

RESSALVA

Atendendo solicitação da autora,
o texto completo desta tese será
disponibilizado somente a partir
de 07/04/2022



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de São José do Rio Preto

Heloísa Lopes de Sousa

Problemas Elípticos Supercríticos com Expoentes Ressonantes

São José do Rio Preto

2020

Heloísa Lopes de Sousa

**Problemas Elípticos Supercríticos com Expoentes
Ressonantes**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves.

São José do Rio Preto

2020

S725p

Sousa, Heloísa Lopes de

Problemas elípticos supercríticos com expoentes ressonantes /

Heloísa Lopes de Sousa. -- São José do Rio Preto, 2020

72 f.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio
Preto

Orientador: Sérgio Leandro Nascimento Neves

1. Matemática. 2. Análise matemática. 3. Equações elípticas não
lineares. 4. Problema de Coron no caso supercrítico. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de
Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Heloísa Lopes de Sousa

Problemas Elípticos Supercríticos com Expoentes

Ressonantes

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Banca Examinadora

Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Profa. Dra. Juliana Conceição Precioso Pereira
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
UNESP - Presidente Prudente

Prof. Dr. Pablo Salvador Figueroa Salgado
Universidad Austral de Chile

Prof. Dr. Ederson Moreira dos Santos
USP - São Carlos

São José do Rio Preto

07 de Abril de 2020

*À minha mãe, Fátima,
e em memória de meu pai, José.*

Agradecimentos

Agradeço antes de tudo à Deus por mais uma conquista.

Agradeço à minha mãe, Fátima, meus irmãos Aline e Júnior, por estarem sempre me motivando e apoiando para que eu pudesse desenvolver este trabalho.

Em especial ao meu namorado e companheiro Junior Augusto Pereira, pelo carinho, compreensão e por ser a pessoa que compartilho todas as alegrias e que me conforta nos momentos difíceis.

Ao Professor Sérgio Leandro Nascimento Neves, agradeço por ter aceitado me orientar, por todos os ensinamentos, conselhos, incentivos, por sua imensa paciência e dedicação.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UNESP, Campus de São José do Rio Preto. Agradeço também aos professores do Departamento de Matemática da UEM e da UNESP, Campus Presidente Prudente, por terem contribuído com minha formação acadêmica.

Aos amigos do Programa de Pós-Graduação de Matemática, Alisson de Carvalho, Ana Livia Roderio, Anderson Gonzaga, André do Amaral, André Carvalho, Bruno Caldeira, Caroline Signorini, Cheienne Chaves, Diana Rodriguez, Eduardo Machado, Eliton Moro, Fabiola Villanueva, Fabrício Alvez, Fabrício Rissão, Gino Maqui, Gustavo Andreto, Harison Brito, Jairo Santos, Jarne Donizetti, Jennifer C. Borges, João Pitot, Jéssica Ventura, José A. Fiorucci, Laura Rezzieri, Luana Lima, Lucas Queiroz, Luiz F. Gonçalves, Luiz F. Gouveia, Mariana Delfino, Otávio Perez, Paola Patzi, Paula Fukushima, Plínio Sicuti, Rafael Paulino, Rafaela Soares, Rodrigo Ishizaka e Willian Pereira por terem participado de bons diálogos em matemática e pelas histórias compartilhadas. Agradeço todas as amizades feitas em São José do Rio Preto, em especial, Ana Laura Alves, Deborah Di Lernia, Mariana Molina, Nayara Cattozatto e as teachers Letícia Borges e Sarah Oliveira por todas as conversas, ensinamentos e pelos momentos de acolhimento. A todas as me-

ninas do time de Handebol e Futsal do IBILCE que fizeram parte da minha trajetória em Rio Preto e que me deram muitas alegrias.

A todas as pessoas que, de forma direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“A imaginação foi a companheira de toda a minha existência, viva, rápida,
inquieta, alguma vez tímida e amiga de empacar, [...]”

Machado de Assis (1899, p.122)

Resumo

Neste trabalho, consideramos uma classe de problemas elípticos supercríticos não lineares. Apresentamos um método para determinar solução do problema de Coron no caso supercrítico para uma sequência de expoentes ressonantes. Tal método é uma adaptação do método de perturbação no caso onde não se conhece toda a variedade de soluções do problema não perturbado.

Palavras-chave: Equações elípticas não lineares. Problema de Coron. Expoente supercrítico. Sequência de expoentes ressonantes.

Abstract

In this work, we consider a class of nonlinear supercritical problems. We present a method to determine the solution of Coron's problems in the supercritical case for a sequence of resonant exponents. Such a method is an adaptation of the perturbation method in the case where the whole solutions manifold to the non perturbed problem is not known.

Keywords: Nonlinear elliptical equations. Coron's problem. Supercritical exponent. Sequence of resonant exponents.

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}^N$ denota o espaço Euclidiano N -dimensional com pontos $x = (x_1, \dots, x_N)$.

$\langle x, y \rangle$ denota o produto escalar de $x, y \in \mathbb{R}^N$.

$B_r(y) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - y| < r\}$

$S^N = \{x \in \mathbb{R}^{N+1} \mid |x| = 1\}$ denota a esfera unitária N -dimensional.

∇u denota o gradiente da função de valores reais u .

$\nabla u \cdot \nabla v$ também denotaremos por $\langle \nabla u, \nabla v \rangle$.

Δ denota o Laplaciano: $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Id denota o operador identidade.

$L^p(\mathbb{R}^N)$, $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $L^p(\Omega)$, etc., denotam os usuais espaços de Lebesgue.

$W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, $W^{m,p}(\Omega)$, etc., denotam os usuais espaços de Sobolev.

$2^* = \frac{2N}{N-2}$ se $N \geq 3$ e $2^* = +\infty$ se $N = 1, 2$.

Se $I \in C^k(H, \mathbb{R})$, H espaço de Hilbert, é um funcional, $I'(u)$ denota o gradiente de I em

$u \in H$, definido por meio do teorema da representação de Riesz $(I'(u)|v) = dI(u)[v]$,

$\forall v \in H$, similarmente $(I''(u)v|w) = d^2I(u)[v, w]$, $\forall v, w \in H$.

$u = o(\epsilon^k)$ significa que $u\epsilon^{-k}$ tende a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$.

$u = O(\epsilon^k)$ significa que $|u\epsilon^{-k}| \leq c$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

$o_\epsilon(1)$ denota uma função que depende de ϵ e tende a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	15
1.1 Método de Perturbação na Teoria do Ponto Crítico	15
1.1.1 Um exemplo simples	16
1.1.2 Aplicação a equação de Schrödinger não linear	21
2 O problema de Coron	40
2.1 O operador $\Delta + pw^{p-1}$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)$	41
2.1.1 Solvabilidade de (2.6)	48
2.2 O operador $\Delta + pw^{p-1}$ em $\Omega_\delta = D_\delta \setminus B_1(0)$	52
2.3 Prova do Teorema 2.1	60
Referências	70

Introdução

Um modelo clássico de equação elíptica não linear é o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta u + u^p = 0, & u > 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (0.1)$$

onde Ω é um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^N$ e $p > 1$.

O expoente crítico $p = \frac{N+2}{N-2}$ tem papel determinante na questão da solvabilidade do problema.

Quando $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ a solução pode ser encontrada como um extremo para a melhor constante na imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$. Quando $p \geq \frac{N+2}{N-2}$ este minimizante falha, não existe no geral.

Pohozaev em [25] descobriu que não existe solução se o domínio for estritamente estrelado. Kazdan e Warner em [19] observaram que se Ω for um anel a compacidade se verifica para $p > 1$ dentro da classe das funções radiais e a solução pode ser encontrada variacionalmente, sem restrições em p . Para o caso crítico $p = \frac{N+2}{N-2}$ Brezis e Nirenberg em [10] encontraram uma solução adicionando um termo linear adequado. Coron [12] solucionou o caso crítico usando uma aproximação variacional, se Ω tiver um pequeno buraco. Rey [26] estabeleceu a existência de múltiplas soluções para domínios com vários pequenos buracos. Já em [8], Bahri e Coron, estabeleceram a solvabilidade no caso crítico para domínios com topologias não triviais.

O questionamento feito por Rabinowitz e estabelecido por Brezis em [9], no caso supercrítico, se a topologia não trivial é suficiente para determinar solução foi respondida negativamente por Passaseo [24].

Se p é supercrítico, mas está próximo ao crítico, soluções são encontradas em domínios com pequenos buracos [13, 14, 20].

Em [15], Del Pino e Wei estudaram o problema com o expoente p acima do crítico

em um domínio de Coron $\Omega = D \setminus \overline{B_\delta(0)}$.

Eles mostraram, em um domínio de Coron $\Omega = D \setminus \overline{B_\delta(0)}$, a existência de solução para $\delta > 0$ suficientemente pequeno com p supercrítico e p diferente de uma sequência $\{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de expoentes ressonantes, para todo j , onde

$$\frac{N+2}{N-2} < p_1 < p_2 < \cdots \quad \text{com} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \infty. \quad (0.2)$$

O principal resultado deles é o seguinte Teorema:

Teorema [15]. *Existe uma sequência como em (0.2) tal que se $p > \frac{N+2}{N-2}$ e $p \neq p_j$, então existe $\delta_0 > 0$ tal que para qualquer $\delta < \delta_0$ (0.1) possui pelo menos uma solução.*

No Capítulo 2 exibimos condições suficientes para obter um resultado similar ao teorema acima, quando $p = p_j$, como na sequência em (0.2), para todo $j \geq 3$ ímpar.

A fim de dar veracidade ao método usado para demonstrar o principal resultado do Capítulo 2, citado acima, no Capítulo 1 adaptamos uma das técnicas de perturbação estudadas em [4]. O método que adaptamos foi introduzido pela primeira vez por Ambrosetti e Rabinowitz em [1, 2]. Utilizamos de modo variacional, em um exemplo simples e no problema elíptico

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u + V(x)u = u^p, & \text{em } \mathbb{R}^n \\ u > 0, & \text{em } H^1(\mathbb{R}^n), \end{cases} \quad (0.3)$$

onde $3 < p < 2^* - 1$ e V é um potencial limitado que satisfaz

$$(V_1) \quad V \in C^4(\mathbb{R}^n) \text{ e } \|V\|_{C^4} < \infty;$$

$$(V_2) \quad \lambda_0^2 = \inf_{\mathbb{R}^n} V > 0.$$

Se tivermos que 0 é um ponto crítico não degenerado do potencial V , ou seja, $V''(0)$ não-singular, então sob as condições acima, existe uma solução do problema elíptico que se concentra em torno de 0, quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Este resultado já é conhecido, com hipóteses menos restritivas, ver [3, 5]. Demos uma nova demonstração para este resultado, porém usando um método modificado. Como as soluções deste problema já são conhecidas, foi possível testar o método que adaptamos e assim dar confiabilidade ao aplicá-lo no Capítulo 2.

O método de perturbação adaptado apresentado no Capítulo 1 consiste em encontrar pontos críticos para uma classe de funcionais $I_\epsilon : H \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , $k \geq 2$, definidos

no espaço de Hilbert H , onde não se conhece por completo a variedade de soluções do problema não perturbado.

Em linguagem de operadores, tal método pode ser descrito como segue:

Queremos resolver uma equação do tipo $u = F_\delta(u)$ que é equivalente a resolver (0.1) em $\Omega_\delta = D_\delta \setminus B_1(0)$. Sabemos que o domínio Ω_δ se aproxima de $\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)$ em um certo sentido quando $\delta \rightarrow 0$ e esse problema limite $u = F(u)$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)$ possui uma solução U que já conhecemos. Considerando o problema linearizado associado a U , $\phi = F'(U)[\phi]$ denotemos por K o núcleo deste operador, isto é $K = \text{Ker}(Id - F'(U)) = \text{span}\{Y_i \mid i = 1, \dots, d\}$, que também é conhecido. Vamos procurar soluções u_δ próximas de U no sentido de que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta - P_{\Omega_\delta} U\|_{X(\Omega_\delta)} = 0,$$

onde $X(\Omega_\delta)$ é um espaço de funções escolhido adequadamente e $P_{\Omega_\delta} U$ é uma projeção de U nesse espaço.

Vamos tomar $z_\delta(\xi) = w_\delta + \sum_{i=1}^d \xi_i Y_i^\delta$, onde $w_\delta = P_{\Omega_\delta} U$ e $Y_i^\delta = P_{\Omega_\delta} Y_i$. E assim, vamos procurar soluções de $u = F_\delta(u)$ em torno de $u_\delta(\xi) = z_\delta(\xi) + \phi_\delta(\xi)$, onde $\phi_\delta \in W_\delta$ e W_δ é o complemento ortogonal de $K_\delta = P_{\Omega_\delta} K$, isto é $W_\delta = (\text{span}\{Y_i^\delta\}_i)^\perp$.

Observe que se $u_\delta(\xi) = F_\delta(u_\delta(\xi))$ então $z_\delta(\xi) + \phi_\delta(\xi) = F_\delta(z_\delta(\xi) + \phi_\delta(\xi))$ e expandindo temos

$$z_\delta(\xi) + \phi_\delta(\xi) = F_\delta(z_\delta(\xi)) + F'(z_\delta(\xi))[\phi_\delta(\xi)] + R(\delta, \xi),$$

ou seja,

$$\phi_\delta(\xi) - F'(z_\delta(\xi))[\phi_\delta(\xi)] = F_\delta(z_\delta(\xi)) - z_\delta(\xi) + R(\delta, \xi). \quad (0.4)$$

O problema limite, quando $\delta \rightarrow 0$, pode ser formulado em um espaço $X = X(\mathbb{R}^N \setminus B_1(0))$, o qual podemos decompor como $X = K \oplus W$, sendo $P : X \rightarrow W$ a projeção, temos que $Id - PF'(U)|_W : W \rightarrow W$ é invertível.

Em seguida mostramos que $L_\delta := Id - P_{\Omega_\delta} F'_\delta(z_\delta)|_{W_\delta} : W_\delta \rightarrow W_\delta$ é também invertível com norma do operador inverso L_δ^{-1} uniformemente limitada para $0 < \delta < \delta_0$. E assim, aplicando L_δ^{-1} em (0.4) obtemos

$$\phi_\delta(\xi) = L_\delta^{-1} P_\delta (F_\delta(z_\delta(\xi)) - z_\delta(\xi) + R(\delta, \xi)).$$

Resolvemos este problema de ponto fixo pelo Teorema de Schauder. Assim mostramos que existe $\phi(\delta, \xi)$ solução do problema de ponto fixo acima. Com isso, voltando

ao problema original, na verdade resolvemos

$$P_\delta (\phi(\delta, \xi) - F'(z_\delta(\xi))[\phi(\delta, \xi)]) = P_\delta (F_\delta(z_\delta(\xi)) - z_\delta(\xi) + R(\delta, \xi)),$$

ou seja

$$P_\delta (z_\delta(\xi) + \phi(\delta, \xi) - F_\delta(z_\delta(\xi) + \phi(\delta, \xi))) = 0.$$

Logo,

$$z_\delta(\xi) + \phi(\delta, \xi) - F_\delta(z_\delta(\xi) + \phi(\delta, \xi)) = \sum_{i=1}^d c_i(\delta, \xi) Y_i^\delta(\xi) \Rightarrow u_\delta(\xi) - F_\delta(u_\delta(\xi)) = \sum_{i=1}^d c_i(\delta, \xi) Y_i^\delta(\xi).$$

O último passo é mostrar que, para todo δ suficientemente pequeno, existe uma escolha adequada de $\xi = \xi_\delta$ de modo que $c_i(\delta, \xi_\delta) = 0$ para todo $i = 1, \dots, d$ e assim teremos o problema resolvido.

Referências

- [1] Ambrosetti A.; Badiale M. *Homoclinics: Poincaré-Melnikov type results via a variational approach*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lin., (1998) 15:233-252.
- [2] Ambrosetti A.; Badiale M. *Variational perturbative methods and bifurcation of bound states form the essential spectrum*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, (1998) 128:1131-1161.
- [3] Ambrosetti A.; Badiale M.; Cingolani S. *Semiclassical states of nonlinear Schrödinger equations*. Arch. Rational Mech. Anal., 140 (1997) 285-300.
- [4] Ambrosetti A.; Malchiodi A. *Perturbation Methods and Semilinear Elliptic Problems on $\mathbb{R}^n$* . Birkhäuser, Progress in Mathematics, vol. 240, 2006.
- [5] Ambrosetti A.; Malchiodi A.; Secchi S. *Multiplicity results for some nonlinear Schrödinger equations with potentials*. Arch. Ration. Mech. Anal. 159 (2001) 253-271.
- [6] Assis M. *Dom Casmurro*. H. Garnier Livreiro-Editor, Rio de Janeiro 1899.
- [7] Atkinson K.; Han W. *Spherical Harmonics and Approximations on the Unit Sphere: An Introduction*. Lecture Notes in Mathematics 2044, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [8] Bahri A.; Coron J.M. *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: the effect of the topology of the domain*. Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988) 255-294.
- [9] Brezis H. *Elliptic equations with limiting Sobolev exponent - the impact of topology*. in: Proceedings 50th Anniv. Courant Inst., Comm. Pure Appl. Math. 39 (1986).
- [10] Brezis H.; Nirenberg L. *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*. Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983) 437-447.

-
- [11] Chang K.C. *Infinite-dimensional Morse theory and multiple solution problems*. PNLDE 6, Birkhäuser Boston, 1993.
 - [12] Coron J.M. *Topologie et cas limite des injections de Sobolev*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 299 (1984) 209-212.
 - [13] Del Pino M.; Felmer P.; Musso M. *Two-bubble solutions in the super-critical Bahri-Coron's problem*. Calc. Var. Partial Differential Equations 16 (2) (2003) 113-145.
 - [14] Del Pino M.; Felmer P.; Musso M. *Multi-peak solutions for super-critical elliptic problems in domains with small holes*. J. Differential Equations 182 (2) (2002) 511-540.
 - [15] Del Pino M.; Wei J. *Supercritical elliptic problems in domains with small holes*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lin., 24 (2007) 507-520.
 - [16] Gilbarg D.; Trudinger N. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 1998.
 - [17] Gladiali F.; Grossi M. *Supercritical elliptic problem with nonautonomous nonlinearities*. J. Differential Equations, 253 (9) (2012) 2616-2645.
 - [18] Gladiali F.; Grossi M.; Neves S. *Nonradial solution for the Hénon equation in $\mathbb{R}^N$* . Advances in Mathematics, 249 (2013), 1-36.
 - [19] Kazdan J.; Warner F. *Remarks on some quasilinear elliptic equations*. Comm. Pure Appl. Math. 28 (5) (1975) 567-597.
 - [20] Khenissy S.; Rey O. *A criterion for existence of solutions to the supercritical Bahri-Coron's problem*. Houston J. Math. 30 (2) (2004) 587-613.
 - [21] Malchiodi A. *Concentration of solutions for some singularly perturbed Neumann problems*. Geometric Analysis and PDEs, Lecture Notes in Mathematics vol. 1977, CIME 2009.
 - [22] Neves S. *Sobre o Número de Soluções de um Problema de Neumann com Perturbação Singular*, tese de doutorado, UNICAMP, Campinas, 2012.

-
- [23] Ni W. M. *A Nonlinear Dirichlet Problem on the Unit Ball and Its Applications*. Indiana University Mathematics Journal, Vol.31, n°6 (1982).
- [24] Passaseo D. *Nonexistence results for elliptic problems with supercritical nonlinearity in nontrivial domains*. J. Funct. Anal. 114 (1) (1993) 97-105.
- [25] Pohozaev S. *Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$* . Soviet Math. Dokl. 6 (1965) 1408-1411.
- [26] Rey O. *On a variational problem with lack of compactness: the effect of small holes in the domain*. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 308 (12) (1989) 349-352.