

WILLIAM NELSON LENDZION TOMAZ ALVES

**APLICAÇÃO DE CONTROLE COM MODOS
DESLIZANTES EM SISTEMAS COM ATRASO NA
AQUISIÇÃO DE DADOS**

Ilha Solteira - SP
2014



WILLIAM NELSON LENDZION TOMAZ ALVES

**APLICAÇÃO DE CONTROLE COM MODOS
DESLIZANTES EM SISTEMAS COM ATRASO NA
AQUISIÇÃO DE DADOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Automação.

Prof. Dr. José Paulo Fernandes Garcia
Orientador

Ilha Solteira - SP
2014

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

A474a Alves, Uiliam Nelson Lenzion Tomaz.
Aplicação de controle com modos deslizantes em sistemas com atraso na aquisição de dados / Uiliam Nelson Lenzion Tomaz Alves . -- Ilha Solteira: [s.n.], 2014
123 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2014

Orientador: José Paulo Fernandes Garcia
Inclui bibliografia

1. Controle com estrutura variável e modos deslizantes (CEV/MD). 2. Atraso na aquisição de dados. 3. Preditores de estado. 4. Sistema de suspensão ativa. 5. Sistema Ball Balancer.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA


CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Aplicação de controle com modos deslizantes em sistemas com atraso na aquisição de dados

AUTOR: UILIAM NELSON LENDZION TOMAZ ALVES

ORIENTADOR: Prof. Dr. JOSE PAULO FERNANDES GARCIA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica ,
Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. JOSE PAULO FERNANDES GARCIA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. ALFREDO DEL SOLE LORDELO
Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas / Universidade Federal do Abc

Data da realização: 17 de março de 2014.

A todos que acreditaram e estiveram comigo durante este trabalho.

DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Nada mais justo ao alcançar uma conquista que reconhecer as pessoas e/ou instituições que colaboraram para que este feito fosse possível. Neste pequeno texto, de forma modesta e sincera, gostaria de agradecer a todos que de forma direta ou indireta possibilitaram o desenvolvimento desta dissertação e deixaram suas marcas em minha história.

Como não poderia ser diferente, agradeço em primeiro a Deus, por todos os milagres diários que realiza em minha vida e por todas as oportunidades que me proporcionou, e a Nossa Senhora, por sua constante intercessão.

Agradeço aos meus pais, Nelson Tomaz Alves e Janice Lenzion Alves, e à minha irmã, Bruna Lenzion Alves, por todos os valores transmitidos, pelo constante apoio em todas as decisões, pelo amor incondicional e por tantos outros inúmeros motivos.

Agradeço também, de maneira especial, a minha tia Elena Lenzion, por ter me acolhido em sua casa durante o período de graduação, por seu incentivo para que eu entrasse na pós-graduação, por seu exemplo de vida, e por ter se tornado outra mãe para mim. Também agradeço a seus filhos, João Gabriel Lenzion Gomes e Eloá Lenzion Gomes, por terem se tornado meus irmãos.

A José Paulo Fernandes Garcia, ao qual serei eternamente grato, por ter acreditado em mim e ter sido meu orientador neste mestrado, por todas as oportunidades que me proporcionou, por seus conselhos, compreensão e pela confiança depositada. E aos professores Marcelo e Edvaldo pelo apoio, incentivo e ensinamentos.

Aos amigos do Laboratório de Pesquisa em Controle: Rafael de Paula Camata, Gisele de Carvalho Apolinário, Herbert Eduardo Soto Pereyra e Emerson Ravazzi Pires da Silva, pelo companheirismo, ajuda e momentos de descontração.

Aos meus grandes amigos que me apoiaram e me fizeram companhia mesmo quando meu único assunto era meu projeto de pesquisa. Por sempre terem uma palavra de ânimo durante meus momentos de fraqueza: Jean Vitor de Paulo, Caroline Domingues Porto do Nascimento Barbieri, Ivan Ranieri Cortez, Tales Emanuel da Silva, Nágila Ribeiro de Menezes, e ao meu conterrâneo Uéinton Douglas Sinhoreto.

Termino agradecendo aos professores do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Unesp de Ilha Solteira, técnicos, funcionários e à sempre gentil equipe da biblioteca.

Ao Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC). À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro, sem o qual esta dissertação não seria possível, e à FAPESP (processo número 2011/17610-0) pela aquisição dos materiais utilizados nesta pesquisa (*softwares* e equipamentos).

A pedra

*O distraído, nela tropeçou,
o bruto a usou como projétil,
o empreendedor, usando-a construiu,
o campônio, cansado da lida,
dela fez assento.*

*Para os meninos foi brinquedo,
Drummond a poetizou,
Davi matou Golias...*

*Por fim;
o artista concebeu a mais bela escultura.*

*Em todos os casos,
a diferença não era a pedra.
Mas o homem.*

Antonio Pereira (Apon)

*“Os que semeiam entre lágrimas, recolherão com alegria.
Na ida, caminham chorando, os que levam a semente a aspergir.
Na volta, virão com alegria, quando trouxerem os seus feixes.”*

Sl 125, 5-6

RESUMO

O Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes (CEV/MD) apresenta robustez a incertezas casadas e flexibilidade na escolha da superfície de deslizamento, permitindo sua utilização no controle de diferentes sistemas. A versão discreta do CEV/MD possibilita a utilização desta técnica em dispositivos digitais sem recorrer à emulação. Contudo, um dos problemas que o CEV/MD enfrenta, tanto em sua versão contínua quanto na discreta, é sua sensibilidade a atrasos, independentemente da origem destes. Suprimir os efeitos negativos dos atrasos no controle CEV/MD torna-se de importância fundamental, pois os atrasos são um problema de natureza prática. Neste contexto, esse trabalho introduz uma estratégia que minimiza os efeitos dos atrasos em aquisição de dados em sistemas de controle com modos deslizantes, em tempo contínuo e discreto. A estratégia consiste em adaptar preditores de estado originalmente projetados para sistemas com atrasos no controle para trabalhar com atrasos de aquisição de dados, possibilitando o uso do CEV/MD em sistemas que sofrem grandes períodos de atraso na aquisição de dados. A influência da inclusão destes preditores na malha de controle é analisada para os casos onde existem incertezas no sistema controlado e quando o atraso estimado difere do atraso real. Para validação da estratégia foram realizadas simulações e experimentos práticos em um sistema de suspensão ativa de bancada e em um sistema *ball balancer*, equipamentos fabricados pela Quanser[®]. Os resultados comprovam a eficácia do método proposto tanto nas simulações quanto nos testes realizados em bancada.

Palavras-chave: Controle com estrutura variável e modos deslizantes (CEV/MD). Atraso na aquisição de dados. Preditores de estado. Sistema de suspensão ativa. Sistema *ball balancer*.

ABSTRACT

Variable Structure Control with Sliding Mode (VSC/SM) has robustness to matched uncertainties and flexibility in the sliding surface choice which allows its use in different control systems. The discrete version of the VSC/SM allows using this technique in digital devices without emulation. However, one problem that the VSC/SM confronts, both in continuous-time and discrete-time, is its delay sensitivity, regardless of the delays' origin. Suppress the negative effects of delays in VSC/SM becomes of fundamental importance, since delays are a practical problem. In this context, this paper introduces a strategy that minimizes the data acquisition delay effects in control systems with continuous-time and discrete-time sliding modes. The strategy consists in adapting state predictors originally designed for systems with control signal delays to work with data acquisition delays, enabling the VSC/SM in systems suffering long periods of data acquisition delay. The inclusion's influence of these predictors in the control loop is analyzed for cases where uncertainties in the controlled system and differences between estimated delay and actual delay exist. In order to validate the proposed strategy simulations and experiments were performed on a bench active suspension system and a ball balancer system, equipments manufactured by Quanser[®]. The results prove the effectiveness of the proposed method both in simulations and in bench tests.

Keywords:: Variable structure control with sliding mode (VSC/SM). Data acquisition delay. State predictors. Active suspension system. Ball balancer system.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Existência de modo deslizante na intersecção de superfícies de chaveamento.	26
Figura 2	Domínio de modo deslizante em \mathfrak{R}^2 .	28
Figura 3	Comparação entre leis de controle (a) lei de controle (60) com $\rho = -1$ e (b) lei de controle (76) com $\rho = -1$ e $\varepsilon = 0,01$.	44
Figura 4	Implementação em Matlab/Simulink [®] do sistema (77) com os controladores propostos.	45
Figura 5	Trajectoria de estados (a) $u_N(t)$ calculado por (60) e (b) $u_N(t)$ calculado por (76).	45
Figura 6	Superfície de deslizamento (a) $u_N(t)$ calculado por (60) e (b) $u_N(t)$ calculado por (76).	45
Figura 7	Sistema controlado por computador.	48
Figura 8	Sistema contínuo com atraso na aquisição de dados.	58
Figura 9	Sistema controlado por computador com atraso na aquisição de dados.	58
Figura 10	Eliminação dos efeitos de atrasos na aquisição de dados em sistema contínuo com uso de preditor de estados.	60
Figura 11	Erro na estimativa do atraso na aquisição de dados utilizando preditor de estados contínuo.	63
Figura 12	Eliminação dos efeitos de atrasos na aquisição de dados em sistema controlado por computador com uso de preditor de estados discreto.	64
Figura 13	Erro na estimativa do atraso na aquisição de dados utilizando preditor de estados discreto.	68
Figura 14	Suspensão ativa de bancada Quanser [®] pertencente ao Laboratório de Pesquisa em Controle da Unesp de Ilha Solteira (LPC - FEIS - UNESP).	72
Figura 15	Diagrama do sistema de suspensão ativa de bancada Quanser [®] .	73
Figura 16	Diagrama de corpo livre para massa M_s do sistema de suspensão ativa de bancada Quanser [®] .	74

Figura 17	Diagrama de corpo livre para massa M_{us} do sistema de suspensão ativa de bancada Quanser [®] .	74
Figura 18	Sistema bola viga.	77
Figura 19	Sistema <i>ball balancer</i> Quanser [®] pertencente ao Laboratório de Pesquisa em Controle da Unesp de Ilha Solteira (LPC - FEIS - UNESP).	78
Figura 20	Esquema do movimento em um eixo do <i>ball balancer</i> .	78
Figura 21	Diagrama de corpo livre em um eixo do <i>ball balancer</i> .	79
Figura 22	Esquemático de controle dos experimentos.	83
Figura 23	Esquemático de controle do sistema de suspensão ativa.	87
Figura 24	Esquemático de controle do sistema <i>ball balancer</i> .	88
Figura 25	Perfil de pista de teste.	91
Figura 26	Deslocamento do corpo do veículo obtido por simulação, com $12 T$ de atraso na aquisição de dados sem utilização de preditores de estado (a) CMDC (b) CMDD.	92
Figura 27	Sinal de controle obtido por simulação, com $12 T$ de atraso na aquisição de dados sem utilização de preditores de estado (a) CMDC (b) CMDD.	92
Figura 28	Comparação entre deslocamento do corpo do veículo com controles PC-CMDC e LQR, $12 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.	93
Figura 29	Comparação entre sinais de controle com controles PC-CMDC e LQR, $12 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.	93
Figura 30	Comparação entre deslocamentos do corpo do veículo com controles PC-CMDC e LQR, $60 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.	94
Figura 31	Comparação entre sinais de controle com controles PC-CMDC e LQR, $60 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.	94

Figura 32	Comparação entre deslocamentos do corpo do veículo com controles PC-CMDC e PC-LQR, 12 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.	95
Figura 33	Comparação entre sinais de controle com controles PC-CMDC e PC-LQR, 12 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.	95
Figura 34	Comparação entre deslocamento do corpo do veículo com controles PC-CMDC e PC-LQR, 60 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.	95
Figura 35	Comparação entre sinais de controle com controles PC-CMDC e PC-LQR, 60 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.	96
Figura 36	Comparação entre deslocamentos do corpo do veículo com controles PD-CMDD e DLQR, 12 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.	96
Figura 37	Comparação entre sinais de controle com controles PD-CMDD e DLQR, 12 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.	97
Figura 38	Comparação entre deslocamento do corpo do veículo com controles PD-CMDD e DLQR, 60 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.	97
Figura 39	Comparação entre sinais de controle com controles PD-CMDD e DLQR, 60 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.	97
Figura 40	Comparação entre deslocamentos do corpo do veículo com controles PD-CMDD e PD-DLQR, 12 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.	98
Figura 41	Comparação entre sinais de controle com controles PD-CMDD e PD-DLQR, 12 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.	98

Figura 42	Comparação entre deslocamento do corpo do veículo com controles PD-CMDD e PD-DLQR, $60 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.	99
Figura 43	Comparação entre sinais de controle com controles PD-CMDD e PD-DLQR, $60 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.	99
Figura 44	Comportamento do controle PC-CMDC com $12 T$ de atraso na aquisição de dados, sem perturbação na entrada de controle, utilizando diferentes períodos de amostragem (a) deslocamento do corpo do veículo em simulação (b) deslocamento do corpo do veículo em bancada.	100
Figura 45	Comportamento do controle PC-CMDC, com $12 T$ de atraso na aquisição de dados, sem perturbação na entrada de controle, utilizando diferentes períodos de amostragem (a) sinal de controle em simulação (b) sinal de controle em bancada.	100
Figura 46	Referência utilizada nos testes com <i>ball balancer</i> (a) referência no plano xy (b) referência para o eixo x (c) referência para o eixo y .	101
Figura 47	Posição da esfera no plano xy em simulação com $20 T$ de atraso na aquisição de dados e controle CMDC sem utilização de preditor de estado. Referência em linha traço-ponto.	102
Figura 48	Resultados de posição, ângulo do motor e sinal de controle em simulação com $20 T$ de atraso na aquisição de dados e controle CMDC sem utilização de preditor de estado (a) resultados no eixo x (b) resultados no eixo y . Referência em linha traço-ponto.	103
Figura 49	Posição da esfera no plano xy em simulação com $20 T$ de atraso na aquisição de dados e controle CMDD sem utilização de preditor de estado. Referência em linha traço-ponto.	103
Figura 50	Resultados de posição, ângulo do motor e sinal de controle em simulação com $20 T$ de atraso na aquisição de dados e controle CMDD sem utilização de preditor de estado (a) resultados no eixo x (b) resultados no eixo y . Referência em linha traço-ponto.	104

Figura 51	Comparação entre posição da esfera no plano xy em simulação com controle PC-CMDC (linha contínua) e alocação de polos (linha tracejada), $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle. Referência em linha traço-ponto.	105
Figura 52	Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle em simulação com controle PC-CMDC (linha contínua) e alocação de polos (linha tracejada), $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) resultados no eixo x (b) resultados no eixo y . Referência em linha traço-ponto.	105
Figura 53	Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle no eixo x em bancada com controle PC-CMDC e alocação de polos, $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) controle PC-CMDC (b) alocação de polos. Referência em linha traço-ponto.	106
Figura 54	Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle no eixo y em bancada com controle PC-CMDC e alocação de polos, $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) controle PC-CMDC (b) alocação de polos. Referência em linha traço-ponto.	106
Figura 55	Comparação entre posição no plano xy em bancada com controle PC-CMDC e alocação de polos, $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) controle PC-CMDC (b) alocação de polos. Referência em linha traço-ponto.	107
Figura 56	Comparação entre posição da esfera no plano xy em simulação com controle PC-CMDC (linha contínua) e alocação de polos com preditor (linha tracejada), $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle. Referência em linha traço-ponto.	108
Figura 57	Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle em simulação com controle PC-CMDC (linha contínua) e alocação de polos com preditor (linha tracejada), $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) resultados no eixo x (b) resultados no eixo y . Referência em linha traço-ponto.	108

Figura 58	Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle no eixo x em bancada com controle PC-CMDC e alocação de polos com preditor, $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) controle PC-CMDC (b) alocação de polos com preditor. Referência em linha traço-ponto.	109
Figura 59	Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle no eixo y em bancada com controle PC-CMDC e alocação de polos com preditor, $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) controle PC-CMDC (b) alocação de polos com preditor. Referência em linha traço-ponto.	109
Figura 60	Comparação entre posição no plano xy em bancada com controle PC-CMDC e alocação de polos com preditor, $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) controle PC-CMDC (b) alocação de polos com preditor. Referência em linha traço-ponto.	110
Figura 61	Comparação entre posição da esfera no plano xy em simulação com controle PD-CMDD (linha contínua) e alocação de polos discreto (linha tracejada), $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle. Referência em linha traço-ponto.	111
Figura 62	Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle em simulação com controles PD-CMDD (linha contínua) e alocação de polos discreto (linha tracejada), $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) resultados no eixo x (b) resultados no eixo y . Referência em linha traço-ponto.	111
Figura 63	Posição da esfera no plano xy em bancada com controle PD-CMDD, $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle. Referência em linha traço-ponto.	112
Figura 64	Posição, ângulo do motor e sinal de controle em bancada com controle PD-CMDD, $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) resultados no eixo x (b) resultados no eixo y . Referência em linha traço-ponto.	112
Figura 65	Comparação entre posição da esfera no plano xy em simulação com controle PD-CMDD (linha contínua) e alocação de polos discreto com preditor (linha tracejada), $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle. Referência em linha traço-ponto.	113

- Figura 66 Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle em simulação com controle PD-CMDD (linha contínua) e alocação de polos discreto com preditor (linha tracejada), $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) resultados no eixo x (b) resultados no eixo y . Referência em linha traço-ponto. 114
- Figura 67 Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle no eixo x em bancada com controle PD-CMDD e alocação de polos discreto com preditor, $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) controle PD-CMDD (b) alocação de polos discreto com preditor. Referência em linha traço-ponto. 114
- Figura 68 Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle no eixo y em bancada com controle PD-CMDD e alocação de polos discreto com preditor, $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) controle PD-CMDD (b) alocação de polos discreto com preditor. Referência em linha traço-ponto. 115
- Figura 69 Comparação entre posição no plano xy em bancada com controle PD-CMDD e alocação de polos discreto com preditor, $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) controle PD-CMDD (b) alocação de polos discreto com preditor. Referência em linha traço-ponto. 115
- Figura 70 Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle no eixo x em bancada com controle PC-CMDC e diferentes períodos de amostragem, $20 T$ de atraso na aquisição de dados sem perturbação na entrada de controle (a) $T = 1 ms$ (b) $T = 5 ms$. Referência em linha traço-ponto. 116
- Figura 71 Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle no eixo y em bancada com controle PC-CMDC e diferentes períodos de amostragem, $20 T$ de atraso na aquisição de dados sem perturbação na entrada de controle (a) $T = 1 ms$ (b) $T = 5 ms$. Referência em linha traço-ponto. 117
- Figura 72 Comparação entre posição no plano xy em bancada com controle PC-CMDC e diferentes períodos de amostragem, $20 T$ de atraso na aquisição de dados sem perturbação na entrada de controle (a) $T = 1 ms$ (b) $T = 5 ms$. Referência em linha traço-ponto. 117

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Parâmetros do sistema de suspensão ativa de bancada Quanser [®] .	76
Tabela 2	Parâmetros do sistema <i>ball balancer</i> Quanser [®] .	80

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
2	CONTROLE COM ESTRUTURA VARIÁVEL E MODOS DESLIZANTES	24
2.1	MODELO DO SISTEMA	25
2.2	SUPERFÍCIE DE CHAVEAMENTO	25
2.3	MODO DESLIZANTE	26
2.3.1	Condições para a Existência de um Modo Deslizante	27
2.4	EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO PARA SISTEMAS COM CONTROLE DE ESTRUTURA VARIÁVEL	28
2.5	MÉTODO DO CONTROLE EQUIVALENTE	30
2.6	REDUÇÃO DE ORDEM	31
2.7	FORMA REGULAR E DINÂMICA DE ORDEM REDUZIDA	35
2.8	PROJETO DO CONTROLADOR	38
2.9	CONTROLE DE SISTEMAS INCERTOS COM CEV/MD	41
2.10	TREPIDAÇÃO	42
2.11	COMENTÁRIOS	45
3	CONTROLE COM ESTRUTURA VARIÁVEL E MODOS DESLIZANTES DISCRETO	47
3.1	MODELO DISCRETO NO ESPAÇO DE ESTADOS	47
3.2	CONTROLE COM MODOS DESLIZANTES DISCRETO	51
3.2.1	Projeto do Controle Discreto	51
3.2.2	Análise de Robustez	54
3.3	COMENTÁRIOS	55

4	CONTROLE DE SISTEMAS COM ATRASO NA AQUISIÇÃO DE DADOS UTILIZANDO PREDITORES DE ESTADO	56
4.1	ATRASOS NA AQUISIÇÃO DE DADOS	57
4.2	ELIMINAÇÃO DOS EFEITOS DOS ATRASOS DE AQUISIÇÃO DE DADOS COM USO DE PREDITORES DE ESTADO	59
4.2.1	Proposta para o Sistema em Tempo Contínuo	59
4.2.2	Proposta para o Sistema em Tempo Discreto	64
4.3	COMENTÁRIOS	70
5	SISTEMAS ANALISADOS: SUSPENSÃO ATIVA E BALL BALANCER	71
5.1	SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA	71
5.1.1	Equipamento	72
5.1.2	Modelagem Matemática	73
5.2	SISTEMA BALL BALANCER	76
5.2.1	Equipamento	77
5.2.2	Modelagem Matemática	77
5.3	COMENTÁRIOS	81
6	PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO DOS CONTROLADORES	82
6.1	ESTRATÉGIA DE COMPARAÇÃO	82
6.2	CONTROLADORES PARA SUSPENSÃO ATIVA	83
6.2.1	Controle LQR	84
6.2.2	Implementação dos Controladores	85
6.3	CONTROLADORES PARA SISTEMA BALL BALANCER	86
6.3.1	Implementação dos Controladores	87
6.4	COMENTÁRIOS	89
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	90

7.1	RESULTADOS NO SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA	90
7.1.1	Necessidade dos Preditores	91
7.1.2	Comparação entre PC-CMDC e LQR	92
7.1.3	Comparação entre PC-CMDC e PC-LQR	94
7.1.4	Comparação entre PD-CMDD e DLQR	96
7.1.5	Comparação entre PD-CMDD e PD-DLQR	98
7.1.6	Influência do Período de Amostragem no PC-CMDC	99
7.2	RESULTADOS NO SISTEMA BALL BALANCER	101
7.2.1	Necessidade dos Preditores	102
7.2.2	Comparação entre PC-CMDC e Alocação de Polos	104
7.2.3	Comparação entre PC-CMDC e PC - Alocação de Polos	107
7.2.4	Comparação entre PD-CMDD e Alocação de Polos Discreto	110
7.2.5	Comparação entre PD-CMDD e PD - Alocação de Polos Discreto	113
7.2.6	Influência do Período de Amostragem no PC-CMDC	116
7.3	COMENTÁRIOS	118
8	CONCLUSÕES	119
	REFERÊNCIAS	121

1 INTRODUÇÃO

O Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes (CEV/MD) contínuo vem sendo estudado há vários anos (UTKIN, 1977; DECARLO; ZAK; MATTHEWS, 1988). Ele apresenta como maior benefício a robustez à incertezas casadas quando o sistema encontra-se em deslizamento (DRAŽENOVIĆ, 1969). Isto, junto à flexibilidade da escolha da superfície de deslizamento, permite que esta estratégia de controle seja utilizada em diferentes sistemas (GARCIA et al., 2005; RODRIGUES et al., 2011; FERNANDES, 2013).

Com a popularização dos dispositivos digitais, o controle de processos também passou a ser realizado por estes equipamentos. Porém, quando isto é feito, é necessária a utilização de conversores A/D e D/A e de um período de amostragem que influenciam a dinâmica da planta realimentada. Existe a possibilidade de utilização da teoria já estabelecida para controle contínuo nestes controladores digitais (emulação), contudo, isto exige períodos de amostragem muito pequenos. A exigência de pequenos períodos de amostragem tem consequência direta nos custos de projeto, por exigir maior capacidade computacional; e o aumento do período de amostragem deteriora a eficiência da emulação.

O CEV/MD contínuo, assim como outras técnicas de controle contínuo, sofre deterioração em seu desempenho devido ao período de amostragem utilizado em emulação. O período de amostragem não traz apenas trepidação ao longo do modo deslizante, mas pode até mesmo gerar instabilidade quando emprega-se ganhos grandes (FURUTA, 1990). Por isto surgiram técnicas CEV/MD discretas, levando o período de amostragem e os conversores A/D e D/A em consideração durante o projeto (FURUTA, 1990; RIBEIRO, 2006).

Um dos problemas aos quais os sistemas de controle estão sujeitos são os atrasos. As principais fontes de atrasos em sistemas de controle estão no tempo necessário para a aquisição de dados de sensores em diferentes lugares da planta e em seu tráfego por rede de dados, no tempo utilizado para filtragem e processamento dos dados dos sensores, no tempo necessário ao cálculo do sinal de controle, no tempo de transmissão do sinal de controle até o atuador e no tempo necessário para que o atuador produza a resposta necessária (CAI; HUANG; YANG, 2003).

O atraso gerado pela transmissão de sinais por redes de dados é de importância fundamental em sistemas de controle por rede (NCS, do inglês *Networked Control Systems*) onde a

comunicação entre sensores, atuadores e controladores ocorre por um canal compartilhado que comporta-se de maneira não ideal (HESPANHA; NAGHSHTABRIZI; XU, 2007). Em especial, os atrasos não podem ser ignorados em sistema de controle por rede *Wireless* (WNCS, do inglês *Wireless Networked Control Systems*) que geralmente apresentam atrasos de vários períodos de amostragem (GUINALDO; SÁNCHEZ; DORMIDO, 2011). Com o crescimento do uso de sistemas NCS o problema do atraso torna-se ainda mais importante e as estratégias devem considerar maiores períodos de atraso na comunicação.

Os atrasos podem deteriorar o desempenho do controle ou até mesmo levar o sistema à instabilidade dependendo da estratégia de controle utilizada e da magnitude do atraso envolvido. Além disso, como o atraso gerado na aquisição e envio de dados prejudica o desempenho do sistema, eles podem ser caracterizados como falhas, que podem ser detectadas, adaptando os controladores para acomodar o sistema à situação faltosa, mantendo-se o bom desempenho do mesmo (APOLINÁRIO, 2009).

No CEV/MD, o problema do atraso tem importância fundamental. Por utilizar uma lei de controle chaveada em alta velocidade com a finalidade de levar a trajetória de estados a uma superfície de deslizamento dependente dos estados atuais, se os estados utilizados forem atrasados, a lei de controle pode não direcionar os estados a esta superfície, o que pode, inclusive, levar o sistema à instabilidade (RIBEIRO, 2006).

Uma das estratégias para lidar com atrasos em CEV/MD presente na literatura é o uso de preditores de estado. Em Garcia (2002), foram utilizados preditores de estado para lidar com atraso no sinal de controle em sistemas incertos no tempo contínuo. Em Fernandes (2013), foram utilizados preditores de estado na eliminação de atrasos na aquisição de dados em tempo contínuo, porém com apenas um período de amostragem de atraso. Em Xia et al. (2007), foram usados preditores de estado para lidar com atraso no sinal de controle em tempo discreto.

Este trabalho, na mesma linha de pesquisa, propõe a utilização de preditores para lidar com atrasos na aquisição de dados em tempo discreto. Além disso, os resultados encontrados por Fernandes (2013) são estendidos com a utilização de maiores atrasos na aquisição de dados.

Na teoria apresentada, é analisada a influência da inclusão dos preditores de estado na malha de realimentação quando o sistema apresenta incertezas e quando existem erros na estimativa do atraso na aquisição de dados utilizado no cálculo dos estados preditivos. Estas análises mostram que o controle com modos deslizantes, tanto em tempo contínuo quanto em tempo discreto, apresenta maior sensibilidade às incertezas com a inclusão dos preditores. Porém, mesmo com esta maior influência, a proposta apresentada proporciona maior robustez que controles convencionais, assim como comprovado com resultados de simulação e práticos. É mostrado também

que o erro na estimativa do atraso induz distúrbios na dinâmica dos estados preditivos, e que o controle com modos deslizantes proporciona certa robustez a estes novos distúrbios.

São realizados testes em simulação e em experimentos de bancada nos sistemas de suspensão ativa (QUANSER INNOVATE EDUCATE, 2010a) e *ball balancer* (QUANSER INNOVATE EDUCATE, 2008a). Resultados entre as propostas contínua e discreta são comparados aos resultados obtidos com controladores clássicos, LQR e alocação de polos, projetados para tempo contínuo (QUANSER INNOVATE EDUCATE, 2010a; OGATA, 2010) e tempo discreto (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998), de modo a demonstrar as vantagens destas abordagens frente aos controladores mais comumente utilizados.

Os resultados atestam que a utilização de preditores de estado permitem o uso do CEV/MD na presença de grandes atrasos na aquisição de dados, onde este controle não seria possível sem o emprego de alguma técnica para o tratamento destes. Os resultados também mostram que os controles com modos deslizantes, nestas condições, continuam apresentado maior robustez a incertezas casadas quando comparados aos controles convencionais.

No Capítulo 2, é introduzida a teoria do controle com estrutura variável e modos deslizantes no tempo contínuo, também é analisada sua robustez e feitas considerações sobre o problema da trepidação com base no trabalho de Decarlo, Zak e Matthews (1988). Também é apresentada a lei de controle proposta por Spurgeon e Davies (1993), utilizada neste trabalho, que diminui o problema da trepidação. Como a lei de controle utilizada não apresenta parte chaveada será utilizada a denominação Controle com Modos Deslizantes Contínuo (CMDC) para se referir a tal lei.

No Capítulo 3, é mostrado como representar um sistema descrito no espaço de estados contínuo em tempo discreto (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998). Neste capítulo, também é descrita a lei de controle com modos deslizantes discreta proposta por Garcia et al. (2005). Essa lei de controle caracteriza-se por ter implementação fácil e robustez a certa classe de incertezas. Por ser suave e não apresentar parte chaveada, de modo semelhante ao que foi feito no caso contínuo, neste texto ela será referida como Controle com Modos Deslizantes Discreto (CMDD).

Uma visão geral sobre atrasos na aquisição de dados é mostrada no Capítulo 4. Neste capítulo, também é introduzida a abordagem com preditores de estado para compensação de atrasos na aquisição de dados, tanto em tempo contínuo (FERNANDES, 2013) quanto discreto. Além disso, mostra-se que a dinâmica dos estados preditivos são livres de atraso nas condições expostas e analisa-se a influência de incertezas na planta e erros na estimativa do atraso na aquisição de dados sobre as propostas em tempo contínuo e discreto. O conjunto Preditor

Contínuo com CMDC é abreviado neste texto por PC-CMDC e o conjunto Preditor Discreto com CMDD, por PD-CMDD.

No Capítulo 5, são apresentados os sistemas de suspensão ativa de bancada e *ball balancer*, ambos fabricados pela Quanser[®]. Estes equipamentos são utilizados para comprovação prática da eficiência das estratégias de controle PC-CMDC e PD-CMDD em sistemas com atraso na aquisição de dados.

A estratégia utilizada para comparação entre os controles propostos e os controles clássicos encontra-se no Capítulo 6. Os projetos dos controladores CMDC e CMDD também são apresentados neste mesmo capítulo, junto à teoria do controle LQR proposto pela Quanser[®] em tempo contínuo (QUANSER INNOVATE EDUCATE, 2010a; OGATA, 2010) e em tempo discreto (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998). O projeto dos controladores LQR utilizado para comparação no sistema de suspensão ativa e dos projetos por alocação de polos utilizado no sistema *ball balancer* também são apresentados neste capítulo.

No Capítulo 7, são apresentados e analisados os resultados da pesquisa. Estes resultados consistem em gráficos obtidos durante simulações e experimentos práticos. Neste mesmo capítulo, são feitas comparações entre os sistemas de controle utilizados assim como algumas considerações práticas.

Por fim, no Capítulo 8, são apresentadas as conclusões, sugestões para trabalhos futuros e publicações originadas deste trabalho.

2 CONTROLE COM ESTRUTURA VARIÁVEL E MODOS DESLIZANTES

O Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes (CEV/MD) se caracteriza por ser uma lei de controle de chaveamento em alta velocidade. Esse chaveamento acontece quando a trajetória de estados de um sistema cruza uma superfície projetada no espaço de estados, chamada superfície de chaveamento. Seu objetivo é levar a trajetória dos estados do sistema até esta superfície e garantir que permaneça sobre ela no tempo sequente, até alcançar o ponto de equilíbrio.

Quando a trajetória de estados do sistema atinge a superfície e nela permanece diz-se que o sistema encontra-se em modo deslizante e a superfície passa a ser denominada superfície de deslizamento. Desse modo, o projeto do CEV/MD constitui-se de duas etapas: o projeto da superfície de chaveamento e o projeto da lei de controle que faça com que esta superfície torne-se uma superfície de deslizamento.

O projeto da superfície é feito de forma que o sistema em deslizamento apresente as características desejadas. O projeto de controle é realizado de modo a garantir a atratividade e a alcançabilidade da superfície previamente estabelecida, fazendo com que o sistema entre em modo deslizante. A alcançabilidade é conseguida garantindo-se que uma trajetória de estado arbitrária do sistema iniciada em $x(t_0)$ seja conduzida até a superfície. A atratividade é obtida quando a trajetória do sistema, uma vez sobre a superfície no instante $t_a \geq t_0$, permanece nela para todo $t > t_a$.

A principal vantagem na utilização do CEV/MD é sua robustez a incertezas casadas quando em deslizamento (DRAŽENOVÍČ, 1969). Estas incertezas podem ser distúrbios na entrada de controle, incertezas paramétricas, ou ainda incertezas no modelo do sistema, desde que pertençam à imagem da matriz de entrada de controle. Esta vantagem junto a flexibilidade no projeto da superfície de deslizamento tornam o CEV/MD uma estratégia de controle atraente a várias aplicações (GARCIA et al., 2005; RODRIGUES et al., 2011; FERNANDES, 2013).

Este capítulo revisa a teoria apresentada em Decarlo, Zak e Matthews (1988) com ênfase em superfícies lineares e no método de controle equivalente. Apresenta também uma modificação proposta por Spurgeon e Davies (1993) que diminui o problema de trepidação sobre a superfície de deslizamento. Além disso, inclui dois exemplos que ilustram vantagens na utilização do CEV/MD que advém da escolha apropriada da superfície de chaveamento e outro exemplo

que mostra como a lei de controle de Spurgeon e Davies (1993) pode ser utilizada para evitar chaveamento excessivo na lei de controle.

2.1 MODELO DO SISTEMA

Considere um sistema de ordem n não linear no vetor de estado e linear no vetor de controle, como mostrado na Equação (1).

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t, x(t)), \quad (1)$$

sendo o vetor de estados $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, o vetor de controle $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $f(t, x(t)) \in \mathfrak{R}^n$ e $B(t, x(t)) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$. Além disso, todas as entradas em $f(t, x(t))$ e $B(t, x(t))$ são consideradas contínuas e com derivadas limitadas com relação a t e $x(t)$.

2.2 SUPERFÍCIE DE CHAVEAMENTO

A superfície de chaveamento é uma superfície no espaço de estados da forma $\sigma(x(t)) = 0 \in \mathfrak{R}^n$ que tem dimensão $n - m$ e é determinada pela interseção de m superfícies de dimensão $(n - 1)$: $\sigma_i(x(t)) = 0$. A superfície de chaveamento é projetada de modo que a resposta do sistema, quando em deslizamento, apresente características dinâmicas desejadas como estabilidade, tempo de assentamento, etc. Assim, o projeto da superfície de chaveamento é o primeiro passo no projeto CEV/MD.

O projeto de superfícies de chaveamento lineares permite a utilização de técnicas de controle linear clássicas como alocação de polos e regulador quadrático linear (LQR, do inglês “Linear Quadratic Regulator”) (OGATA, 2010) e, por isto, superfícies desta forma são amplamente utilizadas. Contudo, superfícies não lineares também são possíveis.

Tendo em vista simplicidade, será considerada uma superfície de chaveamento linear, na forma da Equação (2), dada por

$$\sigma(x(t)) = \left[\sigma_1(x(t)) \quad \cdots \quad \sigma_m(x(t)) \right]^T = Sx(t) = 0, \quad (2)$$

na qual $S \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ é a matriz da superfície de deslizamento.

Com a superfície de chaveamento apresentada, o controle chaveado assume a forma apre-

sentada na Equação (3), dada por

$$u_i(t, x(t)) = \begin{cases} u_i^+(t, x(t)), & \sigma_i(x(t)) > 0 \\ u_i^-(t, x(t)), & \sigma_i(x(t)) < 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

na qual $\sigma_i(x) = 0$ é a i -ésima superfície de deslizamento.

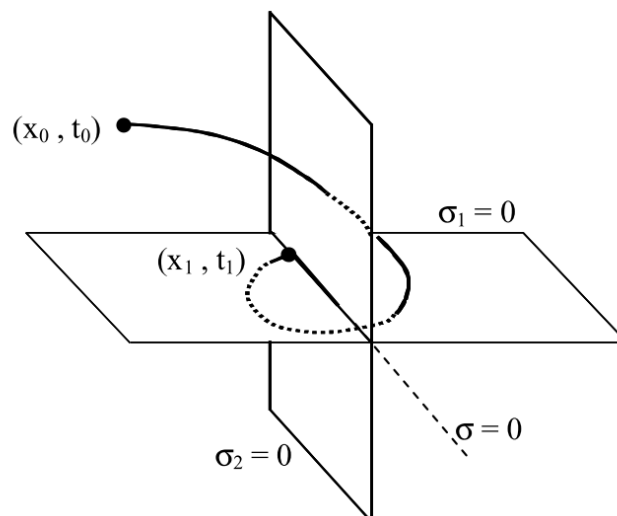
2.3 MODO DESLIZANTE

Como dito anteriormente, um modo deslizante existe quando a trajetória de estados de um sistema atinge uma superfície e nela permanece por todo o tempo sequente. Garantir a existência de um modo deslizante sobre uma superfície de chaveamento é o segundo passo no projeto do CEV/MD.

Um modo deslizante existe se na vizinhança de uma superfícies de chaveamento, $\sigma_i(x(t)) = 0$, a tangente à trajetória do vetor de estados sempre aponta em direção à superfície de chaveamento. Em consequência, se a trajetória de estados intercepta a superfície de chaveamento, o valor da trajetória de estados, ou “ponto representativo” permanece dentro de uma vizinhança ε da i -ésima superfície $\sigma_i(x(t)) = 0$.

Um modo deslizante não pode existir apenas em uma superfície de deslizamento $\sigma_i(x(t)) = 0$ separadamente. Se o modo deslizante existe, ele encontra-se na interseção das superfícies $\sigma_i(x(t)) = 0$, como é ilustrado na Figura 1.

Figura 1 - Existência de modo deslizante na intersecção de superfícies de chaveamento.



Fonte: Decarlo, Zak e Matthews (1988).

Um modo deslizante ideal existe apenas se a trajetória de estados da planta satisfaz $\sigma(x(t)) =$

0 para todo $t > t_0$ para algum $t_0 \geq 0$. Para que isto aconteça é necessário um chaveamento infinitamente rápido na lei de controle, o que em prática é impossível devido a imperfeições nos atuadores. Em sistemas reais o chaveamento ocorre em uma frequência finita e isso faz com que o ponto representativo oscile na vizinhança da superfície de deslizamento. Esse efeito é denominado trepidação (ou *chattering*). No entanto, se a frequência de chaveamento é rápida quando comparada a resposta dinâmica do sistema que está sendo controlado pode-se desprezar o efeito da trepidação e considerar que o chaveamento ocorre de forma ideal. Em geral a trepidação é indesejável. Uma discussão mais detalhada sobre como evitá-la é apresentada na Seção 2.10.

2.3.1 Condições para a Existência de um Modo Deslizante

Para que um modo deslizante exista é necessária a convergência da trajetória de estado para a superfície de deslizamento $\sigma(x(t)) = 0$ ao menos dentro de uma vizinhança da superfície de deslizamento. Isto é, o ponto representativo tem que se aproximar ao menos assintoticamente da superfície. A maior vizinhança onde isto acontece é chamada região de atração.

Com isto, o problema da convergência da trajetória de estados para a superfície de deslizamento assemelha-se a um problema de estabilidade generalizada e o segundo método de Lyapunov é uma abordagem natural para análise. Sob este enfoque é necessária a seleção de uma candidata à função generalizada de Lyapunov $V(t, x(t), \sigma(x(t)))$ que seja positiva definida e tenha derivada temporal negativa definida na região de atração.

Este conceito é formalizado no Teorema 2.1, mas para isto, é preciso definir o conceito de domínio de modo deslizante.

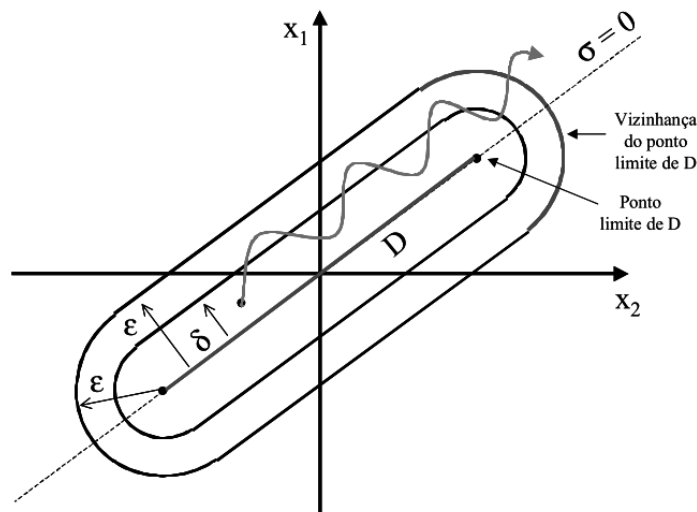
Definição 2.1. *Um domínio D dentro do espaço fechado $\sigma(x(t))$ é um domínio de modo deslizante se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que qualquer movimento iniciado dentro da vizinhança δ de dimensão n de D pode deixar a vizinhança ε de D apenas cruzando a vizinhança $\varepsilon > 0$ de D (UTKIN, 1977).*

Na Figura 2 é ilustrado o conceito de domínio de modo deslizante.

Teorema 2.1. *Para que um domínio D de dimensão $(n - m)$ seja um domínio de modo deslizante é suficiente que em algum domínio n -dimensional $\Omega \supset D$ exista uma função $V(t, x(t), \sigma(x(t)))$ continuamente diferenciável com respeito a todos os seus argumentos satisfazendo as seguintes condições:*

1. $V(t, x(t), \sigma(x(t)))$ é positiva definida com respeito a $\sigma(x(t))$, ou seja, $V(t, x(t), \sigma(x(t))) > 0$ para $\sigma(x(t)) \neq 0$, t e $x(t)$ arbitrários e $V(t, x(t), \sigma(x(t))) = 0$ para $\sigma(x(t)) = 0$, além

Figura 2 - Domínio de modo deslizante em \mathbb{R}^2 .



Fonte: Decarlo, Zak e Matthews (1988).

disso, na esfera $\|\sigma(x(t))\| = \rho$, para todo $x \in \Omega$ e algum t , as seguintes relações são verdadeiras:

- (i) $\inf_{\|\sigma(x(t))\|=\rho} V(t, x(t), \sigma(x(t))) = h_\rho, h_\rho > 0,$
- (ii) $\sup_{\|\sigma(x(t))\|=\rho} V(t, x(t), \sigma(x(t))) = H_\rho, H_\rho > 0.$

2. A derivada temporal de $V(t, x(t), \sigma(x(t)))$ para o sistema (1) tem um supremo negativo para todo $x(t) \in \Omega$, com exceção de $x(t)$ sobre a superfície de chaveamento onde as entradas de controle são indefinidas e por isto a derivada de $V(t, x(t), \sigma(x(t)))$ não existe (UTKIN, 1978).

Se o domínio de atração de um modo deslizante for todo o espaço de estado diz-se que este modo deslizante é globalmente alcançável. Caso isto não seja verdadeiro, o domínio é então um subconjunto do espaço de estados.

2.4 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO PARA SISTEMAS COM CONTROLE DE ESTRUTURA VARIÁVEL

O teorema convencional para existência e unicidade de equações diferenciais assume que elas sejam contínuas. No entanto, o controle com estrutura variável insere uma descontinuidade através de sua ação de controle, assim, o teorema convencional não pode ser utilizado neste caso. Além disso, é um pressuposto do CEV/MD que a planta se comporte de maneira única

quando restrita a $\sigma(x(t)) = 0$. Por isto, o problema da existência e unicidade de solução de equações diferenciais com descontinuidade é de importância fundamental.

Uma das abordagens para a concepção do teorema de unicidade de solução para equações diferenciais com descontinuidades é o método de Filippov (1988), que será apresentado a seguir.

Considere um sistema de ordem n com uma entrada de controle descrito pela Equação (4), dada por

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t, x(t))) \quad (4)$$

e estratégia de controle geral descrita em (5), como

$$u(t, x(t)) = \begin{cases} x = u^+(t, x(t)) & \text{se } \sigma(x(t)) > 0 \\ x = u^-(t, x(t)) & \text{se } \sigma(x(t)) < 0. \end{cases} \quad (5)$$

É mostrado por Filippov (1988) que as trajetórias de estado de (4) com controle (5) sobre $\sigma(x(t)) = 0$ são a solução da equação

$$\dot{x}(t) = \alpha f^+ + (1 - \alpha) f^- = f^0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (6)$$

sendo $f^+ = f(t, x(t), u^+(t, x(t)))$, $f^- = f(t, x(t), u^-(t, x(t)))$ e f^0 o vetor velocidade de estado resultante quando a trajetória de estados do sistema encontra-se sobre a superfície de deslizamento.

Resolvendo a equação $\langle \nabla \sigma(t, x(t)), f^0 \rangle$ para α tem-se

$$\alpha = \frac{\langle \nabla \sigma(t, x(t)), f^- \rangle}{\langle \nabla \sigma(t, x(t)), (f^- - f^+) \rangle}, \quad (7)$$

em que

- $\langle \nabla \sigma(t, x(t)), (f^- - f^+) \rangle > 0$ e
- $\langle \nabla \sigma(t, x(t)), f^+ \rangle \leq 0$ e $\langle \nabla \sigma(t, x(t)), f^- \rangle \geq 0$.

O símbolo $\langle . \rangle$ denota produto interno e $\nabla \sigma(x(t))$ o gradiente da função $\sigma(x(t))$.

Com isto, pode-se concluir que a solução para (4) com controle (5) existe e é unicamente definida sobre $\sigma(x(t))$.

A técnica de Filippov pode ser usada para determinar o comportamento da planta em modo deslizante. No entanto, uma técnica mais direta e facilmente aplicável em sistemas de múltiplas entradas é o método de controle equivalente (UTKIN, 1978).

2.5 MÉTODO DO CONTROLE EQUIVALENTE

Suponha que a trajetória de estados de uma planta intercepta uma superfície de chaveamento em t_0 e que um modo deslizante existe para $t \geq t_0$. Idealmente isto implica em $\sigma(x(t)) = 0$ e $\dot{\sigma}(x(t)) = 0$. Para o cálculo de $\dot{\sigma}(x(t))$ utiliza-se a regra da cadeia, o que resulta em

$$\frac{\partial \sigma(x(t))}{\partial t} = \left[\frac{\partial \sigma(x(t))}{\partial x} \right] \dot{x}. \quad (8)$$

Substituindo (1) em (8), com $u(t, x(t)) = u_{eq}(t, x(t))$, tem-se

$$\left[\frac{\partial \sigma(x(t))}{\partial x} \right] [f(t, x(t)) + B(t, x(t))u_{eq}(t, x(t))] = 0, \quad (9)$$

sendo $u_{eq}(t, x(t))$ encontrado em (9) chamado controle equivalente.

$$u_{eq}(t, x(t)) = - \left[\frac{\partial \sigma(x(t))}{\partial x} B(t, x(t)) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma(x(t))}{\partial x} f(t, x(t)). \quad (10)$$

Substituindo (10) em (1) resulta na Equação (11), que descreve o comportamento do sistema em modo deslizante.

$$\dot{x}(t) = \left[I - B(t, x(t)) \left[\frac{\partial \sigma(x(t))}{\partial x} B(t, x(t)) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma(x(t))}{\partial x} \right] f(t, x(t)). \quad (11)$$

No caso especial em que a superfície de deslizamento é linear na forma $\sigma(x(t)) = Sx(t) = 0$, temos que $\partial \sigma(x(t))/\partial x = S$ e assim a Equação (11) se reduz a

$$\dot{x}(t) = \left[I - B(t, x(t)) [SB(t, x(t))]^{-1} S \right] f(t, x(t)), \quad (12)$$

que provém certa facilidade ao projeto da superfície de chaveamento.

Com isto, o movimento do sistema sobre a superfície de deslizamento é determinado pela Equação (11) em conjunto com a restrição $\sigma(x(t)) = 0$. Assim, o movimento do sistema é governado por um conjunto de equações de ordem reduzida, pois a superfície de chaveamento gera restrições adicionais que são obrigatoriamente satisfeitas pelo movimento do sistema em deslizamento.

Para o caso em que o sistema é variante no tempo, a superfície de deslizamento também varia no tempo, ou seja, $\sigma(x(t)) = 0$ torna-se $\sigma(t, x(t)) = 0$. Neste caso, $\dot{\sigma}(t, x(t)) =$

$(\partial\sigma(t,x(t))/\partial t) + (\partial\sigma(t,x(t))/\partial x)\dot{x}$ e o controle equivalente passa a ser expresso por

$$u_{eq}(t,x(t)) = - \left[\frac{\partial\sigma(t,x(t))}{\partial x} B(t,x(t)) \right]^{-1} \left[\frac{\partial\sigma(t,x(t))}{\partial x} f(t,x(t)) + \frac{\partial\sigma(t,x(t))}{\partial t} \right]. \quad (13)$$

2.6 REDUÇÃO DE ORDEM

Em modo deslizante, um sistema tem que satisfazer não somente as n equações que descrevem sua dinâmica, mas também as m equações que descrevem a superfície de deslizamento na qual sua trajetória de estados está confinada. O uso destas restrições diminuem a dinâmica do sistema, que passa de ordem n para ordem $n - m$.

Considere um sistema descrito pela Equação (1) restrito a uma superfície linear na forma da Equação (2) com dinâmica dada por (12). Nestas condições, é possível evidenciar m das variáveis de estado em termos das restantes $n - m$ variáveis, caso S seja de posto completo.

Para obter a dinâmica reduzida, evidencia-se m variáveis de estado (por exemplo o conjunto $\{x_{n-m+1} \dots x_n\}$) em termos das $n - m$ variáveis restantes na superfície de deslizamento. A substituição destes m estados nas $n - m$ relações na Equação (12) resulta em um sistema de ordem $n - m$ que descreve completamente o sistema original quando este possui condição inicial sobre a superfície de deslizamento.

Para mostrar como pode ser obtida a equação de ordem reduzida do sistema em deslizamento, são apresentados a seguir dois exemplos que mostram características interessantes do sistema em deslizamento.

Exemplo 1: Considere o sistema $\dot{x}(t) = A(t,x(t))x(t) + Bu(t)$, sendo

$$A(t,x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{11}(t,x(t)) & a_{12}(t,x(t)) & a_{13}(t,x(t)) & a_{14}(t,x(t)) & a_{15}(t,x(t)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{21}(t,x(t)) & a_{22}(t,x(t)) & a_{23}(t,x(t)) & a_{24}(t,x(t)) & a_{25}(t,x(t)) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Assuma que a terceira e a quinta linhas da matriz $A(t, x(t))$ tenham entradas não lineares variantes no tempo, mas que sejam limitadas, ou seja, $a_{ij}^{min} \leq a_{ij}(t, x(t)) \leq a_{ij}^{max}$ para todo $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ e $t \in [t_0, \infty)$.

Projetando-se uma superfície de chaveamento linear $\sigma(x(t)) = Sx(t) = 0$ com S dada por

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

O método de controle equivalente produz a seguinte dinâmica em modo deslizante para este sistema:

$$\dot{x}(t) = [I - B(SB)^{-1}S]A(t, x(t))x(t). \quad (17)$$

Tem-se

$$SB = \begin{bmatrix} s_{13} & s_{15} \\ s_{23} & s_{25} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Para simplificar este exemplo, suponha $s_{13} = 2$, $s_{15} = s_{23} = s_{25} = 1$, então $s_{13}s_{25} - s_{15}s_{23} = 1$. Assim,

$$(SB)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s_{25} & -s_{15} \\ -s_{23} & s_{13} \end{bmatrix}}{s_{13}s_{25} - s_{15}s_{23}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

A substituição de (16) e (19) em (17) resulta na seguinte dinâmica em modo deslizante:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s_{21} - s_{11} & s_{22} - s_{12} & 0 & s_{24} - s_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & s_{11} - 2s_{21} & s_{12} - 2s_{22} & 0 & s_{14} - 2s_{24} \end{bmatrix} x(t). \quad (20)$$

A condição $\sigma(x(t)) = Sx(t) = 0$ é equivalente a

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Isolando os estados $x_3(t)$ e $x_5(t)$ em (21), chega-se a

$$\begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Substituindo (22) em (20) tem-se a dinâmica de ordem reduzida do sistema em deslizamento dada pela Equação (23).

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \\ \dot{\bar{x}}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_{21} - s_{11} & s_{22} - s_{12} & s_{24} - s_{14} \\ s_{11} - 2s_{21} & s_{12} - 2s_{22} & s_{14} - 2s_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \bar{x}_3(t) \end{bmatrix}, \quad (23)$$

sendo $\bar{x}_1(t) = x_1(t)$, $\bar{x}_2(t) = x_2(t)$ e $\bar{x}_3(t) = x_4(t)$.

Observe que a dinâmica do sistema em modo deslizamento, que é reduzida, não apresenta os termos $a_{ij}(t, x(t))$ que foram considerados não lineares e variantes no tempo. Esta dinâmica reduzida é linear e dependente apenas dos coeficientes da matriz S da superfície de deslizamento, que é projetada de modo que esta dinâmica reduzida apresente características desejadas.

Observe também que no sistema considerado as não linearidades e variâncias no tempo da matriz $A(t, x(t))$ estão na imagem da matriz B e, por isto, o sistema em deslizamento é robusto a elas. Como última consideração, este exemplo teve resolução relativamente simples por estar na chamada forma canônica de Luenberger. Para sistemas que não estão nesta forma é frequentemente necessário uma transformação para uma forma mais geral chamada forma regular (LUKYANOV; UTKIN, 1981).

Para demonstrar como os parâmetros livres da superfície de chaveamento podem ser determinados, suponha que as restrições de projeto exijam que os autovalores do sistema em deslizamento sejam $\{-1, -2, -3\}$. Assim, a equação característica polinomial desejada é

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0. \quad (24)$$

A equação característica polinomial do sistema de ordem reduzida (23) é

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (s_{12} - s_{22} + 2s_{24} - s_{14})\lambda^2 + (s_{12}s_{24} - s_{14}s_{22} + s_{11} - s_{21})\lambda + (s_{11}s_{24} - s_{14}s_{21}) = 0. \quad (25)$$

Igualando os coeficientes de mesma potência de λ em (24) e (25) tem-se o conjunto de

equações lineares dado pela equação

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & s_{24} & -s_{22} & -1 & 0 & 0 \\ s_{24} & 0 & 0 & -s_{14} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{14} \\ s_{21} \\ s_{22} \\ s_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Uma solução para (26) é: $s_{11} = s_{21} = 1$, $s_{12} = s_{22} = 1,8333$, $s_{14} = -6$ e $s_{24} = 0$, o que conduz a matriz de superfície de deslizamento

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1,8333 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 1,8333 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Com isto, o sistema equivalente de ordem reduzida com os autovalores projetados é descrito por $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t)$, na qual

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ -1 & -1,8333 & -6 \end{bmatrix}.$$

No Exemplo 2, é mostrado como uma superfície não linear pode ser utilizada para que um sistema não linear apresente comportamento linear em deslizamento.

Exemplo 2: Considere um manipulador robótico simples controlado por um motor de corrente contínua (ŽAKJ; MACCARLEY, 1986) modelado pela equação

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \text{sen}(x_1(t)) + x_3(t) \\ x_2(t) + x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \triangleq f(x(t)) + Bu(t). \quad (28)$$

Para qualquer superfície de deslizamento é requerido que $[\partial\sigma(x(t))/\partial x(t)]B(t, x(t))$ seja não singular. Com B dado em (28) é preciso que $[\partial\sigma(x(t))/\partial x_3(t)] \neq 0$. Sem perda de generalidade pode-se assumir $[\partial\sigma(x(t))/\partial x_3(t)] = 1$. Por isto, uma estrutura geral para a superfície de chaveamento para o sistema (28) é $\sigma(x(t)) = x_3(t) + \sigma_1(x_1(t), x_2(t)) = 0$.

Suponha que se deseja que o sistema em modo deslizante exiba o comportamento linear descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -a_1x_1(t) - a_2x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

sendo a_1 e a_2 constantes positivas, que podem ter seus valores calculados a partir da equação característica desejada do sistema de ordem reduzida, como no Exemplo 1.

Calculando $u_{eq}(t, x(t))$ pela Equação (10), chega-se a

$$u_{eq}(x(t)) = - \left[\begin{array}{cc|c} \frac{\partial \sigma_1(x(t))}{\partial x_1} & \frac{\partial \sigma_2(x(t))}{\partial x_2} & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \text{sen}(x_1(t)) + x_3(t) \\ x_2(t) + x_3(t) \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Substituindo (30) em (28) chega-se a equação que descreve o sistema em modo deslizante, dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \text{sen}(x_1(t)) - \sigma_1(x_1(t), x_2(t)) \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Comparando (31) com (29) segue que $\sigma_1(x_1(t), x_2(t)) = \text{sen}(x_1(t)) + a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$. Assim, a superfície de chaveamento torna-se

$$\sigma(x(t)) = \text{sen}(x_1(t)) + a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + x_3(t). \quad (32)$$

2.7 FORMA REGULAR E DINÂMICA DE ORDEM REDUZIDA

A forma regular do sistema dado em (1) é

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(t, x(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(t, x(t)) + B_2(t, x(t))u(t, x(t)), \end{aligned} \quad (33)$$

sendo $x_1(t) \in \mathfrak{R}^{n-m}$, $x_2(t) \in \mathfrak{R}^m$ e $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T \in \mathfrak{R}^n$. Quando um sistema encontra-se na forma regular sua dinâmica de ordem reduzida é facilmente calculada (DECARLO; ZAK; MATTHEWS, 1988).

Considere que a matriz $B_2(t, x(t)) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ é não singular, fato que é necessário para que exista o controle equivalente. Considere também que a superfície de chaveamento é linear e encontra-se na forma apresentada pela equação

$$\sigma(x(t)) = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = 0. \quad (34)$$

com S_2 não singular.

Assim, em modo deslizante tem-se

$$x_2(t) = -S_2^{-1}S_1x_1(t) \quad (35)$$

e

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x(t)) = f_1(t, x_1(t), -S_2^{-1}S_1x_1(t)). \quad (36)$$

Observe que se $f_1(t, x(t))$ tiver estrutura linear na forma $f_1(t, x(t)) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t)$, então uma dinâmica de ordem reduzida da forma (33) em deslizamento torna-se

$$\dot{x}_1 = [A_{11} - A_{12}S_2^{-1}S_1]x_1(t). \quad (37)$$

A dinâmica descrita pela Equação (37) tem estrutura de realimentação de estados “ $A - BK$ ”. Assim, pode-se utilizar técnicas já consagradas para encontrar o ganho K , como alocação de polos ou controle quadrático ótimo (OGATA, 2010) e depois encontrar a superfície correspondente fazendo-se $S_2^{-1}S_1 = B$, com isto o sistema em modo deslizante apresentará as características desejadas.

Considerando um caso mais geral, onde a superfície é linear em $x_2(t)$ e não linear em $x_1(t)$, ou seja, uma superfície descrita como

$$\sigma(x(t)) = \sigma_1(x_1(t)) + S_2x_2(t) = 0, \quad (38)$$

a dinâmica de ordem reduzida em modo deslizante passa a ser dada por

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), -S_2^{-1}\sigma_1(x_1(t))). \quad (39)$$

Contudo, existem sistemas que não encontram-se naturalmente na forma regular. Neste caso é necessária uma transformação de coordenadas não singular que permita a descrição destes sistemas na forma regular.

Admita uma superfície linear dada por (34) e uma transformação linear e invariante no tempo $z(t) = Tx(t)$. Calculando $\dot{z}(t)$, tem-se

$$\dot{z}(t) = T\dot{x}(t) = T[f(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t)] = Tf(t, x(t)) + TB(t, x(t))u(t, x(t)). \quad (40)$$

A transformação é calculada de modo que

$$TB(t, x(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

então a dinâmica da planta nas novas coordenadas é expressa pela equação

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= \bar{f}_1(t, z(t)) \\ \dot{z}_2(t) &= \bar{f}_2(t, z(t)) + \bar{B}_2(t, z(t))u(t, z(t)),\end{aligned}\quad (42)$$

na qual $\bar{f}_1(t, z(t)) = T f_1(t, x(t))$ e $\bar{f}_2(t, z(t)) = T f_2(t, x(t))$. Com isto, a dinâmica de ordem reduzida nas novas coordenadas torna-se

$$\dot{z}_1(t) = \bar{f}_1(t, z_1(t), -\bar{S}_2^{-1}\bar{S}_1 z_1(t)), \quad (43)$$

sendo $\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_1 & \bar{S}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix} T^{-1}$ a matriz da superfície de deslizamento nas novas coordenadas (DECARLO; ZAK; MATTHEWS, 1988).

Se não existir uma transformação tal que a condição (41) seja satisfeita, então pode-se recorrer a uma transformação não linear na forma

$$z(t) = T(t, x(t)) = \begin{bmatrix} T_1(t, x(t)) \\ T_2(t, x(t)) \end{bmatrix}, \quad (44)$$

na qual

- $T(\cdot, \cdot)$ é uma transformação que admite uma transformação inversa $\bar{T}(t, z(t)) = x(t)$ em que $\bar{T}(t, 0) = 0$ para todo t .
- $T_1(\cdot, \cdot) : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{n-m}$ e $T_2(\cdot, \cdot) : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$.

Diferenciando a Equação (44) com relação ao tempo, chega-se a

$$\dot{z}(t) = \frac{\partial T(t, x(t))}{\partial x} \dot{x}(t) + \frac{\partial T(t, x(t))}{\partial t}, \quad (45)$$

Substituindo o sistema (1) em (45), resulta em

$$\dot{z} = \frac{\partial T(t, x(t))}{\partial x} f(t, x(t)) + \frac{\partial T(t, x(t))}{\partial x} B(t, x(t))u(t, x(t)) + \frac{\partial T(t, x(t))}{\partial t}. \quad (46)$$

Se a transformação tem a seguinte característica:

$$\frac{\partial T(t, x(t))}{\partial x} B(t, x(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1(t, x(t))}{\partial x} \\ \frac{\partial T_2(t, x(t))}{\partial x} \end{bmatrix} B(t, x(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{B}_2(t, x(t)) \end{bmatrix}, \quad (47)$$

o sistema (1), nestas novas coordenadas, é descrito como

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= \frac{\partial T_1(t, x(t))}{\partial x} f(t, \bar{T}(t, z(t))) + \frac{\partial T_1(t, x(t))}{\partial t} \triangleq \bar{f}_1(t, z(t)), \\ \dot{z}_2(t) &= \frac{\partial T_2(t, x(t))}{\partial x} f(t, \bar{T}(t, z(t))) + \frac{\partial T_2(t, x(t))}{\partial t} + \frac{\partial T_2(t, x(t))}{\partial x} B(t, \bar{T}(t, z(t))) u(t) \\ &\triangleq \bar{f}_2(t, z(t)) + \bar{B}_2(t, z(t)) u(t).\end{aligned}\quad (48)$$

2.8 PROJETO DO CONTROLADOR

No CEV/MD, o controlador é projetado de modo a garantir a existência de um modo deslizante sobre a superfície de chaveamento. Seu projeto objetiva encontrar os ganhos chaveados de realimentação que mantenham a trajetória de estados do sistema sobre a superfície de deslizamento. Portanto, para realizar o projeto é necessário que a superfície de chaveamento tenha sido determinada.

A estrutura geral do controle consiste em um vetor $u(t, x(t)) \in \mathfrak{R}^m$ no qual suas entradas chaveiam entre dois valores de acordo com $\sigma(x(t))$. A estrutura dessas entradas são apresentadas na equação

$$u_i(t, x(t)) = \begin{cases} u_i^+(t, x(t)), & \text{se } \sigma_i(x(t)) > 0 \\ u_i^-(t, x(t)), & \text{se } \sigma_i(x(t)) < 0, \end{cases}\quad (49)$$

lembrando que $\sigma(x(t)) = [\sigma_1(x(t)) \ \cdots \ \sigma_m(x(t))]^T = 0$.

Existem diferentes abordagens para a síntese de controladores utilizando esta estrutura de controle, entre elas os métodos de diagonalização e de controle hierárquico.

Uma estrutura alternativa à (49) é

$$u_i(t, x(t)) = u_{eqi}(t, x(t)) + u_{Ni}(t, x(t)),\quad (50)$$

na qual $u_{eqi}(t, x(t))$ a i -ésima componente do controle equivalente (que é contínuo) e $u_{Ni}(t, x(t))$ a i -ésima componente descontínua do controle, também chamada de componente chaveada (DECARLO; ZAK; MATTHEWS, 1988).

Nesta estrutura, a parcela $u_{eqi}(t, x(t))$ garante a atratividade da superfície de chaveamento, ou seja, faz com que a trajetória do sistema, uma vez sobre a superfície no instante $t_1 \geq t_0$, permaneça nela para todo $t \geq t_1$. Isto é conseguido fazendo $\dot{\sigma}(x(t)) = 0$, resultando na Equação (10), como previamente demonstrado.

A componente $u_{Ni}(t, x(t))$ garante a alcançabilidade da superfície, fazendo com que o sis-

tema entre em modo deslizante. Isto é conseguido garantindo-se que uma trajetória de estado arbitrária do sistema iniciada em $x(t_0)$ seja conduzida até a superfície.

O problema de convergência da trajetória de estados para a superfície de deslizamento assemelha-se a um problema de estabilidade generalizada, sendo possível utilizar o segundo método de Lyapunov para análise. Considere uma candidata a função generalizada de Lyapunov descrita por

$$\begin{aligned} V(\sigma(x)) &= \sigma(x)^T \sigma(x) \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1(x) & \cdots & \sigma_m(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma(x)_1 & \cdots & \sigma_m(x) \end{bmatrix}^T \\ &= \sigma_1(x)^2 + \cdots + \sigma_m(x)^2. \end{aligned} \quad (51)$$

Então

$$\dot{V}(\sigma(x)) = 2\sigma_1(x)\dot{\sigma}_1(x) + \cdots + 2\sigma_m(x)\dot{\sigma}_m(x). \quad (52)$$

Uma condição suficiente para que $\dot{V}(\sigma(x))$ seja negativa definida é

$$\sigma_i(x)\dot{\sigma}_i(x) < 0 \text{ se } \sigma_i(x) \neq 0. \quad (53)$$

Substituindo a estrutura de controle (50) assim como $u_{eqi}(t, x(t))$ definido em (10) no cálculo de $\dot{\sigma}(x(t))$, tem-se (DECARLO; ZAK; MATTHEWS, 1988)

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(x(t)) &= \frac{\partial \sigma(x(t))}{\partial x} \dot{x}(t) \\ &= \frac{\partial \sigma(x(t))}{\partial x} [f(t, x(t)) + B(t, x(t))(u_{eq} + u_N)] \\ &= \frac{\partial \sigma(x(t))}{\partial x} [f(t, x(t)) + B(t, x(t))u_{eq}] + \frac{\partial \sigma(x(t))}{\partial x} B(t, x(t))u_N \\ &= \frac{\partial \sigma(x(t))}{\partial x} B(t, x(t))u_N. \end{aligned} \quad (54)$$

Assumindo que $[\partial \sigma(x(t))/\partial x]B(t, x(t)) = I$, então $\dot{\sigma}(x(t)) = u_N$. Com isto, a condição (53) para a estabilidade da superfície de deslizamento torna-se $\sigma(x(t))u_N(t, x(t)) \leq 0$ e é facilmente verificada. Existem diferentes possibilidades para lei de controle $u_N(t, x(t))$ que tornam a condição (53) verdadeira. A seguir são apresentadas algumas destas possibilidades (DECARLO; ZAK; MATTHEWS, 1988):

- Função sinal com ganho constante:

$$u_{Ni}(x(t)) = \begin{cases} \alpha_i \operatorname{sgn}(\sigma_i(x(t))) & \text{se } \sigma_i(x(t)) \neq 0, \alpha_i < 0 \\ 0 & \text{se } \sigma_i(x(t)) = 0. \end{cases} \quad (55)$$

Com este controle $\sigma_i(x(t))u_{Ni}(t, x(t)) = \alpha_i \sigma_i(x(t)) \operatorname{sgn}(\sigma_i(x(t))) < 0$ se $\sigma_i(x(t)) \neq 0$ e, portanto, existe o modo deslizante.

- Função sinal com ganhos variáveis:

$$u_{Ni}(x(t)) = \begin{cases} \alpha_i(\cdot) \operatorname{sgn}(\sigma_i(x(t))) & \text{se } \sigma_i(x(t)) \neq 0, \alpha_i(\cdot) < 0 \\ 0 & \text{se } \sigma_i(x(t)) = 0. \end{cases} \quad (56)$$

De modo análogo ao caso anterior, a condição necessária (53) é satisfeita, sendo $\alpha_i(\cdot)$ sempre negativo.

- Realimentação com ganhos constantes chaveados:

$$u_{Ni}(x(t)) = \psi x(t); \quad \psi = [\psi_{ij}], \quad \psi_{ij} \begin{cases} \alpha_{ij}, & \sigma_i(x(t))x_j(t) > 0 \\ \beta_{ij}, & \sigma_i(x(t))x_j(t) < 0, \end{cases} \quad (57)$$

sendo $\alpha_{ij} < 0$ e $\beta_{ij} > 0$, assim, $\sigma_i(x(t))u_{Ni}(t, x(t)) = \sigma_i(x(t))[\psi_{i1}x(t)_1 + \psi_{i2}x(t)_2 + \dots + \psi_{in}x(t)_n] < 0$.

- Realimentação contínua e linear:

$$u_{Ni}(x(t)) = \alpha_i \sigma_i(x(t)) \quad \text{com } \alpha_i < 0. \quad (58)$$

Com isto a condição de modo deslizante torna-se $\sigma_i(x(t))u_{Ni}(t, x(t)) = \alpha_i \sigma_i^2(x(t)) < 0$. De modo mais geral, este tipo de controle é dado pela equação

$$u_N(x(t)) = -L\sigma(x(t)), \quad (59)$$

sendo $L \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ uma matriz constante e positiva definida. Com o controle (59) a condição torna-se $\sigma(x(t))^T \dot{\sigma}(x(t)) = -\sigma(x(t))^T L \sigma(x(t)) < 0$ quando $\sigma(x(t)) \neq 0$.

- Vetor unitário com fator de escala:

$$u_{Ni} = \rho \frac{\sigma_i(x(t))}{|\sigma_i(x(t))|}, \quad \text{com } \rho < 0. \quad (60)$$

assim, $\sigma_i(x)u_{Ni}(t, x(t)) = \sigma_i(x)\rho \frac{\sigma_i(x)}{|\sigma_i(x)|} = \rho \sigma_i(x) \operatorname{sgn}(\sigma_i(x))$. Como $\sigma_i(x) \operatorname{sgn}(\sigma_i(x))$ é

sempre positivo e ρ é sempre negativo, a condição de existência de modo deslizante é satisfeita.

2.9 CONTROLE DE SISTEMAS INCERTOS COM CEV/MD

A motivação para o estudo de sistemas incertos recai sobre o fato de que a modelagem de sistemas reais introduz erros nos parâmetros do sistema. Estes erros são frequentemente limitados e seus limites superior e inferior são geralmente conhecidos.

Considere uma planta incerta representada pela equação

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= [f(t, x(t)) + \Delta f(t, x(t), r(t))] + [B(t, x(t)) + \Delta B(t, x(t), r(t))]u(t, x(t)), \\ x(t_0) &= x_0.\end{aligned}\quad (61)$$

na qual $r(t)$ é uma função vetorial com parâmetros incertos cujos valores pertençam a algum conjunto fechado e limitado.

Considere que as incertezas da planta $\Delta f(t, x(t), r(t))$ e $\Delta B(t, x(t), r(t))$ pertençam à imagem de $B(t, x(t))$ para todos os valores de t e $x(t)$. Esta condição é chamada condição de casamento. Com esta condição satisfeita, o sistema (61) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t, x(t)) + B(t, x(t))e(t, x(t), r(t), u(t)), \\ x(t_0) &= x_0,\end{aligned}\quad (62)$$

ou seja, as incertezas podem ser agrupadas em um único vetor.

Com estrutura de controle $u(t) = u_{eq}(t) + u_N(t)$, sendo $u_{eq}(t)$ o controle equivalente calculado para o sistema (62) assumindo incertezas nulas. As incertezas são consideradas no cálculo de $u_N(t)$.

Calculando $u_{eq}(t)$ de maneira já demonstrada, assumindo incertezas nulas e $[\partial\sigma/\partial x]B$ não singular, chega-se a (omitindo-se os argumentos) (DECARLO; ZAK; MATTHEWS, 1988):

$$u_{eq} = - \left[\frac{\partial\sigma}{\partial x} B \right]^{-1} \left[\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial\sigma}{\partial x} f \right]. \quad (63)$$

Para determinar $u_N(t)$ assume-se que

$$\|e(t, x(t), r(t), u(t))\| \leq \rho(t, x(t)), \quad (64)$$

sendo $\rho(t, x(t))$ uma função escalar não negativa. Considere também que

$$\hat{\rho}(t, x(t)) = \rho(t, x(t)) + \alpha, \quad (65)$$

com $\alpha > 0$ para simplificar os cálculos.

Assumindo a seguinte candidata a função de Lyapunov:

$$V(t, x(t)) = \frac{1}{2} \sigma(t, x(t))^T \sigma(t, x(t)). \quad (66)$$

Como no caso sem incertezas, é necessário que a derivada temporal da função de $V(t, x(t))$ seja negativa definida para que seja assegurada a atratividade da superfície de deslizamento, assim,

$$\frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} \triangleq \dot{V}(t, x(t)) = \sigma(t, x(t))^T \dot{\sigma}(t, x(t)) < 0, \quad (67)$$

sendo $\sigma(t, x(t)) \neq 0$ e

$$\dot{\sigma}(t, x(t)) = \frac{\partial \sigma(t, x(t))}{\partial t} + \frac{\partial \sigma(t, x(t))}{\partial x} \dot{x}(t). \quad (68)$$

O seguinte controlador garante a atratividade da superfície de chaveamento (DECARLO; ZAK; MATTHEWS, 1988):

$$u(t, x(t)) = u_{eq} + u_N = u_{eq} - \frac{B^T(t, x(t)) \nabla_x V(t, x(t))}{\|B^T(t, x(t)) \nabla_x V(t, x(t))\|} \hat{\rho}(t, x(t)), \quad (69)$$

com $\sigma(t, x(t)) \neq 0$ e $\nabla_x V(t, x(t))$ sendo o gradiente da função generalizada de Lyapunov:

$$\nabla_x V(t, x(t)) = \left[\frac{\partial \sigma(t, x(t))}{\partial x} \right]^T \sigma(t, x(t)). \quad (70)$$

Podendo ser verificado da seguinte maneira (suprimindo os argumentos):

$$\dot{V}(t, x(t)) = \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial x} (f + Bu + Be). \quad (71)$$

Substituindo (69) em (71) e manipulando, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x(t)) &= \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial x} f - \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial x} f - \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \left\| B^T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T \right\| \rho + \sigma^T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T Be \\ &\leq -\alpha \left\| B^T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T \right\|. \end{aligned} \quad (72)$$

2.10 TREPIDAÇÃO

No equacionamento dos controladores apresentados neste capítulo, o chaveamento da lei de controle foi considerado ideal, ou seja, chaveamento infinitamente rápido. Contudo, em

sistemas reais, o chaveamento acontece em uma frequência finita e isto faz com que a trajetória de estados oscile em torno da superfície de deslizamento. Este fenômeno é chamado trepidação (ou *chattering*).

A trepidação é indesejável pois pode excitar dinâmicas de alta frequência não modeladas da planta controlada, e com isto, até mesmo levar o sistema à instabilidade. Ademais, pode diminuir a vida útil do elemento de controle. Deste modo, a eliminação ou diminuição da trepidação é de caráter importante no controle com estrutura variável.

Uma solução para este problema é a utilização de um controlador com camada limite (DE-CARLO; ZAK; MATTHEWS, 1988). Definindo o conjunto

$$\{x \mid \|\sigma(x)\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0\} \quad (73)$$

como camada limite de espessura 2ε . Considere a lei de controle

$$u(t, x(t)) = \begin{cases} u_{eq}(t, x(t)) - \frac{B(t, x(t))^T \nabla_x V(t, x(t))}{\|B(t, x(t))^T \nabla_x V(t, x(t))\|} \hat{\rho}(t, x(t)), & \text{se } \|\sigma\| \geq \varepsilon \\ u_{eq}(t, x(t)) + \rho(t, x(t)), & \text{se } \|\sigma\| < \varepsilon \end{cases} \quad (74)$$

com $u_{eq}(t, x(t))$ definido por (63) e $\nabla_x V(t, x(t))$ definido por (70). $\rho(t, x(t))$ é uma função contínua tal que

$$\rho(t, x) = -\frac{B(t, x(t))^T \nabla_x V(t, x(t))}{\|B(t, x(t))^T \nabla_x V(t, x(t))\|} \hat{\rho}(t, x(t)), \quad (75)$$

sempre que $\|\sigma(t, x(t))\| = \varepsilon$ e $\|\rho(t, x(t))\| \leq \hat{\rho}(t, x(t))$.

Observe que (74) é igual a (69) quando o estado está fora da camada limite, garantindo a atratividade para esta camada, e, quando $\|\sigma(t, x(t))\| < \varepsilon$ utiliza-se uma aproximação contínua de (69).

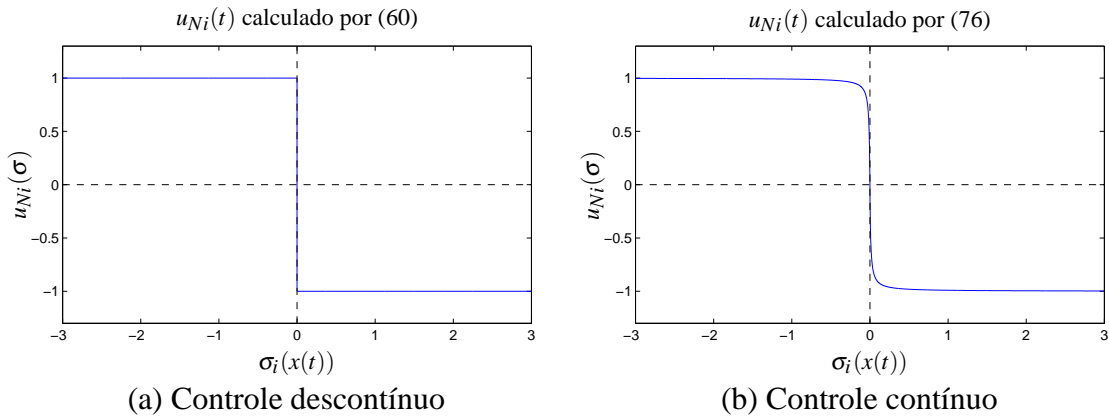
Outra possibilidade é apresentada por Spurgeon e Davies (1993), consistindo em uma modificação de (60):

$$u_{Ni}(t, x(t)) = \rho \frac{\sigma_i(t, x(t))}{|\sigma_i(t, x(t))| + \varepsilon}, \quad \rho < 0, \varepsilon \rightarrow 0^+. \quad (76)$$

Observe que a medida que $\varepsilon \rightarrow 0^+$ o controle (76) aproxima-se de (60). Além disso, essa modificação na lei de controle faz com que a componente de controle descontínuo $u_N(t, x(t))$ torne-se contínua.

Na Figura 3, são apresentados dois gráficos que ilustram esta diferença na lei de controle. Em 3 (a) é apresentado o sinal de controle (60) com $\rho = -1$ e em 3 (b) o sinal de controle (76) com $\rho = -1$ e $\varepsilon = 0,01$.

Figura 3 - Comparação entre leis de controle (a) lei de controle (60) com $\rho = -1$ e (b) lei de controle (76) com $\rho = -1$ e $\varepsilon = 0,01$.



Fonte: adaptado de Ribeiro (2006).

Com intuito de demonstrar a capacidade da lei de controle (76) em diminuir a trepidação, apresenta-se agora um exemplo retirado de Ribeiro (2006).

Exemplo 3: Considere uma planta descrita por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (77)$$

e condição inicial $x(t_0) = [x_1(t_0) \quad x_2(t_0)]^T = [1 \quad 1]^T$. A superfície de chaveamento foi projetada como

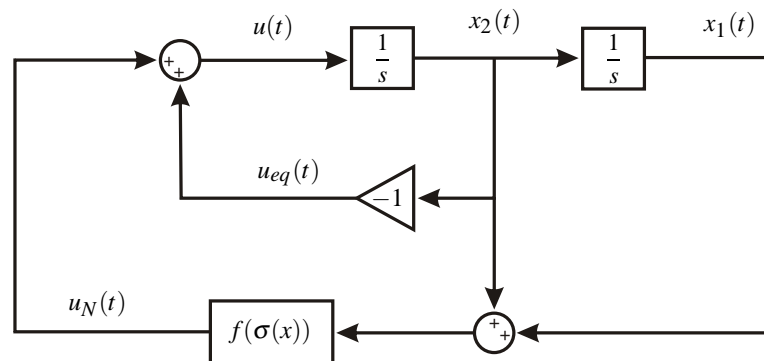
$$\sigma(x(t)) = x_1(t) + x_2(t) = 0. \quad (78)$$

A lei de controle adotada é $u(t, x(t)) = u_{eq}(t, x(t)) + u_N(t, x(t))$. O controle equivalente é calculado como $u_{eq}(t, x(t)) = -x_2(t)$. A outra parte da lei de controle é dada por $u_N = -\frac{\sigma(x(t))}{\sigma(x(t))}$ ou $u_N = -\frac{\sigma(x(t))}{\sigma(x(t)) + 0,1}$.

Na Figura 4 é mostrada a simulação realizada em MatLab/Simulink[®]. O bloco $f(\sigma(x))$ representa o cálculo do sinal u_N das duas maneiras propostas.

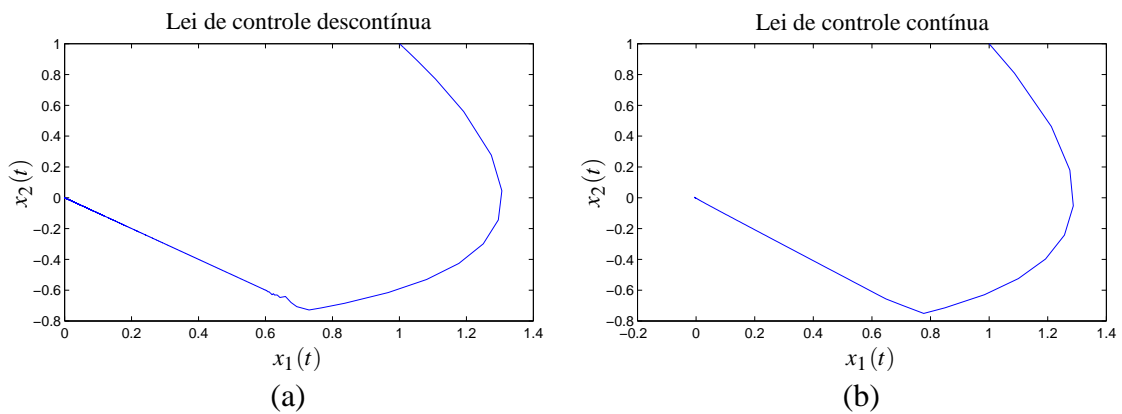
Nos gráficos das Figuras 5 e 6, é possível observar que apesar de gerarem a mesma trajetória para os estados, o sinal de controle apresenta um chaveamento excessivo quando se aplica a lei de controle (60) em contraste com o que ocorre quando aplica-se a lei de controle (76).

Figura 4 - Implementação em Matlab/Simulink[®] do sistema (77) com os controladores propostos.



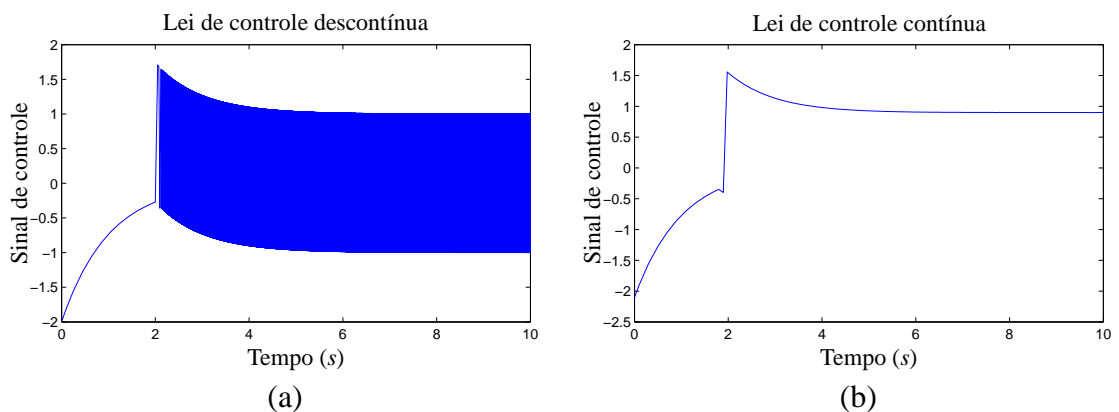
Fonte: adaptado de Ribeiro (2006).

Figura 5 - Trajetória de estados (a) $u_N(t)$ calculado por (60) e (b) $u_N(t)$ calculado por (76).



Fonte: resultados de simulação.

Figura 6 - Superfície de deslizamento (a) $u_N(t)$ calculado por (60) e (b) $u_N(t)$ calculado por (76).



Fonte: resultados de simulação.

2.11 COMENTÁRIOS

Este capítulo revisou a teoria de controle com estrutura variável e modos deslizantes no tempo contínuo utilizada neste trabalho tendo como fonte principal o trabalho de Decarlo, Zak

e Matthews (1988). Foi também apresentada a utilização de camada limite para a diminuição do problema de trepidação e mostrada sua aplicação em um exemplo.

Como a estrutura de controle $u(t, x(t)) = u_{eq}(t, x(t)) + u_N(t, x(t))$ com $u_{eq}(t, x(t))$ dada pela Equação (10) e $u_N(t, x(t))$ dado pela Equação (76) não possui parte chaveada, utiliza-se neste texto a denominação Controle com Modos Deslizantes Contínuo (CMDC) para se referir a tal lei.

Apesar de seus benefícios, o CMDC, assim como o controle contínuo de modo geral, pode sofrer deterioração em seu desempenho quando realizado por dispositivo digital (GARCIA et al., 2005). Tendo isto em vista, no Capítulo 3 é apresentada uma versão discreta de controle com modos deslizantes que leva em consideração o tempo de amostragem e os conversores A/D e D/A envolvidos em processos com controle digital.

3 CONTROLE COM ESTRUTURA VARIÁVEL E MODOS DESLIZANTES DISCRETO

Com a popularização dos microprocessadores e microcontroladores estes elementos passaram a estar presentes em quase todos os lugares e a realizar as mais diversas tarefas. O controle de processos é uma dessas tarefas.

Quando o controle é realizado por dispositivos digitais existe a influência dos conversores A/D, responsáveis por converter os sinais analógicos em uma forma interpretável aos controladores digitais; dos conversores D/A, que realizam a função reversa dos conversores A/D, transformando os sinais digitais da saída do controlador em sinais adequados à planta; e também, do tempo de amostragem envolvido no processo.

Estes novos elementos envolvidos, em especial o tempo de amostragem, podem deteriorar o desempenho de uma estratégia de controle em tempo contínuo realizada por dispositivo digital. Esta deterioração também ocorre com o controle CMDC apresentado no Capítulo 2 (GARCIA et al., 2005). Para minimizar esta deterioração é necessário considerar estes novos elementos durante o projeto de controle.

Neste capítulo, será visto como realizar o projeto de controle com estrutura variável no tempo discreto, iniciando pela dedução de um modelo no espaço de estados discreto a partir de um sistema descrito dessa forma em tempo contínuo.

3.1 MODELO DISCRETO NO ESPAÇO DE ESTADOS

O objetivo desta seção é descrever um sistema linear e invariante no tempo com estrutura de controle apresentada na Figura 7 de forma discretizada, considerando os conversores A/D e D/A envolvidos no processo e o período de amostragem, representado por T . A dedução apresentada aqui é encontrada em Franklin, Powell e Workman (1998).

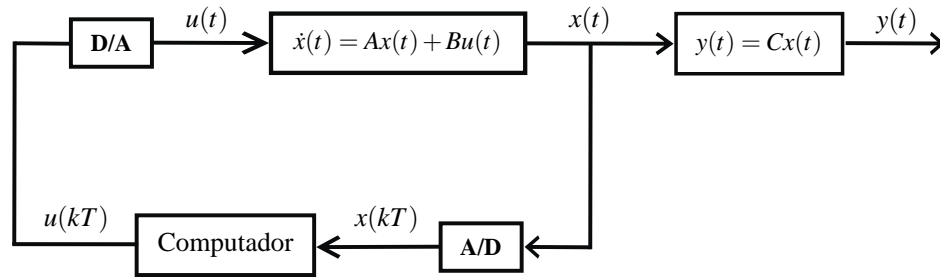
Considere um sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), invariante no tempo e contínuo, descrito pela equação

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{79}$$

na qual $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de controle, $y(t) \in \mathfrak{R}^p$ é o vetor de

saída. As matrizes $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ são consideradas constantes.

Figura 7 - Sistema controlado por computador.



Fonte: próprio autor.

Para relacionar a saída do sistema $y(t)$ com o sinal de controle $u(t)$ é preciso encontrar uma solução para $x(t)$. Como o sistema considerado é linear, isto será feito em duas etapas. Primeiro será encontrada a solução desconsiderando o sinal de controle (solução homogênea), $x_h(t)$ e, em seguida, desconsiderando a condição inicial (solução particular), $x_p(t)$. A solução geral será a soma das duas soluções encontradas, $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.

O sistema sem entrada é descrito por

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (80)$$

Assume-se que a solução para o sistema (80) possa ser escrita como

$$x_h(t) = A_0 + A_1(t - t_0) + A_2(t - t_0)^2 + \dots \quad (81)$$

Fazendo $t = t_0$, encontra-se $A_0 = x_0$. Diferenciando uma vez a Equação (81), encontra-se

$$\dot{x}_h(t) = A_1 + 2A_2(t - t_0) + 3A_3(t - t_0)^2 + \dots = Ax(t). \quad (82)$$

Fazendo novamente $t = t_0$, encontra-se $A_1 = Ax_0$. Continuando o mesmo procedimento tem-se

$$x_h(t) = \left[I + A(t - t_0) + \frac{A^2}{2}(t - t_0)^2 + \frac{A^3}{3!}(t - t_0)^3 + \dots \right] x_0. \quad (83)$$

Utilizando a definição de matriz exponencial:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}, \quad (84)$$

a solução (83) do sistema (81) pode ser reescrita como

$$x_h(t) = e^{A(t-t_0)}x_0. \quad (85)$$

Considerando agora o sistema com entrada não nula e sem condição inicial, a solução para este caso será encontrada utilizando o método da variação de parâmetros. Assumindo-se que a solução é da forma

$$x_p(t) = e^{A(t-t_0)}v(t), \quad (86)$$

sendo $v(t)$ um vetor com entradas variáveis a serem determinadas. Substituindo (86) em (79), tem-se

$$Ae^{A(t-t_0)}v(t) + e^{A(t-t_0)}\dot{v}(t) = Ae^{A(t-t_0)}v(t) + Bu(t), \quad (87)$$

o que conduz a

$$\dot{v}(t) = e^{-A(t-t_0)}Bu(t). \quad (88)$$

Assumindo que $u(t) = 0$ para $t < t_0$ é possível obter $v(t)$ pela integração no intervalo $t_0 \leq \tau \leq t$, assim

$$v(t) = \int_{t_0}^t e^{-A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau. \quad (89)$$

Substituindo (89) em (86), encontra-se a solução para o sistema particular como sendo

$$x_p(t) = e^{A(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-A(\tau-t_0)}Bu(\tau) d\tau. \quad (90)$$

Usando $e^{A(t_2-t_0)} = e^{A(t_2-t_1)}e^{A(t_1-t_0)}$, a Equação (90) pode ser simplificada como

$$x_p(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau. \quad (91)$$

Por fim, a solução total para (79) é dada por

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau. \quad (92)$$

Agora a solução (92) será considerada em um período de amostragem T , de modo a encontrar a equação de diferença que descreve o sistema (79) em tempo discreto. Substituindo $t = kT + T$ e $t_0 = kT$ em (92), encontra-se

$$x(kT + T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}Bu(\tau) d\tau. \quad (93)$$

Observe que esta equação é independente do tipo de conversor D/A utilizado para o sinal

de controle. Será utilizado o conversor de ordem zero, que aproxima o sinal amostrado como uma constante no intervalo de amostragem, ou seja: $u(\tau) = u(kT)$, $kT \leq \tau \leq kT + T$.

Para facilitar a solução de (93), utiliza-se a mudança de variável $\eta = kT + T - \tau$. Com isto, tem-se

$$x(kT + T) = e^{AT} x(kT) + \int_0^T e^{A\eta} d\eta Bu(kT). \quad (94)$$

Definindo:

$$\Phi = e^{AT} \quad e \quad (95)$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{A\eta} d\eta G, \quad (96)$$

a Equação (79) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k), \\ y(k) &= Cx(k). \end{aligned} \quad (97)$$

Definindo Ψ como

$$\Psi = I + \frac{AT}{2!} + \frac{A^2T^2}{3!} + \dots, \quad (98)$$

Φ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \Phi = e^{AT} &= I + AT + \frac{A^2T^2}{2!} + \frac{A^3T^3}{3!} + \dots \\ &= I + AT \left(I + AT + \frac{AT}{2!} + \frac{A^2T^2}{3!} + \dots \right) \\ &= I + AT\Psi, \end{aligned} \quad (99)$$

Γ pode ser encontrado avaliando termo a termo a integral da Equação (96), o que resulta em

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_0^{\infty} \frac{A^k T^{k+1}}{k+1} B \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{A^k T^k}{k+1} TB \\ &= \Psi TB. \end{aligned} \quad (100)$$

Com isto, a dinâmica contínua (79) é correspondente a Equação (97) em tempo discreto quando utiliza-se conversores de ordem zero.

3.2 CONTROLE COM MODOS DESLIZANTES DISCRETO

Esta seção descreve a abordagem de controle com estrutura variável e modos deslizantes discreto proposto por Garcia et al. (2005). A lei de controle utilizada caracteriza-se pela simples implementação, robustez a certa classe de incertezas e por ser *suave*, ou seja, não apresentar parte chaveada. Por não apresentar parte chaveada será utilizada a expressão Controle com Modos Deslizantes Discreto (CMDD) para se referir a tal lei.

Considere um sistema MIMO discreto descrito por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma v(k) \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \quad (101)$$

no qual o vetor de estados é $x(k) \in \mathfrak{R}^n$, o vetor de controle é $u(k) \in \mathfrak{R}^m$ e a saída do sistema é $y(k) \in \mathfrak{R}^p$. As matrizes $\Phi \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $\Gamma \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ são constantes.

A superfície de chaveamento considerada é linear e invariante no tempo:

$$\mu(k) = Gx(k), \quad (102)$$

sendo $G \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ uma matriz constante constituída pelos ganhos da superfície de chaveamento. A matriz G é projetada considerando o sistema (101) com dinâmica de ordem reduzida de modo análogo ao projeto da matriz S do caso contínuo (Seção 2.7).

Será projetada uma lei de controle que segue a estrutura da Equação (103), similar ao caso contínuo dada pela Equação (50):

$$v_i(k) = v_{eqi}(k) + v_{Ni}(k), \quad (103)$$

sendo $v_{eqi}(k)$ a i -ésima componente do controle equivalente discreto e v_{Ni} a i -ésima componente do controle v_N .

3.2.1 Projeto do Controle Discreto

Depois de projetada a superfície de chaveamento, o próximo passo é o projeto da lei de controle que faça com que ocorra um modo deslizante sobre esta superfície. De modo análogo ao caso contínuo, o controle equivalente é encontrado garantindo-se que a trajetória dos estados permaneça sobre a superfície, o que no tempo discreto é equivalente a condição

$$\mu(k) = Gx(k) = \mu(k+1) = Gx(k+1). \quad (104)$$

Substituindo (101) em (104) e substituindo o controle $v(k)$ pela estrutura de controle (103) com $v_N(k) = 0$, tem-se

$$Gx(k) = G[\Phi x(k) + \Gamma v_{eq}(k)]. \quad (105)$$

Isolando $v_{eq}(k)$ em (105) tem-se o controle equivalente discreto dado por

$$v_{eq}(k) = -(G\Gamma)^{-1}G(\Phi - I)x(k). \quad (106)$$

Com esta lei de controle, o sistema em modo deslizante obedece a seguinte dinâmica:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= [\Phi - \Gamma(G\Gamma)^{-1}G(\Phi - I)]x(k), \\ Gx(k) &= 0, \end{aligned} \quad (107)$$

que é encontrada substituindo o controle (106) no sistema (101). É importante notar que os ganhos da superfície de chaveamento discreta G devem ser projetados de modo a garantir a estabilidade do sistema em deslizamento (107).

O Controle $v_{Ni}(k)$ deve garantir a estabilidade da superfície de deslizamento, assim, será utilizado o segundo método de Lyapunov em sua dedução. Suponha a seguinte candidata a função de Lyapunov:

$$V(\mu(k)) = \mu(k)^T \mu(k). \quad (108)$$

Para que (108) seja uma função de Lyapunov, é necessário que $V(k+1) < V(k)$. Assim, é necessário que

$$\mu(k+1)^T \mu(k+1) < \mu(k)^T \mu(k), \quad \|\mu(k)\| \neq 0. \quad (109)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \Delta\mu(k+1) &= \mu(k+1) - \mu(k) \\ &= Gx(k+1) - Gx(k) \\ &= G(\Phi x(k) + \Gamma v(k)) - Gx(k). \end{aligned} \quad (110)$$

Substituindo (103) junto com (106) em (110), obtêm-se

$$\Delta\mu(k+1) = G\Gamma v_N(k). \quad (111)$$

Substituindo $\mu(k+1) = \mu(k) + \Delta\mu(k+1)$ com (111) em (109) tem-se

$$[\mu(k) + \Delta\mu(k+1)]^T [\mu(k) + \Delta\mu(k+1)] < \mu(k)^T \mu(k), \quad \|\mu(k)\| \neq 0, \quad (112)$$

ou, com alguns cálculos

$$2\Delta\mu(k+1)^T\mu(k) < -\Delta\mu(k+1)^T\Delta\mu(k+1), \quad \|\Delta\mu(k+1)\| \neq 0, \|\mu(k)\| \neq 0. \quad (113)$$

Substituindo (111) em (113), segue que

$$[G\Gamma v_N(k)]^T\mu(k) < -\frac{1}{2}[G\Gamma v_N(k)]^TG\Gamma v_N(k), \quad \|\mu(k)\| \neq 0. \quad (114)$$

A Equação (114) representa a condição de atratividade da superfície de deslizamento discreta $\mu(k)$. Assumindo $G\Gamma = I$, a Equação (114) se resume a

$$v_N(k)^T\mu(k) < -\frac{1}{2}v_N(k)^Tv_N(k), \quad \|\mu(k)\| \neq 0, \quad (115)$$

que pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^m v_{iN}(k)\mu_i(k) < -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m [v_{iN}(k)]^2, \quad \|\mu(k)\| \neq 0, \quad (116)$$

lembrando que $\mu(k) = [\mu_1(k) \ \cdots \ \mu_m(k)]^T$.

Uma lei de controle para as componentes do vetor $v_N(k)$ que satisfazem a condição (116) é

$$v_{iN}(k) = -\gamma_i\mu_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (117)$$

com $\gamma_i \in \Re$ (GARCIA et al., 2005). Considerando (116), é suficiente que

$$v_{iN}(k)\mu_i(k) < -\frac{1}{2}[v_{iN}(k)]^2, \quad \|\mu_i(k)\| \neq 0, \quad (118)$$

para que a condição (115) seja satisfeita. Assim, substituindo a lei de controle (117) em (118) segue que

$$\begin{aligned} -\gamma_i\mu_i(k)^T\mu_i(k) &< -\frac{1}{2}\gamma_i^2\mu_i(k)^T\mu_i(k) \\ -\gamma_i &< -\frac{1}{2}\gamma_i^2 \\ \gamma_i\left(\frac{\gamma_i}{2} - 1\right) &< 0 \end{aligned}$$

ou seja, é suficiente que $0 < \gamma_i < 2$ para que a condição de atratividade da superfície de deslizamento seja satisfeita (RIBEIRO, 2006).

Caso o sistema tenha apenas uma entrada de controle, a lei de controle completa é dada

pela equação

$$v(k) = v_{eq}(k) + v_N(k) = -[(G\Gamma)^{-1}G(\Phi - I) - \gamma G]x(k), \quad 0 < \gamma < 2. \quad (119)$$

Ribeiro (2006) ressalta a simplicidade desta lei de controle em comparação a outras propostas na literatura (FURUTA, 1990), o que garante computação rápida pelo dispositivo digital que realiza o controle do sistema.

3.2.2 Análise de Robustez

Considere o seguinte sistema discreto com incertezas

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma v(k) + \Delta f(x(k)), \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \quad (120)$$

no qual $\Delta f(x(k)) \in \mathfrak{R}^n$ é uma função discreta que representa as incertezas da planta.

Teorema 3.1. *Se $\|G\Delta f(x(k))\| < \|Gx(k)\|$ para todo k , então o sistema descrito pela Equação (120) com lei de controle (103), sendo $v_{eq}(k)$ dado por (106) e $v_N(k)$ sendo um vetor cujas componentes são determinadas por (117), terá garantida a atratividade da superfície de deslizamento (GARCIA et al., 2005).*

Prova: Observe que considerando as incertezas do modelo (120), tem-se

$$\begin{aligned} \Delta\mu(k+1) &= \mu(k+1) - \mu(k) \\ &= Gx(k+1) - Gx(k) \\ &= G[\Phi x(k) + \Gamma v(k) + \Delta f(x(k))] - Gx(k), \end{aligned} \quad (121)$$

Substituindo (103) e (106) em (121), encontra-se

$$\Delta\mu(k+1) = G\Gamma v_N(k) + G\Delta f(x(k)). \quad (122)$$

Assumindo a função $V(k) = \mu(k)^T \mu(k)$ como candidata a função de Lyapunov, então $V(k+1) = \mu(k+1)^T \mu(k+1)$. Considerando (121) tem-se

$$V(k+1) = [\mu(k) + \Delta\mu(k+1)]^T [\mu(k) + \Delta\mu(k+1)]. \quad (123)$$

Substituindo (122) em (123)

$$V(k+1) = [\mu(k) + G\Gamma v_N(k) + G\Delta f(x(k))]^T [\mu(k) + G\Gamma v_N(k) + G\Delta f(x(k))]. \quad (124)$$

Será considerado que o sistema controlado possui apenas uma entrada de controle, que $\gamma = 1$ e que $G\Gamma = 1$, de modo a facilitar os cálculos. Com isto

$$\begin{aligned} V(k+1) &= [\mu(k) - \mu(k) + G\Delta f(x(k))]^T [\mu(k) - \mu(k) + G\Delta f(x(k))] \\ &= [G\Delta f(x(k))]^T [G\Delta f(x(k))] \\ &= \|G\Delta f(x(k))\|^2. \end{aligned} \quad (125)$$

A função $V(k)$ pode ser reescrita como

$$V(k) = \mu(k)^T \mu(k) = [Gx(k)]^T [Gx(k)] = \|Gx(k)\|^2. \quad (126)$$

Se $\|G\Delta f(x(k))\| < \|Gx(k)\|$, considerando (126) e (125), conclui-se que

$$V(k+1) = \|G\Delta f(x(k))\|^2 < \|Gx(k)\|^2 = V(k). \quad (127)$$

Portanto, a condição de atratividade da superfície de deslizamento $\mu(k)$ é satisfeita para $\|G\Delta f(x(k))\| < \|Gx(k)\|$.

3.3 COMENTÁRIOS

Neste capítulo, foi apresentado como determinar o modelo discreto de um sistema a partir de seu modelo contínuo no espaço de estados (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998). Foi apresentada também a lei de controle com modos deslizantes discreta utilizada neste trabalho (GARCIA et al., 2005).

O modelo discretizado do sistema é ponto de partida para o desenvolvimento de leis de controle discretas no tempo, que levam em consideração os conversores A/D e D/A presentes nos processos controlados por computador e também o período de amostragem.

Como principais vantagens da lei de controle CMDD cita-se seu cálculo rápido e robustez a certa classe de incertezas na planta. O cálculo rápido é de suma importância pois o tempo gasto com cálculos no controlador pode ocasionar atraso no sistema de controle e estes atrasos podem prejudicar o desempenho do controle com modos deslizantes (LEE; LEE, 1999).

No Capítulo 4, é analisada a influência que atrasos na aquisição de dados podem gerar em sistemas controlados com CMDC e CMDD. Será visto também estratégias para superar este problema em tempo contínuo e em tempo discreto.

4 CONTROLE DE SISTEMAS COM ATRASO NA AQUISIÇÃO DE DADOS UTILIZANDO PREDITORES DE ESTADO

Sistemas de controle estão sujeitos a diferentes tipos de atraso. Estes atrasos podem deteriorar o desempenho do controle ou até mesmo levar o sistema à instabilidade dependendo da estratégia de controle e da magnitude do atraso envolvido.

No CEV/MD, o problema do atraso tem importância fundamental. Por utilizar uma lei de controle chaveada em alta frequência com a finalidade de levar a trajetória de estados a uma superfície de deslizamento dependente dos estados atuais, se os estados utilizados forem atrasados, a lei de controle pode não direcionar os estados a esta superfície o que pode, inclusive, levar o sistema à instabilidade (RIBEIRO, 2006).

As principais fontes de atrasos estão no tempo necessário para a aquisição de dados de sensores em diferentes lugares da planta e em seu tráfego por rede de dados, no tempo utilizado para filtragem e processamento dos dados dos sensores, no tempo necessário ao cálculo do sinal de controle, no tempo de transmissão do sinal de controle até o atuador e no tempo necessário para que o atuador produza a resposta necessária (CAI; HUANG; YANG, 2003).

Em plantas controladas via rede de comunicação, o mal funcionamento da rede poderá provocar atrasos na aquisição e envio de dados, prejudicando assim o desempenho do sistema (HESPANHA; NAGHSHTABRIZI; XU, 2007; GUINALDO; SÁNCHEZ; DORMIDO, 2011), o que caracteriza-se como uma falha, a qual poderá ser detectada e seus controladores adaptados para acomodar o sistema a esta situação, mantendo-se desempenho satisfatório (APOLINÁRIO, 2009). Considerando sistemas NCS transmitindo por rede *Wireless*, o atraso gerado por comunicação entre os elementos da malha de controle, sensores, controladores e atuadores pode chegar a vários períodos de amostragem (GUINALDO; SÁNCHEZ; DORMIDO, 2011). Este fato deve ser levado em consideração no projeto do controlador para melhor desempenho do sistema.

Neste capítulo, é mostrado como preditores de estado podem ser utilizados em sistemas de controle com atrasos na aquisição de dados, constantes, conhecidos e que correspondem a vários períodos de amostragem, em tempo contínuo e discreto, de modo a garantir o desempenho do controle utilizado.

4.1 ATRASOS NA AQUISIÇÃO DE DADOS

Uma descrição geral para sistemas lineares e invariantes no tempo com atraso é apresentada por Richard (2003):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \sum_{l=1}^q D_l \dot{x}(t - \omega_l) + \sum_{i=0}^k [A_i x(t - h_i) + B_i u(t - h_i)] + \\ & \sum_{j=1}^r \int_{t-\tau_j}^t [G_j(\theta)x(\theta) + H_j(\theta)u(\theta)] d\theta, \end{aligned} \quad (128)$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^k C_i x(t - h_i) + \sum_{j=1}^r \int_{t-\tau_j}^t N_j(\theta)x(\theta)d\theta, \quad (129)$$

na qual $h_0 = 0$, A_0 é a matriz de ganhos instantâneos, A_i , $i > 0$, representando os ganhos dos estados atrasados. Os somatórios de integrais representam os efeitos distribuídos do atraso no intervalo $[t - \tau_i, t]$ que são ponderados pelas matrizes G_j e H_j . D_l representam a parte dependente das derivadas em tempos anteriores e B_i e H_j são as matrizes da entrada. $y(t)$ representa a saída dependendo dos estados atrasados.

Se for considerado que os efeitos de atrasos distribuídos possam ser aproximados por uma soma de atrasos discretos, ou possam ser desconsiderados, e que não existe dependência das derivadas dos estados anteriores, tem-se a dinâmica de um sistema com atraso representado por

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^k [A_i x(t - h_i) + B_i u(t - h_i)]. \quad (130)$$

Observe que a dinâmica descrita em (130) depende dos estados e das entradas atrasados em diferentes períodos de tempo ponderados por diferentes matrizes A_i e B_i .

Um caso particular do sistema (130) surge quando existe apenas um atraso h no vetor de controle, ou seja,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - h), \quad (131)$$

considerando os tipos de atraso citados por Cai, Huang e Yang (2003), este tipo de atraso engloba o tempo de transmissão do sinal de controle até o atuador e o tempo necessário para que o atuador produza a resposta necessária.

O atraso presente na Equação (131) foi estudado em Garcia (2002) sobre o enfoque do CEV/MD, surgindo a proposta de união do CEV/MD com preditores de estado para o tratamento deste tipo de atraso.

Quando existe apenas um atraso h oriundo da aquisição de dados nos estados do sistema, é

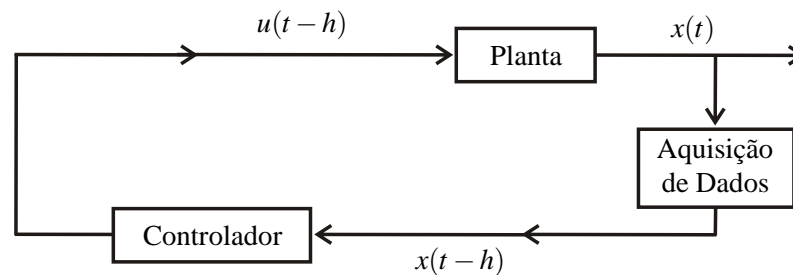
importante notar que, caso a lei de controle seja calculada com base nos estados que estão disponíveis ao controlador, $x(t-h)$, a ação de controle calculada também estará atrasada, $u(t-h)$. Seguindo a proposta de Cai, Huang e Yang (2003), pode-se considerar que os atrasos na aquisição de dados ocorrem no tempo necessário à obtenção dos sinais dos sensores em diferentes lugares da planta e em seu tráfego por rede de dados e no tempo utilizado para filtragem e processamento dos dados desses sensores.

Assim, um atraso na aquisição de dados gera um atraso em cadeia quando a lei de controle é baseada nestes estados atrasados e o sistema passa a ter dinâmica representada pela equação

$$\dot{x}(t-h) = Ax(t-h) + Bu(t-h). \quad (132)$$

Na Figura 8, é apresentado um esquema que ilustra esta situação.

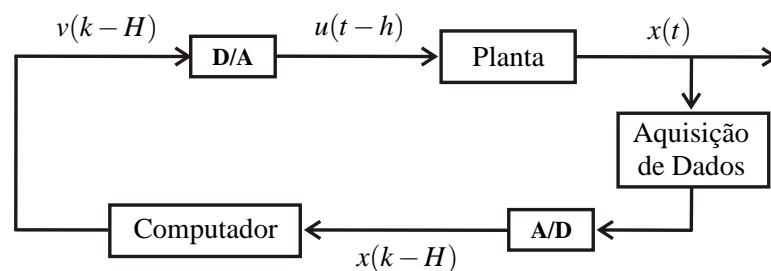
Figura 8 - Sistema contínuo com atraso na aquisição de dados.



Fonte: próprio autor.

Considere agora a existência de atraso na aquisição de dados em um sistema controlado por computador, ou por qualquer outro dispositivo digital. Neste caso, é necessário o emprego de conversores analógico/digitais com um período de amostragem. Esta situação é ilustrada na Figura 9, onde $h = HT$, sendo T o período de amostragem.

Figura 9 - Sistema controlado por computador com atraso na aquisição de dados.



Fonte: próprio autor.

Assim como no caso contínuo, caso o sinal de controle seja calculado com base nos sinais

atrasados $x(k-H)$, ele também estará atrasado no tempo e será $v(k-H)$, desse modo, a planta com atraso na aquisição de dados passa a ser representada por

$$x(k-H+1) = \Phi x(k-H) + \Gamma v(k-H). \quad (133)$$

Outro tipo de atraso que pode surgir quando o controle é realizado por dispositivo digital é o atraso na computação do sinal de controle, que assim como outros tipos de atrasos, é prejudicial à eficiência do sistema de controle empregado. Este tipo de atraso é tratado por Lee e Lee (1999) que apresentam controlador e observador baseados em CEV/MD discreto que consideram este tipo de atraso.

4.2 ELIMINAÇÃO DOS EFEITOS DOS ATRASOS DE AQUISIÇÃO DE DADOS COM USO DE PREDITORES DE ESTADO

Na mesma linha que em Garcia (2002), em Fernandes (2013) utilizaram-se preditores de estado no tratamento de atrasos na aquisição de dados observando que atrasos na aquisição de dados geram atrasos no controle do sistema.

Esta seção apresenta esta estratégia, que consiste em adaptar o preditor de estados de Furukawa e Shimemura (1983) para atrasos na aquisição de dados em sistemas no tempo contínuo. Além disso, esta seção também apresenta uma extensão dessa estratégia que permite o tratamento de atrasos na aquisição de dados em tempo discreto, adaptando, desta vez, o preditor de estados proposto por Xia et al. (2007). Tanto em tempo contínuo quanto em tempo discreto, são realizadas análises sobre a influência da inclusão desses preditores na malha de controle, considerando que o sistema original seja incerto ou que haja erros nas estimativas do atraso e que os controladores utilizados sejam CMDC ou CMDD, contemplando as propostas deste trabalho.

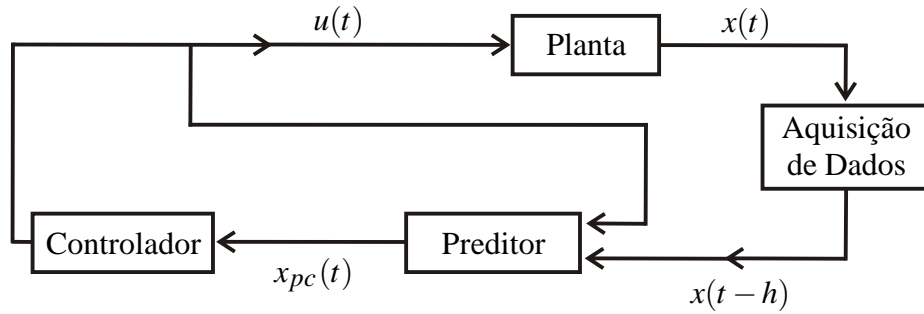
4.2.1 Proposta para o Sistema em Tempo Contínuo

Considere o sistema dado em (132). A abordagem de Fernandes (2013) para a eliminação do atraso de aquisição de dados consiste em utilizar o preditor de estados desenvolvido por Furukawa e Shimemura (1983). Um esquema que ilustra este procedimento é apresentado na Figura 10.

O preditor de estados de Furukawa e Shimemura (1983) é dado por

$$x_p(t) = x(t+h) = e^{Ah}x(t) + \int_t^{t+h} e^{A(t+h-\tau)}Bu(\tau-h) d\tau. \quad (134)$$

Figura 10 - Eliminação dos efeitos de atrasos na aquisição de dados em sistema contínuo com uso de preditor de estados.



Fonte: próprio autor.

Observe que, se o preditor é calculado a partir do estado atrasado $x(t-h)$, tem-se $x_{pc}(t) = x(t+h-h) = x(t)$. Assim é possível estimar o estado instantâneo a partir do estado atrasado. Neste caso,

$$x_{pc}(t) = x(t) = e^{Ah}x(t-h) + \int_t^{t+h} e^{A(t+h-\tau)}Bu(\tau-h)d\tau. \quad (135)$$

A dinâmica do estado preditivo $x_{pc}(t)$ é livre de atraso como é mostrado a seguir. Derivando $x_{pc}(t)$ com relação a t tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_{pc}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{Ah}x(t-h) + \int_t^{t+h} e^{A(t+h-\tau)}Bu(\tau-h)d\tau \right] \\ &= e^{Ah}\dot{x}(t-h) + \int_t^{t+h} \frac{\partial}{\partial t} [e^{A(t+h-\tau)}Bu(\tau-h)]d\tau + e^{A(t+h-(t+h))}Bu((t+h)-h) \\ &\quad - e^{A(t+h-t)}Bu(t-h) \\ &= e^{Ah}\dot{x}(t-h) + \int_t^{t+h} Ae^{A(t+h-\tau)}Bu(\tau-h)d\tau + IBu(t) - e^{Ah}Bu(t-h) \\ &= e^{Ah}\dot{x}(t-h) + A \int_t^{t+h} e^{A(t+h-\tau)}Bu(\tau-h)d\tau + Bu(t) - e^{Ah}Bu(t-h). \end{aligned} \quad (136)$$

Substituindo (132) em (136) segue que

$$\begin{aligned} \dot{x}_{pc}(t) &= e^{Ah}Ax(t-h) + e^{Ah}Bu(t-h) + A \int_t^{t+h} e^{A(t+h-\tau)}Bu(\tau-h)d\tau + Bu(t) - e^{Ah}Bu(t-h) \\ &= A \left\{ \underbrace{e^{Ah}x(t-h) + \int_t^{t+h} e^{A(t+h-\tau)}Bu(\tau-h)d\tau}_{x_{pc}(t)} \right\} + Bu(t) \\ &= Ax_{pc}(t) + Bu(t). \end{aligned} \quad (137)$$

Assim, a dinâmica dos estados preditos $x_{pc}(t)$ é livre de atraso. O preditor descrito na Equação (135) pode ser reescrito utilizando a mudança de variável $\theta = \tau - t - h$:

$$x_{pc}(t) = e^{Ah}x(t-h) + \int_{-h}^0 e^{-A\theta} Bu(t+\theta)d\theta. \quad (138)$$

Observe que, como a dinâmica do estado preditivo $x_{pc}(t)$ é livre de atraso, pode-se utilizar este estado para o projeto da lei de controle convencional, suprimindo o atraso na aquisição de dados do sistema de controle.

No caso do CMDC, com superfície de deslizamento linear na forma $\sigma(x_{pc}(t)) = Sx_{pc}(t)$, a lei de controle calculada sobre o estado preditivo $x_{pc}(t)$ torna-se

$$\begin{aligned} u(x_{pc}(t)) &= u_{eq}(x_{pc}(t)) + u_N(x_{pc}(t)) \\ u_{eq}(x_{pc}(t)) &= (SB)^{-1}SAx_{pc}(t), \\ u_N(x_{pc}(t)) &= \left[u_{N1}(x_{pc}(t)) \cdots u_{Nm}(x_{pc}(t)) \right]^T, \text{ com} \\ u_{Ni}(x_{pc}(t)) &= \rho \frac{\sigma_i(x_{pc}(t))}{|\sigma_i(x_{pc}(t))| + \varepsilon}, \rho < 0, \varepsilon \rightarrow 0^+. \end{aligned} \quad (139)$$

Considere agora um sistema incerto que sofre atraso durante a aquisição de dados. Neste caso, a dinâmica do sistema é representada por

$$\dot{x}(t-h) = Ax(t-h) + Bu(t-h) + \Delta f(t). \quad (140)$$

Aplicando-se o preditor contínuo proposto neste sistema, tem-se o seguinte estado preditivo:

$$x_{pc}(t) = e^{Ah}x(t-h) + \int_t^{t+h} e^{A(t+h-\tau)} Bu(\tau-h)d\tau, \quad (141)$$

cuja dinâmica é calculada como

$$\dot{x}_{pc}(t) = e^{Ah}\dot{x}(t-h) + A \int_t^{t+h} e^{A(t+h-\tau)} Bu(\tau-h)d\tau + Bu(t) - e^{Ah}Bu(t-h). \quad (142)$$

Substituindo (140) em (142) tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{x}_{pc}(t) &= Ae^{Ah}x(t-h) + e^{Ah}Bu(t-h) + e^{Ah}\Delta f(t) + A \int_t^{t+h} e^{A(t+h-\tau)} Bu(\tau-h)d\tau + Bu(t) \\ &\quad - e^{Ah}Bu(t-h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A \left\{ \underbrace{e^{Ah}x(t-h) + \int_t^{t+h} e^{A(t+h-\tau)}Bu(\tau-h)d\tau}_{x_{pc}(t)} \right\} + Bu(t) + e^{Ah}\Delta f(t) \\
&= Ax_{pc}(t) + Bu(t) + e^{Ah}\Delta f(t).
\end{aligned} \tag{143}$$

Utilizando-se uma transformação linear $T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tal que

$$z_{pc} = Tx_{pc} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} x_{pc} = \begin{bmatrix} z_{pc1} \\ z_{pc2} \end{bmatrix} \text{ e } TB = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{144}$$

sendo $B_2 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, $z_{pc1} \in \mathfrak{R}^{n-m}$, $z_{pc2} \in \mathfrak{R}^m$, T_1 e T_2 com dimensões adequadas e escolhendo uma superfície de deslizamento linear

$$\bar{\sigma}(z_{pc}(t)) = \bar{S}z_{pc}(t) = 0,$$

com $\bar{S} = ST^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{S}_1 & \bar{S}_2 \end{bmatrix}$, a dinâmica do sistema em modo deslizante será

$$\dot{z}_{pc1}(t) = (A_{11} - A_{12}\bar{S}_2^{-1}\bar{S}_1)z_{pc1}(t) + \Delta\bar{f}(t), \tag{145}$$

na qual $\Delta\bar{f}(t) = T_1e^{Ah}\Delta f(t)$ e

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \tag{146}$$

Desse modo, a incerteza inicial do sistema $\Delta f(t)$ torna-se $\Delta\bar{f}(t)$ e pode influenciar a dinâmica do sistema em deslizamento mesmo que ela seja originalmente uma incerteza casada.

Analisa-se agora a influência do erro de estimativa no tempo de atraso na aquisição de dados utilizado no cálculo do estado preditivo. Suponha que exista um erro na estimativa do atraso na aquisição de dados de um sistema controlado pela estratégia PC-CMDC como é ilustrado na Figura 11.

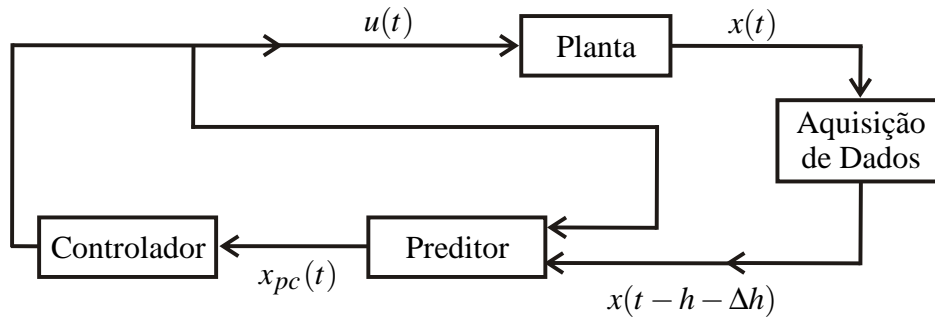
Neste caso, a dinâmica do sistema é dada por

$$\dot{x}(t-h-\Delta h) = Ax(t-h-\Delta h) + Bu(t-h-\Delta h) \tag{147}$$

e o estado preditivo $x_{pc}(t)$ é calculado como

$$x_{pc}(t) = e^{Ah}x(t-h-\Delta h) + \int_t^{t+h} e^{A(t+h-\tau)}Bu(\tau-h)d\tau. \tag{148}$$

Figura 11 - Erro na estimativa do atraso na aquisição de dados utilizando preditor de estados contínuo.



Fonte: próprio autor.

A dinâmica do estado preditivo é então

$$\dot{x}_{pc}(t) = e^{Ah}\dot{x}(t-h) + A \int_t^{t+h} e^{A(t+h-\tau)} Bu(\tau-h) d\tau + Bu(t) - e^{Ah}Bu(t-h). \quad (149)$$

Substituindo (147) em (149):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{pc}(t) &= Ae^{Ah}x(t-h-\Delta h) + e^{Ah}Bu(t-h-\Delta h) + A \int_t^{t+h} e^{A(t+h-\tau)} Bu(\tau-h) d\tau + Bu(t) \\ &\quad - e^{Ah}Bu(t-h) \\ &= A \left\{ \underbrace{e^{Ah}x(t-h-\Delta h) + \int_t^{t+h} e^{A(t+h-\tau)} Bu(\tau-h) d\tau}_{x_{pc}(t)} \right\} + Bu(t) + e^{Ah}Bu(t-h-\Delta h) \\ &\quad - e^{Ah}Bu(t-h) \\ &= Ax_{pc}(t) + Bu(t) + e^{Ah}B[u(t-h-\Delta h) - u(t-h)]. \end{aligned} \quad (150)$$

Definindo $e_r(t) = e^{Ah}B[u(t-h-\Delta h) - u(t-h)]$ a dinâmica (150) é reescrita como

$$\dot{x}_{pc}(t) = Ax_{pc}(t) + Bu(t) + e_r(t). \quad (151)$$

Assim, um sistema de predição contínua com erro na estimativa de atraso na aquisição de dados tem dinâmica de estado preditivo com distúrbio $e_r(t) = e^{Ah}B[u(t-h-\Delta h) - u(t-h)]$, cujas parcelas não casadas influenciam a dinâmica do sistema em deslizamento.

Realizando a mesma análise para a dinâmica do sistema incerto com atraso na aquisição de dados e preditor contínuo, chega-se na seguinte dinâmica do sistema em deslizamento:

$$\dot{z}_{pc1}(t) = (A_{11} - A_{12}\bar{S}_2^{-1}\bar{S}_1)z_{pc1}(t) + T_1e^{2Ah}B[u(t-h-\Delta h) - u(t-h)], \quad (152)$$

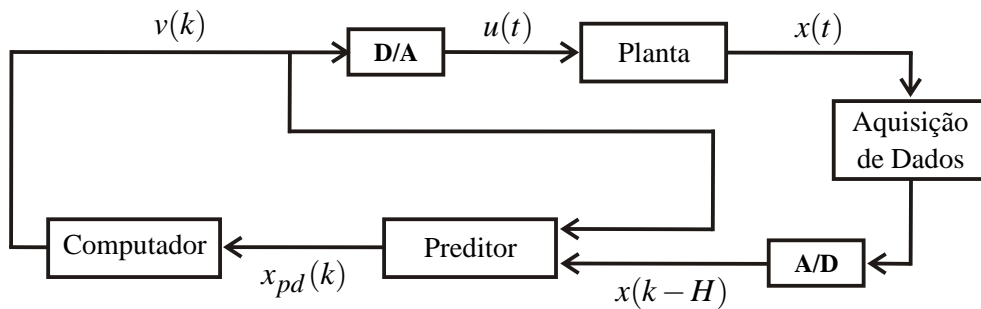
com estados e transformação definidos em (144) e (146).

Sendo assim, a dinâmica do sistema em deslizamento fica influenciada pelo erro na estimativa do atraso na aquisição de dados.

4.2.2 Proposta para o Sistema em Tempo Discreto

Considere um sistema com controle digital e atraso na aquisição de dados descrito por (133). A abordagem utilizada para a eliminação dos efeitos do atraso na aquisição de dados consiste no uso de um preditor de estados discreto adaptado de Xia et al. (2007). Um esquema que ilustra este procedimento é apresentado na Figura 12.

Figura 12 - Eliminação dos efeitos de atrasos na aquisição de dados em sistema controlado por computador com uso de preditor de estados discreto.



Fonte: próprio autor.

O preditor de estados de Xia et al. (2007) é dado por

$$x_p(k) = x(k+H) = \Phi^H x(k) + \sum_{i=-H+1}^0 \Phi^{-i} \Gamma v(k-1+i), \quad (153)$$

caso esse preditor seja aplicado sobre um estado atrasado em H amostras, tem-se

$$x_{pd}(k) = x(k) = \Phi^H x(k-H) + \sum_{i=-H+1}^0 \Phi^{-i} \Gamma v(k-1+i). \quad (154)$$

Será mostrado que a dinâmica do preditor (154) é livre de atraso. Calculando $x_{pd}(k+1)$ segue que

$$x_{pd}(k+1) = \Phi^H x(k-H+1) + \sum_{i=-H+1}^0 \Phi^{-i} \Gamma v(k+i). \quad (155)$$

Substituindo (133) em (155) resulta em

$$\begin{aligned}
x_{pd}(k+1) &= \Phi^H [\Phi x(k-H) + \Gamma v(k-H)] + \sum_{i=-H+1}^0 \Phi^{-i} \Gamma v(k+i) \\
&= \Phi^{H+1} x(k-H) + \Phi^H \Gamma v(k-H) + \sum_{i=-H+1}^0 \Phi^{-i} \Gamma v(k+i) \\
&= \Phi^{H+1} x(k-H) + \Phi^H \Gamma v(k-H) + \sum_{i=-H+1}^{-1} \Phi^{-i} \Gamma v(k+i) + \Gamma v(k) \\
&= \Phi^{H+1} x(k-H) + \sum_{i=-H}^{-1} \Phi^{-i} \Gamma v(k+i) + \Gamma v(k) \\
&= \Phi^{H+1} x(k-H) + \sum_{i=-H+1}^0 \Phi^{-i+1} \Gamma v(k+i-1) + \Gamma v(k) \\
&= \Phi \left[\underbrace{\Phi^H x(k-H) + \sum_{i=-H+1}^0 \Phi^{-i} \Gamma v(k+i-1)}_{x_{pd}(k)} \right] + \Gamma v(k) \\
&= \Phi x_{pd}(k) + \Gamma v(k). \tag{156}
\end{aligned}$$

Assim, a dinâmica do estado preditivo é livre de atrasos. Desse modo, pode-se utilizar o estado preditivo $x_{pd}(k)$ no cálculo da lei de controle desconsiderando a presença do atraso na aquisição de dados.

Utilizando esta estratégia no CMDD com superfície de deslizamento linear na forma $\mu(x_{pd}(k)) = Gx_{pd}(k)$ tem-se

$$\begin{aligned}
v(k) &= v_{eq}(k) + v_N(k), \\
v_{eq}(k) &= -(G\Gamma)^{-1} G(\Phi - I)x_{pd}(k), \\
v_N(k) &= \left[v_{N1}(k) \ \cdots \ v_{Nm}(k) \right]^T, \text{ com} \\
v_{Ni}(k) &= -\gamma_i \mu_i(k), \ i = 1, 2, \dots, m. \tag{157}
\end{aligned}$$

Caso o sistema digital com atraso na aquisição de dados considerado seja incerto como descrito pela equação

$$x(k-H+1) = \Phi x(k-H) + \Gamma v(k-H) + \Delta f(k), \tag{158}$$

a robustez da estratégia PD-CMDD é garantida pelo seguinte lema:

Lema 4.1. *Um sistema discreto incerto com atraso de H amostras na aquisição de dados, descrito pela Equação (158), com lei de controle (157) (estratégia de controle PD-CMDD)*

terá garantida atratividade da superfície de deslizamento caso $\|G\Phi^H\Delta f(k)\| < \|Gx_{pd}(k)\|$ para todo instante k .

Prova: Caso o preditor seja aplicado sobre o sistema (158), tem-se

$$x_{pd}(k) = \Phi^H x(k-H) + \sum_{i=-H+1}^0 \Phi^{-i} \Gamma v(k-1+i). \quad (159)$$

Calculando $x_{pd}(k+1)$ segue que

$$x_{pd}(k+1) = \Phi^H x(k-H+1) + \sum_{i=-H+1}^0 \Phi^{-i} \Gamma v(k+i). \quad (160)$$

Substituindo (158) em (160) resulta em

$$\begin{aligned} x_{pd}(k+1) &= \Phi^H [\Phi x(k-H) + \Gamma v(k-H) + \Delta f(k)] + \sum_{i=-H+1}^0 \Phi^{-i} \Gamma v(k+i) \\ &= \Phi^{H+1} x(k-H) + \Phi^H \Gamma v(k-H) + \Phi^H \Delta f(k) + \sum_{i=-H+1}^0 \Phi^{-i} \Gamma v(k+i) \\ &= \Phi^{H+1} x(k-H) + \Phi^H \Gamma v(k-H) + \sum_{i=-H+1}^{-1} \Phi^{-i} \Gamma v(k+i) + \Gamma v(k) + \Phi^H \Delta f(k) \\ &= \Phi^{H+1} x(k-H) + \sum_{i=-H}^{-1} \Phi^{-i} \Gamma v(k+i) + \Gamma v(k) + \Phi^H \Delta f(k) \\ &= \Phi^{H+1} x(k-H) + \sum_{i=-H+1}^0 \Phi^{-i+1} \Gamma v(k+i-1) + \Gamma v(k) + \Phi^H \Delta f(k) \\ &= \Phi \left[\underbrace{\Phi^H x(k-H) + \sum_{i=-H+1}^0 \Phi^{-i} \Gamma v(k+i-1)}_{x_{pd}(k)} \right] + \Gamma v(k) + \Phi^H \Delta f(k) \\ &= \Phi x_{pd}(k) + \Gamma v(k) + \Phi^H \Delta f(k). \end{aligned} \quad (161)$$

Assim, a dinâmica do estado preditivo é livre de atrasos mesmo na presença de incertezas na planta. Observe que $\Delta f(k)$ ao passar pelo preditor torna-se $\Phi^H \Delta f(k)$, ou seja, admitindo-se que $\Delta f(k)$ fosse inicialmente uma incerteza casada, ela deixa essa condição ao passar pelo preditor.

Para que haja atratividade para a superfície de deslizamento é necessário que

$$V(k+1) < V(k). \quad (162)$$

Utilizando-se $V(k) = \mu(k)^T \mu(k)$ segue que $V(k+1) = \mu(k+1)^T \mu(k+1)$, sendo $\mu(k)$ uma superfície de deslizamento da forma $\mu(k) = Gx_{pd}(k)$ e $\mu(k+1) = \mu(k) + \Delta\mu(k+1)$, tem-se

$$\begin{aligned}\Delta\mu(k+1) &= \mu(k+1) - \mu(k) \\ &= Gx_{pd}(k+1) - Gx_{pd}(k).\end{aligned}\quad (163)$$

Substituindo (161) em (163) encontra-se

$$\begin{aligned}\Delta\mu(k+1) &= G [\Phi x_{pd}(k) + \Gamma v(k) + \Phi^H \Delta f(k)] - Gx_{pd}(k) \\ &= G\Phi x_{pd}(k) + G\Gamma v(k) + G\Phi^H \Delta f(k) - Gx_{pd}(k).\end{aligned}\quad (164)$$

Utilizando a estratégia de controle (157) tem-se

$$\begin{aligned}\Delta\mu(k+1) &= G\Phi x_{pd}(k) + G\Gamma [-(G\Gamma)^{-1}G(\Phi - I)x_{pd}(k) + v_N(k)] + G\Phi^H \Delta f(k) - Gx_{pd}(k) \\ &= G\Phi x_{pd}(k) - G(\Phi - I)x_{pd}(k) + G\Gamma v_N(k) + G\Phi^H \Delta f(k) - Gx_{pd}(k) \\ &= G\Phi x_{pd}(k) - G\Phi x_{pd}(k) + Gx_{pd}(k) + G\Gamma v_N(k) + G\Phi^H \Delta f(k) - Gx_{pd}(k) \\ &= G\Gamma v_N(k) + G\Phi^H \Delta f(k).\end{aligned}\quad (165)$$

Assim, considerando, para facilitar os cálculos, uma entrada e $\gamma = G\Gamma = 1$, sem perda de generalidade tem-se

$$\begin{aligned}V(k) &= [\mu(k)]^T [\mu(k)] \\ &= \|Gx_{pd}(k)\|^2,\end{aligned}\quad (166)$$

$$\Delta\mu(k+1) = -\mu(k) + f(k),\quad (167)$$

e

$$\begin{aligned}V(k+1) &= [\mu(k) + \Delta\mu(k+1)]^T [\mu(k) + \Delta\mu(k+1)] \\ &= [\mu(k) - \mu(k) + G\Phi^H \Delta f(k)]^T [\mu(k) - \mu(k) + G\Phi^H \Delta f(k)] \\ &= [G\Phi^H \Delta f(k)]^T [G\Phi^H \Delta f(k)] \\ &= \|G\Phi^H \Delta f(k)\|^2\end{aligned}\quad (168)$$

Sendo assim, tem-se que $V(k+1) = \|G\Phi^H \Delta f(k)\|^2 < V(k) = \|Gx_{pd}(k)\|^2$ caso $\|G\Phi^H \Delta f(k)\| < \|Gx_{pd}(k)\|$.

Considere agora um sistema com controle PD-CMDD utilizando preditor de estado discreto

projetado para H amostras de atraso na aquisição de dados, mas que na verdade está sujeito a $H + \Delta H$ amostras de atraso na aquisição de dados. Esta situação é mostrada na Figura 13.

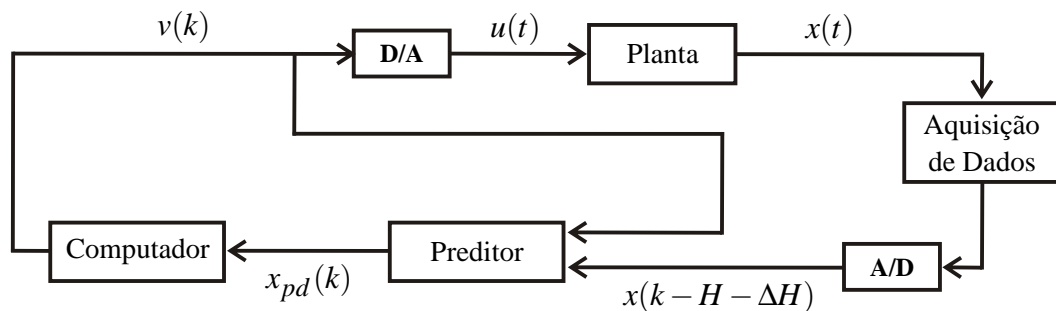
Nestas condições o sistema tem dinâmica descrita por

$$x(k+1-H-\Delta H) = \Phi x(k-H-\Delta H) + \Gamma v(k-H-\Delta H). \quad (169)$$

Com isto, a condição para atratividade da superfície de deslizamento utilizando-se a estratégia de controle PD-CMDD é apresentada no Lema 4.2.

Lema 4.2. *Um sistema discreto com estratégia de controle PD-CMDD (lei de controle (157)) projetada para atraso de H amostras na aquisição de dados e com erro de ΔH amostras na estimativa do atraso na aquisição de dados (situação mostrada na Figura 13) terá garantida atratividade da superfície de deslizamento caso $\|\Phi^H \Gamma [v(k-H-\Delta H) - v(k-H)]\| < \|Gx_{pd}(k)\|$ para todo instante k .*

Figura 13 - Erro na estimativa do atraso na aquisição de dados utilizando preditor de estados discreto.



Fonte: próprio autor.

Prova: Aplicando o preditor discreto projetado para atraso H sobre o sinal com atraso real do sistema tem-se o estado preditivo $x_{pd}(k)$ descrito pela equação

$$x_{pd}(k) = \Phi^H x(k-H-\Delta H) + \sum_{i=-H+1}^0 \Phi^{-i} \Gamma v(k+i-1). \quad (170)$$

Calculando a dinâmica do estado preditivo $x_{pd}(k)$ tem-se

$$x_{pd}(k+1) = \Phi^H x(k+1-H-\Delta H) + \sum_{i=-H+1}^0 \Phi^{-i} \Gamma v(k+i). \quad (171)$$

Substituindo (169) em (171) segue que

$$\begin{aligned}
x_{pd}(k+1) &= \Phi^H [\Phi x(k-H-\Delta H) + \Gamma v(k-H-\Delta H)] + \sum_{i=-H+1}^0 \Phi^{-i} \Gamma v(k+i) \\
&= \Phi^{H+1} x(k-H-\Delta H) + \Phi^H \Gamma v(k-H-\Delta H) + \sum_{i=-H+1}^{-1} \Phi^{-i} \Gamma v(k+i) + \Gamma v(k) \\
&= \Phi^{H+1} x(k-H-\Delta H) + \Phi^H \Gamma v(k-H-\Delta H) + \sum_{i=-H+1}^{-1} \Phi^{-i} \Gamma v(k+i) + \Gamma v(k) \\
&\quad + \Phi^H \Gamma v(k-H) - \Phi^H \Gamma v(k-H) \\
&= \Phi^{H+1} x(k-H-\Delta H) + \sum_{i=-H}^{-1} \Phi^{-i} \Gamma v(k+i) + \Gamma v(k) \\
&\quad + \Phi^H \Gamma [v(k-H-\Delta H) - v(k-H)] \\
&= \Phi^{H+1} x(k-H-\Delta H) + \sum_{i=-H+1}^0 \Phi^{-i+1} \Gamma v(k+i-1) + \Gamma v(k) \\
&\quad + \Phi^H \Gamma [v(k-H-\Delta H) - v(k-H)] \\
&= \Phi \left[\underbrace{\Phi^H x(k-H-\Delta H) + \sum_{i=-H+1}^0 \Phi^{-i} \Gamma v(k+i-1)}_{x_{pd}(k)} \right] + \Gamma v(k) \\
&\quad + \Phi^H \Gamma [v(k-H-\Delta H) - v(k-H)] \\
&= \Phi x_{pd}(k) + \Gamma v(k) + \Phi^H \Gamma [v(k-H-\Delta H) - v(k-H)]. \tag{172}
\end{aligned}$$

Fazendo $e_r(k) = \Phi^H \Gamma [v(k-H-\Delta H) - v(k-H)]$ a dinâmica (172) é reescrita como

$$x_{pd}(k+1) = \Phi x_{pd}(k) + \Gamma v(k) + e_r(k). \tag{173}$$

Assim, mesmo com erro na estimativa do atraso na aquisição de dados o estado preditivo tem dinâmica livre de atraso. Porém, a dinâmica do estado preditivo fica sujeita ao distúrbio $e_r(k) = \Phi^H \Gamma [v(k-H-\Delta H) - v(k-H)]$. Adotando-se como candidata a função de Lyapunov $V(k) = \mu(k)^T \mu(k)$, com o mesmo procedimento da prova do Lema 4.1 prova-se que $V(k+1) < V(k)$ caso $\|\Phi^H \Gamma [v(k-H-\Delta H) - v(k-H)]\| < \|Gx_{pd}(k)\|$.

Observe que a inclusão do preditor discreto na malha de realimentação deixa o controle CMDD com robustez a diferenças entre o atraso esperado pelo preditor e o atraso real do sistema desde que a condição do Lema 4.2 seja satisfeita.

4.3 COMENTÁRIOS

Neste capítulo, foi apresentada a estratégia de utilização de preditores de estado na supressão dos efeitos de atrasos na aquisição de dados. Esta abordagem foi estendida a sistemas discretos e foram realizadas análises sobre o efeito da inclusão dos preditores de estado na malha de realimentação com controles CMDC e CMDD.

Atrasos em aquisição de dados mostram-se de relevância por estarem presentes em aplicações práticas (FERNANDES, 2013). A extensão ao caso discreto se mostra essencial pela grande quantidade de sistemas controlados atualmente por dispositivos digitais, permitindo que seja empregado o controle discreto nestes casos, fugindo dos inconvenientes da emulação.

Devido a alta sensibilidade do CEV/MD a qualquer tipo de atraso, a aplicação da proposta de tratamento de atrasos de aquisição de dados apresentada neste capítulo, tanto em simulação quanto em equipamentos, comprova a eficiência da estratégia. Estes resultados são apresentados no Capítulo 7.

5 SISTEMAS ANALISADOS: SUSPENSÃO ATIVA E BALL BALANCER

Este capítulo tem como objetivo apresentar os sistemas utilizados para comprovação prática de eficiência das estratégias de controle CMDC e CMDD com preditores de estado (PC-CMDC e PD-CMDD) em sistemas com atraso na aquisição de dados.

Os sistemas utilizados foram o sistema de suspensão ativa de bancada e o sistema *ball balancer*, ambos fabricados pela Quanser[®]. A descrição e modelagem matemática dos equipamentos feitas neste capítulo tem como referências os manuais dos equipamentos (QUANSER INNOVATE EDUCATE, 2010a, 2010b, 2008a, 2008b).

5.1 SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA

Sistemas de suspensão são componentes importantes dos veículos. Seus objetivos são: (a) isolar a carcaça do veículo dos distúrbios externos oriundos das irregularidades da pista, das mudanças de direção e aceleração/desaceleração, de modo a proporcionar conforto aos passageiros; (b) suportar o peso do veículo; (c) reagir a variações de carga geradas por mudanças no lugar dos passageiros ou em seu número e (d) garantir contato entre os pneus e a superfície da pista, proporcionando dirigibilidade satisfatória do veículo e tendo implicação na segurança do veículo (XUE et al., 2011).

Sistemas de suspensão podem ser classificados em três tipos: passivo, semiativo e ativo. O sistema de suspensão passivo é o mais comum devido a seu baixo custo e é composto por amortecedor e mola não controláveis. O sistema semiativo não possui fontes de força, mas possibilita mudança no coeficiente de amortecimento do amortecedor, permitindo certo grau de controle. No sistema de suspensão ativa, existe um atuador acoplado ao sistema que pode fornecer energia, sendo controlado por um algoritmo de controle que utiliza sinais de sensores (XUE et al., 2011).

Em geral, o controle de um sistema de suspensão ativa leva em consideração os seguintes critérios (QUANSER INNOVATE EDUCATE, 2010a):

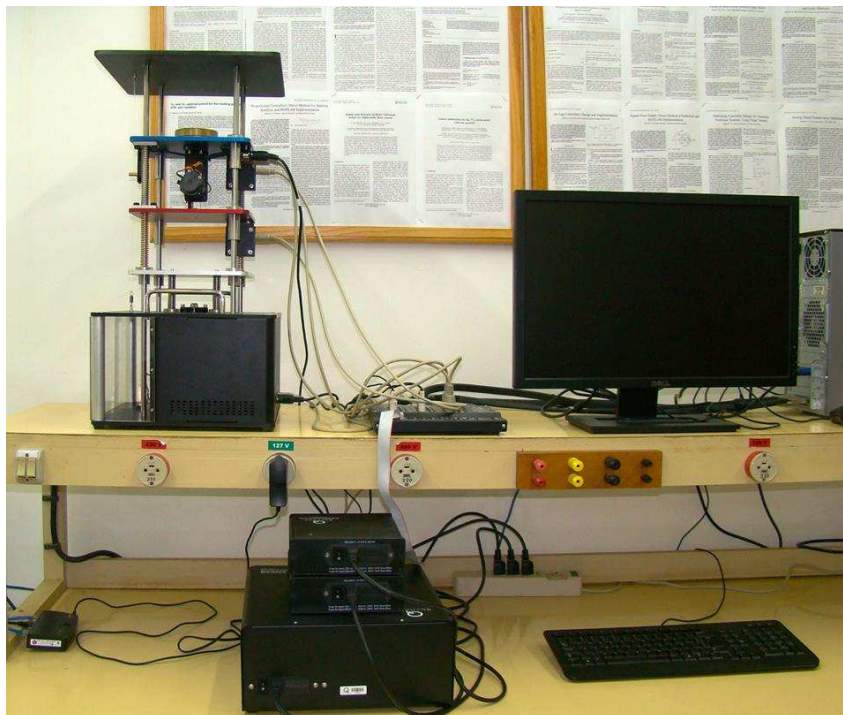
- Conforto do passageiro: relativo ao movimento sentido pelo passageiro frente aos distúrbios oriundos da pista.

- Viagem da suspensão: é o movimento relativo entre a carcaça do veículo (massa suspensa) e a roda (massa não suspensa). Este critério também se apresenta como restrição, uma vez que este movimento tem limitações físicas de amplitude.
- Dirigibilidade: associada às forças de contato entre os pneus do veículos e a pista. Estas forças dependem da deflexão do pneu, o que pode ser medido como diferença entre a posição da roda e a pista.

5.1.1 Equipamento

O sistema de suspensão ativa de bancada Quanser[®] é um sistema que emula um quarto de veículo controlado por um mecanismo ativo de controle. Ele foi projetado para estudar aspectos críticos das implementações de controle de suspensão ativa. Na Figura 14, é mostrada uma foto desse equipamento no Laboratório de Pesquisa em Controle da Unesp de Ilha Solteira (LPC - FEIS - UNESP).

Figura 14 - Suspensão ativa de bancada Quanser[®] pertencente ao Laboratório de Pesquisa em Controle da Unesp de Ilha Solteira (LPC - FEIS - UNESP).



Fonte: arquivo do LPC - FEIS - UNESP.

A planta consiste em três placas sobrepostas, intercaladas por molas e um atuador elétrico. A placa superior representa o corpo do veículo e é suspensa da placa intermediária por duas

molas. Além das molas, entre as placas superior e intermediária também existe um motor de corrente contínua, que emula o componente ativo do sistema de suspensão.

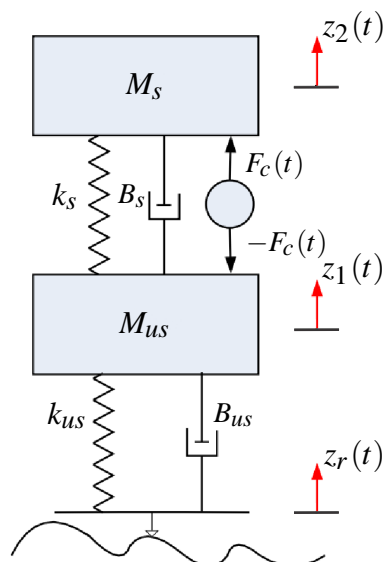
A placa superior é munida de um acelerômetro que mede a aceleração do corpo do veículo. As molas que unem as placas intermediária e inferior representam a dinâmica do pneu. A placa inferior representa a pista que o carro percorre e é conectada a um motor de corrente contínua de resposta rápida, permitindo ao projetista simular diferentes perfis de pista. Quando este motor gira, o torque criado em seu eixo é transformado, por meio de eixo roscado e engrenagens, em uma força linear, resultando no movimento da placa inferior.

A estrutura, feita de aço, permite que as três placas possam deslizar suavemente pelos eixos, usando rolamentos lineares. Os movimentos das placas inferior e intermediária são seguidos diretamente por dois encoders de alta resolução enquanto um terceiro encoder mede o movimento da placa superior relativo a placa intermediária (QUANSER INNOVATE EDUCATE, 2010b).

5.1.2 Modelagem Matemática

O sistema de suspensão ativa de um quarto de veículo pode ser modelado como um duplo sistema massa-mola-amortecedor e seu modelo no espaço de estados considera como entrada de controle a força realizada pelo atuador e como perturbação a derivada da superfície da estrada.

Figura 15 - Diagrama do sistema de suspensão ativa de bancada Quanser®.



Fonte: adaptado de Quanser Innovate Educate (2010a).

A Figura 15 apresenta um diagrama esquemático correspondente ao sistema em estudo. As coordenadas generalizadas representam: o movimento do corpo do veículo ($z_2(t)$), o movimento

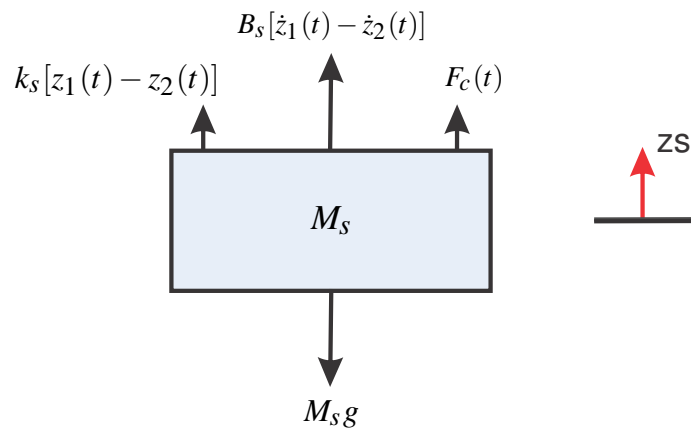
da roda ($z_1(t)$) e a superfície da pista ($z_r(t)$).

O modelo no espaço de estados do sistema é obtido através do método do diagrama de corpo livre. Na Figura 16, é mostrado o diagrama de corpo livre para a massa M_s . Para o movimento $z_2(t)$ tem-se

$$\ddot{z}_2(t) = -g + \frac{F_c(t)}{M_s} + \frac{B_s \dot{z}_1(t)}{M_s} - \frac{B_s \dot{z}_2(t)}{M_s} + \frac{k_s(t) z_1(t)}{M_s} - \frac{k_s(t) z_2(t)}{M_s}, \quad (174)$$

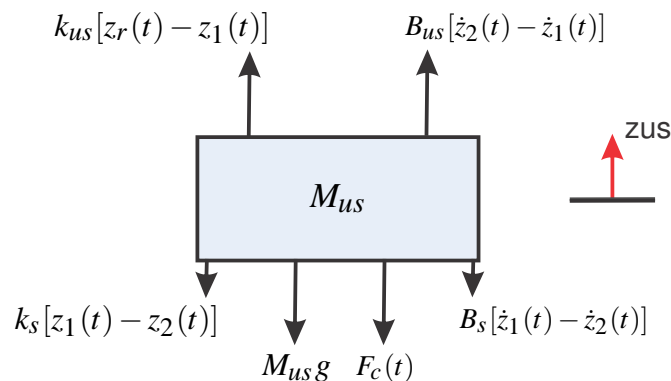
sendo que g denota a aceleração da gravidade.

Figura 16 - Diagrama de corpo livre para massa M_s do sistema de suspensão ativa de bancada Quanser[®].



Fonte: adaptado de Quanser Innovate Educate (2010a).

Figura 17 - Diagrama de corpo livre para massa M_{us} do sistema de suspensão ativa de bancada Quanser[®].



Fonte: adaptado de Quanser Innovate Educate (2010a).

O diagrama de corpo livre para a massa M_{us} é apresentado na Figura 17. Para o movimento

$z_1(t)$ tem-se

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1(t) = & -g - \frac{F_c(t)}{M_{us}} - \frac{(B_s + B_{us})\dot{z}_1(t)}{M_{us}} + \frac{B_s\dot{z}_1(t)}{M_{us}} + \frac{B_{us}\dot{z}_r(t)}{M_{us}} - \frac{(k_{us} + k_s)z_1(t)}{M_{us}} \\ & + \frac{k_s z_2(t)}{M_{us}} + \frac{k_{us} z_r(t)}{M_{us}}. \end{aligned} \quad (175)$$

As coordenadas generalizadas para o sistema foram escolhidas tal que as molas k_s e k_{us} estejam relaxadas somente quando $z_1(t) = z_2(t) = 0$. Contudo, as molas nunca se encontram nessa condição devido ao peso das massas M_s e M_{us} . Assim, a gravidade influencia no ponto de equilíbrio $(z_{1eq}(t), z_{2eq}(t))$.

Os pontos de equilíbrio podem ser encontrados atentando para o fato de que no equilíbrio as derivadas de qualquer ordem de $z_1(t)$ e $z_2(t)$ são nulas, assim a partir das Equações (174) e (175) segue que

$$z_{1eq} = -\frac{(M_s + M_{us})g}{k_{us}} \quad \text{e} \quad (176)$$

$$z_{2eq} = -\frac{M_s g}{k_s} - \frac{(M_s + M_{us})g}{k_{us}}. \quad (177)$$

Fazendo a mudança de variáveis $z_1(t) = z_{us}(t) + z_{1eq}$ e $z_2(t) = z_s(t) + z_{2eq}$ em (174) e (175) tem-se

$$\ddot{z}_s(t) = \frac{1}{M_s} [F_c(t) + B_s \dot{z}_{us}(t) - B_s \dot{z}_s(t) + k_s(t) z_{us}(t) - k_s(t) z_s(t)], \quad (178)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z}_{us}(t) = & \frac{1}{M_{us}} [-F_c(t) - (B_s + B_{us})\dot{z}_{us}(t) + B_s \dot{z}_{us}(t) + B_{us}\dot{z}_r(t) - (k_{us} + k_s)z_{us}(t) \\ & + k_s z_s(t) + k_{us} z_r(t)] \end{aligned} \quad (179)$$

e, com isto, nas equações de movimento do sistema a força da gravidade não aparece explicitamente.

Escolhendo como variáveis de estado $x_1(t) = z_s(t) - z_{us}(t)$, deflexão (ou viagem) da suspensão; $x_2(t) = \dot{z}_s(t)$, velocidade vertical do corpo do veículo; $x_3(t) = z_{us}(t) - z_r(t)$, deflexão do pneu e $x_4(t) = \dot{z}_{us}(t)$, a velocidade vertical do conjunto da roda; como entrada $u(t)$ a força exercida pelo controlador $F_c(t)$ e como distúrbio $d(t)$ a velocidade do perfil da pista $\dot{z}_r(t)$, a

representação no espaço de estados do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{B_s}{M_{us}} & \frac{k_{us}}{M_{us}} & -\frac{B_s + B_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{M_{us}} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{B_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix} d(t). \quad (180)$$

As constantes envolvidas no sistema (180) têm seus valores apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 - Parâmetros do sistema de suspensão ativa de bancada Quanser[®].

Parâmetro	Descrição	Valor
k_s	Constante de Rigidez entre o corpo do veículo e o pneu	900 N/m
B_s	Constante de Amortecimento entre o corpo do veículo e o pneu	7,5 [N/m]s
M_s	Massa do corpo do veículo	2,45 kg
k_{us}	Constante de Rigidez entre o pneu e a estrada	2500 N/m
B_{us}	Constante de Amortecimento entre o pneu e a estrada	5 [N/m]s
M_{us}	Massa do pneu	1 kg

Fonte: Quanser Innovate Educate (2010b).

Com os dados da Tabela 1 o sistema (180) é descrito em termos numéricos como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,35 & -3,06 & 0 & 3,06 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,41 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} d(t). \quad (181)$$

5.2 SISTEMA BALL BALANCER

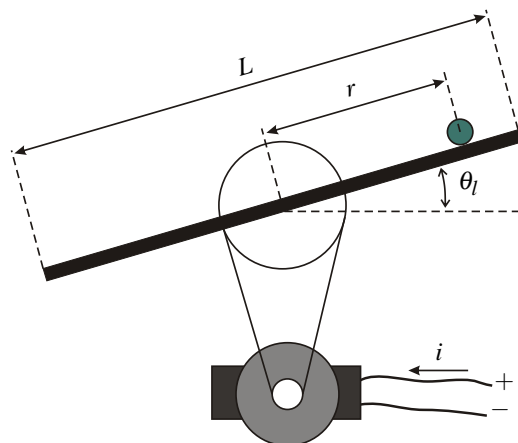
O sistema *ball balancer* pode ser visto como uma extensão do sistema bola viga para duas dimensões (NEVES, 2012). O sistema bola viga é um sistema que apresenta dinâmica não linear e instabilidade a malha aberta (CAUN, 2007). Uma ilustração do sistema bola viga é apresentada na Figura 18.

Cada eixo do sistema *ball balancer* pode ser visto como um sistema bola viga. Assim, cada eixo pode ser tratado de forma independente do outro e desenvolve-se um controlador para cada acionamento. A seguir caracteriza-se o sistema *ball balancer* e desenvolve-se seu modelo no espaço de estados.

5.2.1 Equipamento

O sistema *ball balancer* consiste em uma placa sobre a qual uma esfera movimenta-se livremente. A placa é montada sobre eixos que lhe permitem dois graus de liberdade (2 DOF) e por isto podem movimentar a esfera em qualquer direção no plano. Existe uma câmera localizada acima da placa que é usada para medir a posição da esfera. Abaixo da placa existem dois servomotores, cada um conectado a um lado da placa. Controlando-se a posição da engrenagem do servomotor o ângulo de inclinação da placa pode ser ajustado para levar a esfera até uma posição desejada. Na Figura 19, é apresentada uma foto do sistema *ball balancer* fabricado pela Quanser[®] pertencente ao Laboratório de Pesquisa em Controle da Unesp de Ilha Solteira (LPC - FEIS - UNESP).

Figura 18 - Sistema bola viga.



Fonte: adaptado de Caun (2007).

5.2.2 Modelagem Matemática

O movimento em cada eixo do sistema *ball balancer* é independente do outro e, como há simetria no equipamento, é utilizado o mesmo modelo para os dois eixos. Por isto, será desenvolvido o modelo matemático de apenas um eixo. Um esquema que ilustra o movimento em um eixo do sistema *ball balancer* é mostrado na Figura 20.

A tensão aplicada ao servomotor relaciona-se com a posição angular θ_l pela Equação (182) (APKARIAN; LÉVIS; GUROCAK, 2011).

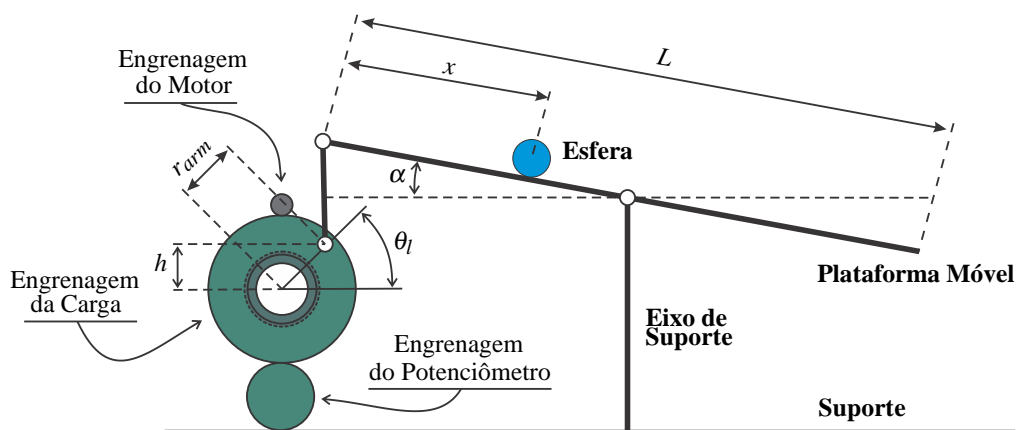
$$J_{eq}\ddot{\theta}_l + B_{eq}\dot{\theta}_l = A_m V_m(t). \quad (182)$$

Figura 19 - Sistema *ball balancer* Quanser[®] pertencente ao Laboratório de Pesquisa em Controle da Unesp de Ilha Solteira (LPC - FEIS - UNESP).



Fonte: arquivo do LPC - FEIS - UNESP.

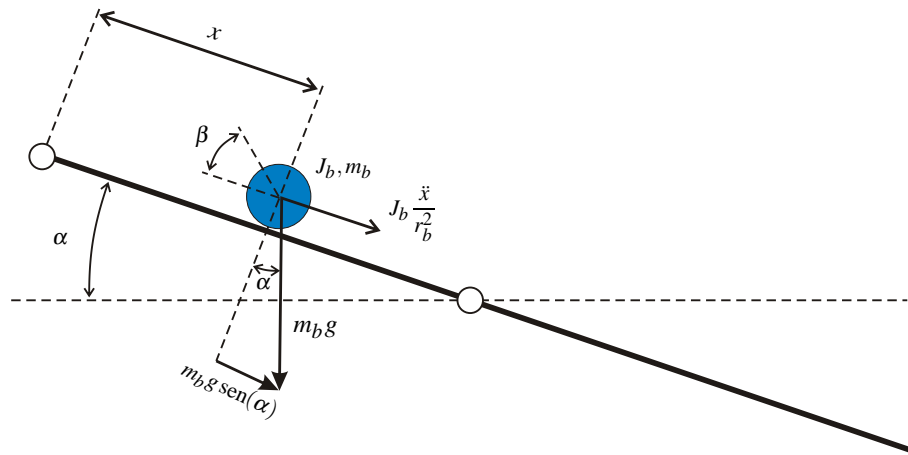
Figura 20 - Esquema do movimento em um eixo do *ball balancer*.



Fonte: adaptado de Quanser Innovate Educate (2008b).

Pode-se relacionar a posição x da esfera com o ângulo da placa α aplicando-se o método do diagrama de corpo livre. A Figura 21 apresenta o diagrama de corpo livre relativo a um eixo do sistema *ball balancer*.

Figura 21 - Diagrama de corpo livre em um eixo do *ball balancer*.



Fonte: adaptado de Quanser Innovate Educate (2008a).

Sabendo que $x(t) = \beta(t)r_b$, sendo r_b o raio da esfera, segue que

$$m_b \ddot{x}(t) = m_b \text{sen}(\alpha(t)) - \frac{J_b \ddot{x}(t)}{r_b^2}. \quad (183)$$

A aceleração linear $\ddot{x}(t)$ é dada por

$$\ddot{x}(t) = \frac{m_b g r_b^2 \text{sen}(\alpha(t))}{m_b r_b^2 + J_b}. \quad (184)$$

Para relacionar o ângulo θ_l do motor com o ângulo α da placa é preciso observar o diagrama esquemático da Figura 20. Repare que para um movimento na vertical h tem-se

$$\text{sen}(\alpha(t)) = \frac{h}{L/2} \quad \text{e} \quad (185)$$

$$\text{sen}(\theta_l(t)) = \frac{h}{r_{arm}}. \quad (186)$$

Assim, encontra-se a seguinte relação:

$$\text{sen}(\alpha(t)) = \frac{2r_{arm} \text{sen}(\theta_l(t))}{L}. \quad (187)$$

Substituindo (187) em (184) chega-se a

$$\ddot{x}(t) = \frac{2m_b r_{arm} r_b^2 g \text{sen}(\theta_l(t))}{L(m_b r_b^2 + J_b)}. \quad (188)$$

Assumindo que o ângulo $\theta_l(t)$ ficará próximo a 0, $\text{sen}(\theta_l(t)) \approx \theta_l(t)$. Assumindo também que o sistema será sempre o mesmo, os parâmetros constantes podem ser agrupados na variável k_{bb} . Assim, a Equação (188) torna-se

$$\ddot{x}(t) = k_{bb}\theta_l(t), \quad k_{bb} = \frac{2m_b r_{arm} r_b^2 g}{L(m_b r_b^2 + J_b)}. \quad (189)$$

Deste modo, temos o sistema em um eixo do *ball balancer* descrito pelas Equações (182) e (189). Assumindo como estados do sistema $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$, $x_3(t) = \theta_l(t)$ e $x_4(t) = \dot{\theta}_l(t)$ tem-se a seguinte representação do sistema em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{A_m}{J_{eq}} \end{bmatrix} u(t). \quad (190)$$

Lembrando que o momento de inercia de uma esfera é dada por

$$J_b = \frac{2m_b r_b^2}{5}, \quad (191)$$

os valores envolvidos no sistema (190) podem ser calculados com os dados presentes na Tabela 2.

Tabela 2 - Parâmetros do sistema *ball balancer* Quanser[®].

Parâmetro	Descrição	Valor
B_{eq}	Amortecimento referente ao motor	0,0844 Nms/rd
J_{eq}	Inercia no motor	0,0021 kgm ²
A_m	Ganho do motor	0,129 Nm/V
L	Comprimento da placa móvel	0,275 m
r_{arm}	Distância entre eixo da engrenagem de saída do servo motor e o ponto de fixação da barra	0,0254 m
r_b	Raio da esfera	0,0196 m
m_b	Massa da esfera	0,003 kg

Fonte: Quanser Innovate Educate (2008b).

Com os dados da Tabela 2, o sistema (190) é descrito em termos numéricos como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40,32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 61,63 \end{bmatrix} u(t). \quad (192)$$

5.3 COMENTÁRIOS

Neste capítulo, foram apresentados os sistemas utilizados nas simulações e testes práticos deste trabalho. Foram também apresentadas suas modelagens no espaço de estados contínuo.

A modelagem no espaço de estados discreto depende do período de amostragem T , como foi mostrado na Seção 3.1. A conversão entre o modelo contínuo e o modelo discreto pode ser realizada convenientemente utilizando a função “c2d” do *software* Matlab[®], correspondendo às Equações (97)-(100).

Os modelos numéricos (181) e (192) são utilizados nos projetos dos controladores do Capítulo 6, que apresenta o projeto dos controladores e como eles foram implementados no sistema de suspensão ativa de bancada e no sistema *ball balancer*.

6 PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO DOS CONTROLADORES

Os experimentos realizados tem por objetivo analisar e comparar o desempenho da estratégia de controle robusta apresentada por Fernandes (2013), com a estratégia de controle robusta discreta proposta por este trabalho e também com uma estratégia de controle convencional normalmente utilizada (em tempo contínuo e discreto, com e sem a utilização de preditores de estado), quando realizadas por um computador digital na presença de conversores A/D e D/A, atrasos na aquisição de dados e distúrbios no sinal de controle.

Este capítulo trata da estratégia que foi utilizada para comparação entre os métodos de controle analisados, expondo diagramas esquemáticos que ilustram como os experimentos foram montados e realizados. São apresentados os projetos dos controladores CMDD, CMDC para os sistemas de suspensão ativa e *ball balancer* fabricados pela Quanser[®]; a teoria e o projeto do controlador LQR (contínuo e discreto) proposto pelo fabricante no sistema de suspensão ativa; e projetos por alocação de polos (contínuo e discreto) para o sistema *ball balancer*.

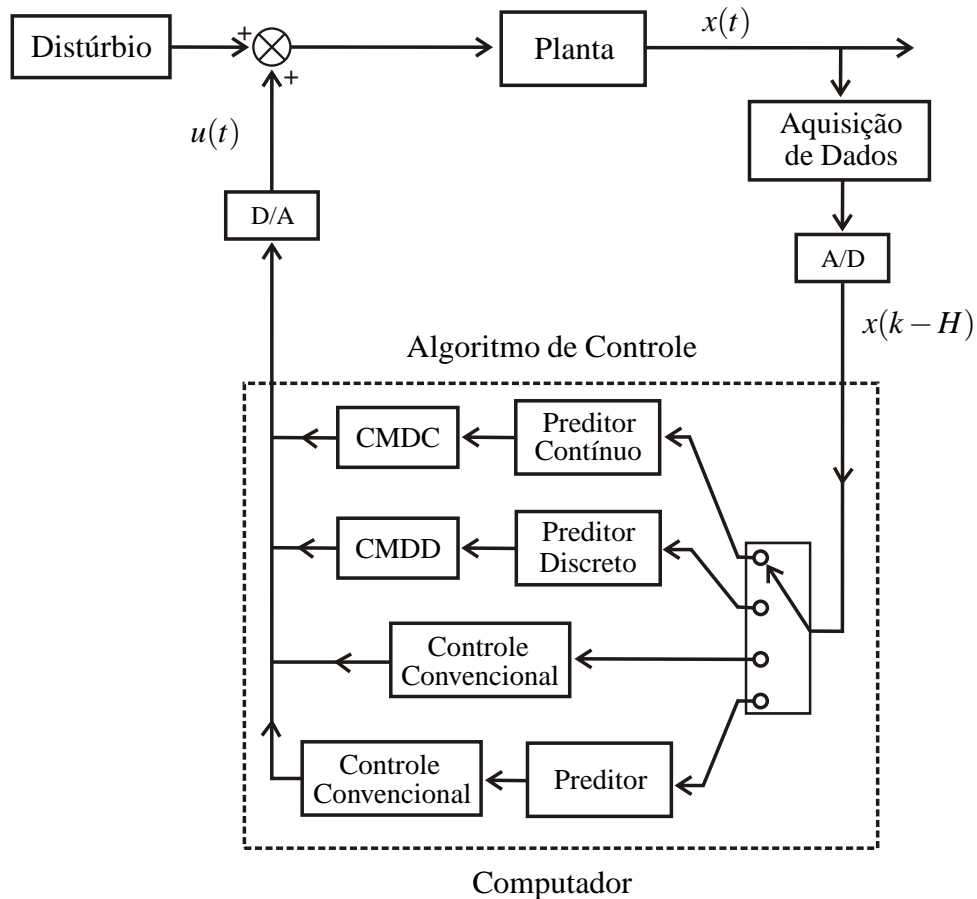
6.1 ESTRATÉGIA DE COMPARAÇÃO

Esse trabalho assume que o controle é realizado por computador digital. Neste sentido, é assumida a existência de atraso na aquisição de dados, gerados, por exemplo, na aquisição de dados dos sensores e no processamento/filtragem desses dados antes de serem utilizados no cálculo do sinal de controle, ou durante a transmissão desses dados em rede. Assume-se também a presença de distúrbios na entrada de controle da planta, representando incertezas casadas no sistema de controle.

Na Figura 22, é apresentado um diagrama esquemático que ilustra a ideia geral dos experimentos realizados. Nele, é possível observar os controles comparados. O primeiro consiste no conjunto preditor contínuo adaptado de Furukawa e Shimemura (1983) junto ao controle CMDC (estratégia proposta por Fernandes (2013)). O segundo compreende a proposta deste trabalho, sendo composto pelo controle CMDD junto ao preditor discreto adaptado de Xia et al. (2007). No terceiro tipo de controle, o termo “Controle Convencional” representa duas estratégias de controle diferentes de acordo com a planta utilizada nos testes, realizadas tanto em tempo contínuo quanto em tempo discreto. No sistema de suspensão ativa, esse termo representa o controle LQR (OGATA, 2010) proposto pelo fabricante do sistema de suspensão ativa

(QUANSER INNOVATE EDUCATE, 2010a) e no sistema *ball balancer* ele representa um controle por alocação de polos (OGATA, 2010). Por último, também são comparados resultados dos controles convencionais, já descritos, junto aos preditores contínuo ou discreto. Observe também que todos os estados da planta são considerados acessíveis.

Figura 22 - Esquemático de controle dos experimentos.



Fonte: próprio autor.

6.2 CONTROLADORES PARA SUSPENSÃO ATIVA

Os controladores desta seção levam em consideração a descrição no espaço de estados dada na Equação (181). Como o controlador sugerido pelo fabricante para este sistema é um controlador LQR, inicia-se esta seção por uma breve descrição desta estratégia de controle tanto em tempo contínuo (OGATA, 2010; QUANSER INNOVATE EDUCATE, 2010a), quanto em tempo discreto (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998).

6.2.1 Controle LQR

Considere um sistema linear invariante no tempo descrito na equação

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (193)$$

sendo $x \in \mathfrak{R}^n$ o vetor de estados, $u \in \mathfrak{R}^m$ o vetor de controle, $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ matrizes constantes. O par (A, B) é considerado controlável.

O objetivo do controle LQR é encontrar uma lei de controle $u(t) = -Kx(t)$ que minimize um índice de desempenho quadrático. Considere o índice de desempenho dado por

$$J = \int_0^{\infty} x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t) dt, \quad (194)$$

no qual Q uma matriz real simétrica definida ou semi-definida positiva e R uma matriz definida positiva real e simétrica, ambas com dimensões adequadas. Note que as matrizes Q e R ponderam a importância relativa do erro e da energia do sinal de controle utilizado, respectivamente.

O ganho K_c que minimiza o índice desempenho (194) com controle $u = -K_c x(t)$ é dado por (OGATA, 2010)

$$K_c = R^{-1} B^T P. \quad (195)$$

A matriz P da Equação (195) pode ser encontrada resolvendo-se a equação matricial reduzida de Riccati:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (196)$$

Desse modo, o projeto pode ser realizado encontrando-se uma matriz definida positiva P que satisfaça a Equação (196) e substituindo-se esse resultado na Equação (195) de modo a encontrar o ganho K .

Utilizando o procedimento descrito na Seção 3.1 o sistema (193) é descrito em tempo discreto pela equação

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma v(k), \quad (197)$$

na qual $x \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de controle e $\Phi \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $\Gamma \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ são matrizes constantes. O par (Φ, Γ) é considerado controlável.

Em tempo discreto, é considerado o índice de desempenho J dado por

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)^T Qx(k) + v(k)^T Rv(k). \quad (198)$$

Utilizando a lei de controle $v(k) = -K_d x(k)$ o índice (198) é minimizado calculando-se o ganho K_d pela equação (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998).

$$K_d = (R + \Gamma^T S \Gamma)^{-1} \Gamma^T S \Phi, \quad (199)$$

na qual S é encontrado resolvendo-se a equação de Riccati associada ao caso discreto:

$$S = \Phi^T \left[S - S \Gamma (R + \Gamma^T S \Gamma)^{-1} \Gamma^T S \right] \Phi + Q. \quad (200)$$

6.2.2 Implementação dos Controladores

O controle LQR proposto pelo fabricante possui as seguintes matrizes de projeto:

$$Q = \begin{bmatrix} 450 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = [0,01]. \quad (201)$$

Essas matrizes conduzem ao ganho

$$K_c = [24,6621 \quad 48,8733 \quad -0,4720 \quad 3,6846] \quad (202)$$

em tempo contínuo e ao ganho

$$K_d = [2,3928 \quad 47,5346 \quad -14,2842 \quad 3,7197] \quad (203)$$

em tempo discreto. Lembrando que os sinais de controle são calculados como $u(t) = -K_c x(t)$ em tempo contínuo sem preditor de estado, $u(t) = -K_c x_{pc}(t)$ em tempo contínuo com preditor, $v(k) = -K_d x(k)$ em tempo discreto sem preditor e como $v(k) = -K_d x_{pd}(k)$ em tempo discreto com preditor de estado discreto.

Para o projeto do controle CMDC, foi adotado a alocação de polos na determinação da superfície de deslizamento. Os polos escolhidos foram $p_1 = -23,0114$, $p_2 = -24,0955 + 25,1044j$ e $p_3 = -24,0955 - 25,1044j$ de modo que o sistema apresentasse desempenho semelhante ao controlador LQR do fabricante, utilizado para comparação. Note que, em deslizamento, ocorre redução de ordem no sistema, passando de ordem n para ordem $n - m$, sendo n a ordem do sistema e m o número de entradas de controle (Seção 2.6).

A superfície com estas especificações é calculada com base nos estados preditivos contínuos

e é dada por $\sigma(x_{pc}(t)) = Sx_{pc}(t)$, sendo

$$S = \begin{bmatrix} 27,3055 & 2,2188 & -28,2237 & -0,0944 \end{bmatrix}. \quad (204)$$

O sinal de controle é dado por $u(x_{pc}(t)) = u_{eq}(x_{pc}(t)) + u_N(x_{pc}(t))$, sendo

$$\begin{aligned} u_{eq}(x_{pc}(t)) &= (SB)^{-1}SAx_{pc}(t), \\ u_N(x_{pc}(t)) &= \rho \frac{\sigma(x_{pc}(t))}{|\sigma(x_{pc}(t))| + \varepsilon}, \rho = -25 \text{ e } \varepsilon = 0,06. \end{aligned}$$

Os parâmetros ρ e ε foram escolhidos empiricamente respeitando as restrições físicas impostas pelo equipamento. Observe que $x_{pc}(t)$ representa o estado preditivo dado pela Equação (138) e calculado no bloco “Preditor Contínuo” da Figura 22.

No controlador CMDD, também foi utilizada alocação de polos no projeto da superfície de chaveamento. Os polos escolhidos foram $z_1 = 0,9333$, $z_2 = 0,9276 + 0,07j$ e $z_3 = 0,9276 - 0,07j$ sendo estes os correspondentes dos polos escolhidos para o projeto CMDC no plano z com período de amostragem $T = 3 \text{ ms}$.

A superfície projetada foi $\mu(x_{pd}(k)) = Gx_{pd}(k)$, sendo

$$G = \begin{bmatrix} 8397,4 & 682,9 & -8704,2 & -30,1 \end{bmatrix}. \quad (205)$$

O controle é dado por $v(k) = v_{eq}(k) + v_N(k)$, com

$$\begin{aligned} v_{eq}(k) &= -(G\Gamma)^{-1}G(\Phi - I)x_{pd}(k), \\ v_N(k) &= -\gamma\mu(x_{pd}(k)), \gamma = 0,3. \end{aligned}$$

Note que $x_{pd}(k)$ representa o estado preditivo determinado pela Equação (154) e calculado pelo bloco “Preditor Discreto” da Figura 22. O parâmetro γ foi escolhido com base nos experimentos obedecendo as limitações do equipamento.

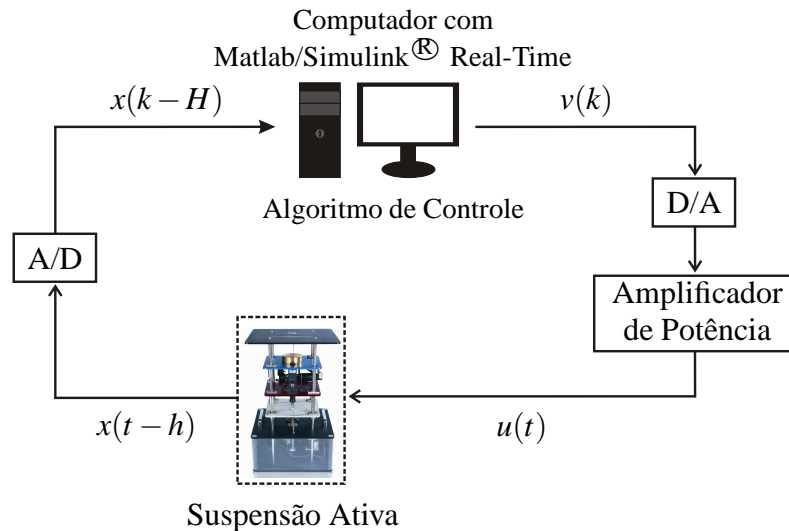
Um diagrama representando como foram realizados os testes no sistema de suspensão ativa é mostrado na Figura 23. Os testes seguem a ideia presente na Figura 22.

6.3 CONTROLADORES PARA SISTEMA BALL BALANCER

Os controladores para o sistema *ball balancer* consideram seu modelo no espaço de estados dado pela Equação (192). Para comparação com os controladores CMDC e CMDD foram

projetados controladores por alocação de polos em tempo contínuo (OGATA, 2010) e em tempo discreto (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998) com leis de controle $u(t) = -K_c x(t)$ e $v(k) = -K_d x(k)$ sem a utilização dos preditores de estado ou $u(t) = -K_c x_{pc}(t)$ e $v(k) = -K_d x_{pd}(k)$ com o uso dos preditores.

Figura 23 - Esquemático de controle do sistema de suspensão ativa.



Fonte: próprio autor.

6.3.1 Implementação dos Controladores

Os polos escolhidos para esse controlador por alocação de polos foram $p_1 = -4$ e $p_2 = -4$, $p_3 = -20$ e $p_4 = -20$, escolhidos empiricamente de modo que o sistema apresentasse bons resultados. Assim, o ganho K_c do controlador em tempo contínuo é dado por

$$K_c = \begin{bmatrix} 80,2228 & 48,1337 & 11,9417 & 0,1246 \end{bmatrix}. \quad (206)$$

Em tempo discreto, foram utilizados os polos $z_1 = 0,9048$, $z_2 = 0,9048$, $z_3 = 0,9802$ e $z_4 = 0,9802$, sendo estes os correspondentes no plano z com $T = 5 \text{ ms}$ dos polos escolhidos em tempo contínuo. Com isto, o ganho do controlador em tempo discreto foi calculado como sendo

$$K_d = \begin{bmatrix} 78,6323 & 47,3772 & 11,8589 & 0,1387 \end{bmatrix}. \quad (207)$$

O projeto do controlador CMDC utilizou novamente alocação de polos no projeto da superfície de chaveamento, utilizando os polos $p_1 = -3$, $p_2 = -3$ e $p_3 = -15$ de modo a respeitar as restrições do equipamento durante os testes. Com isto, a superfície de chaveamento utilizada

foi $\sigma(x_{pc}(t)) = Sx_{pc}(t)$, com

$$S = \begin{bmatrix} 1,6922 & 1,2409 & 0,3407 & 0,0162 \end{bmatrix}. \quad (208)$$

O controle é dado por $u(x_{pc}(t)) = u_{eq}(x_{pc}(t)) + u_N(x_{pc}(t))$, sendo

$$\begin{aligned} u_{eq}(x_{pc}(t)) &= (SB)^{-1}SAx_{pc}(t), \\ u_N(x_{pc}(t)) &= \rho \frac{\sigma(x_{pc}(t))}{|\sigma(x_{pc}(t))| + \varepsilon}, \rho = -5 \text{ e } \varepsilon = 0,03. \end{aligned}$$

No controle CMDD projetado, foi utilizada a superfície de deslizamento $\mu(x_{pd}(k)) = Gx_{pd}(k)$ com

$$G = \begin{bmatrix} 354,6771 & 260,0823 & 71,4007 & 3,3972 \end{bmatrix}, \quad (209)$$

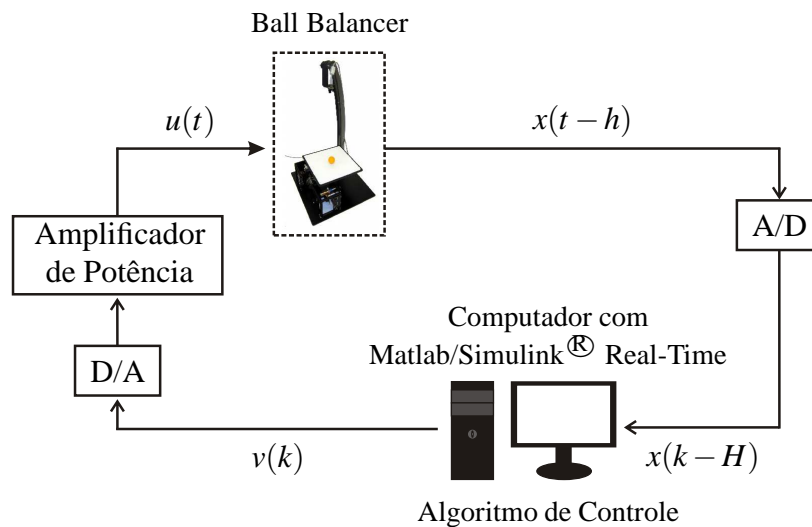
para que os polos do sistema em deslizamento no plano z com período de amostragem $T = 5 \text{ ms}$ sejam $z_1 = 0,9851$, $z_2 = 0,9851$ e $z_3 = 0,9277$, correspondendo aos polos utilizados no projeto CMDC.

O controle é dado por $v(k) = v_{eq}(k) + v_N(k)$ com

$$\begin{aligned} v_{eq}(k) &= -(G\Gamma)^{-1}G(\Phi - I)x_{pd}(k), \\ v_N(k) &= -\gamma\mu(x_{pd}(k)), \gamma = 0,3. \end{aligned}$$

Observe que no controle com modos deslizantes CMDC e CMDD os parâmetros livres ρ , ε e γ foram escolhido de modo a respeitar as restrições do equipamento durante os experimentos.

Figura 24 - Esquemático de controle do sistema *ball balancer*.



Fonte: próprio autor.

O diagrama presente na Figura 24 ilustra como foram realizados os testes no sistema *ball balancer*. Note que este diagrama segue a ideia presente nas Figuras 22 e 23.

6.4 COMENTÁRIOS

Este capítulo apresentou os projetos dos controladores utilizados e como os experimentos foram realizados. A implementação dos controladores foi realizada em computador digital com Matlab/Simulink[®] Real-time e o *software* Quarq[®] da Quanser[®], que realiza a comunicação com as plantas de teste. Os experimentos foram realizados nos sistemas suspensão ativa e *ball balancer*, ambos fabricados pela Quanser[®].

No Capítulo 7, são apresentados e analisados os resultados de simulações e testes práticos de acordo com a estratégia de comparação apresentada neste capítulo.

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, são apresentados os resultados de simulações e de experimentos práticos realizados segundo a proposta do Capítulo 6, nos sistemas de suspensão ativa e *ball balancer*, ambos fabricados pela Quanser[®]. Parâmetros como período de amostragem e tempo de atraso na aquisição de dados foram escolhidos empiricamente com base nas características de cada equipamento, de modo a respeitar suas restrições como, por exemplo, tensão máxima de acionamento dos motores.

Os resultados comprovam, em simulação e em experimentos práticos, que a utilização de preditores de estado são meios efetivos que possibilitam a utilização dos controles CMDD e CMDC na presença de grandes atrasos no processo de aquisição de dados. Além disso, também comprovam a melhor eficiência dos controles PD-CMDD e PC-CMDC frente controles clássicos (alocação de polos e LQR em tempo contínuo e discreto) perante perturbações na entrada de controle, mesmo quando estes também utilizam preditores de estado para lidar com atrasos na aquisição de dados. Ademais, mostram como a abordagem discreta (PD-CMDD) torna viável a utilização de maiores períodos de amostragem no sistema de controle quando comparada à abordagem contínua (PC-CMDC).

Serão utilizadas neste capítulo as abreviações: DLQR para se referir ao controle LQR projetado em tempo discreto, assim como PC para se referir ao preditor contínuo adaptado de Furukawa e Shimemura (1983) e PD para se referir ao preditor discreto adaptado de Xia et al. (2007).

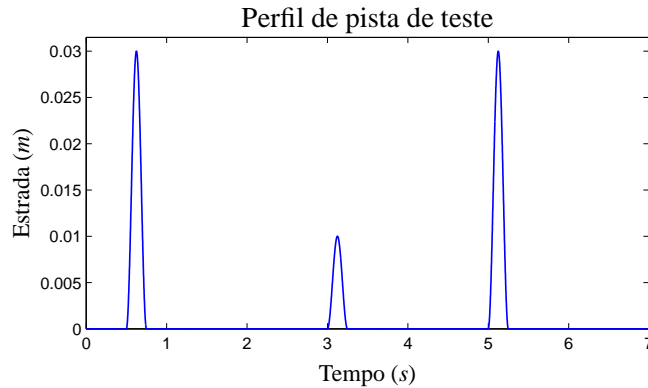
7.1 RESULTADOS NO SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA

Nesta seção, são apresentados os resultados referentes aos testes realizados no sistema de suspensão ativa de bancada Quanser[®]. A pista de testes utilizada nos experimentos é dada pela equação (SAM; SUAIB; OSMAN, 2008; SAM; OSMAN, 2005)

$$e(t) = \begin{cases} \frac{a(1 - \cos(8\pi t))}{2} & \text{se } 0,5 \leq t \leq 0,75 \text{ ou } 3 \leq t \leq 3,25 \text{ ou } 5 \leq t \leq 5,25, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (210)$$

na qual $a = 0,03 \text{ m}$ durante $0,5 \leq t \leq 0,75$ e $5 \leq t \leq 5,25$ e $a = 0,01 \text{ m}$ durante $3 \leq t \leq 3,25$. Uma representação gráfica da pista descrita em (210) é mostrada na Figura 25.

Figura 25 - Perfil de pista de teste.



Fonte: adaptado de Sam e Osman (2005).

Quando presente, o distúrbio inserido na entrada de controle do sistema de suspensão ativa é uma senoide com frequência de $0,2 \text{ Hz}$ e amplitude igual a 4 N . Seu propósito é verificar a robustez dos controles PC-CMDC e PD-CMDD frente ao controle LQR proposto pelo fabricante do sistema diante de incertezas casadas.

Nos testes realizados no sistema de suspensão ativa com o controle contínuo (LQR, PC-LQR, CMDC e PC-CMDC), a menos que mencionado diferente, emprega-se período de amostragem de 1 ms enquanto nos testes com controle discreto (DLQR, PD-DLQR, CMDD e PD-CMDD) utiliza-se 3 ms . Considerações sobre períodos de amostragem no sistema de suspensão ativa são apresentadas na Subseção 7.1.6.

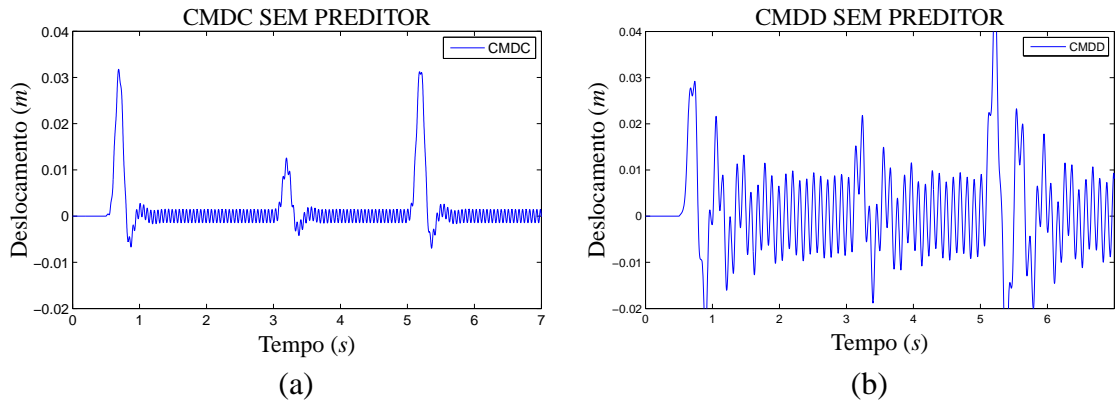
7.1.1 Necessidade dos Preditores

Como mencionado no Capítulo 4, o CEV/MD é muito sensível a atrasos, quaisquer que sejam. Nos gráficos presentes nas Figuras 26 e 27, encontram-se os resultados de simulações realizadas com os controles CMDC e CMDD, sem utilização de preditores de estado, na presença de 12 períodos de amostragem de atraso na aquisição de dados. Como os períodos de amostragem utilizados para o CMDC e CMDD são diferentes, os tempos de atraso são de 12 ms e 36 ms , respectivamente. Note que o deslocamento do corpo do veículo (Figura 26) trepida em consequência do alto chaveamento do sinal de controle (Figura 27). Observe também que o sinal de controle foi projetado para saturar em 40 N e -40 N para proteção do equipamento.

A partir destes resultados, fica nítida a necessidade da utilização de algum método que consiga eliminar os efeitos do atraso nos estados em conjunto com os controles CMDC e CMDD

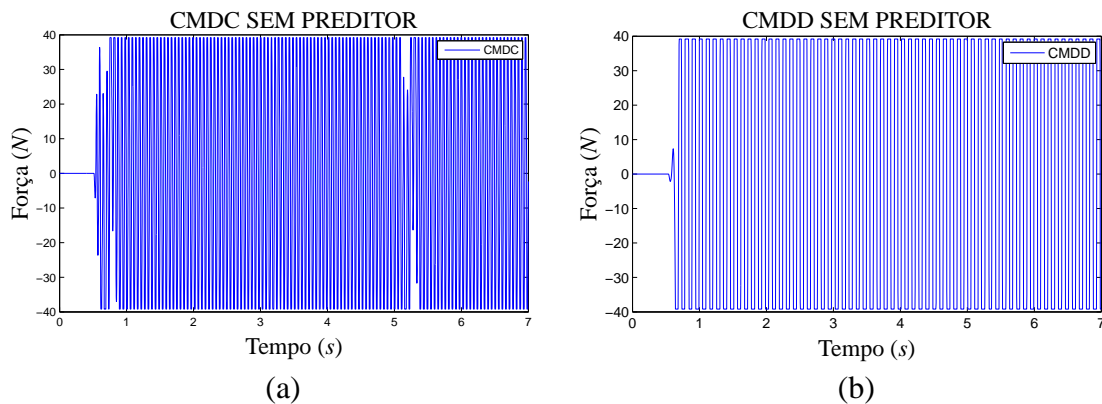
quando existem atrasos na aquisição de dados. Os resultados apresentados a seguir comprovam a eficiência da utilização de preditores de estado em possibilitar o uso destes controladores com sucesso na presença de grandes atrasos no processo de aquisição de dados.

Figura 26 - Deslocamento do corpo do veículo obtido por simulação, com $12 T$ de atraso na aquisição de dados sem utilização de preditores de estado (a) CMDC (b) CMDD.



Fonte: resultados de simulação.

Figura 27 - Sinal de controle obtido por simulação, com $12 T$ de atraso na aquisição de dados sem utilização de preditores de estado (a) CMDC (b) CMDD.



Fonte: resultados de simulação.

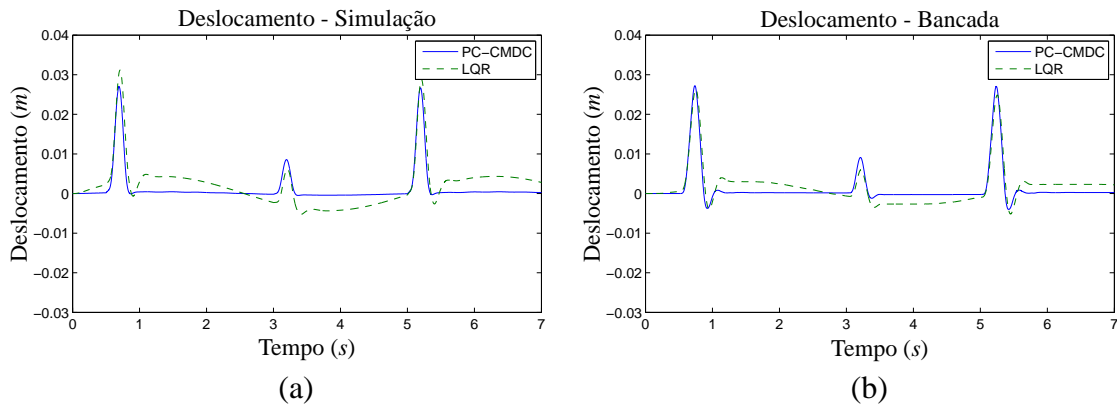
7.1.2 Comparação entre PC-CMDC e LQR

Nas Figuras 28 e 29, comparam-se as respostas do sistema de suspensão ativa, deslocamento do corpo do veículo e sinal de controle, respectivamente, com controle PC-CMDC e LQR proposto pelo fabricante, obtidas por simulação e experimentos em bancada. Nestes gráficos, o sistema sofre atraso de 12 períodos de amostragem ($12 ms$) e perturbação na entrada de controle.

Percebe-se que a principal vantagem do controle CMDC, a rejeição de incertezas casadas (neste caso apresentada na forma de perturbações na entrada de controle), manteve-se mesmo

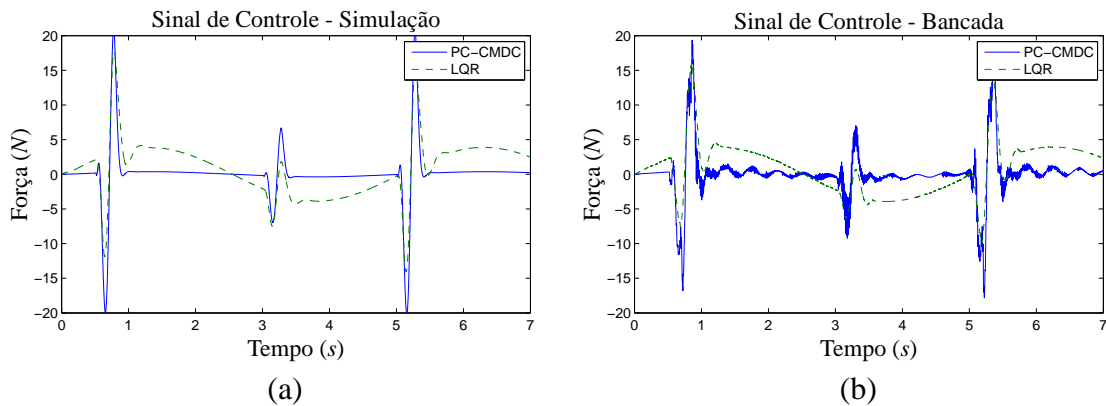
na presença de atrasos na aquisição de dados, quando aplicado junto ao preditor de estados (PC-CMDC). Além disso, comprova-se a eficiência do preditor contínuo aplicado junto ao controle CMDC nestas condições.

Figura 28 - Comparação entre deslocamento do corpo do veículo com controles PC-CMDC e LQR, $12 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.



Fonte: resultados de simulação e experimentais.

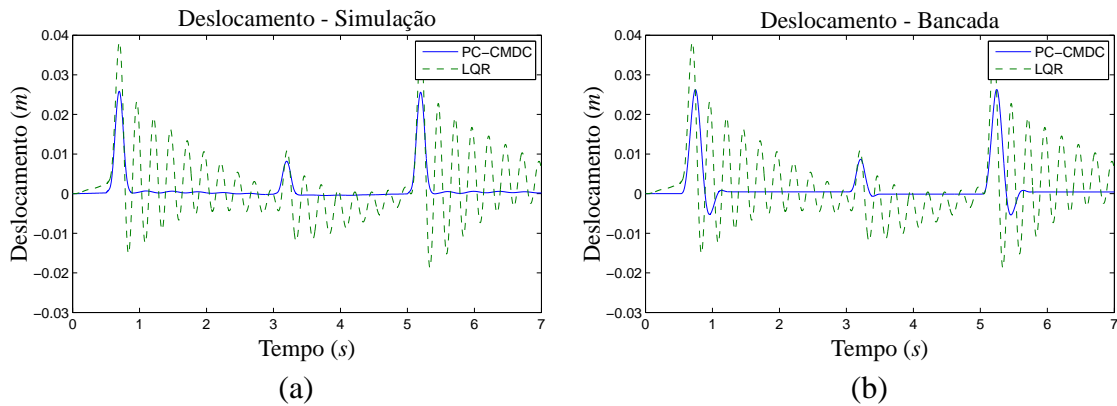
Figura 29 - Comparação entre sinais de controle com controles PC-CMDC e LQR, $12 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.



Fonte: resultados de simulação e experimentais.

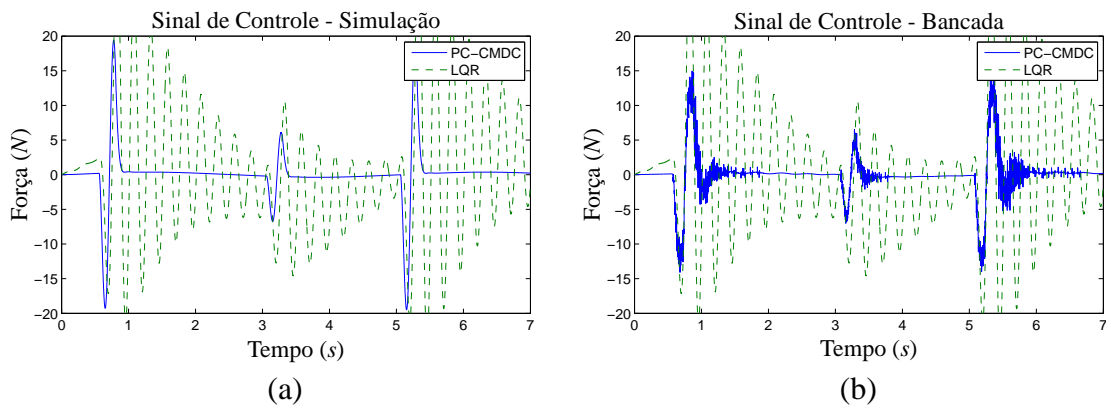
Nas Figuras 30 e 31, observa-se o mesmo tipo de resultados na presença de $60 T$ de atraso na aquisição de dados ($60 ms$) e perturbação na entrada de controle. Note que, mesmo nesta condição extrema, o controle PC-CMDC manteve-se com bom desempenho, o que reafirma a eficácia desta estratégia de controle. Neste caso, mesmo o controle LQR, que não é tão suscetível ao atraso na aquisição de dados quanto o CMDC, apresentou performance bastante ruim, que é melhorada com a inclusão do PC na malha de realimentação como será visto na Subseção 7.1.3.

Figura 30 - Comparação entre deslocamentos do corpo do veículo com controles PC-CMDC e LQR, $60 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.



Fonte: resultados de simulação e experimentais.

Figura 31 - Comparação entre sinais de controle com controles PC-CMDC e LQR, $60 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.

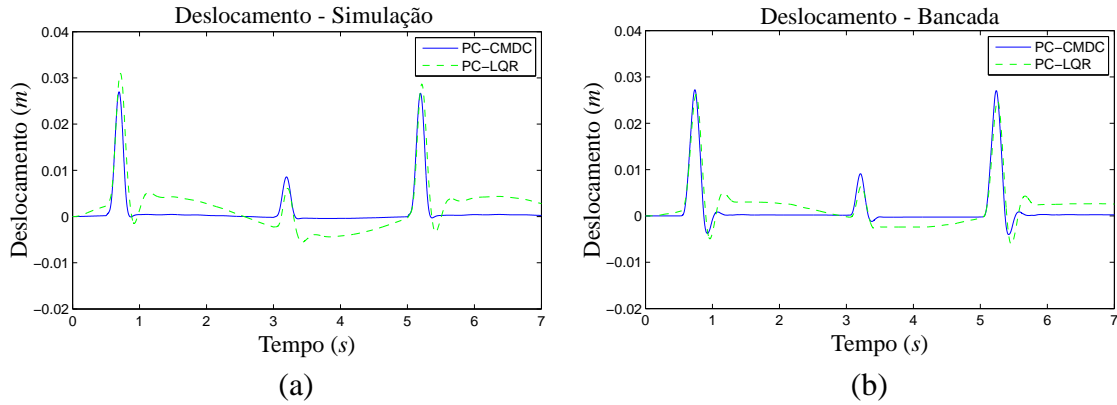


Fonte: resultados de simulação e experimentais.

7.1.3 Comparação entre PC-CMDC e PC-LQR

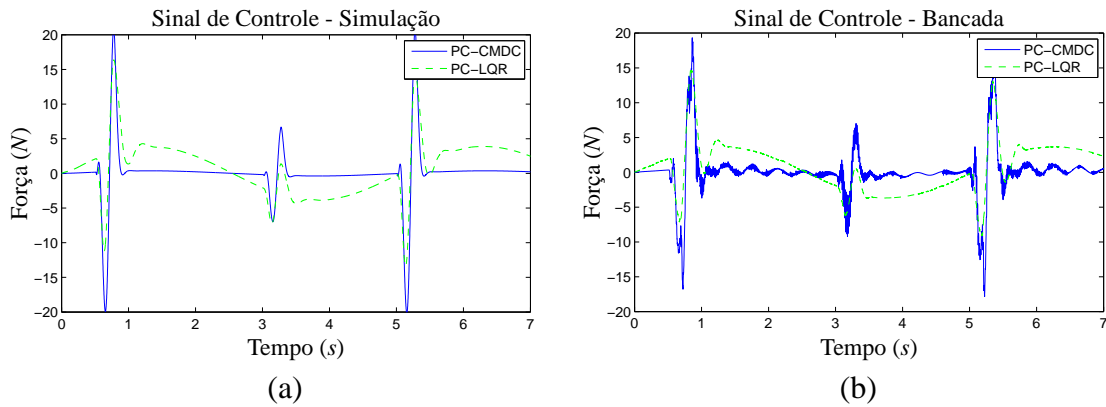
Nesta subseção, nas Figuras 32-35, são comparados os resultados entre os controles PC-CMDC e PC-LQR (preditor contínuo e controle LQR) nas mesmas condições testadas na Subseção 7.1.2. Melhores resultados com controle LQR são obtidos com a utilização do preditor de estado contínuo na malha de realimentação (controle PC-LQR), contudo, o controle PC-CMDC continua apresentando maior robustez a incertezas casadas.

Figura 32 - Comparação entre deslocamentos do corpo do veículo com controles PC-CMDC e PC-LQR, 12 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.



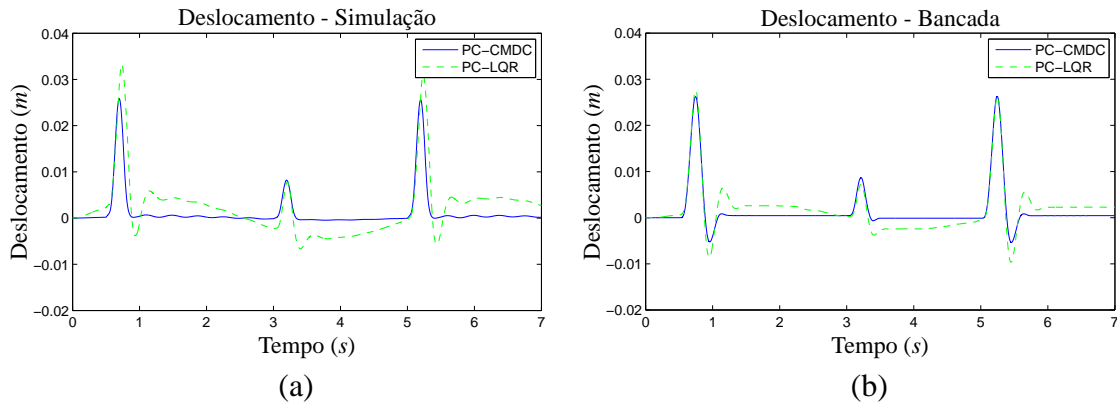
Fonte: resultados de simulação e experimentais.

Figura 33 - Comparação entre sinais de controle com controles PC-CMDC e PC-LQR, 12 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.



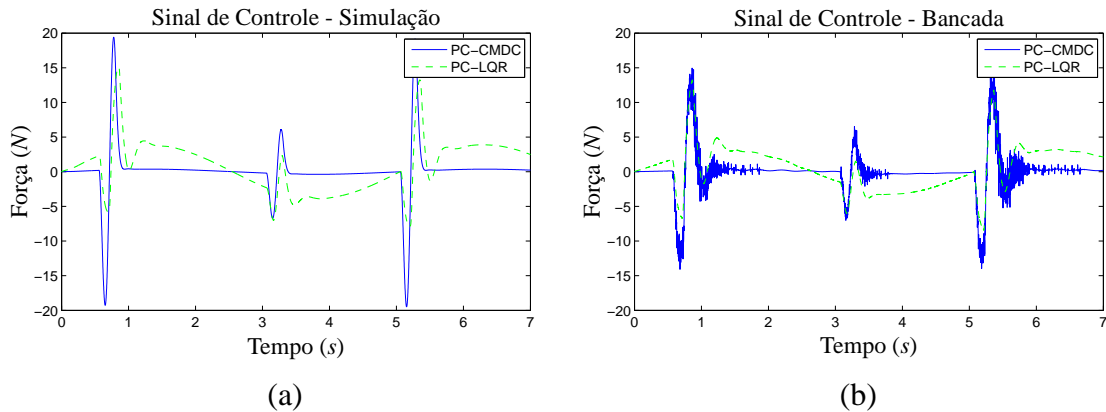
Fonte: resultados de simulação e experimentais.

Figura 34 - Comparação entre deslocamento do corpo do veículo com controles PC-CMDC e PC-LQR, 60 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.



Fonte: resultados de simulação e experimentais.

Figura 35 - Comparação entre sinais de controle com controles PC-CMDC e PC-LQR, $60 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.

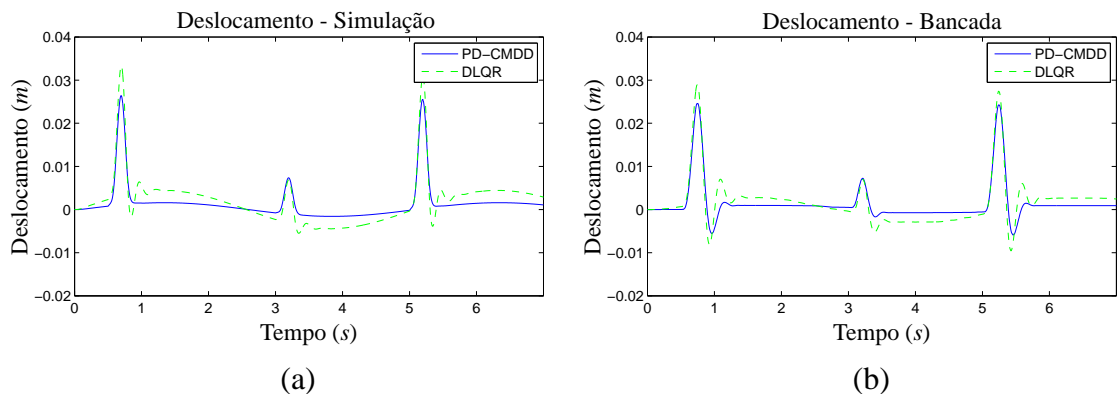


Fonte: resultados de simulação e experimentais.

7.1.4 Comparação entre PD-CMDD e DLQR

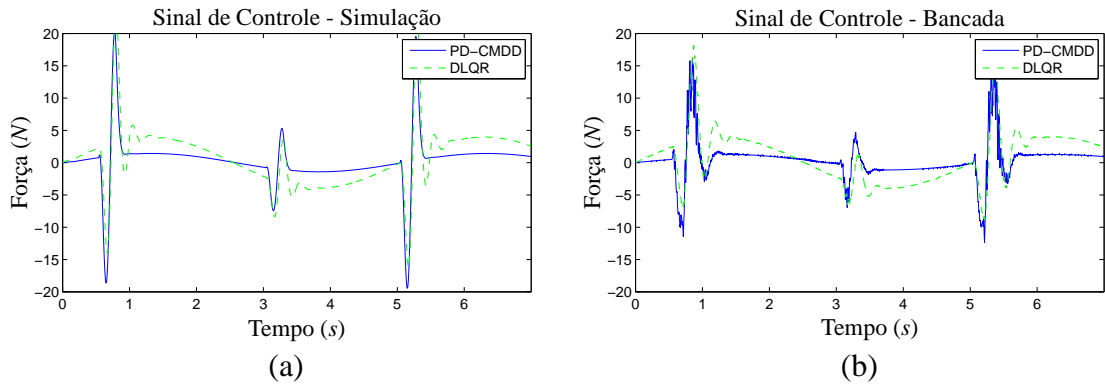
Seguindo a mesma linha de comparação que na proposta contínua, uma comparação entre resultados obtidos com controles PD-CMDD e LQR discreto (DLQR), $12 T$ de atraso na aquisição de dados ($36 ms$) e perturbação na entrada de controle estão presentes nas Figuras 36 e 37. Nas Figuras 38 e 39, estão presentes resultados com $60 T$ de atraso na aquisição de dados ($180 ms$) e perturbação na entrada de controle. Observe que o conjunto PD-CMDD obteve bons resultados tanto em simulação quanto em bancada, no entanto, resultados de bancada com o controle DLQR não foram possíveis nestas condições, sendo obtidos apenas com a utilização do PD junto ao DLQR (Subseção 7.1.5).

Figura 36 - Comparação entre deslocamentos do corpo do veículo com controles PD-CMDD e DLQR, $12 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.



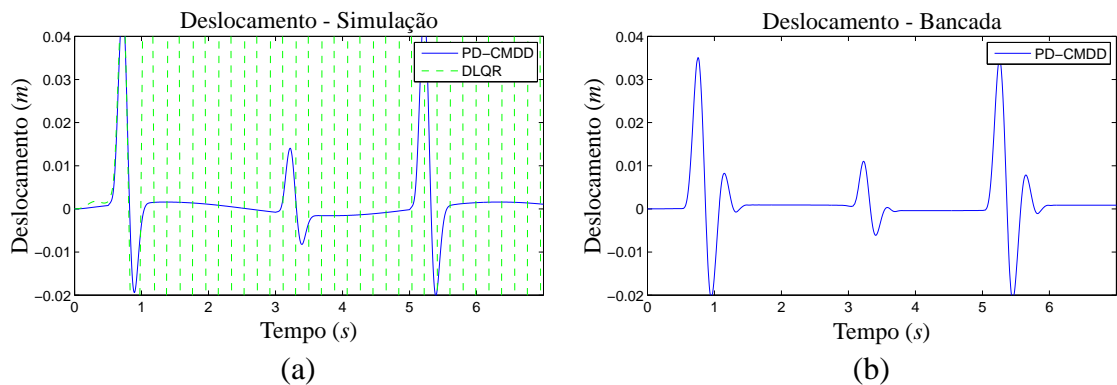
Fonte: resultados de simulação e experimentais.

Figura 37 - Comparação entre sinais de controle com controles PD-CMDD e DLQR, $12 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.



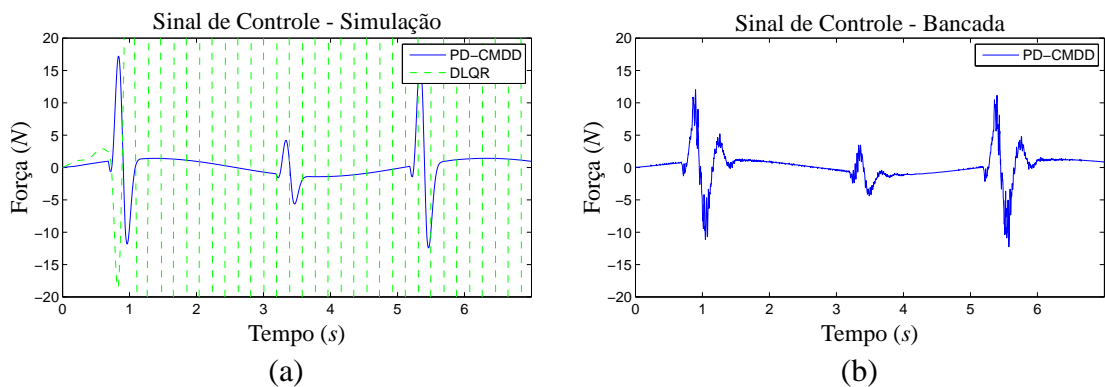
Fonte: resultados de simulação e experimentais.

Figura 38 - Comparação entre deslocamento do corpo do veículo com controles PD-CMDD e DLQR, $60 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.



Fonte: resultados de simulação e experimentais.

Figura 39 - Comparação entre sinais de controle com controles PD-CMDD e DLQR, $60 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.

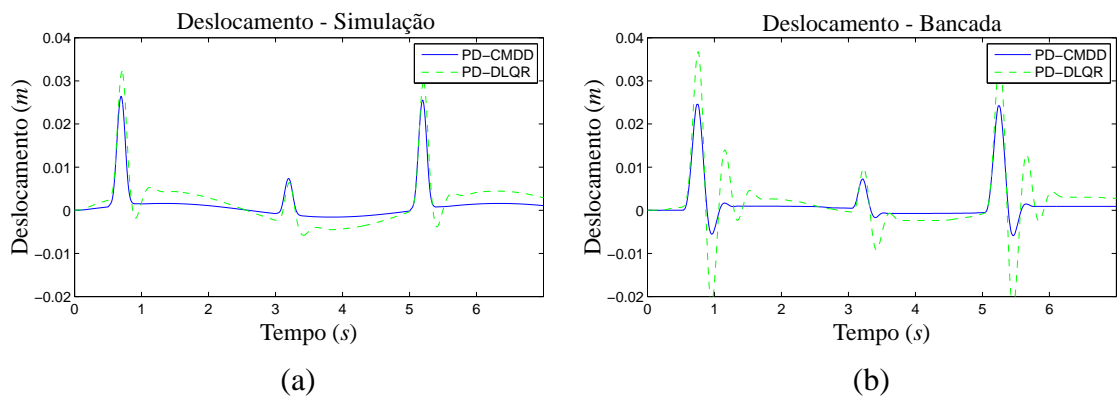


Fonte: resultados de simulação e experimentais.

7.1.5 Comparação entre PD-CMDD e PD-DLQR

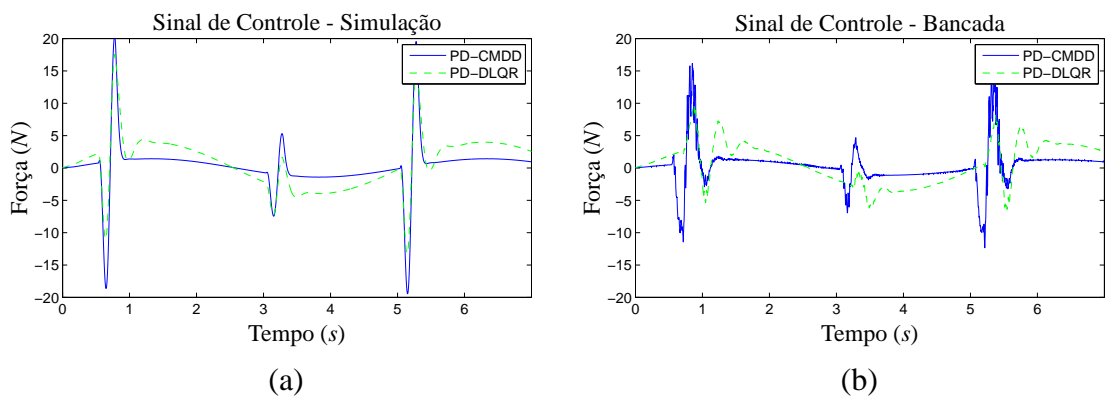
Compara-se nas Figuras 40-43 os resultados entre os controles PD-CMDD e PD-DLQR. Percebe-se o melhor resultado do controle DLQR na presença de grandes atrasos na aquisição de dados com a utilização do preditor de estado discreto na malha de controle, o que possibilitou resultados práticos na presença de atrasos de $60 T$ durante a aquisição de dados (Figuras 42 e 43). Entretanto, o controle PD-CMDD continua apresentando maior robustez a incertezas casadas.

Figura 40 - Comparação entre deslocamentos do corpo do veículo com controles PD-CMDD e PD-DLQR, $12 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.



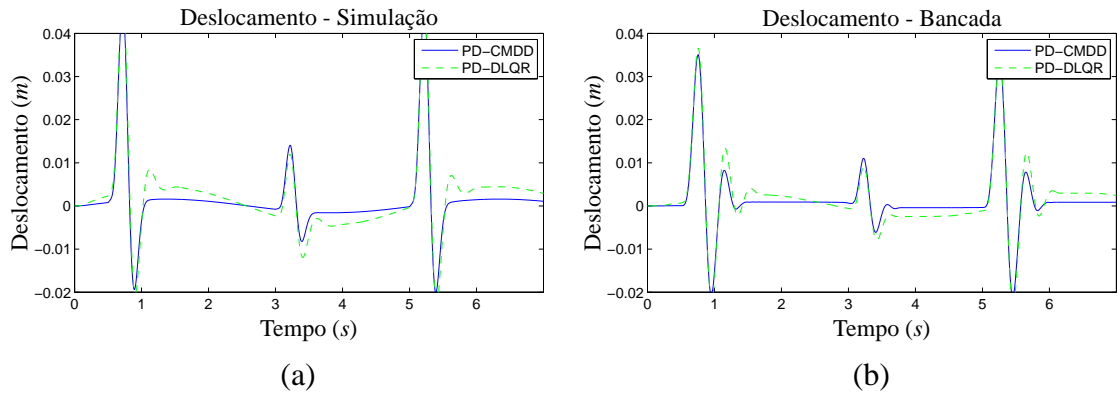
Fonte: resultados de simulação e experimentais.

Figura 41 - Comparação entre sinais de controle com controles PD-CMDD e PD-DLQR, $12 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.



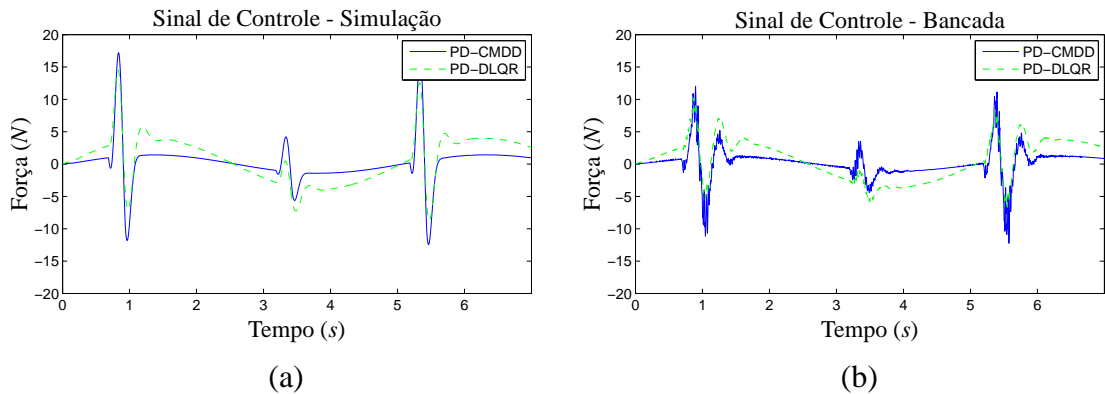
Fonte: resultados de simulação e experimentais.

Figura 42 - Comparação entre deslocamento do corpo do veículo com controles PD-CMDD e PD-DLQR, 60 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.



Fonte: resultados de simulação e experimentais.

Figura 43 - Comparação entre sinais de controle com controles PD-CMDD e PD-DLQR, 60 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) dados de simulação (b) dados de bancada.

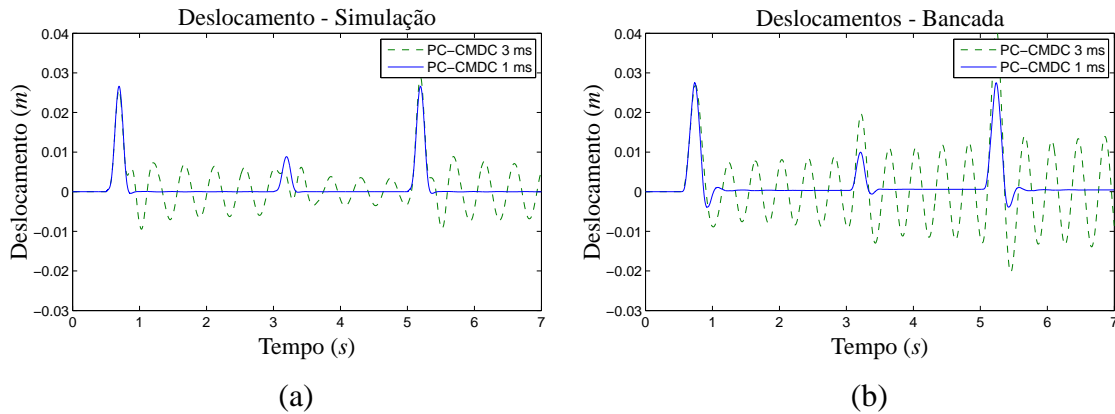


Fonte: resultados de simulação e experimentais.

7.1.6 Influência do Período de Amostragem no PC-CMDC

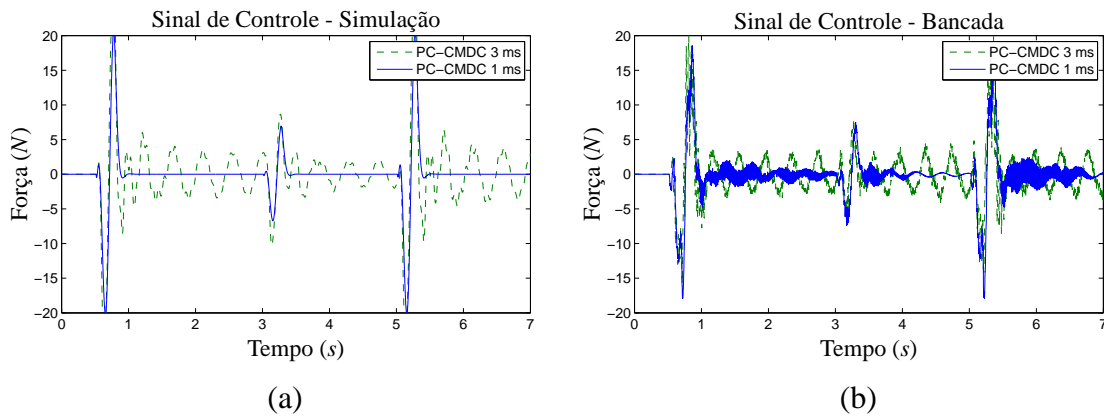
Os períodos de amostragem utilizados nos controles PC-CMDC e PD-CMDD são diferentes. No controle PC-CMDC, é utilizado 1 ms enquanto utiliza-se 3 ms no período de amostragem do controle PD-CMDD. O período de amostragem escolhido no controle PC-CMDC foi o menor possível, de modo que a emulação apresentasse bons resultados. Nas Figuras 44 e 45, faz-se comparações entre os resultados obtidos em simulação e em bancada com controle PC-CMDC, 12 T de atraso na aquisição de dados, sem perturbação na entrada de controle, utilizando-se como período de amostragem 1 ms e 3 ms.

Figura 44 - Comportamento do controle PC-CMDC com $12T$ de atraso na aquisição de dados, sem perturbação na entrada de controle, utilizando diferentes períodos de amostragem (a) deslocamento do corpo do veículo em simulação (b) deslocamento do corpo do veículo em bancada.



Fonte: resultados de simulação e experimentais.

Figura 45 - Comportamento do controle PC-CMDC, com $12T$ de atraso na aquisição de dados, sem perturbação na entrada de controle, utilizando diferentes períodos de amostragem (a) sinal de controle em simulação (b) sinal de controle em bancada.



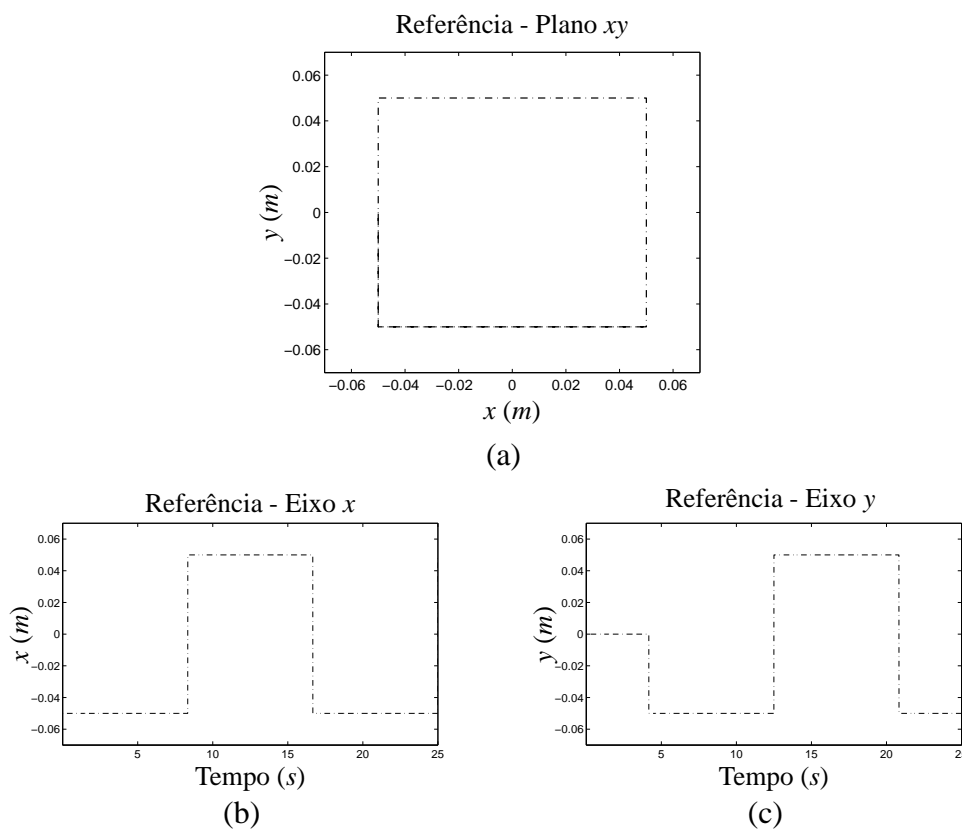
Fonte: resultados de simulação e experimentais.

Analisando os gráficos das Figuras 44 e 45, observa-se que a emulação utilizada perde eficiência com o aumento do período de amostragem. O controle PC-CMDC provou-se ineficiente utilizando-se $T = 3\text{ ms}$ enquanto o controle PD-CMDD apresentou bons resultados com este período de amostragem mesmo com a presença de perturbação na entrada de controle (Figuras 36 e 37).

7.2 RESULTADOS NO SISTEMA BALL BALANCER

De maneira semelhante ao feito com o sistema de suspensão ativa na Seção 7.1, esta seção apresenta resultados referentes aos testes realizados no sistema *ball balancer* Quanser[®]. O sinal de referência ao qual a esfera deve seguir é uma onda quadrada periódica em ambos os eixos de modo que no plano seja traçado um quadrado de 10 *cm* de lado. Os sinais de referência são mostrados na Figura 46.

Figura 46 - Referência utilizada nos testes com *ball balancer* (a) referência no plano *xy* (b) referência para o eixo *x* (c) referência para o eixo *y*.



Fonte: Quanser Innovate Educate (2008b).

O distúrbio inserido na entrada de controle durante alguns testes foi uma senoide de amplitude 1 V e 1 *Hz* de frequência. Este distúrbio tem por objetivo verificar a robustez dos controles PC-CMDC e PD-CMDD comparado ao controle por alocação de polos contínuo e discreto sem preditores e com preditores, na presença de incertezas casadas.

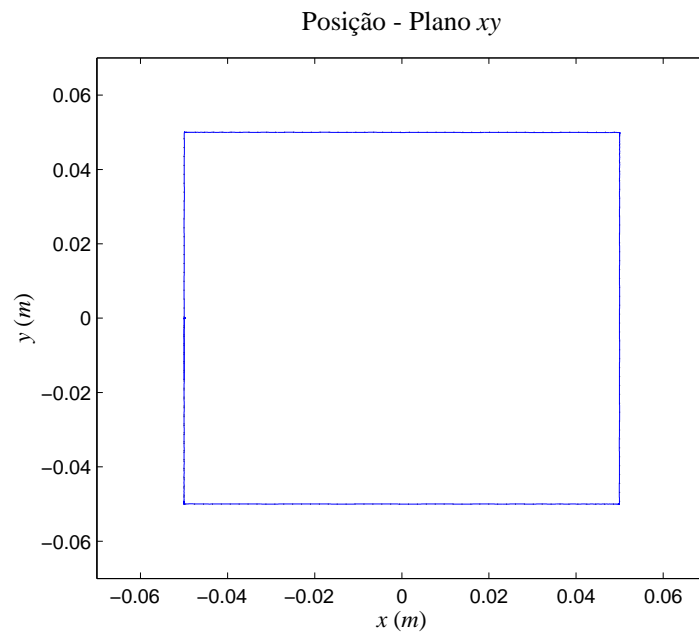
Nos experimentos, a menos que mencionado diferente, utilizou-se período de amostragem de 1 *ms* na abordagem contínua (CMDC, PC-CMDC e alocação de polos sem e com PC) e de 5 *ms* na proposta discreta (CMDD, PD-CMDD, alocação de polos discreto sem e com PD). Considerações sobre os períodos de amostragem utilizados no sistema *ball balancer* são apresentadas na Subseção 7.2.6.

7.2.1 Necessidade dos Preditores

Resultados de simulações com os controladores CMDC e CMDD na presença de $20 T$ de atraso na aquisição de dados e sem utilização de preditores de estado estão presentes nas Figuras 47-50.

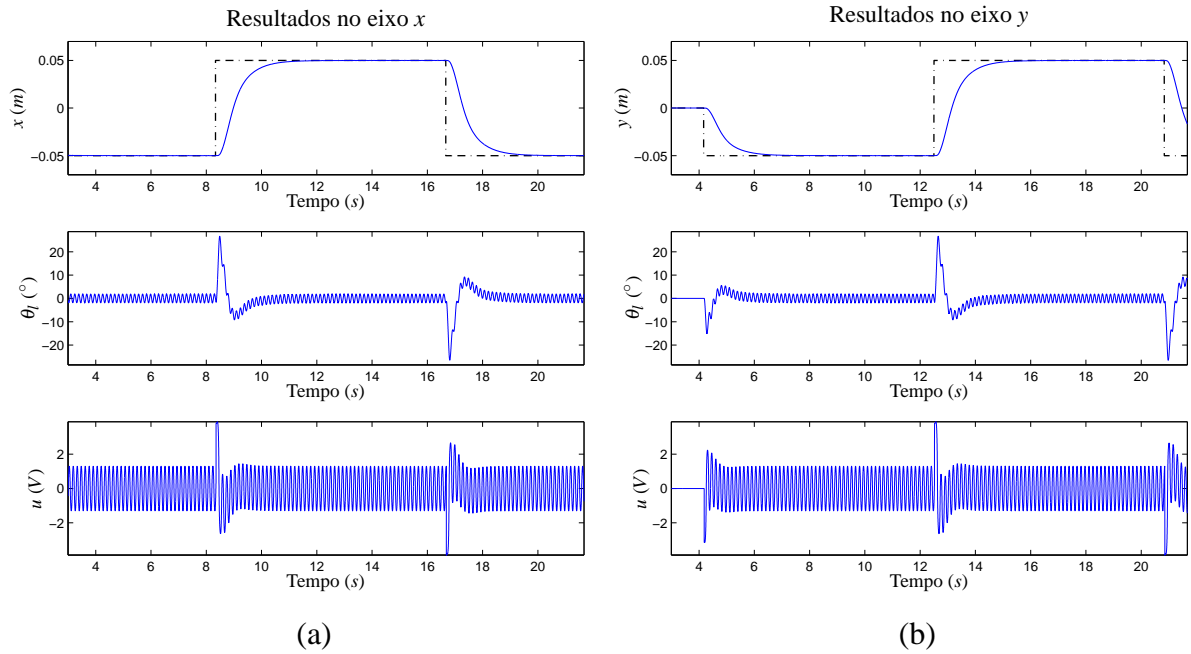
Embora os resultados de simulação do controle CMDC mostrem que a posição da esfera segue a referência de maneira satisfatória (Figura 47), o chaveamento excessivo no sinal de controle associado (Figura 48) torna inviável sua implementação. No CMDD, a ineficácia é nítida na posição da esfera (Figura 49) e no sinal de controle (Figura 50). Note também que o sinal de controle é saturado em $\pm 10 V$ para proteção do atuador.

Figura 47 - Posição da esfera no plano xy em simulação com $20 T$ de atraso na aquisição de dados e controle CMDC sem utilização de preditor de estado. Referência em linha traço-ponto.



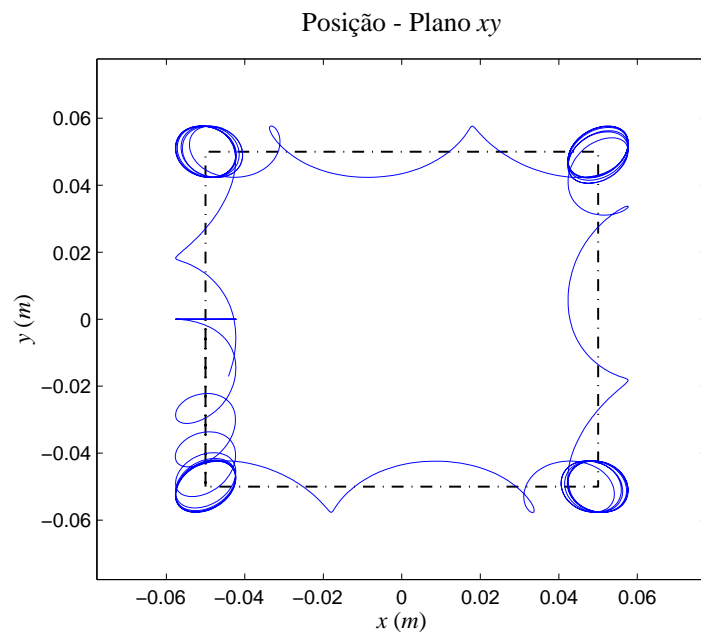
Fonte: resultado de simulação.

Figura 48 - Resultados de posição, ângulo do motor e sinal de controle em simulação com $20 T$ de atraso na aquisição de dados e controle CMDC sem utilização de preditor de estado (a) resultados no eixo x (b) resultados no eixo y . Referência em linha traço-ponto.



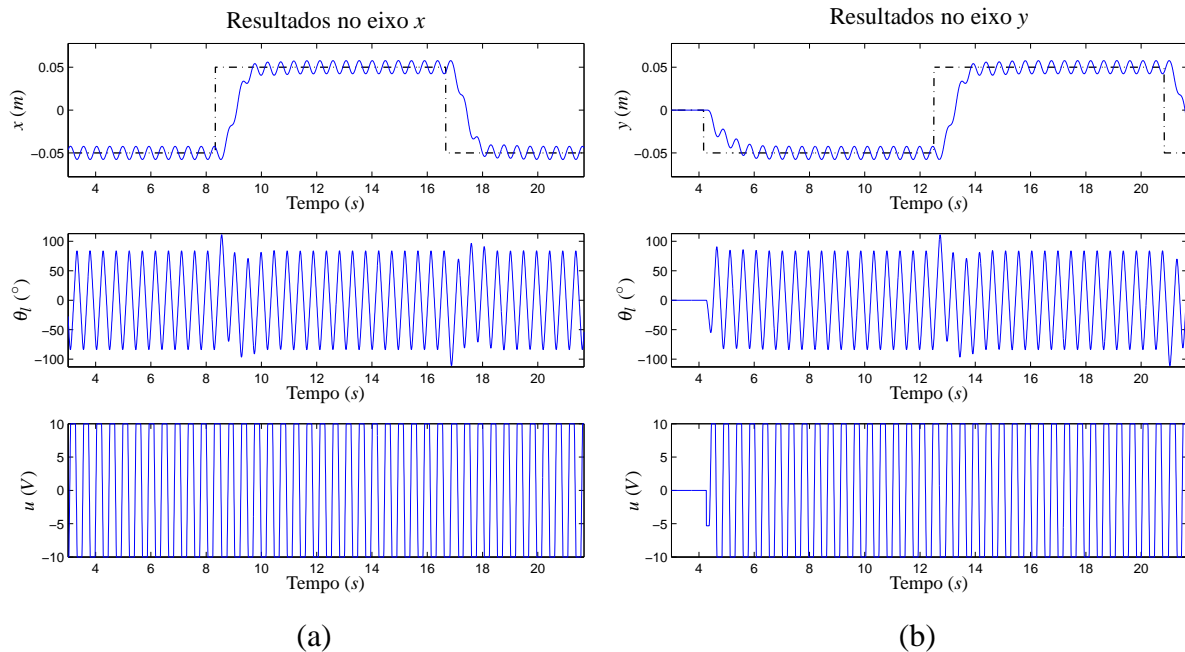
Fonte: resultados de simulação.

Figura 49 - Posição da esfera no plano xy em simulação com $20 T$ de atraso na aquisição de dados e controle CMDD sem utilização de preditor de estado. Referência em linha traço-ponto.



Fonte: resultado de simulação.

Figura 50 - Resultados de posição, ângulo do motor e sinal de controle em simulação com $20 T$ de atraso na aquisição de dados e controle CMDD sem utilização de preditor de estado (a) resultados no eixo x (b) resultados no eixo y . Referência em linha traço-ponto.



Fonte: resultados de simulação.

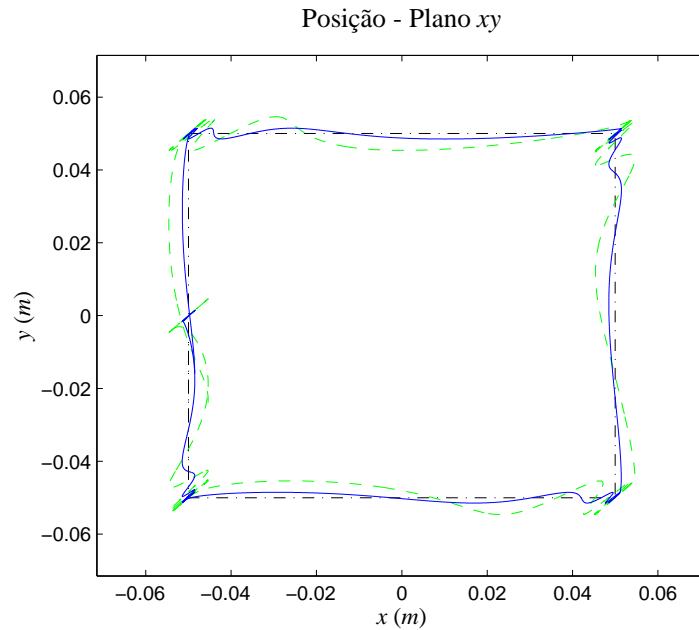
Desse modo, conclui-se novamente que a presença de grandes atrasos de aquisição de dados prejudicam a eficiência dos controle CMDC e CMDD. Neste sentido, o emprego de algum método que consiga tratar o atraso durante a aquisição dos estados deve ser utilizado em conjunto com os controles CMDC e CMDD na existência deste tipo de atraso. No decorrer desta seção, assim como foi feito na Seção 7.1, são apresentados resultados práticos e de simulações que comprovam que o emprego de preditores de estado junto aos controladores CMDC e CMDD (controles PC-CMDC e PD-CMDD) podem ser utilizados eficientemente neste cenário, mantendo-se certo grau de robustez.

7.2.2 Comparação entre PC-CMDC e Alocação de Polos

Nas Figuras 51 e 52, são comparados resultados de simulação com $20 T$ de atraso na aquisição de dados ($20 ms$) e perturbação na entrada de controle utilizando controles PC-CMDC e alocação de polos. Note que, mesmo na presença de perturbação na entrada de controle, o controle PC-CMDC não apresenta o chaveamento que o controle CMDC apresentou na presença deste mesmo atraso sem perturbação (Figura 48). Observe também que o controle por alocação de polos sofre maior influência da perturbação na entrada de controle que o controle PC-CMDC. Resultados de bancada nestas mesmas condições são comparados nas Figuras 53-55. Como é possível observar, assim como na simulação, o sistema sofre menos com a perturbação consi-

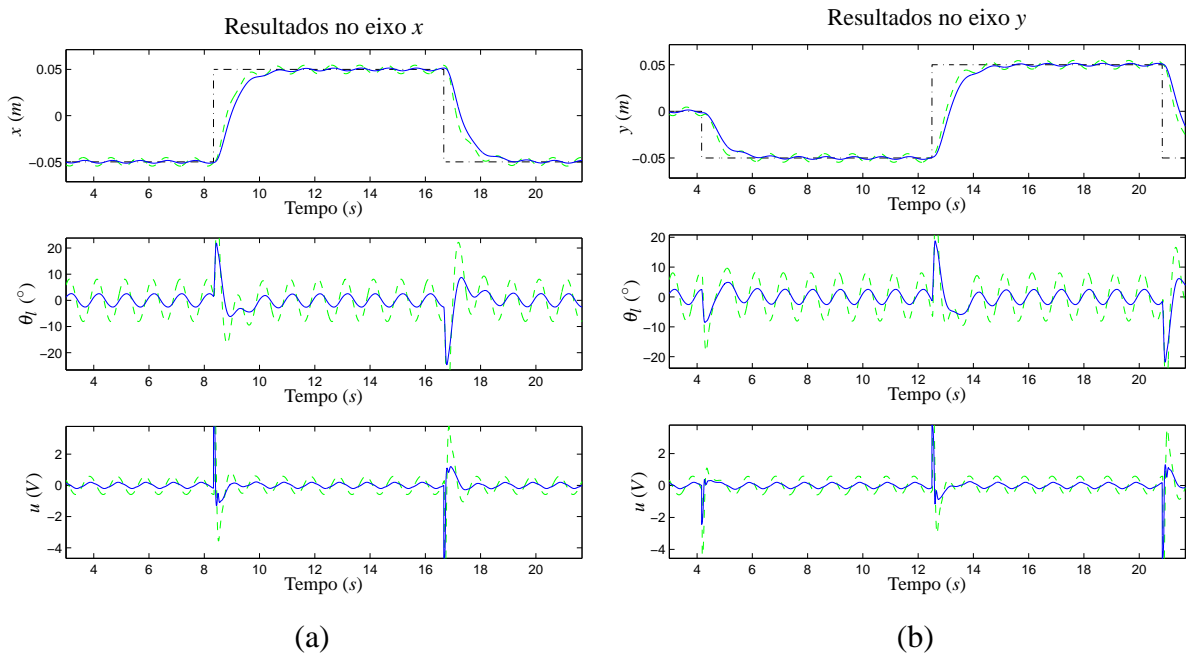
derada quando é utilizado controle PC-CMDC.

Figura 51 - Comparação entre posição da esfera no plano xy em simulação com controle PC-CMDC (linha contínua) e alocação de polos (linha tracejada), $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle. Referência em linha traço-ponto.



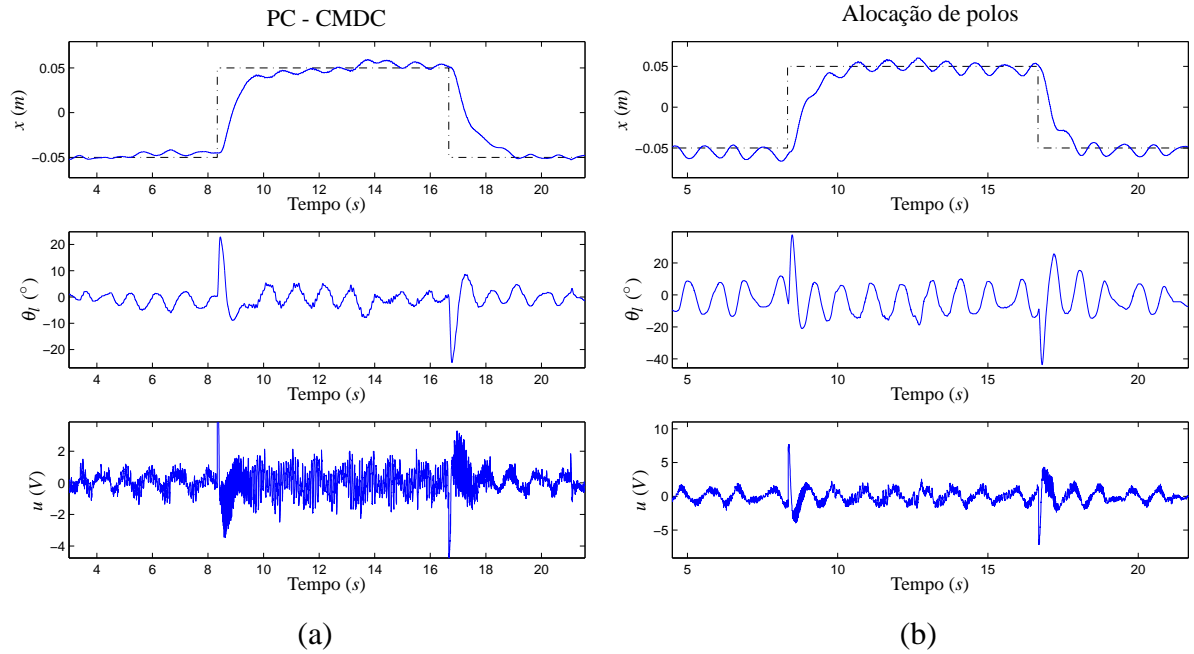
Fonte: resultados de simulação.

Figura 52 - Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle em simulação com controle PC-CMDC (linha contínua) e alocação de polos (linha tracejada), $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) resultados no eixo x (b) resultados no eixo y . Referência em linha traço-ponto.



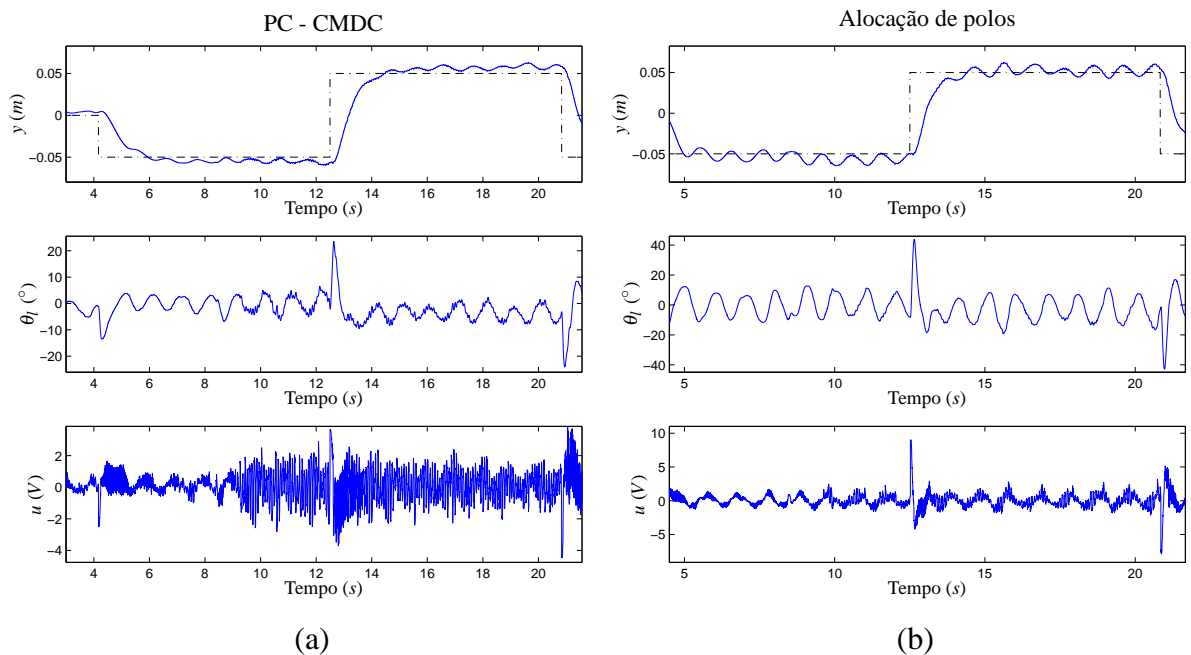
Fonte: resultados de simulação.

Figura 53 - Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle no eixo x em bancada com controle PC-CMDC e alocação de polos, $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) controle PC-CMDC (b) alocação de polos. Referência em linha traço-ponto.



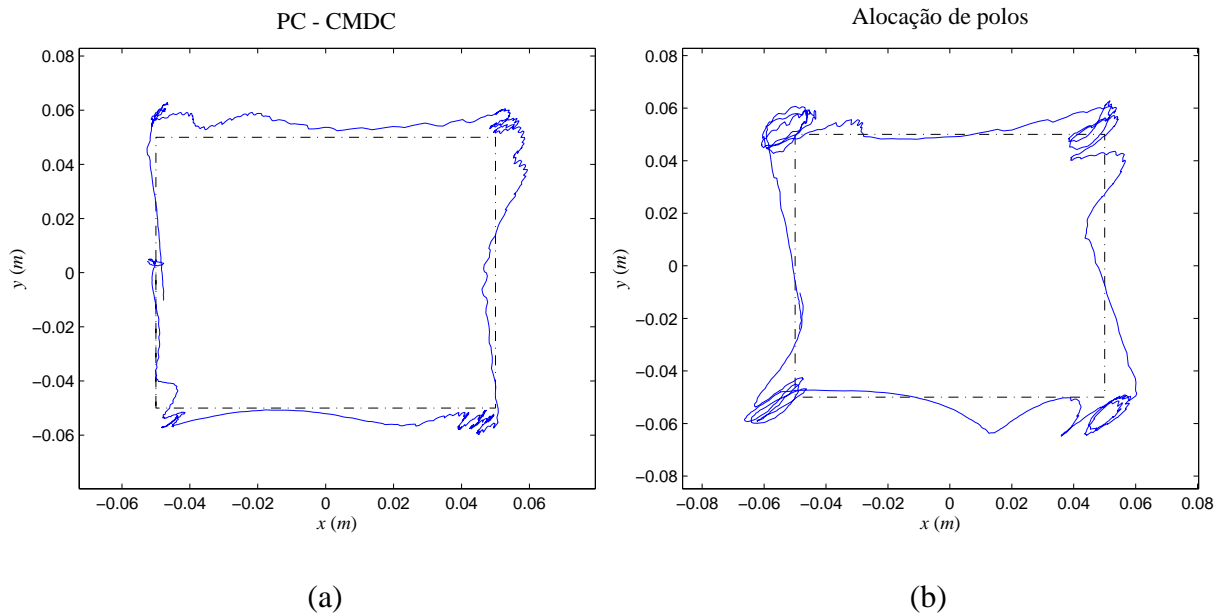
Fonte: resultados experimentais.

Figura 54 - Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle no eixo y em bancada com controle PC-CMDC e alocação de polos, $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) controle PC-CMDC (b) alocação de polos. Referência em linha traço-ponto.



Fonte: resultados experimentais.

Figura 55 - Comparação entre posição no plano xy em bancada com controle PC-CMDC e alocação de polos, 20 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) controle PC-CMDC (b) alocação de polos. Referência em linha traço-ponto.



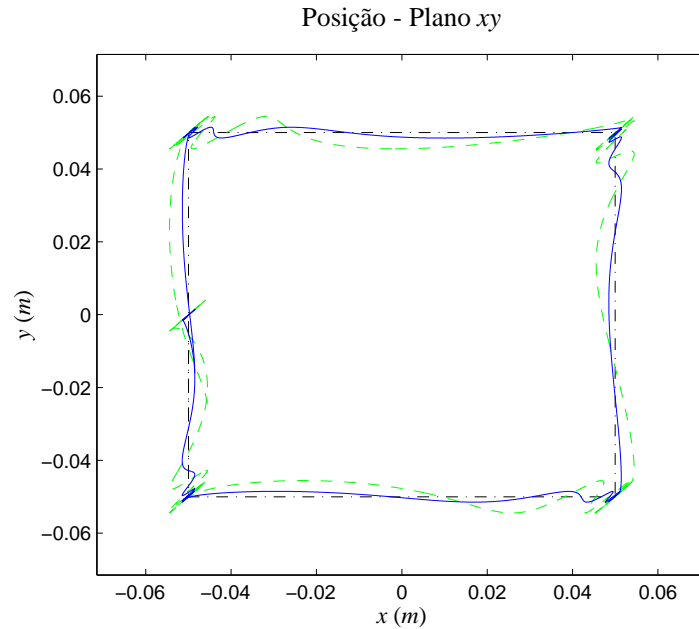
Fonte: resultados experimentais.

7.2.3 Comparação entre PC-CMDC e PC - Alocação de Polos

Nesta subseção, comparam-se resultados dos controles PC-CMDC e preditor contínuo com alocação de polos nas mesmas condições testadas na Subseção 7.2.2. Os resultados mostram que mesmo com a utilização do preditor de estados o controle por alocação de polos continua mais susceptível aos distúrbios na entrada de controle.

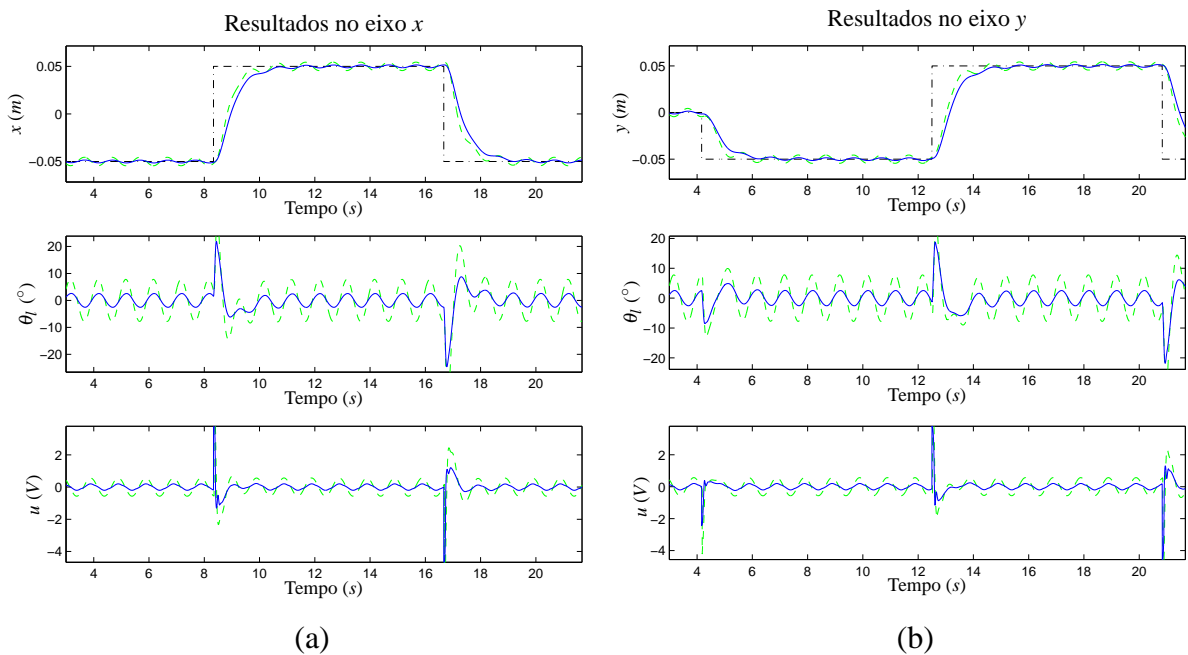
Nas Figuras 56 e 57, são comparados resultados de simulação, enquanto resultados de bancada são comparados nas Figuras 58-60. Como é possível observar, tanto nos resultados de simulação quanto de bancada, o sistema sofre menos com perturbação na entrada de controle quando é utilizado controle PC-CMDC.

Figura 56 - Comparação entre posição da esfera no plano xy em simulação com controle PC-CMDC (linha contínua) e alocação de polos com preditor (linha tracejada), $20T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle. Referência em linha traço-ponto.



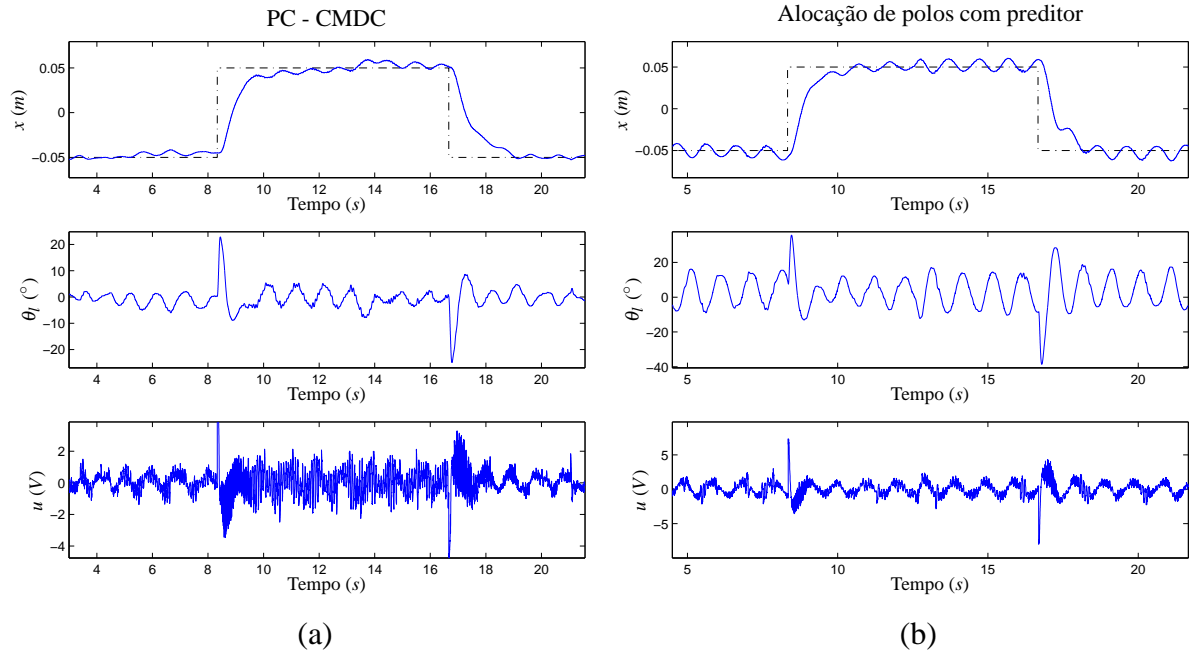
Fonte: resultados de simulação.

Figura 57 - Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle em simulação com controle PC-CMDC (linha contínua) e alocação de polos com preditor (linha tracejada), $20T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) resultados no eixo x (b) resultados no eixo y . Referência em linha traço-ponto.



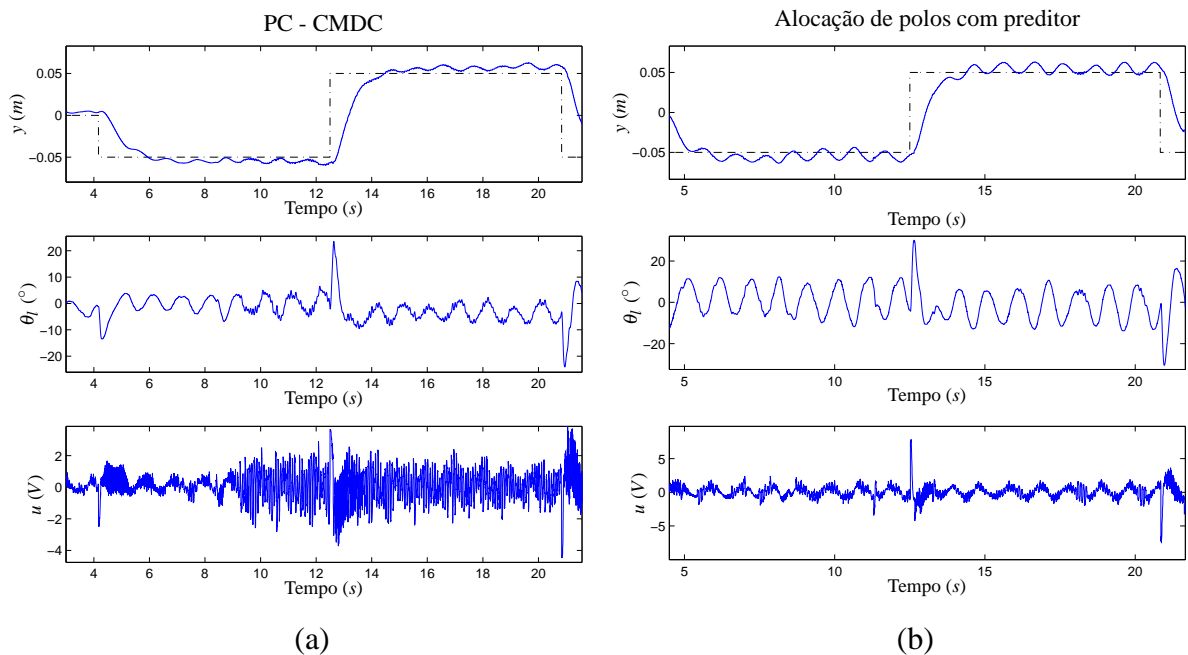
Fonte: resultados de simulação.

Figura 58 - Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle no eixo x em bancada com controle PC-CMDC e alocação de polos com preditor, $20T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) controle PC-CMDC (b) alocação de polos com preditor. Referência em linha traço-ponto.



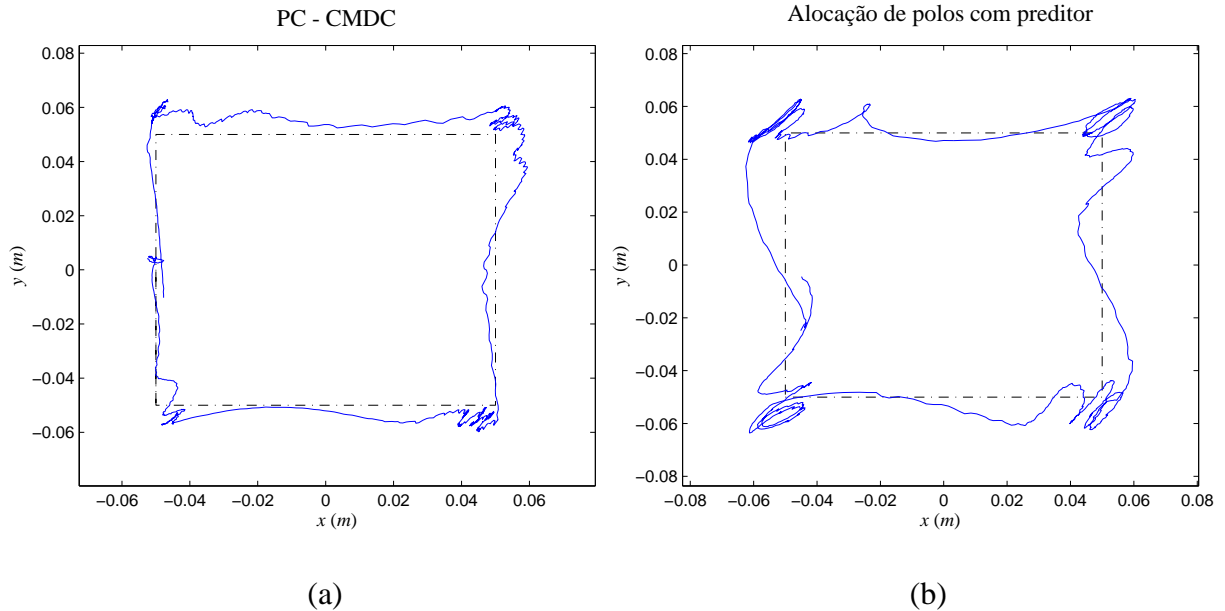
Fonte: resultados experimentais.

Figura 59 - Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle no eixo y em bancada com controle PC-CMDC e alocação de polos com preditor, $20T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) controle PC-CMDC (b) alocação de polos com preditor. Referência em linha traço-ponto.



Fonte: resultados experimentais.

Figura 60 - Comparação entre posição no plano xy em bancada com controle PC-CMDC e alocação de polos com preditor, $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) controle PC-CMDC (b) alocação de polos com preditor. Referência em linha traço-ponto.



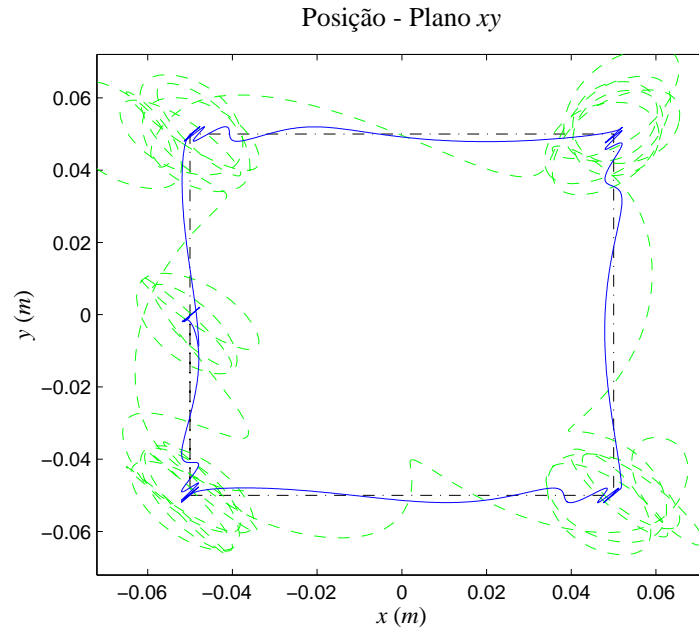
Fonte: resultados experimentais.

7.2.4 Comparação entre PD-CMDD e Alocação de Polos Discreto

Nas Figuras 61 e 62, são comparados resultados de simulação com $20 T$ de atraso na aquisição de dados ($100 ms$) e perturbação na entrada de controle utilizando os controladores PD-CMDD e alocação de polos discreto. Resultados de bancada foram possíveis apenas com o controle PD-CMDD devido ao controle por alocação de polos apresentar chaveamento no sinal de controle que ultrapassa o limite implementável do equipamento. Os resultados de bancada com controle PD-CMDD são apresentados nas Figuras 63 e 64.

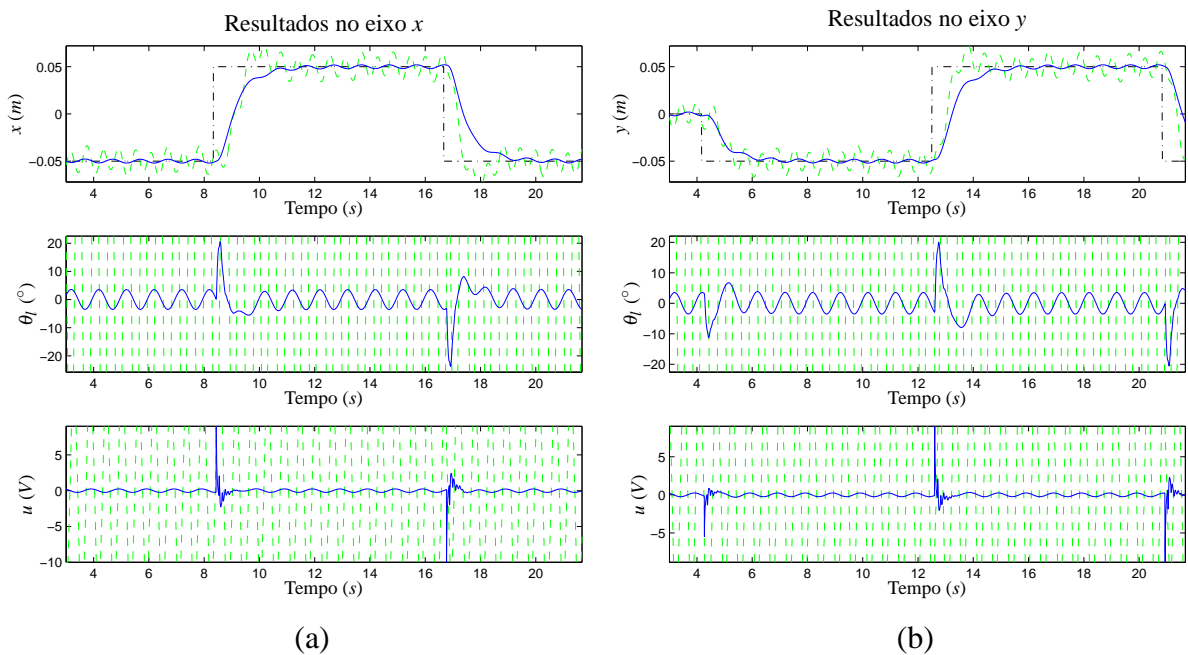
A inclusão do preditor de estados discreto na malha de controle por alocação de polos permite a implementação deste controle na prática, porém esta estratégia mostra-se mais sensível aos distúrbios na entrada de controle que o controle PD-CMDD, como será mostrada na Subseção 7.2.5.

Figura 61 - Comparação entre posição da esfera no plano xy em simulação com controle PD-CMDD (linha contínua) e alocação de polos discreto (linha tracejada), $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle. Referência em linha traço-ponto.



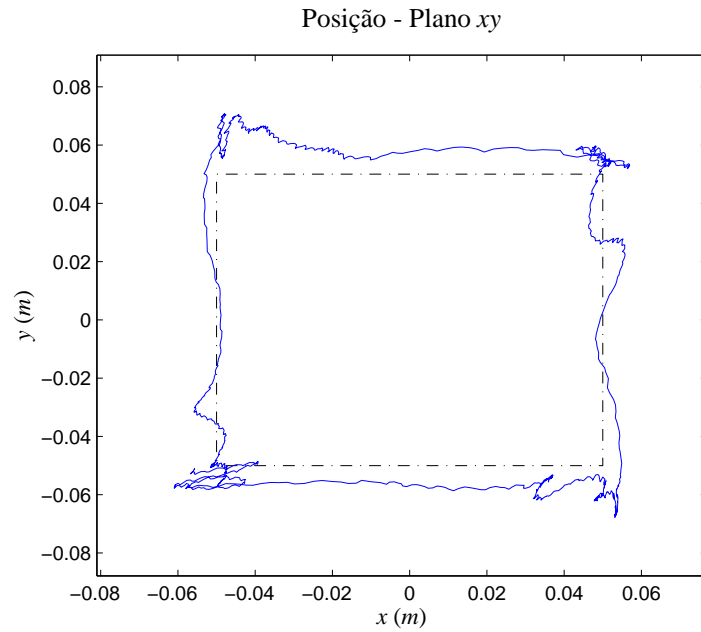
Fonte: resultados de simulação.

Figura 62 - Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle em simulação com controles PD-CMDD (linha contínua) e alocação de polos discreto (linha tracejada), $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) resultados no eixo x (b) resultados no eixo y . Referência em linha traço-ponto.



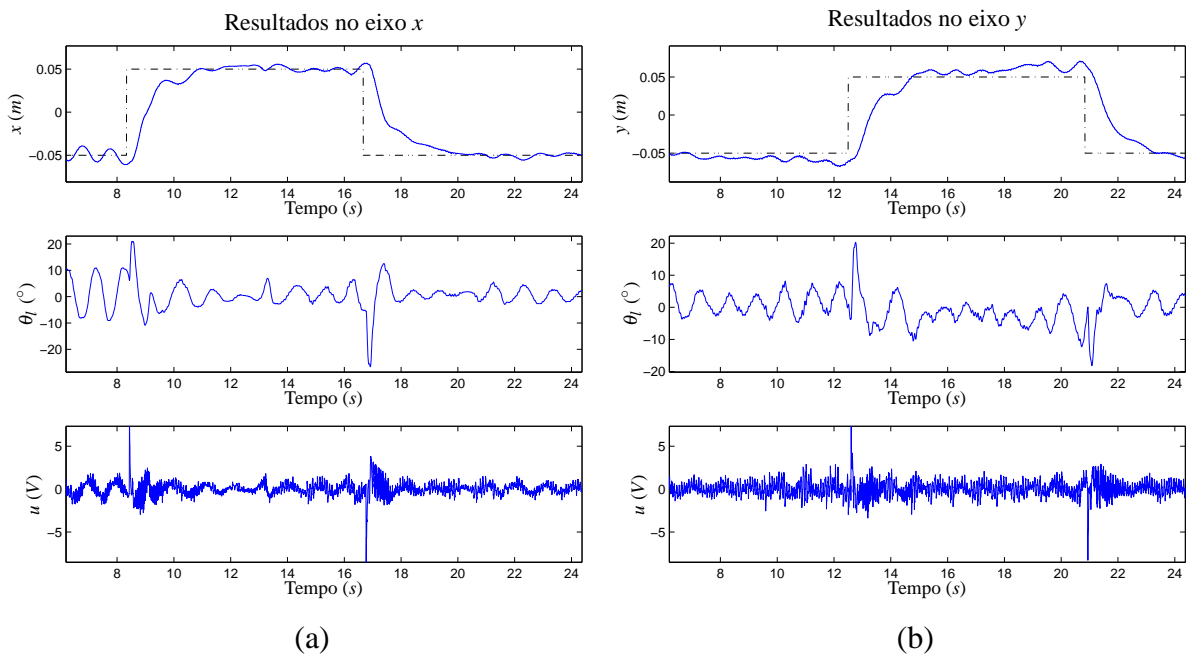
Fonte: resultados de simulação.

Figura 63 - Posição da esfera no plano xy em bancada com controle PD-CMDD, 20 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle. Referência em linha traço-ponto.



Fonte: resultado experimental.

Figura 64 - Posição, ângulo do motor e sinal de controle em bancada com controle PD-CMDD, 20 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) resultados no eixo x (b) resultados no eixo y . Referência em linha traço-ponto.

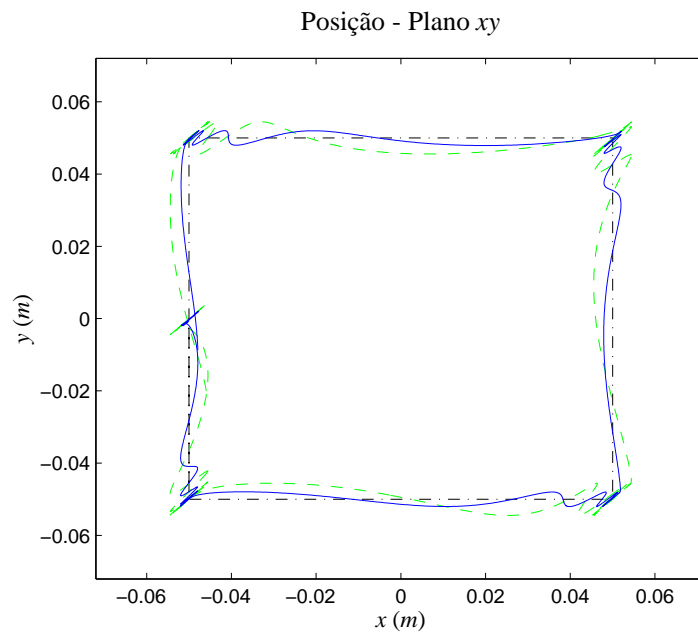


Fonte: resultados experimentais.

7.2.5 Comparação entre PD-CMDD e PD - Alocação de Polos Discreto

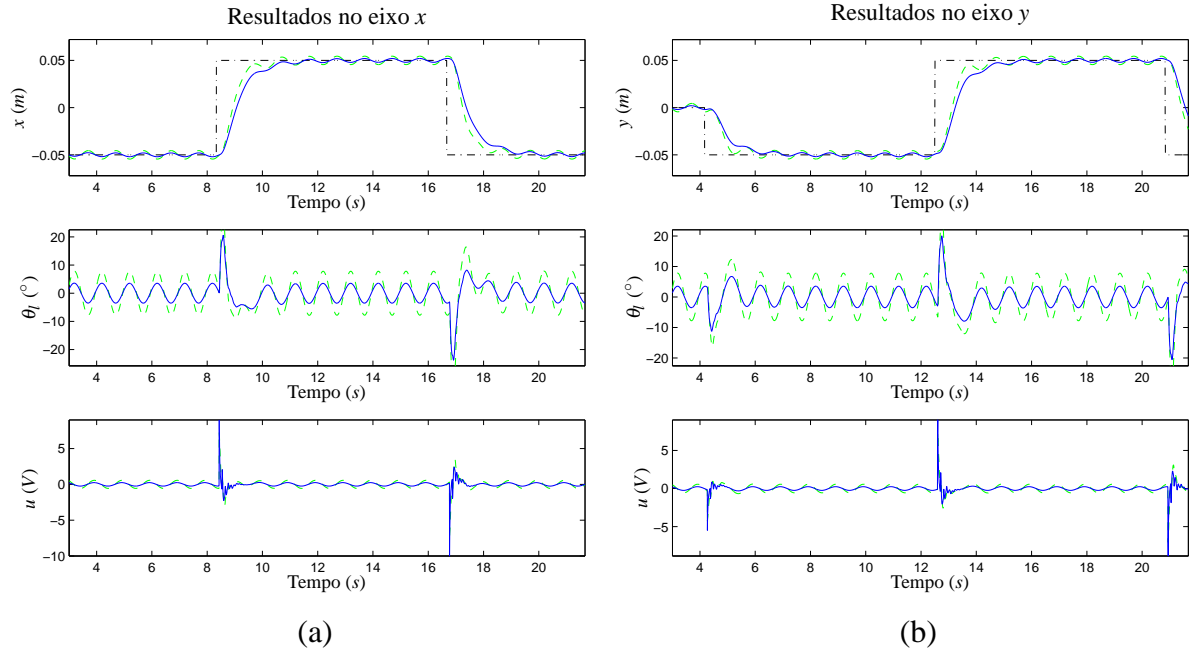
Nesta subseção, são comparados resultados entre os controles PD-CMDD e PD - Alocação de Polos Discreto. Nas Figuras 65 e 66, percebe-se que a inclusão do preditor discreto na malha de controle por alocação de polos discreto possibilitou sua implementação na presença de $20 T$ de atraso na aquisição de dados (Figuras 67-69). Contudo, o controle PD-CMDD continua apresentando maior robustez a incertezas casadas tanto em simulações quanto em bancada.

Figura 65 - Comparação entre posição da esfera no plano xy em simulação com controle PD-CMDD (linha contínua) e alocação de polos discreto com preditor (linha tracejada), $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle. Referência em linha traço-ponto.



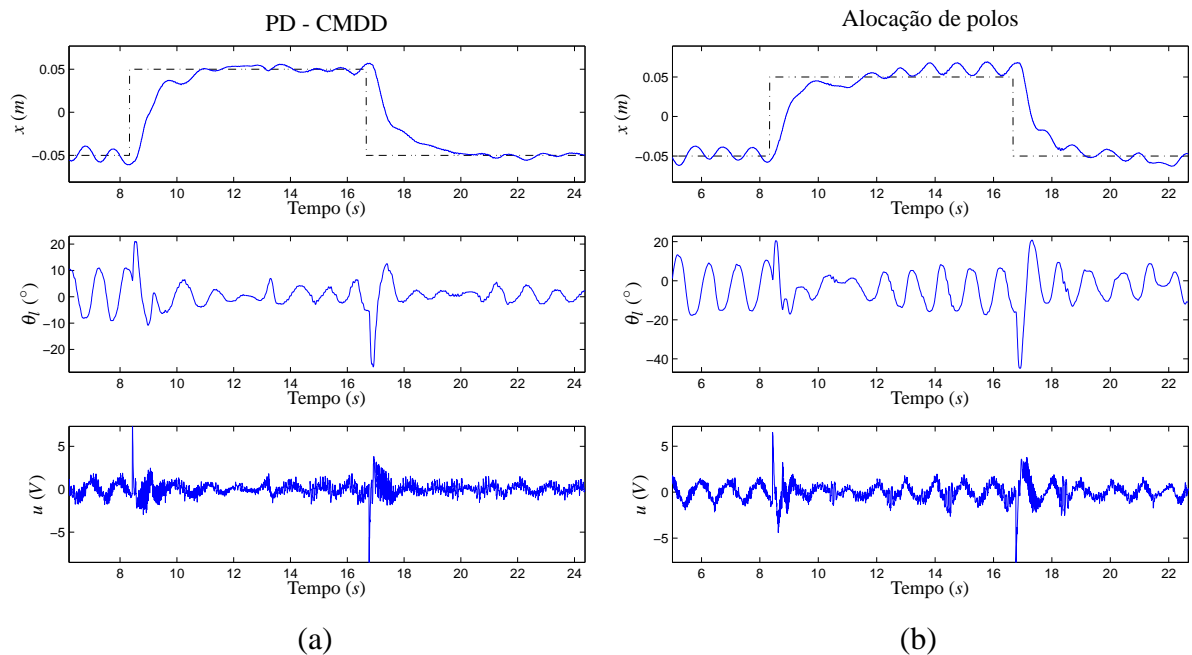
Fonte: resultados de simulação.

Figura 66 - Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle em simulação com controle PD-CMDD (linha contínua) e alocação de polos discreto com preditor (linha tracejada), 20 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) resultados no eixo x (b) resultados no eixo y. Referência em linha traço-ponto.



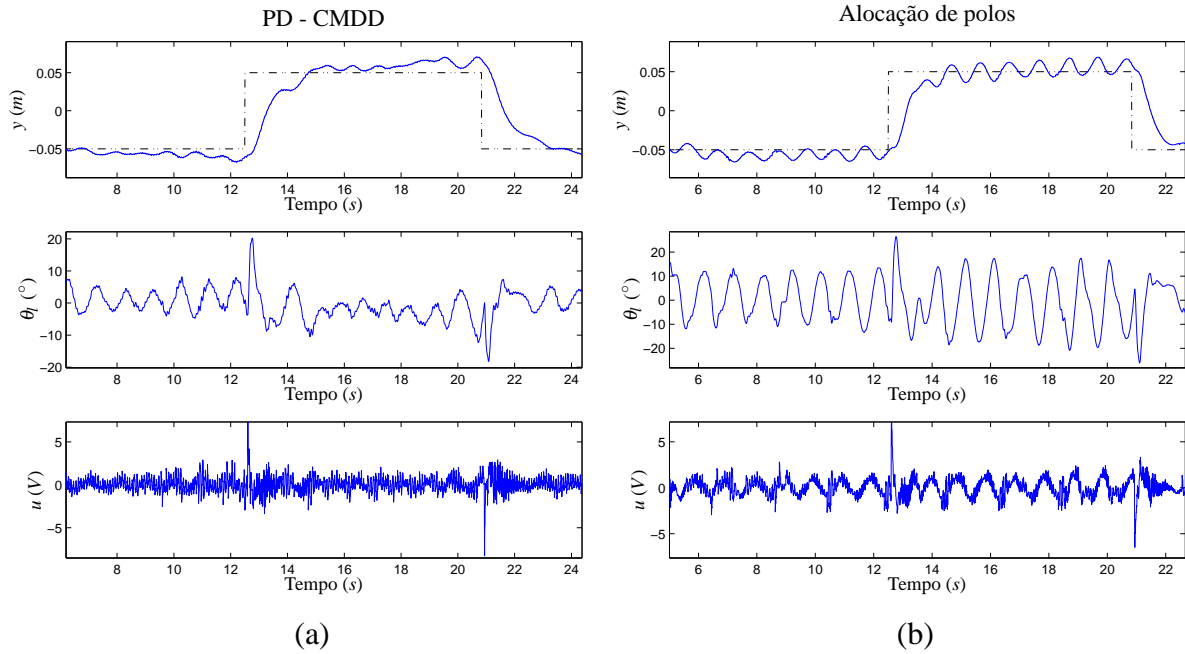
Fonte: resultados de simulação.

Figura 67 - Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle no eixo x em bancada com controle PD-CMDD e alocação de polos discreto com preditor, 20 T de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) controle PD-CMDD (b) alocação de polos discreto com preditor. Referência em linha traço-ponto.



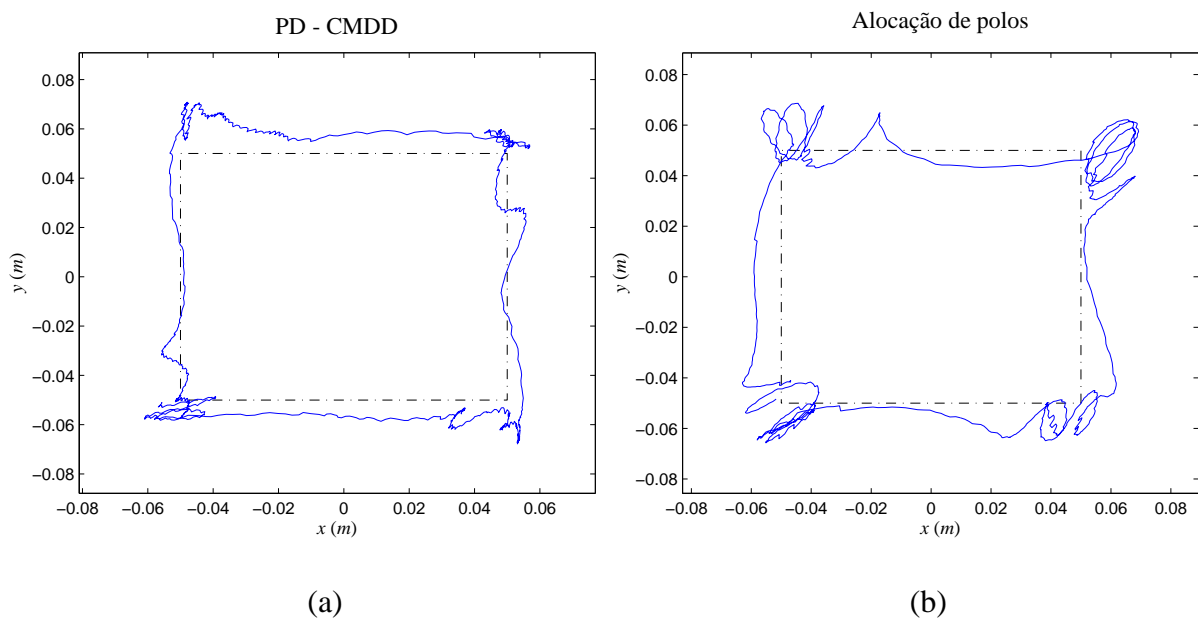
Fonte: resultados experimentais.

Figura 68 - Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle no eixo y em bancada com controle PD-CMDD e alocação de polos discreto com preditor, $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) controle PD-CMDD (b) alocação de polos discreto com preditor. Referência em linha traço-ponto.



Fonte: resultados experimentais.

Figura 69 - Comparação entre posição no plano xy em bancada com controle PD-CMDD e alocação de polos discreto com preditor, $20 T$ de atraso na aquisição de dados e perturbação na entrada de controle (a) controle PD-CMDD (b) alocação de polos discreto com preditor. Referência em linha traço-ponto.

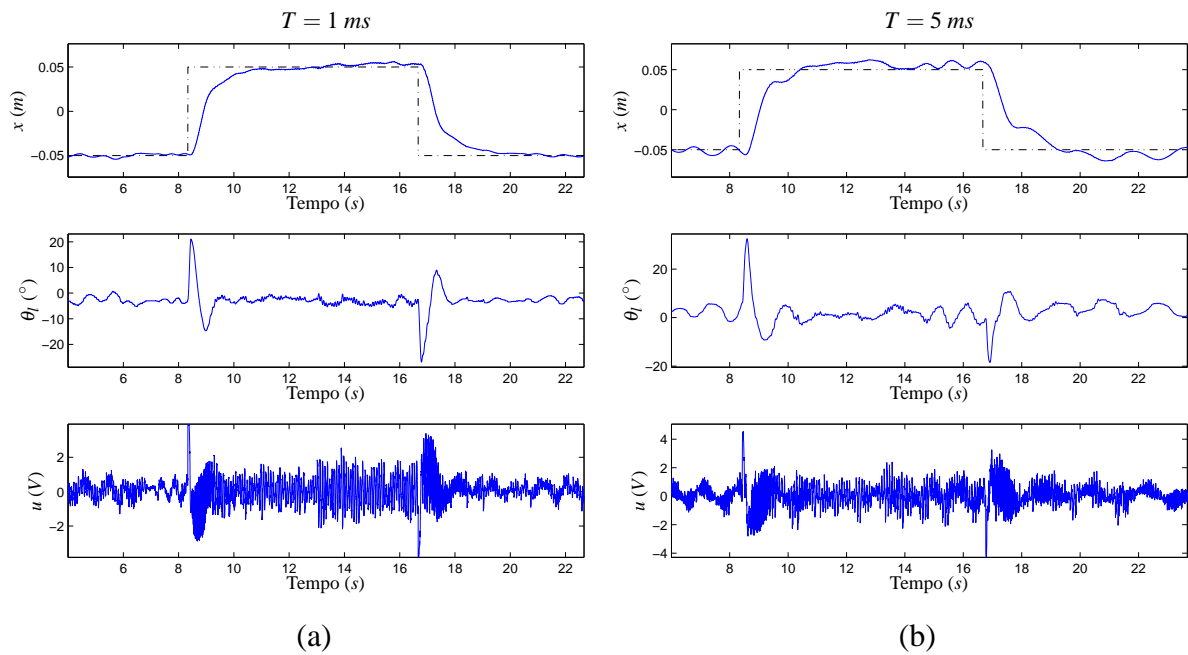


Fonte: resultados experimentais.

7.2.6 Influência do Período de Amostragem no PC-CMDC

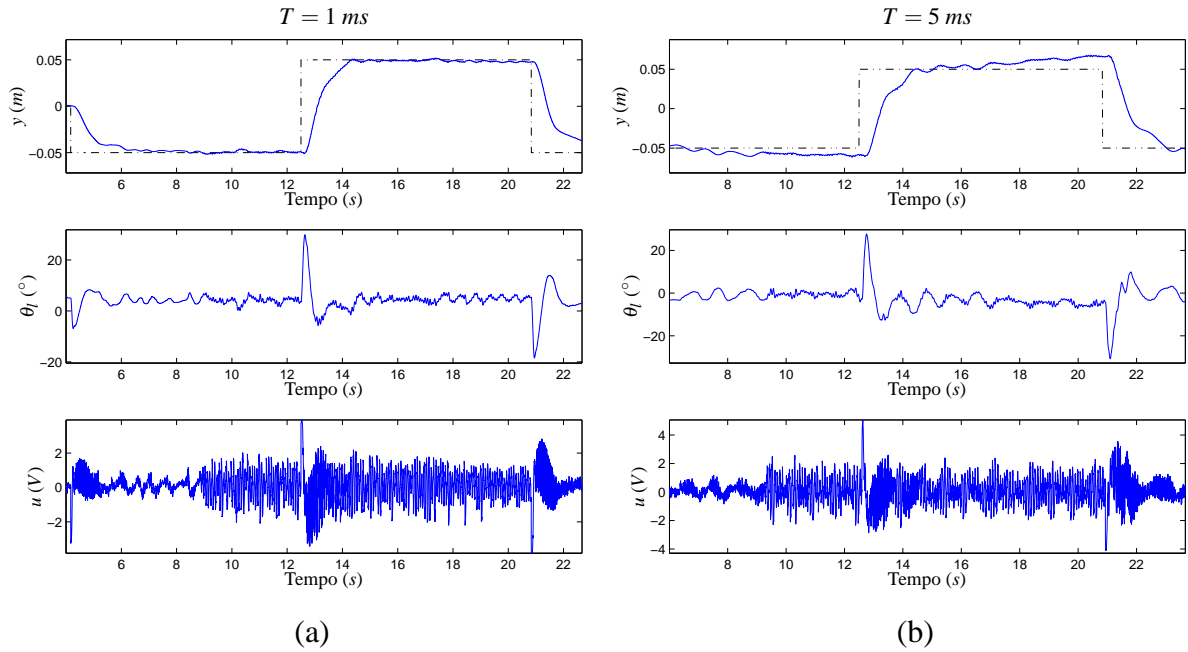
Esta seção tem por objetivo mostrar a deterioração na eficiência do controle PC-CMDC quando se utiliza o mesmo período de amostragem T usado no controle PD-CMDD. Nas Figuras 70-72, apresenta-se uma comparação de resultados do controle PC-CMDC com atraso de $20T$ na aquisição de dados sem perturbação na entrada de controle com diferentes períodos de amostragem (1 e 5 ms). Observa-se nitidamente a perda de eficiência na posição da esfera (Figura 72).

Figura 70 - Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle no eixo x em bancada com controle PC-CMDC e diferentes períodos de amostragem, $20T$ de atraso na aquisição de dados sem perturbação na entrada de controle (a) $T = 1\text{ ms}$ (b) $T = 5\text{ ms}$. Referência em linha traço-ponto.



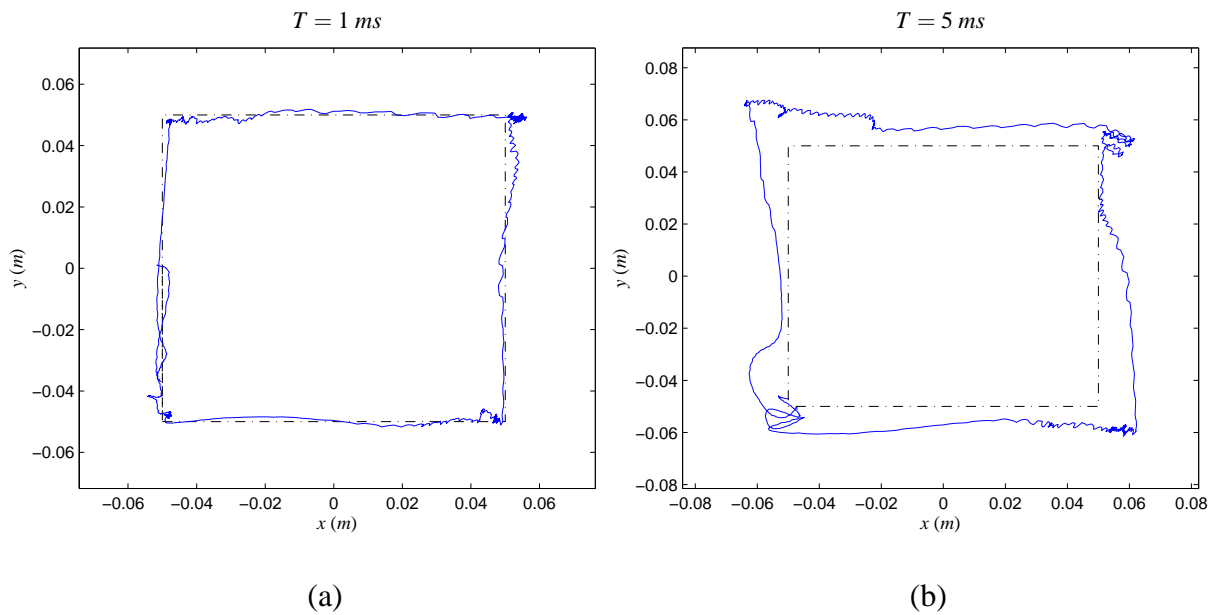
Fonte: resultados experimentais.

Figura 71 - Comparação entre posição, ângulo do motor e sinal de controle no eixo y em bancada com controle PC-CMDC e diferentes períodos de amostragem, $20T$ de atraso na aquisição de dados sem perturbação na entrada de controle (a) $T = 1\text{ ms}$ (b) $T = 5\text{ ms}$. Referência em linha traço-ponto.



Fonte: resultados experimentais.

Figura 72 - Comparação entre posição no plano xy em bancada com controle PC-CMDC e diferentes períodos de amostragem, $20T$ de atraso na aquisição de dados sem perturbação na entrada de controle (a) $T = 1\text{ ms}$ (b) $T = 5\text{ ms}$. Referência em linha traço-ponto.



Fonte: resultados experimentais.

7.3 COMENTÁRIOS

A partir dos resultados apresentados neste capítulo, observa-se que os controladores CMDC e CMDD têm desempenho comprometido com grandes períodos de atraso na aquisição de dados a ponto de inviabilizar sua implementação prática. A adição dos preditores de estado contínuo ou discreto na malha de controle proporciona a utilização dos controles CMDC ou CMDD na presença de grandes períodos de atraso na aquisição de dados. Estas abordagens foram denominadas PC-CMDC (tempo contínuo) e PD-CMDD (tempo discreto). O controle PC-CMDC, assim como outras abordagens contínuas, apresenta deterioração de eficiência quando realizados por dispositivos digitais utilizando grandes períodos de amostragem.

Note que os resultados de simulação com controladores PC-CMDC e PD-CMDD, mesmo com perturbação na entrada de controle, mostram bom desempenho quanto ao chaveamento do sinal de controle na presença de grandes atrasos na aquisição de dados. Isto não foi verificado utilizando os controle CMDC e CMDD sem utilização dos preditores, inviabilizando sua implementação. Mesmo assim, o sinal de controle em implementação pode apresentar chaveamento na prática, como no sistema *ball balancer*.

Na comparação entre as propostas PC-CMDC e PD-CMDD e os controladores clássicos, observa-se que os controladores propostos mantiveram-se com maior robustez tanto em simulação quanto em experimentos práticos. A inclusão de preditores de estado junto aos controladores clássicos possibilitaram seu uso na presença de grandes períodos de atraso de aquisição de dados, porém continuaram mais sensíveis à incertezas casadas que as propostas deste trabalho.

No Capítulo 8, são apresentadas as conclusões, as publicações originárias desta pesquisa e propostas para futuros trabalhos.

8 CONCLUSÕES

Neste trabalho, analisou-se os efeitos de atrasos de aquisição de dados nos controles CMDC e CMDD implementados em computador digital. Essa análise foi motivada pela necessidade de utilização de controle robusto em plantas controladas por dispositivo digital e pela possibilidade de atrasos na aquisição de dados, podendo originar-se no tempo de filtragem de ruídos nos sinais dos sensores (CAI; HUANG; YANG, 2003) ou, em especial, durante o tráfego de dados em sistemas de controle por rede (HESPANHA; NAGHSHTABRIZI; XU, 2007; GUINALDO; SÁNCHEZ; DORMIDO, 2011).

Preditores de estados foram empregados com sucesso de modo a superar o problema de atrasos na aquisição de dados no tempo discreto, mesmo na presença de grandes atrasos. Resultados da abordagem em tempo contínuo, estendendo os resultados encontrados por Fernandes (2013) para maiores atrasos na aquisição de dados, também foram obtidos. Além disso, foram analisadas as influências da inclusão dos preditores de estado na malha de realimentação dos controles CMDC e CMDD (estratégias chamadas de PC-CMDC e PD-CMDD) quando o sistema apresenta incertezas e também quando existe diferença entre o período de atraso estimado e o atraso real.

Os resultados apresentados no Capítulo 7, tanto comprovam que a abordagem PC-CMDC e PD-CMDD são eficientes no controle de sistemas com grandes atrasos na aquisição de dados, quanto mostram a deterioração do PC-CMDC com o aumento do período de amostragem. As comparações entre os os controles PC-CMDC e PD-CMDD com os controladores LQR e alocação de polos (em tempo contínuo e discreto, utilizando ou não preditores de estado na malha de controle) mostram que as abordagens propostas apresentam maior robustez a perturbações casadas em comparação com os outros controles testados.

Tendo em vista que o problema de atraso origina-se não somente na aquisição de dados, mas também no sinal de controle ou até mesmo no tempo de computação do sinal de controle, quando é realizado por dispositivo digital, como proposta para futuros trabalhos sugere-se que estes três tipos de atraso sejam considerados simultaneamente. Visto também a possibilidade de perda de dados em redes de comunicação (HESPANHA; NAGHSHTABRIZI; XU, 2007; GUINALDO; SÁNCHEZ; DORMIDO, 2011), também sugere-se como proposta para futuros trabalhos uma abordagem que possibilite o uso dos controladores CMDC e CMDD mesmo com

perda de informações na malha de controle.

Por fim, deste trabalho originou-se o artigo

ALVES, U. N. L. T.; GARCIA, J. P. F.; APOLINÁRIO, G. d. C.; FERNANDES, U. B.; RODRIGUES, F. B. Controle de sistema de suspensão ativa por computador: estratégia de controle robusto considerando atraso na aquisição de dados. In: *SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE - SBAI*. Fortaleza - CE: SBA - Sociedade Brasileira de Automática, 2012. Disponível em: <<http://www.sbai2013.ufc.br/pdfs/3792.pdf>>.

publicado em anais de congresso (ALVES et al., 2012). E o artigo

ALVES, U. N. L. T.; GARCIA, J. P. F.; TEIXEIRA, M. C. M.; GARCIA, S. C.; RODRIGUES, F. B. Sliding Mode Control for Active Suspension System with Data Acquisition Delay. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013.

aceito para publicação.

REFERÊNCIAS

- ALVES, U. N. L. T.; GARCIA, J. P. F.; APOLINÁRIO, G. C.; FERNANDES, U. B.; RODRIGUES, F. B. Controle de sistema de suspensão ativa por computador: estratégia de controle robusto considerando atraso na aquisição de dados. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE – SBAI, 2012, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza: [S.n.], 2012. Disponível em: <<http://www.sbai2013.ufc.br/pdfs/3792.pdf>>. Acesso em: 14 mar. 2014.
- APKARIAN, J.; LÉVIS, M.; GUROCAK, H. **Instructor workbook: SRV02 base unit experiment for Matlab/Simulink users**. Markham: [S.l.], 2011. 137 p.
- APOLINÁRIO, G. C. **Detecção de falhas em sistemas incertos com atraso no sinal de controle**. 2009. 82 f. Dissertação (Mestrado em Automação) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2009.
- CAI, G. P.; HUANG, J. Z.; YANG, S. X. An optimal control method for linear systems with time delay. **Computers & Structures**, Elmsford, v. 81, n. 15, p. 1539–1546, 2003.
- CAUN, A. P. **Modos deslizantes discretos em sistemas incertos com atraso na computação do sinal de controle**. 2007. 94 f. Dissertação (Mestrado em Automação) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2007.
- DECARLO, R. A.; ZAK, S. H.; MATTHEWS, G. P. Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial. **Proceedings of the IEEE**, New York, v. 76, n. 3, p. 212–232, 1988.
- DRAŽENOVIC, B. The invariance conditions in variable structure systems. **Automática**, Elmsford, v. 5, n. 3, p. 287–295, 1969.
- FERNANDES, U. B. **Controle com estrutura variável e modos deslizantes aplicado em sistema de suspensão ativa**. 77 f.. Dissertação (Mestrado em Automação) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2013.
- FILIPPOV, A. F. **Differential equations with discontinuous righthand sides**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988. 304 p.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. **Digital control of dynamic systems**. 3. ed. Menlo Parkin: Menlo Park: Addison-Wesley Longman, 1998.
- FURUKAWA, T.; SHIMEMURA, E. Predictive control for systems with time delay. **International Journal of Control**, London, v. 37, n. 2, p. 399–412, 1983.
- FURUTA, K. Sliding mode control of a discrete system. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v. 14, n. 2, p. 145–152, 1990.

GARCIA, J.; RIBEIRO, J.; SILVA, J.; MARTINS, E. Continuous-time and discrete-time sliding mode control accomplished using a computer. **IEE Proceedings - Control Theory and Applications**, New York, v. 152, n. 2, p. 220–228, 2005.

GARCIA, L. M. C. F. **Controle com estrutura variável e modos deslizantes em sistemas incertos com atraso no controle**. 2002, 92 f. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

GUINALDO, M.; SÁNCHEZ, J.; DORMIDO, S. Co-design strategy of networked control systems for treacherous network conditions. **IET Control Theory & Applications**, Stevenage, v. 5, n. 16, p. 1906–1915, 2011.

HESPANHA, J. P.; NAGHSHTABRIZI, P.; XU, Y. A survey of recent results in networked control systems. **Proceedings of the IEEE**, New York, v. 95, n. 1, p. 138–162, 2007.

LEE, S.; LEE, B. A discrete-time sliding mode controller and observer with computation time delay. **Control Engineering Practice**, Oxford, v. 7, n. 8, p. 943–955, 1999.

LUKYANOV, A. G.; UTKIN, V. I. Methods of reducing equations for dynamic systems to a regular form. **Automation and Remote Control**, New York, v. 42, n. 4, p. 413–420, 1981.

NEVES, G. C. **Controle automático de um sistema bola e viga**. 2012. 52 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2012.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. Rio de Janeiro: Pearson Prentice Hall, 2010. 809 p.

QUANSER INNOVATE EDUCATE. **2D ball balancer control using Quarc**: instructor manual. [S.l.]: [S.n.], 2008. 87 p.

QUANSER INNOVATE EDUCATE. **2D ball balancer control using Quarc**: user manual. [S.l.]: [S.n.], 2008. 23 p.

QUANSER INNOVATE EDUCATE. **Active suspension LQG control using Quarc**: Instructor manual. [S.l.]: [S.n.], 2010. 48 p.

QUANSER INNOVATE EDUCATE. **Active suspension system**: user manual. [S.l.]: [S.n.], 2010. 23 p.

RIBEIRO, J. M. S. **Controle discreto com modos deslizantes em sistemas incertos com atraso no sinal de controle**. 125 f. Tese (Doutorado em Automação) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

RICHARD, J.-P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. **Automatica**, Elmsford, v. 39, n. 10, p. 1667–1694, 2003.

RODRIGUES, F. B.; SILVA, J. L. ; PAULA, A. L. A. ; GARCIA, J. P. F. Controle com modos deslizantes robusto a falhas na propulsão de helicóptero. In: *X SBAI - SIMPÓSIO*

BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, SBAI, 10, São João Del-Rei. **Anais...** São João Del Rei: [S.n.], 2011. p. 147–152.

SAM, Y. M.; OSMAN, J. H. S. B. Modeling and control of the active suspension system using proportional integral sliding mode approach. **Asian Journal of Control**, Taiwan, v. 7, n. 2, p. 91–98, 2005.

SAM, Y. M.; SUAIB, N. M.; OSMAN, J. H. S. Proportional integral sliding mode control for the half-car active suspension system with hydraulic actuator. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS, CONTROL AND MANUFACTURING TECHNOLOGY, ROCOM'08, 8, 2008, Hangzhou. **Proceedings of the...** Hangzhou: IEEE, 2008. p. 52–57.

SPURGEON, S. K.; DAVIES, R. A nonlinear control strategy for robust sliding mode performance in the presence of unmatched uncertainty. **International Journal of Control**, London, v. 57, n. 5, p. 1107–1123, 1993.

UTKIN, V. Variable structure systems with sliding modes. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 22, n. 2, p. 212–222, 1977.

UTKIN, V. L. **Sliding modes and their application in variable structure systems**. Moscow: Mir Publishers, 1978. 257 p.

XIA, Y.; LIU, G. P.; SHI, P.; CHEN, J.; REES, D.; LIANG, J. Sliding mode control of uncertain linear discrete time systems with input delay. **IET - Control Theory & Applications**, Stevenage, v. 1, n. 4, p. 1169–1175, 2007.

XUE, X. D.; CHENG, K. W. E.; ZHANG, Z.; LIN, J. K.; WANG, D. H.; BAO, Y. J.; WONG, M. K.; CHEUNG, N. Study of art of automotive active suspensions. In: 4th INTERNATIONAL CONFERENCE ON POWER ELECTRONICS SYSTEMS AND APPLICATIONS, 4, 2011, Hong Kong. **Proceedings of the...** Hong Kong: IEEE, 2011. p. 1–7.

ZAKJ, S. H.; MACCARLEY, C. A. State-feedback control of non-linear systems. **International Journal of Control**, London, v. 43, n. 5, p. 1497–1514, 1986.