

Fernanda Cristina de Souza

Homologia de Grupos e Teoremas de Hopf



1910001107



Homologia de Grupos e Teoremas de Hopf

Fernanda Cristina de Souza

Orientadora: Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade



Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática - IBILCE - UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências Matemáticas – área de concentração: Matemática.

São José do Rio Preto – SP

Julho - 2002

7
- t513.831
S729h

Souza, Fernanda Cristina de.

Homologia de grupos e teoremas de Hopf / Fernanda Cristina de Souza. – São José do Rio Preto : [s.n.], 2002
78 f. ; 30 cm.

Orientadora: Maria Gorete Carreira Andrade

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Topologia algébrica. 2. Teoria de homologia. 3. Teoremas de Hopf. I. Andrade, Maria Gorete Carreira. II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 515.14



Agradecimentos

Ao término deste trabalho agradeço, primeiramente, a Deus por tudo.

A Profa. Dra. Maria Cássia Corrêa Andrade, pela formação, pela disponibilidade e paciência na orientação e, principalmente, pela confiança e apoio.

A Profa. Dra. Elaine de Lourdes Campello Santi, pelo auxílio prestado em algumas das minhas pesquisas.

A Profa. Dra. Aparecida Francisco da Silva, pela ajuda e amizade durante minha participação no grupo PLE e pelo incentivo nas horas incertas.

Aos demais professores do Departamento de Matemática do IBRAE, pela formação.

A querida amiga Barbara, pela valiosa ajuda, pela compreensão, pelo respeito e por compartilhar desta jornada.

Aos companheiros de pós-graduação, em especial ao Weber pela paciência e disponibilidade em ajudar.

A Márcia, pelo auxílio indispensável na ilustração deste trabalho.

Aos meus pais e à minha família, por tudo o que sou e terão.

A todos os meus amigos, pelo apoio, afeto e carinho, principalmente a Maria Tereza e Cláudia Emília nas dificuldades.

A todos que de alguma forma contribuíram para que este sonho se concretizasse.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos meus pais,
Sônia e José
dedico.

Agradecimentos

Ao término deste trabalho agradeço, primeiramente, a Deus por tudo e:

À Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade, pela formação, pela disponibilidade e paciência na orientação e, principalmente, pela confiança e amizade.

À Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti, pelo auxílio prestado em algumas discussões importantes.

À Profa. Dra. Aparecida Francisco da Silva, pela tutoria e amizade durante minha participação no grupo PET e pelo incentivo nas horas incertas.

Aos demais professores do Departamento de Matemática do IBILCE, pela formação.

À querida amiga Barbara, pela valiosa ajuda, pela compreensão, pelo respeito e por compartilhar desta jornada.

Aos companheiros de pós-graduação, em especial ao Weber pela paciência e disponibilidade em ajudar.

Ao Márcio, pelo auxílio indispensável na ilustração deste trabalho.

Aos meus pais e a minha família, por tudo o que sou e tenho.

A todos os meus amigos, pelo suporte, apoio e carinho, principalmente a Maria Thereza e Cláudia Emília (*in memoriam*).

A todos que de alguma maneira contribuíram para que este sonho se concretizasse.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho apresenta o estudo de dois teoremas devidos a Hopf. Um deles nos permite expressar algebricamente o segundo grupo de homologia de um grupo G . O outro nos fornece uma seqüência exata que relaciona a homologia de um espaço topológico X com a homologia de seu grupo fundamental para dimensões maiores que 1.

Para tal propósito fazemos inicialmente um estudo da teoria de homologia de grupos e suas implicações com espaços topológicos.

Palavras-chave: espaços de recobrimento, $K(G, 1)$ -complexos, (co)homologia de grupos, teoremas de Hopf.

Abstract

The subject of this work is a study of two Hopf's theorems. One of them allow us to express algebraically the second homology group for a group G . The another one provides us an exact sequence which relates the homology of a topological space X with the homology of its fundamental group for dimensions greater than 1.

For this purpose we begin with a study of homology theory of groups and its implications with topological spaces.

Keywords: covering spaces, $K(G, 1)$ -complexes, (co)homology of groups, Hopf's theorems.



Índice

Introdução	v
1 Preliminares	1
1.1 Anel Grupo e ZG -Módulos	1
1.2 Módulos e Resoluções ZG -projetivas	6
1.3 Coinvariantes e Invariantes	12
2 Espaços de Recobrimento e CW-complexos	20
2.1 Espaços de Recobrimento e Recobrimento Regular	20
2.2 CW-Complexos e $K(G,1)$ -Complexos	26
2.3 Resoluções Periódicas via Ações Livres em Esferas	33
3 (Co)homologia de Grupos	39
3.1 A (Co)homologia de um grupo G	39
3.2 Os funtores $H_*(G, -)$ e $H^*(G, -)$	45
3.3 Interpretação Topológica para a (Co)homologia	47
3.4 Os Grupos de (Co)homologia de nível 1	53
4 Os Teoremas de Hopf	57
4.1 Relação entre $\pi_n(X)$ e $H_n(X)$, para $n \geq 1$	57
4.2 As Fórmulas de Hopf	59
Bibliografia	77

Introdução

A teoria de (Co)homologia de grupos está fundamentada na Álgebra e na Topologia. O desenvolvimento inicial de seus aspectos topológicos são devidos a Hurewicz ([8]), que provou, entre outras coisas, que a (Co)homologia de um espaço asférico depende apenas de seu grupo fundamental. Já a parte algébrica foi motivada pela descrição feita por Hopf ([6]) a respeito da influência do grupo fundamental sobre o segundo grupo de homologia de um espaço dado.

Por espaços asféricos entende-se espaços conexos por caminhos que possuem grupo fundamental $\pi_1(X) = G$, não necessariamente trivial, cujos grupos de homotopia superiores são triviais, e denota-se usualmente por $K(G, 1)$.

O trabalho de Hurewicz discorre sobre o tipo de homotopia de um espaço asférico $X = K(G, 1)$ ser completamente determinado por G . Em particular, os grupos de homologia de X dependem somente de G , sendo, portanto, razoável pensar em tais grupos como os grupos de homologia de G .

Assim, pode-se definir $H_*(G) := H_*(K(G, 1))$, tendo sido adotada esta terminologia apenas a partir da década de 40, por Eilenberg.

Embora Hurewicz tenha mostrado a unicidade, e não a existência de espaços asféricos, é fato conhecido que, dado um grupo G , sempre existe um espaço $K(G, 1)$. Deste modo, a definição topológica da homologia de um grupo G se aplica a qualquer grupo.

Agora, para um grupo G qualquer segue, da teoria de homologia singular, que $H_0(G) = \mathbb{Z}$ e $H_1(G) = G_{ab}$, com G_{ab} denotando o quociente de G pelo seu subgrupo comutador $[G, G]$.



O desenvolvimento algébrico para $H_n(G)$ em dimensões maiores que 2 inicia-se a partir do trabalho de Hopf que trata da descrição de $H_2(G)$, em termos puramente algébricos, do seguinte modo: escolha uma apresentação de G como F/R , com F livre e R um subgrupo normal de F . Temos então

$$H_2(G) = R \cap [F, F]/[R, F]$$

com $[A, B]$, para $A, B \subset F$, denotando o subgrupo gerado pelos comutadores $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, com $a \in R, b \in R$.

Foi Hopf também quem deu evidência da importância de $H_2(G)$ em topologia provando o seguinte teorema: para qualquer espaço X conexo com grupo fundamental G , existe uma sequência exata

$$\pi_2(X) \rightarrow H_2(X) \rightarrow H_2(G) \rightarrow 0.$$

No final dos anos 40 foi dada uma definição de $H_n(G)$ do ponto de vista da “álgebra homológica” e é sob esse aspecto que tratamos esses grupos neste trabalho. Vemos também que tal definição algébrica equivale à definição topológica.

Iniciamos o Capítulo I com os preliminares algébricos essenciais ao nosso estudo, a saber, o anel grupo $\mathbb{Z}G$, a partir do qual definimos $\mathbb{Z}G$ -módulos e módulos $\mathbb{Z}G$ -projetivos e livres. Estabelecemos também o conceito de $\mathbb{Z}G$ -resoluções projetivas e livres, introduzindo a notação bar e a resolução padrão. A última seção trata dos grupos dos coinvariantes e dos invariantes que nos permitem construir, dados S, R anéis e $\alpha : S \rightarrow R$ um homomorfismo, os S -módulos $S \otimes_R M$ e $\text{Hom}_R(S, M)$ para os quais apresentamos alguns resultados interessantes.

No Capítulo II consideramos resultados topológicos importantes como o conceito de espaços de recobrimento, estabelecendo quando um recobrimento é universal e regular; vemos também as transformações de recobrimento e o recobrimento associado a um dado conjunto. A seguir, temos CW-complexos e o complexo $K(G, 1)$, além de algumas aplicações envolvendo os mesmos. Construímos ainda, as $\mathbb{Z}G$ -resoluções periódicas através de ações livres em esferas.



O Capítulo III é dedicado à teoria básica de Homologia e, para que o estudo fosse mais abrangente, tratamos também o seu dual, a Cohomologia. Apresentamos H_* e H^* como funtores; damos uma interpretação topológica que relaciona a (Co)homologia de um grupo G com a (Co)homologia do espaço $K(G, 1)$ e calculamos os grupos de (Co)homologia de nível 1.

Finalmente, no Capítulo IV, nos dedicamos ao objetivo principal do trabalho que consiste da demonstração dos dois teoremas devidos a Hopf, citados anteriormente.

1.1. O Grupo e $\mathbb{Z}G$ -Módulos

Definição 1.1.1 Seja G um grupo denotado multiplicativamente. Se ZG é $\mathbb{Z}$ -módulo livre gerado pela coleção de G . Um elemento α de ZG é escrito unicamente na forma $(\sum_{g \in G} a_g g)$, com $a_g \in \mathbb{Z}$ e $a_g = 0$, para quase todo g em G . Se α é escrito desta maneira então α é denotado por α em G .

Em ZG , definimos as operações de adição e multiplicação

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) + \left(\sum_{g \in G} b_g g\right) = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g$$

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) \left(\sum_{h \in G} b_h h\right) = \sum_{g \in G} (a_g b_g) g$$

as quais fazem de ZG um anel com unidade (o elemento unidade de G), chamado **anel do grupo** de G e denotado por ZG .

Exemplo 1.1.1 Seja G um grupo cíclico de ordem n com gerador t . Então $t^n = 1$ e $\{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}\}$ é uma base para ZG , isto é, $ZG \cong \mathbb{Z}[t]/(t^n - 1)\mathbb{Z}$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos alguns conceitos de Álgebra Homológica importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Anel Grupo e $\mathbb{Z}G$ -Módulos

Definição 1.1.1 *Sejam G um grupo denotado multiplicativamente. Seja $\mathbb{Z}G$ o $\mathbb{Z}$ -módulo livre gerado pelos elementos de G . Um elemento de $\mathbb{Z}G$ é expresso unicamente na forma $\left(\sum_{g \in G} a_g g\right)$, com $a_g \in \mathbb{Z}$ e $a_g = 0$, para quase todo g em G (isto é, exceto para um número finito de elementos g em G).*

Em $\mathbb{Z}G$, definimos as operações de adição e multiplicação

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) + \left(\sum_{g \in G} b_g g\right) = \sum_{g \in G} (a_g + b_g)g$$

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) \cdot \left(\sum_{h \in G} b_h h\right) = \sum_{g, h \in G} (a_g b_h)(gh).$$

*as quais fazem de $\mathbb{Z}G$ um anel com unidade $1e$ (e : elemento neutro de G), chamado **anel grupo** de G sobre $\mathbb{Z}$.*

Exemplo 1.1.1 *Seja G um grupo cíclico de ordem n com gerador t . Então $t^n = 1$ e $\{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}\}$ é uma $\mathbb{Z}$ -base para $\mathbb{Z}G$, isto é, $\mathbb{Z}G \simeq \frac{\mathbb{Z}[t]}{\langle t^n - 1 \rangle}$.*



Exemplo 1.1.2 Seja G um grupo cíclico infinito com gerador t . Então $\{t^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ é uma $\mathbb{Z}$ -base para $\mathbb{Z}G$, a qual usualmente identificamos com o anel de polinômios de Laurent $\mathbb{Z}[t, t^{-1}] := \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^i, a_i \in \mathbb{Z}, a_i = 0, \text{ para quase todo } i \right\}$.

Definição 1.1.2 Para todo grupo G o homomorfismo $\varepsilon : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$ definido por $\varepsilon(g) = 1$, para todo $g \in G$, e estendido por linearidade é dito **aplicação aumentação**.

Definição 1.1.3 Sejam X um conjunto não vazio e G um grupo. Uma **ação (à esquerda)** de G sobre X , ou uma **G -ação** sobre X , é uma aplicação:

$$\begin{aligned} \phi : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto \phi(g, x) = g \cdot x \end{aligned}$$

satisfazendo, para todo $x \in X$, as condições:

- (1) $e \cdot x = x$ (e : elemento neutro de G)
- (2) $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$, para $g_1, g_2 \in G$.

Observação 1.1.1 Equivalentemente uma G -ação sobre X é um homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow \text{Bij}(X) \\ g &\mapsto \varphi(g) = \varphi_g \end{aligned}$$

sendo $\text{Bij}(X)$ o grupo das bijeções de X .

Pode-se simplificar a notação usando-se g ao invés de φ_g , com

$$\begin{aligned} g := \varphi_g : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto g(x) = g \cdot x. \end{aligned}$$

Fazemos a seguir algumas considerações importantes:

- (i) Seja X um grupo aditivo. Para que a G -ação preserve a estrutura de grupo de X , o homomorfismo $g : X \rightarrow X$ deve ser um homomorfismo de grupos, ou seja, dados $g \in G$ e $x_1, x_2 \in X$, tem-se

$$g \cdot (x_1 + x_2) = g \cdot x_1 + g \cdot x_2$$

e a G -ação sobre X é um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(X)$, sendo $\text{Aut}(X)$ o grupo dos automorfismos de X .



(ii) Seja X um espaço topológico. A G -ação preserva a estrutura topológica de X se $g : X \rightarrow X$ é contínua. Assim, uma G -ação sobre um espaço topológico X é um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \text{Homeo}(X)$, com $\text{Homeo}(X)$ denotando o grupo dos homeomorfismos de X . Ainda, se considerarmos em G a topologia discreta, a G -ação $\varphi : G \times X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua.

(iii) Um conjunto X é um **G-conjunto** se existe uma G -ação sobre X . Se a G -ação é livre (isto é, $g \cdot x = x$, para algum $x \in X$ se, e somente se, $g = e$), então X é um **G-conjunto livre**. Ainda, se a G -ação é trivial (isto é, $g \cdot x = x$, para todo $g \in G$ e todo $x \in X$) então X é um **G-conjunto trivial**.

Podemos agora formalizar a definição de um $\mathbb{Z}G$ -módulo.

Definição 1.1.4 Um $\mathbb{Z}G$ -módulo (ou G -módulo) (à esquerda), consiste de um grupo abeliano B munido de um homomorfismo

$$\rho : \mathbb{Z}G \rightarrow \text{End}(B)$$

com $\text{End}(B)$ denotando o anel dos homomorfismos de B .

Observações 1.1.1

- (a) Um $\mathbb{Z}G$ -módulo pode ser visto como um grupo abeliano B munido de uma G -ação.
- (b) Todo $\mathbb{Z}G$ -módulo (à esquerda) M pode ser considerado como um $\mathbb{Z}G$ -módulo (à direita), definindo-se, para $g \in G$ e $m \in M$, a seguinte G -ação em M :

$$\begin{aligned} \varphi : M \times G &\rightarrow M \\ (m, g) &\mapsto m * g = g^{-1} \cdot m \end{aligned}$$

Proposição 1.1.1 Seja B um conjunto não vazio e G um grupo. B é um $\mathbb{Z}G$ -módulo (à esquerda) se, e somente se, B é um $\mathbb{Z}$ -módulo munido de uma G -ação (à esquerda) sobre B .

Demonstração: Se B é um $\mathbb{Z}G$ -módulo, a G -ação sobre B definida por

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{Z}G &\rightarrow \text{End}(B) \\ \alpha &\mapsto \rho(\alpha) = \varphi_\alpha \end{aligned}$$



com $\varphi_\alpha(b) = \alpha \cdot b$, para todo $b \in B$, induz uma aplicação:

$$\begin{aligned}\phi: G \times B &\rightarrow B \\ (g, b) &\mapsto \phi(g, b) := \rho(\alpha)(b)\end{aligned}$$

Além disso, podemos definir o homomorfismo

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}: \mathbf{Z} &\rightarrow \text{End}(B) \\ a &\mapsto \tilde{\rho}(a) = \rho(ae)\end{aligned}$$

com e denotando o elemento neutro de G . Este homomorfismo faz de B um $\mathbf{Z}G$ -módulo.

Por outro lado, dado um $\mathbf{Z}$ -módulo B munido de uma ação $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}(B)$, temos induzido um homomorfismo

$$\begin{aligned}\rho: \mathbf{Z}G &\rightarrow \text{End}(B) \\ \sum_{g \in G} a_g g &\mapsto \rho\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) = \sum_{g \in G} a_g \varphi(g)\end{aligned}$$

o qual, junto com a estrutura de grupo abeliano do $\mathbf{Z}$ -módulo B , faz de B um $\mathbf{Z}G$ -módulo. ■

Observações 1.1.2

(a) Todo $\mathbf{Z}$ -módulo M pode ser visto como um $\mathbf{Z}G$ -módulo se considerarmos em M a G -ação trivial.

(b) Seja $\varepsilon: \mathbf{Z}G \rightarrow \mathbf{Z}$ a aplicação aumentação usual. Dado $\alpha \in \mathbf{Z}G$ tem-se $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$ e portanto

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) = \sum_{g \in G} a_g \varepsilon(g) = \sum_{g \in G} a_g.$$

Ainda, se A é um $\mathbf{Z}G$ -módulo trivial, temos

$$\alpha \cdot m = \left(\sum_{g \in G} a_g g\right) m = \sum_{g \in G} a_g (g \cdot m) = \sum_{g \in G} a_g m = \varepsilon(\alpha)m.$$

Definição 1.1.5 Sejam X um G -conjunto e $x \in X$. Chamamos de **G-órbita** de x o conjunto $G(x) := \{g \cdot x \mid g \in G\}$.

Observação 1.1.2 Considere X um G -conjunto e ZX (também denotado $Z[X]$) o Z -módulo livre gerado por X . Um elemento $\alpha \in ZX$ é da forma $\sum_{x \in X} n_x x$, com $n_x \in Z$, $n_x = 0$, para quase todo x . Ainda, a G -ação em X pode ser estendida a ZX do seguinte modo:

$$\begin{aligned} G \times ZX &\rightarrow ZX \\ \left(g, \sum_{x \in X} n_x x\right) &\mapsto \sum_{x \in X} n_x g \cdot x \end{aligned}$$

Assim, temos um ZG -módulo ZX , chamado **módulo de permutação**.

Proposição 1.1.2 Sejam $(X_i)_{i \in I}$ G -conjuntos disjuntos. Então

$$Z \left[\bigcup_{i \in I}^{\circ} X_i \right] = \bigoplus_{i \in I} ZX_i$$

ou seja, a união disjunta na categoria dos G -conjuntos corresponde à soma direta na categoria dos G -módulos.

Demonstração: Seja $Z \left[\bigcup_{i \in I}^{\circ} X_i \right]$. Então

$$\alpha = \sum_{x \in \bigcup X_i} n_x x = \sum_{i \in Z} \sum_{x_i \in X_i} n_{x_i} x_i$$

e como cada $\sum_{x_i \in X_i} n_{x_i} x_i \in ZX_i$, temos que $\alpha \in \sum_{i \in I} ZX_i$.

Agora, como $ZX_i \cap ZX_j = \{0\}$, para $i \neq j$, a soma é direta e temos

$$Z \left[\bigcup_{i \in I}^{\circ} X_i \right] \subset \bigoplus_{i \in I} ZX_i.$$

Por outro lado, dado $\alpha \in \bigoplus_{i \in I} ZX_i$, temos $\alpha = \sum_{i \in Z} \sum_{x_i \in X_i} n_{x_i} x_i$. Assim,

$$\bigoplus_{i \in I} ZX_i \subset Z \left[\bigcup_{i \in I}^{\circ} X_i \right].$$

Logo, $Z \left[\bigcup_{i \in I}^{\circ} X_i \right] = \bigoplus_{i \in I} ZX_i$. ■

Proposição 1.1.3 *Sejam X um G -conjunto livre e E um conjunto de representantes para as G -órbitas em X . Então $\mathbb{Z}X_i$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre com base E .*

Demonstração: Seja X um G -conjunto tal que $X = \bigcup_{x \in E} G(x)$, com E um conjunto de representantes para as G -órbitas de X . Temos que

$$G(x) \simeq \frac{G}{G_x}$$

com $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ o subgrupo de isotopia de G em X .

Assim,

$$X \simeq \bigcup_{x \in E} \frac{G}{G_x}$$

e temos o módulo de permutação $\mathbb{Z}X \simeq \bigoplus_{x \in E} \mathbb{Z}[G/G_x]$.

Se a G -ação é livre, segue que $G_x = \{1\}$. Portanto, $G/G_x \simeq G$.

Logo, $\mathbb{Z}X \simeq \bigoplus_{x \in E} \mathbb{Z}G$. ■

Corolário 1.1.1 *Seja H um subgrupo de G . Então $\mathbb{Z}G$ é um $\mathbb{Z}H$ -módulo livre com base num conjunto E de representantes para as H -órbitas em G (que são as classes laterais à esquerda de H em G), isto é, $\mathbb{Z}G = \bigoplus_{g \in E} g\mathbb{Z}H$.*

Demonstração: Note que G é um H -conjunto com ação livre dada pela multiplicação dos elementos de H pelos elementos de G .

Assim, o resultado segue da Proposição anterior. ■

1.2 Módulos e Resoluções $\mathbb{Z}G$ -projetivas

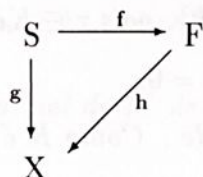
Para as considerações a seguir seja R um anel qualquer.

Definição 1.2.1 *Um R -módulo P é dito **projetivo** se existe solução para todo problema de aplicação da forma*

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow \psi & \downarrow \varphi & \searrow \theta & \\ M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{j} & M'' \end{array}$$

dada por uma aplicação $\psi : P \rightarrow M'$ tal que $i \circ \psi = \varphi$, com $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M''$ uma seqüência exata de R -módulos.

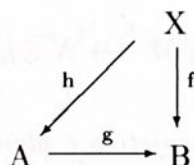
Definição 1.2.2 Um R -módulo livre sobre um conjunto S é um R -módulo F munido de uma função $f : S \rightarrow F$ tal que, para toda função $g : S \rightarrow X$, com X um R -módulo, existe um único homomorfismo $h : F \rightarrow X$ que comuta o diagrama:



Observação 1.2.1 Equivalentemente um R -módulo F é livre se é a soma de cópias de R , isto é, se $F \simeq \bigoplus_{i \in I} R_{\lambda_i}$, com $R_{\lambda_i} \simeq R$, para todo $i \in I$.

Lema 1.2.1 Todo R -módulo livre é projetivo.

Demonstração: Sejam X um R -módulo livre sobre S , com $S \subset X$, $f : X \rightarrow B$ um homomorfismo e $g : A \rightarrow B$ um epimorfismo de R -módulos de modo que o diagrama a seguir comuta:



Para algum $s \in S$, existe um elemento $j(s) \in A$, com $g[j(s)] = f(s)$, pois g é epimorfismo. Ainda, (por [14], 11.5.1) a aplicação $s \rightarrow j(s)$ define uma função $j : S \rightarrow A$ que pode ser estendida (por [14], 11.5.4) a um homomorfismo $h : X \rightarrow A$ tal que $g \circ h = f$. Portanto X é projetivo. ■

Lema 1.2.2 Dado um R -módulo P são equivalentes as seguintes condições:

- (1) P é projetivo.
- (2) Toda seqüência exata $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ cinde.
- (3) P é somando direto de um módulo livre.

Demonstração: [2], I.8.2. ■

Exemplo 1.2.1 *Seja e um elemento idempotente em R , isto é, $e^2 = e$. Então, o ideal à esquerda Re é projetivo. Com efeito, tomemos $\pi : R \rightarrow Re$ tal que $\pi(a) = ae$, para todo $a \in R$. Temos $a = r + ae$, com $r \in \text{Ker } \pi$, $ae \in Re$, visto que para $a - ae = r \in \text{Ker } \pi$, segue que $\pi(a - ae) = (a - ae)e = ae - ae^2 = ae - ae = 0$.*

Ainda, $\text{Ker } \pi \cap Re = \{0\}$, pois $x \in \text{Ker } \pi \cap Re \Rightarrow \pi(x) = 0$ e $x = ae \Rightarrow \pi(ae) = 0 \Rightarrow (ae)e = 0 \Rightarrow ae^2 = 0 \stackrel{e^2=e}{\Rightarrow} x = 0$.

Assim, $R = \text{Ker } \pi \oplus Re$. Como R é livre, temos pelo Lema 1.2.2(iii) que Re é projetivo.

Exemplo 1.2.2 *Seja $Z_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Temos $e = \bar{3}$, pois $\bar{3}^2 = \bar{3} \cdot \bar{3} = \overline{3 \cdot 3} = \bar{9} = \bar{3}$. Pelo Exemplo anterior segue que $Z_6\bar{3} = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ é projetivo.*

Agora, $Z_6\bar{3}$ não é um Z_6 -módulo livre, pois caso contrário, pela Observação 1.2.1, temos $Z_6\bar{3} \simeq \oplus Z_6$. Mas, isto acarreta $Z_6\bar{3}$ com, no mínimo, 6 elementos.

Definição 1.2.3 *Um R -módulo M é dito **plano** se para qualquer seqüência exata curta de R -módulos $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$, tem-se a seqüência exata*

$$0 \rightarrow N' \otimes_R M \rightarrow N \otimes_R M \rightarrow N'' \otimes_R M \rightarrow 0.$$

Lema 1.2.3 *Todo R -módulo projetivo é plano.*

Demonstração: [7], pag. 82. ■

Definição 1.2.4 *Seja M um R -módulo (à esquerda). Uma **resolução** de M sobre R (ou uma **R -resolução** de M) é uma seqüência exata de R -módulos*

$$F : \dots \rightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0$$

com $\varepsilon : F_0 \rightarrow M$ a aplicação aumentação.

*Se cada F_i é R -módulo livre (projetivo), a resolução é dita **livre (projetiva)**.*



Observações 1.2.1

- (a) Denotamos uma R -resolução de M por $\varepsilon : F \rightarrow M$.
- (b) Toda resolução livre é projetiva.
- (c) Se existe um inteiro n tal que $F_i = 0$, para $i > n$, dizemos que a resolução tem comprimento, no máximo, n e escrevemos

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

- (d) Chamamos de R -resolução parcial de M de comprimento n à resolução:

$$F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

que é exata até o nível n .

Lema 1.2.4 Sempre existe uma R -resolução livre de um R -módulo M .

Demonstração: Tome (por [7], I.4.6) $M \simeq F_0/A_0$, com F_0 R -livre.

Seja $\varepsilon : F_0 \rightarrow F_0/A_0$ a projeção canônica tal que $\varepsilon(x_0) = \bar{x}_0$. Então $\text{Ker } \varepsilon$ é R -módulo, pois $\text{Ker } \varepsilon$ é submódulo de F_0 . Daí, $\text{Ker } \varepsilon \simeq F_1/A_1$, com F_1 R -livre.

Repetindo o processo definimos F_2, F_3 , e assim por diante.

Assim, tomando-se $\partial_i : F_i \rightarrow F_i/A_i$, com F_i livre, para todo $i \geq 1$, obtemos a seqüência exata desejada

$$F : \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

com $\text{Ker } \varepsilon = \text{Im } \partial_1$ e $\text{Ker } \partial_1 = \text{Im } \partial_{i+1}$, para $i \geq 1$. ■

Lema 1.2.5 Sejam (C, ∂) e (C', ∂') complexos de cadeias, r um inteiro e $(f_i : C_i \rightarrow C'_i)_{i \leq r}$ uma família de aplicações tais que $\partial'_i \circ f_i = f_{i-1} \circ \partial_i$, para $i \leq r$. Sejam C_i projetivos, para $i > r$, e $H_i(C') = 0$, para $i \geq r$. Então $(f_i)_{i \leq r}$ se estende a uma aplicação de cadeia $f : C \rightarrow C'$ que é única, a menos de homotopia. Isto equivale a dizer que quaisquer duas extensões são homotópicas via h , com $h_i = 0$, para $i \leq r$.

Demonstração: [2], I.7.4. ■

Teorema 1.2.1 *Sejam $\varepsilon : F \rightarrow M$ e $\varepsilon' : F' \rightarrow M$ resoluções projetivas de um R -módulo M . Então existe uma aplicação de cadeia $f : F \rightarrow F'$, preservando aumentação (isto é, $\varepsilon' \circ f = \varepsilon$), única a menos de homotopia, a qual é uma equivalência de homotopia.*

Demonstração: [2], I.7.5. ■

Resolução Padrão e Notação Bar

Sejam G um grupo e $X_n = \{(g_0, \dots, g_n) \mid g_i \in G\}$.

Temos que X_n é um G -conjunto livre, cuja G -ação é dada por

$$g \cdot (g_0, \dots, g_n) = (g \cdot g_0, \dots, g \cdot g_n).$$

Seja o complexo de cadeia aumentado

$$\cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} Z \longrightarrow 0 \quad (1.1)$$

com F_n o Z -módulo livre gerado pelo conjunto X_n , para todo n .

Podemos definir as aplicações bordo ∂_n e aumentação ε (e estendê-las por linearidade) como sendo respectivamente:

$$\begin{aligned} \partial_n : F_n &\rightarrow F_{n-1} & \text{e} & \quad \varepsilon : F_0 \rightarrow Z \\ (g_0, \dots, g_n) &\mapsto \sum_{i=0}^n d_i(g_0, \dots, g_n) & & \quad g_0 \mapsto 1 \end{aligned}$$

sendo $d_i(g_0, \dots, g_n) = (g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_n)$.

A G -ação em F_n é obtida da G -ação livre sobre X_n e $F_n \simeq ZX_n$ (pela Proposição 1.1.3). Portanto F_n é um ZG -módulo livre com base E , sendo E um conjunto de representantes para as G -órbitas em X_n e queremos explicitar esta base.

Se consideramos como representante da G -órbita de $(g_0, \dots, g_n)$ o elemento

$$(e, h_1, \dots, h_n), \text{ com } h_i = g_0^{-1} g_i$$

podemos expressá-lo na forma

$$(e, t_1, t_1 t_2, \dots, t_1 t_2 \dots t_n), \text{ com } t_n = h_{n-1}^{-1} h_n \text{ e } h_0 = e$$



e assim, tomar como base para F_n , as $(n+1)$ -uplas $(e, g_1, g_1g_2, \dots, g_1g_2 \dots g_n)$.

Agora, o complexo (1.1) é exato.

De fato: Considere $F = (F_i)$, com $F_{-1} = \mathbf{Z}$ e $h_n : F_n \rightarrow F_{n+1}$ tal que

$$\begin{cases} h_n(g_0, \dots, g_n) = (1, g_0, \dots, g_n) & \text{se } n \geq 0 \\ h_n(1) = (e) & \text{se } n = -1 \end{cases}$$

com e o elemento neutro de G .

Devemos mostrar que F é contrátil e portanto, construir uma homotopia entre id_F e 0 (por [2], I.0). Efetuando os cálculos, segue que

$$\begin{cases} \varepsilon \circ h_{-1} & = id_{\mathbf{Z}} \\ h_{-1} \circ \varepsilon + \partial_1 \circ h_0 & = id_{F_0} \\ \vdots & \\ h_{n-1} \circ \partial_n + \partial_{n+1} \circ h_n & = id_{F_n} \end{cases}$$

Assim, h é uma homotopia de cadeia entre id_F e 0, isto é, $id_F \simeq 0$.

Como F é contrátil, temos que F é acíclico, ou seja $H_q(F) \simeq 0$, para todo q , e (por [2], I.0) o complexo (1.1) é exato.

Logo

$$\dots \rightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

é uma $\mathbf{Z}G$ -resolução livre de $\mathbf{Z}$ chamada **resolução padrão**.

Notação Bar

Seja o elemento $(e, g_1, g_1g_2, \dots, g_1g_2 \dots g_n) \in F_n$ denotado por $[g_1|g_2|\dots|g_n]$.

Podemos considerar o $\mathbf{Z}G$ -módulo livre F_n gerado por $[g_1|g_2|\dots|g_n]$ e

$$\partial_n[g_1|g_2|\dots|g_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i[g_1|g_2|\dots|g_n]$$

$$\text{com } d_i[g_1|g_2|\dots|g_n] = \begin{cases} g_1[g_2|\dots|g_n] & \text{se } i = 0 \\ [g_1|\dots|g_{i-1}|g_i g_{i+1}|g_{i+2}|\dots|g_n] & \text{se } 0 < i < n \\ [g_1|\dots|g_{n-1}] & \text{se } i = n. \end{cases}$$

Observações 1.2.2

(a) Denotamos o elemento neutro de G por $[]$ e como $F_0 \simeq \langle e \rangle$ segue, na notação bar, que $F_0 = \langle [] \rangle$.

(b) $F_0 \simeq \mathbb{Z}G$, via isomorfismo $\phi: F_0 \rightarrow \mathbb{Z}G$ tal que $\phi(\alpha[]) = \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}G$.

(c) Ao usarmos a notação bar, a Resolução Padrão é dita **Resolução Bar**.

Exemplo 1.2.3 Na resolução $F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ temos:

$$\begin{aligned}\partial_2[g_1|g_2] &= d_0[g_1|g_2] - d_1[g_1|g_2] + d_2[g_1|g_2] = g_1[g_2] - [g_1g_2] + [g_1] \\ \partial_1[g_1] &= d_0[g_1] - d_1[g_1] = g_1[] - [] = g_1 - e \\ \varepsilon(g_1) &= 1\end{aligned}$$

1.3 Coinvariantes e Invariantes

Sejam G um grupo e M um $\mathbb{Z}G$ -módulo (à esquerda).

Definição 1.3.1 O grupo dos coinvariantes de M , denotado por M_G , é dado por $M_G = M/A$, sendo $A = \langle g \cdot m - m \mid g \in G \text{ e } m \in M \rangle$ um subgrupo aditivo.

Observação 1.3.1 M_G é o maior quociente de M munido de G -ação trivial.

Proposição 1.3.1 $M_G \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ (com $\mathbb{Z}$ um $\mathbb{Z}G$ -módulo à direita munido da G -ação trivial).

Demonstração: Observando que $1 \otimes g \cdot m = 1 \cdot g \otimes m = 1 \otimes m$, podemos tomar a aplicação:

$$\begin{aligned}\varphi: M_G &\rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \\ \overline{m} &\mapsto \varphi(\overline{m}) = \varphi(m + A) := 1 \otimes m\end{aligned}$$

que está bem definida e é homomorfismo de grupos.

Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times M & \xrightarrow{f} & M_G \\ \tau \downarrow & \nearrow \psi & \\ \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M & & \end{array}$$

sendo τ a aplicação tensor e $f(a, m) := a\overline{m} = (\overline{m} + \dots + \overline{m})$ bilinear.

Pela Propriedade Universal do Produto Tensorial existe $\psi : \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}G} M \rightarrow M_G$ de modo que $\psi \circ \tau = f$.

Daí,

$$\begin{aligned} \psi : \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}G} M &\rightarrow M_G \\ a \otimes m &\mapsto \psi(a \otimes m) := f(a, m) = a\overline{m} \end{aligned}$$

Ainda, as aplicações φ e ψ são tais que uma é inversa da outra e temos portanto o isomorfismo desejado. ■

Lema 1.3.1 *Se F é um $\mathbf{Z}G$ módulo livre com base $\{e_i\}_{i \in I}$, então F_G é um $\mathbf{Z}$ -módulo livre com base $\{\overline{e}_i\}_{i \in I}$.*

Demonstração: O resultado segue usando-se a definição de módulo livre e a caracterização de F_G dada pela Proposição anterior. ■

Definição 1.3.2 *Chamamos de funtor de coinvariantes ao funtor $-_G = \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}G} -$ definido da categoria dos $\mathbf{Z}G$ -módulos (à esquerda) para a categoria dos grupos abelianos.*

Observação 1.3.2 *Seja um complexo de cadeias $C : \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$. O funtor $\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}G} -$ aplicado a C (denotado por C_G) é dado por:*

$$C_G : \dots \rightarrow \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}G} C_1 \rightarrow \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}G} C_0 \rightarrow 0$$

Ainda, dado G um grupo qualquer, sempre podemos tomar C como sendo a resolução padrão e denotamos C_G por $C_*(G)$.

Definição 1.3.3 *O grupo dos invariantes de M , denotado por M^G , é dado por:*

$$M^G = \{m \in M \mid g \cdot m = m, \text{ para todo } g \in G\}.$$

Observação 1.3.3 M^G é o maior submódulo de M munido de G -ação trivial.

Proposição 1.3.2 $M^G \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}, M)$ (com $\mathbf{Z}$ um $\mathbf{Z}G$ -módulo com G -ação trivial).



Demonstração: Defina $\psi : \text{Hom}_{ZG}(Z, M) \rightarrow M^G$ por $\psi(f) := f(1)$.

Logo ψ é um isomorfismo. ■

Os S -módulos $S \otimes_R M$ e $\text{Hom}_R(S, M)$

Sejam S um anel, $\alpha : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis e M um S -módulo (à esquerda). Temos que M pode ser visto como um R -módulo (à esquerda), definindo-se a seguinte R -ação:

$$\begin{aligned} \mu : R \times M &\rightarrow M \\ (a, m) &\mapsto a \cdot m := \alpha(a)m \end{aligned}$$

que nos fornece um funtor da categoria dos S -módulos (à esquerda) para a categoria dos R -módulos (à esquerda) denominado **restrição de escalares** (o R -módulo M é denotado por $\text{Res}_R^S M$).

Podemos então construir S -módulos $S \otimes_R M$ e $\text{Hom}_R(S, M)$ a partir de R -módulos como se segue:

(i) O anel S pode ser visto como um R -módulo (à direita), via restrição de escalares, definindo-se a R -ação:

$$\begin{aligned} \eta : S \times R &\rightarrow S \\ (s, a) &\mapsto s \cdot a := s\alpha(a) \text{ (a multiplicação do anel)} \end{aligned}$$

Agora é possível considerar o produto tensorial $S \otimes_R M$ definindo uma S -ação (à esquerda) que o torna um S -módulo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \psi : S \times (S \otimes_R M) &\rightarrow S \otimes_R M \\ (s, s' \otimes m) &\mapsto s \cdot (s' \otimes m) := ss' \otimes m. \end{aligned}$$

O S -módulo (à esquerda) $S \otimes_R M$ é dito obtido de M por **extensão de escalares** de R para S (via α).

Lema 1.3.2 *Existe uma aplicação natural de R -módulos:*

$$\begin{aligned} i : M &\rightarrow S \otimes_R M \\ m &\mapsto i(m) := 1 \otimes m \end{aligned}$$

Demonstração: Como $1 \otimes a \cdot m = 1 * a \otimes m = 1 \cdot \alpha(a) \otimes m = \alpha(a) \cdot (1 \otimes m) = a * (1 \otimes m)$, para todo $a \in R$, segue que $i(a \cdot m) = a \cdot m$. Logo i é aplicação de R -módulos. ■



Lema 1.3.3 *Sejam M um R -módulo (à esquerda), N um S -módulo (à esquerda), $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de R -módulos e $\alpha : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis. Então existe uma única aplicação de S -módulos $h : S \otimes_R M \rightarrow N$ que comuta o diagrama a seguir:*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i} & S \otimes_R M \\ f \downarrow & \nearrow h & \\ N & & \end{array}$$

sendo i a aplicação de R -módulos definida no Lema anterior.

Demonstração: A aplicação h existe se satisfizer $h(s \otimes m) = sh(1 \otimes m) = sh(i(m)) = sf(m)$. Assim, definindo

$$\begin{aligned} h : S \otimes_R M &\rightarrow N \\ s \otimes m &\mapsto h(s \otimes m) := sf(m) \end{aligned}$$

segue que h é única. ■

Observação 1.3.4 *Se no Lema anterior $M = N$ e $f = id$, tem-se que a aplicação i é um R -monomorfismo.*

Proposição 1.3.3 *Sejam M um R -módulo (à esquerda), N um S -módulo (à esquerda) e $\alpha : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis. Então $Hom_R(M, N) \simeq Hom_S(S \otimes_R M, N)$.*

Demonstração: Pelo Lema 1.3.3 podemos definir o homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \phi : Hom_R(M, N) &\rightarrow Hom_S(S \otimes_R M, N) \\ f &\mapsto \phi(f) := h, \text{ com } h(s \otimes m) = sf(m) \end{aligned}$$

Ainda, o homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : Hom_S(S \otimes_R M, N) &\rightarrow Hom_R(M, N) \\ h &\mapsto \varphi(h) := h \circ i \end{aligned}$$

é o inverso de ϕ .

Logo $Hom_R(M, N) \simeq Hom_S(S \otimes_R M, N)$. ■

(ii) O anel S pode ser visto como um R -módulo (à esquerda) por restrição de escalares, definindo-se a R -ação:

$$\begin{aligned} \xi : R \times S &\rightarrow S \\ (a, s) &\mapsto a \cdot s := \alpha(a)s \quad (\text{a multiplicação do anel}) \end{aligned}$$

Assim $\text{Hom}_R(S, M)$ pode ser visto como um S -módulo definindo-se a seguinte S -ação (à esquerda):

$$\begin{aligned} \psi : S \times \text{Hom}_R(S, M) &\rightarrow \text{Hom}_R(S, M) \\ (s, f) &\mapsto s \cdot f, \text{ com } s \cdot f(s') := f(s's) \end{aligned}$$

O S -módulo (à esquerda) $\text{Hom}_R(S, M)$ é dito obtido de M por **coextensão de escalares** de R para S (via α).

Lema 1.3.4 *Sejam M um R -módulo e o S -módulo $\text{Hom}_R(S, M)$ visto como um R -módulo (via restrição de escalares). Então existe uma aplicação natural de R -módulos:*

$$\begin{aligned} \pi : \text{Hom}_R(S, M) &\rightarrow M \\ f &\mapsto \pi(f) := f(1). \end{aligned}$$

Demonstração: Como $\pi(a \cdot f) = \pi(\alpha(a)f) = (\alpha(a)f)(1) = f(\alpha(a)1) = f(a \cdot 1) = af(1) = a\pi(f)$, para todo $a \in R$, tem-se que π é aplicação de R -módulos. ■

Lema 1.3.5 *Sejam M um R -módulo (à esquerda), N um S -módulo (à esquerda), $f : N \rightarrow M$ uma aplicação de R -módulos e $\alpha : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis. Então existe uma única aplicação de S -módulos $g : N \rightarrow \text{Hom}_R(S, M)$ que comuta o diagrama a seguir:*

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Hom}_R(S, M) \\ & \nearrow g & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

com π a aplicação de R -módulos definida no Lema anterior.

Demonstração: Para que g exista devemos ter $g(s \cdot n) = sg(n)$, para $s \in S$, $n \in N$. Daí, $g(s \cdot n)(1) = s(gn)(1) = g(n)(1 \cdot s) = g(n)(s)$, o que acarreta $g(n)(s) = g(s \cdot n)(1) = \pi(g(s \cdot n)) = f(s \cdot n)$. Assim, definindo

$$\begin{aligned} g : N &\rightarrow \text{Hom}_R(S, M) \\ n &\mapsto g(n), \text{ com } g(n)(s) := f(s \cdot n) \end{aligned}$$

segue que g é única. ■

Proposição 1.3.4 *Sejam M um R -módulo (à esquerda), N um S -módulo (à esquerda) e $\alpha : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis. Então*

$$\text{Hom}_R(N, M) \simeq \text{Hom}_S(N, \text{Hom}_R(S, M)).$$

Demonstração: Do Lema 1.3.5 segue o homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \phi : \text{Hom}_R(N, M) &\rightarrow \text{Hom}_S(N, \text{Hom}_R(S, M)) \\ f &\mapsto \phi(f) := g, \text{ com } g(n)(s) := f(s \cdot n) \end{aligned}$$

Note que ϕ é bijetiva, pois

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Hom}_S(N, \text{Hom}_R(S, M)) &\rightarrow \text{Hom}_R(N, M) \\ g &\mapsto \varphi(g) := \pi \circ g \end{aligned}$$

é o homomorfismo inverso de ϕ .

Logo $\text{Hom}_R(N, M) \simeq \text{Hom}_S(N, \text{Hom}_R(S, M))$. ■

Exemplo 1.3.1 *Sejam $\varepsilon : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$ a aplicação aumentação e M um $\mathbb{Z}G$ -módulo. Então o $\mathbb{Z}$ -módulo $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$, obtido de M por extensão de escalares de $\mathbb{Z}G$ para $\mathbb{Z}$, é exatamente o grupo dos coinvariantes M_G . Ainda, o $\mathbb{Z}$ -módulo $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$, obtido de M por coextensão de escalares de $\mathbb{Z}G$ para $\mathbb{Z}$, é o grupo dos invariantes M^G .*

Podemos agora considerar M e N como $\mathbb{Z}G$ -módulos. Assim, para $\otimes_{\mathbb{Z}G}$ e $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}$, seguem os seguintes resultados:

Definição 1.3.4 *Sejam M e N $\mathbb{Z}G$ -módulos. Então M e N são naturalmente $\mathbb{Z}$ -módulos e definimos em $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ a G -ação diagonal como sendo:*

$$g \cdot (m \otimes n) = g \cdot m \otimes g \cdot n.$$

Proposição 1.3.5 *Sejam M e N ZG -módulos (à esquerda). Então*

$$M \otimes_{ZG} N \simeq (M \otimes_Z N)_G := \frac{M \otimes_Z N}{A}$$

com $A = \langle g \cdot m \otimes g \cdot n - m \otimes n \mid m \otimes n \in M \otimes_Z N, g \in G \rangle$.

Demonstração: Inicialmente consideremos em $M \otimes_Z N$ a relação:

$$(m * g) \otimes n \sim m \otimes g \cdot n; \quad m \in M, g \in G.$$

Agora, a partir da Observação 1.1.1.(b) segue que M pode ser tomado como um ZG -módulo (à direita) com $m * g = g^{-1} \cdot m$, para $m \in M, g \in G$.

Daí $(m * g) \otimes n = (g^{-1} \cdot m) \otimes n$ e tem-se

$$\overline{(g^{-1} \cdot m) \otimes n} = \overline{m \otimes g \cdot n}. \quad (1.2)$$

Portanto $M \otimes_{ZG} N \simeq \frac{M \otimes_Z N}{\sim}$ e trocando-se m por $g \cdot m$ em (1.2) segue que

$$\overline{m \otimes n} = \overline{g \cdot m \otimes g \cdot n}. \quad (1.3)$$

Obtemos assim, a G -ação diagonal em $M \otimes_Z N$

$$g \cdot (m \otimes n) = g \cdot m \otimes g \cdot n.$$

e considerando $M \otimes_Z N$ sob tal ação e A o subgrupo aditivo gerado pelos elementos $g \cdot (m \otimes n) - m \otimes n$, segue que

$$(M \otimes_Z N)_G := \frac{M \otimes_Z N}{A}.$$

Note que estamos identificando elementos da forma $g \cdot m \otimes g \cdot n$ com $m \otimes n$, $m \in M, n \in N, g \in G$, o que equivale a indentificar $(g^{-1} \cdot m) \otimes n = (m * g) \otimes n$ com $m \otimes n$ (por (1.2) e (1.3)).

$$\text{Logo } (M \otimes_Z N)_G \simeq \frac{M \otimes_Z N}{\sim} \simeq M \otimes_{ZG} N. \quad \blacksquare$$

Corolário 1.3.1 $M \otimes_{ZG} N \simeq N \otimes_{ZG} M$.

Demonstração: $M \otimes_{ZG} N \simeq (M \otimes_Z N)_G \simeq (N \otimes_Z M)_G \simeq N \otimes_{ZG} M$. ■

Sejam agora M e N ZG -módulos (à esquerda) e consideremos $\text{Hom}_Z(M, N)$.

A G -ação M e N induz uma G -ação em $\text{Hom}_Z(M, N)$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} G \times \text{Hom}_Z(M, N) &\rightarrow \text{Hom}_Z(M, N) \\ (g, f) &\mapsto g \cdot f, \text{ com } g \cdot f(m) = g \cdot f(g^{-1} \cdot m) \end{aligned} \quad (1.4)$$

para $g \in G, f \in \text{Hom}_Z(M, N), m \in M$.

Note que pelo fato de Hom ser contravariante na primeira variável utilizamos g^{-1} para definir a G -ação. Ainda, esta contravariância é compensada ao convertermos M a um ZG -módulo à direita.

Assim, segue a G -ação dada por:

$$g \cdot f(m) = g \cdot f(g^{-1} \cdot m) = g \cdot f(m * g)$$

e tem-se $\text{Hom}_Z(M, N)$ um ZG -módulo (à esquerda).

Proposição 1.3.6 $\text{Hom}_{ZG}(M, N) \simeq \text{Hom}_Z(M, N)^G$.

Demonstração: Seja $\text{Hom}_{ZG}(M, N) = \{f \in \text{Hom}_Z(M, N) \mid g \cdot f(x) = f(g \cdot x)\}$. Daí,

$$\begin{aligned} f \in \text{Hom}_{ZG}(M, N) &\Leftrightarrow g \cdot f(m) = f(g \cdot m), \quad g \in G, m \in M \\ &\Leftrightarrow f(m) = g^{-1} \cdot f(g \cdot m), \quad g \in G, m \in M \\ &\stackrel{(1.4)}{\Leftrightarrow} f(m) = g^{-1} \cdot f(m), \quad g^{-1} \in G, m \in M \\ &\Leftrightarrow g \cdot f = f, \quad g \in G \\ &\Leftrightarrow f \in \text{Hom}_Z(M, N)^G. \end{aligned}$$

Logo $\text{Hom}_{ZG}(M, N) = \text{Hom}_Z(M, N)^G$. ■

Capítulo 2

Espaços de Recobrimento e CW-complexos

2.1 Espaços de Recobrimento e Recobrimento Regular

Assumimos, a partir de agora, que os espaços topológicos utilizados são conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos (e portanto, conexos) (ver [9], III.7.32 e [18], III.1.2, teorema 1).

Definição 2.1.1 *Seja X um espaço topológico. Um recobrimento (ou espaço de recobrimento) de X é um par $(\tilde{X}, p)$, com $\tilde{X}$ um espaço de recobrimento e $p : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação contínua tal que:*

- (1) *p é sobrejetiva.*
- (2) *Todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança U aberta, conexa por caminhos de modo que a restrição de p a cada componente conexa $\tilde{U}$ de $p^{-1}(U)$ é um homeomorfismo.*

Observação 2.1.1 *Denominamos a aplicação p e a vizinhança U respectivamente de projeção de recobrimento e vizinhança elementar. Ainda, o conjunto $p^{-1}(x)$ é denominado fibra sobre x , para todo $x \in X$.*

Exemplo 2.1.1 *Seja $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $p(t) = (\sin t, \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$. Então $(\mathbb{R}, p)$ é um recobrimento de S^1 . Além disso, todo subintervalo aberto de S^1 pode ser visto como uma vizinhança elementar.*



Exemplo 2.1.2 Podemos definir o plano projetivo P^2 como sendo um espaço quociente da esfera S^2 identificando pontos antípodos. Assim, (S^2, p) é um recobrimento de P^2 , com p a projeção natural, e podemos tomar como uma vizinhança elementar de qualquer ponto $x \in P^2$ um disco aberto contendo x .

Observação 2.1.2 Sejam $(\tilde{X}, p)$ e $(\tilde{Y}, q)$ recobrimentos de X e Y respectivamente. Então $(\tilde{X} \times \tilde{Y}, p \times q)$ é recobrimento de $X \times Y$, sendo a aplicação $p \times q$ definida como $(p \times q)(x, y) = (p(x), p(y))$. Agora, se U e V são vizinhanças elementares de $x \in X$ e $y \in Y$ então $U \times V$ é uma vizinhança elementar de $(x, y) \in X \times Y$. Como exemplo, temos os seguintes recobrimentos de $T^2 = S^1 \times S^1$, sendo p projeção e i inclusão:

- $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, p \times p)$ (o plano $\mathbb{R}^2$)
- $(\mathbb{R} \times S^1, p \times i)$ (o cilindro)
- $(S^1 \times S^1, i \times i)$ (o próprio toro)

Proposição 2.1.1 Seja $(\tilde{X}, p)$ um recobrimento de X , $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Então, para todo caminho $f : I \rightarrow X$ com ponto inicial x_0 , existe um único caminho $g : I \rightarrow \tilde{X}$ com ponto inicial $\tilde{x}$ tal que $p \circ g = f$.

Demonstração: [13], V.3.1. ■

Lema 2.1.1 Seja $(\tilde{X}, p)$ um recobrimento de X com $g_0, g_1 : I \rightarrow \tilde{X}$ caminhos em $\tilde{X}$ de mesmo ponto inicial. Se $p \circ g_0 \sim p \circ g_1$ então $g_0 \sim g_1$. Em particular, g_0 e g_1 possuem o mesmo ponto final.

Demonstração: [13], V.3.3. ■

Proposição 2.1.2 Seja $(\tilde{X}, p)$ um recobrimento de X , $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Então o homomorfismo induzido $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ é um monomorfismo.

Demonstração: Sejam $[g_0]$ e $[g_1]$ classes de caminhos em $\tilde{X}$ e consideremos o seguinte diagrama comutativo:



$$\begin{array}{ccc}
 & & \tilde{X} \\
 & \nearrow g_1 & \downarrow p \\
 I & \xrightarrow[p_{g_0}]{pg_1} & X
 \end{array}$$

Daí,

$$p_*[g_0] = p_*[g_1] \Rightarrow [pg_0] = [pg_1] \Rightarrow pg_0 = pg_1 \xrightarrow{\text{Lema 2.1.1}} g_0 \sim g_1 \Rightarrow [g_0] = [g_1].$$

Logo p_* é monomorfismo. ■

Sabemos ser possível o levantamento de caminhos e queremos agora definir o levantamento de aplicações. Para tanto, observe que dados X e Y espaços topológicos, com $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, podemos considerar uma aplicação contínua $\varphi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ de modo que $\varphi(y_0) = x_0$. Ainda, sendo $(\tilde{X}, p)$ um recobrimento de X , com $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, dizemos que a aplicação $\tilde{\varphi} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ é um levantamento de φ se o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\
 & \nearrow \tilde{\varphi} & \downarrow p \\
 (Y, y_0) & & (X, x_0) \\
 & \searrow \varphi &
 \end{array}$$

O resultado a seguir garante a existência de tal levantamento.

Proposição 2.1.3 *Sejam X e Y espaços topológicos e $(\tilde{X}, p)$ um recobrimento de X , com $y_0 \in Y$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Dada uma aplicação $\varphi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, existe um levantamento $\tilde{\varphi} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ se, e somente se, $\varphi_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.*

Demonstração: [13], V.5.1. ■

Definição 2.1.2 *Seja $(\tilde{X}, p)$ um recobrimento de X . Um homeomorfismo $\varphi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ é dito **transformação de recobrimento** (ou **Deck transformação**) se $p \circ \varphi = p$. Ainda, o conjunto de todas as transformações de recobrimento (denotado por $A(\tilde{X}, p)$) é um grupo em relação à composição.*



Proposição 2.1.4 O grupo $A(\tilde{X}, p)$ atua livremente sobre $\tilde{X}$, isto é, se $g \in A(\tilde{X}, p)$ e $g \neq 1$, então $g \cdot \tilde{x} \neq \tilde{x}$ para $\tilde{x} \in \tilde{X}$.

Demonstração: Seja $g \in A(\tilde{X}, p)$, $g \neq 1$. Suponha que g possua pontos fixos. Então existe $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tal que $g \cdot \tilde{x} = \tilde{x} = 1 \cdot \tilde{x}$, o que acarreta (por [13], V.6.1) $g = 1$. Portanto a ação é livre. ■

Definição 2.1.3 Um recobrimento $(\tilde{X}, p)$ de X é dito **recobrimento universal** de X se $\tilde{X}$ é simplesmente conexo, isto é, se $\tilde{X}$ é conexo por caminhos e $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = 0$, para todo $\tilde{x} \in \tilde{X}$.

Exemplo 2.1.3 São recobrimentos universais:

- o recobrimento S^2 de P^2
- o recobrimento $\mathbb{R}$ de S^1
- o recobrimento $\mathbb{R}^2$ de T^2

Definição 2.1.4 Um recobrimento $(\tilde{X}, p)$ de X é dito **recobrimento regular** se $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ é um subgrupo normal de $\pi_1(X, x)$. Ainda, esta condição independe da escolha do ponto base $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$.

Exemplo 2.1.4 Se $\pi_1(X, x)$ é abeliano, então todo recobrimento $(\tilde{X}, p)$ de X é regular.

Exemplo 2.1.5 Todo recobrimento universal é regular.

Proposição 2.1.5 Seja $(\tilde{X}, p)$ um recobrimento regular de X . Então $A(\tilde{X}, p)$ é isomorfo ao grupo quociente $\pi_1(X, x)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$, para todo $x \in X$ e todo $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$.

Demonstração: [13], V.7.4. ■

Observação 2.1.3 Em particular, se o recobrimento é universal, $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \simeq \{1\}$ e portanto, $A(\tilde{X}, p) \simeq \pi_1(X, x)$.

Proposição 2.1.6 Seja $(\tilde{X}, p)$ um recobrimento regular de X . O grupo $A(\tilde{X}, p)$ atua transitivamente sobre $p^{-1}(x)$ se, e somente se, $(\tilde{X}, p)$ é um recobrimento regular de X .

Demonstração: Vamos inicialmente denotar $A(\tilde{X}, p)$ por G . Dada $\varphi_g \in G$ temos $\varphi_g|_{p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(x)$ e assim, podemos definir a G -ação em $p^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} G \times p^{-1}(x) &\rightarrow p^{-1}(x) \\ (g, \tilde{x}) &\mapsto g \cdot \tilde{x} := \varphi_g(\tilde{x}) \end{aligned}$$

com $G(\tilde{x}) = \{g \cdot \tilde{x} \mid g \in G\} \subset p^{-1}(x)$ a órbita de $\tilde{x}$ e $\tilde{X}/G = \{G(\tilde{x}) \mid \tilde{x} \in \tilde{X}\}$ o espaço de órbitas de G .

Note que G opera transitivamente em $p^{-1}(x)$ e temos $G(\tilde{x}) = p^{-1}(x)$, para todo $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Assim, dados $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$, existe $g \in G$ com $g \cdot \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$ e (por [13], V.6.5.) segue que $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2))$. Agora (por [13], V.4.2.), dados $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x)$, temos

$$\alpha^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) \alpha = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2)) = \beta^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) \beta$$

e, daí $(\alpha\beta)^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) (\alpha\beta) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$.

Logo $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ é normal em $\pi_1(X, x)$. Portanto $(\tilde{X}, p)$ é recobrimento regular.

A recíproca é imediatamente obtida seguindo-se o procedimento inverso das implicações anteriores. ■

Observações 2.1.1

(a) Segue da proposição anterior que se $(\tilde{X}, p)$ é recobrimento regular de X , então X é homeomorfo ao espaço quociente $\tilde{X}/A(\tilde{X}, p)$.

(b) $(\tilde{X}, p)$ é um recobrimento regular de X se, e somente se, um levantamento de um caminho fechado $\omega \in X$ é fechado (e portanto, todos os levantamentos de ω são fechados) (por [10], V.1 corolário 3).

(c) Se o recobrimento é regular, temos $A(\tilde{X}, p) \simeq \pi_1(X, x)/\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ identificando $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ com $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$. Podemos explicitar este isomorfismo como se segue:

Dados pontos base $x \in X$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, temos $\varphi : \pi_1(X, x) \rightarrow A(\tilde{X}, p)$ um homomorfismo sobrejetor de modo que se $\omega : [0, 1] \rightarrow X$ e o seu levantamento $\tilde{\omega} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ representam respectivamente as classes de caminhos $[\omega]$ e $[\tilde{\omega}]$, com $\tilde{\omega}(0) = \tilde{x}$, então $\tilde{\omega}(1) \in p^{-1}(x)$. Ainda, $\varphi([\omega])$ é definido como sendo o único elemento de $A(\tilde{X}, p)$ tal que $\varphi([\omega])(\tilde{x}) = \tilde{\omega}(1)$ e temos que $\text{Ker } \varphi \simeq \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$. Logo, φ induz o isomorfismo desejado.

Definição 2.1.5 Um grupo G de homeomorfismos de X é dito **propriamente descontínuo** se todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança V tal que, para todo $g \in G$, $g \neq 1$, tem-se $g \cdot V \cap V = \emptyset$.

Proposição 2.1.7 Sejam X um espaço topológico, G o grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos de X e $q : X \rightarrow X/G$ a aplicação quociente sobre o espaço de órbitas de G . Então (X, q) é um recobrimento regular de X/G , com $G = A(X, q)$.

Demonstração: [13], V.8.2. ■

Proposição 2.1.8 Sejam $(\tilde{X}, p)$ e $(\tilde{X}, q)$ recobrimentos regulares de X e $\tilde{X}/G$ respectivamente, com $G = A(\tilde{X}, q)$. Então existe um homeomorfismo $\xi : \tilde{X}/G \rightarrow X$ que comuta o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ q \swarrow & & \searrow p \\ \tilde{X}/G & \xrightarrow{\xi} & X \end{array}$$

Demonstração: Dados $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X}$, temos $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2)$, quando $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ pertencem à mesma fibra de p . Assim, existe $g \in G$ tal que $g \cdot \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$ (G atua transitivamente na fibra) e temos $G(\tilde{x}_1) = G(\tilde{x}_2)$, ou seja, $q(\tilde{x}_1) = q(\tilde{x}_2)$. Logo, as relações de equivalência determinadas por p e q coincidem e segue que $\xi : \tilde{X}/G \rightarrow X$ é uma bijeção contínua (por [9], pág.66), com $\xi \circ q = p$. Além disso, ξ é um homeomorfismo (pois p é aplicação aberta). ■

A seguir vamos determinar sob quais condições é possível construir um recobrimento associado a um conjunto dado.

Proposição 2.1.9 Seja X um espaço topológico. Dados $x_0 \in X$ e um subgrupo H de $\pi_1(X, x_0)$, existem um recobrimento $(\tilde{X}, p)$ de X , com $\tilde{X}$ conexo, e um ponto $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tais que $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$.

Demonstração: [10], V.6.15. ■

2.2 CW-Complexos e $K(G,1)$ -Complexos

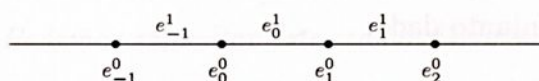
Definição 2.2.1 Um espaço X de Hausdorff admite uma estrutura de CW-complexo se possui uma coleção de subconjuntos fechados σ_j^q ($q \geq 0$ representando a dimensão e j variando sobre um conjunto de índices J_q) junto com uma família de subespaços fechados $X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^q \subset \dots$, sendo $X^q = \bigcup_{p \leq q; j \in J_p} \sigma_j^p$ (com $X^{-1} := \emptyset$) e fronteira dada por $f_j^q = \sigma_j^q \cap X^{q-1}$, satisfazendo:

- (1) $\sigma_i^p - f_i^p$ intercepta $\sigma_j^q - f_j^q$ se $p = q$ e $i = j$.
- (2) $X = \bigcup_q X^q$.
- (3) Para cada σ_j^q existe uma aplicação característica $\phi_j^q : D^q \rightarrow \sigma_j^q$ (com D^q o disco de dimensão q) que leva S^{q-1} (esfera de dimensão $q-1$) sobre f_j^q e aplica $D^q - S^{q-1}$ homeomorficamente sobre $\sigma_j^q - f_j^q$ (com $S^{-1} := \emptyset$).
- (4) f_j^q intercepta um número finito de conjuntos $(\sigma_i^q - f_i^q)$, $i \in J_q$.
- (5) Um subconjunto Y de X é fechado se $Y \cap \sigma_j^q$ é fechado em σ_j^q , para todo q e todo $j \in J_q$, com σ_j^q admitindo a topologia quociente de D^q (via ϕ_j^q).

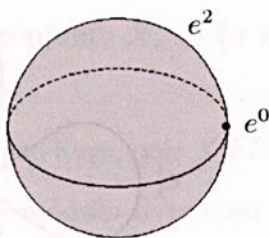
Observações 2.2.1

- (a) Denotamos por $e^q = \sigma^q - f^q$ a célula aberta de dimensão q .
- (b) As condições (1) a (4) são satisfeitas se X é um complexo celular finito.

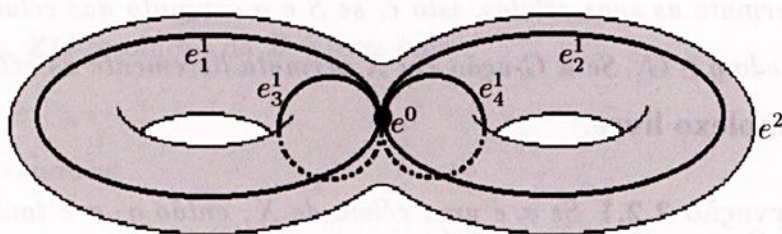
Exemplo 2.2.1 Dado $X = \mathbb{R}$, podemos considerar em $\mathbb{R}$ uma estrutura natural de CW-complexo, tomando as 0-células e 1-células como sendo, respectivamente, $e_n^0 = \{n\}$ e $e_n^1 = (n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.



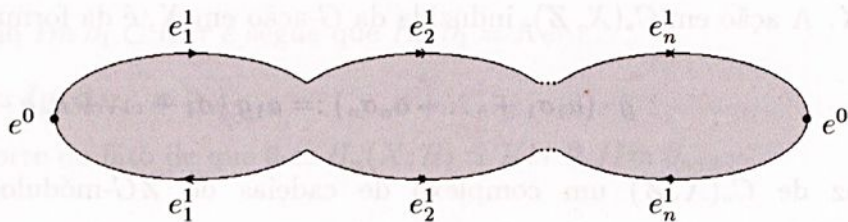
Exemplo 2.2.2 Seja $X = S^2$. Temos uma estrutura de CW-complexo sobre S^2 dada por uma 0-célula e uma 2-célula, ou seja, $S^2 = e^0 \cup e^2$.



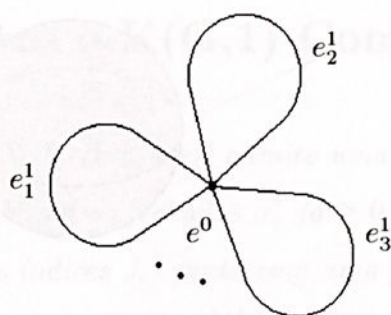
Exemplo 2.2.3 Consideremos $X = T_2 \# T_2$ a soma conexa de 2 toros. Podemos dar a X uma estrutura de CW-complexo do seguinte modo: $X = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup e_3^1 \cup e_4^1 \cup e^2$.



Exemplo 2.2.4 Seja $X = P^2 \# \dots \# P^2$ a soma conexa de n -planos projetivos. Então X é um CW-complexo 2-dimensional contendo uma 0-célula, n 1-células e uma 2-célula: $X = e^0 \cup e_1^1 \cup \dots \cup e_n^1 \cup e^2$



Exemplo 2.2.5 Seja $X = \bigvee_{s \in S} S_s^1$ o bouquet de círculos indexado por um conjunto S . Podemos dar a X uma estrutura de CW-complexo 1-dimensional, com uma única 0-célula e uma 1-célula para cada elemento de S ($X = e^0 \cup (\bigcup_{s \in S} e_s^1)$).



Definição 2.2.2 Um CW-complexo X é dito **G-complexo** se X é munido de uma G -ação que permuta as suas células, isto é, se S é o conjunto das células de X , então $g \cdot S = S$, para todo $g \in G$. Se a G -ação em X permuta livremente as células, dizemos que X é um **G-complexo livre**.

Observação 2.2.1 Se σ é uma célula de X , então $g \cdot \sigma$ é também uma célula em X de mesma dimensão. Tal dimensão é preservada pelo homeomorfismo $\varphi_g : X \rightarrow X$, com $\varphi_g(x) = g \cdot x$, induzido da G -ação em X .

Podemos agora tomar complexos de cadeias a partir de um G -complexo X . Tal complexo é denotado por $C_*(X, \mathbb{Z})$, com $C_n(X, \mathbb{Z})$ o $\mathbb{Z}$ -módulo livre gerado pelas n -células de X . A ação em $C_*(X, \mathbb{Z})$, induzida da G -ação em X , é da forma:

$$g \cdot (a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n) := a_1g \cdot \sigma_1 + \dots + a_ng \cdot \sigma_n$$

e faz de $C_*(X, \mathbb{Z})$ um complexo de cadeias de $\mathbb{Z}G$ -módulos, sendo a aplicação $\varepsilon : C_0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $\varepsilon(\sigma^0) = 1$, nas 0-células σ^0 de X , e estendida por linearidade. Ainda, ε é aplicação de $\mathbb{Z}G$ -módulos, visto que $g \cdot \sigma^0$ é 0-célula e temos G -ação trivial em $\mathbb{Z}$.

Proposição 2.2.1 Seja X um G -complexo livre contrátil. Então o complexo de cadeia celular aumentado de X

$$\dots \rightarrow C_n(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots \rightarrow C_1(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

é uma $\mathbb{Z}G$ -resolução livre de $\mathbb{Z}$.

Demonstração: Consideremos o conjunto $X_n = \{\sigma \in X \mid \sigma \text{ é } n\text{-célula}\}$ e o $\mathbb{Z}$ -módulo livre $C_n(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}X_n$, gerado por σ .

Temos $X_n \subset X$ um G -conjunto livre, pois X é G -complexo livre e, pela Proposição 1.1.3, segue que $C_n(X, \mathbb{Z})$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre com base E , sendo E um conjunto de representantes para as G -órbitas em X_n .

Como X tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto se X é contrátil, temos

$$H_n(X, \mathbb{Z}) \simeq H_n(\{x_0\}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0. \end{cases}$$

Agora, a $\mathbb{Z}G$ -resolução de $\mathbb{Z}$ é livre pois :

(i) $Im \partial_1 = Ker \varepsilon$.

Considerando-se

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_1(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \partial_0 & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

temos $\mathbb{Z} \simeq H_0(X, \mathbb{Z}) \simeq Ker \partial_0 / Im \partial_1 \simeq C_0(X, \mathbb{Z}) / Im \partial_1$ e, como ε é sobrejetora, pelo Teorema do Homomorfismo, $C_0(X, \mathbb{Z}) / Ker \varepsilon \simeq Im \varepsilon \simeq \mathbb{Z}$.

Daí, $C_0(X, \mathbb{Z}) / Im \partial_1 \simeq C_0(X, \mathbb{Z}) / Ker \varepsilon$.

Como $Im \partial_1 \subset Ker \varepsilon$ segue que $Im \partial_1 = Ker \varepsilon$.

(ii) $Ker \partial_n \simeq Im \partial_{n+1}$, $n \geq 1$.

Decorre do fato de que $0 \simeq H_n(X, \mathbb{Z}) \simeq Ker \partial_n / Im \partial_{n+1}$. ■

K(G,1)-complexos

Vamos agora definir um CW-complexo satisfazendo condições especiais, sendo muito útil no cômputo das resoluções. Para tanto, fazemos inicialmente algumas considerações importantes.

Sejam X um CW-complexo e $(\tilde{X}, p)$ um recobrimento de X . Por [18], III.6.9.2, $\tilde{X}$ é também um CW-complexo, cujas células $\tilde{\sigma}$ são as componentes conexas de $p^{-1}(\sigma)$. Mais ainda:



- (i) O grupo G das transformações de recobrimento atua livremente em $\tilde{X}$ permutando suas células, sendo $p : \tilde{\sigma} \rightarrow \sigma$ um homeomorfismo restrito a $\tilde{\sigma}$. Assim, $\tilde{X}$ é um G -conjunto.
- (ii) Se $\tilde{X}$ é contrátil, o complexo celular aumentado de $\tilde{X}$ é uma ZG -resolução livre de Z , com $C_n(\tilde{X}, Z)$ um ZG -módulo livre com um elemento básico para cada órbita de célula em $\tilde{X}$.
- (iii) Se o recobrimento é regular, temos que G atua transitivamente em $p^{-1}(\sigma)$, ou seja, $G(\tilde{\sigma}) = p^{-1}(\sigma)$, para todo $\tilde{\sigma} \in p^{-1}(\sigma)$. Logo cada célula em X nos fornece uma órbita de células de mesma dimensão em $\tilde{X}$. Se, além disso, o recobrimento é contrátil, temos $C_*(\tilde{X}, Z)$ um ZG -módulo livre com um elemento básico para cada célula de X .

A partir das considerações feitas anteriormente podemos definir:

Definição 2.2.3 *Seja X um CW-complexo satisfazendo:*

- (1) X é conexo.
- (2) $\pi_1(X) = G$.
- (3) *O recobrimento universal $\tilde{X}$ de X é contrátil (por [18], III.6.9.1 e [5], I.6.7 dado um CW-complexo conexo sempre existe um recobrimento universal, o qual é regular).*

O complexo X é dito de Eilenberg-MacLane do tipo $(G, 1)$, ou apenas, $K(G, 1)$ -complexo.

Observações 2.2.2

(a) *A condição (3) da definição anterior pode ser equivalentemente tomada (por [2] I.4) como qualquer uma das condições a seguir:*

$$(3)' \quad H_i(\tilde{X}) = 0 \quad \text{para } i \geq 2.$$

$$(3)'' \quad \pi_i(X) = 0 \quad \text{para } i \geq 2.$$

(b) *Seja $(\tilde{X}, p)$ um recobrimento universal de um CW-complexo X . Então $\tilde{X}$ é um G -complexo, com $G = \pi_1(X)$.*

(c) *É fato conhecido (ver [2], VIII.7.1) que dado um grupo G , sempre existe um $K(G, 1)$ -complexo, o qual é único, a menos de homotopia.*



Exemplo 2.2.6 Sejam $X = S^1$ e $G = \langle \alpha \rangle \simeq \mathbf{Z}$. Como X é um CW-complexo conexo, com $G = \pi_1(X)$ e o seu recobrimento universal $\tilde{X} = \mathbb{R}$ é contrátil, segue que X é um $K(G, 1)$ -complexo.

Exemplo 2.2.7 Sejam $X = T^n \simeq S^1 \times \dots \times S^1$ o toro n -dimensional e $G = \mathbf{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}$ um grupo abeliano livre de posto n . Temos que X é um CW-complexo conexo, $G = \pi_1(X)$ e o recobrimento universal $\tilde{X} = \mathbb{R}^n$ é contrátil. Logo, X é um $K(G, 1)$ -complexo.

Exemplo 2.2.8 Sejam $X = \bigvee_{s \in S} S_s^1$ o bouquet de círculos indexados por um conjunto S e $G = F(S)$ um grupo livre gerado por S . O CW-complexo X é conexo de dimensão 1 (Exemplo 2.2.5), com exatamente um vértice e uma 1-célula para cada elemento de S .

Ainda, $G = \pi_1(X)$ (por [13], IV.3.4) e o recobrimento universal $\tilde{X}$ possui dimensão 1 ($p: \tilde{X} \rightarrow X$ é homeomorfismo local) o que acarreta $H_i(\tilde{X}) = 0$, para $i \geq 2$.

Logo X é um $K(G, 1)$ -complexo.

Lema 2.2.1 Seja X um G -complexo livre compacto. Então G é finito.

Demonstração: Como X é um G -complexo livre, segue (por [2], ex.2, pág.17) que a ação de G em X é propriamente descontínua e temos (X, p) um recobrimento regular de X/G , com X/G o espaço das órbitas de X e $p: X \rightarrow X/G$ tal que $p(x) = \bar{x}$.

Além disso, (por [5], pág.21) G atua livremente em X como o grupo das transformações de recobrimento.

Dado $\bar{x}_0 \in X/G$ tem-se

$$p^{-1}(\bar{x}_0) = \{x \in X \mid p(x) = \bar{x}_0\} = \{x \in X \mid \bar{x} = \bar{x}_0\} = \{x \in X \mid x \in G(x_0)\}$$

e como a G -ação em X é livre, segue que $p^{-1}(\bar{x}_0)$ está em correspondência 1-1 com G . Ainda, a fibra $p^{-1}(\bar{x}_0)$ é discreta e fechada (por [13], pag.165).

Agora se supusermos que $p^{-1}(\bar{x}_0)$ é infinita, então $p^{-1}(\bar{x}_0)$ deverá possuir um ponto de acumulação (pois a fibra é compacta), o que contraria o fato de a fibra ser discreta.

Logo $p^{-1}(\bar{x}_0)$ é finita e portanto, G é finito. ■

Exemplo 2.2.9 Consideremos agora n um inteiro positivo não nulo e o grupo $G = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n; \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = 1 \rangle$. Temos que G é infinito (por [16], 6.4.3), sendo exatamente o grupo fundamental da superfície orientada X de genus n (soma conexa de n toros) (por [13], IV.5. exemplo 5.3).

Agora X é um $K(G, 1)$ -complexo pois, se $(\tilde{X}, p)$ é o recobrimento universal de X , como G é infinito, segue pelo lema anterior que $\tilde{X}$ não é compacto.

Portanto $\tilde{X}$ é uma superfície não compacta e conexa.

Ainda $H_2(\tilde{X}) = 0$ (por [5], III.22.25) e $H_k(\tilde{X}) = 0$ para $k > 2$, visto que $\tilde{X}$ tem dimensão 2. Daí tem-se $H_k(\tilde{X}) = 0$ para $k \geq 2$.

Exemplo 2.2.10 De modo análogo ao exemplo anterior $G = \langle c_1, \dots, c_k; \prod_{i=1}^k c_i^2 = 1 \rangle$ é o grupo fundamental de uma superfície X fechada não orientável de genus k , $k \geq 2$ (soma conexa de k planos projetivos) e X é um $K(G, 1)$ -complexo.

A proposição a seguir decorre imediatamente dos resultados vistos.

Proposição 2.2.2 Seja X um $K(G, 1)$ -complexo. Então o complexo celular de cadeia aumentado do recobrimento universal $(\tilde{X}, p)$ de X

$$\cdots \longrightarrow C_2(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma $\mathbb{Z}G$ -resolução livre de $\mathbb{Z}$.

Demonstração: Seja X é um $K(G, 1)$. Então $\tilde{X}$ é um G -complexo livre contrátil e pela Proposição 2.2.1 o resultado segue. ■

Exemplo 2.2.11 Seja $X = \bigvee_{s \in S} S_s^1$ um $K(F(S), 1)$ -complexo (Exemplo 2.2.8), com $F(S)$ o grupo livre gerado por S . Vamos explicitar uma $\mathbb{Z}G$ -resolução livre para tal complexo do seguinte modo:

Seja $(\tilde{X}, p)$ o recobrimento universal de X . Como $C_n(\tilde{X}, \mathbb{Z})$ tem um elemento básico para cada célula de X , podemos tomar um ponto base $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ representando a

única G -órbita de vértices em $\tilde{X}$ (correspondendo a 0-órbita de vértices em $\tilde{X}$ para cada vértice em X). Assim $\tilde{x}_0$ gera o $\mathbf{Z}G$ -módulo livre $C_0(\tilde{X}, \mathbf{Z})$ e tem-se $C_0(\tilde{X}, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}G$.

Como base para $C_1(\tilde{X}, \mathbf{Z})$, podemos tomar para cada $s \in S$ uma 1-célula orientada $e_s \in \tilde{X}$, que é projetada sobre S_s^1 (orientada no sentido positivo) e temos uma 1-órbita em $\tilde{X}$ para cada 1-célula em X .

Suponhamos que e_s tem $\tilde{x}_0$ como ponto inicial e, caso isto não ocorra, tomamos outro representante e_r com ponto inicial $\tilde{x}_0$, ou seja, se e_r tem um ponto inicial $\tilde{x}_0$, existe $g \in G$ tal que $g \cdot e_s = e_r$ (G atua livre e transitivamente permutando as células de $\tilde{X}$). Assim e_s tem seu ponto final dado por $s \cdot \tilde{x}_0$.

De fato: Utilizando o isomorfismo explicitado na Observação 4.1.1.(c) podemos identificar o grupo das transformações de recobrimento $A(\tilde{X}, p)$ (denotado por G) com $\pi_1(X, x_0)$.

Ainda, pelo fato de cada S_s^1 representar um gerador em $\pi_1(X, x_0) \simeq F(S)$, identificamos S_s^1 com s através deste mesmo isomorfismo.

Logo existe um único levantamento $\tilde{s}$ de s , começando em $\tilde{x}_0$ com ponto final $\tilde{s}(1) = f_s(\tilde{x}_0) = s \cdot \tilde{x}_0$, sendo exatamente a 1-célula e_s , com $p(e_s) = S_s^1 \equiv s$ (note que e_s é aplicada homeomorficamente em S_s^1).

Agora $G \simeq F(S)$, com $s \simeq f_s$ e temos $\partial(e_s) = s \cdot \tilde{x}_0 - \tilde{x}_0 = s \cdot \tilde{x}_0 - 1 \cdot \tilde{x}_0 = (s-1) \cdot \tilde{x}_0$.

Portanto

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}G^{(S)} \xrightarrow{\partial} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

é uma $\mathbf{Z}G$ -resolução livre de $\mathbf{Z}$, sendo $\mathbf{Z}G^{(S)} = \bigoplus_{s \in S} \mathbf{Z}G$ um $\mathbf{Z}G$ -módulo livre com base $(e_s)_{s \in S}$, $\partial(e_s) = s - 1$ e $\varepsilon(g) = 1$, para $g \in G$.

Exemplo 2.2.12 Se $S = \{t\}$, então $G = F(S)$ é cíclico infinito. Pelo Exemplo anterior segue a sequência exata:

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0.$$

2.3 Resoluções Periódicas via Ações Livres em Esferas

Queremos agora construir uma ZG -resolução livre de Z a partir de um G -complexo livre X homeomorfo a S^n (esfera de dimensão n).

Seja $X \simeq S^{2k-1}$.

Podemos definir em $H_{2k-1}(X, Z)$ uma G -ação induzida da ação de G em X da seguinte forma: dado $g \in G$, seja o homeomorfismo $\varphi_g : X \rightarrow X$ tal que $\varphi_g(x) = g \cdot x$. Então o homeomorfismo induzido em homologia $\varphi_{g*} : H_{2k-1}(X, Z) \rightarrow H_{2k-1}(X, Z)$ é um isomorfismo e temos que

$$\begin{aligned} G \times H_{2k-1}(X, Z) &\rightarrow H_{2k-1}(X, Z) \\ (g, \alpha) &\mapsto \varphi_{g*}(\alpha) \end{aligned}$$

define uma ação de G em $H_{2k-1}(X, Z)$.

Assim, podemos enunciar o seguinte resultado:

Lema 2.3.1 *A G -ação sobre $H_{2k-1}(X, Z) \simeq Z$ definida anteriormente é trivial.*

Demonstração: A aplicação $\varphi_g : X \rightarrow X$ tal que $\varphi_g(x) = g \cdot x$ é um homeomorfismo sem pontos fixos, para $g \neq 1$ (a G -ação sobre X é livre).

Seja $\Lambda_{\varphi_g} = \sum_{i=0}^{2k-1} (-1)^i \text{tr}(\varphi_g)_{*,i}$ o número de Lefschetz de φ_g , com

$$(\varphi_g)_{*,i} : H_i(X, Z) \rightarrow H_i(X, Z)$$

a aplicação induzida de φ_g no nível i de homologia.

Como $S^{2k-1} = e^0 \cup e^{2k-1}$, existem apenas dois componentes no somatório a seguir:

$$\Lambda_{\varphi_g} = \sum_{i=0}^{2k-1} (-1)^i \text{tr}(\varphi_g)_{*,i} = \text{tr}(\varphi_g)_{*,0} - \text{tr}(\varphi_g)_{*,2k-1}$$

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz ([20], pág.174 ou [2], pág.21) segue que $\Lambda_{\varphi_g} = 0$ (φ_g é livre de pontos fixos para $g \neq 1$) e temos $\text{tr}(\varphi_g)_{*,0} - \text{tr}(\varphi_g)_{*,2k-1} = 0$.

Temos X conexo por caminhos, e portanto $f_{*,0} \equiv id$, para toda $f : X \rightarrow X$. Assim $\text{tr}(\varphi_g)_{*,0} = 1$ (pois $H_0(X, Z) \simeq Z$).



Agora, $tr(\varphi_g)_{*,1} = 1$ e daí $(\varphi_g)_{*,2k-1} = id$ (pois $H_{2k-1}(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$).

Portanto, a G-ação em $H_{2k-1}(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ é trivial. ■

Lema 2.3.2 A seqüência

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} C_{2k-1}(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{2k-1}} \cdots \longrightarrow C_1(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

com $n : \mathbb{Z} \rightarrow C_{2k-1}(X, \mathbb{Z})$ a inclusão e $C_i(X, \mathbb{Z})$ o $\mathbb{Z}G$ -módulo livre gerado pelas células de dimensão i (uma em cada órbita de células) é exata.

Demonstração: Dada a seqüência

$$0 \longrightarrow Ker \partial_{2k-1} \xrightarrow{n} C_{2k-1}(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{2k-1}} \cdots \longrightarrow C_1(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

temos $\partial_{2k} : C_{2k}(X, \mathbb{Z}) \simeq \{0\} \rightarrow C_{2k-1}(X, \mathbb{Z})$ a aplicação nula (pois a dimensão é $2k-1$) e $H_{2k-1}(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

De $H_{2k-1}(X, \mathbb{Z}) = Ker \partial_{2k-1} / Im \partial_{2k}$ segue que $Ker \partial_{2k-1} \simeq \mathbb{Z}$. Como $H_i(X, \mathbb{Z}) \simeq 0$, para $0 < i < 2k-1$, temos $Ker \partial_i = Im \partial_{i+1}$, para $0 < i < 2k-1$.

Ainda, $C_0(X, \mathbb{Z}) / Ker \varepsilon \simeq Im \varepsilon \simeq \mathbb{Z}$ (ε : sobrejetora). Considerando

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_1(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \partial_0 & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

tem-se $\mathbb{Z} \simeq H_0(X, \mathbb{Z}) = Ker \partial_0 / Im \partial_1 \simeq C_0(X, \mathbb{Z}) / Im \partial_1$. Daí, $\mathbb{Z} \simeq C_0(X, \mathbb{Z}) / Ker \varepsilon \simeq C_0(X, \mathbb{Z}) / Im \partial_1$ e como $Im \partial_1 \subset Ker \varepsilon$, segue que $Im \partial_1 = Ker \varepsilon$. ■

Observação 2.3.1 Usando o Lema anterior construímos uma $\mathbb{Z}G$ -resolução livre de $\mathbb{Z}$ de período $2k$.

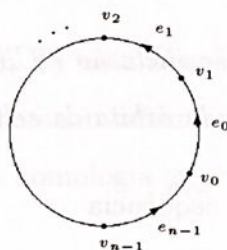
Denotemos $C_*(X, \mathbb{Z})$ por C_* e consideremos o diagrama a seguir, com n a inclusão e ε a aumentação:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \mathbb{Z} & & & \\ & \nearrow \varepsilon & & \searrow n & & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & \xrightarrow{n \circ \varepsilon} & C_{2k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Como $\text{Im } \partial_1 = \text{Ker } \varepsilon$ e ainda $\text{Ker } \varepsilon = \text{Ker } (n \circ \varepsilon)$ e $\text{Im } (n \circ \varepsilon) = \text{Ker } \partial_{2k-1}$ temos a $\mathbf{Z}G$ -resolução de $\mathbf{Z}$:

$$\cdots \longrightarrow C_{2k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{n \circ \varepsilon} C_{2k-1} \xrightarrow{\partial_{2k-1}} \cdots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0.$$

Exemplo 2.3.1 Seja G um grupo cíclico finito de ordem n com gerador t .



Seja S^1 vista como um CW-complexo com n vértices (os quais podemos identificar com as raízes n -ésimas da unidade) e n 1-células.

Denotando por $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ os vértices e por $e_i =]v_i, v_{i+1}[$ as 1-células de S^1 , definimos a G -ação em S^1 por $t^k \cdot v_i = v_{k+i}$ e $t^k \cdot e_i = e_{k+i}$, com $i, k = 0, \dots, n-1$.

Note que G atua em S^1 como o grupo de rotações permutando livremente suas células. Além disso, $v_i = t^i \cdot v_0$ e $e_i = t^i \cdot e_0$, para $i = 0, \dots, n-1$. Existe, portanto, uma única órbita de 0-células e uma única órbita de 1-células o que acarreta $C_0(S^1, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}G \simeq C_1(S^1, \mathbf{Z})$.

Assim a sequência

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

é exata e como $\mathbf{Z} \simeq H_1(S^1, \mathbf{Z}) \simeq \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2 \simeq \text{Ker } \partial_1$ ($\text{Im } \partial_2 \simeq 0$), obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{n} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0.$$

Logo

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{Z}G \xrightarrow{n \circ \varepsilon} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{Z}G \xrightarrow{n \circ \varepsilon} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

é uma $\mathbf{Z}G$ -resolução livre de $\mathbf{Z}$.

Vamos agora determinar ∂_1 e $n \circ \varepsilon$.

- $\partial_1(e_0) = v_1 - v_0 = t \cdot v_0 - 1 \cdot v_0 = (t - 1) \cdot v_0$.

Logo ∂_1 é a multiplicação por $t - 1$.

- $n \circ \varepsilon$

Seja $N = 1 + t + \dots + t^{n-1}$. Temos que Ne_0 gera $H_1(S^1, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

De fato: Temos $\mathbb{Z} \simeq H_1(S^1, \mathbb{Z}) = \text{Ker } \partial_1$. Ainda

$$\begin{aligned} \partial_1(e_0 + t \cdot e_0 + \dots + t^{n-1} \cdot e_0) &= (1 + t + \dots + t^{n-1})\partial_1(e_0) \\ &= (1 + t + \dots + t^{n-1})(t - 1) \cdot v_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

e temos $x = e_0 + t \cdot e_0 + t^2 \cdot e_0 + \dots + t^{n-1} \cdot e_0 \in \text{Ker } \partial_1$.

De $\partial_1(x) = 0$ tem-se

$$(a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1})\partial_1(e_0) = (a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1})(t - 1) \cdot v_0 = 0$$

e portanto $(a_{n-1} - a_0)v_0 + \dots + (a_{n-2} - a_{n-1})t^{n-1} \cdot v_0 = 0$.

Como $C_0(X, \mathbb{Z})$ é um $\mathbb{Z}$ -módulo livre tendo as 0-células $\{v_0, t \cdot v_0, \dots, t^{n-1} \cdot v_0\}$ como base, temos $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1}$. Assim,

$$x = a_0(e_0 + t \cdot e_0 + \dots + t^{n-1} \cdot e_0) = a_0 Ne_0.$$

Assim $\mathbb{Z} \simeq H_1(S^1, \mathbb{Z}) = \text{Ker } \partial_1 \simeq \langle Ne_0 \rangle$ e ainda $\text{Im}(n \circ \varepsilon) = \text{Ker } \partial_1$, com $n \circ \varepsilon(v_0) = Ne_0$. Portanto $n \circ \varepsilon(1_{\mathbb{Z}G}) = N$, ou seja, $n \circ \varepsilon$ é a multiplicação por N .

Logo obtemos a $\mathbb{Z}G$ -resolução periódica de $\mathbb{Z}$ com período 2:

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Observação 2.3.2 No estudo feito nesta seção a esfera considerada é de dimensão ímpar, já que o caso em que a dimensão é par não é interessante, pois se $X \simeq S^{2k}$ temos que $\mathbb{Z}_2$ é o único grupo atuando livremente em S^{2k} .

De fato: Sejam G um grupo atuando livremente em S^{2k} e $f, g \in G$.

Como a ação é livre temos que f não tem pontos fixos e ainda, como f é um homeomorfismo, temos $f \circ f^{-1} = id$. Portanto $\deg(f) \cdot \deg(f^{-1}) = 1$ (ver [20], pág.28) e assim, $\deg(f) = \pm 1$.

Mais ainda, $\deg(f) = -1$, visto que se $\deg(f) = 1$, o número de Lefschetz (como visto na demonstração do Lema 2.3.1 considerando-se agora $S^{2k} = e^0 \cup e^{2k}$) será

$$\Lambda(f) = 1 + (-1)^{2k} \neq 0 \quad (2.1)$$

o que acarreta f com pontos fixos.

Agora $\deg(f \circ f) = \deg(f) \cdot \deg(f) = \deg(f)^2 = 1$, ou seja, ocorre (2.1) e portanto f^2 tem ponto fixo. Como a ação é livre, segue que $f^2 = id$.

Analogamente tem-se $g^2 = id$.

Assim, se $\deg(f \circ g) = 1$, novamente por (2.1) tem-se $f \circ g = id$ e considerando-se $f^2 = id = g^2$ concluímos que $f = g^{-1} = f^{-1}$.

Logo $f = g$ e assim, $G \simeq \mathbb{Z}_2$.



Capítulo 3

(Co)homologia de Grupos

3.1 A (Co)homologia de um grupo G

Sejam G um grupo e M um ZG -módulo.

Dada a ZG -resolução projetiva de Z

$$F : \cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} Z \longrightarrow 0$$

obtemos o **complexo de cadeia**

$$F \otimes_{ZG} M : \cdots \longrightarrow F_n \otimes_{ZG} M \xrightarrow{\bar{\partial}_n} F_{n-1} \otimes_{ZG} M \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \otimes_{ZG} M \longrightarrow 0$$

e o **complexo de cocadeia**

$$\text{Hom}_{ZG}(F, M) : 0 \longrightarrow \text{Hom}_{ZG}(F_0, M) \xrightarrow{\delta^0} \cdots \longrightarrow \text{Hom}_{ZG}(F_n, M) \xrightarrow{\delta^n} \cdots$$

com $\bar{\partial}_n := \partial_n \otimes$ o **operador bordo** e $\delta^n(f) := f \circ \partial_{n+1}$ o **operador cobordo**.

Definição 3.1.1 *O n -ésimo grupo de homologia de G com coeficientes em M é dado por:*

$$H_n(G, M) := H_n(F \otimes_{ZG} M)$$

e o n -ésimo grupo de cohomologia de G com coeficientes em M por:

$$H^n(G, M) := H^n(\text{Hom}_{ZG}(F, M)).$$



Observações 3.1.1

(a) As definições de $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$ independem da resolução projetiva $\varepsilon : F \rightarrow Z$ escolhida (a menos de isomorfismo canônico).

De fato: Seja $\varepsilon' : F' \rightarrow Z$ outra ZG -resolução projetiva de Z . Então os complexos $F \otimes_{ZG} M$ e $F' \otimes_{ZG} M$ são homotopicamente equivalentes (o funtor aditivo $- \otimes_{ZG} M$ preserva homotopias de cadeias, por [2], pág.33) e temos $H_*(F \otimes_{ZG} M) \simeq H_*(F' \otimes_{ZG} M)$.

De modo análogo, seguem que os complexos $\text{Hom}_{ZG}(F, M)$ e $\text{Hom}_{ZG}(F', M)$ são homotopicamente equivalentes, ou seja, $H^*(\text{Hom}_{ZG}(F, M)) \simeq H^*(\text{Hom}_{ZG}(F', M))$.

(b) Se considerarmos em $M = Z$ a G -ação trivial, temos

$$H_*(G, Z) \stackrel{\text{not.}}{=} H_*(G) \simeq H_*(F \otimes_{ZG} Z) \stackrel{\text{Prop.1.3.5}}{\simeq} H_*((F \otimes_Z Z)_G) \simeq H_*(F_G).$$

Proposição 3.1.1 Seja M um ZG -módulo. Então

$$H_0(G, M) \simeq M_G \quad e \quad H^0(G, M) \simeq M^G.$$

Demonstração: Considere $\varepsilon : F \rightarrow Z$ uma ZG -resolução projetiva de Z . Aplicando o funtor $- \otimes_{ZG} M$, obtemos o complexo:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_1 \otimes_{ZG} M & \xrightarrow{\bar{\partial}_1} & F_0 \otimes_{ZG} M & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & Z \otimes_{ZG} M \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \bar{\partial}_0 & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

o qual é exato à direita (por [7], I.7.9).

Daí, $\text{Im } \bar{\partial}_1 = \text{Ker } \bar{\varepsilon}$.

Como $\bar{\varepsilon}$ é sobrejetiva, usando o Teorema do Homomorfismo tem-se:

$$H_0(G, M) = \frac{\text{Ker } \bar{\partial}_0}{\text{Im } \bar{\partial}_1} \simeq \frac{F_0 \otimes_{ZG} M}{\text{Ker } \bar{\varepsilon}} \simeq Z \otimes_{ZG} M \stackrel{\text{Prop.1.3.1}}{\simeq} M_G.$$

Agora, ao aplicarmos o funtor $\text{Hom}_{ZG}(-, M)$ (que é exato por [7], I.8.7) à resolução, temos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{ZG}(Z, M) & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & \text{Hom}_{ZG}(F_0, M) & \xrightarrow{\delta^0} & \text{Hom}_{ZG}(F_1, M) \longrightarrow \cdots \\ & & & & \uparrow \delta^{-1} & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Assim $\text{Im } \tilde{\varepsilon} = \text{Ker } \delta^0$. Ainda, como $\tilde{\varepsilon}$ é injetora segue que

$$H^0(G, M) = \frac{\text{Ker } \delta^0}{\text{Im } \delta^{-1}} = \text{Ker } \delta^0 = \text{Im } \tilde{\varepsilon} \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \stackrel{\text{Prop. 1.3.2}}{\simeq} M^G. \quad \blacksquare$$

Nos exemplos a seguir calculamos $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$ para M um $\mathbb{Z}G$ -módulo.

Exemplo 3.1.1 *Seja $G = F(S)$ o grupo livre gerado por um conjunto S e $M = \mathbb{Z}$ com G -ação trivial. Pelo Exemplo 2.2.11 temos a $\mathbb{Z}G$ -resolução livre (e portanto projetiva) de $\mathbb{Z}$ dada por*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G^{(S)} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

com $\mathbb{Z}G^{(S)}$ o $\mathbb{Z}G$ -módulo livre de base $(e_s)_{s \in S}$, $\partial(e_s) = s - 1$ e $\varepsilon(g) = 1$, $g \in G$.

Pela Definição 3.1.1, segue que a homologia do grupo G é a homologia do complexo

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G^{(S)} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial \otimes \text{id}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Como $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial, temos que $\partial \otimes \text{id}$ é a aplicação é nula. Ainda,

$$\mathbb{Z}G^{(S)} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \simeq \left(\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}G \right) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \simeq \bigoplus_{s \in S} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}$$

Assim, obtemos o complexo:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

Logo

$$\begin{cases} H_0(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \\ H_1(G, \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z} \\ H_i(G, \mathbb{Z}) \simeq 0 \text{ para } i \geq 2. \end{cases}$$

Exemplo 3.1.2 *Seja G o grupo cíclico infinito com gerador t .*

Do Exemplo 2.2.12 temos a $\mathbb{Z}G$ -resolução livre de $\mathbb{Z}$

$$0 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \text{ com } \partial_1 = t - 1. \quad (3.1)$$

Aplicando o funtor $- \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ à resolução (3.1), obtemos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\bar{\partial}_1} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow 0, \text{ com } \bar{\partial}_1 = \partial_1 \otimes \text{id}.$$

A partir dos isomorfismos:

$$\begin{array}{ccccc} M & \simeq & \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \xrightarrow{\bar{\partial}_1} & \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \simeq & M \\ m & \mapsto & 1 \otimes m & \mapsto & (t-1) \otimes m & \mapsto & (t-1) \cdot m \end{array}$$

podemos considerar

$$\begin{array}{ccc} \bar{\partial}_1 : M & \rightarrow & M \\ m & \mapsto & (t-1) \cdot m \end{array}$$

Portanto $H_*(G, M)$ é a homologia do complexo:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\partial_1} M \longrightarrow 0$$

Assim, $H_1(G, M) = \text{Ker } \partial_1 / \{0\} \simeq \text{Ker } \partial_1$ e como

$$\text{Ker } \partial_1 = \text{Ker}(t-1) = \{m \in M \mid (t-1) \cdot m = 0\} = \{m \in M \mid t \cdot m = m\} = M^G$$

temos

$$\begin{cases} H_0(G, M) \simeq M_G \\ H_1(G, M) \simeq M^G \\ H_i(G, M) \simeq 0 \text{ para } i \geq 2. \end{cases}$$

Note que $H_1(G, M) \simeq M^G \stackrel{\text{Prop. 4.2.1}}{\simeq} H^0(G, M)$.

Agora, aplicando o funtor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-, M)$ à resolução (3.1), obtemos o complexo

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta^0} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \longrightarrow 0.$$

Temos $\delta^0(f)(x) = (f \circ \partial_1)(x) = (f \circ (t-1))(x) = f((t-1) \cdot (x)) = (t-1)f(x)$, ou seja, δ^0 é a multiplicação por $(t-1)$.

Considerando ainda

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) & \xrightarrow{\sim} & M \\ f & \mapsto & f(1) \end{array}$$

segue que $H^*(G, M)$ é a cohomologia do complexo $0 \longrightarrow M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{0} 0$.

Como $H^1(G, M) = \text{Ker } \delta^1 / \text{Im } \delta^0 \simeq M / (t-1)M \simeq M_G$, temos portanto

$$\begin{cases} H^0(G, M) \simeq M^G \\ H^1(G, M) \simeq M_G \\ H^i(G, M) \simeq 0, \text{ para } i \geq 2. \end{cases}$$

Note que $H^1(G, M) \simeq M_G \stackrel{\text{Prop. 4.2.1}}{\simeq} H_0(G, M)$.

Exemplo 3.1.3 Seja G um grupo cíclico finito de ordem n com gerador t .

Vimos, pelo Exemplo 2.3.1, que

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é $\mathbb{Z}G$ -resolução projetiva de $\mathbb{Z}$, com $N = \sum_{i=0}^{n-1} t^i$.

Aplicando o funtor $-\otimes_{\mathbb{Z}G} M$ à resolução, obtemos o complexo:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow 0.$$

Como $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq M$, o complexo se reduz a

$$\cdots \longrightarrow M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{0} 0.$$

Portanto

$$H_i(G, M) \simeq \begin{cases} M_G & \text{se } i = 0 \\ \frac{\text{Ker}(t-1)}{\text{Im } N} \simeq \frac{M^G}{NM} & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \frac{\text{Ker } N}{\text{Im}(t-1)} \simeq \frac{\text{Ker } N}{(t-1)M} & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}$$

Aplicando o funtor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-, M)$ à resolução, obtemos o complexo

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta^0} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta^1} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta^2} \cdots$$

com $\delta^n(f)(x) := (f \circ \partial_{n+1})(x)$.

Utilizando o isomorfismo $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \simeq M$, temos o complexo

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} M \xrightarrow{\delta^0} M \xrightarrow{\delta^1} M \xrightarrow{\delta^2} \cdots$$

com $\delta^{2k} = t-1$ e $\delta^{2k+1} = N$, $k \geq 0$.

Logo

$$H^i(G, M) \simeq \begin{cases} M^G & \text{se } i = 0 \\ \frac{\text{Ker } N}{\text{Im}(t-1)} \simeq \frac{\text{Ker } N}{(t-1)M} & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \frac{\text{Ker}(t-1)}{\text{Im } N} \simeq \frac{M^G}{NM} & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}$$



Em particular, se $M = \mathbb{Z}$ (com G -ação trivial), como $(t-1) \cdot m = t \cdot m - m = 0$ e ainda $(1 + t + \dots + t^{n-1}) \cdot m = m + t \cdot m + \dots + t^{n-1} \cdot m = nm$, temos que $(t-1)$ é a função nula e N é a multiplicação por n .

Logo $\text{Ker}(t-1) \simeq \mathbb{Z}$, $\text{Im}(t-1) \simeq \{0\} \simeq \text{Ker } N$ e $\text{Im } N \simeq n\mathbb{Z}$.

Deste modo

$$H_i(G, \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z}_n & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}$$

$$H^i(G, \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \mathbb{Z}_n & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}$$

Proposição 3.1.2 *Seja G um grupo cíclico finito não trivial. Então $\mathbb{Z}$ não admite resolução projetiva sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento finito.*

Demonstração: Suponhamos que

$$F' : 0 \longrightarrow F'_n \longrightarrow F'_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F'_1 \longrightarrow F'_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

seja uma $\mathbb{Z}G$ -resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ de comprimento finito.

Logo $H_*(G, \mathbb{Z}) \simeq H_*(F' \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) \stackrel{\text{Prop. 1.3.5}}{\simeq} H_*((F' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z})_G) \simeq H_*(F'_G)$.

Agora $H_*(F'_G) = 0$, para $i > n$, o que contradiz o fato de termos (pelo Exemplo anterior) $H_*(G, \mathbb{Z})$ não são todos nulos, para $i > n$, e portanto, o resultado segue. ■

Corolário 3.1.1 *Se G tem torção, então $\mathbb{Z}$ não admite resolução projetiva sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento finito.*

Demonstração: Suponhamos que $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$ seja uma $\mathbb{Z}G$ -resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ de comprimento finito.

Seja x um elemento de torção de G e tomemos $H = \langle x \rangle$. O subgrupo H é cíclico finito. Ainda $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma $\mathbb{Z}G$ -resolução projetiva de $\mathbb{Z}$, pois pela Proposição 1.1.3, tem-se $\mathbb{Z}G$ um $\mathbb{Z}H$ -módulo livre e como F_k é $\mathbb{Z}G$ -projetivo, pela condição (1) do Lema 1.2.2, segue que $F_k \oplus Q_k = \bigoplus_{i \in I} (\mathbb{Z}G)_i = \bigoplus_{i \in I, j \in J} (\mathbb{Z}H)_{i,j}$, ou seja, F_k é $\mathbb{Z}H$ -projetivo.

Logo existe uma $\mathbb{Z}H$ -resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ de comprimento finito, com H um grupo cíclico finito, o que contraria o resultado obtido na Proposição anterior. ■

3.2 Os funtores $H_*(G, -)$ e $H^*(G, -)$

Seja $\mathcal{N}$ a categoria dos $\mathbf{Z}G$ -módulos (à esquerda).

Como $F \otimes_{\mathbf{Z}G} -$ e $\text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(F, -)$ são funtores covariantes em $\mathcal{N}$, temos que $H_*(G, -)$ e $H^*(G, -)$ também são funtores covariantes em $\mathcal{N}$.

Consideremos M, N $\mathbf{Z}G$ -módulos e $\varphi : M \rightarrow N$ um $\mathbf{Z}G$ -homomorfismo. Seja $\varepsilon : F \rightarrow \mathbf{Z}$ uma $\mathbf{Z}G$ -resolução projetiva de $\mathbf{Z}$. Então temos as **aplicações de cadeia**:

$$\begin{aligned} \varphi_{\#} : F \otimes_{\mathbf{Z}G} M &\rightarrow F \otimes_{\mathbf{Z}G} N \\ \alpha &\mapsto \varphi_{\#}(\alpha) := id \otimes \varphi(\alpha) \end{aligned}$$

e as **aplicações de cocadeia**:

$$\begin{aligned} \varphi^{\#} : \text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(F, M) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(F, N) \\ f &\mapsto \varphi^{\#}(f) := \varphi \circ f. \end{aligned}$$

Assim, em nível de homologia e cohomologia, temos os homomorfismos induzidos:

$$\begin{aligned} H_*(G, \varphi) : H_*(G, M) &\rightarrow H_*(G, N) \\ [x \otimes m] &\mapsto [\varphi_{\#}(x \otimes m)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^*(G, \varphi) : H^*(G, M) &\rightarrow H^*(G, N) \\ [f] &\mapsto [\varphi^{\#}(f)]. \end{aligned}$$

Proposição 3.2.1 *Seja $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \rightarrow 0$ uma seqüência exata de $\mathbf{Z}G$ -módulos. Então*

(1) Para todo inteiro n , existe uma aplicação natural $\partial_n : H_n(G, M'') \rightarrow H_{n-1}(G, M')$, tal que a seqüência:

$$\cdots \rightarrow H_1(G, M) \xrightarrow{j_1} H_1(G, M'') \xrightarrow{\partial_1} H_0(G, M') \xrightarrow{i_0} H_0(G, M) \xrightarrow{j_0} H_0(G, M'') \rightarrow 0$$

é exata, com as aplicações i_k e j_k induzidas em homologia, isto é,

$$i_k = H_k(G, i) : H_k(G, M') \rightarrow H_k(G, M)$$

$$j_k = H_k(G, j) : H_k(G, M) \rightarrow H_k(G, M'').$$

(2) Para todo inteiro n , existe uma aplicação natural $\delta^n : H^n(G, M'') \rightarrow H^{n+1}(G, M')$, tal que a seqüência:

$$0 \rightarrow H^0(G, M') \xrightarrow{i^0} H^0(G, M) \xrightarrow{j^0} H^0(G, M'') \xrightarrow{\delta^0} H^1(G, M') \xrightarrow{i^1} H^1(G, M) \xrightarrow{j^1} \dots$$

é exata, com as aplicações i^k e j^k induzidas em cohomologia, isto é,

$$i^k = H^k(G, i) : H^k(G, M') \rightarrow H^k(G, M)$$

$$j^k = H^k(G, j) : H^k(G, M) \rightarrow H^k(G, M'').$$

Demonstração: Seja

$$F : \dots \rightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} Z \rightarrow 0$$

uma ZG -resolução projetiva de Z .

(1) Como cada F_n é ZG -projetivo, segue que

$$0 \rightarrow F_n \otimes_{ZG} M' \xrightarrow{id \otimes i} F_n \otimes_{ZG} M \xrightarrow{id \otimes j} F_n \otimes_{ZG} M'' \rightarrow 0$$

é exata para todo n (por [7], I.9.E). Assim, temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \rightarrow & F_n \otimes_{ZG} M' & \xrightarrow{id \otimes i} & F_n \otimes_{ZG} M & \xrightarrow{id \otimes j} & F_n \otimes_{ZG} M'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & F_{n-1} \otimes_{ZG} M' & \xrightarrow{id \otimes i} & F_{n-1} \otimes_{ZG} M & \xrightarrow{id \otimes j} & F_{n-1} \otimes_{ZG} M'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

com cada linha exata, o que nos fornece a seqüência exata de complexos de cadeias:

$$0 \rightarrow F \otimes_{ZG} M' \rightarrow F \otimes_{ZG} M \rightarrow F \otimes_{ZG} M'' \rightarrow 0.$$

Assim (por [2], I.0.4) segue a seqüência exata longa em homologia:

$$\begin{aligned} \dots & \rightarrow H_1(F \otimes_{ZG} M') \xrightarrow{i_1} H_1(F \otimes_{ZG} M) \xrightarrow{j_1} H_1(F \otimes_{ZG} M'') \xrightarrow{\partial_1} H_0(F \otimes_{ZG} M') \xrightarrow{i_0} \\ & \rightarrow H_0(F \otimes_{ZG} M) \xrightarrow{j_0} H_0(F \otimes_{ZG} M'') \rightarrow 0 \end{aligned}$$

que nos dá a seqüência exata longa desejada:

$$\cdots \longrightarrow H_1(G, M) \xrightarrow{j_1} H_1(G, M'') \xrightarrow{\partial_1} H_0(G, M') \xrightarrow{i_0} H_0(G, M) \xrightarrow{j_0} H_0(G, M'') \longrightarrow 0.$$

(2) Analogamente, como cada F_n é $\mathbb{Z}G$ -projetivo, e como

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_n, M') \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_n, M) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_n, M'') \longrightarrow 0$$

é exata, para todo n , (por [7], I.9.4(e)) e temos

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_n, M') & \xrightarrow{\delta_i} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_n, M) & \xrightarrow{\delta_j} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_{n-1}, M'') \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_{n-1}, M') & \xrightarrow{\delta_i} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_{n-1}, M) & \xrightarrow{\delta_j} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_{n-1}, M'') \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

com cada linha exata.

Assim temos a seqüência exata curta de complexos de cocadeias:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, M') \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, M) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, M'') \longrightarrow 0$$

que nos dá a seqüência exata longa em cohomologia:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, M')) \xrightarrow{i^0} H^0(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, M)) \xrightarrow{j^0} H^0(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, M'')) \xrightarrow{\delta^0} \\ &\longrightarrow H^1(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, M')) \xrightarrow{i^1} H^1(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, M)) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

ou seja, a seqüência exata longa desejada:

$$0 \longrightarrow H^0(G, M') \xrightarrow{i^0} H^0(G, M) \xrightarrow{j^0} H^0(G, M'') \xrightarrow{\delta^0} H_1(G, M') \xrightarrow{i^1} H^1(G, M) \xrightarrow{j^1} \cdots$$

■

3.3 Interpretação Topológica para a (Co)homologia

Agora vamos relacionar a (co)homologia de um grupo G com a (co)homologia do espaço $K(G, 1)$, definido anteriormente. Para tanto denotamos $C_*(-, \mathbb{Z})$ e $C^*(-, \mathbb{Z})$ respectivamente por $C_*(-)$ e $C^*(-)$.



Proposição 3.3.1 *Sejam X um G -complexo livre e Y o complexo de órbitas X/G . Então $C_*(Y) \simeq C_*(X)_G$.*

Demonstração: Dada a projeção canônica

$$\begin{aligned} p: X &\rightarrow X/G \\ x &\mapsto p(x) := G(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\} \end{aligned}$$

temos bem definida, em termos de complexo de cadeias, a aplicação induzida

$$\begin{aligned} p_{\#}: C_n(X) &\rightarrow C_n(X/G) \\ \sum a_i \sigma_i &\mapsto \sum a_i G(\sigma_i) \end{aligned}$$

com σ_i as n -células em X .

Seja ainda

$$\begin{aligned} \theta: C_n(X) &\rightarrow C_n(X)_G \simeq C_n(X)/A \\ \alpha &\mapsto \bar{\alpha} = \alpha + A \end{aligned}$$

com $A = \langle g \cdot \alpha - \alpha \mid g \in G, \alpha \in C_n(X) \rangle$.

Como $p_{\#}(g \cdot \sigma_i - \sigma_i) = p_{\#}(g \cdot \sigma_i) - p_{\#}(\sigma_i) = G(g \cdot \sigma_i) - G(\sigma_i) = G(\sigma_i) - G(\sigma_i) = 0$, para toda n -célula σ_i e para todo $g \in G$, temos que $A \subset \text{Ker } p_{\#}$. Assim, temos bem definido o homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \varphi: C_n(X)_G &\rightarrow C_n(X/G) \\ \bar{\alpha} &\mapsto \varphi(\bar{\alpha}) = \varphi(\overline{\sum a_i \sigma_i}) = p_{\#}(\alpha) = \sum a_i G(\sigma_i). \end{aligned}$$

Agora, φ é injetivo.

De fato: Se $\varphi(\bar{\alpha}) = 0$ então $\sum a_i G(\sigma_i) = 0$ e assim $a_i = 0$. Daí, $\sum a_i \sigma_i = 0$. Portanto $\overline{\sum a_i \sigma_i} = 0$.

φ é também sobrejetivo.

De fato: Dado $x = \sum a_i G(\sigma_i) \in C_n(X/G)$, sempre existe $y = \sum a_i \bar{\sigma}_i \in C_n(X)_G$ tal que $\varphi(y) = x$.

Logo φ é isomorfismo. ■

O resultado a seguir relaciona a homologia de um grupo G com a homologia do $K(G, 1)$ -complexo.



Teorema 3.3.1 *Sejam G um grupo e X um $K(G, 1)$ -complexo associado a G . Então:*

$$(1) H_*(G) \simeq H_*(X).$$

$$(2) H^*(G) \simeq H^*(X).$$

Demonstração: Inicialmente consideremos X um $K(G, 1)$ -complexo com recobrimento universal $(\tilde{X}, p)$. Pela Proposição 2.2.2, o complexo celular aumentado do recobrimento universal $(\tilde{X}, p)$ de X , dado por $\varepsilon : C_*(\tilde{X}) \rightarrow \mathbf{Z}$, é uma $\mathbf{Z}G$ -resolução livre de $\mathbf{Z}$. Assim temos:

(1) Como $\tilde{X}$ é um G -complexo livre, da Proposição 2.1.8, tem-se o complexo de órbitas $\tilde{X}/G \simeq X$. Ainda, da Proposição anterior, segue que $C_*(\tilde{X})_G \simeq C_*(X)$.

$$\text{Logo } H_*(G) \simeq H_*(C_*(\tilde{X})_G) \simeq H_*(C_*(X)) \simeq H_*(X).$$

(2) Temos que $\text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(C_*(\tilde{X}), \mathbf{Z}) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(C_*(\tilde{X})_G, \mathbf{Z})$, pois dadas as aplicações:

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(C_*(\tilde{X}), \mathbf{Z}) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(C_*(\tilde{X})_G, \mathbf{Z}) \\ f &\mapsto \varphi(f), \text{ com } \varphi(f)(1 \otimes u) = f(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(C_*(X)_G, \mathbf{Z}) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(C_*(X), \mathbf{Z}) \\ g &\mapsto \psi(g), \text{ com } \psi(g)(u) = g(1 \otimes u) \end{aligned}$$

temos que $\varphi^{-1} = \psi$.

Portanto φ é isomorfismo.

Assim, temos que

$$\begin{aligned} H^*(G) &\stackrel{\text{not.}}{=} H^*(G, \mathbf{Z}) = H^*(\text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(C_*(\tilde{X}), \mathbf{Z})) \stackrel{\text{Prop.1.3.5}}{\simeq} H^*(\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(C_*(\tilde{X})_G, \mathbf{Z})) \\ &\stackrel{\text{Prop.3.3.1}}{\simeq} H^*(\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(C_*(\tilde{X}/G), \mathbf{Z})) \simeq H^*(\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(C_*(X), \mathbf{Z})) \\ &= H^*(X, \mathbf{Z}) \stackrel{\text{not.}}{=} H^*(X). \end{aligned}$$

$$\text{Logo } H^*(G) \simeq H^*(X). \quad \blacksquare$$

Exemplo 3.3.1 *Seja o bouquet de círculos $X = \bigvee_{s \in S} S_s^1$ indexado por um conjunto S .*

Vimos, pelo Exemplo 2.2.8, que X é um $K(F(S), 1)$ -complexo, com $F(S)$ o grupo livre gerado por S .

Assim, pela Proposição anterior e do Exemplo 3.1.1 temos

$$H_i(F(S)) \simeq H_i(G) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z} & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{se } i > 1. \end{cases}$$

Exemplo 3.3.2 *Seja X a soma conexa de n toros.*

Do Exemplo 2.2.9, X é um $K(G, 1)$ -complexo.

Ainda, $G = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g; \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle$.

Daí, pela Proposição anterior segue que

$$H_i(G) \simeq H_i(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} & (2g \text{ vezes}) \text{ se } i = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } i = 2 \\ 0 & \text{se } i \geq 3. \end{cases}$$

Exemplo 3.3.3 *Sejam $X = T^n \simeq S^1 \times \dots \times S^1$ (toro n -dimensional) e $G \simeq \mathbb{Z}^{(n)} \simeq \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$.*

Temos T^n um $K(G, 1)$ -complexo, pelo Exemplo 2.2.7.

Logo

$$H_i(G) \simeq H_i(T^n) \simeq \mathbb{Z}^{k_i}, \text{ com } k_i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Proposição 3.3.2 *Se G tem torção, então não existe um $K(G, 1)$ -complexo X de dimensão finita. Em particular, X não pode ser variedade.*

Demonstração: Suponhamos X de dimensão finita. Sejam t um elemento de torção de G e $H = \langle t \rangle$ o grupo cíclico finito de ordem n .

Tomemos, pela Proposição 2.1.9, $(\tilde{X}_H, p)$ o recobrimento de X associado a H .

Agora, se $(\tilde{X}_H, p)$ é um recobrimento de X , pela Proposição 2.1.2 e por [5], 7.12, temos $p_* : \pi_i(X_H) \rightarrow \pi_i(X)$ um monomorfismo, se $i = 1$, e isomorfismo, se $i > 1$.

Daí, $\pi_i(X_H) \simeq \pi_i(X) = 0$, para $i > 1$.

Portanto, pela condição (3)'' da Observação 2.2.2, temos X_H um $K(H, 1)$ -complexo.

Além disso, X_H tem dimensão finita.



Assim $H_i(K(H, 1)) \simeq H_i(H) = 0$, para $i > n$, e pelo Exemplo 3.1.2 temos um absurdo.

Logo, não existe $K(G, 1)$ -complexo de dimensão finita.

Agora, se $K(G, 1) = M^n$ (variedade de dimensão n), temos $K(G, 1)$ um complexo de dimensão finita. Portanto M^n não pode ser variedade. ■

Seja X um conjunto que tem estrutura de grupo e estrutura de espaço topológico. O exemplo a seguir mostra que a homologia do espaço X não é, necessariamente, a mesma do grupo X .

Exemplo 3.3.4 *Seja $X = \mathbb{R}$. Podemos ver $\mathbb{R}$ como um CW-complexo de dimensão 1 e também como um grupo $(\mathbb{R}, +)$. Agora:*

- (i) *Para $\mathbb{R}$ um espaço tem-se $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Z}) \simeq \pi_1(\mathbb{R})_{ab} \simeq \{0\}_{ab} = \{0\}$.*
- (ii) *Para $\mathbb{R}$ um grupo tem-se $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Z}) \simeq H_1(K(\mathbb{R}, 1), \mathbb{Z}) \simeq \pi_1(K(\mathbb{R}, 1))_{ab} \simeq \mathbb{R}_{ab} = \mathbb{R}$.*

Nosso objetivo agora é dar uma interpretação topológica para a (co)homologia de um grupo G que estende o Teorema 3.3.1. Para isto necessitamos do Lema a seguir.

Lema 3.3.1 *Seja A um grupo abeliano com G -ação trivial. Então*

- (1) $F \otimes_{ZG} A \simeq F_G \otimes_Z A$.
- (2) $\text{Hom}_{ZG}(F, A) \simeq \text{Hom}_Z(F_G, A)$.

Demonstração:

(1) Definimos $f : F \times A \rightarrow F_G \otimes_Z A$ tal que $f(x, a) := \bar{x} \otimes a$. Como f é biaditiva, pela Propriedade Universal do Produto Tensorial ([12], V.1.1), existe um homomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi : F \otimes_{ZG} A &\rightarrow F_G \otimes_Z A \\ x \otimes a &\mapsto \varphi(x \otimes a) := \bar{x} \otimes a. \end{aligned}$$

Agora, seja $g : F_G \times A \rightarrow F \otimes_{ZG} A$ com $g(\bar{x}, a) := x \otimes a$. Do mesmo modo, temos g bem definida e biaditiva. Novamente por [12], V.1.1, segue o homomorfismo:

$$\begin{aligned} \psi : F_G \otimes_Z A &\rightarrow F \otimes_{ZG} A \\ \bar{x} \otimes a &\mapsto \psi(\bar{x} \otimes a) = x \otimes a. \end{aligned}$$

Logo, as aplicações φ e ψ são inversas uma da outra e $F \otimes_{\mathbb{Z}G} A \simeq F_G \otimes_{\mathbb{Z}} A$.

(2) Podemos definir as aplicações:

$$\begin{aligned} \theta : \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, A) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_G, A) \\ f &\mapsto \theta(f), \text{ com } \theta(f)(\bar{x}) = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_G, A) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, A) \\ g &\mapsto \rho(g), \text{ com } \rho(g)(x) = g(\bar{x}). \end{aligned}$$

as quais são homomorfismos, com $\theta = \rho^{-1}$.

Portanto $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, A) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_G, A)$. ■

Teorema 3.3.2 *Sejam G um grupo e M um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial. Então*

$$(1) H_*(G, M) \simeq H_*(K(G, 1), M)$$

$$(2) H^*(G, M) \simeq H^*(K(G, 1), M).$$

Demonstração: Sejam $X = K(G, 1)$ e $(\tilde{X}, p)$ o recobrimento universal de X . Temos que $X \simeq \tilde{X}/G$ (por [10], 5.5.11). Assim

$$\begin{aligned} (1) H_*(G, M) &= H_*(C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}G} M) \stackrel{\text{Lema 3.3.1(1)}}{\simeq} H_*(C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z})_G \otimes_{\mathbb{Z}} M) \\ &\stackrel{\text{not.}}{=} H_*(C_*(\tilde{X})_G \otimes_{\mathbb{Z}} M) \stackrel{\text{Prop. 3.3.1}}{\simeq} H_*(C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} M) \\ &= H_*(X, M). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) H^*(G, M) &= H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}), M)) \stackrel{\text{Lema 3.3.1(2)}}{\simeq} H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z})_G, M)) \\ &\stackrel{\text{not.}}{=} H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(\tilde{X})_G, M)) \stackrel{\text{Prop. 3.3.1}}{\simeq} H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X), M)) \\ &= H^*(X, M). \end{aligned}$$

Observação 3.3.1 *Seja M um $\mathbb{Z}G$ -módulo não trivial. Pode-se dar uma interpretação topológica para $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$ da seguinte forma:*

- $H_*(G, M) \simeq H_*(K(G, 1), \mathcal{M})$
- $H^*(G, M) \simeq H^*(K(G, 1), \mathcal{M})$

com $\mathcal{M}$ o sistema de coeficientes locais associado ao $\mathbb{Z}G$ -módulo M . Aqui não nos deteremos neste resultado. Para maiores detalhes ver [4].

3.4 Os Grupos de (Co)homologia de nível 1

Nesta seção vemos como determinar de maneira simples, os grupos $H_1(G, M)$ e $H^1(G, M)$.

Proposição 3.4.1 *Para todo grupo G tem-se $H_1(G, \mathbb{Z}) \simeq G/[G, G] = G_{ab}$.*

Demonstração: $H_1(G, \mathbb{Z}) \simeq H_1(K(G, 1), \mathbb{Z}) \simeq \pi_1(K(G, 1))_{ab} = G_{ab}$. ■

Corolário 3.4.1 *Seja M um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial. Então $H_1(G, M) \simeq G_{ab} \otimes M$.*

Demonstração: Por [2], pág.60, temos

$$H_1(G, M) \simeq H_1(G, \mathbb{Z}) \otimes M \oplus \text{Tor}(H_0(G, \mathbb{Z}), M).$$

Ainda, pela Proposição 4.2.1, $H_0(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_G$.

Temos $\mathbb{Z}_G = \mathbb{Z}$ se a G -ação é trivial e pela Proposição anterior, $H_1(G, \mathbb{Z}) \simeq G_{ab}$.

Assim, $H_1(G, M) \simeq G_{ab} \otimes M \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}, M)$.

Por outro lado, segue de [20], pág.80, que $\text{Tor}(\mathbb{Z}, M) = 0$ e obtemos o resultado desejado. ■

Lema 3.4.1 $\text{Hom}(G, M) \simeq \text{Hom}(G_{ab}, M)$.

Demonstração: Seja $\psi : \text{Hom}(G, M) \rightarrow \text{Hom}(G_{ab}, M)$ tal que $\psi(f)(\bar{x}) := f(x)$, com $x \in G$ e $\bar{x}$ denotando um elemento de G_{ab} . Temos ψ bem definida sendo um homomorfismo de grupos. Agora, dada a aplicação $\theta : \text{Hom}(G_{ab}, M) \rightarrow \text{Hom}(G, M)$, com $\theta(g) := g \circ p$ e $p : G \rightarrow G_{ab}$ a projeção canônica, temos que θ está bem definida.

Ainda, as aplicações ψ e θ são tais que uma é inversa da outra. Portanto ψ é isomorfismo. ■

Observação 3.4.1 *Seja G um grupo. Sempre podemos tomar a resolução projetiva $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$ como sendo a resolução padrão:*

$$\cdots \rightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

com cada F_n o ZG -módulo livre gerado por $[g_1 | \dots | g_n]$ e

$$\partial_n([g_1 | \dots | g_n]) = g_1[g_2 | \dots | g_n] + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [g_1 | \dots | g_i g_{i+1} | \dots | g_n] + (-1)^n ([g_1 | \dots | g_{n-1}]).$$

Denotamos por $C_*(G, M)$ e $C^*(G, M)$ respectivamente os complexos $F \otimes_{ZG} M$ e $\text{Hom}_{ZG}(F, M)$.

Ainda, um elemento de $C_n(G, M)$ pode ser unicamente expresso como uma soma finita de elementos da forma $m \otimes [g_1 | \dots | g_n]$ (consideramos em $M \otimes_{ZG} F_n$, a fim de facilitar a notação).

O operador bordo $\bar{\partial}_n : C_n(G, M) \rightarrow C_{n-1}(G, M)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_n(m \otimes [g_1 | \dots | g_n]) &= m \otimes \partial_n[g_1 | \dots | g_n] \\ &= m \otimes g_1[g_2 | \dots | g_n] + m \otimes \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [g_1 | \dots | g_i g_{i+1} | g_{i+2} | \dots | g_n] \\ &\quad + (-1)^n m \otimes [g_1 | \dots | g_{n-1}]. \end{aligned}$$

Agora, um elemento $f \in C^n(G, M)$ é um homomorfismo:

$$\begin{aligned} f : F_n &\rightarrow M \\ [g_1 | \dots | g_n] &\mapsto f([g_1 | \dots | g_n]). \end{aligned}$$

Note que identificando $(g_1, \dots, g_n)$ com $[g_1 | \dots | g_n]$, f passa a ser vista como uma função de n variáveis $f : G^n \rightarrow M$. Em particular, para $n = 0$, tem-se G^0 um conjunto com um elemento (por exemplo, $[]$), de forma que $C^0(G, M) \simeq M$.

O operador cobordo $\delta^{n-1} : C^{n-1}(G, M) \rightarrow C^n(G, M)$ é dado por:

$$\begin{aligned} (\delta^{n-1}(f))(g_1, \dots, g_n) &:= f(\partial_n(g_1, \dots, g_n)) \\ &= g_1 f(g_2, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) \\ &\quad + (-1)^n f(g_1, \dots, g_{n-1}). \end{aligned}$$

Como exemplos seguem:

- $n = 1$: $\delta^0(f)(g_1) = f(\partial_1(g_1)) = g_1 f([]) - f([])$.
- $n = 2$: $\delta^1(f)(g_1, g_2) = g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1)$.

Definição 3.4.1 *Sejam G um grupo e M um ZG -módulo. O grupo das derivações e o subgrupo das derivações principais de G em M são dados respectivamente por:*

$$D = \{d : G \rightarrow M \mid d(gh) = d(g) + gd(h)\}$$

$$D_p = \{d \in D \mid d(g) = g \cdot m - m, m \in M \text{ fixo}\}.$$

Proposição 3.4.2 *Sejam G um grupo e M um ZG -módulo. Então $H^1(G, M) \simeq D/D_p$. Em particular, se a G -ação em M é trivial, tem-se $H^1(G, M) \simeq \text{Hom}(H_1(G), M)$.*

Demonstração: Dado o complexo de cocadeias $C^*(G, M)$

$$0 \longrightarrow C^0(G, M) \xrightarrow{\delta^0} C^1(G, M) \xrightarrow{\delta^1} C^2(G, M) \longrightarrow \dots$$

temos $H^1(G, M) = \frac{\text{Ker } \delta^1}{\text{Im } \delta^0}$ e ainda:

- $\text{Ker } \delta^1 = D$.

Seja $f \in C^1(G, M)$. Então $f : G \rightarrow M$ e $\delta^1(f) : G^2 \rightarrow M$, com

$$\delta^1(f)(g, h) = gf(h) - f(gh) + f(g).$$

Daí,

$$f \in \text{Ker } \delta^1 \Leftrightarrow \delta^1(f) = 0 \Leftrightarrow \delta^1(f)(g, h) = 0 \Leftrightarrow f(gh) = f(g) + gf(h) \Leftrightarrow f \in D.$$

Logo $\text{Ker } \delta^1 = D$.

- $\text{Im } \delta^0 = D_p$.

Agora $v \in \text{Im } \delta^0$ e portanto, existe $f : G^0 \rightarrow M$ tal que $v = \delta^0(f)$.

$$\text{Daí, } v(g) = \delta^0(f)(g) = gf([]) - f([]).$$

Como $f([]) \in M$, temos $f([]) = m \in M$. Assim, $v(g) = g \cdot m - m$ e $v \in D_p$.

Reciprocamente, para $v \in D_p$, temos $v(g) = g \cdot m - m = \delta^0(f)(g)$, com $f([]) := m$. Portanto $v = \delta^0(f) \in \text{Im } \delta^0$ e $\text{Im } \delta^0 = D_p$.

Logo $H^1(G, M) \simeq D/D_p$.

Agora, se G atua trivialmente em M , temos

$$\begin{aligned} D &= \{d : G \rightarrow M; d(gh) = d(g) + gd(h)\} \\ &= \{d : G \rightarrow M; d(gh) = d(g) + d(h)\} \\ &= \text{Hom}(G, M) \end{aligned}$$

$$D_p = \{d \in D; d(g) = g \cdot m - m\} = \{0\}.$$

Deste modo

$$H^1(G, M) = \text{Hom}(G, M) \stackrel{\text{Lema 3.4.1}}{\simeq} \text{Hom}(G_{ab}, M) \stackrel{\text{Prop. 3.4.1}}{\simeq} \text{Hom}(H_1(G), M).$$

■



Capítulo 4

Os Teoremas de Hopf

Este capítulo é dedicado à parte principal deste trabalho que consiste do estudo de dois teoremas devidos à Hopf ([6]) apresentados em [2]. Para tanto, relembramos alguns resultados, devidos a Hurewicz ([8]), necessários aos nossos propósitos.

4.1 Relação entre $\pi_n(X)$ e $H_n(X)$, para $n \geq 1$

Seja X um espaço topológico e denotemos por $\pi_n(X, x_0)$ o n -ésimo grupo de homotopia de X , para $n \geq 1$. Os elementos de $\pi_n(X, x_0)$ são classes de homotopia $\bar{f}$ constituindo de aplicações contínuas $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$, com I^n e ∂I^n denotando respectivamente o n -cubo e a fronteira de I^n e assim temos:

$$\pi_n(X, x_0) = \{\bar{f} \mid f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0) \text{ é contínua}\}.$$

Maiores detalhes sobre estes grupos são dados em [5] e [19].

Podemos considerar X conexo por caminhos.

Em particular, se $n = 1$ temos $\pi_1(X)$ o grupo fundamental de X , o qual relacionamos com $H_1(X)$ a partir da aplicação contínua $f : I \rightarrow X$ que pode ser vista como um caminho ou como um 1-simplexo singular em X .

Se f é um laço com $f(0) = f(1)$, seu 1-simplexo singular é um ciclo, pois $\partial f = f(1) - f(0) = 0$. Ainda, vendo laços como 1-ciclos, obtemos uma aplicação

$$\begin{array}{ccc} h : \pi_1(X) & \rightarrow & H_1(X) \\ \bar{f} & \mapsto & [f] \end{array} \quad (4.1)$$



com $[f]$ denotando a classe de homologia de f .

Temos então o seguinte resultado:

Teorema 4.1.1 *A aplicação definida anteriormente é um homomorfismo. Se X é conexo por caminhos então h é sobrejetiva e seu kernel é o subgrupo comutador de $\pi_1(X)$ de modo que h induz um isomorfismo*

$$\bar{h} : \pi_1(X)_{ab} \rightarrow H_1(X).$$

Demonstração: [5], XII.1. ■

De um modo mais geral podemos definir a aplicação h , para $n > 1$.

Para tanto, seja $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ tal que $\bar{f} \in \pi_n(X)$. Assim, temos induzido em homologia um homomorfismo

$$f_* : H_n(I^n, \partial I^n) \rightarrow H_n(X, \{x_0\}).$$

Como $H_n(I^n, \partial I^n) \simeq \mathbb{Z}$ ([19], pág.387) e $H_n(X, \{x_0\}) \simeq H_n(X)$ ([5], 14.3), segue que a aplicação f_* associa um gerador fixo $\alpha \in H_n(I^n, \partial I^n)$ a um elemento $f_*(\alpha) \in H_n(X)$ e definimos o homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} h : \pi_n(X) & \rightarrow & H_n(X) \\ \bar{f} & \mapsto & f_*(\alpha) \end{array}$$

o qual é dito **homomorfismo de Hurewicz**.

Temos portanto, o seguinte teorema:

Teorema 4.1.2 *Seja X um espaço topológico conexo por caminhos com $\pi_i(X) = 0$, para $i < n$ ($n \geq 2$). Então $H_i(X) = 0$, para $0 < i < n$, e o homomorfismo de Hurewicz*

$$h : \pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$$

é um isomorfismo.

Demonstração: [19], VII.5.5. ■



Observações 4.1.1

(a) A definição da aplicação anterior para $n = 1$ é análoga à dada em (4.1). Entretanto, esta última é mais usual neste caso.

(b) Para $n \geq 2$ o homomorfismo de Hurewicz é natural no seguinte sentido: uma aplicação contínua $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, entre espaços topológicos conexos por caminhos, induz um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\tilde{X}) & \xrightarrow{h} & H_n(\tilde{X}) \\ \downarrow \tilde{\varphi}_* & & \downarrow \varphi_* \\ \pi_n(X) & \xrightarrow{h} & H_n(X) \end{array}$$

visto que, para $\bar{f} \in \pi_n(X)$, com $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$, tem-se $h(f) = f_*(\alpha)$, sendo α um gerador de $H_n(I^n, \partial I^n) \simeq \mathbb{Z}$.

Daí,

$$(\varphi_* \circ h)(\bar{f}) = \varphi_*(h(\bar{f})) = \varphi_*(f_*(\alpha))$$

$$(h \circ \tilde{\varphi}_*)(\bar{f}) = h(\overline{\varphi \circ f}) = (\varphi \circ f)_*(\alpha) = \varphi_*(f_*(\alpha))$$

Portanto $\varphi_* \circ h = h \circ \tilde{\varphi}_*$.

4.2 As Fórmulas de Hopf

Sejam G um grupo e n um inteiro. O lema a seguir nos permite calcular $H_i(G)$, com $i \leq n + 1$, a partir de uma resolução projetiva parcial de comprimento n .

Lema 4.2.1 *Seja $F : F_n \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ uma seqüência exata de $\mathbb{Z}G$ -módulos, com cada F_i projetivo. Então $H_i(G) \simeq H_i(F_G)$, para $i < n$, e existe uma seqüência exata*

$$0 \rightarrow H_{n+1}(G) \rightarrow (H_n(F))_G \rightarrow H_n(F_G) \rightarrow H_n(G) \rightarrow 0.$$

Demonstração: Dada a seqüência

$$F : F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (4.2)$$

podemos construir uma $\mathbb{Z}G$ -resolução de $\mathbb{Z}$ como segue:

Seja F'_{n+1} o ZG -módulo livre gerado por $\text{Ker } \partial_n \stackrel{\text{not.}}{=} H_n(F)$ e considere o homomorfismo sobrejetivo

$$\psi : F'_{n+1} \rightarrow H_n(F)$$

dado por $\psi(x) = x$, para $x \in H_n(F)$, e estendido por linearidade para F'_{n+1} .

Repetindo-se este processo obtemos os ZG -módulos livres F'_{n+2} , F'_{n+3} e assim por diante.

Considerando i a aplicação inclusão temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{Ker } \partial'_{n+1} & & H_n(F) & & \\ & \nearrow \psi' & \downarrow i & \nearrow \psi & \downarrow i & & \\ F^+ : \dots & \xrightarrow{\partial'_{n+2}} & F'_{n+2} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & F'_{n+1} & \xrightarrow{\partial_n} & \dots \rightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} Z \rightarrow 0 \end{array} \quad (4.3)$$

com $\text{Im } \partial'_{n+1} = \text{Im } i \circ \psi = \text{Im } \psi = \text{Ker } \partial_n = H_n(F)$.

Analogamente, temos $\text{Im } \partial'_{i+1} = \text{Ker } \partial'_i$, para $i \geq n+1$.

Portanto F^+ é uma ZG -resolução projetiva de Z .

Agora a seqüência (4.2) pode ser vista como um complexo de cadeias

$$F : \dots \rightarrow 0 \rightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} Z \rightarrow 0$$

e aplicando a F e F^+ o funtor $Z \otimes_{ZG} -$ obtemos, respectivamente, os complexos de cadeias:

$$\begin{array}{ccccccc} F_G : \dots & \rightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & F_{nG} & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} & \dots \rightarrow F_{0G} \rightarrow 0 \\ F_G^+ : \dots & \rightarrow & F'_{n+1G} & \xrightarrow{\bar{\partial}'_{n+1}} & F_{nG} & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} & \dots \rightarrow F_{0G} \rightarrow 0 \end{array}$$

Seja agora $\bar{F}$ o complexo quociente F_G^+/F_G , com operador bordo dado por

$$d_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \leq n+1 \\ \bar{\partial}'_k & \text{se } k > n+1 \end{cases}$$

Temos então o seguinte diagrama comutativo, cujas colunas são exatas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 F_G : \cdots \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & F_{nG} & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} \cdots \longrightarrow & F_{0G} & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow id_n & & \downarrow id_0 & \\
 F_G^+ : \cdots \longrightarrow & F'_{n+1G} & \xrightarrow{\bar{\partial}'_{n+1}} & F_{nG} & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} \cdots \longrightarrow & F_{0G} & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_0 & \\
 \bar{F} : \cdots \longrightarrow & F'_{n+1G} & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} \cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array} \quad (4.4)$$

do qual segue a seqüência exata de complexos de cadeias

$$0 \longrightarrow F_G \longrightarrow F_G^+ \longrightarrow \bar{F} \longrightarrow 0. \quad (4.5)$$

Por [2], I.04, temos a seqüência exata longa de homologia associada a (4.5) dada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \cdots \longrightarrow H_{n+1}(\bar{F}) \xrightarrow{\Delta} H_n(F_G) \longrightarrow H_n(F_G^+) \longrightarrow H_n(\bar{F}) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(F_G) \longrightarrow H_{n-1}(F_G^+) \longrightarrow \\
 \longrightarrow H_{n-1}(\bar{F}) \longrightarrow \cdots
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Além disso,

$$H_n(\bar{F}) = \frac{\ker d_n}{\text{Im } d_{n+1}} \simeq 0 \quad \text{e} \quad H_{n-1}(\bar{F}) = \frac{\ker d_{n-1}}{\text{Im } d_n} \simeq 0 \quad (4.7)$$

Temos $H_{n-1}(F_G) \simeq H_{n-1}(F_G^+)$ e como $H_{n-1}(F_G^+) \simeq H_{n-1}(G)$ (pela Observação 3.1.1(b)), segue que $H_{n-1}(F_G) \simeq H_{n-1}(G)$.

Além disso, na seqüência

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots \longrightarrow & H_i(\bar{F}) & \longrightarrow & H_{i-1}(F_G) & \longrightarrow & H_{i-1}(F_G^+) & \longrightarrow H_{i-1}(\bar{F}) \cdots \\
 & \parallel & & & & & \parallel \\
 & 0 & & & & & 0
 \end{array}$$

temos $H_i(\bar{F}) \simeq 0$, para $i \leq n$.

Assim, $H_{i-1}(F_G) \simeq H_{i-1}(F_G^+) \simeq H_{i-1}(G)$, para $i \leq n$, ou equivalentemente, para $i-1 \leq n-1$.

Considerando (4.7) e que $H_{n+1}(F_G) = \frac{\text{Ker } \overline{\partial_{n+1}}}{\text{Im } \overline{\partial_{n+2}}} \simeq 0$, a seqüência (4.6) será

$$0 \longrightarrow H_{n+1}(F_G^+) \longrightarrow H_{n+1}(\overline{F}) \xrightarrow{\Delta} H_n(F_G) \longrightarrow H_n(F_G^+) \longrightarrow 0$$

Ainda, de (4.3) obtemos a seqüência exata

$$F'_{n+2} \xrightarrow{\partial'_{n+2}} F'_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} \text{Im } \partial'_{n+1} = \text{ker } \partial_n = H_n(F) \longrightarrow 0$$

a partir da qual, aplicando o funtor $\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}G} -$, segue a seqüência exata:

$$F'_{n+2G} \xrightarrow{\overline{\partial'_{n+2}}} F'_{n+1G} \xrightarrow{\overline{\partial'_{n+1}}} H_n(F)_G \longrightarrow 0. \quad (4.8)$$

Daí,

$$H_{n+1}(\overline{F}) \simeq \frac{\text{Ker } \overline{\partial_{n+1}}}{\text{Im } \overline{\partial'_{n+2}}} \stackrel{(4.4)}{\simeq} \frac{F'_{n+1G}}{\text{Im } \overline{\partial'_{n+2}}} \stackrel{(4.8)}{\simeq} \frac{F'_{n+1G}}{\text{ker } \overline{\partial'_{n+1}}} \stackrel{\text{Teo Hom}}{\simeq} H_n(F)_G.$$

Logo, compondo a aplicação Δ com tal isomorfismo obtemos:

$$0 \longrightarrow H_{n+1}(G) \longrightarrow (H_n(F))_G \xrightarrow{\overline{\Delta}} H_n(F_G) \longrightarrow H_n(G) \longrightarrow 0$$

■

Corolário 4.2.1 *Seja K uma $\mathbf{Z}G$ -resolução projetiva de $\mathbf{Z}$. Se F é uma $\mathbf{Z}G$ -resolução projetiva parcial de $\mathbf{Z}$ de comprimento n , então*

$$H_i(F_G) \simeq H_i(K_G), \text{ para } i < n.$$

Demonstração: Como F^+ e K são $\mathbf{Z}G$ -resoluções projetivas de $\mathbf{Z}$ segue que existe $f = (f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ estendendo id_Z de modo que f é equivalência de homotopia.

$$\begin{array}{ccccccccccc} F: & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & F_n & \xrightarrow{\partial_n} & \cdots & \longrightarrow & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_n & & & & \downarrow \text{id}_0 & & \downarrow \text{id}_Z & & \\ F^+: & \cdots & \longrightarrow & F'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & F_n & \xrightarrow{\partial_n} & \cdots & \longrightarrow & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & & & \downarrow f_0 & & \downarrow \text{id}_Z & & \\ K: & \cdots & \longrightarrow & K_{n+1} & \xrightarrow{\tilde{\partial}_{n+1}} & K_n & \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} & \cdots & \longrightarrow & K_0 & \xrightarrow{\eta} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Tomando-se $\bar{f}: F_G^+ \rightarrow H_G$, temos induzido o isomorfismo $H_i(F_G^+) \xrightarrow{\bar{f}} H_i(K_G)$, para $i < n$.

Pelo Lema anterior segue que $H_i(K_G) \xrightarrow{\bar{f}} H_i(F_G^+) \xrightarrow{\text{id}} H_i(F_G)$, para $i < n$. ■

Teorema 4.2.1 *Seja X um CW-complexo conexo. Então existe uma aplicação canônica $\psi : H_*(X) \rightarrow H_*(G)$ ($G = \pi_1(X)$). Se $\pi_i(X) = 0$, para $1 < i < n$ ($n \geq 2$) então ψ é isomorfismo para $i < n$, e a seqüência*

$$\pi_n(X) \xrightarrow{h} H_n(X) \xrightarrow{\psi} H_n(G) \rightarrow 0$$

é exata.

Demonstração: Seja $(\tilde{X}, p)$ o recobrimento universal de X e

$$F : \cdots \rightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

uma $\mathbf{Z}G$ -resolução projetiva de $\mathbf{Z}$.

Seja ainda $\tilde{\mathcal{C}} = C_*(\tilde{X})$ o complexo aumentado de $\mathbf{Z}G$ -módulos livres sobre $\mathbf{Z}$. Pelo Lema 1.2.5, existe uma aplicação de cadeia $f : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow F$ bem definida e única, a menos de homotopia, que estende $id_{\mathbf{Z}}$

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{\mathcal{C}} : & \cdots & \rightarrow & C_n(\tilde{X}) & \xrightarrow{\delta_n} & \cdots & \rightarrow & C_0(\tilde{X}) & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{Z} & \rightarrow & 0 \\ & & & \downarrow f_n & & & & \downarrow f_0 & & \downarrow id & & \\ F : & \cdots & \rightarrow & F_n & \xrightarrow{\partial_n} & \cdots & \rightarrow & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

e podemos considerar a aplicação de cadeias sobre coinvariantes $f' : \tilde{\mathcal{C}}_G \rightarrow F_G$.

Pela Proposição 3.3.1 segue que $C_*(\tilde{X})_G \simeq C_*(X) = \mathcal{C}$ e considerando a aplicação $\bar{f} : \mathcal{C} \rightarrow F_G$, isto é,

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C} : & \cdots & \rightarrow & C_n(X) & \xrightarrow{\bar{\delta}_n} & \cdots & \rightarrow & C_0(X) & \rightarrow & 0 \\ & & & \downarrow \bar{f}_n & & & & \downarrow \bar{f}_0 & & \\ F_G : & \cdots & \rightarrow & (F_n)_G & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} & \cdots & \rightarrow & (F_0)_G & \rightarrow & 0 \end{array}$$

e temos portanto a aplicação induzida $\psi : H_*(X) \rightarrow H_*(G)$.

Agora vamos construir a seqüência exata desejada.

Suponhamos $\pi_i(X) = 0$, para $1 < i < n$. Como $\pi_i(\tilde{X}) \simeq \pi_i(X)$, para $i > 1$, (por [19], VII.3.7) temos $\pi_i(\tilde{X}) = 0$, para $1 \leq i < n$ ($\tilde{X}$ é recobrimento universal e $\pi_1(\tilde{X}) = 0$). Assim, segue do Teorema 4.1.2 que $H_i(\tilde{X}) = 0$, para $0 < i < n$.

Podemos então considerar uma $\mathbf{Z}G$ -resolução livre parcial de $\mathbf{Z}$

$$\tilde{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{C}}|_{n+1} : C_n(\tilde{X}) \xrightarrow{\delta_n} \cdots \rightarrow C_0(\tilde{X}) \xrightarrow{\mu} \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

que, vista como complexo de cadeias, tem $Z_n(\tilde{X}) = \ker \delta_n$ como n -ésimo grupo de homologia, isto é, $H_n(\tilde{\mathcal{D}}) = Z_n(\tilde{X})$.

Pelo Lema 4.2.1 temos $H_i(\tilde{\mathcal{D}}_G) \simeq H_i(G)$, para $i < n$.

Mas $\tilde{\mathcal{D}}$ é uma ZG -resolução projetiva parcial de Z e podemos completá-la a uma ZG -resolução projetiva $\tilde{\mathcal{D}}^+$ de Z (como na demonstração do Lema 4.2.1), e temos portanto o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \tilde{\mathcal{D}} & : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C_n(\tilde{X}) & \xrightarrow{\delta_n} & \cdots & \longrightarrow & C_0(\tilde{X}) & \xrightarrow{\mu} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow id_n & & & & \downarrow id_0 & & \downarrow id_Z & & \\ \tilde{\mathcal{D}}^+ & : & \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n(\tilde{X}) & \xrightarrow{\delta_n} & \cdots & \longrightarrow & C_0(\tilde{X}) & \xrightarrow{\mu} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \tilde{f}_{n+1} & & \downarrow f_n & & & & \downarrow f_0 & & \downarrow id_Z & & \\ F & : & \cdots & \longrightarrow & F_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & F_n & \xrightarrow{\partial_n} & \cdots & \longrightarrow & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como $\tilde{\mathcal{D}}^+$ e F são ZG -resoluções projetivas de Z , do Lema 1.2.5 segue que existe uma extensão $\tilde{f} = (\tilde{f}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ que é única, a menos de homotopia. Mas $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma extensão de id_Z .

Portanto $\tilde{f}$ é uma extensão de id_Z .

Ainda pelo Lema 1.2.5, como $\tilde{\mathcal{D}}^+$ e F são resoluções, temos que $\tilde{f}$ é equivalência de homotopia.

Daí, pelo Corolário 4.2.1 temos, para $i < n$,

$$H_i(\tilde{\mathcal{D}}_G) \xrightarrow{\tilde{f}_*} H_i(F_G) \simeq H_i(G).$$

Agora $\tilde{f}_*$, para $i < n$, é exatamente a aplicação ψ . Como $H_i(\tilde{\mathcal{D}}_G) = H_i(\mathcal{C})$, para $i < n$, temos que $H_i(X) \xrightarrow{\psi} H_i(G)$, para $i < n$.

Aplicando o Lema 4.2.1 a $\tilde{\mathcal{D}}$ obtemos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow H_{n+1}(G) \longrightarrow (Z_n(\tilde{X}))_G \xrightarrow{\Delta'} H_n(\mathcal{D}_G) \longrightarrow H_n(G) \longrightarrow 0$$

Além disso, $H_n(\tilde{\mathcal{D}}_G) = \ker \bar{\delta}_n$, com $\bar{\delta}_n : C_n(\tilde{X})_G \rightarrow C_{n-1}(\tilde{X})_G$.

Considerando $p : \tilde{X} \rightarrow X$ a projeção de recobrimento, temos que

$$\begin{aligned} \gamma : C_*(\tilde{X})_G = Z \otimes_{ZG} C_*(\tilde{X}) &\longrightarrow C_*(X) \\ n \otimes \sigma &\mapsto \gamma(n \otimes \sigma) := p_{\#}(n \cdot \sigma) \end{aligned}$$

é um isomorfismo (pela Proposição 3.3.1) e, do fato de γ ser aplicação de cadeias, segue que

$$\gamma|_{\text{Ker } \bar{\delta}_n} : \text{Ker } \bar{\delta}_n \rightarrow \text{Ker } \tilde{\delta}_n = Z_n(X)$$

é também um isomorfismo.

$$\text{Desse modo, } H_n(\mathcal{D}_G) = \text{ker } \bar{\delta}_n \xrightarrow{\gamma} Z_n(X).$$

Temos portanto a sequência exata:

$$(Z_n(\tilde{X}))_G \xrightarrow{\bar{\Delta}} Z_n(X) \xrightarrow{\tilde{\psi}} H_n(G) \rightarrow 0.$$

Determinaremos agora a aplicação $\tilde{\psi}$.

Seja o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \mathcal{D} : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C_n(X) & \xrightarrow{\tilde{\delta}_n} & \cdots & \longrightarrow & C_0(X) & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow id_n & & & & \downarrow id_0 & & \downarrow id_Z & & \\ \mathcal{C} : & \cdots & \longrightarrow & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\tilde{\delta}_{n+1}} & C_n(X) & \xrightarrow{\tilde{\delta}_n} & \cdots & \longrightarrow & C_0(X) & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow \bar{f}_{n+1} & & \downarrow \bar{f}_n & & & & \downarrow \bar{f}_0 & & \downarrow id_Z & & \\ F : & \cdots & \longrightarrow & F_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & F_n & \xrightarrow{\partial_n} & \cdots & \longrightarrow & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

temos induzidas, respectivamente, por $\bar{f} = (\bar{f}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ e id as aplicações:

$$\begin{array}{ccc} \psi : H_n(X) & \rightarrow & H_n(G) \\ [c_n] & \mapsto & [\bar{f}_n(c_n)] \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} q_X : Z_n(X) & \rightarrow & H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) \\ \alpha & \mapsto & [\alpha] \end{array}$$

Ainda, como $\mathcal{C} \simeq \tilde{\mathcal{D}}_G$ (Proposição 3.3.1), dada a aplicação induzida por $\bar{f} = (\bar{f}_i)$, para $i < n$, temos

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\psi} : H_n(\tilde{\mathcal{D}}_G) \simeq Z_n(X) & \rightarrow & H_n(F_G) \simeq H_n(G) \\ \alpha & \mapsto & [\bar{f}_n(\alpha)] \end{array}$$

Portanto $\tilde{\psi} = \psi \circ q_X$.

Vamos agora explicitar a aplicação $\bar{\Delta} : Z_n(\tilde{X})_G \rightarrow Z_n(X)$.

Seja o diagrama, como na demonstração do Lema 4.2.1:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \tilde{\mathcal{D}}_G : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C_n(\tilde{X})_G & \xrightarrow{\tilde{\delta}_n} & \cdots & \longrightarrow & C_0(\tilde{X})_G & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow id_n & & & & \downarrow id_0 & & \\ \tilde{\mathcal{D}}_G^+ : & \cdots & \longrightarrow & D_{n+1G} & \xrightarrow{\bar{d}_{n+1}} & C_n(\tilde{X})_G & \xrightarrow{\tilde{\delta}_n} & \cdots & \longrightarrow & C_0(\tilde{X})_G & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow id_{n+1} & & \downarrow 0 & & & & \downarrow 0 & & \\ \bar{\mathcal{D}} : & \cdots & \longrightarrow & D_{n+1G} & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

com $\tilde{\mathcal{D}}^+$ obtido da ZG -resolução projetiva parcial $\tilde{\mathcal{D}}$ de comprimento n e $\overline{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{D}}_G^+ / \tilde{\mathcal{D}}_G$.

Como $H_{n+1}(\overline{\mathcal{D}}) = \frac{D_{n+1G}}{\text{Im } \overline{d_{n+2}}}$ e $H_n(\tilde{\mathcal{D}}_G) = \text{Ker } \bar{\delta}_n$ podemos considerar a aplicação:

$$\begin{aligned} \Delta : \frac{D_{n+1G}}{\text{Im } \overline{d_{n+2}}} &\rightarrow \text{Ker } \bar{\delta}_n \\ [\alpha] &\mapsto [id_n^{-1} \overline{d_{n+1}} id_{n+1}^{-1}(\alpha)] = [\overline{d_{n+1}}(\alpha)] \end{aligned}$$

sendo $\overline{d_{n+1}} := id \otimes d_{n+1}$, com $d_{n+1} : D_{n+1} \rightarrow C_n(\tilde{X})$.

Novamente como na demonstração do Lema 4.2.1, temos a sequência exata:

$$D_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} D_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \text{Im } d_{n+1} = \text{Ker } \delta_n \rightarrow 0$$

e portanto será exata a sequência:

$$D_{n+2G} \xrightarrow{\overline{d_{n+2}}} D_{n+1G} \xrightarrow{\overline{d_{n+1}}} (\text{Ker } \delta_n)_G \rightarrow 0.$$

Daí, $\text{Im } \overline{d_{n+2}} = \text{Ker } \overline{d_{n+1}} (\star)$.

Segue do Teorema do Homomorfismo que

$$Z_n(\tilde{X})_G \xrightarrow{\xi} \frac{D_{n+1G}}{\text{Ker } \overline{d_{n+1}}} \stackrel{(\star)}{=} \frac{D_{n+1G}}{\text{Im } \overline{d_{n+2}}} = H_{n+1}(\overline{\mathcal{D}})$$

Temos então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} D_{n+1G} = \mathbf{Z} \otimes_{ZG} D_{n+1} & \xrightarrow{\overline{d_{n+1}}} & \mathbf{Z} \otimes_{ZG} Z_n(\tilde{X}) = Z_n(\tilde{X})_G \\ \downarrow q_D & \nearrow \xi & \\ H_{n+1}(\overline{\mathcal{D}}) = \frac{\mathbf{Z} \otimes_{ZG} D_{n+1}}{\text{Ker } \overline{d_{n+1}}} & & \end{array}$$

sendo q_D a projeção natural e $\xi : H_{n+1}(\overline{\mathcal{D}}) \rightarrow Z_n(\tilde{X})_G$ dada por $\xi([a \otimes x]) := a \otimes d_{n+1}(x)$.

Vamos determinar ξ^{-1} .

Dado um gerador $r \otimes z \in \mathbf{Z} \otimes_{ZG} Z_n(\tilde{X})$ existe $\alpha \in \mathbf{Z} \otimes_{ZG} D_{n+1}$ de modo que $\overline{d_{n+1}}(\alpha) = r \otimes z$ e definimos $\phi(r \otimes z) = [\alpha] = q_D(\alpha)$ nos geradores e estendemos por linearidade.

Temos que ϕ está bem definida e $\phi = \xi^{-1}$.

Ainda, $\overline{\Delta}$ é a composta dos homomorfismos

$$Z_n(\tilde{X})_G \xrightarrow{\phi} H_{n+1}(\overline{\mathcal{D}}) \xrightarrow{\Delta} H_n(\mathcal{D}_G) = \text{Ker } \overline{\delta}_n \xrightarrow{\gamma} Z_n(X).$$

Assim, para todo $r \otimes z \in Z_n(\tilde{X})_G$, existe $\alpha \in (D_{n+1})_G$ de modo que $\overline{d_{n+1}}(\alpha) = r \otimes z$, e temos

$$\overline{\Delta}(r \otimes z) = (\gamma \circ \Delta \circ \phi)(r \otimes z) = \gamma \circ \Delta([\alpha]) = \gamma(\overline{d_{n+1}}(\alpha)) = \gamma(r \otimes z) = p_{\#}(r \cdot z) \quad (4.9)$$

com $p_{\#}$ a aplicação de cadeia induzida da projeção de recobrimento.

Considere agora a projeção natural $\rho : Z_n(\tilde{X}) \rightarrow Z_n(\tilde{X})_G$ tal que $\rho(z) = 1 \otimes z$ e seja $\tilde{\Delta} = \overline{\Delta} \circ \rho$.

$$\text{Temos então } \tilde{\Delta}(z) = \overline{\Delta} \circ \rho(z) = \overline{\Delta}(1 \otimes z) \stackrel{(4.9)}{=} p_{\#}(z).$$

$$\text{Logo } \tilde{\Delta} = p_{\#}|_{Z_n(\tilde{X})}.$$

Seja agora o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} Z_n(\tilde{X}) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}=p_{\#}} & Z_n(X) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & H_n(G) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow q_{\tilde{X}} & & \downarrow q_X & & \downarrow id & & \\ H_n(\tilde{X}) & \xrightarrow{p_{\#}} & H_n(X) & \xrightarrow{\psi} & H_n(G) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (4.10)$$

com $q_{\tilde{X}}$, q_X as projeções naturais e $p_{\#}$ o homomorfismo induzido pela projeção de recobrimento em homologia.

Como $p_{\#}$ é aplicação de cadeia, temos $p_{\#}(\text{Im } \overline{\delta}_{n+1}) \subset \text{Im } \tilde{\delta}_{n+1}$ e já vimos que $\psi = \tilde{\psi} \circ q_X$, e daí o diagrama é comutativo.

Portanto a sequência

$$H_n(\tilde{X}) \xrightarrow{p_{\#}} H_n(X) \xrightarrow{\psi} H_n(G) \longrightarrow 0$$

é exata.

Pela Observação 4.1.1(2) segue que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\tilde{X}) & \xrightarrow{\tilde{h}} & H_n(\tilde{X}) \\ \downarrow \tilde{p}_{\#} & & \downarrow p_{\#} \\ \pi_n(X) & \xrightarrow{h} & H_n(X) \end{array}$$

é comutativo, sendo $\tilde{h}$, h os isomorfismos de Hurewicz e $\tilde{p}_{\#}$ o isomorfismo induzido por p nos grupos de homotopia.

Finalmente, temos a seqüência exata

$$\pi_n(X) \xrightarrow{h} H_n(X) \xrightarrow{\psi} H_n(G) \longrightarrow 0.$$

visto que $\text{Im } h = \text{Im } (h \circ \tilde{p}_*) = \text{Im } (p_* \circ \tilde{h}) = \text{Im } p_* \stackrel{(4.10)}{=} \text{Ker } \psi.$ ■

Corolário 4.2.2 *Sejam X um CW-complexo conexo e $G = \pi_1(X)$. Então temos a seqüência exata*

$$\pi_2(X) \longrightarrow H_2(X) \longrightarrow H_2(G) \longrightarrow 0.$$

Demonstração: Note que as hipóteses do teorema são sempre válidas para $n = 2$, pois não existe i , com $1 < i < 2$, de modo que $\pi_i(X) \neq 0$.

Portanto temos o resultado desejado. ■

Exemplo 4.2.1 *Seja X o espaço projetivo real n -dimensional, $n \geq 2$, denotado por P^n e obtido da esfera S^n via identificação de pontos antípodos. Temos que X é um CW-complexo com uma célula e_i em cada dimensão $i = 0, 1, \dots, n$, isto é,*

$$P^n = e_0 \cup e_1 \cup \dots \cup e_n$$

Além disso, $\pi_1(P^n) \simeq \mathbb{Z}_2 = G$ e $\pi_i(P^n) = 0$, para $1 < i < n$.

Logo, pelo Teorema 4.2.1, a aplicação canônica $\varphi : H_i(X) \rightarrow H_i(G)$ é isomorfismo, para $1 < i < n$, e temos a seqüência exata

$$\pi_n(X) \xrightarrow{h} H_n(X) \xrightarrow{\varphi} H_n(G) \longrightarrow 0.$$

Agora

$$H_i(X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \text{ e } i = n \text{ (ímpar)} \\ \mathbb{Z}_2 & i \text{ ímpar, com } 0 < i < n \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Portanto

$$H_i(G) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & i \text{ ímpar, com } 0 < i < n \\ 0 & i \text{ par, com } 0 < i < n \end{cases}$$

Ainda, como $\pi_n(X) \simeq \pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$, a seqüência

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{h} \mathbb{Z} \longrightarrow H_n(G) \longrightarrow 0.$$

é exata, para n ímpar, e a seqüência

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{h} 0 \longrightarrow H_n(G) \longrightarrow 0.$$

é exata, para n par.

Assim, temos

$$\begin{cases} H_n(G) \neq 0 & \text{para } n \text{ ímpar} \\ H_n(G) = 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Como consideramos um inteiro qualquer $n \geq 2$, segue que

$$H_i(\mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } i = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{para } i \text{ ímpar} \\ 0 & \text{para } i \text{ par.} \end{cases}$$

Considere agora F um grupo e R um subgrupo de F . Denotemos por $[F, R]$ o subgrupo de F gerado por todos os comutadores $[f, r] = frf^{-1}r^{-1}$, com $f \in F$, $r \in R$. Temos que:

- (i) $[F, R] = [R, F]$.
- (ii) Se R é subgrupo normal em F , temos $[F, R]$ normal em R .
- (iii) Se $R = F$ temos $[F, F]$ o subgrupo comutador de F .

Ainda, dado G um grupo, sempre existem um grupo livre F e R um subgrupo normal de F de modo que $G \simeq F/R$, isto é, todo grupo é quociente de um grupo livre ([13], III.6.1).

Teorema 4.2.2 *Seja $G = F/R$, com F livre. Então $H_2(G) \simeq \frac{R \cap [F, F]}{[F, R]}$.*

Demonstração: Sejam S um conjunto de geradores para F e X o bouquet de círculos indexados por S com vértice v . Temos então $\pi_1(X) \simeq F$.

Como R é subgrupo de F , pela Proposição 2.1.9 existe um recobrimento $(\tilde{X}, p)$ de X , com $\tilde{X}$ conexo. Ainda, $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{v})) \simeq R$, para $\tilde{v} \in p^{-1}(v)$.

Além disso, pelo fato de R ser normal em F , tal recobrimento é regular e como $p_{\#}$ é monomorfismo, temos $\pi_1(\tilde{X}) \simeq R$.

Denotando por e_s , para $s \in S$, cada círculo de X , como $\pi_1(X) \simeq F$, podemos identificar e_s com $s \in S$.

Seja $f \in F$. Então $f = s_1^{n_1} \cdots s_k^{n_k}$, com $s_i \in S$, $n_i \in \mathbb{Z}$.

Temos que f pode ser visto como um caminho combinatorial em X , ou seja, uma seqüência de 1-células orientadas (círculos) com vértice v . A partir deste fato identificamos cada classe de homotopia de caminhos $[w] \in \pi_1(X)$ com $f \in F$, $f \sim w$. Assim, identificamos também $\pi_1(X)$ com F e $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}))$ com R .

Pela Proposição 2.1.5, o grupo das transformações de recobrimento de $\tilde{X}$ é isomorfo a $\pi_1(X)/p_{\#}(\pi_1(\tilde{X})) = F/R = G$. Tal isomorfismo é induzido da aplicação

$$\varphi : \pi_1(X) = F \rightarrow G$$

definida da seguinte forma: para cada caminho $f \in F$, considere o único levantamento $\tilde{f}$ de f tal que $\tilde{f}(0) = \tilde{v}$. Temos então $p(\tilde{f}(1)) = v$ e $\varphi(f) = \bar{f}$ é definido como o único elemento de G de modo que $\varphi(f) \cdot \tilde{v} = \bar{f} \cdot \tilde{v} = \tilde{f}(1)$.

Além disso, φ é um homomorfismo sobrejetivo cujo kernel é $R \simeq \pi_1(\tilde{X})$ (pela Observação 2.1.1(c)).

Ainda através de φ , identificamos $\bar{f} \in G$ com a classe $fR \in F/R$.

Consideremos agora o complexo celular de cadeias aumentado $C_{\bullet}(\tilde{X})$. Pela Proposição 2.2.2 temos que este complexo é de $\mathbb{Z}G$ -módulos livres. Como $C_k(\tilde{X}) \simeq 0$, para $k \geq 2$ (X não possui células de dimensão maior que 2), o complexo $C_{\bullet}(\tilde{X})$ se reduz à seqüência:

$$C_1(\tilde{X}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\tilde{X}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0. \quad (4.11)$$

Agora

$$H_0(\tilde{X}) := \frac{C_0(\tilde{X})}{\text{Im } \partial_1} \simeq \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad \mathbb{Z} \simeq \frac{C_0(\tilde{X})}{\text{Ker } \varepsilon}$$

e como $Im \partial_1 \subset Ker \varepsilon$, segue que $Ker \varepsilon = Im \partial_1$. Portanto, temos que (4.11) é uma ZG -resolução livre parcial de Z .

Aplicando o Lema 4.2.1 temos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow H_2(G) \xrightarrow{\xi} (H_1(\tilde{X}))_G \xrightarrow{\Delta'} H_1(C_1(\tilde{X})_G) \longrightarrow H_1(G) \longrightarrow 0.$$

Pela Observação 2.1.1(a) temos $X \simeq \tilde{X}/G$ e da Proposição 3.3.1 segue que $C_1(\tilde{X})_G \stackrel{\sim}{\simeq} C_1(X)$.

Daí, temos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow H_2(G) \xrightarrow{\xi} (H_1(\tilde{X}))_G \xrightarrow{\bar{\Delta}} H_1(X) \xrightarrow{\tilde{\psi}} H_1(G) \longrightarrow 0.$$

Agora, $H_2(G) \simeq Im \xi = Ker \bar{\Delta}$.

Assim, para chegarmos à conclusão do teorema, devemos determinar

$$Ker \{(H_1(\tilde{X}))_G \xrightarrow{\bar{\Delta}} H_1(X)\}.$$

Temos $H_1(\tilde{X}) \stackrel{\bar{h}^{-1}}{\simeq} \pi_1(\tilde{X})_{ab} \stackrel{p_{\#}}{\simeq} R_{ab}$, com $\bar{h}$ o isomorfismo induzido do homomorfismo de Hurewicz (ver Teorema 4.1.2).

Vamos explicitar o isomorfismo $H_1(\tilde{X}) \simeq R_{ab}$.

Consideremos as aplicações $p_{\#}^{-1} : R = p_{\#}(\pi_1(\tilde{X})) \rightarrow \pi_1(\tilde{X})$ e $h : \pi_1(\tilde{X}) \rightarrow H_1(\tilde{X})$.

Seja ainda $d = h \circ p_{\#}^{-1} : R \rightarrow H_1(\tilde{X})$.

Para cada $r \in R$, temos que o levantamento $\tilde{r}$ de r é um caminho fechado em $\tilde{X}$. De fato, usando o homomorfismo φ , segue que $\tilde{r}(1) = \varphi(r) \cdot \tilde{v} = \bar{r} \cdot \tilde{v}$. Mas $\bar{r} = rR = \bar{1}$ e portanto, $\tilde{r}(1) = \tilde{v}$.

Assim $p_{\#}^{-1}(r) = \tilde{r}$, pois $p \circ \tilde{r} = r$, e $\tilde{r}$ é fechado. Daí $\tilde{r}$ é um caminho em $\tilde{X}$ que pode ser escrito como o produto de 1-células orientadas $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$, isto é, $\tilde{r} = \tilde{e}_1 * \dots * \tilde{e}_n$.

Aplicando o homomorfismo de Hurewicz h a $\tilde{r}$ temos que $h(\tilde{r}) = \tilde{e}_1 + \dots + \tilde{e}_n$ (soma de 1-células orientadas) é um 1-ciclo em $\tilde{X}$.

Logo $d(r) = (h \circ p_{\#}^{-1})(r) = \tilde{e}_1 + \dots + \tilde{e}_n$.

Como $p_{\#}^{-1}$ é isomorfismo segue que $Ker d \stackrel{p_{\#}^{-1}}{\simeq} Ker h = [\pi_1(\tilde{X}), \pi_1(\tilde{X})]$. Ainda, como $p_{\#}^{-1}([R, R]) = [\pi_1(\tilde{X}), \pi_1(\tilde{X})]$, temos que $Ker d = [R, R]$.

Mas h é sobrejetiva e portanto, d é sobrejetiva. Temos assim o isomorfismo induzido

$$\begin{aligned}\bar{d}: R_{ab} &\rightarrow H_1(\tilde{X}) \\ r[R, R] &\mapsto \bar{d}(r[R, R]) := d(r)\end{aligned}$$

e mostremos que tal isomorfismo é de $\mathbb{Z}G$ -módulos.

Inicialmente notemos que a ação de conjugação de R em si mesmo induz a ação trivial de R em R_{ab} , que o torna um G -módulo.

De fato: Temos que

$$\begin{aligned}\phi: R \times R &\rightarrow R \\ (r_1, r_2) &\mapsto r_1 r_2 r_1^{-1}\end{aligned}$$

induz

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}: R \times R/[R, R] &\rightarrow R/[R, R] \\ (r_1, r_2[R, R]) &\mapsto r_1 r_2 r_1^{-1}[R, R] = r_2[R, R] \quad (\text{I})\end{aligned}$$

pois, $r_2^{-1} r_1 r_2 r_1^{-1} \in [R, R]$.

Agora,

$$\begin{aligned}\chi: F \times R &\rightarrow R \\ (f, r) &\mapsto f r f^{-1}\end{aligned}$$

induz

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}: F/R \times R/[R, R] &\rightarrow R/[R, R] \\ (fR, r[R, R]) &\mapsto f r f^{-1}[R, R]\end{aligned}$$

• $\tilde{\chi}$ está bem definida:

De $(f_1 R, r_1[R, R]) = (f_2 R, r_2[R, R])$ temos $f_1^{-1} f_2 \in R$ (II) e $r_1^{-1} r_2 \in [R, R]$ (III).

Ainda,

$$\begin{aligned}f_1 r_1^{-1} f_1^{-1} f_2 r_2 f_2^{-1}[R, R] &= (f_2 f_2^{-1}) f_1 r_1^{-1} f_1^{-1} f_2 r_2 f_2^{-1}[R, R] \\ &= f_2 (f_2^{-1} f_1 r_1^{-1} f_1^{-1} f_2) r_2 f_2^{-1}[R, R] \\ &= f_2 [R, R] (f_1^{-1} f_2)^{-1} r_1^{-1} (f_1^{-1} f_2) [R, R] r_2 f_2^{-1}[R, R] \\ &\stackrel{(II) \text{ e } (I)}{=} f_2 [R, R] r_1^{-1} [R, R] r_2 f_2^{-1}[R, R] \\ &= f_2 [R, R] r_1^{-1} r_2 [R, R] f_2^{-1}[R, R] \\ &\stackrel{(III)}{=} f_2 f_2^{-1}[R, R] \\ &= [R, R]\end{aligned}$$

Portanto, $f_1 r_1 f_1^{-1}[R, R] = f_2 r_2 f_2^{-1}[R, R]$.

• $\tilde{\chi}$ é G -ação:

$$(i) \tilde{\chi}(\bar{1}, r[R, R]) = r[R, R].$$

$$\begin{aligned} (ii) \tilde{\chi}(f_1 R, \tilde{\chi}(f_2 R, r[R, R])) &= \tilde{\chi}(f_1 R, f_2 r f_2^{-1}[R, R]) \\ &= f_1(f_2 r f_2^{-1})f_1^{-1}[R, R] \\ &= (f_1 f_2)r(f_1 f_2)^{-1}[R, R] \\ &= \tilde{\chi}(f_1 f_2 R, r[R, R]). \end{aligned}$$

Logo $R/[R, R] = R_{ab}$ é G -módulo.

Além disso, a G -ação em $H_1(\tilde{X})$ é dada por:

$$\begin{aligned} G \times H_1(\tilde{X}) &\rightarrow H_1(\tilde{X}) \\ (\bar{f}, [\sigma]) &\mapsto \bar{f}_*[\sigma] := \bar{f}_*[\sigma], \text{ com } \bar{f}_* \in \text{Aut}(H_1(\tilde{X})) \end{aligned}$$

pois o homeomorfismo $\bar{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ induz o isomorfismo $\bar{f}_* : H_1(\tilde{X}) \rightarrow H_1(\tilde{X})$ e a ação é bem definida.

Com essas estruturas de G -módulos em R , R_{ab} e $H_1(\tilde{X})$ verifiquemos que d e $\bar{d}$ são aplicações de G -módulos.

Dado $r \in R$ mostremos que $d(\bar{f} \cdot r) = \bar{f} \cdot d(r)$, para todo $\bar{f} = fR \in G$.

Temos $\bar{f} \cdot r = frf^{-1}$ e o levantamento deste caminho é dado por:

$$\begin{array}{ccccccc} & \tilde{f} & & \tilde{f}\tilde{r} & & \tilde{f}^{-1} & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \tilde{v} & & \tilde{f}\tilde{v} & & \tilde{f}\tilde{v} & & \tilde{v} \end{array}$$

com $\tilde{f} \cdot \tilde{r}$ o único levantamento de r começando em $\tilde{f} \cdot \tilde{v} = \tilde{f}(1)$, isto é, $\tilde{f} \cdot \tilde{r} = \tilde{f} \circ \tilde{r}$, sendo que $\tilde{r}$ é o único levantamento de r começando em $\tilde{v}$.

Considerando $\tilde{f} \circ \tilde{r} = f_{\#}(\tilde{r})$, com $f_{\#} : \pi_1(\tilde{X}) \rightarrow \pi_1(\tilde{X})$ temos que

$$\begin{aligned} d(\bar{f} \cdot r) &= d(fr f^{-1}) = h \circ p_{\#}^{-1}(fr f^{-1}) = h(\tilde{f}_*(\tilde{f} \circ \tilde{r})_* \tilde{f}^{-1}) = h(\tilde{f}) + h(\tilde{f} \circ \tilde{r}) + h(\tilde{f}^{-1}) \\ &= (h \circ f_{\#})(\tilde{r}) \stackrel{\text{Obs 4.1.1(b)}}{=} (f_* \circ h)(\tilde{r}) = f_*(h \circ p_{\#}^{-1}(r)) = f_*(dr) = \bar{f} \cdot dr. \end{aligned}$$

Agora, $\bar{d} : R_{ab} \rightarrow H_1(\tilde{X})$ é também aplicação de G -módulos, pois

$$\bar{d}(\bar{f}(r[R, R])) = \bar{d}(fr f^{-1}[R, R]) = d(fr f^{-1}) = \bar{f} \cdot d(r) = \bar{f}\bar{d}(r[R, R]).$$

Como $(H_1(\tilde{X}))_G = \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}G} H_1(\tilde{X})$, seguindo os mesmos passos da demonstração do Teorema 4.2.1, temos que

$$\overline{\Delta} : (H_1(\tilde{X}))_G = C_1(\tilde{X})_G \rightarrow H_1(X) = C_1(X)$$

é dada por $\overline{\Delta}(r \otimes z) = p_*(rz)$, com p_* o homomorfismo induzido em homologia pela projeção de recobrimento.

A partir da inclusão $R \xrightarrow{i} F$ obtemos as aplicações

$$\alpha : \begin{array}{ccc} (R_{ab})_G & \rightarrow & F_{ab} \\ n \otimes r[R, R] & \mapsto & r^n[F, F] \end{array} \quad \text{e} \quad \beta : \begin{array}{ccc} R/[F, R] & \rightarrow & F/[F, F] \\ r[F, R] & \mapsto & r[F, F] \end{array}$$

Temos ainda o isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} (R_{ab})_G = \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}G} R_{ab} & \rightarrow & R_{ab}/A \\ (n \otimes r[R, R]) & \mapsto & r^n[R, R]A \end{array}$$

com $A = \langle (\bar{f} \cdot r[R, R])r^{-1}[R, R] \mid \bar{f} \in F/R, r \in R \rangle$ o grupo dos coinvariantes denotado multiplicativamente.

Agora, $A = [F, R]/[R, R]$.

De fato:

(i) Temos que

$$\begin{aligned} (\bar{f} \cdot r[R, R])r^{-1}[R, R] &= (fR \cdot r[R, R])(r^{-1}[R, R]) \stackrel{\sim}{=} (frf^{-1}[R, R])(r^{-1}[R, R]) \\ &= frf^{-1}r^{-1}[R, R] \end{aligned}$$

e como $frf^{-1}r^{-1} \in [F, R]$, segue que $(\bar{f} \cdot r[R, R])r^{-1}[R, R] \in [F, R]/[R, R]$.

Portanto $A \subset [F, R]/[R, R]$.

(ii) Note que $frf^{-1}r^{-1}[R, R] \in [F, R]/[R, R]$ acarreta

$$frf^{-1}r^{-1}[R, R] = (\bar{f} \cdot r[R, R])r^{-1}[R, R]$$

para $\bar{f} \in F/R, r \in R$.

Portanto, $A \supset [F, R]/[R, R]$ e obtemos a igualdade desejada.

Logo temos as composições dos isomorfismos:



$$j: \begin{array}{ccccc} (R_{ab})_G & \rightarrow & R_{ab}/A & \rightarrow & R/[F, R] \\ n \otimes r[R, R] & \mapsto & r^n[R, R]A & \mapsto & r^n[F, R] \end{array}$$

Deste modo, obtemos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} (H_1(\tilde{X}))_G & \xrightarrow[\simeq]{id \otimes \bar{d}^{-1}} & (R_{ab})_G & \xrightarrow[\simeq]{j} & R/[F, R] \\ \bar{\Delta} \downarrow & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow \\ H_1(X) & \xrightarrow[\simeq]{\bar{h}'^{-1}} & (F_{ab})_G & \xrightarrow[\simeq]{id} & F/[F, F] \end{array} \quad (4.12)$$

Temos que (4.12) é comutativo devido à comutatividade do diagrama a seguir:

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{p_{\#}^{-1}} & \pi_1(\tilde{X}) & \xrightarrow{h} & H_1(\tilde{X}) \\ i \downarrow & & p_{\#} \downarrow & & p_{\bullet} \downarrow \\ F & \xrightarrow{id} & \pi_1(X) & \xrightarrow{h'} & H_1(X) \end{array}$$

que também nos fornece o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{d} & H_1(\tilde{X}) \\ i \downarrow & & p_{\bullet} \downarrow \\ F & \xrightarrow{h'} & H_1(X) \end{array}$$

e temos $p_{\bullet} \circ d = h'$. $(\star)$

De fato: Temos

$$\bar{\Delta} \circ (id \otimes \bar{d})(1 \otimes r[R, R]) = \bar{\Delta}(1 \otimes d(r)) = p_{\bullet}(d(r)) \stackrel{(\star)}{=} h'(r)$$

e ainda,

$$(\bar{h}' \circ \alpha)(1 \otimes r[R, R]) = \bar{h}'(r[F, F]) = h'(r).$$

Logo $\bar{\Delta} \circ (id \otimes \bar{d}) = (\bar{h}' \circ \alpha)$ e temos então $\bar{h}'^{-1} \circ \bar{\Delta} = \alpha \circ (id \otimes \bar{d}')$.

Além disso,

$$(\beta \circ j)(1 \otimes r[R, R]) = \beta(r[F, R]) = r[F, F] = (id \circ \alpha)(1 \otimes r[R, R]).$$

Portanto $\beta \circ j = id \circ \alpha$.

Segue então do diagrama (4.12) que $H_2(G) = Ker \bar{\Delta} \simeq Ker \beta$.

Mas, $Ker \beta = \frac{R \cap [F, F]}{[F, R]}$, pois:

$$\begin{aligned} \bullet r[F, R] \in Ker \beta &\Leftrightarrow \beta(r[F, R]) = 0 \Leftrightarrow r[F, F] = [F, F] \Leftrightarrow r \in [F, F] \\ &\Leftrightarrow r \in R \cap [F, F] \Leftrightarrow r[F, R] \in \frac{R \cap [F, F]}{[F, R]} \end{aligned}$$

Logo,

$$H_2G \simeq \frac{R \cap [F, F]}{[F, R]}$$

o que demonstra o teorema. ■

Observação 4.2.1 Existe ainda uma demonstração alternativa do Teorema anterior descrita em termos algébricos (ver [17]).

Exemplo 4.2.2 Seja G um grupo livre. Então $R = \{1\}$ e temos

$$H_2(G) \simeq \frac{R \cap [F, F]}{[F, R]} = \{0\}.$$

Exemplo 4.2.3 Seja G um grupo cíclico finito de ordem n , isto é, $G = \langle t \mid t^n = 1 \rangle$. Então $G = F/R$, com $F \simeq \mathbb{Z}$ e $R \simeq n\mathbb{Z}$ e portanto

$$H_2(G) \simeq \frac{n\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \{0\}.$$



Bibliografia

- [1] Bieri, R.; *Homological Dimension of Discrete Groups*, Queen Mary College Math. Notes, Queen Mary College, London, 1976.
- [2] Brown, K. S.; *Cohomology of Groups*, G.T.M. 87 Springer-Verlag, New York, 1982.
- [3] Cioca, D.M.; *Cohomologia e Ends de Grupos*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, UNESP, São José do Rio Preto, 1997.
- [4] Eilenberg, S.; *Homology of Spaces with Operators I*, Trans. Amer. Math. Soc. 61, pp. 378-417, 1947; errata 62 (1947) 548.
- [5] Greenberg, M.J.; *Lectures on Algebraic Topology*, W.A., Benjamin, Inc., 1966.
- [6] Hopf, H.; *Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe*, Comment. Math. Helv. 14, (1942), 257-309.
- [7] Hu, S.T.; *Introduction to Homological Algebra*, Holden-Day Series in Mathematics, Holden-Day Inc. São Francisco, 1968.
- [8] Hurewicz, W.; *Beiträge zur Topologie der Deformationen*, VI Asphärische Räume, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 39, (1936), 215-224.
- [9] Lima, E.L.; *Elementos de Topologia Geral*, 2 ed. rev. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1976.
- [10] Lima, E.L.; *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977.



- [11] Macedo, B.L.; *Propriedades Homológicas de Finitude e Grupos de Dualidade*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, UNESP, São José do Rio Preto, 2002.
- [12] MacLane, S.; *Homology*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [13] Massey, W.S.; *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1967.
- [14] Milies, F.C.P.; *Anéis e Módulos*, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1972.
- [15] Papani, F.M.G.; *Cohomologia de Grupos, Dualidade e Aplicações ao Estudo do Invariante Algébrico $E(G, S, M)$* , Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, UNESP, São José do Rio Preto, 1997.
- [16] Robinson, D.J.S.; *A Course in the Theory of Groups*, G.T.M. 80, Springer, Berlin, 1982.
- [17] Rotman, J.J.; *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, Inc., New York, 1979.
- [18] Schubert, H.; *Topology*, MacDonald & Co. (Publishers) LTD, 1968.
- [19] Spanier, E.H.; *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, Inc., 1966.
- [20] Vick, J.W.; *Homology Theory*, Academic Press, Inc., New York, 1973.
- [21] Whitehead, G.W.; *Elements of Homotopy Theory*, G.T.M. 61, Springer-Verlag, New York, 1978.



