conceito de Zel'dovich se baseava num objeto axialmente simétrico rotacionando dentro de uma cavidade ressonante, sendo capaz de amplificar os modos de oscilação definidos no interior dessa cavidade, transferindo energia rotacional para essas oscilações Zeldovich (1971).

Analogamente ao processo de Penrose, uma das etapas da superradiância se baseia em uma onda vinda do infinito espalhada no horizonte de eventos do buraco negro, sendo que parte da onda é absorvida e parte é transmitida. A parte transmitida é espalhada com maior amplitude do que a onda incidente Ferrari et al. (2020); Teukolsky (1974).

Para analisar o processo de amplificação da onda espalhada, é necessário tomar a equação master de Teukolsky reescrita como uma equação tipo Schrödinger dada por

$$\left[d_{r*}^2 + V_{eff}(r_*) \right] \psi = 0 \quad (4.8)$$

sendo que o potencial efetivo V_{eff} é dado a partir de condições de contorno no horizonte e no infinito:

$$V_{eff} \sim \begin{cases} k_H & r_* \rightarrow -\infty \\ \omega & r_* \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (4.9)$$

onde $k_H = \omega - m\Omega_H$ e ω é a frequência. Pelas mesmas condições de contorno, a função ψ é dada por:

$$\psi \sim \begin{cases} \mathcal{T} e^{-ik_H r_*} & r_* \rightarrow -\infty \\ \mathcal{I} e^{-i\omega r_*} + \mathcal{R} e^{i\omega r_*} & r_* \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (4.10)$$

$\mathcal{T}, \mathcal{I}$ e $\mathcal{R}$ são constantes, sendo denominadas respectivamente como coeficientes de transmissão, incidência e reflexão Lingetti (2023).

Considerando $V_{eff} \in \mathbb{R}$ então, o complexo conjugado de ψ dado por $\bar{\psi}$ também é solução da Equação 4.8 sendo ambas as soluções linearmente independentes. Sendo assim, essas soluções são utilizadas para calcular o Wronskiano da equação radial, que deve ser independente de r_* Lingetti (2023):

$$W = d_{r*} \psi \bar{\psi} - d_{r*} \bar{\psi} \psi \quad (4.11)$$

Portanto, W no horizonte e no infinito devem coincidir:

$$-2ik_H |\mathcal{T}|^2 = W|_{r_*=-\infty} = W|_{r_*=+\infty} = 2i\omega (|\mathcal{R}|^2 - |\mathcal{I}|^2) \quad (4.12)$$

Esta última equação pode ser reescrita como:

$$|\mathcal{R}|^2 = |\mathcal{I}|^2 - \frac{\omega - m\Omega_H}{\omega} |\mathcal{T}|^2 \quad (4.13)$$

o que leva a uma amplificação da onda espalhada, ou seja, a onda espalhada é amplificada sendo refletida com energia maior do que a onda incidente $|\mathcal{R}|^2 > |\mathcal{I}|^2$ para qualquer valor de spin se a condição de superradiância for satisfeita, sendo ela:

$$0 < \omega < m\Omega_H \quad (4.14)$$

Essa condição dá a faixa de frequência de amplificação mas também especifica que a superradiância ocorre somente se $m\Omega_H > 0$. As ondas de diferentes frequências são espalhadas de forma diferente por um buraco negro rotativo. [Lingetti \(2023\)](#); [Brito et al. \(2020\)](#).

Para qualquer processo de espalhamento, a conservação de energia se dá de certa forma que:

$$\frac{dE_{in}}{dt} - \frac{dE_{out}}{dt} = \frac{dE_{hole}}{dt}, \quad (4.15)$$

O fluxo de energia no infinito pode ser dado por:

$$Z_{slm} = \frac{dE_{out}}{dE_{in}} - 1 \quad (4.16)$$

que independente das condições de superradiância, dá o fator de amplificação ou absorção de uma onda espalhada de um buraco negro de Kerr, de spin genérico inteiro s e números quânticos (l, m) . Para ondas escalares planas, por exemplo, essa amplificação superradiante nunca acontece.. Esse fluxo de energia, portanto, para diferentes spins é dado por:

$$Z_{slm} = \begin{cases} \frac{|\mathcal{R}|^2}{|\mathcal{I}|^2} - 1, & s = 0, \\ \frac{|\mathcal{R}|^2}{|\mathcal{I}|^2} \left(\frac{16\omega^4}{B^2} \right)^{\pm 1} - 1, & s = \pm 1, \\ \frac{|\mathcal{R}|^2}{|\mathcal{I}|^2} \left(\frac{256\omega^8}{|C|^2} \right)^{\pm 1} - 1, & s = \pm 2. \end{cases} \quad (4.17)$$

Assim como no processo de Penrose, o excesso de energia na onda espalhada vem da energia rotacional do buraco negro de Kerr [Ferrari et al. \(2020\)](#).

Em suma, tanto o processo de Penrose quanto a superradiância oferecem mecanismos distintos, mas intimamente relacionados, para a extração de energia de buracos negros rotativos. Enquanto o processo de Penrose se extração de energia da ergorregião, resultando em uma redução do momento angular do buraco negro, a superradiância envolve o espalhamento de ondas no horizonte de eventos, amplificando a energia das ondas incidentes devido à rotação do buraco negro. Ambos os processos demonstram como a energia rotacional de um buraco negro pode ser acessada, proporcionando insights importantes para a compreensão dos fenômenos extremos na vizinhança de buracos negros.

5 Conclusão

É indiscutível a importância da Teoria da Relatividade Geral no estudo de buracos negros, sendo a métrica destes objetos descrita por meio de algumas das soluções das equações de Einstein. Dentre estas, as soluções de Schwarzschild e de Kerr se destacam neste trabalho.

A solução de Schwarzschild foi evidenciada devido à sua métrica simples. Apesar de descrever um buraco negro estático e isolado, que não é esperado de ser encontrado na natureza, os estudos a partir dessa solução oferecem um bom panorama do comportamento de buracos negros.

Considerando a presença de momento angular na maioria das estrelas, a formação de um buraco negro por um colapso estelar conserva esta característica. Portanto, a descrição mais convencional é a solução de Kerr, levando em conta o spin associado ao buraco negro. Como dito anteriormente neste estudo, ainda que a solução de Kerr-Newman também descreva um buraco negro em rotação, sua carga é neutralizada em função das interações com o ambiente ao redor.

Seguindo o mesmo princípio da solução de Schwarzschild, as perturbações escalares foram abordadas tanto para buracos negros de simetria esférica quanto de simetria axial em função da sua simplicidade. Essas perturbações são geradas por agentes externos ao buraco negro, como discos de acreção ou interação com outros objetos, sendo, no entanto, muito pequenas para provocar efeitos intensos. Apesar deste fato, os reflexos ainda que pequenos das perturbações em um buraco negro são relevantes para este trabalho, destacando a emissão de modos quasinormais.

Outro resultado de perturbações em um buraco negro são os processos de extração de energia. Como a métrica de Kerr se torna mais apropriada para descrever processos próximos à realidade, é a partir dela que demonstramos estes mecanismos. Embora classicamente nada consiga escapar do horizonte de eventos de um buraco negro, este trabalho permitiu expor os processos viáveis para extrair energia rotacional da ergoregião, sendo eles o processo de Penrose e a superradiância.

Enquanto o processo de Penrose ocorre por meio de corpos dentro da ergosfera, extraindo energia rotacional através da redução de momento angular do buraco negro, a superradiância se dá através do espalhamento de ondas incidentes ao horizonte de eventos. Estas ondas são resultados das perturbações causadas no buraco negro, proporcionando uma ligação entre os tópicos abordados neste trabalho. Como perspectiva futura, esses fenômenos podem ser investigados no contexto de soluções advindas de teorias além da relatividade geral.

Referências

- J. D. Bekenstein and M. Schiffer. The many faces of superradiance. *Physical Review D*, 58 (6):064014, 1998.
- D. G. Blair. *The Detection of Gravitational Waves*. Cambridge University Press, 2005. ISBN 0521021022,9780521021029.
- R. Brito, V. Cardoso, and P. Pani. *Superradiance*, volume 10. Springer, 2020.
- S. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Pearson Education Limited, 1,pearson new international edition edition, 2014. ISBN 1292026634,9781292026633, 9781292039015.
- C. Chirenti. Black hole quasinormal modes in the era of LIGO. *Braz. J. Phys.*, 48(1): 102–109, 2018. doi: 10.1007/s13538-017-0543-7.
- C. Chirenti. Buracos negros, modos quasinormais e ondas gravitacionais. *Cadernos de Astronomia*, 2(2):71–71, 2021.
- G. Compère. *Advanced lectures on general relativity*, volume 952. Springer, 2019.
- R. H. Dicke. Coherence in spontaneous radiation processes. *Physical review*, 93(1):99, 1954.
- V. Ferrari, L. Gualtieri, and P. Pani. *General Relativity and its Applications*. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2020. ISBN 978-0-367-62532-0.
- M. Guidry. *Modern General Relativity*. Cambridge University Press, 2 2019. ISBN 978-1-107-19789-3, 978-1-108-18193-8. doi: 10.1017/9781108181938.
- G. S. V. a. Gustavo E. Romero. *Introduction to Black Hole Astrophysics*. Lecture Notes in Physics 876. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2014. ISBN 978-3-642-39595-6,978-3-642-39596-3.
- J. B. Hartle. *Gravity: An Introduction to Einstein’s General Relativity: Pearson New International Edition*. Pearson Education Limited, 2013. ISBN 1292039140,1269374508,9781292039145,9781269374507.
- R. Konoplya and A. Zhidenko. Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory. *Reviews of Modern Physics*, 83(3):793, 2011.
- K. R. Lang and K. R. Lang. *Essential astrophysics*. Springer, 2013.

- J.-P. Lasota, E. Gourgoulhon, M. Abramowicz, A. Tchekhovskoy, and R. Narayan. Extracting black-hole rotational energy: The generalized penrose process. *Physical Review D*, 89(2):024041, 2014.
- M. C. d. LIMA. Perturbations in the kerr spacetime. Master’s thesis, Universidade Federal de Pernambuco, 2019.
- G. Lingetti. *Numerical aspects of black hole superradiance*. PhD thesis, Rome U., 2023.
- J. Neves. O buraco negro e sua sombra. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 42, 2020.
- R. C. d. Paiva. Perturbações em soluções do tipo buraco negro obtidas por desacoplamento gravitacional. 2022.
- R. Penrose. Gravitational collapse: The role of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 1969.
- A. Sang, J. Jiang, and M. Zhang. Collisional Penrose process of extended test particles near an extremal Kerr black hole. *Eur. Phys. J. C*, 83(10):976, 2023. doi: 10.1140/epjc/s10052-023-12171-w.
- S. A. Teukolsky. Perturbations of a rotating black hole. i. fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations. *Astrophysical Journal*, Vol. 185, pp. 635-648 (1973), 185:635–648, 1973.
- S. A. Teukolsky. *Perturbations of a rotating black hole*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1974.
- M. Volonteri. Formation of supermassive black holes. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 18:279–315, 2010.
- Y. B. Zeldovich. Generation of waves by a rotating body. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 14(0):180, 1971.

APÊNDICE A – Esboço da derivação da métrica de Schwarzschild

O elemento de linha de um espaço-tempo estático e de simetria esférica pode ser escrito como a Equação A.1:

$$ds^2 = g_{00}(r)d(x^0)^2 + g_{rr}(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (\text{A.1})$$

Também é possível reescrever a Equação A.1 substituindo as componentes da métrica, como se segue:

$$ds^2 = -e^{2v(r)}d(x^0)^2 + e^{2v(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (\text{A.2})$$

sendo $g_{00}(r) = -e^{2v(r)}$ e $g_{rr} = e^{2v(r)}$.

É possível escrever as componentes do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ nos termos da Equação A.2. Substituindo os símbolos de Christoffel na expressão do tensor de Ricci, obtém-se:

$$G_{00} = \frac{1}{r^2}e^{2\nu}d_r[r(1 - e^{-2\lambda})], \quad (\text{A.3})$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{r^2}e^{2\nu}(1 - e^{-2\lambda} + \frac{2}{r}\partial_r\nu), \quad (\text{A.4})$$

$$G_{\theta\theta} = r^2e^{-2\nu}\left[\partial_r^2\nu + \nu_r^2 + \frac{\partial_r\nu}{r} - \partial_r\nu\partial_r\lambda - \frac{\partial_r\lambda}{r}\right], \quad (\text{A.5})$$

$$G_{\varphi,\varphi} = \sin^2\theta G_{\theta\theta}. \quad (\text{A.6})$$

As demais componentes são zeradas. Sabendo que a solução de Schwarzschild é uma solução de vácuo, as equações a serem resolvidas são

$$G_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.7})$$

a Equação A.3 leva a:

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{1 - K/r} \quad (\text{A.8})$$

sendo K uma constante de integração. A Equação A.4 leva, portanto, a

$$\partial_r \nu = \frac{1}{2} \frac{K}{r(r - K)}, \quad (\text{A.9})$$

cuja solução é

$$\nu = \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{K}{r} \right) + \nu_0 \quad \rightarrow \quad e^{2\nu} = \left(1 - \frac{K}{r} \right) e^{2\nu_0} \quad (\text{A.10})$$

onde ν_0 também é uma constante de integração. As coordenadas temporais podem ser reescritas como

$$x^0 \rightarrow e^{-\nu_0} x^0, \quad dx^0 \rightarrow e^{-\nu_0} dx^0. \quad (\text{A.11})$$

Sendo assim:

$$g_{00} d(x^0)^2 = -e^{2\nu} d(x^0)^2 \quad \rightarrow \quad -e^{2\nu} e^{-2\nu_0} d(x^0)^2 = - \left(1 - \frac{K}{r} \right) d(x^0)^2. \quad (\text{A.12})$$

A forma final da solução é então

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{K}{r} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - K/r} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (\text{A.13})$$

Para definir a constante de integração K , é aplicado o potencial gravitacional newtoniano na componente temporal da métrica:

$$g_{00} = - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) = - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right). \quad (\text{A.14})$$

Da Equação A.13 tem-se

$$g_{00} = -e^{2\nu} = - \left(1 - \frac{K}{r} \right). \quad (\text{A.15})$$

Comparando as Equações A.14 e A.15, encontra-se

$$K = \frac{2GM}{c^2}. \quad (\text{A.16})$$

Portanto, a solução estática e esfericamente simétrica das equações de Einstein, denominada de solução de Schwarzschild, é dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (\text{A.17})$$

A constante K encontrada na Equação A.16 possui dimensões de comprimento, podendo ser denominada por raio de Schwarzschild e descrita por:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}. \quad (\text{A.18})$$

Em unidades geométricas, onde $G = c = 1$, a solução de Schwarzschild se torna:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{m}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{m}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (\text{A.19})$$

sendo m a massa geométrica dada por

$$m = \frac{GM}{c^2}. \quad (\text{A.20})$$

APÊNDICE B – Perturbação de um campo escalar massivo

Seja a métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (\text{B.1})$$

sendo $f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$. Para um campo massivo, tem-se que:

$$(\square + \mu^2)\psi = 0, \quad (\text{B.2})$$

sendo $\mu = mc/\hbar$.

Abrindo o d'Alembertiano:

$$(\square + \mu^2)\psi \equiv (\nabla_\mu \nabla^\mu + \mu^2)\psi = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \psi + \mu^2 \psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \psi) + \mu^2 \psi = 0. \quad (\text{B.4})$$

Como o determinante $\sqrt{-g}$ não depende do tempo e a métrica é diagonal, tem-se:

$$g^{tt} \partial_t^2 \psi + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_r (\sqrt{-g} g^{rr} \partial_r \psi) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\theta (\sqrt{-g} g^{\theta\theta} \partial_\theta \psi) + g^{\phi\phi} \partial_\phi^2 \psi + \mu^2 \psi = 0 \quad (\text{B.5})$$

onde $\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta$. Os componentes da métrica de Schwarzschild são dados por:

$$g_{tt} = -f, \quad g_{rr} = f^{-1}, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{B.6})$$

Substituindo os elementos da métrica inversa de Schwarzschild na Equação B.5:

$$-f^{-1}(r) \partial_t^2 \psi + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_r (\sqrt{-g} f \partial_r \psi) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\theta (\sqrt{-g} r^{-2} \partial_\theta \psi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \psi + \mu^2 \psi = 0. \quad (\text{B.7})$$

Substituindo em seguida a raiz do determinante da métrica na Equação acima:

$$-f^{-1}(r)\partial_t^2\psi + \frac{1}{r^2\sin\theta}\sin\theta\partial_r(r^2f\partial_r\psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}r^2\partial_\theta(\sin\theta r^{-2}\partial_\theta\psi) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\psi + \mu^2\psi = 0. \quad (\text{B.8})$$

$$-f^{-1}(r)\partial_t^2\psi + \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2f\partial_r\psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\psi) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\psi + \mu^2\psi = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$-f^{-1}(r)\partial_t^2\psi + f\partial_r^2\psi + \partial_r\psi\left(\partial_rf + \frac{2f}{r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\cot\theta\partial_\theta\psi + \partial_\theta^2\psi + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\psi\right] + \mu^2\psi = 0 \quad (\text{B.10})$$

Substituindo $\psi : (t, r, \theta, \phi) \rightarrow R(r)S(\theta)e^{(ik\phi - i\omega t)}$ na equação acima, tem-se:

$$\begin{aligned} & -f^{-1}\partial_t^2(R(r)S(\theta)e^{(ik\phi - i\omega t)}) + f\partial_r^2(R(r)S(\theta)e^{(ik\phi - i\omega t)}) + \partial_r(R(r)S(\theta)e^{(ik\phi - i\omega t)})\left(\partial_rf + \frac{2f}{r}\right) + \\ & \frac{1}{r^2}\left[\cot\theta\partial_\theta(R(r)S(\theta)e^{(ik\phi - i\omega t)}) + \partial_\theta^2(R(r)S(\theta)e^{(ik\phi - i\omega t)}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2(R(r)S(\theta)e^{(ik\phi - i\omega t)})\right] \\ & + \mu^2(R(r)S(\theta)e^{(ik\phi - i\omega t)}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Aplicando as derivadas:

$$\begin{aligned} & f^{-1}R(r)S(\theta)\omega^2e^{(ik\phi - i\omega t)} + fS(\theta)e^{(ik\phi - i\omega t)}\partial_r^2(R(r)) + S(\theta)e^{(ik\phi - i\omega t)}\left(\partial_rf + \frac{2f}{r}\right)\partial_r(R(r)) + \\ & \frac{1}{r^2}\left[\cot R(r)e^{(ik\phi - i\omega t)}\partial_\theta(S(\theta)) + R(r)e^{(ik\phi - i\omega t)}\partial_\theta^2(S(\theta)) - \frac{1}{\sin^2\theta}R(r)S(\theta)k^2e^{(ik\phi - i\omega t)}\right] + \\ & \mu^2(R(r)S(\theta)e^{(ik\phi - i\omega t)}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Dividindo a equação inteira por ψ , obtém-se:

$$\begin{aligned} & f^{-1}\omega^2 + f\frac{\partial_r^2(R(r))}{R(r)} + \left(\partial_rf + \frac{2f}{r}\right)\frac{\partial_r(R(r))}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\left[\cot\left(\frac{\partial_\theta(S(\theta))}{S(\theta)}\right) + \frac{\partial_\theta^2(S(\theta))}{S(\theta)} - \frac{1}{\sin^2\theta}k^2\right] + \\ & \mu^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Multiplicando os termos por r^2 :

$$\begin{aligned} & f^{-1}\omega^2r^2 + fr^2\frac{\partial_r^2(R(r))}{R(r)} + r^2\left(\partial_rf + \frac{2f}{r}\right)\frac{\partial_r(R(r))}{R(r)} + \cot\left(\frac{\partial_\theta(S(\theta))}{S(\theta)}\right) + \frac{\partial_\theta^2(S(\theta))}{S(\theta)} - \frac{1}{\sin^2\theta}k^2 + \\ & \mu^2r^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Separando as equações:

$$f^{-1}\omega^2 r^2 + fr^2 \frac{\partial_r^2(R(r))}{R(r)} + r^2 \left(\partial_r f + \frac{2f}{r} \right) \frac{\partial_r(R(r))}{R(r)} + \mu^2 r^2 = -\cot \left(\frac{\partial_\theta(S(\theta))}{S(\theta)} \right) - \frac{\partial_\theta^2(S(\theta))}{S(\theta)} + \frac{1}{\sin^2 \theta} k^2 \quad (\text{B.15})$$

Igualando ambos os lados a uma constante λ :

$$f^{-1}\omega^2 r^2 + fr^2 \frac{\partial_r^2(R(r))}{R(r)} + r^2 \left(\partial_r f + \frac{2f}{r} \right) \frac{\partial_r(R(r))}{R(r)} + \mu^2 r^2 = \lambda, \quad (\text{B.16})$$

$$-\cot \left(\frac{\partial_\theta(S(\theta))}{S(\theta)} \right) - \frac{\partial_\theta^2(S(\theta))}{S(\theta)} + \frac{1}{\sin^2 \theta} k^2 = \lambda. \quad (\text{B.17})$$

Agora, apenas a Equação B.16 será trabalhada, uma vez que apenas a parte radial das equações é interessante para o presente trabalho. Primeiramente multiplicando-a por $f^{-1}r^{-2}$ e em seguida por $R(r)$:

$$f^{-2}\omega^2 R(r) + \partial_r^2(R(r)) + \left(\partial_r f + \frac{2f}{r} \right) \partial_r(R(r)) + \mu^2 f^{-1}R(r) - \lambda f^{-1}r^{-2}R(r) = 0. \quad (\text{B.18})$$

Abrindo os termos de f e fazendo $\partial_r f$:

$$\partial_r^2(R(r)) + \left[\frac{2M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} + \frac{2}{r} \right] \partial_r(R(r)) + \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \omega^2 + \mu^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} - \lambda \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} r^{-2} \right] (R(r)) = 0. \quad (\text{B.19})$$

Considerando $R(r) = \frac{\Psi}{r}$ e fazendo suas derivadas, temos:

$$\partial_r \left(\frac{\Psi}{r} \right) = \frac{(\partial_r \Psi)}{r} - \frac{\Psi}{r^2}, \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{(\partial_r^2 \Psi)}{r} = \partial_r^2(R(r)) + \frac{2\partial_r(R(r))}{r}. \quad (\text{B.21})$$

Manipulando as Equações B.20 e B.21 e substituindo na Equação B.19:

$$\partial_r^2(R(r)) + \left[\frac{2M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} (\partial_r R(r)) \right] + \frac{2\partial_r(R(r))}{r} + \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \omega^2 + \mu^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} - \lambda \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} r^{-2} \right] (R(r)) = 0. \quad (\text{B.22})$$

Colocando $(R(r))$ em evidência:

$$\begin{aligned} & \frac{(\partial_r^2 \Psi)}{r} + \left[\frac{2M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{(\partial_r \Psi)}{r} - \frac{\Psi}{r^2} \right) \right] + \\ & \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \omega^2 + \mu^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - \lambda \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} r^{-2} \right] (R(r)) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Multiplicando todos os termos da Equação acima por r :

$$\begin{aligned} & \partial_r^2 \Psi + \frac{2M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (\partial_r \Psi) + \\ & \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \omega^2 + \mu^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - \lambda \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} r^{-2} - \frac{2M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \right] \Psi = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Aplicando as coordenadas de tartaruga:

$$r_* = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \quad (\text{B.25})$$

sendo

$$\frac{dr}{dr_*} = f, \quad \partial_{r_*}^2 = f \partial_r, \quad f \partial_r = f^2 \partial_r^2 + (\partial_r f) f \partial_r, \quad (\text{B.26})$$

$$f^{-2} \partial_{r_*}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{2M}{r^2} \partial_r + \partial_r^2. \quad (\text{B.27})$$

Aplicando as substituições acima na Equação B.24:

$$\begin{aligned} & f^{-2} \partial_{r_*}^2 \Psi + \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \omega^2 + \mu^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - \lambda \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} r^{-2} - \right. \\ & \left. \frac{2M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \right] \Psi = 0. \end{aligned}$$