

Otavio Henrique Perez

Variedades singulares de impasse e fluxos em
superfícies invariantes

São José do Rio Preto
2022

Otávio Henrique Perez

Variedades singulares de impasse e fluxos em
superfícies invariantes

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva
Co-orientador: Prof. Dr. Daniel Cantergiani Panazzolo

Financiadora: FAPESP (2016/22310-0 e 2018/24692-2) e CAPES (Código 001)

São José do Rio Preto
2022

P438v Perez, Otavio Henrique
Variedades singulares de impasse e fluxos em superfícies
invariantes / Otavio Henrique Perez. -- São José do Rio Preto, 2022
110 p. : il., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio
Preto
Orientador: Paulo Ricardo da Silva
Coorientador: Daniel Cantergiani Panazzolo

1. Sistemas forçados. 2. Blow-up. 3. Classificação topológica. 4.
Superfícies invariantes. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de
Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Otavio Henrique Perez

Variedades singulares de impasse e fluxos em
superfícies invariantes

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: FAPESP (2016/22310-0 e 2018/24692-2) e CAPES (Código 001)

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Daniel C. Panazzolo
Co-orientador - LMIA - UHA

Profa. Dra. Regilene D. S. Oliveira
ICMC - USP

Prof. Dr. Claudio A. Buzzzi
IBILCE - UNESP

Prof. Dr. Douglas D. Novaes
IMECC - UNICAMP

Prof. Dr. Pedro T. Cardin
FEIS - UNESP

São José do Rio Preto
28 de Janeiro de 2022

*Dedico este trabalho às
mais de 620 mil vidas ceifadas
pela omissão e descaso durante
a pandemia de COVID-19.*

AGRADECIMENTOS

Quando comecei a escrever os primeiros rascunhos desta seção de agradecimentos, imediatamente começou a se passar um filme pela minha cabeça. E esse filme não tinha início em 2017, meu primeiro ano de doutorado, mas sim no ano de 2011, quando ingressei no curso de Licenciatura em Matemática da UNESP Bauru.

Passar pelo ensino superior (graduação, mestrado e doutorado) é um processo intenso. É um verdadeiro desafio intelectual e psicológico, para citar apenas dois de tantos outros aspectos. Hoje, dez anos após ter colocado meus pés numa universidade pela primeira vez, olho para trás e vejo que tomei a decisão correta ao optar por estudar Matemática. Graças a ela cheguei a lugares que jamais sonhei chegar, realizei sonhos e, principalmente, conheci pessoas maravilhosas nas quais vou me lembrar para sempre com muito carinho.

Sei que é impossível agradecer a todos que me apoiaram e ajudaram nesta caminhada, e de certa forma é uma injustiça não poder fazer menção a todas elas nos parágrafos abaixo. Entretanto, penso que é uma injustiça ainda maior não citar pelo menos parte delas. Todo o apoio de vocês foi crucial para que eu chegasse até aqui.

Aos meus pais, Gilmar e Conceição, por todo o amor e apoio incondicionais, e por nunca medirem esforços para que eu pudesse realizar meus sonhos. Pai, mãe: esta conquista também é de vocês. Ao meu irmão, Guilherme, pelas inúmeras conversas e conselhos nos momentos bons e ruins. Ao Matheus, por ser uma criança maravilhosa e que, mesmo sem perceber, me ensina muito sobre amor e me inspira muito para melhorar sempre. Aos meus bichinhos, Pitica, Vitória, Fofinha e Neguinho, por encherem a minha casa de alegria e felicidade.

Agradeço também ao acaso, que cruzou a minha caminhada com a da Beatriz. Meu amor, não tenho palavras para agradecer todo o carinho e companheirismo. Conhecer você foi a melhor surpresa que o destino já guardou pra mim, e sou muito grato por podermos compartilhar nossas trajetórias e crescermos juntos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva, por toda a paciência, dedi-

cação, pelos conhecimentos (incluindo aqueles que vão além da Matemática) e ideias que me passou e, principalmente, por todas vezes em que me pegou pelos ombros e me chacoalhou para que eu pudesse sair do lugar. Ao meu Coorientador, Prof. Dr. Daniel Cantergiani Panazzolo, que teve um papel decisivo na minha formação e no desenvolvimento da minha pesquisa, e a quem eu também agradeço por ter aceitado supervisionar minha estadia em Mulhouse. Aos meus orientadores de iniciação científica e mestrado, Profa. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues e Prof. Dr. Tiago de Carvalho, por terem aberto tantas portas e por terem me preparado para a vida acadêmica.

A todos os meus professores, da graduação à pós-graduação, por terem me inspirado e me ensinado tanto. Todos, sem exceção, moldaram o matemático, professor e profissional que sou hoje. Em especial, deixo aqui meus agradecimentos à Profa. Dra. Ivete Baraldi (in memoriam). Agradeço aos membros da Banca Examinadora, pelo aceite em avaliar o meu trabalho e por todas as críticas e sugestões valiosas.

Também agradeço aos servidores do Ibilce, em especial aos funcionários do RU, sempre muito bem humorados, e aos funcionários da STAEPE, por toda a ajuda com questões burocráticas, e por serem tão prestativos e pacientes.

Aos meus amigos de pós graduação, que tornaram esta caminhada muito, mas muito mais leve: Alisson Reinol, Anderson Gonzaga, André Carvalho (Bot), Bruno Belorte, Bruno Caldeira, Carlos Vicente, Caroline Signorini (Lady Rayovac), Cheienne Chaves, Eduardo Machado, Fabrício Alves, Fabrício Rissão, Gabriel Rondon, Gino Maqui, Gustavo Marcato, Harison Brito, Heloísa Lopes, Jarne Donizetti, Juan Carlos Ortiz, Júnior Augusto, Laura Gambera, Lourenço Peixoto, Luiz Fernando Gonçalves (Luizão), Luiz Fernando Gouveia (Fofó), Plínio Sicuti, Rafael Paulino (Pão), Rafaela Soares, Raul Appis, Rodiak Figueroa, Rodrigo Bononi, Rodrigo Ishizaka, Ronísio Ribeiro, Rubens Pazim (Rubão), Samuel Santos, Paula Fukushima, Willian Nunes, Yagor Romano. Foram horas e mais horas, dias e mais dias dividindo a salinha do mestrado e o Laboratório de Sistemas Dinâmicos. Sempre me lembrarei com todo o carinho do mundo de todos os momentos que passei com vocês, até dos momentos mais rotineiros. Seja pela companhia na hora do café (e na hora da cerveja), pelos rachas aos finais de semana no Ibilce Sports Arena, e também para estudar, tirar dúvidas, ter conversas produtivas e improdutivas, desabafar, compartilhar angústias, jogar conversa fora, dar risada, almoçar no RU, jogar Saibro e PubG, apostar nos Bolões. A

todos vocês, meus mais profundos agradecimentos pela amizade.

Em especial, gostaria de agradecer à Ana Livia (Limpia), André Amaral, Eliton Moro (¿Eliton Muero?, também conhecido como Kumon), Lucas Arakaki e Jéssica Ventura (Rêssica Bentúra), com quem eu passava a maior parte do tempo no Laboratório de Sistemas Dinâmicos. Gostaria de fazer com que vocês conseguissem ter dimensão do quanto a amizade e companhia de vocês foram importantes para mim durante todos esses anos. Me inspiro muito em vocês, e espero um dia poder retribuir tudo isso de alguma forma.

À tout les Cacahuètes de l'Université de Haute-Alsace, surtout à Hamilton Araújo, Ícaro Chaves, Thomas Jacumin (Tomate), Aninda Chatterjee, Lucas David (lukinhas do brasil), Lucas Afonso (bodybuilder), Laura Cipriano, Madou Savigny, Célia Attabary, Elie Allemand et Salih Ouchtout, pour l'amitié, des blagues, des soirées, des bières et des histoires dont je me souviendrai toujours avec joie. Grâce à vous, Mulhouse a été la meilleure ville du monde pendant les 10 mois où j'y étais. Je remercie les professeurs de l'UHA, toujours très sympathiques, pour les discussions pendant le déjeuner.

Muitos dos sonhos que realizei só foram possíveis graças à Marília Delarissa Zuppi-rolí e à Milena Molinari. Vocês se tornaram grandes amigas ao longo desta caminhada e sempre me inspiraram muito, por serem excelentes professoras e pessoas incríveis. Muito obrigado pelas aulas de Inglês e Francês, que eram um dos meus momentos preferidos da minha rotina.

Aos amigos que a UNESP Bauru me deu, sobretudo a Henrique Della Barba (Guaxi), Matheus Moraes (Jaboto) e Thiago Correa (Jorge). Simplesmente não existe tempo ruim com vocês, e só tenho a agradecer por todos os papos e risadas, e me desculpar pelas vezes em que me fiz ausente após o fim da graduação. Também gostaria de agradecer ao Felipe Picoli, uma pessoa que faz absolutamente tudo para ver seus amigos com a autoestima lá em cima, e que me ajudou de inúmeras formas desde o início da nossa amizade, seja com palavras, seja com atitudes.

Também agradeço aos meus amigos da minha terra natal, Jaú: Fellipe Maróstica, Hebert Santos, Joel Borges, Murilo Barbosa, Victor Kenzo e Vinícius Fuzinelli. Também agradeço aos meus eternos companheiros de banda: Bruno Boaretti, Octávio Valbueno e Renan Orleans. As risadas eram sempre mais gostosas com vocês, e

independentemente da distância, eu ainda nutro um carinho enorme por tudo o que a gente passou junto.

O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP (processos 2016/22310-0 e 2018/14692-2) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES (Código de Financiamento 001). Também agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro durante a Iniciação Científica e o Mestrado.

*Sou pessimista com a inteligência,
mas um otimista com a vontade.*
Antonio Gramsci, p. 195, [20].

RESUMO

O principal objeto de estudo desta Tese é uma classe especial de equações diferenciais chamadas de sistemas forçados (ou sistemas com impasses). Este trabalho é dividido em duas partes, e em cada parte nós abordamos dois problemas clássicos oriundos do estudo de equações diferenciais ordinárias. O primeiro deles é o estudo de singularidades de sistemas forçados e a classificação de seus retratos de fase. Um algoritmo de resolução de singularidades para esta classe de sistemas é apresentado, e aplicamos esta teoria na classificação topológica de suas singularidades. Resultados clássicos a respeito da classificação topológica de campos de vetores analíticos são estendidos para o contexto de sistemas forçados analíticos. A segunda parte diz respeito ao estudo do fluxo de um campo de vetores polinomial tridimensional em superfícies algébricas invariantes. Provamos que, para uma certa classe de superfícies, o fluxo pode ser descrito por um sistema forçado polinomial planar. Além disso, as singularidades dos sistemas forçados estão profundamente relacionadas com propriedades geométricas da superfície, assim como com o fluxo do campo de vetores. Sistemas famosos vindos das ciências aplicadas exemplificam nossos resultados.

Palavras-chave: Sistemas forçados, Blow-up, Classificação topológica, Superfícies invariantes.

ABSTRACT

The main object of study of this Thesis is a special class of differential equations called constrained differential systems (or impasse systems). This work is divided in two parts, and in each part we address two classical problems from ordinary differential equations. The first one concerns the study of singularities of constrained systems and the classification their of phase portraits. An algorithm of resolution of singularities for such class of systems is presented, and we use this theory in the topological classification of singularities. Classical results on topological classification of analytic vector fields are extended to the context of analytic constrained systems. The second part concerns the study of flows of three-dimensional polynomial vector fields on invariant algebraic surfaces. We prove that, for a certain class of surfaces, the flow can be described by a polynomial constrained system defined on the plane. Moreover, the singularities of the constrained system are deeply related to geometric properties of the surface, as well as the flow of the vector field. Well-known systems from applied sciences exemplify our results.

Keywords: Constrained systems, Blow-up, Topological classification, Invariant surfaces.

Lista de Figuras

1.1	Sistema forçado em uma variedade com esquinas após blow-up.	18
1.2	Retrato de fase de (1.2) (esquerda) e superfície M (direita). O conjunto de impasse Δ está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M$ está destacado em azul.	22
2.1	Singularidades de um sistema forçado planar. O conjunto de impasse está destacado em vermelho.	26
2.2	Pontos não singulares de um sistema forçado planar. O conjunto de impasse está destacado em vermelho.	26
2.3	Pontos elementares do sistema forçado. O conjunto de impasse está destacado em vermelho.	27
2.4	Equivalência entre os blow-ups quadrático e direcional.	28
2.5	Polígono de Newton de um campo de vetores analítico. O vértice principal e o segmento principal estão destacados em azul.	30
2.6	Retrato de fase de (2.7) (esquerda) e polígono de Newton de (2.8) (direita). O conjunto de impasse está destacado em vermelho e o vértice e segmento principais estão destacados em azul.	31
2.7	Segmento principal após blow-up na direção y (acima) e após blow-up na direção x (abaixo).	33
2.8	Sistema forçado (2.7) antes (direita) e depois (esquerda) do blow-up com peso na origem.	33
2.9	Tangência quadrática antes (direita) e depois (esquerda) do blow-up com peso na origem.	34
3.1	Sistema forçado do Exemplo 3.7 após blow-up.	39
3.2	Segmento principal do polígono de Newton após blow-up na direção y . . .	44
3.3	Segmento principal do polígono de Newton após blow-up na direção x . . .	45
3.4	Polígono de Newton do campo de vetores auxiliar após uma mudança de coordenadas da forma (3.5).	50
4.1	Diagrama da Proposição 4.1.	55
4.2	Homeomorfismo $\tilde{H}$ que satisfaz as hipóteses (H1), (H2) e (H3). O conjunto de impasse está destacado em vermelho.	56
4.3	Singularidades básicas da forma $V_1^{\alpha,\beta}$	57
4.4	Singularidades básicas da forma $V_2^{\alpha,\beta}$	57
4.5	Singularidades básicas da forma V_3^α (esquerda) e V_4^α (direita).	57
4.6	Singularidades básicas da forma $C_1^{\alpha,\beta}$. O conjunto de impasse está destacado em vermelho.	57

4.7	Singularidades básicas da forma $C_2^{\alpha,\beta}$. O conjunto de impasse está destacado em vermelho.	57
4.8	Singularidades básicas da forma C_3^α (esquerda) C_4^α (direita). O conjunto de impasse está destacado em vermelho.	58
4.9	Singularidades de um sistema forçado. O ponto de equilíbrio do campo de vetores adjunto não possui órbita característica.	59
4.10	Neighborhoods U , $\widehat{U}$ and W	59
4.11	Setores S_1^α (esquerda) e S_2^α (direita).	60
4.12	Setores S_3^α (esquerda) e F^α (direita).	60
4.13	Setores SI_1^α (esquerda) e SI_2^α (direita). O conjunto de impasse está destacado em vermelho.	61
4.14	Setores SI_3^α (esquerda) e SI_4^α (direita). O conjunto de impasse está destacado em vermelho.	61
4.15	Setores SI_5^α (esquerda) e SI_6^α (direita). O conjunto de impasse está destacado em vermelho.	61
4.16	Setores FI^α . O conjunto de impasse está destacado em vermelho.	61
4.17	Colagem de dois setores adjacentes. O conjunto de impasse está destacado em vermelho.	61
4.18	Polígonos de Newton $\mathcal{P}_X$ (esquerda) e $\mathcal{P}_{X_A}$ (direita).	63
4.19	Blow-up na direção y	67
4.20	Blow-up na direção x	67
4.21	Segmento principal antes e depois do último blow-up no Caso 1, onde os polígonos de Newton $\mathcal{P}_{X_{\Omega,A}}$ e $\mathcal{P}_{X_A}$ não possuem um vértice da forma $(m, 1)$	68
4.22	Segmento principal antes e depois do último blow-up no Caso 2, em que os polígonos de Newton $\mathcal{P}_{X_{\Omega,A}}$ e $\mathcal{P}_{X_A}$ possuem um vértice da forma $(m, 1)$	68
4.23	Polígono de Newton do campo de vetores auxiliar de (4.4).	69
4.24	Sistema forçado (4.4) antes e após blow-up.	69
4.25	Da esquerda para a direita: curvas A_k para $k = 1$, A_k para k par e A_k para k ímpar e $k \geq 3$	70
4.26	Da esquerda para a direita: curvas D_k para $k = 4$, D_k para k ímpar e D_k para k par e $k \geq 6$	70
4.27	Da esquerda para a direita: curvas E_6 , E_7 e E_8	71
4.28	Retrato de fase quando $a_{-1,0} \neq 0$, para δ do tipo A_k , k ímpar.	73
4.29	Retrato de fase quando $a_{-1,0} \neq 0$, para δ do tipo A_k , k par.	73
4.30	Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$, para δ do tipo A_k , k ímpar.	73
4.31	Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$, para δ do tipo A_k , k par.	73
4.32	Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$, para δ do tipo D_k , k par.	75
4.33	Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$, para δ do tipo D_k , k ímpar.	75
4.34	Retrato de fase quando $a_{-1,0} \neq 0$, para δ do tipo D_k , k par.	75
4.35	Retrato de fase quando $a_{-1,0} \neq 0$, para δ do tipo D_k , k ímpar.	76
4.36	Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$, para δ do tipo D_k , k par.	76
4.37	Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$, para δ do tipo D_k , k ímpar.	76
4.38	Retrato de fase quando $a_{-1,0} \neq 0$, para δ do tipo E_6	77
4.39	Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$, para δ do tipo E_6	77
4.40	Retrato de fase quando $b_{m_0,-1} = 0$ para todo $m_0 \geq 0$, em que δ é do tipo E_7	78
4.41	Retrato de fase quando $b_{0,-1} \neq 0$, para δ do tipo E_7	78
4.42	Retrato de fase quando $a_{-1,0} \neq 0$, para δ do tipo E_8	79
4.43	Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$, para δ do tipo E_8	79

5.1	Conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M$ destacado em azul.	82
5.2	Retrato de fase do Exemplo 5.11. O conjunto de impasse está destacado em vermelho.	86
5.3	Retrato de fase do Exemplo 5.12. O conjunto de impasse está destacado em vermelho.	87
5.4	Retrato de fase do Exemplo 5.13 para $\lambda > 1$ (esquerda) e para $\lambda < 1$ (centro). O conjunto de impasse está destacado em vermelho.	87
5.5	Retrato de fase do Exemplo 5.14. O conjunto de impasse está destacado em vermelho.	88
5.6	Retrato de fase do Exemplo 5.15. O conjunto de impasse está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse está destacado em azul.	89
5.7	Retrato de fase do campo de vetores adjunto (5.16) (esquerda) e superfície M (direita). O conjunto de impasse Δ está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M$ está destacado em azul.	95
5.8	Retrato de fase de (5.20) (esquerda) e superfície M_1 (direita). O conjunto de impasse Δ_1 está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_1}$ está destacado em azul.	97
5.9	Retrato de fase de (5.23) (esquerda) e superfície M_2^k (direita) quando $k \neq 0$. O conjunto de impasse Δ_2 está destacado em vermelho.	98
5.10	Retrato de fase de (5.23) (esquerda) e superfície M_2^k (direita) quando $k = 0$. O conjunto de impasse Δ_2 está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_2^k}$ está destacado em azul.	98
5.11	Retrato de fase de (5.27) (esquerda) e superfície M_1 (direita). O conjunto de impasse Δ_1 está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_1}$ está destacado em azul.	99
5.12	Retrato de fase de (5.30) (esquerda) e superfície M_2 quando $r = 1$ (direita). O conjunto de impasse Δ_2 está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_2}$ está destacado em azul.	101
5.13	Retrato de fase de (5.33) (left) (esquerda) e superfície M_2 quando $r > 1$ (direita). O conjunto de impasse Δ_2 está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_2}$ está destacado em azul.	102
5.14	Retrato de fase do Sistema (5.36) (esquerda) e superfície M_3 quando $s = 1$ (direita). O conjunto de impasse Δ_3 está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_3}$ está destacado em azul.	102
5.15	Retrato de Fase do Sistema (5.40) (esquerda) e superfície M_4 (direita). O conjunto de impasse Δ_4 está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_4}$ está destacado em azul.	104

Lista de Tabelas

4.1	Singularidades do tipo ADE classificadas em [2]. Veja as Figuras 4.25, 4.26 e 4.27.	70
4.2	O sistema forçado (4.6) deve satisfazer uma das condições desta tabela para que seja equivalente a um sistema em $\mathcal{A}$. O número n_0 é o primeiro inteiro positivo tal que $a_{-1,n_0} \neq 0$	72
5.1	Superfícies algébricas invariantes do Sistema de Interação de Três Ondas (5.18) catalogadas em [30].	96
5.2	Superfícies algébricas invariantes do Sistema de Lorenz (5.25) catalogadas em [27].	99
5.3	Superfícies algébricas invariantes do Sistema de Chen (5.38) catalogadas em [29].	103

Sumário

1	Introdução	17
2	Conceitos preliminares	24
2.1	Sistemas forçados	24
2.2	Singularidades de sistemas forçados	26
2.3	Blow-up quase-homogêneos	27
2.4	O polígono de Newton	28
2.5	Campo de vetores auxiliar	30
2.6	Exemplos	31
3	Resolução de singularidades de sistemas forçados	35
3.1	Propriedades do polígono de Newton: controlabilidade e coordenadas admissíveis	35
3.1.1	Preparação de coordenadas	35
3.1.2	Mudança de coordenadas admissível	37
3.2	Identificando pontos elementares usando o polígono de Newton	38
3.3	O Teorema de resolução de singularidades de sistemas forçados	41
3.3.1	Dessingularização local	42
3.3.2	Resolução de singularidades: Teorema Global	52
4	Classificação topológica de retratos de fase de sistemas forçados no plano	54
4.1	Construção da C^0 -equivalência orbital em torno do divisor excepcional	54
4.1.1	Pontos básicos, intervalo singular básico e esquema elementar de singularidades	56
4.1.2	Prova do Teorema 4.10: Construção de uma C^0 -equivalência orbital que preserva orientação	59
4.2	Determinação topológica de um sistema forçado usando o polígono de Newton	62
4.2.1	Coordenadas favoráveis	62
4.2.2	Condições de não degenerescência	64
4.2.3	Prova do Teorema 4.19: Equivalência topológica entre um sistema forçado e sua parte principal	65
4.2.4	Exemplo	69
4.3	Sistemas forçados com conjunto de impasse singular e a prova do Teorema	70
4.3.1	Curva A_k , $k \geq 1$	71
4.3.2	Curva D_k , $k \geq 4$	73

4.3.3	Curva E_6	75
4.3.4	Curva E_7	77
4.3.5	Curva E_8	78
5	Descrevendo fluxos em superfícies invariantes a partir de sistemas for-	80
	çados	
5.1	Estudando a Geometria da Superfície M	81
5.2	Fluxos em superfícies invariantes que são descritos por sistemas forçados	83
5.3	Caso particular: $\beta(x, y, z)$ é um polinômio de grau 1 com respeito a variável z	88
5.4	Exemplos	94
5.4.1	Equação de Falkner–Skan	94
5.4.2	O Sistema da Interação de Três Ondas	95
5.4.3	O Sistema de Lorenz	97
5.4.4	O Sistema de Chen	103
5.5	Fluxos em hiperfícies e sistemas forçados em dimensões maiores	104
	Referências	106
	Índice Remissivo	109

1 Introdução

Sistemas Dinâmicos, e em particular a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, é a área da Matemática que busca compreender o comportamento e o estado de fenômenos cuja evolução é dada por uma determinada regra (ou função). Seu estudo se inicia no final do século XIX com o matemático francês Henri Poincaré, a partir de seu célebre trabalho *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, onde cunhou a frase: “*Investigar quais são as propriedades das equações diferenciais é uma questão do mais alto interesse*”.

Desde então, o estudo qualitativo das equações diferenciais ordinárias se desenvolveu muito, motivado tanto pelos desafios intrínsecos da Matemática quanto pelas suas aplicações em várias áreas, tais como Física, Química, Biologia e Economia. Juntamente com esse desenvolvimento, várias classes de sistemas surgiram e ganharam destaque dentro da comunidade científica, como, por exemplo, equações diferenciais suaves por partes e equações diferenciais com várias escalas de tempo. O principal objeto de estudo deste trabalho é o estudo da classe dos chamados Sistemas Forçados (ou Sistemas com Impasse).

Sistemas Forçados são definidos por equações diferenciais da forma

$$A(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}),$$

em que $\mathbf{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, A é uma matriz $n \times n$ cujas entradas são funções diferenciáveis e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ também é diferenciável. Nestas condições, um ponto $\mathbf{p}$ tal que $\det A(\mathbf{p}) = 0$ é chamado **ponto de impasse**, e o chamado **conjunto de impasse** é o conjunto $\Delta = \{\mathbf{p} \in U; \det A(\mathbf{p}) = 0\}$. As referências [25, 43, 44] são artigos clássicos a respeito de tais sistemas, e aplicações podem ser encontradas em [37, 38, 42].

Neste trabalho, exigiremos que a matriz A não tenha rank constante e que o conjunto de impasse possua codimensão maior ou igual a um. Uma característica interessante desta classe de sistemas é que o Teorema de Existência e Unicidade das EDO's só é válido fora do conjunto de impasse (veja o Capítulo 2).

Como ficará claro na Seção 2.1, sem perda de generalidade podemos escrever um sistema forçado como

$$\delta(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x})$$

em que $X(\mathbf{x}) = A^*(\mathbf{x})F(\mathbf{x})$ é o chamado **campo de vetores adjunto** e $\delta(\mathbf{x}) = \det A(\mathbf{x})$ é a função que define o conjunto de impasse.

Este trabalho essencialmente aborda dois problemas, cada um deles trazendo para o contexto de Sistemas Forçados questões que já foram estudadas para o caso das equações diferenciais ordinárias clássicas. O primeiro deles é o estudo de singularidades via blow-ups, bem como a classificação topológica de tais sistemas.

Singularidades de sistemas forçados na parte suave do conjunto de impasse foram estudados em [43, 44]. Um dos objetivos deste trabalho é estudar singularidades não

apenas na parte suave, mas também na parte singular do conjunto de impasse. Além do interesse matemático, é possível encontrar na literatura modelos das ciências aplicadas que apresentam este tipo de singularidade. Por exemplo, o sistema

$$\left(L \circ f(x)\right) \left(f'(x)\right)^2 \dot{x} = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad C(y) \dot{y} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

descreve a dinâmica de um circuito RLC. Veja o Exemplo 6 de [42] para mais detalhes, onde também podem ser encontrados outros exemplos.

Em [9] os autores usaram blow-ups homogêneos para estudar pontos singulares do conjunto de impasse de um sistema forçado real polinomial no plano. Além disso, foi adotada a hipótese de que o polinômio é homogêneo, dentre outras condições de não degenerescência. O primeiro resultado do nosso trabalho, que também pode ser encontrado na pré-publicação [34], é um teorema de resolução de singularidades de sistemas forçados reais analíticos que não requer tais condições de não degenerescência.

Como nossa prova utiliza blow-ups com peso, precisamos trabalhar numa categoria mais geral de variedades, que são as variedades com esquinas. Ficará claro ao longo deste trabalho que, ao aplicar um blow-up em uma singularidade, estamos substituindo um ponto por um conjunto homeomorfo à $\mathbb{S}^1$, e este processo modifica o espaço ambiente, que agora será uma variedade com esquinas (veja a Figura 1.1). Dessa forma, para enunciar o teorema precisamos fazer menção ao espaço ambiente, e isto demandará também que definamos um sistema forçado globalmente. Esta definição é dada de forma precisa na Seção 2.1, mas vamos introduzi-la agora brevemente com o objetivo de enunciar nossos resultados.

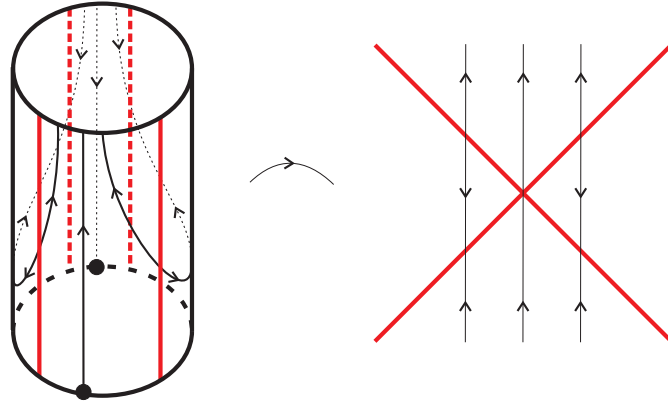


Figura 1.1: Sistema forçado em uma variedade com esquinas após blow-up.

Uma **variedade com esquinas 2-dimensional** $\mathcal{M}$ é uma variedade analítica cujos abertos são homeomorfos a abertos de $(\mathbb{R}_{\geq 0})^2$.

Uma **1-folheação orientada analítica**, por sua vez, é uma coleção de pares $\mathcal{X} = \{(U_i, X_i)\}_{i \in I}$ tal que $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de $\mathcal{M}$, $X_i = (P_i, Q_i)$ é um campo de vetores analítico definido em U_i e, na intersecção de dois abertos $U_i \cap U_j$, os campos X_i e X_j coincidem a menos de uma função estritamente positiva.

Finalmente, **feixe de ideais principais** $\mathcal{I} = \{(U_i, \delta_i)\}_{i \in I}$ é uma coleção de pares tal que $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de $\mathcal{M}$, δ_i é uma função analítica irreduzível definida em U_i e, na intersecção de dois abertos $U_i \cap U_j$, as funções δ_i e δ_j coincidem a menos de uma função estritamente positiva. O conjunto de zeros deste ideal é o **conjunto de impasse**.

Um sistema forçado 2-dimensional analítico é a terna $(\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$.

De maneira intuitiva, o processo de resolução de singularidades consiste em substituir uma singularidade de um sistema forçado por um novo conjunto compacto. Neste novo conjunto compacto, singularidades menos degeneradas deverão aparecer. Novamente aplicamos este raciocínio para as novas singularidades que aparecem, e ao final do processo obtemos as singularidades mais “simples” possíveis. Esta noção de “simples” é justamente a noção de *ponto elementar*. Ambas as definições de singularidade e de ponto elementar de um sistema forçado estão apresentadas com detalhes na Seção 2.2.

Agora estamos aptos para enunciar nosso primeiro resultado.

Resultado A. Seja $(\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$ um sistema forçado real analítico 2-dimensional definido numa variedade compacta com esquinas. Existe uma sequência finita de blow-ups com peso

$$(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mathcal{X}}, \widetilde{\mathcal{I}}) = (\mathcal{M}_n, \mathcal{X}_n, \mathcal{I}_n) \xrightarrow{\Phi_n} \cdots \xrightarrow{\Phi_0} (\mathcal{M}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{I}_0) = (\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$$

tal que $(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mathcal{X}}, \widetilde{\mathcal{I}})$ é elementar.

O enunciado preciso do Resultado A é o Teorema 3.19, que é o objeto de estudo de todo o Capítulo 3, e tanto seu enunciado quanto sua prova podem ser encontrados na Sub-seção 3.3.2. Para mais detalhes a respeito da noção de sistema forçado elementar, veja as Definições 2.6 e 3.6 e o Teorema 3.8.

O primeiro Teorema de resolução de singularidades para campos de vetores planares analíticos foi enunciado por Bendixson [5] e foi provado por Seidenberg [40]. Tal resultado foi generalizado por Dumortier [15] para campos de vetores reais C^∞ . Brunella e Miari [6] consideraram blow-ups com peso para resolver singularidades isoladas de campos de vetores analíticos sob algumas condições de não degenerescência. Pelletier [33] deu uma prova sem tais condições de não degenerescência, e no mesmo trabalho a autora também deu uma estimativa para o número de blow-ups com peso necessários para resolver uma singularidade. Panazzolo [32] provou o teorema de resolução de singularidades para campos de vetores analíticos em dimensão 3.

No que diz respeito a resolução de singularidades de sistemas forçados, o Teorema 3.19 pode ser provado da seguinte forma. Primeiro, aplicamos o resultado clássico de Bendixson–Seidenberg para resolver as singularidades da folheação $\mathcal{X}$, e em seguida aplicamos resultados da Geometria Algébrica a respeito de resolução de singularidades de conjuntos analíticos subordinados à folheações. De fato, uma vez que a folheação possui apenas pontos elementares, pelo teorema principal de [3] existe uma resolução de singularidades para o ideal de impasse $\mathcal{I}$ de modo que os pontos da folheação continuam elementares.

Por outro lado, a abordagem utilizada neste trabalho não utiliza resultados de Geometria Algébrica, e a folheação e o conjunto de impasse são dessingularizados simultaneamente. Neste sentido, algumas ideias e definições utilizadas foram inspiradas em [4, 32, 33].

Uma vez que o Teorema de resolução de singularidades de sistemas forçados foi provado, podemos usar blow-ups para estudar e classificar retratos de fase dessa classe de sistemas. Este é justamente o conteúdo desenvolvido no Capítulo 4 e que podem ser encontrado também na pré publicação [35]. Como tal estudo é local, vamos denotar um sistema forçado definido em uma vizinhança de um ponto p pela terna (X, δ, p) , em que X denota o campo de vetores adjunto e δ é uma função analítica irredutível cujo conjunto de zeros é o conjunto de impasse Δ_δ . Quando p é a origem, denotamos o sistema forçado simplesmente por (X, δ) .

Primeiramente, damos uma condição baseada na resolução de singularidades que determina quando dois sistemas forçados são equivalentes (ou mais precisamente, C^0 -orbitalmente equivalentes). Esta condição é chamada *esquema elementar de singularidades* (veja a Definição 4.5, Seção 4.1). A grosso modo, provamos que se dois sistemas forçados possuem a mesma resolução de singularidades, então eles são equivalentes. Este resultado estende o Teorema B de [15] para o contexto de sistemas com impasses. Em outras palavras:

Resultado B. Se dois sistemas forçados possuem o mesmo esquema elementar de singularidades então, localmente, eles são equivalentes.

O enunciado preciso do Resultado B é exatamente o enunciado do Teorema 4.10 (veja Seção 4.1), e a definição de equivalência que adotamos ao longo deste trabalho pode ser encontrada na Seção 2.1. Tal teorema é um resultado chave para provar os Resultados C e D e no desenvolvimento do restante do Capítulo 4.

No que diz respeito ao Resultado C, suponha que 0 é uma singularidade do sistema forçado (X, δ) , em que 0 é um ponto de equilíbrio do campo de vetores adjunto X e um ponto regular da curva de impasse Δ simultaneamente. Associamos um polígono de Newton $\mathcal{P}$ a este sistema forçado e mostramos no Resultado C que os termos que estão na fronteira $\partial\mathcal{P}$ do polígono determinam topologicamente o retrato de fase. Em outras palavras, os termos na fronteira $\partial\mathcal{P}$ definem a chamada *parte principal* (X_Ω, δ) do sistema forçado (veja a Definição 4.14, Seção 4.2), e provamos que, sob certas condições de não degenerescência, o sistema forçado original é orbitalmente equivalente a sua parte principal.

De um ponto de vista prático, o Resultado C diz que se quisermos estudar propriedades topológicas de uma singularidade próxima a parte regular de Δ , podemos “descartar” os termos da expansão em Taylor que não estão na fronteira $\partial\mathcal{P}$ do polígono. Este resultado estende o Teorema A de [6] para o contexto de sistemas forçados.

Resultado C. Sob certas condições de não degenerescência, um sistema forçado (X, δ) é, localmente, equivalente a sua parte principal (X_Ω, δ) .

O enunciado preciso do Resultado C é o Teorema 4.19, cuja prova pode ser encontrado na Seção 4.2.

O próximo objetivo é classificar retratos de fase de sistemas forçados cuja curva de impasse é singular. Defina o conjunto $\mathcal{A}$ como sendo o conjunto dos sistemas forçados (X, δ) definidos numa vizinhança da origem tais que:

1. O campo de vetores adjunto é constante, isto é, $X(x, y) = (a, b)$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$.
2. A função δ é uma das funções dadas pela classificação das singularidades do tipo ADE de Arnold [2] (veja a tabela 4.1 na Seção 4.3).

O Resultado D dá condições para garantir quando um sistema forçado (X, δ) é equivalente a um sistema em $\mathcal{A}$, em que os coeficientes $a_{-1,0}$ e $b_{0,-1}$ na expansão

$$\begin{cases} \delta(x, y)\dot{x} &= a_{-1,0} + a_{0,0}x + a_{-1,1}y + \dots, \\ \delta(x, y)\dot{y} &= b_{0,-1} + b_{0,0}y + b_{1,-1}x + \dots, \end{cases} \quad (1.1)$$

satisfazem $a_{-1,0}^2 + b_{0,-1}^2 \neq 0$ e a função δ é uma das dadas pela Tabela 4.1.

Resultado D. São dadas condições para que um sistema forçado da forma (1.1) seja equivalente a um sistema do conjunto $\mathcal{A}$, e também classificam-se todos os retratos de fase possíveis.

O enunciado preciso do Resultado D é o Teorema 4.20, Seção 4.3.

Já na segunda parte desta trabalho, no Capítulo 5, é realizado um estudo de fluxos de campos de vetores polinomiais tridimensionais em superfícies algébricas invariantes, cujos resultados estão na publicação [41]. Mais precisamente, o objetivo é criar uma ponte entre o estudo de sistemas forçados e o estudo de fluxo em tais superfícies. Para isso, vamos considerar campos de vetores tridimensionais cuja superfície algébrica invariante pode ser escrita da forma

$$M = \{(x, y, z); H(x, y, z) = f(x, y)z - g(x, y) = 0\},$$

onde $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são polinômios.

Como será explicitado mais adiante, superfícies como M podem ser conexas ou desconexas, regulares ou singulares, etc. Além disso, sistemas famosos na literatura de ciências aplicadas (Equação de Falkner–Skan, Sistema de Interação de Três ondas, Sistema de Lorenz, Sistema de Chen) possuem superfícies algébricas invariantes dessa forma.

A superfície M pode ser escrita como a união disjunta de dois subconjuntos: $\mathcal{G}_M$ e $\mathcal{I}_M$. O primeiro deles é o gráfico da função $z = (g/f)(x, y)$, e o segundo deles representa o subconjunto de M que não pode ser escrito como gráfico com relação às variáveis x e y . O conjunto $\mathcal{I}_M$ será chamado de **conjunto de pseudo-impasse**.

Devido à existência do conjunto de pseudo impasse, o fluxo do campo de vetores polinomial tridimensional X em M não pode ser globalmente descrito por um sistema de equações diferenciais ordinárias no plano. Por outro lado, provamos que o fluxo pode ser descrito por um sistema forçado.

Exemplo 1.1. Considere o campo de vetores $X(x, y, z) = (2y, 2xz, (x^2 - 1)z - (y^2 - 1))$, que possui $H(x, y, z) = (x^2 - 1)z - (y^2 - 1)$ como polinômio de Darboux. Podemos escrever $M = H^{-1}(0)$ da forma $M = \mathcal{G}_M \cup \mathcal{I}_M$, em que

$$\mathcal{G}_M = \{(x, y, z) \in M | z = (y^2 - 1)/(x^2 - 1), x \neq \pm 1\}, \text{ e}$$

$$\mathcal{I}_M = \{(x, y, z) \in M | y^2 - 1 = 0 = x^2 - 1, z \in \mathbb{R}\}.$$

Geometricamente, $\mathcal{I}_M \subset M$ é formado por quatro retas paralelas ao eixo z . O fluxo de X em $\mathcal{G}_M$ é descrito pelo sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2y; \\ \dot{y} &= \frac{2x(y^2 - 1)}{(x^2 - 1)}; \end{cases} \quad (1.2)$$

ao passo que o fluxo em toda a superfície M é descrito pelo sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2y; \\ (x^2 - 1)\dot{y} &= 2x(y^2 - 1). \end{cases} \quad (1.3)$$

Observe que a projeção de $\mathcal{I}_M$ no plano xy é um conjunto de pontos de equilíbrio do tipo nó hiperbólico do sistema adjunto

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x^2 - 1); \\ \dot{y} = 2x(y^2 - 1). \end{cases} \quad (1.4)$$

Pode-se mostrar que $\mathcal{I}_M$ não contém pontos de equilíbrio de X , e que essas quatro retas não são invariantes pelo fluxo de X . Veja a Figura 1.1.

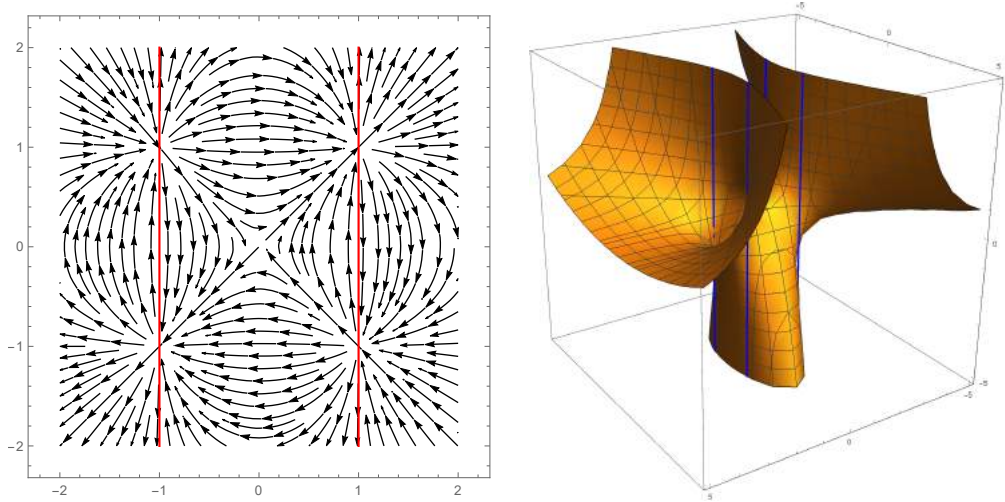


Figura 1.2: Retrato de fase de (1.2) (esquerda) e superfície M (direita). O conjunto de impasse Δ está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M$ está destacado em azul.

A questão que norteia o desenvolvimento do quinto Capítulo é: como o estudo de sistemas forçados no plano pode ser útil no entendimento dos fluxos de campos de vetores tridimensionais em superfícies invariantes da forma $M = \{f(x, y)z - g(x, y) = 0\}$? Para responder a esta pergunta, deve-se olhar para o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M$ e nossa abordagem buscou responder as seguintes questões:

1. Como uma singularidade de um sistema forçado pode nos ajudar a descrever o fluxo de X na superfície invariante M ?
2. As singularidades de um sistema forçado estão relacionadas com a geometria da superfície M , isto é, estão relacionadas com o fato de M ser regular ou singular, conexa ou desconexa?
3. Como é a projeção do conjunto de pseudo impasse no plano? Como são das dinâmicas do sistema forçado em torno do ponto projetado?
4. Quando o fluxo de X de em M é transversal a $\mathcal{I}_M$? Quando $\mathcal{I}_M$ é invariante por X ?

Equações diferenciais ordinárias descrevem o fluxo de X apenas em $\mathcal{G}_M$, ao passo que sistemas forçados podem descrever o fluxo em toda a superfície M . Nesta direção, nossos principais resultados são:

Resultado E. Seja $M = \{f(x, y)z - g(x, y) = 0\}$ uma superfície algébrica invariante do campo de vetores polinomial $X = \left(\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z), \gamma(x, y, z)\right)$. Então existe um sistema polinomial forçado definido em $\mathbb{R}^2$ tal que

1. O conjunto de impasse de tal sistema é dado por $\Delta = \{f(x, y) = 0\}$;
2. No conjunto aberto $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, as curvas solução do sistema forçado são as projeções no plano xy das curvas solução de X em $\mathcal{G}_M$;
3. A projeção do conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M$ no plano xy está contida no conjunto de impasse Δ e é um conjunto de pontos de equilíbrio do campo de vetores adjunto A^*F .

Resultado F. Se $q = (x_0, y_0)$ é um ponto de impasse e equilíbrio hiperbólico do campo de vetores adjunto, então a reta $r = \{(x_0, y_0, z) | z \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{I}_M$ satisfaz:

1. O fluxo do campo de vetores tridimensional em M é transversal à r ;
2. Não há pontos singulares de M em r ;
3. A linha r não contém pontos de equilíbrio do campo de vetores tridimensional.

Os Resultados E e F dizem respeito aos Teoremas 5.5 e 5.21, respectivamente. Além disso, mostramos que propriedades geométricas de M estão relacionadas com o tipo de singularidade do sistema forçado.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 apresentamos os conceitos necessários para o entendimento e desenvolvimento dos resultados. Todo o Capítulo 3 é dedicado ao estudo do algoritmo de resolução de singularidades (também abordado na pré-publicação [34]), que será fundamental no desenvolvimento do Capítulo 4, onde nós usamos a resolução de singularidades como ferramenta para estudar e classificar retratos de fase de sistemas forçados (veja a pré-publicação [35]). Finalmente, no Capítulo 5 apresentamos os resultados relacionados ao estudo de fluxos em superfícies invariantes, que também podem ser encontrados na publicação [41].

2 Conceitos preliminares

Neste capítulo apresentaremos o principal objeto de estudo deste trabalho, sistemas forçados, bem como nossas principais ferramentas: blow-ups e o polígono de Newton. Em cada seção o leitor poderá encontrar as referências de cada definição adotada. Na Seção 2.5 introduzimos o chamado *campo de vetores auxiliar*, que será um objeto bastante útil durante o processo de dessingularização de sistemas forçados. Ao final deste capítulo, apresentamos dois exemplos que ilustram todos os conceitos aqui introduzidos.

2.1 Sistemas forçados

Existe uma extensa literatura que trata de sistemas forçados. As definições apresentadas nesta seção seguem àquelas presentes em [9, 25, 43, 44]. Aplicações podem ser encontradas em [38, 42].

Definição 2.1. Um **sistema forçado n -dimensional analítico** (ou sistema com impasse) em um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é dado por

$$A(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

em que $\mathbf{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, $A : U \rightarrow \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções analíticas. Um ponto $\mathbf{p}$ tal que $\det A(\mathbf{p}) = 0$ é chamado **ponto de impasse**, e o chamado **conjunto de impasse** é o conjunto $\Delta = \{\mathbf{p} \in U; \det A(\mathbf{p}) = 0\}$.

Ao longo deste trabalho, vamos supor que A não possui rank constante. Também vamos supor que $\det A(\mathbf{x}) = 0$ apenas em um conjunto de codimensão maior ou igual a um. Isto implica que a matriz adjunta A^* de A (a transposta da matriz dos cofatores de A) não é identicamente nula e $AA^* = A^*A = \det(A)I$ (veja o Lema 37.1, [37]). Sistemas forçados no plano cuja matriz associada possui rank constante foram minuciosamente estudados em [11, 12].

Observe que fora do conjunto de impasse o sistema forçado pode ser escrito da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A^{-1}(\mathbf{x})F(\mathbf{x}),$$

que é uma equação diferencial ordinária clássica.

Multiplicando ambos os lados de (2.1) pela matriz adjunta A^* de A , pode ser mostrado que γ é solução de (2.1) se, e somente se, γ é solução de

$$\delta(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = A^*(\mathbf{x})F(\mathbf{x}); \quad (2.2)$$

em que $\delta : U \rightarrow \mathbb{R}$ é a função determinante e $\{\mathbf{x} \in U; \delta(\mathbf{x}) = 0\}$ é o conjunto de impasse Δ (veja o Lema 37.2, [37]). Observe que, como A é analítica, A^* e δ também são analíticas.

Definição 2.2. O campo de vetores $X(\mathbf{x}) = A^*(\mathbf{x})F(\mathbf{x})$ será chamado de **campo de vetores adjunto** e um sistema forçado da forma (2.2) será chamado de **sistema forçado diagonalizado**.

Em um ponto de impasse $\mathbf{p}$, como o operador $A(\mathbf{p})$ não é invertível, resultados clássicos da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias não são verdadeiros neste contexto, como por exemplo o teorema de existência e unicidade. Entretanto, podemos descrever a dinâmica próxima a um ponto de impasse da seguinte forma. No aberto onde $\det A(\mathbf{q}) > 0$, o retrato de fase é dado pelo campo de vetores adjunto X . Por outro lado, no aberto onde $\det A(\mathbf{q}) < 0$ o retrato de fase é dado por $-X$.

Como nossa prova utiliza blow-ups com peso, precisamos trabalhar numa categoria mais geral de variedades, que são as variedades com esquinas. Uma **variedade com esquinas 2-dimensional** é uma variedade analítica cujos abertos são homeomorfos a abertos de $(\mathbb{R}_{\geq 0})^2$. Para mais detalhes, veja [21]. Como ficará mais claro nos capítulos seguintes, quando aplicamos um blow-up em uma singularidade nós obtemos um novo espaço ambiente, que é uma variedade com esquinas. Ao longo desta Tese, uma variedade com esquinas 2-dimensional será denotada por $\mathcal{M}$. Veja a Figura 1.1

Uma **1-folheação orientada analítica** em $\mathcal{M}$ é uma coleção $\mathcal{X} = \{(U_i, X_i)\}_{i \in I}$ tal que $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de $\mathcal{M}$, $X_i = (P_i, Q_i)$ é um campo de vetores analítico definido em U_i e, para cada $i, j \in I$, existe uma função estritamente positiva $u_{i,j}$ tal que $X_i = u_{i,j}X_j$ em $U_i \cap U_j$. Também vamos supor que $\partial\mathcal{M}$ é um conjunto invariante pela folheação e que P_i e Q_i não possuem fator comum, isto é, os pontos de equilíbrio de X_i são isolados.

Um **feixe de ideais principais** $\mathcal{I}$ é uma coleção de pares $\mathcal{I} = \{(U_i, \delta_i)\}_{i \in I}$ tal que $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de $\mathcal{M}$, δ_i é uma função analítica irreduzível definida em U_i e, para cada $i, j \in I$, existe uma função estritamente positiva $v_{i,j}$ tal que $\delta_i = v_{i,j}\delta_j$ em $U_i \cap U_j$. Dizemos que $\mathcal{I}$ é o **ideal de impasse** do sistema forçado e seu conjunto de zeros Δ (localmente dado por $\{\delta_i = 0\}$) é o **conjunto de impasse**.

Um cálculo direto mostra que curvas de fase do sistema forçado coincidem na intersecção $U_i \cap U_j$ de dois abertos da cobertura. Globalmente, um sistema forçado é definido como a terna $(\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$, em que $\mathcal{M}$ é uma variedade com esquinas, $\mathcal{X}$ é uma 1-folheação orientada e $\mathcal{I}$ é o ideal de impasse.

Definição 2.3. Dois sistemas forçados $\delta_i(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = X_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$, são **orbitalmente equivalentes nos pontos** $\mathbf{p}_i \in \Delta_i$, $i = 1, 2$, se existem abertos $V_1 \ni \mathbf{p}_1$ e $V_2 \ni \mathbf{p}_2$ e um difeomorfismo analítico $\Phi : V_1 \rightarrow V_2$ tal que

1. Φ leva o conjunto de impasse Δ_1 no conjunto de impasse Δ_2 ;
2. Φ leva curvas de fase de X_1 em $V_1 \setminus \Delta_1$ em curvas de fase de X_2 em $V_2 \setminus \Delta_2$, não necessariamente preservando orientação.

No caso em que Φ preserva orientação, dizemos que Φ é uma **equivalência orbital que preserva orientação**.

Para encerrar esta seção, apresentamos a definição de equivalência orbital global.

Definição 2.4. Sejam $(\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$ e $(\mathcal{M}', \mathcal{X}', \mathcal{I}')$ dois sistemas forçados. Dizemos $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ é uma **equivalência orbital global entre** $(\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$ e $(\mathcal{M}', \mathcal{X}', \mathcal{I}')$ se F é um difeomorfismo analítico que leva folhas de $\mathcal{X}$ em folhas de $\mathcal{X}'$ preservando orientação e leva geradores de $\mathcal{I}$ em geradores de $\mathcal{I}'$.

2.2 Singularidades de sistemas forçados

A definição de singularidade de um sistema forçados que adotamos nesta Tese é um pouco mais geral que aquela presente em [43, 44], pois nesses trabalhos os autores estudaram a dinâmica em torno de pontos suaves do conjunto de impasse. Como foi dito na introdução, aqui também vamos considerar pontos singulares do conjunto de impasse Δ . Observamos também que, para nosso conhecimento, não havia, até então, uma definição na literatura de ponto elementar de um sistema forçado planar.

Definição 2.5. Dizemos que $\mathbf{p} \in U$ é uma **singularidade do sistema forçado** se uma das seguintes condições é satisfeita:

1. $\mathbf{p}$ é um ponto de equilíbrio de X , isto é, $X(\mathbf{p}) = 0$;
2. o conjunto de impasse Δ é singular em $\mathbf{p}$;
3. $\mathbf{p}$ é um ponto de tangência entre X e Δ , isto é, $d\delta(X) = 0$.

Caso contrário, dizemos que $\mathbf{p}$ é **não singular**. Veja as Figuras 2.1 e 2.2.

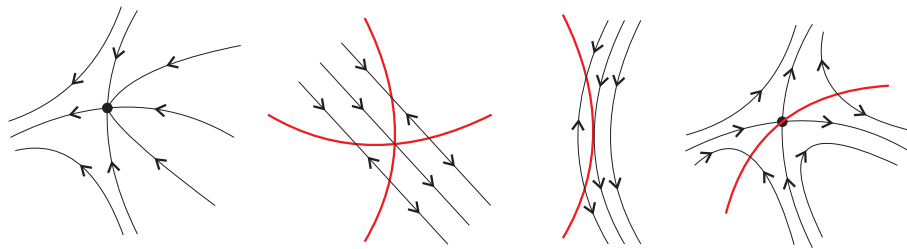


Figura 2.1: Singularidades de um sistema forçado planar. O conjunto de impasse está destacado em vermelho.

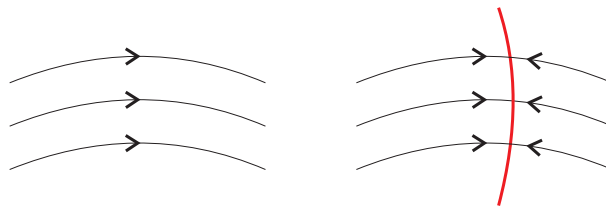


Figura 2.2: Pontos não singulares de um sistema forçado planar. O conjunto de impasse está destacado em vermelho.

Daqui em diante, vamos considerar apenas sistemas forçados no plano. Dizemos que um ponto de equilíbrio de um campo de vetores é *semi hiperbólico* se ao menos um dos autovalores de sua linearização possui parte real não nula.

Definição 2.6. Um sistema forçado planar é **elementar** em $p \in U \subset \mathbb{R}^2$ se uma das seguintes condições é satisfeita:

1. p é um ponto não singular;
2. p é um ponto de equilíbrio semi hiperbólico de X e $p \notin \Delta$;

3. Se p é um ponto de equilíbrio semi hiperbólico de X e $p \in \Delta$, então Δ coincide com uma trajetória de X .

Dizemos que $(\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$ é **elementar** se $(\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$ é elementar em todo $p \in \mathcal{M}$. Veja a Figura 2.3.

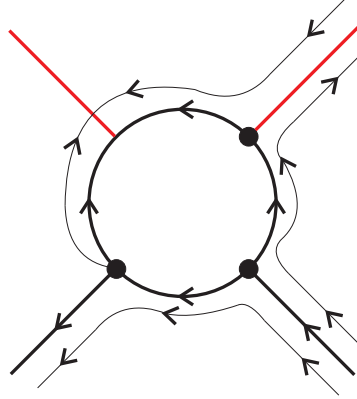


Figura 2.3: Pontos elementares do sistema forçado. O conjunto de impasse está destacado em vermelho.

2.3 Blow-up quase-homogêneos

Nesta seção são introduzidos blow-ups com peso, também chamados de blow-ups quase-homogêneos. Seguiremos as definições apresentadas em [32] para blow-ups em variedades com esquina n -dimensionais. As referências [1, 16] fazem uma introdução desta ferramenta para o caso 2-dimensional. A grosso modo, explodir uma singularidade (ou aplicar um blow-up nela) significa substituir tal ponto por um novo conjunto compacto, e assim obtém-se um novo espaço ambiente. Neste novo conjunto compacto, novas singularidades menos degeneradas podem aparecer.

Seja $(\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$ um sistema forçado real analítico 2-dimensional e fixe coordenadas locais na vizinhança de um ponto.

Definição 2.7. Um **vetor peso** é um vetor $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ cujas entradas são inteiros positivos. Um **ω -blow-up quadrático com peso** é a aplicação real analítica sobrejetora

$$\begin{aligned} \Phi_\omega : \widetilde{\mathcal{M}} = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ (\bar{x}, \tau) &\mapsto \tau^\omega \bar{x} = (\tau^{\omega_1} \bar{x}_1, \dots, \tau^{\omega_n} \bar{x}_n), \end{aligned}$$

em que $\mathbb{S}^{n-1} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 = 1\}$. O conjunto $\Omega = \{(0, \dots, 0)\}$ é chamado **centro do blow-up** e o conjunto $\Phi_\omega^{-1}(\Omega) = \mathbb{S}^{n-1} \times \{0\} = \mathbb{E}$ é chamado **divisor excepcional**.

Observe que $\widetilde{\mathcal{M}}$ é uma variedade com esquinas e $\Phi_\omega|_{\widetilde{\mathcal{M}} \setminus \mathbb{E}}$ é um difeomorfismo analítico que leva seu domínio em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. O blow-up é definido da mesma forma para o caso onde o centro do blow-up está definido na fronteira $\partial \mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$.

Quando explodimos um ponto fora da fronteira $\partial \mathcal{M}$, então $\mathbb{E}$ é a fronteira de $\widetilde{\mathcal{M}}$. Por outro lado, se explodimos um ponto em $\partial \mathcal{M}$, então previamente já há um divisor $\mathcal{D}$ em $\mathcal{M}$ e a fronteira $\widetilde{\mathcal{M}}$ é dada por $\widetilde{\mathcal{D}} = \Phi_\omega^{-1}(\mathcal{D}) \cap \mathbb{E}$.

Definição 2.8. Dada uma folheação analítica orientada $\mathcal{X}$ em $\mathcal{M}$, o **pull back de $\mathcal{X}$** é a folheação analítica orientada $\tilde{\mathcal{X}} = \Phi_\omega^* \mathcal{X}$ definida em $\tilde{\mathcal{M}}$, que é equivalente a $\mathcal{X}$ fora de $\mathbb{E}$. Analogamente, o **pull back de $\mathcal{I}$** é o ideal de impasse $\tilde{\mathcal{I}} = \Phi_\omega^* \mathcal{I}$ definido em $\tilde{\mathcal{M}}$ cujos geradores são levados nos geradores de $\mathcal{I}$ por Φ_ω . A terna $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{I}})$ será chamada **transformada estrita de $(\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$** .

Pode-se checar que fora do divisor excepcional as ternas $(\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$ e $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{I}})$ são orbitalmente equivalente e com mesma orientação.

Em muitas situações é mais prático considerar blow-ups direcionais ao invés do blow-up quadrático. Dados o vetor peso $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ e $\sigma \in \{+, -\}$, considere o conjunto V_i^σ

$$V_i^\sigma = \{(\bar{x}, \tau) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}; \sigma x_i > 0\},$$

defina a projeção

$$\begin{aligned} \Pi_i^\sigma : V_i^\sigma &\rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ (\bar{x}, \tau) &\mapsto (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \tau, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n), \end{aligned}$$

e a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi_{i,\omega}^\sigma : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) &\mapsto (\tilde{x}_i^{\omega_1} \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_i^{\omega_{i-1}} \tilde{x}_{i-1}, \sigma \tilde{x}_i^{\omega_i}, \tilde{x}_i^{\omega_{i+1}} \tilde{x}_{i+1}, \dots, \tilde{x}_i^{\omega_n} \tilde{x}_n). \end{aligned}$$

Definição 2.9. A **carta x_i -direcional** é dada pelos pares $(V_i^\sigma, \Pi_i^\sigma)$ e o **blow-up com peso na direção x_i** é dado por $\Phi_{i,\omega}^\sigma$.

Pode se mostrar que o Diagrama 2.4 é comutativo. O pull-back de $\mathcal{X}$, o pull-back de $\mathcal{I}$ e a transformada estrita $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{I}})$ de $(\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$ são definidos como anteriormente.

$$\begin{array}{ccc} V_i^\sigma & \xrightarrow{\Phi_\omega} & \mathbb{R}^n \cap \{\sigma x_i \geq 0\} \\ \downarrow \Pi_i^\sigma & & \downarrow id \\ U & \xrightarrow{\Phi_{i,\omega}^\sigma} & \mathbb{R}^n \cap \{\sigma x_i \geq 0\} \end{array}$$

Figura 2.4: Equivalência entre os blow-ups quadrático e direcional.

2.4 O polígono de Newton

Uma pergunta que surge naturalmente é: como escolhemos o vetor peso para o blow-up? Para fazer uma boa escolha no contexto de resolução de singularidades, utilizamos o polígono de Newton associado a um campo de vetores analítico. Nesta seção vamos ver a construção de tal objeto matemático, que também pode ser encontrada em [1, 16, 33].

Seja X um campo de vetores analítico. Assim como em [32], escrevemos X na chamada *base logarítmica*. Mais precisamente, considere

$$X(x, y) = \sum x^m y^n \left(a_{m,n} x \frac{\partial}{\partial x} + b_{m,n} y \frac{\partial}{\partial y} \right);$$

em que os coeficientes $a_{m,n}, b_{m,n} \in \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes condições para $m, n \in \mathbb{Z}$:

1. Para $m < -1$ ou $n \leq -1$, $a_{m,n} = 0$;
2. Para $m \leq -1$ ou $n < -1$, $b_{m,n} = 0$.

Seja $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ um vetor de inteiros positivos. Podemos escrever o campo de vetores planar X da forma

$$X(x, y) = \sum_{d=-1}^{\infty} X_d^{(\omega_1, \omega_2)}(x, y), \quad (2.3)$$

em que

$$X_d^{(\omega_1, \omega_2)}(x, y) = \sum_{\omega_1 m + \omega_2 n = d} x^m y^n \left(a_{m,n} x \frac{\partial}{\partial x} + b_{m,n} y \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (2.4)$$

Em outras palavras, estamos escrevendo X como a soma de componentes quase-homogêneas.

Definição 2.10. Dizemos que (2.3) é uma (ω_1, ω_2) -**graduação de X** . Cada $X_d^{(\omega_1, \omega_2)}$ é chamado **nível d da (ω_1, ω_2) -graduação**.

Dada uma (ω_1, ω_2) -graduação de X , associa-se os monômios $a_{m,n} x^m y^n$ e $b_{m,n} x^m y^n$ de coeficientes não nulos a um ponto (m, n) do plano de potências. Observe que cada ponto (m, n) está contido em uma reta da forma $\{\omega_1 m + \omega_2 n = d\}$. Além disso, note que em geral a aplicação que leva um monômio a um ponto (m, n) não é injetora.

Definição 2.11. O **suporte $\mathcal{Q}$ de X** é o conjunto

$$\mathcal{Q} = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2; a_{m,n}^2 + b_{m,n}^2 \neq 0\}.$$

Definição 2.12. O **polígono de Newton $\mathcal{P}$** associado ao campo de vetores analítico X é o fecho convexo do conjunto $\mathcal{Q} + \mathbb{R}_+^2$.

A fronteira do polígono de Newton $\partial\mathcal{P}$ é a união de um número finito de segmentos. Tais segmentos são enumerados da esquerda para a direita: $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k+1}$. Observe que γ_0 é vertical e γ_{k+1} é horizontal. Analogamente, os pontos não regulares de $\partial\mathcal{P}$ são enumerados da esquerda para a direita: $v_0, \dots, v_k$.

Definição 2.13. Dizemos que $v_0, \dots, v_k$ são os **vértices do polígono de Newton**. O vértice $v_0 = (r_0, s_0)$ é chamado **vértice principal** e o segmento γ_1 é chamado **segmento principal**. O número s_0 é chamado **altura do polígono de Newton**. Veja a Figura 2.5.

O segmento principal está contido em uma reta da forma $\{m\omega_1 + n\omega_2 = R\}$, e o vetor $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ é normal à esta reta. No processo de resolução de singularidades de campos de vetores analíticos, escolhe-se o vetor ω como vetor peso (veja [1, 33]).

Dada uma função analítica $\delta : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ escrita da forma

$$\delta(x, y) = \sum_{0 \leq k, l} c_{k,l} x^k y^l,$$

podemos definir de forma completamente análoga o suporte, o polígono de Newton, vértice e segmento principal e altura para a função δ . A escolha do vetor peso para a resolução de singularidades de uma curva analítica também é feita a partir do segmento principal do polígono.

O polígono de Newton depende fortemente do sistema de coordenadas em que se está trabalhando. Isto significa que aplicando uma mudança de coordenadas, os monômios do campo de vetores mudam e conseqüentemente obtemos um polígono de Newton diferente. Isto pode ser um obstáculo durante o processo de resolução de singularidades. Mais adiante veremos como resolver este problema.

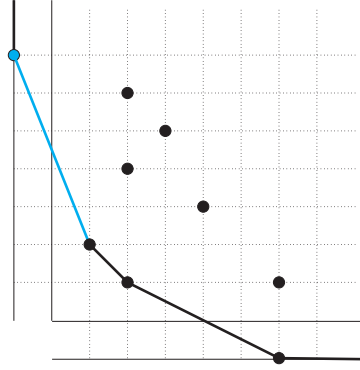


Figura 2.5: Polígono de Newton de um campo de vetores analítico. O vértice principal e o segmento principal estão destacados em azul.

2.5 Campo de vetores auxiliar

Para o nosso conhecimento, não está definido na literatura o que é um polígono de Newton de um sistema forçado no plano. Esta seção trata justamente de como podemos definir tal objeto matemático para esta classe de sistemas.

Lembre que um sistema forçado em sua forma diagonalizada é escrito da forma

$$\delta(x, y)\dot{x} = P(x, y), \quad \delta(x, y)\dot{y} = Q(x, y), \quad (2.5)$$

em que $\delta(x, y)$ é uma função real analítica irreduzível que pode ser escrita como

$$\delta(x, y) = \sum c_{k,l} x^k y^l,$$

em que $c_{k,l} \in \mathbb{R}$ é tal que $c_{k,l} = 0$ quando $k < 0$ ou $l < 0$.

Definição 2.14. O campo de vetores auxiliar X_A associado ao sistema forçado (2.5) é o campo de vetores real analítico

$$X_A(x, y) = \delta(x, y) \left(P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right) = \left(\sum c_{k,l} x^k y^l \right) \left(\sum x^m y^n \left(a_{m,n} x \frac{\partial}{\partial x} + b_{m,n} y \frac{\partial}{\partial y} \right) \right). \quad (2.6)$$

É fácil esboçar o retrato de fase do campo de vetores auxiliar. Fora do conjunto de impasse, o campo de vetores auxiliar (2.6) é obtido multiplicando o sistema forçado (2.5) pela função positiva δ^2 . Por outro lado, o conjunto de impasse Δ é uma curva de pontos de equilíbrio de (2.6).

Como o campo de vetores auxiliar é analítico, todas as definições e observações anteriores a respeito do polígono de Newton são verdadeiras para (2.6). Entretanto, observe que os pontos do plano de potências são da forma $(k + m, l + n)$, e portanto o suporte $\mathcal{Q}$ toma a forma

$$\mathcal{Q} = \{(k + m, l + n) \in \mathbb{Z}^2; c_{k,l}(a_{m,n}^2 + b_{m,n}^2) \neq 0\}.$$

Em outras palavras, o suporte do campo de vetores auxiliar é obtido pela Soma de Minkowski [39] entre os pontos do suporte do campo de vetores X e o suporte da curva δ . Além disso, os níveis da (ω_1, ω_2) -gradação são escritos da forma

$$X_{A,d}^{(\omega_1, \omega_2)} = \left(\sum_{\omega_1 k + \omega_2 l = d_1} c_{k,l} x^k y^l \right) \left(\sum_{\omega_1 m + \omega_2 n = d_2} x^m y^n \left(a_{m,n} x \frac{\partial}{\partial x} + b_{m,n} y \frac{\partial}{\partial y} \right) \right),$$

em que $d_1 + d_2 = d$. Finalmente, observamos que o polígono de Newton do campo de vetores adjunto e do campo de vetores auxiliar não são necessariamente os mesmos.

Para o nosso conhecimento, não há na literatura uma definição de polígono de Newton para sistemas forçados. Para contornar este problema, associamos um sistema forçado planar ao seu campo de vetores auxiliar X_A , e então utilizamos o polígono de Newton de X_A . Além disso, a vantagem de escrever o campo de vetores auxiliar desta forma é que isto torna nossos cálculos mais fáceis, e durante o processo de resolução de singularidades poderemos ver o que está acontecendo com o campo de vetores e com a curva, já que na nossa abordagem o campo de vetores e a curva de impasse são dessingularizados ao mesmo tempo.

Os próximos exemplos tem como objetivo ilustrar os conceitos introduzidos até aqui.

2.6 Exemplos

Exemplo 2.15. Considere o sistema forçado na forma diagonalizada

$$xy\dot{x} = y, \quad xy\dot{y} = x^2, \quad (2.7)$$

cujos campo de vetores auxiliar é

$$X_A(x, y) = (xy)y \frac{\partial}{\partial x} + (xy)x^2 \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.8)$$

O suporte de (2.8) é o conjunto $\mathcal{Q} = \{(0, 2), (3, 0)\}$. Portanto, o vértice principal do polígono de Newton associado a (2.8) é $(0, 2)$, a altura do polígono de Newton é igual a 2 e o segmento principal γ_1 está contido na reta $\{2r + 3s = 6\}$. Veja a Figura 2.6.

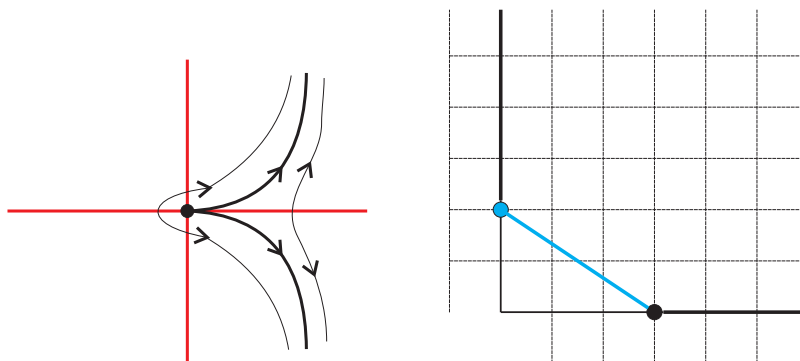


Figura 2.6: Retrato de fase de (2.7) (esquerda) e polígono de Newton de (2.8) (direita). O conjunto de impasse está destacado em vermelho e o vértice e segmento principais estão destacados em azul.

A prova do teorema de resolução de singularidades é feita usando blow ups direcionais, e o vetor peso escolhido é o vetor normal à reta que contém o segmento principal. Neste exemplo, o segmento principal está contido na reta $\{2r + 3s = 6\}$ e portanto o vetor peso é $\omega = (2, 3)$. Faremos os cálculos apenas nas direções x e y positivas, pois nas cartas negativas os cálculos são análogos.

As transformações são da forma

$$(x, y) = (\tilde{x}^2, \tilde{x}^3 \tilde{y}), \quad (x, y) = (\bar{y}^2 \bar{x}, \bar{y}^3),$$

nas direções x e y , respectivamente. Na direção x , o campo de vetores auxiliar toma a forma

$$\widetilde{X}_A = (\tilde{x}^5 \tilde{y}) \tilde{x} \frac{\tilde{y}}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + (\tilde{x}^5 \tilde{y}) \tilde{x} \left(\tilde{y}^{-1} - \frac{3}{2} \tilde{x} \tilde{y} \right) \tilde{y} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}},$$

e então multiplicando esta expressão por $\tilde{x}^{-6}$ obtém-se

$$\widetilde{X}_A = (\tilde{y}) \frac{\tilde{y}}{2} \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + (\tilde{y}) \left(1 - \frac{3}{2} \tilde{y}^2 \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}},$$

o que implica que nós temos o seguinte sistema forçado na direção x positiva:

$$\tilde{y} \dot{\tilde{x}} = \frac{\tilde{x} \tilde{y}}{2}, \quad \tilde{y} \dot{\tilde{y}} = 1 - \frac{3 \tilde{y}^2}{2}.$$

Nesta direção, os pontos $(0, \pm \sqrt{\frac{2}{3}})$ são selas hiperbólicas do campo de vetores adjunto e o conjunto de impasse intersecta o divisor excepcional $\{x = 0\}$ na origem. É interessante observar o que acontece com o polígono de Newton do campo de vetores auxiliar (2.8) quando explodimos a origem nesta direção. O segmento principal γ_1 é enviado a um segmento vertical $\tilde{\gamma}_1$ contido na reta $\{r = 6\}$ do plano rs . Quando multiplicamos o campo de vetores auxiliar por $\tilde{x}^{-6}$, transladamos esse segmento vertical $\tilde{\gamma}_1$ para o eixo s . Veja a Figura 2.7.

Analogamente, na direção y positiva o campo de vetores auxiliar (2.8) toma a forma

$$\overline{X}_A = (\bar{x} \bar{y}^5) \bar{y} \left(\bar{x}^{-1} - \frac{2}{3} \bar{x}^2 \right) \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + (\bar{x} \bar{y}^5) \bar{y} \frac{\bar{x}^2 \bar{y}}{3} \bar{y} \frac{\partial}{\partial \bar{y}},$$

e multiplicando esta expressão por $\bar{y}^{-6}$ obtemos

$$\overline{X}_A = (\bar{x}) \left(\bar{x}^{-1} - \frac{2}{3} \bar{x}^2 \right) \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + (\bar{x}) \frac{\bar{x}^2 \bar{y}}{3} \bar{y} \frac{\partial}{\partial \bar{y}},$$

o que implica que na direção y positiva o sistema forçado é da forma

$$\bar{x} \dot{\bar{x}} = 1 - \frac{2}{3} \bar{x}^3, \quad \bar{x} \dot{\bar{y}} = \frac{\bar{x}^2 \bar{y}}{3}.$$

Observe que nesta direção o conjunto de impasse toca o divisor excepcional $\{y = 0\}$ na origem e o ponto $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, 0\right)$ é uma sela hiperbólica do campo de vetores adjunto. O segmento principal γ_1 é enviado a um segmento horizontal $\bar{\gamma}_1$ contido na reta $\{s = 6\}$ do plano rs . Quando multiplicamos o campo de vetores auxiliar por $\bar{y}^{-6}$, transladamos o segmento horizontal $\bar{\gamma}_1$ para o eixo r . Veja a Figura 2.7.

Observe que todos os pontos no divisor excepcional são elementares, portanto a transformada estrita de (2.7) é elementar. Veja a Figura 2.8.

Exemplo 2.16. Considere o sistema forçado diagonalizado

$$(x - y^k) \dot{x} = 0; \quad (x - y^k) \dot{y} = 1.$$

A origem é uma tangência entre o campo de vetores adjunto $X(x, y) = (0, 1)$ e o conjunto de impasse $\Delta = \{x - y^k = 0\}$. O campo de vetores auxiliar é

$$X_A(x, y) = (x - y^k) \frac{\partial}{\partial y}.$$

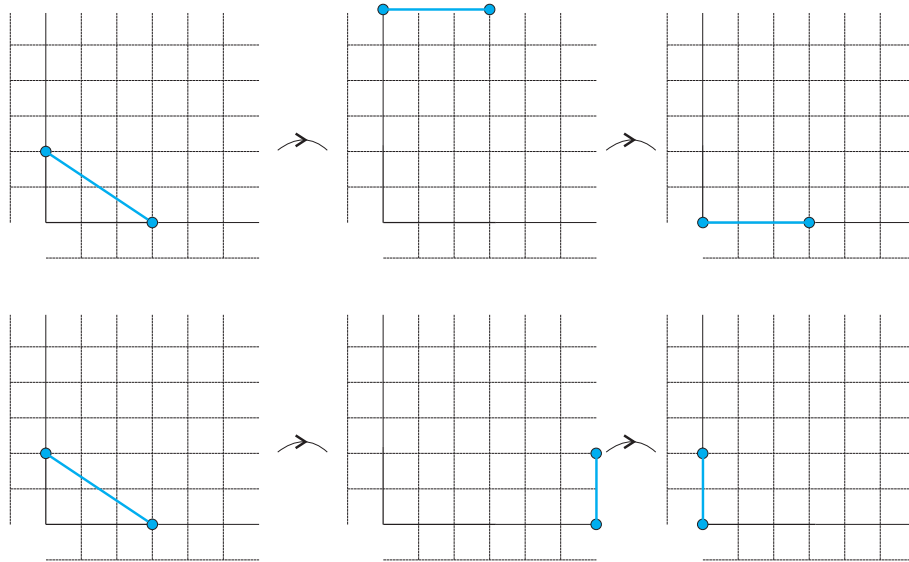


Figura 2.7: Segmento principal após blow-up na direção y (acima) e após blow-up na direção x (abaixo).

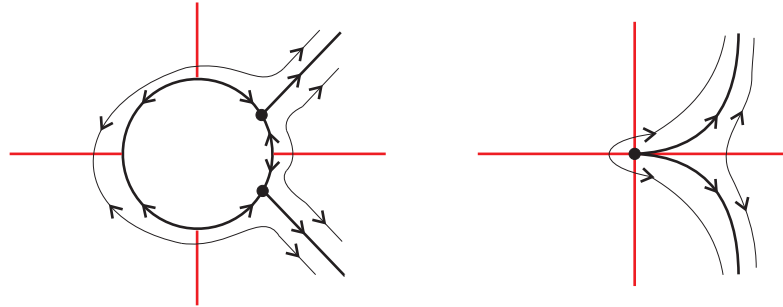


Figura 2.8: Sistema forçado (2.7) antes (direita) e depois (esquerda) do blow-up com peso na origem.

O suporte $\mathcal{Q}$ de X_A é o conjunto $\mathcal{Q} = \{(1, -1), (0, k - 1)\}$. Dessa forma, o vértice principal v_0 da polígono de Newton $\mathcal{P}_{X_A}$ é $(0, k - 1)$ e o segmento principal γ_1 está contido na reta $\{kr + s = 1\}$ e portanto o vetor peso é $\omega = (k, 1)$. Assim, os blow-ups nas direções x e y positivas são, respectivamente,

$$x = \tilde{x}^k, \quad y = \tilde{x}\tilde{y}; \quad \text{e} \quad x = \tilde{y}^k\bar{x}, \quad y = \tilde{y};$$

e portanto em cada carta obtemos os sistemas forçados

$$\begin{cases} (1 - \tilde{y}^k)\dot{\tilde{x}} = 0; \\ (1 - \tilde{y}^k)\dot{\tilde{y}} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} (\bar{x} - 1)\dot{\bar{x}} = -k\bar{x}; \\ (\bar{x} - 1)\dot{\bar{x}} = \tilde{y}. \end{cases}$$

Veja a Figura 2.9.

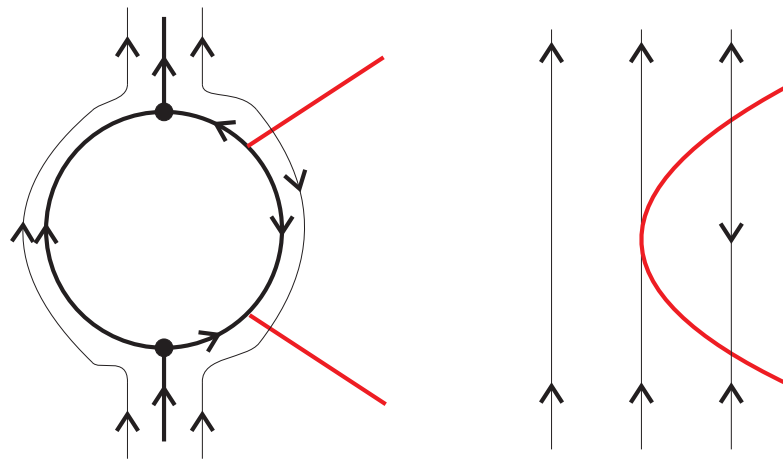


Figura 2.9: Tangência quadrática antes (direita) e depois (esquerda) do blow-up com peso na origem.

3 Resolução de singularidades de sistemas forçados

O objetivo central deste capítulo é provar o Teorema 3.19, presente na pré-publicação [34]. Na Seção 3.1.1 damos ferramentas para controlar o polígono de Newton durante o processo de resolução de singularidades, tendo em vista que este objeto matemático é extremamente sensível à mudança de coordenadas. Logo em seguida, na Seção 3.2, mostramos como identificar pontos elementares do sistema forçado usando o polígono de Newton. Finalmente, a Seção 3.3 é dedicada a provar o Teorema de resolução de singularidades de sistemas forçados.

3.1 Propriedades do polígono de Newton: controlabilidade e coordenadas admissíveis

Como foi discutido anteriormente, o polígono de Newton depende fortemente do sistema de coordenadas adotado. Isto significa que, após blow-up ou mudança de coordenadas, podemos obter um polígono completamente diferente. Nosso objetivo agora é definir ferramentas para controlar o polígono de Newton durante o processo de resolução de singularidades. Também vamos abordar uma mudança de coordenadas que será útil durante esse processo, chamada *mudança de coordenadas admissível*.

3.1.1 Preparação de coordenadas

Definição 3.1. (Definição 5.1, [15]) Dizemos que um sistema de coordenadas é **adaptado ao divisor** $\mathbb{E}$ se em tal sistema de coordenadas o divisor excepcional é dado por $\mathbb{E}_x = \{x = 0\}$, $\mathbb{E}_y = \{y = 0\}$ ou $\mathbb{E}_{x,y} = \{xy = 0\}$.

Lembre que, após explodir uma singularidade, o espaço ambiente é agora uma variedade com esquinas. Em coordenadas adaptadas, tais esquinas são os conjuntos $\mathbb{E}_x$, $\mathbb{E}_y$ ou $\mathbb{E}_{xy}$.

Definição 3.2. O polígono de Newton $\mathcal{P}$ associado a um campo de vetores é **controlável** se o vértice principal está contido em $\{0\} \times \mathbb{Z}$ ou $\{-1\} \times \mathbb{Z}$.

Considere o sistema forçado na forma diagonalizada

$$\begin{cases} \delta(x, y)\dot{x} &= P(x, y); \\ \delta(x, y)\dot{y} &= Q(x, y); \end{cases} \quad (3.1)$$

cujo campo de vetores auxiliar X_A associado a (3.1) é dado por

$$X_A(x, y) = \left(\sum c_{k,l} x^k y^l \right) \left(\sum x^m y^n \left(a_{m,n} x \frac{\partial}{\partial x} + b_{m,n} y \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \quad (3.2)$$

Em [33] foram estudados campos de vetores com singularidades isoladas. Esta hipótese implica que $\partial\mathcal{P}$ intersecta os eixos r e s do plano rs . Entretanto, isto nem sempre acontece quando consideramos campos de vetores que possuem curvas de singularidades, que é o caso do campo de vetores auxiliar. Por exemplo, considere o sistema forçado

$$xy\dot{x} = x^k; \quad xy\dot{y} = 2y^l,$$

em que $k, l \geq 1$ e cujo campo de vetores auxiliar é

$$X_A = xyx^k \frac{\partial}{\partial x} + xyy^l \frac{\partial}{\partial y}.$$

O suporte $\mathcal{Q}$ de X_A é da forma $\mathcal{Q} = \{(k, 1), (1, l)\}$, e portanto $\partial\mathcal{P}$ não intersecta os eixos r e s do plano rs .

Durante o processo de resolução de singularidades, vamos assumir que $\partial\mathcal{P}$ intersecta ao menos o eixo s . O próximo Lema mostra que isto não é uma condição restritiva.

Lema 3.3. *Considere o sistema forçado (3.1) e seu campo de vetores auxiliar (3.2). Defina a mudança de coordenadas*

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x} + \lambda\bar{y}, \bar{y}); \quad (3.3)$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$. Então as seguintes afirmações sobre Φ são verdadeiras:

1. O difeomorfismo Φ nos dá uma C^0 equivalência orbital que preserva orientação entre (3.1) e

$$\begin{cases} \delta(\bar{x} + \lambda\bar{y}, \bar{y})\dot{\bar{x}} &= P(\bar{x} + \lambda\bar{y}, \bar{y}) - \lambda Q(\bar{x} + \lambda\bar{y}, \bar{y}), \\ \delta(\bar{x} + \lambda\bar{y}, \bar{y})\dot{\bar{y}} &= Q(\bar{x} + \lambda\bar{y}, \bar{y}). \end{cases} \quad (3.4)$$

2. O difeomorfismo Φ define uma equivalência topológica entre (3.2) e o campo de vetores auxiliar de (3.4).
3. O polígono de Newton $\mathcal{P}$ associado ao campo de vetores auxiliar de (3.4) possui $(0, r)$ ou $(-1, r)$ como vértice principal, onde r é o grau mais baixo de sua expansão em componentes quase homogêneas.

Demonstração. Observe que

$$\begin{cases} \bar{x} &= x - \lambda y, \\ \bar{y} &= y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}} &= \dot{x} - \lambda\dot{y}, \\ \dot{\bar{y}} &= \dot{y}, \end{cases}$$

e então obtém-se o sistema (3.4). Como Φ é um difeomorfismo, ele leva o conjunto de impasse de (3.4) no conjunto de impasse de (3.1). Além disso, Φ leva curvas de fase de (3.4) em curvas de fase de (3.1). Isto implica que (3.4) e (3.1) são orbitalmente equivalentes. Não obstante, (3.2) e o campo de vetores auxiliar de (3.4) são topologicamente equivalentes, tendo em vista que, fora do conjunto de impasse, as curvas de fase do sistema forçado e do campo de vetores auxiliar são as mesmas. Isto prova os itens 1 e 2.

Após a mudança de coordenadas Φ , o campo de vetores auxiliar toma a forma

$$X_A = \left(\sum c_{k,l} (\bar{x} + \lambda \bar{y})^k \bar{y}^l \right) \left(\sum (\bar{x} + \lambda \bar{y})^m \bar{y}^n \left((a_{m,n}(\bar{x} + \lambda \bar{y}) - \lambda b_{m,n} \bar{y}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + b_{m,n} \bar{y} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) \right).$$

Sem perda de generalidade (e com o intuito de simplificar a notação), vamos considerar a primeira graduação daqui em diante. Então obtemos

$$\sum_{i=0}^k c_{k,l} \binom{k}{i} \lambda^i \bar{x}^{k-i} \bar{y}^{l+i} \left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \lambda^j \bar{x}^{m-j} \bar{y}^{n+j} (a_{m,n} \bar{x} + \lambda \bar{y} (a_{m,n} - b_{m,n})) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}}$$

na componente $\bar{x}$ e

$$\sum_{i=0}^k c_{k,l} \binom{k}{i} \lambda^i \bar{x}^{k-i} \bar{y}^{l+i} \left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \lambda^j \bar{x}^{m-j} \bar{y}^{n+j} b_{m,n} \right) \bar{y} \frac{\partial}{\partial \bar{y}}$$

na componente $\bar{y}$.

Se existe um par (m, n) tal que $a_{m,n} - b_{m,n} \neq 0$, então a componente $\bar{x}$ dá uma contribuição da forma $(-1, r)$ para o novo suporte $\overline{\mathcal{Q}}$, em que $r = (k + m) + (l + n)$. No caso onde $a_{m,n} - b_{m,n} = 0$ para todo (m, n) , observe que pelo menos um $b_{m,n}$ é não nulo e então a componente $\bar{y}$ dá uma contribuição da forma $(0, r)$ para o novo suporte. $\square$

Pelo Lema 3.3 sempre podemos supor que o polígono de Newton do campo de vetores auxiliar é controlável. Observe que quando olhamos para um ponto que está no divisor excepcional $\mathbb{E}_x$, o polígono de Newton do campo de vetores auxiliar neste ponto já é controlável pois $\mathbb{E}_x$ é um conjunto invariante do campo de vetores adjunto.

3.1.2 Mudança de coordenadas admissível

Nesta subseção apresentamos outra mudança de coordenadas que será útil durante o processo de resolução de singularidades. Tal mudança de coordenadas foi chamada de mudança de coordenadas admissível em [33].

Lema 3.4. *Considere um sistema forçado escrito na forma diagonalizada como em (3.1) e seu campo de vetores auxiliar (3.2). Suponha que seu polígono de Newton $\mathcal{P}_1$ é controlável. Defina a mudança de coordenadas*

$$\Psi(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, -\alpha \bar{x}^\beta + \bar{y}), \quad (3.5)$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{N}$. Então as seguintes afirmações sobre Ψ são verdadeiras:

1. O difeomorfismo Ψ é uma C^0 equivalência orbital que preserva orientação entre (3.1) e

$$\begin{cases} \delta(\bar{x}, \bar{y} - \alpha \bar{x}^\beta) \dot{\bar{x}} &= P(\bar{x}, \bar{y} - \alpha \bar{x}^\beta), \\ \delta(\bar{x}, \bar{y} - \alpha \bar{x}^\beta) \dot{\bar{y}} &= \alpha \beta P(\bar{x}, \bar{y} - \alpha \bar{x}^\beta) \bar{x}^{\beta-1} + Q(\bar{x}, \bar{y} - \alpha \bar{x}^\beta). \end{cases} \quad (3.6)$$

2. O difeomorfismo Ψ é uma equivalência topológica entre (3.2) e o campo de vetores auxiliar de (3.6).
3. Os polígonos de Newton $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ associados aos campos de vetores auxiliar de (3.6) e (3.1), respectivamente, possuem a mesma altura.

4. Se esta mudança de coordenadas é aplicada em um ponto $p \in \mathbb{E}_x$, então neste novo sistema de coordenadas o divisor excepcional ainda é um conjunto invariante do campo de vetores adjunto.

Demonstração. Os itens 1 e 2 são provados usando os mesmos argumentos usados na prova do Lema 3.3, portanto vamos nos concentrar em provar os itens 3 e 4.

Após uma mudança de coordenadas da forma (3.5), o campo de vetores auxiliar associado a (3.6) toma a forma

$$\left(\sum c_{k,l} \bar{x}^k (\bar{y} - \alpha \bar{x}^\beta)^l \right) \left(\sum \bar{x}^m (\bar{y} - \alpha \bar{x}^\beta)^n a_{m,n} \right) \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}$$

na componente $\bar{x}$ e

$$\left(\sum c_{k,l} \bar{x}^k (\bar{y} - \alpha \bar{x}^\beta)^l \right) \left(\sum \bar{x}^m (\bar{y} - \alpha \bar{x}^\beta)^n ((\alpha \beta a_{m,n} - \alpha b_{m,n}) \bar{x}^\beta + b_{m,n} \bar{y}) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}}$$

na componente $\bar{y}$. Novamente, sem perda de generalidade (e com o intuito de simplificar a notação) vamos considerar apenas a primeira graduação. Temos então

$$\left(\sum_{i=0}^l c_{k,l} \binom{l}{i} (-\alpha)^{l-i} \bar{x}^{k+\beta(l-i)} \bar{y}^i \right) \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-\alpha)^{n-j} a_{m,n} \bar{x}^{m+\beta(n-j)} \bar{y}^j \right) \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}$$

na componente $\bar{x}$ e

$$\left(\sum_{i=0}^l c_{k,l} \binom{l}{i} (-\alpha)^{l-i} \bar{x}^{k+\beta(l-i)} \bar{y}^i \right) \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-\alpha)^{n-j} \bar{x}^{m+\beta(n-j)} \bar{y}^j ((\alpha \beta a_{m,n} - \alpha b_{m,n}) \bar{x}^\beta + b_{m,n} \bar{y}) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}}$$

na componente $\bar{y}$.

Por hipótese, o polígono de Newton do campo de vetores auxiliar (3.2) possui vértice principal da forma $(-1, r)$ ou $(0, r)$, onde r é o menor grau na expansão em componentes quase homogêneas. Isto implica que existem (k, l) e (m, n) tais que $(k + m) = -1$ (respectivamente 0) e $(l + n) = r$. Pelas duas expressões obtidas anteriormente, esta propriedade continua válida para todo $\beta \in \mathbb{N}$, e dessa forma o polígono de Newton ainda é controlável.

No caso onde o divisor excepcional é dado por $\mathbb{E}_x$, o vértice principal é da forma $(0, r)$ pois $\mathbb{E}_x$ é um conjunto invariante pelo campo de vetores adjunto. Após esta mudança de coordenadas, o divisor excepcional continua invariante e ainda é dado localmente por $\mathbb{E}_x$. $\square$

Definição 3.5. A composição finita de difeomorfismos da forma (3.5) é chamada **mudança de coordenadas admissível**.

Após uma mudança de coordenadas admissível, obtemos um sistema de coordenadas adaptado ao divisor, divisor excepcional continua invariante pelo campo de vetores adjunto e o polígono de Newton do campo de vetores auxiliar ainda é controlável.

3.2 Identificando pontos elementares usando o polígono de Newton

Durante o processo de resolução de singularidades, devemos aplicar um número finito de operações (blow-ups) de modo a obter um sistema forçado mais *simples*. Esta noção de

simples vem da noção de ponto elementar de um sistema forçado (veja a Definição 2.6). No que segue, descreveremos como identificar pontos elementares de um sistema forçado usando o polígono de Newton do campo de vetores auxiliar.

Definição 3.6. Um sistema forçado planar é **Newton elementar em p** se o polígono de Newton $\mathcal{P}$ do campo de vetores auxiliar X_A satisfaz uma das seguintes condições:

- O vértice principal de $\mathcal{P}$ é $(0, 0)$, $(0, -1)$ or $(-1, 0)$ (isto é, a altura é menor ou igual à 0);
- O segmento principal γ_1 é horizontal.

Exemplo 3.7. O seguinte exemplo justifica o porque consideramos o caso onde γ_1 é horizontal como elementar. Seja o sistema forçado

$$y\dot{x} = 2x, \quad y\dot{y} = -y.$$

O suporte do campo de vetores auxiliar contém apenas o ponto $(0, 1)$, e é fácil verificar que a origem é uma sela hiperbólica do campo de vetores adjunto, em que $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ são as separatrizes. Isto significa que $\{y = 0\}$ é ao mesmo tempo uma separatriz e conjunto de impasse. Não é possível mudar esta configuração com uma sequência finita de blow ups na origem. Veja a Figura 3.1.

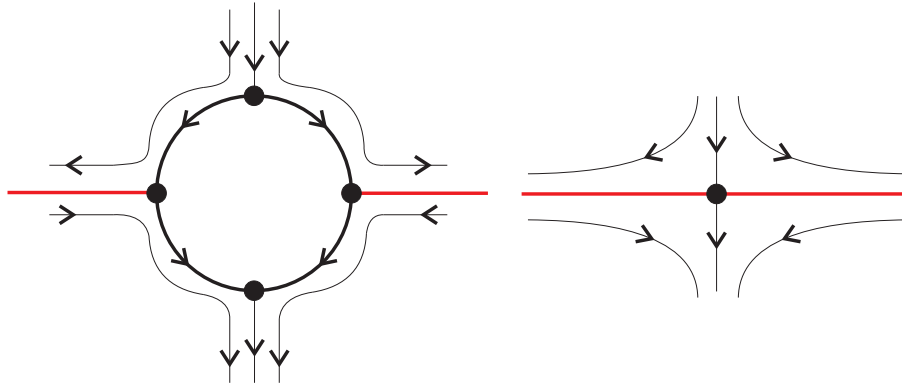


Figura 3.1: Sistema forçado do Exemplo 3.7 após blow-up.

Teorema 3.8. Um sistema forçado é elementar em p se, e somente se, é Newton elementar em p .

Demonstração. Fixe um sistema de coordenadas controlável em p e considere o campo de vetores auxiliar

$$X_A(x, y) = \left(\sum c_{k,l} x^k y^l \right) \left(\sum x^m y^n \left(a_{m,n} x \frac{\partial}{\partial x} + b_{m,n} y \frac{\partial}{\partial y} \right) \right). \quad (3.7)$$

Primeiramente, suponha que o sistema forçado é Newton elementar em p . Observe que não temos $m = -1$ e $n = -1$ ao mesmo tempo em (3.7). Sendo assim, suponha sem perda de generalidade que $m \geq 0$ and $n \geq -1$.

Se $(0, 0) \in \mathcal{P}$, pela expressão (3.7) segue que $(k + m) = 0$ e $(l + n) = 0$. Imediatamente obtém-se $k = m = 0$. Como $(l + n) = 0$, $n \geq -1$ e $l \geq 0$, temos dois casos para considerar:

- Se $l = 1$ e $n = -1$, então δ é regular em p e p não é ponto de equilíbrio de X . Se $p \in \mathbb{E}_x$, então Δ intersecta o divisor excepcional transversalmente em p . Para o caso em que $p \in \mathbb{E}_y$, lembre que o divisor excepcional deve ser invariante, e portanto não podemos ter $n = -1$ aqui.

- Se $l = n = 0$, então $p \notin \Delta$. Além disso, como $a_{-1,1} = 0$ e $a_{00}^2 + b_{00}^2 \neq 0$, p é um ponto de equilíbrio elementar de X .

Segue que se $(0, 0) \in \mathcal{P}$, então o sistema forçado é elementar em p .

Suponha agora que $(0, -1) \in \mathcal{P}$. Temos $(k + m) = 0$ e $(l + n) = -1$, e portanto $k = m = l = 0$ e $n = -1$. Portanto $p \notin \Delta$ e p não é um ponto de equilíbrio de X . A prova para o caso em que o vértice principal é dado por $(-1, 0)$ é completamente análoga.

Finalmente, suponha que o segmento principal γ_1 é horizontal e que o polígono tenha altura positiva. Como o polígono de Newton do campo de vetores auxiliar é obtido por meio da soma de Minkowski entre o suporte do campo de vetores adjunto e o suporte da curva de impasse, então ambos os polígonos de Newton do campo de vetores adjunto e da curva de impasse possuem segmento principal horizontal. Isto implica que neste sistema de coordenadas a curva de impasse é dada por

$$\delta = y \left(c_{0,1} + \sum c_{k,l} x^k y^l \right),$$

e portanto devemos considerar os seguintes casos, tendo em vista que p é ou um ponto de equilíbrio isolado ou um ponto regular do campo X :

- $a_{-1,0} \neq 0$, o que implica que $b_{m,-1} = 0$ para todo m e então a curva de impasse coincide com uma curva de fase de X ;
- $b_{0,-1} \neq 0$, o que implica que X é transversal a Δ ;
- $a_{00}^2 + b_{00}^2 \neq 0$ (e portanto $a_{-1,0} = b_{0,-1} = 0$), e então uma curva de fase coincide com a curva de impasse.

Nos três casos, o sistema forçado é elementar em p .

Agora, para provar a volta, suponha que o sistema forçado é elementar em p . Sem perda de generalidade, escolha um sistema de coordenadas tal que $\delta(x, y) = y$.

Quando p não é um ponto de equilíbrio de X e $p \notin \Delta$, então $a_{-1,0}^2 + b_{0,-1}^2 \neq 0 \neq c_{00}$ e portanto $(0, -1) \in \mathcal{P}$ ou $(-1, 0) \in \mathcal{P}$.

Se $p \in \Delta$ mas p não é um ponto de equilíbrio de X , então temos duas possibilidades:

- O campo de vetores adjunto é transversal ao conjunto de impasse Δ e portanto $c_{0,1} \neq 0$ e $b_{0,-1} \neq 0$, o que implica que $(0, 0) \in \partial \mathcal{P}$.
- A curva de fase passando por p coincide com o conjunto de impasse Δ , e portanto $a_{-1,0} \neq 0$ e $b_{m,-1} = 0$ para todo m . Então $a_{-1,0} \neq 0 \neq c_{0,1}$ nos dá a contribuição $(-1, 1) \in \mathcal{P}$ e portanto o segmento principal é horizontal.

Se p é um ponto de equilíbrio semi hiperbólico de X e $p \notin \Delta$, então estamos no caso clássico de campos de vetores analíticos e portanto $(0, 0) \in \mathcal{P}$ (veja a Proposição da página 898 de [33]).

Finalmente, suponha que p é um ponto de equilíbrio semi hiperbólico de X e $p \in \Delta$. Lembre que estamos considerando coordenadas adaptadas e $\delta(x, y) = y$. Por hipótese, Δ deve estar contida em uma separatriz ou variedade central de p . Isto significa que tal curva de fase não é transversal a Δ e todos os coeficientes da forma $b_{m,-1}$ são nulos. Este fato e a condição $a_{0,0}^2 + b_{0,0}^2 \neq 0$ implicam que o segmento principal é horizontal. $\square$

Para finalizar esta seção, observamos que quando o divisor excepcional é da forma $\mathbb{E}_{xy}$, não é possível obter um sistema forçado elementar tal que Δ intersecta a origem. De fato, como Δ não está contida em $\mathbb{E}_x \cup \mathbb{E}_y$ e Δ é transversal a $\mathbb{E}_x$ e $\mathbb{E}_y$ simultaneamente, segue que $c_{1,0}^2 + c_{0,1}^2 \neq 0$. Levando em conta que $\mathbb{E}_{xy}$ é sempre um ponto de equilíbrio hiperbólico do campo de vetores adjunto, obtemos $a_{00}^2 + b_{00}^2 \neq 0$, donde $(1, 0), (0, 1) \in \mathcal{P}$ e portanto o processo de resolução de singularidades deve prosseguir.

3.3 O Teorema de resolução de singularidades de sistemas forçados

Nesta seção provaremos o Teorema de resolução de singularidades de sistemas forçados. Primeiramente nós mostraremos a prova do teorema local, que é basicamente a descrição do algoritmo de resolução de singularidades, e posteriormente vamos provar os lemas e proposições utilizadas na prova do Teorema 3.9. Focaremos apenas nas direções x e y positivas porque os cálculos nas direções negativas são análogos. Enfatizamos que o nosso Teorema trata de singularidades isoladas. A prova do Teorema 3.19 se encontra na Subseção 3.3.2.

Teorema 3.9. *(Teorema Local) Seja $(\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$ um sistema forçado 2-dimensional e tome $p \in \mathcal{M}$. Fixe coordenadas locais tais que o polígono de Newton do campo de vetores auxiliar X_A seja controlável. Então existe uma sequência finita de blow-ups com peso tal que a transformada estrita é elementar em todos os pontos do divisor excepcional.*

Demonstração. Como sempre, neste sistema de coordenadas denote o campo de vetores adjunto por X e o conjunto de impasse por Δ . Seja X_A o campo de vetores auxiliar. Primeiramente encontramos a expressão da reta $\{r\omega_1 + s\omega_2 = R\}$ que contém o segmento principal γ_1 . Se γ_1 é horizontal, então o ponto p já é elementar pelo Teorema 3.8. Se este não for o caso, denote a altura do polígono de Newton por h e defina o vetor peso por $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Após um blow-up na direção y , segue do Lema 3.11 que a origem do divisor excepcional $\mathbb{E}_y$ é um ponto elementar. Isto significa que apenas um blow-up com peso na direção y é suficiente para tornar a origem de $\mathbb{E}_y$ um ponto elementar, e agora devemos nos preocupar apenas com a direção x .

Aplicando um blow-up com peso na direção x , pelo Lema 3.12 a nova altura h_1 do polígono de Newton na origem do divisor $\mathbb{E}_x$ é menor que h , e portanto a altura decresceu. Agora, precisamos analisar também os outros pontos de $\mathbb{E}_x$. Devido à Proposição 3.14, temos duas possibilidades:

1. Existe um número finito N de pontos p_i , $1 \leq i \leq N$ no divisor excepcional tal que a altura h_{p_i} do polígono de Newton é positiva. Além disso, $h_{p_i} \leq h$, para todo i .
2. Se existe um ponto p_i em $\mathbb{E}_x$ tal que $h_{p_i} = h$ (isto é, a altura do polígono neste ponto é igual à altura antes do blow-up), então este é o único ponto do divisor excepcional $\mathbb{E}_x$ com altura positiva.

No primeiro caso, existe um número finito de pontos p_i no divisor excepcional tal que ou p_i não é um ponto de equilíbrio semi hiperbólico do campo de vetores adjunto ou que o conjunto de impasse Δ intersecta $\mathbb{E}_x$ em p_i . Eventualmente, um ponto pode ser equilíbrio e impasse ao mesmo tempo. Devemos continuar aplicando blow-ups nos pontos nas quais

a altura do polígono de Newton é positiva e o segmento principal não é horizontal. Os pesos dos blow-ups são escolhidos conforme explicado anteriormente.

Para o segundo caso, observamos que este ponto não pode ser a origem. Em seguida, é possível mostrar que a primeira graduação do campo de vetores auxiliar possui uma forma particular (veja a Proposição 3.15). Então aplicamos uma mudança de coordenadas admissível, assim como foi descrito em 3.4. Tal mudança de coordenadas não aumenta a altura do polígono de Newton, mas ela aumenta a inclinação do segmento principal. Dessa forma, obtém-se novos pesos para continuar o processo de dessingularização, devido à Proposição 3.16.

Em cada passo, temos sempre essas duas possibilidades. Como existe um número finito de pontos não elementares no divisor excepcional, a altura é finita e a cada passo a altura decresce (eventualmente aplicando mudanças de coordenadas admissíveis), após um número finito n_0 de blow ups com peso teremos que todos os pontos do divisor excepcional ou não terão altura positiva ou o segmento principal é horizontal. Isto significa que todos os pontos são elementares.

Um cenário possível é quando a composição finita de mudanças de coordenadas admissíveis não é suficiente para obter um vetor peso para o blow-up faça decrescer a altura do polígono de Newton. Neste caso, prova-se que existe uma mudança de coordenadas analítica tal que, neste novo sistema de coordenadas, o segmento principal é horizontal e então terminamos o processo de resolução (veja a Proposição 3.16).

□

Na próxima subseção mostramos todos os lemas e proposições usados na prova anterior. Antes de fazer este estudo, vamos discutir algumas similaridades e diferenças entre nossa abordagem e a abordagem de [33].

Assim como no trabalho de Pelletier [33], nossa prova é baseada em blow-ups com peso e análise do polígono de Newton. Portanto, muitas ideias apresentadas aqui podem ser encontradas em tal trabalho, como por exemplo o comportamento do polígono de Newton durante o processo de resolução. Entretanto, muitas definições adotadas aqui foram inspiradas em [4, 32].

É importante enfatizar que em [33] a autora considerou campos de vetores analíticos cuja origem é um ponto de equilíbrio isolado. Além disso, em tal trabalho a autora provou que aplicando uma sequência finita de blow-ups (e eventualmente mudanças de coordenadas admissíveis) em uma singularidade, a chamada *multiplicidade total* do ponto decresce.

Entretanto, neste trabalho consideramos o polígono de Newton do campo de vetores auxiliar, que é um campo de vetores analítico que possui uma curva de pontos de equilíbrio. Aqui, provamos que aplicando uma sequência finita de blow-ups com peso (eventualmente aplicando mudanças de coordenadas admissíveis), a altura do polígono de Newton decresce.

3.3.1 Dessingularização local

Daqui em diante, fixe coordenadas locais para o sistema forçado $(\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$, e nestas coordenadas denote o campo de vetores adjunto por X e o conjunto de impasse por Δ . Como sempre, o campo de vetores auxiliar (3.2) será denotado por X_A . Vamos assumir que o polígono de Newton de X_A é controlável e que o seguimento principal γ_1 não é horizontal. Lembre que o vetor peso $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ é o vetor normal à reta $\{r\omega_1 + s\omega_2 = R\}$ que contém o segmento principal.

Lema 3.10. *Após um blow-up com peso $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, o campo de vetores auxiliar (3.2) toma a forma*

$$\tilde{X}_A(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\sum c_{k,l} \tilde{x}^{k\omega_1 + l\omega_2} \tilde{y}^l \right) \left(\sum \tilde{x}^{m\omega_1 + n\omega_2} \tilde{y}^n \left(\frac{a_{m,n}}{\omega_1} \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \left(b_{m,n} - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{m,n} \right) \tilde{y} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right) \right) \quad (3.8)$$

na direção x e

$$\tilde{X}_A(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\sum c_{k,l} \tilde{x}^k \tilde{y}^{l\omega_1 + k\omega_2} \right) \left(\sum \tilde{x}^m \tilde{y}^{m\omega_1 + n\omega_2} \left(\left(a_{m,n} - \frac{\omega_1}{\omega_2} b_{m,n} \right) \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{b_{m,n}}{\omega_2} \tilde{y} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right) \right) \quad (3.9)$$

na direção y .

Demonstração. Note que na direção x o blow-up

$$x = \tilde{x}^{\omega_1}, \quad y = \tilde{x}^{\omega_2} \tilde{y}$$

nos dá a relação

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \tilde{x}^{\omega_1-1} & 0 \\ \omega_2 \tilde{x}^{\omega_2-1} \tilde{y} & \tilde{x}^{\omega_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix},$$

e (3.1) se torna o sistema forçado

$$\begin{cases} \delta(\tilde{x}^{\omega_1}, \tilde{x}^{\omega_2} \tilde{y}) \dot{\tilde{x}} &= \sum \tilde{x}^{m\omega_1 + n\omega_2} \tilde{y}^n \frac{a_{m,n}}{\omega_1} \tilde{x}, \\ \delta(\tilde{x}^{\omega_1}, \tilde{x}^{\omega_2} \tilde{y}) \dot{\tilde{y}} &= \sum \tilde{x}^{m\omega_1 + n\omega_2} \tilde{y}^n \left(b_{m,n} - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{m,n} \right) \tilde{y}, \end{cases}$$

cujo campo de vetores auxiliar é da forma (3.8). Analogamente obtém-se a expressão (3.9) na direção y . $\square$

Lema 3.11. *Após um blow-up na direção y , o polígono de Newton continua controlável, o divisor excepcional $\mathbb{E}_y$ é invariante pelo campo de vetores adjunto X e a origem é um ponto elementar do sistema forçado.*

Demonstração. Considere o primeiro nível da (ω_1, ω_2) -graduação

$$X_{A,d}^{(\omega_1, \omega_2)}(x, y) = \left(\sum_{\omega_1 k + \omega_2 l = d_1} c_{k,l} x^k y^l \right) \left(\sum_{\omega_1 m + \omega_2 n = d_2} x^m y^n \left(a_{m,n} x \frac{\partial}{\partial x} + b_{m,n} y \frac{\partial}{\partial y} \right) \right),$$

em que $d_1 + d_2 = d$. Após um blow-up na direção y o campo de vetores auxiliar toma a forma

$$\begin{aligned} \tilde{X}_A(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \left(\sum c_{k,l} \tilde{x}^k \tilde{y}^{l\omega_1 + k\omega_2} \right) \left(\sum \tilde{x}^m \tilde{y}^{m\omega_1 + n\omega_2} \left(\left(a_{m,n} - \frac{\omega_1}{\omega_2} b_{m,n} \right) \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{b_{m,n}}{\omega_2} \tilde{y} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right) \right) = \\ &= \left(\sum c_{k,l} \tilde{x}^k \tilde{y}^{d_1} \right) \left(\sum \tilde{x}^m \tilde{y}^{d_2} \left(\left(a_{m,n} - \frac{\omega_1}{\omega_2} b_{m,n} \right) \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{b_{m,n}}{\omega_2} \tilde{y} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right) \right). \end{aligned}$$

No plano (r, s) , esta operação envia retas da forma $\{r\omega_1 + s\omega_2 = R\}$ em retas horizontais. Isto implica que o segmento principal γ_1 é agora um segment horizontal. Dividindo a expressão acima por $\tilde{y}^d$, nós movemos este segmento horizontal para o eixo r (veja a Figura 3.2). Observe que as primeiras coordenadas dos pontos do polígono não se alteram pois este blow-up não muda as potências de x . Dessa forma, o vértice principal do polígono de Newton na origem de $\mathbb{E}_y$ é $(-1, 0)$ ou $(0, 0)$. Pelo Teorema 3.8, agora a origem é um ponto elementar. $\square$

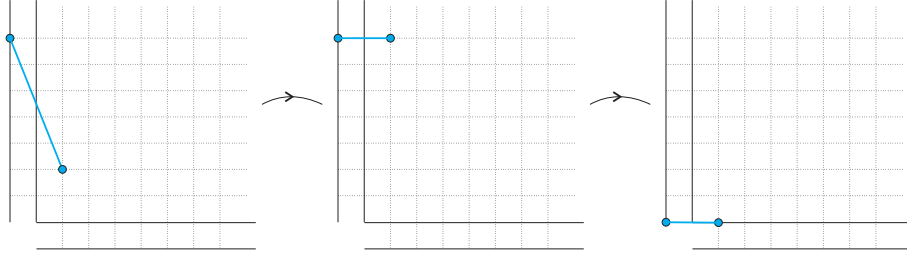


Figura 3.2: Segmento principal do polígono de Newton após blow-up na direção y .

Lema 3.12. *Após um blow-up na direção x , o vértice principal está contido em $\{0\} \times \mathbb{N}$ (e portanto o polígono de Newton continua controlável), o divisor excepcional $\mathbb{E}_x$ é invariante pelo campo de vetores adjunto X e a altura do polígono de Newton decresce.*

Demonstração. Lembre que a escolha do vetor peso é feita a partir do segmento principal γ_1 . Uma vez que a escolha foi feita, tome o primeiro nível da (ω_1, ω_2) -graduação

$$X_{A,d}^{(\omega_1, \omega_2)}(x, y) = \left(\sum_{\omega_1 k + \omega_2 l = d_1} c_{k,l} x^k y^l \right) \left(\sum_{\omega_1 m + \omega_2 n = d_2} x^m y^n \left(a_{m,n} x \frac{\partial}{\partial x} + b_{m,n} y \frac{\partial}{\partial y} \right) \right),$$

em que $d_1 + d_2 = d$.

Primeiramente, vamos simplificar a notação, pois é suficiente estudar o primeiro nível da graduação. Para cada l , existe um único k tal que $\omega_1 k + \omega_2 l = d_1$. Analogamente, para cada n , existe um único m tal que $\omega_1 m + \omega_2 n = d_2$. Então reescrevemos a última expressão por

$$X_{A,d}^{(\omega_1, \omega_2)}(x, y) = \left(\sum_{l=0}^{r_1} c_{k,l} x^k y^l \right) \left(\sum_{n=-1}^{r_2} x^m y^n \left(a_{m,n} x \frac{\partial}{\partial x} + b_{m,n} y \frac{\partial}{\partial y} \right) \right),$$

em que $\omega_2 r_1 = d_1$; e $\omega_2 r_2 = d_2$ (se o vértice principal está contido em $\{0\} \times \mathbb{N}$) ou $\omega_2 r_2 = d_2 + \omega_1$ (se o vértice principal está contido em $\{-1\} \times \mathbb{N}$). De (3.8), após blow-up na direção x obtém-se

$$\left(\sum_{l=0}^{r_1} c_{k,l} \tilde{x}^{\omega_1 k + \omega_2 l} \tilde{y}^l \right) \left(\sum_{n=-1}^{r_2} \tilde{x}^{\omega_1 m + \omega_2 n} \tilde{y}^n \left(\frac{a_{m,n}}{\omega_1} \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \left(b_{m,n} - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{m,n} \right) \tilde{y} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right) \right).$$

No que diz respeito ao polígono de Newton, esta operação envia retas da forma $\{r\omega_1 + s\omega_2 = R\}$ em retas verticais. Além disso, as segundas coordenadas dos pontos do polígono não mudam, pois o blow-up altera apenas as potências de x . Portanto o segmento principal γ_1 é enviado a um segmento vertical. Multiplicando o campo de vetores auxiliar por $\tilde{x}^{-d}$, obtemos a expressão

$$\left(\sum_{l=0}^{r_1} c_{k,l} \tilde{y}^l \right) \left(\sum_{n=-1}^{r_2} \tilde{y}^n \left(\frac{a_{m,n}}{\omega_1} \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \left(b_{m,n} - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{m,n} \right) \tilde{y} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right) \right). \quad (3.10)$$

Esta operação move retas verticais para a esquerda. Em particular, agora o segmento principal γ_1 está contido em $\{0\} \times \mathbb{N}$ (veja a Figura 3.3). Dessa forma, o vértice principal é da forma $(0, r)$, o polígono de Newton é controlável e o divisor excepcional $\mathbb{E}_x$ é invariante pelo campo de vetores adjunto. Finalmente, como existe um vértice $v_1 = (i_1, j_1) \in \gamma_1$ tal que j_1 é menor que a ordenada do vértice principal v_0 antigo, conclui-se que a altura do polígono de Newton decresceu. $\square$

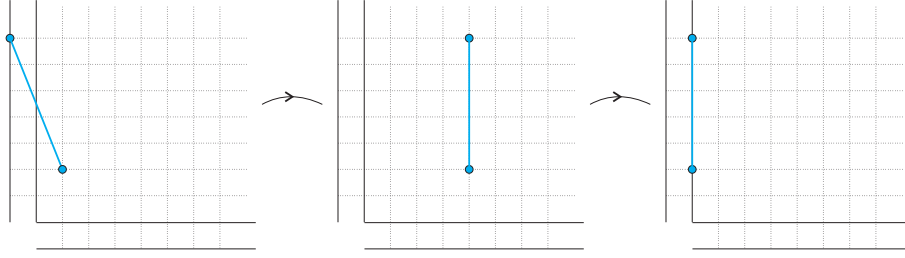


Figura 3.3: Segmento principal do polígono de Newton após blow-up na direção x .

Agora, devemos estudar o que acontece com os outros pontos do divisor $\mathbb{E}_x$.

Lema 3.13. *Considere o campo de vetores auxiliar (3.10), que é o campo de vetores auxiliar após blow-up na direção x . Após uma translação da forma*

$$\Omega(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y} + \xi), \quad (3.11)$$

em que $\xi \in \mathbb{R}$, o campo de vetores auxiliar toma a forma (descartando as barras e os tildas para simplificar a notação)

$$X_A(x, y) = \left(\sum_{i=0}^{r_1} C_i(\xi) y^i \right) \left(\sum_{j=0}^{r_2} \alpha_j(\xi) y^j x \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=-1}^{r_2} \beta_j(\xi) y^j y \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (3.12)$$

em que

$$C_i(\xi) = \sum_{l=i}^{r_1} c_l \xi^{l-i} \binom{l}{i}, \quad \alpha_j(\xi) = \sum_{n=j}^{r_2} \frac{a_n}{\omega_1} \xi^{n-j} \binom{n}{j} \quad \text{e} \quad \beta_j(\xi) = \sum_{n=j}^{r_2} \left(b_n - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_n \right) \xi^{n-j} \binom{n+1}{j+1},$$

e tais constantes satisfazem as relações

$$\frac{\partial}{\partial \xi} C_i(\xi) = (i+1) C_{i+1}(\xi), \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \alpha_j(\xi) = (j+1) \alpha_{j+1}(\xi) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \beta_j(\xi) = (j+2) \alpha_{j+1}(\xi).$$

Além disso, após esta mudança de coordenadas, a altura do polígono de Newton não aumenta, o vértice principal continua contido em $\{0\} \times \mathbb{N}$ e o divisor excepcional continua invariante pelo campo de vetores adjunto.

Demonstração. Considere a equação (3.10) e a translação (3.11). Primeiramente, lembramos da seguinte propriedade de somatório:

$$\sum_{i=k}^n \sum_{j=k}^i z_{i,j} = \sum_{j=k}^n \sum_{i=j}^n z_{i,j},$$

em que, $k \leq j \leq i \leq n$ são inteiros. Na componente x do campo de vetores auxiliar, obtemos (abandonando os tildas para simplificar a notação):

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{l=0}^{r_1} c_l (y + \xi)^l \right) \left(\sum_{n=0}^{r_2} (y + \xi)^n \left(\frac{a_n}{\omega_1} \right) \right) x = \left(\sum_{l=0}^{r_1} c_l \sum_{i=0}^l y^i \xi^{l-i} \binom{l}{i} \right) \left(\sum_{n=0}^{r_2} \frac{a_n}{\omega_1} \sum_{j=0}^n y^j \xi^{n-j} \binom{n}{j} \right) x = \\ & = \left(\sum_{i=0}^{r_1} y^i \sum_{l=i}^{r_1} c_l \xi^{l-i} \binom{l}{i} \right) \left(\sum_{j=0}^{r_2} y^j \sum_{n=j}^{r_2} \frac{a_n}{\omega_1} \xi^{n-j} \binom{n}{j} \right) x = \left(\sum_{i=0}^{r_1} y^i C_i(\xi) \right) \left(\sum_{j=0}^{r_2} y^j \alpha_j(\xi) \right) x. \end{aligned}$$

Na componente y , temos (novamente abandonando os tildas):

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=0}^{r_1} y^i C_i(\xi) \right) \left(\sum_{n=-1}^{r_2} \left(b_n - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_n \right) (y + \xi)^{n+1} \right) = \\ & = \left(\sum_{i=0}^{r_1} y^i C_i(\xi) \right) \left(\sum_{n=-1}^{r_2} \left(b_n - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_n \right) (y + \xi)^{n+1} \frac{1}{y} \right) y = \\ & = \left(\sum_{i=0}^{r_1} y^i C_i(\xi) \right) \left(\sum_{n=-1}^{r_2} \left(b_n - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_n \right) \sum_{j=0}^{n+1} y^{j-1} \xi^{n+1-j} \binom{n+1}{j} \right) y = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=0}^{r_1} y^i C_i(\xi) \right) \left(\sum_{N=0}^{r_2} \left(b_{N-1} - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{N-1} \right) \sum_{j=0}^N y^{j-1} \xi^{N-j} \binom{N}{j} \right) y = \\
&= \left(\sum_{i=0}^{r_1} y^i C_i(\xi) \right) \left(\sum_{j=0}^{r_2} y^{j-1} \sum_{N=j}^{r_2} \left(b_{N-1} - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{N-1} \right) \xi^{N-j} \binom{N}{j} \right) y = \\
&= \left(\sum_{i=0}^{r_1} y^i C_i(\xi) \right) \left(\sum_{J=-1}^{r_2} y^J \sum_{n=J}^{r_2} \left(b_n - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_n \right) \xi^{n-J} \binom{n+1}{J+1} \right) y = \\
&= \left(\sum_{i=0}^{r_1} y^i C_i(\xi) \right) \left(\sum_{J=-1}^{r_2} y^J \beta_J(\xi) \right) y.
\end{aligned}$$

Por simplicidade, nesta última expressão vamos denotar o J por j . Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi} C_i(\xi) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(c_i + \sum_{l=i+1}^{r_1} c_l \xi^{l-i} \binom{l}{i} \right) = \sum_{l=i+1}^{r_1} c_l (l-i) \xi^{l-(i+1)} \binom{l}{i} = \sum_{l=i+1}^{r_1} c_l \xi^{l-(i+1)} \frac{l!}{i!(l-(i+1))!} = \\
&= \sum_{l=i+1}^{r_1} c_l \xi^{l-(i+1)} \frac{(i+1)l!}{(i+1)!(l-(i+1))!} = (i+1) C_{i+1}(\xi).
\end{aligned}$$

As outras expressões envolvendo a derivada com respeito a ξ são mostradas de forma análoga. Note que $C_{r_1} = c_{r_1} \neq 0$, e

$$\alpha_{r_2} = \frac{a_{r_2}}{\omega_1} \text{ e } \beta_{r_2} = \left(b_{r_2} - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2} \right)$$

não se anulam simultaneamente. Portanto, a altura do polígono de Newton não aumenta e o divisor excepcional ainda é um conjunto invariante pelo campo de vetores adjunto. $\square$

Proposição 3.14. *Após blow-up na direção x , as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *O conjunto de impasse Δ intersecta o divisor excepcional apenas em um número finito de pontos;*
2. *Existe um número finito de pontos no divisor excepcional que não são equilíbrios semi-hiperbólicos do campo de vetores adjunto X ;*
3. *Se existe um ponto tal que a altura não decresceu, então este é o único ponto do divisor excepcional com altura positiva.*

Demonstração. Pelo Lema 3.13, a curva de impasse é da forma

$$\sum_{i=0}^{r_1} y^i C_i(\xi) = C_0(\xi) + C_1(\xi)y + \dots + C_{r_1}(\xi)y^{r_1}.$$

Observe que existe um número finito de pontos $(0, \xi_k)$ no divisor excepcional tal que $C_0(\xi_k) = 0$. Em outras palavras, como existe um número finito de raízes de $C_0(\xi)$, o conjunto de impasse Δ intersecta o divisor excepcional em um número finito de pontos.

No que diz respeito ao campo de vetores adjunto, observe que os polinômios

$$\alpha_0(\xi) = \sum_{n=0}^{r_2} \frac{a_n}{\omega_1} \xi^n, \quad \beta_{-1}(\xi) = \sum_{n=-1}^{r_2} \left(b_n - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_n \right) \xi^{n+1}$$

não se anulam simultaneamente. De fato, se este fosse o caso, teríamos $a_n = b_n = 0$ para todo $-1 \leq n \leq r_2$ e isso iria contradizer o fato de que a translação não aumenta a altura do polígono de Newton. Portanto $\beta_{-1} \equiv 0$ ou $\alpha_0 \equiv 0$.

Se $\beta_{-1} \not\equiv 0$, este polinômio possui uma quantidade finita de raízes, e pela expressão do campo de vetores auxiliar (3.12) existe um número finito de pontos no divisor excepcional

que são equilíbrio $(0, \xi_k)$ do campo de vetores adjunto (e eventualmente alguns deles não são semi hiperbólicos). Se $\beta_{-1} \equiv 0$, então $\alpha_0 \neq 0$. Neste caso, todos os pontos do divisor excepcional são pontos de equilíbrio do campo de vetores adjunto (isto é, estamos na situação dicrítica). Como o polinômio α_0 possui um número finito de raízes, então por (3.12) existe um número finito de pontos $(0, \xi_k)$ cujo polígono de Newton possui altura positiva. Em outras palavras, existe um número finito de pontos de equilíbrio no divisor que não são elementares.

Finalmente, vamos mostrar que se existe um ponto no divisor excepcional tal que a altura não decresceu, este é o único ponto no divisor com altura positiva. Seja $(0, \xi_0)$ o ponto em que a altura não diminuiu. Observe que $\xi_0 \neq 0$, pois pelo Lema 3.12 a altura na origem sempre decresce. Portanto obtemos

$$\begin{cases} C_0(\xi_0) = \dots = C_{r_1-1}(\xi_0) = 0, & C_{r_1}(\xi_0) \neq 0; \\ \alpha_0(\xi_0) = \dots = \alpha_{r_2-1}(\xi_0) = 0, & \alpha_{r_2}(\xi_0) \neq 0; \\ \beta_{-1}(\xi_0) = \dots = \beta_{r_2-1}(\xi_0) = 0, & \beta_{r_2}(\xi_0) \neq 0. \end{cases}$$

Pelo Lema 3.13 sabemos que

$$\frac{\partial}{\partial \xi} C_i(\xi) = (i+1)C_{i+1}(\xi), \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \alpha_j(\xi) = (j+1)\alpha_{j+1}(\xi) \text{ and } \frac{\partial}{\partial \xi} \beta_j(\xi) = (j+2)\alpha_{j+1}(\xi).$$

Então ξ_0 deve ser, simultaneamente, raiz de multiplicidade r_1 de C_0 , raiz de multiplicidade r_2 de α_0 e raiz de multiplicidade $r_2 + 1$ de β_{-1} . Pelo grau de tais polinômios, esta raiz é única, e portanto $(0, \xi_0)$ é o único ponto do divisor excepcional com altura positiva. Observe que este ponto é simultaneamente um equilíbrio do campo de vetores adjunto e um ponto de impasse. $\square$

Proposição 3.15. *Sob as condições da Proposição 3.14, suponha que após um blow-up com peso na direção x a altura não decresceu. Então, antes do blow-up na direção x , a primeira graduação do campo de vetores auxiliar (3.2) é da forma*

$$X_A = \left(c_{r_1} (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_1} \right) \left(\left(a_{r_2} (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_2} \right) x \frac{\partial}{\partial x} + \left(y^{-1} (b_{r_2} - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2}) (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_2+1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2} (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_2} \right) y \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (3.13)$$

se o vértice principal está contido em $\{0\} \times \mathbb{N}$ ou

$$X_A = \left(c_{r_1} (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_1} \right) \left(\left(a_{r_2} (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_2} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(-\frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2} (-\xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}-1}) (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \quad (3.14)$$

se o vértice principal está contido em $\{-1\} \times \mathbb{N}$. Em ambos os casos, $\frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vamos caracterizar a expressão da primeira graduação do campo de vetores auxiliar (e por conseguinte do sistema forçado) antes do blow-up.

Caso 1: Suponha que o vértice principal do polígono de Newton é da forma $(0, d_1 + d_2)$. Lembre que $\xi_0 \neq 0$ pois na origem a altura do polígono de Newton decresce. Lembre também que $\omega_2 r_1 = d_1$ e $\omega_2 r_2 = d_2$. Além disso, $a_{-1, r_2} = 0$. Como em $(0, \xi_0)$ a altura não decresce, segue que

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{r_1} c_l \xi^l = C_0(\xi) = c_{r_1} (\xi - \xi_0)^{r_1} = c_{r_1} \sum_{j=0}^{r_1} \xi^j (-\xi_0)^{r_1-j} \binom{r_1}{j}; \\ \sum_{n=0}^{r_2} \frac{a_n}{\omega_1} \xi^n = \alpha_0(\xi) = \frac{a_{r_2}}{\omega_1} (\xi - \xi_0)^{r_2} = \frac{a_{r_2}}{\omega_1} \sum_{j=0}^{r_2} \xi^j (-\xi_0)^{r_2-j} \binom{r_2}{j}; \\ \sum_{n=-1}^{r_2} \lambda_n \xi^{n+1} = \beta_{-1}(\xi) = \lambda_{r_2} (\xi - \xi_0)^{r_2+1} = \lambda_{r_2} \sum_{j=0}^{r_2+1} \xi^j (-\xi_0)^{r_2+1-j} \binom{r_2+1}{j}; \end{cases}$$

onde $\lambda_n = (b_n - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_n)$. Então para cada l e n temos as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} c_l &= c_{r_1}(-\xi_0)^{r_1-l} \binom{r_1}{l}; \\ a_n &= a_{r_2}(-\xi_0)^{r_2-n} \binom{r_2}{n}; \\ b_n &= (b_{r_2} - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2})(-\xi_0)^{r_2-n} \binom{r_2+1}{n+1} + \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2}(-\xi_0)^{r_2-n} \binom{r_2}{n}. \end{cases}$$

Lembre que para cara k e m temos $k = \frac{\omega_2}{\omega_1}(r_1 - l)$ e $m = \frac{\omega_2}{\omega_1}(r_2 - n)$. Portanto antes do blow-up na direção x a primeira graduação do campo de vetores adjunto é da forma

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{l=0}^{r_1} c_l x^k y^l \right) \left(\sum_{n=0}^{r_2} a_n x^m y^n \right) x \frac{\partial}{\partial x} = \\ &= \left(\sum_{l=0}^{r_1} c_{r_1}(-\xi_0)^{r_1-l} \binom{r_1}{l} (x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_1-l} y^l \right) \left(\sum_{n=0}^{r_2} a_{r_2}(-\xi_0)^{r_2-n} \binom{r_2}{n} (x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_2-n} y^n \right) x \frac{\partial}{\partial x} = \\ &= \left(\sum_{l=0}^{r_1} c_{r_1} \binom{r_1}{l} (-\xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_1-l} y^l \right) \left(\sum_{n=0}^{r_2} a_{r_2} \binom{r_2}{n} (-\xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_2-n} y^n \right) x \frac{\partial}{\partial x} = \\ &= \left(c_{r_1} (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_1} \right) \left(a_{r_2} (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_2} \right) x \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

na componente x , e na componente y temos

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=-1}^{r_2} \left((b_{r_2} - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2})(-\xi_0)^{r_2-n} \binom{r_2+1}{n+1} + \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2}(-\xi_0)^{r_2-n} \binom{r_2}{n} \right) x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}(r_2-n)} y^n \right) y \frac{\partial}{\partial y} = \\ &= \left(\sum_{n=-1}^{r_2} (b_{r_2} - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2}) y^n (-\xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_2-n} \binom{r_2+1}{n+1} + \sum_{n=0}^{r_2} \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2} y^n (-\xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_2-n} \binom{r_2}{n} \right) y \frac{\partial}{\partial y} = \\ &= \left(\sum_{N=0}^{r_2} (b_{r_2} - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2}) y^{N-1} (-\xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_2+1-N} \binom{r_2+1}{N} + \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2} (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_2} \right) y \frac{\partial}{\partial y} = \\ &= \left(y^{-1} (b_{r_2} - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2}) (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_2+1} + \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2} (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_2} \right) y \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Para finalizar o caso 1, observe que $c_{r_1} \neq 0$ e portanto

- Se $a_{r_2} \neq 0$, então a componente x dá as contribuições $(0, r_1 + r_2)$ e $(\frac{\omega_2}{\omega_1}, r_1 + r_2 - 1)$ para o suporte $\mathcal{Q}$.
- Se $a_{r_2} = 0$, então $b_{r_2} \neq 0$ e a componente y dá as contribuições $(0, r_1 + r_2)$ e $(\frac{\omega_2}{\omega_1}, r_1 + r_2 - 1)$ para o suporte $\mathcal{Q}$.

Em ambos os casos, vale que $\frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{N}$.

Caso 2: Suponha que o vértice principal é da forma $(-1, d_1 + d_2)$. Recorde que $\omega_2 r_1 = d_1$ e $\omega_2 r_2 = d_2 + \omega_1$, e que também vale $a_{r_2} = a_{-1, r_2} \neq 0$ e $b_{r_2} = b_{-1, r_2} = 0$. Este caso é quase análogo ao Caso 1, com um termo a mais na expansão dos polinômios $\alpha_0(\xi)$ e $\beta_{-1}(\xi)$. A expressão de C_0 permanece exatamente a mesma, então podemos focar nas outras expressões. Para cada k e m temos $k = \frac{\omega_2}{\omega_1}(r_1 - l)$ e $m = \frac{\omega_2}{\omega_1}(r_2 - n) - 1$. Portanto

na componente x obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{l=0}^{r_1} c_l x^k y^l\right) \left(\sum_{n=0}^{r_2} a_n x^m y^n\right) x \frac{\partial}{\partial x} &= \\
&= \left(c_{r_1} (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_1}\right) \left(\sum_{n=0}^{r_2} a_{r_2} (-\xi_0)^{r_2-n} \binom{r_2}{n} (x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_2-n} x^{-1} y^n\right) x \frac{\partial}{\partial x} = \\
&= \left(c_{r_1} (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_1}\right) \left(\sum_{n=0}^{r_2} a_{r_2} \binom{r_2}{n} (-\xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_2-n} y^n\right) \frac{\partial}{\partial x} = \\
&= \left(c_{r_1} (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_1}\right) \left(a_{r_2} (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_2}\right) \frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Antes de calcularmos a expressão da componente y , devemos encontrar a expressão dos coeficientes b_n . Como $b_{r_2} = 0$, para cada n temos

$$\begin{aligned}
b_n &= -\frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2} (-\xi_0)^{r_2-n} \binom{r_2+1}{n+1} + \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2} (-\xi_0)^{r_2-n} \binom{r_2}{n} = \\
&= -\frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2} (-\xi_0)^{r_2-n} \left(\binom{r_2+1}{n+1} - \binom{r_2}{n} \right) = \\
&= -\frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2} (-\xi_0)^{r_2-n} \binom{r_2}{n} \frac{r_2-n}{n+1} = -\frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2} (-\xi_0)^{r_2-n} \binom{r_2}{n+1},
\end{aligned}$$

e finalmente obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{l=0}^{r_1} c_l x^k y^l\right) \left(\sum_{n=-1}^{r_2} b_n x^m y^n\right) y \frac{\partial}{\partial y} &= \\
&= \left(\sum_{l=0}^{r_1} c_l x^k y^l\right) \left(\sum_{n=-1}^{r_2} b_n x^m y^n\right) y \frac{\partial}{\partial y} = \\
&= \left(c_{r_1} (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_1}\right) \left(\sum_{n=-1}^{r_2} \left(-\frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2} (-\xi_0)^{r_2-n} \binom{r_2}{n+1}\right) x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}(r_2-n)} x^{-1} y^n\right) y \frac{\partial}{\partial y} = \\
&= \left(c_{r_1} (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_1}\right) \left(-\frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2} x^{-1} \sum_{n=-1}^{r_2} (-\xi_0)^{r_2-n} \binom{r_2}{n+1} (x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{(r_2-n)} y^n\right) y \frac{\partial}{\partial y} = \\
&= \left(c_{r_1} (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_1}\right) \left(-\frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2} x^{-1} \sum_{N=0}^{r_2} \binom{r_2}{N} (-\xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{(r_2-N+1)} y^{N-1}\right) y \frac{\partial}{\partial y} = \\
&= \left(c_{r_1} (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_1}\right) \left(-\frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2} (-\xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}-1}) \sum_{N=0}^{r_2} \binom{r_2}{N} (-\xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{(r_2-N)} y^N\right) \frac{\partial}{\partial y} = \\
&= \left(c_{r_1} (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_1}\right) \left(-\frac{\omega_2}{\omega_1} a_{r_2} (-\xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}-1}) (y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}})^{r_2}\right) \frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Da expressão na componente x , o polígono de Newton contém o ponto $(-1, r_1 + r_2)$. Além disso, a componente y dá a contribuição $(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1, r_1 + r_2 - 1)$. Novamente, em ambos os casos verifica-se que $\frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposição 3.16. *Suponha que o segmento principal γ_1 não é horizontal e que após blow-up na direção x existe um ponto no divisor excepcional $\mathbb{E}_x$ tal que a altura do polígono de Newton não diminuiu. Então existe uma mudança de coordenadas analítica tal que uma das seguintes situações ocorrem:*

- Obtemos um novo vetor peso $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ tal que, após um blow-up na direção x com este peso, o vértice principal está contido em $\{0\} \times \mathbb{N}$, a altura decresce e existe apenas um número finito de pontos não elementares no divisor excepcional $\mathbb{E}_x$;
- O segmento principal é horizontal.

Demonstração. Já sabemos que existe apenas um ponto não elementar p no divisor excepcional e que a expressão do campo de vetores auxiliar antes do blow-up é dada pela Proposição 3.15. Temos dois casos a considerar:

Caso 1: O ponto p é um ponto de equilíbrio do campo de vetores adjunto. Neste caso, considere a mudança de coordenadas admissível

$$\Psi_1(x, y) = (x, y - \xi_0 x^{\frac{\omega_2}{\omega_1}}).$$

Lembre que $\frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{N}$, pela Proposição 3.15. Pelo Lema 3.4, tal mudança de coordenadas não altera a altura do polígono de Newton. Aplicando esta mudança de coordenadas nas expressões obtidas na Proposição 3.15, a primeira graduação do campo de vetores auxiliar toma a forma.

$$X_A = c_{r_1} y^{r_1} \left(a_{r_2} y^{r_2} x \frac{\partial}{\partial x} + b_{r_2} y^{r_2} y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \dots$$

se o vértice principal está contido em $\{0\} \times \mathbb{N}$ ou

$$X_A = c_{r_1} y^{r_1} \left(a_{r_2} y^{r_2} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \dots$$

se o vértice principal está contido em $\{-1\} \times \mathbb{N}$. Em ambos os casos, a inclinação do vértice principal aumenta, e então obtemos novos pesos para continuar com o processo de resolução de singularidades, dado que o ponto de equilíbrio do campo de vetores adjunto é isolado. Veja a Figura 3.4.

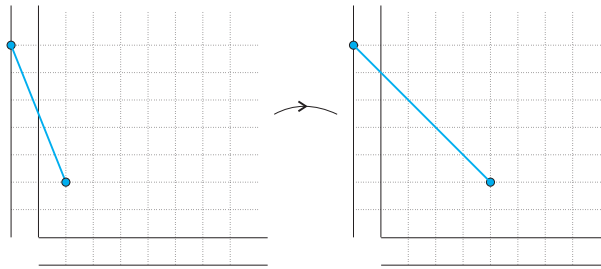


Figura 3.4: Polígono de Newton do campo de vetores auxiliar após uma mudança de coordenadas da forma (3.5).

Agora devemos aplicar um blow-up com este novo vetor peso. Após este blow-up, novamente temos duas possibilidades: ou o novo blow-up diminui a altura do polígono de Newton ou ele não decresce a altura. Neste último caso, novamente aplicamos uma mudança de coordenadas Ψ_2 dado pelo Lema 3.4. Observe que esta operação não muda a altura do polígono de Newton e ela aumenta a inclinação do segmento principal. Assim continuamos sucessivamente.

Se for necessário, aplicamos n mudanças de coordenadas Ψ_n dada pelo Lema 3.4. O segmento principal não será horizontal e novamente obtemos novos pesos para continuar com a resolução de singularidades. Estes novos pesos diminuem a altura do polígono de Newton e portanto a Proposição é verdadeira.

Neste caso onde p é um ponto de equilíbrio do campo de vetores adjunto, afirmamos que esta iteração de mudanças de coordenadas admissíveis tem um fim. De fato, se este não fosse o caso, a cada passo a inclinação do polígono de Newton aumentaria, e após a composição infinita de mudança de coordenadas admissíveis

$$\Psi_\infty(x, y) = \left(x, y - \sum_i \xi_i x^{\tilde{\omega}_i}\right)$$

deveríamos obter um polígono de Newton com segmento principal horizontal. Isto implicaria que após a mudança de coordenadas Ψ_∞ o campo de vetores adjunto se anula na curva de impasse Δ , o que é uma contradição pois o ponto de equilíbrio é isolado. Portanto a iteração de mudança de coordenadas admissíveis é finita neste caso.

Caso 2: O ponto p não é um ponto de equilíbrio do campo de vetores adjunto, e isto implica que $r_2 = 0$. Aplicando uma mudança de coordenadas admissível Ψ_1 nas expressões obtidas na Proposição 3.15, temos duas possibilidades:

- A inclinação do segmento principal aumenta e temos novos pesos para continuar o processo de resolução de singularidades;
- O segmento principal é horizontal.

No primeiro caso devemos aplicar um blow-up na origem com esses novos pesos. Após este blow-up, novamente teremos as duas possibilidades listadas acima. Caso seja necessário, aplicamos n mudanças de coordenadas dadas pelo Lema 3.4. Dessa forma, ou o segmento principal será horizontal ou obteremos novos pesos para continuar com o processo de resolução de singularidades.

Isto nos leva ao caso onde este processo pode não se encerrar, e então devemos aplicar uma mudança de coordenadas da forma

$$\Psi_\infty(x, y) = \left(x, y - \sum_i \xi_i x^{\tilde{\omega}_i}\right).$$

Após a mudança de coordenadas Ψ_∞ , o segmento principal é horizontal, já que a cada etapa sua inclinação aumenta. Para concluir a demonstração, devemos provar que esta mudança de coordenadas é analítica. De fato, observe que a curva de impasse Δ sempre contém este ponto não elementar. Pela forma como Ψ_∞ foi construída, a curva $\{y - \sum_i \xi_i x^{\tilde{\omega}_i} = 0\}$ está contida em Δ . Em outras palavras, a curva $\{y - \sum_i \xi_i x^{\tilde{\omega}_i} = 0\}$ deve ser uma componente do conjunto analítico Δ , o que garante a convergência da série. $\square$

Exemplo 3.17. Considere o sistema forçado

$$(y - x^s)\dot{x} = (y - x^s)^r x; \quad (y - x^s)\dot{y} = -s(y - x^s)^{r+1} + sy(y - x^s)^r + y^{k+1}, \quad (3.15)$$

cujo campo de vetores auxiliar é

$$X_A = (y - x^s)(y - x^s)^r x \frac{\partial}{\partial x} + (y - x^s) \left(-sy^{-1}(y - x^s)^{r+1} + s(y - x^s)^r + y^k \right) y \frac{\partial}{\partial y}; \quad (3.16)$$

em que $k \geq r + 1$. Observe que a origem é um ponto de equilíbrio isolado do campo de vetores adjunto. O vértice principal é da forma $(0, r)$ e portanto a altura é r . Aplicando um blow-up na origem com peso $\omega = (1, s)$ na direção x , obtém-se

$$\widetilde{X}_A = (\tilde{y} - 1)(\tilde{y} - 1)^r \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + (\tilde{y} - 1) \left(-s\tilde{y}^{-1}(\tilde{y} - 1)^{r+1} + \tilde{x}^{(k-r)s} \tilde{y}^k \right) \tilde{y} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}.$$

Observe que na origem a altura decresceu, mas quando olhamos para o ponto $(0, 1) \in \mathbb{E}_x$ vemos que a altura do polígono de Newton ainda é r . Portanto, antes do blow-up devemos aplicar uma mudança de coordenadas da forma

$$\bar{x} = x; \quad \bar{y} = y - x^s,$$

e então (3.16) toma a forma

$$\bar{X}_A = \bar{y}\bar{y}^r \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{y}(\bar{y} + \bar{x}^s)^k \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \quad (3.17)$$

e portanto temos um novo vetor peso para continuar o processo.

Exemplo 3.18. Seja o sistema forçado

$$(y - x^s)\dot{x} = (y - x^s)^r; \quad (y - x^s)\dot{y} = sx^{s-1}(y - x^s)^r + y^{k+1}, \quad (3.18)$$

cujo campo de vetores auxiliar é

$$X_A = (y - x^s)(y - x^s)^r \frac{\partial}{\partial x} + (y - x^s) \left(sx^{s-1}y^{-1}(y - x^s)^r + y^k \right) y \frac{\partial}{\partial y}; \quad (3.19)$$

em que $k \geq r+1$. Observe que a origem é um ponto de equilíbrio isolado, o vértice principal é $(-1, r)$ e portanto a altura é r . Após um blow-up na origem com peso $\omega = (1, s)$ na direção x positiva, obtém-se

$$\widetilde{X}_A = (\tilde{y} - 1)(\tilde{y} - 1)^r x \frac{\partial}{\partial x} + (\tilde{y} - 1) \left(s\tilde{y}^{-1}(\tilde{y} - 1)^r - s(\tilde{y} - 1)^r \tilde{x}^{(k-r)s+1} \tilde{y}^k \right) \tilde{y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Na origem a altura decresceu, porém no ponto $(0, 1) \in \mathbb{E}_x$ a altura ainda é r . Então antes do blow-up devemos aplicar uma mudança de coordenadas admissível da forma

$$\bar{x} = x; \quad \bar{y} = y - x^s,$$

e então (3.19) toma a forma

$$\bar{X}_A = \bar{y}\bar{y}^r \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{y}(\bar{y} + \bar{x}^s)^{k+1} \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \quad (3.20)$$

e assim obtemos um novo vetor peso para continuar o processo.

3.3.2 Resolução de singularidades: Teorema Global

Agora que o algoritmo local de resolução de singularidades foi estudado, estamos aptos para provar o Teorema 3.19. Suponha que $(\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$ é um sistema forçado real analítico definido em uma variedade com esquinas compacta de dimensão 2. Dessa forma, $\mathcal{X}$ é uma 1-folheação analítica e Δ é um subconjunto analítico de $\mathcal{M}$.

Teorema 3.19. *Seja $(\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$ um sistema forçado real analítico 2-dimensional definido numa variedade compacta com esquinas. Existe uma sequência finita de blow-ups com peso*

$$(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mathcal{X}}, \widetilde{\mathcal{I}}) = (\mathcal{M}_n, \mathcal{X}_n, \mathcal{I}_n) \xrightarrow{\Phi_n} \cdots \xrightarrow{\Phi_0} (\mathcal{M}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{I}_0) = (\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$$

tal que $(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mathcal{X}}, \widetilde{\mathcal{I}})$ é elementar.

Demonstração. Lembre que nas representações locais de $\mathcal{X}$, as componentes P e Q de X não possuem fator comum, o que implica que todos os pontos de equilíbrio da folheação são isolados. Analogamente, o ideal de impasse $\mathcal{I}$ é localmente gerado por uma função analítica irreduzível δ , e então δ possui pontos singulares isolados. Como todos os nossos objetos são analíticos, existe um número finito de tangencias entre a folheação e o conjunto de impasse. Devido a compacidade de $\mathcal{M}$, existe um conjunto finito $\{p_i\}_{i=1}^k$ de pontos não elementares.

Em cada ponto p_i , fixamos coordenadas locais (ϕ_i, U_i) de modo que o polígono de Newton do campo de vetores auxiliar seja controlável. Aplicando o Teorema 3.9 em cada ponto não elementar, obtemos $(\tilde{\phi}_i, \tilde{U}_i)$ de tal modo que em $\tilde{U}_i$ o sistema forçado possui apenas pontos elementares.

Assim, obtemos uma sequência finita de blow-ups

$$(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{I}}) = (\mathcal{M}_n, \mathcal{X}_n, \mathcal{I}_n) \xrightarrow{\Phi_n} \cdots \xrightarrow{\Phi_0} (\mathcal{M}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{I}_0) = (\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$$

tal que a transformada estrita $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{I}})$ possui apenas pontos elementares.

Observe que fora do divisor excepcional os blow-ups são difeomorfismos analíticos que levam folhas de $\tilde{\mathcal{X}}$ em folhas de $\mathcal{X}$ e levam geradores de $\tilde{\mathcal{I}}$ em geradores de $\mathcal{I}$, e portanto fora do divisor excepcional as ternas $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{I}})$ e $(\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$ são globalmente orbitalmente equivalentes.

□

4 Classificação topológica de retratos de fase de sistemas forçados no plano

Este capítulo é dedicado à classificação de retratos de fase de sistemas forçados sob equivalência topológica, isto é, C^0 -equivalência orbital que preserva orientação. Como este é um estudo local, daqui em diante vamos denotar um sistema forçado pela terna (X, δ, p) , em que X é o campo de vetores adjunto, δ é a função analítica irreduzível cujo zero é o conjunto de impasse Δ_δ e p denota o ponto na qual estamos estudando a vizinhança.

Os resultados abaixo (e que também estão presentes na pré-publicação [35]) usam fortemente o Teorema de resolução de singularidades provado no Capítulo 3 (Teorema 3.19). Na Seção 4.1 damos a prova do Teorema 4.10, em que se estabelece uma condição baseada na resolução de singularidades para garantir quando dois sistemas forçados são C^0 -orbitalmente equivalentes. Tal condição é chamada *esquema elementar de singularidades*. O Teorema 4.10 é um resultado essencial para a prova dos Teoremas 4.19 e 4.20.

O Teorema 4.19 é uma extensão do teorema principal de [6] para o contexto de sistemas forçados com curva de impasse suave. Aqui, provamos que os termos associados a fronteira do polígono de Newton do campo de vetores auxiliar determinam topologicamente o retrato de fase numa vizinhança da singularidade do sistema forçado. Já o Teorema 4.20, por sua vez, diz respeito a retratos de fase de sistemas forçados cuja curva de impasse é singular. Mais precisamente, classificamos os retratos de fase de sistemas forçados cuja curva de impasse é uma daquelas classificadas por Arnold [2] (veja a Tabela 4.1).

4.1 Construção da C^0 -equivalência orbital em torno do divisor excepcional

Seja (X, δ, p_1) um sistema forçado definido próximo a um ponto de impasse $p_1 \in \Delta_\delta$. Suponha que p_1 é um ponto de equilíbrio de X ou um ponto singular do conjunto de impasse Δ_δ . Vimos anteriormente que neste ponto é possível aplicar uma sequência finita de blow-ups com peso, cuja composição vamos denotar simplesmente por Φ . De acordo com o Teorema 3.19, no final deste processo obtém-se um sistema forçado $(\tilde{X}, \tilde{\delta}, D_1)$ tal que todos os pontos do divisor excepcional $D_1 = \Phi^{-1}(p_1)$ são elementares. Além disso, D_1 é um conjunto invariante de $\tilde{X}$.

Analogamente, seja (Y, γ, p_2) um sistema forçado no plano em que $p_2 \in \Delta_\gamma$ é um ponto

de equilíbrio do campo de vetores adjunto Y ou um ponto singular do conjunto de impasse Δ_γ . Após uma sequência finita de blow-ups com peso (cuja composição vamos denotar simplesmente por Ψ), obtém-se a transformada estrita $(\tilde{Y}, \tilde{\gamma}, D_2)$ onde todos os pontos no divisor excepcional $D_2 = \Psi^{-1}(p_2)$ são elementares e D_2 é um conjunto invariante de $\tilde{Y}$.

O principal objetivo agora é usar a resolução de singularidades na classificação topológica de retratos de fase. Para atingir este objetivo, o primeiro passo é dar condições que dependam da resolução de singularidades para garantir quando dois sistemas forçados são equivalentes. Em outras palavras, devemos estudar a existência de uma equivalência orbital que preserve orientação H entre (X, δ, p_1) e (Y, γ, p_2) . A Proposição 4.1 garante que quando existe uma equivalência orbital $\tilde{H}$ entre $(\tilde{X}, \tilde{\delta}, D_1)$ e $(\tilde{Y}, \tilde{\gamma}, D_2)$ em uma vizinhança do divisor excepcional, então (X, δ, p_1) e (Y, γ, p_2) são equivalentes. Veja a Figura 4.1.

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{X}, \tilde{\delta}, D_1) & \xrightarrow{\tilde{H}} & (\tilde{Y}, \tilde{\gamma}, D_2) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Psi \\ (X, \delta, p_1) & \xrightarrow{H} & (Y, \gamma, p_2) \end{array}$$

Figura 4.1: Diagrama da Proposição 4.1.

Seja $W_1 \ni p_1$ e $W_2 \ni p_2$ vizinhanças dos pontos p_1 e p_2 , respectivamente. Observe que $\tilde{W}_1 = \Phi^{-1}(W_1 \setminus \{p_1\})$ e $\tilde{W}_2 = \Psi^{-1}(W_2 \setminus \{p_2\})$ são conjuntos abertos. Defina os abertos $\tilde{U} = \tilde{W}_1 \cup D_1$ e $\tilde{V} = \tilde{W}_2 \cup D_2$ e suponha que existe um homeomorfismo (se necessário tomando vizinhanças W_1 e W_2 menores) $\tilde{H} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ satisfazendo as seguintes condições:

(H1) $\tilde{H}(D_1) = D_2$;

(H2) $\tilde{H}(\tilde{\Delta}_\delta) = \tilde{\Delta}_\gamma$;

(H3) Seja $p \in \tilde{U}$ e denote por $\phi_{\tilde{X}}(p, t)$ o fluxo de $\tilde{X}$ passando por p . Suponha que $\phi_{\tilde{X}}(p, [0, s]) \subset \tilde{U} \setminus \tilde{\Delta}_\delta$, para algum tempo $s > 0$. Então existe $\hat{s} > 0$ tal que

$$\tilde{H}\left(\phi_{\tilde{X}}(p, [0, s])\right) = \phi_{\tilde{Y}}\left(\tilde{H}(p), [0, \hat{s}]\right).$$

Proposição 4.1. *Se existe um homeomorfismo $\tilde{H}$ satisfazendo as condições (H1), (H2) e (H3) acima, então existem abertos $U \ni p_1$ e $V \ni p_2$ e uma C^0 -equivalência orbital que preserva orientação $H : U \rightarrow V$ entre os sistemas forçados (X, δ, p_1) e (Y, γ, p_2) .*

Demonstração. Denote $U = \Phi(\tilde{U})$ e $V = \Psi(\tilde{V})$ e defina a aplicação $H : U \rightarrow V$ por

$$H(p_1) = p_2; \quad H(p) = \Psi \circ \tilde{H} \circ \Phi^{-1}(p), \quad p \in \Phi(\tilde{W}_1).$$

A função H é justamente a C^0 -equivalência orbital que preserva orientação entre (X, δ, p_1) e (Y, γ, p_2) que estamos procurando. Lembre que Φ restrita a $\tilde{W}_1 = \Phi^{-1}(W_1 \setminus \{p_1\})$

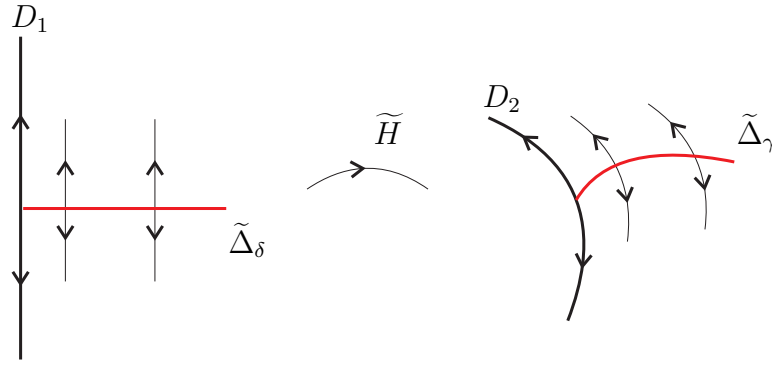


Figura 4.2: Homeomorfismo $\widetilde{H}$ que satisfaz as hipóteses (H1), (H2) e (H3). O conjunto de impasse está destacado em vermelho.

é um difeomorfismo analítico que leva $\widetilde{\Delta}_\delta$ em Δ_δ , e leva curvas de fase de $\widetilde{X}$ em curvas de fase de X , preservando orientação. Propriedades análogas para Ψ restrita a $\widetilde{W}_2 = \Psi^{-1}(W_2 \setminus \{p_2\})$ também são verdadeiras. Além disso, $\Phi(D_1) = p_1$, $\widetilde{H}(D_1) = D_2$ e $\Psi(D_2) = p_2$.

Um cálculo direto mostra que H leva conjunto de impasse em conjunto de impasse. Além disso, se $\phi_X(p, t)$ é o fluxo de X passando por $p \in U$ e $\phi_X(p, [0, s]) \subset U \setminus \Delta_\delta$ para algum $s > 0$, então existe $\hat{s} > 0$ tal que

$$H\left(\phi_X(p, [0, s])\right) = \phi_Y\left(H(p), [0, \hat{s}]\right),$$

e portanto H é uma C^0 -equivalência orbital que preserva orientação. $\square$

Como a existência de $\widetilde{H}$ garante a existência de uma C^0 -equivalência orbital H entre (X, δ, p_1) e (Y, γ, p_2) , o próximo passo é buscar uma condição baseada na resolução de singularidades que garanta a existência de tal homeomorfismo $\widetilde{H}$. Esta condição será chamada de *esquema elementar de singularidades*. O próximo Teorema diz que se $(\widetilde{X}, \widetilde{\delta}, D_1)$ e $(\widetilde{Y}, \widetilde{\gamma}, D_2)$ possuem o mesmo esquema elementar de singularidades, então ambas as ternas são C^0 -orbitalmente equivalentes em uma vizinhança do divisor excepcional. Tal resultado combinado com a Proposição 4.1 irá garantir que (X, δ, p_1) e (Y, γ, p_2) são C^0 -orbitalmente equivalentes.

4.1.1 Pontos básicos, intervalo singular básico e esquema elementar de singularidades

Seja (X, δ, p_1) um sistema forçado planar em que $p_1 \in \Delta_\delta$ é um ponto de equilíbrio de X ou um ponto singular do conjunto de impasse. Denote a transformada estrita por $(\widetilde{X}, \widetilde{\delta}, D_1)$ em que todos os pontos do divisor excepcional D_1 são elementares.

Definição 4.2. (Definição 5.1, [15]). Um sistema de coordenadas é **adaptado ao divisor excepcional** se em tal sistema de coordenadas o divisor excepcional é dado por $\mathbb{E}_x = \{x = 0\}$, $\mathbb{E}_y = \{y = 0\}$ ou $\mathbb{E}_{xy} = \{xy = 0\}$

Defina os seguintes campos de vetores com domínio restrito, em que $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$:

1. $V_1^{\alpha, \beta}$: $\alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y}$, $y \geq 0$. Veja a Figura 4.3;
2. $V_2^{\alpha, \beta}$: $\beta x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial}{\partial y}$, $y \geq 0$. Veja a Figura 4.4;

3. V_3^α : $\alpha x \frac{\partial}{\partial x} - \alpha y \frac{\partial}{\partial y}$, $x \geq 0$ and $y \geq 0$. Veja a Figura 4.5;

4. V_4^α : $\alpha y \frac{\partial}{\partial y}$, $0 \leq x \leq 1$ e $y \geq 0$. Veja a Figura 4.5.

Analogamente, defina os seguintes sistemas forçados com domínio restrito, em que $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$:

1. $C_1^{\alpha, \beta}$: $x\dot{x} = \alpha x, x\dot{y} = \beta y$, $y \geq 0$. Veja a Figura 4.6;

2. $C_2^{\alpha, \beta}$: $x\dot{x} = \beta x^2, x\dot{y} = \alpha y$, $y \geq 0$. Veja a Figura 4.7;

3. C_3^α : $x\dot{x} = \alpha, x\dot{y} = 0$, $0 \leq x \leq 1$ and $y \geq 0$. Veja a Figura 4.8;

4. C_4^α : $x\dot{x} = 0, x\dot{y} = \alpha y$, $0 \leq x \leq 1$ and $y \geq 0$. Veja a Figura 4.8.

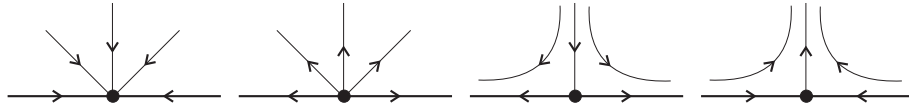


Figura 4.3: Singularidades básicas da forma $V_1^{\alpha, \beta}$.

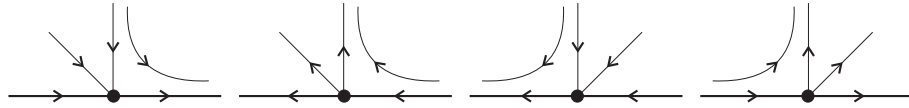


Figura 4.4: Singularidades básicas da forma $V_2^{\alpha, \beta}$.

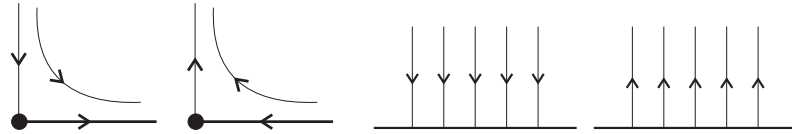


Figura 4.5: Singularidades básicas da forma V_3^α (esquerda) e V_4^α (direita).

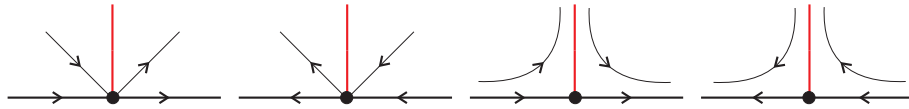


Figura 4.6: Singularidades básicas da forma $C_1^{\alpha, \beta}$. O conjunto de impasse está destacado em vermelho.

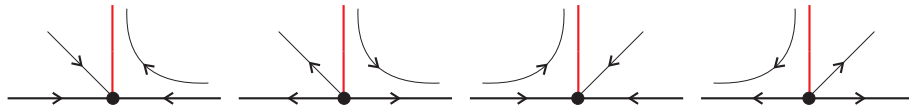


Figura 4.7: Singularidades básicas da forma $C_2^{\alpha, \beta}$. O conjunto de impasse está destacado em vermelho.

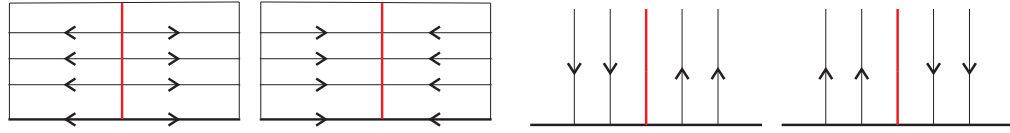


Figura 4.8: Singularidades básicas da forma C_3^α (esquerda) C_4^α (direita). O conjunto de impasse está destacado em vermelho.

Definição 4.3. Um ponto $p \in D_1$ é uma **singularidade básica** se existe um sistema de coordenadas adaptado ao divisor tal que em uma vizinhança U de p o sistema forçado é C^0 orbitalmente equivalente a $V_i^{\alpha,\beta}$ ou $C_j^{\alpha,\beta}$, em que $i, j = 1, 2, 3$.

Definição 4.4. Um **intervalo singular básico** é um arco $d \subset D_1$ tal que todos os pontos em d são pontos de equilíbrio e existe um sistema de coordenadas adaptado ao divisor tal que em uma vizinhança U de d o sistema forçado é C^0 orbitalmente equivalente a V_4^α ou C_4^α .

Como o divisor excepcional é uma união finita de arcos suaves $d_1, \dots, d_n$, pode-se enumerá-los no sentido horário. Dessa forma, d_{i+1} sucede d_i e $d_{n+1} = d_1$. Com esta orientação, também podemos definir uma ordem para as singularidades básicas e intervalos singulares básicos que aparecem no divisor excepcional. A disposição das singularidades básicas e dos intervalos singulares básicos no divisor define uma palavra finita construída usando o alfabeto

$$\{V_i^{\alpha,\beta}\}_{i=1}^2 \cup \{C_j^{\alpha,\beta}\}_{j=1}^2 \cup \{V_i^\alpha\}_{i=3}^4 \cup \{C_j^\alpha\}_{j=3}^4.$$

Tal disposição define uma relação de equivalência no conjunto Σ das ternas $(\tilde{X}, \tilde{\delta}, D_1)$ da seguinte forma: duas ternas $(\tilde{X}, \tilde{\delta}, D_1)$ e $(\tilde{Y}, \tilde{\gamma}, D_2)$ são equivalentes se, e somente se, uma palavra associada a $(\tilde{X}, \tilde{\delta}, D_1)$ é igual a palavra associada a $(\tilde{Y}, \tilde{\gamma}, D_2)$ a menos de permutação cíclica.

Definição 4.5. Uma classe de equivalência em Σ é chamada **esquema elementar de singularidades**.

Exemplo 4.6. O esquema elementar de singularidades associado ao sistema forçado do Exemplo 2.15 é dado pela palavra $C_3^1 V_1^{-1,1} C_3^1 V_1^{-1,1} C_3^1 C_3^{-1}$.

O próximo Teorema é verdadeiro sob a hipótese de que o esquema elementar de singularidades não contém apenas palavras escritas com símbolos da forma V_3^α ou C_3^α . Isto é equivalente a requerer a seguinte condição: Sejam $(\tilde{X}, \tilde{\delta}, D_1)$ e $(\tilde{Y}, \tilde{\gamma}, D_2)$ as transformadas estritas dos sistemas forçados (X, δ, p_1) e (Y, γ, p_2) , respectivamente, em que $p_1 \in \Delta_\delta$ e $p_2 \in \Delta_\gamma$. Se p_1 e p_2 são pontos de equilíbrio dos campos de vetores adjuntos X e Y , respectivamente, então ambos p_1 e p_2 possuem órbita característica. Em outras palavras, p_1 e p_2 não são nem um centro e nem um foco. Veja a Figura 4.9.

Definição 4.7. Um esquema elementar de singularidades é **degenerado** se a palavra associada a terna $(\tilde{X}, \tilde{\delta}, D_1)$ contém apenas símbolos da forma V_3^α e C_3^α . Caso contrário, dizemos que o esquema elementar de singularidades é **não-degenerado**.

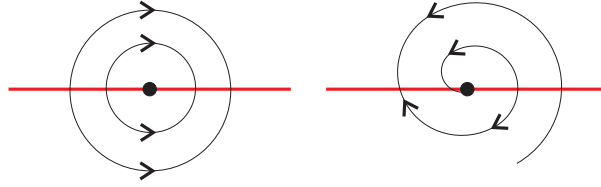


Figura 4.9: Singularidades de um sistema forçado. O ponto de equilíbrio do campo de vetores adjunto não possui órbita característica.

4.1.2 Prova do Teorema 4.10: Construção de uma C^0 -equivalência orbital que preserva orientação

O próximo Lema é um resultado de Topologia Geral e que será útil na prova da Proposição 4.9.

Lema 4.8. (*Lema da Colagem, Teorema 18.3, [31]*) Sejam M, N espaços topológicos e sejam $A_1, A_2 \subset M$ conjuntos abertos (ou fechados). Denote $A = A_1 \cap A_2$. Sejam $f : A_1 \rightarrow f(A_1) \subset N$ e $g : A_2 \rightarrow g(A_2) \subset N$ homeomorfismos tais que $f|_A = g|_A$. Então existe um homeomorfismo $H : A_1 \cup A_2 \rightarrow H(A_1 \cup A_2) \subset N$ tal que $H|_{A_1} = f$ e $H|_{A_2} = g$.

Proposição 4.9. Suponha que as ternas $(\tilde{X}, \tilde{\delta}, D_1)$ e $(\tilde{Y}, \tilde{\gamma}, D_2)$ possuam o mesmo esquema elementar de singularidades não degenerado. Então existe uma C^0 equivalência orbital que preserva orientação H entre $(\tilde{X}, \tilde{\delta}, D_1)$ e $(\tilde{Y}, \tilde{\gamma}, D_2)$ tal que $H(D_1) = D_2$.

Demonstração. Dado um arco $c_i \subset D_1$, também temos um arco $\hat{c}_i \subset D_2$. A construção do homeomorfismo começa próximo a um ponto básico p (ou um intervalo singular básico) de $(\tilde{X}, \tilde{\delta}, D_1)$ que não é nem da forma V_3^α nem C_3^α . Então existe um ponto equivalente $\hat{p}$ (ou intervalo singular básico) de $(\tilde{Y}, \tilde{\gamma}, D_2)$. Isto significa que existem coordenadas adaptadas ao divisor

$$h : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \hat{h} : \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

para $(\tilde{X}, \tilde{\delta}, D_1)$ e $(\tilde{Y}, \tilde{\gamma}, D_2)$, respectivamente, em que $U \ni p$ e $\hat{U} \ni \hat{p}$. Denote $h(U) = \hat{h}(\hat{U}) = W$. As vizinhanças U e $\hat{U}$ são escolhidas de tal forma que exista apenas um único ponto básico (ou apenas um intervalo singular básico).

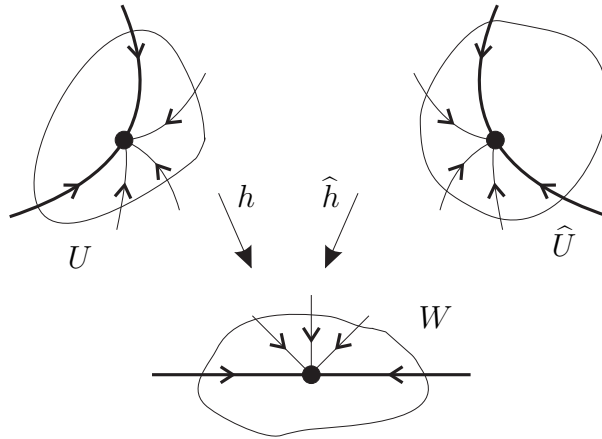


Figura 4.10: Neighborhoods U , $\hat{U}$ and W .

Se começarmos a construção do homeomorfismo a partir de um ponto básico, tomamos o conjunto aberto W de tal forma que sua fronteira seja transversal aos eixos coordenados.

Por outro lado, se a construção se inicia a partir de um intervalo singular básico, a vizinhança W é escolhida de tal forma que ela é transversal às retas $\{x = 0\}$ e $\{x = 1\}$.

Portanto, temos que $h^{-1}(\partial W)$ é transversal a $D_1 \cap U$. Isto também é verdade quando consideramos $(\hat{h})^{-1}(\partial W)$ e $D_2 \cap \hat{U}$. Aplicando este raciocínio para todos os pontos básicos e todos os intervalos singulares básicos no divisor excepcional, então uma vizinhança do divisor excepcional D_1 é dividido em um número finito de setores. Se este setor não é localmente dado por V_4^α , então podemos subdividir este setor pelo segmento $h^{-1}(\{x = 0\})$. Aplicamos o mesmo raciocínio para a terna $(\tilde{Y}, \tilde{\gamma}, D_2)$.

Estes setores são limitados por arcos do divisor excepcional, curvas solução, curvas de impasse ou curvas transversais ao divisor excepcional. Considerando $\alpha \in \{-1, 1\}$, estes setores são escritos em coordenadas locais da forma:

- Setor S_1^α : $\alpha(x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial x}$, em que $-1 \leq x \leq 1$ e $y \geq 0$. Este setor é equivalente ao ponto básico V_3^α ;
- Setor S_2^α : $\alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial}{\partial y}$, em que $-1 \leq x \leq 1$ e $y \geq 0$;
- Setor S_3^α : $\alpha y \frac{\partial}{\partial y}$, em que $-1 \leq x \leq 1$ e $y \geq 0$;
- Setor F^α : $\alpha \frac{\partial}{\partial x}$, em que $-1 \leq x \leq 1$ e $y \geq 0$;
- Setor SI_1^α : $x\dot{x} = \alpha x, x\dot{y} = \alpha y$, em que $\alpha x \geq 0$ e $y \geq 0$;
- Setor SI_2^α : $x\dot{x} = -\alpha x, x\dot{y} = -\alpha y$, em que $\alpha x \geq 0$ e $y \geq 0$;
- Setor SI_3^α : $x\dot{x} = \alpha x, x\dot{y} = -\alpha y$, em que $\alpha x \geq 0$ e $y \geq 0$;
- Setor SI_4^α : $x\dot{x} = -\alpha x, x\dot{y} = \alpha y$, em que $\alpha x \geq 0$ e $y \geq 0$;
- Setor SI_5^α : $x\dot{x} = 0, x\dot{y} = \alpha y$, em que $\alpha x \geq 0$ e $y \geq 0$;
- Setor SI_6^α : $x\dot{x} = 0, x\dot{y} = -\alpha y$, em que $\alpha x \geq 0$ e $y \geq 0$;
- Setor FI^α : $x\dot{x} = \alpha, x\dot{y} = 0$, em que $-1 \leq x \leq 1$ e $y \geq 0$.

Observe que o setor S_1^α é C^0 -orbitalmente equivalente a V_3^α .

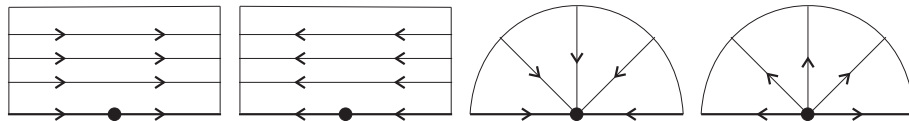


Figura 4.11: Setores S_1^α (esquerda) e S_2^α (direita).

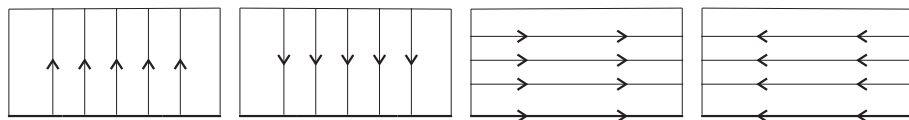


Figura 4.12: Setores S_3^α (esquerda) e F^α (direita).

Considere mais uma vez o ponto p que tomamos no começo desta prova. Lembre que este ponto não é nem da forma V_3^α nem C_3^α . Sabemos que $(\hat{h})^{-1} \circ h : U \rightarrow \hat{U}$ é um

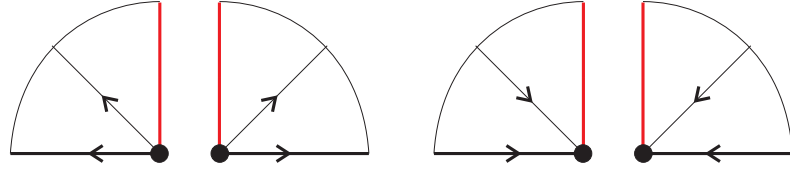


Figura 4.13: Setores SI_1^α (esquerda) e SI_2^α (direita). O conjunto de impasse está destacado em vermelho.

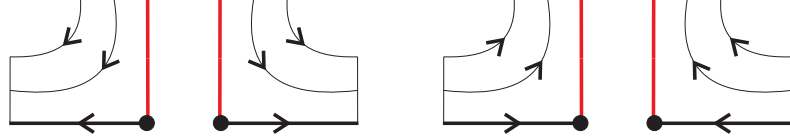


Figura 4.14: Setores SI_3^α (esquerda) e SI_4^α (direita). O conjunto de impasse está destacado em vermelho.

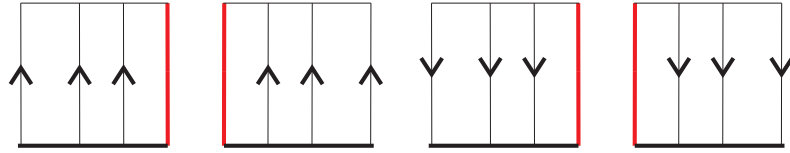


Figura 4.15: Setores SI_5^α (esquerda) e SI_6^α (direita). O conjunto de impasse está destacado em vermelho.

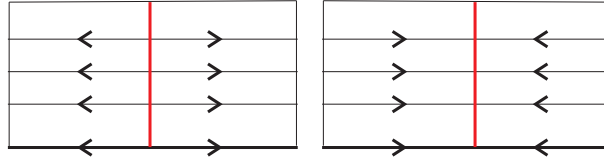


Figura 4.16: Setores FI^α . O conjunto de impasse está destacado em vermelho.

homeomorfismo tal que $h(p) = \hat{p}$, leva curvas de fase de $\tilde{X}$ em curvas de fase de $\tilde{Y}$ e leva conjunto de impasse em conjunto de impasse. Além disso, $(\hat{h})^{-1} \circ h$ leva divisor excepcional em divisor excepcional. Então construímos um homeomorfismo neste primeiro setor.

O setor adjacente (no sentido horário) deve ser da forma F^α ou FI^α . Neste segundo setor está definida uma C^0 equivalência orbital $\hat{h}$ entre $(\tilde{X}, \tilde{\delta}, D_1)$ e $(\tilde{Y}, \tilde{\gamma}, D_2)$. Observe que na fronteira ∂U os homeomorfismos $(\hat{h})^{-1} \circ h$ e $\hat{h}$ coincidem.

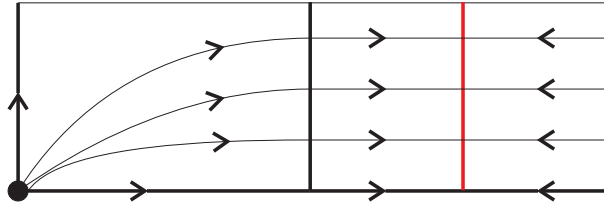


Figura 4.17: Colagem de dois setores adjacentes. O conjunto de impasse está destacado em vermelho.

Lembre que cada curva de fase intersecta ∂U em penas um ponto. Agora, pelo Lema da Colagem 4.8, existe um homeomorfismo definido em ambos os setores e que envia

curvas de fase de $\widetilde{X}$ em curvas de fase de $\widetilde{Y}$, leva conjunto de impasse em conjunto de impasse e leva divisor excepcional em divisor excepcional.

Entre cada setor da forma S_i^α ou SI_j^α pode ser que haja um setor da forma F^α ou FI^α , e precisamos colar todos esses setores em torno do divisor excepcional. Na fronteira de cada setor, o Lema da Colagem 4.8 é aplicado.

No final do processo, devemos colar o último e o primeiro setor de forma a “fechar” a construção do homeomorfismo, dado que estamos construindo tal função em torno do divisor excepcional (que é homeomorfo à $\mathbb{S}^1$). Observe que, em geral, esta construção só pode ser fechada se o ponto básico p que tomamos no início da demonstração não é nem da forma V_3^α e nem C_3^α . Geometricamente, isso significa que estamos evitando o caso do centro-foco.

Dessa forma, construímos um homeomorfismo H tal que $H(D_1) = D_2$, leva curvas de fase de $\widetilde{X}$ em curvas de fase de $\widetilde{Y}$ e leva $\widetilde{\Delta}_\delta$ em $\widetilde{\Delta}_\gamma$. Portanto H é a C^0 equivalência orbital procurada. $\square$

Combinando as Proposições 4.1 e 4.9 obtemos o Teorema 4.10, que nos dá uma condição baseada na resolução de singularidades que garante quando dois sistemas forçados são C^0 orbitalmente equivalentes de mesma orientação.

Teorema 4.10. *Considere dois sistemas forçados (X, δ, p_1) e (Y, γ, p_2) , em que $p_1 \in \Delta_\delta$ e $p_2 \in \Delta_\gamma$ são singularidades. Se a transformada estrita de ambos os sistemas possuem o mesmo esquema elementar de singularidades não degenerado, então (X, δ, p_1) e (Y, γ, p_2) são C^0 -orbitalmente equivalentes.*

Como a classificação de retratos de fase depende da noção de equivalência adotada, este resultado irá desempenhar um papel importante daqui em diante.

4.2 Determinação topológica de um sistema forçado usando o polígono de Newton

Primeiramente, vamos recordar um resultado clássico da literatura. Seja X um campo de vetores planar analítico definido próximo a origem tal que $X(0) = 0$, e denote seu polígono de Newton por $\mathcal{P}_X$. Em [6] os autores provaram que, sob certas condições de não degenerescência, os termos de X associados a fronteira $\partial\mathcal{P}_X$ do polígono de Newton determinam o retrato de fase de X próximo ao ponto de equilíbrio.

Mais precisamente, dado um campo de vetores analítico X , os termos de X associados aos pontos em $\partial\mathcal{P}_X$ definem um campo de vetores chamado *parte principal de X* , ao qual denotamos por X_Ω . O Teorema A de [6] garante que X e X_Ω são topologicamente equivalentes.

A seguir, apresentaremos uma versão deste resultado para sistemas forçados analíticos no plano cuja curva de impasse é suave. Nossa estratégia é trabalhar em um sistema de coordenadas conveniente de tal modo que o resultado clássico apresentado em [6] possa ser aplicado durante o processo de resolução de singularidades.

4.2.1 Coordenadas favoráveis

Como nosso estudo é local, por simplicidade vamos denotar um sistema forçado real analítico planar próximo a origem por (X, δ) , em que $X = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ é o campo

de vetores adjunto e δ é uma função real analítica e irreduzível. Como sempre, o campo de vetores auxiliar será denotado por X_A . Os polígonos de Newton do campo de vetores adjunto e do campo de vetores auxiliar serão denotados por $\mathcal{P}_X$ e $\mathcal{P}_{X_A}$, respectivamente.

Nesta seção vamos considerar sistemas forçados com conjunto de impasse regular. Por “conjunto de impasse regular” queremos dizer que o vetor gradiente $\nabla\delta$ não se anula na origem. O objetivo é estender o Teorema A de [6] para o contexto de sistemas forçados, isto é, o objetivo é mostrar que os termos associados à fronteira $\partial\mathcal{P}_{X_A}$ do polígono de Newton do campo de vetores auxiliar determina (sob equivalência topológica) o retrato de fase próximo a singularidade do sistema forçado. Para atingir este objetivo, primeiramente vamos definir um sistema de coordenadas conveniente.

Lema 4.11. *Seja (X, δ) um sistema forçado tal que a origem é um ponto de equilíbrio isolado e o conjunto de impasse é regular. Então existe um sistema de coordenadas tal que:*

- *A curva de impasse é dada por $\Delta = \{y = 0\}$;*
- *Os polígonos de Newton $\mathcal{P}_{X_A}$ e $\mathcal{P}_X$ do campo de vetores auxiliar X_A e do campo de vetores adjunto X são controláveis;*
- *O polígono de Newton $\mathcal{P}_{X_A}$ é obtido aumentando em uma unidade a segunda coordenada de cada ponto do polígono $\mathcal{P}_X$.*

Demonstração. O primeiro item é verdadeiro devido ao Teorema da Função Implícita. Para o segundo item, podemos aplicar a mudança de coordenadas

$$x = \bar{x} + \lambda\bar{y}; \quad y = \bar{y},$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$. Observe que mesmo após esta mudança de coordenadas a curva de impasse continua da forma $\Delta = \{y = 0\}$. Lembre que o polígono de Newton $\mathcal{P}_{X_A}$ do campo de vetores auxiliar é obtido pela soma de Minkowski dos polígonos de Newton de δ e X . Como neste sistema de coordenadas a função δ é dada simplesmente por $\delta = y$, segue que o polígono de Newton $\mathcal{P}_{X_A}$ do campo de vetores auxiliar X_A é obtido aumentando em uma unidade a segunda coordenada de cada ponto do polígono de Newton $\mathcal{P}_X$ de X . Veja a Figura 4.18. $\square$

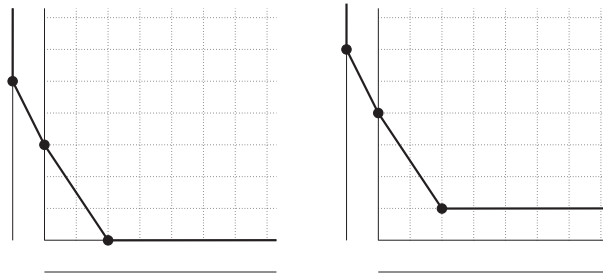


Figura 4.18: Polígonos de Newton $\mathcal{P}_X$ (esquerda) e $\mathcal{P}_{X_A}$ (direita).

Definição 4.12. O sistema de coordenadas dado pelo Lema 4.11 é chamado **favorável**.

Devido ao Lema 4.11, sem perda de generalidade sempre podemos tomar coordenadas favoráveis para (X, δ) . Também pelo Lema 4.11, segue que $\mathcal{P}_{X_A}$ e $\mathcal{P}_X$ possuem o mesmo número de segmentos. Além disso, dado um segmento $\gamma_i \subset \partial\mathcal{P}_{X_A}$, o respectivo segmento $\gamma'_i \subset \partial\mathcal{P}_X$ possui a mesma inclinação que γ_i . Isto implica que, se o segmento principal $\gamma_1 \subset \partial\mathcal{P}_{X_A}$ está contido numa reta da forma $\{r\omega_1 + s\omega_2 = R\}$, então o segmento $\gamma'_1 \subset \partial\mathcal{P}_X$ está contido numa reta da forma $\{r\omega_1 + s\omega_2 = S\}$. Portanto, a cada passo da resolução de singularidades, os pesos dos blow ups que usamos na dessingularização do sistema forçado e do campo de vetores X são os mesmos.

Agora estamos aptos para definir a parte principal de um sistema forçado planar analítico com conjunto de impasse regular.

Definição 4.13. (Definição página 347, [6]). A **parte principal** X_Ω de um campo de vetores real analítico X com respeito a um sistema de coordenadas fixado é o campo de vetores dado por

$$X_\Omega(x, y) = \sum_{j=1}^n X_j(x, y),$$

em que X_j é o campo de vetores definido pelos termos de X que pertencem ao segmento $\gamma_j \subset \partial\mathcal{P}_X$, em que γ_j não é nem horizontal e nem vertical.

Definição 4.14. A **parte principal de um sistema forçado com curva de impasse regular** é um par (X_Ω, δ) em coordenadas favoráveis, em que X_Ω é a parte principal do campo de vetores adjunto X no sentido da Definição 4.13.

Exemplo 4.15. Considere o sistema forçado na sua forma diagonalizada

$$y\dot{x} = y^3 + x^2y, \quad y\dot{y} = xy + x^4; \quad (4.1)$$

na qual já está escrito em coordenadas favoráveis e cujo campo de vetores auxiliar é dado por

$$X_A(x, y) = y(y^3 + x^2y) \frac{\partial}{\partial x} + y(xy + x^4) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (4.2)$$

O suporte de (4.2) é o conjunto $\mathcal{Q} = \{(-1, 4); (1, 2); (4, 0); (1, 1)\}$, e os termos associados a fronteira $\partial\mathcal{P}_{X_A}$ do polígono de Newton de X_A são $y(y^3) \frac{\partial}{\partial x}$, $y(xy) \frac{\partial}{\partial y}$ e $y(x^4) \frac{\partial}{\partial y}$. Portanto a parte principal de (4.1) é

$$y\dot{x} = y^3, \quad y\dot{y} = xy + x^4. \quad (4.3)$$

4.2.2 Condições de não degenerescência

Nesta subseção discutiremos algumas condições de não degenerescência que devemos impor para o par (X, δ) para que seja possível provar a existência de uma C^0 equivalência orbital entre (X, δ) and (X_Ω, δ) . Enfatizamos que estamos considerando (X, δ) em coordenadas favoráveis.

A primeira hipótese é que a origem é um ponto de equilíbrio isolado do campo de vetores adjunto X . Isto implica que $\partial\mathcal{P}_X$ intersecta os eixos coordenados do plano rs . Entretanto, observamos que, em geral, o polígono de Newton $\partial\mathcal{P}_{X_A}$ do campo de vetores auxiliar intersecta apenas o eixo s .

A próxima condição de não degenerescência foi introduzida em [6].

Definição 4.16. (Definição página 351, [6]) Seja X um campo de vetores analítico tal que p é um ponto de equilíbrio isolado e seja X_Ω sua parte principal. Dizemos que X é **Newton não degenerado em p** se qualquer componente quase homogênea X_j de X_Ω associada ao lado $\gamma_j \subset \partial\mathcal{P}_X$ não possui pontos de equilíbrio em $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$, isto é, se cada X_j não possui pontos de equilíbrio fora dos eixos coordenados.

Esta condição de não degenerescência implica que, durante o processo de resolução de singularidades de campos de vetores analíticos, o único ponto do divisor excepcional que possui altura positiva é a origem na direção x . Em outras palavras, todos os pontos de equilíbrio em $\left(\mathbb{E}_x \setminus \{(0, 0)\}\right) \cup \mathbb{E}_y$ são elementares (veja Proposição B, [33]).

Além disso, tal condição depende do sistema de coordenadas adotado. Isto é, um campo de vetores pode ser Newton não degenerado em um sistema de coordenadas, mas pode ser degenerado em outro sistema de coordenadas (veja os exemplos da Seção 2.3.4 de [33]). Entretanto, ser Newton não degenerado é uma propriedade genérica do conjunto formado por todos os campos de vetores analíticos (veja Proposição 6, [6]), e portanto é uma propriedade genérica no conjunto Γ de todos os sistemas forçados no plano definidos próximo à origem e que estão em coordenadas favoráveis.

Para encerrar esta subseção, vamos fazer uma pequena observação. Suponha que $\mathcal{P}_X$ contém um ponto da forma $(M, -1)$. Em outras palavras, suponha que a componente Q de $X = (P, Q)$ possui um termo da forma $b_{M,-1}x^M$, com $b_{M,-1} \neq 0$. Geometricamente, esta condição significa que nenhuma curva de fase de X coincide com a curva de impasse $\Delta = \{y = 0\}$. Pelo Lema 4.11 segue que $\mathcal{P}_{X_A}$ possuirá um ponto da forma $(M, 0)$.

Por outro lado, se $\mathcal{P}_X$ não possui um ponto da forma $(M, -1)$, então a curva de impasse Δ irá coincidir com uma curva de fase do campo de vetores adjunto. Pelo Lema 4.11, segue que $\mathcal{P}_{X_A}$ não intersecta o eixo r do plano rs .

A observação acima será importante para a demonstração do Teorema 4.19.

4.2.3 Prova do Teorema 4.19: Equivalência topológica entre um sistema forçado e sua parte principal

Primeiramente, vamos considerar o caso onde a fronteira do polígono de Newton possui apenas um lado que não é horizontal e nem vertical, e posteriormente vamos provar o caso geral. Daqui em diante, (X, δ) satisfaz as hipóteses discutidas na subseção anterior.

Lema 4.17. *Seja (X, δ) um sistema forçado planar escrito em coordenadas favoráveis. Suponha que*

1. *O campo de vetores adjunto X é Newton não degenerado na origem;*
2. *$X_\Omega = X_1$, isto é, a fronteira $\partial\mathcal{P}_X$ do polígono de Newton de X possui apenas um segmento que não é vertical nem horizontal.*

Então (X_Ω, δ) e (X, δ) possuem o mesmo esquema elementar de singularidades.

Demonstração. Vamos estudar o caso em que o vértice principal é da forma $(0, N)$, tendo em vista que o caso em que o vértice principal é da forma $(-1, N)$ é completamente análogo. Esta prova é baseada em blow-ups direcionais com peso e novamente vamos focar nas direções x e y positivas, já que as contas nas direções negativas são similares.

Como estamos adotando coordenadas favoráveis, a curva de impasse $\{y = 0\}$ aparece apenas na direção x . Isto significa que, na direção y , não há pontos de impasse no divisor

excepcional após um blow-up com peso, e portanto estamos no caso clássico de campos de vetores analíticos. Dessa forma, segue que na direção y ambos os pares (X_Ω, δ) e (X, δ) possuem os mesmos pontos de equilíbrio e eles estão dispostos da mesma forma. Enfatizamos que tais pontos de equilíbrio são semi-hiperbólicos (e portanto elementares), porque o sistema forçado é Newton não degenerado.

Após um blow-up na direção x , a primeira graduação do campo de vetores auxiliar toma a forma

$$\widetilde{X}_A = \tilde{y} \left(\sum_{n=-1}^N \tilde{y}^n \left(\frac{a_{m,n}}{\omega_1} \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + (b_{m,n} - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_{m,n}) \tilde{y} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right) \right).$$

Observe que a curva de impasse ainda é da forma $\{\tilde{y} = 0\}$, os pontos de equilíbrio das transformadas estritas $\widetilde{X}_\Omega$ e $\widetilde{X}$ são os mesmos e são semi hiperbólicos. Isto acontece independentemente se a curva de impasse coincide ou não com uma curva de fase que contém a origem. A diferença é que, no primeiro caso, o segmento principal do polígono após o blow-up será horizontal, e no segundo caso o polígono de Newton após blow up não terá altura positiva.

Segue então que os pares (X_Ω, δ) e (X, δ) possuem o mesmo esquema elementar de singularidades. $\square$

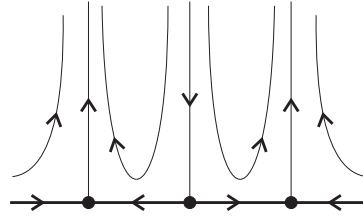
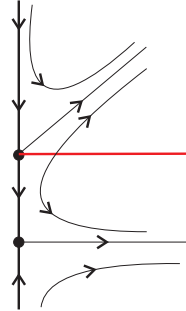
É importante notar que no Lema 4.17, o processo de resolução de singularidades essencialmente dessingulariza o campo de vetores, dado que o conjunto de impasse já está numa forma “simples”. Esta ideia será importante na prova da próxima proposição.

Proposição 4.18. *Seja (X, δ) um sistema forçado planar em coordenadas favoráveis. Se a origem é Newton não degenerada, então os pares (X_Ω, δ) e (X, δ) possuem o mesmo esquema elementar de singularidades.*

Demonstração. Mais uma vez vamos considerar blow ups direcionais com peso e estudaremos o caso em que o vértice principal é da forma $(0, N)$, tendo em vista que o caso em que o vértice principal é dado por $(-1, N)$ é completamente análogo. A ideia da prova consiste em comparar o processo de resolução de singularidades de (X_Ω, δ) e (X, δ) . Como os segmentos dos polígonos de Newton $\mathcal{P}_{X_A}$ e $\mathcal{P}_{X_{\Omega,A}}$ possuem a mesma inclinação, a cada passo do processo aplica-se blow-ups com o mesmo peso para ambos os sistemas forçados. O caso onde a fronteira do polígono possui apenas um lado que não é vertical nem horizontal foi estudado no Lema 4.17 e portanto vamos provar o caso geral.

Assim como no Lema 4.17, o conjunto de impasse $\{y = 0\}$ aparece apenas na direção x . Isto significa que em todos os outros pontos do divisor $\mathbb{E}_y$, ambos os pares (X_Ω, δ) e (X, δ) possuem os mesmos pontos de equilíbrio, todos eles são semi-hiperbólicos e a disposição desses equilíbrios são a mesma para ambos os pares (X_Ω, δ) e (X, δ) , dado que na direção y positiva estamos essencialmente analisando apenas os campos de vetores adjuntos e eles são Newton não-degenerados. Portanto basta olhar para a origem na direção x . Veja a Figura 4.19.

Aplicando o primeiro blow-up com peso $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ na direção x , obtém-se as transformadas estritas (X_Ω^1, δ_1) e (X^1, δ_1) . Em ambos casos, a função δ ainda é dada por $\delta = y$, e portanto a origem é o único ponto de impasse no divisor excepcional. No que diz respeito ao campo de vetores adjunto, com cálculos similares àqueles da demonstração do Lema 4.17 prova-se que no divisor $\mathbb{E}_x$ temos os mesmos pontos de equilíbrio para X e para X_Ω . Enfatizamos que todos os pontos de equilíbrio em $\mathbb{E}_x \setminus \{(0, 0)\}$ são semi hiperbólicos.


 Figura 4.19: Blow-up na direção y .

 Figura 4.20: Blow-up na direção x .

Além disso, a disposição de tais equilíbrios no divisor excepcional é a mesma, e a origem é um ponto de equilíbrio e um ponto de impasse ao mesmo tempo.

Devido ao Lema 4.11, os polígonos de Newton de (X_Ω^1, δ_1) e (X^1, δ_1) são obtidos aumentando em uma unidade a segunda coordenada de cada ponto do polígono $\mathcal{P}_{X^1}$. Sabemos que devemos prosseguir com o processo de resolução de singularidades, pois a origem não é um ponto elementar. Também é claro que, a cada passo, as fronteiras dos polígonos são iguais e portanto usa-se blow-ups com os mesmos pesos em ambos (X_Ω^i, δ_i) e (X^i, δ_i) .

Essencialmente, estamos apenas dessingularizando os pontos de equilíbrio de X e X_Ω e preservando a curva de impasse.

Ao final do processo, temos três casos a considerar com relação ao ponto de impasse $(0, 0) \in \mathbb{E}_x$. Os dois primeiros dizem respeito ao caso onde o conjunto de impasse não coincide com uma curva solução do campo de vetores adjunto, isto é, o caso em que $\mathcal{P}_X$ possui um ponto da forma $(M, -1)$. O terceiro e último caso diz respeito ao caso em que $\mathcal{P}_X$ não possui um ponto da forma $(M, -1)$, e portanto a curva de impasse coincide com uma curva de fase do campo de vetores adjunto.

Caso 1: Os polígonos de Newton $\mathcal{P}_{X_{\Omega,A}}$ e $\mathcal{P}_{X_A}$ possuem vértice da forma $(M, 0)$ mas não possui vértice da forma $(m, 1)$, com $m < M$. Isto implica que o polígono de Newton do campo de vetores adjunto $\mathcal{P}_X$ possui vértice da forma $(M, -1)$ mas não possui vértice da forma $(m, 0)$.

Após o último blow-up com peso na direção x necessário para dessingularizar a origem, segue do Lema 4.17 que o polígono de Newton $\mathcal{P}_{\tilde{X}}$ do campo de vetores adjunto $\tilde{X}$ irá conter o ponto $(0, -1)$, o que significa que a origem não é um ponto de equilíbrio de $\tilde{X}$. No que diz respeito aos pontos de equilíbrio que aparecem no divisor excepcional, eles serão os mesmos para ambos $(\tilde{X}_\Omega, \tilde{\delta})$ e $(\tilde{X}, \tilde{\delta})$, e a disposição destes pontos no divisor também é a mesma para ambos os pares.

Além disso, quando olhamos para $\mathcal{P}_{\tilde{X}_{\Omega,A}}$ e $\mathcal{P}_{\tilde{X}_A}$, vemos que esses polígonos possuem o ponto $(0, 0)$ como vértice, pois a origem de $\mathbb{E}_x$ é um ponto de impasse (veja a Figura 4.21).

Em resumo, a origem não é um ponto de equilíbrio e é um ponto de impasse, portanto a origem é um ponto elementar. Observe que aplicamos o mesmo número de blow-ups em ambos os pares (X_Ω, δ) e (X, δ) , e a cada passo usamos os mesmos pesos para ambos. Portanto ambos os pares possuem o mesmo esquema elementar de singularidades.

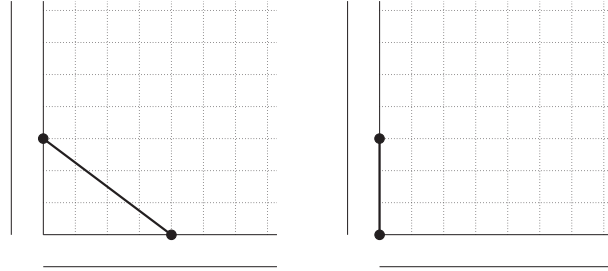


Figura 4.21: Segmento principal antes e depois do último blow-up no Caso 1, onde os polígonos de Newton $\mathcal{P}_{X_{\Omega,A}}$ e $\mathcal{P}_{X_A}$ não possuem um vértice da forma $(m, 1)$.

Caso 2: Os polígonos de Newton $\mathcal{P}_{X_{\Omega,A}}$ e $\mathcal{P}_{X_A}$ possuem vértices da forma $(m, 1)$ e $(M, 0)$, com $m < M$. Isto significa que o polígono de Newton $\mathcal{P}_X$ de X possui vértices da forma $(m, 0)$ $(M, -1)$. Após um número finito de blow-ups na direção x , o polígono de Newton $\mathcal{P}_{\tilde{X}}$ do campo de vetores adjunto $\tilde{X}$ irá possuir um vértice da forma $(0, 0)$, o que significa que a origem é um ponto de equilíbrio semi hiperbólico de $\tilde{X}$. Por outro lado, quando olhamos para $\mathcal{P}_{\tilde{X}_{\Omega,A}}$ e $\mathcal{P}_{\tilde{X}_A}$, vemos que esses polígonos possuem o ponto $(0, 1)$ como vértice principal, dado que a origem é um ponto de equilíbrio semi hiperbólico e um ponto de impasse ao mesmo tempo.

Dessa forma, este caso se difere do Caso 1 pois devemos aplicar mais um blow-up nos objetos $(\tilde{X}_\Omega, \delta)$ e $(\tilde{X}, \delta)$ na direção x . Observe que, como ambos $\mathcal{P}_{\tilde{X}_{\Omega,A}}$ e $\mathcal{P}_{\tilde{X}_A}$ possuem pontos da forma $(0, 1)$ e $(\widehat{M}, 0)$, aplicamos um blow-up com o mesmo peso em ambos os pares. No final do processo, o Lema 4.17 garante que (X_Ω, δ) e (X, δ) possuem o mesmo esquema elementar de singularidades.

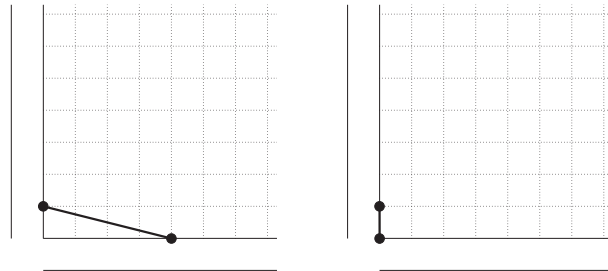


Figura 4.22: Segmento principal antes e depois do último blow-up no Caso 2, em que os polígonos de Newton $\mathcal{P}_{X_{\Omega,A}}$ e $\mathcal{P}_{X_A}$ possuem um vértice da forma $(m, 1)$.

Caso 3: Suponha agora que o conjunto de impasse coincide com uma curva de fase. Seguindo as ideias apresentadas nos casos anteriores, vemos que o processo de dessingularização do sistema forçado é, essencialmente, o processo de dessingularização do campo de vetores adjunto. Após uma conveniente sequência finita de blow-ups, os pontos de equilíbrio no divisor excepcional são os mesmos para ambos X_Ω and X . Além disso, a disposição de tais pontos de equilíbrio são os mesmos para X_Ω and X e todos eles são elementares. Como o conjunto de impasse coincide com uma curva de fase passando por $(0, 0) \in \mathbb{E}_x$, segue que (X_Ω, δ) e (X, δ) possuem o mesmo esquema elementar de singularidades. $\square$

Combinando o Teorema 4.10 e a Proposição 4.18, obtemos o Teorema 4.19.

Teorema 4.19. *Seja (X, δ) um sistema forçado planar analítico tal que $\Delta = \{\delta = 0\}$ é uma curva regular e a origem é uma singularidade Newton não-degenerada. Se X possui órbita característica (isto é, não é nem um centro e nem um foco), então (X_Ω, δ) e (X, δ) são C^0 -orbitalmente equivalentes.*

4.2.4 Exemplo

Considere o sistema forçado diagonalizado

$$y\dot{x} = y^3 + x^2y + x^4; \quad y\dot{y} = x^3 + xy^2 + y^4; \quad (4.4)$$

que já está escrito em coordenadas favoráveis. O suporte de seu campo de vetores auxiliar X_A é o conjunto $\mathcal{Q} = \{(-1, 4), (1, 2), (3, 1), (3, 0), (0, 4)\}$, e portanto a parte principal de (4.4) é dada por

$$y\dot{x} = y^3 + x^2y; \quad y\dot{y} = x^3 + xy^2. \quad (4.5)$$

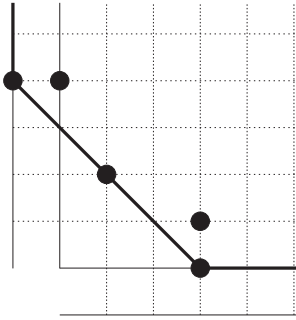


Figura 4.23: Polígono de Newton do campo de vetores auxiliar de (4.4).

Observe que os sistemas forçados (4.4) e (4.5) estão sob as hipóteses do Teorema 4.19. O segmento principal $\gamma_1 \subset \partial\mathcal{P}_{X_A}$ está contido na reta $\{r + s = 6\}$, e portanto o vetor peso é $\omega = (1, 1)$. Pode ser verificado que, para ambos os sistemas (4.4) e (4.5), na direção y positiva os pontos $(\pm 1, 0) \in \mathbb{E}_y$ são selas hiperbólicas do campo de vetores adjunto. Por outro lado, na direção x positiva os pontos $(\pm 1, 0) \in \mathbb{E}_x$ são selas hiperbólicas e a origem é um ponto de impasse. Os sistemas (4.4) e (4.5) possuem o mesmo esquema elementar de singularidades, e portanto eles são C^0 orbitalmente equivalentes. Veja a Figura 4.24.

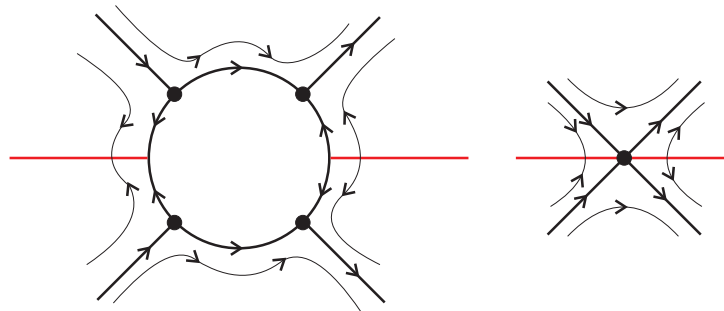


Figura 4.24: Sistema forçado (4.4) antes e após blow-up.

4.3 Sistemas forçados com conjunto de impasse singular e a prova do Teorema 4.20

O objetivo desta seção é classificar retratos de fase de sistemas forçados no plano próximos a pontos singulares da curva de impasse. Na Introdução foi definido o conjunto $\mathcal{A}$, que é o conjunto dos sistemas forçados (X, δ) definidos numa vizinhança da origem e que satisfazem:

1. O campo de vetores adjunto é constante, isto é, $X(x, y) = (a, b)$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$.
2. A função δ é uma das curvas do tipo ADE classificadas por Arnold [2] (veja a tabela 4.1 e as Figuras 4.25, 4.26 e 4.27).

Tipo	Forma normal	Codimensão
$A_k, k \geq 1$	$x^2 \pm y^{k+1}$	$k - 1$
$D_k, k \geq 4$	$x^2 y \pm y^{k-1}$	$k - 1$
E_6	$x^3 \pm y^4$	5
E_7	$y^3 - yx^3$	6
E_8	$x^3 + y^5$	7

Tabela 4.1: Singularidades do tipo ADE classificadas em [2]. Veja as Figuras 4.25, 4.26 e 4.27.

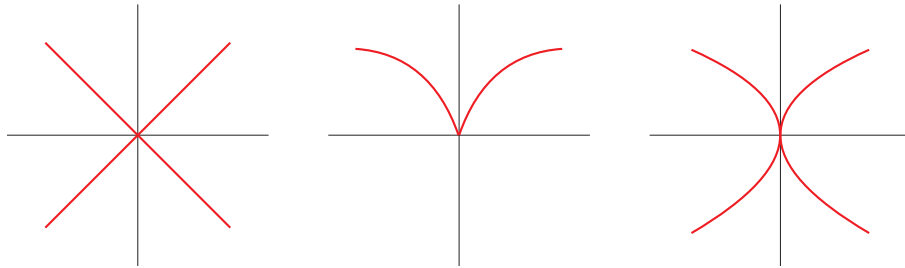


Figura 4.25: Da esquerda para a direita: curvas A_k para $k = 1$, A_k para k par e A_k para k ímpar e $k \geq 3$.

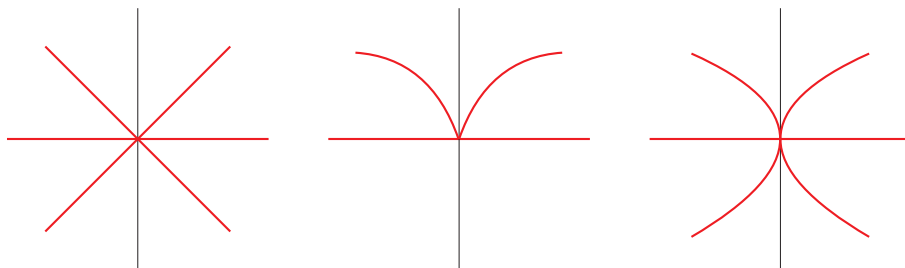


Figura 4.26: Da esquerda para a direita: curvas D_k para $k = 4$, D_k para k ímpar e D_k para k par e $k \geq 6$.

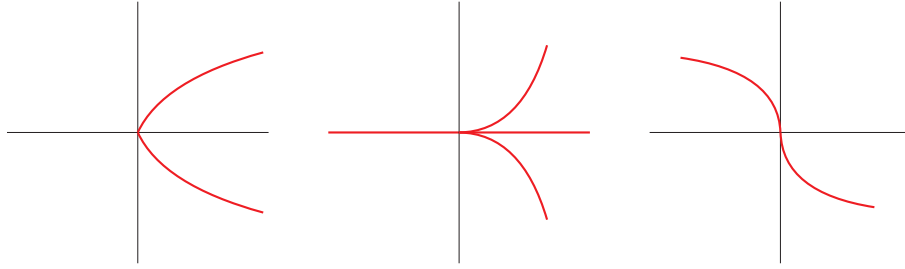


Figura 4.27: Da esquerda para a direita: curvas E_6 , E_7 e E_8 .

Escolhemos um sistema de coordenadas tal que δ é uma das funções dada pela tabela 4.1. Como o campo de vetores adjunto e δ são analíticos, e assumindo que $X(0) \neq 0$, isto é, os coeficientes $a_{-1,0}$ e $b_{0,-1}$ na expansão

$$\begin{cases} \delta(x, y)\dot{x} &= a_{-1,0} + a_{0,0}x + a_{-1,1}y + \dots, \\ \delta(x, y)\dot{y} &= b_{0,-1} + b_{0,0}y + b_{1,-1}x + \dots, \end{cases} \quad (4.6)$$

satisfazem $a_{-1,0}^2 + b_{0,-1}^2 \neq 0$, o Teorema 4.20 dá condições para garantir quando o Sistema (4.6) é C^0 orbitalmente equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \delta(x, y)\dot{x} &= a_{-1,0}, \\ \delta(x, y)\dot{y} &= b_{0,-1}, \end{cases} \quad (4.7)$$

que pertence ao conjunto $\mathcal{A}$.

Teorema 4.20. *Considere o sistema forçado planar analítico (X, δ) definido próximo a origem tal que $X(0) \neq 0$ e a origem é uma singularidade de δ do tipo ADE. Então o sistema (1.1) é C^0 -orbitalmente equivalente a um sistema em $\mathcal{A}$ se ele satisfaz uma das condições da Tabela 4.2, Seção 4.3.*

A prova do Teorema 4.20 é dada por cálculos diretos. De fato, devemos comparar o processo de resolução de singularidades de ambos os sistemas (4.6) e (4.7) para estabelecer condições que os coeficientes da expansão de Taylor devem satisfazer para que, após uma conveniente e finita sequência de blow-ups com peso, tais sistemas tenham o mesmo esquema elementar de singularidades. O sistema (4.6) deve satisfazer uma das condições presentes na tabela 4.2, em que n_0 é o primeiro inteiro positivo tal que $a_{-1,n_0} \neq 0$. Geometricamente, as condições buscam evitar tangências entre o campo de vetores adjunto de (4.6) e as componentes da curva de impasse.

No que segue vamos descrever os retratos de fase possíveis de (4.7) próximo ao divisor excepcional para cada curva δ da Tabela 4.1.

4.3.1 Curva A_k , $k \geq 1$

Para esta curva, quando $a_{-1,0} \neq 0$ o polígono de Newton possui vértices da forma $(1, 0)$ e $(-1, k+1)$. Por outro lado, quando $b_{0,-1} \neq 0$ o polígono de Newton tem vértices da forma $(2, -1)$ e $(0, k)$. Em ambos os casos, o vetor peso será da forma $\omega = (k+1, 2)$.

Na direção x , quando $a_{-1,0} \neq 0$ o campo de vetores auxiliar toma a forma

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{A_k} = (1 \pm \tilde{y}^{k+1}) & \left(\frac{1}{k+1} (a_{-1,0}\tilde{x} + a_{0,0}\tilde{x}^{k+2} + a_{-1,n_0}\tilde{x}^{2n_0+1}\tilde{y}^{n_0} + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \right. \\ & \left. \left(-\frac{2}{k+1} a_{-1,0}\tilde{y} + b_{0,-1}\tilde{x}^{k-1} - \frac{2}{k+1} a_{-1,n_0}\tilde{x}^{2n_0}\tilde{y}^{n_0+1} + \dots \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right), \end{aligned}$$

Curva δ	Condições
A_k	Caso 1: $k > 1$ e $a_{-1,0} \neq 0$
	Caso 2: $k = 1$ e $0 \neq a_{-1,0} \neq \pm b_{0,-1}$
	Caso 3: $a_{-1,0} = 0$ e $k - 1 < 2n_0$
D_k	Caso 4: $a_{-1,0} \neq 0$ e $b_{m_0,-1} = 0$ para todo inteiro $m_0 \geq 0$
	Caso 5: $k = 4$ e $0 \neq a_{-1,0} \neq \pm b_{0,-1}$
	Caso 6: $a_{-1,0} = 0$ e $k - 4 < 2n_0$
E_7	Caso 7: $b_{0,-1} \neq 0$
	Caso 8: $a_{-1,0} \neq 0$ e $b_{m_0,-1} = 0$ para todo inteiro $m_0 \geq 0$
E_6 ou E_8	Não é necessário requerer hipóteses sobre a expansão em Taylor do campo de vetores adjunto.

Tabela 4.2: O sistema forçado (4.6) deve satisfazer uma das condições desta tabela para que seja equivalente a um sistema em $\mathcal{A}$. O número n_0 é o primeiro inteiro positivo tal que $a_{-1,n_0} \neq 0$.

e quando $a_{-1,0} = 0$ temos (assumindo $k - 1 < 2n_0$)

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{A_k} = (1 \pm \tilde{y}^{k+1}) & \left(\frac{1}{k+1} (a_{0,0} \tilde{x}^3 + a_{-1,n_0} \tilde{x}^{2n_0-k+2} \tilde{y}^{n_0} + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \right. \\ & \left. (b_{0,-1} - \frac{2}{k+1} a_{-1,n_0} \tilde{x}^{2n_0-k+1} \tilde{y}^{n_0+1} + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right). \end{aligned}$$

Na direção y , por sua vez, quando $a_{-1,0} \neq 0$ obtemos

$$\tilde{X}_{A_k} = (\tilde{x}^2 \pm 1) \left((a_{-1,0} - \frac{k+1}{2} b_{0,-1} \tilde{x} \tilde{y}^{k-1} + a_{-1,n_0} \tilde{y}^{2n_0} + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{2} (b_{0,-1} \tilde{y}^k + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right),$$

e quando $a_{-1,0} = 0$ tem-se

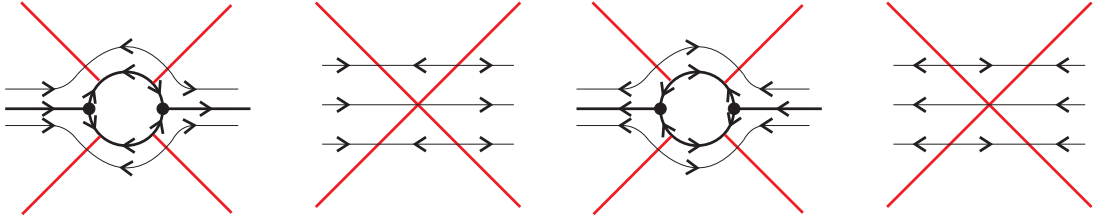
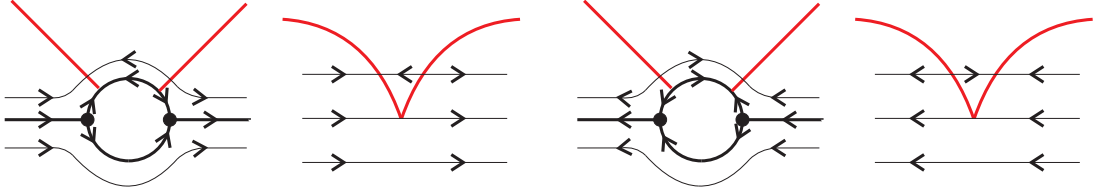
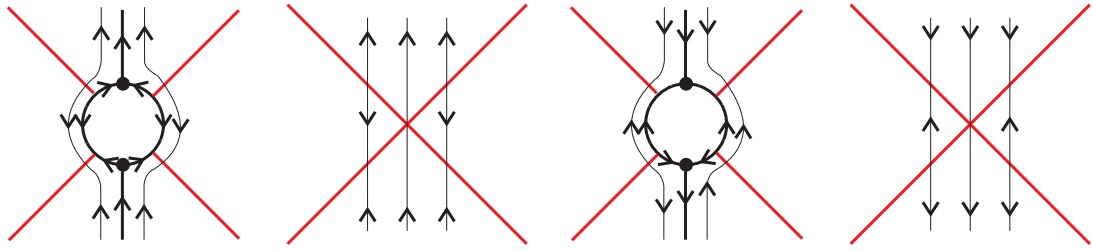
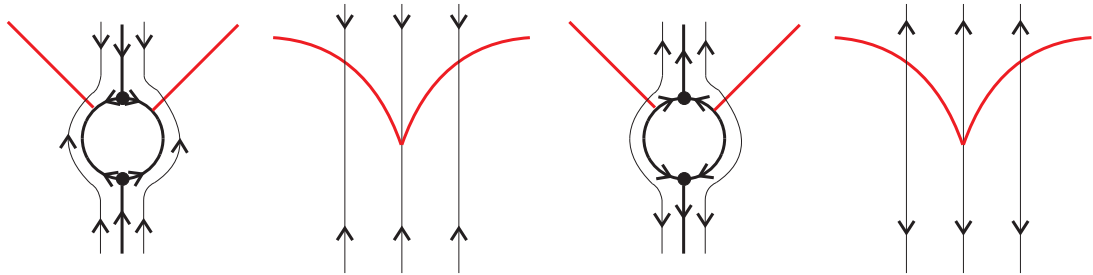
$$\tilde{X}_{A_k} = (\tilde{x}^2 \pm 1) \left(\left(-\frac{k+1}{2} b_{0,-1} \tilde{x} + a_{-1,n_0} \tilde{y}^{2n_0-k+1} + \dots \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{2} (b_{0,-1} \tilde{y} + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right).$$

Primeiramente assumimos as condições do Caso 1. Após um blow-up com peso na direção x , a origem $0 \in \mathbb{E}_x$ é uma sela hiperbólica e a curva de impasse satisfaz $1 \pm \tilde{y}^{k+1} = 0$. Na direção y não há pontos de equilíbrio em $\mathbb{E}_y$ e a curva de impasse satisfaz a equação $\tilde{x}^2 \pm 1 = 0$. Veja as Figuras 4.28 e 4.29.

A análise do Caso 2 é semelhante à análise do Caso 1. Observe que as condições $a_{-1,0} \neq 0$, $b_{0,-1} \neq 0$ e $a_{-1,0} \neq b_{0,-1}$ devem ser exigidas para que o campo de vetores adjunto não tangencie uma das componentes da curva $x^2 - y^2 \neq 0$.

Agora, considere o Caso 3. Após um blow-up com pesos na direção x , não há pontos de equilíbrio em $\mathbb{E}_x$, e na direção y a origem $0 \in \mathbb{E}_y$ é uma sela hiperbólica. A curva de impasse se comporta assim como nos outros dois casos.

É importante compreender o que a condição $k - 1 < 2n_0$ significa geometricamente. Seja n_0 o primeiro inteiro não nulo tal que $a_{-1,n_0} \neq 0$. Então o campo de vetores adjunto tangencia o eixo y na origem, e essa tangência é de ordem $n_0 + 1$. Por outro lado, para k ímpar $k \geq 2$, a curva de impasse tangencia o eixo y na origem, e esta tangência é de ordem $\frac{k+1}{2}$. Dessa forma, a relação $k - 1 < 2n_0$ estabelece uma relação entre essas tangências. Também é interessante notar que quando $k - 1 \geq 2n_0$ o segmento principal do campo de vetores auxiliar de (4.6) possui um vértice da forma $(1, n_0)$, e tal ponto não aparece no polígono de Newton do campo de vetores auxiliar de (4.7). Veja as Figuras 4.30 e 4.31.


 Figura 4.28: Retrato de fase quando $a_{-1,0} \neq 0$, para δ do tipo A_k , k ímpar.

 Figura 4.29: Retrato de fase quando $a_{-1,0} \neq 0$, para δ do tipo A_k , k par.

 Figura 4.30: Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$, para δ do tipo A_k , k ímpar.

 Figura 4.31: Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$, para δ do tipo A_k , k par.

4.3.2 Curva D_k , $k \geq 4$

Se $a_{-1,0} \neq 0$, o suporte contém pontos da forma $(1, 1)$ e $(-1, k-1)$. Por outro lado, se $b_{0,-1} \neq 0$ o suporte contém pontos da forma $(2, 0)$ and $(0, k-2)$. Em ambos os casos, o vetor peso será $\omega = (k-2, 2)$.

Na direção x quando $a_{-1,0} \neq 0$ o campo de vetores adjunto toma a forma

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{D_k} = (\tilde{y} \pm \tilde{y}^{k-1}) & \left(\frac{1}{k-2} (a_{-1,0} \tilde{x} + a_{0,0} \tilde{x}^{k-1} + a_{-1,n_0} \tilde{x}^{2n_0+1} \tilde{y}^{n_0} + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \right. \\ & \left. \left(-\frac{2}{k-2} a_{-1,0} \tilde{y} + b_{0,-1} \tilde{x}^{k-4} - \frac{2}{k-2} a_{-1,n_0} \tilde{x}^{2n_0} \tilde{y}^{n_0+1} + \dots \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right), \end{aligned}$$

e quando $a_{-1,0} = 0$ temos (assumindo $k - 4 < 2n_0$)

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{D_k} = (\tilde{y} \pm \tilde{y}^{k-1}) & \left(\frac{1}{k-2} (a_{0,0} \tilde{x}^3 + a_{-1,n_0} \tilde{x}^{2n_0-k+5} \tilde{y}^{n_0} + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \right. \\ & \left. (b_{0,-1} - \frac{2}{k-2} a_{-1,n_0} \tilde{x}^{2n_0-k+4} \tilde{y}^{n_0+1} + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right). \end{aligned}$$

Já na direção y , por sua vez, quando $a_{-1,0} \neq 0$ o campo de vetores adjunto toma a forma

$$\tilde{X}_{D_k} = (\tilde{x}^2 \pm 1) \left(\left(a_{-1,0} - \frac{k-2}{2} b_{0,-1} \tilde{x} \tilde{y}^{k-4} + a_{-1,n_0} \tilde{y}^{2n_0} + \dots \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{2} (b_{0,-1} \tilde{y}^{k-3} + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right),$$

e quando $a_{-1,0} = 0$ obtemos (novamente assumindo $k - 4 < 2n_0$)

$$\tilde{X}_{D_k} = (\tilde{x}^2 \pm 1) \left(\left(-\frac{k-2}{2} b_{0,-1} \tilde{x} + a_{-1,n_0} \tilde{y}^{2n_0-k+4} + \dots \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{2} (b_{0,-1} \tilde{y} + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right).$$

Assuma as hipóteses do Caso 4. Após um blow-up com peso na direção x , a origem $0 \in \mathbb{E}_x$ é um ponto de sela do campo de vetores adjunto X e existe uma curva de fase que coincide com a componente $y = 0$ da curva de impasse $\Delta = \{\tilde{y} \pm \tilde{y}^{k-1} = 0\}$. Na direção y , não há pontos de equilíbrio em $\mathbb{E}_y$ o conjunto de impasse é dado por $\{\tilde{x}^2 \pm 1 = 0\}$.

Enfatizamos que a condição $b_{m_0,-1} = 0$ para todo inteiro $m_0 \geq 0$ implica que o campo de vetores adjunto não tangencia a componente $\{y = 0\}$ na origem. Isto nos levaria a uma resolução de singularidades diferente para o sistema (4.7). Veja as figuras 4.32 e 4.33.

Agora, assuma as hipóteses do Caso 5 para $k > 4$. Na direção y não há pontos de equilíbrio de X em $\mathbb{E}_y$. Por outro lado, na direção x a origem $0 \in \mathbb{E}_x$ é uma sela hiperbólica do campo de vetores adjunto e um ponto de impasse ao mesmo tempo. Aqui, o polígono de Newton contém os pontos $(0, 1)$, $(0, k-1)$, $(k-4, 0)$ e $(k-4; k-2)$, e portanto devemos aplicar um novo blow-up de peso $\omega = (1, k-4)$. Nestas condições, após este blow up obtemos

$$\bar{X}_{D_k} = (1 \pm \bar{x}^{k-1} \bar{y}^{k-1}) \left(\left(\frac{a_{-1,0}}{k-2} \bar{x} + \dots \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + (b_{0,-1} - a_{-1,0} \bar{y} + \dots) \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right),$$

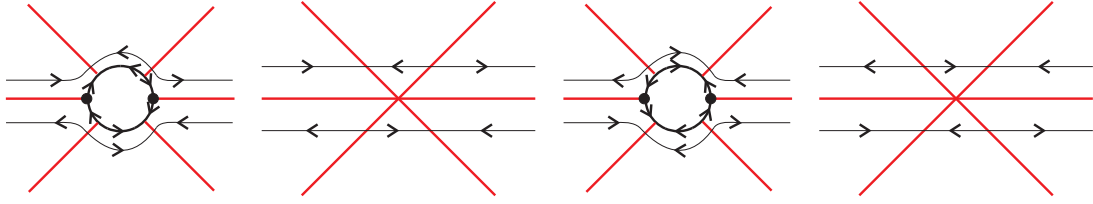
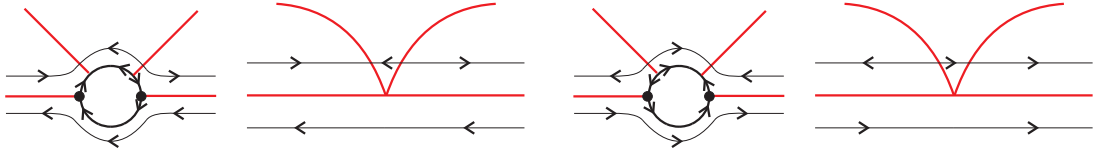
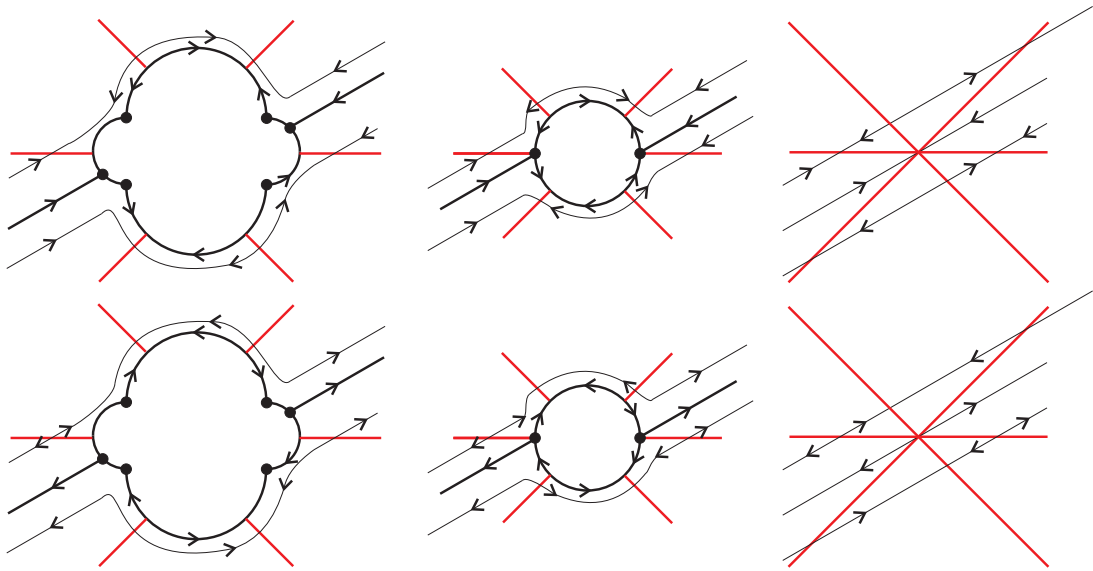
na direção x . Já na direção y o campo de vetores auxiliar toma a forma

$$\bar{X}_{D_k} = (1 \pm \bar{x}^{k-1} \bar{y}^{k-1}) \left(\left(a_{-1,0} \bar{x} - \frac{b_{0,-1}}{k-4} \bar{x}^{k-3} + \dots \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \left(-\frac{2a_{-1,0}}{(k-4)(k-2)} \bar{y} + \frac{b_{0,-1}}{k-4} \bar{x}^{k-4} \bar{y} + \dots \right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right).$$

Já para o Caso 5 quando $k = 4$, enfatizamos que as condições $a_{-1,0} \neq 0$, $b_{0,-1} \neq 0$ e $a_{-1,0} \neq b_{0,-1}$ evitam tangências entre o campo de vetores adjunto e a componente $\{x^2 - y^2 = 0\}$ da curva de impasse. Veja as figuras 4.34 e 4.35.

Finalmente, assuma as hipóteses do Caso 6. Na direção x a curva de impasse satisfaz $\tilde{y} \pm \tilde{y}^{k-1} = 0$ e não há pontos de equilíbrio do campo de vetores adjunto em $\mathbb{E}_x$. Por outro lado, na direção y a curva de impasse é dada por $\tilde{x}^2 \pm 1 = 0$ e a origem $0 \in \mathbb{E}_y$ é uma sela hiperbólica.

É importante compreender o que a condição $k - 4 < 2n_0$ significa geometricamente. Seja n_0 o primeiro inteiro não nulo tal que $a_{-1,n_0} \neq 0$. Então o campo de vetores adjunto tangencia o eixo y na origem, e essa tangência é de ordem $n_0 + 1$. Por outro lado, para k par $k \geq 6$, a curva de impasse tangencia o eixo y na origem, e esta tangência é de ordem $\frac{k-2}{2}$. Dessa forma, a relação $k - 4 < 2n_0$ estabelece uma relação entre essas tangências. Também é interessante notar que quando $k - 4 \geq 2n_0$ o segmento principal do campo de vetores auxiliar de (4.6) possui um vértice da forma $(1, n_0 + 1)$, e tal ponto não parece no polígono de Newton do campo de vetores auxiliar de (4.7). Veja as Figuras 4.36 e 4.37.


 Figura 4.32: Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$, para δ do tipo D_k , k par.

 Figura 4.33: Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$, para δ do tipo D_k , k ímpar.

 Figura 4.34: Retrato de fase quando $a_{-1,0} \neq 0$, para δ do tipo D_k , k par.

4.3.3 Curva E_6

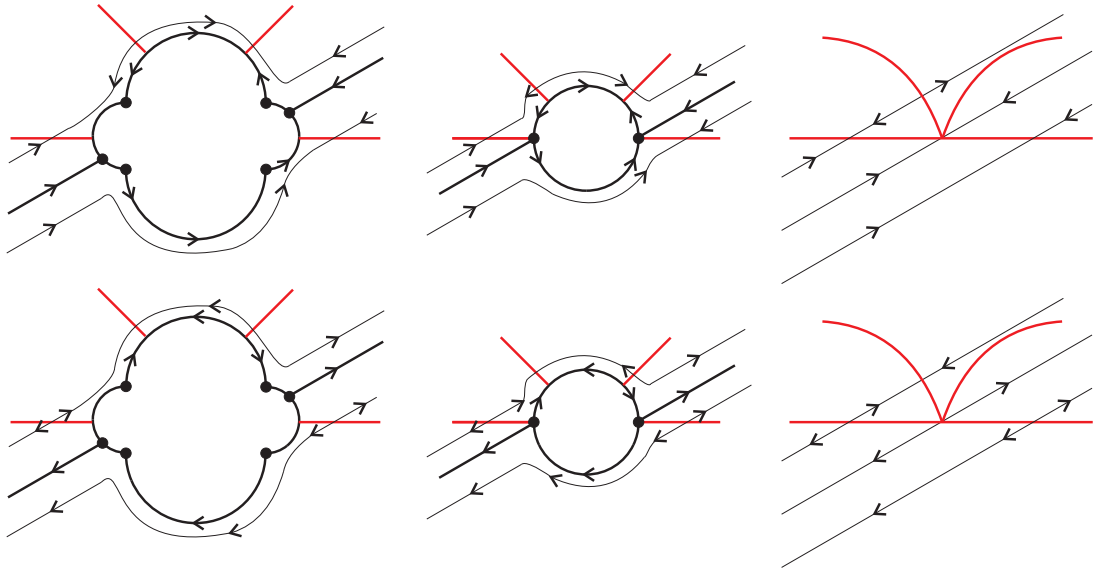
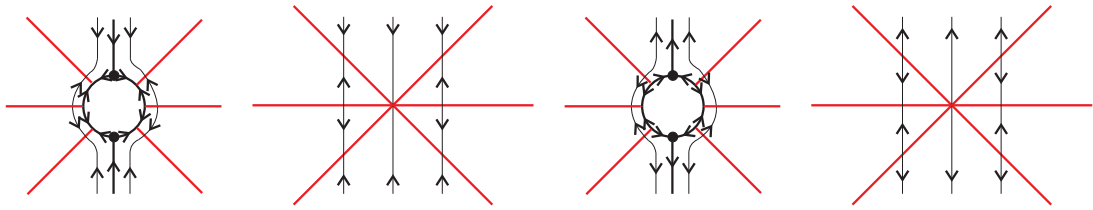
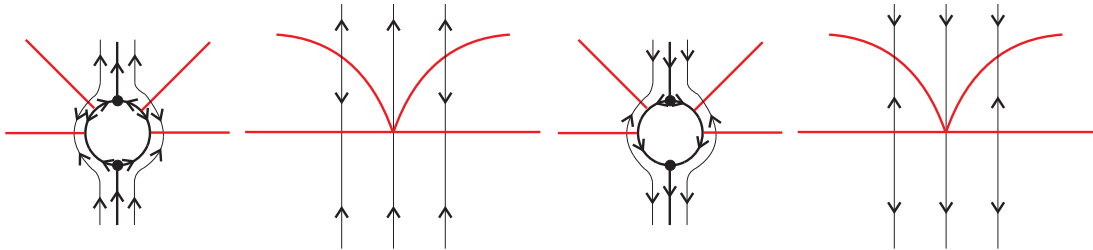
Se $a_{-1,0} \neq 0$, o suporte contém os pontos $(-1, 4)$ e $(2, 0)$. Por outro lado, $b_{0,-1} \neq 0$ implica que o suporte contém os pontos $(0, 3)$ e $(3, -1)$. Em ambos os casos o vetor peso será da forma $\omega = (4, 3)$.

Suponha sem perda de generalidade que $\delta = x^3 - y^4$. Na direção x , quando $a_{-1,0} \neq 0$ o campo de vetores auxiliar toma a forma

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{E_6} = (1 - \tilde{y}^4) & \left(\frac{1}{4} (a_{-1,0} \tilde{x} + a_{0,0} \tilde{x}^5 + a_{-1,1} \tilde{x}^4 \tilde{y} + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \right. \\ & \left. \left(-\frac{3}{4} a_{-1,0} \tilde{y} + b_{0,-1} \tilde{x} + (b_{0,0} - \frac{3}{4} a_{0,0}) \tilde{x}^4 \tilde{y} - \frac{3}{4} a_{-1,1} \tilde{x}^3 \tilde{y}^2 + \dots \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right), \end{aligned}$$

e se $a_{-1,0} = 0$ temos

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{E_6} = (1 - \tilde{y}^4) & \left(\frac{1}{4} (a_{0,0} \tilde{x}^4 + a_{-1,1} \tilde{x}^3 \tilde{y} + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \right. \\ & \left. (b_{0,-1} + (b_{0,0} - \frac{3}{4} a_{0,0}) \tilde{x}^3 \tilde{y} - \frac{3}{4} a_{-1,1} \tilde{x}^2 \tilde{y}^2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right). \end{aligned}$$


 Figura 4.35: Retrato de fase quando $a_{-1,0} \neq 0$, para δ do tipo D_k , k ímpar.

 Figura 4.36: Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$, para δ do tipo D_k , k par.

 Figura 4.37: Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$, para δ do tipo D_k , k ímpar.

Por outro lado, na direção y quando $a_{-1,0} \neq 0$ vale

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{E_6} = (\tilde{x}^3 - 1) & \left(\left(a_{-1,0} - \frac{4}{3}b_{0,-1}\tilde{x}\tilde{y} + a_{-1,1}\tilde{y}^3 + (a_{0,0} - \frac{4}{3}b_{0,0})\tilde{x}\tilde{y}^4 + \dots \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \right. \\ & \left. \frac{1}{3}(b_{0,-1}\tilde{y}^2 + b_{0,0}\tilde{y}^5 + b_{1,-1}\tilde{x}\tilde{y}^6 + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right), \end{aligned}$$

e se $a_{-1,0} = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{E_6} = (\tilde{x}^3 - 1) & \left(\left(-\frac{4}{3}b_{0,-1}\tilde{x} + a_{-1,1}\tilde{y}^2 + (a_{0,0} - \frac{4}{3}b_{0,0})\tilde{x}\tilde{y}^3 + \dots \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \right. \\ & \left. \frac{1}{3}(b_{0,-1}\tilde{y} + b_{0,0}\tilde{y}^4 + b_{1,-1}\tilde{x}\tilde{y}^5 + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right). \end{aligned}$$

Na direção x positiva a curva de impasse intersecta o divisor excepcional nos pontos $(0, 1)$. Para $a_{-1,0} \neq 0$ a origem $0 \in \mathbb{E}_x$ é uma sela hiperbólica e se $a_{-1,0} = 0$ não temos

pontos de equilíbrio do campo de vetores adjunto em $\mathbb{E}_x$. Na direção y positiva, a curva de impasse intersecta o divisor excepcional em $(1, 0)$. Se $a_{-1,0} \neq 0$, não há pontos de equilíbrio do campo de vetores adjunto em $\mathbb{E}_y$, e se $a_{-1,0} = 0$ a origem $0 \in \mathbb{E}_y$ é uma sela hiperbólica. Veja as Figuras 4.38 e 4.39.

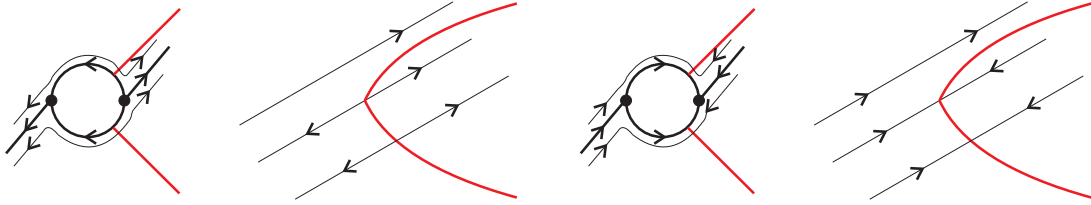


Figura 4.38: Retrato de fase quando $a_{-1,0} \neq 0$, para δ do tipo E_6 .

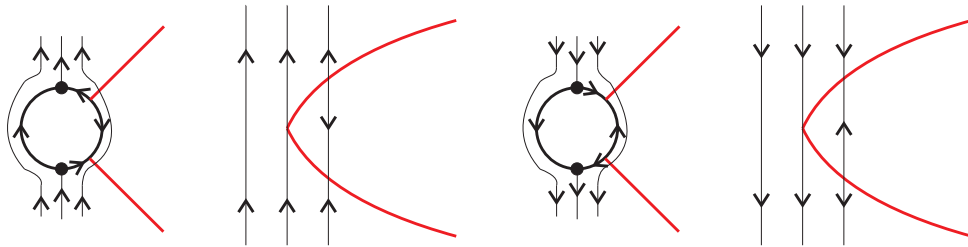


Figura 4.39: Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$, para δ do tipo E_6 .

4.3.4 Curva E_7

Se $a_{-1,0} \neq 0$, o suporte contém os pontos $(-1, 3)$ and $(2, 1)$. Por outro lado, $b_{0,-1} \neq 0$ implica que o suporte contém os pontos $(0, 2)$ e $(3, 0)$. Em ambos os casos escolhemos o vetor $\omega = (2, 3)$ como vetor peso.

Na direção x , o campo de vetores auxiliar toma a forma

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{E_7} = (\tilde{y}^3 - \tilde{y}) \left(\frac{1}{2} (a_{-1,0} \tilde{x}^2 + a_{0,0} \tilde{x}^4 + a_{-1,1} \tilde{x}^5 \tilde{y} + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \right. \\ \left. (b_{0,-1} - \frac{3}{2} a_{-1,0} \tilde{x} \tilde{y} + b_{1,-1} \tilde{x}^2 - \frac{3}{2} a_{-1,1} \tilde{x}^4 \tilde{y}^2 \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right), \end{aligned}$$

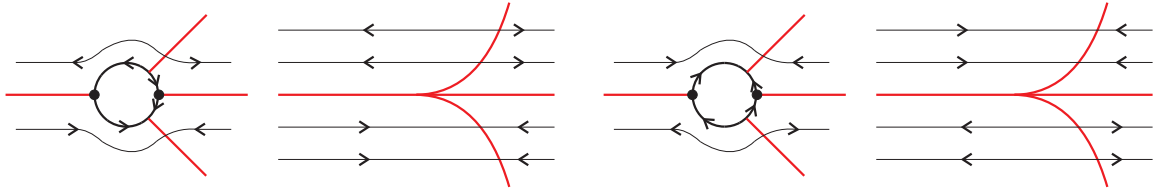
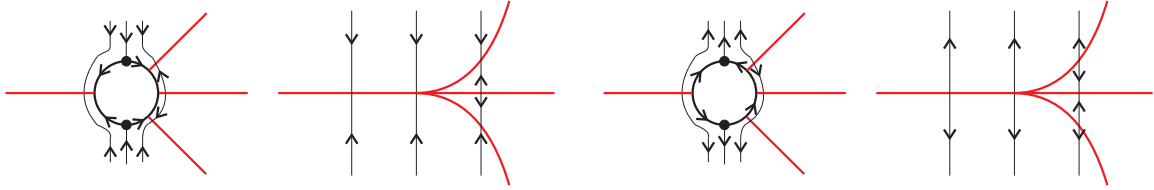
e na direção y obtemos

$$\tilde{X}_{E_7} = (1 - \tilde{x}^3) \left((a_{-1,0} \tilde{y} - \frac{2}{3} b_{0,-1} \tilde{x} - \frac{2}{3} b_{1,-1} \tilde{x}^2 \tilde{y}^2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{3} (b_{0,-1} \tilde{y} + b_{1,-1} \tilde{x} \tilde{y}^3 \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right).$$

Suponha que $a_{-1,0} \neq 0$ e $b_{m_0,-1} = 0$, para todos os inteiros $m_0 \geq 0$. Na direção x positiva, a curva de impasse intersecta o divisor excepcional $\mathbb{E}_x$ nos pontos $(0, -1)$, $(0, 0)$ e $(0, 1)$. Além disso, a origem é uma sela hiperbólica do campo de vetores adjunto e existe uma curva de fase coincidindo com uma das componentes da curva de impasse. Na direção y positiva, não há pontos de equilíbrio de X em $\mathbb{E}_y$ e o conjunto de impasse intersecta o divisor excepcional em $(1, 0)$.

Novamente observamos que a condição $b_{m_0,-1} = 0$ evita tangências entre o campo de vetores adjunto X e a componente $\{y = 0\}$ do conjunto de impasse. Tais pontos de tangência podem levar a diferentes resoluções de singularidades.

Finalmente, se consideramos $b_{0,-1} \neq 0$, na direção x positiva não há pontos de equilíbrio de X em $\mathbb{E}_x$, e na direção y positiva a origem $0 \in \mathbb{E}_y$ é um ponto de sela de X . A curva de impasse é dada como no caso anterior. Veja as Figuras 4.40 e 4.41.


 Figura 4.40: Retrato de fase quando $b_{m_0,-1} = 0$ para todo $m_0 \geq 0$, em que δ é do tipo E_7 .

 Figura 4.41: Retrato de fase quando $b_{0,-1} \neq 0$, para δ do tipo E_7 .

4.3.5 Curva E_8

Se $a_{-1,0} \neq 0$, o suporte contém os pontos $(-1, 5)$ e $(2, 0)$. Por outro lado, se $b_{0,-1} \neq 0$ o suporte contém os pontos $(0, 4)$ e $(3, -1)$. Em ambos os casos aplicamos um blow-up direcional com peso $\omega = (5, 3)$.

Na direção x , quando $a_{-1,0} \neq 0$ o campo de vetores auxiliar toma a forma

$$\tilde{X}_{E_8} = (1 + \tilde{y}^5) \left(\frac{1}{5} (a_{-1,0} \tilde{x} + a_{0,0} \tilde{x}^6 + a_{-1,1} \tilde{x}^4 \tilde{y} + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \left(-\frac{3}{5} a_{-1,0} \tilde{y} + b_{0,-1} \tilde{x}^2 - \frac{3}{5} a_{-1,1} \tilde{x}^3 \tilde{y}^2 + \dots \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right),$$

e se $a_{-1,0} = 0$ obtém-se

$$\tilde{X}_{E_8} = (1 + \tilde{y}^5) \left(\frac{1}{5} (a_{0,0} \tilde{x}^4 + a_{-1,1} \tilde{x}^2 \tilde{y} + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \left(b_{0,-1} - \frac{3}{5} a_{-1,1} \tilde{x} \tilde{y}^2 \dots \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right).$$

Por outro lado, na direção y quando $a_{-1,0} \neq 0$ o campo de vetores auxiliar toma a forma

$$\tilde{X}_{E_8} = (\tilde{x}^3 + 1) \left(\left(a_{-1,0} - \frac{5}{3} b_{0,-1} \tilde{x} \tilde{y}^2 + a_{-1,1} \tilde{y}^3 + \dots \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{3} (b_{0,-1} \tilde{y}^3 + b_{0,0} \tilde{y}^6 + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right),$$

e se $a_{-1,0} = 0$ obtemos

$$\tilde{X}_{E_8} = (\tilde{x}^3 \pm 1) \left(\left(-\frac{5}{3} b_{0,-1} \tilde{x} + a_{-1,1} \tilde{y} + a_{0,0} \tilde{x} \tilde{y}^3 + \dots \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{3} (b_{0,-1} \tilde{y} + b_{0,0} \tilde{y}^4 + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right).$$

Na direção x positiva, a curva de impasse intersecta o divisor excepcional em $(0, -1)$. Se $a_{-1,0} \neq 0$, a origem $0 \in \mathbb{E}_x$ é uma sela hiperbólica do campo de vetores adjunto e se $a_{-1,0} = 0$ não há pontos de equilíbrio em $\mathbb{E}_x$. Finalmente, na direção y positiva a curva de impasse intersecta o divisor excepcional $\mathbb{E}_y$ em $(-1, 0)$. Se $a_{-1,0} \neq 0$, não há pontos de equilíbrio do campo de vetores adjunto em $\mathbb{E}_y$ e se $a_{-1,0} = 0$ a origem é uma sela hiperbólica. Veja as Figuras 4.42 e 4.43.

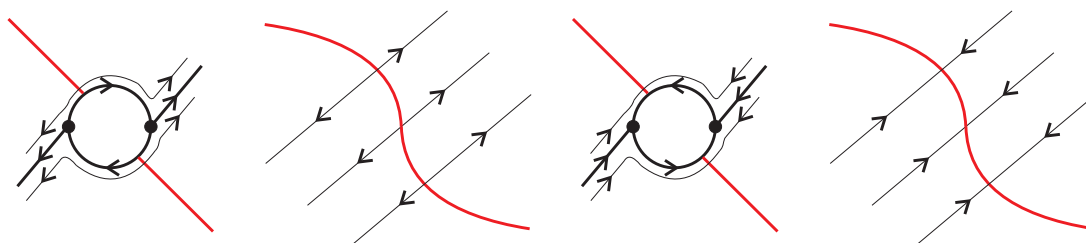


Figura 4.42: Retrato de fase quando $a_{-1,0} \neq 0$, para δ do tipo E_8 .

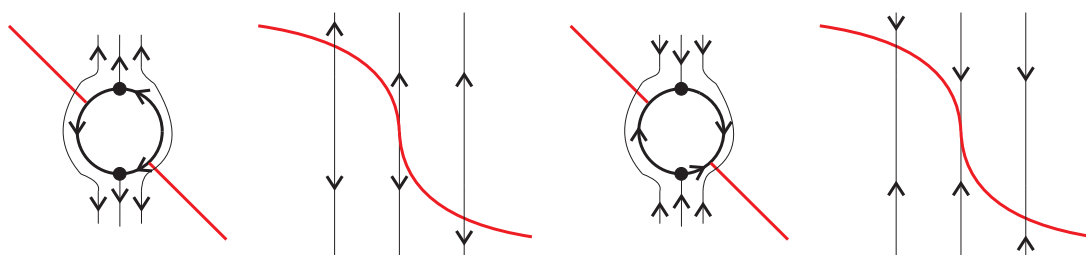


Figura 4.43: Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$, para δ do tipo E_8 .

5 Descrevendo fluxos em superfícies invariantes a partir de sistemas forçados

Este capítulo é dedicado ao estudo de fluxos de campos de vetores polinomiais em superfícies invariantes. Mais precisamente, aqui abordaremos as contribuições presentes em [41], onde os resultados tratam da relação entre sistemas forçados em tais fluxos. Daqui em diante, X sempre denotará um campo de vetores polinomial em $\mathbb{R}^3$.

Definição 5.1. Seja $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vetores polinomial. Dizemos que um polinômio $H \in \mathbb{R}[x, y, z]$ é **polinômio de Darboux de X** se $\langle \nabla H, X \rangle = \mu H$, em que $\mu = \mu(x, y, z)$ é um polinômio real chamado **cofator de H** . A equação $H(x, y, z) = 0$ define uma **superfície algébrica invariante de X** . No caso em que $\langle \nabla H, X \rangle = 0$, dizemos que H é **integral primeira de X** , e aqui a equação $H(x, y, z) = k$ define uma superfície algébrica invariante de X , para qualquer $k \in \mathbb{R}$.

A investigação em [41] procurou responder, primeiramente, em quais casos obtemos um sistema com impasse ao estudar fluxos em superfícies invariantes. Supondo que X é um campo de vetores polinomial, provamos que sistemas forçados surgem naturalmente quando

$$M = \{(x, y, z); H(x, y, z) = f(x, y)z - g(x, y) = 0\},$$

é uma superfície algébrica invariante de X , em que $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são polinômios. Veja o Teorema 5.5.

Em seguida, procuramos responder o que as singularidades do sistema forçado podem dizer a respeito do fluxo de X em M . As Proposições 5.16 e 5.17 e o Teorema 5.21 dizem respeito justamente a esta questão.

Neste momento, recomendamos ao leitor que reveja o Exemplo 1.1 para se familiarizar melhor com o tipo de problema que vamos estudar neste capítulo, que está organizado da seguinte forma. Na Seção 5.1 estudamos as propriedades geométricas da superfície $M = \{f(x, y)z - g(x, y) = 0\}$, que desempenhará um papel fundamental no desenvolvimento do assunto. Nas Seções 5.2 e 5.3 investigamos como descrever o fluxo de um campo de vetores polinomial X em M a partir de um sistema forçado e como as singularidades de tais sistemas nos auxiliam no estudo desses fluxos. Já na Seção 5.4, por sua vez, aplicamos os resultados obtidos em algumas equações famosas da literatura: Equação de Falkner–Skan, Sistema da Interação de Três Ondas, Sistema de Lorenz e Sistema de Chen. Finalmente, na Seção 5.5 discutimos brevemente como os resultados obtidos aqui podem ser generalizados em dimensões maiores.

5.1 Estudando a Geometria da Superfície M

Seja X um campo de vetores definido em $\mathbb{R}^3$ que tem $M = \{f(x, y)z - g(x, y) = 0\}$ como superfície algébrica invariante. Assim como discutido anteriormente, pode-se escrever M como uma união disjunta da forma

$$M = \mathcal{G}_M \cup \mathcal{I}_M,$$

em que $\mathcal{G}_M$ é o gráfico de $(\frac{g}{f})(x, y)$ e $\mathcal{I}_M = \{f(x, y) = 0 = g(x, y)\}$ é o chamado *conjunto de pseudo-impasse* de M .

Proposição 5.2. Denote por $\mathcal{Z}_f$ e $\mathcal{Z}_g$ o conjunto de zeros dos polinômios f e g , respectivamente.

- (a) Se $\mathcal{Z}_f \cap \mathcal{Z}_g = \emptyset$, então $\mathcal{I}_M = \emptyset$ e $M = \mathcal{G}_M$;
- (b) Se $\mathcal{Z}_f \cap \mathcal{Z}_g$ é um conjunto contendo apenas pontos isolados, então $\mathcal{I}_M$ é um conjunto de retas paralelas ao eixo z . Veja a figura 5.1;
- (c) Se os polinômios f e g possuem fator comum, então $\mathcal{I}_M$ contém uma variedade algébrica que é ortogonal ao plano xy ;
- (d) Se existem $p \neq q \in \mathbb{R}^2$ tais que $f(p) \cdot f(q) < 0$ e $\mathcal{I}_M = \emptyset$, então M é uma superfície desconexa;
- (e) Se p é um ponto singular de M , então $p \in \mathcal{I}_M$.

Demonstração. Os conjuntos $\mathcal{Z}_f$ e $\mathcal{Z}_g$ são curvas algébricas em $\mathbb{R}^2$. Se f e g não possuem fator comum, então ou $\mathcal{Z}_f \cap \mathcal{Z}_g$ é o conjunto vazio ou $\mathcal{Z}_f \cap \mathcal{Z}_g$ é um conjunto de pontos isolados. O primeiro caso implica em $\mathcal{I}_M = \emptyset$ e o segundo caso implica que $\mathcal{I}_M$ é um conjunto de retas paralelas ao eixo z . Se f e g possuem fator comum, então $\mathcal{Z}_f \cap \mathcal{Z}_g$ contém uma curva algébrica e portanto $\mathcal{I}_M$ contém uma variedade algébrica que é ortogonal ao plano xy . Desta forma, os itens (a), (b) e (c) são verdadeiros.

Vamos provar agora o item (d). Suponha que $\mathcal{I}_M = \emptyset$, isto é, $M = \mathcal{G}_M$. Por hipótese, a imagem de f atinge valores positivos e negativos, e portanto podemos escrever M da forma

$$M = \mathcal{G}_M^+ \cup \mathcal{G}_M^-,$$

em que

$$\mathcal{G}_M^+ = \{f(x, y) > 0, z = (g/f)(x, y)\}, \text{ e } \mathcal{G}_M^- = \{f(x, y) < 0, z = (g/f)(x, y)\}.$$

Os conjuntos $\mathcal{G}_M^+$ e $\mathcal{G}_M^-$ são conjuntos abertos em M tais que $\mathcal{G}_M^+ \cap \mathcal{G}_M^- = \emptyset$, e portanto a superfície M é desconexa.

Finalmente, vamos provar o item (e). Note que um ponto $p = (x_0, y_0, z_0) \in M$ é singular se, e somente se, $\nabla H(p) = 0$. Em outras palavras, um ponto p é singular se

$$f_x(x_0, y_0)z_0 = g_x(x_0, y_0), \quad f_y(x_0, y_0)z_0 = g_y(x_0, y_0), \quad f(x_0, y_0) = 0.$$

A última equação garante que $p \in \mathcal{I}_M$. □

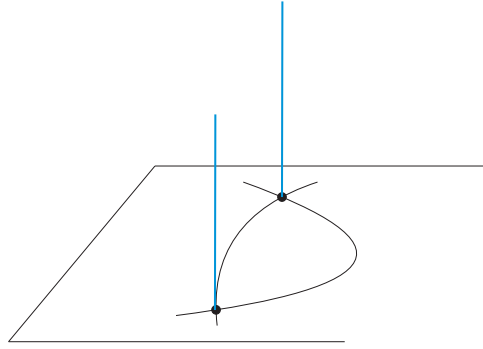


Figura 5.1: Conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M$ destacado em azul.

Neste momento é importante fazer algumas considerações a respeito da Proposição 5.2. O conjunto $\mathcal{I}_M$ não é necessariamente formado apenas por pontos singulares de M . De fato, como veremos em vários exemplos a seguir, podem ocorrer casos onde a superfície M é regular e $\mathcal{I}_M \neq \emptyset$. Além disso, é natural esperar que pontos singulares de M sempre estarão em $\mathcal{I}_M$ pois tais pontos não podem aparecer em $\mathcal{G}_M$, que é o subconjunto de M que pode ser escrito como gráfico. A respeito do item (d), observamos que a hipótese de que f atinge valores positivos e negativos é crucial.

Se X é um campo de vetores polinomial, podemos estudar sua dinâmica global aplicando um processo de compactificação de $\mathbb{R}^3$. Com a **compactificação de Poincaré**, podemos identificar o $\mathbb{R}^3$ com um dos hemisférios de $\mathbb{S}^3$, e então o equador $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ faz o papel do infinito. Dessa forma, obtemos um campo de vetores analítico que é a extensão do campo X até o infinito. Tal extensão é feita com detalhes em [13], e ela também pode ser feita para variedades algébricas. Em [22] os autores provaram o seguinte lema que mostra como obter a expressão de uma superfície no infinito.

Lema 5.3. (Lema 2.1, [22]) *Sejam $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio de grau m e $H(x, y, z) = 0$ uma superfície algébrica. A extensão desta superfície no infinito é obtida resolvendo o sistema*

$$w^m H(x/w, y/w, z/w) = 0, \quad w = 0.$$

Se P é um polinômio, denote o grau de P por $\deg(P)$. Escreva P como a soma de polinômios homogêneos, isto é, escreva P da forma

$$P(x, y) = \sum_{j=0}^m P_j(x, y),$$

onde P_j é um polinômio homogêneo de grau j .

Proposição 5.4. *A extensão da superfície M para o infinito contém os polos norte e sul $(0, 0, \pm 1)$. Em particular, se $\deg(f) \geq \deg(g)$, então tais extensões também contém o grande círculo $\{z = 0\}$.*

Demonstração. Se H é um polinômio de grau m , então ocorre uma das seguintes situações:

- Se $\deg(g) = m$ e $\deg(f) < m - 1$, o Lema 5.3 garante que a extensão de M é exatamente a extensão da superfície $\{g_m(x, y) = 0, z \in \mathbb{R}\}$;
- Se $\deg(g) < m$ e $\deg(f) = m - 1$, o Lema 5.3 implica que a extensão de M é a união do grande círculo $\{z = 0\}$ com a extensão da superfície $\{f_{m-1}(x, y) = 0, z \in \mathbb{R}\}$.

- Se $\deg(g) = m$ e $\deg(f) = m - 1$, como $g_m(x, y)$ e $f_{m-1}(x, y)$ são polinômios homogêneos de grau m e $m - 1$ respectivamente, segue do Lema 5.3 que os polos norte e sul $(0, 0, \pm 1)$ pertencem a extensão da superfície no infinito

□

5.2 Fluxos em superfícies invariantes que são descritos por sistemas forçados

Até aqui, consideramos propriedades geométricas da superfície M , bem como sua extensão para o infinito. Agora que entendemos sua geometria, estamos aptos para estudar o fluxo de um campo de vetores tridimensional X sobre M . Nosso primeiro resultado nesta direção afirma que o fluxo de X em M é descrito por um sistema forçado.

Primeiramente, considere o campo de vetores tridimensional polinomial X

$$X(x, y, z) = \left(\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z), \gamma(x, y, z) \right),$$

em que os polinômios α, β são escritos da forma

$$\alpha(x, y, z) = \sum_{i=0}^m \alpha_i(x, y) z^i, \quad \beta(x, y, z) = \sum_{j=0}^n \beta_j(x, y) z^j.$$

Teorema 5.5. *Seja $M = \{f(x, y)z - g(x, y) = 0\}$ uma superfície algébrica invariante do campo de vetores polinomial $X = (\alpha, \beta, \gamma)$. Então existe um sistema polinomial forçado definido em $\mathbb{R}^2$ tal que*

1. *O conjunto de impasse de tal sistema é dado por $\Delta = \{f(x, y) = 0\}$;*
2. *No conjunto aberto $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, as curvas solução do sistema forçado são as projeções no plano xy das curvas solução de X em $\mathcal{G}_M$;*
3. *A projeção do conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M$ no plano xy está contida no conjunto de impasse Δ e é um conjunto de pontos de equilíbrio do campo de vetores adjunto A^*F .*

Demonstração. Se $(x, y, z) \in \mathcal{G}_M$, segue que $z = \xi(x, y) = (g/f)(x, y)$. Portanto a dinâmica do campo de vetores X em $\mathcal{G}_M$ é descrito pelo sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sum_{i=0}^m \alpha_i(x, y) \left((g/f)(x, y) \right)^i; \\ \dot{y} &= \sum_{j=0}^n \beta_j(x, y) \left((g/f)(x, y) \right)^j. \end{cases} \quad (5.1)$$

Reescrevendo (5.1) e omitindo as variáveis (x, y) para simplificar a notação, obtém-se o sistema forçado

$$\begin{cases} f^m \dot{x} &= \sum_{i=0}^m f^{m-i} g^i \alpha_i; \\ f^n \dot{y} &= \sum_{j=0}^n f^{n-j} g^j \beta_j; \end{cases} \quad (5.2)$$

onde $f^k(x, y) = \left(f(x, y) \right)^k$ e $g^l(x, y) = \left(g(x, y) \right)^l$ e os inteiros k, l são não negativos.

A curva de impasse de (5.2) é dada por $\Delta = \{f(x, y) = 0\}$. Além disso, os sistemas (5.2) e (5.1) possuem as mesmas curvas solução no aberto $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$. Conclui-se que as órbitas de (5.2) em $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ são obtidas projetando no plano xy as órbitas do campo X que estão em $\mathcal{G}_M$.

O campo de vetores adjunto de (5.2) é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} &= f^n \left(\sum_{i=0}^m f^{m-i} g^i \alpha_i \right); \\ \dot{y} &= f^m \left(\sum_{j=0}^n f^{n-j} g^j \beta_j \right). \end{cases} \quad (5.3)$$

Por fim, verifica-se que a projeção do conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M$ no plano xy é dado por $\{f(x, y) = 0 = g(x, y)\} \subset \Delta$, que é um conjunto de pontos de equilíbrio do campo de vetores adjunto (5.3). $\square$

Na prova do Teorema 5.5, observe que toda a curva de impasse Δ é uma curva de pontos de equilíbrio do campo de vetores adjunto (5.3). Isto nos leva a estudar casos menos degenerados. Sendo assim, vamos considerar um campo de vetores polinomial em $\mathbb{R}^3$ definido pelo sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha(x, y); \\ \dot{y} &= \sum_{j=0}^n \beta_j(x, y) z^j; \\ \dot{z} &= \gamma(x, y, z). \end{cases} \quad (5.4)$$

Observe que o polinômio α não depende da variável z . Entretanto, ressaltamos que o estudo deste caso é justificado pois na literatura existem sistemas famosos que se encaixam nesta hipótese. Por exemplo, a equação de Falkner–Skan, o sistema da interação de três ondas, o sistema de Lorenz e o sistema de Chen são da forma (5.4). Assim como na prova do Teorema 5.5 obtém-se o sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha; \\ f^n \dot{y} &= g^n \beta_n + \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j} g^j \beta_j. \end{cases} \quad (5.5)$$

onde novamente omitimos as variáveis (x, y) para simplificar a notação.

Observe que o conjunto de impasse é dado por $\Delta = \{f(x, y) = 0\}$. Finalmente, obtemos a expressão do campo de vetores adjunto de (5.5), que é

$$\begin{cases} \dot{x} &= f^n \alpha; \\ \dot{y} &= g^n \beta_n + \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j} g^j \beta_j. \end{cases} \quad (5.6)$$

Já sabemos pelo Teorema 5.5 que a projeção do conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M$ no plano xy está contido no conjunto de impasse Δ associado a (5.5). Além disso, a projeção de $\mathcal{I}_M$ é um conjunto de pontos de equilíbrio do campo de vetores adjunto (5.6). São justamente esses pontos de equilíbrio que devemos estudar para entender o fluxo de (5.4) em $\mathcal{I}_M \subset M$.

Antes de prosseguir com o estudo, vamos fixar algumas hipóteses e nomenclaturas. Vamos considerar que a curva de impasse Δ é sempre uma curva regular. Seja $\mathbf{p}_0 \in \Delta$ um ponto regular de impasse e considere as seguintes condições.

(A) O espaço vetorial $\ker A(\mathbf{p}_0)$ é transversal a Δ ;

(B) O vetor $F(\mathbf{p}_0)$ não pertence à imagem de $A(\mathbf{p}_0)$.

Como a matriz A não possui rank nulo, da Álgebra Linear temos as igualdades $\text{img } A = \ker A^*$ e $\ker A = \text{img } A^*$. Portanto, a condição (A) significa que o campo de vetores adjunto A^*F é transversal a Δ em $\mathbf{p}_0$ e a condição (B) significa que $\mathbf{p}_0$ não é um ponto de equilíbrio de A^*F .

Definição 5.6. Seja $\mathbf{p}_0 \in \Delta$ um ponto regular de impasse. Dizemos que

1. $\mathbf{p}_0$ é **não singular** se $\mathbf{p}_0$ satisfaz as condições (A) e (B).
2. $\mathbf{p}_0$ é **K-singularidade** (kernel singularidade) se $\mathbf{p}_0$ satisfaz (B) e não satisfaz (A).
3. $\mathbf{p}_0$ é **R-singularidade** (range singularidade) se $\mathbf{p}_0$ satisfaz (A) e não satisfaz (B).
4. $\mathbf{p}_0$ é **RK-singularidade** (range-kernel singularidade) se $\mathbf{p}_0$ não satisfaz as condições (A) e (B).

A próxima proposição classifica as singularidades do sistema forçado (5.5) a partir dos polinômios f e g que definem a superfície M . Lembre que p é um ponto de impasse de (5.5) se, e somente se, $f(p) = 0$.

Proposição 5.7. Seja $p \in \Delta$ um ponto de impasse do sistema (5.5). Dizemos que:

1. p é **R-singularidade** se, e somente se, $g(p) = 0$ ou $\beta_n(p) = 0$;
2. p é **K-singularidade** se, e somente se, $f_y(p) = 0$;
3. p é **RK-singularidade** se, e somente se, p é R-singularidade e K-singularidade simultaneamente;
4. p é **não singular** se, e somente se, p não satisfaz nenhuma das condições anteriores.

Demonstração. Este resultado segue diretamente das condições listadas na Definição 5.6 e da expressão do campo de vetores adjunto (5.6). $\square$

Definição 5.8. Um ponto de impasse p de (5.5) será chamado de **R-singularidade do tipo I** de $g(p) = 0$. Dizemos que p é **R-singularidade do tipo II** se $\beta_n(p) = 0$.

O conjunto das R-singularidades do tipo I é exatamente a projeção de $\mathcal{I}_M$ no plano xy . Além disso, pode ser que apareçam R-singularidades que são do tipo I e II simultaneamente. Analogamente, pode-se definir RK-singularidades do tipo I ou do tipo II.

Os Corolários 5.9 e 5.10 são consequências das Proposições 5.2 e 5.4, respectivamente. Tais resultados relacionam as singularidades do sistema forçado com a geometria da superfície M .

Corolário 5.9. Considere o campo de vetores adjunto (5.6).

1. Seja p um ponto singular da superfície M . Então a projeção de p no plano xy é uma R-singularidade do tipo I do sistema forçado.
2. Se existem $p \neq q \in \mathbb{R}^2$ tais que $f(p) \cdot f(q) < 0$ e a curva de impasse Δ não possui R-singularidades do tipo I, então M é desconexa.

Demonstração. Para provar o item 1, lembre que a Proposição 5.2 garante que $p \in \mathcal{I}_M$. Isto implica que p é uma R-singularidade do tipo I. No que diz respeito ao item 2, observe que se Δ não contém R-singularidades do tipo I, então $\mathcal{I}_M$ é vazio. Com isto, aplicamos a Proposição 5.2 e finalizamos a demonstração. $\square$

Seja $r \subset \mathcal{I}_M$ uma reta paralela ao eixo z e $q \in \Delta$ a intersecção entre r e o plano xy . Segue do Corolário 5.9 que se q não é nem uma R-singularidade do tipo I ou uma RK-singularidade do tipo I, então r não intersecta a superfície M . Entretanto, como consequência da Proposição 5.4, a linha r intersecta M no infinito.

Corolário 5.10. *Seja $q \in \Delta$ uma K-singularidade, R-singularidade do tipo II ou RK-singularidade do tipo II, e suponha que tal singularidade do sistema forçado (5.5) seja isolada. Então a reta $r = \{(q, z) | z \in \mathbb{R}\}$ intersecta M no infinito.*

Demonstração. Nós já sabemos pela Proposição 5.4 que a extensão de M no infinito contém os pólos norte e sul $(0, 0 \pm 1)$. O corolário segue observando que tal reta intersecta esses pontos no infinito. $\square$

Os seguintes exemplos visam ilustrar os resultados até aqui.

Exemplo 5.11. O polinômio $H(x, y, z) = yz - 1$ é um polinômio de Darboux do campo de vetores $X(x, y, z) = (0, z, -z^3)$, cujo cofator é $\mu(x, y, z) = -z^2$. O fluxo de X em $M = H^{-1}(0)$ é descrito pelo sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} &= 0; \\ y\dot{y} &= 1. \end{cases}$$

Pelo Corolário 5.9 segue que M é uma superfície desconexa. Veja a Figura 5.2.

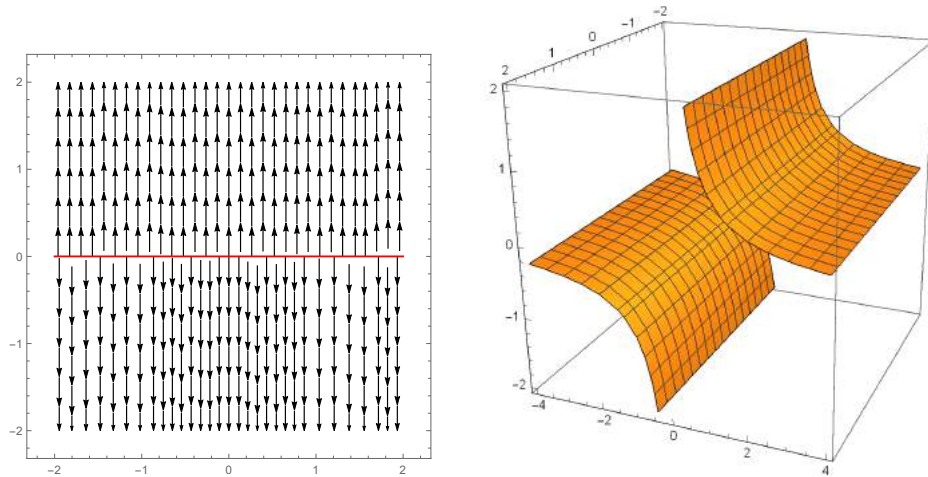


Figura 5.2: Retrato de fase do Exemplo 5.11. O conjunto de impasse está destacado em vermelho.

Exemplo 5.12. O polinômio $H(x, y, z) = (x + y^2)z - 1$ é polinômio de Darboux do campo de vetores $X(x, y, z) = (0, z, -2yz^3)$, cujo cofator é $\mu(x, y, z) = -2yz^2$. O fluxo de X em $M = H^{-1}(0)$ é descrito pelo sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} &= 0; \\ (x + y^2)\dot{y} &= 1. \end{cases}$$

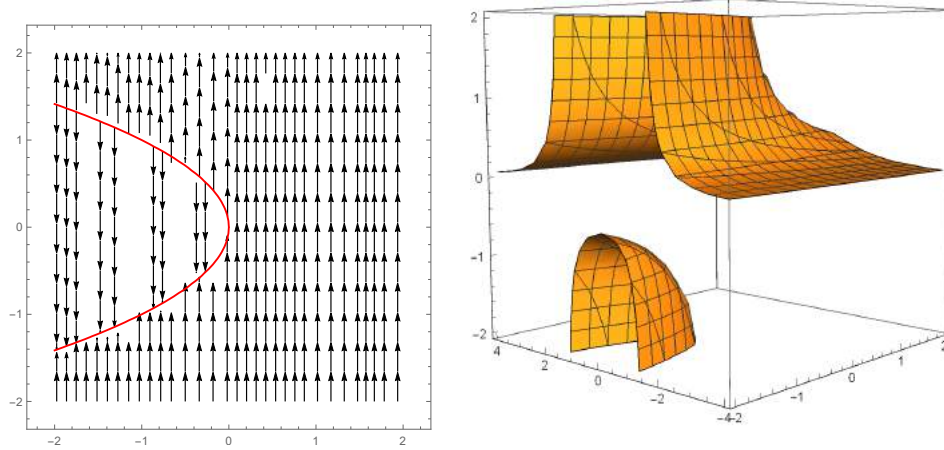


Figura 5.3: Retrato de fase do Exemplo 5.12. O conjunto de impasse está destacado em vermelho.

Pode ser verificado que a origem é uma K-singularidade. Além disso, segue do Corolário 5.9 que M é uma superfície desconexa. Veja a Figura 5.3.

Exemplo 5.13. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um parâmetro satisfazendo $|\lambda| > 1$. O polinômio $H(x, y, z) = (y - x)z - 1$ é polinômio de Darboux do campo de vetores $X(x, y, z) = \left(1, \lambda yz, z^2 - \lambda yz^3\right)$, cujo cofator é $\mu(x, y, z) = z - \lambda yz^2$. O fluxo de X em $M = H^{-1}(0)$ é descrito pelo sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} = 1; \\ (y - x)\dot{y} = \lambda y. \end{cases}$$

A origem é um ponto de equilíbrio hiperbólico do campo de vetores adjunto, cujos autovalores são -1 e λ e seus respectivos autovetores são $v_{-1} = (1, 0)$ and $v_{\lambda} = (1, 1 + \lambda)$. Se $\lambda > 1$, então a origem é um ponto de sela. Se $\lambda < -1$, a origem é um nó atrator. Em ambos os casos, a origem é uma R-singularidade do tipo II do sistema forçado. Veja a Figura 5.4.

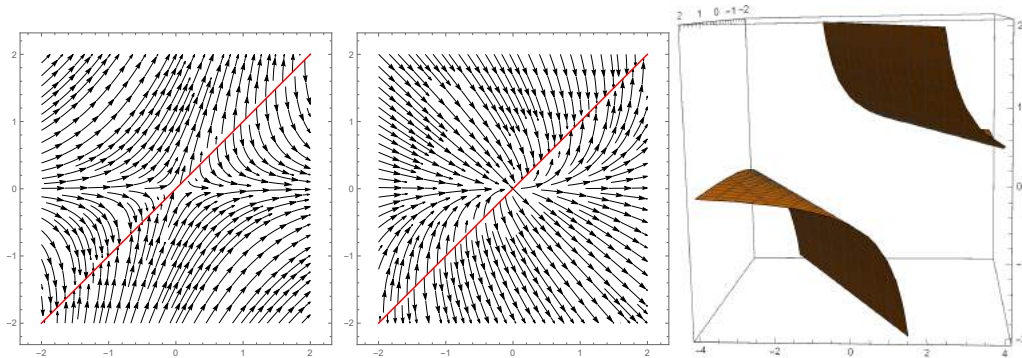


Figura 5.4: Retrato de fase do Exemplo 5.13 para $\lambda > 1$ (esquerda) e para $\lambda < 1$ (centro). O conjunto de impasse está destacado em vermelho.

Exemplo 5.14. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um parâmetro satisfazendo $\lambda > 0$. O polinômio $H(x, y, z) = (y - x)z - 1$ é polinômio de Darboux do campo de vetores $X(x, y, z) = \left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda}, -(\lambda x + \right.$

$y)z, (\lambda x + y)z^3$), cujo cofator é $\mu(x, y, z) = (\lambda x + y)z^2$. O fluxo de X em $M = H^{-1}(0)$ é descrito pelo sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{1+\lambda^2}{\lambda}; \\ y\dot{y} &= -(\lambda x + y). \end{cases}$$

A origem é uma R-singularidade do tipo II. Além disso, tal singularidade é um foco hiperbólico do campo de vetores adjunto cujos autovalores são $\frac{-1 \pm \sqrt{-3-4\lambda^2}}{2}$. Veja a Figura 5.5.

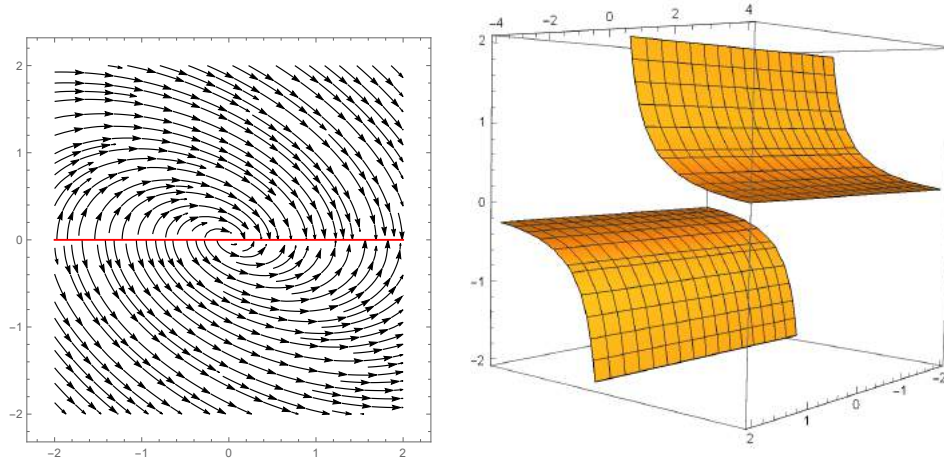


Figura 5.5: Retrato de fase do Exemplo 5.14. O conjunto de impasse está destacado em vermelho.

Exemplo 5.15. O polinômio $H(x, y, z) = y^2z - (x + y)$ é integral primeira do campo de vetores $X(x, y, z) = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}(yz + \frac{1}{2}), z^2)$. O fluxo de X em $M = H^{-1}(0)$ é descrito pelo sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{1}{4}; \\ y\dot{y} &= -\frac{1}{2}(\frac{3y}{2} + x). \end{cases}$$

A origem é uma R-singularidade do tipo I. Além disso, tal singularidade é um nó hiperbólico do campo de vetores adjunto cujos autovalores são $-\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{4}$. Veja a Figura 5.6.

5.3 Caso particular: $\beta(x, y, z)$ é um polinômio de grau 1 com respeito a variável z

Considere o campo de vetores adjunto (5.6) do sistema forçado (5.5) e denote sua linearização por $J\tilde{X}(x, y)$. Se $n \geq 2$ (em que n é a maior potência de z do polinômio $\beta(x, y, z)$ em (5.5)), então $J\tilde{X}(x, y)$ é da forma

$$\begin{pmatrix} f^{n-1}(nf_x\alpha + f\alpha_x) & f^{n-1}(nf_y\alpha + f\alpha_y) \\ g^{n-1}(ng_x\beta_n + g\beta_{nx}) + \sum_{i=0}^{n-1} S_{ix} & g^{n-1}(ng_y\beta_n + g\beta_{ny}) + \sum_{i=0}^{n-1} S_{iy} \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

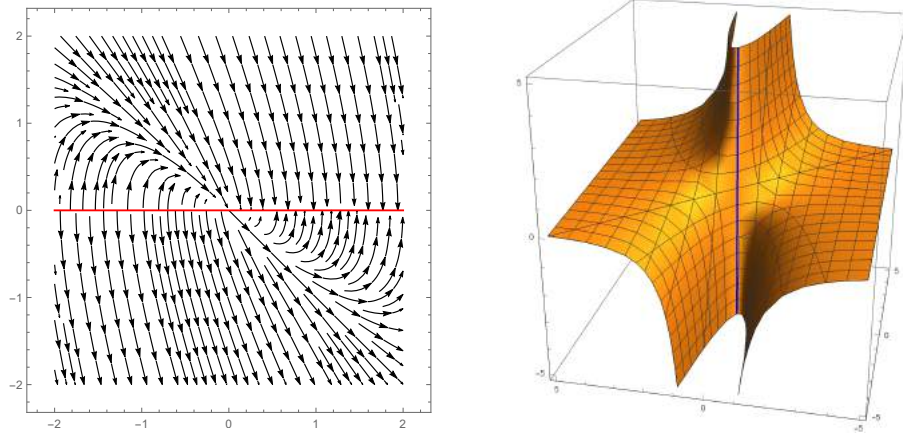


Figura 5.6: Retrato de fase do Exemplo 5.15. O conjunto de impasse está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse está destacado em azul.

em que

$$S_{ix} = f^{n-i-1} g^{i-1} \left(f g \beta_{ix} + ((n-i) f_x g + i f g_x) \beta_i \right),$$

e

$$S_{iy} = f^{n-i-1} g^{i-1} \left(f g \beta_{iy} + ((n-i) f_y g + i f g_y) \beta_i \right).$$

Se $p \in \mathbb{R}^2$ é uma R-singularidade (do tipo I ou II), então $J\widetilde{X}(p)$ será identicamente nula e p será sempre um ponto de equilíbrio degenerado do campo de vetores adjunto. No que segue, consideraremos casos menos degenerados. Vamos supor que $n = 1$, isto é, o campo de vetores polinomial tridimensional X é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha(x, y); \\ \dot{y} &= \beta_1(x, y)z + \beta_0(x, y); \\ \dot{z} &= \gamma(x, y, z); \end{cases} \quad (5.8)$$

cujo fluxo em M é descrito pelo sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha(x, y); \\ f(x, y)\dot{y} &= g(x, y)\beta_1(x, y) + f(x, y)\beta_0(x, y); \end{cases} \quad (5.9)$$

e seu campo de vetores adjunto é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, y)\alpha(x, y); \\ \dot{y} &= g(x, y)\beta_1(x, y) + f(x, y)\beta_0(x, y); \end{cases} \quad (5.10)$$

A linearização $J\widetilde{X}(x, y)$ do campo de vetores adjunto (5.10) é da forma

$$\begin{pmatrix} f_x \alpha + f \alpha_x & f_y \alpha + f \alpha_y \\ (f \beta_{0x} + g \beta_{1x}) + (f_x \beta_0 + g_x \beta_1) & (f \beta_{0y} + g \beta_{1y}) + (f_y \beta_0 + g_y \beta_1) \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Todos os exemplos apresentados na próxima seção (Equação de Falkner–Skan, Sistema de Interação de Três Ondas, Sistema de Lorenz e Sistema de Chen) estão na forma (5.8). Além disso, em [18] os autores estudaram métodos para simplificar o cofator do polinômio de Darboux de sistemas da forma (5.8). Outra justificativa para analisarmos este caso é que muitos campos de vetores lineares são escritos da forma (5.8).

É importante observar que pode existir um polinômio $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \tilde{f}(x, y)\beta_1(x, y)$, isto é, o polinômio β_1 é um fator de f . De fato, isto acontece nos Sistemas de Lorenz e de Chen. Isto implica que do Sistema (5.8) obtém-se o sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha(x, y); \\ \tilde{f}(x, y)\dot{y} &= g(x, y) + \tilde{f}(x, y)\beta_0(x, y); \end{cases} \quad (5.12)$$

cujo campo de vetores adjunto é

$$\begin{cases} \dot{x} &= \tilde{f}(x, y)\alpha(x, y); \\ \dot{y} &= g(x, y) + \tilde{f}(x, y)\beta_0(x, y); \end{cases} \quad (5.13)$$

Neste caso, o Sistema (5.12) não possui R-singularidades do tipo II. Além disso, o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M$ é a união de dois conjuntos: o conjunto das linhas que intersectam o plano xy nos pontos de $\{\tilde{f}(x, y) = 0 = g(x, y)\}$ e o conjunto das linhas que intersectam o plano xy nos pontos de $\{\beta_1(x, y) = 0 = g(x, y)\}$. O Sistema (5.12) descreve o fluxo apenas no primeiro conjunto. Por outro lado, tanto no Sistema de Lorenz quanto no Sistema de Chen vale $\tilde{f} \equiv \beta_1$ e portanto focaremos neste caso.

Até aqui, foram provados resultados que relacionam o tipo da singularidade do sistema forçado com a geometria da superfície M . As próximas proposições, teoremas e corolários relacionam a singularidade do sistema forçado com o fluxo do campo tridimensional X no conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M \subset M$.

Proposição 5.16. *Considere o sistema forçado polinomial (5.9) e a reta $r = \{(x_0, y_0, z); z \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{I}_M$. Então valem as seguintes afirmações:*

1. *O ponto $q = (x_0, y_0)$ é uma singularidade de (5.9). Além disso, ou q é uma RK-singularidade do tipo I ou q é uma R-singularidade dos tipos I e II simultaneamente;*
2. *Se q é uma RK-singularidade do primeiro tipo I, então q é um ponto de equilíbrio hiperbólico do campo de vetores adjunto (5.10) se, e somente se, q é um nó com apenas um autovalor;*
3. *Se q é uma R-singularidade dos tipos I e II, então q é não hiperbólico.*

Demonstração. Como $H(x, y, z) = f(x, y)z - g(x, y)$ é polinômio de Darboux do campo de vetores (5.8), então a equação

$$z^2 f_y \beta_1 + z(\alpha f_x + \beta_0 f_y - \beta_1 g_y) - (\alpha g_x + \beta_0 g_y) + \gamma f = \mu H$$

é válida para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Em particular, a equação acima é válida para pontos do conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M$, isto é a equação acima continua válida para pontos que satisfazem $f(x, y) = g(x, y) = 0$, e assim obtém-se a equação

$$z^2 f_y \beta_1 + z(\alpha f_x + \beta_0 f_y - \beta_1 g_y) - (\alpha g_x + \beta_0 g_y) = 0.$$

Obtemos assim um polinômio na variável z que é identicamente nulo. Isso implica que seus coeficientes são identicamente nulos para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e assim valem as igualdades

$$f_y \beta_1 = 0; \quad \alpha f_x + \beta_0 f_y - \beta_1 g_y = 0; \quad \alpha g_x + \beta_0 g_y = 0. \quad (5.14)$$

A primeira equação em (5.14) garante que todo ponto $q = (x_0, y_0)$ que é uma R-singularidade do tipo I satisfaz ou $f_y(q) = 0$ ou $\beta_1(q) = 0$. Em outras palavras, todo ponto $q = (x_0, y_0)$ que é uma R-singularidade do tipo I ou é uma RK-singularidade do tipo I ou é uma R-singularidade do tipo I e II.

No que diz respeito à segunda afirmação, se q é uma RK-singularidade do tipo I, então a linearização do campo de vetores adjunto (5.10) é dada por

$$J\widetilde{X}(x, y) = \begin{pmatrix} f_x\alpha & 0 \\ (f_x\beta_0 + g_x\beta_1) & g_y\beta_1 \end{pmatrix},$$

o que implica que q é um ponto de equilíbrio hiperbólico se, e somente se, $f_x\alpha$ e $g_y\beta_1$ são ambos não nulos. Além disso, a segunda equação (5.14) garante que $f_x\alpha = g_y\beta_1$ e portanto q é um nó hiperbólico de (5.10).

Finalmente, com relação à terceira afirmação, se q é uma R-singularidade dos tipos I e II simultaneamente, então a linearização do campo de vetores adjunto (5.10) é da forma

$$J\widetilde{X}(x, y) = \begin{pmatrix} f_x\alpha & f_y\alpha \\ f_x\beta_0 & f_y\beta_0 \end{pmatrix},$$

e seus autovalores são 0 e $f_x\alpha + f_y\beta_0$, e portanto q é não hiperbólico. $\square$

O próximo resultado trata do fluxo em uma reta $r \subset \mathcal{I}_M$ que se projeta em um ponto de equilíbrio não hiperbólico do campo de vetores adjunto (5.10).

Proposição 5.17. *Seja $q = (x_0, y_0) \in \Delta$ uma singularidade isolada de (5.9) e r uma reta passando por q tal que $r \subset \mathcal{I}_M$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se $\nabla f(q)$ e $\nabla g(q)$ são linearmente independentes e q é R-singularidade dos tipos I e II simultaneamente, então r é invariante pelo fluxo do campo de vetores tridimensional (5.8). Além disso, a linearização (5.10) computada em q é identicamente nula;*
2. *Se $\nabla f(q)$ e $\nabla g(q)$ são linearmente independentes e q é RK-singularidade do tipo I, então r é invariante pelo fluxo do campo de vetores tridimensional (5.8) se, e somente se, $\alpha(q) = 0$;*
3. *Se $\nabla f(q)$ e $\nabla g(q)$ são linearmente dependentes, então existe um ponto singular de M em r .*

Demonstração. A Proposição 5.16 garante que q é um ponto de equilíbrio não hiperbólico do campo de vetores adjunto (5.10). Como q é uma R-singularidade dos tipos I e II simultaneamente, então a equação (5.14) toma a forma

$$\alpha f_x + \beta_0 f_y = 0, \quad \alpha g_x + \beta_0 g_y = 0.$$

Pode-se reescrever as equações anteriores da forma

$$\langle (\alpha(q), \beta_0(q)), \nabla f(q) \rangle = 0, \quad \langle (\alpha(q), \beta_0(q)), \nabla g(q) \rangle = 0.$$

Como $\nabla f(q)$ e $\nabla g(q)$ são linearmente independentes, segue que

$$(\alpha(q), \beta_0(q)) = (0, 0);$$

e portanto $\alpha(q) = \beta_0(q) = \beta_1(q) = 0$. Dessa forma, r é um conjunto invariante de (5.8). Além disso, a linearização do campo de vetores adjunto (5.10) calculada em q é identicamente nula.

Com relação a segunda afirmação, como q é uma RK-singularidade então $g_y(q) \neq 0$ e a equação (5.14) toma a forma

$$\beta_0 = -\frac{\alpha g_x}{g_y}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha f_x}{g_y};$$

e portanto $\alpha(q) = 0$ é uma condição necessária e suficiente para garantir que o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M$ seja invariante.

Finalmente, no que diz respeito à terceira afirmação, se $\nabla f(q)$ e $\nabla g(q)$ são linearmente dependentes, então existe $c \neq 0$ tal que $\nabla g = c\nabla f$. Portanto

$$\nabla H(q, z) = \left((z - c)f_x, (z - c)f_y, 0 \right);$$

e tem-se que (x_0, y_0, c) é ponto singular de M . □

Observação 5.18. Em geral, as afirmações 2 e 3 da Proposição 5.16 e a Proposição 5.17 não valem para sistemas da forma (5.12). Por exemplo, no Exemplo 5.15 a R-singularidade do campo de vetores adjunto possui dois autovalores distintos. Por outro lado, os seguintes resultados também são válidos para sistemas da forma (5.12).

Lema 5.19. *Suponha que $\mathcal{Z}_f$ e $\mathcal{Z}_g$ se intersectam em pontos isolados, isto é, f e g não possuem fator comum. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Seja $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{I}_M$ um ponto do conjunto de pseudo impasse e $r \subset \mathcal{I}_M$ uma reta contendo p . Se $X(p) \in r$, então $q = (x_0, y_0)$ é um ponto de equilíbrio não hiperbólico do campo de vetores adjunto (5.10);*
2. *Se $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{I}_M$ é um ponto singular de M , então $q = (x_0, y_0)$ é um ponto de equilíbrio não hiperbólico do campo de vetores adjunto (5.10);*
3. *Se $q = (x_0, y_0)$ é uma RK-singularidade do tipo I hiperbólica, então $r = \{(q, z), z \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{I}_M$ não contém pontos de equilíbrio do campo de vetores tridimensional (5.8).*

Demonstração. Supondo que $X(p) \in r$, então $X(p) = (0, 0, \gamma(p))$. Em particular, segue que $\alpha(x_0, y_0) = 0$ e portanto a linearização $J\tilde{X}(x_0, y_0)$ do campo de vetores adjunto (5.10) em (x_0, y_0) é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (f_x\beta_0 + g_x\beta_1) & (f_y\beta_0 + g_y\beta_1) \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores da matriz acima são 0 e $f_y\beta_0 + g_y\beta_1$, o ponto q é não hiperbólico.

Para a segunda afirmação, o Corolário 5.9 garante que q é uma R-singularidade do tipo I e portanto q é um ponto de equilíbrio do campo de vetores adjunto (5.10). Como p é um ponto singular da superfície, obtemos as equações

$$f_x(x_0, y_0)z_0 = g_x(x_0, y_0), \quad f_y(x_0, y_0)z_0 = g_y(x_0, y_0), \quad f(x_0, y_0) = 0,$$

e portanto a linearização $J\tilde{X}(q)$ de (5.10) calculada em q é dada por

$$\begin{pmatrix} f_x\alpha & f_y\alpha \\ f_x(\beta_0 + z_0\beta_1) & f_y(\beta_0 + z_0\beta_1) \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz acima são 0 e $f_x\alpha + f_y(\beta_0 + \beta_1 z_0)$, donde segue que q é um ponto de equilíbrio não hiperbólico.

Finalmente, considere a terceira afirmação. Como $q = (x_0, y_0)$ é uma R-singularidade hiperbólica do tipo I, tem-se $f(q) = g(q) = f_y(q) = 0$. Note também que a linearização $J\tilde{X}(x, y)$ de (5.10) calculada em q é da forma

$$\begin{pmatrix} f_x\alpha & 0 \\ (f_x\beta_0 + g_x\beta_1) & g_y\beta_1 \end{pmatrix}.$$

Em particular, $\alpha(q) \neq 0$ e portanto a reta $r = \{(x_0, y_0, z), z \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{I}_M$ não contém pontos de equilíbrio do sistema tridimensional (5.8). $\square$

Lema 5.20. *Seja $r \subset \mathcal{I}_M$ uma reta invariante pelo fluxo do sistema tridimensional (5.8). Então a projeção de r no plano xy é um ponto de equilíbrio não hiperbólico do campo de vetores adjunto (5.10).*

Demonstração. Note que para todo $p \in r$ vale que $X(p) \in r$. O resultado segue do primeiro item do Lema 5.19. $\square$

Os resultados provados acima implicam no seguinte Teorema.

Teorema 5.21. *Se $q = (x_0, y_0)$ é uma RK-singularidade hiperbólica do tipo I, então a reta $r = \{(x_0, y_0, z) | z \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{I}_M$ satisfaz:*

1. *O fluxo do campo de vetores tridimensional (5.8) é transversal à r ;*
2. *Não há pontos singulares de M em r ;*
3. *A linha r não contém pontos de equilíbrio do sistema (5.8).*

Teorema 5.22. *Seja $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{I}_M$ um ponto singular de M e seja r uma reta contendo p tal que $r \subset \mathcal{I}_M$. Então $X(p) \in r$ se, e somente se, a linearização do campo de vetores adjunto (5.10) em $q = (x_0, y_0)$ é identicamente nula.*

Demonstração. Como p é um ponto singular, obtemos as equações

$$f_x(x_0, y_0)z_0 = g_x(x_0, y_0); \quad f_y(x_0, y_0)z_0 = g_y(x_0, y_0); \quad f(x_0, y_0) = 0;$$

e portanto a linearização do campo de vetores adjunto (5.10) em q é

$$J\tilde{X}(q) = \begin{pmatrix} f_x\alpha & f_y\alpha \\ f_x(\beta_0 + z_0\beta_1) & f_y(\beta_0 + z_0\beta_1) \end{pmatrix}.$$

Lembre que estamos supondo que a curva de impasse Δ é regular. Sendo assim, $f_x(q) \neq 0$ ou $f_y(q) \neq 0$. Conclui-se que $J\tilde{X}(q)$ é identicamente nula se, e somente se, $\alpha(q) = 0$ e $\beta_0(q) + z_0\beta_1(q) = 0$. $\square$

Corolário 5.23. *Seja $r = \{(x_0, y_0, z) | z \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{I}_M$ uma reta. Se r é um conjunto singular de M , então r é invariante por (5.8) se, e somente se, a linearização de (5.10) em $q = (x_0, y_0)$ é identicamente nula.*

Demonstração. Basta observar que para todo $p \in r$ vale $X(p) \in r$. $\square$

5.4 Exemplos

Nesta seção aplicaremos os resultados obtidos até aqui no estudo de fluxos em superfícies invariantes a partir de sistemas forçados. Para isso, vamos considerar alguns sistemas famosos da literatura: Equação de Falkner–Skan (relacionado a dinâmica dos fluidos), Sistema de Interação de Três Ondas, Sistema de Lorenz (relacionado a meteorologia) e Sistema de Chen (que apresenta um comportamento caótico). Na seção seguinte, usando a Equação de Fisher–Kolmogorov (relacionado a dinâmica populacional) faremos algumas breves considerações a respeito de como nossos resultados se comportariam em dimensões mais altas.

5.4.1 Equação de Falkner–Skan

Em dinâmica dos fluidos, A Equação de Falkner–Skan foi estudada em [17] e é uma equação diferencial da forma

$$f''' + ff' + \lambda(1 - (f')^2) = 0;$$

em que λ é um parâmetro. Esta equação descreve um modelo do fluxo bi-dimensional de um fluido ligeiramente viscoso incompressível quando se passa uma cunha. Esta equação pode ser representada pelo sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dot{x} &= y; \\ \dot{y} &= z; \\ \dot{z} &= -xz - \lambda(1 - y^2). \end{cases} \quad (5.15)$$

No artigo [26] os autores provaram que o polinômio $H(x, y, z) = 2xz + (1 - y^2)$ é o único polinômio de Darboux de (5.15) quando $\lambda = \frac{1}{2}$, cujo cofator é $\mu(x, y, z) = -x$.

A superfície $M = \{H(x, y, z) = 0\}$ é suave e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M \subset M$ é formado por duas retas: $r_{1,2} = \{(0, \pm 1, z), z \in \mathbb{R}\}$.

Escreva $f(x, y) = 2x$ e $g(x, y) = y^2 - 1$. O fluxo do Sistema (5.15) em M é descrito pelo sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} &= y; \\ 2xy &= y^2 - 1; \end{cases} \quad (5.16)$$

cujo conjunto de impasse é $\Delta = \{x = 0\}$. O campo de vetores adjunto é da forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2xy; \\ \dot{y} &= y^2 - 1; \end{cases} \quad (5.17)$$

e seus pontos de equilíbrio $p_{1,2} = (0, \pm 1) \in \Delta$ são RK-singularidades do tipo I. Note que os pontos $p_{1,2}$ são as intersecções das retas $r_{1,2}$ no plano xy . Além disso, como o campo de vetores adjunto não possui pontos de equilíbrio fora do conjunto de impasse Δ , conclui-se que não há pontos de equilíbrio de (5.15) em $\mathcal{G}_M$ quando $\lambda = \frac{1}{2}$.

A linearização do campo de vetores adjunto (5.17) é dada por

$$J\widetilde{X}(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 0 & 2y \end{pmatrix},$$

e portanto p_1 é um nó hiperbólico repulsor e p_2 é um nó hiperbólico atrator. Pelo Teorema 5.21 tem-se que o fluxo do sistema (5.15) quando $\lambda = \frac{1}{2}$ é transversal ao conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M$, e $\mathcal{I}_M$ não contém pontos de equilíbrio de (5.15). Veja a Figura 5.7.

É importante observar que em pontos de M o Sistema (5.15) toma a forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = z; \\ \dot{z} = 0; \end{cases}$$

e isso implica que em pontos de M as trajetórias estão contidas e planos paralelos ao plano xy . Outra forma de verificar tal fato é prejetando no plano xz o fluxo de (5.15) quando $\lambda = \frac{1}{2}$, obtendo assim o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \pm\sqrt{xz+1}; \\ \dot{z} = 0. \end{cases}$$

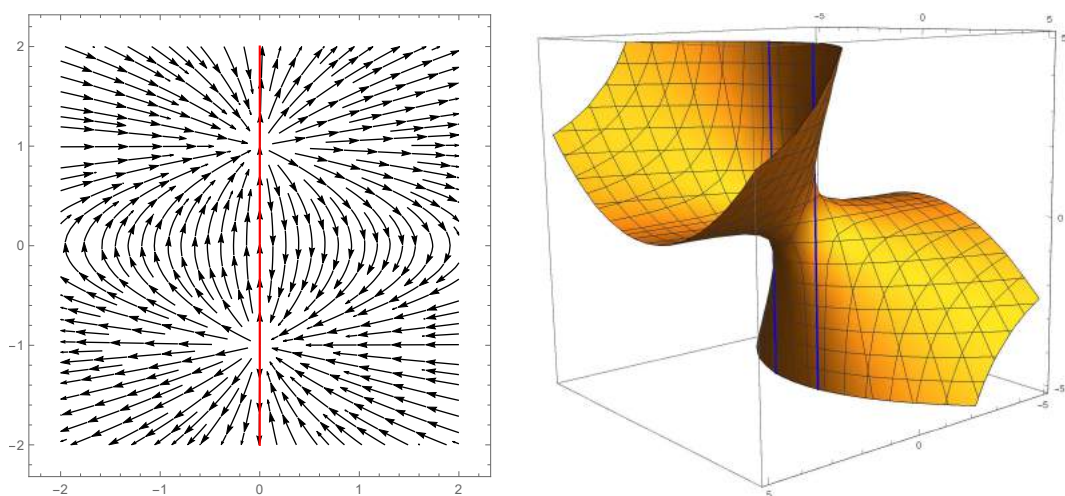


Figura 5.7: Retrato de fase do campo de vetores adjunto (5.16) (esquerda) e superfície M (direita). O conjunto de impasse Δ está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M$ está destacado em azul.

5.4.2 O Sistema da Interação de Três Ondas

O Sistema Reduzido de Interação de Três Ondas é o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \gamma x - \delta y + 2xy; \\ \dot{y} = \delta x + \gamma y - 2x^2 + z; \\ \dot{y} = -2z(1+y); \end{cases} \quad (5.18)$$

em que as variáveis $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são proporcionais à magnitude da amplitude das três ondas e $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ são parâmetros (veja [36]).

Em [30] os autores caracterizaram todos os polinômios de Darboux e integrais primeiras do Sistema (5.18). Duas das superfícies algébricas invariantes podem ser escritas da forma

$$M_i = \{H_i^{-1}(0)\}; \quad H_i(x, y, z) = f_i(x, y)z - g_i(x, y);$$

$i = 1, 2$. No que segue, analisaremos o fluxo de (5.18) nessas superfícies a partir de sistemas forçados. Veja a Tabela 5.1.

Caso	(γ, δ)	$f_i(x, y)$	$g_i(x, y)$
(a)	$(-2, \delta), \delta \neq 0$	$\frac{2}{\delta}x$	$-(x^2 + y^2)$
(b)	$(2, 0)$	x	$k, k \in \mathbb{R}$

Tabela 5.1: Superfícies algébricas invariantes do Sistema de Interação de Três Ondas (5.18) catalogadas em [30].

Caso (a): $\gamma = -2, \delta \neq 0$

Neste caso, o Sistema (5.18) toma a forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= -2x - \delta y + 2xy; \\ \dot{y} &= \delta x - 2y - 2x^2 + z; \\ \dot{z} &= -2z(1 + y); \end{cases} \quad (5.19)$$

cujo fluxo em $M_1 = \{\frac{2}{\delta}xz + (x^2 + y^2) = 0\}$ é descrito pelo sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} &= -2x - \delta y + 2xy; \\ \frac{2}{\delta}x\dot{y} &= \frac{2}{\delta}x(\delta x - 2y - 2x^2) - (x^2 + y^2); \end{cases} \quad (5.20)$$

e seu sistema adjunto é

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{2}{\delta}x(-2x - \delta y + 2xy); \\ \dot{y} &= \frac{2}{\delta}x(\delta x - 2y - 2x^2) - (x^2 + y^2). \end{cases} \quad (5.21)$$

A curva de impasse do sistema forçado (5.20) é $\Delta_1 = \{x = 0\}$ e seu sistema adjunto (5.21) possui dois pontos de equilíbrio: $(0, 0) \in \Delta_1$ e $(\frac{d}{4}, -1) \notin \Delta_1$. A origem é uma RK-singularidade do tipo I e a linearização de (5.21) em $(0, 0)$ é identicamente nula. Como $\nabla f_1(0, 0)$ e $\nabla g_1(0, 0)$ são linearmente dependentes, segue da Proposição 5.17 que o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_1} = \{(0, 0, z)\}$ contém um ponto singular de M_1 . Por fim, a ponto de equilíbrio $(\frac{d}{4}, -1) \notin \Delta_1$ sempre será uma sela. Veja a Figura 5.8.

Caso (b): $(\gamma, \delta) = (2, 0)$

Neste caso, o Sistema (5.18) toma a forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2x(1 + y); \\ \dot{y} &= 2y - 2x^2 + z; \\ \dot{z} &= -2z(1 + y); \end{cases} \quad (5.22)$$

Observe que $H_2(x, y, z) = xz$ é integral primeira de (5.22). Dessa forma, toda superfície da forma $M_2^k = \{xz = k\}$ é invariante pelo fluxo de (5.22). O fluxo é descrito pelo sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2x(1 + y); \\ x\dot{y} &= x(2y - 2x^2) + k; \end{cases} \quad (5.23)$$

e seu sistema adjunto é

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2x^2(1 + y); \\ \dot{y} &= x(2y - 2x^2) + k; \end{cases} \quad (5.24)$$

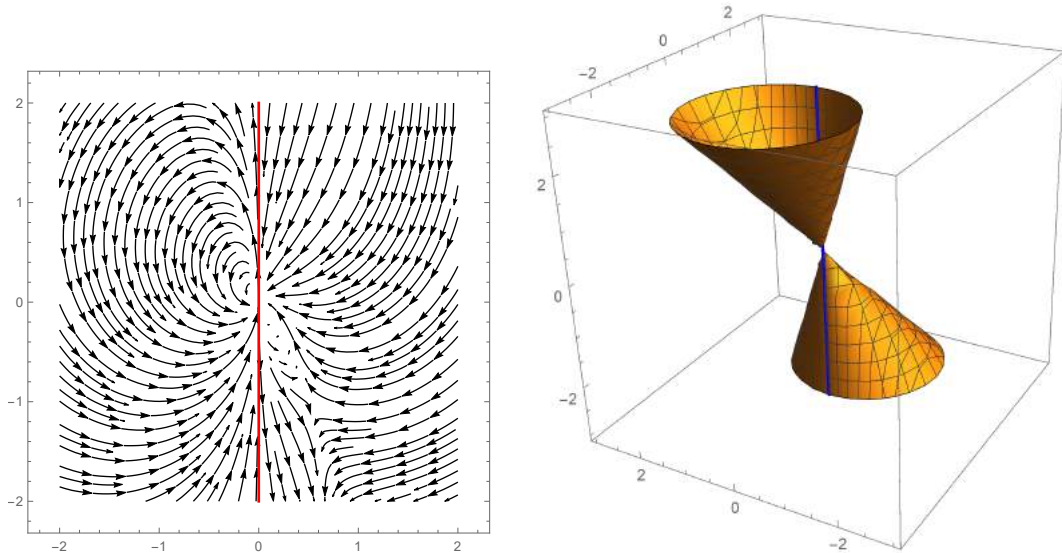


Figura 5.8: Retrato de fase de (5.20) (esquerda) e superfície M_1 (direita). O conjunto de impasse Δ_1 está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_1}$ está destacado em azul.

A curva de impasse do sistema forçado (5.23) é $\Delta_2 = \{x = 0\}$. Devemos agora dividir nossa análise em dois casos.

Se $k \neq 0$, o sistema adjunto (5.24) possui um único ponto de equilíbrio dado por

$$\left(\frac{2\sqrt[3]{36} - \sqrt[3]{6} \left(\sqrt[3]{-9k + \sqrt{81k^2 + 48}} \right)^2}{6 \left(\sqrt[3]{-9k + \sqrt{81k^2 + 48}} \right)}, -1 \right) \notin \Delta_2.$$

Observe que todos os pontos em Δ_2 são não singulares do sistema forçado (5.23), e portanto pelo Corolário 5.9 a superfície M_2^k é desconexa e $\mathcal{I}_{M_2^k} = \emptyset$. Veja a Figura 5.9.

Quando $k = 0$, o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_2^0}$ é o plano xz e portanto o conjunto de impasse Δ_2 é uma curva de pontos de equilíbrio do sistema adjunto (5.24). Veja a Figura 5.10.

5.4.3 O Sistema de Lorenz

O Sistema de Lorenz é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} &= s(-x + y); \\ \dot{y} &= rx - y - xz; \\ \dot{z} &= xy - bz; \end{cases} \quad (5.25)$$

em que $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são variáveis e $(s, r, b) \in \mathbb{R}^3$ são parâmetros. Este modelo diz respeito ao estudo de fenômenos meteorológicos e foi proposto por Lorenz em 1963 no artigo [28]. É sabido que quando $(s, r, b) = (10, 28, \frac{8}{3})$ este sistema apresenta comportamento caótico. Em [27] os autores mostraram todas as seis superfícies algébricas invariantes do Sistema de Lorenz (5.25). Em [8] foi estudado o fluxo do sistema em tais superfícies e no artigo [22] os autores estudaram as dinâmicas globais de (5.25).

Três das seis superfícies algébricas invariantes dadas em [27] podem ser escritas da forma

$$M_i = \{H_i^{-1}(0)\}; \quad H_i(x, y, z) = f_i(x, y)z - g_i(x, y);$$

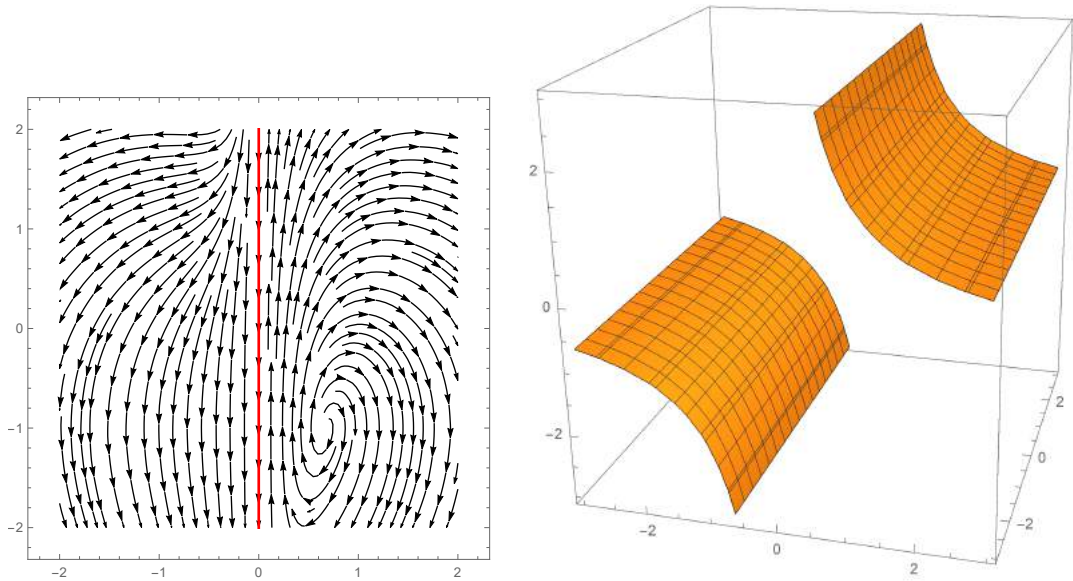


Figura 5.9: Retrato de fase de (5.23) (esquerda) e superfície M_2^k (direita) quando $k \neq 0$. O conjunto de impasse Δ_2 está destacado em vermelho.

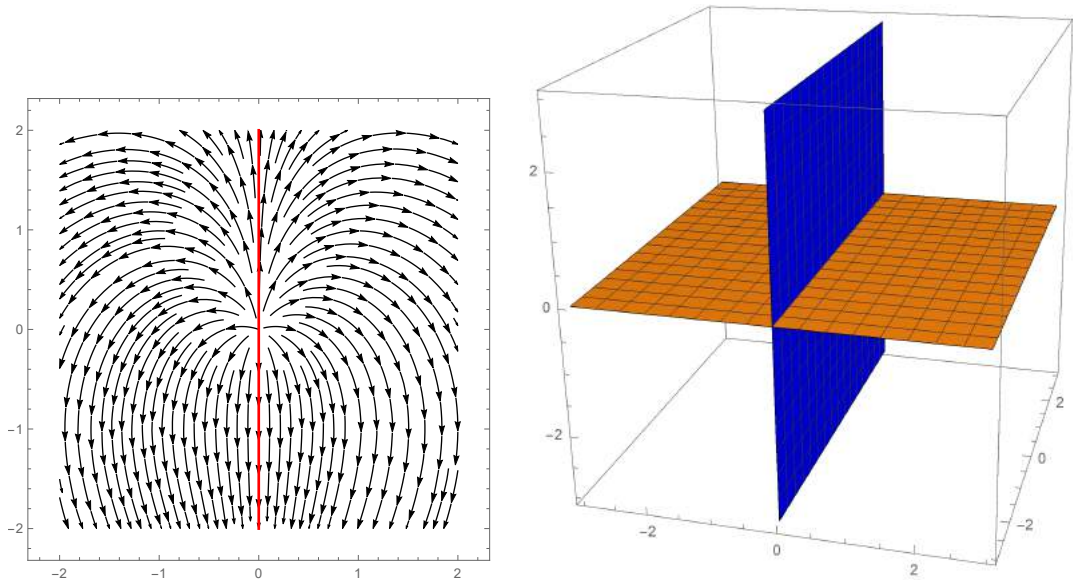


Figura 5.10: Retrato de fase de (5.23) (esquerda) e superfície M_2^k (direita) quando $k = 0$. O conjunto de impasse Δ_2 está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_2^k}$ está destacado em azul.

em que $i = 1, 2, 3$. No que segue, analisaremos o fluxo de (5.25) em tais superfícies. Veja a Tabela 5.2.

Caso (a): $(s, r, b) = (\frac{1}{3}, r, 0)$

Neste caso, o Sistema de Lorenz (5.25) é da forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{1}{3}(-x + y); \\ \dot{y} &= rx - y - xz; \\ \dot{z} &= xy; \end{cases} \quad (5.26)$$

Caso	(s, r, b)	$f_i(x, y)$	$g_i(x, y)$
(a)	$(\frac{1}{3}, r, 0)$	$-\frac{4}{3}x^2$	$\frac{4}{9}y^2 + \frac{8}{9}xy - \frac{4}{3}rx^2 - x^4$
(b)	$(1, r, 4)$	$-4x^2 - 16(1 - r)$	$4rx^2 - 8xy + 4y^2 - x^4$
(c)	$(s, 2s - 1, 6s - 2)$	$-4sx^2$	$4s^2y^2 - 4s(4s - 2)xy + (4s - 2)^2x^2 - x^4$

Tabela 5.2: Superfícies algébricas invariantes do Sistema de Lorenz (5.25) catalogadas em [27].

cujo fluxo em $M_1 = \{H_1(x, y, z) = 0\}$ é descrito pelo sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{3}(-x + y); \\ \frac{4}{3}x\dot{y} = \frac{4}{3}x(rx - y) + \frac{4}{9}y^2 + \frac{8}{9}xy - \frac{4}{3}rx^2 - x^4; \end{cases} \quad (5.27)$$

e o sistema adjunto é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{4}{9}x(-x + y); \\ \dot{y} = \frac{4}{3}x(rx - y) + \frac{4}{9}y^2 + \frac{8}{9}xy - \frac{4}{3}rx^2 - x^4. \end{cases} \quad (5.28)$$

A origem $(0, 0) \in \Delta_1 = \{x = 0\}$ é o único ponto de equilíbrio de (5.28). Como o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_1} = \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}$ é um conjunto singular de M_1 e a linearização do sistema adjunto (5.28) calculada em $(0, 0)$ é identicamente nula, segue do Teorema 5.22 que o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_1}$ é invariante pelo fluxo de (5.26). Este fato também pode ser checado observando que todos os pontos de $\mathcal{I}_{M_1}$ são pontos de equilíbrio. Observe que fora do conjunto de impasse Δ_1 não há ponto de equilíbrio do sistema adjunto (5.28), e portanto não há pontos de equilíbrio de (5.26) em $\mathcal{G}_{M_1}$. Veja a Figura 5.11.

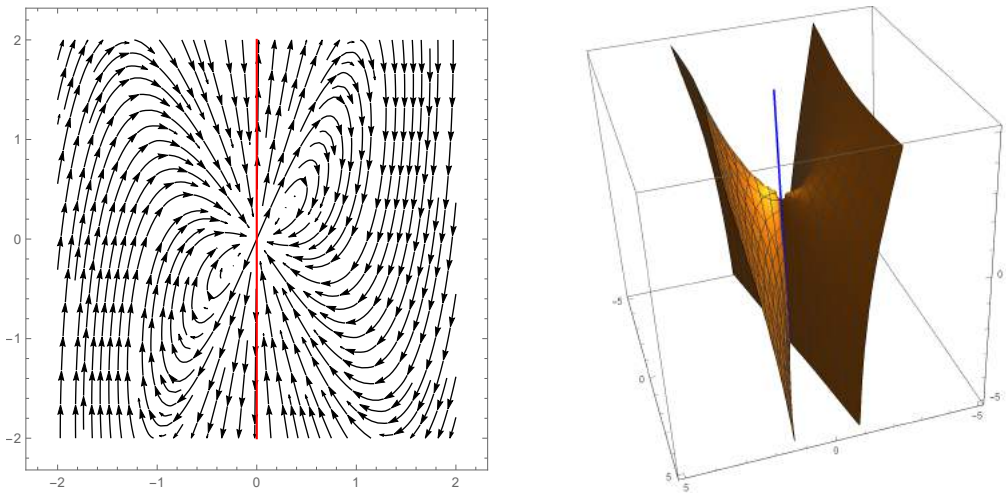


Figura 5.11: Retrato de fase de (5.27) (esquerda) e superfície M_1 (direita). O conjunto de impasse Δ_1 está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_1}$ está destacado em azul.

Caso (b): $(s, r, b) = (1, r, 4)$

Primeiramente, observe que para $r < 1$ a função f_2 é sempre não nula. Já para $r = 1$ a função tem apenas uma raiz e para $r > 1$ ela tem duas raízes. Como estamos interessados

no caso em que f_2 possui raízes reais (já que é o caso onde surgem sistemas forçados), vamos estudar apenas os casos $r = 1$ e $r > 1$.

Para $r = 1$, o Sistema (5.25) toma a forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + y; \\ \dot{y} &= x - y - xz; \\ \dot{z} &= -4z + xy; \end{cases} \quad (5.29)$$

cujo fluxo em $M_2 = \{-4x^2z - (4x^2 - 8xy + 4y^2 - x^4) = 0\}$ é descrito pelo sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + y; \\ 4x\dot{y} &= 4x(x - y) + (4x^2 - 8xy + 4y^2 - x^4); \end{cases} \quad (5.30)$$

e seu sistema adjunto é

$$\begin{cases} \dot{x} &= 4x(-x + y); \\ \dot{y} &= 4x(x - y) + (4x^2 - 8xy + 4y^2 - x^4). \end{cases} \quad (5.31)$$

A origem $(0, 0) \in \Delta_2 = \{x = 0\}$ é o único ponto de equilíbrio de (5.31). Como o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_2} = \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}$ é um conjunto singular de M_2 e a linearização de (5.31) computada em $(0, 0)$ é identicamente nula, segue do Teorema 5.22 que o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_2}$ é invariante pelo fluxo de (5.29). Este fato também pode ser verificado observando que nos pontos de $\mathcal{I}_{M_2}$ o campo de vetores definido pelo Sistema (5.29) é dado por $(0, 0, -4z)$. Veja a Figura 5.12.

Supondo agora $r > 1$ o Sistema (5.25) toma a forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + y; \\ \dot{y} &= rx - y - xz; \\ \dot{z} &= -4z + xy; \end{cases} \quad (5.32)$$

e a superfície algébrica invariante é

$$M_2 = \left\{ \left(-4x^2 - 16(1 - r) \right) z - (4rx^2 - 8xy + 4y^2 - x^4) = 0 \right\}.$$

O fluxo de (5.32) em M_2 é dado pelo sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + y; \\ \left(-4x^2 - 16(1 - r) \right) \dot{y} &= \left(-4x^2 - 16(1 - r) \right) (rx - y) - x(4rx^2 - 8xy + 4y^2 - x^4); \end{cases} \quad (5.33)$$

cujo campo de vetores adjunto é

$$\begin{cases} \dot{x} &= \left(-4x^2 - 16(1 - r) \right) (-x + y); \\ \dot{y} &= \left(-4x^2 - 16(1 - r) \right) (rx - y) - x(4rx^2 - 8xy + 4y^2 - x^4). \end{cases} \quad (5.34)$$

Neste caso, o conjunto de impasse $\Delta_2^\pm = \{(\pm 2\sqrt{r-1}, y), y \in \mathbb{R}\}$ do sistema forçado (5.33) é formado por duas retas paralelas. Já o conjunto de pseudo impasse em M_2 é dado pelas retas

$$\mathcal{I}_{M_2}^\pm = \{(\pm 2\sqrt{r-1}, \pm 2\sqrt{r-1}, z), z \in \mathbb{R}\}.$$

Observe que

$$\nabla f_2(x, y, r) = (-8x, 0), \quad \nabla g_2(x, y, r) = (-4x^3 + 8rx - 8y, -8x + 8y),$$

e portanto nos pontos $(\pm 2\sqrt{r-1}, \pm 2\sqrt{r-1})$ os vetores ∇f_2 e ∇g_2 são linearmente dependentes. Segue da Proposição 5.17 que cada reta do conjunto de pseudo impasse contém um ponto singular da superfície M_2 . A saber, tais pontos são dados por $(\pm 2\sqrt{r-1}, \pm 2\sqrt{r-1}, r-1) \in \mathcal{I}_{M_2}^\pm$, e eles também são pontos de equilíbrio de (5.32). Todos os outros pontos do conjunto de pseudo impasse são regulares.

O Sistema (5.34) possui três pontos de equilíbrio, e dois deles estão no conjunto de impasse. Mais precisamente $(\pm 2\sqrt{r-1}, \pm 2\sqrt{r-1}) \in \Delta_2^\pm$. A linearização do campo de vetores adjunto (5.34) computado em tais pontos é identicamente nula. Já o terceiro ponto de equilíbrio de (5.34) está na origem e é uma sela hiperbólica. Portanto, há um ponto de sela em $\mathcal{G}_{M_2}$. Veja a Figura 5.13.

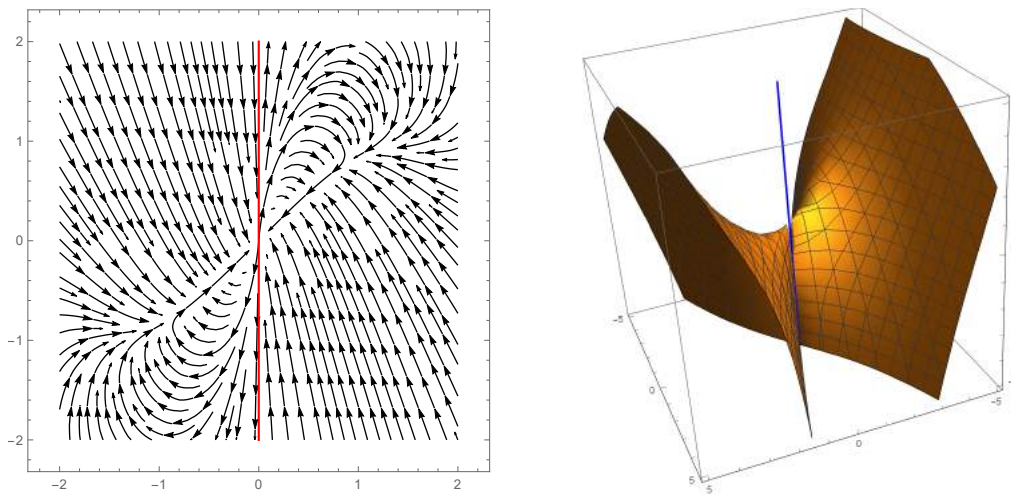


Figura 5.12: Retrato de fase de (5.30) (esquerda) e superfície M_2 quando $r = 1$ (direita). O conjunto de impasse Δ_2 está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_2}$ está destacado em azul.

Caso (c): $(s, r, b) = (s, 2s - 1, 6s - 2)$

Neste caso, o Sistema de Lorenz (5.25) toma a forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= s(-x + y); \\ \dot{y} &= (2s - 1)x - y - xz; \\ \dot{z} &= -(6s - 2)z + xy; \end{cases} \quad (5.35)$$

O fluxo de (5.35) em $M_3 = \{H_3(x, y, z) = 0\}$ é definido pelo sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} &= s(-x + y); \\ 4sx\dot{y} &= 4sx((2s - 1)x - y) + (4s^2y^2 + (4s - 2)^2x^2 - 4s(4s - 2)xy - x^4); \end{cases} \quad (5.36)$$

cujos campo de vetores adjunto é

$$\begin{cases} \dot{x} &= 4s^2x(-x + y); \\ \dot{y} &= 4sx((2s - 1)x - y) + (4s^2y^2 + (4s - 2)^2x^2 - 4s(4s - 2)xy - x^4). \end{cases} \quad (5.37)$$

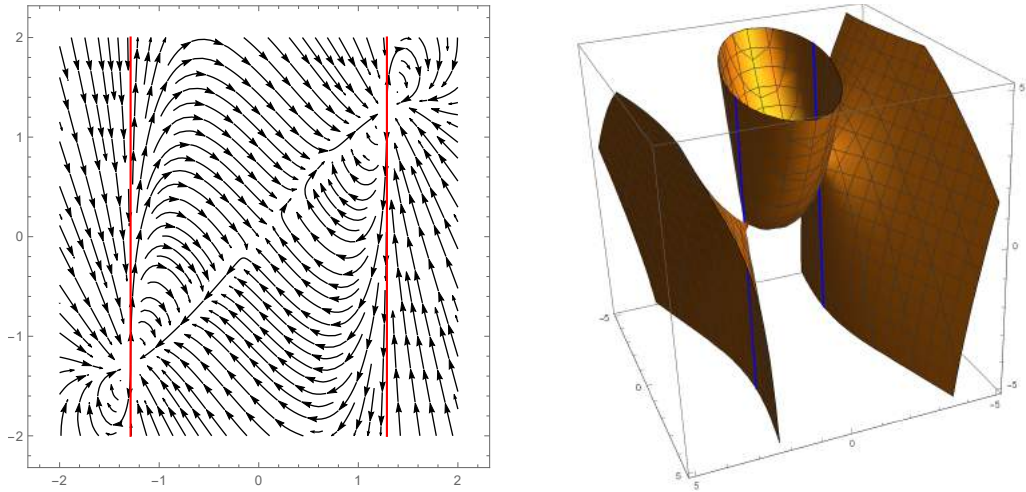


Figura 5.13: Retrato de fase de (5.33) (left) (esquerda) e superfície M_2 quando $r > 1$ (direita). O conjunto de impasse Δ_2 está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_2}$ está destacado em azul.

A curva de impasse de (5.36) é dada por $\Delta_3 = \{x = 0\}$ e a origem é o único ponto de equilíbrio de (5.37). Como o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_3} = \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}$ é um conjunto singular de M_3 e a linearização do campo de vetores adjunto (5.37) computada em $(0, 0)$ é identicamente nula, segue do Teorema 5.22 que $\mathcal{I}_{M_3}$ é invariante pelo fluxo de (5.35). Este fato também pode ser checado observando que em $\mathcal{I}_{M_3}$ o campo de vetores definido pelo Sistema (5.35) é dado por $X = (0, 0, -(6s - 2)z)$.

Observe que fora do conjunto de impasse Δ_3 o sistema adjunto possui dois pontos de equilíbrio dados por $(\pm 2\sqrt{1 + 3s^2 - 4s}, \pm 2\sqrt{1 + 3s^2 - 4s})$. Tais pontos são distintos quando $s > 1$ ou $s < \frac{1}{3}$ e eles colidem quando $s = 1$ ou $s = \frac{1}{3}$. Conclui-se que existem dois pontos de equilíbrio de (5.35) em $\mathcal{G}_{M_3}$ quando $s > 1$ ou $s < \frac{1}{3}$. Veja a Figura 5.14.

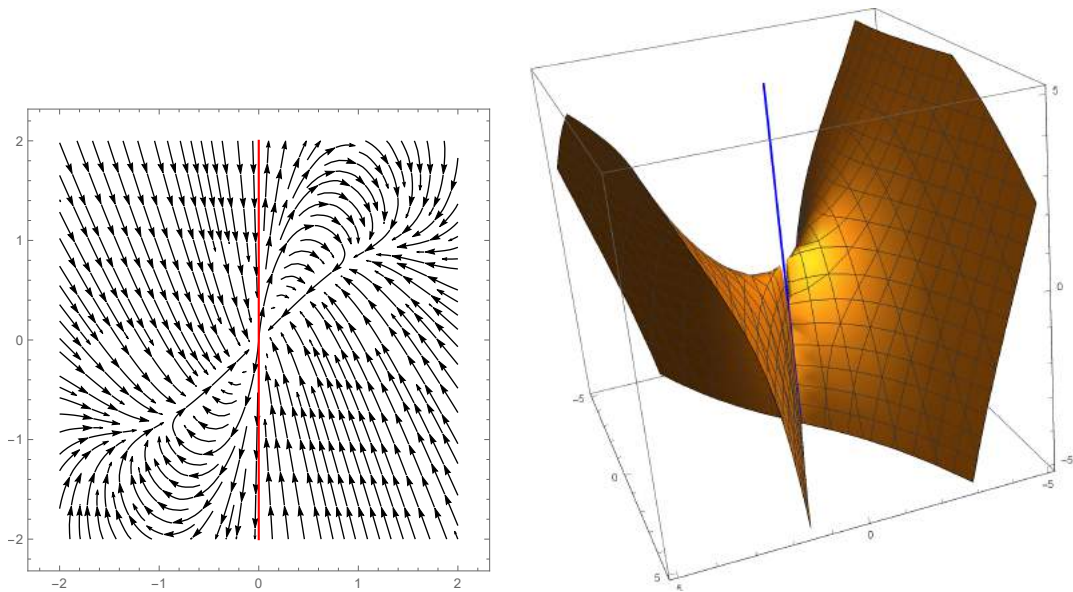


Figura 5.14: Retrato de fase do Sistema (5.36) (esquerda) e superfície M_3 quando $s = 1$ (direita). O conjunto de impasse Δ_3 está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_3}$ está destacado em azul.

5.4.4 O Sistema de Chen

O Sistema de Chen é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} &= a(-x + y); \\ \dot{y} &= (c - a)x + cy - xz; \\ \dot{z} &= xy - bz; \end{cases} \quad (5.38)$$

em que $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são as variáveis e $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ são parâmetros. Este modelo foi proposto pela primeira vez em [10] e ele apresenta comportamento caótico para uma escolha conveniente de parâmetros. No artigo [29] foram dadas seis superfícies algébricas invariantes para o Sistema de Chen (5.38). Já em [7] os autores estudaram as dinâmicas de (5.38) em tais superfícies. Finalmente, em [24] foram estudadas a dinâmica global deste sistema.

Duas das seis superfícies algébricas invariantes classificadas em [29] estão escritas na forma

$$M_i = \{H_i^{-1}(0)\}; \quad H_i(x, y, z) = f_i(x, y)z - g_i(x, y);$$

em que $i = 4, 5$. Veja a Tabela 5.3.

Caso	(a, b, c)	$f_i(x, y)$	$g_i(x, y)$
(d)	$(-\frac{c}{3}, 0, c)$	$\frac{4}{3}cx^2$	$\frac{16}{9}c^2x^2 + \frac{8}{9}c^2xy + \frac{4}{9}c^2y^2 - x^4$
(e)	$(-c, -4c, c)$	$4cx^2 + 48c^3$	$4c^2y^2 - 8c^2xy - 8c^2x^2 - x^4$

Tabela 5.3: Superfícies algébricas invariantes do Sistema de Chen (5.38) catalogadas em [29].

Observe que para todo $c \in \mathbb{R}$ a função $f_5(x, y) = 4cx^2 + 48c^3$ é sempre não nula. Isto implica que o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_5}$ é vazio e portanto o fluxo de (5.38) em M_5 é descrito por um sistema de equações diferenciais ordinárias clássico. Assim sendo, não estudaremos este caso.

Considere então o caso em que $(a, b, c) = (-\frac{c}{3}, 0, c)$. O Sistema de Chen é da forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{c}{3}(-x + y); \\ \dot{y} &= c(\frac{4}{3}x + y) - xz; \\ \dot{z} &= xy; \end{cases} \quad (5.39)$$

e o seu fluxo na superfície $M_4 = \{H_4(x, y, z) = 0\}$ é descrito pelo sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{c}{3}(-x + y); \\ \frac{4}{3}cx\dot{y} &= \frac{4}{3}c^2x(\frac{4}{3}x + y) - \left(\frac{16}{9}c^2x^2 + \frac{8}{9}c^2xy + \frac{4}{9}c^2y^2 - x^4\right); \end{cases} \quad (5.40)$$

cujos campo de vetores adjunto é

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{4}{9}c^2x(x - y); \\ \dot{y} &= \frac{4}{3}c^2x(\frac{4}{3}x + y) - \left(\frac{16}{9}c^2x^2 + \frac{8}{9}c^2xy + \frac{4}{9}c^2y^2 - x^4\right); \end{cases} \quad (5.41)$$

A curva de impasse do Sistema (5.40) é dada por $\Delta_4 = \{x = 0\}$ e a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema adjunto (5.41). Como o conjunto de pseudo impasse

$\mathcal{I}_{M_4} = \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}$ é um conjunto singular de M_4 e a linearização do sistema adjunto (5.41) calculada em $(0, 0)$ é identicamente nula, segue do Teorema 5.22 que $\mathcal{I}_{M_4}$ é um conjunto invariante de (5.39). Observe que fora do conjunto de impasse Δ_4 não há pontos de equilíbrio de (5.41) e por conseguinte não há pontos de equilíbrio de (5.39) em $\mathcal{G}_{M_4}$. Veja a Figura 5.15.

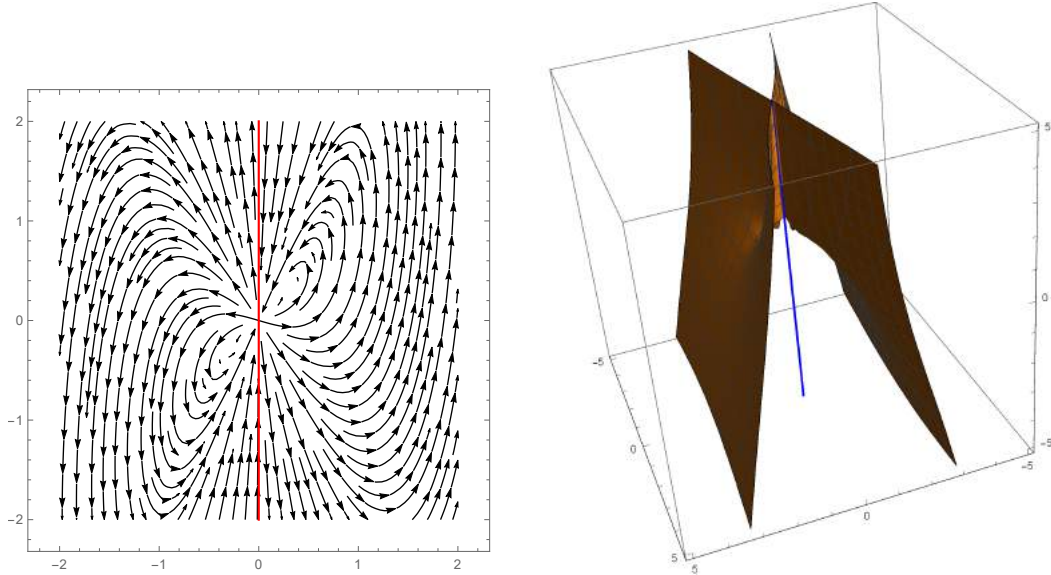


Figura 5.15: Retrato de Fase do Sistema (5.40) (esquerda) e superfície M_4 (direita). O conjunto de impasse Δ_4 está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_4}$ está destacado em azul.

5.5 Fluxos em hiperfícies e sistemas forçados em dimensões maiores

Nesta seção discutiremos como o problema de descrever fluxos em hiperfícies a partir de sistemas forçados pode ser estendido para dimensões maiores. Em outras palavras, discutiremos brevemente algumas questões a respeito do problema abordado neste capítulo em dimensões maiores que 3. Para isso, vamos analisar um exemplo.

A Equação de Fisher–Kolmogorov foi introduzida em [19] e ela se trata de um modelo de dinâmica populacional. Tal equação é dada por

$$u_t = u_{xx} + u - u^3.$$

Em [14] os autores propuseram a Equação de Fisher–Kolmogorov Estendida (a qual abreviaremos por EFK), que é da forma

$$u_t = -\gamma u_{xxxx} + u_{xx} + u - u^3;$$

em que γ é um parâmetro satisfazendo $\gamma > 0$. Observe que para $\gamma = 0$ a equação EFK se reduz a Equação de Fisher–Kolmogorov clássica.

Considerando soluções estacionárias (isto é, soluções que não dependem do tempo t), a equação EFK toma a forma

$$-\gamma u_{xxxx} + u_{xx} + u - u^3 = 0, \quad \gamma > 0.$$

Aplicando algumas transformações e mudanças de coordenadas, pode-se expressar as soluções estacionárias da equação EFK por meio do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = z; \\ \dot{z} = w; \\ \dot{w} = x - qz - x^3; \end{cases} \quad (5.42)$$

em que $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ e $q \in \mathbb{R}$ é um parâmetro negativo.

No artigo [23] os autores provaram que

$$H(x, y, z, w) = \frac{qy^2 - x^2 - z^2}{2} + \frac{x^4}{4} + wy$$

é uma integral primeira do Sistema (5.42) e portanto $H^{-1}(k)$ é uma hiperfície algébrica invariante, para todo $k \in \mathbb{R}$. Para os valores $k \neq 0$ e $k \neq -\frac{1}{4}$ a hiperfície $H^{-1}(k)$ suave 3-dimensional. Observe que H é escrita na forma $H(x, y, z, w) = f(x, y, z)w - g(x, y, z)$, e portanto pode-se escrever M como a união disjunta dos conjuntos $\mathcal{G}_M$ e $\mathcal{I}_M$, em que

$$\mathcal{G}_M = \left\{ w = \frac{g(x, y, z)}{f(x, y, z)}; f(x, y, z) \neq 0 \right\};$$

$$\mathcal{I}_M = \left\{ f(x, y, z) = 0 = g(x, y, z) \right\}.$$

Assim, é possível mostrar para M um resultado análogo a Proposição 5.2.

Em [23] os autores também provaram que o fluxo de (5.42) em $H^{-1}(k)$ é descrito pelo sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = z; \\ 4y\dot{z} = 4k + 2(x^2 + z^2 - qy^2) - x^4; \end{cases} \quad (5.43)$$

cujo campo de vetores adjunto

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y^2; \\ \dot{y} = 4yz; \\ \dot{z} = 4k + 2(x^2 + z^2 - qy^2) - x^4. \end{cases} \quad (5.44)$$

As ideias usadas para provar tal fato são as mesmas usadas na prova do Teorema 5.5. Note que o conjunto de impasse Δ de (5.43) é o plano xz em $\mathbb{R}^3$, e quando projetamos o conjunto de pseudo impasse

$$\mathcal{I}_M = \left\{ (x, y, z, w) | y = 0 = \frac{qy^2 - x^2 - z^2}{2} + \frac{x^4}{4} + k, w \in \mathbb{R} \right\}$$

em Δ obtemos uma curva de pontos de equilíbrio do sistema adjunto (5.44).

Embora a Proposição 5.2 e o Teorema 5.5 sejam facilmente generalizados para dimensões maiores, generalizar o Teorema 5.21 e a Proposição 5.16 é uma tarefa mais difícil. No caso estudado neste capítulo, a projeção do conjunto de pseudo impasse é um conjunto de pontos de equilíbrio do campo de vetores adjunto. Em dimensões maiores, se M é uma hiperfície n -dimensional em $\mathbb{R}^{n+1}$, então $\mathcal{I}_M \subset M$ é uma subvariedade $(n-1)$ -dimensional. Além disso, o conjunto de impasse Δ é uma subvariedade $(n-1)$ -dimensional em $\mathbb{R}^n$. A projeção de $\mathcal{I}_M$ em Δ é uma subvariedade $(n-2)$ -dimensional em $\mathbb{R}^n$ que consiste apenas de pontos de equilíbrio do campo de vetores adjunto. Este caso requer análise mais detalhada.

Referências

- [1] ÁLVAREZ, M. J., FERRAGUT, A., AND JARQUE, X. A survey on the blow up technique. *Int. J. Bifurc. Chaos* 21 (2011), 3103–3118.
- [2] ARNOLD, V. Normal forms for functions near degenerate critical points, the weyl groups of a_k ; d_k ; e_k and lagrangian singularities. *Functional Anal. Appl.* 6 (1973), 254–272.
- [3] BELOTTO, A. Global resolution of singularities subordinated to a 1-dimensional foliation. *J. Algebra* 447 (2016), 397–423.
- [4] BELOTTO, A., AND PANAZZOLO, D. Global desingularization of a real-analytic planar vector field. Tech. rep., Université de Haute-Alsace, 2011.
- [5] BENDIXSON, I. Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Math* 24 (1901), 1–88.
- [6] BRUNELLA, M., AND MIARI, M. Topological equivalence of a plane vector field with its principal part defined through Newton polyhedra. *J. Differ. Equations* 85 (1990), 338–366.
- [7] CAO, J., CHEN, C., AND ZHANG, X. The Chen system having an invariant algebraic surface. *Int. J. Bifurc. Chaos* 18 (2008), 3753–3758.
- [8] CAO, J., AND ZHANG, X. Dynamics of the lorenz system having an invariant algebraic surface. *J. of Math. Physics* 48 (2007), 1–13.
- [9] CARDIN, P., SILVA, P., AND TEIXEIRA, M. Implicit differential equations with impasse singularities and singular perturbation problems. *Isr. J. Math.* 189 (2012), 189–307.
- [10] CHEN, G., AND UETA, T. Yet another chaotic attractor. *Int. J. Bifurc. Chaos* 9 (1999), 1465–1466.
- [11] CHUA, L., AND OKA, H. Normal forms for constrained nonlinear differential equations. I. Theory. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 35(7) (1988), 881–901.
- [12] CHUA, L., AND OKA, H. Normal forms for constrained nonlinear differential equations. II. Bifurcation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 36(1) (1988), 71–88.
- [13] CIMA, A., AND LLIBRE, J. Bounded polynomial vector fields. *Trans. Amer. Math. Soc.* 318 (1990), 557–579.

-
- [14] DEE, G., AND SAARLOOS, W. Bistable systems with propagating fronts leading to patternformation. *Phys. Rev. Lett.* 60 (1988), 2641–2644.
 - [15] DUMORTIER, F. Singularities of vector fields on the plane. *J. Differ. Equations* 23 (1977), 53–106.
 - [16] DUMORTIER, F., LLIBRE, J., AND ARTÉS, J. C. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Universitext, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
 - [17] FALKNER, G., AND SKAN, S. Solutions of the boundary layer equations. *Phil. Magazine* 12 (1931), 865–896.
 - [18] FERRAGUT, A., AND GASULL, A. Seeking Darboux polynomials. *Acta Appl Math* 139 (2015), 167–186.
 - [19] FISHER, R. The wave of advance of advantageous genes. *Annals of Eugenics* 7-4 (1937), 353–369.
 - [20] GRAMSCI, A. *Cartas do Cárcere (Antologia)*. Editora Estaleiro, 2011.
 - [21] JOYCE, D. A generalization of manifold with corners. *Adv. Math.* 299 (2016), 760–862.
 - [22] LLIBRE, J., MESSIAS, M., AND SILVA, P. Global dynamics of the Lorenz system with invariant algebraic surfaces. *Int. J. Bifurc. Chaos* 20-10 (2010), 3137–3155.
 - [23] LLIBRE, J., MESSIAS, M., AND SILVA, P. Global dynamics of stationary solutions of the extended Fisher–Kolmogorov equation. *J. of Math. Physics* 52 (2011), 112701.
 - [24] LLIBRE, J., MESSIAS, M., AND SILVA, P. Global dynamics in the Poincaré ball of the Chen system having invariant algebraic surfaces. *Int. J. Bifurc. Chaos* 22 (2012), 1250154.
 - [25] LLIBRE, J., AND SOTOMAYOR, J. Structural stability of constrained polynomial systems. *Bulletin of the London Mathematical Society* 30-6 (1998), 589–595.
 - [26] LLIBRE, J., AND VALLS, C. On the Darboux integrability of Blasius and Falkner–Skan equation. *Computers and Fluids* 86 (2013), 71–76.
 - [27] LLIBRE, J., AND ZHANG, X. Invariant algebraic surfaces of the Lorenz system. *J. of Math. Physics* 43 (2002), 1622–1645.
 - [28] LORENZ, E. Deterministic nonperiodic flow. *J. of the Atmospheric Sciences* 20 (1963), 130–141.
 - [29] LU, T., AND ZHANG, X. Darboux polynomials and algebraic integrability of the Chen system. *Int. J. Bifurc. Chaos* 17-8 (2007), 2739–2748.
 - [30] MAHDI, A., AND VALLS, C. Invariant algebraic surfaces for the reduced three-wave interaction system. *J. of Math. Phys.* 52 (2011), 122702.
 - [31] MUNKRES, J. *Topology*, 2 ed. Prentice Hall, New Jersey, 2000.
 - [32] PANAZZOLO, D. Resolution of singularities of real-analytic vector fields in dimension three. *Acta Math* 197(2) (2006), 167–289.

-
- [33] PELLETIER, M. Éclatements quasi homogènes. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* 4 (1995), 879–937.
- [34] PEREZ, O. H., AND SILVA, P. R. Resolution of singularities of 2-dimensional real analytic constrained differential systems. <https://arxiv.org/pdf/2012.00085> (2020), 1–35.
- [35] PEREZ, O. H., AND SILVA, P. R. On the classification of planar constrained differential systems under topological equivalence. <https://arxiv.org/abs/2105.04748> (2021), 1–39.
- [36] PIKOVSKII, A., AND RABINOVICH, M. Stochastic behavior of dissipative systems. *Soviet Scientific Reviews, Sec. C-Mathematical Physics Reviews* 2 (1981), 165–208.
- [37] RABIER, P. J., AND RHEINBOLDT, W. C. Theoretical and numerical analysis of differential-algebraic equations. In *Handbook of Numerical Analysis* (North Holland, 2002), P. G. C. et al, Ed., vol. VIII, Elsevier, pp. 183–540.
- [38] RIAZA, R. *Differential-Algebraic systems: Analytical aspects and circuit applications*. World Scientific Publishing, Singapura, 2008.
- [39] SCHNEIDER, R. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, 2 ed. Cambridge University Press, Reino Unido, 2013.
- [40] SEIDENBERG, A. Reduction of singularities of the differential equation $ady = bdx$. *Amer. J. Math.* 90 (1968), 248–269.
- [41] SILVA, P., AND PEREZ, O. Invariant algebraic surfaces and impasses. *Qual. Theory Dyn. Syst.* 20(23) (2021), <https://doi.org/10.1007/s12346-021-00465-x>.
- [42] SMALE, S. On the mathematical foundation of electrical networks. *J. of Diff. Geometry* 7 (1972), 193–210.
- [43] SOTOMAYOR, J., AND ZHITOMIRSKII, M. Impasse singularities of differential systems of the form $a(x)x' = f(x)$. *J. Differ. Equations* 169 (2001), 567–587.
- [44] ZHITOMIRSKII, M. Local normal forms for constrained systems on 2-manifolds. *B. da Soc. Bras. de Matematica* 24 (1993), 211–232.

Índice Remissivo

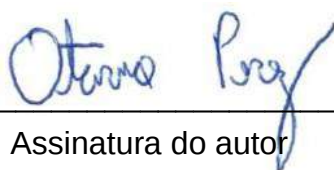
- (ω_1, ω_2) -graduação de um campo de vetores, 29
- 1-folheação orientada, 18, 25
- Altura do polígono de Newton, 29
- Base logarítmica, 28
- Blow-up
 - direcional, 28
 - quadrático, 27
- Campo de vetores
 - adjunto, 25
 - auxiliar, 30
- Centro do blow-up, 27
- Cofator, 80
- Compactificação de Poincaré, 82
- Conjunto
 - $\mathcal{A}$, 20, 70
 - de impasse, 17, 18, 24, 25
 - de pseudo impasse, 21, 81
- Coordenadas
 - adaptadas, 56
 - adaptadas ao divisor, 35
 - admissíveis, 38
 - controláveis, 35
 - favoráveis, 63
- Divisor excepcional, 27
- Equação
 - de Falkner–Skan, 94
 - de Fisher–Kolmogorov, 104
 - de Fisher–Kolmogorov estendida, 104
- Equivalência orbital, 25
 - que preserva orientação, 25
- Esquema elementar de singularidades, 58
 - degenerado, 58
 - não degenerado, 58
- Feixe de ideais principais, 18, 25
- Ideal de impasse, 25
- Integral primeira, 80
- Intervalo singular básico de um sistema forçado, 58
- K-singularidade, 85
- Lema da Colagem, 59
- Matriz adjunta, 24
- Nível de uma (ω_1, ω_2) -graduação, 29
- Não singular, 26, 85
- Parte principal
 - de um campo de vetores, 64
 - de um sistema forçado, 64
- Polígono de Newton
 - controlável, 35
 - de um campo de vetores, 29
 - de uma curva, 29
- Polinômio de Darboux, 80
- Ponto
 - de equilíbrio semi hiperbólico, 26
 - de impasse, 17, 24
 - elementar, 26, 39
 - Newton elementar, 39
- Pull back
 - de uma folheação, 28
 - do ideal de impasse, 28
- R-singularidade, 85
 - do tipo I, 85
 - do tipo II, 85
- RK-singularidade, 85
 - do tipo I, 85
 - do tipo II, 85
- Segmento principal, 29
- Singularidade
 - básica de um sistema forçado, 58
 - de um sistema forçado, 26

- do tipo ADE, 70
- Newton não degenerada, 65
- Sistema
 - com impasse, 24
 - de Chen, 103
 - de interação de três ondas, 95
 - de Lorenz, 97
 - forçado, 24, 25
 - diagonalizado, 25, 30
 - elementar, 27
- Soma de Minkowski, 30
- Superfície algébrica invariante, 80
- Suporte
 - de um campo de vetores, 29
 - de uma curva, 29
- Transformada estrita, 28
- Vértice
 - do polígono de Newton, 29
 - principal, 29
- Variedade com esquinas, 18, 25

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 31/01/2022



Assinatura do autor