Clélia Maria Ignatius Nogueira

O DESENVOLVIMENTO DAS NOÇÕES MATEMÁTICAS NA CRIANÇA E SEU USO NO CONTEXTO ESCOLAR: O CASO PARTICULAR DO NÚMERO

Marília
2002

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

CLÉLIA MARIA IGNATIUS NOGUEIRA

O DESENVOLVIMENTO DAS NOÇÕES MATEMÁTICAS NA CRIANÇA E SEU USO NO CONTEXTO ESCOLAR: O CASO PARTICULAR DO NÚMERO

MARÍLIA
2002

unesp

CLÉLIA MARIA IGNATIUS NOGUEIRA

O DESENVOLVIMENTO DAS NOÇÕES MATEMÁTICAS NA CRIANÇA E SEU USO NO CONTEXTO ESCOLAR: O CASO PARTICULAR DO NÚMERO

MARÍLIA
2002

CLÉLIA MARIA IGNATIUS NOGUEIRA

O DESENVOLVIMENTO DAS NOÇÕES MATEMÁTICAS NA CRIANÇA E SEU USO NO CONTEXTO ESCOLAR: O CASO PARTICULAR DO NÚMERO

B 1397

Tese apresentada à Faculdade de Educação de Marília, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Marília, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação.

Orientador:

Dr. Adrian Oscar Dongo Montoya.

1410001397

Fac. de Filosofia e Ciências
BIBLIOTECA
Campus de Marília

MARÍLIA

2002

Ficha Catalográfica

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius.

O desenvolvimento das noções matemáticas na criança e seu uso no contexto escolar: o caso particular do número. / Clélia Maria Ignatius Nogueira. – Marília, 2002.

268 f.; 30 cm.

Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2002.

Referências: f. 262-268

Orientador: Adrian Oscar Dongo Montoya

1. Piaget. 2. Número. 3. Ensino de Matemática. 4. Enumeração.

CLÉLIA MARIA IGNATIUS NOGUEIRA

O DESENVOLVIMENTO DAS NOÇÕES MATEMÁTICAS NA CRIANÇA E SEU USO NO CONTEXTO ESCOLAR: O CASO PARTICULAR DO NÚMERO

Tese apresentada à Faculdade de Educação da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação.

Aprovada em junho de 2002.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Doherty Andrade
Universidade Estadual de Maringá - UEM

Profª. Drª. Leny Rodrigues Martins Teixeira
Universidade Estadual Paulista - UNESP

Profª. Drª. Rosely Palermo Brenelli
Universidade Estadual de Campinas - Unicamp

Prof. Dr. Vinício de Macedo Santos
Universidade Estadual Paulista - UNESP

Prof. Dr. Adrian Oscar Dongo Montoya
Orientador
Universidade Estadual Paulista - UNESP

Ao João Dirceu, amigo e companheiro incansável de todas as horas;

Para Raul, Vitor, Lucas, Marília e Beatriz, razão e incentivo das minhas batalhas;

Dedico este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao meu marido João Dirceu, pelo apoio "logístico" indispensável;

Aos meus filhos, Raul, Vitor, Lucas, Marília e Beatriz, por terem sido motoristas, digitadores, "assessores" de informática, etc., porém, principalmente, pela companhia e compreensão durante estes quatro "longos" anos;

Ao prof. Dr. Adrian Oscar Dongo Montoya, pela orientação segura e constante;

A minha mãe, Sublime e minha irmã Márcia, pelo apoio e solidariedade de hoje e de sempre;

Ao prof. Dr. Júlio Santiago Prates Filho, pelo incentivo decisivo;

Às professoras Dra. Leny Rodrigues Martins Teixeira e Dra. Rosely Palermo Brenelli, pelas valiosas sugestões quando do exame de qualificação;

Ao professor Dr. Doherty Andrade, pela constante disponibilidade e paciência;

Aos companheiros do Departamento de Matemática da UEM, pela oportunidade concedida;

Aos colegas do Grupo de Estudos e Pesquisas de Epistemologia Genética, pela riqueza dos momentos compartilhados;

Ao CNPq, pela bolsa concedida;

À Lucimar e à Idalina, pela tranqüilidade proporcionada;

MUITO OBRIGADA.

RESUMO

A questão "o que é o número?" tem intrigado matemáticos, filósofos, epistemólogos, psicólogos e educadores desde a mais remota antiguidade. Questões e respostas acerca da natureza do número têm proporcionado inúmeras pesquisas e debates durante todo o desenvolvimento do pensamento científico sem, no entanto, ter sido encontrada uma solução que fosse aceita, se não pela totalidade, pelo menos pela maioria dos cientistas. Além disso, é importante colocar que, para cada solução de caráter filosófico ou científico para a questão, corresponde uma proposta pedagógica. Jean Piaget acreditou ter respondido a essa questão que desafia os tempos através da sua Epistemologia Genética, sendo que sua solução motivou (e motiva) o surgimento de diversas sugestões metodológicas para o "ensino" do número. Algumas propostas, entretanto, apresentam o inconveniente de sugerir uma construção linear do conceito de número, no sentido de primeiro vir a classificação e a seriação e depois, como síntese, o número. A partir de uma incursão pela evolução do conceito de número dos pontos de vista filosófico, formal e pedagógico, a questão "o que é o número?" é apresentada (e respondida), de um ponto de vista epistemológico mediante uma releitura da obra de Piaget, sobretudo de *A gênese do número na criança*, mormente no que se refere à terceira parte "As composições aditivas e multiplicativas", parte essa que evidencia a solidariedade estreita existente entre a construção da classificação, da seriação e do número, descaracterizando por completo a idéia de uma construção seqüencial.

Palavras-chave: Piaget. Número. Ensino de Matemática. Enumeração.

ABSTRACT

The question "what is a number?" has been worrying mathematicians, philosophers, epistemologists, psychologists and teachers from the most remote antiquity. During the whole development of the scientific thought, questions and answers concerning the nature of the number have been giving many researches and discussions, however, no solution was found to be accepted, if not for the totality, at least for majority of the scientists. Moreover, it is important to point out that for each philosophical or scientific solution corresponds a pedagogic proposal. Jean Piaget believed himself had answered this old question through his Genetic Epistemology, and his solution motivated (and it already motivates) the appearance of several methodological suggestions for the "teaching" of the number. Some proposals, however, present the inconvenience of suggesting a lineal construction of the number concept, in the sense of first come the classification and the seriation and then, as a synthesis, the number. Starting from an incursion for the evolution of the concept of number of the philosophical, formal and pedagogic point of view, the question "what is a number?" is presented (and answered), of a epistemological point of view by rereading the work of Piaget, especially *The genesis of the number in the child*, in particular on what refers it's third part "The addictive and multiplicative compositions", which evidences the existence of a close solidarity among the construction of the classification, of the seriation and the number, dropping off the idea of a sequential construction.

Key-words: Piaget. Number. Teaching of Mathematics. Enumeration.



SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 11

1- EVOLUÇÃO DO ENSINO DA MATEMÁTICA: CONQUISTAS E PROBLEMAS . 19

1.1 O ENSINO "TRADICIONAL" DE MATEMÁTICA 23

1.2 O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA 31

1.2.1 Os antecedentes 31

1.2.2 A matemática moderna 37

1.2.3 O movimento renovador e as "idéias" piagetianas 46

1.2.3.1 Estruturas 47

1.3 APLICAÇÕES DA TEORIA PIAGETIANA AO ENSINO DA MATEMÁTICA: UMA DISCUSSÃO SOBRE O CASO PARTICULAR DO ENSINO DO NÚMERO . 55

1.4 PARA ALÉM DE PIAGET? 71

2- EVOLUÇÃO, FUNDAMENTOS E FUTURO DAS IDÉIAS MATEMÁTICAS 78

2.1 O SÉCULO XIX 87

2.1.1 As geometrias não-euclidianas 92

2.1.2 A aritmetização da análise 98

2.1.3 A álgebra abstrata 101

2.1.4 Kronecker, Kummer, Cantor e Poincaré 104

2.2 O SÉCULO XX 110

2.2.1 Lógica e a Lógica Operatória de Jean Piaget 111

2.2.1.1 A lógica operatória de Jean Piaget 120

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

2.2.2 As principais correntes do pensamento matemático.....132

2.2.2.1 O caos teórico das diversas concepções de número.....135

2.2.2.1.1 As teorias empiristas.....136

2.2.2.1.2 O logicismo de Russell e Whitehead.....140

2.2.2.1.3 Poincaré e a intuição racional do número.....143

2.2.3 O estruturalismo de Nicolas Bourbaki.....147

2.3 O FUTURO.....148

2.3.1 A epistemologia da matemática.....149

2.3.1.1 Os dados genéticos.....150

2.3.1.2 As conexões entre as estruturas matemáticas e as operações do sujeito.....152

2.3.1.3 O pensamento matemático.....156

2.3.1.4 Principais problemas epistemológicos da matemática.....157

3- A INVESTIGAÇÃO PSICOGENÉTICA E O NÚMERO.....162

3.1 A QUESTÃO DO FORMAL E DO FATO NO CONHECIMENTO MATEMÁTICO.....165

3.1.1 A psicogênese dos conhecimentos.....167

3.1.2 O nível sensório-motor.....169

3.1.3 O período pré-operatório.....172

3.1.3.1 O primeiro nível do pensamento pré-operatório.....172

3.1.3.2 O segundo nível pré-operatório.....178

3.1.4 O período operatório "concreto".....180

3.1.4.1 O primeiro nível do estágio das operações "concretas" 184

3.1.4.2 O segundo nível do estágio das operações "concretas" 187

3.1.5 As operações formais 188

3.2 O QUE É O NÚMERO: UMA INVESTIGAÇÃO GENÉTICA 192

3.2.1 A conservação (construção) das quantidades 193

3.2.2 A correspondência termo a termo 200

3.2.3 A determinação do valor cardinal do número 204

3.2.4 A síntese 206

3.3 A COORDENAÇÃO ENTRE A ORDEM E A CARDINALIDADE 213

3.4 AS RELAÇÕES ENTRE CLASSES E NÚMEROS 221

3.5 AS RELAÇÕES ARITMÉTICAS: AS COMPOSIÇÕES ADITIVA E MULTIPLICATIVA DOS NÚMEROS 230

3.5.1 A composição aditiva 231

3.5.2 A composição multiplicativa 235

3.5.3 A correspondência múltipla e a multiplicação numérica 237

3.6 O NÚMERO E AS RELAÇÕES ASSIMÉTRICAS 239

3.7 A SÍNTESE DOS RESULTADOS: 241

3.8 OS "NOVOS" (E VELHOS) RESULTADOS 244

CONSIDERAÇÕES FINAIS 254

REFERÊNCIAS 262

INTRODUÇÃO

Quando me propus a realizar o curso de doutorado, duas grandes áreas de interesse para mim igualmente atraentes e importantes me seduziam: a Educação Matemática e a Educação Especial, particularmente, a de crianças surdas.

Tal duplicidade justifica-se: matemática de formação, com mais de vinte anos de experiência como professora universitária, atuando prioritariamente na área de formação e aperfeiçoamento de professores, pude constatar, inúmeras vezes, que o ensino da matemática, com uma quase unanimidade alarmante, não vem agradando a quem ensina e muito menos a quem aprende.

Por outro lado, meus estudos sobre surdez, tiveram início de maneira empírica e intuitiva, através da observação do desenvolvimento de três crianças, de mesma idade, mesmos pais, enfim mesmo ambiente, duas surdas e uma ouvinte e duas outras ouvintes, mais velhas, todas elas, meus filhos.

Desde o momento do diagnóstico de surdez das meninas, no início de 1983, procurar entender o fenômeno foi objeto de muito estudo de minha parte.

Trabalhando em uma universidade tive condições de canalizar meus esforços e estudos para essa área, não de maneira formal, já que realizei apenas um curso de especialização em Educação Especial, mas, tendo concluído o mestrado (em matemática, no ano de 1979), já possuía alguma experiência em pesquisa e tive acesso a livros, revistas, possibilidade de participação em cursos, congressos, contatos com professores especialistas na área, além de conversas com outros pais e principalmente, procurei entender o universo do surdo adulto.

Enquanto nas reuniões de pais e professores a preocupação geral se concentrava na questão da comunicação, com ênfase na aquisição da linguagem (que, na década de 80, no estado do Paraná, pelo menos, deveria ser a oral), a minha inquietação, talvez devido à minha formação de professora de matemática, era o pensamento.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

Freqüentemente me pegava refletindo, se quando penso falo comigo mesmo, como pensa o surdo?

Os estudos que realizava eram bastante desanimadores. Os mais otimistas apontavam para uma defasagem de cerca de dois anos para que as crianças surdas atingissem os mesmos estágios de desenvolvimento das estruturas cognitivas das crianças ouvintes. No entanto, meu "laboratório particular", formado por duas crianças surdas e uma ouvinte, exatamente com a mesma idade, além de duas outras ouvintes, um pouco mais velhas, filhas de mesmos pais, crescendo juntas, no mesmo ambiente sócio-cultural apontava para outras possibilidades.

Descontadas as dificuldades óbvias de comunicação, as meninas (surdas), se desembaraçavam em igualdade de condições com o menino (ouvinte) de seus desafios : juntos começaram a comer sozinhos, ficaram livres das fraldas, deram nós em sapatos, mas principalmente, tinham o mesmo interesse por livros, brinquedos e compreendiam com a mesma facilidade as regras dos jogos infantis.

Foram inúmeras as experiências realizadas com os três, baseadas quase que exclusivamente na intuição e na não aceitação da defasagem intelectual. Estas experiências me estimularam a seguir adiante.

Em 1987, depois de ter começado a estudar a teoria de Piaget (quase que exclusivamente através de comentadores), desenvolvi minha primeira pesquisa formal na área: -As estruturas lógicas elementares e a noção de número em crianças deficientes auditivas: subsídios para o ensino da Matemática, com o objetivo de analisar se a deficiência auditiva constituía um fator que comprometesse significativamente o desenvolvimento operatório lógico infantil; pesquisa esta desenvolvida em conjunto com uma professora do Departamento de Psicologia da Universidade Estadual de Maringá, meu local de trabalho. A pesquisa foi concluída em 1989.

Os resultados da pesquisa, principalmente o processo de investigação, nos levaram a pensar na possibilidade de se trabalhar com a criança deficiente auditiva independentemente da linguagem falada, propiciando condições para um desenvolvimento normal das estruturas relacionadas ao pensamento lógico matemático.

unesp

Desenvolvemos então, uma segunda pesquisa formal:- O ensino de matemática para deficientes auditivos: uma visão psicopedagógica, com o objetivo de esboçar uma proposta de ensino de matemática de modo a proporcionar à criança surda uma compreensão real de seus conteúdos e de sua linguagem, proposta esta destinada inicialmente, por razões que não cabem aqui discorrer, à 5ª série. Terminada essa pesquisa, minha companheira afastou-se para o doutorado e decidi continuar os estudos e ampliar a abrangência dos conteúdos da proposta para todo ensino fundamental e educação infantil, tendo como referencial teórico, a Psicologia Genética.

Na leitura de Piaget, (novamente cometendo o erro de privilegiar o estudo através de comentadores), verifiquei que para o cientista, o edifício da matemática repousa sobre estruturas que são as da própria inteligência, ou seja, a matemática seria uma espécie de formalização do pensamento humano.

Acreditava que sendo a matemática a forma como a inteligência aborda o mundo, conhecendo-o através dos processos simultâneos de assimilação e acomodação (adaptação), seria necessário oferecer às crianças atividades diversificadas, de maneira a promover o desenvolvimento da inteligência.

Minha hipótese era de que, trabalhada adequadamente, a Matemática poderia promover as condições apropriadas à construção das estruturas cognitivas, pela atividade incessante do sujeito com o real, uma vez que a matemática constitui-se, antes de mais nada, em ações exercidas sobre objetos, não de uma forma material, mas através de relações estabelecidas em nossa mente.

Além disso, diversos pesquisadores, (Lovell, Ogilview, Wohlwill, Lowe, entre outros), constataram que a lenta maturação intelectual do surdo geralmente se deve a sua insuficiente aprendizagem dos números entre outros fatores.

Em vista do exposto, acreditei poder unir minhas duas áreas de interesse e, como projeto inicial de tese, minha intenção era elaborar uma proposta de ensino de matemática para surdos que não só proporcionasse a compreensão dos conceitos intrínsecos à disciplina, mas e principalmente, com relação à educação infantil, proporcionasse às crianças surdas um desenvolvimento cognitivo compatível com sua idade e condições.



Já durante a entrevista de admissão, o meu hoje orientador questionou minha proposta em diversos aspectos, enfatizando particularmente a tentativa de "reproduzir" a construção natural da inteligência, baseada no fato de que a "matemática seria a própria formalização do pensamento humano", além do fato de estar propondo "mais uma" aplicação de Piaget ao ensino de matemática.

A proposta de meu professor orientador foi então a seguinte: primeiro estudar Piaget – agora diretamente, sem comentadores -, depois analisar as principais propostas de aplicação da teoria piagetiana ao ensino da matemática, para depois, reavaliar minha proposta inicial de trabalho.

Mergulhei então, a fundo, na obra de Piaget, especificamente nas que se relacionam com meu centro de interesse, a matemática, e às que tratam da construção da inteligência. À medida que ia aprofundando os estudos, pude perceber que a tentativa de "reproduzir" as estruturas da inteligência, através das estruturas da matemática, embora não fosse este o objetivo inicial, já havia sido tentada pelo movimento Matemática Moderna, sem nenhum sucesso.

Além disso, ao delimitar o estudo para o caso particular do número, pude observar que dentre as diversas sugestões metodológicas para o "ensino" do número, baseadas na teoria de Piaget, algumas apresentam o inconveniente de sugerir uma seqüência linear para a construção do conceito de número, no sentido de aparecer primeiro a classificação, depois a seriação e, finalmente, como síntese, o número.

Estes dois fatores, além de uma incursão na história e na filosofia da matemática, uma vez que para Piaget, é através da comparação sistemática entre a psicogênese das noções e seu desenvolvimento nas ciências que se pode chegar a conclusões epistemológicas verdadeiras, motivaram uma alteração "copernicana" em meu projeto original, com seu eixo passando da questão da surdez, para a matemática, particularmente, para o desenvolvimento das noções matemáticas na criança e, em especial, para a construção do conceito de número.

Assim, o objetivo geral deste trabalho é estudar o desenvolvimento das noções matemáticas na criança, em particular a de número, segundo a epistemologia genética e analisar como os resultados de Piaget têm sido utilizados no contexto escolar. Como

objetivos específicos, este trabalho apresenta também, uma análise do contexto teórico no qual as pesquisas de Piaget e Szeminska se inserem; discute o papel da contagem no desenvolvimento do número e comenta algumas das atuais pesquisas acerca da construção do número na criança, relacionando-as com os resultados piagetianos.

A consecução dos objetivos propostos é feita através de três capítulos, a saber:

I - A evolução do ensino da matemática: suas conquistas e seus problemas;

II - Evolução, fundamentos e futuro das idéias matemáticas;

III - A investigação psicogenética e o número.

O capítulo I – **Evolução do ensino da matemática: suas conquistas e seus problemas** - objetiva, particularmente, caracterizar o problema, mediante uma análise dos usos (e abusos) da definição piagetiana de número no contexto escolar. Assim, como o próprio título especifica, este capítulo aborda questões relacionadas ao ensino de matemática, iniciando pelo ensino "tradicional" desta disciplina, entendendo-se por tradicional neste contexto, tanto o ensino de matemática que antecedeu o movimento da matemática moderna, quanto o que lhe sucedeu, pois tradicional se refere aqui, à postura do professor em sala de aula e não aos conteúdos programáticos. Com este enfoque é legítimo se falar, inclusive, em ensino "tradicional" de matemática moderna, por paradoxal que aparente ser.

Assim, o tópico 1 – *O ensino "tradicional" de matemática* – traz uma rápida abordagem do ensino da matemática e de suas antigas (e sempre atuais) mazelas. No tópico 2 – *O movimento da matemática moderna* – apresenta uma pequena digressão histórica sobre o ensino de matemática enfatizando o movimento de matemática moderna, em função da contemporaneidade com os trabalhos piagetianos e pela adoção, tanto pelos modernistas, quanto por Piaget, da concepção estruturalista da matemática dos Bourbaki, o que definiu, mesmo que *a posteriori*, uma aproximação entre o movimento renovador e a epistemologia genética.

O terceiro tópico do capítulo I é dedicado à análise de algumas propostas metodológicas fundamentadas na teoria de Piaget (não se restringindo às vinculadas ao movimento

renovador). Para isso, é realizado um breve apanhado histórico sobre a evolução do ensino de número sendo então iniciada a apresentação do objetivo deste trabalho, que é o de mostrar que a interpretação da construção do número contida, explícita ou implicitamente, na maioria das propostas metodológicas auto-intituladas como "piagetianas" é, no mínimo equivocada. Em outras palavras, a interpretação de uma construção linear do número, isto é, seja, primeiro são construídas a classificação e seriação e só então o número emerge como síntese das duas, induz à falsa idéia de que no desenvolvimento das noções lógico-matemáticas na criança existiria um estádio eminentemente lógico antecedendo ao número.

Tal idéia parece ter sido a principal responsável para que atividades numéricas, como por exemplo a contagem, fossem praticamente banidas da educação infantil a partir da reforma de 1970 enfatizando-se de início atividades que privilegiassem as classificações, seriações e a equivalência numérica por meio de correspondências (com recomendações explícitas para que não se incentivasse o uso da contagem).

O que o trabalho pretende, é deixar evidente que tal interpretação é equivocada; que não existe um estádio lógico antecedendo um estádio numérico e mais, embora as pesquisas de Piaget e seus colaboradores acerca do número tenham avançado bastante depois de sua obra pioneira *A gênese do número na criança*, cuja primeira edição data de 1941, apenas este texto é suficiente para deixar claro a interdependência e a sincronia existente entre as construções das classes, séries e números.

Encerrando o capítulo I, o quarto tópico – *Para além de Piaget?* – comenta algumas das recentes pesquisas e propostas metodológicas sobre a construção do conceito de número que se centram quase que exclusivamente, num resgate à contagem, procurando verificar se os resultados encontrados ou as sugestões apresentadas pelos pesquisadores ultrapassam, do ponto de vista teórico, o estágio alcançado pelos pesquisadores do Centro Internacional de Epistemologia Genética. A escolha do título para este tópico é uma alusão à denominação – Para além de Piaget. - dada pelo psicólogo e matemático francês Remi Brissiaud, à terceira e última parte (contendo sugestões metodológicas para o ensino do número fundadas na teoria de Vygotsky) de seu livro: *Como as crianças aprendem a calcular*, na qual, claramente afirma que os diversos estudos atuais acerca da contagem, ultrapassam Piaget.

unesp

O segundo capítulo – **Evolução, fundamentos e futuro das idéias matemáticas:** objetiva mostrar o longo caminho percorrido pela ciência matemática desde que sua "pedra fundamental", o número, foi construída pelo homem primitivo, até o momento em que sua natureza começasse a ser sistematicamente questionada ou, em outras palavras, foi preciso que tanto a humanidade, quanto os matemáticos, usaram exaustivamente o número, antes que se preocupassem em defini-lo. O estágio em que a ciência matemática se encontrava quando tais discussões ganham corpo, é enfatizado, possibilitando, contextualizar, teoricamente, as pesquisas de Piaget e Szeminska.

Na introdução é apresentada uma síntese (brevíssima) da história da matemática, compreendendo dos primórdios, até o século XVIII, em função de que a matemática até então, apesar de se encontrar já totalmente dedutiva, ainda não é, tão abstrata como se torna a partir do século XIX.

O tópico seguinte, trata, com um maior detalhamento, das principais conquistas da matemática do século XIX (considerado tão revolucionário para a matemática como o foi a matemática grega clássica) e o faz, destacando a característica revolucionária deste século, onde a matemática, ao mesmo tempo em que se torna completamente abstrata, ou seja, se *liberta* do real, também se volta para seu interior, desencadeando uma profunda revisão em seus fundamentos, que se estende, inclusive, pelo século XX.

No tópico referente ao século XX, são abordadas as diversas correntes do pensamento matemático que tiveram origem na crise dos fundamentos e que estabeleceram diferentes teorias explicativas para a questão – o que é o número? –, instaurando um verdadeiro *"caos" teórico das diversas concepções de número*, evidenciando a insuficiência das principais concepções, a saber: do empirismo de Mach, Rignano e Helmholtz; do logicismo de Russell e Whitehead e do intuicionismo de Poincaré e Brouwer.

A crise dos fundamentos da matemática mereceu um tratamento diferenciado em relação aos demais acontecimentos, uma vez que concepções opostas da matemática motivaram o debate entre logicistas (Russell) e intuicionistas (Poincaré) e, tal debate, mormente no que se refere à noção de número, motivou Piaget a buscar um *tertium* entre o reducionismo lógico e o caráter irredutível do número dos intuicionistas.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

Um outro ponto a ser destacado é que, ao se tratar da lógica matemática, uma pequena digressão histórica e também um apanhado acerca da "interpretação" piagetiana da lógica, são efetuados. Para completar a análise do contexto teórico onde se inserem as pesquisas de Piaget e Szeminska, no tópico referente ao século XX, o estruturalismo unificador de Nicolas Bourbaki é apresentado em linhas gerais.

Finalizando o capítulo, no item *Futuro*, são delineadas algumas perspectivas para o "futuro" da matemática e, recorrendo-se a uma síntese da epistemologia da matemática segundo Jean Piaget, são abordadas questões referentes à fecundidade; à necessidade e ao rigor e, à adaptação ao real, desta forma tão peculiar de conhecimento, que é a matemática.

O terceiro e último capítulo – **A investigação psicogenética e o número** - é, como não poderia deixar de ser, o capítulo decisivo. Após uma introdução, onde são estabelecidas as razões que justificam uma investigação genética acerca do conceito de número, o primeiro tópico é uma síntese da epistemologia genética, onde se analisa, particularmente, *a questão do formal e do fato no conhecimento matemático* e que funciona como "pano de fundo" ao que segue. A partir daí, pode-se dizer que o capítulo é constituído de duas partes, uma, destinada a apresentar o número como síntese da classificação e da seriação, deixando manifesta a importância das duas últimas para o primeiro, ou seja, trata da construção do número propriamente dita. A segunda parte, que se inicia com o terceiro tópico - *A coordenação entre a ordem e a cardinalidade* - trata da recíproca, demonstrando a interdependência e o sincronismo da construção das três estruturas.

Finalizando, como todo o tratamento anterior foi feito fundamentado unicamente no livro *A gênese do número na criança*, no último tópico deste quarto capítulo – *Novos (e velhos) resultados* – são traçadas algumas observações acerca de "pré-números" que se manifestam já no período sensório-motor - e relatadas em *O nascimento da inteligência na criança* (daí o por quê dos "velhos" resultados) -, além de resultados de pesquisas posteriores realizadas por Piaget e seus colaboradores (os "novos" resultados), que vieram confirmar os contidos na obra principal.



1- EVOLUÇÃO DO ENSINO DA MATEMÁTICA: CONQUISTAS E PROBLEMAS

INTRODUÇÃO

A constatação de que o ensino de matemática apresenta problemas e necessita de reformulações não é nenhuma novidade. Diversos países vêm se preocupando com o assunto e, desde o século XIX, discussões e estudos sobre o tema têm sido realizados. Tais atividades foram, todavia, intensificadas a partir das décadas iniciais do século XX, como atestam inúmeras publicações, das quais destacamos a citação abaixo, de autoria de dois grandes matemáticos contemporâneos, publicada em Madri, no ano de 1967, porém, cujo original é da segunda metade da década de quarenta.

> Há mais de dois milênios, uma certa familiaridade com a Matemática é considerada como parte indispensável da formação intelectual de uma pessoa culta. Atualmente, sem dúvida, se encontra em grande perigo o posto tradicionalmente ocupado por esta disciplina na educação, infelizmente, alguns dos profissionais que a representam compartilham a responsabilidade por tal situação. O ensino de Matemática tem se degenerado, freqüentemente, num vazio treinamento de resolução de problemas que, se pode desenvolver uma habilidade formal, não conduz, em troca, a uma compreensão efetiva nem a uma maior independência intelectual. A investigação matemática mostra uma tendência para a super especialização e para uma excessiva insistência no abstrato; as aplicações e conexões com outros campos do saber têm sido descuidadas. Sem dúvida, tal estado de coisas não deve justificar uma política de retraimento. Ao contrário, a reação oposta pode e deve partir daqueles que se sentem conscientes do valor intelectual da disciplina. Professores, estudantes e público culto pedem uma reforma construtiva e não uma resignação seguindo a linha da menor resistência. A meta será uma verdadeira compreensão da Matemática como um todo orgânico e como base para o pensamento e a ação científicos. (Courant e Robbins, 1967, prólogo da primeira edição, p.ix).

É fato que tanto quem ensina, como quem aprende matemática, enfrenta inúmeras dificuldades as quais tem sido objeto de estudos por pesquisadores e educadores do mundo todo. Os pesquisadores e educadores brasileiros dedicam-se ao tema desde o século XIX, tendo tais estudos se intensificado a partir de 1920. Como conseqüência desses estudos e pesquisas surgiram, naturalmente, propostas e sugestões pedagógicas, algumas das quais, promovidas pelos órgãos responsáveis pela educação brasileira, se transformaram em orientações ou re-orientações curriculares para o ensino brasileiro.

unesp

De maneira geral, tais orientações curriculares estavam vinculadas às principais leis reformistas pelas quais passou o ensino brasileiro e não conseguiram atingir a sala de aula, o "fazer matemático". O ensino de matemática, apesar das inúmeras tentativas de mudança, algumas fundamentadas em teorias psicológicas consistentes continuou – e continua – caracterizado pela excessiva preocupação com o treino de habilidades, mecanização de algoritmos, rígida organização linear dos conteúdos, memorização – sem compreensão – de formas e procedimentos, além da formalização precoce de conceitos, como reconhece o próprio MEC – Ministério da Educação, na orientação curricular atualmente em vigor, os "PCN" – Parâmetros Curriculares Nacionais, publicados pela Secretaria de Educação Fundamental, no ano de 2000.

> A insatisfação revela que há problemas a serem enfrentados tais como a necessidade de reverter um ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para os alunos. Há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama.(P.C.N: matemática, 2000, p.15).

Assim, seja com o foco das preocupações voltado para a importância e o desenvolvimento da ciência, como no caso dos matemáticos Courant e Robbins, na década de 40 ou, para a formação do aluno, como nos Parâmetros Curriculares nacionais: matemática, do ano 2000, a constatação da existência de problemas no ensino desta disciplina é inquestionável e mais, apesar das inúmeras tentativas de mudança, poucas alteraram efetivamente o "fazer" do professor.

Para Perrenoud, (1997), a prática docente é composta por rotinas que são colocadas em ação pelo docente de forma relativamente consciente, mas sem as escolher e controlar verdadeiramente. É a parte da reprodução, da tradição coletiva retomada por conta própria ou de hábitos pessoais cuja origem se perde no tempo. A cada ano que passa, os programas mudam pouco, os alunos de maneira geral mantêm o mesmo padrão de comportamento, as condições de trabalho são as mesmas, ou seja, as situações se repetem dando ao professor a sensação de já ter vivido tal situação. Para o autor, é legítimo perguntar se "o professor sabe o que faz".

> Claro que, perante um incidente crítico, o professor pode, de maneira geral tomar consciência da sua prática; entrevistado, saberá, em parte, verbalizá-la. Mas no dia a dia, enquanto as suas respostas funcionarem de forma mais ou

> menos eficaz, acaba por não precisar organizá-las de forma consciente. (Perrenoud, 1997, p.22)

Segundo Nóvoa (1996), cada professor tem seu modo próprio de organizar as aulas, de se movimentar na sala, de se dirigir aos alunos, de utilizar-se de recursos didáticos, um modo que constitui uma espécie de segunda pele profissional, que num certo sentido, torna os professores resistentes à mudança.

No caso do professor de matemática, as práticas estão arraigadas, e ainda existe a idéia de que o professor que "sabe" matemática, é aquele cujos alunos vão mal em suas avaliações. Professor de matemática cujos alunos "tiram boas notas", não é considerado "bom" entre seus pares.

Mesmo tendo ultrapassado esse preconceito e buscando melhores resultados de seus alunos, a maioria dos professores de matemática ainda orienta suas ações pedagógicas em função de idéias que são associadas à matemática, tais como: a matemática é exata; a matemática é abstrata, a matemática justifica-se pelas aplicações práticas, a capacidade para a matemática é inata, etc.

Segundo Machado (1990), as expressões acima, embora aceitáveis num primeiro momento enquanto símbolos, quando são analisadas como asserções imediatas e isoladas, elas podem resultar contestáveis. Mesmo enquanto *slogans*, sua importância pode ser discutível em decorrência da mensagem implícita que irradiam.

De acordo com pesquisa realizada por Zunino (1995), a maioria dos professores compartilha da conhecida concepção de ensino e aprendizagem: "ensinar consiste em explicar exaustivamente e aprender, consiste em repetir (ou exercitar) o ensinado até repeti-lo fielmente".

Becker (1993), trabalhando com professores de diversas disciplinas mostra que parece existir entre eles, uma "diferenciação muito clara das fontes de conhecimento", um que vem da "prática" e os conhecimentos teóricos, com a noção de prática vinculada ao fazer, "enquanto a de teoria, aos conteúdos que a escola pretende transmitir". Para os professores, de maneira geral, "é a prática que leva a tudo", é na prática que as crianças aprendem. (Becker, 1993, p.35/36).

unesp

Baseado nos resultados de suas pesquisas, Becker (1993), conclui que para o professor, "a prática não passa de uma estratégia que torna possível a apreensão da teoria", enquanto que esta última se resumiria a um conteúdo conceitual e "transmitida pelo ensino". (Becker, 1993, p.36).

Existe, entretanto, um fator complicador quando se trata do professor de matemática e que diz respeito à sua própria formação. Durante muito tempo acreditou-se que bastava "saber" matemática para ser bom professor de matemática e, desta forma, os cursos de licenciatura possuem currículos completamente dominados por conteúdos matemáticos (que jamais serão ensinados pelo professor do ensino fundamental ou médio) e, conseqüentemente, possuem pouco espaço para as disciplinas de caráter pedagógico. Além disso, mesmo com a exigência de horas destinadas à área de humanas, conforme determinação da lei de diretrizes e bases ora em vigor (caso específico da prática de ensino), as disciplinas pedagógicas são estigmatizadas como "disciplinas menores", não tendo, portanto, importância para os acadêmicos e nem para os professores da área da matemática.

A formação do professor de matemática se processa então, praticamente à margem das ciências ditas humanas. A citação a seguir se refere a pesquisa realizada em Portugal e é perfeita a sua pertinência à realidade brasileira, evidenciando o caráter universal do problema.

> Os professores de matemática são talvez aqueles que mais profundamente carecem de condições que lhes permitam assegurar um êxito pleno na disciplina que assumiram. Por um lado, na sua grande maioria encontram-se confrontados com conteúdos programáticos cuja definição por vezes lhes escapa e com cargas horárias dificilmente compatíveis com um desejável aprofundamento curricular.
>
> Por outro lado, a formação pedagógica que se lhes concede é freqüentemente fragmentada e superficial. Se não possuem uma vontade firme de assumirem a sua auto-formação, ou um talento pedagógico inato, dificilmente poderão fazer face à tarefa que lhe é atribuída. De tal modo, por vezes, se encontram privados de meios, que há professores cujos materiais de estudo se limitam aos próprios livros didáticos de matemática que utilizam para dar aulas. (Vergani, 1993, p.12).

Com tal formação é fácil aferir que o professor de matemática se encontra despreparado para lidar com os aspectos envolvidos no ensino da matemática que extrapolem os referentes aos conteúdos específicos (quando os dominam), como questões acerca do processo ensino-aprendizagem, motivação, avaliação, princípios de ensino, etc.

unesp

1.1 O ENSINO "TRADICIONAL" DE MATEMÁTICA

Em virtude das dificuldades expostas anteriormente (entre outras) o ensino "tradicional" da matemática possui algumas características que permanecem imutáveis ao longo dos tempos, mesmo com propostas inovadoras como o movimento da matemática moderna ou quando são adotadas sugestões metodológicas que valorizem o uso de material manipulativo e de jogos ou, ainda, quando se procura propor atividades mais próximas do cotidiano dos alunos, não acontecem mudanças atitudinais significativas entre os professores.

Em outras palavras, mesmo com novos "adereços", o ensino de matemática tem se caracterizado pela preocupação de "passar" aos alunos, mediante exposições orais repetitivas e tediosas, definições, regras, procedimentos e nomenclaturas, com nenhuma (ou quase) preocupação com a "descoberta" ou com a construção dos conceitos. A pressa é companheira constante, afinal é preciso "cumprir" o programa e, conseqüentemente não se tem tempo de desenvolver atividades que levem à compreensão das noções matemáticas, porque estas, precisam de tempo para a criança pensar. A avaliação se caracteriza pela ênfase nas respostas corretas e na reprodução dos modelos, sem que a troca de pontos de vista, o respeito mútuo, a construção da autonomia, sejam instrumentos valorizados pelo professor.

Em se tratando de professores de matemática, a melhor maneira de se "ensinar" essa disciplina seria a forma de apresentação dos conteúdos, retratada em *Os Elementos*, obra escrita por Euclides em 300 a.C., com a seqüência canônica de primeiro se dar a definição, depois os exemplos e exercícios, muitos exercícios, quase todos de acordo com um "modelo" resolvido em sala de aula pelo professor.

A forma euclidiana de apresentação dos conteúdos, com teoria e prática não se apresentando como complementares uma da outra, continua presente na sala de aula e na grande maioria dos livros didáticos, permanecendo forte entre os professores a crença na efetividade da explicação e, principalmente, da repetição.

Zunino (1995) realizou uma pesquisa com professores de matemática onde procurava saber qual era, segundo eles, a melhor forma de se "ensinar" a sua disciplina, obtendo, entre outras, as seguintes respostas:

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

> "É necessário muito material concreto e exercitar muito...repetir muitas vezes".
>
> "Tem que lhes colocar uma grande quantidade de problemas diferentes para que elas consigam... e depois têm que ser reforçados. Os conteúdos se ensinam, se reforçam muito e as crianças vão fazendo a ligação. Isto é um trabalho longo. O reforço diário é indispensável."
>
> "Não se consegue um objetivo em um só dia, tens que fazer repetição, colocar exercícios. Não compridos, mas curtos. Dar-lhes em pedacinhos é melhor que ocupá-los em exercícios por horas seguidas."
>
> "Eu mando eles no quadro negro para resolver contas e eles vão verificando. No caso de errarem, repetem o exercício".
>
> "Primeiro eu lhes explico, depois ponho no caderno deles como exercício e logo faço a revisão para verificar se entenderam. Se a maioria tem dificuldade, volto a insistir e, como nessa hora já terminou a aula, no outro dia volto a mostrar e me empenho com isso. Eu venho com todo material que tem de ser ensinado e me empenho nisso, é assim que eles vão captando".(Zunino, 1995:11).

Fica clara nos depoimentos anteriores a crença na efetividade da repetição. Além disso, pode-se inferir também que é bastante arraigada a idéia de que cada item deve ser ensinado de forma bem separada de outros itens, para que as crianças não se confundam, isto é, primeiro ensina-se a adição, por exemplo, demora-se aí um certo tempo, este conteúdo é "bem reforçado", até que a criança "domine" bem e só depois se "passa" para outro tema.

A pesquisa de Zunino foi realizada na área metropolitana de Caracas, na Venezuela, mas, caso fosse realizada em qualquer cidade brasileira, os resultados seriam, certamente, os mesmos, ou seja, a maioria dos professores de matemática, na Venezuela, no Brasil, ou outro país qualquer compartilha da conhecida concepção de ensino e aprendizagem, segundo a qual, "ensinar consiste em explicar, aprender consiste em repetir (ou exercitar) o ensinado até reproduzi-lo fielmente."

Ao se adotar a "repetição" como "estratégia" de ensino, os professores que pouco ou nada sabem sobre a natureza da matemática e, principalmente, acerca dos processos envolvidos na construção dos conhecimentos (quando entendem que o conhecimento é construído!) – não estão "ensinando" matemática, estão promovendo uma "imitação".

Utilizando técnicas que favorecem a imitação é perfeitamente possível, por exemplo, ensinar uma criança surda a tocar um instrumento musical – vivenciei esta experiência: a criança tinha seis anos, o instrumento era um órgão eletrônico e marcava o ritmo contando com batidas dos pés. Quando errava, a criança era alertada pela expressão desapontada do

professor e tentava novamente até conseguir o resultado esperado. O professor e matemático americano W. W. Sawyer relata um exemplo semelhante em sua obra *O encanto da matemática* destacando, todavia, que a criança surda nunca "teria, evidentemente, a noção do que estava a fazer, ou da razão por que quem quer que fosse, havia de dedicar horas a tão extraordinário exercício". (Sawyer. s/d, p.89).

Uma outra questão a ser levantada é o caráter imediatista do ensino, ou seja, visando quase que exclusivamente às verificações de aprendizagem. Antes de cada prova são realizadas "aulas de revisão" para resolução de exercícios semelhantes aos que serão solicitados nas referidas "provas". O resultado, ainda de acordo com W.W.Sawyer, são alunos repetindo, mecanicamente, fórmulas, procedimentos e definições, como se fossem mensageiros incumbidos de transmitir uma mensagem importante num idioma que desconhecessem. Memorizam as frases, repetem-nas ansiosamente, ávidos por darem conta rapidamente de sua tarefa e, depois, as esquecem sem remorsos. Se no futuro se defrontarem novamente com o idioma em questão, poderão até se recordar que algum dia foram capazes de "recitar" um texto nele, porém, provavelmente, não saberão fazer uso dele novamente.

É o que acontece com o ensino "papagueado" da matemática, o aluno aprende uma "imitação" de alguns tópicos da matemática que se lhe apresenta estafante, desnecessária e assustadora.

Após a "verificação de aprendizagem" onde pouco valor é dado, em geral, às formas de raciocínio, os alunos são rotulados com décimos de diferença (mesmo que a "nota" final seja em forma de conceito, o professor invariavelmente mantém o "seu controle" numérico). Caso os alunos não consigam "reproduzir" os modelos, existem as "aulas de recuperação", onde o objetivo é a recuperação das "notas" e nunca de conteúdos não construídos.

Tudo isso, ainda de acordo com Sawyer, é "perda de tempo", não é assim que se constrói o conhecimento matemático. Para o autor, se o aluno não for capaz de fazer uso do que lhe foi ensinado, o processo todo carece de sentido.

É verdade que os modelos são necessários porém, é só mediante a utilização de tais "réplicas" como instrumentos de transformação do real que a aprendizagem se efetivou. Em linguagem piagetiana: é somente quando a acomodação (das quais imitação é uma das

unesp

formas) e a assimilação (transformação do real) são recíprocas e solidárias acontece a adaptação (aprendizagem).

No que se refere ao ensino da matemática na educação infantil e nas séries iniciais do ensino fundamental, deve ser acrescentado que este ensino é realizado por professores, egressos dos cursos de magistério e de pedagogia, sendo que na sua imensa maioria, não possuem nenhuma afinidade com a matemática.

Uma outra questão a ser abordada diz respeito aos conteúdos. Durante muito tempo estes permaneceram restritos aos conhecimentos dos gregos; depois, com a matemática moderna, sofreram alterações fundamentais, com a introdução da idéia de estrutura, o tratamento conjuntista, o aprofundamento no estudo das funções. Algumas dessas inovações, como a que se refere às funções, ainda permanecem nos programas escolares, outras, perderam sua força.

O advento de recursos tecnológicos também colaborou com pequenas interferências, como por exemplo, a maioria dos livros didáticos já não traz mais o "algoritmo" para extração de raízes quadradas. A calculadora, porém, ainda não é parte integrante do material escolar, sob a alegação de que, se não treinarem os algoritmos, as crianças "não desenvolverão o raciocínio".

Estas mínimas alterações, porém, não mudaram o essencial: a crença na hierarquização dos conteúdos, resquício da postura formalista euclidiana e que consiste em estruturar a apresentação dos assuntos a serem tratados seguindo a ordem: primeiro definem-se conceitos básicos, a seguir, novos conceitos são definidos a partir dos anteriores e, finalmente, novas posições são introduzidas e justificadas a partir dos conceitos já definidos. E assim, com esta visão, o objetivo maior de se "trabalhar" determinado conteúdo passa a ser o fato de que ele é "pré-requisito" de outro que vem a seguir e não a sua utilização efetiva.

A atualmente recomendada "construção em espiral" (já preconizada por W. Browenell em 1935), segundo a qual a matemática deve ser apresentada de maneira a evitar temas desconexos e o conhecimento matemático deve ser adquirido no decurso de problemáticas de complexidade cada vez mais crescente, ou seja, um determinado assunto não deve ser

unesp

esgotado numa única vez, ao contrário, mas, sim, em diversas etapas, avançando em profundidade a cada uma delas, objetiva minimizar o freqüente "esquecimento" dos alunos quando necessitam "usar" determinado conteúdo.

Em resumo, em que pese o fato de que desta forma (espiralada) é possível adequar o conteúdo ao nível cognitivo da criança e proporcionar uma compreensão maior, para os professores, o ensino em espiral funciona mais como uma forma de manter o assunto "quente" e facilitar o domínio dos "pré-requisitos", ou seja, a idéia de "hierarquização" permanece subjacente, evidenciando um total desconhecimento da história da matemática.
Um bom exemplo deste fato é o ensino das funções exponenciais e logarítmicas no ensino médio. Primeiro, se trabalha com as exponenciais, porque se relaciona com potenciação, que é um assunto já conhecido, depois, a "logaritmação" é apresentada como operação inversa da exponenciação que lhe serve então, como pré-requisito.

Ora, historicamente, os logaritmos foram "descobertos" anteriormente, com o objetivo de simplificar os cálculos utilizados nas navegações. As exponenciais surgiram muito depois em função de outros problemas e só depois ainda é que se descobriu que as operações eram inversas entre si.

Um outro problema ainda referente aos "conteúdos" é a "obrigatoriedade" da apresentação sempre num contexto do cotidiano do aluno. É fato que ser "apresentado" a um novo conteúdo através de uma situação-problema ou de uma contextualização proporciona melhores condições de construção do conhecimento. Não se pode esquecer, todavia, que a matemática é essencialmente generalizações e assim, não pode ficar restrita a situações específicas.

O ensino de matemática com ênfase em situações da vida diária coloca os números sempre em relação a objetos ou eventos presentes nas situações em questão e esse "uso de números sempre acompanhados de referentes situacionais parece impor limites ao conhecimento matemático" como a generalização e a compreensão de relações matemáticas que independem de referentes físicos. (Schliemann, 1998, p.22).

unesp

> Outro exemplo das limitações relacionadas ao uso de números sempre com referentes específicos, diz respeito à compreensão da multiplicação como uma operação comutativa. Dados obtidos por Petito e Ginsburg (1982) entre alfaiates e vendedores de tecido da África mostram que adultos não escolarizados não aceitam o princípio da comutatividade da multiplicação. No caso da adição, os sujeitos facilmente utilizavam a comutatividade para resolver problemas. Mas, para a multiplicação, após resolver um problema que envolve 6x100 pela adição de 100 seis vezes, eles não aceitavam que o mesmo resultado se aplicava a um problema que envolvia 100x6. (Schliemann, 1998, p.21).

Uma outra "limitação" refere-se a uma "interpretação equivocada da idéia de cotidiano", isto é, ao se considerar apenas conteúdos que se "supõe fazer parte do dia-a-dia do aluno" muitos assuntos importantes são desprezados porque são considerados como distantes da "realidade" dos alunos por não serem passíveis de aplicação imediata. "Esta postura leva ao empobrecimento do trabalho, produzindo efeito contrário ao de enriquecer o processo ensino-aprendizagem". (PCN: matemática, 2000, p.25 e 26).

De acordo com Brosseau (1998), quando se trata de "ciência" matemática o cientista não comunica seus resultados da mesma forma como foram obtidos, mas os reorganiza, lhes dá a forma mais geral possível, descontextualizada, despersonalizada e atemporal, em outras palavras, a "forma matemática". A transmissão do saber, entretanto, para ser eficaz, necessita do caminho inverso, ou seja, é necessário que o professor promova uma recontextualização do saber, que crie situações que dêem sentido aos conhecimentos que devem ser ensinados.

> Porém, se a fase de personalização funcionou bem, quando o aluno respondeu às situações propostas não sabia que o que "produziu" é um conhecimento que poderá utilizar em outras ocasiões. Para transformar suas respostas e conhecimentos em saber deverá, com a ajuda do professor, re-despersonalizar e re-descontextualizar o saber que produziu, para poder reconhecer no que faz algo que tenha caráter universal, um conhecimento cultural re-utilizável. (Brosseau, in Parra e Saiz, 1998, p.48).

Assim, cabem ao professor duas ações aparentemente contraditórias: fazer com que os alunos vivenciem o conhecimento como resposta a uma situação familiar e, transformar "esta resposta razoável" num conhecimento genérico. "Para o professor é grande a tentação de pular estas duas fases e ensinar diretamente o saber como objeto cultural, evitando este

duplo movimento. Neste caso, apresenta-se o saber e o aluno se apropria dele como puder". (Brousseau, in Parra e Saiz, 1998, p.49).

Um outro fator a ser destacado refere-se aos materiais didáticos. A recomendação do uso de materiais manipuláveis tem acompanhado quase todas as propostas alternativas, sem que se tenha clareza de onde, por que, para que e, principalmente como utilizá-los o que, às vezes, provoca maiores prejuízos do que ganhos, como por exemplo, o uso do material dourado na "concretização" de algoritmos das operações elementares, inclusive no da subtração. Além disso, muitas vezes, tais materiais são encarados como a panacéia do ensino da matemática, colocando-se sobre eles, expectativas indevidas.

As tendências atuais do ensino da matemática, presentes muito mais nos programas de pós-graduação e nas discussões acadêmicas do que entre os professores do ensino fundamental e médio, indicam algumas diretrizes para o "fazer matemático" na sala de aula, quais sejam: o recurso à história da matemática; a etnomatemática; a resolução de problemas; o uso de jogos e a utilização de recursos tecnológicos.

Teoricamente interessantes e com grandes possibilidades de efetivamente colaborarem com a construção do conhecimento matemático, as novas tendências, como as demais inovações metodológicas, apresentam também alguns riscos, especialmente, (e nisto são iguais a todas), o seu uso inadequado, resultante de uma má preparação do professor.

O recurso à história da matemática, por exemplo. Além do fato notório de que a maioria dos cursos de graduação não proporcionam o acesso a tais estudos, a história da matemática é tratada como um conteúdo a mais a ser incorporado ao programa, com a valorização de fatos, datas ou biografias de matemáticos famosos e não como recurso para se mostrar as razões que motivaram determinados estudos ou, para se refazer as etapas de construção de determinado conceito ou, ainda, como simples motivação.

O ensino via "resolução de problemas" parece ser, dentre os "novos caminhos" o que se encontra mais ao alcance do professor, porém, mesmo quando este recurso é usado adequadamente, (no início do processo e não apenas como aplicação), apresenta os riscos das limitações decorrentes da não-descontextualização e do "descarte" de alguns conteúdos, anteriormente comentados.

unesp

O "uso de jogos", além de apresentar os mesmo riscos da "resolução de problemas", envolve transformações do real, tornando a descontextualização imprescindível. Por outro lado, os jogos substituem, com vantagem, as entediantes listas de exercícios necessárias para o domínio das técnicas matemáticas, porém, é preciso ficar claro que os mesmos são eficientes para fixação de determinadas habilidades, como motivação, e para o desenvolvimento da autonomia e do pensamento, sendo que, raramente, colaboram com a construção do conteúdo.

As tecnologias além de serem de difícil acesso para a maioria da população brasileira encontram ainda, enorme resistência por parte dos professores, para quem, o domínio de algoritmos de contas que quase nunca aparecem na prática (envolvendo muitas "casas" decimais, por exemplo), se confunde com conhecimento matemático.

Finalmente, a etnomatemática, que busca um relacionamento mais íntimo da matemática com os aspectos sócio-culturais e políticos da comunidade dos alunos, exige um professor-pesquisador, condição que, seja por formação, seja por condições de trabalho, os professores dos ensinos médio e fundamental brasileiros, estão muito longe de conquistar.

Desta forma, apesar de teoricamente coerentes, de serem aparentemente factíveis, e de terem apresentado resultados satisfatórios onde foram aplicadas (quase sempre com supervisão de pesquisadores), as novas tendências ainda estão muito distantes da realidade brasileira.

Enfim, apesar das inúmeras tentativas, o ensino de matemática continua desagradando não só a quem ensina como também a quem aprende, sem esquecer que a insatisfação é geral também entre os matemáticos e os educadores, evidenciando que os problemas (antigos e novos) estão longe de serem resolvidos, o que torna pertinentes, atuais e necessárias novas discussões.

Apesar desses sérios questionamentos ao ensino da matemática que são ainda atuais, ocorreram algumas mudanças principalmente de âmbito metodológico particularmente na educação infantil e séries iniciais do ensino fundamental, as quais, para serem entendidas demandam uma contextualização histórica.



1.2 O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

1.2.1 Os antecedentes

A importância da disciplina matemática na educação de crianças e jovens parece hoje inquestionável. Integrando o conjunto de disciplinas que compõem o núcleo comum, a matemática faz parte dos currículos escolares da educação infantil, dos ensinos fundamental e médio, sendo que na educação fundamental, possui uma carga horária superior à das demais disciplinas, com exceção feita à língua pátria, em todos os países do mundo. Entretanto, nem sempre foi assim.

A matemática tem suas primeiras manifestações ainda no período paleolítico, manifestações estas que se ligavam diretamente às necessidades práticas do contexto social, acarretando que, enquanto conhecimento, passasse por momentos de importância qualitativamente diferentes durante o seu longo desenvolvimento. (Miorim, 1998).

Assim também ocorre com o seu ensino, cuja maior ou menor ênfase está estreitamente ligada à importância desfrutada pela matemática em determinado contexto social.

Num passado não muito distante, se uma criança devia ou não aprender matemática dependia da profissão para a qual estava sendo preparada. Como exemplo disso, têm-se o fato de que durante o período colonial americano foram organizadas escolas especiais para treinar os alunos nas habilidades de calcular, porque a Companhia Holandesa das Índias Ocidentais precisava de homens treinados em cálculos para serem encarregados de seus negócios, sendo que um hábil calculista não era considerado ninguém especial.

Para a aristocracia do período colonial americano (tal como na Grécia Antiga, onde apenas a Geometria era valorizada), uma pessoa que soubesse calcular servia apenas para desempenhar funções menos importantes, ao contrário da leitura e da escrita, que eram consideradas imprescindíveis e seu ensino exigido por lei nos Estados Unidos desde 1679. A aritmética, por seu lado, permaneceria ausente dos currículos escolares americanos durante um longo período. (D'Augustine, 1976).

Na Europa, por outro lado, em cursos intitulados *Lições de Pedagogia*, ministrados durante a segunda metade do século XVIII aos estudantes da Universidade de Könisgberg, Kant

evidencia a importância do ensino de matemática às crianças, não apenas pelo seu conteúdo intrínseco e sua utilidade prática, mas, também, pela sua contribuição à memória e, principalmente, por ser uma ciência ao mesmo tempo rigorosamente dedutiva e que se adapta exatamente à experiência. A matemática se apresentava para o grande filósofo, do ponto de vista pedagógico como a única disciplina capaz de proporcionar aos aprendizes a possibilidade da "união entre o saber e a capacidade", ou seja, entre a razão e a experiência:

> Na instrução da criança é preciso unir pouco a pouco o saber e a capacidade. Entre todas as ciências parece que a Matemática é a única para se obter da melhor maneira essa finalidade. (Kant, 1996, p.70)

Fica evidente, que apesar do estágio de desenvolvimento científico-cultural da época, a matemática ainda não era considerada uma disciplina *obrigatória* na educação infantil.

A educação infantil até então, era realizada a domicílio, por professores particulares, sendo que na sua grande maioria, as primeiras escolas criadas, eram destinadas a adultos e não tinham por objetivo ensinar os rudimentos escolares, ao contrário, assemelhavam-se a grupos de estudos orientados.

Silva (1992), afirma que as primeiras informações "confiáveis" com relação à criação de escolas as quais deram origem posteriormente às universidades, datam do século VIII d.C., durante o reinado de Carlos Magno (768 – 814), com a criação de escolas religiosas, o que continuou acontecendo na corte de Alfredo, o Grande, no século seguinte.

A intenção de Carlos Magno era elevar o nível educacional do clero em seu reino, constituído na sua maioria por analfabetos e, com isso, não ficar atrelado à direção da Igreja em Roma. Além disso, já havia fortes indícios de um enfraquecimento do sistema feudal e, em virtude do desenvolvimento comercial e artesanal dos burgos, planejava também a escolarização das crianças urbanas e das camponesas que morassem nas cercanias dos mosteiros.

> Uma das idéias do monarca era que, uma vez alfabetizados, os religiosos pudessem compreender e ensinar devidamente a fé cristã. E, desse modo, o clero poderia ajudar no domínio de seu vasto império, subjugando, via religião – ao lado de seus exércitos – a, crescente população dos burgos e cidades episcopais. (Silva, 1992, p.16).

unesp

Assim, a partir do reinado de Carlos Magno, no século VIII e nos séculos IX e X, em virtude das transformações sociais e econômicas pelas quais atravessava todo o Ocidente, as escolas religiosas e as dos Palácios (destinadas à nobreza e seus filhos), são ampliadas e, nos séculos seguintes, devido ao aprofundamento das mudanças nas estruturas econômico-sociais, dão início ao florescimento das universidades européias, conforme nos informa Silva (1992).

Com a pressão da burguesia, passaram a surgir "escolas livres", isto é, locais fora das igrejas, ou seja, bastava existir um professor, que os alunos apareciam e formavam um centro de estudos. Por volta do século XII, começam a surgir associações de estudiosos, isto é, de mestres e discípulos, que ficam conhecidas inicialmente como *studia* e, posteriormente, devido ao seu significado universal, passam a ser chamadas de *studia generalia*. Os mais famosos *studia generalia* foram os de Bologna na Itália e o de Paris, na França.

No século XIII, acontece a criação dos Estudos Gerais de Lisboa que depois são transferidos para Coimbra e se transformam na Universidade de Coimbra. É nessa Universidade que se formam os primeiros docentes do curso de Matemática da Academia Real Militar da Corte do Rio de Janeiro, a primeira escola de Matemática do Brasil, fundada em 1810.

Para Pitombeira (in Barretto, 2000), o nível da Matemática ensinado no início do século XIX no Brasil, pode ser depreendido na decisão de 22 de junho de 1809, na qual fica estabelecido que a cadeira de álgebra, aritmética e trigonometria, cuja criação na Corte era recomendada pela Carta-régia de 19 de agosto de 1799, era destinada a pessoas que desejassem distinguir-se nas diferentes ocupações e empregos da sociedade, "ou científico ou mecânico".

> (...) convém pelo menos que os seus elementos ou primeiros ramos, como são a aritmética, a álgebra, a geometria teórica e prática se tornem vulgares, e constituam uma das primeiras instruções da mocidade; por este justificado motivo se deve criar a dita cadeira, na qual se ensinará aritmética e álgebra até equações do 2º grau, inclusivamente; a geometria teórica e prática e trigonometria. Este professor ensinará o cálculo numérico provisoriamente com o algébrico, tanto das quantidades inteiras como fracionárias; a resolução das equações algébricas do 1º e 2º grau; e formação de potências, e extração de suas

> raízes; a teoria das proporções e progressões; regra de três simples e composta, direta e inversa, as de sociedade, de liga e falsa posição, terminando o ensino de aritmética e álgebra com a resolução dos diferentes problemas de mais uso no comércio, como são os que pertencem a juros ou interesses, etc., e com explicação do uso das tábuas de Price, insertas no tratado das pensões vitalícias de Saint Cirau, publicadas em português. No ensino da geometria teórica... (Pitombeira, in Barretto, 2000, p.91/92).

E a decisão continua estabelecendo os conteúdos programáticos para a geometria teórica e prática. O que fica claro, é que a seqüência recomendada (primeiro a parte teórica, depois as aplicações práticas) é a que ainda hoje aparece na maioria dos livros didáticos.

No Brasil, desde a sua descoberta em 1500, até 1808, eram proibidos: a circulação de jornais, as escolas superiores, a impressão de livros e panfletos, bem como a existência de gráficas. (Silva, 1992).

No início da colonização do Brasil, a implantação das primeiras escolas acontece por intermédio dos padres da Companhia de Jesus e pela política colonizadora iniciada pelo rei D. João III. As primeiras escolas foram a da Bahia, criada pelo padre jesuíta Vicente Rijo Rodrigues, em 1549, e a de São Vicente criada pelo padre Manuel da Nóbrega em 1550, instituída com doze órfãos trazidos da metrópole, sendo que nelas era apenas ensinado a ler e a escrever, não havendo aulas de matemática.

É no Colégio da Bahia, instituição inaciana, que é ministrado, em 1572, o primeiro curso de ciências naturais, onde se estudava, durante três anos, matemática, física, ética e metafísica. Este curso era conhecido como Curso de Artes e tinha nível superior, graduando os alunos como bacharéis ou licenciados.

De acordo com Silva (1992), em 1573, os jesuítas inauguraram o Colégio do Rio de Janeiro, e ali teve início um curso onde se ensinava a ler e escrever os algarismos e as quatro operações algébricas.

> Assim sendo, o ensino de Matemática no Brasil começou com os jesuítas, pela lição de algarismos ou das quatro operações algébricas, ensino este que foi gradativamente elevado desde o curso elementar até o curso de Artes. Por exemplo, em 1605, nos Colégios da Bahia, do Rio de Janeiro e de Pernambuco, havia a aula de Aritmética, título usado para designar um maior ou menor desenvolvimento do ensino da Matemática. Dentre os assuntos da aula de Aritmética figuravam: razões e proporções e geometria euclidiana. (Silva, 1992, p.33)

unesp

Outras ordens religiosas que se encontravam já estabelecidas no Brasil, também iniciam a oferta de aulas em seus conventos, entretanto, fossem inacianas ou não, as escolas existentes no Brasil destinavam-se apenas a alunos do sexo masculino.

Também existiram no Brasil, a partir da segunda metade do século XVI, classes particulares (não eram colégios), dirigidas por professores leigos, isto é, não religiosos. A primeira delas, surgiu no Rio de Janeiro, em 1578, com o escrivão Francisco Lopes, que ensinava as quatro operações. Pernambuco e São Paulo, também passam a ter classes particulares, a partir de 1585, mas "em todas elas, o reino da Matemática não ia além das quatro operações algébricas". (Silva, 1992, p.34)

> Apesar dessas iniciativas, a educação no Brasil é conduzida pelos jesuítas até a sua expulsão em 1759, pelo marquês de Pombal, e se caracterizava pela ênfase a uma cultura clássica e humanística, sendo a matemática ensinada como simples ferramenta necessária para as necessidades imediatas do dia-a-dia. (Pitombeira, in, Barreto, 2000, p.91).

Com a reforma pombalina, em Portugal iniciam-se as reformas no ensino brasileiro e, finalmente, com a chegada de D. João VI, em 1808, o Brasil foi descoberto de fato, proporcionando um grande impulso nas questões educacionais, sendo que em 1826, com a reforma Januário Cunha Barbosa, que organizou o ensino, dividindo as escolas em pedagogias, liceus, ginásios e academias, a matemática torna-se obrigatória em todos os níveis de ensino.

De um modo geral, podemos então dizer que por volta de 1800, a matemática já era ensinada nas escolas da maioria dos países do mundo, sendo que seu ensino consistia basicamente de como resolver problemas através de regras. Os livros dessa época eram de natureza comercial, porque continham um grande número de problemas e regras relativas a negócios e ao comércio, e não se destinavam a ensinar crianças, já que raramente se ensinava nada mais do que contagem e operações com números pequenos a crianças menores de dez anos.

O caráter dos livros de matemática começa a mudar em torno de 1820, com o método de apresentação do assunto do concreto ao abstrato, sem enfatizar a simbolização, que é feita

unesp

posteriormente, havendo preocupação em motivar as crianças com a introdução de conceitos por meio de problemas aplicados.

O currículo de matemática, nos fins do século XIX recebe influências de duas concepções divergentes sobre a disciplina ainda hoje fortemente presentes: a de *disciplina formal* e a de *disciplina de caráter indutivo.* Os defensores da *disciplina formal* acreditavam que a mente da criança poderia ser desenvolvida através de um treino intensivo por meio de exercícios repetidos – como a utilizada pelo popular *Método Kumon* – e os seus opositores apregoavam que se chegava aos conceitos aritméticos de maneira indutiva, por meio do uso de objetos e não pela aplicação de regras.

No começo do século XX começou a preocupação com a aplicação dos conteúdos escolares à vida real dos adultos, e este fato levou a abusos tais como ensinar juros e taxas para crianças do então ensino primário.

No final dos anos 20, do século XX, inicia-se a preocupação com a idade mental adequada à aprendizagem de alguns tópicos de matemática, sendo que foram feitos estudos que exerceram enorme influência nos currículos escolares nos vinte anos seguintes embora diversas pesquisas provassem que o lugar e a época em que determinado tópico devia ser colocado dentro do currículo dependia da maneira como ele ia ser ensinado. (D'Augustine, 1976).

Embora com algumas alterações, os currículos atuais refletem o modelo desta época, com os seis primeiros anos do ensino fundamental enfatizando a aritmética e os dois últimos apresentando a álgebra e os fatos mais simples da geometria indutiva. O ensino médio continua com a álgebra, a geometria é a dedutiva e aparece a trigonometria. As mudanças que ocorreram, mormente as baseadas em estudos sobre a criança, tiveram caráter mais metodológico, deixando fixos os conteúdos curriculares.

Pesquisas evidenciaram que as crianças tinham sua aprendizagem melhorada partindo do concreto para o abstrato, o que motivou o uso de muito material manipulável, os *materiais concretos,* no ensino de matemática. Outras pesquisas determinaram que os problemas deveriam ser orientados no sentido de *aproveitar as experiências anteriores da criança*; outras ainda indicaram que a aritmética requeria um período de tempo maior para ser compreendida, dando origem ao *ensino em espiral*.

unesp

Diversos foram os movimentos pela reformulação do ensino de matemática a partir de 1920, tais como o *Movimento Progressivo*, o movimento dos *defensores da Gestalt*, movimento em favor do *Ensino pela Compreensão* e, o mais importante deles, o movimento da *Matemática Moderna.*

O *movimento progressivo* buscava atender às necessidades da criança utilizando-se de experiências significativas para a mesma. Embora esta metodologia tenha sido abandonada por deixar muitas lacunas na aprendizagem da aritmética, ela deixou um legado importante: o de que a criança quando está motivada aprende melhor.

Depois de 1920, chegaram os defensores da *Gestalt*, para os quais a organização da aprendizagem deve basear-se na percepção total – a organização da aprendizagem concentrando-se mais no todo do que nas partes. O aspecto positivo que ficou desse movimento foi a consciência de que é preciso menos repetição para dominar os conceitos quando a situação é significativa levando a tornarem-se menos intensivos os treinos e as repetições.

A partir de 1930, cresce o movimento em favor do *ensino pela compreensão*, ou seja, junto com a situação significativa, recomendava-se desenvolver uma habilidade.

1.2.2 A matemática moderna

Durante as décadas de 50 e 60 do século XX, o ensino de matemática, em diferentes países, foi influenciado por um movimento de renovação que ficou conhecido como Matemática Moderna o qual será estudado de forma mais detalhada que os demais, já que parece ter sido o fato de alguns dos colaboradores de Piaget serem partidários desse movimento - além do próprio Piaget – a principal das razões que motivaram diversas tentativas – algumas com relativo êxito- de se fundar, na teoria piagetiana, uma didática para a matemática.

No princípio da década de 50 e mesmo antes, já existia o consenso de que o ensino de matemática malograra e não estava atendendo a quem ensinava e, menos ainda, a quem aprendia.

Como acontece ainda hoje com pessoas adultas que por pelo menos durante 11 anos estudaram matemática, os adultos daquela época pouco ou nada retinham do conteúdo estudado a não ser nomes famosos como Teorema de Pitágoras, apesar de não se recordarem do enunciado, ou fórmulas exaustivamente memorizadas sem a devida compreensão, como a do quadrado da soma de dois números reais quaisquer, x e y, dada por: $(x+ y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, sem falar, é claro, na total incapacidade de operar com frações, conteúdo que aparece na terceira série e acompanha o indivíduo nos oito anos restantes, fazendo com que muitos afirmem que nada sabem de matemática, o que é, evidentemente um exagero.

Quando os Estados Unidos entraram na Segunda Guerra Mundial ficou patente para os militares que os soldados pouco sabiam de matemática e foram instituídos cursos especiais para melhorar seus desempenhos. Tal fato motivou a necessidade de se "reformar" o ensino de matemática e embora sejam muitos os fatores envolvidos em qualquer atividade de ensino, os grupos que empreenderam a reforma concentraram-se no currículo, acreditando que se este fosse melhorado, todo o ensino teria êxito.

Estes grupos de reformas eram integrados por matemáticos profissionais que verificaram que as escolas de todos os países tratavam ainda das noções mais antigas da matemática – sem falar na matemática grega – sendo que o conhecimento mais recente existente nos programas de matemática escolar datava de no mínimo 200 anos, ou seja, as conquistas mais recentes da matemática não estavam contempladas nos currículos.

O conflito político entre Rússia e Estados Unidos, particularmente, ao final da década de 50, influenciou intensamente a educação na década seguinte. No outono de 1957, os russos lançaram seu primeiro Sputinik sendo que este fato convenceu o governo norte-americano e todo o país, de que estavam atrasados em relação aos russos em ciências e em matemática.

Na verdade, o que ficou enfatizado foi o fato de que a educação intelectual não recebia a ênfase necessária, com a valorização excessiva da memorização e do treinamento, em detrimento da compreensão e criatividade.

Segundo Goulart (1998), foi neste momento que os americanos "descobriram" Piaget:

> Foi neste momento que os americanos "descobriram" Piaget e começaram a interpretá-lo em função dos seus objetivos – acelerar o processo de desenvolvimento, compreender processos de aprendizagem complexa, desenvolver a criatividade. (Goulart, 1998, p.11).

Como sempre acontece na história da educação, eventos externos obrigam os educadores a revisar suas práticas e a ultrapassar seus preconceitos. A corrida espacial estimulou o fomento das agências governamentais americanas e surgiram muitos grupos interessados em criar um novo currículo para a matemática, incrementando assim, o movimento moderno.

Não há consenso quanto à pertinência do nome "matemática moderna". Para D'Augustine (1976) a palavra "moderna" seria inadequada sendo mais apropriada a expressão "matemática revolucionária".

> Uma expressão mais apropriada deveria ser matemática revolucionária, porque a reforma do currículo contém muitas características que normalmente são associadas a uma revolução. (D'Augustine, 1976, p.xxi).

Para Kline (1976), a expressão "matemática moderna" é apropriada, uma vez que a principal mensagem dos grupos que trabalhavam na mudança curricular era a de que o "ensino de matemática tinha malogrado porque o currículo tradicional oferecia 'matemática antiquada', que era como se referiam à matemática criada antes de 1700". (Kline, 1976, p.34)

É preciso ficar claro que não foram apenas os fatores externos, tais como o lançamento do Sputinik ou o rápido desenvolvimento da sociedade técnica nos anos 50, com o mercado necessitando cada vez mais de pessoas com boa preparação em matemática que evidencia a urgência de uma nova postura frente ao ensino desta disciplina. Fatores "internos" ou melhor dizendo, fatores pedagógicos vinham desde os anos 20, instigando os profissionais da área a buscarem mudanças. D'Augustine (1976, p.xxi) considera como fatores favoráveis ao começo da "revolução":

- Informações contínuas sobre o modo pelo qual as crianças aprendiam.
- Melhor conhecimento da estrutura básica da matemática.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

- Tentativas bem sucedidas de unificar os conhecimentos matemáticos.
- Reconhecimento de que a continuidade do ensino nas diferentes séries não era o suficiente.
- Reconhecimento de que o ensino da aritmética era totalmente orientado para desenvolver habilidades de computação.
- Reconhecimento de que a seqüência no ensino da matemática era mais histórica do que lógica.
- Reconhecimento da sociedade de uma maior competência em matemática.
- Reconhecimento do melhor preparo do professor.

A reforma curricular consistiu basicamente em se "largar a matéria tradicional em favor de campos novos como o da álgebra abstrata, o da topologia, o da lógica simbólica, o da teoria estabelecida e a álgebra de Boole". (Kline, 1976, p.35).

A matemática a ser ensinada era aquela concebida como lógica, compreendida a partir de estruturas, que conferiram um papel importante à linguagem matemática. O que se pretendia era diminuir a distância entre o saber ensinado e o saber da disciplina. Era como se os alunos tivessem conhecimento do imenso fosso existente entre os conteúdos da escola e os avanços da disciplina e, portanto se recusavam a aprender a matéria. A matemática moderna buscava então aproximar os conteúdos escolares da matemática dos pesquisadores centrando seu ensino nas estruturas e fazendo uso de uma linguagem unificadora, a linguagem da teoria dos conjuntos.

O estilo formalista de exposição matemática do qual o principal exemplo é a obra do grupo francês Bourbaki, penetrou gradualmente o ensino da matemática em níveis mais elementares e, sob o beneplácito da matemática moderna, os textos básicos bourbakianos em nível de pós-graduação sobre a teoria dos conjuntos, a álgebra e a análise chegaram até a pré-escola com textos e atividades sobre a teoria dos conjuntos destinadas às crianças de cinco, seis anos e até menores.

unesp

Vale destacar que esta revolução no ensino da matemática partiu dos matemáticos profissionais que não concordavam com os conteúdos ensinados e não havendo, inicialmente, preocupações de ordem pedagógica, prevaleceu a crença de que o êxito da reforma dependia apenas da mudança curricular. Na verdade, tais matemáticos, eram principalmente professores universitários, que raramente tinham contato com a realidade do ensino de crianças e adolescentes, sendo que grande parte destas reformas reflete a visão que o pesquisador matemático, tem do que deveria ser ensinado nas escolas de 1° e 2° graus. "Nota-se, nelas, um viés para transformar essa criança ou adolescente em um matemático mirim, preocupado com a exatidão, rigor e estrutura lógica da Matemática". (Pitombeira, in Barretto, 2000, p.102)

A este respeito, assim se pronunciou o ministro da educação do Peru, Dr. Carlos Cueto Fernandini, na abertura da segunda conferência organizada pelo CIAEM - Comitê InterAmericano para o Ensino da Matemática:

> O trabalho pedagógico da segunda metade do século XX está ainda derivando daquela combinação de eventos aos quais nos referimos como a revolução no ensino da matemática. Esta revolução nasceu primeiro nas mentes dos matemáticos profissionais, que, cerca de 25 anos atrás verificaram que as escolas de todos os países estavam ainda tratando das noções mais obsoletas nas ciências matemáticas. O que havia de mais "novo" nos programas de matemática escolar tinha 200 anos. Mesmo hoje, a despeito de tudo ainda falhamos ao tirar vantagem das novas e maravilhosas contribuições feitas pela ciência matemática ao aperfeiçoamento do espírito humano, assim como ao nosso meio material. Se um dos aspectos essenciais da educação é a integração do homem e do sistema de conhecimento contemporâneo a ele, como podemos voltar nossas costas à matemática moderna? Como podemos mover nossos horizontes de volta ao tempo em que nada se sabia, por exemplo, da teoria dos conjuntos? (Fehr, 1969, p.15 e 16).

Os principais assuntos abordados na segunda conferência foram a modernização do ensino de matemática, a necessidade de trazer para a sala de aula algumas das recentes conquistas da ciência matemática, a modernização dos currículos e programas, o treinamento de professores para a realidade e a produção de textos e materiais adequados ao novo enfoque.

Havia uma grande ênfase na introdução de novos conteúdos e surgiram grupos propondo uma reforma curricular bastante radical, como o grupo internacional que se reuniu em Royaumont, França, em 1971, que recomendou que se abandonassem completamente os conteúdos da matemática tradicional, inclusive a geometria euclidiana. (Kline, 1976)

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

Os novos conteúdos eram conjuntos, números, probabilidades, estatística e lógica. Além disso, as concepções modernas invadiram o ensino da álgebra: operações e sistemas operacionais, conjuntos, relações e aplicações, estruturas e isomorfismos, estrutura de espaço vetorial, etc. A geometria tende a ser algebrizada, com a introdução da geometria afim, tendência esta acentuada pelo famoso grito de Dieudonné: "Abaixo Euclides", proferido no seminário de Royaumont.

A preocupação com os métodos e meios começa a aparecer subordinada às questões de mudança de conteúdo, consideradas como fundamentais até então.

Em 1971, segundo o professor C. Gaulin, devido à influência de matemáticos profissionais e como resultado de investigações realizadas em diferentes partes do mundo, por especialistas qualificados, estavam "praticamente fora de discussão" os seguintes objetivos para o ensino da matemática:

> Ensinar matemática atualizada, incluindo probabilidades, estatística e matemática numérica;
>
> Ensinar a matemática fortemente unificada por meio de conceitos básicos e das estruturas fundamentais;
>
> Desenvolver a matemática conceitual, junto com a habilidade no cálculo;
>
> Ensinar a matemática tanto como um corpo de conhecimentos abstratos, como um útil instrumento operacional;
>
> Ensinar a Matemática como uma disciplina em contínua expansão;
>
> Apresentar uma imagem clara da metodologia da matemática;
>
> Prestar atenção à motivação e desenvolvimento de atitudes positivas com respeito à matemática;
>
> Definir a matemática necessária ao cidadão médio da nossa sociedade. (UNESCO, 1973, pág. 117)

No Brasil, no início do movimento (em torno de 1950), havia grande insatisfação entre os professores de matemática, devido à educação antiquada, aos programas inflexíveis, determinados sem levar em conta a opinião dos professores. Tal estado de coisas favoreceram a realização dos Congressos do Ensino de Matemática, que foram organizados objetivando reunir professores de matemática de todo o país, com o propósito de desenvolver diretrizes para um plano de trabalho em comum. O I Congresso Brasileiro do

unesp

Ensino da Matemática, aconteceu em Salvador, Bahia, de 4 a 7 de setembro de 1955, com a participação de 94 (noventa e quatro) professores.

O II Congresso teve lugar em São Paulo, em 1957, onde a discussão girou em torno da pergunta: "matemática clássica ou matemática moderna nos programas do curso secundário?". Quando da realização do III Congresso, no Rio de Janeiro em 1959, quase não se havia avançado nada, a maioria dos professores brasileiros ainda não sabia matemática moderna.

> Nesta época e devido à insistência dos professores secundários de Matemática vários Grupos de Estudo, Centros e mesmo Institutos foram organizados no país, para atualizar o conhecimento do professor. Por exemplo, o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática de São Paulo, fundado em 31 de outubro de 1961 e o Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal da Bahia fundado em 1960.
>
> Os Institutos e Grupos de Estudo começaram a formar equipes de professores secundários, que podiam atualizar seus colegas, recém-graduados nas faculdades sem bom preparo, bem como professores registrados que lecionam sem ter preparo universitário. O Grupo de São Paulo, maior e melhor preparado apresentou ao IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, que se realizou em Belém do Pará, em julho de 1962, sua primeira utilização da Matemática Moderna no ensino secundário. (Fehr, 1966, p.219)

É necessário ressaltar que no Brasil, assim como nos demais países do mundo, o maior mérito do movimento da "matemática moderna" talvez tenha sido o de motivar o debate em torno do ensino de matemática. Foram criados diversos grupos de férias para discutir o ensino de matemática, modificando-se os programas e os livros didáticos (principais responsáveis pela veiculação do movimento), proporcionando efetivamente, uma renovação do ensino de matemática em nosso país.

O movimento renovador coincide, no Brasil, com as mudanças políticas iniciadas no governo João Goulart e que atingem seu clímax na ditadura militar, que refletiram na educação. O espírito ufanista e as metas de um progresso acelerado, reforçam uma educação tecnicista, direcionada pela psicologia comportamental.

> É o momento da preocupação com a formulação de objetivos operacionais, com a avaliação objetiva, a instrução programada e outras inovações de caráter didático. (Goulart, 1998, p.12)

unesp

Surgem então, os textos de "matemática moderna" apresentados em forma de estudo dirigido, o que, por si só, já impediria a vinculação do movimento renovador, com a teoria piagetiana.

Para Pitombeira (in Barretto, 2000), a reforma dos programas, sendo simplesmente inseridos na estrutura existente, sem críticas aos objetivos do ensino da matemática no contexto social não foi suficiente para satisfazer as exigências de uma sociedade que se apresentava cada vez mais complexa.

> A partir de 1961, alteram-se os programas de Matemática do ensino do 1º grau. Por um lado, temos a liberdade permitida pela Lei de Diretrizes e Bases; por outro, começam a chegar ao Brasil as propostas do chamado movimento da Matemática Moderna, com suas propostas radicais de revisão do ensino da matéria.
>
> Temos assim um movimento em direção à diversidade, com as várias Secretarias instituindo grupos específicos para estudos de currículos (laboratórios de currículos, por exemplo) e ao mesmo tempo um ponto de abstração muito forte para o qual se direcionavam essas mudanças, a Matemática Moderna. (Pitombeira, in Barretto, 2000, p.101).

Como já foi comentado, no Brasil, a Matemática Moderna teve forte influência e alcançou os professores através dos livros didáticos, porém, no Brasil, como nos demais países do mundo, as desilusões com a renovação não tardaram a ocorrer evidenciando que a matemática não havia se transformado em algo fácil de aprender. Alguns objetos de ensino introduzidos sofreram transformações, não previstas pelos autores das reformas e ainda, as inovações realizadas não levam a constituição de um corpo de conhecimento confiável. (Parra e Saiz, 1996).

O Conselho Nacional dos Professores de Matemática – NTCM – dos Estados Unidos após reunião realizada em 1980 elaborou documento intitulado *Agenda para Ação*, contendo recomendações para o ensino de matemática durante a década que se iniciava, destacando a *Resolução de Problemas* como foco da educação matemática dos anos 80. Este fato, aliado à compreensão nascente da relevância de aspectos cognitivos, lingüísticos, antropológicos e sociais no ensino da matemática, imprimiu novos rumos às discussões curriculares.

unesp

As reformas curriculares que aconteceram em todos os países do mundo entre 1980 e 1995, se fundamentaram nessas idéias e apresentavam diversos pontos de convergência, entre os quais, destacam-se:

- direcionamento do ensino fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas à aquisição de pré-requisitos para estudos posteriores;
- importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento;
- ênfase na resolução de problemas, na exploração da matemática do cotidiano e na interdisciplinariedade.

A partir da constatação da inadequação de alguns de seus princípios e das distorções ocorridas na sua implantação, a matemática moderna teve o seu refluxo no Brasil, entretanto, é preciso ficar claro, que até o momento da implantação dos PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais, em todo território brasileiro, pelo MEC, ainda existiam nos estados, autônomos nas elaborações de suas propostas curriculares, (desde que respeitado um mínimo comum), currículos com características do movimento renovador.

De acordo com pesquisa realizada por Pitombeira (in Barretto, 2000), que analisou os currículos de matemática de todos os estados brasileiros, com propostas elaboradas entre 1985 e 1995, foi possível dividir os currículos em duas "Grandes Famílias", os que ainda enfatizam a teoria dos conjuntos e os que já a eliminaram ou reduziram a um mínimo, sendo que o estado do Amazonas seria um exemplo extremo do 1° grupo, e o do Paraná é um bom exemplo do 2° grupo. Com o advento dos PCN espera-se que em breve, em todo Brasil, as propostas curriculares estejam harmonizadas e distantes da idéia de formação do "matemático mirim".

Em âmbito internacional, as críticas à matemática moderna começaram a ganhar corpo durante o Terceiro Congresso Internacional sobre Educação Matemática, realizado em Karlsruhe, na Alemanha Ocidental, em 1976. A variedade e abrangência dos temas abordados e o enfoque dado às discussões, revelaram uma mudança significativa no

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

movimento da Educação Matemática, com a intensa preocupação com a modernização dos currículos perdendo espaço para debates sobre a influência da vida social, o desenvolvimento da atitude de investigação no aluno, a formação do professor, a preocupação com os alunos lentos e deficientes, a relação entre matemática e linguagem, o uso de computadores, entre outros.

As contradições geradas pelo movimento renovador exigiam atitudes. O professor polonês Krygoroska apresentou, baseado nos trabalhos de Miklene, R. Thom e H. Freudenthal, as principais críticas referentes à orientação bourbakista da reforma.

> ...a saber:
>
> o fetichismo do pensamento conjuntista,
>
> as abstrações estéreis, não justificadas por suas aplicações e muitas vezes erroneamente concretizadas,
>
> a linguagem pseudo-erudita carregada de símbolos e terminologias,
>
> o fetichismo do método axiomático,
>
> o fetichismo do rigor, que na prática real da escola se transforma num pedantismo inútil,
>
> o esquecimento da realidade física como fonte de idéias matemáticas e, em particular o esquecimento do espaço físico como fonte da geometria
>
> o esquecimento da visão global baseada sobre as intuições espaciais em proveito do pensamento algorítmico da álgebra formal. (UNESCO, 1976, p.31)

Diversas foram as razões que determinaram o "fracasso" da matemática moderna e que não é objetivo deste trabalho esgotá-las aqui; mas, apenas discutir alguns aspectos da aproximação entre o movimento renovador e a teoria piagetiana.

1.2.3 O movimento renovador e as "idéias" piagetianas

Como já foi visto anteriormente, a matemática moderna buscava diminuir a distância entre o saber da sala de aula e o saber da ciência que à época era representado pelo estruturalismo do matemático "multicéfalo" Nicolas Bourbaki.

Assim, pode-se considerar que o aporte teórico do movimento era os resultados e o estilo formalista de exposição matemática da escola bourbakista, particularmente, a possibilidade de "unificação das matemáticas" antevista pela descoberta das estruturas elementares

unesp

(estruturas-mãe) e com a linguagem da teoria dos conjuntos constituindo-se em sua linguagem por excelência.

As pesquisas de Piaget e seus colaboradores (contemporâneas às dos Bourbaki) conduzem, por outro lado, ao estabelecimento de isomorfismos entre as estruturas matemáticas e as estruturas mentais do pensamento, com a "adoção" de estruturas próprias da matemática (a de *grupo*, por exemplo), para descrever estádios de desenvolvimento da inteligência na criança, tornando a aproximação entre o movimento renovador e a epistemologia genética, praticamente inevitável.

Para uma melhor compreensão desta "aproximação", convém recordar o significado de "estruturas" tanto na matemática, como na teoria piagetiana.

1.2.3.1 Estruturas

O tratamento dado aos objetos matemáticos também muda no decorrer do desenvolvimento da ciência. Eles deixam de ser pensados como objetos isolados, mas como estruturas gerais das quais fazem parte, isto devido à proliferação e os imbricamentos recíprocos entre eles.

Assim, surgiram tentativas, particularmente na década de 1920, de reduzir a diversidade de objetos a três *estruturas elementares* que são tratadas a seguir.

As estruturas matemáticas consistem em objetos matemáticos unidos por relações ou leis de combinação. Um exemplo de estrutura matemática, é o sistema de números inteiros, que são algo mais complexo do que objetos isolados, que constituem os *substantivos* do discurso matemático.

Os símbolos de combinação, de relações tais como "igual a", "maior do que" ou os sinais de operações tais como adição, radiciação ou diferenciação, exercem um papel semelhante ao de *verbos*.

As restrições ou qualificações atribuídas às estruturas matemáticas fazem o papel de *adjetivos*, como por exemplo, grupo abeliano, comparado com grupo.

> De maneira formal:
>
> Uma *estrutura matemática* consiste em um conjunto de objetos S, que podem ser imaginados como sendo o suporte da estrutura, um conjunto de operações ou

> relações, que são definidas sobre os objetos de S, e um conjunto de elementos distinguidos em S, por exemplo 0 e 1.
>
> Estes ingredientes básicos são chamados a "assinatura" da estrutura, e são freqüentemente exibidos em forma de uma lista com **n** elementos. Por exemplo: <R,+,.,0,1> significa o conjunto dos números reais combinados pela adição e multiplicação, com dois elementos distinguidos 0 e 1. (Davis e Hersh, 1990, p.171)

Não é tarefa fácil distinguir um objeto matemático de uma estrutura matemática, pois estes conceitos são relativos ao contexto. A diferenciação entre ambos parece depender da época e da utilização, ou seja, se uma estrutura matemática for freqüentemente utilizada e durante muito tempo e, ainda, se é adquirido todo um conjunto de experiências e intuições sobre ela, então poderá ser considerada como um objeto.

> É importante perceber que quando recuamos no tempo, o que agora é considerado como um objeto matemático simples, por exemplo, um círculo, ou um triângulo eqüilátero, ou um poliedro regular, pode já ter tido o impacto psicológico de toda uma estrutura e pode ter influenciado a metodologia científica, como por exemplo, a astronomia. (Davis e Hersh, 1990, p.172)

> Um objeto matemático considerado isoladamente não tem sentido. Sua significação provém de uma estrutura e ele representa o seu papel dentro da estrutura. (Davis e Hersh, 1990, 173)

As estruturas permitem fazer divisões não muito arbitrárias no campo da matemática. Lungarzo (1990), exemplifica: "estruturas dotadas de funções-operações, chamam-se *algébricas*, e a álgebra pode ser conceituada como o estudo das estruturas algébricas". (Lungarzo, 1990, p.81).

Os tipos de estruturas são determinados pela natureza das relações que as determinam, sendo que, embora tal natureza possa ser bastante variada, elas podem ser abarcadas por três grandes tipos: as estruturas algébricas, as de ordem e as topológicas.

Uma *lei de composição* é uma relação entre três elementos de tal forma que os dois primeiros elementos determinam o terceiro de maneira única. Uma estrutura é dita *algébrica*, quando suas relações de definição são leis de composição.

> Quando as relações de definição de uma estrutura são leis de composição, a estrutura correspondente é chamada *estrutura algébrica* (por exemplo, uma

> estrutura de *corpo* se define por duas leis de composição, com axiomas adequados: a adição e a multiplicação dos números reais definem uma estrutura de corpo sobre o conjunto destes números). (Bourbaki, in Le Lionnais, 1962, p.42)

Uma relação R entre os elementos x e y, representada por xRy, é dita *relação de* ordem, quando satisfaz às seguintes propriedades: a) reflexiva: para todo x, temos xRx; b) anti-simétrica: se xRy e yRx, então x=y e c) transitiva: se xRy e yRz, então xRz. Aqui, não se supõe que a relação determine univocamente algum dos elementos x e y, em função do outro, como acontece no caso das leis de composição.

Uma estrutura é *de ordem*, quando a relação que a define, é uma relação de ordem.

> Um exemplo evidente de um conjunto munido de tal estrutura é o conjunto dos números inteiros (ou o dos números reais), substituindo o sinal R pelo sinal $\leq$. (Bourbaki, in Le Lionnais, 1962, p.43)

A definição apresentada anteriormente para relação de ordem foi adaptada da apresentada por Bourbaki, na obra já referida, este porém, chama a atenção para o fato de que dois elementos de um conjunto podem ser *incomparáveis em relação a uma determinada relação R.*

> ... observar-se-á que não está incluído entre os axiomas (da relação de ordem), a propriedade seguinte, que parece inseparável da noção vulgar de "ordem": "quaisquer que sejam x e y, tem-se que xRy ou yRx". Dito de outra maneira, não se exclui o caso em que dois elementos possam ser *incomparáveis*. À primeira vista, isto pode parecer paradoxal, porém é fácil dar exemplos muito importantes de estruturas de ordem nas quais se apresenta este fenômeno. É o que se passa quando, se X e Y designa H^n partes de um mesmo conjunto, a relação XRY significa "X está contido em Y", ou também quando, se x e y são números inteiros > 0, "x divide y", ou, finalmente, quando, se f(x) e g(x) são funções reais definidas num intervalo a $\leq x \leq$ b, f(x)Rg(x) significa "qualquer que seja x, $f(x) \leq g(x)$". (Bourbaki, in Le Lionnais, 1962, p.43)

Para o enunciado e compreensão dos axiomas que definem as estruturas topológicas (ou topologias) seria necessário um grau de abstração muito superior em relação ao das estruturas algébricas e de ordem, o que fugiria completamente dos objetivos desse trabalho, entretanto, pode-se dar uma idéia geral a seu respeito: "elas dão uma formulação

matemática abstrata às noções intuitivas de *vizinhança,* de *limite* e de *continuidade* às quais nos conduzem à nossa concepção de espaço". (Bourbaki, in Le Lionnais, 1962, p.43).

Para Piaget existem também três tipos de estruturas no organismo humano, as *totalmente programadas* - que possibilitam prever comportamentos que se manifestam em determinadas épocas, como a fase de maturação sexual, por exemplo – as *estruturas parcialmente programadas* – cujo desenvolvimento e construção dependem já em grande parte do meio, como as do sistema nervoso e *as estruturas nada programadas*, as estruturas mentais, que são específicas para o "ato de conhecer". (Ramozzi-Chiarottino, 1988, p.9).

> Sem muito rigor, uma estrutura, segundo Piaget, é um conjunto de elementos relacionados entre si de tal forma que não se podem definir ou caracterizar os elementos independentemente destas relações. Uma estrutura pode ser estática ou dinâmica; quando dinâmica, pode-se falar em "atividade da estrutura". Piaget usa o vocábulo "funcionamento" para aludir à atividade de uma estrutura dinâmica. (Ramozzi-Chiarottino, 1988, p.13).

As estruturas mentais são as que importam ao contexto no qual se situa este trabalho, pois são as responsáveis pela capacidade humana de estabelecer relações lógicas, como A = A; ou, que se A<B e B<C, então A<C, etc. Tais estruturas não são inatas, isto é, dadas *a priori*, ao contrário, elas possuem uma gênese, surgem em "função da construção das estruturas que ocorrem na interação do organismo com o meio" sendo, por conseguinte, "uma conquista do ser humano". (Ramozzi-Chiarottino, 1988, p.14)

É importante destacar que, as estruturas mentais não estão constituídas *a priori* no indivíduo, num sentido cronológico (anterioridade no tempo e no espaço), entretanto, elas constituem a condição de possibilidade de todo conhecimento, isto é, são *a priori* no sentido lógico, daí o fato de se dizer que na teoria piagetiana, o *a priori* é construído. Como as estruturas mentais não são passíveis de serem observadas no organismo, Piaget as descreve através de modelos.

> Piaget, observando o comportamento da criança, percebe, com seus olhos de epistemólogo, uma lógica subjacente às suas ações, ou seja, uma estrutura subjacente ao comportamento. Constata que em qualquer tipo de comportamento – seja no que visa a um fim imediato, seja no puramente lúdico – as ações da criança não se organizam aleatoriamente, mas, ao contrário,

unesp

> supõem sempre uma ordenação, uma seriação e uma classificação ou uma implicação. (Ramozzi-Chiarottino, 1988, p.14)

Assim, qualquer que seja o comportamento humano, a ele está subjacente uma lógica das ações, que não é consciente para o indivíduo, mas que é em tudo isomorfa à lógica das classes e das relações lógico-matemáticas.

As estruturas mentais "funcionam" então, seriando, ordenando, classificando, estabelecendo implicações e permitindo a inserção dos objetos e dos acontecimentos no tempo e no espaço.

Como Piaget estabelece um isomorfismo entre as estruturas matemáticas e o "funcionamento" das estruturas mentais que proporcionam o desenvolvimento da inteligência na criança e o movimento da matemática moderna recomenda que as estruturas matemáticas sejam consideradas como conteúdos a serem trabalhados, alguns, na verdade muitos, autores procuraram estabelecer, *a posteriori,* que o ensino da matemática moderna teria fundamentação na epistemologia genética.

> As três estruturas fundamentais sobre as quais repousa o edifício matemático, segundo o grupo Bourbaki, seriam as estruturas algébricas, cujo protótipo é o *grupo*, as estruturas de ordem, das quais uma variedade, correntemente utilizada hoje (por outro lado, em alguns casos, com excesso), é a *rede*, e as estruturas topológicas. Este número, não é, por outro lado, exaustivo e o desenvolvimento das matemáticas poderia aumentá-lo. Porém, no estado atual de nossos conhecimentos, estas três estruturas são as únicas irredutíveis entre si e desempenham por isso, o papel de estruturas mães.
>
> Ora, é do maior interesse comprovar que se se quer analisar até suas raízes o desenvolvimento psicológico das operações aritméticas e geométricas espontâneas na criança, e, sobretudo, as operações lógicas que constituem suas necessárias condições prévias, se encontra, em todas as etapas, primeiro, uma tendência fundamental à organização de totalidades ou sistemas, fora dos quais, os elementos carecem de significado ou ainda de existência, e em seguida uma distribuição destes sistemas de conjunto segundo três espécies de propriedades que correspondem precisamente às estruturas algébricas, as de ordem e as estruturas topológicas. (Piaget, 1968, p.7).

E mais:

> Outro exemplo do que a análise genética das operações lógico-matemáticas da criança fornece: ao procurarmos o que representam as estruturas mais gerais das operações concretas que se constituem por volta dos 7 anos (tendo por critérios

> psicológicos sua reversibilidade ou caráter involutivo, e os invariantes aos quais essas operações conduzem), encontramos no cerne das classificações espontâneas, seriações, correspondências, produtos cartesianos etc., três grandes estruturas: as primeiras podem ser ditas algébricas, visto que sua reversibilidade repousa sobre a inversão; as segundas são estruturas de ordem com uma inversão por reciprocidade; e as terceiras podem ser ditas topológicas, por estarem fundadas em vizinhanças e no contínuo e não mais em equivalências ou não-equivalências entre quantidades discretas independentes de sua posição. É difícil deixar de reconhecer nesses fatos o indício do caráter "natural" das três estruturas-mãe bourbakistas. (Piaget, 1998, p.219)

E, para finalizar, a recomendação explícita contida no livro *La enseñanza de las matemáticas*, em artigo de Piaget, intitulado *Estruturas matemáticas y operatórias:*

> Na realidade, se o edifício das matemáticas repousa sobre *estruturas*, que correspondem, por outro lado, às estruturas da inteligência, é necessário **basear** a didática matemática na organização progressiva destas estruturas operatórias. (Piaget, 1968, p.27, grifo nosso)

Na citação anterior, o destaque dado à palavra basear não consta no original. A intenção do destaque é mostrar que basear não significa absolutamente que se deva buscar reproduzir artificialmente o desenvolvimento das estruturas da inteligência e, menos ainda, que as estruturas matemáticas devessem integrar o currículo da educação infantil, mas sim, que os conteúdos ministrados deveriam ser compatíveis com este desenvolvimento.

Alguns educadores justificam o trabalho com atividades de classificação, seriação, etc. (as chamadas atividades 'pré-numéricas'), como forma de acelerar o desenvolvimento da inteligência. Piaget, assim se posiciona frente a essa questão:

> (...) o problema aqui em pauta retorna à indagação sobre se existe ou não vantagem em acelerar a sucessão dos estágios do desenvolvimento. É claro que toda educação consiste, de uma forma ou de outra, em semelhante aceleração; mas a questão está em estabelecer até onde ela é proveitosa. Ora, não é sem motivo que a infância se prolonga muito mais no homem que nas espécies animais inferiores; muito provável, pois que se imponha para cada tipo de desenvolvimento uma velocidade inicial, sendo o excesso de rapidez tão prejudicial quanto a uma acentuada lentidão. (Piaget, 1980, p.19).

Outros autores, como Dolle e Bellano, na França; Ramozzi-Chiarottino e Rangel, no Brasil, entre outros, recomendam o uso de tais atividades no que se refere à reeducação.

unesp

O estabelecimento do isomorfismo entre a matemática (bourbakista) e a inteligência, aliado ao fato de que Piaget buscou fundar a lógica na psicologia genética, além do apoio manifestado pelo pesquisador genebrino às mudanças no ensino da matemática, parecem ter motivado a falsa idéia de que os currículos da matemática moderna "reproduziriam" o desenvolvimento da inteligência descrito por Piaget.

É fato que Piaget estabeleceu um isomorfismo entre o desenvolvimento da inteligência e a aquisição do pensamento matemático; também é fato que para o pesquisador, conforme colocado anteriormente, "o edifício da matemática repousa sobre estruturas que são as da própria inteligência", não é verdade, porém, que a matemática moderna estivesse fundada na epistemologia genética de Piaget, porque estavam centradas na estrutura dos conteúdos e não na gênese e história (basta se reportar aos fatores desencadeadores do movimento renovador). Apesar disso, os promotores da reforma, de acordo com Parrat e Tryphon, (in Piaget, 1998), apoiavam-se muito freqüentemente em citações de Piaget.

Ainda hoje, as propostas metodológicas apoiadas em Piaget apresentam muitas das características da matemática moderna – apesar de seu reconhecido fracasso – trocando conteúdos explicitamente apresentados como teoria dos conjuntos, que não tinham outro objetivo que não fosse o de introduzir o aprendiz na linguagem formal da matemática, por atividades de classificação, inclusão de classes ou correspondência biunívoca, como sendo essenciais ao desenvolvimento do conceito de número, mantendo então, os conteúdos e trocando os objetivos e a forma de apresentação.

A opinião de Piaget acerca da matemática moderna expressa no livro *Para onde vai a educação?* deixa claro também seu parecer sobre a "real necessidade" das atividades descritas acima para o desenvolvimento do conceito de número:

> (...) Ora, semelhante situação é tanto mais surpreendente quanto se os professores de matemática se dispusessem a tomar conhecimento da formação psicogenética "natural" das operações lógico-matemáticas, descobririam que existe uma convergência entre as principais operações usadas espontaneamente pela criança e as noções que a ela se tenta inculcar pela abstração. A partir dos 7-8 anos, por exemplo, as pessoas descobrem por si mesmas operações de reunião e de intersecção dos conjuntos, assim como produtos cartesianos, e a partir dos 11-12 anos chegam a partição dos conjuntos". (Piaget, 1980, p. 16)

unesp

Do exposto acima, pode-se auferir que, embora entusiasmado pela matemática moderna, e não poderia ser diferente, já que esta valorizava o estruturalismo dos Bourbaki, que é por diversas ocasiões objeto de referências de Piaget, o mestre suíço demonstrou preocupação com a metodologia (ou ausência dela) utilizada quando da apresentação dos conteúdos. E continua...

> Muito se pode esperar, portanto, da colaboração entre psicólogos e matemáticos para a elaboração de um ensino "moderno" e não tradicional da matemática do mesmo nome, e que consistiria em falar à criança na sua linguagem antes de lhe impor uma outra já pronta e por demais abstrata, e sobretudo levar a criança a reinventar aquilo de que é capaz, ao invés de se limitar a ouvir e repetir. (Piaget, 1980, p. 16 e 17)

Estes e outros posicionamentos do cientista em relação à matemática moderna e a preocupação de Piaget com o ensino da matemática, expressa em diversas ocasiões e registradas em vários textos, motivaram inúmeros trabalhos que buscavam (e buscam) fundamentar na teoria piagetiana, uma didática da matemática.

Além disso, o fato de Piaget concentrar esforços na psicologia "aparenta" uma aproximação de sua obra com a docência, fazendo com que possa parecer "natural" a possibilidade de tal fundamentação.

É interessante notar também que as principais obras que fundamentam em Piaget a didática da matemática que se destinam ao professor e tem influenciado o "fazer matemático" nas escolas brasileiras, diferentemente do que ocorreu com os trabalhos produzidos durante o período da matemática moderna, foram escritas por não-matemáticos, sendo na sua grande maioria psicólogos. Foram encontradas só algumas raras exceções de obras que foram escritas em conjunto por psicólogos e matemáticos. Portanto, abandona-se um extremo, onde os textos eram produzidos apenas por matemáticos, (Matemática Moderna), adotando-se outro, o de textos produzidos quase que exclusivamente por pedagogos e psicólogos (obras fundadas em Piaget), de onde se conclui que a recomendação de Piaget sobre o fato de que "muito se pode esperar da colaboração entre psicólogos e matemáticos...", citada anteriormente, não é observada pelos pesquisadores.

unesp

1.3 APLICAÇÕES DA TEORIA PIAGETIANA AO ENSINO DA MATEMÁTICA: UMA DISCUSSÃO SOBRE O CASO PARTICULAR DO ENSINO DO NÚMERO

Nenhum aspecto da matemática foi tão analisado "à luz da teoria piagetiana" quanto o "ensino" do número. Incontáveis pesquisas realizadas em diferentes partes do mundo, com crianças de culturas variadas corroboram os resultados encontrados por Piaget e seus colaboradores no que se refere à gênese do número na criança. Diversos autores de vários países buscaram as implicações pedagógicas de tais resultados e publicaram obras de caráter didático (destinadas ao professor ou ao aluno) a respeito da "construção do número" e, conseqüentemente do ensino de matemática nas séries iniciais.

A preocupação com uma metodologia específica para o trabalho pedagógico com o número só se dá efetivamente a partir de 1970. Antes disso, o "ensino" de números se prendia a uma repetição intensa dos algarismos, com folhas e folhas de caderno preenchidas com o algarismo 1, seqüências intermináveis de 2, 3, etc. A seqüência numérica verbal, também era repetida à exaustão e a contagem estimulada (e exigida) o tempo todo. Os programas das décadas de 50 e 60, estabeleciam como meta, o estudo concreto dos números de 1 a 5, depois de 5 a 10, depois de 10 a 20. A formação e a decomposição em unidades dezenas e centenas, nome e escrita. Para a primeira série, os números de 1 a 100, dezenas, dúzias. Contar de 2 em 2, de 10 em 10, de 5 em 5. Exercícios e problemas de adição, subtração (com números de um algarismo e depois de dois algarismos), multiplicação e divisão por 2 e por 5.

O professor apresentava os números aos alunos, um após o outro, até o 5 primeiramente, tomando o cuidado de fazer a identificação entre o símbolo numérico e alguma coleção, por exemplo, 1 = o; 2 = oo; 3 = ooo, e assim por diante, depois, de 5 a 10. Depois de muito treino, o caminho inverso deveria ser percorrido, ou seja, dar o número e pedir que se apresente por desenhos a quantidade representada. Tratava-se a seguir, de sua representação a partir do número anterior, a escrita cifrada, o nome e a escrita do nome do número, etc.

O número era transmitido como um conhecimento social, se comunicava um saber já constituído. O número se confundia com a coleção, sendo ao mesmo tempo, um signo, uma

palavra, uma coleção. A contagem era enfatizada através da memorização da seqüência numérica. Na verdade, o que se buscava era ensinar, através da apresentação dos números como objetos pré-existentes, dos quais se pode apresentar determinadas características que o aluno deve conhecer e memorizar. Nesta perspectiva, a aprendizagem foi efetiva quando o aluno for capaz de reconhecer o número em seus diferentes aspectos, conhecer seu nome, seu algarismo, seu antecessor e seu sucessor. O sistema de numeração decimal era posto como algo imutável e perene e não como um conjunto de regras e símbolos de caráter arbitrário.

No Brasil, praticamente inexistiam textos didáticos de ensino de matemática para as séries iniciais até o advento do movimento da matemática moderna. A partir daí, surgem textos didáticos (muito mais voltados a auxiliar a ação do professor quase sempre despreparado para o trato da matemática estruturada), e livros de orientação ao professor.

Aqui, entretanto, o número praticamente sai de cena, sendo substituído pelas atividades preparatórias para a construção do conceito de número. Já não se fala mais em "ensinar" número, ele já não é mais visto como um objeto pré-existente, mas sim como algo que para ser construído necessita de pré-requisitos, e são tais pré-requisitos que passam a dominar os programas a partir de então, a ponto do educador francês Brissiaud, haver dito que a reforma dos anos 1970, proposta "sob a bandeira da Matemática Moderna, havia conseguido desterrar o número da escola infantil francesa". (Duhalde e Cuberes, 1998, p.142).

Como já mencionado anteriormente, a reforma originada do movimento da matemática moderna, foi primeiramente uma reforma de conteúdos. Buscava-se então uma nova concepção de número, como uma propriedade vinculada a conjuntos. Tal concepção ainda hoje está presente, por exemplo, na proposta curricular da CENP, Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, elaborada em 1991, onde na página 23 traz, a respeito dos objetivos para o trabalho com números:

> No Ciclo Básico, espera-se que o aluno:
>
> Perceba que cada número natural designa uma coleção de coleções com a mesma quantidade de elementos e que ocupa um lugar na série numérica. (CENP, São Paulo, 1991, p.23).



As atividades recomendadas eram as de classificação e seriação e o emprego sistemático da correspondência termo a termo. Fala-se agora em *noção de número natural.* Segundo publicação do Institut National de Recherche Pédagogique, ERMEL, de Paris, de 1991, o programa do Curso Preparatório (CP), de 1970, o equivalente francês da pré-escola brasileira, apresenta: Atividades de classificação e de seriação; Noção de número natural; Nomear e escrever números; Comparar dois números e Soma de dois números, e destaca os comentários que aparecem no referido programa:

> É através das diversas manipulações de objetos que as crianças elaboram pouco a pouco a noção de número natural. É necessário compreender bem que o número natural não é um objeto, nem uma propriedade vinculada a objetos, mas sim uma propriedade vinculada a conjuntos.
>
> (...) A noção de número natural como propriedade de um conjunto aparecerá na medida em que se poderá estabelecer correspondência termo a termo entre conjuntos...
>
> (...) O emprego sistemático da correspondência termo a termo permite classificar os conjuntos e atribuir a cada classe um número: assim, a classe de todos os conjuntos que têm objetos em quantidade igual aos dedos da mão define o numeral "cinco".
>
> (...) Insistir-se-á sobre o sentido das expressões: igual a , mais que, menos que.
>
> Vários elementos destes comentários se referem à escola maternal
>
> Tais atividades de classificação (aliás, precisa-se que elas devem incluir objetos variados na forma, na cor, na matéria, nos tamanhos), praticadas desde a escola maternal deverão ser retomadas nas primeiras semanas do CP (as propriedades sendo ou não de ordem sensorial)
>
> (...) Convém frisar a importância, para a elaboração da noção de número natural, das atividades de classificação, de seriação, de correlação termo a termo realizadas na escola maternal. (ERMEL, 1991, p.4)

Fica difícil não concordar com Brissiaud, frente a um programa com este, onde a ênfase está, com certeza, nas atividades, que para os formuladores, *antecedem* a noção de número. Não se imagina, num programa como este, que a contagem possa ser, um fator importante para a construção do conceito de número e fica muito claro que a classificação e a seriação *antecedem* hierarquicamente ao número no desenvolvimento infantil.

Piaget (1980), analisando o insucesso escolar das crianças em relação à matemática destaca que a causa principal possa ser uma passagem demasiado rápida da estrutura qualitativa

unesp

dos problemas (por simples raciocínios lógicos, mas sem a introdução imediata das relações numéricas e das leis métricas) para a esquematização quantitativa ou matemática, com a utilização de algoritmos e equações.

> Nesse particular, admitiríamos sem dúvida algumas aptidões diferenciais que opõem os espíritos estritamente dedutivos (a partir de determinada idade) aos espíritos concretos; todavia, mesmo no campo da Matemática, muitos fracassos escolares se devem àquela passagem muito rápida do qualitativo (lógico) para o quantitativo (numérico).
>
> A visão otimista, bastante otimista mesmo, que nos forneceram nossas pesquisas sobre o *desenvolvimento das noções qualitativas de base* que constituem ou deveriam constituir *a infraestrutura de todo ensino científico elementar* ...(Piaget, 1980, p.14)

Tais posições certamente influenciaram as propostas curriculares e pelo fato de serem consideradas isoladamente, sem a análise de todos os estudos piagetianos acerca da matemática e do número em particular, talvez tenham de fato contribuído para, como diz Brissiaud, afastar o número dos currículos estabelecidos pela "matemática moderna".

As concepções de aprendizagem que influenciaram a implantação da reforma da matemática moderna são inteiramente inspiradas pelas idéias estruturalistas e buscavam a aproximação entre a matemática ensinada na escola e a matemática dos cientistas, entretanto, como já citado anteriormente, os trabalhos de Piaget foram amplamente invocados, com o papel da ação nos processos de aprendizagem sendo largamente frisados.

É preciso reconhecer, que no plano das concepções de aprendizagem não há grandes mudanças em relação ao período anterior à reforma: continua-se a primeiramente aprender conhecimentos (neste ponto, estruturas, relações ou conceitos), para posteriormente aplicá-los na resolução de problemas. É a matemática moderna sendo ensinada via modelo da matemática tradicional. Deve-se destacar, entretanto, o esforço de Dienes, o qual prega uma aprendizagem matemática ativa e que influenciou muito esse período ao descrever as condições do processo de abstração das estruturas matemáticas, que para ele passa por seis etapas, as quais podem, segundo o autor, serem favorecidas pelo uso de jogos, em particular, com os blocos lógicos.

unesp

Para Piaget (1980), Dienes teve o mérito de compreender, através da sua experiência como matemático e pedagogo, que a "compreensão da matemática elementar decorre da construção de estruturas inicialmente qualitativas", sendo que quanto mais for facilitada a construção de tais estruturas, em qualquer nível, tanto mais estará sendo favorecido o ensino da matemática. (Piaget, 1980, p.9).

> Dienes estabelece uma clara distinção entre o pensamento analítico e o pensamento construtivo. Na primeira espécie de pensamento há uma consciência de todas as possíveis relações lógicas, de modo que os conceitos são formulados explícita e exatamente antes de serem usados. Por outro lado, no pensamento construtivo, os conceitos são formados a partir de um amplo quadro geral, sem que as crianças percebam claramente todas as relações possíveis. (Lovell, 1988, p.46)

Segundo Lovell (1988), Dienes no desenho e na utilização de seu material é influenciado por três hipóteses que ele acredita possuir uma "validade aparente *a priori*", a saber:

> Quanto maior for o grau de generalidade em que o conceito é formado, mais amplo é o campo em que pode ser aplicado;
>
> Se um conceito envolve uma quantidade de variáveis, para garantir um entendimento geral, todas as variáveis têm de ser variadas;
>
> Consegue-se um conceito mais rapidamente se o indivíduo receber muitas impressões perceptuais diferentes (visuais, táteis, cinestésicas) que as ilustrem. (Lovell, 1988, p.46).

Para Lovell (1988), as premissas de Dienes levam a conclusão de que a criança "tem mais probabilidade de inicialmente formar conceitos intuitivamente sem estar consciente das relações entre estes e outros conceitos", o que contrastaria com a opinião de Piaget a respeito. (Lovell, 1988, p.48).

Retomando a discussão acerca da "matemática moderna", particularmente ao que se refere à questão "novos conteúdos e métodos tradicionais", assim se manifestou Piaget:

> Com referência, por exemplo, ao ensino da "Matemática moderna", que constitui progresso verdadeiramente extraordinário em relação aos métodos tradicionais, a experiência é com freqüência prejudicada pelo fato de que, embora seja "moderno" o conteúdo ensinado, a maneira de o apresentar permanece às vezes arcaica do ponto de vista psicológico, enquanto fundamentada na simples transmissão de conhecimentos, mesmo que se tente

> adotar (e bastante precocemente, do ponto de vista da maneira de raciocinar dos alunos) uma forma axiomática. (Piaget, 1980, p.16)

Wadsworth (1984) atribui à metodologia tradicional para os conteúdos novos, o fracasso da "matemática nova", nos EUA:

> A tentativa de se implementar a "matemática nova" nos Estados Unidos durante o final da década de 50 e na de 60 foi um esforço no sentido de fazer com que as crianças aprendessem um conjunto de conceitos matemáticos negligenciados pela "matemática velha". O fracasso da "matemática nova" nos Estados Unidos em grande escala provavelmente se deve ao fato de que, embora o conteúdo do ensino da matemática de certo modo mudasse, os métodos de ensino não mudaram. (Wadsworth, 1984, p.204)

Atualmente, as pesquisas apontam para a importância do processo de contagem para a construção do conceito de número, bem como o papel importante desempenhado pelo conhecimento de número que a criança já tem antes de entrar na escola.

Porém, as aplicações pedagógicas destinadas ao ensino de matemática, na sua maioria, continuam, (embora isto não se depreenda da obra de Piaget), a enfatizar o estudo das noções consideradas pré-numéricas, como a classificação e a seriação, seguido da noção de número, e depois, freqüentemente ao mesmo tempo, da numeração e da adição, não levando basicamente em consideração o fato da composição aditiva do número.

São tais análises que se pretende aprofundar a seguir.

Uma primeira constatação é que, o trabalho até aqui realizado, se não pode ser considerado pronto e acabado - afinal, nada é pronto e acabado em educação – apesar de apresentar sérios equívocos, tem pelo menos um resultado positivo expressivo. Praticamente não se "fala" mais em "ensino" do número, como transmissão social. É raro encontrar-se atualmente propostas curriculares e livros didáticos que tratem de "ensino de números". A maioria fala da "construção do conceito de número", carregando, portanto, explícita ou implicitamente o fato inequivocamente demonstrado por Piaget, de que o número é construído pela criança.

A questão é, até que ponto as principais obras sobre "a construção do conceito de número na criança", que tanto tem influenciado não só a elaboração de planos curriculares, de

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

textos didáticos e paradidáticos e, particularmente, a prática pedagógica do professor, especialmente mediante cursos de "capacitação" ofertadas pelas Instituições de Ensino Superior, refletem efetivamente a teoria de Piaget, em particular a que está exposta no livro *"A gênese do número na criança"* e, mais em particular ainda, na terceira e decisiva parte deste texto. Nesta parte, Piaget coloca em evidência que a classe, a relação assimétrica e o número são os três, manifestações complementares da mesma construção operatória, parte esta complexa e cuja compreensão exige obstinados esforços.

> É no momento em que a criança havendo conseguido tornar móveis as avaliações intuitivas dos primórdios, atingindo o nível da operação reversível, que ela se torna **simultaneamente** capaz de incluir, seriar e enumerar. (Piaget, 1981, p.253)

Tal análise é pertinente, uma vez que de uma obra tão extensa (e densa), como a de Piaget, é possível se destacar algumas frases de seus contextos, ou ler apenas algumas obras de maneira isolada, sem a noção do todo e dos objetivos do trabalho do autor, e a partir daí, fundamentar um trabalho, caracterizá-lo como piagetiano, sem que este reflita, necessariamente, o pensamento do mestre genebrino.

As principais obras acerca da construção do conceito de número que têm influenciado o ensino de matemática no Brasil deixam evidentes "a conservação de quantidades", "a invariância dos conjuntos" e a "correspondência termo a termo (principalmente a cardinal), passando ao largo da terceira parte do livro *A gênese do número na criança*, que trata das "composições aditivas e multiplicativas", sendo que as que a levam em consideração apenas aplicam seu conteúdo às operações, particularmente, adição e subtração e às tabuadas, sem retratar sua importância na construção do número.

Desta forma, tem-se uma idéia de construção seqüencial e linear, com o número surgindo no ápice de uma cadeia de construções, não permitindo se ter clareza do movimento, imbricações e da solidariedade de construção entre classes, séries e número, com um conceito dependendo do outro para se efetivar.

> Em vez de derivar o número da classe, ou o inverso, ou considerá-los como radicalmente independentes, pode-se efetivamente concebê-los como complementares e a se desenvolver solidariamente, embora em duas direções diferentes. (Piaget, 1981, p.224)

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

> ...a classe, a relação assimétrica e o número são, os três, manifestações complementares da mesma construção operatória aplicada, seja às equivalências e diferenças reunidas. Com efeito, é no momento em que a criança, havendo conseguido tornar móveis as avaliações intuitivas dos primórdios, atinge assim o nível da operação reversível, ela se torna simultaneamente capaz de incluir, seriar e enumerar. (Piaget, 1981, pág 253)

Como o movimento originado pela complementariedade e desenvolvimento solidário só fica evidente na terceira parte do livro, as obras que assumem, sem maiores detalhes que o número é a síntese da seriação e da classificação parecem basear-se apenas nas duas partes inicias, que tratam da conservação das quantidades e da correspondência termo a termo.

A seguir, algumas colocações:

> O número, de acordo com Piaget, é uma síntese de dois tipos de relações que a criança elabora entre os objetos (por abstração reflexiva). Uma é a ordem e a outra é a inclusão hierárquica. (Kamii, 1998, p.19)

> (...) Assim, (referindo-se a Piaget), assegurava que as crianças têm que construir as operações lógicas de classificação e seriação como passo prévio a construir o número e que este seria a síntese entre tais operações. (Duhalde e Cuberes, 1998, p.37).

> Para consolidar-se, o número precisa de uma estrutura operatória de conjunto, e essa estrutura mais global é elaborada pela síntese dessas estruturas mais simples que são a inclusão de classes(...) e a seriação... (Dornelles, 1998, p.39)

> O número é, pois, um novo tipo de relação que se constitui pela síntese, por assimilação recíproca, destas duas relações. (Rangel, 1992, p.102). (referindo-se às relações simétricas, que dão origem à formação da estrutura lógica de classificação e as assimétricas, que dão origem à seriação).

> O número operatório implica, pois, a síntese recíproca dessas duas estruturas lógicas: classificação e seriação. (Rangel, 1992, p.131).

> A noção de número, por exemplo, decorre, espontaneamente, do "cruzamento" das classes com as séries ... (Brasil, 1977, p.25).

> Conclui-se, pois, que o número constitui uma síntese de seriação e da inclusão e exige o domínio dos seguintes princípios: constância, associatividade e reversibilidade. (Goulart, 1989, p.110).

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

> É necessária uma outra operação mental antes que possa ser formado o conceito de número – ou seja, a capacidade de arranjar uma série de itens de acordo com suas diferenças. (Lovell, 1988, p.42/43).

Piaget também assim se expressa algumas vezes (*Psicologia e Epistemologia* - pág. 18, e *Para onde vai a educação?* - pág. 9 e 10), e mesmo nas conclusões do livro *"A gênese do número na criança"*, embora em outras ocasiões ele tenha deixado claro que a síntese da classificação e da seriação origina a seqüência ou sucessão numérica (e não o número), proporcionando a generalização. Na citação a seguir, os grifos não existem no original.

> ... o número se organiza, etapa após etapa em solidariedade estreita com a elaboração gradual dos sistemas de inclusões (hierarquia das classes lógicas) e de relações assimétricas (seriações qualitativas) com a sucessão dos números constituindo-se, assim, em síntese operatória da classificação e da seriação. (Piaget, 1981, pág 12, grifos inexistentes no original.)

É evidente que numa abordagem mais simples (sem os "rigores formais") pode-se dizer que número é a síntese da classificação e da seriação e que a definição de número não vai interessar à criança. Porém, tal como expressada nas citações acima, a definição apresenta o inconveniente de sugerir uma construção linear do tipo: primeiro vem a classificação e a seriação, depois vem o número.

Vale destacar, que Rangel, menciona o fato da construção solidária de número, classe e série, nos últimos parágrafos do capítulo destinado à construção do número:

> Piaget explicita que, apesar do número ser produto da classe e da relação assimétrica, isto não implica que as estruturas lógicas se consolidem anteriormente à formação do número. Ao contrário, o número também é necessário ao acabamento das estruturas lógicas. Assim, tanto a classe como a série se concluem ao mesmo tempo que o número, e sobre ele se apóiam tanto quanto o número se apóia sobre tais estruturas da lógica. (Rangel, 1992, p.131)

Apesar dessa ressalva (bastante sucinta em relação ao que foi dedicado ao estudo das relações simétricas e assimétricas), e de uma apresentação bastante completa acerca da natureza lógica do conhecimento lógico-matemático, a autora valoriza o que ficou conhecido como atividades pré-numéricas em sala de aula.

unesp

O inconveniente de tal definição é a sugestão de linearidade, de construção hierárquica, um *a priori* lógico, como se a classificação e seriação tivessem de estar concluídas enquanto estruturas operatórias para então, surgir o número, o que não é verdade. Para atingirem o *status de* estruturas operatórias, *os três, número, classificação e seriação,* desenvolvem-se solidariamente, num processo de interdependência, conforme será tratado com detalhes no capítulo III.

É importante deixar claro que sucessão numérica e contagem não designam a mesma coisa. A contagem significa apenas estabelecer uma correspondência biunívoca nome objeto sem necessariamente entender que o último nome falado corresponde ao total da coleção, o que pode ser feito sem que tenha compreensão efetiva de todos os aspectos do número. A sucessão numérica (enumeração), por outro lado, envolve, além dos aspectos cardinal e ordinal do número, a compreensão da composição aditiva do número, a conservação e principalmente o fato de que se pode conhecer todos os números sem que seja necessário conhecê-los individualmente.

Existem mais dois pontos que são bastante questionados nas aplicações existentes da teoria piagetiana ao ensino da matemática. Um deles, é o trabalho com "conjuntos"e o outro, diz respeito à ênfase exagerada em não se utilizar a contagem na comparação de coleções de objetos. Um exemplo de ambos pode ser visto nas atividades descritas a seguir:

Atividade extraída do livro *"Aplicações da teoria de Piaget ao ensino da matemática"*, de Luiz Alberto S. Brasil, com a colaboração de Ana Elizabeth e Lauro de Oliveira Lima, Forense-Universitária, 1977, páginas 47 a 52.

> Capítulo III
>
> Números
>
> E.3.01 Prendam em cada lápis uma borracha (Estamos nos referindo aos 6 lápis e 4 borrachas do material empregado no Capítulo anterior).
>
> E.3.02 O conjunto dos lápis tem mais elementos que o conjunto de borrachas? Foi por isso que ficaram lápis sem borracha?
>
> E.3.03 Qual dos dois tem mais elementos, o conjunto de caixas ou o conjunto de lápis?
>
> *Nota:* Fazer questão de uma resposta com base na correspondência, um a um, entre os elementos dos dois conjuntos, colocando um lápis dentro de cada caixa, o aluno notará que faltam caixas e que, portanto, há mais elementos no conjunto de lápis que no de caixas.

unesp

É característica a nota, onde se coloca que se deve fazer questão da resposta com base na correspondência, *desestimulando* veementemente a contagem e não proporcionando aos alunos que já a conhecem (o que com certeza acontece na sala de aula), o uso de seus conhecimentos anteriores, desvinculando completamente a atividade da noção prévia que as crianças já têm do número, na seqüência das atividades, a recomendação para se evitar a contagem, aparece de forma explícita:

> *Material:* Um monte de grãos de milho e outros de grãos de feijão.
>
> E.3.04 Arrumem sobre a mesa, formando pares, composto cada um deles de um grão de milho e outro de feijão.
>
> E.3.05 Qual dos dois conjuntos tem mais elementos?
>
> *Nota:* Evitar a resolução do problema pela contagem dos grãos, caso alguns dos alunos saibam contar. Exigir sempre o emparelhamento dos elementos dos dois conjuntos, em todos os problemas semelhantes.

E a situação se agrava na seqüência das atividades, quanto são definidos conjuntos equipotentes para crianças que, presume-se, pelo nível das atividades, pertençam à educação infantil:

> E.3.06 Qual dos conjuntos tem mais elementos, o dos alunos ou o das cadeiras?
>
> E.3.07 Coloquem uma borracha dentro de cada caixa (empregar o material indicado no capítulo anterior).
>
> E.3.08 Nenhuma caixa ficou vazia? Nenhuma borracha ficou sem uma caixa?
>
> Informação: Quando há uma "correspondência um a um" (fazer com gestos de emparelhamento) entre os elementos de dois conjuntos, dizemos que eles são Equipotentes.
>
> E.3.09 Coloquem na caixa branca um conjunto de caroços equipotente ao dos lápis que estão sobre a mesa.
>
> Nota: Exigir a prova pelo emparelhamento, evitando a contagem.

unesp

O autor continua com sugestões de atividades para a verificação de conjuntos equipotentes, inclusive com jogos. É importante notar que em nenhum momento as atividades sugerem algo parecido com a primeira noção que tanto histórica quanto psicogeneticamente, se tem de número, ou seja "o número de contar".

Com o intuito de atingir a definição russeliana de número, como uma propriedade de classes, L. S. Brasil continua com uma seqüência de atividades classificadas como *Exercícios para abordar a noção de número*, onde define conjuntos *unitários* e conjuntos *pares*, para só então falar *número de elementos de um conjunto*, e então dizer que "a figura 1 serve para substituir a palavra *Um :* assim, quando perguntarmos quantos elementos tem um conjunto unitário, vocês podem desenhar a Fig. 1." (p.52).

É preciso ficar claro, que o exemplo apresentado anteriormente, não é, absolutamente uma situação isolada, ao contrário, é um exemplo típico do "casamento" entre a matemática moderna e a epistemologia genética. De acordo com a teoria piagetiana, a criança não seria capaz de assimilar conceitos sobre o número, ao abstrair que diversos conjuntos têm o "mesmo número de elementos", pois isto seria o mesmo que abstrair a cor ou o cheiro de um objeto, conhecimentos de natureza física, os quais são obtidos por abstração empírica. Para o conhecimento do número, por sua vez, há necessidade de abstração reflexiva, característica do conhecimento lógico-matemático, que envolve a construção de relações entre os objetos.

O próprio mestre assim se posiciona no que se refere ao ensino de conjuntos, em entrevista a pesquisadores da AFCED – Associação Francesa dos Pesquisadores em Didática, e reproduzida no livro *"Sobre a Pedagogia"*, organizado por Parrat e Tryphon, e publicado no Brasil, em 1998:

> F.H. - A noção de conjunto ocupa um lugar fundamental na síntese bourbakista. Isso se explica pela necessidade de esclarecer com precisão quais entes nos interessam (por exemplo, não se pode definir uma relação sem antes precisar o conjunto de partida e o conjunto de chegada). Temos a impressão de que as coisas acontecem de maneira totalmente diferente no espírito da criança. Nele, a noção de conjunto apresenta-se quando queremos falar "coletivamente" de certos entes. Por exemplo, passar dos alunos considerados individualmente, para a classe ou a escola. Até onde sabemos, encontram-se nos trabalhos de sua escola muito poucas alusões à noção de conjunto enquanto tal.
>
> O senhor poderia esclarecer suas concepções?

> Piaget - Acredito que os senhores têm toda a razão e que a noção de conjunto própria aos matemáticos surge tarde na criança e apresenta-se sob uma forma totalmente outra: quando lhes falamos de conjuntos, elas pensam simplesmente em coleções, em indivíduos considerados coletivamente. Nesse caso, eu não falaria de conjuntos mas de classes. (...) Assim, a um ver, o conjunto supõe a construção do número e, sobretudo, a conservação do número. (Piaget, 1998, p.225)

Assim como Dienes foi a grande referência para os professores de matemática nas décadas de sessenta e setenta, Constance Kamii é a escritora piagetiana que mais influenciou e ainda influencia, os professores da educação infantil e do ensino fundamental brasileiro e de toda a América Latina. Uma prova contundente deste fato é que o exemplar do livro *A criança e o número* pesquisado para este trabalho, faz parte da 25ª edição do mesmo.

Seu livro possui dois méritos indiscutíveis: o primeiro é, sem dúvida, o fato de que a partir do *A criança e o número*, os professores passam a acreditar que não é possível ensinar número, e o outro, o de trazer para discussão, dentro do ensino da matemática, questões de natureza geral da educação piagetiana, como por exemplo, a que se refere ao objetivo geral da educação como sendo o de formar indivíduos autônomos. Este último aspecto reveste-se da maior importância aos professores de matemática, para quem, a possibilidade da matemática promover, ou apenas colaborar com, o desenvolvimento da autonomia é algo que jamais imaginaram ser possível, face às peculiaridades da disciplina, com seus conteúdos áridos, aparentemente hierarquicamente cumulativos e exatos, que parecem não proporcionar as discussões de temas sociais.

Entretanto, a respeito da construção do número propriamente dita, Kamii pouco se aprofunda. A definição que apresenta, dá idéia de uma construção linear do número, porém, além da esquematização que se celebrizou, onde mostra a construção do número, como simultânea em seus aspectos ordinal e cardinal, ela recomenda exaustivamente, que se deva proporcionar às crianças, a oportunidade de colocar todos os objetos em relação, não especificando, todavia, se o significado do termo relações para ela é o da linguagem comum, ou o piagetiano, onde só existem dois tipos de relações, as simétricas, que dão origem à classificação e a assimétrica, de onde se origina a seriação. Deve-se ressaltar, todavia, que os exemplos de relações por ela apresentadas, referem-se a diferenças e semelhanças, sugerindo, portanto, as relações simétricas e assimétricas. (Ver Kamii, 1998, p.14 e 15).

unesp

Sendo neste sentido que a autora utiliza a palavra relações, pode-se dizer, que ela espera uma construção seqüencial. Entretanto, as atividades propostas para favorecerem a construção do número, enfatizam a correspondência termo a termo e a conservação de quantidades, sempre, é bom que seja frisado, objetivando mais para o desenvolvimento da autonomia. Desta forma, Kamii parece prender-se muito mais ao "estado" (no que se refere à conservação), do que ao "processo" e poder-se-ia dizer, então, de maneira geral, que da teoria constante no livro *A gênese do número na criança*, de Piaget, o livro de Kamii, não reflete nada além da introdução da primeira parte, onde o autor evidencia que não existe número e nem mesmo quantidade, sem conservação.

Mediante um "olhar piagetiano", a recomendação de colocar tudo em relação, parece sugerir as atividades pré-numéricas de classificação e seriação, consideradas desnecessárias pelo próprio Piaget, entretanto, em nenhum momento a autora o faz explicitamente.

Face à insistência de Kamii nas atividades de "colocar em correspondência" (a maioria, provocada), fica difícil não remontar ao empirismo, ou seja, o sujeito após haver "aprendido através de uma sucessão de experiências, a possibilidade de tornar a encontrar sempre a mesma correspondência" imagina, então, "mentalmente estas experiências até considerar seu resultado como necessário?" (Piaget, 1975, p.72).

A autora não defende obviamente o empirismo e nem a citação de Piaget se refere ao trabalho de Kamii, mas, sim, aos argumentos que Mach e Rignano utilizam para justificar a concepção de número como experiência mental conforme será tratado no capítulo III, todavia, o paralelo quase que se impõe.

Quanto ao que se refere à contagem, Kamii (1998), assim se expressa:

> (...) Da mesma forma, contar é uma alegria para a maioria das crianças escolarizadas de 4 a 6 anos, e se as crianças querem aprender a contar, não há porque lhes recusar este conhecimento. Contudo, o professor deve conhecer a diferença entre contar de memória e contar com significado numérico. (Kamii, 1998, p.40)

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

Entretanto, ao especificar os princípios que, segundo ela, devem nortear o "ensino" do número, Kamii ressalva: "encorajar a criança a quantificar objetos logicamente e a comparar conjuntos (em vez de encorajá-las a contar)". (Kamii, 1998, p. 48).

Da mesma forma como o fazem os demais autores, Kamii (1998), por exemplo, enfatiza o uso de situações do cotidiano, como distribuir pratos e talheres à mesa, o que é uma atividade apoiada por Piaget e, também enfatiza a utilização de jogos para o trabalho com as atividades "pré-numéricas", o que não é de todo avalizado por Piaget, conforme contido em entrevista já citada:

> P.J.- No que concerne justamente ao real, o senhor não acha que a atividade de jogo consiste, de fato, em introduzir um real que é menos complexo que o real que queremos examinar?
>
> *Piaget* - Sim, é totalmente artificial.
>
> P.J. - Mas o senhor acha que é útil?
>
> Piaget - Não.
>
> P.J. – O senhor acha que é preciso atacar o verdadeiro real, enfim um real que vamos buscar no que vemos fora de nós, sem fabricar um real específico.
>
> *Piaget* – Eu seria mais partidário de pensar no real tal como ele é. Existem situações tão variadas, que podemos fazer de tudo.
>
> P.J. - Mas ele é muito complexo, o real tal como ele é.
>
> *Piaget* – Mas nisso consiste seu interesse. O aluno teria todo interesse em compreender que a complexidade do real impede dominar matematicamente as questões de antemão, e que a simplicidade dos dados permite raciocínios rigorosos. Isso equivale a fazer compreender a natureza hipotético-dedutiva da matemática, e isso é bem mais compreensível utilizando exemplos do real.
>
> P.J. - Quando fornecemos um jogo, poderíamos dizer que apagamos toda a etapa que consiste em fazer essa primeira simplificação, que, em última instância, é a chave de todos os problemas da realidade e que a torna compreensível.
>
> Piaget – Sim. (Piaget, 1998, p.233)

Aparentemente, a resposta de Piaget é "contrária" ao uso de jogos, porém não se deve tirar tal conclusão apenas da entrevista anterior, onde que trata especificamente da contribuição do jogo na compreensão do real. Em situações tais, que, em outras palavras, seriam às referentes à construção dos "conteúdos", é que o uso de jogos não seria recomendável, sendo preferível a utilização de exemplos do real. Em outros textos (embora não referentes a situações escolares), o autor destaca a importância do jogo no desenvolvimento infantil,

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

de forma que, a entrevista teria sido bem mais elucidativa, se o autor fosse questionado a respeito de quais tipos de jogos seriam ou não auxiliares do processo de aprendizagem, quais suas possíveis utilizações e com quais objetivos.

Embora de fácil e agradável leitura, simples, proporcionando às pessoas que nunca tiveram um contato maior com o pensamento de Piaget, acesso às noções de conhecimento como processo, de autonomia como objetivo da educação, e particularmente, de como se constrói o conhecimento matemático, o livro não apresenta, nem de longe, o complexo processo necessário para o desenvolvimento da noção de número na criança, descrito por Piaget.

É importante deixar bem claro que não se está negando aqui que o número se construa solidariamente com a seriação e a classificação e mais ainda, que o número possa ser *considerado* como uma "síntese" dessas duas estruturas, ou seja, o número é síntese operatória da seriação e da classificação, mas **não é só** a partir daí que ele existe.

Retornando ao tema "contagem" interrompido para esses breves comentários acerca do livro *A criança e o número*, de Kamii, importa esclarecer que Piaget, em nenhum momento se posiciona contra a contagem ou o seu uso, o que ele freqüentemente mostrou, através de suas pesquisas, é que uma criança pode contar sem entender a natureza dos números que ela nomeia com competência, e só quando estas crianças acreditam que a contagem possa ser um modo "confiável" para a solução de um problema específico, é que se pode ter uma razoável certeza de que ela compreende o sistema que a ajudou. Em outras palavras, o que Piaget queria alertar era para o fato de que o que o ensino tradicional considerava como realizado no que se refere ao número, ou seja, o fato da criança contar com propriedade, não era garantia de que a mesma tivesse o conceito de número.

Não é possível se ter certeza das razões que levaram os pesquisadores a se fixarem nas partes iniciais do texto de Piaget, é possível, porém, levantar hipóteses. A primeira delas poderia ser a "relativa" facilidade de compreensão (a maioria dos textos destinam-se a professores da pré-escola ou das séries iniciais) e a outra, poderia ser devido ao fato de que as atividades sugeridas como introdutórias ao estudo do número em quase nada diferenciam (a não ser pela ausência de formalização) das atividades do tempo da matemática moderna.

unesp

O que importa, porém, é que as aplicações pedagógicas destinadas ao ensino da matemática, na sua maioria, continuam, (embora isto não se depreenda da obra de Piaget), a enfatizar o estudo das noções consideradas pré-numéricas, como a classificação e a seriação, seguido da noção de número, e depois, freqüentemente ao mesmo tempo, da numeração e da adição, não levando basicamente em consideração o fato da composição aditiva do número.

1.4 PARA ALÉM DE PIAGET?

O livro *A gênese do número na criança* foi publicado em 1941, tendo sido, nesse texto, a primeira vez que se propunha, a partir de observações precisas, apresentar uma explicação teórica coerente da construção do número na infância. O interesse despertado pela obra, desde sua publicação, jamais diminuiu, apesar ou por causa, das críticas teóricas que o livro contém e dos novos fatos experimentais nele apresentados.

As atuais pesquisas demonstram que o estudo da relação entre o desenvolvimento dos conceitos matemáticos e a aquisição dos procedimentos numéricos é essencial, tanto para uma teoria de desenvolvimento cognitivo quanto para o ensino.

As discussões sobre esse tema estão centradas, nos estudos genéticos, principalmente sobre a relação entre a contagem e a construção do número, aspecto não explorado na obra de Piaget e Szeminska.

Os trabalhos mais recentes, por outro lado têm acentuado a importância da contagem na construção do número e, todos, sem exceção, se referem aos resultados de Piaget e seus colaboradores, para fundamentar, complementar ou, mesmo, refutar.

Como conseqüência da interpretação de uma construção linear do número como síntese da classificação e da seriação (em torno dos sete anos), passou-se a acreditar que o número só existe a partir deste momento e então, as atividades numéricas (particularmente a contagem), perderam o sentido na educação infantil, sendo substituídas por atividades essencialmente lógicas.

Tal situação motivou os pesquisadores a investigarem a existência de formas primitivas de número em crianças muito pequenas e, em virtude da confirmação desta hipótese (desde os

níveis mais elementares já está presente uma quantificação "bruta"), dirigiram seus estudos para a verificação do papel desempenhado pela contagem na construção do número.

Muitas pesquisas foram realizadas e seus resultados confirmaram a hipótese de que as crianças, desde muito pequenas, têm noção de número. Duhalde e Cuberes (1998), relatam que, as investigações realizadas por Starkey e Cooper, Spelke e Gelman comprovam que bebês, por volta dos 6 meses de idade "podem distinguir entre conjuntos de um, dois ou três elementos, bem como entre conjuntos de três e quatro elementos". (Duhalde e Cuberes, 1998, p.34).

Além dos trabalhos já citados, as autoras também se remetem às pesquisas de Karmiloff-Smith, que destaca que crianças com um ano de idade podem ordenar conjuntos de diferente quantidade de elementos, podendo dar conta de pequenas mudanças numéricas no conjunto que está observando e ignorar outros dados "perceptivelmente interessantes como cor e forma". Seria um sentido numérico intuitivo, muito semelhante ao senso numérico do homem primitivo.

As crianças, pelo fato de fazerem parte de um meio social e de estarem em maior ou menor grau interagindo com ele (crianças surdas, por exemplo, possuem essa interação prejudicada), ao chegar à escola, possuem, inquestionavelmente, muitas noções matemáticas e, em particular, numéricas informais, mas, mesmo assim, é consenso entre os estudiosos das mais diversas linhas, que o conceito de número se constrói a partir de um processo muito lento.

Para Duhalde e Cuberes (1998), as pesquisas que evidenciam a existência de um sentido numérico intuitivo em crianças muito novas, reforçam a afirmação de Bandet (1967), citado pelas autoras:

> Em um artigo recente me surpreendeu ver definida a escola infantil como "o país sem números". Nada mais falso, pois nossos pequenos os descobriram fora da escola, sob uma forma muito particular que poderíamos chamar de natural e, em todo caso, própria da infância. Talvez o número não seja a princípio mais que uma palavra para a criança, mas a utiliza. O número não é, quem sabe, mais que uma figura, mas ela a percebe; não é talvez, mais que um pseudo-número, mas a criança prefigura ao verdadeiro. (Bandet, in Duhalde e Cuberes, 1998, p.36).

Além dos equívocos gerados em conseqüência da interpretação linear da construção do número, no primeiro parágrafo do prefácio da 3ª ed. francesa do livro *A gênese do número na criança*, Piaget afirma que "não basta de modo algum à criança pequena saber contar verbalmente 'um', 'dois', 'três', etc., para achar-se de posse do número". Tal afirmação, aliada ao fato de que Piaget e Szeminska não se ativeram muito na contagem em seus experimentos, levantaram muitas discussões, reforçando a motivação para pesquisas acerca do papel desempenhado pela contagem na construção do número pela criança. (Piaget e Szeminska, 1981, p.15).

Em 1991, os pesquisadores Jacqueline Bideaud, Jean-Paul Fisher e Claire Meljac organizaram um livro reunindo trabalhos de estudiosos do número (inclusive deles próprios), mais expressivos do momento, independentemente de seus referenciais teóricos. Como resultado, uma riquíssima coletânea sobre o tema, intitulada *Les chemins du nombre* foi publicada com o objetivo de homenagear Piaget e Szeminska e comemorar o cinqüentenário de *La genèse du nombre chez l'enfant*.

Dividido em quatro partes: "O encontro do número e as primeiras aprendizagens", "Estruturação do domínio numérico"; "Teorias e métodos: aproximações críticas" e, "Dificuldades e Remediação", o livro apresenta 18 trabalhos sobre o número, dos quais foram destacados os que se referem ao papel da contagem na construção do número, de autores de diferentes referenciais teóricos.

É preciso ficar claro que contagem não é o mesmo que enumeração. Contar significa estabelecer uma correspondência entre os objetos a serem "contados" e a sucessão das palavras-número, não implicando em reconhecer que a última palavra-número pronunciada represente a totalidade dos elementos da coleção, o que é, entretanto, o característico da enumeração.

Todos os autores franceses estabelecem uma distinção entre contagem e enumeração (alguns falam em contagem em sentido fraco e contagem em sentido forte para designar a enumeração); os americanos usam contagem no sentido de enumeração e a expressão "subitizing", no sentido de uma contagem mais fraca. Enfim, de um modo ou de outro, os pesquisadores atuais estabelecem uma diferença entre os significados, com enumeração subtendendo o número, ou seja, para enumerar é preciso, além de todas as ações

unesp

envolvidas na contagem, entender, ainda, que a última palavra-número pronunciada (ou o resultado da contagem), se refere à quantidade dos elementos da coleção.

Piaget e Szeminska não fazem explicitamente tal diferenciação, todavia, utilizam, algumas vezes, a expressão "contagem com significado" onde caberia "enumeração", o que parece indicar que o termo contagem, de forma isolada, estaria sendo usado em seu sentido fraco.

Uma das primeiras a pesquisar o número em crianças pequenas foi a americana Rochel Gelman e, ante o resultado positivo de suas pesquisas envereda por uma síntese "do inatismo, de um certo funcionalismo (dos princípios aos procedimentos) e da epistemologia histórico-crítica piagetiana". (Bideaud, Meljac e Fisher, 1991, p.446).

Em uma pesquisa desenvolvida em conjunto com a também americana Elisabeth Meck, Gelman pretende mostrar que o uso de metodologias que subestimem as competências numéricas precoces da criança pequena pode entravar o desenvolvimento matemático futuro. De maneira geral, porém, prevalece a idéia do inatismo, uma vez que defende que a criança conta com "princípios precoces prévios" para a contagem.

A francesa Catherine Sophian se auto-define como representante de uma teoria apresentada como "uma síntese da perspectiva piagetiana e de uma teoria da transmissão social dos conhecimentos procedurais". (Bideuad, Meljac e Fisher, 1991, p. 446).

Para a pesquisadora, Piaget e Szeminska consideram que a contagem "desempenha um papel secundário no desenvolvimento das conceitualizacões numéricas" enquanto que os trabalhos recentes a consideram, tanto "como um indicador da riqueza dos conhecimentos matemáticos desde a pequena infância", quanto "como um fator potencialmente importante do desenvolvimento das conceitualizações relativas ao número". (Sophian, in, Bideaud, Meljac e Fisher, 1991, p.35).

Sophian pesquisou a relação entre a cardinalidade e a contagem em crianças com a idade variando de três a sete anos, não escolarizadas, e encontrou resultados que indicam uma compreensão precoce tanto da contagem quanto de algumas operações matemáticas elementares e recomenda a inclusão de atividades que privilegiem a contagem e mesmo operações aritméticas a partir das primeiras aprendizagens, desde que integradas a uma pedagogia contextualizada.

unesp

A americana Leslie Steffe e sua conterrânea Karen Fuson, podem ser consideradas representantes de um neo-estruturalismo piagetiano.

Para Steffe, Piaget não considerou os suportes da experiência infantil, na qual a contagem se faz presente, em decorrência de fatores sociais. Após ter trabalhado durante dez anos, tentando compreender como a teoria piagetiana dos estágios poderia ser utilizada no ensino da matemática, sentiu necessidade de formular um modelo da construção do número, compatível com o de Piaget, levando em conta, porém, a experiência infantil.

Seus estudos permitiram isolar cinco estádios de aprendizagem na construção da seqüência dos números: 1) esquema de contagem perceptiva; 2) esquema de contagem figurativa; 3) a seqüência inicial dos números; 4) a seqüência tacitamente encaixada dos números e, 5) a seqüência explicitamente encaixada dos números.

Para Karen Fuson, as pesquisas de Piaget e Szeminska subestimam, tanto o papel da contagem na construção do número, quanto o das estratégias empíricas de emparelhamento (correspondência) para a quantificação.

Fuson estudou, com detalhes, a evolução entre contagem e cardinalidade, com crianças de idade variando entre dois e oito anos e seus resultados deixaram evidentes a importância dos procedimentos empíricos e da contagem, para a construção da quantificação e do número, respectivamente.

Para o psicólogo e matemático francês Remi Brissiaud, um típico representante do cognitivismo, Piaget e Szeminska menosprezam a contagem ao considerar que "o fator verbal desempenha apenas um papel pequeno no progresso" da construção do número. (Brissiaud, in Bideaud, Meljac e Fisher, 1991, p.51).

Brissiaud afirma que as crianças encontram o número pela primeira vez, antes da contagem, mediante a utilização de correspondência termo-a-termo (em conformidade com os homens pré-históricos), estabelecida entre uma coleção de objetos e uma coleção-testemunho de dedos. A seguir, através da comparação entre o que o autor considera como os dois sistemas de representação e tratamento da quantidade, que são as coleções-testemunho de dedos e a contagem, a criança torna-se capaz de "precisar certos aspectos das noções de quantidade e de número". (Bideaud, Meljac e Fisher, 1991, p.29).

unesp

Dos estudiosos atuais, Brissiaud é o mais enfático em estabelecer uma "oposição"entre os resultados piagetianos e a comprovação, por diversas pesquisas, do papel efetivo desempenhado pela contagem na construção do número e da presença do número no pensamento infantil, antes do acabamento deste último, como síntese das classes e das séries.

De fato, Brissiaud divide sua obra *Como as crianças aprendem a calcular* (1989), em três partes: "*Comunicar*", "*Calcular*" e "*Para além de Piaget*". Nesta última parte, entre outras coisas, propõe uma teoria didática para a matemática (inspirada no método instrumental de Vygotsky), que enfatiza o papel da contagem no desenvolvimento dos conceitos numéricos, afirmando que suas sugestões "ultrapassam" Piaget.

Tal afirmação, todavia, não parece estar livre de contestação, ou seja, estariam os recentes estudos acerca do número, realmente, além de Piaget, ou apenas os completariam, daí a razão da indagação como título deste tópico.

Ora, quanto à alegação de "existência" de número antes da síntese entre a classificação e a seriação, o próprio fato (a ser mostrado no capítulo III), da elaboração desta síntese não se dar de forma linear, mas, sim, sincrônica e solidariamente, já indica a presença de números primitivos (quantificadores), virtuais ou reais, a partir dos níveis mais elementares.

Em relação à contagem, por concentrarem seus estudos no desenvolvimento intelectual das crianças (pressupondo operações), Piaget e Szeminska não desenvolveram maiores análises sobre a contagem (pressupondo interação social) das crianças, o que não é suficiente para se concluir que os autores não a considerassem importante.

Ao contrário, buscando exatamente complementar os estudos de Piaget e Szeminska, Pierre Gréco pesquisou, no início da década de sessenta, o papel da contagem e da correspondência termo a termo no desenvolvimento do número e os resultados foram publicados no volume XIII dos Études d'épistémologie génétique, do Centro Internacional de Epistemologia Genética, sob a direção de Jean Piaget, intitulado *Structures Numériques Élémentaires*, em 1962.

Nesta obra, no artigo "Quantidade e Quotidade: novas pesquisas sobre a correspondência termo a termo e a conservação dos conjuntos", P. Gréco estabeleceu a precocidade da

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

conservação da quotidade (resultado da contagem), o que o levou a atribuir um importante papel tanto à contagem, quanto à correspondência termo a termo na construção do número. Esta pesquisa pode ser considerada o marco inicial dos estudos posteriores acerca da contribuição da contagem na construção do número.

Brissiaud (entre outros dos atuais estudiosos do número), fundamenta-se em Gréco para justificar suas propostas que enfatizam a contribuição da contagem no processo de construção do número, em suas sugestões que estão, segundo o autor, "além de Piaget", o que causa estranheza, pois os resultados de Gréco foram referendados por Piaget, conforme consta do prefácio da terceira edição francesa do livro *A gênese do número na criança*, que será mais bem detalhado no capítulo III.

Anteriormente, já foram discutidos alguns dos muitos equívocos originados pelo "casamento" que se realizou, talvez à revelia dos noivos, entre a matemática moderna e a teoria piagetiana e aqui, se discutiu as principais conseqüências da interpretação equivocada do estabelecimento do número como síntese das classes e das séries, porém, o que fica claro, a partir das referências escolhidas para ilustrar os atuais caminhos do número, é que o trabalho de Piaget e Szeminska, continua na base destes estudos, quer estes pretendam confirmá-los, complementá-los ou colocá-los em cheque. Isto demonstra bem, segundo os termos de Rémy Droz, citado por Bideaud (1991), "l'incroyable fécondidité heuristique" (a incrível fecundidade heurística), do trabalho de Piaget e Szemiska.



2- EVOLUÇÃO, FUNDAMENTOS E FUTURO DAS IDÉIAS MATEMÁTICAS

INTRODUÇÃO

A questão "o que é o número?" vem atormentando filósofos e matemáticos desde a antiguidade evidenciando a existência de um forte contraste entre a clareza instrumental do número e a complexidade das teorias construídas pela matemática para explicá-lo.

Nenhuma das principais correntes do pensamento matemático - logicismo, intuicionismo e formalismo - conseguiram uma resposta satisfatória à questão, sendo que mesmo hoje, não existe uma solução aceita com unanimidade.

Piaget assim se expressa a respeito:

> Assim como a verdade técnica da aritmética está fora de toda discussão, a questão de se saber o que é o número deixa evidente a surpreendente incapacidade do pensamento para apreender qual é a natureza de certos instrumentos os quais, entretanto, acredita compreender completamente e os utiliza em quase todos os seus atos. (Piaget, 1975, p. 67).

Piaget acredita ser possível responder, através da epistemologia genética a essa persistente questão.

> Este contraste entre a evidência instrumental do número e a confusão das teorias epistemológicas para explicá-lo deixa claro a necessidade de uma investigação genética: o desconhecimento do pensamento em relação às engrenagens essenciais de seu próprio mecanismo é, com efeito, o índice psicológico de seu caráter elementar e, em conseqüência, da necessidade de se remontar aos primórdios de sua formação para poder alcançá-las. (Piaget, 1975, p. 67 e 68)

Assim, para compreender exatamente a extensão do problema, será feita, neste capítulo, uma rápida incursão na história e na filosofia da ciência matemática.

A matemática pode ser concebida de duas maneiras bem distintas: uma é a que é apresentada nos livros técnicos e especializados e, particularmente, nos didáticos, onde o seu aspecto é de um todo harmonioso, com os assuntos se sucedendo através de uma cadeia bem definida de pré-requisitos e, principalmente, sem nenhuma contradição.



A outra maneira de se conceber a matemática é como um conjunto de conhecimentos construído através das relações do homem com o meio em que vive, com o mundo, profundamente influenciado pelas relações sociais, pelas idéias filosóficas dominantes em determinado momento histórico, pelo comércio, pelas guerras, por outras ciências, pelas exigências tecnológicas, etc. Esta última concepção fica evidente quando se envereda pela via da história da matemática.

Ao se buscar as origens e evolução do conhecimento matemático, ao se procurar entender como foi construído, aparecem dúvidas, hesitações, contradições, mudanças de rumo, novas diretrizes enfim, a matemática emerge como um bem cultural, que recebeu e recebe, influências do meio externo desmistificando a imagem de um saber à parte da humanidade, que é auto-suficiente, cuja formação de teorias e conceitos obedece apenas a necessidades internas, "impossível para as pessoas comuns" e ao qual, apenas os mais bem dotados intelectualmente teriam acesso.

Parafraseando Caraça (1984) – a citação original refere-se à ciência de um modo geral - a matemática encarada assim, aparece como um organismo vivo, impregnado de condição humana, com suas forças e fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação, aparece, por fim, como um grandioso capítulo da vida humana.

É preciso ficar claro que, se por um lado o conhecimento matemático apresenta a universalidade, a precisão e a impessoalidade entre suas principais características, com a história da matemática o mesmo não acontece. Aparecem contradições, controvérsias, falta de precisão sobre quando e como aconteceram os fatos, originando então, interpretações particulares e pessoais dos estudiosos sobre o assunto.

A complexidade do assunto demandaria não uma, mas inúmeras teses para realizar estudos completos, o que não é objetivo desse trabalho. O que se pretende aqui é, uma vez que fica praticamente impossível obedecer rigorosamente à periodização da própria história, pois aí se perderia a visão total da contribuição de cada cultura, é descrever, de forma linear as principais conquistas matemáticas de cada povo, por proximidades geográficas e, dentro do possível, num mesmo período, sem maiores discussões e consultando a bibliografia canônica sobre o assunto, ou seja, evitando os materiais, que na busca da verdade, é preciso ressaltar, enveredam por caminhos polêmicos.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

Essa escolha não é limitante e muito menos parcial, uma vez que o que se pretende é destacar momentos e conquistas importantes e, principalmente, pela natureza da ciência matemática que, ao contrário de muitas outras ciências, uma geração não desfaz o que foi construído por outra, ao contrário, seu conhecimento é construído sucessivamente. O que muda na matemática é a forma, ou seja, cada geração, reformula (e amplia) velhas estruturas, porém, estas não são descartadas, ao contrário, encontram-se embutidas nas novas construções - o caso da geometria euclidiana e as não-euclidianas fornece um bom exemplo deste fato, evidenciando o processo de construção por abstração reflexionante do conhecimento matemático. É a forma que muda com o tempo, originando uma nova maneira de apresentar determinado conteúdo, provocando uma nova pesquisa sobre a forma que se transforma em conteúdo e assim, sucessivamente, e isto é a evolução em matemática.

Para Struick (1992), novos resultados muitas vezes têm origem numa nova forma de escrever resultados já construídos, como os que se seguiram após a introdução do sistema de numeração decimal e os que sucederam à notação de Leibniz para o cálculo, sem falar é claro, nos progressos da matemática a partir do estabelecimento da álgebra simbólica.

A opção de se abordar nesta introdução, dos primórdios até o estabelecimento do sistema métrico decimal, no século XVIII, deixando os séculos XIX e XX como tópicos particulares deste capítulo, foi feita, em função de que neste período, o que se tem a relatar, são descobertas ou formulações, sem preocupações maiores, de natureza filosófica, o que contrasta com o período seguinte.

Não é possível precisar o momento exato em que o homem tenha começado a fazer matemática, o que existe, são diversas conjecturas a respeito. As mais recentes descobertas científicas acerca da presença do homem na Terra demonstram que esta é muito mais antiga do que se acreditou durante muito tempo. Foram descobertos registros da presença de que os primeiros hominídeos a andar sobre duas pernas, que é o critério utilizado para diferenciar o homem dos demais primatas, surgiram na África, há cerca de quatro milhões de anos. Os registros sobre a construção de suas primeiras ferramentas (só existem registros de ferramentas de pedra) estabelecem que foram criadas pelo chamado *Homo habilis*, natural da África e datam de dois milhões de anos atrás.

unesp

Para Karlson (1961) pode causar estranheza à maioria das pessoas, o fato de que o mundo "sempre esteve e está repleto de matemática", pois estão acostumadas com um matemático estereotipado, de óculos grossos, desligado do mundo, aparentemente distraído e cujo *habitat* natural não seria o mundo real. Porém, continua Karlson, "desde o seu aparecimento na terra", o homem contava, media, calculava, "mesmo no período em que seu espírito não tinha consciência de si mesmo e quando sobre tais assuntos não existiam conceitos e convenções". (Karlson, 1961, p.3).

> Ele dividia a presa em partes iguais, com o que criou as frações; cortava com a sua clava ou media um pedaço de pele – comparando comprimentos, admitindo assim as idéias contrárias de "maior" e "menor". Para encurtar o caminho na curva de um rio ele abria um atalho retilíneo através do capim da estepe – junto ao leito dos rios – e com isso traçava a primeira corda de um arco. Fabricava vasos, que eram seus padrões de medida, efetuando assim as primeiras determinações de volume ... (Karlson, 1961, p.3)

Não é possível deixar de perceber que as atividades anteriormente descritas passavam ao largo de qualquer operação matemática consciente, mas que estava, tal como a criança nos estágios iniciais de seu desenvolvimento, agindo sobre os objetos e, desta forma, construindo seus conhecimentos sobre formas matemáticas, estabelecendo relações entre objetos e, mais ainda, estabelecendo relações entre grandezas. Na verdade, o homem primitivo conhecia e utilizava diferentes grandezas antes que a tomada de consciência delas lhe possibilitasse designá-las com nomes específicos.

Se noções primitivas relacionadas com os conceitos de forma, grandeza e número aparecem já nos primórdios da raça humana, é possível se encontrar "vislumbres de noções matemáticas" em outras formas de vida "que podem datar de milhões de anos antes da humanidade" e, hoje a ciência já estabelece, de modo claro que "as capacidades de distinguir número, tamanho e forma", o que constituem os rudimentos do pensamento matemático, "não são propriedades exclusivas da humanidade". (Boyer, 1974, p.1).

Para Boyer (1974), inclusive, se existe "validade no princípio biológico da sobrevivência do mais apto, a persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento no homem de conceitos matemáticos". (Boyer, 1974, p.1)

Com o aparecimento da agricultura, talvez a mais importante criação da humanidade (superada apenas, segundo alguns autores, pela revolução industrial), no Oriente Médio, há

unesp

cerca de 10 mil anos atrás, o homem deixou de ser nômade e, com a fixação deste ao solo, surgiram as primeiras civilizações, sempre junto aos grandes rios, fonte de fertilidade: a egípcia, no vale do Nilo; a mesopotâmica, nas bacias dos rios Tigre e Eufrates; a hindu, ligada aos rios Indo e Ganges e a chinesa, na região dos rios Huang Ho e Yang Tse.

De maneira geral, todas estas civilizações enfrentaram problemas semelhantes, como o desenvolvimento de métodos para armazenar os produtos colhidos; o estabelecimento de técnicas para a divisão de terras e para o plantio, além do controle das enchentes.

> Vemos assim numa vertente, uma aritmética de divisão de recursos, desenvolvendo principalmente frações e, em outra, uma geometria no estilo do que hoje chamamos agrimensura, tendo como motivação a alocação de terras aráveis. E, naturalmente, uma matemática associada às técnicas de construção, na verdade, uma mecânica de construções. (D'Ambrósio, 1998, p.34).

Uma observação importante é que, embora cada civilização desenvolvesse sua matemática de forma independente, em função do isolamento em que viviam, o conhecimento matemático construído, descontadas as particularidades de representação, possui grande semelhança, praticamente obedecendo a uma mesma "seqüência" de construção, corroborando a tese de Piaget, para quem a natureza do conhecimento matemático não é uma simples determinação social, mas, sim, resultante das relações que o sujeito estabelece com o meio (físico e social). A história da matemática evidencia que o mesmo é verdadeiro também quando o sujeito é uma coletividade.

Embora a matemática fosse essencialmente utilitária, os registros destas civilizações já indicam um "distanciamento" do real, apresentando problemas de interesse apenas matemático, do tipo: "Qual é o número que ...?"

Uma outra característica da matemática das antigas civilizações, é a de que todas elas preocupavam-se essencialmente com o "como fazer". Os primeiros a se preocuparem com o "por quê", foram os gregos, importante civilização surgida na parte superior do Mediterrâneo, a partir de povos que emigraram do Norte.

> Eles praticavam uma matemática utilitária, semelhante àquela dos egípcios, mas, ao mesmo tempo desenvolveram um pensamento abstrato, com objetivos religiosos e rituais. Começa assim um modelo de explicações que vai dar origem às ciências, à filosofia e à matemática abstrata. É muito importante notar que duas formas de matemática, uma que poderíamos chamar utilitária e outra,

unesp

> matemática abstrata (ou teórica ou de explicações), conviviam e são perfeitamente distinguíveis no mundo grego. (D'Ambrósio, 1998, p.35).

A matemática grega pode ser dividida em três períodos:

1 - Clássico ou helênico (600-300 a.C.), onde a matemática se desenvolveu em consonância com as escolas filosóficas das quais retirou seus fundamentos, que se tornaram, alguns permanentes, outros, transitórios. Este período inicia com Tales de Mileto (625-547 a.C.), atinge seu apogeu com Pitágoras de Samos (560-480 a.C.) e termina com a morte de Aristóteles em 300 a.C.

2 – Helenístico: este período, posterior às escolas filosóficas, se estendeu até os princípios da era cristã e é considerado a Idade do Ouro da matemática grega, período no qual ela se torna autônoma e consegue suas maiores realizações através de Euclides, Arquimedes e Apolônio.

3 – Greco-romano: período que tem seu início com a morte de Arquimedes, por um soldado romano, em 212 a.C. e compreendeu os séculos iniciais da era cristã. Época considerada de decadência e na qual apareceram apenas comentaristas. O final deste período coincide com o final do mundo clássico e, de acordo com a maioria dos historiadores, é o início da Alta Idade Média, ou Idade das trevas.

A matemática da Idade Média se desenvolveu particularmente em ambientes religiosos e, como todo pensamento deste período era direcionado à construção de uma teologia cristã, a matemática filosófica dos gregos, foi destinada ao ostracismo em virtude de sua origem pagã.

> A matemática utilitária progrediu muito nessa época entre o povo e os profissionais. Os algarismos romanos serviam apenas para representação. Mas foram desenvolvidos interessantes sistemas de contagem utilizando pedras (*calculi*), ábacos e mãos. O Venerável Beda (673-735) escreveu um tratado sobre operações com as mãos. Também traduziu parte de *Os Elementos*, trabalho que não teve qualquer repercussão. Modelos geométricos para construções de igrejas que deram origem ao gótico, e para a pintura religiosa que deram origem à perspectiva, foram muitos desenvolvidos. Esses foram essencialmente precursores do que viria a ser chamado as geometrias não-euclidianas. (D'Ambrósio, 1998, p.41).

unesp

Enquanto na Europa o cristianismo se expandia, os povos do sul do Mediterrâneo, do norte da África e do Oriente Médio se rebelavam contra o domínio romano. Enquanto estavam subjugados "apenas" política e economicamente, ainda era possível a esses povos conservarem suas tradições e rituais, o que desapareceu com o fortalecimento do cristianismo e o fim da tolerância religiosa.

O principal movimento de "libertação" foi a Hégira, liderada por Maomé (570-632), dando início ao islamismo, cuja expansão foi fulminante, conquistando todo o norte da África, o sul da península ibérica, a Índia e a China.

A maior figura da ciência islâmica foi, com certeza, o matemático Muhammad ibn Musa al-Kwarizmi al-Magusi (780-847), autor, entre outros, de um livro onde introduz a redução de termos semelhantes de uma equação acompanhada da alteração do sinal, marcando, desta forma, o nascimento da álgebra.

Logo no início de suas conquistas os árabes precisavam impor sua língua aos povos submetidos, porém, os seguidores de Maomé tinham pouca cultura e quase nenhum interesse científico, de modo que suas primeiras manifestações culturais foram as traduções para o seu idioma, de escritos hindus e gregos, os quais foram posteriormente traduzidos do árabe para o latim e, desta forma, se tornaram perenes.

Além da gratidão por terem sido responsáveis pela preservação de grande parte do conhecimento matemático da Antigüidade, a matemática (e a humanidade) deve também aos árabes, a difusão, em todo o Ocidente, do sistema de numeração decimal dos hindus, o que possibilitou grandes avanços para a ciência em geral e para a matemática em particular.

Do século XI ao século XIII, pode-se dizer que a matemática (exceção feita a Fibonacci e poucos outros), ficou restrita às traduções (do árabe para o latim) das principais obras gregas, hindus e chinesas.

Nos séculos XIV e XV, a produção do saber científico e cultural estava centralizada nos mosteiros e nas universidades (a primeira, a de Bologna, havia sido fundada no século XI), porém, as áreas de interesse eram a filosofia, a lógica, a ótica, a navegação, as construções e as artes.

unesp

A matemática, ficando em segundo plano, foi apenas reorganizada para servir de "ferramenta" aos principais interesses.

> Todos aqueles conhecimentos que passariam a ser denominados *matemática* começaram nessa época a ser organizados com um estilo próprio e a ser conhecidos por especialistas. Reconhece-se aí, o início do nascimento de especialidades no conhecimento. (D'Ambrósio, 1998, p.46)

A partir dos descobrimentos, o mundo ocidental, particularmente, Portugal e Espanha, alcançaram desenvolvimento científico notável focalizado na navegação, enquanto que nos demais países da Europa, o impacto do descobrimento de outras realidades a partir da existência de um "Novo Mundo", impulsionou a necessidade da busca de novos sistemas de explicação e, conseqüentemente, novos enfoques filosóficos que, em conjunto com o acesso às fontes originais gregas, deu origem ao Renascimento.

Os séculos XVII e XVIII contemplaram o surgimento da geometria analítica de René Descartes e o Cálculo Diferencial e Integral, construído simultânea e independentemente por Isaac Newton, na Inglaterra e Gottfried Wilhelm Leibniz, na Alemanha, reafirmando a natureza do conhecimento matemático preconizada por Piaget.

> Na Europa continental as idéias de Newton eram muito convenientes para o pensamento político que se construía como base filosófica para a Revolução Francesa. Imediatamente os intelectuais revolucionários adotaram a nova matemática proposta por Newton e deram ao cálculo diferencial um impulso notável. (D'Ambrósio, 1998, p.50).

A França revolucionária, tem no século XVIII, o seu século de ouro e, além das descobertas que alavancaram a matemática pura, os considerados "seis homens de ouro" da matemática francesa, Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace, Adrien-Marie Legengre, Gaspard Monge, August Condorcet e Lazare Carnot, estabeleceram, em 1799, o Sistema Métrico de Pesos e Medidas, que é adotado atualmente, por todos os países civilizados do mundo (exceto os Estados Unidos).

Apesar da importância social do Sistema Métrico Decimal, este não foi a maior contribuição da matemática do século XVIII, que, além de desenvolvidos adicionais em áreas como geometria analítica teoria dos números, o cálculo, a probabilidade, etc, também possibilitou a criação de novos ramos como cálculo de variação, equações diferenciais parciais, geometria descritiva, topologia e geometria diferencial.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

A maior figura da matemática do século XVIII e uma das maiores de todos os tempos, foi, com certeza, a do suíço Leonhard Euler, considerado o matemático que mais produziu e publicou em todos os tempos, pois, estima-se que sua obra ultrapasse 800 trabalhos versando sobre Cálculo, Teoria dos Números, Álgebra, Mecânica, Óptica, Teoria das Probabilidades e sobre o nascente campo da matemática, a Topologia, além de escritos sobre o cálculo das variações, música e números complexos.

A matemática do século XVIII, o século das luzes, poderia, segundo Babini (1969) ser caracterizada com uma única palavra: algorítmica, embora no final do século, ela perca esse caráter puramente algorítmico, com a geometria adquirindo contorno de geometria pura e a física se convertendo em física matemática.

Neste século, tanto a análise algébrica quanto a infinitesimal adquirem vida própria, se libertando, de certa forma da geometria e da ciência natural com a matemática assumindo um caráter formal, embora ainda não rigoroso.

O século XVIII contemplou também o desaparecimento dos "matemáticos polivalentes" e o conseqüente surgimento dos "especialistas", como o do "geômetra" Monge e, "um outro acontecimento digno de registro no século XVIII foi a entrada das mulheres no campo da matemática e no das ciências exatas, de uma maneira mais geral". (Eves, 1995, p.495).

Assim, até o século XVIII, embora já inteiramente dedutiva, a matemática estava, particularmente ligada aos algoritmos e, pouca ou nenhuma preocupação existia quanto à natureza de seus elementos, ou quanto aos seus fundamentos. De uma maneira geral, à exceção da idade heróica, ou período clássico, na Grécia Antiga, a evolução das idéias matemáticas, prosseguiu, até aí, de uma maneira praticamente linear, sem maiores revoluções. Vista de hoje, parece que a matemática se desenvolveu de uma maneira praticamente "esperada".

Tal não é, todavia, o panorama do século XIX, considerado, por Boyer (1974), o "mais revolucionário na história da matemática", com a descoberta de um "novo mundo na geometria". O conhecimento matemático deixou de ser produzido apenas na França, Inglaterra, Itália e Alemanha, e países, até então, cientificamente insignificantes invadiram



o cenário matemático. A matemática passou a ser reconhecida não mais como uma ciência natural, ou seja, decorrente da observação da natureza, ou que buscasse descrevê-la, mas, como uma criação intelectual do homem. (Boyer, 1974, p.387).

Segundo artigo escrito em 1901, por Bertrand Russell, no *International Monthly*, "o século dezenove, que se orgulha da invenção do vapor e da evolução, poderia derivar um título mais legítimo à fama da descoberta da matemática pura" (Russell, *apud* Boyer, 1974, p.440).

Em função da nova concepção surgida a partir do século XIX, com a libertação da matemática do real, a crise dos fundamentos, a adoção da lógica simbólica como a linguagem da matemática e a unificação das matemáticas, pelo estruturalismo de Nicolas Bourbaki, entre outros avanços importantes, é que os séculos XIX e XX, são destacados, em relação ao contexto histórico da matemática.

A crise dos fundamentos estabeleceu um verdadeiro "caos teórico" em função das diversas concepções de número surgidas, o que é então analisado, objetivando mostrar que a insuficiência de tais concepções, justifica a "investigação genética" realizada por Piaget e Szeminska.

Por outro lado, a lógica operatória de Piaget, indispensável para a compreensão do "cenário" dos estudos piagetianos, não foi tratada até este momento e, se aproveita então, para se fazer esta revisão teórica, quando do tratamento da lógica matemática, no século XX.

Finalmente, para se falar das perspectivas de futuro para a ciência matemática, ou seja, se existe limite para a construção do conhecimento matemático, uma vez estabelecido que este conhecimento é uma criação intelectual do homem, a epistemologia da matemática entra em cena, discutindo a fecundidade, a necessidade e rigor e, o acordo com a realidade dessa ciência.

2.1 O SÉCULO XIX

Embora não tenha sido matemático e nem tenha vivido a maior parte da sua vida no século XIX, o pensamento filosófico de Immanuel Kant influenciou profundamente o

desenvolvimento científico e cultural dos séculos XIX e XX, particularmente, a matemática, de modo que é oportuno um breve interstício, para algumas considerações acerca da posição da matemática no sistema kantiano.

Para o filósofo alemão, a matemática apresentava-se como uma ciência segura que deveria servir de exemplo às demais ciências, inclusive à metafisica, como um modelo a partir do qual seria possível construir um conhecimento legítimo que pudesse prescindir da experiência.

> Eis aqui um conhecimento grande e comprovado, que é já hoje admirável e promete para o futuro um desenvolvimento ilimitado; comporta uma certeza apodícta perfeita, isto é, uma absoluta necessidade, não se apóia, pois, em nenhum fundamento empírico; por conseguinte, é um puro produto da razão... (Kant, 1988, p.47).

> Observando como a matemática e a física se tornaram, em conseqüência de uma revolução repentina, o que hoje são, julguei o exemplo suficientemente notável para induzir-me a refletir sobre o elemento essencial de uma mudança de método que se revelou tão vantajoso para aquelas ciências, e a imitá-las aqui, pelo menos a título de experiência, tanto quanto a sua analogia – enquanto conhecimentos racionais – com a metafisica o permitir. (Kant, apud Pascal, 1996, p.34).

Até Kant, tanto os filósofos racionalistas quanto os empiristas, dividiam as proposições em duas classes que se excluem mutuamente e que esgotam o universo das proposições: as analíticas, que englobam as verdades da razão e as empíricas, que expressam os fatos. Uns e outros concordam, todavia, que as proposições da matemática são analíticas, reduzindo suas discordâncias para a interpretação que dão das proposições empíricas.

Kant recoloca a questão da classificação das proposições propondo outra: as proposições podem ser analíticas, isto é, aquelas cuja negação conduz a não-contradições e as sintéticas, ou não analíticas. A principal diferença entre Kant e seus antecessores é a distinção de duas classes de proposições sintéticas: as empíricas ou sintéticas *a posteriori* e as sintéticas *a priori*, ou seja, as que não são empíricas.

É a descoberta da existência dos juízos sintéticos *a priori* que confere todo o alcance da "revolução copernicana" do sistema kantiano, ou seja, o conhecimento não depende apenas da razão e, portanto, do sujeito, como queriam os racionalistas e, nem apenas do objeto, como defendiam os empiristas, mas, em ambos.

unesp

As proposições matemáticas são, segundo Kant, sintéticas *a priori*, pois, são as formas puras da intuição, o espaço e o tempo, que permitem fundamentar e legitimar os juízos sintéticos *a priori* (e também toda a matemática) e expressam a especificidade da matemática, ou seja, o indivíduo conhece o espaço e o tempo de um modo absolutamente apriorístico.

> ... Assim, os juízos que se referem às formas de sensibilidade são *a priori*, ainda que sejam sintéticos e portanto são possíveis na matemática que se fundamenta numa construção de conceitos. A validade da matemática, está fundada na intuição *a priori* das relações das figuras espaciais e dos números, que por sua vez se fundamentam na sucessão temporal das unidades. O espaço e o tempo são, portanto, o fundamento lógico – não psicológico – da matemática e nela são possíveis os juízos sintéticos *a priori*. (Marías, 1958, p.277).

Assim, os juízos matemáticos são sintéticos *a priori*, embora possam dar a ilusão de serem analíticos. O caráter *a priori* do conhecimento matemático e o fato de seus juízos ou proposições serem sintéticos estabelecem, então, a posição singular da matemática no sistema kantiano, qual seja, a de uma ciência que trata essencialmente de juízos sintéticos *a priori* e é ela mesma a maior produtora destes juízos.

> Ora, o espaço e o tempo são aquelas intuições em que a matemática funda todos os seus conhecimentos e juízos, que se apresentam ao mesmo tempo como apodícticos e necessários; com efeito, a matemática deve representar todos os seus conceitos em primeiro lugar na intuição, e a matemática pura na intuição pura, isto é, construí-los, sem o que (porque ela não pode proceder analiticamente, isto é, por desmembramentos dos conceitos, mas apenas sinteticamente) lhe é impossível dar um passo, enquanto lhe faltar a intuição pura, na qual pode ser dada a matéria para juízos sintéticos a priori. A geometria toma por fundamento a intuição pura do espaço. A aritmética forma ela própria os seus conceitos de número pela adição sucessiva das unidades no tempo, especialmente, a mecânica pura só pode formar os seus conceitos de movimento mediante a representação do tempo. (Kant, 1988, p.51).

Em outras palavras, a matemática se refere à realidade concreta, mas utiliza para apreendê-la conhecimentos *a priori* de tempo e de espaço, o primeiro, fundamentando o número e, conseqüentemente, toda a aritmética, enquanto que o segundo, alicerçando a geometria.

Estas idéias exerceram enorme influência nos matemáticos no século XIX, tendo sido a principal razão para o "escândalo" proporcionado pela descoberta das geometrias não-

unesp

analíticas, além de ser a base do intuicionismo de Poincaré.

A história da matemática não obedece, necessariamente, às divisões periódicas da história ou, o decorrer linear do tempo, ao contrário, construída por homens, está intimamente ligada à época em que viveram os matemáticos.

Assim, não é possível enquadrar homens e suas produções matemáticas em séculos, de forma que períodos intermediários sempre devem ser considerados.

Na linha divisória da matemática dos séculos XVIII e XIX, brilham alguns matemáticos, nascidos no século XVIII mas que alcançaram notoriedade no século XIX, como por exemplo, Gauss e Cauchy.

Os primeiros anos do século XIX já apresentavam indícios de que a hegemonia da matemática francesa pós 1789 se encontrava seriamente ameaçada por um jovem alemão, mas tão alemão que, nunca saiu da Alemanha, nem mesmo para uma pequena viagem.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) era filho de um simples trabalhador de Brunswick que, tentou, por todos os meios, evitar que seu filho recebesse instrução escolar, ao contrário da mãe de Gauss, a qual, apesar de jamais ter tido acesso aos conhecimentos escolares, sempre lutou para que o pequeno Carl tivesse destino diferente. Como viveu durante 97 anos, a mãe de Gauss teve tempo e motivos suficientes para se orgulhar de sua atitude, pois acompanhou, praticamente, toda a carreira do filho.

Considerado por muitos como o maior matemático de todos os tempos, Gauss foi o que seria hoje designado por "criança prodígio", cujo talento foi reconhecido pelo Duque de Brunswick que se encarregou da educação do pequeno gênio e assim, em 1799, Gauss já obtinha o grau de doutor em Helmstedt e a partir de 1807, até a sua morte, trabalhou tranqüilamente como diretor do observatório astronômico e professor da Universidade de Göttingen, onde havia realizado todos os seus estudos, à exceção do doutorado.

A exemplo de seus contemporâneos – e curiosamente conterrâneos – Kant, Göethe, Beethoven e Hegel, Gauss se manteve distante das lutas políticas e se o "seu isolamento relativo; a sua compreensão das matemáticas 'puras' e 'aplicadas'; a sua preocupação com a astronomia e o uso freqüente do latim têm a marca do século XIX", o conteúdo de seu trabalho retrata, "de forma poderosíssima" as novas idéias de sua época. (Struick, 1992,

unesp

p.227).

Da mesma forma que Newton, Gauss não publicava sistematicamente seus trabalhos, preferindo registrá-los, de forma sucinta, em um diário, que só foi encontrado em 1898, após a sua morte, portanto.

Dos 146 breves registros contidos no diário – o último datado de 9/7/1814, 144 já foram "decifrados" em sua maior parte. O termo "decifrado" é pertinente uma vez que Gauss escrevia de forma críptica, como atesta o exemplo citado por Eves (1995), referente à anotação de 10/7/1796, onde se lê: EYPHKA! num = $\nabla+\nabla+\nabla$ "o que traduz a descoberta, por parte de Gauss, de uma demonstração de que todo inteiro positivo é soma de três números triangulares". (Eves, 1995, p.520).

Os estudos de Gauss abrangeram vários campos científicos, como astronomia, física matemática e matemática. Desta última, tinha especial predileção pela teoria dos números, chegando a afirmar que "a matemática é a rainha das ciências e a teoria dos números é a rainha das matemáticas". (Boyer, 1974, p.367).

Na sua tese de doutorado, Gauss estabeleceu a primeira demonstração do teorema que estabelece que toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, pelo menos uma raiz, teorema este que recebeu, de Gauss, a denominação de "teorema fundamental da álgebra", carregando, portanto, no próprio nome, a dimensão de sua importância para a matemática.

Também deixou colaborações inestimáveis ao cálculo diferencial e integral, à teoria das probabilidades; à estatística (criou a teoria dos erros, de onde surgiu a curva de Gauss), à teoria das funções de variáveis complexas, à astronomia, à geometria diferencial e à física, em especial no campo do eletromagnetismo, tendo, inclusive, construído em conjunto com o físico Wilhelm Weber, um telégrafo elétrico, bem antes de Samuel Morse.

Gauss foi também um dos "descobridores" da geometria não-euclidiana - foi dele esta denominação - como tentativa de demonstração do postulado V de Euclides, que estabelece que "por um ponto de um plano não pertencente a uma reta dada, passa uma única paralela à esta reta", fato que o intrigava desde os 13 anos de idade.

No século XVIII haviam sido realizados muitos estudos com o objetivo de mostrar que o

"axioma das paralelas" era "supérfluo", ou seja, de que era possível construir a geometria utilizando apenas os quatro primeiros postulados euclidianos, porém, os estranhos resultados obtidos, como por exemplo, o de que a soma dos ângulos internos de um triângulo não seria necessariamente igual a dois retos "assustavam" os estudiosos que não consideravam como geometria o sistema assim obtido.

> Gauss foi, na verdade, o primeiro que visualizou o fato. Preocupado com a questão das paralelas desde a sua adolescência, não publicou nada a princípio, por temer, como ele próprio diz, a "gritaria dos boécios", porém, em 1831 decide fazê-lo, todavia, no ano seguinte, inteirado do trabalho de Bolyai, abandona esse propósito. (Babini, 1969, p.117).

A mentalidade matemática de Gauss superava não apenas a limitação imposta pelo mundo exterior – responsável pela não admissão, por Kant, entre outros, da possibilidade de uma geometria não-euclidiana – como também a maneira de raciocinar imposta pelos *Elementos* e, assim, o matemático alemão acreditava ser possível construir, de forma rigorosamente dedutiva, um novo edifício geométrico, ainda que, segundo ele, "à primeira vista, muitos de seus resultados apresentem um aspecto paradoxal". (Babini, 1969, p.119).

2.1.1 As geometrias não-euclidianas

Conforme já comentado, *Os Elementos* de Euclides possuem uma estrutura axiomática, isto é, começam com a apresentação de definições fundamentais seguidas de uma série de axiomas (ou postulados) e a partir disso, são demonstrados teoremas da geometria, da aritmética e da teoria das proporções.

Como os axiomas são proposições aparentemente iguais aos teoremas que são demonstrados a partir deles, filósofos, lógicos e matemáticos vêm, há quase dois mil anos tentando estabelecer com clareza qual seria a particularidade que os caracterizaria e mais, discute-se também, qual seria o significado de uma construção axiomática.

Para Barker (1969) a discussão que aconteceu através dos tempos desembocou em duas vertentes: os axiomas são proposições ainda não demonstradas, assumidas precariamente como verdadeiras até que algum dia suas validades sejam confirmadas ou, os axiomas são autênticos, isto é, jamais poderão ser demonstrados e talvez sejam evidentes em si mesmos.



Cada uma das vertentes possuía seus partidários. Leibniz, por exemplo, acreditava firmemente que todas proposições poderiam ser deduzidas a partir de definições mediante o princípio da não-contradição e assim, investiu anos de sua vida, na vã tentativa de demonstrar os postulados fundamentais da geometria.

A discussão acerca do caráter axiomático da geometria euclidiana se ateve, particularmente, em relação ao postulado V, o "postulado das paralelas" que tanto intrigou Gauss, não apenas por sua forma original (Se uma reta cortar outras duas retas de modo que a soma dos dois ângulos interiores de um mesmo lado, seja menor que dois ângulos retos, então as duas retas se cruzam, quando suficientemente prolongadas, do lado da primeira reta em que se acham os dois ângulos), mas, principalmente, pelo fato de que ele só é utilizado pela primeira vez na demonstração 29 do Livro I dos *Elementos*, com todas as 28 proposições anteriores sendo demonstradas sem a sua ajuda.

Embora as inúmeras tentativas – que remontam a Euclides – de demonstração do postulado V tenham sido infrutíferas, elas revelaram que existem vários enunciados, como o das paralelas, por exemplo, capazes de substitui-lo, mantendo, todavia, as mesmas características da geometria euclidiana.

A substituição do postulado V, por postulados análogos, porém não equivalentes, mesmo mantendo os quatro primeiros axiomas, resultaram em geometrias de características muito diferentes, denominadas, por Gauss, de *geometrias não-euclidianas*, cujas descobertas revelaram matemáticos de nacionalidades que até então não haviam participado direta ou decisivamente da "redação" da história da matemática: Johann Bolyai, da Hungria e Nicolai Ivanovitch Lobachevsky, da Rússia.

Johann Bolyai (1802-1860) foi um oficial do exército húngaro e sua intimidade com a matemática teve início na mais tenra idade, pois seu pai, Wolfgang Bolyai era professor de matemática – amigo de Gauss – tendo incentivado consideravelmente o filho a estudar o postulado das paralelas.

Aos 21 anos Johann Bolyai já tinha a exata dimensão da natureza do problema que lhe havia sido proposto e manifestou seu entusiasmo pela tarefa em uma carta a seu pai em

unesp

1823, onde deixava explícito seu interesse em publicar os resultados obtidos afirmando: "Do nada eu criei um universo novo e estranho". (Eves, 1995, p.542).

Bolyai publicou em 1832 a sua *Ciência Absoluta do Espaço* como apêndice de um trabalho didático, semi-filosófico sobre matemática elementar, de autoria de seu pai.

Como as considerações tecidas por Bolyai se referem a propriedades geométricas que independem do postulado V, isto é, "verdades ou teoremas que são válidos tanto para a geometria ordinária como para a geometria mais geral por ele construída", ele adotou o termo "absoluta" para designar o conjunto de proposições válidas tanto na geometria euclidiana quanto na "nova" geometria. (Babini, 1969, p.118).

Embora tivesse deixado inúmeros manuscritos, Bolyai jamais publicou outros trabalhos não sendo esta, porém, a principal razão para que ele raramente receba os créditos devidos ao estabelecimento de uma "nova" geometria. A razão deste "esquecimento" é que, posteriormente à publicação do húngaro, ficou-se sabendo que o matemático russo Nicolai Ivanovitch Lobachevsky havia publicado entre 1829 e 1830, descobertas muito semelhantes e mesmo mais completas, "mas, devido às barreiras da língua e à lentidão com que as informações das novas descobertas se propagavam naqueles dias, seu trabalho permaneceu ignorado na Europa por vários anos". (Eves, 1995, p.542).

De novo a situação se repete: matemáticos separados geográfica e culturalmente, sem nenhum contato entre si, identificam o mesmo problema e o "resolvem" de maneira semelhante, estabelecendo a mesma teoria, como se esta teoria não houvesse sido criada e sim descoberta, como que referendando a visão platônica da matemática ou mesmo, até, o caráter "sintético *a priori*" kantiano dos juízos matemáticos.

Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856) era professor na Universidade de Kazan, na Rússia, onde ministrou um curso sobre o axioma das paralelas de Euclides. Seu primeiro artigo sobre geometria não-euclidiana foi publicado no Kazan Bulletin em 1829 e em 1830, não tendo, todavia, repercutido na Rússia e por ter sido escrito em russo, quase nenhum estudioso de outro país teve acesso ao mesmo.

A exposição de Lobachevsky, embora semelhante, era mais bem construída que a de

Bolyai e, apesar do pouco reconhecimento alcançado, deu continuidade aos seus estudos, publicando, em 1836, novamente em russo, o livro *Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas* e, em 1840, buscando atingir um número maior de leitores, publica um resumo deste trabalho em alemão e, em 1855, um ano antes de sua morte, já cego, dita a exposição mais completa de sua teoria, a *Pangeometria*, em russo e em francês.

Essa primeira etapa deu origem à geometria hoje conhecida por hiperbólica ou, geometria de Gauss-Lobachevsky ou, geometria de Lobachevsky apenas ou, ainda, embora raramente, geometria de Bolyai-Lobachevsky. Sua principal característica é que, por um ponto exterior a uma reta em um plano existem duas retas paralelas à primeira e, então, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor que dois retos.

O estabelecimento de novas geometrias teve uma divulgação muito lenta entre os estudiosos, não apenas em função das nacionalidades de seus descobridores, mas, principalmente, pela onda de indignação que desencadeou entre matemáticos e filósofos, particularmente os seguidores de Kant, imensa maioria na época.

Apesar das dificuldades, alguns matemáticos, em países diferentes e isoladamente, aprofundaram os estudos sobre as novas idéias e, a partir de 1870, já eram legítimas as investigações das geometrias não-euclidianas segundo duas direções pré-determinadas: "a chamada *métrico-diferencial* e a *projetiva*". (Babini, 1969, p.119).

O caminho métrico-diferencial foi estabelecido por um dos grandes matemáticos do século XIX, o alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826- 1866), discípulo de Gauss que, em 1854, provou ser possível o desenvolvimento de uma nova geometria não-euclidiana além da hiperbólica, a hoje denominada geometria elíptica, na qual, por um ponto exterior a uma reta dada, não passa nenhuma paralela à mesma.

> Menor, igual e maior: três afirmações contraditórias. Estas estabeleceram os três grandes campos da doutrina geométrica: elíptica, parabólica e hiperbólica, sendo a parabólica a de Euclides. Aqui havia a composição de uma batalha de primeira classe, não entre campos científicos opostos sustentando hipóteses relativamente vagas e em conflito, mas, sim, no mesmo nível do argumento lógico, o reino que todos consideravam como seguro. A batalha teve lugar e chegou a seu final. Como uma contenda triangular, todos os lados perderam num certo sentido, o de que qualquer partidário de um dos pontos de vista, declarando que o "seu" era o verdadeiro, colocaria a si próprio numa tarefa quimérica. Ao invés de conservar um poder soberano, cada um destes três campos se encontrava a serviço de um conjunto muito mais fundamental.

unesp

(Turnball, 1968, p.195/196).

As denominações: *hiperbólica* para a geometria de Bolyai-Lobachevsky; *elíptica* para a geometria de Riemann e *parabólica*, para a de Euclides, foram dadas pelo matemático alemão Félix Klein (1849-1925).

> As idéias fundamentais de Riemann, que permitiram encarar o problema das novas geometrias sob um ponto de vista superior, aparecem em sua célebre dissertação de 1854, publicada em 1867: "Sobre as hipóteses fundamentais da geometria", onde analisa da maneira mais geral possível o comportamento infinitesimal de uma multiplicidade de um número qualquer de dimensões. Nesta dissertação aparece a importante distinção entre "infinito" e "ilimitado", que desempenharia papel singular na teoria física da relatividade". (Babini, 1969, p.119).

Diversos outros campos da matemática receberam as contribuições valiosas de Riemann, em particular a teoria da integração e as funções de variáveis complexas e apenas "poucos matemáticos deixaram a seus sucessores um legado de idéias tão rico para desenvolvimento posterior". (Eves, 1995, p.613).

Todavia, em que pese o valor de suas descobertas em campos específicos da matemática, seu maior mérito foi, sem dúvida, o de ter sido o matemático que mais contribuiu para a generalização matemática sem, contudo, descurar do rigor.

A descoberta de geometrias não-euclidianas que fossem internamente consistentes abalou os alicerces do mundo científico de então, de uma forma bastante similar ao impasse provocado pelo surgimento dos números irracionais entre os pitagóricos.

É possível imaginar o impacto gerado por semelhante situação: a matemática deixava de ser a ciência das verdades absolutas, para ser relativa ao campo considerado!

Os estudiosos se viram frente a frente com a possibilidade de criação de diversos sistemas geométricos e a antiga concepção da geometria euclidiana como única e fundada em postulados "auto-evidentes" desmoronou.

> Com a possibilidade de inventar geometrias puramente "artificiais", tornou-se evidente que o espaço físico devia ser visto como um conceito empírico

> derivado de nossas experiências exteriores e que os postulados da geometria, formulados para descrever o espaço físico, são simplesmente expressões dessas experiências, como as leis de uma ciência física. O postulado de Euclides, por exemplo, na medida em que tenta interpretar o espaço real, revela ter o mesmo tipo de validade da lei de queda livre dos corpos de Galileu; isto é, ambos são leis que decorrem da observação e ambos são suscetíveis de verificação dentro dos limites do erro experimental. (Eves, 1995, p.544).

É exatamente este o ponto principal que incomodava os kantianos da época, ou seja, a geometria encarada como uma ciência experimental quando aplicada ao espaço, chocando-se frontalmente com a idéia de espaço como "categoria do pensamento", de Kant, que dominava o pensamento filosófico de então. Concebido o espaço dessa forma, "os postulados da geometria euclidiana são juízos *a priori* impostos ao espírito humano, e que sem esses postulados não é possível nenhum raciocínio sobre o espaço". (Eves, 1995, p.545).

As descobertas de Bolyai-Lobachevsky e de Riemann, posteriormente, retiram toda a sustentação deste ponto de vista e muitos kantianos do século passado se indignaram com elas. Mais tarde, porém, os filósofos neo-kantianos Nelson, Meinecke e Natorp mostraram que a admissão de geometrias não-euclidianas, partindo dos pressupostos de Kant não apenas era possível como, também, necessária.

De acordo com Gottfried Martin, em seu livro Kant – *Ontologia e Epistemologia*, de 1971, Kant expressou o caráter axiomático da geometria em sua tese de que os juízos geométricos são sintéticos. Definiu a natureza analítica e, correlativamente, a sintética de um juízo de duas maneiras: um juízo é analítico se o conceito predicado está incluído no sujeito, ou se pode ser demonstrado utilizando somente o princípio da não-contradição. Freqüentemente, se argumenta que é difícil encontrar especialmente juízos analíticos; na verdade, a maioria deles, segundo Kant, são tautologias como "o todo é maior que sua parte".

Na concepção axiomática da geometria, o predicado não está incluído no sujeito, nem está incluído, necessariamente e, por razões lógicas a ele. Por exemplo, na proposição "a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos", o predicado está unido ao sujeito, porém, os outros dois predicados logicamente possíveis: "menor que dois retos" e "maior que dois retos", podem também se unir ao sujeito "soma dos ângulos de um

triângulo", caracterizando, respectivamente, as geometrias de Euclides, de Lobachevsky e de Riemann.

A axiomática confirma, portanto, a tese kantiana sobre o caráter sintético dos juízos geométricos, pois demonstra que predicados contraditórios podem referir-se ao mesmo sujeito.

Como já foi comentado, ao ser admitida a possibilidade da espontaneidade do pensamento geométrico, ou seja, a geometria sendo considerada como uma criação arbitrária do espírito humano, o ponto de vista reinante da verdade absoluta sofreu um rude golpe e, segundo Eves (1995), a partir deste momento, a matemática começa a se libertar do real.

Todavia, esta liberdade está restrita a contingências não explícitas, que fazem com que, como já foi destacado por diversas vezes, mesmo exercendo o seu livre arbítrio, os matemáticos caminhem por caminhos semelhantes e, mesmo liberta do real no momento de sua criação (segundo Piaget (1975), este é o problema central da epistemologia), a matemática, cedo ou tarde, se adapta plenamente à realidade e mesmo a antecipa.

2.1.2 A aritmetização da análise

Durante o século XVIII, com Euler e Lagrange, a análise infinitesimal atingiu enorme progresso, progresso este, todavia, que não se encontrava fundamentado em nenhum sistema conceitual rigoroso, ao contrário, era puramente formal e algorítmico, de forma que, "quando se referia aos seus fundamentos, se falava do *cálculo infinitesimal*" e, no que se referia à teoria das séries, "o uso de séries divergentes estava rodeado de mistério e obscuridades". (Babini, 1969, p.120).

> Será tarefa do século XIX analisar esses fundamentos e esses princípios, introduzindo na matemática um rigor ainda superior ao que desfrutou essa ciência no período clássico de Euclides e de Arquimedes, rigor este, que desde então constitui uma de suas notas características. (Babini, 1969, p.115).

No decorrer do século XIX, a análise infinitesimal elimina toda a alusão à metafisica e fixa sólidas bases na aritmética, num processo iniciado pelo tcheco Bernad Bolzano (1781-1848) e construído por Cauchy, Abel e Jacobi, entre outros, que ficou conhecido como

aritmetização da análise.

O francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) pode ser considerado o mais importante analista das primeiras décadas do século XIX. Estudou na Escola Politécnica onde foi aluno de Lagrange e Laplace que, convencidos de seu talento matemático o persuadiram a abandonar a pretensão inicial de se tornar engenheiro civil em prol da ciência pura, aceitando um cargo de professor na escola Politécnica em 1807. "Cauchy escreveu extensiva e profundamente tanto sobre matemática pura como sobre matemática aplicada" e o volume de sua obra só encontra comparação com o trabalho de Euler. (Eves, 1995, p.531).

A produção excessiva e a redação apressada tornaram irregular a qualidade de seus escritos, entretanto, dentre as numerosas contribuições de Cauchy à matemática avançada, destacam-se a pesquisa em convergência e divergência de séries infinitas, teorias das funções reais e complexas, equações diferenciais, determinantes, probabilidades e fisica-matemática.

A abordagem atual do cálculo em textos universitários é, em grande parte, devida a Cauchy, particularmente, os conceitos básicos de limite e continuidade.

Com Cauchy há um retorno ao rigor clássico da geometria, buscando-se a precisão nas definições; a delimitação do domínio de validade das fórmulas, a eliminação de toda extensão ilegítima de forma a livrar a análise libertando-a da "manipulação formal cega e das demonstrações intuitivas". (Eves, 1995, p.121).

Para fundar a análise sobre bases mais rigorosas que seus antecessores, Cauchy "fixa claramente a convergência das séries", eliminando as divergentes da análise, completando assim, a obra iniciada por Niels Henrik Abel. (Babini, 1969, p.121).

Niels Henrik Abel (1802-1828) nasceu na Noruega e quando ainda era estudante em Oslo, acreditou ter encontrado a solução algébrica geral da equação quíntica, porém, logo percebeu o seu equívoco e, num artigo em 1824 demonstrou que "exceto em casos particulares, de um modo geral é impossível resolvê-las utilizando-se apenas as operações algébricas (soma, subtração, multiplicação, divisão e radiciação)". (Garbi, 1997, p.153).

unesp

Em virtude da importância do resultado obtido, Abel recebeu uma pequena bolsa do Conselho Universitário da Universidade de Oslo, que lhe permitiu viajar para a Alemanha, Itália e França e mesmo durante suas viagens, Abel continuava produzindo e neste período "escreveu vários artigos em diversas áreas da matemática como a da convergência de séries infinitas, a das integrais abelianas e a das funções elípticas". (Eves, 1995, p.553).

Na criação e sistematização do estudo das funções elípticas obtidas como funções inversas das integrais elípticas foi também grande a contribuição do alemão Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) que, trabalhou de forma independente – embora simultaneamente – a Abel.

O significado dos estudos de Abel e Jacobi sobre as funções elípticas extrapola a questão simplesmente conteudística, pois retrata mais um capítulo da "libertação" da matemática da mecânica e da astronomia, ou seja, das ciências naturais, uma vez que a concepção vigente era a de que a finalidade principal da matemática seria a explicação dos fenômenos naturais e sua aplicação no cotidiano das pessoas.

K 1394

Face às diversas críticas que receberam, Jacobi se pronunciou na defesa da pesquisa pura contra a pesquisa aplicada em matemática: "a única finalidade da ciência é a honra do espírito humano e, em conseqüência, uma questão da teoria dos números tem um valor tão grande como uma questão acerca do sistema dos mundos". (Babini, 1969, p.122).

Assim, quase que ao mesmo tempo em que as geometrias não-euclidianas se desprendiam do mundo físico, a análise se liberta das ciências naturais, e o "grito de autonomia da matemática havia sido dado". (Babini, 1969, p.122).

O principal continuador da obra de Abel e Jacobi sobre as funções elípticas foi o alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) que, além de diversos trabalhos sobre integrais hiperelípticas, funções abelianas e equações diferenciais algébricas, contribuiu grandemente com a teoria das funções complexas por meio de séries de potências e foi também um dos precursores da aritmetização da análise ou seja da redução dos princípios da análise ao conceito de número real.

Influente professor, ministrava aulas meticulosamente preparadas e, grande parte de suas descobertas se tornaram conhecidas através de suas notas de aula, como aconteceu com o

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

exemplo que impressionou os matemáticos de sua época, o da existência de uma função contínua sem derivada em nenhum de seus pontos.

Trabalhou também com questões vinculadas aos fundamentos da aritmética, demonstrando o "teorema final da aritmética", segundo o qual não existe nenhum sistema de números complexos com mais de duas unidades e, ainda, na fundamentação dos números reais, "problema que não havia sofrido modificações essenciais desde a teoria (baseada em magnitudes geométricas) de Eudoxo". (Babini, 1969, p.123).

Weierstrass era tão rigoroso em seus trabalhos que, segundo Eves (1995), a expressão "rigor weierstrassiano" significava o mesmo que "raciocínio extremamente cuidadoso".

Em meados do século XIX, pode-se considerar que a aritmetização da análise se completa com o advento da "passagem ao limite", operação de natureza peculiar que se localiza "nas fronteiras entre a aritmética (teoria dos números) e a geometria (grandezas irracionais) em suas duas formas características: mediante o infinito enumerável e o infinito contínuo, respectivamente". (Babini, 1969, p.123).

Assim, mediante uma definição específica e um uso adequado desta operação, os métodos infinitesimais que tiveram suas origens nos trabalhos de Newton e Leibniz e cujos alicerces foram investigados por Lagrange, encontram uma base sólida, de natureza aritmética, na qual sustentar-se.

A aritmetização da análise afastou de vez "as brumas metafísicas que durante todo o século XVIII haviam obscurecido os fundamentos da análise". (Babini, 1969, p.124).

2.1.3 A álgebra abstrata

A "libertação" da álgebra também é procurada neste fantástico século matemático. Um dos progressos algébricos mais importantes foi na teoria das equações algébricas com a demonstração da impossibilidade de se resolver a equação do quinto grau (e de graus superiores) mediante o uso de radicais. O primeiro passo havia sido dado em 1798, pelo italiano Paolo Ruffini (1765-1822), porém, a demonstração rigorosa e geral se deve, como já mencionado, a Abel.

unesp

É este estudo, o da resolubilidade das equações algébricas de grau superior que dá origem a um dos conceitos fundamentais da matemática contemporânea, o conceito de "grupo", presente também na física teórica, conceito este a que Piaget se refere (e utiliza) com freqüência.

> Fundamento da álgebra, a estrutura de grupo revelou-se de uma generalidade e de uma fecundidade extraordinárias. Encontramo-la em quase todos os domínios das matemáticas e na lógica; adquiriu uma importância extraordinária na física e é provável que o mesmo acontecerá um dia em relação à biologia. (Piaget, 1979, p.19).

O estudo sistemático da teoria dos grupos, tal como hoje se apresenta, se iniciou com o francês Évariste Galois (1811–1832), um gênio matemático "de primeira ordem que, tal como um cometa, desapareceu tão rapidamente como tinha aparecido", pois, uma armação política, envolvendo um suposto caso amoroso, resultou em sua morte, aos 21 anos, num duelo a pistolas. (Struick, 1992 p.244)

Muitos de seus trabalhos foram publicados apenas após a sua morte por Joseph Liouville (1809-1882), em 1846, no Jornal de Mathématique.

Na véspera do duelo, convicto de sua morte, Galois escreveu a um amigo, uma espécie de "testamento científico", contendo um resumo das suas descobertas na teoria das equações e, terminava com um apelo: "Contata Jacobi ou Gauss para darem sua opinião não sobre a verdade, mas sobre a importância dos teoremas. Depois existirá alguém, espero, que ache vantajoso decifrar todo esse emaranhado". (Struick, 1992, p.244).

Este "emaranhado" exigiu, posteriormente, o esforço de diversos matemáticos para ser devidamente esmiuçado e continha nada menos que a "chave da álgebra e da geometria moderna", a teoria dos grupos. (Struick, 1992, p.245)

Uma avaliação completa das realizações de Galois, nos seus escassos 21 anos de vida, só foi realizada em torno de 1870, "quando Camille Jordan (1838-1902) as expôs em seu livro *Traité des Substitutions* e mais tarde ainda, quando Felix Klein e Saphus Lie (1842-1899) brilhantemente fizeram uso delas na geometria". (Eves, 1995, p. 535).

Galois, foi também o pioneiro no uso da palavra "grupo" (1830) em seu sentido técnico e, com o trabalho de diversos outros matemáticos, como Cauchy, Cayley, Lie, Klein,

unesp

Poincaré, a teoria dos grupos penetrou nos diversos campos da matemática, exercendo o papel de codificador na Geometria e, "em álgebra serviu como uma estrutura atômica de coesão, fator de grande importância para a ascensão da álgebra abstrata do século XX". (Eves,.1995, p.536)

Considerada como uma das grandes realizações da matemática no século XIX, a teoria dos grupos ainda é, atualmente, um campo de pesquisas fecundo.

A exemplo da análise e da geometria que não só avançaram em seus conteúdos específicos como retornaram aos seus próprios fundamentos, a álgebra do século XIX também enveredou por caminhos outros além da teoria dos grupos: a análise dos conceitos fundamentais, que ao dar origem a novos sistemas de entes matemáticos, cujas operações não satisfazem totalmente as leis da álgebra ordinária, promove a "libertação" da álgebra da sua forma comum da aritmética.

Assim como ocorreu com as geometrias não-euclidianas, onde a idéia de que a soma dos ângulos internos de um triângulo poderia ser diferente de dois retos parecia inconcebível, a possibilidade de uma álgebra consistente onde não se verificasse a comutatividade da multiplicação, isto é, onde a x b $\neq$ b x a, não só "não ocorria a ninguém na época, como também, se ocorresse, certamente seria descartada por parecer uma idéia ridícula". (Eves, 1995, p.548).

Foi isto, porém, o que aconteceu quando, em 1843, William Rowan Hamilton (1805-1865) impulsionado por considerações físicas, depois de muitos anos debruçado sobre um problema particular, estabeleceu uma álgebra em que a lei comutativa não valia.

O sistema criado por Hamilton é a *álgebra vetorial* oriunda da intenção de ampliar para o espaço a representação plana dos números complexos ordinários. Especificamente falando, o sistema criado por Hamilton é o dos *quatérnios*, números de quatro unidades no qual são válidas todas as propriedades das operações fundamentais da aritmética, exceção feita à comutatividade da multiplicação.

Ampliando esses estudos, outros matemáticos chegaram ao estabelecimento da álgebra vetorial, em particular, o alemão Hermann Grassmann (1809-1877), que em seu tratado *Teoria da Extensão*, fundou em 1844, de forma bastante abstrata, as bases de um cálculo

unesp

geométrico (ou álgebra vetorial) mais geral, o *sistema dos hipercomplexos.*

Um outro exemplo de álgebra não-comutativa é a álgebra das matrizes, descoberta pelo matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895).

> Desenvolvendo álgebras que satisfazem leis estruturais diferentes daquelas obedecidas pela álgebra usual, Hamilton, Grassmann e Cayley abriram as comportas da álgebra abstrata. De fato, enfraquecendo, suprimindo ou substituindo um ou mais postulados por outros consistentes com os demais, pode-se estudar uma enorme variedade de sistemas. Esses sistemas incluem grupóides, semigrupos, monóides, grupos, anéis, domínios de integridade, reticulados, anéis de divisão, anéis booleanos, álgebras booleanas, corpos, espaços vetoriais, álgebras de Jordan e álgebras de Lie, sendo os dois últimos exemplos de álgebras não associativas. Provavelmente é correto dizer que os matemáticos estudaram, até hoje, mais do que 200 dessas estruturas algébricas. A maior parte deste trabalho se deu no século XX e reflete o espírito de abstração e generalização que prevalece atualmente na matemática. A álgebra tornou-se o vocabulário da matemática dos dias de hoje e foi apelidada "a chave-mestra da matemática". (Eves, 1995, p.553).

2.1.4 Kronecker, Kummer, Cantor e Poincaré

A redução da análise aos conceitos matemáticos mais simples não se concluiu com os trabalhos de Weierstrass, na verdade, a aritmetização da análise foi típica da escola de Berlim onde se destacaram Kummer, Cantor e Dedekind, porém, particularmente, Leopold Kronecker.

Leopold Kronecker (1823-1891) nasceu em Liegnitz e após concluir seus estudos na Universidade de Bonn, atuou no mundo dos negócios de 1844 a 1855 e, graças a um incomum talento para as finanças amealhou considerável fortuna.

Em 1855 mudou-se para Berlim e em 1861 ingressou como professor na Universidade local, constituindo com Kummer e Weierstrass o sustentáculo da matemática local. Suas principais contribuições foram na teoria das funções elípticas, na teoria das equações e na teoria dos números algébricos sendo que seus escritos acerca desta última "são exposições cuidadosas de suas descobertas anteriores e mostram claramente a sua crença na necessidade de aritmetizar as matemáticas". (Struick, 1992, p.258).

unesp

Kronecker acreditava que toda matemática deveria se fundar sobre o conceito de número natural, único tipo de número cuja existência seria inquestionável e com ele se inicia uma tendência sobre os fundamentos da matemática que seria denominada no século XX de *intuicionismo*. Existe, todavia, uma diferença básica entre Kronecker e os intuicionistas do século XX: enquanto para estes últimos, os números naturais são resultado de uma "intuição básica", para o alemão, um pitagórico do século XIX, eles constituíam um ato de fé expressa pela afirmação proferida em um congresso em Berlim, no ano de 1886: "O bom Deus criou o número natural, o resto é obra humana". (Eves, 1995; Struick, 1992; Boyer, 1974; Babini, 1969).

É comentando esta afirmação que Piaget inicia a parte destinada à epistemologia das matemáticas na sua obra *Epistemologia Genética*, pois entende que Kronecker reconheceu que o número natural constitui a gênese pré-científica da matemática:

> Quando chamou os "números naturais" de um presente do Bom Deus, tendo os homens fabricado todo o resto, Kronecker reservou de imediato esse papel à gênese pré-científica mas sem se aperceber suficientemente de que esta, analisável nas sociedades primitivas, nas crianças e outros representantes do Bom Deus (não esqueçamos os periquitos de Otto Kohler), era de natureza bastante análoga ao trabalho ulterior dos próprios matemáticos: as correspondências biunívocas introduzidas por Cantor para fundar a teoria dos conjuntos são conhecidas desde os tempos imemoráveis na troca direta de um contra um, e sua formação pode ser acompanhada de perto na criança e mesmo em certos vertebrados superiores. (Piaget, 1990, p.77).

Ernest Kummer (1810-1893) foi chamado a Berlim para suceder a Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) na cátedra que havia sido de Gauss em Göttingen - e a quem se deve a aplicação dos métodos infinitesimais na teoria dos números -, tendo lecionado nesta universidade até 1883, quando se afastou, voluntariamente, por achar que já não estava produzindo como anteriormente, entretanto, após seu afastamento desenvolveu a geometria diferencial das congruências, entre outros estudos.

Porém, foi através de suas infrutíferas tentativas de resolver o último teorema de Fermat que alcançou notoriedade, pois elas redundaram na introdução de números "ideais" na teoria dos domínios algébricos possibilitando grandes avanços neste ramo da matemática.

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor (1845-1918), nasceu em São Petersburgo, na

Rússia, filho de pais dinamarqueses e, a exemplo de Poincaré, desenvolveu parte das suas atividades no século XIX e parte no século XX.

Quando Cantor tinha onze anos, sua família transferiu-se para Frankfurt, na Alemanha tendo, portanto, sido educado em escolas alemãs.

Produto de um lar religiosamente controvertido – o pai era um judeu convertido ao protestantismo e a mãe era católica – "tomou-se de um profundo interesse pelo teologia medieval e seus argumentos intrincados sobre o contínuo e o infinito" , o que influenciou, sobremaneira em sua opção profissional, pois decidiu estudar filosofia, física e matemática em lugar de engenharia, que era o desejo de seu pai. (Eves, 1995, p.615). Ensinou em Halle, de 1869 até 1905 e ali faleceu, em 1918, no sanatório da cidade.

Seus primeiros trabalhos se referiam à teoria dos números, equações indeterminadas e séries trigonométricas sendo que estudos mais profundos relacionados ao último tema conduziram-no aos fundamentos da análise onde criou uma famosa abordagem para os números irracionais.

É, porém, com a sua teoria dos conjuntos, que Cantor conquistou a imortalidade devida aos grandes gênios, pois "criou um campo inteiramente novo da pesquisa matemática, que era capaz de satisfazer as exigências mais sutis do rigor uma vez que as premissas fossem aceitas". (Struick, 1992, p.259).

Em seus artigos, cujas publicações se iniciaram em 1879 e continuaram até muito tempo depois, Cantor desenvolveu "a teoria dos números transfinitos, baseado num tratamento matemático do infinito atual", e desde modo, foi possível estabelecer uma aritmética dos números transfinitos análoga à aritmética dos mundos finitos. Definiu também, números ordinais transfinitos expressando assim, a existência de uma ordem para os infinitos.

O trabalho de Cantor, ao refletir sua simpatia pelas especulações medievais acerca da natureza do infinito encontrou fortes oposições, particularmente de Kronecker que, por recusar a aceitar a idéia de infinito diferente do atual, considerava Cantor como um herege e resolutamente se opôs aos esforços deste último em lecionar na Universidade de Berlim, reduto do alemão.

Na verdade, ambos buscavam a aritmetização da análise, cada um, porém, assentado em

unesp

bases diferentes.

Atualmente a teoria de Cantor permeia quase todos os campos da matemática, particularmente na fundamentação da teoria das funções reais e da topologia, o que não impediu que continuassem a existir dificuldades lógicas na teoria dos números transfinitos, dando origem a paradoxos, como os de Russell e de Forti-Burali.

Para Eves (1995) e Struick (1992), a controvérsia do século XX entre os formalistas, liderados por Hilbert e os intuicionistas, partidários de Brouwer era uma continuação da controvérsia, em novo nível, entre Cantor e Kronecker.

Jules Henri Poincaré (1854-1912) é considerado o matemático mais importante deste período transitório entre os séculos XIX e XX. Nasceu em Nancy, na França, numa família influente que, destinou à humanidade várias figuras ilustres entre estadistas e cientistas, como por exemplo, seu primo Raymond Poincaré, que foi presidente da França durante a I Guerra Mundial além de um de seus irmãos, F. Poincaré, que foi um importante físico.

Graduou-se na Escola Politécnica em 1875; na Escola de Minas (como engenheiro de minas) em 1879, mesmo ano em que, aos 25 anos, obteve seu doutorado em ciências, na Universidade de Paris.

Trabalhou por dois anos como professor na Universidade de Caen e após "transferiu-se para a Universidade de Paris, onde ocupou várias cadeiras nas áreas de matemática e ciências, até sua morte em 1912". (Eves, 1995, p.288).

> Nenhum matemático da sua época dominou tal variedade de assuntos e foi capaz de os enriquecer a todos. Cada ano dava lições sobre um assunto diferente; estas lições foram editadas pelos estudantes e cobrem um campo enorme: teoria do potencial, luz, eletricidade, condução do calor, capilaridade, eletromagnetismo, hidrodinâmica, mecânica celeste, termodinâmica, probabilidades. Cada uma destas lições era brilhante à sua maneira; juntas apresentam idéias que deram frutos nos trabalhos de outros, enquanto muitas ainda esperam uma elaboração futura. (Struick, 1992, p.289/290).

Como nunca se preocupou em permanecer e se aprofundar num determinado campo por

muito tempo, saltando de uma área para outra intermitentemente, Poincaré foi descrito por seus contemporâneos como "um conquistador e não um colonizador" . (Eves, 1995,617)

Contribuiu com diversas áreas da matemática como equações diferenciais (tese de doutorado), teoria das probabilidades, teoria dos grupos e interessou-se pela topologia antecipando-se aos matemáticos do século XX.

Interessou-se pelas geometrias não-euclidianas, mas, ao contrário do que depois se comprovou, de que todas possuíam o mesmo grau de veracidade, preocupou-se sobremaneira em descobrir qual a "verdadeira geometria", o que, segundo Piaget, pode ter sido o fato que impediu Poincaré de "descobrir" a teoria da Relatividade:

Produziu mais de 500 artigos técnicos e mais de 30 livros tendo sido também um dos principais e mais hábeis divulgadores da matemática e da ciência mediante uma série de obras populares e semi-técnicas onde mostrou ter uma compreensão geral dos problemas que a matemática moderna entre as quais estão *"La valeur de la science"* (1905) e *"A ciência e a hipótese"* (1906).

Seu texto semi-popular publicado em 1906, de cunho filosófico, apresenta uma "teoria da matemática na qual é sensível a influência de Kant". (Costa, 1971, p.92)

Poincaré, ainda na "*A ciência e a hipótese*" questiona a verdade científica em geral e a da matemática em particular se delas não se puder extrair nenhum conhecimento da realidade:

> Para um observador superficial, a verdade científica não está sujeita à dúvida; à lógica da ciência é infalível e se, por vezes, os sábios se enganam, isso acontece por terem desprezado a lógica científica.(Poincaré, 1985, p.15).
>
> Se assim fosse, a ciência seria impotente. Ora, nós a vemos, a cada dia, agir sob nossos olhos. Não poderia ser assim, se ela não nos fizesse conhecer coisa alguma da realidade; mas o que ela pode atingir não são as próprias coisas, como pensavam os dogmatistas ingênuos, mas somente as relações entre as coisas. Fora dessas relações, não há realidade conhecível. (Poincaré, 1985, p.16).

Poincaré aceita o conceito kantiano de juízo sintético *a priori* para a matemática e se vale da aritmética dos números inteiros – domínio onde a matemática conserva sua pureza

máxima - para fundamentar a sua crença e, mediante a análise desse ramo em particular, conclui que a rainha das ciências não pode ser puramente analítica pois constrói combinações de complexidade crescente e o instrumento dessa construção é o *princípio da recorrência*: "Se um teorema é verdadeiro para o número **um** e se do fato de ser verdadeiro para o número **n** decorre necessariamente que o seja para o número **n+1**, o teorema é verdadeiro para um número inteiro qualquer".

Como o princípio da recorrência é possível em virtude da certeza que se tem de poder repetir indefinidamente a primeira operação realizada, "há nesta passagem do particular ao geral certa analogia, donde a designação de *indução completa* que alguns autores dão ao método". Não se trata, todavia, de uma indução mas, sim, de uma dedução progressiva e rigorosa que justifica a freqüente utilização em matemática. (Costa, 1971, p.94).

Bastante influenciado pelo sistema kantiano, Poincaré porém não se contentava apenas com o fato de que os postulados matemáticos fossem juízos sintéticos *a priori*, era preciso, também, que os conceitos aos quais se referissem correspondessem a certas intuições materiais, intuições estas que são indispensáveis à construção da ciência.

Assim, tal como em Kant, a matemática para Poincaré se apóia em "intuições", dentre elas, a de número, razão pela qual, é considerado um dos "fundadores" do intuicionismo.

O número possui o duplo caráter de conceito puro e de forma intuitiva. É conceito puro enquanto esquema do conceito de grandeza, ou seja, "é a parte sem a qual não se pode passar da grandeza pura à sua imagem no espaço e no tempo". É forma intuitiva, porque representa a seqüência aditiva de uma unidade à outra unidade e "realiza a síntese de um mesmo objeto no espaço e no tempo". (Costa, 1971, p.93).

Ao concluir que o princípio de recorrência é sintético porque não se reduz à lógica do princípio da não contradição e *a priori* porque só poderia ser provado mediante um número infinito de experiências, o que é impossível, Poincaré enxergou no método matemático um elemento intuitivo, sendo que para ele, "intuição", como o número, possuía o duplo sentido de "fonte de noções puras ou como instinto inventivo". (Costa, 1971, p.94).

Como "fonte de noções puras", a intuição direciona o espírito para a noção de número inteiro e, como instinto inventivo, impulsiona o profundo trabalho do espírito na

unesp

descoberta científica.

Assim, para Poincaré o número possui um caráter sintético e irredutível, enquanto que para Russell, conforme será explicitado posteriormente, o número cardinal será a "classe das classes", o que retrata a oposição existente entre as correntes de pensamento matemático: logicismo e intuicionismo, que, juntamente com o formalismo de Hilbert, pretenderam resolver a "crise dos fundamentos" no século XX.

Piaget assim se expressa a respeito das relações entre a aritmética (base do intuicionismo) e da lógica (alicerce do logicismo) e da solução por ele proposta, de que a sucessão dos números constitui-se na síntese operatória da classificação e da seriação.

> Sabe-se bem, com efeito, quantas discussões o problema das relações entre o número e a lógica ocasionou, com os logísticos procurando, com Russell, conduzir o número cardinal à noção de "classe de classes" e o número ordinal, dissociado do primeiro, à de classe de relações, enquanto seus adversários mantinham, como H. Poincaré e L. Brunschvicg, o caráter sintético e irredutível do número inteiro. É verdade que nossa hipótese, num certo sentido, permite escapar a essa alternativa, porque se o número é classe e relação assimétrica ao mesmo tempo, ele não deriva de tal ou qual das operações lógicas particulares, mas somente da sua reunião, o que concilia a continuidade com a irredutibilidade e leva a conceber como recíprocas e não mais como unilaterais as relações entre a lógica e a aritmética. Delas não convinha menos verificar sobre o próprio terreno logístico as conexões assim estabelecidas pela experimentação psicológica e foi o que logo tentamos. (Piaget, 1981, p.13).

Muitos fatos e matemáticos importantes do século XIX deixaram de ser aqui mencionados, todavia, segundo Ogilvy (1956), a "mais completa obra existente de história da matemática é a coleção de quatro volumes *Genschichte*, de Moritz Cantor", totalizando 3600 páginas e ela cobre apenas até o ano de 1799! Ainda segundo o autor, para tratar apenas do século XIX, seriam necessárias outras tantas, logo, o que se pretendeu aqui, foi apenas um esboço sobre as principais conquistas desse período e de seus conquistadores. (Ogilvy, 1956, p.5).

2.2 O SÉCULO XX

É difícil poder separar, com precisão, quais as principais contribuições dos matemáticos do século XX, em virtude de sua proximidade com o momento atual, o que impossibilita

verificar as conseqüências dos feitos realizados neste período, de maneira que, à exceção da demonstração do último teorema de Fermat, por Andrew Wyles e que pode ser considerado um grande feito, pela notoriedade do problema, são destacados aqui, apenas três pontos, todos referentes à primeira metade do século, cujas repercussões já são facilmente percebidas: 1) o aparecimento dos *Principia Mathematica*, de Russell e Whitehead, considerado por Grize, como o ponto culminante do desenvolvimento da lógica; 2) o desenrolar da crise dos fundamentos, desencadeada no final do século XIX e, 3) a descoberta das estruturas elementares, por Nicolas Bourbaki.

2.2.1 Lógica e a Lógica Operatória de Jean Piaget

Ao pretender que as operações lógico-matemáticas procedam diretamente das ações mais gerais que o sujeito exerce sobre os objetos, ou grupos de objetos, Piaget pretende fundar a lógica na psicologia genética e são várias as obras em que trata da questão, apresentando não uma "nova" lógica, mas uma interpretação particular da mesma, que importa ser mencionada. Como neste tópico é tratada a lógica matemática, ou lógica simbólica, entendeu-se ser pertinente o tratamento, na seqüência, da interpretação piagetiana da lógica.

Para isso, se incursiona, rapidamente pela história da lógica, pelas suas diferentes formas, pelas suas relações com a matemática, finalizando com a lógica operatória de Piaget.

Do mesmo modo como acontece com os indivíduos, que operam mentalmente muito antes de ter consciência das operações que realizam, a humanidade esperou muito tempo antes que pudesse perceber a existência dos mecanismos de pensamento próprios da espécie.

Pode-se dizer que o início da lógica se dá com os pitagóricos, devido ao fato de que Pitágoras (582-500 a C.) e alguns de seus discípulos foram os primeiros a se preocuparem em demonstrar suas idéias, conseguindo mesmo mostrar, em alguns casos específicos, que as mesmas eram verdadeiras, sem que tivessem que recorrer à observação para isso. É o caso específico da descoberta comprovada dos números irracionais descoberta esta fundamental e de grandes conseqüências para o desenvolvimento da matemática.

Como a palavra *logos*, que dá origem à palavra lógica, significa ao mesmo tempo discurso e razão, desde a sua origem, aparecem dois campos bem distintos de exercício da lógica: o

unesp

da matemática e o da retórica. De acordo com Boll e Reinhart (1946), foram os eleatas - Parmênides e Zenão - os primeiros a estabelecer relações entre a coerência do pensamento e a forma em que é exposto pelo discurso. Além disso, os sofistas também fazem as primeiras análises do discurso e Platão, as primeiras análises do raciocínio, o que não tira, todavia, de Aristóteles, a paternidade da lógica, uma vez que foi ele, o primeiro a formalizar os resultados já existentes e o criador do primeiro formalismo lógico, o *silogismo.*

Aristóteles (384-322 a.C.) foi, com certeza, um dos maiores cérebros da antiguidade, sendo que sua obra, considerada no contexto de sua época é notável, porém ela não teve uma continuidade satisfatória, ou seja, ela não foi criticada ou complementada, ao contrário, na Idade Média, as verdades dogmáticas e a lógica aristotélica tinham o mesmo *status*.

A lógica formal ou clássica, devida a Aristóteles, determina quais são, entre as operações do espírito (formação dos conceitos, dos juízos, dos raciocínios), as que são válidas e as que não o são, independentemente de seu conteúdo e em virtude apenas de sua forma, estudando, conseqüentemente suas propriedades, suas condições de implicação ou de exclusão e os seus modos de encadeamento.

A lógica aristotélica se opunha à escola megárico-estóica, sendo que a supremacia em termos de aceitação e difusão da primeira, fez com que a segunda permanecesse praticamente desconhecida e relegada a um segundo plano, até recentemente.

Na lógica megárico-estóica, pode-se encontrar o esboço de uma lógica seqüencial. As proposições lógicas são formadas por palavras da linguagem corrente e "sua base é o pensamento como se encontra expresso na linguagem natural, que fornece as leis e as regras formais". (Bastos e Keller, 1998, p.16).

Os estóicos e megáricos utilizam uma nomenclatura diferente da de Aristóteles, dando a falsa impressão de que seu trabalho é completamente diverso do realizado pelo filósofo de Estagira. Na verdade, segundo se sabe hoje, os estóicos e megáricos desenvolveram aspectos diferentes dos desenvolvidos pela escola aristotélica, de modo que, não se encontra nos estudos realizados pela escola megárico-estóica nada daquilo que era examinado por Aristóteles e seus seguidores.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

Depois do período dos estóicos, a lógica permanece praticamente intacta. Não surgem novos problemas e o que se procura é apenas "aperfeiçoar certas técnicas e a maneira de se ensinar lógica". (Hegenberg, 1977, p.23).

Dos poucos trabalhos que apareceram neste período, destaca-se a obra de Boécio (cerca de 480-524), que traz ainda a união de aspectos da lógica aristotélica e da dos estóicos, se transformando, de acordo com Hegenberg (1977), na chave das principais questões que seriam examinadas no período escolástico.

Se até o século IX d. C, praticamente nada de novo se produziu, a partir do século IX e até o século XV d. C, o período é de grande atividade, sendo que os próprios medievais estabeleceram uma periodização para a forma escolástica. É importante frisar que os principais registros deste período referem-se à lógica ocidental, já que a árabe e a judaica continuam até os dias atuais, praticamente desconhecidas. Além disso, quase nada se sabe dos séculos XIV e XV.

A periodização estabelecida pelos próprios medievais permite identificar um período de estagnação, e mesmo decadência, conforme Hegenberg (1977), que se prolonga até o que pode ser considerado o início da forma escolástica da lógica, com a *Ars vetus*, representada Abelardo (1079-1142). A preocupação central desse período é o trabalho com as categorias aristotélicas e mesmo com a própria interpretação da lógica do mestre de Estagira. O único problema novo que é trabalhado nessa época, diz respeito às propriedades dos termos.

Após esse período de estagnação, é possível identificar uma certa vitalidade, que caracteriza a *Ars nova* e tem com principais representantes Petrus Hispanus, um lisboeta nascido entre 1210 e 1220, Alberto Magno (1193-1280) e Tomás de Aquino (1227-1274). O objetivo principal que norteava tais estudos era fortalecer o ensino da ortodoxia católica.

O terceiro período, o da *lógica modernorum*, é a época da sistematização, iniciada com Guilherme de Occam (1295-1350), se caracteriza pela elaboração de uma lógica formal e semiótica, se prolongando até o fim da Idade Média (século XV).

O período clássico se inicia no século XVII e abrange três tendências especiais: a do humanismo, a do classicismo e a das inovações esboçadas. Durante o Renascimento, de

unesp

maneira geral, o principal interesse estava em descobrir novos métodos que pudessem auxiliar a pesquisa cientifica. Assim, cabe à matemática orientar os novos rumos da pesquisa, fundamentando seus métodos. A lógica é considerada estéril e concluída por Aristóteles.

É apenas com Leibniz (1646-1716), que começa a procura de uma característica universal, adaptada a todas as formas de pensamento. As idéias extremamente inovadoras de Leibniz, só viriam a ser reconhecidas e convenientemente apreciadas, ao final do século XIX, fazendo com que passasse a ser considerado o pioneiro da lógica matemática contemporânea.

Os séculos XVII, XVIII e a primeira parte do século XIX, pouco contribuíram para o desenvolvimento da lógica, entretanto, como este período foi dominado pela preocupação da criação de uma *Scientia universalis* e de uma *Lingua rationalis* - os mesmos problemas que dominaram toda a vida de Leibniz -, muitos pesquisadores se empenharam na criação de uma língua universal, contribuindo, ainda que de forma indireta com o desenvolvimento da lógica. De qualquer forma, é a Leibniz que se deve o "ter claramente concebido e parcialmente esboçado duas formas da lógica moderna: a de uma linguagem artificial, desprovida de toda ambigüidade, e a de uma manipulação regrada dos símbolos" (Grize, in Piaget, 1980 et al., p.120)

O desenvolvimento da lógica ganha novo impulso e uma fase de grande vitalidade a partir de George Boole (1815-1864), iniciando um novo período da história da lógica: a *lógica matemática*.

As lógicas elaboradas pelos filósofos antigos e pelos lógicos da Idade Média apresentam quatro características essenciais. São *bivalentes*, isto é, obedecem ao princípio aristotélico do terceiro excluído, admitindo como valores lógicos apenas o verdadeiro e o falso; são *normativas*, no sentido de que se deva evitar o falso e buscar o verdadeiro; não possuem uma linguagem própria, fazendo uso da linguagem ordinária e, por último, estão vinculadas a uma *metafísica existencialista*, isto é, a própria realidade dos seres é expressa por conceitos lógicos.

Com o aparecimento da álgebra na Idade Média, estas características começam a se alterar, particularmente com os princípios da lógica simbólica estabelecidos por Leibniz, porém, a

construção de uma lógica formal, livre dos problemas que impediram o desenvolvimento da lógica clássica, só se efetivaria a partir do século XIX, com o conjunto dos trabalhos de diversos pensadores, os mais importantes, sem dúvida, foram os de Boole, De Morgan, Frege e Peano.

O trabalho "inaugural" dos novos rumos dos estudos da lógica, foi a obra de Boole (1815-1864), *The mathematical analysis of logic*, publicada em 1847, que contém a maior parte das idéias mestras de uma matematização nascente da lógica, cuja constituição se completa com a publicação, em 1854, das *Investigations of layes of thought*, onde o autor compara as leis do pensamento às leis da álgebra e estabelece uma álgebra das operações mentais ou uma álgebra da lógica. É com Boole que, pela primeira vez, a lógica das classes recebe um tratamento explícito.

Os resultados de Boole foram aperfeiçoados por S. Jevons e por J. Venn, cujos trabalhos marcam o fim de um período na história da lógica simbólica, entretanto, embora o corpo da doutrina que eles constituíram fosse muito mais rigoroso e compreensivo do que a lógica clássica, não se distingue essencialmente desta, sendo, no fundo, uma "transposição algébrica da silogística", o que tornaria sua importância para a matemática quase nula, não fosse o desenvolvimento de estudos mais modernos. (Costa, 1971, p.206).

Estes estudos originaram-se com E. Schroeder e principalmente, com Charles Peirce. Ambos esboçaram o cálculo das relações, entrevisto por Leibniz e, a seguir, os trabalhos de Frege, Peano, Russell e Whitehead, completaram, por fim, a álgebra da lógica.

No final do século XIX, mais especificamente em torno de 1880, com a "crise dos fundamentos", as relações entre lógica e matemática se invertem: se antes o que se viu com Boole e seus seguidores foi uma *matematização da lógica*, ou seja, procurava-se uma linguagem para a lógica que utilizasse os símbolos e operações matemáticas, agora com Frege, Peano, Russell e Whitehead têm-se uma *logicização da matemática*, isto é, a tradução para a lógica da linguagem basilar da matemática.

De maneira geral, Frege (1848-1925), tem como interesse principal em seus estudos o projeto de redução da aritmética à lógica que pretendia realizar mediante a consecução de dois grandes objetivos: o primeiro seria definir toda expressão aritmética em termos lógicos e com isso mostrar que a toda expressão aritmética equivale uma expressão lógica

determinada. Caso conseguisse realizar tal tarefa, o segundo objetivo consistiria em mostrar que as proposições lógicas obtidas poderiam ser deduzidas de leis lógicas imediatamente evidentes.

Assim, desde 1879 e aparentemente sem ter tido conhecimento do trabalho de Boole, constatando que os conceitos de sujeito e predicado da lógica podem ser substituídos com vantagem pelos de argumento e função, Frege procura fundamentar logicamente a matemática. Seu trabalho mais importante foi *Grundlagen der Arthmetik* (*Os fundamentos da Aritmética*), publicado em 1884 e nele Frege pretendia mostrar que a aritmética poderia ser construída sem o recurso de enunciados empíricos, somente a partir das leis da lógica.

A lógica clássica era duplamente insuficiente para a consecução dos objetivos de Frege, por ser incompleta, uma vez que "as relações e as propriedades aritméticas seriam relações e propriedades lógicas muito mais complexas que as que a lógica clássica era capaz de representar". Além disso, a lógica clássica não seria formalizada o suficiente, estando impregnada de imperfeições originadas da imprecisão da linguagem comum. Havia, portanto, a necessidade de uma nova lógica e a esse trabalho, Frege dedica-se com afinco. (Os pensadores, Peirce e Frege, 1983, p.191).

Frege elimina qualquer recurso à intuição e à linguagem comum, procurando mostrar que a aritmética poderia ser considerada como um ramo da lógica com suas demonstrações não necessitando fundamentarem-se nem na experiência, nem na intuição. Observa, então, que a matemática necessita de uma profunda revisão crítica, como nunca acontecera antes. Acredita serem necessárias demonstrações de proposições que anteriormente se aceitavam como evidentes; conceitos relativamente novos, como de função, de contínuo, de limite, de infinito, etc., precisam ser aprofundados. De maneira geral, são necessários em todos os campos, rigor de demonstração, delimitação precisa da validade dos conceitos e sua exata definição, a partir já, do próprio conceito de número.

O programa apresentado por Frege, não encontra muito eco até ser atacado por B. Russell, tendo se tornado, a partir daí, um dos principais objetivos dos matemáticos do século XX. A quase ausência de receptividade ao trabalho de Frege deve-se, segundo Boyer (1974), à

forma nova e excessivamente filosófica na qual expressou os seus resultados.

A Itália, palco de grande desenvolvimento das ciências em séculos anteriores, pouco participou do desenvolvimento da álgebra abstrata ocorrido na França, Inglaterra e Alemanha. Entretanto, no final do século XIX, alguns matemáticos italianos se interessaram profundamente pela lógica matemática, sendo que o mais importante deles foi, seguramente, Giuseppe Peano (1858-1932), de cujos axiomas dependem inúmeras construções rigorosas da álgebra e da análise.

Os estudos de Peano são bastante conhecidos e constituem um verdadeiro divisor de águas na história da matemática, ou seja: até então, o interesse dos estudiosos era a lógica pela lógica, enquanto que, com o italiano e seus seguidores, ao contrário, a "lógica simbólica procura tornar-se, sobretudo o instrumento da demonstração matemática". (Costa, 197"1, p.207)

A linguagem ordinária passa então a ser inteiramente substituída por esse simbolismo ideográfico e, a escola italiana caracteriza-se, pela utilização sistemática desse simbolismo e pelo tratamento independente de cada ramo da matemática, sendo que no *Formulário matemático,* a aritmética e a geometria são apresentadas como "disciplinas distintas, cada uma com o seu corpo de conceitos primitivos e de postulados". (Costa, 1971, p.207).

Em Peano, o método postulacional "atingiu um novo nível de precisão, sem ambigüidade de sentido e sem hipóteses ocultas". (Boyer, 1974, p.437). Juntamente com Frege, Peano, por ter também se esforçado muito no desenvolvimento da lógica simbólica, exerceu enorme influência sobre as pesquisas de B. Russell (1872-1970) e A. Whitehead (1861-1947), cuja obra *Principia Mathematica*, pode ser considerada uma das principais deste século e marca o ponto culminante do desenvolvimento da lógica. Russell e Whitehead desenvolvem por completo, o cálculo das relações.

Russell e Whitehead retomaram a tese de Frege e procuraram demonstrar que a matemática pura (incluídas aí a geometria e a própria dinâmica racional), pode ser inteiramente deduzida da lógica.

A realização desse audacioso projeto está sistematizada em três livros fundamentais, o primeiro, de Whitehead, *A treatise on universal algebra*, publicado em "1898, com a

exposição dos princípios matemáticos ainda apoiada sobre o cálculo das classes; o segundo, de autoria de Russell, *The Principles of Mathematics*, onde já se pode encontrar os princípios do cálculo das relações e o terceiro, os *Principia Mathematica*, escrito por ambos, onde se completa a lógica das classes e das relações e se concebe a matemática como um sistema lógico-formal.

Embora até então tivessem sido tratadas, historicamente falando, como estudos distintos, com a matemática sempre relacionada às ciências e a lógica ao idioma grego, o desenvolvimento de ambas durante o século XIX e início do século XX, de acordo com Russell aproximou definitivamente lógica e matemática, com a lógica se tornando cada vez mais matemática e a matemática, cada vez mais lógica, de maneira a ser para ele, inteiramente impossível traçar uma linha entre as duas; "na verdade, as duas são uma. Diferem entre si como rapaz e homem: a lógica é a juventude da matemática e a matemática é a maturidade da lógica". (Russell, 1974, p.186).

Russell e Whitehead procuram demonstrar nos três volumes dos *Principia*, publicados entre 1910 e 1913 que "toda a matemática pura se funda sobre conceitos inteiramente definíveis em termos dos conceitos lógicos primitivos", com suas proposições derivando de postulados admitidos. Para isso, as cadeias de deduções são estendidas, "sem lacuna nem adjunção de novos elementos, desde essas premissas até aos teoremas da matemática". Essa idéia, Russell trazia consigo desde muito cedo, e a traduz, nos *Principia*, dizendo que a matemática seria uma dedução "by logical principies, from logical principies". (Costa, 1971, p.214)

Russell e Whitehead, não formalizam inteiramente o seu sistema, o qual, "parece ter encontrado mais aprovação entre lógicos do que entre matemáticos". Além disso, a importância do sistema constituído, diminui consideravelmente, devido a uma "surpreendente conclusão por parte de um jovem matemático austríaco, Kürt Gõdel", discípulo de Hilbert. (Boyer, 1974, p.444)

Ao demonstrar que mesmo "dentro de um sistema rigidamente lógico" como o construído por Russell e Whitehead para a aritmética, ainda "podem ser formuladas proposições que são indecidíveis ou indemonstráveis dentro dos axiomas do sistema, ou seja, enunciados que não podem ser "provados ou negados", Gödel deixa evidente, a existência de lacunas no sistema, já que, não é possível, "usando os métodos usuais, ter certeza de que os

axiomas da aritmética não levarão a contradições". (Boyer, 1974, p.444).

Para Grize "a clareza que acompanhava os *Principia* permitiu tomar consciência dos mecanismos em jogo e pensar na construção de sistemas diferentes". (Grize, in Piaget et al., 1980, p.121).

A maioria desses sistemas busca por uma lógica que não seja apenas bivalente, isto é, onde as proposições não devam ser necessariamente verdadeiras ou falsas e, portanto, que não obedecesse ao principio do terceiro excluído.

Mesmo antes do resultado de Gödel, Lukasiewcz, em 1920, já imaginava a possibilidade de uma lógica assim.

Com o intuicionismo de Brouwer, surgindo em oposição ao logicismo russelliano, a matemática passa a ser encarada como uma "construção de entidades abstratas", tendo como ponto de partida a intuição do matemático, "e tal construção prescinde de uma redução à linguagem especial que é a Lógica ou de uma formalização rigorosa em um sistema dedutivo". (Machado, 1987, p.40).

Os intuicionistas não respeitavam o princípio do terceiro excluído e, em 1930, Heyting publica um opúsculo, onde pretendia explicitar os procedimentos de raciocínio usados por Brouwer. Além disso, "em 1932, Lewis e Langford propuseram vários sistemas modais", sendo que todas estas tentativas continuam sendo objeto de investigações. (Grize, in Piaget et al., 1980, p.122).

Entretanto, simultaneamente, existia a clareza de que "qualquer que seja o sistema lógico proposto" existem alguns metaproblemas sobre os quais é preciso refletir. Os mais importantes referem-se a sua coerência (ou não contradição) e à sua completude. Post prova, em 1921 que o "cálculo das proposições dos *Principia* gozava destas duas propriedades" e, em 1928, "Hilbert e Ackermann, mostram a não-contradição da lógica elementar dos predicados". (Grize, in Piaget et al., 1980, p. 122).

Ainda segundo Grize (in Piaget et al., 1980), outras investigações têm início a partir daí, como os trabalhos de Tarski e Carnap, deslocando o eixo das questões dos aspectos sintáticos para os semânticos, discutindo-se problemas filosóficos em função de técnicas lógicas. Curry, em 1930, se dedica a reconstruir a lógica, sem a utilização de variáveis,

unesp

criando para isso, a lógica combinatória.

Gentzen (1934), Finch (1952) e particularmente o colaborador de Piaget, E. Beth, buscam o aperfeiçoamento dos instrumentos de dedução, de forma a torná-los mais próximos da "lógica natural", ou seja, dos procedimentos naturais de pensar.

Os problemas dos fundamentos, todavia, não perdem a importância para os lógicos e os metaproblemas ainda não estão de todo resolvidos. São estes, portanto, o cenário e o instrumental lógico de que dispõe Piaget para a consecução de seus trabalhos.

2.2.1.1 A lógica operatória de Jean Piaget

Na introdução à segunda edição do seu *Traitée du logique*, publicada em 1970, na França e em 1976, no Brasil com o título de *Ensaio de lógica operatória* , tradução do subtítulo em francês, Jean Piaget (1896-1980), esclarece que tal subtítulo deixa claro sua intenção que é, "essencialmente mostrar como se constroem as formas lógicas".

Da mesma forma como considera o conhecimento Piaget entende a formalização, isto é, como um processo que se apóia em estruturas que se elaboram segundo níveis. Ao buscar dentre tais estruturas, as mais elementares, mas que já permitissem o estabelecimento de inferências válidas, Piaget as encontra nas operações de classificação e de seriação, que representam o estágio mais simples da lógica das classes e das relações, sistematizadas por Russell e Whitehead.

Ao analisar tais estruturas, Piaget constata que elas não constituem ainda as "redes", que são o fundamento da lógica proposicional de Boole ou da lógica de classes: "uma classificação só se processa, com efeito, por encaixes sucessivos (ou 'contíguos') e não admite 'conjunto das partes' ou simplexo, como acontece no caso da combinatória proposicional". É esta falta de mobilidade que impede que a classificação possa ser considerada como um *grupo*, no sentido matemático do termo. (Piaget, 1976, p.xvii).

A classificação, ao se processar por encaixes, da mesma forma que as seriações ou estruturas multiplicativas correspondentes, apresenta certos caracteres constantes de composição que permitem falar numa estrutura de conjunto que é muito comum no pensamento "natural" pré-científico ou ainda nas disciplinas que são simplesmente descritivas. Piaget designa tal estrutura por *agrupamento*.

unesp

Num agrupamento, está definida a operação *identidade*; as operações satisfazem as propriedades *associativa*, *transitiva* e *tautológica* sendo, além disso, *reversíveis*.

O fato da propriedade tautotológica ser verdadeira, faz com que o agrupamento permaneça muito próximo do seu conteúdo qualitativo e, portanto, lógico, tornando seu estudo de particular interesse para quem, como Piaget, procura pelo elementar.

Os lógicos, independentemente da escola a que pertençam, concordam num ponto: que o objeto da lógica refere-se ao verdadeiro ou falso. Em virtude deste acordo, Piaget estabelece a sua *primeira aproximação* para a definição de lógica: "a lógica é o estudo do conhecimento verdadeiro, considerado em suas formas mais gerais". (Piaget, 1976, p.3).

Entretanto, existem dois enfoques possíveis para o estudo do conhecimento: o da relação entre o sujeito e o objeto e o do estudo do conhecimento na sua forma pura, isto é, de como o sujeito estabelece a distinção entre o verdadeiro e o falso. Assim, Piaget chama de *epistemologia* ao estudo do conhecimento enquanto relação entre sujeito e objeto e, de *lógica* à análise do conhecimento puro, ou seja, a *análise formal* do conhecimento. Assim, a lógica estuda o modo como os dados são enunciados por proposições e como estas se encadeiam entre si, num domínio interior à atividade do sujeito, sem considerar a intervenção dos objetos, sendo fundamental que seja estabelecido, com clareza, que o verdadeiro e o falso de que trata a lógica são formais.

Uma outra questão destacada por Piaget é o fato, também aceito por todos os lógicos, de que a lógica "está interessada na forma pura e não trata, de modo algum, do próprio objeto", o qual seria de interesse das ciências experimentais e da psicologia. Ora, Piaget indaga então, sobre essa "forma", colocando como questão prévia saber se é uma forma normativa, isto é, um conjunto de regras e valores, ou se se "trata de uma estrutura prescrita por leis necessárias e não por imperativos". (Piaget, 1976, p.7).

Os estudiosos dividem-se e ambas as posições são sustentadas. Para alguns, como Lalande, a lógica é essencialmente normativa, enquanto que para outros, as composições formais tratadas pela lógica, constituem uma estrutura idealizada e esquematizada, "mas cujas transformações são acessíveis ao cálculo, levando às mesmas constatações mentais de

qualquer combinatória". (Piaget, 1976, p.7).

Para Piaget, os dois pontos de vista não são excludentes, ao contrário, são complementares e dizem respeito apenas "à sua significação epistemológica sem afetar a sua técnica", sendo possível falar tanto de proposições verdadeiras ou falsas, (no caso da lógica normativa, isto é, de valores prescritos), como de positivas ou negativas (para o caso de simples relações combinatórias). Em outras palavras, "toda composição formal é redutível a uma mesma estrutura abstrata". (Piaget, 1976, p.7/8).

Mas, do mesmo modo que foi necessário estabelecer com clareza, o que se quer dizer com o termo "forma", precisa ficar claro sobre estrutura de quê se está falando, ou como coloca Piaget, "de quê as 'formas' lógicas constituem regras ou leis?" (Piaget, 1976, p.8).

Para os que consideram a lógica uma pura sintaxe, tais "formas" seriam o "conjunto das coordenações próprias a uma língua bem elaborada". Assim consideradas, as formas ou estruturas lógicas, permitem, "ao mesmo tempo, signos e operações de inferência que se aplicam a estes signos para conferir-lhes significações relativas às suas próprias combinações". (Piaget, 1976, p.8).

Mas tais fatos levam à segunda interpretação possível para as "formas ou estruturas lógicas", a de que elas exprimem as leis do pensamento, não as leis causais ou temporais, mas aquelas que regulam as atividades do sujeito para o estabelecimento de relações verdadeiras ou falsas, ou seja, as estruturas lógicas podem ser consideradas como "exprimindo as operações do pensamento", de onde Piaget chega à sua *segunda aproximação*: lógica seria a "teoria formal das operações do pensamento". (Piaget, 1976, p.9).

Porém, tal caracterização apresenta dois inconvenientes, quais sejam: o dos limites entre a lógica e a psicologia e entre a lógica e a matemática. Com esses cuidados, a definição seria satisfatória, uma vez que engloba tanto a lógica clássica, que trata dos enunciados verbais (e, portanto, dos resultados estáticos das operações), quanto à lógica moderna, reduzida essencialmente ao cálculo (exprimindo, portanto, operações como tais).

Para resolver esses inconvenientes Piaget estabelece sua *terceira aproximação*, que já exprime com clareza, sua interpretação particular desse ramo do saber: "a lógica é a teoria

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

formal das operações dedutivas". (Piaget, 1976, p.19).

A definição de lógica estabelecida por Piaget, segundo o próprio, "designa na realidade, apenas um ideal", ou seja, a lógica é de fato uma teoria formal, porém não é formal no sentido acabado, mas sim, formalizante ou formalizadora das operações dedutivas.

Ao se colocar que o essencial da lógica é a dedução, parece ser desnecessário se tratar da questão dos métodos, entretanto, segundo Piaget, pode-se trabalhar "entre construções que parecem, segundo critérios a serem analisados minuciosamente, mais ou menos naturais e reconstruções mais artificiais, mas mais puras". Além disso, o ponto de partida também pode diferir já que é possível começar tanto "por cima" (lógica das proposições), quanto "por baixo" (classes e relações). (Piaget, 1976, p.21).

Assim, três pontos devem ser considerados ao se falar de métodos em lógica: a técnica de formalização; o atomismo lógico ou a determinação de totalidades e a ordem natural de formalização.

Atualmente, é ponto pacífico que sem os algoritmos a constituição da lógica não acontece, ou seja, que só através de uma álgebra é possível garantir a formalização progressiva, em oposição ao estado semiformalizado obtido pela lógica formal de técnica verbal. Esta unanimidade, todavia, é recente. Segundo Piaget (1976), ainda em 1918, Goblot discriminava entre a "lógica dedutiva" e a "lógica indutiva" e não se admitia a existência de um terceiro campo, que tratasse especificamente da técnica de formalização, a logística de hoje.

Quanto ao segundo aspecto, há a necessidade de saber o que é mais natural para a lógica, proceder por combinações a partir de elementos isolados, ou por análise das leis pertinentes às estruturas de conjunto.

Tanto na psicologia, como na matemática, cresceu a importância das totalidades operatórias com suas propriedades de conjunto, e das operações reais em jogo no pensamento em ação, nas sistematizações das operações abstratas. Na matemática, os números, por exemplo, não são estudados independentemente uns dos outros, mas sim, as estruturas que eles constituem (de grupo, anel ou corpo); os conjuntos constituem seqüências "bem ordenadas", ou "redes", cujas propriedades aparecem na "totalidade" (um

unesp

grupo e seus subgrupos constituem um caso particular de "rede').

É esta tendência estruturalista da matemática, devida ao grupo dos Bourbaki, que estabelece as maiores diferenças entre as pesquisas contemporâneas e as dos períodos anteriores, de características muito mais analíticas.

Do ponto de vista psicológico, é impossível a análise de fatos isolados. É até possível dissociá-los, mas sem se esquecer que cada fato repousa necessariamente sobre uma organização englobando um grande número de conexões com outros fatos. As percepções só alcançam relações interdependentes e servem de indícios ou sinais para ações. As operações do pensamento não se constituem de forma isolada, "mas apoiando-se umas sobre as outras em sistemas caracterizados por sua composição reversível e não poderia, pois, haver classe ou relação sem referência a classificações, seriações, etc." (Piaget, 1976, p.27).

A lógica, por sua vez, ao ter a axiomatização e não a construção operatória progressiva como principal preocupação, continua atomística, com o estudo isolado das operações de classes e de relações, sem que aborde as estruturas tão características que elas constituem na sua totalidade, como os agrupamentos, por exemplo.

A lógica das proposições é estudada como combinatória, ou seja, procedendo a partir da análise das diferentes composições, sem contar que, apesar da correspondência clara entre a lógica das classes e das proposições, tudo é feito não só como se fossem dissociadas, como também, para dissociá-las.

Para Piaget, pelo fato das estruturas desempenharem um papel tão importante tanto no domínio (abstrato) da matemática, quanto no domínio (concreto) das operações mentais, seria legítimo esperar que existissem também estruturas puramente lógicas semelhantes. É esta "descoberta", a de que tais totalidades não só existem como também que a sua "intervenção permite ordenar os resultados de uma forma mais natural do que a análise. atomística", que confere uma interpretação peculiar à lógica. Os resultados, as fórmulas são os mesmos; a dedução continua presente, mas o "método" utilizado e a ordem de estudo (ele começa pela lógica das classes e das relações, ao invés da lógica das proposições), são outros. (Piaget,1976, p.28).

unesp

Boole e De Morgan, os fundadores da lógica moderna (e que partiram da comparação com as leis do pensamento), também iniciavam pela lógica de classes, sendo apenas com o desenvolvimento da lógica simbólica é que o cálculo proposicional retorna ao início do estudo da lógica. Tarski, por exemplo, começa pelo cálculo proposicional. Para Grize (in Piaget et al., 1980), ambos caminhos levam a exposições igualmente rigorosas, sendo que a escolha é resultante de considerações extra-lógicas, entretanto, ele próprio começa também pelas classes, por considerar a lógica como integrante do "conjunto das atividades humanas".

As atividades primeiras, ainda segundo Grize, seja de um ponto de vista genético, seja de um ponto de vista histórico, são atividades de classificação e justifica: "a criança manipula coisas, constitui-as mesmo enquanto tais, muito antes de falar". Do ponto de vista histórico, "todas as ciências naturais se iniciaram por uma taxiologia" e, mesmo no interior da própria lógica, a imperiosidade dos silogismos é conseqüência do fato deles exprimirem classificações subjacentes, em termos de proposições, ou seja, não seria possível se concluir pela mortalidade de Sócrates, "se a classe dos homens não estivesse incluída na classe dos mortais". (Grize, in Piaget et al., 1980, p.124).

Piaget então, entende a lógica como uma disciplina, situada entre a psicologia e a matemática, definindo-a como a teoria formal das operações dedutivas, com uma técnica de formalização (ou logística) na qual os algoritmos constituem condição *sine qua non*; que deve ser estudada em função da determinação das totalidades e seguindo a ordem natural de formalização, o que implica em se começar pela lógica de classes e das relações, ou seja "do mais concreto para o mais abstrato", estabelecendo-se, a seguir que se a lógica é a teoria formal das operações dedutivas, a psicologia, ou pelo menos parte dela, pode ser considerada como a "teoria real das próprias operações", sejam estas efetuadas pelo indivíduo, ou trocadas através da linguagem ou, ainda, efetuadas em conjunto com outros indivíduos.

A princípio, o ponto de vista da lógica e o da psicologia são inteiramente distintos, uma vez que a única preocupação da lógica é o da validade das composições operatórias e sua finalidade essencial é "enunciar os princípios ou axiomas necessários e suficientes para garantir o rigor dos encadeamentos operatórios estudados", enquanto que para a psicologia o problema consiste não só em "estabelecer as leis das operações da ação ou do

pensamento", mas também em explicá-las. (Piaget, 1976, p.10111).

Assim, enquanto o problema da lógica é "fundamentar" a validade formal das composições operatórias, a psicologia para "explicar", deverá compreender e reconstituir geneticamente. Embora teoricamente a delimitação entre os campos da lógica e da psicologia seja meridiana e hoje, inquestionável, nem sempre foi assim.

Consideradas sob o ponto de vista lógico, as operações são transformações que possibilitam o estabelecimento de proposições ou relações partindo de proposições ou relações anteriores, e "transformações cuja validade é prescrita pela aceitação (ou rejeição) de certos axiomas". (Piaget, 1976, p.11).

Psicologicamente, as operações são ações equilibradas, isto é, tem sua origem nas atividades concretas do sujeito e isto significa dizer (e esta é a tese demonstrada por Piaget, através de toda sua obra), que existe uma continuidade entre as "ações sensório-motoras e as ações efetivas, depois entre estas e as ações interiorizadas, ou atos simbólicos que caracterizam o pensamento". (Piaget, 1976, p.11).

Com a evolução dos dois ramos de conhecimento, a psicologia passa a estudar geneticamente a inteligência e a lógica, por seu lado, tornando-se cada vez mais simbólica, formaliza a estrutura das construções operatórias, as duas disciplinas diferenciaram-se completamente, excluindo qualquer imbricação e, exatamente por isso, tornando-se complementares ou mesmo correspondentes em alguns domínios, como no caso das classificações, das seriações, das correspondências e do número.

Entretanto, se existe correspondência entre os problemas, a independência dos métodos é total, uma vez que um dado psicológico não pode ser invocado numa formalização lógica, pois a mesma é autônoma, mesmo quando se refere às normas que são aceitas pelo indivíduo em particular ou pelo grupo social. Reciprocamente, um raciocínio fundamentado num algoritmo formal não possui a validade de um fato da experiência, em psicologia.

Se nas suas origens, a lógica estava intrinsicamente ligada à psicologia, tendo dela se dissociado a partir da segunda metade do século XIX, em relação à matemática, ela caminha no sentido inverso.

unesp

De fato, a lógica aristotélica, embora a matemática já existisse desde bem antes, mantinha com esta última, apenas relações distantes, pela razão, como já visto anteriormente, de ser eminentemente verbal. Por outro lado, a matemática essencialmente intuitiva de então, também não se interessava pela lógica.

Assim, a evolução da lógica, no sentido de se tornar simbólica, a aproxima gradual e incessantemente da matemática, na mesma medida, e por igual motivo, que a afasta da psicologia.

O duplo processo de aproximação entre lógica e matemática (matematização da lógica e logicização da matemática), dão origem a duas espécies de problemas, completamente independentes, um, o da "convergência entre os métodos logísticos e matemáticos", e o outro, o da "redução eventual das estruturas matemáticas às estruturas lógicas", sendo que tais problemas eram freqüentemente confundidos, principalmente "à época em que a força e a influência de Russell tendia a uni-los". (Piaget, 1976, p.16).

O problema da redução das estruturas matemáticas às estruturas lógicas não tem sua origem, como poderia parecer, na convergência dos métodos, mas, antes, nos trabalhos de G. Cantor, a teoria dos conjuntos, que promove o encontro das "partes mais gerais da matemática e a álgebra das classes e das relações", motivando tanto Frege quanto Russell, nas suas tentativas de definição do número cardinal, reduzindo-o à classe lógica e do número ordinal, reduzindo-o à relação assimétrica. (Piaget, 1976, p.16).

Assim, devido à dupla influência da fusão dos métodos e da convergência entre partes da lógica com partes mais gerais da matemática, cresce a tendência de se fundir (e confundir) as duas disciplinas numa só, o que não é feito de forma unânime entre lógicos e matemáticos, ao contrário, é possível perceber a presença de quatro escolas que pretendem a fusão, mas com princípios diferenciados.

Hilbert com seu formalismo concebe as relações lógicas como uma subclasse dos seres matemáticos, não considerando, portanto, a matemática como redutível à lógica ao passo que Russell admite exatamente o oposto, ou seja, a matemática seria redutível à lógica (donde o seu logicismo). A própria história da matemática demonstra a impossibilidade dessas duas interpretações.



Piaget (1976), destaca ainda a possibilidade de se conceber tanto a matemática como a lógica, como "duas subclasses separadas da grande classe das estruturas formais ou abstratas", o que seria impossível, tendo em vista a existência inconteste de estruturas comuns a ambas e, finalmente, pode-se conceber uma separação parcial entre as estruturas lógicas e as matemáticas, porém, "constituindo uma parte comum por assimilações recíprocas (e não mais em um sentido único)". Piaget entende as relações entre lógica e matemática desta última forma, como "assimilações recíprocas". (Piaget, 1976, p.17).

Para finalizar aquilo que neste trabalho está sendo chamado de "interpretação piagetiana da lógica", resta tratar da axiomatização das estruturas operatórias do sujeito.

Ao se entender formalização como um processo e não como um estado, a principal conseqüência a aparecer, é a de que o desenvolvimento da lógica formal jamais estará concluído e, além disso, não consiste apenas de se acrescentar conhecimentos novos, cumulativamente aos precedentes mas, em "reconstruções devidas a exigências não estabelecidas de início, mas que surgem durante o percurso". (Piaget et al., 1980, p.321).

Para Piaget (1980), é impossível, do ponto de vista genético, dissociar a lógica de sua própria construção e da sua própria história, assim, "o que a lógica formal axiomatiza é precisamente, portanto, uma certa atividade do sujeito", começando pelo próprio lógico, que intuitivamente inventa os seus sistemas "antes de os poder formalizar e que, na presença dos limites das suas próprias formalizações, continua suas construções". (Piaget et al., 1980, p.322).

Ora, não se pode desprezar o fato de que o lógico, enquanto indivíduo é depositário de uma herança psicossocial de longa tradição e herdeiro de "uma seqüência de construções reflexivas mais simples" que remontam a um nível semiformalizado semelhante ao da lógica aristotélica considerado, entretanto, por muito tempo, como o "acabamento da lógica na sua totalidade". (Piaget et al., 1980, p.322).

Como já foi discutido a lógica é a axiomatização de certos tipos de pensamento operatório, que podem ser, nos níveis superiores, operações abstratas. Ora, mas tais "operações abstratas" foram, por sua vez, "abstraídas" de operações de níveis menos evoluídos, que foram "abstraídas" de outras, até que sejam, como no caso da lógica clássica, extraídas de



operações proposicionais que repousam em operações de inclusões de classes ou de encadeamento de relações.

Para o autor, entretanto, ao se pretender a reconstituição das filiações históricas, não se pode remontar muito atrás e, assim, na falta desses dados, Piaget recorre às informações psicogenéticas, seguindo, passo a passo, a partir do estágio sensório-motor, a constituição das estruturas operatórias do pensamento, do que resulta que:

I - As operações elementares têm origem nas ações do sujeito, as quais, por sua vez, começam por incidir sobre os próprios objetos físicos, desenrolando-se num contexto que Piaget qualifica globalmente como "experiência". Entretanto, o autor chama a atenção para o fato de que existem duas espécies de componentes (que não derivam uma da outra), em qualquer experiência: a física e a lógico-matemática.

A experiência física consiste em extrair as propriedades dos objetos através de uma abstração simples, a partir de informações perceptivas e a lógico-matemática consiste em extrair as informações não dos objetos como tais, mas das propriedades que "as ações introduzem nos objetos". (Piaget et al., 1980, p.323).

A forma de abstração envolvida na experiência lógico-matemática não é mais a simples, como a que é usada na experiência física, mas sim, é uma abstração reflexionante, no duplo sentido do termo: "extrair as propriedades das ações é, num primeiro momento, 'transpor' para um novo plano (portanto refletir, no sentido quase físico do termo)", o que ainda é apenas uma coordenação prática e inconsciente, posteriormente transformada em "objeto de tomada de consciência e de pensamento". Entretanto, esta reflexão ou projeção, pressupõe uma nova estruturação, e conseqüentemente, uma "reflexão no sentido psicológico do termo". (Piaget et al., 1980, p.323).

A experiência lógico-matemática existe e é necessária para a criança mesmo quando esta se encontra num nível em que ainda não é capaz nem de operar e nem de deduzir mediante normas ou regras. Para Piaget, caracterizada como foi, não é possível entender a experiência lógico-matemática como uma "experiência interior ou psicológica, no sentido de uma introspecção dos dados da consciência". Embora sua origem esteja nas atividades do sujeito sobre o objeto, a experiência lógico-matemática não depende apenas da memória do sujeito, sobre as experiências realizadas com o objeto, mas, a abstração reflexionante,

unesp

ao utilizar o aspecto lógico-matemático dessas experiências, revela-se uma construção e "não apenas uma leitura ou registro passivo". (Piaget et al., 1980, p.324).

II - A abstração reflexionante é, portanto, uma construção que se efetiva por etapas, nas quais acontece uma progressiva eliminação de sucessões temporais em beneficio de conexões necessárias e não-temporais.

Assim, a inteligência só conseguirá se libertar do tempo (que está irremediavelmente ligado às ações psicológicas), ao conquistar a reversibilidade, característica das operações. Tornadas estritamente reversíveis, as ações ou operações constituirão "um jogo de conexões simultaneamente intemporais e logicamente necessárias" e esta constituição obedece a quatro estágios de desenvolvimento, que são os estabelecidos pela epistemologia genética: o período sensório-motor, o intuitivo ou pré-operatório, o operatório concreto e o lógico-formal.

As estruturas operatórias, portanto, são constituídas graças aos progressos da reversibilidade que lhes proporciona o caráter extra-temporal. As conexões extra-temporais estabelecidas, fornecerão, em função do desenrolar contínuo das abstrações reflexionantes, o "dado cuja axiomatização é efetuada pela lógica dos lógicos", sendo que para compreender como tal formalização efetivamente prolonga a construção genética, é necessário compreender como essas ligações se tornam necessárias. (Piaget et al., 1980, p.327).

III - É o aparecimento da necessidade lógica que constitui o principal problema da psicogênese das estruturas operatórias. Mediante a realização de inúmeras pesquisas em diversos setores, tais como construção do espaço, do tempo, do número, etc., Piaget e seus colaboradores verificaram que a necessidade lógica aparece com a constituição das operações, ou seja, quando as ações tornam-se estritamente reversíveis, conforme já foi abordado. Entretanto, há mais: para se constituir, as operações se coordenam entre si, sob a forma de estrutura de conjunto, com a necessidade surgindo do fechamento dessas estruturas. Com tal fechamento e a implicação entre os elementos, as estruturas de

conjunto constituem agrupamentos ou mesmo grupos, e a composição entre os elementos torna-se necessária.

Piaget, frente a todas considerações anteriores, conclui que "a lógica é uma axiomatização das estruturas operatórias do pensamento do sujeito, estruturas, aliás estudadas a título de fatos pela psicologia da inteligência". (Piaget et al., 1980, p.331).

O autor chama atenção, entretanto, para a necessidade de se precisar algumas expressões para que a interpretação de lógica acima citada possa ser aceita ser restrições.

Assim, é necessário deixar claro que são "estruturas operatórias subjacentes e não dados introspectivos da consciência", sendo que tal precisão é necessária, porque se a lógica do sujeito for reduzida ao que se encontra em sua consciência, serão encontrados elementos muito mais elementares do que os "que são inconscientemente utilizados nos raciocínios efetivos", uma vez que a consciência se remete apenas aos resultados dos processos mentais, não incidindo "sobre seus mecanismos mais simples". (Piaget et al., 1980, p.331).

Um outro aspecto que Piaget enfatiza, é a distinção entre axiomática e axiomatização. Para o autor, uma axiomática "consiste em demonstrar, através de uma formalização adequada um resultado já adquirido intuitivamente", enquanto que por axiomatização, deve ser entendido "uma livre construção formalizada, que não se limita a axiomatizar sistemas prévios", mas sim, que constrói as suas próprias teorias. Tal construção, entretanto, não é arbitrária e não parte do nada, uma vez que utiliza, "no mínimo, certas noções operatórias indefiníveis e certas proposições não-demonstráveis". (Piaget et al., 1980, p.332).

As estruturas subjacentes do pensamento natural e, portanto, do pensamento do próprio lógico, procedem de um desenvolvimento cujas formas elementares são claramente observadas na evolução mental da criança, e as suas formas mais elevadas já comportam, além da psicogênese, uma sociogênese, ou seja, para serem elaboradas, necessitam tanto das condições psiconeurológicas comuns à espécie, como da atividade intelectual realizada pelas sucessivas gerações.

As pesquisas realizadas por Piaget e seus colaboradores comprovaram que é perfeitamente possível entender a lógica como uma axiomatização das estruturas operatórias subjacentes do pensamento humano, e que, se as relações entre a lógica moderna (a lógica sem sujeito)

unesp

e as estruturas subjacentes, estudadas pela psicologia, pareceram ser inexistentes por muito tempo, deve-se, principalmente, às circunstâncias históricas já referidas, quais sejam: o desconhecimento das estruturas pela própria psicologia; o longo tempo de permanência da lógica na silogística de Aristóteles; o distanciamento entre a lógica moderna e a própria matemática, e conseqüentemente dos princípios intuitivos.

Finalmente, esse isomorfismo entre a lógica e as estruturas operatórias do sujeito é reforçado pelo fato de que lógicos contemporâneos caracterizam a lógica moderna como uma linguagem, e não existe língua sem sujeito.

2.2.2 As principais correntes do pensamento matemático

Por quase todo o século XIX, o mito de Euclides era inabalável tanto para os filósofos, como para os matemáticos, com a geometria sendo considerada por todos, "como o mais firme e confiável ramo do conhecimento". (Davis e Hersh, 1986, p.371).

A descoberta das geometrias não-euclidianas, contudo, implicou na perda da certeza da geometria, abalando, conseqüentemente, não só os alicerces da matemática, mas, de todo o conhecimento.

Os matemáticos do século XIX enfrentaram o problema e buscaram uma outra fonte segura para fundamentar seus trabalhos, elegendo a aritmética como a "nova base sólida" (de onde surgiu, o movimento de "aritmetização da análise"). Porém, ao alicerçar a matemática sobre a aritmética, se estava, em última instância, fundamentando-a sobre o número.

Entra, então, em cena, o matemático alemão Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925), para quem a matemática necessitava de uma profunda revisão crítica, revisão esta, que se impunha a partir do próprio conceito de número.

Além da perda de credibilidade da geometria como base sólida, é preciso recordar, que, praticamente na mesma época, apareceram as várias antinomias da teoria dos conjuntos estabelecida por G. Cantor (de Burali-Forti; do maior número cardinal; do próprio Cantor; de Russell), que "abalaram todo o edifício matemático", o que fortalecia a idéia de Frege, de que apenas uma análise minuciosa dos fundamentos da matemática "graças ao novo instrumento lógico, poderia salvar a coerência das matemáticas". (Grize, in Piaget et al.,

1980, p.121).

Estava desencadeada a que ficou conhecida como "a crise dos fundamentos" e surgiram diversas correntes buscando soluções para os profundos problemas, que se resumiam, em tornar a matemática, novamente, uma ciência confiável, das quais três se destacaram e, continuam, até hoje, a dividirem os matemáticos.

Na transição do século XIX para o século XX, começaram a acontecer congressos internacionais de matemática (o primeiro foi em Chicago, em 1893) e, no segundo, realizado na cidade de Paris, em 1900, o matemático alemão David Hilbert, proferiu a conferência principal, onde apresentou uma lista com 23 problemas, os quais, segundo ele, seria o foco das atenções dos matemáticos do século XX (o que de fato aconteceu e quase todos já foram resolvidos). No mesmo congresso, Poincaré apresentou um trabalho em que comparava os papéis da lógica e da intuição na matemática.

Matemático de interesses variados, Hilbert contribuiu para a teoria dos números, lógica matemática, equações diferenciais e física matemática e foi devido a um trabalho acerca dos fundamentos da matemática, que Hilbert, se envolveu, com Poincaré, numa das maiores controvérsias do século que, praticamente, prolongava o conflito estabelecido entre Cantor e Krönecker, no século XIX.

> Hilbert admirava o *Mengenlehre* de Cantor, ao passo que Poincaré o criticava fortemente. As teorias de Cantor, como os abstratos espaços de Hilbert, pareciam muito afastados da base intuitivo-empírica que Poincaré e alguns de seus contemporâneos preferiam. (Boyer, 1974, p.448).

A partir daí, os matemáticos da época passaram a se agruparem em torno de três principais correntes de pensamento: o intuicionismo de Poincaré, o formalismo de Hilbert e o Logicismo, de Russell, esta última, ligada ao formalismo (ambas valorizam a lógica), mas não identificada com ele.

> A tese do logicismo é que a matemática é um ramo da lógica. Assim, a lógica, em vez de ser apenas um instrumento da matemática, passa a ser considerada como a geradora da matemática. Todos os conceitos da matemática têm que ser formulados em termos de conceitos lógicos e todos os teoremas da matemática têm que ser desenvolvidos como teoremas da lógica; a distinção entre matemática e lógica passa a ser uma questão de conveniência prática. (Eves,

1995, p.677).

Os logicistas eram liderados por Bertrand Russell e pretendiam derivar, inicialmente, as leis da aritmética e, posteriormente, toda a matemática, das leis da lógica aristotélica, de acordo com as idéias de Frege, porém, como esta se mostrou insuficiente para tais propósitos, mesmo com a inclusão dos resultados de Leibniz, Russell criou a teoria dos tipos, com a qual pretendia resolver, também, algumas das antinomias. A natureza lógica dos pressupostos da teoria dos tipos foi muito contestada, tendo sido, inclusive, acusada de ser uma solução "*ad hoc*" para os problemas encontrados e não a expressão de uma necessidade lógica universal. Assim, a tarefa de reduzir a matemática à lógica tornou-se inviável e ambas continuam, convivendo, como ramos de conhecimento intimamente ligados, porém, independentes.

O intuicionismo de Poincaré, ganhou força como corrente, quando o holandês L. E. J. Brouwer (1881-1966), conseguiu reunir em torno das idéias intuicionistas, os oposicionistas do formalismo de Hilbert e do logicismo de Russell. Para os seguidores do intuicionismo, os elementos e axiomas da matemática não são tão arbitrários como possam parecer. Segundo Brouwer, "a linguagem e a lógica não são pressuposições para a matemática, a qual tem sua origem na intuição que torna seus conceitos e inferências imediatamente claros para nós..." (Boyer, 1974, p.448).

> A tese do intuicionismo é que a matemática tem de ser desenvolvida apenas por métodos construtivos finitos sobre a seqüência dos números naturais, dada intuitivamente. Logo, por essa visão, a base última da matemática jaz sobre uma intuição primitiva, aliada, sem dúvida, ao nosso senso temporal de antes e depois, que nos permite conceber um objeto, depois mais um, depois outro mais e assim por diante, indefinidamente. Dessa maneira obtêm-se seqüências infindáveis, a mais conhecida das quais é a dos números naturais. A partir dessa base intuitiva (a seqüência dos números naturais), a elaboração de qualquer outro objeto matemático deve ser feita necessariamente por processos construtivos, mediante um número finito de passos ou operações. Na tese intuicionista o desenvolvimento genético da matemática é levado a extremos. (Eves, 1995, p.679).

Segundo Machado (1987), o intuicionismo, considera a matemática como uma atividade autônoma, uma construção de entidades abstratas, a partir da intuição dos matemáticos e, como tal, prescinde tanto de uma redução à lógica, quanto de uma formalização rigorosa

em um sistema dedutivo, o que era defendido por Hilbert e seus seguidores.

O embrião da escola formalista foi um estudo postulacional realizado por Hilbert sobre a geometria, em 1899, onde aprimorou o método matemático, desde a axiomática, considerada material, dos tempos de Euclides, à axiomática formal do século XX. Algum tempo depois, buscando solucionar a crise instaurada pelas antinomias na teoria dos conjuntos de Cantor (cujas idéias ele defendia) e para responder ao desafio à matemática clássica estabelecido pelos intuicionistas, Hilbert se dedicou seriamente à elaboração do programa formalista.

> A tese do formalismo é que a matemática é, essencialmente, o estudo dos sistemas simbólicos formais. De fato, o formalismo considera a matemática como uma coleção de desenvolvimentos abstratos em que os termos são meros símbolos e as afirmações são apenas fórmulas envolvendo esses símbolos; a base mais funda da matemática não está plantada na lógica mas apenas numa coleção de sinais ou símbolos pré-lógicos e num conjunto de operações com esses sinais. Como, por esse ponto de vista, a matemática carece de conteúdo concreto e contém apenas elementos simbólicos ideais, a demonstração da consistência dos vários ramos da matemática constitui uma parte importante e necessária do programa formalista. Sem o acompanhamento dessa demonstração de consistência, todo o estudo perde fundamentalmente o sentido. Na tese formalista se tem o desenvolvimento axiomático da matemática levado a seu extremo. (Eves, 1995, p.682).

Assim, o sucesso ou o fracasso do programa formalista estava vinculado à resolução do problema de consistência e o sonho dos seguidores do formalismo, teve curta existência, pois, em 1931, o então jovem matemático Kurt Gödel, discípulo de Hilbert, provou, de maneira considerada inconteste, por seguidores das três principais correntes do pensamento matemático, que não é possível provar a consistência de um sistema dedutivo formalizado, capaz de abranger toda a matemática clássica, com todos os seus princípios lógicos, conforme era idealizado por Hilbert e seus seguidores, de maneira que o debate acerca dos fundamentos da matemática se centralizou em torno do logicismo e do intuicionismo.

2.2.2.1 O caos teórico das diversas concepções de número

A imensa maioria dos textos consultados referentes à construção do número que procuram reproduzir ou apenas se fundamentar na teoria piagetiana apresenta o número como "a

síntese da classificação e da seriação" não deixando, todavia, transparecer o processo de construção, estreitamente solidário, das três estruturas que culmina com a síntese do número e com as operações lógicas e aritméticas constituindo um único sistema total e psicologicamente natural, onde as operações aritméticas aparecem a partir da generalização e fusão das operações lógicas.

Não será este, porém, o motivo da discussão a seguir. Analisando o livro *A gênese do número na criança* fica evidente que os autores, confirmam a hipótese não explicitamente colocada inicialmente, de que o número seria a síntese operatória da seriação e da classificação. Ora, o que teria motivado Piaget a elaborar implicitamente tal hipótese? Novamente entra em cena, o forte apelo epistemológico das soluções insatisfatórias para a questão "o que é número?" e, particularmente, o longo e antigo debate, sem vencedor, entre logicistas e intuicionistas, isto tudo mesclado às suas próprias convicções de que o conhecimento não está nem no sujeito (apriorismo, implícito no logicismo) e nem no objeto (empirismo, pano de fundo do intuicionismo), mas na interação entre ambos, uma interação particular, que acontece internamente ao sujeito.

Da mesma forma como sua concepção de inteligência pode ser considerada como um *tertium* entre o lamarckismo e o neo-darwinismo; que a sua posição acerca da construção do conhecimento fica a meio-caminho entre o empirismo e o apriorismo, ele termina por considerar o número também como uma espécie de *tertium* entre Russell e Poincaré, ao "conceber como recíprocas e não mais unilaterais a relação entre a lógica e a aritmética". (Piaget e Szeminska, 1981, p.13).

Com o caos epistemológico instalado para a definição de número, evidenciando divergências entre as diversas soluções propostas (além da insuficiência destas), Piaget entende ser oportuna e pertinente uma investigação genética.

2.2.2.1.1 As teorias empiristas

Das soluções com fundamento teórico empírico destacam-se duas: a da experiência mental de E. Mach (1917) e de E. Rignano (1913-1916) e a da experiência anterior determinada pelos estados de consciência de H. Helmholtz.

E. Mach, e E. Rignano, embora trabalhando separadamente, pretenderam explicar o

aspecto cardinal do número mediante a "experiência mental", entendendo-se por esta última expressão, a imaginação, através do pensamento, da variação dos fatos, ou, em outras palavras, a "imitação em pensamento de uma situação". A experiência mental seria possível graças a experiências anteriormente adquiridas.

Mach admitia que a construção do conceito de número era realizada mediante experiências reais de reunião, disjunção, ordenamento e correspondência, que depois seriam recordadas pela experiência mental. Os conjuntos de diversas ordens formados pela experiência real e recordados pela experiência mental seriam então manipulados pela imaginação para gerar as operações da aritmética, com o cálculo constituindo-se, então, um prolongamento da numeração efetiva pelo pensamento, ou seja, seria "um meio indireto de contar". De acordo com tal teoria (ampliada por Rignano), o raciocínio seria constituído por uma sucessão de experiências pensadas. (Mach, apud Piaget, 1975, p.68).

Ora, mas tanto na análise genética, como na teoria da experiência mental está presente uma interpretação psicológica do conceito de número e, então, é lícito indagar, no que seriam diferentes.

Apesar de toda experiência executada materialmente poder ser interiorizada e, reciprocamente, do pensamento, por mais abstrato que seja, repousar sempre sobre esta mentalização das ações, a experiência mental não é, por si só, a solução de problemas epistemológicos.

> ... de fato, assim como é necessário se perguntar em cada domínio delimitado, no que consiste a experiência e quais são, em sua constituição as partes que correspondem, respectivamente, à atividade do sujeito e aos dados objetivos, assim toda "experiência mental" apresenta o mesmo conjunto de problemas epistemológicos ao invés de resolvê-los apenas com sua presença. (Piaget, 1975, p.69).

Para analisar qual é a parte relativa ao sujeito e qual a referente aos dados objetivos na experiência mental é preciso distinguir, primeiramente, se existem diferentes tipos de experiências mentais.

De acordo com Piaget (1975), existem dois tipos de experiências mentais que ele denominou de I e II, com as do tipo II subdividindo-se em IIA e IIB.

unesp

As experiências mentais do tipo I são as que consistem simplesmente em imaginar uma realidade exterior ao sujeito; as do tipo II, em imaginar não apenas as "variações dos fatos", mas, também, as ações do sujeito que faz variar os fatos e isto, desde as ações mal-diferenciadas que, por serem insuficientemente coordenadas entre si, precisam de apoio da realidade exterior para a previsão de resultados (IIA), até as ações reversíveis (operações), capazes de antecipações precisas (IIB).

Imaginar as variações dos fatos não é, todavia, o mesmo que imaginar as ações do sujeito que provoca tais variações e, ainda mais, mesmo em se tratando de experiências do tipo II, não existe diferença se uma transformação operada pela ação do sujeito foi efetivada materialmente ou em pensamento, pois, em última instância, esta será sempre uma atividade dos objetos, uma mudança externa, mesmo quando "imaginada", não se tratando de uma transformação do sujeito, o que já evidencia uma primeira diferença com a epistemologia genética, pois para esta última, o conhecimento só acontece quando, além da transformação do objeto (assimilação), há também a transformação do sujeito (acomodação).

Embora tanto a análise genética quanto a teoria baseada na experiência mental defendam uma interpretação psicológica para o conceito de número elas não são, portanto, a mesma coisa e isso, mesmo com as especificações estabelecidas por Piaget para os diferentes tipos de experiência mental, coisa que Mach e Rignano não reconhecem, passando sem cessar da variação dos fatos à representação mental das ações do sujeito, o que só amplia o fosso entre as duas concepções.

É verdade que o número é construído a partir das ações (como o conhecimento em geral), a diferença é que estas ações, para a análise genética são, (como todas), desde o período sensório-motor, tanto assimilação do objeto ao sujeito, quanto acomodação do sujeito ao objeto e, portanto, não pode ser explicado por experiências mentais, interpretadas empiricamente, ou, resumindo, o número não é explicado pela simples concepção de experiências mentais em geral.

Hermann von Helmholtz (1821-1894) era físico e fisiólogo e mesmo não sendo psicólogo por formação é considerado, graças aos seus trabalhos, um dos criadores da psicologia das percepções e, embora a psicologia estivesse em terceiro lugar entre seus interesses científicos, suas pesquisas muito contribuíram para o fortalecimento da abordagem

experimental no estudo de questões psicológicas.

Trabalhou em Königsberg e talvez tenha sido esta uma das razões para a influência kantiana na sua concepção de número. Para Helmholtz o número seria construído primeiramente em seu aspecto ordinal (em oposição a Mach e Rignano, que defendiam a primazia do cardinal), em íntima associação com o tempo, assim como em Kant.

O número teria então o seu ponto de partida na lembrança da ordem de sucessão temporal de nossos estados de consciência, isto é, "contar é um procedimento que repousa em nossa faculdade de recordar a ordem de sucessão de nossos estados de consciência". (Helmholtz, apud Piaget, 1975, p.76).

Desta forma a sucessão temporal irreversível dos estados de consciência constituiria por si só uma série interna e, bastaria então denominar numericamente os termos desta série para se obter uma sucessão de números ordinais que permitem definir o cardinal como uma "soma" de ordinais determinada pela simples sucessão e pela igualdade dos dois números ordinais. São três, portanto, os aspectos envolvidos nesta concepção: a origem ordinal; o processo de numeração dos termos da série temporal e a fonte empírica.

Quanto ao primeiro aspecto, diversas demonstrações (entre elas as de Brunschvicg e de Reymond) já foram realizadas mostrando que a ordenação supõe a cardinação e outras tantas (embora em menor número), provando a recíproca, seguindo o seguinte princípio:

> ... se as unidades sucessivas são rigorosamente homogêneas, somente pode se distinguir sua ordem de sucessão quando se relacionam com os conjuntos formados por esta própria sucessão (1+1+1 difere de, por exemplo, 1+1, apenas porque existem dois números enumerados antes do último ao invés de um único); inversamente, os conjuntos cardinais não podem ser avaliados a menos que sejam ordenados, se é que se quer ter certeza de não haver contado duas vezes o mesmo termo. (Piaget, 1975, p.76).

Quanto à questão do método de numeração, Helmholtz tinha necessidade de estabelecer uma continuidade entre a sucessão (qualitativa) dos estados de consciência e a sucessão dos números inteiros, ou seja, transformar tais "estados qualitativos" em "unidades" homogêneas. Ele preencheu, então, a lacuna existente com um conjunto de operações convencionais vinculando signos de numeração com os termos de uma série temporal, através de uma reconstituição psicológica artificial, culminando com a "transformação"

unesp

dos elementos da sucessão no tempo em unidades homogêneas.

Finalmente, a fonte empírica, o seja, o ponto de partida localizado em uma experiência interior, no caso, o tempo. Piaget (1975), comenta que a "ilusão de um parentesco direto entre número e tempo foi compartilhada por certa quantidade de outros pensadores começando por Kant e terminando por Brouwer", o que torna o erro muito mais significativo. (Piaget, 1975, p.77).

As experiências de Piaget acerca do tempo comprovaram que a construção da sucessão temporal só ocorre na criança durante o período operatório concreto, portanto, concomitante ou após a construção do número.

A explicação de Helmholtz, embora também oriunda de uma interpretação psicológica do número, diferentemente das teorias de Mach e Rignano, da experiência mental e exterior ao sujeito, admite, que o número seria extraído a partir de uma experiência interior, o que poderia possibilitar uma confusão entre a teoria dos estados sucessivos de consciência e a análise genética, o que não ocorre.

A principal diferença entre "explicar" o número mediante a análise genética e pela experiência interior reside na forma da abstração. As explicações pela experiência interna acreditam que é possível abstrair um caráter de uma percepção interna e inseri-lo numa conduta superior da mesma maneira como se extrai uma qualidade física qualquer, enquanto que na análise genética a abstração de um caráter supõe uma abstração a partir das ações e, além disso, a operação de seriação (ou ordinação) não pode ser extraída nem da experiência externa e nem da interna, porque a ordem é algo que é acrescentado (e não extraído) aos objetos sejam estes reais ou da consciência atual.

2.2.2.1.2 O logicismo de Russell e Whitehead

Partidários da idéia de Frege, Russell e Whitehead tinham o ambicioso plano de "reduzir" a matemática à lógica e, iniciam o trabalho tentando apresentar a aritmética como um ramo da lógica pura e para isso, o "plano" era "traduzir" os axiomas de Peano em termos puramente lógicos. Para isso, definem número em termos de classes e de relações ou, mais especificamente, o aspecto cardinal do número é estabelecido pelas classes e o ordinal, pelas relações assimétricas, porém, de forma independente.

Um outro fator importante a ser observado e que decorre dessa concepção é que os números se constituem isoladamente, a partir de classes independentes entre si e, portanto, não existindo uma iteração que culminaria com a sucessão dos números inteiros e, com esta concepção, não é absurda a idéia de uma construção em separado dos aspectos cardinal e ordinal.

Não será utilizado aqui o argumento da interdependência entre a cardinação e a ordenação para ressaltar a insuficiência da concepção russelliana porque interessa ao contexto deste trabalho analisar a possibilidade de redução do número à lógica.

Para verificar se esta explicação é satisfatória a questão se resume em "determinar se os processos formadores do número são ou não os mesmos a partir dos quais derivam as classes e as relações". (Piaget, 1975, p.91).

A teoria de Russell e Whitehead para o número começa com a descrição do que é uma "classe de classes", ou seja, dadas duas classes consideradas em sua extensão, dão origem a uma mesma classe de classes se é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus elementos. O número cardinal é definido como estas "classes de classes" e assim, o número 1 é a classe de todas as classes unitárias, o número 2 é a classe de todos os pares possíveis, o número 3 é a classe de todas as ternas, etc. O número ordinal é igualmente constituído por meio de classes, só que de relações assimétricas "semelhantes" e esta "semelhança" é obtida também mediante uma correspondência biunívoca.

Apesar destas "definições" terem sido aprovadas por muitos matemáticos e quase todos os lógicos, também recebeu muitas objeções que podem, todavia, serem agrupadas em duas vertentes: a) as que defendem a existência de um círculo vicioso e b) as que preconizam a existência de diferenças funcionais entre a classe lógica e o número.

O maior crítico ao reducionismo lógico foi o francês Henri Poincaré, que justifica a existência de um círculo porque o número já estaria presente ao se estabelecer a correspondência biunívoca entre os objetos singulares argumentando que na "expressão 'um' homem, etc, o objeto individual ou a classe singular já implica na presença do número 1". (Piaget, 1975, p.92).

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

A contra-argumentação foi no sentido de que existe uma distinção entre o "um" lógico e o número 1, ou seja, o "um" lógico implicaria a "identidade" e não o número, da mesma forma como os termos lógicos "alguns", "todos" ou "nenhum" se referem apenas à pertinência ou não dos indivíduos a uma determinada classe.

Segundo Piaget (1975), tanto Russell quanto seus adversários desencadearam um embate sem saída, ao argumentarem com identidades e classes isoladas, pois o atomismo lógico possibilita a justificativa em ambas direções, uma vez que "a identidade pertence tanto à matemática como à lógica intensiva", sendo que a especificidade lógica ou matemática só é passível de ser determinada em função da "estrutura de conjunto da totalidade operatória onde se inserem os elementos". (Piaget, 1975, p.92).

No que se refere à diferença funcional entre classe e número, fica claro que, a função da classe, como é constituída por indivíduos que gozam de uma determinada propriedade, é a de identificar, ao passo que a do número (que necessita abstrair as qualidades), é a de diversificar, de onde se conclui que são funções fundamentalmente heterogêneas. Entretanto, novamente, esse argumento só será válido se aplicado às totalidades operatórias e não aos elementos isolados.

Assim, considerando o atomismo lógico russelliano, Piaget entende que a análise da solução logicista deva ser restrita à natureza da correspondência biunívoca estabelecida para se criar as classes equivalentes, para verificar se ela é puramente lógica (qualitativa), ou se já introduz explicitamente o número.

Na correspondência biunívoca lógica ou qualitativa, os elementos se correspondem univocamente em função de suas qualidades, como por exemplo, quando se analisam as semelhanças entre dois objetos (ou conjuntos de objetos) e, para isto, se estabelece a correspondência entre uma parte de um com a parte semelhante no outro. Por considerarem apenas as qualidades, as correspondências qualitativas independem da quantificação.

A correspondência biunívoca qualquer ou matemática, não é estabelecida em função das semelhanças qualitativas mas associando um elemento qualquer de um dos conjuntos a um elemento também qualquer do outro, com a única condição de que cada elemento seja colocado em correspondência uma única vez, o que implica numa quantificação, pressupondo a unidade.

unesp

O problema da concepção de Russell reside no fato dele utilizar a correspondência biunívoca matemática ao estabelecer sua "classe de classes" e, assim, não é puramente a classe que gera o número cardinal, mas uma classe já quantificada pela correspondência qualquer.

> Assim, quando Russell constrói o número 12 e faz corresponder um a um os apóstolos de Jesus Cristo com os marechais de Napoleão, o apóstolo Pedro não é associado ao marechal Ney em virtude de suas qualidades comuns (como quando um biólogo põe em correspondência os pelos dos mamíferos com as penas dos pássaros) mas, simplesmente enquanto um constitui uma unidade qualquer do primeiro conjunto e o outro uma unidade qualquer do segundo. (Piaget, 1975, p.94).

Quanto ao número ordinal concebido como classe de relações assimétricas semelhantes, a primeira questão que se apresenta é saber qual é a "semelhança" que intervém na constituição de duas (ou mais) classes de relações assimétricas semelhantes.

Analogamente ao número cardinal, novamente é o tipo de correspondência biunívoca que é o determinante. Se a correspondência fosse do tipo qualitativo, as relações assimétricas que vinculam os objetos seriados deveriam ser as mesmas nas duas séries correspondentes de modo que os objetos seriados não seriam distintos apenas por seu número de ordem, ou seja, as categorias entrariam em jogo. Por outro lado, a correspondência sendo de natureza qualquer, a semelhança deve ser generalizada, com a abstração do conteúdo qualitativo das relações de forma a que o único critério possível para distinguir dois elementos é o número de ordem dos objetos e das relações que os unem sucessivamente, ou seja, da sucessão como tal.

> Russell, ao não estabelecer na sua dupla redução estas distinções genéticas que conduzem a uma distinção correlativa na lógica entre as operações como tais e, não somente entre as classes e as relações isoladas se encerra, assim, em dois círculos viciosos. (Piaget, 1975, p.95).

2.2.2.1.3 Poincaré e a intuição racional do número

O matemático francês Henri Poincaré foi um dos maiores críticos ao reducionismo de Russell e Whitehead, ao não concordar com a tese de que é possível reduzir o número à lógica das classes e das relações.

unesp

Poincaré entendia o número como o produto de uma intuição racional (sintética *a priori*) e irredutível às operações lógicas. Contrário ao logicismo, ou seja, à corrente de pensamento que considerava a matemática como simplesmente um ramo da lógica, o cientista francês é considerado um dos precursores do intuicionismo, corrente que se opunha à tese logicista.

> A própria possibilidade da ciência matemática parece uma contradição insolúvel.
>
> Se esta ciência é apenas aparentemente dedutiva, de onde vem o rigor perfeito que não se tem intenção de colocar em dúvida?
>
> Se, por outro lado, todas as proposições que ela enuncia podem ser tiradas umas das outras pelas regras da lógica formal, como a matemática não se reduz a uma imensa tautologia? (Poincaré, 1943, p.9).

Por outro lado, Poincaré também criticava os matemáticos que se deixavam guiar simplesmente pela intuição, os quais, "na primeira investida fazem conquistas rápidas, mas algumas vezes precárias como se fossem ousados cavaleiros na linha de frente". (Poincaré, 1995, p.13).

De acordo com Poincaré, se no século XIX os matemáticos dividiam-se, em duas correntes, uma que se apoiava na lógica e outra na intuição, uma releitura dos clássicos os enquadraria como intuicionistas. E mais, como a intuição não oferece o rigor e nem mesmo a certeza, foi necessária uma evolução na ciência matemática, evolução esta que a encaminhou para a lógica. Todavia, para o gênio francês, "para fazer aritmética, assim como para fazer geometria é preciso algo mais que a lógica pura", sendo a intuição este "algo mais", ressaltando, contudo, que sob esta denominação diversas idéias estão subentendidas. (Poincaré, 1995, p.18).

> Comparemos estes quatro axiomas:
>
> 1) Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si;
>
> 2) Se um teorema é verdadeiro para o número 1, e se demonstramos que ele é verdadeiro para n+1 contanto que o seja para n, será verdadeiro para todos os números inteiros;
>
> 3) Se, numa reta, o ponto C está entre A e B, e o ponto D entre A e C, o ponto D estará entre A e B;
>
> 4) Por um ponto, só podemos fazer passar uma paralela a uma reta dada.
>
> Os quatro devem ser atribuídos à intuição. Contudo, o primeiro é o enunciado de uma das regras da lógica formal, o segundo é um verdadeiro juízo sintético *a*

> *priori*, é o fundamento da indução matemática rigorosa, o terceiro é um apelo à imaginação; o quarto é uma definição disfarçada. (Poincaré, 1995, p.18).

A intuição se apresenta, pois, sob diversas formas, como um apelo aos sentidos e à imaginação; como generalização, por indução, de procedimentos das ciências experimentais (representar um polígono de n lados, por exemplo) e, a que interessa particularmente a este trabalho, a intuição do número puro (2° axioma) e da qual se originaria, para Poincaré, o verdadeiro raciocínio matemático, a única intuição que é passível de certeza.

É importante ressaltar que no século XIX, ocorreu a aritmetização da análise, como forma de fundar esta última em bases mais sólidas, o que torna bastante plausível a hipótese de Poincaré.

A concepção de que o número (e, conseqüentemente, a matemática) é produto de uma intuição racional foi (e ainda é) sustentada por inúmeros matemáticos existindo, porém, divergências quanto ao sentido de intuição que varia desde "a intuição da essência estática do número até a intuição operatória". (Piaget, 1975, p.95).

Ao considerar que o número inteiro se funda sobre uma intuição sintética *a priori* que se traduz no raciocínio por indução ou recorrência, Poincaré, por mais convencionalista que tenha sido em muitas questões, como por exemplo, sobre os vários tipos de números ou sobre os relacionamentos entre os diversos tipos de espaço, admite que tal intuição é operatória, ou seja, uma intuição isenta de contradição e que é "construída".

Brouwer, que renovou o intuicionismo de Poincaré e o opôs ao formalismo lógico, considerava que "o domínio da intuição racional se estenderia assim, do *a priori* à livre construção operatória". (Piaget, 1975, p.96).

Piaget considera que a intuição operatória do número puro, irredutível à lógica concebida por Poincaré carece de especificidade, enquanto que a redução de Russell não é operatória o suficiente e, sua hipótese então, é a de que haveria a possibilidade de um *tertium* entre as duas posições.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

A discordância de Piaget com os intuicionistas se fundamenta no fato de que a intuição do número puro não é a de um número específico e sim de um número qualquer e seria, segundo o próprio Poincaré, a "faculdade de conceber que uma unidade pode agregar-se a um conjunto de unidades". (Poincaré, 1943, p.37).

Assim, ao procederem de uma intuição que contém, de antemão, a noção de unidade, as operações numéricas se colocam em oposição às operações lógicas, entretanto, os resultados de inúmeras pesquisas realizadas por Piaget e outros sobre a gênese dos conceitos matemáticos mostram que:

> Todos os conceitos de caráter extensivo e métrico como a medida, a proporção em geometria e o próprio número somente se constituem em sua forma operatória quando podem apoiar-se em agrupamentos lógicos de caráter intensivo. (Piaget, 1975, p.96).

Isto não significa, todavia, que exista um estádio caracterizado por estruturas lógicas que poderia ser considerado pré-numérico seguido de um estádio numérico, ao contrário, existe uma interdependência (que será mais bem explicitada no próximo capítulo) entre o lógico e o numérico e que é originária do conceito de conservação dos conjuntos como totalidades, sejam tais totalidades lógicas ou numéricas e mais, esta conservação não se apresenta absolutamente como uma "intuição", mas é construída, operatoriamente, num longo e complexo processo.

> A faculdade de conceber que uma unidade pode agregar-se a um conjunto de unidades" que é assinalado por Poincaré como sendo o específico da intuição do número puro supõe, então, a "faculdade" de conceber conjuntos invariantes encaixados uns nos outros e a "faculdade" de ordenar desde o início os elementos agregados. (Piaget, 1975, p.97).

Todavia, se a sucessão dos números não pode se apoiar em uma primeira intuição contendo de antemão a idéia de unidade, após sua construção, esta mesma sucessão produz uma intuição racional, em tudo semelhante à descrita por Poincaré, com a diferença, porém, de ser final e não prévia, "no sentido de que o número é apreendido diretamente pelo espírito sem ser intermediado por raciocínios discursivos ou lógicos". (Piaget, 1975, p.98).

> ...concentração instantânea de inumeráveis raciocínios anteriores e (esquecidos),



> esta intuição final é apenas a expressão da compreensão inteligente e não nos informa nada quanto à sua construção. (Piaget, 1975, p.98).

Ao conceber o número "como síntese da inclusão das classes e da ordem serial, ou seja, como combinação nova, mas a partir de caracteres puramente lógicos", Piaget resume o que tanto a hipótese de Russell e Whitehead, por um lado, quanto a de Poincaré, por outro, querem explicitar, estabelecendo, portanto, um *tertium*, tão ao gosto do cientista genebrino.

Em outras palavras, o número tem por fonte a lógica, porém não deriva de nenhuma operação em particular, mas de sua síntese, ou seja, as classes agrupando os objetos por suas semelhanças, as relações assimétricas pelas diferenças ordenadas e o número agrupando os objetos enquanto são ao mesmo tempo equivalentes e distintos, o que é conciliatório com a irredutibilidade de Poincaré.

2.2.3 O estruturalismo de Nicolas Bourbaki

Além do acabamento da lógica matemática e da análise dos fundamentos, o século XX testemunhou, também, o aparecimento de estruturas muito gerais, que formalizaram uma "geometria associada à análise, no que se denominou topologia". As mesmas estruturas, possibilitaram a introdução "de uma análise para espaços de dimensão infinita, que é a análise funcional" e, forneceram, também, "um formalismo algébrico à geometria, por meio da geometria algébrica". Trata-se das estruturas-mãe dos Bourbaki, já tratadas no capítulo I. (D'Ambrósio, 1998, p.54).

Nicolas Bourbaki, de nome grego e origem francesa, é um personagem fictício, sob o qual se abrigava um grupo de jovens matemáticos franceses e, além de artigos publicados nas mais eméritas revistas científicas, produziu, segundo D'Ambrósio, a mais importante obra matemática do século XX, intitulada *Elementos de Matemática*, com mais de cem volumes e ainda incompleta, foi concebida com o intuito de ser o "equivalente do século XX do trabalho de Euclides, sintetizando toda a matemática conhecida". (D'Ambrósio, 1998, p.54).

> Segundo a concepção bourbakiana, ou pelo menos a de Jean Dieudonné, a matemática atual é como uma bola formada de muitos fios emaranhados de maneira tal que aqueles que estão no centro reagem entre si firme e imprevisivelmente. Nesse emaranhado há fios, ou pontas de fios, que saem em

> várias direções e que não têm nenhuma conexão íntima com nada que está dentro. O método bourbakiano corta todos esses fios livres e se concentra no apertado núcleo da bola de onde tudo o mais se desembaraça. (Eves, 1995, p.692).

O estruturalismo bourbakiano não alcançou um *status* de corrente filosófica e, mesmo antes de se consolidar, passou por transformações em função da descoberta ou construção do que pode ser considerado como novas estruturas, quais sejam, as "categorias", de Mac Lane, Eilenberg, etc.

2.3 O FUTURO

Em virtude dessa evolução riquíssima das idéias matemáticas, que desde os primórdios da humanidade até os dias atuais, apenas acumula novos resultados, é legítimo indagar se existiria um limite para tal crescimento, ou seja, qual o futuro destinado à matemática.

A matemática atual passa por momentos de profundas transformações, em função de diversos fatores, um deles, é o reconhecimento de que a matemática é afetada pela diversidade cultural, tanto nos níveis elementares, quanto nos mais avançados. Um outro fator é o avanço tecnológico, que alteraram os meios de observação, de coleta e processamento de dados, alterações estas que modificaram a natureza do rigor científico.

Segundo D'Ambrósio (1998), ocuparão lugar de destaque na matemática do futuro, o que hoje é denominado de matemática discreta e, igualmente, o que antes, eram considerados como situações particulares, ou "casos patológicos", como a não-linearidade; a teoria do caos, fractais, teoria dos jogos, pesquisa operacional, programação dinâmica, enfim, conteúdos que, apesar de sua simplicidade e acessibilidade, só são estudados em algumas "especialidades" de matemática aplicada. Para o referido autor, tais assuntos apresentam problemas mais interessantes, a visualização é semelhante ao que se vê na TV e nos computadores e, com certeza, agradariam mais aos jovens.

> Já é tempo de os cursos de licenciatura perceberem que é possível organizar um currículo baseado em coisas modernas. Não é de estranhar que o rendimento esteja cada vez mais baixo, em todos os níveis. Os alunos não podem agüentar coisas obsoletas e inúteis, além de desinteressantes para muitos. Não se pode fazer todo aluno vibrar com a beleza da demonstração do teorema de Pitágoras e

outros fatos matemáticos importantes. (D'Ambrósio, 1998, p.59).

Todavia, pela própria história da matemática, é possível afirmar que sua construção não tem limites, porém, de onde viria esta inesgotável fonte de novos conhecimentos? Esta questão é respondida pela epistemologia da matemática, da qual, são abordados alguns destaques a seguir.

2.3.1 A epistemologia da matemática

A existência, o desenvolvimento e a fecundidade da matemática levantam questões epistemológicas que são essenciais não só sob a ótica da epistemologia da matemática, como também, da epistemologia em geral.

De fato, desde o nascimento da teoria do conhecimento, a partir das reflexões de Platão sobre a matemática, a epistemologia seguiu, com Descartes, Leibniz, Kant e mesmo nos dias atuais, discutindo o que Piaget considera como questão central de toda epistemologia: Como é possível a matemática e de onde vem o seu acordo com o real? Pela variedade de soluções propostas (muitas incompatíveis entre si), ainda hoje estas questões não se encontram satisfatoriamente resolvidas.

Os principais trabalhos de Piaget acerca da epistemologia da matemática se concentram em quatro importantes obras: *Lógica e conhecimento científico*; *Epistemologia matemática e psicologia*; *Epistemologia Genética* e *Introdução à Epistemologia genética – 1: O pensamento matemático*.

Na primeira delas, Piaget parte da discussão acerca do estatuto epistemológico das proposições matemáticas e conclui que só mediante a combinação entre as análises lógicas e genéticas é possível se atingir as raízes epistemológicas do conhecimento matemático e demonstra tal afirmação utilizando a descrição dos processos de construção, pela criança, do número real e do espaço.

Em *Epistemologia Matemática e Psicologia*, em co-autoria com E. Beth, como o próprio título indica, a preocupação central é a relação entre matemática e psicologia e concluem

que, embora enquanto saber científico exista uma total independência entre ambas, o mesmo não é possível de se afirmar quando o enfoque se torna epistemológico.

Em *Epistemologia Genética*, obra considerada de "divulgação", Piaget discute os três principais problemas da epistemologia da matemática, quais sejam: a fecundidade, seu caráter rigoroso e necessário e a sua perfeita harmonia com a experiência e realidade física.

Finalmente, na última obra citada anteriormente, a preocupação central é com o "pensamento matemático", enfatizando, de maneira particular, o que o autor considera como o problema central de toda epistemologia, qual seja, "a possibilidade de uma ciência matemática ao mesmo tempo rigorosamente dedutiva e que se adapte à experiência". (Piaget, 1975, p.63).

2.3.1.1 Os dados genéticos

Para discutir a respeito do estatuto epistemológico das proposições matemáticas, Piaget parte da comparação entre as seguintes afirmações: "os seres vivos nascem a partir de seres vivos, crescem e morrem enquanto indivíduos" e "3 x 4 = 12" . Embora ambas sejam proposições verdadeiras, existe uma "dupla oposição entre elas", no que se refere ao significado e à natureza epistemológica.

Quanto ao significado ou alcance do conhecimento, a proposição matemática é "imediatamente inteligível e transparente à razão", e compreensível para qualquer indivíduo familiarizado com os termos em questão, enquanto que a primeira, recai sobre conceitos que possuem, individualmente, problemas ainda não resolvidos como, por exemplo, a definição do termo "vivo", já que "se conhecem vírus que assimilam mas não respiram ou que podemos cristalizar à nossa vontade" e que ao voltar ao estado normal, funcionam como antes. (Piaget et al., 1980, p.337).

Já no que se refere à natureza epistemológica a situação se inverte, uma vez que a proposição biológica é, sem nenhuma controvérsia, conseqüência da experimentação, sendo, portanto, passível de revisão e modificação em decorrência de novos experimentos.

Para a proposição matemática, por outro lado, são inúmeras as interpretações acerca do seu modo de formação, do empirismo ao idealismo; do platonismo ao empirismo lógico; do intuicionismo ao estruturalismo, razão pela qual, a questão "o que é número?", reveste-se

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

de tanto significado.

É esta dupla situação, de clareza quanto ao significado e obscuridade no que se refere à natureza que, para Piaget, remete o problema para uma análise numa perspectiva genética, uma vez que:

> ...se quiser estabelecer ou verificar uma verdade empírica, o sujeito, ao entregar-se a toda espécie de obstáculos ou de dificuldades exteriores, está em geral consciente dos processos de sua atividade, sendo portanto, o estatuto epistemológico das proposições obtidas tanto mais claro quanto o seu conteúdo é mais difícil de determinar com precisão; ao passo que a formação de conhecimentos ligados a atividades mais espontâneas, mais primitivas e mais profundas será muito mais difícil de estabelecer, e isso, paradoxalmente, tanto mais quanto o resultado dessas atividades é mais evidente e não fornece portanto nenhumas ocasiões ao sujeito de atingir retroativamente o detalhe dos processos que aí conduziram. (Piaget et al., 1980, p.338).

Assim, reafirmando o que já foi dito antes, só existiria uma maneira de se compreender o estatuto epistemológico do conhecimento matemático: coordenar o geral da natureza lógica e o elementar psicogenético, como uma maneira de atingir ao mesmo tempo, as pressuposições mais gerais e os modos de formação mais elementares.

Da mesma maneira como foi possível entender lógica como a axiomatização das estruturas operatórias do sujeito, Piaget considera a matemática como um "sistema de construções que se apóiam igualmente nos seus pontos de partida nas coordenações das ações e das operações do sujeito e procedendo igualmente por uma sucessão de abstrações reflexionantes em níveis mais elevados". Dessa forma, do ponto de vista genético, para compreender o estatuto epistemológico do conhecimento matemático importa buscar nos seus primórdios, as conexões entre as estruturas matemáticas nascentes e as estruturas operatórias do sujeito. (Piaget et al., 1980, p.339).

Tal interpretação da matemática contraria a opinião da grande maioria dos cientistas e historiadores das ciências para os quais, não existe nenhuma relação entre a formação das noções e operações em seus estágios mais elementares e a sua evolução nos níveis superiores. Esse reduzido interesse que, em geral, é dedicado aos estágios elementares é decorrente da "concepção comum de um desenvolvimento dos conhecimentos que seria linear, substituindo-se cada etapa à etapa precedente" o que levaria então, a um contato de cada última etapa, apenas com a imediatamente anterior e nunca com as primeiras. (Piaget

unesp

e Garcia, 1987, p.17).

Como os sucessivos estádios de construção do saber são seqüenciais, isto é, "cada um é, ao mesmo tempo, o resultado das possibilidades abertas pelo precedente e condição necessária do subseqüente". Além disso, como o mecanismo essencial a esta construção é a abstração reflexionante, cada estádio começa pela reorganização, em outro patamar, das principais novidades dos níveis precedentes, o que estabelece a "integração nos estádios superiores de determinadas ligações, cuja natureza só é explicada na análise dos estádios elementares". (Piaget e Garcia, 1987, p.17).

Assim, a matemática se constitui num notável exemplo de construção do saber mediante a abstração reflexionante. De fato, historicamente falando, são três os grandes períodos de evolução da matemática, a matemática grega, o período entre os séculos XV e XIX e a partir do século XIX até os dias atuais, e:

> ...o realismo grego, que apenas se ocupa dos estados permanentes (figuras e números), forneceu-nos, entretanto, um conjunto de conhecimentos prévios, necessários à descoberta das transformações algébricas e infinitesimais do século XVII, e a análise destas últimas era indispensável para que pudessem constituir-se as estruturas específicas das matemáticas do século XIX e de hoje. (Piaget e Garcia, 1987, p.18).

2.3.1.2 As conexões entre as estruturas matemáticas e as operações do sujeito

Para se estabelecer as conexões entre as estruturas operatórias do sujeito e as estruturas matemáticas, os estudos realizados por Piaget e seus colaboradores não recorrem a declarações verbais nem à análise da "tomada de consciência" de determinada operação, mas, primordialmente ao que o sujeito *faz* para adquirir e utilizar um conhecimento e não ao que ele pensa a respeito.

Conforme foi visto na descrição dos estádios de desenvolvimento determinados pela epistemologia genética, já no período operatório concreto, a criança é capaz de agrupamentos aditivos e multiplicativos de classes e de relações, os últimos, na forma de matrizes ou tabelas de dupla entrada. Diretamente desses agrupamentos, deriva uma operação essencial em matemática, o produto cartesiano entre dois conjuntos A e B, representado por AXB. No estádio das operações formais, as operações sobre operações,

unesp

permitem a determinação do conjunto das partes de um conjunto, operação também essencial para a matemática atual.

> Quanto ao conjunto das partes, que supõe uma combinatória, ele aparece um pouco tarde (início do estádio das operações proposicionais por volta dos onze ou doze anos), mas muito espontaneamente também, pois que sem nenhuma formação escolar nesse ponto os sujeitos conseguem combinar os juízos ou os objetos segundo uma estrutura a partir desse nível: à análise genética, este conjunto das partes aparece, com efeito, como uma generalização da classificação no sentido, para um conjunto dado de elementos, de uma classificação de todas as classificações compatíveis com esses elementos. (Piaget et. all.; 1980, p.345).

A partir dos trabalhos da escola Bourbaki, intensificou-se a busca por uma "matemática única", que pudesse ser expressa mediante estruturas universais, ou seja, com o aprimoramento das investigações acerca da teoria dos grupos, dos conjuntos e das redes e reticulados, há um grande esforço no sentido da constituição de uma *teoria geral das estruturas*, de forma a considerá-las independentemente da natureza dos seus conteúdos.

As recentes investigações que culminaram com a demonstração do "último teorema de Fermat" corroboram as hipóteses bourbakistas, uma vez que, setores aparentemente desconexos da matemática, resultam isomorfos. É também, mediante o estabelecimento de diversos isomorfismos, que a teoria geral das estruturas elimina a compartimentalização dos diferentes setores da matemática, dotando-lhe de uma "arquitetura geral" cujos alicerces repousam sobre três estruturas fundamentais, irredutíveis entre si.

A partir dessas estruturas fundamentais, que alguns autores denominam de "estruturas mãe", procedem todas as estruturas particulares, construídas mediante dois processos, quais sejam, a *diferenciação* (introdução de novas condições sob forma de axiomas, restringindo os campos de aplicação) e a *combinação* entre estruturas diversas.

Assim, para a investigação epistemológica, a pergunta a ser feita é: quais são as relações entre as estruturas fundamentais que constituem os alicerces do edifício formal da matemática e as estruturas naturais do sujeito?

Em primeiro lugar é preciso ficar claro que embora bastante arraigada ao formalismo, a construção bourbakista está longe de ser apenas uma axiomática, com suas premissas escolhidas livremente objetivando unicamente fundamentar os desenvolvimentos

unesp

posteriores; ao contrário, a definição das "estruturas-mãe" foi determinada mediante um longo processo de análise regressiva.

Conforme já foi estabelecido no capítulo I, as "estruturas-mãe" são as algébricas (cujo protótipo é o *grupo*); as de ordem (*redes*, referentes às relações) e as topológicas (referentes às noções de vizinhança, limite e continuidade).

Por serem extremamente gerais e abstratas, Piaget considera impossível encontrá-las sob esta mesma forma (geral e abstrata), nas coordenações operatórias naturais do sujeito e, menos ainda, na sua consciência e afirma que "encontrá-las já elaboradas constituiria uma verificação quase milagrosa da teoria platônica da reminiscência ou da teoria kantiana dos esquemas *a priori*, que nenhum dado genético confirmou até agora". (Piaget et al., 1980, p.346).

Do ponto de vista genético, as "estruturas-mãe" são aquelas, primitivamente organizadas e que servem de ponto de partida para a seqüência de abstrações reflexionantes que possibilitam a construção do conhecimento. Assim, analogamente ao trabalho dos Bourbaki, para a determinação das estruturas mais elementares do sujeito é preciso uma análise genética regressiva, tal como a análise formal dos isomorfismos levou às estruturas fundamentais da matemática.

> A questão é então a de estabelecer se existem relações entre o mais fundamental, formalmente falando, e o mais elementar, geneticamente falando. Se estas relações existirem, dever-se-á, portanto, encontrar três espécies de estruturas elementares, irredutíveis entre si e que aparecerão como casos particulares ou "representações" das estruturas algébricas, de ordem e topológicas. (Piaget et al., 1980, p.346)

Para isso aparentemente seria necessário remontar aos esquemas sensório-motores e verificar se já apresentam algumas das características algébricas, de ordem e topológicas, irredutíveis entre si. Piaget, entretanto, afirma ser suficiente a análise das primeiras estruturas operatórias que dão origem a todas construções seguintes. Tais estruturas são espontâneas e não resultam de aquisições escolares; são acabamentos de aquisições de níveis anteriores e são ponto de partida para novas aquisições e mais, são irredutíveis e de três tipos diferentes, conforme segue:

unesp

- Estruturas que recaem sobre objetos manipulados mediante operações lógico-matemáticas, cuja forma de reversibilidade é a *inversão,* isto é, a composição entre as operações direta e sua inversa resulta no elemento neutro (anulação de toda transformação), sendo referentes, portanto, às classes e não às relações.
- Estruturas que recaem sobre relações manipuladas por operações lógico-matemáticas que têm a reciprocidade como forma de reversibilidade, no sentido de que o resultado da composição entre as relações direta (xRy) e sua recíproca (yRx) é a relação de equivalência $x \equiv y$ e não uma anulação.
- Estruturas que não recaem nem sobre classes (manipulação das semelhanças) e nem sobre séries (relação de diferença crescente), mas, nas vizinhanças, como por exemplo, os agrupamentos de partição (de onde tem origem a medida), cujos elementos são agrupados não mais de acordo com suas semelhanças ou diferenças (que dão origem ao número), mas em função de sua posição. São os sistemas das operações infralógicas ou espaciais cuja origem remonta a intuições topológicas elementares como fechamento, fronteira, continuidade, etc.

Pela sua própria constituição e pela diferença entre os elementos sobre os quais recaem, estas três estruturas são irredutíveis entre si fornecendo, entretanto, inúmeras possibilidades de combinações, como no caso entre (1) e (2), cuja síntese fornece a *seqüência dos números naturais* e entre (2) e (3), dando origem à *medida espacial.* A síntese num único sistema, das inversões e reciprocidades, a partir da possibilidade de operações proposicionais efetiva a formação do grupo quaternário INRC, levando a construção de uma variedade de novos esquemas operatórios, como as proporções, sistemas duplos de referência, etc.

Fica evidente a analogia entre as estruturas do tipo (1) e as algébricas; de (2) e as de ordem e de (3) e as topológicas, evidenciando uma "analogia nítida entre o fundamental matemático, sob a forma das três estruturas-mãe, e o elementar genético sob a forma de três espécies de estruturas operatórias" encontradas não na consciência do sujeito (o que ele *pensa*), mas nas suas coordenações espontâneas de ações e de operações (o que ele *faz*).

Apesar da demonstração das conexões existentes entre as estruturas fundamentais da matemática e as estruturas operatórias elementares do sujeito e, do fato estabelecido anteriormente de que a lógica pode ser considerada uma axiomática das estruturas operatórias do sujeito, existe autonomia da matemática e da lógica em relação à psicologia e vice-versa, eliminando todo psicologismo (tendência de resolver qualquer problema lógico ou matemático utilizando resultados da psicologia).

A eliminação do psicologismo é vantajosa tanto para a psicologia quanto para a matemática (ou lógica), pois acaba com qualquer confusão de métodos e mesmo de problemas. Dessa forma surge um problema fundamental sob a ótica dos mecanismos reais do pensamento, que é o de como explicar psicologicamente a possibilidade de uma lógica e de uma matemática "puras" (independentes do conteúdo).

2.3.1.3 O pensamento matemático

Para Piaget (1975), a possibilidade de uma ciência matemática que seja ao mesmo tempo dedutiva e rigorosamente adaptável à realidade é extremamente perturbadora do ponto de vista genético.

Além desse acordo com a realidade física acontecer de modo muito detalhado, ele se realiza não somente no momento ou imediatamente após a descoberta de uma lei física, mas, "os esquemas matemáticos antecipam, com anos de antecedência, o conteúdo experimental que logo será inserido neles". (Piaget, 1975, p.63).

Assim, ao mesmo tempo em que sempre será possível estabelecer a correspondência entre algum setor da realidade física e a matemática, a última supera constantemente a primeira, mediante suas generalizações embora, a partir de um certo grau de desenvolvimento, não se fundamente, de nenhum modo, na própria experiência.

O mesmo acontece com a criança, ou seja, se no início a criança tem necessidade da experiência para se assegurar que $1 + 4 = 2 + 3$, da mesma forma os egípcios descobriram, usando a medição de terras, os fundamentos da geometria euclidiana. Posteriormente, na criança, a partir dos 11 ou 12 anos e, na História com os gregos, o rigor da matemática exige mais do que a simples comprovação experimental. Piaget então indaga:

> Como explicar então esse poder misterioso de operações que parecem surgir de

> ações que se referem à experiência próxima, porém que, ao coordenar-se entre si, se afastam da realidade empírica num movimento cada vez mais acelerado até dominá-la, antecipá-la e, inclusive, desinteressar-se soberbamente das confirmações que elas lhes oferece nos terrenos limitados do atual e do finito? (Piaget, 1975, p.64).

Realmente, no que se refere à matemática, quando esta é ainda elementar, ela apresenta ser conseqüência de algumas determinadas ações tais como, os deslocamentos, as reuniões ou dissociações, superposições e correspondências. Já no plano superior, o seu domínio é constituído por uma diversidade de transformações operatórias que extrapolam em todos os sentidos as fronteiras da experiência real ou realizável, de onde, a aparente "pobreza" das operações nascentes frente a um universo real infinitamente superior e a posterior inversão de posições que ocorre com o desenvolvimento das operações dedutivas, que superam as transformações realmente observáveis.

Com o desenvolvimento das operações matemáticas aparecem dois problemas fundamentais: o do acordo permanente entre as operações dedutivas e o mundo real e o da fecundidade do raciocínio matemático, que serão abordados a seguir.

2.3.1.4 Principais problemas epistemológicos da matemática

Além dos dois problemas apresentados anteriormente como oriundos do desenvolvimento das operações matemáticas, uma terceira e importante indagação de natureza epistemológica também se apresenta, o de sua necessidade. Assim, são três os principais problemas epistemológicos da matemática: o de sua fecundidade, apesar de partir de poucos conceitos e axiomas relativamente pobres; o de se impor de maneira necessária, permanecendo rigorosa, apesar de seu caráter construtivo e, o de seu acordo com a experiência ou realidade física, apesar de sua natureza totalmente dedutiva. De uma maneira geral, os dois primeiros problemas podem ser resumidos numa única questão, a de como é possível a matemática? E mais, se o desejo for de unificar os três problemas, a única questão a ser respondida, será a da natureza dos "seres" matemáticos, afinal, e isto é surpreendente, em se tratando de uma ciência exata e rigorosa, não existe consenso sobre o que são os "seres" matemáticos e, portanto, para efeito desse trabalho, são abordados aqui, de maneira separada, os três principais problemas da epistemologia da matemática.

unesp

A) A questão da *fecundidade* : para analisar esta questão, Piaget considera admitida a fecundidade da matemática, o que caracteriza um problema que é, ao mesmo tempo, genético e histórico-crítico, pela própria natureza das contínuas novidades que surgem em decorrência do trabalho dos matemáticos, ou seja, elas não são invenções e nem descobertas.

Não são invenções porque lhes falta o grau de liberdade próprio das invenções, ao contrário, cada nova relação estabelecida ou nova estrutura determinada já traz consigo, uma necessidade, ou seja, um certo "só poderia ser desta forma".

Não são também, descobertas, pois que não existem de antemão, como entendia Platão. Não sendo então, as novidades em matemática nem invenções e nem descobertas, elas só podem ser construções e, mais, construções necessárias, levantando, por conseguinte, a questão de seus mecanismos constitutivos.

A epistemologia genética se encarrega de mostrar, no que se refere aos mecanismos constitutivos, a convergência existente "entre o que dizem os matemáticos e o que revela a análise dos estágios elementares", levantando as possíveis hipóteses acerca das "raízes psicológicas e mesmo biológicas de tais construções". (Piaget, 1990, p.78)

Para os matemáticos, a fecundidade da matemática se deve, de maneira geral, à possibilidade de introduzir, indefinidamente, operações sobre operações, além de combinar estruturas. Assim, ao ser traduzida como uma "construção de estruturas" e pelo fato de tal construção ser indefinidamente aberta, a fecundidade da matemática estaria estabelecida.

Dessa forma, e sob esse aspecto, os "seres" matemáticos assumem um novo sentido, deixando de constituir uma espécie de objetos "ideais", com existência interior ou exterior ao sujeito (dependendo da corrente de pensamento) perdendo, portanto, o caráter ontológico. Em outras palavras, os objetos matemáticos mudam constantemente de função, à medida em que mudam de nível, isto é, uma operação que recai sobre determinados "seres", converte-se, por sua vez, em objeto de teoria, num outro patamar (abstração reflexionante), e assim, sucessivamente, de forma que tudo pode tornar-se um "ser", dependendo do estágio em que está sendo analisado.

unesp

Para Piaget (1990), embora possa parecer "irreverência" a comparação entre um matemático e uma criança, é quase impossível negar a semelhança existente entre essa "contínua construção intencional e refletida de operações sobre operações e as primeiras sínteses ou coordenações inconscientes que permitem a construção dos números ou das medidas", bem como das adições, multiplicações, proporções, entre outras operações. (Piaget, 1990, p.80).

B) A questão da *necessidade* e do *rigor*: Como já foi comentado, novas estruturas estão sendo, progressivamente construídas e sem que exista nenhum grau de liberdade ou arbitrariedade em tais construções, ao contrário, possuem o caráter de necessidade.

Piaget admite que possa parecer paradoxal o fato de um conhecimento ser ao mesmo tempo, indefinidamente fecundo e necessário, ou seja, como explicar o fato notável de que "a fecundidade e a necessidade andam sempre juntas?". Para o autor, "ninguém pode negar que o espantoso progresso" da matemática contemporânea se encontra impregnado de dois "progressos correlativos entre uma construtividade reforçada e um rigor aumentado", sendo, portanto, necessário procurar o segredo dessa necessidade no interior da própria construção. (Piaget, 1990, p.81).

Além disso, deve ser destacada a existência de dois níveis ou patamares distintos de necessidade: as demonstrações de caráter meramente lógico e as demonstrações que estabelecem o "por quê" das conseqüências a demonstrar. De fato, as demonstrações simplesmente lógicas apenas mostram que as conclusões são decorrentes das premissas, pois estão de antemão contidas na reunião delas. As demonstrações que buscam os "por quês", utilizam "leis de composição" para atingir as conclusões, como por exemplo, os raciocínios por recorrência.

Assim, se a fecundidade da matemática é garantida pela combinação de estruturas, a sua necessidade é estabelecida pelas leis de composição internas (a reversibilidade, por exemplo) ou externas (morfismos interestruturais), em virtude dos fechamentos que resultam da sua auto-regulagem (acabamento das estruturas).

C) Questão do *acordo com a realidade*: Piaget (1990) chama a atenção para o fato de que "na realidade tudo parece matematizável, senão sempre no sentido da medida, pelo menos no dos isomorfismos e das estruturações". É claro que tal sentença tem um certo caráter de

postulado, porém, tem se constituído em constante, mesmo em campos aparentemente resistentes, como o dos fenômenos vitais. O autor menciona ainda, a questão das "antecipações" já citadas anteriormente:

> E mais do que isso: insistiu-se com freqüência em antecipações surpreendentes, segundo as quais estruturas operatórias construídas dedutivamente, sem nenhuma preocupação com aplicações, puderam posteriormente servir de quadros de referência ou de instrumentos explicativos para fenômenos físicos descobertos muito tempo depois – a teoria da relatividade e a física nuclear fornecem muitos exemplos disso. (Piaget, 1990, p.83/84)

Responder a essa questão, mediante a epistemologia genética, significa estabelecer o acordo entre as estruturas mentais do sujeito e as do objeto. É necessário, então, se o objetivo é buscar as origens, remontar até às coordenações orgânicas e biofísicas, ou seja, "a junção entre as operações do sujeito e as estruturas do objeto deverá ser procurada no próprio interior do organismo antes de poder ser confirmada pelos encontros entre a dedução e a experiência externa" (Piaget, 1990, p.84).

Ainda segundo o autor, pelo simples fato do organismo ser parte integrante do mundo físico, parece ser compreensível que exista uma convergência entre as formas físicas e as formas intemporais construídas pelo sujeito.

O que é menos compreensível, é que a "continuidade das filiações não se perca pelo caminho", uma vez que, existe um longo caminho repleto de reconstruções e de abstrações reflexivas, com novas reorganizações, entre as estruturas orgânicas iniciais e as das operações formais.

Porém, e aqui se encontra outra semelhança com a ciência matemática, que é cumulativa, ao contrário das aprendizagens exógenas e das teorias empíricas, o próprio das estruturas lógico-matemáticas é jamais desprezar ou invalidar às precedentes, mas, sim, superá-las, integrando-as a título de subestruturas, mantendo as imperfeições iniciais dentro das fronteiras excessivamente estritas das formas de partida. A continuidade das formas gerais de coordenação é assegurada por um fenômeno análogo.

Da mesma forma, em seus primórdios, a matemática esteve estreitamente relacionada com



a experiência e os primeiros procedimentos matemáticos muito têm de empíricos como, por exemplo, "reunir ou dissociar os elementos de um ábaco, verificar a comutatividade pela permutação das sub-coleções, etc." Existe porém aí, uma diferença importante entre as experiências: na experimentação física, a informação é obtida diretamente das próprias características do objeto (conhecimento físico), enquanto que, a obtenção de informações lógico-matemáticas (conhecimento matemático) mesmo mediante experimentações, exige estabelecimento de relações e se fundamenta apenas nas propriedades oriundas da ação sobre os objetos.

Ora, essas ações, uma vez interiorizadas podem ser realizadas sem a presença dos objetos, isto é, dedutivamente e, na medida em que as diversas estruturas operatórias são elaboradas, a partir de formas elementares e prescindindo de conteúdos, "sua harmonia com objetos quaisquer fica assegurada no sentido de que nenhuma experiência física poderia desmenti-las, pois elas estão vinculadas às propriedades das ações ou operações e não dos objetos". (Piaget, 1990, p.85).

O melhor exemplo desta construção de conceitos matemáticos, está na própria construção do tijolo fundamental do edifício matemático: a do número.

3- A INVESTIGAÇÃO PSICOGENÉTICA E O NÚMERO

INTRODUÇÃO

Nenhuma teoria epistemológica ou mesmo psicológica provocou maior revolução no ensino da matemática do que os trabalhos de Piaget e seus colaboradores. A afirmação de que "conhecer é agir sobre o objeto" fez surgir uma variedade de materiais manipuláveis de conseqüências discutíveis; o isomorfismo por ele estabelecido entre as estruturas-mãe da matemática (Bourbaki) e as da inteligência, fundamentaram ainda que *a posteriori*, a recomendação de se "aproximar a matemática da escola da matemática dos cientistas" e, a teoria dos conjuntos, as propriedades das operações e mesmo estruturas de semi-grupo e grupo passaram a ser conteúdo obrigatório dos programas de matemática desde o ensino infantil. São algumas das situações que exemplificam interpretações pedagógicas da teoria piagetiana que influenciaram o ensino da matemática.

Nenhuma porém, conquistou tamanha repercussão entre os professores como o fato demonstrado por Piaget de que "não basta de modo algum à criança pequena saber contar verbalmente um, dois, três, etc, para achar-se de posse do número". A demonstração deste fato culmina com a apresentação de uma estrutura operatória complexa para a construção do número, que surge como a síntese da seriação e da classificação, dando origem, conforme já foi discutido no capítulo I, a diversas interpretações pedagógicas equivocadas (por considerarem que esta síntese seria construída de forma linear com a construção primeiro da classificação e da seriação e só depois do número, ou seja, haveria um "estado" pré-numérico, onde o número seria essencialmente lógico), que vão desde à "obrigatoriedade" da realização de atividades pré-numéricas e ao quase "desterro" do número e, particularmente, da contagem dos programas de matemática para crianças da educação infantil e, às vezes, até da série inicial do ensino fundamental. (Piaget e Szeminska, 1981, p.15).

Muitas destas interpretações equivocadas trouxeram conseqüências nefastas ao ensino da matemática; outras, proporcionaram críticas injustificadas ao conjunto do trabalho de Piaget e, outras motivaram, felizmente, novas pesquisas que trouxeram contribuições

efetivas ao ensino da matemática, como a crença de que a criança é ativa na construção do seu conhecimento e no paralelo entre a psicogênese e a sociogênese, favorecendo o fortalecimento de algumas das tendências atuais para se fazer matemática na sala de aula, como a "resolução de problemas" e a "abordagem histórica", respectivamente.

Tamanha repercussão pedagógica de uma teoria seria natural não fosse um aparente paradoxo: as pesquisas de Piaget foram orientadas sempre na busca de soluções de problemas epistemológicos e não na dos problemas do ensino de matemática ou qualquer outra disciplina. Assim, é preciso ficar claro que as adaptações pedagógicas foram sempre realizadas por terceiros, o que justifica, em parte, as diferentes (e mesmo equivocadas) interpretações.

O principal objetivo de Piaget era realizar pesquisas que confirmassem suas especulações teóricas as quais postulavam a continuidade entre o biológico e o mental, a indissociabilidade entre os conhecimentos físico e lógico-matemático, entre outras hipóteses.

Na década de quarenta, Piaget já havia analisado as fontes práticas e sensório-motoras do desenvolvimento da criança e publicado seus resultados em duas obras clássicas: *O nascimento da inteligência na criança* e *A construção do real na criança*, além dos aspectos verbais e conceituais do pensamento infantil, que resultaram em *A formação do símbolo na criança*. Segundo Piaget as pesquisas agora necessitavam "ultrapassar essas duas etapas preliminares e atingir os mecanismos formadores da própria razão, procurar como os esquemas sensório-motores da assimilação inteligente se organizam no plano do pensamento em sistemas operatórios", o que só seria possível mediante o estudo do número. (Piaget e Szeminska, 1981, p.11).

As pesquisas acerca da gênese do número não se restringiram apenas às realizadas por Piaget e Szeminska, que resultaram no livro *A gênese do número na criança* (1941), ao contrário, elas se ampliaram para bem além deste período, com a colaboração da equipe interdisciplinar do Centro Internacional de Epistemologia Genética, a partir da segunda metade da década de cinqüenta e durante os anos sessenta.

Nestes novos trabalhos (comentados por Piaget no prefácio da 3ª edição francesa de *A gênese do número na criança*), realizados por matemáticos, psicólogos, lógicos e

unesp

epistemólogos como Beth, Grize, Papert, Gréco, Matalon, Morf, Ving-Bang, Inhelder, Berlyne, entre outros, os resultados de Piaget e Szeminska foram reavaliados segundo três direções principais: o exame de novos dados experimentais; a confrontação com as implicações tiradas das diversas axiomatizações e a formalização da síntese deduzida, tendo sido organizados de forma a "centralizar as pesquisas sobre um ou dois pontos para assegurar a unidade de trabalho da equipe" e a "contemplar os interesses particulares dos membros da equipe para garantir o máximo de rendimento". (Piaget et al.i, 1960; p.2).

Estas novas pesquisas completaram e tornaram mais fecundas as hipóteses contidas na obra principal sobre o tema e reforçaram, também, a epistemologia genética do ponto de vista construtivista e estruturalista.

Segundo Piaget poucas idéias são tão claras e distintas como a do número inteiro e poucas operações possuem resultados tão evidentes como os da aritmética elementar, que são acessíveis às crianças. Em outros termos, parece que todos compreendem o que é o número e sabem utilizá-lo das mais diversas formas. Esta deve ter sido uma das razões pelas quais o número já havia atingido altos níveis de abstração nas ciências, como por exemplo, os números complexos ou ainda os transfinitos, antes que questões acerca da sua natureza houvessem incomodado os matemáticos. Porém, ao final do século XIX, a discussão iniciada por Frege sobre a natureza não só dos números como de todo conhecimento matemático ganha corpo, dividindo a opinião dos matemáticos de então, desencadeando a "crise dos fundamentos".

Diversas foram as correntes de pensamento que procuraram responder a esta questão, desde as de fundo psicológico, como as fundamentadas nas teorias empiristas, às ligadas propriamente à matemática, como o logicismo e o intuicionismo, além das diversas axiomáticas.

Dentre as explicações psicológicas fundadas nas teorias empiristas, destacam-se as de Mach e Rignano e a de Helmholtz e dentre as axiomáticas, destacam-se o reducionismo lógico de Russelll e Whitehead e a intuição sintética *a priori* de Poincaré e Brouwer, sem falar na explicação teológica de Kronecker.

> Este contraste entre a evidência instrumental do número e o caos das teorias epistemológicas para explicá-lo, mostra por si só, a necessidade de uma investigação genética: o desconhecimento do pensamento em relação às

> engrenagens essenciais de seu próprio mecanismo é, com efeito, o índice psicológico de seu caráter elementar e, em conseqüência da antigüidade do nível de formação a que é necessário remontar para poder alcançá-las. (Piaget, 1975, p.68).

A citação acima, além de evidenciar uma vez mais os objetivos epistemológicos de suas pesquisas sobre o número, deixa também claro que para se atingir as "engrenagens essenciais" do mecanismo do número, é preciso "procurá-las" a partir dos níveis mais elementares do desenvolvimento mental da criança, de onde ser pertinente uma apresentação sucinta da epistemologia genética de Jean Piaget.

3.1 A QUESTÃO DO FORMAL E DO FATO NO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

No primeiro parágrafo da introdução de seu livro *A epistemologia genética*, Piaget revela seu prazer em ter novamente a oportunidade de "insistir na noção bem pouco admitida", de que o conhecimento não pode nem "ser concebido como algo pré-determinado nas estruturas internas do indivíduo", como defendiam os aprioristas, pois estas estruturas "resultam de uma construção efetiva e contínua" e nem pode ser concebido como pré-existente nos caracteres do objeto, como defendem os empiristas, pois que tais caracteres "só são conhecidos graças à mediação necessária dessas estruturas", com estas últimas os enriquecendo e os enquadrando ou, pelo menos, "situando-os no conjunto dos possíveis". (Piaget, 1990, p.1).

Desta forma, "todo conhecimento contém um aspecto de elaboração nova", e o principal problema da epistemologia é o de "conciliar essa criação de novidades" com o fato de que estas se fazem acompanhar, no campo formal, por "necessidades imediatamente elaboradas" e, no campo real, de conquistas da objetividade. (Piaget, 1990, p.1).

Esta questão vem sendo respondida, de maneira variada, pelas diferentes epistemologias, correntes dialéticas ou pela história das ciências e outros ramos do conhecimento e, se, Piaget retoma a questão, o faz com a "dupla intenção de construir um método capaz de fornecer controles e, sobretudo, de remontar às origens, portanto, à própria gênese dos conhecimentos", aspecto este desprezado pela epistemologia tradicional, que se detém apenas nos "estados superiores" desse conhecimento. (Piaget, 1990, p.2).

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

> O caráter próprio da epistemologia genética é, assim, procurar distinguir as raízes das diversas variedades de conhecimento a partir de suas formas elementares, e acompanhar seu desenvolvimento nos níveis ulteriores até, inclusive o pensamento científico. (Piaget, 1990, p.2).

Piaget deixa claro que, embora o tipo de análise que se dispõe a fazer necessite essencialmente de experimentação psicológica, não deve ser confundido com psicologia pura, pois, o que se propôs (e de fato realizou), foi abordar de forma empírica, questões que, até então, vinham recebendo tratamento filosófico, criando, dessa forma, como foi reconhecida pela American Psycological Association, uma epistemologia científica "separada da filosofia, mas vinculada a todas as ciências humanas" e, ainda, "sem esquecer, naturalmente, a biologia". (Piaget, 1990, p.2).

Mas não é apenas a psicologia que intervém diretamente na epistemologia de Piaget, a lógica possui o mesmo grau de importância e é nessa dupla intervenção que reside, segundo Ferreiro e Garcia (in Piaget, 1975), "o núcleo central das dificuldades com as quais se tropeça para chegar a uma interpretação correta" da teoria piagetiana. (Ferreiro e Garcia, in Piaget, 1975, p.9).

Ao denominar sua epistemologia de epistemologia genética Piaget quer deixar claro que as questões epistemológicas necessitam "remontar à gênese" para serem respondidas, mas alerta que isso se deve, não ao fato de se tentar "contrapor a gênese a outras fases da construção contínua dos conhecimentos", mas, sim, para "mostrar que jamais existem começos absolutos", isto é, chamar a atenção para "a existência de uma construção indefinida" e, principalmente, para a necessidade de conhecer o máximo possível de todas as fases, para poder compreender "as razões e o mecanismo" da construção do conhecimento, seja ele da ciência (sociogênese), ou do indivíduo (psicogênese). (Piaget, 1990, p.3).

> Piaget não pretende explicar a ontogênese a partir da sociogênese do conhecimento, nem a inversa; tampouco pretende sugerir que a ontogênese recapitula a sociogênese. ... O que interessa a Piaget, ..., é encontrar um modelo geral explicativo da passagem de um estado de menor conhecimento a outro de maior conhecimento; as comparações entre ambos os tipos de gêneses apontam para a consideração dos mecanismos gerais de organização, desequilíbrio e reequilibração.



Piaget (1975), admite que o método adequado para realizar as investigações em epistemologia genética é o que é constituído mediante a cooperação íntima entre o método psicogenético e o método histórico-crítico. Isso se deve em razão do fato de que a natureza de "uma realidade viva não somente se apresenta em seus estados iniciais ou em seus estados finais, mas sim no processo de suas transformações". (Piaget, 1975, p.35).
Assim, essa construção sucessiva deve ser estudada desde suas etapas mais gerais (elementares), até seu equilíbrio final, com as expressões "etapas mais gerais" e "equilíbrio final", devem ser consideradas sempre como relativas entre si e nunca de forma absoluta.

É assim, com as análises oscilando entre a gênese e o equilíbrio final sempre considerados como relativos entre si, que Piaget acredita ser possível "alcançar o secreto da construção dos conhecimentos, isto é, a elaboração do pensamento científico". (Piaget, 1975, p.35).

3.1.1 A psicogênese dos conhecimentos

Segundo Piaget (1975), é primordial, para uma epistemologia que queira ser científica, que não se preocupe, inicialmente em definir o que é o conhecimento, como o fazem as tradicionais teorias do conhecimento de sustentação filosófica. Para reforçar sua afirmação, exemplifica: "a geometria evita decidir previamente o que é o espaço, a física rechaça investigar a princípio o que é a matéria e a psicologia não toma partido acerca da natureza do espírito". (Piaget, 1975, p.30).

Dessa forma, a epistemologia genética assume que o conhecimento existe e o problema é estudar então, como se passa de um estado de menos conhecimento, para um de mais conhecimento.

No estudo dessa passagem, Piaget distingue quatro estádios principais. É importante frisar que se tratam de estádios ou períodos, o que significa que não apenas toda criança passa por eles, mas, também, que neles permanece por algum tempo, em função de um equilíbrio temporário, como todos os estados de equilíbrio evidenciados pela psicologia genética.

- Estádio da inteligência sensório-motora (até dois anos);
- Estádio da inteligência simbólica ou pré-operatória (de 2 a 7-8 anos);

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

- Estádio da inteligência operatória concreta (de 7-8 anos a 11-12 anos);
- Estádio da inteligência operatória formal (a partir dos 12 anos).

Piaget não estabelece arbitrariamente essa divisão, ao contrário, ela segue parâmetros bem definidos, que nada tem a ver com desenvolvimento fisiológico, de peso, de tamanho ou de idade. A delimitação os estádios por idades aproximadas não se dá de antemão, ao contrário, as idades foram estabelecidas como conseqüência das investigações realizadas.

Os critérios utilizados por Piaget para a distinção entre os estádios, de acordo com Dolle (1975) são cinco, a saber:

a) A ordem de sucessão das aquisições deve ser constante, não no que se refere à cronologia, já que esta varia tanto em função da maturação do sujeito como em virtude de suas experiências anteriores, assim como do meio social.

b) O caráter integrativo dos estádios, isto é, as estruturas construídas num determinado nível são integradas nas estruturas do nível seguinte. "Assim, as estruturas sensório-motoras são parte integrante das estruturas operatório-concretas; estas o são, por sua vez, das operações formais". (Dolle, 1975, p.53).

c) Cada estádio deve se caracterizar por uma estrutura de conjunto, permitindo sua caracterização por leis de totalidade.

d) Cada estádio comporta ao mesmo tempo a preparação de uma nova estrutura e o acabamento de outra.

e) A preparação de aquisições posteriores pode incidir sobre mais de um estádio e, além disso, existem diversos graus de acabamento, o que produz a necessidade de se distinguir, em toda seqüência de estádios, os processos de gênese (formação) e as formas de equilíbrio final (relativas), sendo que apenas estas últimas podem constituir estruturas de conjunto conforme mencionado em c).



3.1.2 O nível sensório-motor

Segundo Ferreiro e Garcia (in Piaget, 1975), a idéia mais original apresentada pela teoria epistemológica de Piaget, é a de que é a "ação que é constitutiva de todo conhecimento", sendo que esta "primazia da ação se sustentará geneticamente a partir da análise das condutas mais elementares do recém-nascido". (Ferreiro e Garcia, in Piaget, 1990, p.15).

Desta forma, ainda segundo os autores citados, o sujeito conheceria apenas as propriedades das coisas que sua ação possibilita e exemplificam, dizendo que o mundo do recém nascido se compõe de coisas que ele pode chupar, agarrar, ver e ouvir. Tais coisas não constituiriam objetos do mundo físico, com suas funções claramente estabelecidas, mas, sim, impressões sensoriais complexas, que não podem ser completamente atribuídas nem ao mundo externo, nem ao mundo interno.

Para Piaget (1990), "o instrumento de troca inicial não é a percepção, como os racionalistas concederam com excessiva facilidade ao empirismo, mas a própria ação em sua plasticidade muito maior", sendo que dois períodos distintos podem ser caracterizados em função da natureza das ações envolvidas; o das ações sensório-motoras, que antecedem tanto a linguagem quanto a conceituação representativa e, o das ações que são completadas por essas propriedades "e a propósito das quais se apresenta então o problema da tomada de consciência dos resultados, intenções e mecanismos do ato, ou seja, de sua tradução em termos de pensamento conceitualizado". (Piaget, 1990, p.8).

A ação, Piaget "não a reduz a seus resultados úteis, como o pragmatismo a concebe, mas salienta antes de tudo o seu poder na construção dos conhecimentos", uma vez que é na interação efetiva, no esquematismo e na coordenação das ações que "se encontra a origem da coerência e da necessidade lógico-matemática". (Montoya, 1996, p.32).

É também a coordenação das ações que permitirá a progressiva diferenciação entre sujeito e objeto e a conseqüente constituição de ambos, a do sujeito, enquanto sujeito cognoscente e a do objeto, enquanto objeto do conhecimento.

> Em suma, a coordenação das ações do sujeito, inseparável das coordenações espaço-temporais e causais que ele atribui ao real, é origem tanto das diferenciações entre esse sujeito e os objetos quanto dessa descentração no plano dos atos materiais que tornará possível, com o concurso da função semiótica, o advento da representação ou do pensamento. (Piaget, 1990, p.11).

unesp

Estas coordenações podem ser de duas espécies: as que se referem às ações do sujeito, ligando-as entre si e as que se referem às ações entre os objetos. Ao estabelecer ligações entre suas diferentes ações, o sujeito as reúne, separa, ordena, coloca em correspondência, etc., estabelecendo as primeiras formas dessas coordenações gerais sobre as quais se fundam as estruturas lógico-matemáticas. Por outro lado, ao relacionar as ações entre os objetos, o sujeito os organiza no espaço e no tempo, conferindo-lhes uma organização cinemática ou dinâmica, da mesma forma como fez com suas próprias ações, originando daí, as estruturas causais tão importantes quanto às lógico-matemáticas.

Com relação às coordenações particulares das ações do sujeito sobre os objetos, em oposição às coordenações mais gerais, (das quais se originam as estruturas lógico-matemáticas), elas interferem na causalidade na medida "em que modificam materialmente esses objetos ou seus arranjos (por exemplo, as condutas instrumentais)". (Piaget, 1990, p.14).

> Como produto das coordenações, no intervalo de zero a dois anos se realiza, no plano das ações materiais, uma espécie de revolução copernicana que consiste em descentrar as ações em relação ao corpo, em considerar este como um objeto entre os demais, num espaço que a todos contém. Contrariamente às ações primitivas, que formam um todo fechado em si mesmo (montagens hereditárias), as ações posteriores chegam gradualmente a se coordenarem entre si até constituírem uma conexão entre os meios e os fins, o que caracteriza os atos da inteligência propriamente dita. (Montoya, 1996, p.33/34).

O principal acontecimento desse período, que prefigura as futuras operações, é a constituição do "grupo" prático dos deslocamentos, com sua invariante constituída pela permanência do objeto que se desloca. Todavia, os regressos ao ponto de partida, que seriam o equivalente prático da reversibilidade característica dos grupos, assim como os desvios, equivalente da associatividade, somente são obtidos mediante ações sucessivas, sem a representação simultânea de conjunto, que é condição imprescindível para a efetivação da reversibilidade operatória.

O período sensório-motor puro, ou seja, anterior à linguagem, já apresenta relacionamentos, reuniões, dissociações, correspondências, etc., enfim, todo um esquematismo que permite antever as futuras operações, mas sempre no seio de ações que

se desenrolam no tempo. É a partir das ações mais elementares exercidas sobre a realidade que a percepção distingue os mais variados elementos, ligando-os por semelhanças e diferenças. Tais ligações, contudo, são somente perceptuais e relacionadas com a atividade motora, não se compondo entre si nem do ponto de vista lógico e nem aritmético.

> Através da combinação destas ações iniciais de reunião e de separação, as operações intelectuais construirão, simultaneamente as classes agrupando os objetos por suas semelhanças mais ou menos gerais ou especiais, as relações assimétricas agrupando os mesmos objetos por suas diferenças ordenadas, e os números, agrupando os objetos enquanto são, ao mesmo tempo, equivalentes e distintos. (Piaget, 1975, p.99).

A primeira etapa desta construção que conduz, simultaneamente, às classes, às relações e aos números, consiste em coordenar as ações entre si, na forma de esquemas práticos, os quais, ao engendrarem a permanência dos objetos, "constituem as relações de semelhança, diferença e a quantificação inicial nas quais se pode buscar a fonte das estruturas lógicas e numéricas". (Piaget, 1975, p.100).

A seguir, com o começo das relações perceptuais, começa a coordenação das relações entre si, os "esquemas práticos", que são espécies de pré-conceitos sensório-motores e possibilitam a repetição da mesma ação na presença dos mesmos objetos ou ainda a generalização, ou seja, a realização da mesma ação na presença de objetos semelhantes.

As relações perceptuais da atividade sensório-motoras, não se compõem entre si, são intrínsecas, irreversíveis, não associativas e estão inclusive desprovidas da identidade elementar. Em outras palavras, essas relações se distinguem entre si apenas no interior do campo perceptual momentâneo.

Todavia, para produzir a conservação dos objetivos físicos, os esquemas elementares constituem relações de semelhança, diferença e quantificações, primitivas é verdade, mas que constituem a fonte das futuras estruturas lógicas ou numéricas.

É necessário compreender, também, que se as ações assim esquematizadas já equivalem, na sua forma mais geral à reunião ou separação dos objetos por elas distinguidos e conservados em função dos diversos objetivos qualitativos abordados, estas reuniões e separações, assim como as figuras pré-numéricas que constituem se apóiam, por sua vez, num poder coordenador cujos esquemas mostram as estruturas sucessivas e cujo



funcionamento remonta até os mecanismos hereditários de raízes desconhecidas. Portanto, sob o ponto de vista genético, não existe nunca um fato primeiro, mas sim, uma sucessão de etapas cuja lei e cujo mecanismo de passagem de uma a outra são os únicos passíveis de análise (Piaget, 1975, p.100).

3.1.3 O período pré-operatório

Neste período, a estrutura dos agrupamentos concretos está sendo preparada (o acabando será efetuado no período seguinte), e caracteriza-se pela preparação e organização das operações concretas. Do ponto de vista das limitações este período caracteriza-se principalmente pela "dificuldade em apreender as transformações e, conseqüentemente, em atingir as invariantes solidárias de qualquer transformação reversível". (Piaget et al., 1980, p.326).

O período pré-operatório varia em média dos dois aos sete anos de idade e pode ser subdividido em dois níveis.

3.1.3.1 O primeiro nível do pensamento pré-operatório

Variando em média dos dois aos cinco anos, tem na linguagem o principal acontecimento. As ações sensório-motoras vão gradualmente se interiorizando em representações. Porém, como é muito mais dificil realizar ações mentalmente do que materialmente, já que as primeiras necessitam ser traduzidas simbolicamente seja por palavras, seja por imagens, a conquista da reversibilidade não acontece imediatamente, ao contrário, a criança permanece um longo período com regulações apenas "semi-reversíveis, sem atingir ainda a reversibilidade inteira ou operatória". (Piaget, 1980 a, p.326).

O período sensório-motor apresenta um grande desenvolvimento, que parte das ações elementares iniciais (que ainda não possibilitam uma diferenciação entre sujeito e objeto, por não estarem coordenadas entre si) e chega até as coordenações com diferenciações, garantindo a existência dos primeiros instrumentos de interação cognitiva, os quais, entretanto, estão ainda situados no plano da ação atual e efetiva, não se refletindo num sistema.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

A estrutura ou o grupo dos deslocamentos sensório-motor que aparece por volta dos 18 meses (com o período anterior dedicado à sua preparação e o posterior ao seu acabamento), mesmo sendo capaz de realizar desvios, de retornar ao ponto de partida, de coordenar rotações e translações, ainda se efetiva por movimentos sucessivos e não por representações simultâneas, isto é, a estrutura de grupo que se constituiu não está concebida em pensamento, devido à inexistência de instrumentos semióticos que possibilitem a sua conscientização.

Esta situação se modifica substancialmente com o advento da linguagem, da imitação, do jogo simbólico, da imagem mental, enfim, da constituição de um sistema de representação que permite que os esquemas da inteligência sensório-motora possam ser "manipulados por um pensamento", fazendo com que as ações simples, "que asseguram as interdependências diretas entre o sujeito e os objetos", sejam soprepujadas, em alguns casos, por "um novo tipo de ações, o qual é interiorizado e mais precisamente conceitualizado". (Piaget, 1990, p.15).

A representação nascente enfrenta, todavia, inúmeras dificuldades, pois a interiorização das ações em pensamento não se resume a reproduzir-lhes o curso ou a imaginá-las mediante a utilização de símbolos (imagens mentais) ou signos (linguagem), ao contrário, durante a representação, as próprias ações são enriquecidas e modificadas, isto é, são reconstruídas num patamar superior, implicando, portanto, na "elaboração de uma série de atividades irredutíveis ao patamar inferior", através da abstração reflexionante. (Piaget, 1990, p.17).

> A razão essencial dessa defasagem entre as ações sensório-motoras e a ação interiorizada ou conceitualizada é que as primeiras constituem, mesmo no nível em que existe a coordenação de vários esquemas, uma série de mediadores sucessivos entre o sujeito e os objetos, mas cada um dos quais permanece puramente atual; ela já se faz acompanhar, é verdade, de uma diferenciação entre esse sujeito e seus objetos, mas nem aquele nem estes são pensados como revestidos de quaisquer outras características a não ser as do momento presente. Ao nível da ação conceitualizada, pelo contrário, o sujeito da ação (quer se trate do eu ou de um objeto qualquer) é pensado com suas características duradouras (predicado ou relações), os objetos da ação também, e a própria ação é conceitualizada como transformação particular no âmbito de muitas representáveis entre os termos dados ou entre termos análogos. (Piaget, 1990, p.17/18).

Assim, o pensamento possibilita à ação que se coloque num contexto espaço-temporal muito mais amplo já que permite "evocar num todo quase simultâneo ações ou eventos

passados, futuros ou presentes, e, espacialmente, tanto distantes quanto próximos", rumo à descontextualização necessária à reversibilidade, ou seja, caminhando sempre em direção das futuras coordenações internas do sujeito (estruturas lógico-matemáticas) e externas entre objetos (causalidade). (Piaget, 1990, p.18).

O conhecimento representativo do período pré-operatório apresenta, desde os seus primórdios, consideráveis progressos com vistas à interiorização das ações, como por exemplo, a capacidade de realizar inferências elementares, de classificações de configurações espaciais, de correspondências, além de um começo das explicações causais.

Para Piaget (1990), as novidades essenciais desse período em relação ao sensório-motor, não são originadas unicamente das transmissões verbais e cita como argumento para a sua afirmação, o fato de que as crianças surdas, mesmo apresentando às vezes algum atraso em relação aos indivíduos ouvintes, por falta de uma interação adequada com o meio ambiente, possuem estruturas cognitivas análogas às das crianças comuns.

Em pesquisa realizada entre 1987 e 1989, em Maringá/Pr, Nogueira e Machado, com o objetivo de analisar se a surdez constituía um fator que comprometesse significativamente o desenvolvimento lógico-operatório infantil, aplicaram em doze crianças, com perdas auditivas variando entre 60 a 110 decibéis no melhor ouvido, com idade variando entre quatro a seis anos, com linguagem oral extremamente pobre e comunicação gestual restrita ao grupo familiar e escolar, as provas de classificação, seriação e correspondência termo a termo.

Da análise dos resultados pode-se destacar que:

- não foram encontradas entre as crianças surdas, nesta fase de desenvolvimento, defasagens significativas em relação aos estádios de desenvolvimento descritos pela epistemologia genética;
- as atividades de seriação, correspondência termo a termo e classificação demonstraram, no geral, um amadurecimento característico do período pré-operatório e compatível com suas idades cronológicas;
- as crianças surdas algumas vezes não respondiam a níveis mais complexos de atividades, não por impossibilidade lógica, mas pela dificuldade de comunicação com o investigador;
- não parece faltar à criança surda a conceituação lógica, o que falta são meios eficientes de comunicar esta conceituação. (Nogueira e Machado, 1995).

unesp

Tais resultados corroboram o exemplo citado por Piaget e reforçam o fato de que a possibilidade de conceber as ações em pensamento, ou seja, que as origens do sistema de representação devam ser creditadas à função semiótica em geral e não somente à linguagem.

> Em outras palavras, a passagem das condutas sensório-motoras para as ações conceitualizadas deve-se não apenas à vida social mas também aos progressos da inteligência pré-verbal em seu conjunto e à interiorização da imitação em representações. Sem estes fatores prévios, em parte endógenos, tanto a aquisição da linguagem quanto as transmissões e interações sociais seriam impossíveis, pois eles constituem uma das condições necessárias destas. (Piaget, 1990, p.19).

Piaget (1990) destaca que se a criança não passa bruscamente dos esquemas sensório-motores ao conceito, isso se deve ao fato de que a passagem da ação ao pensamento acontece sob a forma de uma difícil e demorada diferenciação "ligada às transformações da assimilação", no plano da representação. (Piaget, 1990, p.19).

A criança, desde o princípio procura exercer o controle sobre a aquisição e coordenação de suas próprias experiências e faz isso, mediante o duplo processo de acomodação e assimilação. Em outras palavras, ao se deparar com situações que resistem aos esquemas aos quais está habituada, a criança necessita modificar tais esquemas (acomodação); outras situações possibilitam ações que geram resultados novos, enriquecendo o alcance e a variedade de seus esquemas (assimilação). Do equilíbrio entre esses dois processos é que se alcança uma adaptação ao mundo real e a conseqüente organização mental.

Assim, é através das transformações da assimilação, que ao estenderem os seus domínios, produzem a mudança nas atividades do sujeito, que a ação vai se interiorizando progressivamente. A assimilação pertinente aos conceitos em seu estado final (momentâneo), "envolve essencialmente os objetos a eles subordinados e suas características", e é essa assimilação dos objetos entre si, constituindo o fundamento da classificação, que leva a determinação do "todos" e do "alguns", a primeira propriedade necessária para a construção do conceito. (Piaget, 1990, p.20).

A forma de assimilação característica do período anterior, ou seja, dos níveis sensório-motores também considera as propriedades dos objetos, só que o faz "exclusivamente no

momento em que eles são percebidos e de forma indissociada em relação às ações do sujeito a que eles correspondem". (Piaget, 1990, p.21).

> A grande distinção epistemológica entre as duas formas de assimilação por esquemas sensório-motores e por conceitos é, portanto, que a primeira ainda diferencia mal as características do objeto das características das ações do indivíduo em relação a esses objetos, ao passo que a segunda forma envolve somente os objetos, mas tanto os ausentes quanto os presentes, e ao mesmo tempo liberta o indivíduo de seus vínculos com a situação atual, conferindo-lhe então o poder de classificar, seriar, por em correspondência, etc., com muito mais mobilidade e liberdade. (Piaget, 1990, p.21).

Para Montoya (1996), é a composição reversível dos sistemas de conjunto intermediários na efetivação da assimilação conceitual que deve ser responsabilizada pela "diferenciação clara do todo e da individualidade dos elementos considerados", enquanto que a assimilação pertinente aos primórdios das ações conceitualizadas se efetua de maneira direta e imediata, acarretando a ausência de normas claras para os "todos" e os "alguns". A título de exemplificação: quando a assimilação conceitual está em seu estado acabado, a seriação operatória estabelece que um elemento dado seja "compreendido como sendo ao mesmo tempo maior que aqueles já colocados e menor que os que o seguem", sendo que, por outro lado, a seriação característica das assimilações "pré-conceituais", não admite a relatividade dos elementos relacionados. (Montoya, 1996, p.42).

Fica claro que é a diferenciação entre as formas de assimilação que permite a passagem dos esquemas sensório-motores aos conceitos, entretanto, o que interessa a Piaget é determinar como se dá essa passagem da assimilação direta e indiferenciada dos elementos considerados, no nível sensório-motor, para uma assimilação conceitual, que cria, incessantemente novas formas ou estruturas destacadas do contexto prático.

O mecanismo ou processo que determina essa passagem, é o da abstração reflexionante, que já foi mencionada anteriormente. Segundo Montoya (1996), esse processo "não retira a sua substância dos objetos como tais ou nas ações do sujeito" no que se refere aos seus caracteres observáveis, o que é pertinente à abstração empírica, mas sim, das "coordenações de ações do sujeito, que podem permanecer inconscientes ou dar lugar a tomadas de consciência e conceitualizações variadas". (Montoya, 1996, p.44).

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

A abstração reflexionante se efetiva mediante a coordenação de dois aspectos inseparáveis: o reflexionamento e a reflexão.

> ... assim, ela é reflexionante em dois sentidos complementares, a que nós designaremos como segue. Em primeiro lugar, ela transpõe a um plano superior o que colhe no patamar precedente (por exemplo ao conceituar uma ação); e designaremos esta transferência ou esta projeção com o termo "reflexionamento" (réfléchissement). Em segundo lugar, ela deve necessariamente reconstruir sobre o novo plano B o que foi colhido do plano de partida A, ou por em relação os elementos extraídos de A com os já situados em B; esta reorganização, exigida pelo processo de abstração reflexionante será designada por "reflexão" (reflexion). (Piaget, 1995, p.6).

Na matemática, pode-se destacar o trabalho atual dos matemáticos, os quais, por meio da abstração reflexionante, extraem novas operações a partir de operações anteriormente estabelecidas ou, estruturas novas a partir da comparação com estruturas anteriores. Dentro da ciência, o processo de abstração reflexionante, caracteriza-se particularmente pelo fato de que, mesmo enriquecendo as noções mais fundamentais com novas estruturas ou operações, estas noções não são desprezadas ou contraditas, ao contrário, são reorganizadas de maneira imprevisível. Além disso, como já foi especificado no capítulo I, o que num momento é considerado como uma estrutura matemática, num momento seguinte, pode ser considerado como um objeto de reflexão num patamar superior.

Em resumo, duas são as principais novidades encontradas ao final do primeiro período do pensamento pré-operatório. Uma é que já existem mediadores entre o sujeito e o objeto, embora tais mediadores sejam apenas pré-conceitos e pré-relações, uma vez que a determinação do "todos" e do "alguns" ainda não é exata, no caso dos conceitos e a relatividade das noções não é estabelecida com clareza no caso das relações. Além disso, já é possível se detectar a atribuição de uma causalidade aos objetos, embora esta permaneça psicomórfica, devido à indiferenciação completa em relação às ações do sujeito.

As aquisições deste período (pré-conceitos e pré-relações) se encontram a meio caminho entre o esquema de ação e o conceito, "por não se dominar com bastante distanciamento a situação imediata e presente, como deveria ser o caso da representação em contraste com a ação". (Piaget, 1990, p.23).



3.1.3.2 O segundo nível pré-operatório

Este segundo período, que varia em média dos 5-6 aos 7-8 anos, caracteriza-se por uma descentração nascente que possibilita o estabelecimento de ligações objetivas entre objetos, eventos ou ações.

No que se refere à lógica como conseqüência da coordenação entre as ações conceitualizadas, a natureza das classificações é modificada, promovendo uma diferenciação constante entre o indivíduo e a classe.

No primeiro nível deste período, as classificações ainda consistem em "coleções figurais", isto é, a criança junta os elementos num conjunto porque eles combinam entre si, por razões arbitrárias, como por exemplo formar uma casa, ou dispor objetos na mesa como para efetuar uma refeição, etc, ficando presos, principalmente, às suas semelhanças perceptivas, o que torna as relações figurais uma forma transitória entre os esquemas sensório-motores e as classes representativas.

Montoya (1996), justifica o caráter de transitoriedade das relações figurais, afirmando que da mesma forma que os esquemas sensório-motores, elas assimilam os objetos entre si, "de maneira direta e segundo suas funções práticas ou suas semelhanças", sem levar em conta a extensão dos mesmos e, da mesma forma que as classes representativas, a "coleção figural é uma unidade representativa à qual se poderia atribuir uma extensão como aquela que é própria aos conjuntos perceptivos". (Montoya, 1996, p.43).

Todavia, com a mudança da natureza das classificações permitindo dissociar o indivíduo das classes, o que acontece neste nível do pensamento operatório, as coleções deixam de ser figurais e passam a constituir pequenos grupos de objetos, sem configuração espacial, o que de novo vem corroborar a marcha rumo à "desespacialização" característica das operações lógico-matemáticas. O que continua ainda sem "acabamento final", no nível em pauta, é a determinação do "todos" e do "alguns", uma vez que para compreender que A está contido em B, é necessário a reversibilidade explicitada por A = B - A', além da conservação necessária do todo B, uma vez separado A de seu complementar A', que ainda inexistem, impossibilitando as conservações de quantidades, contínuas ou descontínuas. Por outro lado, a identidade qualitativa dos elementos já está plenamente constituída, porém esta, embora necessária não é suficiente para as conservações.



Para Piaget (1990) a identidade qualitativa é uma condição prévia para a conservação, mas não é suficiente porque somente possibilita perceber as qualidades que são modificadas e as que não o são, ao passo que a conservação quantitativa pressupõe a construção de relações novas, como por exemplo, a compensação das variações de sentidos diferentes e, conseqüentemente, a reversibilidade operatória com seus respectivos instrumentos de quantificação.

De acordo com Piaget e Inhelder (1975), uma quantidade é um contínuo e apresenta-se como um caráter irredutível das coisas, apreendido graças a ações particulares do sujeito. Para os autores, existem três tipos de quantidades, cada um dos quais com uma explicação psicológica e axiomática diferente.

Quantidade intensiva: define as relações de parte e todo e se limita a afirmar que o todo é maior que a parte ou que uma parte tem a mesma grandeza que ela mesma, mas, sem comparar uma parte qualquer com uma outra. É uma noção bastante primitiva mas que já permite algumas operações sobre os objetos, em especial a composição aditiva das partes e do todo. Supõe o uso de quantificadores, como um, todos, alguns e nenhum. Essa quantidade intensiva é suficiente para basear a lógica das classes, já que esta é limitada a uma decisão que se refere a todos ou alguns. Na verdade, esse tipo de quantidade é o único que intervém em lógica, mas intervém em todo agrupamento lógico.

Quantidade extensiva: sem se igualar as partes A, A', B, B', etc., de uma classificação, ou as diferenças a, a', b, b', etc., podem ser estabelecidas entre elas relações de diferenças que obedecem a uma lei qualquer de construção: por exemplo, uma série de diferenças crescentes o decrescentes; proporções, relações harmônicas, etc., isto é, ainda não é possível a medida utilizando-se unidades, mas, com o uso do quantificador "quase todos", há a possibilidade de comparação das partes entre si. Por exemplo: se A+A'= B e se é conhecido que A contém quase todos os elementos de B, concluir-se-á que A>A', o que não era possível somente com as quantidades intensivas. Tem-se então uma quantificação que, sem ser métrica, ultrapassa a da simples lógica. Este tipo de quantidade é chamado de extensiva.

Quantidade métrica: sejam A+A'= B, e a+a'= b tal que seja possível igualar os termos A = A' ou as diferenças a = a'. Têm-se então: B = 2A, C = 3A, etc., ou b = 2a; c = 3a, etc., isto é, uma sucessão de números ou de segmentos, daí a existência de um outro tipo de

quantidade, que também permite comparar as partes e, portanto, é extensiva, mas, pode, também, especificar esta comparação, mediante unidades, de onde ser uma quantidade métrica, no caso dos segmentos, ou numérica, no caso dos termos. Em outras palavras, a quantidade métrica significa que se considerou uma parte do todo que se pode iterar como unidade.

Assim, a partir da quantidade intensiva, sobe-se um degrau com a quantidade extensiva não métrica, uma vez que não se trata mais apenas de séries intensivas, mas estabelece-se um relacionamento entre as partes ou diferenças, para só então se considerar uma parte como unidade, alcançando a quantificação métrica.

No período intuitivo, as quantificações são ainda nascentes e não constituídas, uma vez que nesse nível também não se encontram inferências como a transitividade, por exemplo, tanto no que se refere à passagem da ação ao conceito, quanto à causalidade.

3.1.4 O período operatório "concreto"

Esse estádio apresenta grandes novidades, pois é a primeira vez, no desenvolvimento intelectual de uma criança que é possível falar de operações, aqui entendidas, segundo a teoria piagetiana, como ações suficientemente coordenadas entre si, de modo a constituírem uma estrutura de conjunto. As operações no período em pauta são, todavia, concretas, no sentido de só se desenrolarem na presença de dados concretos e, "em particular, que a sua necessidade é de fato e não ainda de direito". (Grize, in Piaget et al. 1980, p.238).

Nesse período, que varia em média dos 7-8 aos onze ou doze anos, a criança se torna capaz de uma reversibilidade relativa às operações concretas, isto é, sobre classificações e relações que incidem ainda sobre objetos manipuláveis e não sobre hipóteses ou enunciados verbais.

Aparecem, também, as "operações sobre operações", fonte das operações proposicionais, as quais, segundo Montoya (1996), em analogia com o estágio anterior, onde acontecia a "interiorização dos esquemas sensório-motores", podem ser consideradas como "interiorizações das operações concretas", com o devido acréscimo de novas propriedades.

unesp

Nesse nível do "concreto", ou seja, agindo sobre objetos manipuláveis, a criança já realiza inclusão hierárquica de classes e constrói séries coordenando os dois sentidos do percurso (do menor para o maior e vice-versa), o que possibilita que a transitividade se torne evidente para ela. Além disso, será capaz também de estabelecer inferências e correspondências e de conceber (e compreender) as matrizes multiplicativas.

As estruturas operatórias reversíveis desse estágio caminham no sentido da constituição de um "agrupamento" e, especificamente pela característica dos "agrupamentos" de não possuir a generalização combinatória de uma estrutura de "rede" ou "reticulado" e, ainda, devido ao fato de que as operações em pauta são ainda concretas, a reversibilidade conquistada é elementar, isto é, as formas lógicas assim elaboradas dependem de seu conteúdo, permanecendo ligadas aos processos temporais inerentes à manipulação.

Rede ou reticulado: sejam dados um conjunto não vazio E; duas operações binárias $\cap$ e $\cup$, fechadas em E, isto é, se α e β pertencem a E, então $\alpha \cap \beta$ e $\alpha \cup \beta$ também são elementos de E e uma relação de ordem parcial em E, representada por $\leq$. A quádrupla representada por $(E, \cap, \cup, \leq)$ é uma rede ou um reticulado se e somente se, satisfaz as seguintes propriedades, quaisquer que sejam α, β e γ, pertencentes a E.

$\alpha \leq \alpha \cup \beta$

$\beta \leq \alpha \cup \beta$;

$\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \cup \beta \leq \gamma$

$\gamma \leq \alpha$ e $\gamma \leq \beta \Rightarrow \gamma \leq \alpha \cap \beta$

$\alpha \cap \beta \leq \alpha$

$\alpha \cap \beta \leq \beta$

Por exemplo, se E é o conjunto das partes de um conjunto não vazio A, isto é, os elementos de E são todos os subconjuntos de A, com as operações usuais de reunião '$\cup$' e intersecção '$\cap$' de conjuntos e a relação de ordem é a inclusão usual de conjuntos '$\subseteq$', então a quádrupla $(E, \cup, \cap, \subseteq)$ constitui uma rede.

A noção de grupo é, de acordo com Grize (in Piaget et al., 1980), provavelmente uma das mais importantes da álgebra. O autor define grupo como uma terna (E,•,=), na qual E é um conjunto não vazio, • é uma operação binária fechada em E e '=' é uma relação de equivalência em E, tal que, quaisquer que sejam x, y e z, pertencentes a E, então:

x•(y•z) = (x•y)•z;

Existe um e, tal que e•x = x = x•e

Existe um x', tal que x'•x = e = x•x'.

Se, além disso:

x•y = y•x,

o grupo é comutativo ou abeliano e a última igualdade das propriedades 3) e 4) são dispensáveis.

Agrupamentos: um agrupamento é uma quádrupla (E, +, -, ≤), na qual E designa um conjunto finito de objetos parcialmente ordenados pela relação '≤' (esta relação é, por definição, transitiva, reflexiva e anti-simétrica), tal que as operações binárias '+' (reunião de classes disjuntas) e '-' (dissociação de classes disjuntas) satisfaçam as seguintes propriedades:

A operação '+' não é fechada em E, mas definida apenas entre alguns elementos de E, isto é, se x e y são elementos de E, x + y é elemento de E, somente quando x é imediatamente menor do que y, pela relação ≤ (ou o inverso), ou então, quando existe uma cadeia de elementos x_1, x_2, ..., x_n, tais que x seja imediatamente menor do que x_1, x_1 seja imediatamente menor do que x_2, ..., x_n, seja imediatamente menor do que y (ou reciprocamente). Isto significa que a operação '+' só se efetua de modo gradual.

A operação '+' é associativa.

A operação '-' é a inversa da operação '+' e, está, assim submetida a limitações análogas às de adição, entretanto, satisfaz também às propriedades 1) e 2);

Existe um elemento neutro, '0', tal que, qualquer que seja o elemento x de E, têm-se:

$$x + 0 = x = 0 + x \text{ e } x - 0 = x.$$

A operação '+' é idempotente, isto é, é tautológica: $x + x = x$

Como conseqüência da idempotência, a operação '+' é tal que,

se $x \leq y$, então $x + y = y$.

A definição anterior segue os moldes da definição apresentada por Grize (in Piaget et. al., 1980), e tem um caráter bem mais intuitivo do que formal. Do ponto de vista matemático, os agrupamentos são estruturas bastante pobres, entretanto, possuem grande significação lógica e é esta significação lógica que interessa a Piaget, razão pela qual o pesquisador a utiliza com o intuito de descrever, com precisão, os comportamentos dos sujeitos do nível das operações concretas.

> Por outro lado, sua significação lógica é considerável e assenta antes de tudo em dois fatos. Em primeiro lugar, podemos demonstrar que os agrupamentos contêm um semi-reticulado e que, além disso, gozam de algumas das propriedades de um grupo. Acontece, assim, que o duplo aspecto serial e equacional, fundamental para a lógica adulta, está já em germe ao nível das operações concretas. Em segundo lugar, as operações da criança são operações quer de classes quer de relações, e a cada espécie corresponde um agrupamento distinto. (Grize, in Piaget et al., 1980, p.239).

Os agrupamentos das séries e das classes são inseparáveis, uma vez que não é possível a classificação sem a seriação e vice-versa, mesmo quando se trata de classes unitárias.

Assim, se no estágio anterior acontece uma expressiva desespacialização, as operações ainda permanecem, no presente estágio, com características temporais, impedindo a constituição da reversibilidade completa, que somente será atingida no estágio posterior. A reversibilidade própria desse estágio "se apresenta sob duas formas irredutíveis e jamais relacionadas entre si: a inversão e a reciprocidade", onde a inversão é a forma de reversibilidade característica das estruturas de classes e a reciprocidade, a das estruturas de série. (Montoya, 1996, p.52).

Esse período de acabamento das estruturas operatórias concretas e transição para as estruturas formais pode ser subdividido em dois níveis.

unesp

3.1.4.1 O primeiro nível do estágio das operações "concretas"

Piaget (1990), destaca que o início do estádio das operações concretas é um marco decisivo na construção dos instrumentos do conhecimento, ou seja, "as ações interiorizadas com que o sujeito deveria até agora contentar-se adquirem a categoria de operações, enquanto transformações reversíveis modificam certas variáveis e conservam outras a título de invariantes". (Piaget, 1990, p.28).

As operações apresentam uma diferença de natureza em relação às ações do período anterior, ainda temporais, ao passo que agora, a reversibilidade operatória, admite as antecipações e retroações simultâneas, ou seja, tornam-se atemporais.

Para Piaget (1990), o problema consiste em explicar essa importante novidade, já que, embora qualitativamente diferentes, as operações não possuem um começo absoluto, ao contrário, procedem de transformações mais ou menos contínuas.

> Com efeito, jamais se observam começos absolutos no decorrer do desenvolvimento, e o que é novo decorre ou de diferenciações progressivas, ou de coordenações graduais, ou das duas coisas ao mesmo tempo, conforme se pôde constatar até aqui. Quanto às diferenças de natureza separando as condutas de um estágio das que as precederam, só se pode então concebê-las como uma passagem ao limite, cujas características têm que ser interpretadas em cada caso. (Piaget, 1990, p.29).

De maneira geral, pode-se dizer que é essa passagem ao limite, que caracteriza o surgimento das operações e consiste em apresentar uma pré-correção das falhas eventuais na realização de um ato ao invés de corrigir posteriormente e isso só é possível devido ao "duplo jogo das operações diretas e inversas" que permitem "uma antecipação possível das próprias retroações". (Piaget, 1990, p.30).

Além dessa passagem ao limite descrita anteriormente, acontece uma outra, que é solidária da precedente e que conduz ao fechamento dos sistemas, ou acabamento das operações. Por exemplo, antes de classificar e seriar operatoriamente, o sujeito dava conta dessas tarefas, porém, só seriava por tentativas e só construía coleções figurais ou não, mas sem a inclusão hierárquica. Da mesma forma, antes da síntese do número, a criança já sabe contar até determinados inteiros, porém sem conservação do todo.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

Assim, a estrutura operatória final, como por exemplo, a inclusão hierárquica de classes (classificação com quantificação das inclusões) ou o número, é o resultado de uma construção contínua e, com a fusão das antecipações e retroações que acarreta o fechamento sobre si mesmo, aparece uma novidade essencial: suas ligações internas passam a ser necessárias, não existindo mais relações sem conexão com as precedentes. Essa interdependência necessária entre as relações internas de um sistema operatório manifesta-se "então, sob a forma de duas propriedades solidárias, doravante gerais em todas as estruturas operatórias deste nível: a transitividade e as conservações". (Piaget, 1990, p.31).

As passagens ao limite que diferenciam esse nível do precedente são bastante complexas e envolvem três momentos integrados, porém distintos. O primeiro se refere à abstração reflexiva que garante a continuidade do desenvolvimento, ao extrair das estruturas inferiores o que é necessário para a construção das superiores. O segundo momento é o de uma coordenação que pretende abarcar a totalidade do sistema caminhando para o fechamento e, portanto, ligando entre si as diversas relações internas. O terceiro e último momento é o da "auto-regulação desse processo coordenador, culminando na equilibração das conexões segundo os dois sentidos, direto e inverso, da construção, de tal modo que" é a obtenção desse equilíbrio que caracteriza essa passagem ao limite que possibilita os progressos desse período em relação aos precedentes e, principalmente, a reversibilidade operatória. (Piaget, 1990, p.33).

Piaget dá um exemplo particularmente interessante para os objetivos deste trabalho já que descreve as três fases encontradas na passagem ao limite que diferencia a operação das ações dos níveis precedentes, no que se refere à síntese do número, quais sejam, a abstração reflexiva; uma coordenação nova que reúne as ligações internas ao sistema e a equilibração que permite percorrer o sistema nos dois sentidos.

A principal característica de um conjunto numérico ou enumerável, que se destaca das coleções simplesmente seriáveis ou classificáveis dos períodos anteriores é a abstração das qualidades individuais dos termos, de maneira a tornar todos equivalentes e possibilitar a contagem. A seguir, os elementos tornados equivalentes são distribuídos em classes que estão hierarquicamente incluídas, ou seja, $(I) < (I + I) < (I + I + I)$, etc., porém com a condição que cada uma dessas classes possa ser diferenciada das demais, para evitar que

unesp

um mesmo elemento possa ser contado duas vezes ou que permaneça esquecido.

Todavia, ao tornar os elementos equivalentes pela abstração das qualidades individuais, eles se tornam indiscerníveis e, se as operações realizadas com eles fossem apenas as da lógica das classes qualitativas, o resultado seria tautológico, ou seja, $I + I = I$, ao invés da iteração $I + I = II$, o que implica na necessidade de uma distinção entre os elementos. Não se levando em conta a qualidade, a única possibilidade de distinção que resta, é a resultante da ordem, que pode ser a das posições no espaço e no tempo, ou a da ordem de enumeração, embora esta ordem seja vicariante, ou seja, não se altera quando há permuta entre os termos.

É possível observar então, no processo descrito anteriormente, os três momentos essenciais de toda construção operatória: uma abstração reflexiva que estabelece as ligações de encaixe e de ordem; uma coordenação nova que as reúne numa totalidade como as do tipo $\{[(I)\rightarrow(I)] \rightarrow (I)\}$ ..., etc., e uma "auto-regulação ou equilibração que permite percorrer o sistema nos dois sentidos (reversibilidade da soma e da subtração), assegurando a conservação de cada conjunto ou subconjunto". (Piaget, 1990, p.35).

> O número apresenta-se, portanto, como uma fusão operatória da inclusão de classes e da ordem serial, síntese que se torna necessária logo que se faz a abstração das qualidades diferenciais em que as classificações e as seriações se fundamentam. De fato, é assim que parece efetuar-se a construção os números inteiros, em sincronização com a formação dessas duas outras estruturas. (Piaget, 1990, p.34).

Apesar de uma vez mais Piaget apresentar o número como "síntese da classificação e da seriação", o que segundo a idéia central desse trabalho pode sugerir uma construção seqüencial e linear, no presente caso, o próprio autor deixa claro que essa síntese não é efetivada apenas "após terem sido realizadas as estruturas de seriação e classificação".

> Isso não quer dizer, aliás, que essa síntese do número efetua-se após terem sido realizadas as estruturas de classificação e de seriação, pois já nos níveis pré-operatórios encontram-se números figurais sem conservação do todo, e a construção do número pode favorecer a das inclusões de classes tanto ou, às vezes mais do que o inverso: parece, pois, que a partir das estruturas iniciais já pode haver abstração reflexiva e de ordem para fins múltiplos, com trocas colaterais variáveis entre as três estruturas fundamentais de classes, relações e números. (Piaget, 1990, p.35).

É importante evidenciar a afirmação de Piaget na citação anterior "a construção do número pode favorecer a das inclusões de classes tanto ou, às vezes mais do que o inverso", evidenciando o processo solidário de construção das três estruturas fundamentais que será detalhado mais adiante.

Apesar dos avanços consideráveis que possibilitam ao pensamento, as operações concretas apresentam limites característicos, uma vez que incidem, como já foi mencionado, diretamente sobre os objetos, o que equivale a agir sobre tais objetos, como nos níveis anteriores, com a diferença, porém, de que essas ações possuem agora uma estrutura operatória, isto é, são reversíveis e transitivas.

Por serem dependentes dos objetos, as operações concretas se aplicam com defasagens cronológicas a conteúdos diferentes, uma vez que a forma, nesse caso, não pode ser dissociada do conteúdo, sendo por essa razão, que embora já possua a conservação das quantidades discretas, que lhe permite a construção do número em torno dos sete ou oito anos, a criança só possui domínio sobre a conservação do peso e suas propriedades por volta dos nove ou dez anos.

Piaget (1990), coloca como outra limitação fundamental da estrutura operatória concreta o fato das composições entre operações acontecerem gradualmente e não mediante combinações quaisquer e isso, em virtude do caráter próprio dos agrupamentos característicos desse período. Assim, mesmo a síntese do número, que poderia sugerir estar livre de tais limitações uma vez que o conjunto dos inteiros tem estrutura de grupo e não de agrupamento, é constituída gradualmente, segundo uma aritmetização progressiva que permite primeiro a construção dos números naturais de 1 a 7; depois de 8 a 15; seguido de uma etapa de 16 a 30, etc. "Para além dessas fronteiras, cujo deslocamento é bastante lento, os números só comportarão ainda aspectos inclusivos (classes) ou seriais, antes de realizar-se a síntese dessas duas características". (Piaget, 1990, p.39).

3.1.4.2 O segundo nível do estágio das operações "concretas"

Neste período, que se inicia em torno dos 9-10 anos, a criança atinge o equilíbrio geral das operações concretas e inicia-se a transição para as operações formais.

Apesar de equilibradas e "generalizadas", o fato de serem "concretas" limita, muito, seu alcance, fazendo aparecer "lacunas" em determinados campos, principalmente no da causalidade, com o sujeito levantando um "conjunto de problemas de cinemática e dinâmica que ainda não se encontra em condições de resolver com os meios operatórios de que dispõe". (Montoya, 1996, p.53).

São esses desequilíbrios, em analogia com os estágios anteriores, que preparam para a constituição das estruturas ulteriores, pois são possibilitam que as estruturas operatórias já construídas e estáveis se completem, construindo sobre sua base concreta, as "operações sobre operações", ou as operações proposicionais.

Com relação às operações lógico-matemáticas, há um grande progresso na compreensão da intersecção de classes e, além disso, se o sujeito, aos 7-8 anos, já é capaz de construir tabelas de dupla entrada (matrizes), que são estruturas ao mesmo tempo aditivas e multiplicativas, envolvendo seriações duplas e classificações por dois critérios simultaneamente, ele o faz muito mais em função de "soluções bem sucedidas em relação a uma questão apresentada", do que mediante uma "utilização espontânea da estrutura", ao passo que, ao nível dos 9-10 anos, ele já se torna capaz de colocar em correspondência séries ou classes, atestando "a eficácia de uma construção operatória". (Piaget, 1990, p.40/41).

3.1.5 As operações formais

Nesse período aparecem três novidades importantes, como continuidade das conquistas realizadas no nível anterior, a primeira delas, é que a generalização das operações e as "operações sobre operações", possibilitam a classificação de segunda potência, que é a combinatória; a segunda novidade é que a combinatória permite às operações de classes e de séries, que até então se encontravam limitadas pela estrutura de "agrupamento", se completem mediante as operações proposicionais recém constituídas e, finalmente, a terceira novidade, é a reunião, num mesmo sistema, das duas espécies distintas de reversibilidade (a inversão e a reciprocidade), que se encontravam completamente dissociadas.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

Essa nova estrutura mental que tem duplo caráter (orgânico e construído), constitui um "grupo", denominado por Piaget de grupo INRC, onde as inversões, que caracterizam os agrupamentos de classes e as reciprocidades, características dos agrupamentos seriais, "se sintetizam num sistema de conjunto, unindo essas transformações em um único todo". (Montoya, 1996, p.55).

O sujeito pode agora raciocinar por hipóteses e não necessita da presença (ou representação) dos objetos para operar, ou seja, os "objetos" agora, são proposições, com as operações efetuadas sendo de segunda potência.

É com as operações formais, cuja constituição se inicia em torno dos 11-12 anos, que as operações se libertam da duração, ou do contexto psicológico das ações do sujeito ou, ainda, da dimensão causal, para atingir o "caráter extemporâneo que é próprio das ligações lógico-matemáticas depuradas". (Piaget, 1990, p.45).

A "libertação" das estruturas operatórias da duração se efetiva mediante um processo constituído de três grandes etapas. A primeira, se dá por volta de 1 ano e meio ou 2 anos, com a constituição da função semiótica que, mediante a interiorização da imitação em imagens e a aquisição da linguagem, permite que ações sucessivas possam ser simultaneamente representadas.

A segunda etapa se dá quando se iniciam as operações concretas que, "coordenando as antecipações e retroações, chegam a uma reversibilidade suscetível de refazer o curso do tempo e de assegurar a conservação dos pontos de partida", porém, tal mobilidade em relação à duração permanece, todavia, ligada às ações e manipulações pois as operações então constituídas, continuam concretas e, portanto, envolvendo objetos e transformações reais. (Piaget, 1990, p.45).

A terceira e última grande etapa desse processo de "libertação" da duração é a que se inicia no presente estágio, a constituição das operações formais. Nessa etapa, o conhecimento supera o real e as transformações são possíveis e não apenas reais como quando das operações concretas. Ao inserir-se no possível, o conhecimento o liga diretamente ao necessário, sem a mediação do conceito. É o caso, por exemplo, da construção da seqüência infinita dos números inteiros, que é "conhecida" sem a necessidade de que cada componente seja "conhecido" individualmente.

unesp

> É esse poder de formar operações sobre operações que permite ao conhecimento ultrapassar o real e que lhe abre o caminho indefinido dos possíveis por meio da combinatória, libertando-se então das construções graduais a que continuam submetidas às operações concretas. Com efeito, as combinações n a n constituem uma classificação de todas as classificações possíveis, etc. (Piaget, 1990, p.46).

Uma outra característica fundamental desse período é que as operações formais definem uma estrutura de "grupo", em contrapartida ao agrupamento das operações concretas.

De acordo com Montoya (1996), o sujeito não tem consciência desse grupo enquanto conhece, entretanto, é o modelo que retrata o que o sujeito é capaz de fazer, "todas as vezes que diferencia uma inversão e uma reciprocidade para compô-las entre si". (Montoya, 1996, p.54).

No domínio das operações concretas, como já foi estabelecido, existem duas formas de reversibilidade, indissociáveis: a inversão ou negação, que culmina na anulação do termo (que em matemática seria classificada como "existência do elemento oposto" ou, simbolicamente: $+A - A = 0$), e a reciprocidade, (que em matemática seria classificada como "propriedade simétrica", ou seja, se A=B, então B=A), que redunda numa equivalência e, portanto, numa supressão de diferenças. No grupo matemático, é necessário que $+A - A = 0 + -A + A$, ou seja, acontece a união das inversões e reciprocidades.

Ora, no âmbito psicológico, a inversão caracteriza os agrupamentos de classes e a reciprocidade os de relações não sendo possível, ao nível das operações concretas (por envolverem objetos e transformações reais), um conjunto que ligue essas transformações num todo único, o que não acontece ao nível da combinatória proposicional.

Quando se fala em combinatória proposicional, está sendo referido às 16 operações resultantes de combinações p e q, e de suas negações, conforme a lógica das classes e das relações. Quando se trata de classes, a negação significa o seu complementar.

Se $p \supset q$ (p implica q), pela lei da absorção, é o mesmo que dizer que "p é equivalente a q", representado por p.q, a operação $p \supset q$ admite uma inversa, representada por N $p \supset \sim q$, ou seja, $p.(\sim q)$ (p é equivalente a ~q) e uma recíproca R , ou seja $\sim p \supset \sim q = q.p$ (q é equivalente a p) e uma correlativa C, dada por $\sim p \supset q$, ou seja $\sim p.q$ (~p equivale a q), que é a inversa da

sua recíproca. Assim, NR = C; (a inversa da recíproca é a correlativa), pois N(q.p) = q.~(p) = ~p.q = C; CR = N (a correlativa da recíproca é a inversa), pois C(q.p) = ~q.p = p.(~q) = N; a correlativa da inversa é a recíproca, ou seja, CN = R, pois C.(p.~q) = ~p.~q= q.p = R, e NRC = I (a inversa da recíproca da correlata é a própria operação) pois NR(~p.q) = N(q.(~p)) = q.~(~p) = q.p = p.q, determinam um grupo comutativo, cujas transformações "são transformações à terceira potência uma vez que as operações que elas assim ligam já são de segunda potência". (Piaget, 1990, p.47).

O grupo assim constituído é quartenário pois possui apenas quatro elementos, a saber: p, q, ~p e ~q. A operação é a implicação, representada pelo símbolo ⊃.

Este último nível, segundo Piaget (1990), apresenta uma continuidade com tudo o que é mostrado pela psicogênese dos conhecimentos, a partir das indiferenciações iniciais do sensório-motor. O mundo físico, o real, em suas dimensões espaço-temporais do qual o sujeito é parte integrante, começa a ser entendido conforme as operações lógico-matemáticas vão se interiorizando (graças à abstração reflexiva), possibilitando a construção de operações sobre operações, culminando com a conquista da extemporaneidade das transformações possíveis.

Nas palavras de Piaget:

> Ou seja, o duplo movimento de interiorização e exteriorização iniciado com o nascimento acaba por assegurar essa harmonia paradoxal entre um pensamento que se liberta, enfim, da ação material e de um universo que engloba esta última mas a supera de todas as formas. (Piaget, 1990, p.51).

A matemática é um exemplo surpreendente dessa convergência entre a dedução e a experiência, com sua constituição dedutiva, que não só se adapta ao real, mas que, às vezes, se antecipa às descobertas físicas.

A psicogênese dos conhecimentos mostra que tal fato não é prerrogativa dos altos níveis de pensamentos matemáticos, ao contrário, em níveis bem mais inferiores das técnicas formalizantes, a inteligência ainda em estado muito qualitativo consegue realizar "correspondências análogas entre suas tentativas de abstração e seus esforços de observação, por pouco metódicos que sejam". (Piaget, 1990, p.51).

unesp

3.2 O QUE É O NÚMERO: UMA INVESTIGAÇÃO GENÉTICA

Como já foi mencionado na introdução deste capítulo, as primeiras pesquisas específicas de Piaget acerca da construção do conceito do número resultaram no livro, publicado em 1941, *A Gênese do número na criança*, não se encerrando, porém nesta obra.

Durante anos o assunto foi objeto de estudos no Centro Internacional de Epistemologia Genética, particularmente na década de 60 e foram traduzidos em três obras específicas dos "Estudes d'Epistemologie Génétique", volumes XI, XIII e XIV, com as participações de P. Gréco; J. B. Grize; S. Papert; A Morf e E. Beth, entre outros.

O próprio Piaget retoma e aprofunda a questão nos seus *Introduction à Epistemologie Genétique - I - La pensée mathematique* (1950) e *Psychologie et Epistémologie* (1970), entre outros, sendo que, os novos resultados apenas vieram complementar os trabalhos iniciais de Piaget e Szeminska, em nada contestando-os.

Como o objetivo aqui é mostrar que a construção do número não se dá de forma linear conforme interpretação sugerida por diversos autores (fato que pode ser depreendido já no primeiro texto), *A gênese do número na criança* é o alicerce deste trabalho.

Os sujeitos das provas aplicadas por Piaget e Szeminska, estão limitados ao período intuitivo e a razão para isto é que a análise genética (e mesmo a axiomática) não pode remeter-se a um ponto de partida absoluto. Para evitar este problema, a axiomática lança mão dos axiomas e a psicogênese estabelece um limite de retorno.

Para decidir quais as provas a serem aplicadas Piaget e Szeminska recorreram às "quatro qualidades" ou às "quatro necessidades" do número para existir, quais sejam: a conservação das quantidades, a correspondência termo-a-termo (essencial para a contagem), a determinação do valor cardinal e do princípio ordinal (os dois aspectos do número) e, assim, as experiências realizadas objetivavam mostrar como a criança constrói cada uma destas "qualidades".



3.2.1 A conservação (construção) das quantidades

A conservação de quantidades é fundamental para o conceito de número, uma vez que "um número só é inteligível na medida em que permanece idêntico a si mesmo, seja qual for a disposição das unidades das quais é composto": é isso que se chama de "invariância" do número. (Piaget, 1981, p.24).

Como se trata de verificar a "invariância" do número, as quantidades são sempre apresentadas aos pares, ou seja, é preciso verificar se o número permanece idêntico a si mesmo.

A questão que Piaget e Szeminska colocam em relação à conservação é verificar qual a relação entre esta e as noções aritméticas, ou seja:

> ... as noções aritméticas se estruturam progressivamente em função mesmo dessas exigências de conservação ou será a conservação anterior a toda organização numerativa e mesmo quantificante? (Piaget e Szeminska, 1981,. p.24).

Para certificar-se da generalidade das conclusões referentes às quantidades descontínuas (de ordem aritmética), os pesquisadores tratam, também, simultaneamente das quantidades contínuas (de ordem espacial).

No caso das quantidades contínuas, as provas realizadas foram as de transvasamento do líquido e para as quantidades descontínuas, a de colocação de contas em dois recipientes e a avaliação dos comprimentos de colares formados pela justaposição de contas. As fases encontradas são comuns às duas situações e iniciam com uma ausência de conservação, passam por uma segunda fase, onde há um início de constituição de conservação e finalmente a última fase, a da conservação e coordenação quantificante.

A conservação das quantidades é, portanto, construída progressivamente segundo um processo intelectual complexo, pois, conservar quantidades significa, em última instancia, acreditar que necessariamente a quantidade se conserva mesmo contrariando as informações dadas pela percepção imediata.

unesp

A) Em relação às quantidades contínuas, a criança da primeira fase, que não conserva (em função da incapacidade de coordenar as relações quantitativas em jogo nas percepções), e para emitir seu julgamento se fixa no tamanho do recipiente; ora na altura do líquido ou ainda no número de vidros, mas, por não conceber a quantidade como uma totalidade, raciocina sobre uma relação de cada vez, sem coordenação entre elas.

O interessante é que, mesmo sem conservação, os julgamentos nesta fase já são quantificados, mas mediante o que Piaget (1981) chama de "quantidade bruta" unidimensional que, em sua forma elementar é dada ao mesmo tempo que a qualidade (as justificativas apresentadas pelas crianças são do tipo: tem menos amarelo porque é mais baixo, ou há mais vermelho porque é mais alto), ou seja, os julgamentos se fundamentam "numa relação perceptiva de diferença entre duas qualidades" (as alturas dos líquidos). (Piaget e Szeminska, 1981, p.32)

A quantificação sistemática se origina desta "quantificação bruta" através de um processo que é interdependente com a evolução das relações. Assim que as relações deixam de ser meramente perceptivas e se tornam relações "verdadeiras", com o aparecimento da transitividade lógica (ou a consciência da não-transitividade), tais relações engendram sistemas de quantidades intensivas (lógicas, permitem comparar parte e todo), que depois evoluem para quantidades extensivas (é possível a comparação entre as partes de um todo mas ainda não existe a unidade) e, finalmente, a quantidade extensiva métrica e, então, o número.

> Em conclusão, se os sujeitos deste primeiro nível não compreendem a conservação de quantidade, é que eles não chegaram a construir a noção da própria quantidade, no sentido de quantidade total, e se a isso não chegam é por não poderem compor as relações ou as partes em jogo, pois seu espírito não ultrapassa o nível das qualidades ou das quantidades brutas. (Piaget e Szeminska, 1981, p.36).

Apenas com o início do relato das pesquisas de Piaget e Szeminska, já é possível perceber a solidariedade existente entre número, classe e seriação. Antes mesmo que as relações perceptivas se transformem em relações verdadeiras (simétricas e assimétricas) já existe uma quantificação também incipiente, ou seja, as três estruturas estão basicamente num mesmo estágio de construção.

A segunda fase é considerada intermediária entre as "reações das crianças que não atingem a noção da conservação das quantidades simultaneamente física e lógica", sem que todas crianças passem efetivamente por ela. (Piaget, 1981, p.36)

Estas reações intermediárias reforçam a idéia de que a noção de conservação tem sua gênese numa quantificação propriamente dita, ela própria, originária da coordenação progressiva das relações em jogo, pois deixa evidente que os sujeitos desta fase procuram coordenar duas ou mais relações ao mesmo tempo, porém, "oscilam infindavelmente entre esta tentativa de coordenação e a submissão às ilusões perceptivas". (Piaget e Szeminska, 1981, p.38)

Além disso, as próprias relações estão se constituindo enquanto tais, ou seja, caminham em direção à sua transitividade lógica que só acontece quando elas se tornam componíveis entre si, aditiva e multiplicativamente.

"A adição das relações assimétricas é sua seriação em ato ou pensamento" e a multiplicação é a "sua seriação do ponto de vista de várias relações ao mesmo tempo", como por exemplo comparar duas quantidades segundo a altura, a largura, o número de vidros, etc., tudo ao mesmo tempo. (Piaget e Szeminska, 1981, p.33).

Ao se constituírem enquanto relações, estas engendram a quantificação inclusiva, porém, para que esta quantificação se torne extensiva ainda há uma segunda condição a preencher: a partição em unidades iguais ou a decomposição em dimensões proporcionais (é mais largo, porém mais baixo, etc.).

Ao alcançarem a conservação, entretanto, a criança a afirma de forma simples e evidente; sem fazer menção nem à multiplicação das relações ou a qualquer partição, o que poderia sugerir uma independência destas, como se a conservação "surgisse" do nada e não como conseqüência de coordenações prévias das relações.

Tal não ocorre e os indivíduos da segunda fase colaboram enormemente, com suas oscilações para que se possa fazer a afirmação em questão.

O caminho percorrido então é: inicialmente a criança avalia as quantidades de uma forma unidimensional, dependente das relações perceptuais (quantificação bruta), a seguir, passa a coordenar tais relações uma com as outras, construindo então uma totalidade

multidimensional que lhe permite estabelecer um relacionamento parte/todo, isto é a quantificação inclusiva. A multiplicação lógica é insuficiente para uma quantificação extensiva, o que só vai ocorrer com a composição por partição ou a decomposição em dimensões proporcionais.

A decomposição em dimensões proporcionais pressupõe um processo sincrônico, porém distinto do que culmina com a multiplicação das relações e é extremamente importante pois nele intervém a noção de proporção propriamente dita, que permite estabelecer a igualização das diferenças (é igual porque é menos largo e mais alto e, portanto, o que perde em largura, ganha em altura), existindo uma combinação entre as relações assimétricas de diferença, com as simétricas de igualdade o "que constitui a passagem da quantidade intensiva para a quantidade extensiva e explica a aritmetização da multiplicação lógica". (Piaget e Szeminska, 1981, p.47).

Na verdade, a proporção que se estabelece já constitui, de certa forma, uma partição, pois, para igualizar uma diferença é preciso, não só conceber a quantidade em questão "como uma totalidade qualitativa que muda de valor a cada deformação" mas, também, "estruturá-la como soma decomponível em unidades". (Piaget e Szeminska, 1981, p.48).

> O critério a empregar é o seguinte: existe partição aritmética desde que os elementos de um todo possam ser igualados entre si embora sendo distintos, enquanto que quando uma relação de conjunto ou uma classe são decompostas em sub-relações ou sub-classes, suas reuniões não implicam nenhuma igualdade entre si, mas apenas a sua co-inclusão no todo. (Piaget e Szeminska, 1981, p.47)

Finalmente, para se chegar à partição propriamente numérica, que além de sincrônica é também complementar ao surgimento das proporções, é necessário ainda compreender que uma metade não é apenas uma unidade igual a outra unidade quando estão reunidas constituindo um todo, mas, também, que a metade é a diferença entre o todo e a outra metade. Assim, a partição numérica é também, uma igualização de diferenças como a proporção, só que ao considerar $A = B_1 + B_2$, as duas metades B_1 e B_2 são iguais, enquanto que na proporção o que se iguala são apenas diferenças.

> Vê-se assim, em conclusão, quão simples é no fundo o processo de quantificação de que dá testemunho a descoberta da conservação das quantidades pela criança. O sujeito começa por não considerar mais que relações perceptivas não coordenadas entre si de igualdade ou de diferença

> qualitativas, constituindo assim respectivamente as qualidades e as quantidades brutas, não componíveis como tais. Depois, no decorrer da segunda fase, inicia um processo de coordenação lógica que se conclui na terceira fase e que resulta na classificação das igualdades e na seriação das diferenças (aditiva e multiplicativamente), com esta seriação levando à constituição das quantidades intensivas. Por fim, a terceira fase é assinalada pela constituição das quantidades extensivas, graças à igualização das diferenças intensivas e, conseqüentemente, à aritmetização dos agrupamentos lógicos. (Piaget e Szeminska, 1981, p.50).

B) Para a análise da conservação das quantidades descontínuas ou discretas, (de ordem aritmética) foram realizadas provas análogas às anteriores de modo a que "a criança chegue ao mesmo tempo a avaliá-las globalmente, quando seus elementos se acham acumulados, ou a enumerá-los, quando se encontram dissociados". (Piaget e Szeminska, 1981, p.51).

O material escolhido foi contas, cujas coleções quando contidas em recipientes proporcionam avaliações similares às efetivadas com os líquidos, além de serem passíveis de um outro tipo de avaliação global: o comprimento dos colares construídos pela justaposição de contas cuja estimativa contribui para controlar a quantificação das contas contidas nos diversos recipientes utilizados.

Ao se apresentarem dissociadas as contas podem ser consideradas uma-a-uma e serem então, submetidas a operações de correspondência biunívoca (quando experimentador e criança enchem seus respectivos recipientes da seguinte forma: o experimentador coloca uma conta, e a criança deposita também uma unidade no seu vidro e, assim, sucessivamente).

Os autores ressaltam que a análise das conservações das quantidades discretas, além de proporcionarem o controle dos resultados obtidos quando das experiências com as quantidades contínuas, permite estudar também as relações existentes entre a conservação das quantidades e o desenvolvimento da correspondência biunívoca e recíproca.

O estudo da correspondência biunívoca se faz necessário por que tal correspondência constitui uma das fontes do próprio número e as provas realizadas objetivam verificar não apenas o desenvolvimento da correspondência termo a termo mas, também, por que esta garante (às crianças da terceira fase), a equivalência entre duas coleções.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

São encontradas aqui, as mesmas três fases: ausência, intermediária e conservação. Durante a primeira fase, a criança não apenas acredita que a quantidade muda quando se despeja a coleção de contas de um vidro em outro de forma diferente como também acredita que os comprimentos dos colares de contas confeccionados com as coleções de cada recipiente são diferentes, o que evidencia uma não-conservação do ponto de vista matemático.

De fato, nem mesmo o fato de se colocar uma conta num recipiente pelo examinador, e a criança repetir a ação num recipiente paralelo, estabelecendo uma correspondência biunívoca e recíproca, numa espécie de enumeração prática, leva à conservação.

A razão principal desta não-conservação (que constitui o equivalente da não-conservação dos objetos no sensório-motor) é a irreversibilidade das ações em jogo, ou seja, a impossibilidade de reunir e dissociar mentalmente, de forma reversível, uma vez que no pensamento intuitivo, a representação se constitui apenas na evocação pela palavra ou pela imagem das diversas ações reais numa forma ainda quase material.

Enfim, para as crianças da primeira fase, tanto a correspondência termo a termo quanto a enumeração não são considerados como processos de quantificação seguros preferindo a avaliação direta proporcionada pelas relações perceptivas globais.

Da mesma forma que no caso das quantidades contínuas, a segunda fase neste contexto se caracteriza pelas soluções situadas a meio caminho entre a quantidade bruta e a quantificação propriamente dita. Em outras palavras, a criança acredita na conservação porque a igualdade inicial foi estabelecida por meio de uma correspondência biunívoca e recíproca, porém, as aparências contrastantes das coleções (recipientes de alturas ou larguras diferentes) desencadeiam um conflito, que é, inicialmente, verdadeiro, uma vez que os argumentos para a conservação não são derrubados imediatamente pelas alterações perceptuais ocorridas. É através da luta então desencadeada que as relações perceptivas se coordenam e se integram num sistema capaz de, ao mesmo tempo explicar as variações concomitantes e justificar a conservação.

A criança resolve este conflito efetuando a síntese entre as variações aparentes e a equivalência real com a coordenação das relações em jogo sendo iniciada mediante uma multiplicação simplesmente lógica que se prolonga a seguir, numa proporção.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

Como o processo que leva a conservação de quantidades é o mesmo que possibilita a própria construção desta quantidade, a terceira fase, a da conservação é, também, a fase na qual se concluem as quantificações intensiva e extensiva, esboçadas na segunda fase, com a multiplicação das relações.

Para analisar as coordenações das relações em jogo os pesquisadores modificam um pouco a técnica das provas: são apresentadas à criança duas coleções com formas diferentes, sem que ela tenha se certificado previamente de sua igualdade sendo-lhe indagado acerca da equivalência entre as duas coleções. Uma vez formulada a hipótese de igualdade ou não, se estabelece uma correspondência termo a termo, com explicação retrospectiva.

Como já é capaz de multiplicar relações a criança utiliza este recurso para formular sua hipótese, estabelecendo a igualdade das coleções de contas colocadas em recipientes diferentes mediante a multiplicação lógica das relações em jogo de altura e largura, porém, esta operação não basta para constituir a noção de igualdade entre duas quantidades (o que só ocorreria se as relações de altura e largura fossem permutadas).

O que é preciso ressaltar, todavia é que:

> ... logo que coordenadas operatoriamente, as diferenças percebidas são medidas e na falta de dados numéricos são medidas umas pelas outras, com todo aumento de largura sendo igualado ou comparado com a diminuição concomitante de altura, ou o inverso. (Piaget e Szeminska, 1981, p. 65).

Essa proporção constitui o início da quantificação extensiva (é comum as crianças se referirem a termos meio e metade na comparação entre altura e largura), além disso, essas igualizações de diferenças e essas partições numéricas constituem-se em função de ações que se tornaram reversíveis em pensamento (quando a criança "esvazia" em pensamento um dos recipientes e "completa" o outro para estabelecer a igualdade, por exemplo).

Em resumo: na primeira fase as relações perceptivas se sobrepõem à equivalência das coleções respectivamente construídas; na fase intermediária, há um conflito sem solução e na terceira, a equivalência antecede (e se sobrepõe) às relações perceptivas devido à coordenação entre estas últimas.



As razões pelas quais a correspondência termo a termo é suficiente para garantir a equivalência das coleções na terceira fase, não o sendo nas anteriores é o que será abordado a seguir.

3.2.2 A correspondência termo a termo

Na comparação de duas quantidades duas ações são normalmente utilizadas: por em proporção suas dimensões e colocar em correspondência termo a termo seus elementos, esta última, desde os primórdios da contagem na humanidade, até a equivalência entre conjuntos estabelecida por Cantor, aparece como constitutiva do número inteiro. Todavia, ela não é suficiente para garantir a equivalência entre duas relações de imediato, havendo uma "evolução da correspondência como tal, da simples correspondência global das figuras de conjunto, a qual preludia unicamente a quantificação destas últimas, à correspondência realmente quantificante" que é fonte de equivalência necessária e da invariância cardinal. (Piaget e Szeminska, 1981, p. 71).

Do ponto de vista psicológico e não lógico existem duas espécies diferentes de situações nas quais a criança pratica a correspondência termo a termo: a primeira, que se refere à cardinação é quando a criança é levada a construir uma segunda quantidade equivalente a uma dada (por exemplo, colocar o mesmo número de bolinhas de gude que o companheiro; ou indicar com os dedos determinada quantidade de objetos) e uma correspondência mais simples, que é a estabelecida entre objetos heterogêneos, porém qualitativamente complementares, como entre canetas e tampas; garrafas e copos; xícaras e pires, etc., ou seja, uma correspondência provocada pelas condições exteriores.

As correspondências provocadas são estudadas a seguir, com o objetivo de "estabelecer se a correspondência termo a termo operada pela criança ou efetuada com ela acarreta necessariamente em seu espírito a idéia de uma equivalência durável entre os conjuntos correspondentes". (Piaget e Szeminska, 1981. p.72).

As provas selecionadas pelos autores são (em ordem de generalidade): correspondência termo a termo entre "n" copos e "n" garrafas; correspondência entre flores e jarras ou entre ovos e oveiros e a troca um contra um entre moedas e mercadorias, com ou sem numeração falada.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

A correspondência entre copos e garrafas é mais geral que entre flores e jarras pois as flores são colocadas dentro das jarras e não apenas ao lado. A correspondência entre ovos e oveiros é mais simples ainda, porque em cada oveiro cabe um único ovo, enquanto que nas jarras podem ser colocadas mais flores, ou mais copos ao lado de uma única garrafa.

A última prova é a que estabelece mais a correspondência "em ação", pois se trata de "troca um a um", primeiramente sem numeração falada e depois fazendo uso da numeração.

É importante observar que se as crianças evidenciassem a conservação na prova das garrafas (mais geral), não seria submetida às seguintes e assim sucessivamente.

Na correspondência entre 6 garrafas e um número maior de copos os resultados são classificados em três fases: ausência de correspondência termo a termo e de equivalência; correspondência termo a termo, mas ausência de equivalência durável e, correspondência com equivalência durável.

Na primeira fase, as crianças procedem por correspondência global, determinada pela percepção do comprimento das fileiras, que varia segundo o espaço que intercala os objetos.

As crianças da segunda fase já estabelecem de início a correspondência, porém se os termos de uma das coleções são espaçados ou aproximados mantendo-se a outra constante, a equivalência entre as duas fileiras deixa de existir.

> Tudo se passa como se, para esta última, a quantidade dependesse menos do número (noção que, nesta hipótese, permaneceria portanto, verbal, mesmo quando o sujeito conta corretamente) ou da correspondência termo a termo entre objetos discretos que do aspecto global da coleção e, em particular, do espaço ocupado pela série. (Piaget e Szeminska. 1981, p.76)

Na terceira fase, assim que as crianças estabelecem a correspondência biunívoca entre conjuntos, a equivalência entre eles permanece inalterada independentemente de qualquer alteração visual o que demonstra que, nas fases anteriores, a criança acreditava que o número variava com a figura e não era constituído pela correspondência termo a termo.

unesp

Assim, a correspondência evolui de uma comparação global de conjuntos por simples avaliação espacial a uma correspondência unívoca e recíproca com equivalência durável entre as correspondentes coleções, passando por uma fase intermediária que estabelece a continuidade entre elas em que a equivalência entre os dois conjuntos é manifestada por uma correspondência intuitiva, de ordem perceptiva e, conseqüentemente, não durável.

> A única maneira de interpretar a coisa é, portanto, admitir uma espécie de indiferenciação entre o número e o espaço ocupado, isto é, repetimos, uma avaliação global e não ainda analítica, a única avaliação que se acha à disposição da criança sendo a correspondência visual ou de ordem perceptiva. (Piaget e Szeminska. 1981, p.80)

A prova da correspondência entre flores e jarras e entre os ovos e oveiros foi então estipulada de forma a suprimir esta indiferenciação entre número e espaço. "É claro que quanto mais a coesão dos objetos que se correspondem termo a termo é grande, tanto mais a equivalência das coleções correspondentes será durável". (Piaget e Szeminska. 1981, p.80).

Ao depositar a flor numa jarra, tem-se o conteúdo introduzido no continente, o que é mais complementar ainda do que o copo em relação à garrafa. Desta forma, é mais fácil compreender que a quantidade de flores ou de ovos permanece equivalente à das jarras e dos oveiros, mesmo quando foram retirados destes.

Da mesma forma que em todas as experiências até aqui descritas, os resultados classificam-se em três fases: a da comparação global sem correspondência termo a termo nem equivalência durável, uma fase intermediária, onde existe correspondência termo a termo, porém sem equivalência durável e, finalmente, correspondência operatória com equivalência durável.

Durante as primeiras fases, as relações perceptuais só permitiam uma quantificação unidimensional (maior, menor, comprido, pequeno, apertado, etc.), que não eram coordenadas ou multiplicadas entre si. No nível seguinte, a criança coordena intuitivamente as relações, isto é, efetua a correspondência entre elementos dispostos um defronte ao outro, porém a equivalência entre as coleções se altera de acordo com as transformações das configurações, por não ser capaz, ainda, de igualizar as diferenças, isto

é, uma coordenação dos deslocamentos tal que estes últimos compensem tornando-se reversíveis.

Na terceira e última fase, opera-se a multiplicação reversível das relações em jogo e isso graças à descoberta pela criança de que toda alteração espacial na configuração dos elementos pode ser desfeita mediante uma operação inversa.

> Vê-se assim como o primado da operação em relação à intuição perceptiva resulta da reversibilidade progressiva do pensamento: a percepção é, por essência, irreversível, mas, à medida que ela se resolve em juízos de relação, as operações reversíveis são capazes de dominá-la e de substituir a correspondência intuitiva por uma correspondência operatória e quantificante, assegurando, contrariamente às aparências da percepção imediata a equivalência necessária e durável das coleções correspondentes. (Piaget e Szeminska, 1981. p.89).

As provas até então realizadas dão conta de uma correspondência estática de objetos complementares, justapostos ou encaixados, a troca de um contra um, por outro lado, representa uma correspondência dinâmica.

Todas as crianças examinadas já trocam naturalmente suas moedas uma a uma pelos objetos propostos (flores, bombons, etc.). Inicialmente solicita-se à criança para estimar quantos objetos poderá adquirir com determinada quantia de moedas, com o intuito de verificar qual dos três métodos possíveis (comparação global, comparação termo a termo ou a numeração) a criança utilizará. A seguir é realizada a troca dos objetos um contra um, para verificar junto ao sujeito se existe (ou não) equivalência entre as duas coleções (moedas e objetos adquiridos).

Na primeira fase, as crianças utilizam a comparação global para a previsão e demonstram ausência de equivalência após a troca de um contra um.

A segunda fase já apresenta uma estimativa correta por correspondência visual, todavia, mesmo com a confirmação correta da previsão inicial pela troca um a um, o sujeito não atinge uma equivalência durável, e isso mesmo quando utiliza a numeração. Assim, a criança admite, após contagem, que as duas coleções tem o mesmo número de elementos (8 por exemplo), entretanto, nega a equivalência, levando em conta a percepção das

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

qualidades espaciais. Os sujeitos desta fase, negam também a possibilidade de retorno à situação inicial (de correspondência entre as coleções de moedas e objetos).

Da mesma forma que nas provas envolvendo conteúdo e continente, as de troca de um contra um, também apresentam, para alguns sujeitos, uma passagem entre a segunda e a terceira fase, que evidenciam o processo de construção da equivalência. Para estes sujeitos, existe uma equivalência, inicialmente momentânea e depois, durável, sendo que para tornar-se evidente e logicamente necessária, esta equivalência pressupõe um sistema reversível de deslocamentos ou de relações, com a própria troca sendo concebida como o esgotamento das duas coleções.

Para finalizar a análise das correspondências provocadas resta estudar a troca um contra um, com numeração. Os resultados obtidos apresentam-se idênticos aos das provas anteriores e a numeração falada não altera em nada as fases encontradas com as outras técnicas.

Portanto, de acordo com os resultados obtidos, a numeração falada não desempenha qualquer papel na evolução da correspondência e da equivalência, o que não significa que a contagem não tenha sua importância, ao contrário "no momento em que a correspondência se torna quantificante e dá assim nascimento ao processo de equivalência, a numeração falada pode acelerar o processo de evolução". (Piaget e Szeminska, 1981, p.97)

3.2.3 A determinação do valor cardinal do número

No estudo das correspondências provocadas já foi possível demonstrar que estas podem ser de diferentes tipos que evoluem, desde a correspondência global (correspondência intuitiva) até a correspondência quantificante (operatória) que possibilita a noção de equivalência durável e necessária dos conjuntos correspondentes. O objetivo agora é analisar o mecanismo da correspondência em si e não mais os seus resultados. Para isso foram selecionadas situações de correspondência espontânea em que a criança "é obrigada a inventar por si só a correspondência e utilizá-la sobre a forma que lhe convém", em outras palavras, verificar como a criança faz para avaliar o valor cardinal de uma dada coleção, quais os tipos de correspondência que ela usa e, também, "quais os métodos que

precedem a correspondência termo a termo ou a sucedem imediatamente". (Piaget e Szeminska, 1981, p.99).

No presente caso não se apresentam à criança duas coleções para que sejam comparadas, o que é importante aqui, é verificar se a criança é capaz de construir uma coleção equivalente a uma dada de antemão e verificar qual será o procedimento escolhido (correspondência qualitativa ou qualquer).

As coleções apresentadas às crianças são constituídas por figuras construídas com fichas, de formas variadas (aglomerados, séries ou figuras abertas, fechadas quaisquer, fechadas de formas conhecidas ou não e configurações numéricas).

Numa primeira fase, por não possuírem ainda noções precisas do número cardinal, as crianças limitam-se a uma comparação qualitativa para quantificar as coleções dadas, quantificação esta expressa em termos de mais, menos e igual.

A princípio, as reações desta primeira fase parecem indicar que essas crianças preocupam-se apenas com a semelhança qualitativa, não experimentando nenhuma necessidade de uma avaliação quantitativa quando da reprodução das figuras-modelo, entretanto, existe uma avaliação em termos de "mais", "menos" ou "igual", fundada sobre as qualidades globais consideradas, sem coordenar as comparações entre si e se está diante de uma quantificação bruta (sem multiplicação de relações, pois, se leva em conta o comprimento, despreza a densidade, por exemplo).

O caráter puramente perceptivo das reações das crianças desta fase, evidencia sua irreversibilidade e as relações comparáveis entre si não constituem ainda operações propriamente ditas.

Já foi destacada anteriormente a diferença entre correspondência qualitativa e qualquer (numérica); também foram usadas expressões como correspondência intuitiva, para indicar as correspondências fundadas unicamente na percepção ou imagens representativas e, também, da expressão correspondência operatória, para designar a correspondência independente da percepção atual e, portanto, de ordem intelectual e reversível. Assim, uma correspondência qualitativa pode ser intuitiva (quando estabelecida entre figuras semelhantes) ou operatória (entre figuras diferentes), enquanto que a correspondência

numérica é necessariamente operatória, exceção feita para os quatro primeiros números, considerados como números perceptuais.

É exatamente esta diferenciação entre os tipos de correspondência que permite identificar os sujeitos que se encontram na segunda ou na terceira fase em relação à técnica de reprodução de figuras. Os sujeitos que se situam na segunda fase, apresentam uma correspondência qualitativa de ordem intuitiva enquanto que os da terceira deixam transparecer uma correspondência operatória (qualitativa e numérica).

Assim, na segunda fase já se constata a presença de correspondência termo a termo porém sem que exista equivalência entre as duas coleções, pois o sujeito se apóia, sem cessar, nas particularidades qualitativas das figuras. Durante a terceira fase, ao contrário, a correspondência se liberta da figura intuitiva e torna-se operatória, qualitativa ou numericamente, em função do surgimento das operações espontâneas de controle, por dissociações das totalidades e colocações em série.

Em outras palavras, a criança desfaz as figuras e arranja linearmente as fichas de forma a estabelecer a correspondência termo a termo, para garantir a equivalência, independentemente de as ter ou não numerado.

> Existe, portanto, uma fase própria à correspondência operatória, com sentimento de equivalência (qualitativa e numérica) das coleções correspondentes e com conservação das quantidades. Esta fase vem assim intercalar-se entre a simples correspondência intuitiva e a correspondência entre os objetos e as cifras verbais, ou numeração falada. Quanto a esta última, cujo emprego correto a suplantar toda correspondência prática, caracterizaria uma quarta fase, ... e é apenas quando as operações se constituem logicamente no plano prático que a numeração falada assume uma significação propriamente numérica. (Piaget e Szeminska, 1981, p.111).

3.2.4 A síntese

Embora tenham sido analisadas apenas três das "quatro qualidades" do número, ou seja, a conservação, a correspondência e a cardinalidade, já é possível estabelecê-lo como síntese das classes e das séries, uma vez que a ordem em jogo é a vicariante, que não pressupõe o ordinal (que é imprescindível para a construção da sucessão numérica). Para isso, é

oportuno destacar um resumo dos resultados até aqui obtidos para mostrar que eles são suficientes para estabelecer o número como síntese das classes e das séries.

i) Tanto as quantidades contínuas como as descontínuas não se conservam de saída para a criança. Esta conservação só é estabelecida com a coordenação das relações em jogo, sendo a correspondência termo a termo a razão inicial da equivalência entre duas coleções;

ii) Em função do exposto em (i), tornou-se importante verificar porque a correspondência termo a termo não é suficiente para assegurar a equivalência de duas coleções, mesmo quando tal correspondência está sob suas formas mais familiares como a entre conteúdos e continentes ou, a troca de um contra um. Constatou-se então, que existe um nível de correspondência perceptiva no qual a equivalência estabelecida é rompida sempre que se desfaz o contato entre os elementos correspondentes, indicando uma equivalência definida por meio das relações globais de espaço ocupado ou de dimensões imediatamente percebidas. Após esta fase, se sucedem, segundo uma ordem regular, a correspondência sem equivalência durável e a correspondência numérica com equivalência necessária, o que em outros termos quer dizer: comparação qualitativa global; comparação qualitativa intuitiva e correspondência numérica e, respectivamente, quantificação bruta (mais, menos, igual); quantificação intensiva (um, todos, nenhum, alguns) e quantificação extensiva (primeiramente quase todos, meio e metade e depois, numérica). Esta evolução pode ser analisada tanto do ponto de vista psicológico (de ordem causal e genética), quanto do ponto de vista da lógica das operações;

iii) A análise psicológica indica que, até por volta dos 4 anos e meio a 5 anos, a criança avalia as quantidades descontínuas ou coleções como se fossem grandezas espaciais, fundando seus julgamentos sobre as configurações espaciais (mais ou menos longo, apertado, etc.), o que evidencia que a criança não sente necessidade (sequer é capaz) de decompor as totalidades que percebe para fazer seus julgamentos. Isto significa que ela não considera ainda uma dada coleção como uma reunião de unidades do tipo 1+1+1+... etc. e, a única síntese ao alcance da criança da primeira fase se restringe à própria forma de conjunto como intuição percebida globalmente, sem que seja capaz de reunir partes desta intuição quando de um eventual rompimento. Assim, a criança não é capaz de perceber que mesmo quando a forma de conjunto muda e, conseqüentemente, a disposição das partes, o

total dos elementos não se altera, revelando que o ponto de partida da evolução da correspondência é uma quase total irreversibilidade do pensamento;

iv) As condutas da segunda fase que se caracterizam pela correspondência qualitativa de ordem intuitiva e pela comparação de figuras apresentam uma melhor elaboração dos dados intuitivos em função de uma análise mais precisa de formas e qualidades. Contrariamente à fase anterior, onde a ênfase se encontra nos detalhes necessários para a reprodução das figuras modelos, como ângulos, posições extremas das figuras, etc., nesta fase, todas as partes da totalidade são analisadas e comparadas, sem que existam mais aglomerados e, mais, a criança considera diferentes critérios (comprimento, largura, densidade, etc.), provocando as hesitações e oscilações que conduzem à coordenação das relações em jogo. Há um progresso da análise e da síntese combinadas na reprodução das figuras que é representado pela correspondência qualitativa de ordem intuitiva, semi-operatória, que permite ao sujeito colocar em correspondência não apenas os pontos marcantes das figuras em conjunto, mas, também, as partes análogas. Acrescente-se ainda, como resultado inerente à segunda fase, o fato de que embora as crianças não confiem que o número de elementos de uma figura transformada seja equivalente ao da sua forma inicial, estas já apresentam um progresso também na reversibilidade do pensamento, pois acreditam ser possível retornar à forma anterior, a partir da forma alterada, desfazendo-se as operações;

v) Com a realização de um progresso decisivo caracterizado pela correspondência com equivalência durável e necessária, as crianças alcançam a terceira fase e com ela a noção de que coleções correspondentes permanecem equivalentes independentemente de sua configuração ou da disposição dos elementos. Tal progresso é realizado continuamente, mediante a liberação gradativa da intuição perceptiva (figura), o que permite a transformação dos elementos em unidades permutáveis entre si, conseqüentemente, a correspondência vai também, gradativamente, deixando de ser intuitiva e passando a ser "qualquer" ou numérica. Essa libertação só acontece, todavia, com a compreensão de que toda transformação é passível de ser compensada pela transformação inversa, mediante incessantes recapitulações das correspondências termo a termo, que constitui a reversibilidade completa. A razão para que tudo isso aconteça, é a coordenação acabada das relações em jogo que permite a descoberta da constância das coleções (classes) quanto à sua extensão e da igualização das diferenças, com os elementos se transformando em

unesp

unidades, as totalidades se constituindo pela reunião das unidades que diferem entre si apenas pela sua posição na seriação. Em outras palavras, a correspondência se torna numérica, em função de uma combinação operatória (reversível) entre as coleções (classes) e as séries.

À evolução psicológica (da percepção global à operação) corresponde uma estruturação lógica dos julgamentos, progredindo de uma simples relação indecomponível, até a correspondência biunívoca e recíproca qualquer, por uma série de transformações lógico-aritméticas que serão analisadas a seguir.

Como já foi comentado, à cada espécie de correspondência construída pela criança, corresponde um dos tipos de quantificação. Assim, à avaliação global corresponde a quantificação bruta; à correspondência qualitativa intuitiva, a quantificação intensiva e à correspondência numérica, a quantificação extensiva.

No nível da quantificação bruta, não existe ainda a multiplicação entre relações e estas também não são decomponíveis em elementos que comporiam a soma, não comportando, portanto, nenhuma seriação aditiva. Na verdade, por não possuírem sequer a transitividade, as ligações presentes na quantificação bruta não são nem propriamente relações.

Ao se transformarem em relações propriamente ditas, estas relações engendram a quantificação intensiva que se caracteriza por uma seriação aditiva (o comprimento total da fileira **l** é dado pela soma dos comprimentos dos intervalos entre um elemento e o seguinte: **l = a+a'+b'+...)** e uma multiplicação das séries aditivas que é a própria correspondência qualitativa (dada uma fileira definida pela posição de cada elemento, ou seja, por **l** e pelos intervalos **l = a+a'+b'+....**, construir uma segunda fileira que reproduza exatamente os mesmos intervalos **a, a', b'**, ... e o mesmo comprimento **l**).

A nova fileira pode ser construída acima, abaixo ou ao lado da fileira dada e a correspondência qualitativa existe quando ambas fileiras são co-multiplicadas pela relação abaixo (acima, ao lado, etc.). A mesma coisa pode ser expressa por meio de classes individuais ou compostas, definidas por suas qualidades intuitivas de ordem espacial (ou temporal) ou seja, pelas posições respectivas dos elementos, ou, ainda, classes de elementos qualificados pelas posições.

unesp

Aparece, portanto, novamente a "combinação" entre classes e séries, porém, ainda, num plano intuitivo ou semi-operatório porque a criança não consegue deduzir a equivalência numérica durável das coleções correspondentes, partindo das operações realizadas.

Chamando de **l** o comprimento da fileira; de **d** a densidade e de **n**, a quantidade de elementos da fileira, se são dadas duas fileiras f_1 e f_2, as seguintes conclusões lógicas podem ser aferidas:

1) $(l_1 = l_2)$ X $(d_1 = d_2) = (n_1 = n_2)$ (correspondência qualitativa)

2) $(l_1 > l_2)$ X $(d_1 > d_2) = (n_1 > n_2)$ e $(l_1 < l_2)$ X $(d_1 < d_2) = (n_1 < n_2)$ (avaliação global)

3) $(l_1 = l_2)$ X $(d_1 > d_2) = (n_1 > n_2)$ e $(l_1 = l_2)$ X $(d_1 < d_2) = (n_1 < n_2)$ (avaliação global)

4) $(l_1 < l_2)$ X $(d_1 = d_2) = (n_1 < n_2)$ e $(l_1 > l_2)$ X $(d_1 = d_2) = (n_1 > n_2)$ (avaliação global)

5) $(l_1 > l_2)$ X $(d_1 < d_2) = (n_1 > n_2)$ ou $(n_1 < n_2)$ ou $(n_1 = n_2)$ e

$(l_1 < l_2)$ X $(d_1 > d_2) = (n_1 < n_2)$ ou $(n_1 > n_2)$ ou $(n_1 = n_2)$ ou, de outra forma:

6) $(n_1 = n_2)$ X $(l_1 > l_2) = (d_1 < d_2)$ e $(n_1 = n_2)$ X $(l_1 < l_2) = (d_1 > d_2)$ ou

6A) $(n_1 = n_2)$ X $(d_1 > d_2) = (l_1 < l_2)$ e $(n_1 = n_2)$ X $(d_1 < d_2) = (l_1 > l_2)$.

É interessante observar que as crianças da segunda fase compreendem perfeitamente as relações de 1) a 4), mas não percebem as 5), 6) e 6A), ou seja, que existe a igualdade numérica quando variam o comprimento e a densidade ao mesmo tempo.

Na verdade isto só vai ocorrer com a compreensão da relação inversa entre **d** e **l** (compensação), o que acontecerá apenas quando a criança ultrapassar os limites da intuição perceptiva. Para descobrir a constância de **n** (e a quantificação extensiva) é necessário a descoberta da constância das classes em extensão e das séries de relações. E, de novo, a combinação entre classes e séries para engendrar a quantificação extensiva e, conseqüentemente, o número.

Quando um sujeito reproduz, usando fichas vermelhas, exatamente uma figura formada por fichas azuis dada como modelo, o que foi estabelecido entre as duas figuras foi uma correspondência qualitativa. Se, ao invés de reproduzir a figura, o sujeito dispõe linearmente as fichas vermelhas, ou as empilha (a quantidade exata), certamente haverá ainda uma correspondência termo a termo, só que, qualquer, pois cada ficha não é mais considerada em função da sua qualidade (posição ocupada) mas, sim, como uma unidade igual às outras.

Seja a figura $D_1 = A_1+A_1'+B_1'+C_1'$ formada pelas fichas azuis (um triângulo com uma ficha no seu interior).

> Admitamos que essas fichas vermelhas sejam alinhadas, A_2 representará então, à vontade, A_1 ou A_1' ou B_1', etc., A_2' representará ao mesmo tempo qualquer termo de D_1 salvo aquele que já se encontra colocado em correspondência com A_2 etc. Desde logo, a reunião $A_2+A_2'+B_2'+C_2' = D_2$ assumirá o sentido do número 4 e não das fichas dispostas em triângulo; $A_2+A_2' = B_2'$, significará o número 2 e não mais a classe das fichas situadas nas duas extremidades do lado esquerdo, etc. Ademais, qualquer reunião de dois elementos $A_2'+B_2'$, bem como A_2+A_2' ou $B_2'+C_2$ dará nascimento a uma mesma classe B significando 2 elementos independentemente de suas qualidades. (Piaget e Szeminska, 1981, p.142).

Desta forma, a correspondência termo a termo deixa de ser qualitativa e se torna numérica assim que os elementos são concebidos como equivalentes entre si (membros de uma mesma classe) e que os caracteres diferenciais que poderiam colocá-los em oposição uns aos outros como elementos de uma mesma classe são substituídos por sua posição relativa na ordem de colocação em correspondência, originando então a unidade e, logo o número.

Da mesma forma, as relações que se referem às diferenças, são aritmetizadas de acordo com o mesmo mecanismo, ou seja, desde que a igualização das diferenças é acrescentada às coordenações das qualidades acontece a composição numérica e a intervenção da unidade (por exemplo, a igualização da densidade).

Agora, é importante ficar claro que nenhuma dessas composições qualitativas pode definir, isoladamente, unidades propriamente ditas. De fato, se duas classes são reunidas numa classe total, elas não constituem duas unidades porque estão reunidas em função da semelhança entre seus elementos ou de suas qualidades comuns, desconsiderando-se as

unesp

eventuais diferenças. Da mesma forma, duas relações assimétricas (distâncias entre a e b e entre b e c, por exemplo), reunidas numa relação total não constituem duas unidades, porque se a relação total adiciona numa só todas as diferenças exprimidas por cada relação componente, as diferenças parciais não são equivalentes.

No entanto, para constituir a correspondência "qualquer" e, por conseguinte, o número, é necessário a igualização das diferenças que é o mesmo que reunir num único todo operatório a classe e a relação assimétrica; os termos então enumerados são ao mesmo tempo equivalentes entre si (membros de uma classe) e diferentes uns dos outros em função de sua posição (ordem de enumeração, ou seja, relação assimétrica).

Enfim, com a constituição da correspondência qualquer, o número emerge como síntese das classes e das séries, sendo, todavia, irredutível a elas, já que nenhuma dessas operações, por si só, engendra a unidade. Ainda não se pode concluir pela constituição da seqüência ou sucessão dos inteiros que só irá se concretizar com a recorrência (iteração das unidades), que acontece com a constituição, solidária e recíproca dos aspectos ordinal e cardinal do número.

Ao serem finalizados os estudos sobre as correspondências (provocadas ou espontâneas) se obteve como conclusão que o número emerge como síntese das classes e das séries e é exatamente até este ponto que quase todas as propostas pedagógicas fundamentadas na teoria piagetiana chegam, daí a profusão de atividades para que a criança estabeleça uma infinidade de correspondências (na sua quase totalidade do tipo provocada). Poucos livros avançam na abordagem da reciprocidade entre ordinais e cardinais (Kamii é uma rara exceção), e a quase totalidade, insinua a construção linear do número, com o estabelecimento primeiro das classes e das séries, para só depois vir o número, tanto que a participação das classes é sempre abordada em relação à qual a parte que lhe compete "dentro" do número, ora sendo apresentada apenas como responsável pela compreensão de que a última palavra-número pronunciada numa contagem representa o total dos elementos da coleção (inclusão de classes), ou ainda, acrescida da função de estabelecer, dentro de um determinado conjunto, quais os elementos que serão contados, dos que não serão. O papel da série é ainda mais restrito, por que "serve" apenas para verificar se todos elementos foram contados e uma única vez, ou seja, trata-se apenas de séries vicariantes.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

Entretanto, o número, particularmente em seu aspecto cardinal, desempenha importante papel na constituição da seriação propriamente dita, ou a correspondência ordinal, o que é abordado a seguir.

3.3 A COORDENAÇÃO ENTRE A ORDEM E A CARDINALIDADE

Os resultados anteriormente apresentados permitiram concluir que o número é a síntese da classe e da série ou, ainda, uma classe seriada e, se estancados aí os estudos acerca da construção do número, não seria de todo destituída de sentido a interpretação de que as classes e séries são anteriores ao número, pois as pesquisas até então realizadas só enfocaram a participação das duas primeiras estruturas na construção da terceira em detrimento da recíproca (exceção feita a alguns comentários sobre a interdependência entre elas).

No caso específico da correspondência termo a termo biunívoca e recíproca, os elementos das coleções são considerados iguais e só podem ser distinguidos uns dos outros por sua posição (espacial ou temporal). Além disso, os elementos podem ser seriados em qualquer ordem desde que ele permita contar cada elemento e somente uma única vez (ordem vicariante), podendo induzir à falsa idéia da existência de uma primazia das classes (aspecto cardinal) em relação às séries (aspecto ordinal), na construção do número.

Por outro lado, quando as coleções em jogo são formadas por elementos que podem ser diferenciados por caracteres passíveis de seriação "as categorias assim estabelecidas numa dessas coleções correspondem às categorias estabelecidas nas outras graças a esses mesmos caracteres, com a ordem assim constituída não sendo mais vicariante" e, então, por possuir um acentuado interesse na ordem, a correspondência estabelecida será denominada correspondência ordinal. (Piaget e Szeminska, 1981, p.147).

O que se pretende mostrar aqui é que, da mesma forma que a ordem está presente quando da correspondência de coleções de objetos iguais (ordem vicariante), cuja ênfase está na cardinalidade, esta última é, por sua vez, correlativa da correspondência ordinal no caso de conjuntos finitos. Em outros termos, o número (em seu aspecto cardinal) e, conseqüentemente, as classes, são fundamentais para a constituição da ordem (seriação). Além disso, simultaneamente está sendo concluída a análise genética das "quatro

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

qualidades" que compõem o número, com o estudo do aspecto ordinal do número (de forma indissociável ao cardinal).

As provas realizadas foram as das bonecas e bengalas (ou "sacos" de montanha); dos cartões seriados e a dos tapetes e barreiras e os resultados apontam para as mesmas três fases: comparação global, sem seriação exata e sem correspondência espontânea (cardinação); seriação e correspondência progressiva e intuitiva e, seriação e correspondência imediata e operatória.

São três as operações possíveis para o estabelecimento da correspondência ordinal: seriação qualitativa simples; correspondência qualitativa entre duas seriações (similitude) e a correspondência numérica (ordinal).

Cada uma das operações relacionadas acima evolui por três etapas mais ou menos sincrônicas entre si e igualmente sincronizadas com as fases pelas quais evolui a correspondência cardinal. Assim, tem-se, para a correspondência serial, as seguintes fases: comparação global sem seriação exata ou correspondência termo a termo espontânea; seriação e correspondência progressivas e intuitivas e, seriação e correspondência imediata e operatória.

Para a correspondência serial não diretamente percebida, as etapas são: ausência de correspondência entre os termos não mais posicionados defronte um do outro; tentativa de estabelecimento de correspondência com o auxílio da contagem ou de uma nova correspondência semi-intuitiva (ambas fracassadas) e, descoberta da correspondência pela combinação entre as noções ordinais e cardinais.

Quanto à reconstituição da correspondência após uma (ou ambas) fileira ter sido desfeita, a criança inicia não sendo capaz de reconstruir por si mesma a série e apela à correspondência visual ou decide arbitrariamente; na segunda fase, recorre também à contagem, porém desconsidera a ordem ou confunde a categoria procurada com a do termo anterior e, finalmente, ao coordenar a seriação e a cardinação, consegue estabelecer a correspondência desejada.

Além disso, os resultados das provas realizadas para estudar a construção da correspondência serial apresentam como conclusão interessante o fato de que a ordem de

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

dificuldade das coordenações de relações exigidas para construir uma série ou colocar duas séries em correspondência é exatamente a mesma e são três os métodos possíveis para isto: seriação dupla, seriação simples com correspondência e a correspondência termo a termo direta (correspondência ordinal).

As crianças da primeira fase não são capazes de empregar a seriação dupla, pois não conseguem, sequer, construir de saída, corretamente, uma das séries e, então, para estabelecer a correspondência com a segunda, elas procedem, sucessivamente, uma a uma. Quando empregam o método da seriação simples com correspondência, as crianças desta primeira fase não obtêm êxito com a seriação espontânea, limitando-se a alinhar os objetos aleatoriamente e, mesmo quando recebem sugestões de partir do maior (menor) para o menor (maior), não conseguem sucesso, por não conseguirem perceber que um determinado elemento deve ser ao mesmo tempo menor (maior) que o precedente e maior (menor) que o conseqüente e, então, seriam aos pares. E, finalmente, as correspondências estabelecidas são correlatas às seriações, isto é, são também globais e pré-seriais.

Um outro fato a ser considerado é o de que a ordenação ou seriação "supõem ou constituem já uma espécie de correspondência, aquela que liga cada termo ao seguinte: poder-se-ia dizer que a seriação é uma correspondência intrínseca" e a similitude, uma correspondência extrínseca entre duas séries. "Inversamente, aliás, pode-se dizer que toda correspondência supõe uma seriação, seja qual for o tipo desta", o que significa, em resumo, que se "a seriação espontânea não é possível, a correspondência serial não o é tampouco e reciprocamente". O mesmo se pode dizer da correspondência cardinal, evidenciando assim, que neste nível (4,6 - 5 anos) as operações são substituídas por uma avaliação global. (Piaget e Szeminska, 1981, p.154).

As crianças da segunda fase, por outro lado, constroem (após tateios e correções) espontaneamente, séries corretas e, portanto, resolvem o problema da correspondência serial, particularmente, pelo método da seriação dupla. A seriação e a correspondência serial permanecem intuitivas e perceptivas, porém, o sujeito é capaz de posicionar um elemento numa série de modo que ele seja simultaneamente o maior (menor) dos que ainda não foram seriados e o menor (maior) daqueles já dispostos em série.

A correspondência serial própria desta segunda fase se elabora em estreita conexão com a seriação sem que se confundam, uma vez que se apóiam mutuamente, permanecendo,

unesp

todavia, distintas. De fato: assim que as ligações estabelecidas entre os elementos se tornam realmente relativas, isto é, já é possível a coordenação de duas relações entre si (pelo menos três elementos), não é difícil coordenar mais, de forma que podem ser então construídas, tanto a correspondência serial quanto a seriação simples. Além disso, uma vez descoberta a passagem da qualidade à relação, esta descoberta (bastante difícil) engendra tanto seriações duplas correspondentes quanto séries aditivas isoladas. Entretanto, as relações descobertas continuam pertencendo aos planos intuitivo e experimental, sendo, portanto, semi-operatórias, ligadas à percepção e não passíveis de manipulação abstrata.

Durante a terceira fase a série é construída sem hesitações ou tateios, com as crianças considerando o conjunto de relações entre todos os elementos uma vez que escolhe, quando de cada novo relacionamento, o maior (ou menor) dos termos restantes. Além disso, a criança opera, com a mesma facilidade, por correspondência imediata (sem seriação prévia), quanto por seriação simples seguida de correspondência.

Assim, a construção da correspondência serial ou similitude qualitativa é concluída por "um sistema de operações propriamente ditas, suscetíveis de coordenar tanto as relações inversas quanto as diretas". (Piaget e Szeminska, 1981, p.158).

Finalmente, a construção da correspondência ordinal apresenta as mesmas três etapas da similitude, com poucas novidades. Numa primeira, a criança perde toda noção da correspondência quando se desloca uma das duas séries e para determiná-la, se limita a fazer corresponder os elementos no momento colocados um defronte ao outro. Na segunda, a criança tenta, mediante a contagem ou outros procedimentos empíricos, restabelecer a correspondência exata, porém, confunde, constantemente, a categoria do termo precedente com a procurada e, enfim, ao coordenar a busca da categoria procurada com o valor cardinal das coleções pertinentes, a correspondência serial qualitativa e a correspondência numérica ordinal se duplicam.

Em resumo e tal como nos procedimentos anteriores, a criança da primeira fase da correspondência serial também deixa de apreender as correspondências a partir do momento em que os elementos não mais se posicionam diretamente um defronte o outro, mesmo quando as séries permanecem paralelas e com pequena variação entre os comprimentos totais e dos intervalos entre os elementos, transparecendo a comparação global sem a compreensão, nem mesmo intuitiva, dos detalhes das relações.

unesp

Durante a segunda fase, as crianças são capazes de estabelecer a correspondência serial entre duas coleções, ou seja, não apenas a correspondência termo a termo, mas também categoria por categoria, no entanto, alterando-se a configuração das fileiras, os sujeitos negam a equivalência cardinal, o que demonstra que a correspondência serial não é mais suficiente para a equivalência cardinal que a correspondência qualitativa pertinente deste nível. Todavia, mesmo não acreditando na equivalência cardinal, a criança crê ser possível reencontrá-la, reconstituindo a correspondência e, a busca das categorias correspondentes já demonstra um avanço em direção tanto à reversibilidade quanto à contagem, pois ao se apoiar na categoria para restabelecer a equivalência, o próximo passo é utilizar a contagem, sendo este esforço que irá conduzi-la à noção de equivalência durável, ao mesmo tempo cardinal e ordinal que caracteriza a terceira fase.

> ... para determinar uma categoria qualquer por enumeração, a criança considera isoladamente a posição qualitativa do elemento em questão e igualmente à parte o valor cardinal dos elementos que o precedem: não compreende que cada categoria é ela própria um número, nem que este número é indissociável da coleção inteira de que faz parte o elemento assim ordenado. (Piaget e Szeminska, 1981, p.167).

Durante a terceira fase acontece o que os autores chamam de "duplo progresso da correspondência", que deixa de ser intuitiva e passa a ser operatória, tanto como correspondência serial quanto ordinal, o que conduz a uma necessária conexão entre a ordenação e a cardinação.

A equivalência cardinal alcançada é fundamental para a aritmetização da correspondência serial e, as crianças, para determinarem uma categoria n, empregam toda a numeração pertinente, tanto no sentido crescente quanto decrescente.

Estes resultados deixam evidente a influência do número cardinal (e da contagem) para que a correspondência serial seja completada (demonstrando que o número intervém na constituição da série), uma vez que é somente com a equivalência cardinal que é possível a aritmetização (e a contagem), determinante na busca da categoria n e, conseqüentemente, da correspondência serial que se torna ordinal com a transformação dos elementos em unidades homogêneas e a ordem não podendo ser vicariante em função das categorias em jogo. E, então, graças à correlação entre a equivalência da cardinação (elementos homogêneos) e da ordenação desligada da qualidade, o termo n, passa a assumir

simultaneamente para a criança o duplo significado de uma soma cardinal n e a nª posição (categoria).

> ... a seriação intuitiva só se constituiria em ordenação verdadeira a partir do momento em que se torna operatória e só se torna operatória no momento em que se coordena com a cardinação. Inversamente, a coligação e a correspondência intuitiva só se transformariam em cardinação verdadeira a partir do momento em que se tornam operatórias e só assim se tornariam coordenando-se com a ordenação.(Piaget e Szeminska, 1981, p.196).

Com a constituição das operações a criança se liberta da intuição perceptiva o que representa uma "vitória" do agrupamento reversível que caracteriza as operações sobre a constatação estática inerente à intuição perceptiva e isto conduz a três importantes conquistas: a) a generalização das operações qualitativas; b) a diferenciação entre operações qualitativas e numéricas e c) a necessária interação entre ordinal e cardinal.

a) O próprio dos agrupamentos é a reversibilidade e é exatamente quando as relações envolvidas se tornam reversíveis que a criança é capaz da conservação das quantidades, da equivalência cardinal durável e de seriação operatória (coordenar as relações inversas s>r com s<t). Além disso, a criança se torna apta a realizar composições reversíveis, estabelecendo o domínio de sua lógica qualitativa.

De posse desses sistemas de composições reversíveis a criança, quando confrontada perceptivamente com uma pluralidade de elementos (como os bonecos seriados) reage de duas maneiras. Em primeiro lugar, ela pode abstrair as diferenças dos elementos e reter suas qualidades comuns, transformando-os em homogêneos, isto é, estabelece a equivalência dos elementos que conduz à construção das classes lógicas. Todavia, os elementos tornados homogêneos permanecem distintos uns dos outros (classes lógicas pressupõem conceitos em extensão), distinção esta estabelecida por uma outra qualidade que não seja a qualidade comum geradora da equivalência, e este é o ponto de vista das relações assimétricas, ou seja, o da não-equivalência.

Assim, a classe é construída pela abstração das diferenças enquanto que a relação assimétrica pela abstração das equivalências de modo que classes e relações assimétricas se complementam e é então, impossível construir classes sem relações (permitem qualificar

unesp

os elementos) e relações sem classes (permitem estabelecer os elementos ligados).

> É assim que a reunião de dois elementos A+A'=B numa classe B torna-os, por isso mesmo, equivalentes do ponto de vista da classe B, enquanto que a reunião de duas séries (A→A') + (A'→B') numa única relação A→B' acaba por seriar os termos dessas relações e não por torná-los equivalentes. Portanto é claro que as classes são fontes de totalidades hierárquicas (A+A'=B; B+B'=C, etc.) e as relações assimétricas transitivas, fontes de seriações. (Piaget e Szeminska, 1981, p.218).

A classe, todavia, é apenas uma reunião de indivíduos qualificados e não-enumerados, de modo que, embora constituindo totalidades hierárquicas, não existe ainda cardinalidade, com relacionamento parte-todo, e o uso de quantificadores lógicos como "todos" ou "nenhum". As séries obtidas também não conduzem à nenhuma ordenação real e embora a relação assimétrica (enquanto ligação entre qualidades) seja necessariamente quantificante por não conduzir à fusão dos elementos mas à sua distinção, ela não engendra o número, somente o prepara.

Desta forma, o caráter reversível das relações em jogo já permite uma quantificação, porém, pela não participação do número, esta quantificação só atinge quantidades não-redutíveis a um sistema de unidades, ou seja, intensivas.

b) Uma vez apta a realizar tais composições lógicas a criança é também capaz de extrair delas as composições numéricas correspondentes e de diferenciá-las das operações qualitativas. Esta diferenciação entre operações numéricas e qualitativas é devida ao fato de que nas operações numéricas os elementos não são mais considerados como equivalentes ou não-equivalentes (pressupõe uma qualidade), mas, simultaneamente como equivalentes e não-equivalentes ou ainda, "o número não é somente classe totalizante nem apenas relação seriante, mas, ao mesmo tempo, classe hierárquica e série". (Piaget e Szeminska, 1981, p.218).

Todavia, se levada em conta apenas a qualidade, não pode existir uma relação que seja ao mesmo tempo classe e série e, assim, para que seja possível considerar os elementos simultaneamente como equivalentes e não-equivalentes é necessário que as qualidades sejam eliminadas de forma a tornar cada elemento como unidade equivalente às outras e, então, A=A'=B'... etc. (equivalência das classes) e A→A→B'... etc., conforme a não-

equivalência das relações assimétricas. Ora, se A=A'=B'... etc., a reunião A+A'=B se torna A+A=2A; B+B'=C; se transforma em 2A+A=3A e assim, sucessivamente, constituindo, portanto, a iteração da unidade.

c) Os resultados até aqui permitem afirmar que o número é um sistema de classes e séries fundidas num todo operatório e que, embora tendo suas fontes na lógica, é irredutível a ela. Além disso, um número cardinal pode ser definido como uma classe constituída de elementos concebidos como unidades homogêneas, porém, distintas, sendo que suas diferenças consistem apenas no fato de que tais unidades podem ser seriadas e, conseqüentemente, ordenadas. Concebidos desta forma, os cardinais resultam de uma abstração da relação assimétrica tal que "essa abstração não altera a natureza de suas operações, pois todas as ordens possíveis que se possam atribuir a n termos vêm a dar na mesma soma cardinal n". (Piaget e Szeminska, 1981, p.219).

Mas, se a série é necessária para a constituição do próprio cardinal, a equivalência (classes) é imprescindível para a constituição do número ordinal e isto porque os números ordinais constituem uma série onde os termos se sucedem de acordo com relações de ordem determinadas por suas respectivas posições, permanecendo, porém, equivalentes entre si e, portanto, passíveis de reunião cardinal. Concebidos assim, os ordinais resultam "de uma abstração da classe, abstração igualmente legítima, e, por esta mesma razão, o n-ésimo termo finito corresponderá sempre a um conjunto cardinal n". (Piaget e Szeminska, 1981, p.220).

O fato de existir esta dupla abstração (da relação assimétrica e das classes), não significa que o número inteiro finito (a exemplo do número qualquer) deixa de permanecer uno ou que as totalidades e a ordem possam ser dissociadas e, mais, apenas reforçam a reciprocidade entre cardinação e ordenação, ou que "os números finitos são simultaneamente cardinais e ordinais". (Piaget e Szeminska, 1981, p.219).

Concluída uma primeira demonstração da implicação do número na constituição da série, resta demonstrar qual papel o número desempenha em relação às classes, em outros termos, deixar claro que, sem a noção de número cardinal que está implícita nos termos "um", "nenhum", "alguns" e "todos" a inclusão de classes, por exemplo, não seria possível.

unesp

> ... as classes são, portanto, num certo sentido, números não-seriados, como os números são classes seriadas, e tanto a constituição psicológica quanto a constituição lógica das classes, das relações e dos números constituem um desenvolvimento de conjunto do qual os movimentos respectivos são sincrônicos e solidários uns com os outros. (Piaget e Szeminska, 1981, p.219).

3.4 AS RELAÇÕES ENTRE CLASSES E NÚMEROS

As pesquisas do Centro Interdisciplinar de Epistemologia Genética que sucederam a *A gênese do número na criança* evidenciaram melhor a importância do número para a constituição das classes e das séries, inclusive, com estudos acerca da presença de um estádio "pré-numérico" (não apenas lógico), já no sensório-motor, ou seja, antes da classificação e seriação operatórias. Todavia, como o objetivo deste trabalho é demonstrar que a primeira obra piagetiana acerca do número é suficiente para a compreensão de que este é necessário ao acabamento das estruturas lógicas, os "novos" resultados não serão utilizados neste momento, para mostrar que:

> Em vez de querer derivar o número da classe, ou o inverso, ou considerá-los como radicalmente independentes, pode-se efetivamente concebê-los como complementares e a se desenvolver solidariamente, embora em duas direções diferentes. (Piaget e Szeminska, 1981, p.224).

Para analisar esta interdependência é necessário estabelecer os relacionamentos entre qualidade (lógica) e quantidade (número) ou seja, entre a compreensão e a extensão dos conceitos.

A existência de uma dependência mútua entre a extensão e a compreensão de conceitos lógicos é fato conhecido, pois para conceber a compreensão de um certo conceito é necessária a referência aos termos que constituem o suporte dos caracteres que a definem e estes termos são, precisamente, a extensão do conceito.

Entende-se compreensão como "conjunto de qualidades comuns sobre as quais se apóia a generalização" e extensão, como "conjunto de situações às quais se aplica a generalização". (Montoya, 1996, p.46).

É fácil ver que a compreensão se apóia na qualidade e que extensão implica quantidade, de modo que a mesma dependência mútua existente entre compreensão e extensão se verifica

entre qualidade e quantidade e, portanto, o pensamento passa, sem cessar, entre estes dois aspectos do conceito, de acordo com o contexto. Por exemplo:

> Na proposição "as aves são vertebrados" ou mesmo "as Aves são Vertebrados", é possível que a maioria dos sujeitos se limite a qualificar em compreensão, mas em "as Aves não constituem mais que uma parte dos Vertebrados", a extensão evidentemente leva a palma. (Piaget e Szeminska, 1981, p.224).

Assim, em função desta interdependência entre qualidade e quantidade é lícito esperar que, da mesma forma que a construção dos números é inseparável das classes e das séries, os manejos das operações qualitativas e numéricas também são solidários e é por essa razão que Piaget e Szeminska analisam as relações entre classes e números.

Já foi visto que as operações aditivas e multiplicativas estão implícitas na própria construção do número (iteração das unidades e multiplicação de relações assimétricas), o que implica na possibilidade, de reunir os elementos dispersos numa totalidade ou de decompor, em partes, esta totalidade. Além disso, é fato conhecido, desde Leibniz, que a lógica, tanto das classes quanto das proposições, consiste num algoritmo da parte e do todo.

A diferença existente entre este relacionamento parte/todo no que se refere a classes e números, é que, no caso destes últimos, as partes são unidades homogêneas ou frações de unidades e, no caso das primeiras, as partes são ainda classes qualificadas reunidas em função de uma qualidade comum e, devido a estes últimos elementos serem qualitativos qualquer que seja o seu número, resulta sempre numa intervenção de uma quantificação intensiva nas relações de inclusão presentes em toda composição aditiva.

Em outras palavras, sob a ótica aditiva, o todo possui, necessariamente "mais" elementos do que cada parte, dotando de significação quantitativa os termos "um", "nenhum", "alguns" e "todos", inerentes a toda combinação de classes. Porém, isto é equivalente a dizer que a classe precisa do número para completar sua construção. Ou, ainda de outra forma, sem a presença dos quantificadores intensivos (que por sua vez somente são compreendidos quando da conservação das quantidades) a criança não é capaz de conceber as relações de parte/todo no domínio da classificação não construindo, portanto, a inclusão hierárquica das classes.

unesp

Piaget e Szeminska estudaram então, a inclusão das subclasses (classes parciais) numa classe total, analisando a ligação dos determinantes lógicos essenciais "alguns" e "todos", com o objetivo de deixar evidente que a quantificação é inerente a toda adição, inclusive a das classes.

Para isso, consideraram uma classe lógica B (constituída por uma coleção de objetos individuais), passível de ser definida por compreensão (em termos qualitativos) e A, uma subclasse de B, também definível por compreensão. O problema apresentado à criança consiste em verificar se a classe B é "maior" ou tem "mais" elementos ou, ainda, é "mais numerosa" que a subclasse A.

O material utilizado já é conhecido das crianças e é constituído por contas de madeira (B) das quais a maioria é marrom (A) e poucas (duas ou três) são brancas (A'). A questão colocada é saber se a caixa contém mais contas de madeira (B) ou mais contas marrons - chamadas de castanhas pelos pesquisadores – (A).

As crianças compreendem muito bem que tanto as contas marrons quanto as brancas são de madeira e, também, a composição aditiva de classes mais elementar dada por A+A' = B. A resposta deveria surgir, então, como conseqüência do seguinte raciocínio: se A+A' = B então A = B-A' e, portanto, A<B, o que, entretanto, não acontece, pelo menos de imediato.

Procurando facilitar a compreensão da questão, os pesquisadores a tornam ainda mais intuitiva, perguntando qual de dois colares seria mais comprido, o confeccionado pelas contas de madeira (B) ou o com as contas marrons (A) ou, ainda, colocavam previamente duas caixas vazias ao lado do recipiente com as contas e se indagava da criança, caso fossem colocadas todas as contas marrons na caixa vazia, restariam contas no recipiente? E, caso as contas retiradas fossem as de madeira, mesmo assim, sobrariam contas no recipiente?

Para confirmar os resultados as provas foram repetidas variando as coleções B e A (coleção de contas azuis (B), com a maioria quadrada (A) e duas ou três redondas (A'); ou coleção de flores (B), formada por 20 papoulas (A) e duas ou três escovinhas (A') ou, ainda por 14 crianças (B) sendo 12 meninas (A) e dois meninos (A')).

As três etapas já destacadas quando da análise da conservação da quantidade e da correspondência ordinal são reencontradas no presente caso.

Durante uma primeira fase, a criança ainda não é capaz de composição aditiva, ou seja, ela não consegue pensar no todo B e nas partes A e A' ao mesmo tempo, logo, por não conceber A+A' = B, não compreende que A = B-A' e, então admite que A>B.

As diversas experiências realizadas revelaram como sistemáticas as dificuldades das crianças do período intuitivo para compreender que a classe total é "maior" ou "mais numerosa" que a classe parcial nela contida.

Os resultados mostraram que as crianças também reagem de maneira diferente em relação às diversas coleções, isto é, na questão onde B = crianças e A = meninas, apresentam uma maior facilidade do que na das contas, com a coleção das flores podendo ser considerada num nível intermediário. Isto demonstra que o fato de designar as classes totais e parciais por nomes especiais favorece a diferenciação e a hierarquização destas, revelando a importância da linguagem e do contexto social no processo. No que se refere à questão da comparação entre a quantidade de elementos entre A e A', foram realizadas diversas provas que permitiram concluir que os fatores perceptuais pouco ou nada favorecem a inclusão hierárquica.

De maneira geral, o característico desta fase é que, apesar de compreenderem perfeitamente que B = A+A', ao serem impelidos a pensar, ao mesmo tempo, no todo e na parte, os sujeitos de idade inferior a 6 – 7 anos deixam patente suas dificuldades.

> Ou melhor, a criança quando pensa no todo consegue bem representar as partes ainda não associadas (pois, por exemplo, desenha corretamente o colar correspondendo ao todo e distingue muito bem neste todo uma vintena de contas castanhas e as duas contas brancas), mas, quando procura dissociar uma das partes, não consegue mais se lembrar do todo ou levá-lo em conta, limitando-se a comparar a parte que se ocupa à parte restante, ou seja, o resíduo do todo primitivo. (Piaget e Szeminska, 1981, p.235).

Desta forma, a relação estabelecida pela criança entre parte e todo não é ainda quantitativa, nem mesmo intensivamente e, portanto, não é também inclusão, mas, de acordo com os autores, uma "participação qualitativa" e assim, as totalidades consideradas seriam apenas "agregados sincréticos" e não ainda classes lógicas.

unesp

Por não compreender que "todos" os A são B; "alguns" B são A; nenhum A é A', a criança ao comparar A com B, o faz de maneira intuitiva e não operatória. Desta forma, a totalidade B = A+A', dividida em duas partes (realmente ou em pensamento) não existe mais perceptivamente em si mesma, isto é, o sujeito percebe, separadamente o todo B ou cada parte A e A', mas não B e A ou B e A' ao mesmo tempo e, então, ao comparar A e B, com A separado de B, confunde o todo B com a parte que sobra A', ou seja, B se dissolve.

Por não estabelecer corretamente a relação de inclusão, a criança desta primeira fase substitui o encaixe em extensão das classes, por simples relações intuitivas das coleções qualificadas e, exatamente por permanecerem intuitivas e dependentes da percepção, tais ligações não conduzem a nenhuma conservação das totalidades lógicas, repetindo os resultados encontrados no plano numérico.

Em outras palavras, tanto no plano numérico como no lógico, "as totalidades não se conservam e isso por falta dessa reunião *sui generis* das partes num todo, síntese na qual consiste a composição aditiva comum aos conjuntos numéricos e à classes". (Piaget e Szeminska, 1981, p.241).

Na segunda fase, a criança consegue por tentativas e não por composição imediata chegar à resposta correta, o que caracteriza uma descoberta ainda intuitiva e não dedutiva.

As crianças desta segunda fase, a exemplo das da primeira fase, começam por considerar que as contas marrons são mais numerosas que as de madeira ou, que ambas coleções são iguais. Lembram-se, depois, que as contas brancas são também de madeira e então, concluem que "há mais" de madeira, deixando evidente que só quando conseguem pensar ao mesmo tempo na cor (A e A') e na substância (B) das contas é que alcançam a composição aditiva e a inclusão adequadas.

As crianças da terceira fase conseguem, espontaneamente e de imediato (ou quase) pensar, ao mesmo tempo, na classe total B (caracterizada pela qualidade b = substância) e na classe parcial A (definida pela qualidade a = cor) de onde concluem que "todas" as A são também B, mas que em B estão também as A', ou seja, que "alguns" B são A e "alguns" B são A', compreendendo, finalmente que B = A+A' e que A = B-A'.

unesp

Como o que se pretende é evidenciar o papel da quantificação no desenvolvimento das totalidades lógicas importa agora analisar, porque as crianças da primeira fase fracassam, enquanto que para as da terceira fase, a conclusão correta emerge de forma simples e necessária.

Para isso é preciso distinguir dois problemas: o da síntese das qualidades b e a ou a' e o da adição em extensão (quantidade) A+A' = B.

Numa adição de classes A+A' = B, B é a menor das classes que contém A e A', ou seja, que é definida pela qualidade b, comum aos A e aos A' e, portanto, cada elemento da classe resultante B pertence necessariamente a duas classes ao mesmo tempo, o que implica numa multiplicação lógica dessas classes, com "todos" os A apresentando as qualidades ab, "todos" os A' são a'b enquanto que "alguns" B são ab e "alguns" B são a´b.

Duas explicações equivalentes podem ser aferidas do acima exposto, para o fracasso das crianças da primeira fase: uma, consiste em afirmar que tais sujeitos não conseguem pensar nas qualidades a e b ou a' e b ao mesmo tempo e a outra acentuaria a dificuldade da própria adição lógica (quando a parte A é dissociada do todo B, B se dissolve). Entretanto, isoladamente, nenhuma das explicações é suficiente para justificar as respostas próprias deste nível. Para Piaget e Szeminska (1981), é indiferente dizer que a síntese aditiva fracassa devido à ausência de multiplicação lógica ou que a síntese multiplicativa fracassa devido à ausência de adição lógica.

Lembrando que na multiplicação lógica o que está implícito é a qualidade e na adição em extensão A+A' = B é a quantidade, o que está, então, em jogo, é uma implicação recíproca entre qualidade e quantidade; entre compreensão e extensão, ou, de maneira mais apurada, de classe e número.

Assim, a verdadeira razão que inviabiliza esta mútua implicação é a irreversibilidade da percepção atual, fundamento dos julgamentos das crianças da primeira fase, o que lhes impossibilita tanto a coordenação das qualidades quanto a inclusão aditiva e a coligação aritmética.

De acordo com os resultados das pesquisas realizadas por Piaget e Szeminska (1981), é a presença da mobilidade e reversibilidade nas construções realizadas que possibilitam a

decomposição e recomposição das coleções, isolando suas diversas implicações, inclusões e relações em geral, de modo que a irreversibilidade, tanto do pensamento, quanto da representação da criança inviabiliza a decomposição necessária à análise e à síntese e, em conseqüência, à compreensão das inclusões e das relações.

> Ora, essa irreversibilidade psicológica se traduz, no plano lógico, pelo efeito seguinte, que é de importância fundamental. Conceber as partes em função do todo e reciprocamente é compor simultaneamente as duas igualdades A+A' = B e A =B-A' e, portanto, é efetuar a operação inversa, tanto quanto a operação direta. Pensar de maneira irreversível, ao contrário, é não saber passar de uma destas operações para a outra, é, portanto, em poucas palavras, não saber manejar as operações como tais: é substituir um mecanismo operatório móvel e de direção dupla pelas percepções estáticas e sucessivas de estados que é impossível sincronizar e, conseqüentemente, conciliar. (Piaget e Szeminska, 1981, p.247).

A discussão acerca da reversibilidade é fundamental para a compreensão da mobilidade do pensamento, uma vez que as análises anteriores poderiam levar à falsa idéia de um pensamento traduzido por um esquematismo estático das inclusões silogísticas. Ao contrário, cada raciocínio é uma construção reversível e, para cada tipo de construção corresponde um tipo de raciocínio.

Por exemplo, da mesma forma como um raciocínio matemático (algébrico, aritmético ou geométrico) consiste em combinar objetos (símbolos, números ou figuras) mediante cálculos ou construções espaciais, o raciocínio classificatório combina os objetos por meio da adição e multiplicação lógicas, entre outras operações, agrupando tanto os objetos, quanto as classes, em sistemas hierárquicos ou, ainda, dissociando-os, uns dos outros.

Para os autores, descrever as dificuldades das crianças em termos da reversibilidade não apenas manifesta a homogeneidade do mecanismo operatório de construção das classes e dos números, como também, acrescenta uma "terceira dimensão a uma imagem plana", movimentando os termos estáticos da descrição. (Piaget e Szeminska, 1981, p.248).

Resta agora compreender como se constitui o agrupamento das classes, em que estes diferem dos grupos numéricos e, quais são as relações entre estes sistemas.

O agrupamento das classes é constituído em função da composição aditiva e, assim, os elementos (A+A' = B) e (A = B-A'), pertencem a quaisquer agrupamentos de classes.

i) A partir daí, se B⊂ C; C⊂D; etc., são possíveis as composições do tipo B+B' = C; C+C' = D, etc; ou seja, existe o fechamento;

ii) As operações inversas são: D-C' = C; D-C = C'; C-B = B' ou C-B' = B, etc., o que caracteriza a presença do elemento inverso;

iii) Cada termo desempenha o papel de elemento idêntico em relação a si e em relação aos de ordem superior de mesmo sinal, isto é: A+A = A e A+B = B (idempotência)

iv) Além disso, $(A+A') + [(B+B') + (C+C')] = (A+A') + [C+D] = B+D = D$ e

$[(A+A') + (B+B')] + (C+C') = [B+C] + D = C+D = D$, de onde:

$(A+A') + [(B+B') + (C+C')] = [(A+A') + (B+B')] + (C+C') = D$;

ou seja, a composição aditiva de classes é associativa.

De i), ii), iii) e iv), conclui-se que a composição aditiva define um "agrupamento" no conjunto das classes e é exatamente a idempotência (tautologia) que opõe os agrupamentos de classes em relação aos grupos numéricos, pois nos primeiros, a "iteração" (1+1 = 2) que caracteriza os segundos não é possível.

Do ponto de vista psicológico, a classe A é constituída pela reunião de elementos que apresentam em comum a qualidade a, sem que nada seja estabelecido em relação ao número de elementos de A.

Assim, se A+A' = B e se as classes A+A' não são vazias, as únicas informações que se tem acerca de números de elementos são:

- B tem "mais" elementos que A e que A' (e as recíprocas);
- "todos" os A são B e "todos" os A' são B;

- "nenhum" A é A' e "nenhum" A' é A;
- "alguns" B são A e "alguns" B são A'.

Em outras palavras, a classe em extensão permite apenas as quantificações intensivas, ignorando a quantificação extensiva que caracteriza o número, e está completamente estabelecida a diferença entre os agrupamentos de classes e os grupos numéricos, restando analisar as possíveis relações entre eles.

Como já foi visto, a solução clássica de Bertrand Russell, mostrou-se insuficiente para resolver a questão pois a correspondência biunívoca construída para estabelecer a igualdade entre duas coleções é qualquer e, portanto, pressupõe o número. A solução piagetiana, ao contrário, apresenta o número como uma síntese das classes e das relações assimétricas (irredutível a elas), constituindo um novo todo operatório.

Assim, duas condições são necessárias e suficientes para a síntese do número, a saber: se "A+A' = B e se, ao mesmo tempo, B= A→A' (com A e A' sendo vicariantes, isto é, podendo os seus conteúdos ser intercambiados), então B = A+A = 2A" ou seja, o "número é ao mesmo tempo uma classe e uma relação assimétrica, com as unidades que o compõem sendo simultaneamente adicionadas enquanto equivalentes e seriadas enquanto diferentes umas das outras". (Piaget e Szeminska, 1981, p.252).

Tal fusão, todavia, não é possível num sistema de lógica qualitativa, pois, a composição aditiva das classes é comutativa, enquanto que, por se referir às diferenças, a seriação não é comutativa.

O número só será possível com a generalização (caráter geral da matemática) da equivalência (unidades homogêneas) e da seriação (vicariante), generalização que resulta da igualização das diferenças, tudo isto, simultaneamente.

Ao conseguir tornar móveis os julgamentos intuitivos, a criança alcança a reversibilidade inerente às operações, tornando-se, ao mesmo tempo, capaz de incluir, de seriar e de enumerar.



Logicamente, este sincronismo é explicado pelo fato de que o número resulta da fusão, num mesmo todo operatório, da classe e da série. Todavia, tal sincronismo pode ser também justificado psicologicamente:

> ... por um lado, sendo cada número uma totalidade nascida da reunião de termos equivalentes e distintos, é preciso simultaneamente incluir e seriar para constituí-lo; por outro, se a quantificação intensiva própria às classes (A<B<C etc.) não implica os números particulares para se concluir, supõe, entretanto, que o sujeito seja capaz de construir estes últimos sem o que as relações de extensão perdem todo sentido concreto. (Piaget e Szeminska, 1981, p.253).

Em outras palavras, se o número tem sua fonte nas classes, esta última, apóia-se no primeiro, de forma implícita, como referência visual constante, envolvendo a rede das extensões, sendo então, não apenas solidários e complementares, mas, também, interdependentes.

3.5 AS RELAÇÕES ARITMÉTICAS: AS COMPOSIÇÕES ADITIVA E MULTIPLICATIVA DOS NÚMEROS

Freqüentemente se fala "das quatro operações fundamentais" da aritmética: a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão, todavia, elas podem também, serem consideradas como duas, a adição e a multiplicação, já que a subtração e a divisão são suas respectivas inversas surgindo como conseqüências das operações diretas.

Além disso, para que a construção do número inteiro positivo se complete é preciso ainda, que a criança descubra as operações de adição e de multiplicação. Na verdade, estas operações não apenas estão implícitas no número como tal, como também o engendram (particularmente a adição, mediante a iteração das unidades).

Já foram estabelecidos os papéis das classes e das séries na constituição do número e, reciprocamente, do número na constituição das classes e das séries, de modo que uma quantificação bruta, em termos de "mais", "menos" e "igual", leva a uma classificação primitiva que possibilita a descoberta dos pré-números, um, todos, nenhum e alguns, que engendram a inclusão de classes a qual, em conjunto com uma seriação simples (ordem vicariante), engendram, numa síntese, a equivalência das quantidades (cardinal), que

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

colabora com a construção operatória da seriação (correspondência ordinal), sem se analisar ainda, a sucessão numérica, que se origina da iteração das unidades.

Todavia, mesmo em se tratando de operações propriamente ditas (adição e multiplicação), o sincronismo se repete, ou seja, a adição e a multiplicação das classes e das séries, se constituem, de forma sincrônica e interdependente com a dos números, de modo que a recomendação da realização de operações lógicas, como às vinculadas à teoria de conjuntos, de reunião de coleções, por exemplo, antes das relacionadas às operações numéricas, não possuem respaldo teórico na psicogenética.

> Precisemos unicamente que, no caso das operações multiplicativas, como no das adições, a composição qualitativa das classes não se constitui no plano operatório antes da dos números, mas ao mesmo tempo. Não existe uma fase da multiplicação lógica e uma fase da multiplicação aritmética: no decurso de uma primeira fase, nenhuma dessas composições é possível; no decorrer da segunda, ambas se esboçam num plano intuitivo, mas sem conclusão operatória e, no decurso da terceira, ambas se constituem em operações propriamente ditas, donde o sucesso simultâneo das diversas provas estudadas neste capítulo e a generalização imediata da multiplicação, assim que é descoberta. (Piaget e Szeminska, 1981, p.299).

3.5.1 A composição aditiva

Para estudar a composição aditiva de ordem numérica o caminho seguido foi o de "prosseguir a análise da construção do número, ultrapassando os dados da colocação em correspondência, para estudar o papel do próprio mecanismo operatório aditivo". (Piaget e Szeminska, 1981, p.254).

Com este objetivo, os pesquisadores empregaram, sucessivamente, três técnicas paralelas. A primeira busca verificar se a criança é capaz de compreender que diferentes composições aditivas envolvendo as partes de um todo não alteram sua identidade e as composições aditivas utilizadas nas provas são referentes ao todo 8 (oito), ou seja, as diferentes formas de se "escrever" o número 8: (4+4) = (1+7) = (2+6) = (3+5), sendo observadas três tipos sucessivos de respostas.

Numa primeira etapa, os conjuntos (7+1) e (4+4) não são concebidos como equivalentes; numa segunda, considerada intermediária, a igualdade entre os conjuntos é estabelecida

mediante uma verificação empírica (correspondência ou contagem) e na terceira, a equivalência existe por composição ativa.

Os resultados das provas realizadas segundo este primeiro método possibilitam verificar que para as crianças pequenas, o valor cardinal de um número não é o resultado imediato de uma composição aditiva, mas, é constituído por um todo intuitivo.

A segunda técnica é aplicada para completar a análise da composição aditiva mediante o emprego espontâneo, por parte das crianças, das operações de igualização de diferenças e consiste em compará-las à operação complementar da repartição.

Para isso, apresenta-se à criança duas coleções desiguais de fichas (8 e 14) e lhe é solicitado para que as transforme em duas coleções iguais e os resultados de uma maneira geral, são os seguintes: numa primeira fase, as crianças não relacionam as duas coleções entre si, avaliando-as globalmente, ou seja, não entendem que "acrescentando fichas ao monte pequeno, elas por isso mesmo as retiram do grande". Na segunda fase, a criança conclui a tarefa, mas, no plano intuitivo, através da igualização das figuras por sucessivos tateios empíricos e, finalmente, durante a terceira fase, a "criança procede por via de correspondência e composição operatórias". (Piaget e Szeminska, 1981, p. 256).

O terceiro método empregado é o da repartição e somente complementa os anteriores. Apresenta-se um monte de fichas para a criança e lhe é solicitado para que faça duas partes de modo que cada uma tenha a mesma coisa que a outra. Os resultados obtidos indicam fases paralelas às anteriores.

A presença de três etapas na evolução da composição aditiva deve-se, também, à construção da reversibilidade, uma vez que a adição é uma operação reversível. Todavia, ela não é de saída reversível, ao contrário, na primeira fase, a criança não consegue compreender que uma totalidade B, apesar de dissociada em duas partes A e A' continua a ser a mesma totalidade.

Graças a sua reversibilidade (que implica na operação inversa, a subtração), a adição está constituída não apenas quando as parcelas são reunidas num todo, mas, também, quando este todo é considerado como invariante, independentemente da disposição das partes.

unesp

Em outros termos, seja $B_1 = A_1 + A_1'$ e $B_2 = A_2 + A_2'$, de modo que: $B_1 = B_2$; $A_1 > A_2$ e $A_1' < A_2'$. A composição aditiva estará concluída quando a criança for capaz de coordenar as relações em jogo e descobrir que A_2 pode ser obtida a partir de A_1, pela subtração de alguns elementos e que A_2' resulta de A_1', pela adição dos mesmos elementos, de forma que as duas transformações são compensadas.

Assim:

$$(A_1 - A_2) = (A_2' - A_1') \Rightarrow A_1 + A_1' = A_2 + A_2' \Rightarrow B_1 = B_2.$$

É importante notar, todavia, que a quantidade de elementos das coleções envolvidas não desempenham papel algum nas transformações efetivadas (a menos de comparações das coleções), de modo que a quantificação presente é a intensiva e não ainda extensiva ou numérica.

Esta quantificação intensiva se tornará extensiva ou numérica, conforme já foi visto, somente quando os elementos dessas várias coleções passarem a ser concebidos como unidades simultaneamente homogêneas e seriáveis assinalando assim, a passagem da adição de classes para a adição numérica.

> Em resumo, cada subconjunto é concebido relativamente ao outro e ambos relativamente a sua soma: as relações em jogo formam, desde logo, um sistema operatório tal que o todo, tornado invariante, resulta de uma composição por adição das partes e estas, graças às subtrações e adições combinadas mantêm entre si relações univocamente determinadas. (Piaget e Szeminska, 1981, p.261).

As provas referentes à segunda técnica objetivam uma melhor análise (e complementação) da igualização das diferenças, o que equivale a estudar a solidariedade entre a operação direta (adição) e sua inversa (subtração), necessárias para a compreensão da invariância de um todo formado por composição aditiva.

Nesta técnica a ênfase está em buscar a igualdade de partes desiguais sem referência à totalidade como tal (a criança é livre para usá-la ou não).

As etapas da evolução da igualização das partes são: avaliação global; correspondência qualitativa e correspondência biunívoca e recíproca, ou seja, as mesmas fases da equivalência cardinal.

Durante a primeira fase, a criança apenas retira fichas do monte maior (14) e as acrescenta ao menor (8), comparando-as perceptualmente e não compreende a composição necessária entre as operações realizadas. Na segunda fase, ela "descobre" esse equilíbrio, porém, somente no plano intuitivo, mediante a composição de figuras construídas espontaneamente por ela e, na terceira, é capaz de manejar operatoriamente as transferências e, logo, de uma reversibilidade.

Os resultados das provas mediante a segunda técnica corroboram as conclusões anteriores de que "as operações da adição e da subtração numéricas não se afirmam como operações a não ser a partir do momento em que são componíveis numa construção reversível ou grupo", grupo este definido por (**Z**,+), ou seja, o grupo aditivo dos números inteiros. (Piaget e Szeminska, 1981, p.268).

Em relação à última técnica utilizada (repartição em duas quantidades iguais) as fases encontradas são as mesmas anteriores. Pode parecer estranho uma prova que analise a composição aditiva por meio da "repartição" por esta última parecer ser originária da composição multiplicativa, todavia, qualquer todo é constituído por suas duas metades, sendo a igualdade A+A = 2A possível de ser estudada enquanto aditiva.

O objetivo pretendido pelos pesquisadores era verificar o processo utilizado pela criança para transformar a operação lógica (intuitiva ou operatória) B = A + A', numa operação numérica $A_1+A_2 = 2A$, o que equivale a estudar como a criança consegue construir duas coleções iguais, tendo como ponto de partida a sua soma.

Na primeira fase, a criança não concebe como iguais o todo e a soma das partes e, tampouco, a equivalência durável entre as duas metades (mesmo se as constitui por distribuição termo a termo), porque seus julgamentos se fundam na percepção da avaliação global.

Na fase intermediária a composição qualitativa das figuras constituídas após a distribuição termo a termo entre as duas coleções permite a repartição em duas metades iguais, porém,

sem equivalência durável, de modo que, não se pode, portanto, "falar ainda de composição aditiva, mas, unicamente de comparações, reuniões ou dissociações intuitivas". (Piaget e Szeminska, 1981, p.271).

A terceira fase caracteriza-se pela composição aditiva propriamente dita, em função da igualdade durável das metades consideradas como unidades e a equivalência de sua soma com o todo inicial. Este mesmo mecanismo proporciona a compreensão da passagem da composição aditiva à composição multiplicativa, uma vez que a multiplicação de números inteiros positivos nxm é uma eqüidistribuição de n coleções de m termos ou m coleções de n termos biunivocamente correspondentes entre si, ou seja, é equivalente a uma adição de n parcelas cada uma constituída por m termos ou vice-versa.

> Do mesmo modo a adição das classes A+A' = B, estudada no capítulo anterior, implica, uma vez constituída (ou por se constituir), uma multiplicação Bx(A+A') = BA+BA', significando que cada conta considerada é, ao mesmo tempo, de madeira (B) e castanha (A) ou não-castanha (A'). Daí a divisão lógica que a abstração ou dissociação das classes, ou seja, AB : B = A, e a divisão aritmética 2A : 2 = A, de que acabamos de ver um exemplo, com a partilha. (Piaget e Szeminska, 1981, p.271).

Em resumo, as composições aditivas e multiplicativas (lógicas ou numéricas) são solidárias entre si, isto é, a construção psicológica de uma implica a da outra.

3.5.2 A composição multiplicativa

A técnica utilizada para o estudo das composições multiplicativas é um prolongamento das experiências realizadas anteriormente, com flores e jarros e ovos e oveiros. Para isso, após a criança haver estabelecido a correspondência termo a termo entre uma coleção de flores brancas F_1 e uma coleção de jarros J_1, lhe era solicitado que repetisse a mesma ação com J_1 e uma nova coleção de flores amarelas F_2, com o intuito de verificar se a criança compreendeu que: se $F_1 = J_1$ e $F_2 = J_1$, então $F_1 = F_2$.

A seguir era solicitado para a criança estabelecer as correspondências de modo a colocar um número igual de flores em cada jarro J. Após estar resolvida esta questão os experimentadores colocavam o seguinte problema:

> ... se, em vez de colocar duas flores em cada jarra, desejar-se colocá-las em pequenos tubos que só podem, cada um conter apenas uma só, quantos desses recipientes serão precisos para todas as flores (naturalmente tira-se estas para se deixar sobre a mesa apenas as jarras iniciais J_1, donde a solução $2J = J_1 + J_2$, em que J_2 = os tubos postos em correspondência com J_1)? (Piaget e Szeminska, 1981, p.278).

Os objetivos buscados eram estudar a correspondência biunívoca entre diversas coleções e a passagem das relações de equivalência para a multiplicação aritmética.

De fato, do ponto de vista psicológico, estabelecer a correspondência biunívoca e recíproca entre duas ou mais coleções implica, implicitamente, numa multiplicação e, estabelecê-la entre diversas coleções proporciona ao sujeito se conscientizar dessa multiplicação, de maneira a transformá-la numa multiplicação explícita.

Na constituição da correspondência entre mais de duas coleções, o que é determinante é a transitividade da relação de igualdade, ou seja, se $X = Y$ e $Y = Z$, então $X = Z$, quaisquer que sejam X, Y e Z. Esta proposição se aplica, indeterminadamente, a quaisquer conteúdos e traduz tanto a equivalência de três classes quanto a coordenação de duas relações, sendo válida seja no domínio da lógica qualitativa, seja na realidade matemática.

Embora seja independente do conteúdo (números, superficies, pesos, classes, relações, etc.), quando de seu acabamento, a construção da transitividade não se elabora, desde o início, como uma estrutura formal, ao contrário, necessita de tantas aquisições quantos forem os diferentes conteúdos aos quais seja aplicada.

De maneira geral as crianças que não conseguem estabelecer a correspondência biunívoca e recíproca, também fracassam na composição de relações de equivalência o que, de certa forma, pode parecer natural uma vez que, para compreender a composição é necessário compreender a própria equivalência. O interesse está no fato de que assim que são capazes de estabelecer a equivalência durável entre duas coleções, as crianças também estão aptas a compor as relações recém descobertas, mostrando que "as operações de ordem multiplicativa em jogo na própria correspondência são, assim que constituídas, explicitadas sob a forma de multiplicação propriamente ditas". (Piaget e Szeminska, 1981, p.281).



3.5.3 A correspondência múltipla e a multiplicação numérica

A composição das relações de equivalência que engendra a multiplicação, por ser correlativa da correspondência simples, evolui pelas mesmas três fases, quais sejam: a do fracasso (da própria correspondência e da composição); a da correspondência termo a termo sem equivalência durável e a da correspondência e coordenação imediatas.

Apenas uma observação em relação às crianças da primeira fase, é o poder que possuem de "se adaptar às palavras e às noções coletivas inerentes à linguagem ambiente", isto é, mesmo sem estabelecer a correspondência entre as coleções de flores (10) e de jarros (10), sabem contar estas flores, não sendo tal contagem, todavia, um método confiável para os sujeitos basearem seus julgamentos. (Piaget e Szeminska, 1981, p.286).

As crianças da segunda fase já são capazes de estabelecer a correspondência termo a termo sem equivalência durável e também de um esboço de composição auxiliada pela intuição e não generalizada operatoriamente. Em outros termos, mesmo tendo estabelecido que X = Y e Y = Z, não são capazes de concluir daí que X = Z, se os conjuntos não são mais percebidos visualmente ou mesmo que permaneçam visíveis, porém com configurações diferentes, ou seja, apenas estabelecem a igualdade X = Z, quando fundada numa constatação visual e não mediante uma composição operatória.

Como seus julgamentos são orientados somente pela intuição, a criança compara diretamente X e Z, sem recorrer a Y para compô-los sendo assim induzida a oscilações. Graças às sugestões contidas nas questões formuladas pelos examinadores, o sujeito começa a postular equivalências duráveis entre X e Y e, depois entre Y e Z, com as flutuações de julgamento ficando inaceitáveis de onde emerge um início de constância. "É então que a invariância das totalidades e a composição das relações de equivalência surgem assim simultaneamente como os dois aspectos da mesma realidade". (Piaget e Szeminska, 1981, p. 289).

Uma vez constituída a composição das equivalências, esta se generaliza sob a forma de correspondência biunívoca e recíproca para um número n de coleções e de multiplicação numérica, obedecendo às mesmas etapas da construção da correspondência operatória.

Na primeira fase (avaliação global), não existe sequer a correspondência termo a termo entre duas coleções e, portanto, a criança não é também capaz de compreender que duas coleções são correspondentes se correspondem a uma terceira e, portanto, não consegue efetuar multiplicações numéricas (nem mesmo duplicações).

Na fase intermediária, como já verificado em todas as situações anteriores, a criança consegue resolver o problema, mas não operatoriamente, mas por tentativas fundadas na intuição. No presente caso (necessidade da duplicação dos jarros para colocar uma flor em cada um), as crianças começam a resolver a questão da duplicação por tateios e chegam ao resultado pela correspondência e, aos poucos, vão tornando-a múltipla, mas não ainda de forma operatória e abstrata.

Em outros termos:

> No decorrer da primeira fase, a criança se limita a sentir que, se se faz corresponder simultaneamente (X+Z) a Y (quando X = Y = Z), há entre (X+Z) e Y mais que uma simples correspondência termo a termo: desde logo, para encontrar tantos potes V quantas flores (X+Z) há, contenta-se em acrescentar alguns elementos aos de V, que colocou em correspondência termo a termo com os Y. Ao contrário, quando as crianças do presente nível começam por uma correspondência termo a termo entre os V e os Y e apercebem-se que os V assim preparados não corresponderão a todas as flores (X+Z); passam então, imediatamente, do sistema "1 por 1" para o sistema "2 por 1". (Piaget e Szeminska, 1981, p.294).

É exatamente esta passagem do sistema "1 por 1" para o sistema "2 por 1" que reside o progresso de uma fase para outra, em direção à multiplicação, pois a criança passa, de nV a (n+n)V, partindo da constatação de que nY← →n2V, sem conceber, diretamente, a igualdade n+n = 2n porém, já postulando (n+n)V e não (n+n')V, com n' representando um incremento qualquer, como na primeira fase.

Todavia, esse progresso não é ainda suficiente para indicar que os sujeitos já são capazes da multiplicação propriamente dita, uma vez que ainda não dominam a composição das relações de equivalência; também não chegam à correspondência múltipla numa primeira tentativa, ao contrário, é só quando verificam a existência de um resíduo nas suas investidas para estabelecer a correspondência simples, que concluem pela passagem de n para n+n. Finalmente, se a correspondência múltipla já fosse compreendida como uma relação multiplicativa, esta seria passível de generalização para 3n, 4n ou 5n, o que não

ocorre porque o sujeito não compreendeu ainda que 2n = n+n e, mesmo a passagem de n para (n+n), se dá de forma empírica e, conseqüentemente, não generalizável.

Constatando-se então, que a equivalência por correspondência biunívoca e recíproca é uma equivalência de ordem multiplicativa e lembrando que já foi visto, anteriormente, a equivalência aditiva, verifica-se a existência de uma variedade de formas de equivalência qualitativas ou numéricas.

A passagem da multiplicação de classes para a de números se efetiva mediante processo análogo ao da passagem da adição das classes à dos números.

É importante frisar que os pesquisadores aproveitaram o momento do "fechamento" dos estudos sobre as composições aditiva e multiplicativa de classes e números, para destacar, novamente, a estreita solidariedade de construção entre classes e números.

3.6 O NÚMERO E AS RELAÇÕES ASSIMÉTRICAS

O "relacionamento" entre números e séries (relações assimétricas) é completado por Piaget e Szeminska mediante a análise das composições aditiva e multiplicativa das relações assimétricas e suas ligações com o número e o "cenário" para tais estudos é o das relações entre quantidades contínuas, com as provas prolongando as realizadas com o prolongamento das provas de transvasamentos de líquidos.

Todos os resultados anteriormente obtidos acerca das composições aditiva e multiplicativa das relações que conduzem às dos números pressupõem, necessariamente, um igualamento das diferenças e, um dos propósitos destas provas, é analisar esta igualização das diferenças "sob uma forma desenvolvida e generalizada: a da medida numérica elementar e, portanto, da medida comum e da constituição das unidades". (Piaget e Szeminska, 1981, p.301).

Além disso, tal como aconteceu com as classes, aqui também, acontece a interdependência e o sincronismo entre as composições aditiva e multiplicativa das séries e do número.

As provas realizadas objetivavam, primeiro, verificar o desenvolvimento da medida e, depois, a composição das unidades numéricas. É importante especificar que, por mais elementar que seja, a construção de uma métrica repousa sempre sobre a composição das

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

relações em jogo de forma que, a opção de se examinar em separado as questões de medida e de composição atende apenas a critérios de clareza de exposição.

Para analisar a questão do desenvolvimento da medida foram formulados três problemas, a saber: o da conservação das quantidades; o da medida numérica espontânea e o da utilização de uma medida dada.

As fases de evolução são as habituais, ou seja, uma primeira, onde não existe conservação em função do primado da percepção e na qual a criança também não chega à noção de medida comum e, se lhe é apresentada uma medida, não a leva em conta e continua avaliando globalmente.

As reações características desta fase deixam evidentes que enquanto não existe conservação de quantidades é impossível qualquer espécie de medida (quantidades não-conserváveis não são componíveis entre si). Para Piaget e Szeminska (1981), "se os termos pré-lógico ou pré-numérico possuem um sentido, é difícil não empregá-los para designar um comportamento no qual a impossibilidade da medida resulta de uma negação tão crua dos axiomas de equivalência". (Piaget e Szeminska, 1981, p.305).

Durante uma segunda fase, a criança alcança algumas transformações, embora sem generalização a todas transformações. Se instigada a medir, alcança parcialmente este objetivo, pois escolhe sempre "unidades" inadequadas e, mesmo se lhe é proposta uma unidade de medida para fundamentar seus julgamentos, não se liberta da percepção.

Em outras palavras, são reencontrados também, aqui, os caracteres gerais deste nível que aparecem em todas as provas até então estudadas: um início de conservação porém, apenas no plano intuitivo e, evidentemente, não operatória.

Por fim, quando da terceira fase, o sujeito é capaz de conservar e de medir com a utilização de unidades comuns, tudo acontecendo simultaneamente.

Pode-se concluir dos resultados anteriores que para medir é imprescindível uma lógica. De fato, medir significa, primeiramente, comparar quantidades que se conservam, é compor unidades e introduzi-las num sistema de equivalências e, o último estudo a ser realizado no livro *A gênese do número na criança*, objetiva analisar as composições lógicas e operatórias que engendram a medida, estudando: a coordenação das relações inversas; a

transitividade das equivalências e, a composição aditiva e multiplicativa de ordem numérica procedentes dessas relações.

As fases encontradas são: ausência de composição; início de composição (intuitiva e não operatória) e êxito em todas as composições elementares.

Durante a primeira fase; cujo interesse reside em confirmar (como em todas as outras situações) a inexistência de estruturas "pré-formadas", os sujeitos são incapazes de qualquer composição, tanto lógica, quanto numérica.

A segunda fase, ou fase intermediária é a mais interessante (em qualquer situação), pois possibilita a observação dos conflitos que conduzem, inevitavelmente, às construções em jogo, com o pensamento se libertando da percepção imediata e caminhando em direção à reversibilidade operatória. No caso específico, as crianças desta fase buscam coordenar as relações de altura e largura sem ainda utilizar as proporções e recorrendo à coordenação das equivalências (sem rigor dedutivo). Existe também um início de composição numérica (intuitiva), porém os julgamentos são contraditórios e presos à percepção.

Ultrapassados os conflitos, a terceira fase se caracteriza, pela construção operatória da composição aditiva e multiplicativa das relações e dos números e, ao contrário das fases anteriores, onde o primado era da avaliação perceptiva em relação às composições, estas crianças combinam as unidades de medida entre si, mediante uma igualização das diferenças e, novamente, os autores evidenciam a interdependência das noções em jogo:

> ... é no momento em que a criança se torna capaz de uma composição rigorosa das operações elementares da lógica das relações (adição e multiplicação das relações assimétricas) que obtém êxito também as provas de composição numérica, aditiva e multiplicativa ao mesmo tempo, quando essa composição versa sobre as mesmas relações. (Piaget e Szeminska, 1981, p.322)

3.7 A SÍNTESE DOS RESULTADOS:

Uma primeira observação a ser feita é que na elaboração da própria conservação já está implícita a gênese de todas as composições corroborando a afirmação dos autores contida no primeiro parágrafo da introdução do livro *A gênese do número na criança*: "todo

conhecimento, seja ele de ordem científica ou se origine do simples senso comum, supõe um sistema, explícito ou implícito, de princípios de conservação" sendo que o pensamento aritmético e mais especificamente, o número, não constituem exceções. (Piaget e Szeminska, 1981, p.23).

Todavia, as composições (mesmo em sua gênese) quando da elaboração da conservação não são percebidas pelo sujeito e, com as provas realizadas, eles são obrigados a refletir sobre elas, retirando-as de seu "estado virtual".

Uma outra observação decorrente dos resultados encontrados é que as fases da construção da conservação (ou quantificação) e as do desenvolvimento das composições aditivas e multiplicativas sejam exatamente sincrônicas.

Os resultados obtidos anteriormente deixam evidente que as classes, as séries e os números, bem como a adição e a multiplicação das classes, das relações e dos números estão implícitos na construção de qualquer classe, qualquer relação e qualquer número.

Além disso, o processo envolvido em cada uma das construções culmina com o acabamento dos agrupamentos lógicos e dos grupos numéricos, tendo tais estruturas sido construídas mediante três etapas.

Durante uma primeira, com a avaliação da criança fundamentada apenas sobre as qualidades (quantidade bruta), não existe conservação, sem composição de qualquer ordem (fechamento), sem reversibilidade (elemento inverso), sem equivalência (transitividade), sem identidade (elemento neutro), sem associatividade e, conseqüentemente, sem constituição de unidades numéricas, ou seja, não existe nem um arremedo de agrupamento lógico ou de grupo numérico.

A segunda fase se caracteriza pelo início de uma coordenação intuitiva, com as relações perceptivas começando a se coordenar não mais em totalidades globais. O sujeito começa a compreender (intuitiva e mesmo experimentalmente), a coordenação das relações inversas permitindo uma comparação ainda elementar entre dois termos, emergindo uma equivalência não durável de coleções e dando início à constituição das unidades numéricas.

> A conservação, a coordenação das relações inversas e das diretas surge, assim, necessariamente, apoiando-se umas nas outras. Por este próprio fato surgem, igualmente, certas igualdades numéricas, pois os termos equivalentes podem ser

> contados e colocados em correspondência com os outros e etc. (Piaget e Szeminska, 1981, p.325).

Entretanto, como a coordenação das relações não pode ser generalizada (por ser intuitiva) e não existe ainda um sistema de composições propriamente dito, a criança confia mais na percepção atual do que numa regra de composição.

É somente pela constituição do agrupamento aditivo das classes (inclusão hierárquica), do multiplicativo das relações assimétricas (seriação simultânea destas relações de acordo com n dimensões diferentes) e do "grupo" das adições e multiplicações numéricas, com a coordenação de todas as operações em jogo, numa totalidade fechada e reversível, tanto no plano qualitativo, quanto no numérico, que tudo se completa, da conservação, às composições.

Enfim, quando é capaz de coordenar duas relações, a criança é capaz de conservar e vice-versa. Além disso, ao se tornar apta a estabelecer uma terceira equivalência a partir de duas outras (transitividade), a criança também é capaz de generalizar, o que constitui o acabamento dos agrupamentos lógicos. Com a igualização das diferenças, as totalidades lógicas se transformam em unidades e mediante a composição, tais unidades se transformam em números.

Por último, se as operações com as classes são distintas das com as séries, pois as primeiras envolvem correspondências entre termos qualitativamente equivalentes enquanto que operar com séries significa corresponder termos não equivalentes, ao se igualar as diferenças, os termos das relações assimétricas se tornam equivalentes, de modo que é possível fundir num só todo operatório, as operações com as classes e com as séries e esta fusão, constitui as operações numéricas.

Assim é possível verificar que, desde a gênese destes três elementos, até seu acabamento final (agrupamentos lógicos e grupo numérico), o número emerge como síntese da classe e da série, ou das relações simétrica e assimétrica, ou, ainda, da igualdade e da diferença, porém, num imbricamento constante, solidário e sincrônico, o que conclui a consecução do objetivo geral deste trabalho, qual seja, a de que a construção do número não se dá de forma linear.



3.8 OS "NOVOS" (E VELHOS) RESULTADOS

Foram feitas duas opções para o desenvolvimento deste terceiro capítulo, uma, a de que não seriam utilizados resultados oriundos de estudos de Piaget e seus colaboradores que fossem posteriores ao livro *A gênese do número na criança* e a outra, a de que o período analisado seria o mesmo escolhido por Piaget e Szeminska, ou seja, o estádio pré-operatório.

As razões para a análise da construção do número ficar restrita ao período intuitivo se referem à necessidade de se estabelecer um limite, para que a análise genética não remonte indefinidamente, um limite onde existam ações possíveis de serem efetivadas algumas provas específicas.

No que se refere à regressão genética da construção do número, as pesquisas se fixam nos estádios onde é possível mostrar como as operações numéricas são preparadas pelas operações de classe e de relações, e como estas constituem os agrupamentos por composições reversíveis de ações fundadas nas coordenações sensório-motoras. É claro que se pode remontar além e afirmar que tais coordenações resultam de coordenações orgânicas o que em nada contribui para a explicação do número, daí a razão de se estabelecer um limite para esta análise regressiva, que é, no presente caso, o período intuitivo, embora a primeira etapa desta construção se encontre no sensório-motor, onde qualidades e quantidades se encontram fundidas e ainda não trabalhadas perceptualmente.

O período intuitivo caracteriza-se por um equilíbrio momentâneo e parcial entre acomodação e assimilação que embora ainda imperfeito, tende a estabilizar-se com a interiorização das ações constituída pela representação intuitiva, além de um domínio perfeito da linguagem e que possibilita uma extensa gama de provas, segundo o procedimento geral de conversação livre com a criança, dirigida, evidentemente pelos problemas colocados, mas, alterando freqüentemente a rota, sempre que as respostas das crianças assim o determinassem.

Quanto ao embasamento teórico se restringir à obra citada para evidenciar o caráter não linear da construção do número, esta opção foi feita, com a intenção de evidenciar que esta obra, sobre a qual se fundamentam as principais propostas metodológicas "piagetianas" para o ensino do número (e também as maiores críticas), é suficiente para este fim, ou seja,

os resultados nela contidos não dão margem a interpretações outras (desde que analisados em profundidade), que não a da construção solidária e sincrônica dos números, das classes e das séries.

Concluído este intento, é importante, todavia, acrescentar outros resultados das pesquisas de Piaget e seus colaboradores, que corroboram ou complementam os explicitados na obra em questão. A maioria destes resultados foi posterior a *A gênese do número na criança*, porém, são abordadas aqui, também, algumas considerações contidas no livro *O nascimento da inteligência na criança*, de publicação anterior.

Já ficou evidenciado que o número emerge como síntese das classes e das séries, em torno dos 7 anos, porém, não é apenas a partir daí que existe o número. É fato que a sucessão dos números só é possível a partir dos 6 ou 7 anos, porque se apóia sobre os agrupamentos lógicos que não se encontram ainda suficientemente elaborados nos níveis anteriores, de forma a possibilitar a iteração da unidade. Isto é devido a que, apesar de já conhecer, mediante a linguagem (interação social) uma série de conceitos (palavras-número, por exemplo), a criança de idade inferior aos 6 ou 7 anos não sabe agrupar tais conceitos logicamente por composições reversíveis.

Em outras palavras, os conceitos de caráter extensivo e métrico se constituem de forma operatória quando existem agrupamentos lógicos (de caráter intensivo) sobre os quais podem apoiar-se.

> Estes agrupamentos intensivos não precedem, necessariamente, no tempo à sua quantificação extensiva, uma vez que esta quantificação pode efetuar-se imediatamente depois da constituição daqueles agrupamentos, ou seja, ambas construções intensiva e extensiva podem apoiar-se uma sobre a outra. (Piaget, 1975, p.97).

Essa interdependência entre intensivo e extensivo ou entre qualitativo e quantitativo, entretanto, é anterior ao período pré-operatório, com a qualidade e a quantidade se apresentando como indissociáveis desde o período sensório-motor, sendo que num esquema sensório-motor já é possível distinguir a compreensão (que se apóia na qualidade) da extensão (que implica a quantidade).

Piaget (1975) exemplifica tal afirmação colocando que reunir objetos semelhantes é uma ação motora que consiste em introduzir uma certa qualificação, enquanto que reunir *mais* ou *menos* objetos é uma quantificação desta ação. Ou ainda, sacudir um objeto é uma ação caracterizada por determinada qualidade, porém este objeto pode ser sacudido mais ou menos rapidamente, com maior ou menor intensidade, etc., e estas graduações da ação constituem quantidades inerentes às relações assimétricas.

J. Feldman (1985) evidencia a importância do período sensório-motor para a construção do número ao relatar pesquisas com crianças com problemas motores que embora possuindo a inteligência, os sentidos e a linguagem preservados, apresentam dificuldades na construção dos números, particularmente, no que se refere aos quantificadores e aventa, como uma das hipóteses para isso, a impossibilidade destas crianças, em reunir de forma motora (em seus braços, por exemplo), mais ou menos objetos; em sacudir um objeto com mais ou menos intensidade, etc., em suma, de realizar ações de quantificação motora que engendram os quantificadores (números primitivos, para Piaget e Szeminska).

A partir dos 3 meses, com as reações circulares secundárias, já é possível identificar os primeiros esboços de classes:

> Perceber um objeto como algo que é "para sacolejar", "para esfregar", etc., é o equivalente funcional, de fato, da operação de classificação própria do pensamento conceitual. (...) Além disso, tal como a lógica das classes é correlativa da das "relações", também os esquemas secundários implicam uma relacionação consciente das coisas entre si. (Piaget, 1987, p.75).

Porém, as relações aqui se limitam a um mesmo esquema, são essencialmente práticas, globais e fenomenistas, não sendo, portanto, espaciais, causais, temporais, substanciais, etc. Em outras palavras, se resumem a uma simples relação prática entre o ato e o resultado observado, como por exemplo, a ação de puxar um cordão para sacudir uma argola.

Apesar de essencialmente empíricas, relações como a estabelecida entre o ato de puxar o cordão e o resultado da argola agitada já constituem, do ponto de vista formal, o começo de um sistema diferente do de apenas classificar por semelhança (por exemplo, o cordão serve para puxar), ou sistema de "classes", mas, implicará na relação entre puxar com "mais" ou "menos" intensidade de modo a obter "maior" ou "menor" agitação da argola, conduzindo

"à descobertas de relações quantitativas distintas das simples comparações qualitativas inerentes à classificação como tal", de modo que "o esquema secundário constitui não só uma espécie de conceito ou de "classe" prática, mas, também, um sistema de relações que envolvem a própria quantidade". (Piaget, 1986, p.180).

A lógica está, portanto, contida "em germe", desde os esquemas da atividade sensório-motora e perceptual do mesmo modo que, "desde as formas mais básicas da atividade mental, se observa uma espécie de enumeração intuitiva e perceptual que anuncia as coordenações ulteriores entre a classificação e a seriação", enumeração esta que já é, em sua forma primitiva, o "resultado de coordenações elementares entre esquemas classificatórios e de ordenação de caráter motor". (Piaget, 1975, p.133).

Assim, podem ser consideradas como "classes" no sensório-motor, as aplicações de um mesmo esquema a múltiplas situações, pois para isso é preciso que sejam percebidas as semelhanças entre estas situações com a presença das relações de diferenças ou semelhanças situadas na ação.

No sensório-motor, caracterizam-se como quantificações pré-numéricas, as repetições acumulativas, por exemplo, como a imitação diversa, segundo a qual a criança é capaz de reproduzir 1-2 vezes ou 4-5 vezes, o mesmo movimento.

A criança pequena (assim como os pássaros, segundo pesquisa de Otto Köhler), pode discriminar coleções de dois a seis objetos, bem antes da construção da sucessão operatória dos inteiros. Estes números são chamados de intuitivos ou figurais e é interessante frisar que em toda a obra *A gênese do número na criança* (1941), Piaget e Szeminska limitam a 3 o máximo discriminado pela criança do sensório-motor e a 4 ou 5 os números intuitivos (quase sempre 4), ao passo que na obra de 1960 (referência 1975, neste trabalho), o autor fala em 2 a 6, valores estes compatíveis com pesquisas mais atuais.

O "princípio" do número é encontrado, pois, nas ações mais elementares do sujeito, com a experiência sendo indispensável à criança (assim como o foi para o homem primitivo), para a construção do número e para a descoberta das relações aritméticas elementares.

Porém, no caso do número, a relação do sujeito com o objeto é especial, pois na experiência "numérica" o objeto desempenha um papel de suporte da ação, uma vez que

unesp

têm, para o sujeito, apenas o valor de índices perceptuais de sua ação de enumerar e não constituem elementos do número.

Um outro aspecto que merece ser destacado é que o número, em todos os níveis, não procede das ações particulares que caracterizariam um tipo especial entre outra mas, sim, da coordenação de ações. Com efeito, reunir e ordenar não constituem ações específicas como puxar, empurrar, pesar, levantar, etc., mas, são ações que resultam da coordenação de outras ações.

Tais coordenações necessitam, em seus primórdios, de objetos para se exercer e se aplicar não significando, todavia, que sua estrutura proceda do objeto como tal, ao contrário:

> Constroem estas estruturas à medida em que se desenrola seu funcionamento, começando pelos ritmos orgânicos e psicobiológicos, continuando pelas regulações perceptuais e depois intuitivas e terminando pelas operações lógico-aritméticas: término concreto final deste processo de equilíbrio (e ponto de partida das formalizações posteriores), porém que culmina num processo de coordenação que se iniciou com a organização e a assimilação psicobiológica. (Piaget, 1975, p.134).

Assim, na coordenação das ações não estão contidos, de antemão, nem a lógica e nem o número, porém, como as operações lógico-aritméticas têm sua origem na abstração a partir da ação, as coordenações que as engendram são, ao mesmo tempo, construídas e reflexivas, constituindo, em relação às operações lógico-aritméticas, um *a priori* funcional e não estrutural.

E então, Piaget (1975) ratifica a construção sincrônica e solidária, desde seus primórdios, entre classe, série e número:

> Uma vez admitida esta espécie de *a priori* funcional que é a coordenação das ações do sujeito, as operações lógicas e numéricas se constroem ao mesmo tempo, por abstração da organização sensório-motora e por composições generalizadoras dos caracteres assim abstraídos, composições cada vez mais dinâmicas e reversíveis porque cada vez melhor equilibradas. (Piaget, 1975, p.135)

Desta forma, é possível observar que, desde os níveis mais elementares da ação, a quantificação (número) está presente, em uma forma primitiva, mas que é suficiente para

deixar claro que não existe primeiro a conclusão das estruturas lógicas, para só depois emergir a do número, mas, sim, que as três estruturas, classe, série e número desenvolvem-se sincronicamente.

A propósito desta última informação, Piaget, Gréco e Grize, pesquisaram em 1958 a 1960, explicitamente as relações entre classes, séries e números, tendo em vista que a análise da construção destas três estruturas, de forma isolada, aponta que cada uma delas evoluiu por três etapas, a saber, coleções figurais, coleções não-figurais e inclusão hierárquica, para a classe; ordenação por elementos (2 a 2) e não total; seriação empírica e seriação operatória, para as séries e ausência de correspondência biunívoca, correspondência sem conservação da equivalência e correspondência operatória para o caso dos números. Os resultados comprovaram ainda, que tais etapas são sincrônicas.

Além destes aspectos foram pesquisados muitos outros, complementando, com esta obra (*Problèmes de la construction du nombre*) e mais duas outras (*Structures numériques élémentaires* e *Epistemologie mathématique et Psycologie*) e ainda, com a *Introduction a la épistemologie génetique – la pensée mathématique*, os estudos acerca da construção do número.

E, mais, pesquisadores como J. M. Hyde e J. Goodnow, controlaram as fases descritas por Piaget e Szeminska, repetindo as provas realizadas, o primeiro, com crianças árabes, indianas, somális e inglesas e, o segundo, com crianças chinesas, sendo encontrados nestas e naquelas, resultados análogos e praticamente nas mesmas idades que os obtidos em Genebra. Ving-Bang, por outro lado, padronizou os experimentos realizados por Piaget e Szeminska.

Os pesquisadores do Centro Internacional de Epistemologia Genética realizaram diversas pesquisas, com um leque de questões, como o estabelecimento das relações entre o número, a classe e a série; a análise da especificidade (ou não) do número; a importância da recorrência; a controvérsia de Russell e Poincaré; a formalização da concepção piagetiana de número e sua compatibilidade em relação à teoria dos números, ou, ainda, as relações entre a psicologia da aprendizagem e o ponto de vista operatório, etc.

É importante que, todos os resultados vieram ampliar, complementar ou corroborar os já descritos em *A gênese do número na criança*, sendo que somente os obtidos por Gréco, em

seu trabalho *"Quantité et Quotité, nouvelles recherches sur la correspondance terme-à-terme et la conservation des ensembles"*, publicado, em 1962, no vol. XIII dos Études d'épistémolgie génétique, os altera, (complementando).

Serão abordados aqui, apenas os "novos" resultados que se relacionam diretamente com os objetivos deste trabalho, quais sejam, os que estabelecem as relações entre série, classe e número e os que relacionam quotidade e quantidade.

Os resultados anteriores davam conta de que a evolução da noção de número inteiro passa, de um nível essencialmente figural aos níveis operatórios, o mesmo acontecendo com o desenvolvimento das classes e das séries. Por outro lado, as análises da conexidade numérica e da comutatividade, demonstraram que, as estruturações do número demoram muito tempo antes de se libertarem de limitações análogas às dos agrupamentos qualitativos, como por exemplo composições contíguas sem inferências à distância. Assim, é possível, então, detectar, diversas indiferenciações (particularmente nos primórdios), entre números, classes e relações assimétricas e são exatamente estas indiferenciações que possibilitam estabelecer, entre outras coisas, as relações cronológicas entre as três diferentes etapas de evolução e as ações ou interações entre as três espécies de estruturas.

Do ponto de vista cronológico, Piaget (1960), classifica os resultados encontrados nas novas pesquisas, como notáveis:

> ... o número não é construído antes das classes e das relações e nem após elas (isto é, após sua aparição ou após sua estruturação em agrupamento), porém, todos os três são construídos juntos, por etapas progressivas e sucedendo-se sincronicamente, pelas mesmas etapas de estruturação. É assim que já se encontram igualizações numéricas momentâneas por correspondência ótica ao nível onde as classificações procedem por coleções figurais e onde as seriações apresentam as estruturas análogas, enquanto que as correspondências operatórias se constituem no mesmo nível das classificações e das seriações operatórias (com avanços e recuos de uns e de outros). (Piaget, in Piaget et al., 1960, p.63).

Quanto às ações ou interações entre classes, séries e números nos níveis operatórios (uma vez constituídas as três estruturas), não foram encontrados resultados que comprovassem a existência de ações diretas entre as três estruturas, o que, por outro lado, é testemunhado nos níveis pré-operatórios, em função das indiferenciações entre elas.

unesp

> A análise genética no total (e que trata destas indiferenciações gerais ou especiais) parece demonstrar que as estruturas numéricas são proporcionalmente menos autônomas quanto mais se remonta em sua formação, embora sejam já encontrados, em todos os níveis (inclusive sensório-motor) os pré-números tanto quanto as pré-classes ou as pré-relações ... (Piaget, in Piaget et al., 1960, p.64).

Em função do exposto, Piaget (1960) conclui que a síntese que engendra o número é progressiva, com indiferenciação relativa e síntese incompleta nos níveis elementares seguida por uma diferenciação gradual e culminando com a síntese propriamente dita. Estas indiferenciações demonstram, também, o desenvolvimento solidário, interdependente, com troca de apoios, entre as três diferentes estruturas.

Enfim, se, por um momento que fosse, pairasse alguma dúvida quanto à construção não linear do número e das implicações recíprocas entre as três estruturas durante seu desenvolvimento, ao final das justificações apresentadas, fundamentadas no livro *A gênese do número na criança*, os "novos" e "velhos" resultados aqui abordados dirimem quaisquer equívocos em função de sua clareza e precisão.

Para encerrar esta pequena análise acerca dos "novos" (e velhos) resultados, resta comentar os obtidos por P. Gréco e A. Morf, e apresentados no *Structures numériques élémentaires*, de 1962, acerca das novas pesquisas realizadas por Gréco sobre a correspondência termo a termo e a conservação de conjuntos, que o levaram a estabelecer a diferença entre quantidade e quotidade.

As provas que mereceram a atenção de Gréco foram as referentes à conservação ou não do número, a partir da colocação de duas fileiras de fichas (7 a 10 vermelhas e 7 a 10 azuis), para serem colocadas, pela criança, em correspondência ótica. De modo mais específico, são apresentadas à criança, de 7 a 10 fichas azuis bem alinhadas (com as fichas estando dispostas bastante próximas uma da outra) e se solicita à criança que coloque uma outra fileira de fichas vermelhas, com o "mesmo tanto".

Foram encontradas quatro fases uma a mais que Piaget e Szeminska, com a fase determinada por Gréco podendo ser situada entre a segunda e a terceira fase descritas em *A*

gênese do número na criança e foi admitida por Piaget, conforme consta do prefácio da terceira edição francesa de sua obra principal sobre o tema, prefácio este, datado de maio de 1964:

> ... as fases sucessivas são então as seguintes: 1) a criança constrói uma fileira do mesmo comprimento, mas sem correspondência termo a termo; 2) ela consegue uma correspondência ótica exata, mas, se se espaça um pouco os elementos de uma das fileiras, a criança acredita que a fileira mais comprida adquire, por este fato, um número superior (8 em vez de 7, etc.); 3) na mesma situação, a criança pensa que o número se conserva mas que a quantidade aumenta (conservação da quotidade, mas não ainda da quantidade), com o nome numérico, pois, não sendo, ainda, mais que um meio de individualizar os elementos, mas sem que a quantidade total seja concebida como igual à soma das partes; 4) na mesma situação, há, daí por diante, conservação tanto da quantidade como da quotidade. (Piaget, in Piaget e Szeminska, 1981, p.19).

A questão da quotidade não acrescenta nada de novo às justificativas já apresentadas para a consecução dos objetivos deste trabalho, todavia, a quotidade associada ao fato de que, quando do estudo da composição aditiva das classes, nas situações em que uma classe podia ser designada e delimitada por uma palavra ou combinação de palavras, as crianças apresentavam mais facilidade e melhores resultados na solução dos problemas de inclusão hierárquica (as dificuldades continuam existindo, mas a criança "lá chega, mais cedo ou mais tarde, graças ao sistema das próprias palavras"), faz com que seja legítimo pensar que a contagem (permitindo designar coleções por palavras-números, além de interferir na constituição do aspecto ordinal, uma vez que a posição de um número na seqüência numérica depende de quantos números existam antes dele), possa colaborar, efetivamente, a partir da segunda fase, (correspondência sem equivalência durável), com a construção do conceito de número. (Piaget e Szeminska, 1981, p.229).

Em outras palavras, de posse da quotidade, a criança já é capaz de denominar numericamente uma coleção; por outro lado, coleções definidas e delimitadas por palavras que se organizam num sistema hierarquizado e incluídas umas nas outras, facilitam a compreensão da inclusão hierárquica das classes. Ora, a seqüência de palavras-número utilizadas na contagem constitui um sistema deste tipo e, se a criança for levada a refletir sobre isto, quando da contagem, esta última pode, a partir da constituição da quotidade, representar um salto qualitativo em direção à construção do número na criança.

unesp

Estas últimas considerações deixam evidente, que é possível, ao contrário do que propõem as propostas metodológicas "piagetianas", justificar, atividades de contagem, antes da constituição do número enquanto estrutura acabada, recorrendo-se à teoria estabelecida por Piaget e seus colaboradores, de maneira que, as propostas atuais, que defendem o uso da contagem, não estão "além de Piaget" e, sim, eventualmente, o pressupõem, numa compreensão mais totalizante e dinâmica da teoria.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme estabelecido no capítulo II milênios foram transcorridos desde que os primeiros hominídeos começaram a fazer uso do número, até que esta ferramenta matemática fantástica, tivesse sua natureza específica investigada sistemática e efetivamente, o que só aconteceu, a partir do século XIX. Pitágoras, na Grécia Antiga, e Kronecker, no século XIX, podem ser considerados precursores dessa investigação, porém, tanto um, como o outro, estabeleceu, como "divina" a natureza dos números inteiros, o que, evidentemente, impossibilitou maiores aprofundamentos. O questionamento acerca da natureza do número, desencadeou a famosa "crise dos fundamentos" da qual originaram as três principais correntes do pensamento matemático: o logicismo, o intuicionismo e o formalismo, com as duas primeiras apresentando definições antagônicas para o número.

Não foram, contudo, os matemáticos os únicos a se preocuparem com a natureza do número. Filósofos, lógicos e psicólogos também se debruçaram sobre o problema, de modo que um verdadeiro "caos" teórico foi instaurado, sem que nenhuma das soluções apresentadas estivesse isenta de contestações.

Tal situação, com certeza, tornava a questão interessante do ponto de vista epistemológico, justificando uma análise genética, que é realizada, a partir da segunda metade da década de 1930, por Jean Piaget e Alina Szeminska.

Em 1941 Piaget e Szeminska publicaram *La gènese du nombre chez l'enfant*, livro este que constituiu um divisor de águas no que se refere ao ensino do número e, de tal forma repercutiu, que fez com que não apenas a maneira de se ensinar número fosse questionada, mas, inclusive, se tal ensino era possível.

Todavia, como explicitado acima, a questão do ensino passou ao largo dos motivos que impulsionaram os pesquisadores.

Os resultados das pesquisas de Piaget e Szeminska conduziram à definição de número como síntese da classificação e da seriação, porém, irredutível a qualquer uma destas operações, caracterizando-se, portanto, como um *tertium* entre as definições do logicismo de Russell e o intuicionismo de Poincaré.



Face essa "descoberta", os educadores, que estavam insatisfeitos com o ensino da matemática, procuraram suas possíveis aplicações pedagógicas ao ensino do número, o que, aliás, já estava sendo realizado, de uma maneira geral, com os demais resultados da epistemologia genética (basta citar, H. Aebli, por exemplo).

É importante lembrar que, como tratamos no capítulo I, o ensino da matemática vem preocupando professores e cientistas desde o século XIX e que, a partir das décadas iniciais do século XX, intensificaram-se as discussões sobre o tema, discussões estas, que, não se encontram, absolutamente, esgotadas.

Os resultados de Piaget e Szeminska são, praticamente, contemporâneos ao maior esforço mundial realizado na tentativa de se resolver o descontentamento reinante em relação ao ensino da matemática: o movimento renovador ou "matemática moderna" que desencadeou uma grande reforma nesse ensino como um todo, em especial, no de número.

Se, anteriormente à reforma, a ênfase estava na transmissão social do conceito de número, admitindo-o como algo pré-existente, repetindo-se, exaustivamente, a seqüência numérica, com vistas à memorização, após 1970, a ênfase se deslocou para atividades de caráter lógico, particularmente, as de classificação e de correspondência termo a termo, atividades estas, que praticamente repetiam as realizadas nas experiências de Piaget e Szeminska (que não possuíam a menor intenção pedagógica). De certa forma, o objetivo para se ensinar números parece ter se transformado em preparar o aluno para realizar, com êxito, as provas descritas no livro *A gênese do número na criança.*

A matemática moderna objetivava aproximar o saber ensinado na escola, do saber desenvolvido pela ciência matemática, que admitia as definições russelianas de números cardinal e ordinal, além da utilização de bijeções para determinar a cardinalidade de conjuntos, ou, em outros termos, na definição "matemática" de número estavam envolvidos os mesmos elementos da definição piagetiana: as classes e as séries, o que proporcionava um respaldo, de natureza, digamos, psico-pedagógica para o "novo" ensino do número (o fato da primeira conceber os aspectos cardinal e ordinal do número como independentes e da segunda afirmar a indissociabilidade destes, parece não ter sido levado em conta).

unesp

A partir de então (conforme estabelecido no capítulo I), em nome de uma estreita aproximação entre a matemática moderna e a teoria piagetiana, as atividades lógicas passaram a ser consideradas fundamentais à construção do número, como integrantes essenciais de uma etapa anterior ao advento do número (e, portanto, "pré-numérica"), etapa esta, eminentemente lógica e onde não seriam pertinentes atividades de caráter numérico, em particular a contagem, que, careceria totalmente de significado antes que a "síntese" das classes e séries estivesse completada.

No capítulo III ficou demonstrado que essa é uma interpretação equivocada da teoria de Piaget sobre a construção do número, uma vez que uma leitura mais atenta constata que esta se processa solidária e sincronicamente com a das classes e das séries. Não existe, portanto, nos resultados das pesquisas piagetianas nada que indique a presença de um estágio eminentemente lógico antecedendo ao numérico. Ainda mais, o número não existe somente a partir da síntese, pois, desde o período sensório-motor (a partir das reações circulares secundárias), já é possível perceber a presença de quantificação e, portanto, do número (primitivo, é verdade, mas, número).

Em resumo, o privilégio outorgado, nas propostas educativas às atividades de classificação, de seriação e de estabelecimento de correspondências termo a termo não é passível de ser justificado a partir dos estudos de Piaget e Szeminska.

Recentemente, a ausência de atividades numéricas (ou, pelo menos, a de ênfase nelas) na educação infantil está sendo questionada por diversos estudiosos que defendem que tais atividades podem e devem estar presentes neste nível de ensino e mais, pesquisas evidenciaram a importância da contagem no desenvolvimento da noção de número na criança. Tais resultados produziram questionamentos à teoria piagetiana, com críticas como por exemplo, a de que Piaget e Szeminska "relegaram" a contagem a um segundo plano, ou, ainda, conforme estabelecido no capítulo I, que as recentes pesquisas realizadas estariam "além de Piaget", ultrapassando-o, portanto.

Sendo a contagem um conhecimento com características sociais, um "componente verbal" do número, existe um "algo" mais embutido na crítica ao alegado "desprezo" dispensado pelos pesquisadores ao papel da contagem na construção do número. O que parece é que se pretende retomar, em novo cenário, a antiga crítica endereçada à epistemologia genética sobre o suposto descuido com o fator social na construção do conhecimento.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

O que desperta a curiosidade é que nenhum dos pesquisadores procurou verificar se suas premissas eram verdadeiras, ou seja, se realmente Piaget e Szeminska afirmam que o papel desempenhado pela contagem na construção do número é secundário e, mais, se o "banimento" dos números dos currículos infantis justifica-se pela teoria piagetiana.

É fato que a responsabilidade sobre a reforma do ensino de matemática realizada em 1970. pode ser atribuída aos resultados de Piaget, pois estes deixaram evidente que o ensino, particularmente o do número, tal como era realizado, era ineficaz. O que não pode ser, todavia, imputado aos estudos de Piaget e seus colaboradores, é como tal reforma foi realizada e, menos ainda, a responsabilidade pelo privilégio outorgado às atividades lógicas em detrimento das atividades numéricas, na educação infantil.

Todavia, o que acontece é que, a maioria dos pesquisadores não apenas atribui a Piaget a "responsabilidade" pelo ensino do número pós reforma de 1970, como também postula que, se Piaget e Szeminska minimizaram o papel da contagem, o fizeram, entre outras razões, por não considerarem o conhecimento anterior da criança, ou, (e esta justificativa é a mais freqüente), por, não valorizarem a contribuição da interação social na construção dos conhecimentos.

Os fatos constatados, sobretudo no capítulo III, mostram que tais interpretações não são verdadeiras. Ficou evidente, no decurso deste capítulo, que não existe uma fase anterior à organização numérica e nem um "pré-requisito" necessário para a construção do número, pois, mesmo a conservação de quantidade, tantas vezes invocada como necessariamente antecedendo ao número, se constitui, segundo o que as pesquisas demonstraram, ao mesmo tempo em que acontece a própria construção da quantidade.

Além disso, apenas do fato de Piaget e Szeminska não terem privilegiado em suas pesquisas a análise mais detalhada do papel desempenhado pela contagem na construção do número não se pode concluir que não o consideravam importante, ao contrário, o que se depreende é que este aspecto deveria ser estudado com maior profundidade, sendo, inclusive, comprovado pela seqüência das pesquisas realizadas pelos colaboradores do Centro Internacional de Epistemologia Genética, como P. Gréco, JB Grize, A. Morf, em particular.

unesp

Por outro lado, no que se refere ao papel da interação social no caso particular do número, é preciso ficar claro que o objetivo dos autores era estudar a psicogênese deste conceito e, portanto, tal questão não é explicitamente abordada no texto *A gênese do número na criança*. Entretanto, o conjunto da obra do mestre genebrino deixa claro que, embora a existência de um sujeito epistêmico, que constrói universais, esteja comprovada, a construção do conhecimento só é possível a partir das relações que o sujeito estabelece com os objetos (incluídas aí, as pessoas, as idéias, a cultura, etc.), o que significa, obviamente, uma interação com o meio (inclusive social).

Não se pode, também, desprezar importantes constatações que estão implícitas no livro em questão e que se referem à interação social, como no caso da análise das composições aditivas, com as crianças apresentando maior facilidade para incluir hierarquicamente, em situações em que as classes em jogo podiam ser designadas e delimitadas por uma palavra ou sistemas de palavras, demonstrando que o "conhecimento social" pode colaborar com as construções lógicas.

Como a seqüência de palavras-números utilizada na contagem constitui um sistema que representa "classes" embutidas, acredito que este é um ponto que poderia ser investigado mais profundamente, de modo a justificar, agora mediante a teoria piagetiana, a importância da contagem na construção do número. Uma outra situação que poderia, também demandar uma pesquisa específica, é a relatada quando das experiências acerca da correspondência ordinal, quando as crianças já apresentam uma equivalência cardinal, não durável e, uma vez desfeita a correspondência visual, as crianças acreditam que podem restabelecer a equivalência "perdida", recorrendo às categorias. Parece que neste momento, também, a contagem pode possibilitar um "salto" qualitativo. Estes, são, porém, possíveis temas para outras pesquisas.

Finalmente, uma vez estabelecido que considerar atividades lógicas como pré-requisitos exclusivos para a construção do número é um "uso" equivocado ou mesmo inadequado dos resultados de Piaget e Szeminska, significa abandonar tais atividades e se retornar ao ensino de número, tal como era anteriormente à reforma de 1970?

Seguindo o exemplo de Piaget, o que acredito ser recomendável, é o estabelecimento de um *tertium*.

unesp

Não se defende aqui, nem que a criança já tenha construído o número antes de usá-lo (como preconizava a reforma) e, nem que a criança deva usá-lo, exaustivamente antes de poder "pensar" o número (como fez a humanidade e ficou demonstrado no capítulo II), ou seja, nem a redução às atividades lógicas e nem às numéricas. Tanto as atividades lógicas, quanto as numéricas podem ser importantes, desde que realizadas adequadamente e, o que é inegociável é a solidariedade entre elas que deve ser procurada e evidenciada quando do desenvolvimento das atividades em sala de aula.

Para não perderem o objetivo principal de serem efetuadas, que é o de possibilitar o desenvolvimento do pensamento lógico, as atividades de classificação e seriação devem ser realizadas, preferencialmente, com materiais manipulativos ou em situações significativas; também deve ser evitado o tratamento como "conteúdos específicos" a serem trabalhados (ensinar denominações, do tipo "o conjunto das maçãs", etc.).

Assim, não devem ser enfatizadas atividades do tipo "contornar coleções de objetos", ou de "ligar" objetos qualitativamente homogêneos, como forma de comparar quantidades e outras similares, devendo ser privilegiadas as que se relacionem à descoberta de regularidades (que permitem, trabalhar, simultaneamente com diferenças e equivalências), ou de lei de formação de padrões geométricos (misturam qualidade e quantidade), por exemplo.

Atividades numéricas podem e devem ser realizadas sincronicamente com as de caráter lógico, o que significa levar em conta as competências numéricas iniciais dos alunos, lembrando que, mesmo sem ter completado a construção do número, a criança pode empregá-lo parcialmente e deve ser estimulada a usar seus conhecimentos e discutir com seus pares os resultados encontrados.

Esse "estimular", porém, relaciona-se com o estabelecimento de situações significativas em que a utilização da contagem seja muito mais uma escolha da criança do que a necessidade de "obedecer" a alguma determinação prévia e arbitrária do professor.

Com esse enfoque, atividades em que se supõe que o número possa ser depreendido dos objetos, como se fosse um conhecimento de natureza física, não são importantes para o desenvolvimento da noção de número.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

É verdade que a aprendizagem acontece o tempo todo e na maioria das situações, inclusive observando, imitando e repetindo as ações do professor, mesmo quando se trata de manipulação; porém, é a postura do professor, que não deve jamais se esquecer que tudo deve ser considerado na perspectiva operatória, para que a qualidade da aprendizagem seja melhorada.

É preciso que se tenha clareza de que o mecanismo envolvido na construção do conhecimento matemático, como já evidenciado no tópico *"a questão do formal e do fato no conhecimento matemático"* é a abstração reflexionante e, portanto, não envolve apenas os objetos como tais ou as próprias ações do sujeito no seu aspecto material, mas, sim, retira sua substância das coordenações de ações do sujeito, mesmo que ainda inconscientes.

Além disso, os objetos em si, particularmente no caso do número, são coadjuvantes do processo, uma vez que suas qualidades particulares são abstraídas para a constituição das unidades, atuando, portanto, apenas como índices perceptuais para o ato de contar, não constituindo elementos do número. Assim, mesmo antes de estar completada a síntese, o número é algo que se acrescenta aos objetos (a reunião 1 + 1 = 2 acrescenta a cada um dos objetos contados como unidades 1, 1, a nova propriedade de constituir um todo 2). Em resumo, o número, em absoluto, é extraído a partir dos objetos.

Enfim, muito mais do que um elenco de atividades que possam favorecer a construção do número, o que importa é a postura do professor, que deve ser um bom "perguntador", ao invés de um bom "respondedor"; deve entender, que é muito mais fácil trabalhar a partir do que a criança já conhece (é mais fácil compreender inclusão de classes, quando se trata de meninos, meninas e crianças, do que contas brancas, castanhas e de madeira, por exemplo) e, no caso específico do número, não descuidar diversas formas de representação, dos diferentes significados do número, decorrentes da interação social.

E isso porque, atividades formais que promovam a construção do número, como conceito abstrato (independente da representação), não são exatamente necessárias quando existe uma interação adequada entre a criança e o meio e é a forma como são trabalhadas é pode fazer a diferença. O mesmo não se pode dizer de crianças com algum tipo de deficiência, para quem, situações artificiais devem ser criadas, de modo a compensar a interação inadequada.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

A questão da construção do número em sua face pedagógica não está, absolutamente, esgotada e é evidente que o que aqui se estabeleceu, foram alguns parâmetros, mesmo porque não era objetivo deste trabalho apresentar uma proposta metodológica. O que aqui se pretendeu, foi mostrar os usos inadequados dos resultados das pesquisas de Piaget e Szeminska, decorrentes de interpretações equivocadas, cujas conseqüências foram nocivas não apenas ao ensino da matemática, como também geraram críticas indevidas à teoria piagetiana.

Desfeitos os equívocos assinalados nas páginas anteriores, acredito que atividades lógicas e numéricas podem e devem conviver na educação infantil; que pesquisas acerca da importância do papel desempenhado pela contagem na construção do número, podem e devem continuar, uma vez que o tema não está esgotado, o que não pode e não deve continuar acontecendo, são as críticas infundadas à teoria piagetiana, responsabilizando-a pelos usos (e abusos) que dela fizeram e as afirmações de que os resultados encontrados nos estudos acerca da contagem estariam "além de Piaget", quando, na verdade, tais pesquisas complementam e dinamizam a sólida base proporcionada pelo trabalho de Piaget e seus colaboradores.

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 unesp 12 13 14 15 16 17 18 19

REFERÊNCIAS

AABOE, A. *Episódios da história antiga da matemática*. Rio de Janeiro: S.B.M., 1984.

AUGUSTINE, C. H. d' *Métodos modernos para o ensino da matemática*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1976.

AMBRÓSIO, U. D' *Educação Matemática: da teoria à prática*. 4.ed., Campinas, S.P: Papirus, 1998.

BABINI, J. *História sucinta de la matemática*. 3.ed., Madrid: ESPASA-CALPE, S.A., 1969.

BARKER, S. F. *Filosofia da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 1969.

BARRETTO, E.S.S..(org). *Os currículos do ensino fundamental para as escolas brasileiras*. 2.ed., Campinas, S.P: Autores Associados; São Paulo: Fundação Carlos Chagas, 2000. (Coleção formação de professores).

BASTOS, C. L. e KELLER, V.. *Aprendendo Lógica*. 6.ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1998.

BECKER, F. *Epistemologia do professor: o cotidiano da escola*. 6.ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1993.

_____ *Da ação à operação: o caminho da aprendizagem em Jean Piaget e Paulo Freire*. 2.ed. Rio de Janeiro: DP&A/ Palmarinca, 1997.

BECKER, O. *O pensamento matemático sua grandeza e seus limites*. São Paulo: Herder, 1965.

BIDEAUD, J.; MELJAC, C. e FISHER, JP..*Les chemins du nombre*. France; Presses Universitaires de Lille, 1991.

BOLL, M. e REINHART, J.. *Histoire de la Logique*. Paris: Presses Universitaires de France, 1946.

BOYER, C. B.. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL, L.A.S.. *Aplicações da teoria de Piaget ao ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1977.

BRISSIAUD, R. *Como as crianças aprendem a calcular*. Lisboa: Instituto Piaget, 1989.

CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa; Sá da Costa, 1984.

COSTA, M, A. *As idéias fundamentais em matemática e outros ensaios*. São Paulo: EDUSP, 1971.

COURANT, R. e ROBBINS, H.. *Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos*. Madrid: Aguillar, 1967.

DANTZIG, T. *Número: a linguagem da ciência*. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

DAVIS, H. e HERSH, R. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986.

DOLLE, J.M. *Para compreender Jean Piaget*. Rio de Janeiro: Zahar, 1983.

DORNELLES, B.V. *Escrita e número. Relações iniciais*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

DUHALDE, M.E. e CUBERES, M.T.G. *Encontros iniciais com a matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

DURANT, W. *A História da Filosofia*. Rio de Janeiro: Nova Cultural, 1996. Coleção Os Pensadores.

_____ *História da Civilização*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959, vol.III.

ERMEL, Institut National de Recherche Pédagogique. *Apprentissages numériques et résolution des problèmes. Cours préparatoire*. Paris: Hatier, 1991.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas, S.P: Unicamp, 1995.

FEHR, H. (ORG). *Educação matemática nas Américas. Relatório da segunda conferência interamericana sobre Educação Matemática*. Lima- Peru, 4-12 de dezembro, 1966. São Paulo: Nacional, 1969.

FELDMAN, J. *Aritmética para crianças com problemas de linguagem*. Rio de Janeiro: Enelivros, 1985.

FREGE, G. *Os fundamentos da aritmética: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número*. 3. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1983. Coleção Os Pensadores.

_____. *Lógica e Filosofia da Linguagem*. São Paulo: Cultrix, EDUSP, 1978.

FREUDENTHAL, H. *Major problems of mathematicis education*. In: Educational Studies in Mathematics, vol. 12, nº 2, maio de 1981, páginas 133 a 150.

GARBI, G. G. *O romance das equações algébricas*. São Paulo: Makron Books, 1997.

GAULIN, C. *Tendências em métodos e meios para o ensino da matemática*. In: Nuevas Tendencias en la enseñanza de la matemática. Vol.III, UNESCO, 1973.

GOULART, I.B.. Piaget. *Experiências básicas para utilização pelo professor*. 5.ed. Petrópolis, R.J: Vozes, 1989.

_____(org.). *A educação na perspectiva construtivista. Reflexões de uma equipe interdisciplinar*. Petrópolis, R.J: Vozes, 1998.

GRECO, P. e MORF, A. *Structures Numériques Élémentaires*. Paris: Presses Universitaires de France, 1962.

GUNDLACH, B. H. *Tópicos da história da matemática para uso em sala de aula: Números e numerais*. São Paulo; Atual, 1992.

HEGENBERG, L.. *Lógica: o cálculo sentencial*. 2.ed.ver. São Paulo: EPU, 1977.

HOGBEN, L. *Maravilhas da Matemática*. 2. ed., Porto Alegre: Globo, 1970.

IFRAH, G. *História Universal dos Algarismos*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

KANT, I.. *Sobre a Pedagogia*. Piracicaba, S.P: Editora Unimep, 1996.

_____.*Prolegômenos a toda metafísica futura*. Lisboa: Edições 70, 1988.

KAMII, C.. *A criança e o número*. 25.ed., Campinas, S.P: Papirus, 1998.

KARLSON, P. *A magia dos números*. Rio de Janeiro: Globo, 1961.

KLINE, M.. *O fracasso da matemática moderna*. São Paulo: IBRASA, 1976.

_____ *Mathematical Though from ancient to modern times*. New York: Oxford Press University, 1972.

LEITE, L.B. (org). *Piaget e a escola de Genebra*. 3.ed. São Paulo: Cortez, 1995.

LE LIONNAIS, F. (Org.) *Les grands courants de la pensée mathematique*. Paris: Blanchard, 1962.

LOVELL, K.. *O desenvolvimento dos conceitos matemáticos e científicos na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1988.

LUNGARZO, C. *O que é matemática*. São Paulo: Editora Brasiliense, 1989.

MACHADO, N. J.. *Matemática e realidade: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática*. São Paulo: Cortez, 1987.

_____. *Matemática e língua materna*. São Paulo: Cortez, 1990.

MARTIN, G. *Kant: ontologia e epistemologia*. Córdoba, Argentina: Universidad Nacional de Córdoba, 1961.

MEC- Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*. 2.ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2000.

MIORIM, M.A.. *Introdução à história da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

MONTOYA, A. O. D.. *Piaget e a criança favelada: Epistemologia genética, diagnóstico e soluções*. Petrópolis, RJ: Vozes, 1996.

NÓVOA, A. (Org.) *Vidas de professores*. Porto: Porto Editora, 1996.

NOGUEIRA, C. M. I, e MACHADO, E. L. "O ensino de matemática para deficientes auditivos: uma visão psicopedagógica". Relatório Final UEM Maringá/PR, 1995.

OGILVY, C.S. *Through the Mathescope*. New York: Oxford University Press, 1956.

OMNÈS, R.. *Filosofia da ciência contemporânea*. São Paulo: EDUNESP, 1996. (Biblioteca Básica).

OS PENSADORES. *Peirce e Frege*. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

PARKER, S.F.. *Filosofia da matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 1969.

PARRA, C. e SAIZ, I. (org). *Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PASCAL, G. *O pensamento de Kant*. 5ed. Petrópolis, RJ: 1996.

PERRENOUD, P. *Práticas pedagógicas - profissão docente e formação; perspectivas sociológicas*. Lisboa: Dom Quixote, 1997.

PIAGET, J. *Para onde vai a educação?* 7.ed. Rio de Janeiro: José Olympio, 1980.

_____. *Ensaio de lógica operatória*. São Paulo: EDUSP, 1976.

_____ *Sobre a Pedagogia*. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1998.

_____. *Introduccion a la epistemologia genética. 1. El pensamiento matemático*. Buenos Aires: PAIDOS, 1975.

_____.*Psicologia de la inteligencia*. Buenos Aires: Siglo Viente, 1966.

_____.*Epistemologia Genética*. São Paulo: Martins Fontes, 1990.

_____ *O nascimento da inteligência na criança*. 4ª ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1987.

_____ *Abstração Reflexionante*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

_____ *O estruturalismo*. 3. ed., Rio de Janeiro: DIFEL, 1979.

PIAGET, J. et al. *Lógica e conhecimento científico*. Minho, Portugal: BARCELOS, 1980.

_____ et al. *Problèmes de la construction du nombre*. Paris: Presses Universitaire de France, 1960.

_____ et al. *La enseñanza de las matemáticas*. 3.ed. Madrid: Aguillar, 1968.

_____ e BETH, E. W.. *Epistemologia matemática e psicologia*. Barcelona, Espanha: Crítica S.A, 1980.

_____ e INHELDER, B. *O desenvolvimento das quantidades físicas na criança*. Rio de janeiro: Zahar, 1975.

_____ e SZEMINSKA, A.. *A gênese do número na criança*. 3.ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

_____ *Psicologia e epistemologia (por uma teoria do conhecimento)*. 1.ed. Rio de Janeiro: Forense, 1973.

POINCARÉ, H. *A ciência e a hipótese*. Brasília: Editora UnB, 1985.

_____ *La sciense et l'hypothèse*. Paris: Flammarion, 1943.

_____ *O valor da ciência*. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

QUINE, W. V.. *Filosofia da Lógica*. Rio de Janeiro: Zahar, 1972.

RAMOZZI-CHIAROTTINO, Z.. *Psicologia e Epistemologia Genética de Jean Piaget*. São Paulo: EPU, 1988.

RANGEL, A. C. S.. *Educação matemática e construção do número pela criança. Uma experiência em diversos contextos sócio-econômicos*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.

ROLLER, D. H. D. *A História da Ciência e seu Estudo nos Estados Unidos*. In Iniciação à História da Ciência. São Paulo: Cultrix, 1966.

RUSSELL, B. *Principles of Mathematics*. New York: Norton, 1938.

_____. *Introdução à Filosofia da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 1974.

unesp

RUSSELL, B. *Misticismo e Lógica*. São Paulo: Nacional, 1957.

_____ e Whitehead, A.N.. *Principia Mathematica*. 2 ed. London: Cambridge University Press, 1968.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. CENP - Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta curricular para o ensino de matemática: 1º grau*. 4.ed. São Paulo: SE/CENP, 1991.

SCHLIEMANN, A e CARRAHER, D. (Org). *A compreensão dos conceitos aritméticos: Ensino e Pesquisa*. Campinas/S.P: Papirus, 1998.

SAWYER, W.W. *O encanto da matemática*. Lisboa: Ulisséia, s/d.

SILVA, C.P.. *A matemática no Brasil. Uma história do seu desenvolvimento*. Curitiba: Editora da UFPR, 1992.

SINGH, S. *O último teorema de Fermat*. 7.ed., Rio de Janeiro: Record, 2000.

STRUICK, D. *História concisa das matemáticas*. 2. ed., Lisboa: Gradiva, 1992.

TURNBULL, H. W. *Los grandes matematicos*. Barcelona, Espanha: CREDSA, 1968.

UNESCO. *Educacion matemática en las Américas* - V. Informe de la Quinta Conferência Interamenricana sobre Educación matemática. UNESCO, 1979.

_____. *La Matemática y la educación*. Oficina de ciências de la UNESCO Para a América Latina. Montevidéo, 1972.

VERGANI, T. *Educação Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1993.

WADSWORTH, B.. *Piaget para o professor da pré-escola e 1º grau*. São Paulo: Pioneira, 1984.

ZUNINO, D. L.. *A matemática na escola: aqui e agora*. 2ª.ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

