UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho" - Campus de São José do Rio Preto

VICTORIA RATZAT DE OLIVEIRA

EXPERIMENTAÇÃO-COM-GEOGEBRA NA INVESTIGAÇÃO DE NÚMEROS FIGURADOS

São José do Rio Preto
2026

VICTORIA RATZAT DE OLIVEIRA

EXPERIMENTAÇÃO-COM-GEOGEBRA NA INVESTIGAÇÃO DE NÚMEROS FIGURADOS

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto, para obtenção do título de Mestra em Ensino e Processos Formativos.

Área de Concentração: Ciências e Matemática

Orientador(a): Prof. Dr. Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

São José do Rio Preto

2026

O48e

Oliveira, Victoria Ratzat
Experimentação-com-GeoGebra na investigação de números figurados / Victoria Ratzat Oliveira. -- São José do Rio Preto, 2026
132 f. : tabs., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto
Orientador: Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

1. Números figurados. 2. Experimentação. 3. GeoGebra. 4. Investigação matemática. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Dados fornecidos pelo autor(a).

VICTORIA RATZAT DE OLIVEIRA

EXPERIMENTAÇÃO-COM-GEOGEBRA NA INVESTIGAÇÃO DE NÚMEROS FIGURADOS

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto, para obtenção do título de Mestra em Ensino e Processos Formativos.

Área de Concentração: Ciências e Matemática

Data da defesa: 04/08/2026

Banca Examinadora:

_____

Prof. Dr. Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva
UNESP - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Campus de São José do Rio Preto

_____

Prof. Dra. Adriana de Bortoli
FATEC Lins - Centro Paula Souza

_____

Prof. Dr. José Fernandes Torres da Cunha
UNEMAT – Universidade do Estado de Mato Grosso

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por ter me sustentado em todos os momentos desta caminhada, abençoando meus passos e concedendo-me paciência para enfrentar os desafios. À Nossa Senhora Aparecida, por me cobrir com seu manto sagrado, protegendo-me e guiando-me com ternura mesmo nos dias mais difíceis.

Aos meus pais, Cleonice e Edinelson, minha eterna gratidão por estarem sempre ao meu lado e por não medirem esforços para que este sonho se tornasse realidade. Obrigada por acreditarem em mim, por me impulsionarem a seguir em frente e por me ensinarem o verdadeiro valor da dedicação e do amor incondicional.

Ao meu irmão Afonso e aos meus sobrinhos Helena e Miguel, que, mesmo tão pequenos, foram grandes inspirações para que eu continuasse a trilhar este caminho. Ser espelho para as crianças é uma responsabilidade imensa, mas também uma das maiores motivações para perseverar.

Aos meus amigos, pela paciência, pelas palavras de incentivo e pelo apoio constante. Agradeço por celebrarem cada conquista e tornarem o percurso mais leve e significativo.

Aos meus avós Ernesto, Elena e Jordão (in memoriam), agradeço pelas recordações que guardo com ternura, pelos valores e exemplos que permanecem vivos em minha memória. À minha avó Valtineza, pelo carinho, sabedoria e presença constante, que continuam a iluminar meu caminho.

Ao meu companheiro Leandro, pelo carinho, paciência e pelo apoio constante em todos os momentos. Sua presença foi essencial para que eu seguisse firme.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ricardo Scucuglia, expresso sincera gratidão pela escuta sensível, pela generosidade e por contribuir de forma significativa para o meu amadurecimento acadêmico.

Agradeço aos membros da Comissão Examinadora de Exame Geral de Qualificação e Defesa, Inocêncio Fernandes Balieiro Filho e Adriana de Bortoli, por aceitarem o convite e contribuírem para o enriquecimento desta pesquisa de mestrado.

Ao corpo docente e aos funcionários da UNESP, agradeço pelo acolhimento, pela dedicação e por marcarem meu percurso com tantos aprendizados.

Agradeço ao GPIMEM pelo acolhimento, pelas discussões e pelos aprendizados que contribuíram significativamente para a construção deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Com resiliência, cheguei até aqui, mesmo quando os caminhos não foram fáceis, cada obstáculo se transformou em aprendizado e me aproximou da realização deste sonho.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para que esta caminhada se tornasse possível. Cada gesto e palavra de incentivo deixaram marcas profundas que levarei comigo com gratidão.

“A matemática, senhora que ensina o homem a ser simples
e modesto, é a base de todas as ciências e de todas as artes.”
Malba Tahan - O Homem que Calculava

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo compreender como licenciandos em Matemática exploram relações, propriedades e generalizações sobre números figurados em um ambiente de experimentação-com-*GeoGebra*. A pesquisa adota uma abordagem metodológica de natureza qualitativa, tendo como referência a investigação matemática, por privilegiar a exploração de ideias, a formulação de conjecturas e a elaboração de generalizações. O estudo foi desenvolvido com duas duplas de licenciandos em Matemática da UNESP, câmpus de São José do Rio Preto, em dois encontros de duas horas cada, nos quais os participantes exploraram números figurados com o auxílio do *GeoGebra*. Inicialmente, foram explorados os números figurados planos, como os triangulares, quadrados e retangulares, e, posteriormente, números figurados espaciais, com destaque para o número piramidal triangular, o número piramidal quadrado e o cubo. As atividades possibilitaram a manipulação de representações dinâmicas, a observação de regularidades e a análise de propriedades associadas às sequências estudadas. O projeto foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa, sob o CAAE nº 88026225.5.0000.5466. As análises evidenciaram que os conhecimentos produzidos na exploração dos números figurados planos foram retomados e mobilizados na interpretação e justificação de propriedades dos números figurados espaciais, possibilitando o estabelecimento de conexões entre diferentes sequências e a elaboração de justificativas matemáticas por distintos caminhos. Esse processo foi constituído nas interações entre os licenciandos e o *GeoGebra*, cujos *feedbacks* favoreceram a elaboração e o refinamento de conjecturas, generalizações e justificativas, contribuindo para a revisão de interpretações e a ampliação das compreensões sobre números figurados. A pesquisa evidencia o potencial de ambientes de geometria dinâmica e de atividades investigativas para favorecer a produção de conhecimentos matemáticos na formação inicial de professores.

Palavras-chave: números figurados; experimentação; *GeoGebra*; investigação matemática.

ABSTRACT

This research aims to understand how undergraduate Mathematics teacher education students explore relationships, properties, and generalizations concerning figurate numbers in a GeoGebra-based experimentation environment. The research adopts a qualitative methodological approach, grounded in mathematical investigation, as it emphasizes the exploration of ideas, the formulation of conjectures, and the development of generalizations. The study was conducted with two pairs of undergraduate Mathematics students from UNESP, São José do Rio Preto campus, in two two-hour sessions, during which the participants explored figurate numbers with the support of GeoGebra. Initially, plane figurate numbers, such as triangular, square, and rectangular numbers, were explored, followed by spatial figurate numbers, with emphasis on triangular pyramidal numbers, square pyramidal numbers, and cubic numbers. The activities enabled the manipulation of dynamic representations, the observation of regularities, and the analysis of properties associated with the sequences under study. The research project was approved by the Research Ethics Committee under CAAE No. 88026225.5.0000.5466. The analyses showed that the knowledge produced through the exploration of plane figurate numbers was revisited and mobilized in the interpretation and justification of properties of spatial figurate numbers, enabling connections to be established between different sequences and mathematical justifications to be developed through distinct approaches. This process was constituted through interactions between the undergraduate students and GeoGebra, whose feedback supported the formulation and refinement of conjectures, generalizations, and justifications, contributing to the revision of interpretations and the expansion of understandings of figurate numbers. The research highlights the potential of dynamic geometry environments and investigative activities to foster the production of mathematical knowledge in initial teacher education.

Keywords: figurate numbers; experimentation; GeoGebra; mathematical investigation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – *Tetracty* 22

Figura 2 – Números figurados triangulares - T_n 24

Figura 3 – Números figurados quadrados - S_n 24

Figura 4 – Formação de números quadrados $\left(S_n\right)$ a partir da soma de dois números triangulares $\left(T_n\right)$ consecutivos 25

Figura 5 – Números figurados retangulares - R_n 27

Figura 6 – Formação de números retangulares (R_n) como o dobro do número triangular (T_n) correspondente 27

Figura 7 – Gnomos de números retangulares 29

Figura 8 – Gnomos de números quadrados 29

Figura 9 – Representação geométrica dos números figurados pentagonais, hexagonais e heptagonais 29

Figura 10 – Números figurados quadrados e triangulares centrados 30

Figura 11 – Números piramidais triangulares - P_n 31

Figura 12 – Números piramidais quadrados - Q_n 31

Figura 13 – Números figurados cúbicos - C_n 32

Figura 14 –Representação geométrica da relação entre C_n e T_n 33

Figura 15 – Aba da calculadora gráfica do *GeoGebra* 45

Figura 16 – Variação de parâmetros por meio do controle deslizante no *GeoGebra* 46

Figura 17 – Aba da calculadora 3D do *GeoGebra* 47

Figura 18 – Cronograma da produção dos dados 59

Figura 19 – Participantes nos encontros da produção dos dados 60

Figura 20 – Licenciandos na sala em que ocorreu a produção dos dados 61

Figura 21 – Aplicativo no *GeoGebra* para números figurados planos 64

Figura 22 – Primeira atividade proposta 65

Figura 23 – Segunda atividade proposta 66

Figura 24 – Organização dos temas da análise dos dados 69

Figura 25 – Variação de ordem n em números figurados triangulares no *GeoGebra* 71

Figura 26 – Registro da interação dos participantes com o *GeoGebra* na exploração de números figurados triangulares e retangulares 75

Figura 27 – Interações entre sujeitos, *GeoGebra* e representações matemáticas 77

Figura 28 – Tabela preenchida pela dupla 1 (Maria e Miguel) - Números Figurados Planos 82

Figura 29 – Tabela preenchida pela dupla 2 (Davi e Vitor) - Números Figurados Planos 83

Figura 30 – Variação da ordem nn em números figurados piramidais triangulares no *GeoGebra* 87

Figura 31 – Representação do número piramidal triangular como composição dos números triangulares 90

Figura 32 – Tabela preenchida pela dupla 1 (Maria e Miguel) - Números Figurados Espaciais 96

Figura 33 – Tabela preenchida pela dupla 2 (Vitor e Davi) - Números Figurados Espaciais 96

Figura 34 – Exploração da Dupla 1 no *GeoGebra* 98

Figura 35 – Exploração da Dupla 2 no *GeoGebra* 98

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Etapas na realização de uma investigação 56

Quadro 2 – Informações dos participantes 63

Quadro 3 – Etapas do modelo analítico de Powell, Francisco e Maher 67

Quadro 4 – Expressões e relações algébricas identificadas pelos grupos para os números figurados planos 85

Quadro 5 – Expressões e relações algébricas produzidas pelos grupos para os números figurados espaciais/planos 101

LISTA DE SIGLAS

CAAE	Certificado de Apresentação de Apreciação Ética
CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
GD	Geometria Dinâmica
GPIMEM	Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática
IBILCE	Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
PA	Progressão Aritmética
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
UNESP	Universidade Estadual Paulista

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....15
1.1 TRAJETÓRIA DA PESQUISADORA.....15
1.2 OBJETIVO E RELEVÂNCIA DA PESQUISA.....17
1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO.....18
2. QUADRO TEÓRICO.....20
2.1 NÚMEROS FIGURADOS.....20
2.2 SERES-HUMANOS-COM-MÍDIAS.....37
2.3 EXPERIMENTAÇÃO MATEMÁTICA.....40
2.4 EXPERIMENTAÇÃO-COM-GEOGEBRA.....44
3. METODOLOGIA DA PESQUISA.....52
3.1 ABORDAGEM METODOLÓGICA.....52
3.1.1 Pesquisa qualitativa.....52
3.1.2 Experimento de ensino de Matemática.....53
3.1.3 Investigação matemática.....55
3.1.4 Articulação entre o experimento de ensino e a investigação matemática.....58
3.2 PRODUÇÃO DE DADOS.....59
3.3 CENÁRIO DA PRODUÇÃO DE DADOS.....60
3.4 PARTICIPANTES DA PESQUISA.....62
3.5 ATIVIDADES PARA A PRODUÇÃO DE DADOS.....63
3.6 ANÁLISE DE DADOS DA PESQUISA.....66
4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS.....69
4.1 EXPERIMENTAÇÃO-COM-GEOGEBRA SOBRE NÚMEROS FIGURADOS PLANOS.....70
4.2 EXPERIMENTAÇÃO-COM-GEOGEBRA SOBRE NÚMEROS FIGURADOS ESPACIAIS.....86
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....104
REFERÊNCIAS.....110
APÊNDICE A - MATERIAL BASE PARA A OFICINA "EXPLORANDO OS NÚMEROS FIGURADOS.....115
APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO.....119
APÊNDICE C - DESCRIÇÃO DOS PROCEDIMENTOS DE CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS FIGURADOS NO GEOGEBRA.....122
APÊNDICE D - DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS DOS NÚMEROS FIGURADOS PLANOS.....125
APÊNDICE E - DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS DOS NÚMEROS FIGURADOS ESPACIAIS.....129

1. INTRODUÇÃO

No presente capítulo, são apresentados o percurso da pesquisadora, o objetivo, a relevância do estudo, considerações iniciais sobre a literatura relacionada e a organização geral da dissertação, permitindo ao leitor compreender a sequência e os aspectos que orientam o desenvolvimento do estudo.

1.1 TRAJETÓRIA DA PESQUISADORA

Minha trajetória acadêmica teve início em 2017, quando ingressei no curso de Bacharelado em Matemática Aplicada da UNESP de São José do Rio Preto, logo após concluir o Ensino Médio.

O ingresso na UNESP representou uma oportunidade significativa de crescimento acadêmico. Ao longo do Bacharelado em Matemática Aplicada, que concluí no início de 2021, cursei algumas disciplinas optativas da grade da Licenciatura em Matemática, o que me possibilitou conhecer diversos professores que despertaram em mim o desejo de atuar como licenciada. Esses docentes tiveram papel significativo em minha formação, inspirando-me a considerar diferentes abordagens para ensinar Matemática com um olhar atento às diversas maneiras de aprender. Como ressalta Paulo Freire (2011, p. 33), "[...] ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção".

Em 2021, solicitei o reingresso e ingressei no curso de Licenciatura em Matemática, também no IBILCE. O início dessa graduação ocorreu em meio a incertezas e desafios trazidos pela pandemia da COVID-19, que marcaram aquele período. Durante o contato com a prática docente, percebi que, embora a Matemática seja frequentemente vista como uma disciplina difícil, muitos alunos demonstram interesse genuíno e admiração por ela. A forma como as aulas são conduzidas influencia diretamente o entendimento e a motivação dos estudantes: aulas mais atrativas, com dinâmicas diversificadas, geram maior engajamento e aprendizagem significativa. Como destacam Rossetto e Balieiro Filho (2021, p. 431), "quando a Matemática é ensinada somente a partir da memorização de conceitos e procedimentos, por diversas ocasiões, ela se torna incompreensível e abstrata demais para os alunos".

Durante a graduação em Licenciatura, realizei o estágio obrigatório em uma escola pública de São José do Rio Preto, em uma turma dos anos finais do Ensino Fundamental, supervisionado pela docente responsável. Nesse contexto, observei, em conversas com a

docente, que muitos recursos digitais disponíveis não eram utilizados, em virtude da falta de conhecimento ou das limitações de tempo para adequar os conteúdos às aulas. Essa experiência despertou em mim a motivação para desenvolver a pesquisa apresentada neste trabalho, voltada à formação de professores e à utilização de tecnologias digitais como suporte para o ensino da Matemática.

Após a conclusão da licenciatura, busquei experiência direta em sala de aula e ingressei em uma escola particular da mesma cidade (São José do Rio Preto, SP), contratada como monitora. Nessa função, realizei diversas tarefas: acompanhava as aulas de alunos do 5º ano, conduzia sessões de estudo autônomo para diferentes séries, do 5º ano do Ensino Fundamental à 3ª série do Ensino Médio, presenciava atividades extracurriculares realizadas pelos estudantes, como aulas de circo, teatro e música, e desempenhava atividades de reforço escolar.

No primeiro semestre de 2023, antes mesmo de ingressar como aluna regular no Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos, cursei minha primeira disciplina como aluna especial, vinculada à linha de Educação Matemática, do próprio programa, intitulada Resolução de Problemas. Já no primeiro semestre de 2024, cursei a disciplina Epistemologia e Ontologia da Matemática, também pertencente à mesma linha de pesquisa. Essas experiências foram decisivas para promover minha aproximação com o campo da pesquisa e, sobretudo, para a definição dos caminhos que desejava trilhar na área. A participação ativa nas aulas, nas leituras e nas discussões, bem como o envolvimento nas avaliações, proporcionaram um contato aprofundado com perspectivas teóricas que ampliaram minha compreensão sobre o ensino de Matemática e sobre os modos pelos quais o conhecimento matemático é produzido e atribuído de significado.

No segundo semestre de 2024, ingressei no Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos, na linha de pesquisa em Educação Matemática, no qual desenvolvo minha investigação, motivada pelas inquietações surgidas durante o estágio. Nesse percurso, a definição do objeto de estudo foi sendo delineada, conduzindo à escolha dos números figurados. Trata-se de um conteúdo que apresenta forte potencial para o desenvolvimento de abordagens baseadas em experimentação e investigação matemática, especialmente quando articulado ao uso de *softwares* de geometria dinâmica.

Além disso, os números figurados ocupam um lugar relevante na história da matemática, embora, no contexto da formação inicial vivenciada, não tenham sido abordados de maneira sistemática, aparecendo de forma pontual e, em geral, vinculados à disciplina de

História da Matemática, a qual, em muitos currículos, inclusive naquele em que me inseri, deixou de ser componente obrigatório. Essa lacuna não é um dado isolado da minha trajetória: D'Ambrosio (2013) já apontava a dificuldade de consolidar a História da Matemática como componente formativo estruturado nos cursos de licenciatura, defendendo que é essencial que "os futuros professores tenham uma ideia do que seja um historiador" (D'Ambrosio, 2013, p. 16).

O autor, retomando Freudenthal, também alerta que tratar fatos históricos de forma isolada e descontextualizada do momento sociocultural tende a distorcer a compreensão que se constrói sobre eles. Essa observação reforça que o problema não está apenas na ausência da disciplina nos currículos, mas na superficialidade com que ela costuma ser tratada quando presente, sem uma formação que aproxime o futuro professor do próprio ofício de historiar e sem uma abordagem contextualizada dos fatos históricos. Conteúdos como os números figurados, situados justamente na fronteira entre história e geometria, tendem a aparecer sem a profundidade necessária para sustentar seu uso didático. Esse cenário evidencia a pertinência de revisitá-los sob outras perspectivas, explorando suas possibilidades didáticas no ensino de Matemática.

Nesse período, integrei também o Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM), que se dedica a estudar questões relacionadas às tecnologias na Educação Matemática e às transformações decorrentes da inserção das Tecnologias Digitais no ensino. As reflexões, discussões e orientações proporcionadas pelo grupo contribuíram de maneira significativa para fundamentar e aprofundar o desenvolvimento do meu trabalho, ampliando minha formação como pesquisadora.

1.2 OBJETIVO E RELEVÂNCIA DA PESQUISA

Esta pesquisa tem como foco a investigação de números figurados em um ambiente mediado por tecnologias digitais. Nesse sentido, a seguinte questão orienta o desenvolvimento da pesquisa: Como licenciandos em Matemática produzem conhecimentos sobre números figurados em um ambiente de experimentação-com-*GeoGebra*?

A partir dessa questão, o objetivo geral consiste em compreender como licenciandos em Matemática exploram relações, propriedades e generalizações sobre números figurados em um ambiente de experimentação-com-*GeoGebra*. Como desdobramentos desse objetivo, têm-se como objetivos específicos: analisar a exploração de regularidades, compreender a

produção de conjecturas e examinar o papel do *GeoGebra* na produção do conhecimento sobre números figurados.

No que se refere à relevância, a pesquisa se justifica pelo potencial dos números figurados que constituem sequências numéricas que se distinguem por admitirem representações na forma de configurações de pontos organizadas em figuras geométricas. Dessa forma, além de suas propriedades algébricas, essas sequências também podem ser exploradas por meio de representações geométricas, ampliando as possibilidades de investigação matemática (Barros, 2021). Quando associados ao uso de *softwares* de geometria dinâmica, como o *GeoGebra,* esses números possibilitam a exploração de padrões, regularidades e relações de forma visual e interativa, ampliando as possibilidades da investigação matemática (Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2015, p. 24). Assim, essa abordagem favorece a compreensão de conceitos matemáticos relacionados a padrões, sequências e à relação entre representações geométricas e algébricas e contribui para o desenvolvimento de competências relevantes para a prática docente, como a condução de atividades investigativas e a integração de tecnologias digitais ao ensino de Matemática. Além disso, evidencia como a articulação entre investigação matemática e tecnologias digitais potencializa o ensino, ampliando as possibilidades de exploração, representação e produção de significados matemáticos (Borba; Villarreal, 2005).

Nesse sentido, as evidências de aprendizagem são consideradas a partir das produções e interações dos participantes ao longo das atividades, incluindo as construções realizadas no *GeoGebra*, as estratégias adotadas e os registros das discussões e explicações apresentadas durante o processo investigativo.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A dissertação está organizada em seções que se articulam de modo a apresentar, de forma integrada, o percurso teórico, metodológico e analítico da pesquisa. O texto inicia com uma abordagem sobre os números figurados, tratando de seus aspectos históricos, suas diferentes formas de representação, propriedades e expressões. Na sequência, discute-se o construto de Seres-humanos-com-mídias, destacando suas implicações para a compreensão das relações estabelecidas entre sujeitos, tecnologias e processos de aprendizagem. Posteriormente, a experimentação é abordada a partir do uso do *GeoGebra*, considerando suas potencialidades para a investigação matemática.

Em seguida, apresenta-se a metodologia da pesquisa, na qual são descritos os procedimentos adotados, com ênfase na abordagem qualitativa que orienta o trabalho. Nessa parte, são discutidos o experimento de ensino e o processo de produção de dados, bem como o cenário em que a pesquisa foi desenvolvida, os participantes envolvidos, as atividades propostas e os registros das sessões de produção de dados.

Na sequência, desenvolve-se a análise dos dados, organizada em dois eixos articulados: experimentação-com-*GeoGebra* sobre números figurados planos e experimentação-com-*GeoGebra* sobre números figurados espaciais. Esses eixos possibilitam evidenciar diferentes aspectos dos processos de exploração, formulação e validação de ideias matemáticas pelos participantes, à luz do referencial teórico adotado.

Por fim, são apresentadas as considerações finais da pesquisa, nas quais se retomam os principais resultados e reflexões produzidas ao longo do estudo, seguidas das referências e dos apêndices, nos quais se incluem as atividades propostas para a produção de dados, o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), as descrições detalhadas das construções dos aplicativos no *GeoGebra* relativos aos números figurados planos e espaciais, bem como as demonstrações das expressões matemáticas identificadas pelos licenciandos ao longo do processo investigativo.

2. QUADRO TEÓRICO

Este capítulo apresenta o referencial teórico que sustenta a pesquisa, articulado à revisão de literatura pertinente aos diferentes aspectos que compõem a investigação. São abordados conceitos relacionados aos números figurados, ao construto dos seres-humanos-com-mídias e às possibilidades da experimentação no ensino de Matemática, com ênfase nas práticas mediadas pelo *GeoGebra*. Ao longo do capítulo, a revisão de literatura é mobilizada em diálogo com os referenciais teóricos, contribuindo para fundamentar as discussões desenvolvidas e estabelecer relações com estudos anteriores.

2.1 NÚMEROS FIGURADOS

Com origens que remontam à antiguidade, os números figurados foram compreendidos como representações numéricas associadas a padrões geométricos, nas quais a quantidade de pontos obedece a determinadas formas: triângulo, quadrado, pentágono, cubo, entre outras (Monteiro; Gabrielli, 2009). Esses números "representam um elo entre a geometria e a aritmética" (Eves, 2011, p. 100).

> Estes números formam sequências numéricas e trazem consigo uma peculiaridade entre as demais sequências conhecidas e mais estudadas, pois estes podem ser escritos como pontos que formam figuras geométricas, ou seja, além de descritas como estruturas algébricas, também podem ser representadas por figuras, ampliando ainda mais as possibilidades de estudo. (Barros, 2021, p. 23)

Antes da consolidação de sistemas numéricos escritos, como o ático, que ainda era utilizado na época de Pitágoras, acredita-se que a contagem era realizada com o auxílio de seixos organizados em colunas, como no ábaco. Essa prática pode ter influenciado diretamente o surgimento da representação numérica por meio de pontos, característica marcante dos números figurados (Almeida, 2003, p. 78).

Historicamente, a figura como um numeral teve origem na escola de Pitágoras. Apesar dos impasses e divergências presentes na história da matemática, há indícios de um entendimento comum de que os números figurados surgiram entre os membros mais antigos da escola pitagórica. Ainda que muitos registros tenham se perdido ao longo dos anos, é possível reunir algumas informações sobre Pitágoras. Ao que parece, Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C., na ilha de Samos, localizada no mar Egeu (Eves, 2011), sendo apresentado como alguém que atuava como professor e místico (Boyer; Merzbach, 2018).

Após esse período, há indicações de que Pitágoras tenha vivido por algum tempo no Egito e possivelmente realizado outras viagens. Ao retornar a Samos, encontrou o poder sob o domínio de Polícrates e a região da Jônia sob controle persa, o que o levou a emigrar para Crotona, no sul da Itália. Nesse local, fundou a escola pitagórica, caracterizada não apenas como um espaço de estudos em filosofia, matemática e ciências naturais, mas também como uma comunidade organizada em torno de práticas e rituais próprios (Eves, 2011).

A escola por ele fundada apresentava características bastante específicas, não apenas pelo seu caráter reservado, mas também pela forma como se organizava. Trata-se de um grupo estruturado como uma comunidade, em que o conhecimento não era individualizado, mas compartilhado entre seus membros, o que dificulta a atribuição de descobertas a um único indivíduo, embora fosse comum atribuí-las ao mestre (Boyer; Merzbach, 2018).

No que se refere ao conhecimento matemático desenvolvido no âmbito da tradição pitagórica, a matemática era inicialmente organizada em duas partes principais: o estudo dos números, subdividido em aritmética e música; e o estudo das grandezas, subdividido em geometria e astronomia (Roque, 2012). A autora ainda ressalta que "o tratamento dos números (*arithmos*) é separado do tratamento das grandezas (*mégéthos*)". Os números eram compreendidos como conjuntos de unidades indivisíveis, associados a quantidades discretas. Por outro lado, as grandezas geométricas, como comprimentos e áreas, eram entendidas como entidades passíveis de divisão em partes da mesma natureza, o que evidencia seu caráter contínuo.

A aritmética atribuída a Pitágoras, conhecida como "aritmética de pontinhos", refere-se a uma forma de compreender os números a partir de representações concretas. Para os pitagóricos, os números constituíam a base da explicação do cosmos, pois todas as coisas podiam ser delimitadas, distinguidas e, assim, contadas. Nessa perspectiva, entendia-se que as coisas consistiam de números. Abbagnano (1994, p. 22, tradução nossa) afirma que "A doutrina fundamental dos pitagóricos é que a substância das coisas é o número", já que suas propriedades estavam relacionadas à possibilidade de organização e distinção.

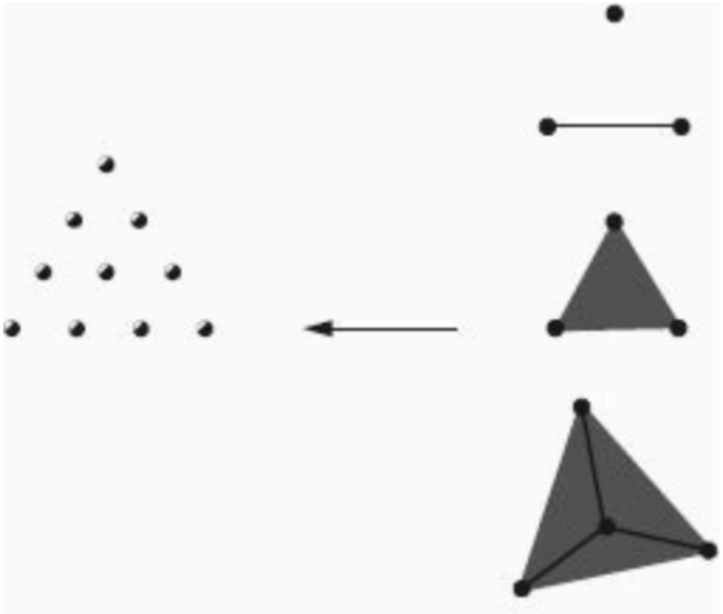
Além disso, a explicação do mundo estava vinculada à relação entre o par e o ímpar, associados ao ilimitado e ao limitado, respectivamente, "o limite, que torna a medição possível, e o ilimitado, que a exclui." (Abbagnano, 1994, p. 24, tradução nossa). A união desses princípios daria origem ao Um, a partir do qual todos os demais números se desenvolveram, estruturando diferentes ordens e relações numéricas. Nesse contexto, os números não eram entendidos como algo abstrato, mas relacionados a formas concretas de

representação, podendo ser apresentados, por exemplo, por meio da organização de pontos. (Roque, 2012).

> Muitas civilizações primitivas partilharam de vários aspectos da numerologia, mas os pitagóricos levaram a extremos a adoração dos números, baseando neles sua filosofia e modo de viver. O número um, diziam eles, é o gerador dos números e o número da razão; o dois é o primeiro número par, ou feminino, o número da opinião; três é o primeiro número masculino verdadeiro, o da harmonia, sendo composto de unidade e diversidade; quatro é o número da justiça ou retribuição, indicando o ajuste de contas; cinco é o número do casamento, união dos primeiros números feminino e masculino verdadeiros; e seis é o número da criação. Cada número, por sua vez, tinha seus atributos peculiares. O mais sagrado era o dez ou o tetractys, pois representava o número do universo, inclusive a soma de todas as possíveis dimensões geométricas. (Boyer; Merzbach, 2018, p. 58)

Segundo essa perspectiva, os pitagóricos teriam associado entidades abstratas ao *tetractys*, como o ponto, a reta, o triângulo e o tetraedro, associados, respectivamente, aos números um, dois, três e quatro, conforme ilustrado na Figura 1. A soma desses valores resulta no número dez, ao qual os pitagóricos atribuíam um papel central na organização do mundo (Boyer; Merzbach, 2018).

Figura 1 – *Tetracty*



Fonte: Roque (2012, n.p.)

A Figura 1 evidencia visualmente essa correspondência entre número e forma, reforçando a ideia pitagórica de que a estrutura numérica fundamenta a organização do próprio cosmos.

Na filosofia pitagórica, a formação do universo é concebida em torno de um fogo central. A constituição do cosmos é entendida como um processo contínuo de organização, no qual aquilo que não possui forma definida vai sendo progressivamente estruturado. Assim, a ordem surge desse processo, e a perfeição não é um ponto de partida, mas o resultado dessa organização, conforme indica Aristóteles. Além disso, o universo é concebido como uma estrutura esférica organizada em torno desse centro, cuja disposição dos corpos celestes se associa à ideia de harmonia e completude, vinculada ao número dez, considerado símbolo de perfeição. O movimento desses corpos estaria relacionado à chamada "música das esferas", resultante da correspondência entre movimento e proporção, ainda que imperceptível aos sentidos humanos. Essa compreensão do cosmos evidencia o papel central atribuído ao número na explicação da realidade, o que se reflete diretamente na forma como os pitagóricos desenvolveram sua matemática (Abbagnano, 1994). Nesse sentido, a matemática pitagórica apresentava um caráter fundamentalmente aritmético, o que torna incerta a real importância atribuída à geometria no interior da escola pitagórica.

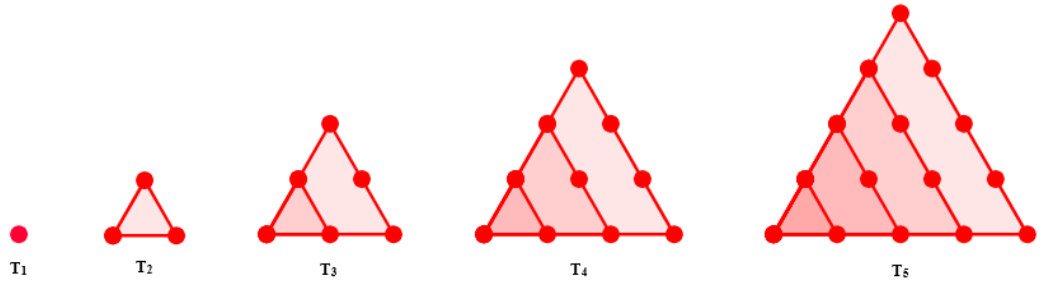
Para a organização das expressões matemáticas ao longo deste trabalho, adotam-se as seguintes notações para os números figurados: T_n para os números triangulares, S_n para os números quadrados, R_n para os números retangulares, P_n para os números piramidais triangulares, Q_n para os números piramidais quadrados, C_n para os números cúbicos e $G_m(n)$ para o n-ésimo número figurado de m lados.

Os números triangulares são considerados os primeiros entre os números planos, servindo como base para a construção das demais configurações de figuras bidimensionais (Almeida, 2003), "construída de maneira que se visualizasse um triângulo nos seixos ou nos pontos desenhados" (Dutra, 2020, p. 46).

A disposição dos pontos (seixos) em arranjos triangulares revela um padrão numérico crescente, que define a sequência dos números triangulares. Além dessa representação geométrica, esses números triangulares $(1, 3, 6, 10, 15, \ldots)$ possuem uma formulação algébrica precisa: cada n-ésimo número triangular, indicado por T_n, corresponde à soma dos n primeiros números naturais (começando em 1), sendo dado pela fórmula:

$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, com $n \in \mathbb{N}$, para $n \geq 1$ (Baron, 1985; Deza; Deza, 2012), como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Números figurados triangulares - T_n

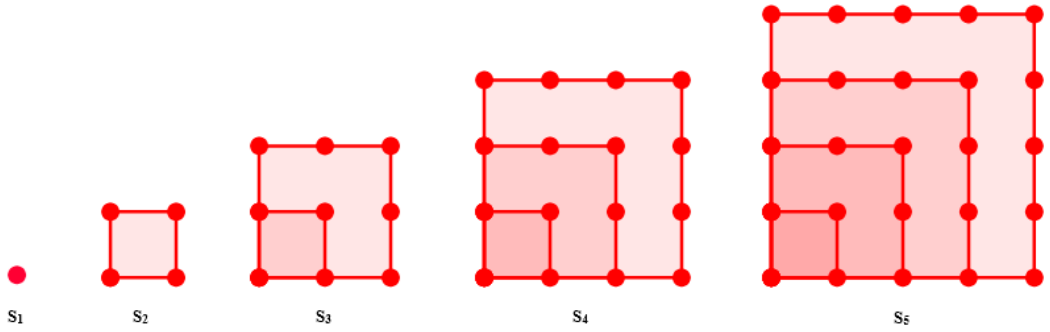


Fonte: Elaboração própria (2025)

A Figura 2 ilustra os cinco primeiros números triangulares $(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5)$, evidenciando como cada termo é obtido pelo acréscimo de uma nova fileira de pontos à figura anterior.

No caso dos números quadrados, a disposição dos pontos (seixos) em arranjos quadrangulares revela um padrão numérico crescente que define a sequência dos números quadrangulares. Além dessa representação geométrica, esses números quadrados (1, 4, 9, 16, 25, ...) possuem uma formulação algébrica precisa: cada n-ésimo número quadrado, indicado por S_n, corresponde à soma dos n primeiros números naturais ímpares (começando em 1), sendo dado pela fórmula: $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n - 1 = n^2$, com $n \in \mathbb{N}$, para $n \geq 1$ (Baron, 1985; Deza; Deza, 2012), o que pode ser observado na Figura 3.

Figura 3 – Números figurados quadrados - S_n

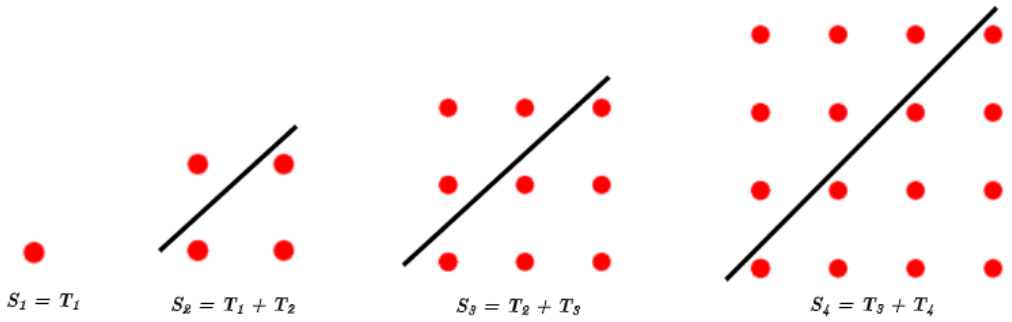


Fonte: Elaboração própria (2025)

Nota-se, na Figura 3, que o crescimento dos números quadrados segue um padrão análogo ao dos triangulares: cada novo termo resulta da adição de uma camada de pontos ao arranjo anterior, preservando a forma quadrangular.

Entre as diversas relações que podem ser estabelecidas, destaca-se o fato de que os números figurados quadrados podem ser expressos como a soma de dois números triangulares consecutivos. Em termos gerais, tem-se que $S_n = T_n + T_{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}$, para $n \geq 1$. Essa relação pode ser verificada a partir das expressões gerais dos números triangulares. De fato, tem-se que: $T_n + T_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n+n^2-n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2 = S_n$. Essa identidade, conhecida como fórmula de Theon, é discutida por Deza e Deza (2012). Essa igualdade pode ser compreendida também do ponto de vista geométrico, conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – Formação de números quadrados (S_n) a partir da soma de dois números triangulares (T_n) consecutivos



Fonte: Elaboração própria (2026)

A Figura 4 evidencia como um número quadrado pode ser decomposto visualmente na soma de dois números triangulares consecutivos, confirmando geometricamente a relação algébrica apresentada anteriormente.

Observa-se que tanto os números triangulares quanto os números quadrados mantêm uma relação direta com progressões aritméticas, uma vez que são construídos a partir da soma de termos sucessivos de sequências cuja diferença entre os termos consecutivos (a razão) é constante, ou seja, nos números triangulares temos: $T_1 = 1$, $T_2 = 1 + 2$, $T_3 = 1 + 2 + 3$, e assim sucessivamente, até $T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$. De modo geral, os números poligonais podem ser obtidos mediante a soma de progressões aritméticas específicas. Assim, cada uma dessas progressões tem como primeiro termo o número 1, e sua razão é igual a

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, conforme se trate, respectivamente, de números triangulares, quadrados, pentagonais, hexagonais, heptagonais, e os correspondentes números poligonais de ordem superior. Deza e Deza (2012) indicam que a definição geral dos números poligonais de m lados foi apresentada por Hipsicles de Alexandria no século II a.C. Essa definição pode ser expressa da seguinte forma:

> Se houver tantos números quantos quisermos, começando com um e aumentando pela mesma diferença comum, então quando a diferença comum é 1, a soma de todos os termos é um número triangular; quando 2, um quadrado; quando 3, um número pentagonal; e o número de ângulos é chamado de acordo com o número que excede a diferença comum em 2, e o lado de acordo com o número de termos que inclui 1. (Deza; Deza, 2012, p. 4, tradução nossa).

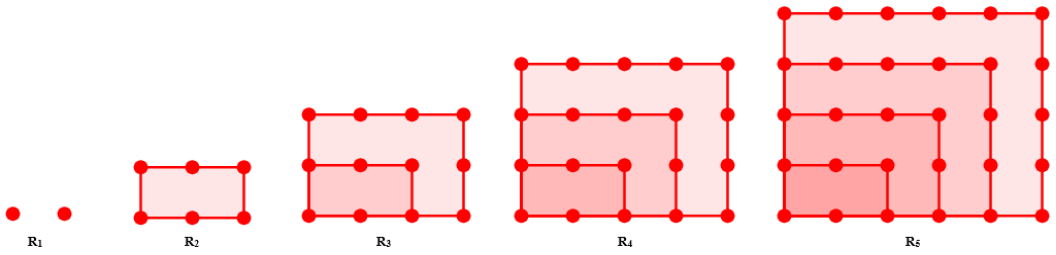
A construção dos números poligonais pode ser compreendida de forma incremental, na medida em que cada termo é obtido pela adição de uma nova camada de pontos à configuração anterior. A quantidade de pontos acrescentados em cada etapa cresce de maneira regular, formando uma sequência cuja diferença entre termos consecutivos é constante. No caso de um polígono de m lados, essa sequência é dada por $1, 1 + (m - 2), 1 + 2(m - 2), 1 + 3(m - 2), \ldots$, caracterizando uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = 1$ e diferença entre os termos consecutivos $r = m - 2$. Logo, o n-ésimo número poligonal pode ser interpretado como a soma dos n primeiros termos dessa progressão. Essa construção conduz à expressão geral dos números poligonais, dada por $G_m(n) = \frac{n((m-2)n-m+4)}{2} = \frac{(m-2)}{2}(n^2 - n) + n$, com $m, n \in \mathbb{N}$, com $m \geq 3$ e $n \geq 1$, conforme apresentado por Deza e Deza (2012). Observa-se que essa expressão abrange diferentes sequências já conhecidas, uma vez que, para $m = 3$, obtêm-se os números triangulares, enquanto, para $m = 4$, recuperam-se os números quadrados.

Os números oblongos, também conhecidos como números retangulares, formam a sequência $2, 6, 12, 20, 30, \ldots$. Assim, essa sequência é construída a partir do produto de dois números naturais consecutivos, sendo definida pela fórmula geral:
$R_n = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = n(n + 1)$, com $n \in \mathbb{N}$, para $n \geq 1$, (Baron, 1985), correspondendo à soma dos n primeiros números naturais pares (começando em 2).

Uma diferença importante a ser observada é que os números figurados retangulares, diferentemente dos números poligonais, têm início em 2, sendo construídos a partir de dois pontos. Ainda assim, sua construção também pode ser descrita por meio da soma dos termos de uma progressão aritmética, de forma análoga ao que ocorre com os números poligonais.

Na representação geométrica, cada termo pode ser visualizado como um retângulo formado por n linhas e $n + 1$ colunas, ou pela disposição inversa dessas dimensões, $n + 1$ linhas e n colunas, o que justifica sua denominação, como mostra a Figura 5.

Figura 5 – Números figurados retangulares - R_n

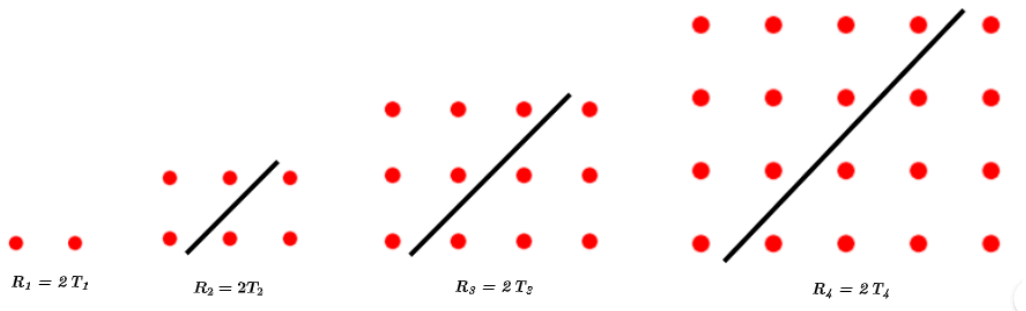


Fonte: Elaboração própria (2025)

Essa perspectiva visual não apenas facilita a compreensão dos padrões numéricos, como também permite estabelecer conexões entre diferentes tipos de números figurados. Um exemplo, explorado pelos pitagóricos, é a relação que prova que todo número retangular (ou oblongo) é equivalente ao dobro de seu número triangular correspondente, ou seja, estabelecida pela relação algébrica $R_n = 2 \cdot T_n$, com $n \in \mathbb{N}$, para $n \geq 1$ (Boyer; Merzbach, 2018).

De fato, podemos provar essa relação da seguinte forma: $R_n = n(n + 1) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 2.T_n$. Essa propriedade admite também uma interpretação geométrica, conforme ilustrado na Figura 6.

Figura 6 – Formação de números retangulares (R_n) como o dobro do número triangular (T_n) correspondente



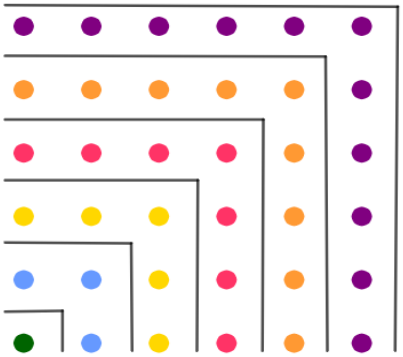
Fonte: Elaboração própria (2026)

Outra forma de compreender os números figurados retangulares pode ser obtida ao relacioná-los com os números quadrados. Em particular, tem-se que $R_n = S_n + n$, com $n \in \mathbb{N}$, para $n \geq 1$. De fato, $S_n + n = n^2 + n = n(n+1) = R_n$. Essa expressão indica que o número retangular pode ser interpretado como a ampliação de um número quadrado por meio da adição de uma faixa linear de comprimento n, o que corresponde, geometricamente, à passagem de uma configuração quadrada para uma retangular.

O crescimento dos números figurados pode ser analisado a partir da formação sucessiva de suas configurações. O gnômon de um número figurado é a camada de pontos que se acrescenta para formar o número seguinte na sequência, constituindo um elemento essencial na construção dessas figuras e permitindo identificar o padrão de crescimento da sequência (Barros, 2021). Nos números quadrados e retangulares, essa camada pode ser visualizada como "a porção da fronteira dos números quadrados e retangulares nos dois lados em forma de L" (Baron, 1985, p. 17), o que evidencia geometricamente como a figura se amplia. Assim, nos números retangulares, os gnomos seguem a sequência dos números pares $(2, 4, 6, 8, ...)$, conforme mostra a Figura 7, ao passo que nos números quadrados acompanham a sequência dos números ímpares $(1, 3, 5, 7, ...)$, como ilustrado na Figura 8, reforçando a regularidade do crescimento.

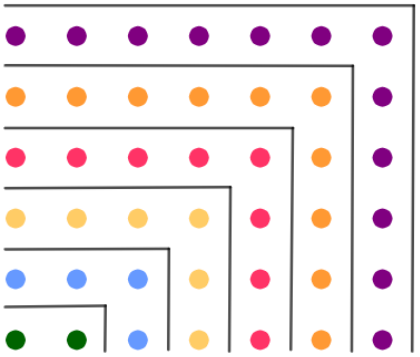
De forma geral, todos os números figurados que possuem gnômon seguem o mesmo princípio de acréscimo de uma camada de pontos, embora a forma desta camada dependa da configuração geométrica da figura correspondente. A passagem do n-ésimo termo para o termo de ordem $n + 1$ de um número poligonal de m lados ocorre pela adição de $(m - 2)n + 1$ pontos, quantidade correspondente ao gnômon da sequência (Deza; Deza, 2012). Nessa expressão, m representa o número de lados do polígono, com $m \geq 3$, enquanto n indica a posição do termo na sequência, com $n \geq 1$.

Figura 7 – Gnomos de números retangulares



Fonte: Elaboração própria (2025)

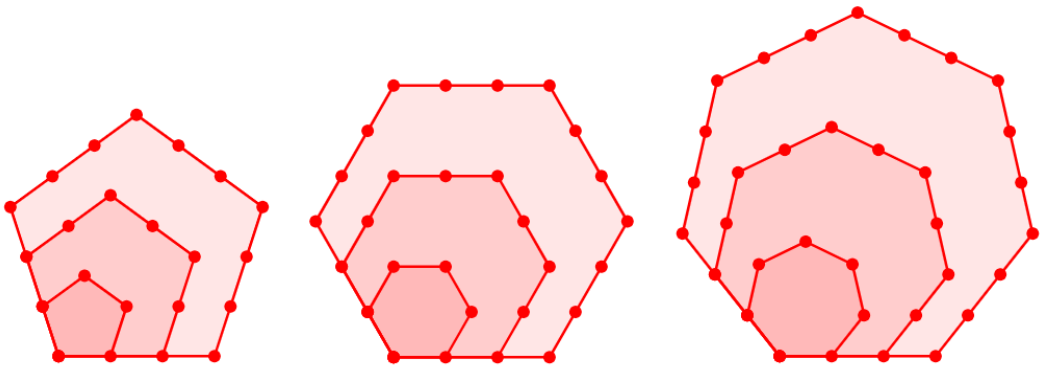
Figura 8 – Gnomos dos números quadrados



Fonte: Elaboração própria (2025)

As regularidades observadas estendem-se a outras configurações poligonais. Nesse sentido, os números pentagonais originam a sequência 1, 5, 12, 22, ..., os hexagonais 1, 6, 15, 28, ... e os heptagonais 1, 7, 18, 34, ..., entre outras possíveis configurações poligonais, conforme apresentado na Figura 9. Tais sequências revelam que, embora variem as configurações geométricas associadas, mantém-se uma organização estruturada, na qual os acréscimos sucessivos de pontos seguem regularidades que podem ser descritas e generalizadas do ponto de vista matemático.

Figura 9 – Representação geométrica dos números pentagonais, hexagonais e heptagonais

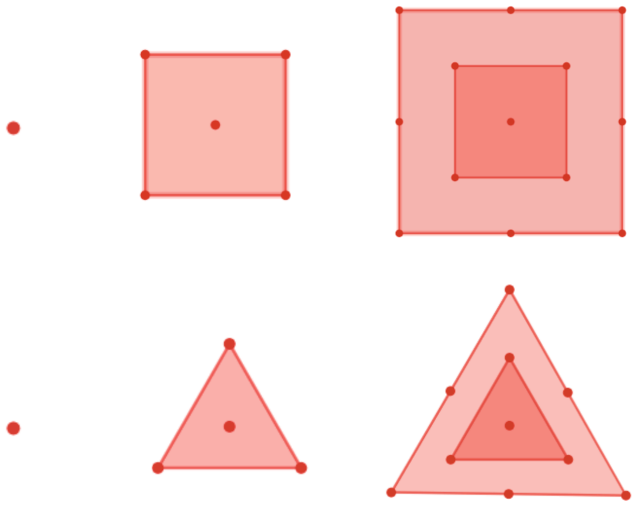


Fonte: Elaboração própria (2026)

Cabe mencionar, ainda, a existência dos números figurados centrados (números poligonais de segunda ordem), caracterizados pela presença de um ponto central a partir do qual se organizam camadas sucessivas de pontos, formando configurações simétricas. Embora não sejam aprofundados neste trabalho, esses números evidenciam outras formas de organização dos números figurados (Deza; Deza, 2012). Os primeiros números triangulares

centrados são 1, 4, 10, …, já os primeiros números quadrados centrados são 1, 5, 13,..., conforme ilustrado na Figura 10.

Figura 10 – Números figurados quadrados e triangulares centrados.



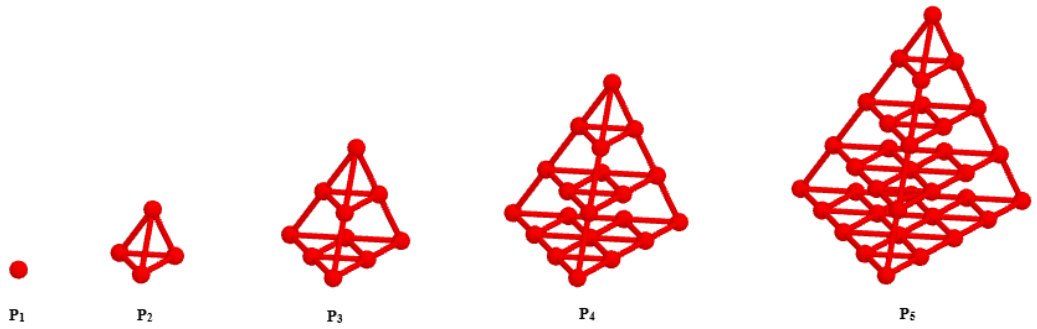
Fonte: Elaboração própria (2026)

A Figura 10 evidencia que, em ambos os casos, os pontos se organizam em camadas concêntricas ao redor de um ponto central, o que justifica a denominação de números figurados centrados.

A representação dos números figurados não se limita ao plano. A ampliação do conceito para o espaço tridimensional permite a construção de novos arranjos que dão origem aos chamados números figurados espaciais ou números sólidos, os quais se organizam em camadas sucessivas com base em figuras planas.

O número piramidal triangular (ou tetraédrico) é considerado o primeiro número sólido e está associado à forma do tetraedro, sendo obtido pela soma dos números triangulares: $P_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$, conforme a expressão: $P_n = \sum_{k=1}^{n} T_k =$ $= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, com $n \in \mathbb{N}$, para $n \geq 1$ (Deza; Deza, 2012), conforme ilustrado na Figura 11.

Figura 11 – Números piramidais triangulares - P_n

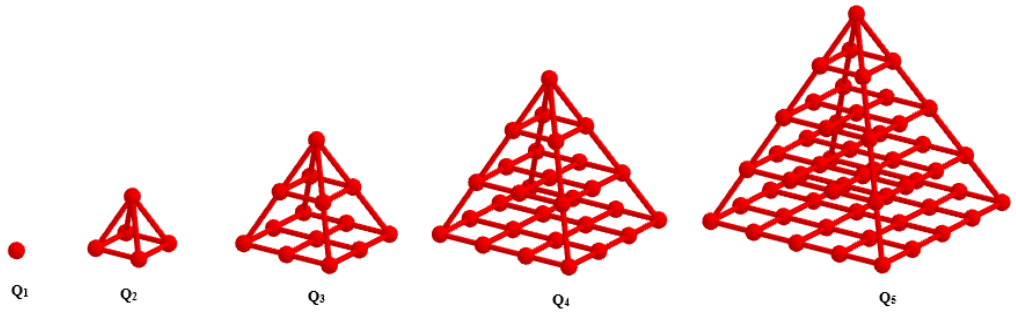


Fonte: Elaboração própria (2025)

Cada termo da Figura 11 corresponde ao empilhamento sucessivo de camadas triangulares, evidenciando a transição do plano para a construção tridimensional dos números piramidais.

De maneira análoga, os números piramidais de base quadrada (ou números piramidais quadrados) são definidos a partir da soma dos n primeiros números quadrados. Formalmente, sendo $S_k = k^2$ o k-ésimo número quadrado, com $k \in \mathbb{N}$, para $k \geq 1$, o n-ésimo número piramidal quadrado, denotado por Q_n, é definido por $Q_n = \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} k^2$, com $n \in \mathbb{N}$, para $n \geq 1$. Por fim, utilizando a fórmula para a soma dos quadrados dos primeiros n números naturais, obtém-se a expressão: $Q_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, com $n \in \mathbb{N}$, para $n \geq 1$ (Deza; Deza, 2012), conforme representada na Figura 12.

Figura 12 – Números piramidais quadrados - Q_n



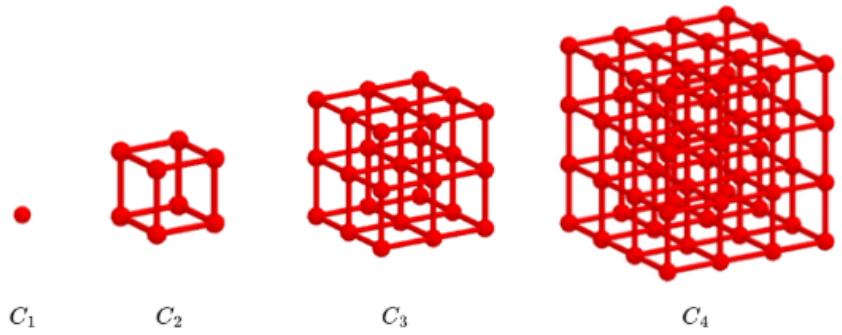
Fonte: Elaboração própria (2025)

Assim como ocorre com os números piramidais triangulares, o crescimento representado na Figura 12 evidencia o empilhamento sucessivo de camadas quadradas, compondo a estrutura tridimensional da pirâmide de base quadrada.

Para além da interpretação como soma de quadrados sucessivos, os números piramidais de base quadrada também se relacionam com os números piramidais de base triangular. Em particular, cada termo pode ser expresso como a soma de dois números piramidais triangulares consecutivos, isto é, $Q_n = P_n + P_{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}$, para $n \geq 1$. De fato, temos que $P_n + P_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n-1)(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)((n+2)+(n-1))}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} == Q_n$, como queríamos **(**Deza; Deza, 2012**)**.

Após os números piramidais (de base triangular e quadrada), formados pela soma sucessiva de figuras planas, surge o número cúbico como outra expressão tridimensional dos números figurados. Diferentemente das pirâmides, cuja construção se dá pela sobreposição de camadas de tamanhos distintos, os números cúbicos possuem uma estrutura perfeitamente regular e simétrica, que se estende de forma igual nas três dimensões do espaço. Um número cúbico de ordem n corresponde a um cubo cuja aresta contém n pontos, totalizando n^3 pontos. Assim, essa sequência é representada por: $1, 8, 27, 64, 125, \ldots$ e definida, de forma geral, por: $C_n = n^3$, com $n \in \mathbb{N}$, para $n \geq 1$ (Deza; Deza, 2012), conforme ilustrado na Figura 13.

Figura 13 – Números figurados cúbicos - C_n



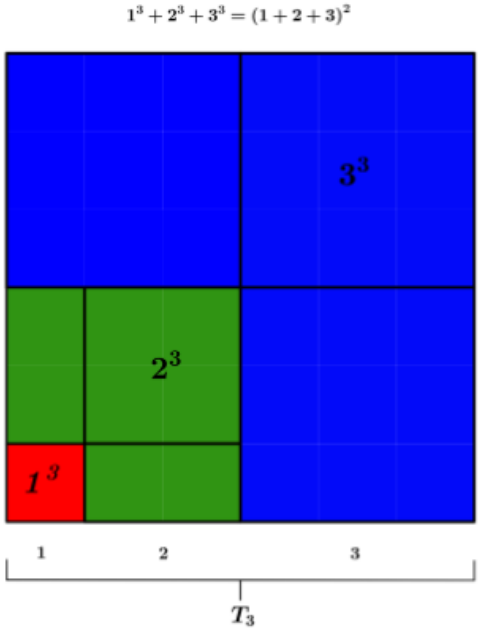
Fonte: Elaboração própria (2025)

A relação entre os números cúbicos e os números triangulares revela uma propriedade notável: a soma dos primeiros n cubos é igual ao quadrado do n-ésimo número triangular.

Desse modo, essa identidade é expressa algebricamente por: $\sum_{k=1}^{n} C_k = \left(T_n\right)^2$ com $n \in \mathbb{N}$, para $n \geq 1$ (Deza; Deza, 2012). Do ponto de vista algébrico, essa identidade pode ser demonstrada considerando que $C_n = n^3$. Assim, $\sum_{k=1}^{n} C_k = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(T_n\right)^2$.

Essa identidade também pode ser interpretada geometricamente. Considere o quadrado de lado $T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ cuja área é $\left(T_n\right)^2$. Esse quadrado pode ser construído por meio de adições sucessivas de camadas. Cada camada corresponde à diferença entre o quadrado de lado T_ke o quadrado anterior, de lado T_{k-1}, ou seja, sua área é dada por $\left(T_k\right)^2 - \left(T_{k-1}\right)^2$. Observa-se que essa diferença corresponde exatamente a k^3, isto é, $\left(T_k\right)^2 - \left(T_{k-1}\right)^2 = k^3$. Assim, cada camada adicional possui área igual a um número cúbico. Ao somar as áreas de todas as camadas, obtém-se $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(T_n\right)^2$. Essa interpretação evidencia a relação entre representações geométricas e expressões algébricas, reforçando o papel dos números figurados na construção de generalizações matemáticas. Tal construção pode ser observada na Figura 14.

Figura 14 – Representação geométrica da relação entre C_n e T_n



Fonte: Elaboração própria (2026)

Entre as diferentes articulações possíveis entre números figurados, destaca-se uma identidade que evidencia a interação entre configurações planas e espaciais, como a expressão $T_n + S_n + C_n = 3 \cdot Q_n$, com $n \in \mathbb{N}$, para $n \geq 1$. Para verificar essa identidade, pode-se recorrer às expressões algébricas dos números figurados envolvidos. Assim, $T_n + S_n + C_n = \frac{n(n+1)}{2} + n^2 + n^3 = \frac{2n^3+3n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} = \frac{3}{3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} =$ $= 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 3 \cdot Q_n$ (Baron, 1985). Observa-se, por meio dessa expressão, que a combinação entre números figurados triangulares, quadrados e cúbicos resulta em um múltiplo do número piramidal quadrado, o que explicita uma organização entre essas diferentes configurações.

As relações estabelecidas entre diferentes classes de números figurados permitem compreendê-los para além de suas configurações geométricas isoladas. Bortoli, Silva e Yassunaga (2026) consideram que a compreensão desses números envolve conexões entre diferentes campos da Matemática, perspectiva que evidencia seu caráter articulador entre representações geométricas, sequências numéricas, padrões e generalizações algébricas. Desse modo, as representações figuradas não constituem apenas formas distintas de representar quantidades, mas oferecem condições para investigar relações matemáticas que atravessam diferentes registros e estruturas.

No contexto do ensino de Matemática, diversos estudos têm buscado compreender como os números figurados podem ser trabalhados em sala de aula. Jesus (2013) conduziu seu estudo no cenário da unidade curricular de Prática Pedagógica Supervisionada vinculada ao Mestrado em Ensino, com a intenção de compreender como alunos do 5.º ano desenvolvem o pensamento algébrico quando trabalham com números figurados e com a sequência de Fibonacci.

A autora articulou esse foco com um propósito mais amplo, buscando aproximar a Matemática da natureza e de outras áreas do currículo, valorizando conexões com a Língua Portuguesa, a História da Matemática e a Educação Tecnológica. A investigação, de natureza qualitativa, foi estruturada para acompanhar o modo como os estudantes elaboravam estratégias e enfrentavam dificuldades ao longo de uma unidade de ensino especialmente desenvolvida para esse trabalho. Jesus (2013) destaca que a investigação de regularidades, tanto em sequências numéricas quanto em representações geométricas, constitui um elemento fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que favorece o

estabelecimento de relações, a formulação de conjecturas e a construção de generalizações. As atividades planejadas convidaram os alunos a explorar padrões, levantar conjecturas e buscar generalizações, competências diretamente relacionadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Os resultados indicam que, diante de tarefas dessa natureza, os estudantes foram capazes de construir estratégias próprias, justificar seus raciocínios e estabelecer conexões entre diferentes conceitos matemáticos. A autora destaca, ainda, que essa abordagem investigativa contribuiu para fortalecer a comunicação matemática, tanto oral quanto escrita, favorecendo um ambiente de aprendizagem mais participativo e estimulando o envolvimento dos estudantes com a Matemática. Um dos indícios mais marcantes desse envolvimento foi o interesse dos alunos em continuar explorando números figurados além do previsto na unidade. Segundo Jesus (2013), esse desejo de "descobrir o próximo padrão" revela como a investigação matemática, quando bem conduzida, desperta a emoção, o desafio intelectual e a motivação genuína. O estudo conclui que a exploração dos números figurados e da sequência de Fibonacci constitui uma via rica para promover o pensamento algébrico, fortalecer práticas interdisciplinares e tornar a Matemática mais significativa e prazerosa para os estudantes.

Já Duarte (2025) desenvolveu um projeto didático para o ensino de progressão aritmética no Ensino Médio, motivado pela percepção de que esse conteúdo é frequentemente apresentado de forma exclusivamente algébrica e centrada na memorização de fórmulas. Como alternativa, o autor propôs uma abordagem que integra História da Matemática, materiais manipulativos e atividades, visando tornar o estudo de PA mais visual, contextualizado e significativo. A proposta foi aplicada em uma turma do 1.º ano do Ensino Médio, composta por 22 estudantes, ao longo de quatro aulas. As atividades, organizadas de modo investigativo, utilizaram fichas coloridas para demonstrar visualmente como as fórmulas da PA podem ser deduzidas a partir dos números triangulares. Os resultados indicaram que os estudantes se envolveram fortemente com o uso de materiais visuais e desenvolveram formas mais estruturadas de raciocínio, combinando aspectos pictóricos e algébricos. O estudo conclui que a articulação entre visualização, História da Matemática e investigação amplia as possibilidades pedagógicas para o ensino de PA e pode contribuir para práticas mais ricas, integradas e motivadoras na Educação Matemática.

Canal, Bisognin e Isaia (2018) apresentam o planejamento de uma atividade para o ensino de números figurados junto a estudantes da licenciatura em Matemática, articulando esse conteúdo ao desenvolvimento do Pensamento Computacional. A proposta foi estruturada

como uma oficina presencial de oito horas, dividida em dois encontros, utilizando a linguagem *Scratch* como recurso para trabalhar os números figurados e promover o Pensamento Computacional de maneira transversal. O planejamento inclui atividades que estimulam a observação, a experimentação, a manipulação de recursos digitais e a cooperação entre os participantes. Os autores argumentam que integrar o Pensamento Computacional ao ensino de Matemática pode enriquecer a formação inicial dos futuros professores, favorecendo práticas criativas e tecnológicas. O trabalho destaca a importância de oferecer experiências que ampliem o repertório pedagógico dos licenciandos e aponta como perspectiva futura a implementação da sequência em sala de aula, possibilitando analisar seus impactos na formação docente.

Algumas das ideias presentes nesses estudos convergem com a proposta desta dissertação, sobretudo ao destacarem a importância de explorar, investigar e experimentar diferentes formas de abordagem da Matemática. Ainda que partam de perspectivas distintas, tais trabalhos evidenciam que a aprendizagem se fortalece quando os estudantes são convidados a observar regularidades, testar possibilidades, produzir conjecturas, justificar relações e interpretar conceitos por meio de múltiplas representações. No caso dos números figurados, essa potencialidade é particularmente expressiva, pois sua exploração articula sequências numéricas, padrões geométricos, processos de generalização, relações algébricas e formas visuais de representação. Assim, o estudo dos números figurados não se limita à identificação de fórmulas ou à memorização de sequências, mas favorece o desenvolvimento de estratégias de raciocínio, do pensamento lógico, da visualização matemática e da produção de significados.

Esse entendimento dialoga diretamente com a abordagem adotada nesta pesquisa, que envolve licenciandos na investigação de números figurados por meio de recursos digitais e na expressão de suas interpretações em diferentes linguagens. Ao serem explorados com tecnologias digitais, os números figurados podem ser representados, manipulados, reorganizados e comunicados de modos diversos, ampliando as possibilidades de experimentação matemática. *Softwares* de geometria dinâmica, ambientes de programação, recursos audiovisuais e sistemas de inteligência artificial, por exemplo, permitem que os estudantes transitem entre registros numéricos, geométricos, algébricos, verbais, visuais e sonoros. Dessa forma, a aprendizagem matemática passa a envolver não apenas a compreensão de propriedades e regularidades, mas também processos de criação, tradução e

comunicação de ideias matemáticas em coletivos constituídos por estudantes, professores, tecnologias e mídias.

Desse modo, as discussões presentes na literatura sobre números figurados convergem com os princípios que orientam este trabalho, especialmente no que se refere à valorização de práticas ativas, investigativas e exploratórias. Ao mesmo tempo, a proposta desta dissertação amplia essa discussão ao considerar que a produção de conhecimento matemático, quando mediada por tecnologias digitais, não pode ser compreendida apenas como resultado da ação individual do estudante sobre um conteúdo. Ela envolve interações com mídias que reorganizam modos de pensar, representar e expressar ideias matemáticas. Essa compreensão conduz à necessidade de um referencial teórico capaz de analisar a relação entre cognição, tecnologia e produção de conhecimento. É nesse contexto que o construto dos seres-humanos-com-mídias se torna fundamental para compreender como os números figurados podem ser investigados e ressignificados em práticas educativas mediadas por tecnologias digitais.

2.2 SERES-HUMANOS-COM-MÍDIAS

De acordo com Tikhomirov (1981, apud Borba, 1999), há três categorias que afetam a cognição humana por meio do uso dos computadores: a Teoria da Substituição, a Teoria da Suplementação e a Teoria da Reorganização. Na Teoria da Substituição, o autor apresenta o computador como substituto do ser humano, afirmando que "o computador chega aos mesmos resultados que o ser humano, na maioria dos casos com menos erros e, portanto, substitui o ser humano" (Borba, 1999, p. 286). Já na Teoria da Suplementação, o computador atua como um complemento ao ser humano, uma vez que o pensamento pode ser compreendido como um conjunto de pequenas partes que, quando agrupadas, formam processos mentais mais complexos (Borba, 1999, p. 287). Por fim, na Teoria da Reorganização, o computador é compreendido como mediador das atividades humanas.

Tikhomirov considera que o computador exerce uma função reguladora sobre a atividade humana e destaca que ele apresenta diferenças essenciais em relação à linguagem, pois é capaz de fornecer feedback durante as etapas intermediárias das ações realizadas (Borba, 1999), aproximando-se da noção de "moldagem recíproca" proposta por Borba (1999, p. 288). Assim, o raciocínio das pessoas é influenciado pelos *feedbacks* provenientes de uma determinada mídia, indicando que a mídia tem o poder de moldar o ser humano. Contudo,

essa relação não é unilateral, pois os indivíduos também exercem influência sobre a mídia à medida que interagem com ela (Souto; Borba, 2016, p. 7).

Essas reflexões apresentadas por Tikhomirov, especialmente no âmbito da Teoria da Reorganização, ampliam a compreensão sobre a relação entre humanos e tecnologias, evidenciando que essa interação ultrapassa a simples substituição ou complementação. A partir dessas discussões, Borba e Villarreal (2005) aprofundam a análise sobre a relação entre cognição e tecnologia, propondo a noção de "seres-humanos-com-mídias", que "compreende a tecnologia e os seres humanos como entes indissociáveis e partícipes das contemporâneas condições de existência e vida em sociedade" (Santos; Maia; Souto, 2022, p. 2).

O construto teórico seres-humanos-com-mídias, formulado por Borba e Villarreal (2005), oferece, portanto, um fundamento importante para compreender que o conhecimento matemático não é produzido por sujeitos isolados que apenas utilizam ferramentas externas. Ao contrário, o conhecimento emerge de coletivos formados por seres humanos e mídias, nos quais tecnologias, linguagens, representações, artefatos digitais, modos de inscrição e formas de comunicação participam ativamente dos processos cognitivos.

A partir disso, calculadoras, *softwares*, vídeos digitais, ambientes de programação, plataformas de inteligência artificial e sistemas de geração de imagens ou sons não devem ser compreendidos como instrumentos neutros, subordinados a uma racionalidade humana previamente constituída. Eles integram a própria configuração do pensamento, transformando os modos pelos quais problemas são formulados, conceitos são representados, hipóteses são exploradas e significados são negociados. A noção de seres-humanos-com-mídias desloca, portanto, a análise educacional de uma perspectiva instrumental da tecnologia para uma perspectiva epistemológica, na qual a mídia participa da produção do conhecimento e reconfigura as possibilidades de aprender, ensinar e investigar Matemática. Essa compreensão aproxima-se da perspectiva assumida por Yassunaga e Bortoli (2024), que propõem considerar as Tecnologias Digitais para além de sua dimensão instrumental, compreendendo-as também como campo de conhecimento ou perspectiva teórica capaz de subsidiar reflexões sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Esse entendimento é aprofundado por Borba, Silva e Gadanidis (2015), ao discutirem as fases das tecnologias digitais em Educação Matemática. Os autores evidenciam que a presença das tecnologias na sala de aula não ocorre de modo homogêneo ou linear, mas por meio de fases marcadas por diferentes formas de interação entre humanos, mídias e práticas matemáticas. Da informática inicial aos ambientes dinâmicos, da internet às tecnologias

móveis e às possibilidades abertas por recursos multimodais, cada fase reconfigura o coletivo que produz conhecimento. Assim, não se trata apenas de acrescentar novos recursos a práticas pedagógicas já estabilizadas, mas de compreender como essas tecnologias modificam a natureza das atividades matemáticas, os papéis de professores e estudantes, as formas de argumentação e os modos de validação.

Nessa perspectiva, a aprendizagem matemática passa a ser analisada como um processo situado, distribuído e mediado, no qual diferentes mídias condicionam e ampliam as formas de visualização, experimentação, simulação, comunicação e criação. A incorporação de tecnologias digitais contemporâneas, incluindo sistemas de inteligência artificial generativa, pode ser compreendida como continuidade e tensionamento dessa tradição teórica. Se, em Borba e Villarreal (2005), o coletivo seres-humanos-com-mídias já indicava que a cognição matemática é reorganizada pela presença de tecnologias, no contexto atual essa reorganização torna-se ainda mais evidente, pois as mídias passam a responder, sugerir, gerar, traduzir, sintetizar e recombinar diferentes registros semióticos. Isso exige cautela teórica: não se trata de atribuir intencionalidade humana às tecnologias, mas de reconhecer que elas operam como mediadoras que interferem nos percursos de produção de sentido.

Em atividades que envolvem escrita, música, imagem, modelagem, programação ou investigação matemática, a IA pode alterar a forma do problema, sugerir caminhos inesperados, reorganizar linguagens e provocar revisões críticas por parte dos estudantes. Desse modo, pensar a Educação Matemática a partir dos seres-humanos-com-mídias permite analisar a IA não como simples apoio técnico, mas como parte de um coletivo híbrido no qual agência, autoria e conhecimento são distribuídos entre sujeitos, artefatos, linguagens e mídias.

O construto teórico propõe uma visão em que o ato de pensar não se limita apenas ao ser humano, exigindo que o foco seja a combinação de pessoas com outras mídias. Entende-se por mídia todo e qualquer meio que possa criar essa união, abrangendo desde objetos básicos, como o lápis e o papel, até outras formas mais elaboradas (Borba; Xavier, 2022, p. 6). Borba, Scucuglia e Gadanidis (2015, p. 40) enfatizam que “O uso de hífens na expressão, que conecta os atores humanos e não-humanos, busca enfatizar que tecnologias não são neutras ao pensamento, que a produção de conhecimento matemático é condicionada pela mídia utilizada”. Dessa forma, torna-se evidente que as mídias desempenham um papel ativo na organização do pensamento, influenciando diretamente a maneira como o conhecimento é produzido.

> Os seres humanos, ao interagirem com as mídias, reorganizam o pensamento de acordo com múltiplas possibilidades e restrições que elas oferecem. A presença ou a ausência delas influencia o tipo de conhecimento produzido, e o uso ou o surgimento de uma determinada mídia não invalida ou extingue outra, embora a coloque, muitas vezes, em uma posição distinta da que ocupava em momento anterior (Souto; Borba, 2016, p. 6).

Nessa perspectiva, o conhecimento é produzido em coletivos formados pela interação entre humanos e mídias, de modo que ambos se transformam mutuamente. Assim, a tecnologia deixa de ser apenas um instrumento e passa a integrar o próprio processo de pensamento e produção de conhecimento. Essa compreensão acerca da produção de conhecimento em coletivos de seres-humanos-com-mídias implica pensar práticas pedagógicas que favoreçam tais interações. Nesse sentido, a experimentação matemática constitui um contexto propício para que estudantes explorem, formulem conjecturas, testem estratégias e produzam conhecimentos em interação com diferentes mídias.

2.3 EXPERIMENTAÇÃO MATEMÁTICA

As quatro fases das tecnologias na educação, segundo Borba, Scucuglia e Gadanidis (2015), iniciaram-se com o uso do *software LOGO*, por volta de 1985, período em que também se começou a considerar a importância de laboratórios de informática nas escolas. A segunda fase destacou-se pela popularização dos computadores e pelo desenvolvimento de diversos *softwares* educativos, por volta de 1990. A terceira fase teve início por volta de 1999, com a chegada da *internet*, e a quarta fase, a partir de 2004, trouxe a *internet* rápida e o início do uso mais intenso das tecnologias na Educação Matemática.

No que diz respeito à segunda fase, a experimentação se destaca como um ponto central desse período, juntamente com a valorização da visualização e da ideia de seres-humanos-com-mídias. O experimento em matemática pode ser realizado tanto para descobrir algo desconhecido quanto para verificar hipóteses ou ilustrar verdades já conhecidas (Borba; Villarreal, 2005, p. 65, tradução nossa).

Mais recentemente, Borba, Souto e Canedo Junior (2022) propõem a existência de uma quinta fase das tecnologias digitais em Educação Matemática, associada ao contexto da pandemia de COVID-19. Segundo os autores, diferentemente das fases anteriores, marcadas pelo surgimento de novos *softwares* e recursos (Logo, popularização do computador, internet e internet rápida), a quinta fase é definida pela ação do próprio vírus SARS-CoV-2, cujo poder de disseminação forçou professores de diferentes níveis de ensino a incorporarem, de forma

repentina, uma variedade de recursos digitais até então pouco explorados no cotidiano escolar, provocando uma intensificação do uso de tecnologias digitais sem precedentes.

Os autores sustentam, ainda, que "as tecnologias digitais têm poder de ação" (Borba; Souto; Canedo Junior, 2022, p. 13), no sentido de que as tecnologias não atuam como meios neutros, mas condicionam efetivamente as práticas educacionais. Ressaltam, além disso, que essa intensificação não ocorreu de forma equânime entre os estudantes, evidenciando as desigualdades sociais já existentes no Brasil e no mundo.

A experimentação matemática, impulsionada por essa diversificação crescente de recursos tecnológicos, não se reduz a uma atividade de tentativa aleatória ou de simples manipulação de exemplos; ela envolve um modo de produzir conhecimento em que a observação, a exploração, a simulação, a comparação de casos e a análise de padrões assumem papel relevante. Nesse sentido, experimentar em Matemática significa criar condições para que determinadas relações possam emergir, ser percebidas, questionadas e eventualmente generalizadas. Essa compreensão é particularmente importante em contextos educacionais, pois desloca o foco de uma Matemática apresentada apenas como sistema formal previamente estabelecido para uma Matemática em processo, isto é, uma Matemática que pode ser investigada, reconstruída e compreendida pelos estudantes por meio de ações exploratórias.

> Experimentos foram utilizados como métodos ou heurísticas para chegar a uma conjectura e, nos últimos anos, seu status vem mudando dentro da comunidade matemática, no sentido de que, ao menos alguns matemáticos, têm reconhecido o valor de mostrar os caminhos percorridos para estabelecer um resultado matemático (Borba; Villarreal, 2005, p. 67, tradução nossa).

Essa mudança é significativa para a Educação Matemática, pois evidencia que o conhecimento matemático não se constitui apenas pelo resultado final, pela demonstração formal ou pela validação acabada, mas também pelos processos de busca, pelas escolhas realizadas, pelos erros, pelas reformulações e pelas estratégias mobilizadas ao longo da investigação. Desse modo, a experimentação pode contribuir para tornar visíveis aspectos do fazer matemático que, muitas vezes, permanecem ocultos quando o ensino privilegia apenas definições, fórmulas e procedimentos. Além disso, Borba e Villarreal (2005, p.75, tradução nossa) apresentam, em sua obra, as seguintes implicações da experimentação para a Educação Matemática:

- A utilização de procedimentos exploratórios e de tentativas fundamentadas que favorecem a formulação de conjecturas matemáticas;

- A descoberta de resultados matemáticos até então desconhecidos pelo próprio experimentador;
- A possibilidade de investigar diferentes caminhos ou estratégias para alcançar um determinado resultado;
- A oportunidade de propor e realizar novos experimentos matemáticos;
- Uma forma diferenciada e mais investigativa de aprender Matemática.

Essas implicações indicam que a experimentação pode favorecer uma postura ativa diante do conhecimento matemático. Ao experimentar, o estudante não apenas aplica procedimentos previamente ensinados, mas participa de um processo de investigação no qual precisa observar, comparar, escolher estratégias, interpretar resultados e justificar suas conclusões. Assim, a experimentação aproxima-se de uma concepção de aprendizagem em que compreender Matemática envolve produzir relações, identificar estruturas, questionar regularidades e construir argumentos. Esse movimento é especialmente relevante quando se trabalha com temas como sequências, padrões, números figurados, funções, geometria dinâmica e modelagem matemática, pois tais conteúdos frequentemente exigem articulação entre observação empírica, representação visual, generalização algébrica e validação conceitual.

Os autores também trazem a ideia de experimentação com computadores e de experimentação com tecnologias na Educação Matemática e ressaltam que "a experimentação associada ao uso de computadores desempenha um papel primordial nesse campo" (Borba; Villarreal, 2005, p. 71). Ainda, evidenciam as vantagens proporcionadas pela experimentação com as tecnologias:

- A possibilidade de testar uma conjectura utilizando um grande número de exemplos e a oportunidade de repetir os experimentos, graças ao feedback rápido fornecido pelos computadores;
- A possibilidade de obter diferentes tipos de representações de uma determinada situação de maneira mais fácil;
- Uma forma de aprender Matemática que está em consonância com o modelamento como abordagem pedagógica. (Borba; Villarreal, 2005, p. 75-76, tradução nossa)

A presença das tecnologias digitais amplia o alcance da experimentação matemática porque permite que os estudantes realizem ações que seriam difíceis, demoradas ou mesmo inviáveis em ambientes exclusivamente baseados em lápis e papel. *Softwares* de geometria dinâmica, planilhas eletrônicas, linguagens de programação, aplicativos gráficos, ambientes

de simulação e, mais recentemente, sistemas de inteligência artificial podem oferecer *feedbacks* rápidos, múltiplas representações e possibilidades de reorganização das ideias matemáticas. Isso não significa que a tecnologia garanta, por si só, a aprendizagem, mas que ela altera as condições de produção do conhecimento, criando novos modos de experimentar, visualizar, conjecturar e argumentar.

Em discussões que tratam da experimentação com tecnologias, a visualização ganha destaque, já que "as representações visuais podem, de certo modo, orientar e até mesmo direcionar o pensamento matemático dos estudantes" (Scucuglia, 2006, p.11). A visualização, nesse sentido, não deve ser compreendida apenas como ilustração de conceitos matemáticos previamente definidos. Ela pode atuar como parte constitutiva do raciocínio, permitindo que relações sejam percebidas, que padrões sejam identificados e que ideias abstratas sejam reorganizadas em diferentes formas de representação. Em atividades com tecnologias digitais, a visualização pode favorecer movimentos de ida e volta entre o empírico e o teórico, entre o particular e o geral, entre a imagem e a expressão algébrica.

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2015, p.53) ressaltam que

> A visualização envolve um esquema mental que representa a informação visual ou espacial. É um processo de formação de imagens que torna possível a entrada em cena das representações dos objetos matemáticos para que possamos pensar matematicamente. Ela oferece meios para que conexões entre representações possam acontecer. Assim, a visualização é protagonista na produção de sentidos e na aprendizagem matemática.[1]

Essa compreensão da visualização como protagonista na produção de sentidos reforça a importância da experimentação com tecnologias digitais. Ao manipular uma construção geométrica, alterar parâmetros, observar o comportamento de uma sequência, gerar gráficos ou comparar diferentes representações de um mesmo objeto matemático, o estudante pode construir relações que não seriam imediatamente evidentes em uma abordagem exclusivamente simbólica. A visualização, articulada à experimentação, permite que o pensamento matemático se desenvolva em um movimento de exploração e reorganização, no qual imagens, símbolos, gestos, comandos e *feedbacks* tecnológicos participam da construção de significados.

---

[1] Nesta pesquisa, o termo *visualização* é empregado conforme a perspectiva adotada pelos autores citados. Uma discussão desse conceito sob a perspectiva da inclusão de estudantes cegos na Educação Matemática pode ser encontrada em Pereira (2021). Como essa temática não constitui objetivo desta pesquisa, remete-se o leitor ao referido trabalho para aprofundamento. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/entities/publication/23864bed-fed8-46cc-96fb-138e8baec970

Assim, fica evidente que a experimentação com tecnologias vai além da simples manipulação de recursos digitais. Por meio da visualização, os estudantes conseguem organizar, interpretar e conectar diferentes representações matemáticas, construindo sentidos próprios sobre os conceitos estudados, uma vez que a visualização matemática favorece a produção de significados e o estabelecimento de conexões entre diferentes representações (Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2015). Nesse processo, a tecnologia atua como mediadora que aproxima o pensamento abstrato da experiência concreta, favorecendo uma aprendizagem mais significativa. Ao mesmo tempo, essa mediação não deve ser entendida como neutra, pois cada mídia condiciona modos específicos de representar, explorar e compreender a Matemática. Desse modo, a experimentação matemática com tecnologias digitais articula-se diretamente ao construto dos seres-humanos-com-mídias, na medida em que o conhecimento produzido emerge da interação entre estudantes, professores, recursos tecnológicos, representações e práticas investigativas.

2.4 EXPERIMENTAÇÃO-COM-*GEOGEBRA*

Entre as tecnologias digitais utilizadas em contextos de experimentação matemática, destaca-se o *GeoGebra*, cujo reconhecimento internacional é evidenciado pelos diversos prêmios recebidos na área de softwares educacionais (Hohenwarter; Lavicza, 2007). O *GeoGebra* apresenta diversas funcionalidades voltadas ao ensino e à aprendizagem da Matemática, sendo aplicável em diferentes etapas da formação escolar (*GeoGebra*, s.d.).

Nesse tipo de ambiente, o dinamismo não se restringe a um aspecto técnico, mas decorre das possibilidades de exploração ativa dos objetos matemáticos, permitindo que o usuário os manipule, combine e visualize em tempo real. Borba, Scucuglia e Gadanidis (2015, p. 23) caracterizam o dinamismo em GD como "[...] às possibilidades em podermos utilizar, manipular, combinar, visualizar e construir virtualmente objetos geométricos, permitindo traçar novos caminhos de investigação". Essas características favorecem a construção de um espaço no qual a descoberta matemática pode emergir a partir da interação com o próprio objeto de estudo.

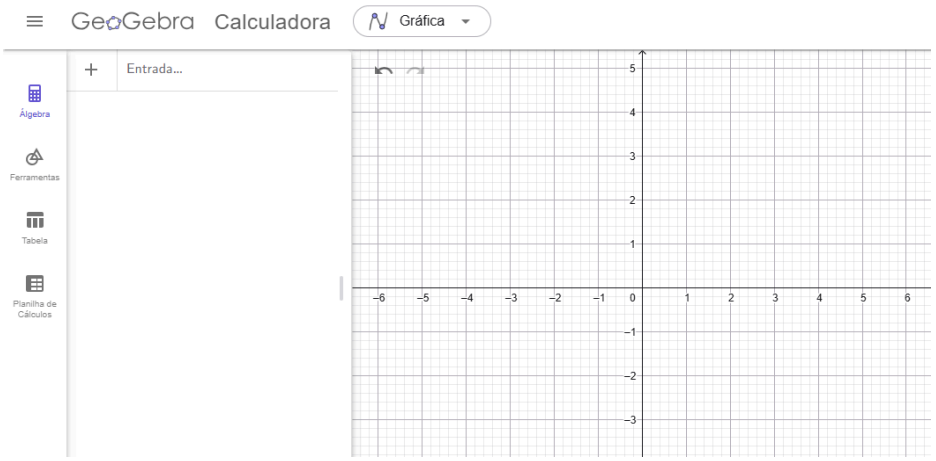
> Vemos emergir uma nova forma de ensinar e aprender Geometria; a partir de exploração experimental viável sòmente em ambientes informatizados, os alunos conjeturam e, com o feedback constante oferecido pela máquina, refinam ou corrigem suas conjeturas, chegando a resultados que resistem ao "desenho em

> movimento", passando então para a fase abstrata de argumentação e demonstração matemática. (Gravina, 1996, p. 2)

O *software* disponibiliza diferentes ambientes que permitem a exploração de conceitos matemáticos sob múltiplas perspectivas. Destacam-se: a Calculadora, que permite explorar funções, resolver equações e construir formas geométricas; a Calculadora 3D, voltada à representação gráfica de superfícies e curvas no espaço, e à execução de cálculos envolvendo três dimensões; a Calculadora Gráfica, que favorece a análise de funções por meio da visualização de gráficos e diagramas interativos; a Calculadora Científica, que realiza operações com frações, cálculos estatísticos e funções exponenciais; e a ferramenta de Geometria, que possibilita a exploração de conceitos e a construção geométrica em um ambiente dinâmico.

Além disso, há uma interface de álgebra interligada às representações geométricas. A presença simultânea de registros algébricos e geométricos possibilita que alterações realizadas em um deles sejam imediatamente refletidas no outro, o que amplia as possibilidades de análise e interpretação. Barbosa (2019, p. 66) ressalta ainda que o *software* "tem potencial para promover também uma melhor percepção por parte do aluno, contribuindo para o descobrimento de formas mais simples de encontrar a solução de problemas"

Figura 15 – Aba da Calculadora Gráfica do *GeoGebra*



Fonte: *GeoGebra* (2025)

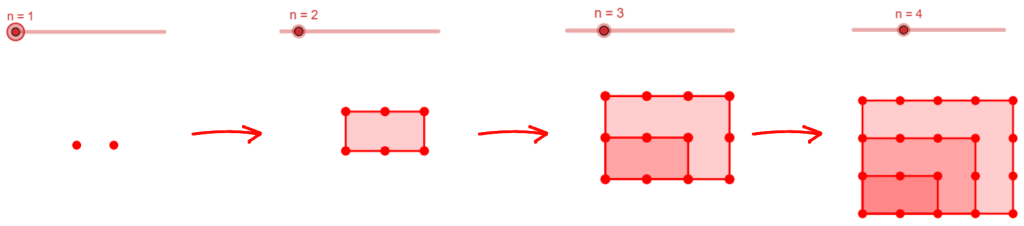
Conforme ilustrado na Figura 15, o ambiente apresenta elementos que estruturam a interação com os objetos matemáticos, como o plano cartesiano, associado aos eixos e à malha, bem como a área destinada à inserção de comandos, que possibilita a construção de expressões e objetos de natureza algébrica. A partir dessa estrutura, o *software* disponibiliza

um conjunto de recursos que permitem a construção e exploração de diferentes objetos matemáticos. Elementos como retas, circunferências, polígonos e cônicas permitem a criação de configurações diversas, enquanto ferramentas de medição possibilitam a análise de propriedades como comprimento, área e ângulo. Tais recursos não se limitam à representação, mas favorecem a investigação de relações, a verificação de propriedades e a análise de diferentes comportamentos matemáticos.

Dentre esses recursos, vale destacar o controle deslizante, que possibilita a variação de parâmetros. Por meio dele, torna-se possível observar como alterações em determinados valores impactam as construções realizadas, permitindo ao sujeito acompanhar transformações e identificar regularidades. Ao manipular esses parâmetros de forma contínua, o usuário passa a explorar diferentes configurações de um mesmo objeto matemático, analisando como determinadas mudanças influenciam suas propriedades e relações. Esse movimento favorece uma compreensão mais dinâmica, na medida em que as transformações deixam de ser apenas imaginadas e passam a ser visualizadas em tempo real.

Essa possibilidade de variação controlada constitui um aspecto central em ambientes de geometria dinâmica, pois permite ao sujeito levantar hipóteses, confrontá-las com os resultados obtidos e reformular suas ideias a partir das observações realizadas. Mais do que verificar resultados, trata-se de um processo no qual diferentes situações podem ser exploradas rapidamente, ampliando as possibilidades de análise e favorecendo a identificação de padrões. Como ilustrado na Figura 16, a variação do parâmetro n, por meio do controle deslizante, permite observar as transformações na configuração dos pontos, evidenciando a construção progressiva da figura.

Figura 16 – Variação de parâmetros por meio do controle deslizante no *GeoGebra*



Fonte: Elaboração própria (2026)

Na representação apresentada, nota-se que, à medida que o valor de n é alterado, a quantidade e a organização dos pontos se modificam. Essa variação contínua permite

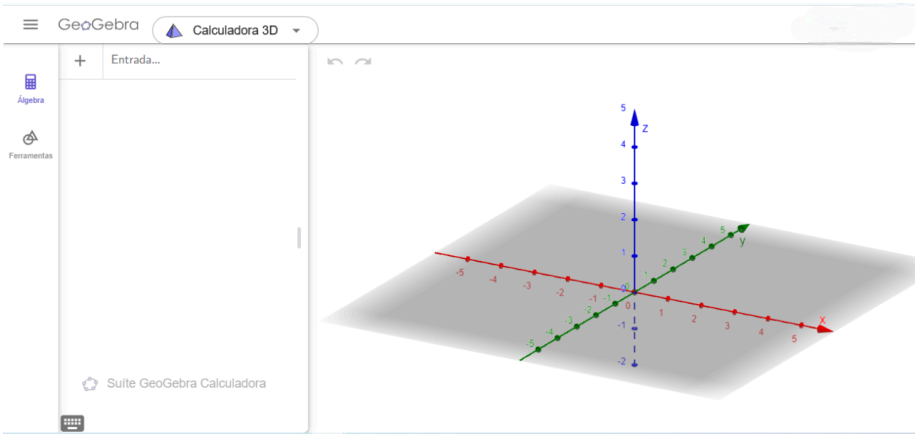
acompanhar a construção da figura em diferentes etapas, favorecendo a identificação de regularidades e a compreensão das relações envolvidas. Além disso, a possibilidade de manipular o parâmetro de forma dinâmica contribui para que o sujeito analise diferentes configurações de maneira integrada, articulando visualização e interpretação matemática.

Outro aspecto relevante é que o *GeoGebra* possibilita o salvamento e o compartilhamento das construções realizadas, o que amplia as possibilidades de continuidade dos processos investigativos. Esse aspecto permite que as produções não se restrinjam a um momento específico de interação, podendo ser retomadas, modificadas e aprofundadas posteriormente. Ao revisitar as construções, o sujeito tem a oportunidade de reavaliar estratégias, identificar novas relações e dar continuidade ao processo de compreensão. Ao permitir que os objetos sejam revisitados e modificados, o *software* contribui para a circulação de ideias matemáticas e para o aprofundamento das análises realizadas. Nesse cenário, o conhecimento deixa de ser construído de forma isolada, passando a integrar um movimento mais amplo de compartilhamento e discussão, no qual diferentes interpretações e abordagens podem emergir a partir de uma mesma construção.

Desse modo, a interface e os recursos do *GeoGebra*, quando considerados em conjunto, configuram um ambiente que ultrapassa a simples construção de figuras, constituindo-se como um espaço propício à experimentação, à investigação e à produção de conhecimento matemático.

Para além dessas possibilidades, o *GeoGebra* também disponibiliza um ambiente tridimensional, que amplia as formas de representação ao permitir a construção e visualização de objetos no espaço. A Figura 17 apresenta a interface da Calculadora 3D do *GeoGebra*.

Figura 17 – Aba da Calculadora 3D do *GeoGebra*



Fonte: *GeoGebra* (2026)

Na Figura 17, percebe-se a presença de três eixos coordenados, que permitem a representação de objetos no espaço tridimensional. Assim como no ambiente bidimensional, a interface também apresenta a janela de álgebra, na qual são exibidos os objetos construídos, e a aba de ferramentas, que possibilita a seleção de diferentes recursos para a realização das construções. Entretanto, no ambiente tridimensional, tais elementos passam a operar em um contexto ampliado, no qual a visualização não se restringe ao plano, permitindo analisar a disposição dos objetos em diferentes direções e compreender relações que envolvem profundidade e volume. Além disso, a possibilidade de rotacionar a visualização favorece a observação das construções sob múltiplas perspectivas, o que contribui para a análise de estruturas espaciais.

De acordo com informações do próprio site do *GeoGebra*, o aplicativo "tornou-se o fornecedor líder de *software* dinâmico de matemática, apoiando a educação em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (STEM) e inovações no ensino e aprendizagem em todo o mundo" (*GeoGebra*, s.d.).

O uso do *GeoGebra* amplia significativamente as possibilidades pedagógicas no ensino da Matemática, ao permitir a criação de construções geométricas dinâmicas e interativas que não seriam possíveis sem o apoio do computador. A partir dessa perspectiva, o recurso contribui para que o estudante assuma um papel mais ativo na aprendizagem, explorando situações que ultrapassam as propostas tradicionais de sala de aula.

> A respeito do uso do software GeoGebra ele se torna uma tecnologia que favorece o desenvolvimento cognitivo, ou seja, se tem a possibilidade de produzir conhecimentos matemáticos, dando significado aos conteúdos e problemas que estão sendo explorados e trabalhados. Ao se considerar o processo de pensar com o GeoGebra, cujo design tecnológico oferece a possibilidade de criação de novas ferramentas, é possível identificar a presença da auto semelhança e do processo iterativo na aplicação da ferramenta criada. (Barbosa, 2019, p. 149)

Nesse contexto, o ambiente digital potencializa processos característicos da atividade matemática, como a formulação de conjecturas, a reflexão sobre as próprias ações e o desenvolvimento da capacidade de abstração e generalização, evidenciando que a interação com o *software* pode contribuir para a construção de significados matemáticos de forma mais dinâmica e articulada. De acordo com Borba, Scucuglia e Gadanidis (2015, p.24) "As atividades que propõem a construção de objetos com uso de *softwares* de GD buscam construir cenários que possibilitem a investigação matemática", o que reforça o potencial desses ambientes para a promoção de práticas investigativas. Nessa perspectiva, o uso do

GeoGebra pode ser compreendido não apenas como um recurso tecnológico, mas como um meio que favorece a reorganização das formas de pensar e fazer matemática. Araújo (2014, p. 33) afirma que:

> [...] O *GeoGebra* tem como um diferencial didático a possibilidade de representação de um mesmo objeto na forma algébrica e na forma geométrica que interagem entre si, possibilitando ao usuário condições para investigar, conjecturar, experimentar situações em um processo dinâmico.

O uso de *softwares* de Geometria Dinâmica tem se mostrado cada vez mais presente nas salas de aula e em diversos trabalhos desenvolvidos na área da Educação Matemática. Araújo (2014) descreve, em seu estudo, uma proposta de experimentação com o uso do *GeoGebra* junto a alunos da 1ª série do Ensino Médio, na abordagem do conteúdo de função afim. Para a produção de dados, foi aplicado um questionário com o intuito de obter informações sobre o conhecimento prévio dos participantes a respeito de funções polinomiais. O autor elaborou uma sequência didática que foi aplicada em duas turmas, sendo uma delas com o uso do *GeoGebra* e a outra sem esse recurso digital, tendo como objetivo analisar diferentes formas de ensinar Matemática.

Ao final da pesquisa, após a análise dos dados produzidos, o autor concluiu que o uso do *GeoGebra* pode beneficiar o processo de ensino e aprendizagem, conduzindo os estudantes por caminhos investigativos. No estudo, essa característica investigativa está diretamente relacionada às possibilidades de interação proporcionadas pelo *software*, nas quais os estudantes podem explorar diferentes representações de uma mesma função, estabelecer relações entre seus coeficientes e sua representação gráfica e analisar essas relações de forma dinâmica. Ele ressalta que o uso do computador "pode viabilizar a exploração de atividades diversas que podem ser bem enriquecedoras, por oferecer condições múltiplas representações [...] onde permite a interatividade entre os objetos matemáticos e a visualização dos conceitos" (Araújo, 2014, p. 113), destacando ainda que o *GeoGebra* pode atuar como um elemento motivador para a aprendizagem em Matemática.

Essas possibilidades evidenciam que a experimentação-com-*GeoGebra* se constitui como um processo no qual o estudante não apenas observa, mas atua sobre os objetos matemáticos, estabelecendo relações, testando hipóteses e construindo significados a partir da interação com o ambiente digital. Além disso, os resultados apresentados por Araújo (2014) indicam que o grupo que teve acesso ao *software* apresentou desempenho superior em relação ao grupo que não utilizou o recurso, evidenciando que a experimentação mediada pelo

GeoGebra pode favorecer a compreensão de conceitos matemáticos por meio da articulação entre diferentes formas de representação.

Na mesma direção, Rezende, Pesco e Bortolossi (2012) exploram o uso do *GeoGebra* no ensino de funções reais a partir de uma abordagem centrada nos aspectos dinâmicos do conceito de função. Os autores desenvolvem as atividades em três módulos: variação da função afim, variação da função quadrática e variação da função exponencial, organizando o trabalho em torno da análise do comportamento variacional dessas funções.

As atividades são conduzidas por meio de construções no próprio *software*, nas quais os estudantes interagem com diferentes representações e acompanham, de forma dinâmica, as alterações decorrentes de suas próprias ações. Ao manipular elementos e observar os efeitos dessas modificações, os alunos passam a analisar como determinadas grandezas se relacionam e se transformam, deslocando o foco de uma leitura centrada em valores fixos para uma compreensão apoiada na variação. Ao final, os autores reforçam a necessidade de resgatar os aspectos dinâmicos no ensino das funções, argumentando que abordagens centradas na variação possibilitam uma compreensão mais consistente desse conceito.

Em um contexto distinto, voltado ao Ensino Superior, Barbosa (2019) desenvolveu uma pesquisa fundamentada em experimentos de ensino com estudantes de graduação em Matemática, na qual a produção de dados foi organizada em quatro atividades centradas na construção de fractais no s*oftware GeoGebra*. Essas atividades foram estruturadas de forma progressiva, articulando representações bidimensionais e tridimensionais por meio de dois blocos: no primeiro, o Triângulo de Sierpinski e o Tetraedro de Sierpinski possibilitaram a exploração de padrões interativos a partir da transposição do plano para o espaço; no segundo, o Tapete de Sierpinski e a Esponja de Menger favoreceram a análise de estruturas baseadas em subdivisões quadradas e cúbicas, também ampliadas para o contexto tridimensional. Nesse processo, o *GeoGebra* foi utilizado como ambiente de investigação, no qual os participantes construíram, testaram e refinaram estratégias, evidenciando a potencialidade da experimentação com tecnologias digitais na exploração de regularidades e na compreensão de processos iterativos.

Também no contexto da formação de professores, Mazzi (2015) utilizou a experimentação com o *GeoGebra* em atividades desenvolvidas com alunas do curso de Licenciatura em Matemática. O uso do *software*, articulado ao desenho pedagógico elaborado, favoreceu a construção de novos entendimentos sobre o comportamento das sequências,

evidenciando o potencial dessa ferramenta no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

O autor destacou que foi possível observar que, a partir da "Experimentação-com-*GeoGebra* e da visualização (utilizando o zoom), compreenderam a definição de convergência de sequências" (Mazzi, 2015, p. 13). Os dados indicaram que o dinamismo e visualização proporcionados pelo *GeoGebra* contribuíram significativamente para o desenvolvimento conceitual das participantes. Além disso, os resultados da pesquisa indicam que, nesse processo, as estudantes elaboraram conjecturas, testaram-nas e, quando necessário, as refutaram, evidenciando que a experimentação assume um papel central na construção do conhecimento matemático mediado pela tecnologia.

Os estudos apresentados evidenciam que o uso de *softwares* de geometria dinâmica vai muito além de construir figuras geométricas é possível testar ideias, formular conjecturas, observar padrões, verificar hipóteses, visualizar propriedades, buscando promover um ensino investigativo, dinâmico e também autônomo, no qual o aluno pode refletir e buscar suas próprias descobertas. Nessa perspectiva, a experimentação-com-*GeoGebra* não se limita à manipulação de representações, mas envolve um processo ativo de investigação, no qual o sujeito atribui significado às ações realizadas, reorganizando suas formas de pensar a matemática a partir da interação com o ambiente digital.

Nesse contexto, a experimentação mediada por tecnologias pode ser compreendida à luz do construto dos seres-humanos-com-mídias, segundo o qual a produção de conhecimento não é atribuída exclusivamente ao sujeito, mas emerge das interações estabelecidas entre humanos e recursos tecnológicos.

3. METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo, são sistematizados os aspectos metodológicos da pesquisa, com ênfase na abordagem qualitativa adotada. Serão descritos o processo de produção dos dados, o contexto em que o estudo foi realizado, os participantes envolvidos, as atividades propostas, bem como os métodos utilizados para a análise dos dados. Além disso, serão detalhados os procedimentos relacionados aos experimentos de ensino e à investigação matemática, que orientaram o desenvolvimento da pesquisa.

3.1 ABORDAGEM METODOLÓGICA

Esta pesquisa tem como objetivo compreender como licenciandos em Matemática exploram relações, propriedades e generalizações sobre números figurados em um ambiente de experimentação-com-*GeoGebra.* Para o desenvolvimento deste estudo, optou-se por uma abordagem metodológica de natureza qualitativa, e nesse cenário, a investigação matemática foi adotada como caminho para a produção de dados, visto que favorece a exploração de ideias, a formulação de conjecturas e a reflexão crítica sobre conceitos matemáticos.

A escolha metodológica também se justifica pela origem histórica dos números figurados, conteúdo que remonta à tradição pitagórica, na qual os números eram compreendidos e representados por meio de configurações geométricas de pontos (Eves, 2011). Essa origem geométrica do conceito reforça a pertinência de uma abordagem investigativa centrada na visualização e na manipulação de representações espaciais, uma vez que aproxima o licenciando do próprio modo pelo qual esses números foram historicamente concebidos. Assim, mais do que um recurso ilustrativo, a dimensão histórica dos números figurados orienta a escolha da investigação matemática e da experimentação com *software GeoGebra* como caminhos metodológicos coerentes com a natureza do objeto estudado.

3.1.1 Pesquisa qualitativa

A pesquisa qualitativa apresenta-se como um caminho metodológico voltado à compreensão de fenômenos em sua dimensão interpretativa, considerando os sentidos atribuídos pelos sujeitos às suas ações e experiências. De acordo com Rodrigues, Oliveira e

Santos (2021, p. 158), a pesquisa qualitativa implica em “analisar, observar, descrever e realizar práticas interpretativas de um fenômeno a fim de compreender seu significado”.

Essa abordagem, ao privilegiar o contato direto com a realidade estudada, “envolve a obtenção de dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo a perspectiva dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo” (Godoy, 1995, p. 58).

Dentro do escopo das abordagens qualitativas, observa-se que a pesquisa em Educação Matemática compreende a Matemática, a forma como ela é estruturada e os significados que assume no mundo, contribuindo tanto para o entendimento da própria Matemática quanto para apoiar práticas pedagógicas no campo da Educação (Bicudo, 1993).

Nesse horizonte, “[...] pesquisas realizadas segundo uma abordagem qualitativa nos fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações” (Borba; Araújo, 2004, p. 25). Assim, o foco desloca-se para a compreensão e interpretação, oferecendo ao pesquisador elementos que favorecem a análise em profundidade dos fenômenos observados. Destaca-se ainda que “a pesquisa qualitativa não procura enumerar e/ou medir os eventos estudados, nem emprega instrumental estatístico na análise dos dados” (Godoy, 1995, p.58). O rigor dessa abordagem está, portanto, na consistência interpretativa e na capacidade de apreender o fenômeno em sua complexidade contextual.

Por fim, compreende-se que, “Do ponto de vista metodológico, a melhor maneira de se captar a realidade é aquela que possibilita ao pesquisador ‘colocar-se no papel do outro’ vendo o mundo pela visão dos pesquisados” (Godoy, 1995, p. 61). Esse princípio reforça a necessidade de uma postura investigativa capaz de apreender os fenômenos a partir da perspectiva dos sujeitos envolvidos, constituindo um processo de análise que valoriza a experiência concreta como fonte central de conhecimento.

3.1.2 Experimento de ensino de Matemática

O experimento de ensino se consolidou na Educação Matemática, com o objetivo de aprofundar a compreensão do desenvolvimento do conhecimento dos estudantes. Nos Estados Unidos, os experimentos de ensino em Educação Matemática surgiram por volta de 1970 (Steffe; Thompson, 2000). O experimento de ensino é utilizado como um recurso conceitual para organizar a prática dos pesquisadores e explorar a Matemática desenvolvida pelos

estudantes. Diferente da entrevista clínica, que visa captar o conhecimento que o aluno possui em determinado momento, o experimento de ensino busca compreender como esse conhecimento se transforma ao longo do tempo. Ele permite que os pesquisadores experimentem diferentes maneiras de motivar o aprendizado, funcionando como uma metodologia dinâmica e viva, projetada para analisar e explicar as atividades matemáticas dos estudantes (Steffe; Thompson, 2000).

Um dos principais propósitos de se utilizar a metodologia de experimento de ensino é permitir que os pesquisadores vivenciem, em primeira mão, a aprendizagem e o raciocínio matemático dos estudantes. “Tudo o que os estudantes dizem ou fazem durante a interação com os pesquisadores em determinado contexto constitui potencial dado para inferências sobre suas operações conceituais, servindo para confirmar ou refutar hipóteses” (Steffe; Thompson, 2000, p. 296, tradução nossa). É importante ressaltar que, em experimentos de ensino, o pesquisador não busca simplesmente que os alunos resolvam problemas isolados; o interesse central reside em compreender os padrões de assimilação dos estudantes e acompanhar como esses padrões evoluem à medida que eles participam de atividades matemáticas (Steffe; Thompson, 2000).

Assim, o experimento de ensino se configura como uma metodologia viva e dinâmica, permitindo que os pesquisadores acompanhem não apenas o conhecimento que os estudantes possuem, mas também como ele se transforma e se desenvolve por meio da interação e da atividade matemática. Essa proposta envolve uma série de sessões de interação entre o pesquisador e os alunos, que se estendem por um período definido no contexto do ensino-aprendizagem. O pesquisador que conduz esses encontros busca, essencialmente, compreender e organizar o modo de pensar dos estudantes ao passo que estes se dedicam à exploração e solução de problemas (Scucuglia, 2006).

Diversos trabalhos desenvolvidos por integrantes do GPIMEM – Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática, grupo do qual faço parte, incluindo artigos, dissertações e teses, têm utilizado o experimento de ensino como caminho metodológico para compreender e analisar os processos de ensino e aprendizagem em Matemática. Entre esses estudos, Barbosa e Scucuglia (2022) investigaram como estudantes de graduação em Matemática se envolveram com conceitos de Geometria Fractal por meio do *software GeoGebra*. Em outra pesquisa, Scucuglia et al. (2020) recorreram a essa metodologia para analisar aspectos do pensamento matemático de licenciandos que

emergiram durante a realização de uma tarefa alicerçada em programação com um aplicativo on-line desenvolvido em *Blockly*.

De maneira semelhante, Carmo (2024) buscou compreender como os estudantes exploram as aplicações do Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável real utilizando calculadoras. Já Silva (2023) empregou o experimento de ensino para compreender as experiências de alunos na produção de vídeos curtos sobre conteúdos matemáticos em sala de aula. Por sua vez, Scucuglia (2006) conduziu uma investigação voltada à compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo, contribuindo para o entendimento de como os estudantes constroem significados em torno desse conceito.

Essas produções evidenciam a relevância dessa abordagem nas pesquisas desenvolvidas no GPIMEM, ao possibilitarem uma análise aprofundada das práticas pedagógicas e dos processos de aprendizagem que emergem em diferentes contextos educativos.

3.1.3 Investigação matemática

A investigação matemática corresponde "a uma metodologia de ensino, vai além de simples investigação matemática" (Cardoso; Saravali, 2025, p. 13), pois envolve a busca por relações, propriedades e significados mais profundos dentro da própria Matemática. Nesse sentido, "investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades" (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2019 p. 13). Assim, o ato de investigar assume um caráter exploratório, no qual o conhecimento se constrói a partir da curiosidade, da formulação de hipóteses e da análise de possíveis caminhos.

Outro aspecto relevante da investigação matemática é a valorização do percurso realizado. Muitas vezes, as descobertas feitas no processo revelam-se tão importantes quanto o resultado final. Como destacado, "para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. "Outra vez, não se conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que proporciona" Ponte, Brocardo e Oliveira (2019 p. 17). Dessa forma, a investigação não se limita a respostas prontas, mas promove aprendizagens significativas e abre espaço para novas possibilidades no estudo da Matemática.

> As Investigações Matemáticas utilizadas em sala de aula visam retomar a Matemática de forma genuína com atividades que envolvem a descoberta, enfatizam o caminho a ser percorrido, com a valorização do momento da investigação como importante para que se desenvolva a exploração da Matemática e a aquisição de conhecimento. Esse processo de investigação, de forma adaptada, pode ser trabalhado com os alunos de qualquer faixa etária ou ano escolar, de forma atrativa e de acordo com o contexto trabalhado (Cardoso; Saravali, 2025, p. 14).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2019, p. 20) dividem a investigação matemática em quatro etapas: Exploração e formulação de questões; conjecturas; testes e reformulação; e justificação e avaliação, conforme sintetizado no Quadro 1.

Quadro 1 – Etapas na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	■ Reconhecer uma situação problemática ■ Explorar a situação problemática ■ Formular questões
Conjecturas	■ Organizar dados ■ Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	■ Realizar testes ■ Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	■ Justificar uma conjectura ■ Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Adaptado de Ponte, Brocardo e Oliveira (2019, p. 20)

O Quadro 1 sintetiza as etapas envolvidas na realização de uma investigação matemática, conforme propostas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2019). A primeira etapa, exploração e formulação de questões, refere-se ao momento em que o estudante reconhece e explora uma situação problemática, chegando à formulação de questões a serem investigadas. Em seguida, na etapa das conjecturas, os dados são organizados e utilizados como base para a formulação de conjecturas, acompanhadas de afirmações que as sustentem. A terceira etapa, testes e reformulação, envolve a realização de testes que permitam confirmar, refinar ou refutar as conjecturas formuladas inicialmente. Por fim, na etapa de justificação e avaliação, o estudante justifica a conjectura validada e avalia o raciocínio empregado ou o resultado obtido, consolidando o processo investigativo.

O aprendizado em Matemática depende da atuação ativa do estudante, que explora suas capacidades de pensamento e de sentimento para progredir em sua compreensão. Esse engajamento é justamente o que torna a investigação um recurso valioso no processo educativo (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2019).

A investigação matemática esteve presente em todas as etapas desta pesquisa, desde o planejamento das atividades até a análise dos registros produzidos nos encontros. As atividades foram desenvolvidas com o objetivo de fazer com que os participantes observassem regularidades, comparassem representações e buscassem compreender as relações existentes entre as construções planas e espaciais dos números figurados no *GeoGebra*. Cada proposta partia da exploração de figuras e da observação de padrões, levando os licenciandos a discutir e a expressar o que percebiam, formulando explicações próprias sobre os resultados obtidos, criando conjecturas e, posteriormente, analisando, por meios matemáticos, a sua veracidade. Assim, a ênfase não estava em apresentar respostas prontas, mas em permitir que os estudantes interpretassem as situações e chegassem às conclusões por meio de suas próprias análises. O percurso de cada atividade mostrou-se tão importante quanto os resultados obtidos.

Durante as sessões de ensino, a postura adotada, como pesquisadora, foi a de acompanhar e incentivar o raciocínio dos licenciandos, criando momentos de diálogo e de trocas de ideias sobre o que era observado nas construções. As intervenções ocorreram de modo a estimular novas tentativas e comparações, reforçando a importância do pensamento investigativo na aprendizagem da Matemática. Em vários momentos, as dúvidas levantadas pelos licenciandos se transformaram em novos questionamentos, o que permitiu ampliar a discussão e aprofundar a compreensão do tema trabalhado.

Na análise dos dados, a investigação também se fez presente. As falas e os registros dos licenciandos foram observados com atenção, considerando-se as formas de raciocínio que emergiram das atividades: como identificaram padrões, como justificaram suas ideias, de que modo relacionaram diferentes tipos de números figurados, bem como de que maneira elaboraram conjecturas, testaram estratégias e validaram resultados. Esse olhar investigativo buscou compreender os caminhos seguidos pelos participantes e o tipo de entendimento que construíram ao longo dos encontros. Assim, a investigação matemática orientou não apenas a condução das atividades em sala, mas também o modo de interpretar o que foi produzido, servindo como base teórica e metodológica da pesquisa.

3.1.4 Articulação entre o experimento de ensino e a investigação matemática

A compreensão dos processos de produção de conhecimentos matemáticos investigados neste estudo exigiu a articulação entre o Experimento de Ensino e a Investigação Matemática. Essas perspectivas assumem funções distintas, porém complementares, na pesquisa. O Experimento de Ensino estrutura metodologicamente a investigação (Steffe; Thompson, 2000), enquanto a Investigação Matemática orienta a natureza das atividades desenvolvidas pelos participantes (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2019). A articulação entre essas perspectivas permitiu que a oficina fosse organizada de modo a favorecer a produção de conhecimentos matemáticos pelos licenciandos e, simultaneamente, possibilitou compreender como esses conhecimentos foram produzidos ao longo das atividades.

Ao estruturar metodologicamente a pesquisa, o Experimento de Ensino possibilitou que a produção dos conhecimentos fosse acompanhada durante todo o desenvolvimento da oficina. Nessa abordagem, o interesse do pesquisador não se restringe às respostas apresentadas pelos participantes, mas concentra-se na compreensão dos processos de aprendizagem desenvolvidos pelos participantes (Steffe; Thompson, 2000). Assim, as intervenções realizadas ao longo dos encontros não tiveram como finalidade conduzir os licenciandos à obtenção de respostas específicas, mas favorecer a explicitação de suas estratégias, promover novas explorações e produzir elementos que permitissem compreender a reorganização de seus conhecimentos matemáticos ao longo da investigação.

A elaboração das atividades desenvolvidas na oficina fundamentou-se nos princípios da Investigação Matemática. As tarefas foram planejadas para que os participantes assumissem um papel ativo diante das situações propostas, explorando construções no *GeoGebra*, identificando regularidades, formulando conjecturas, testando diferentes possibilidades e construindo justificativas para as relações produzidas. Dessa forma, a produção de conhecimentos matemáticos não decorreu da aplicação de procedimentos previamente estabelecidos, mas das investigações realizadas pelos próprios licenciandos durante a exploração das atividades, conforme defendem Ponte, Brocardo e Oliveira (2019).

Essa articulação permitiu que as atividades investigativas deixassem de constituir apenas um contexto para a resolução de problemas matemáticos e passassem a integrar o próprio processo investigativo da pesquisa. Ao mesmo tempo em que os participantes exploravam relações, formulavam conjecturas e produziam justificativas, a pesquisadora acompanhava essas produções, formulava novos questionamentos e analisava como os

conhecimentos eram produzidos e reorganizados durante a oficina. Dessa forma, o Experimento de Ensino e a Investigação Matemática não atuaram de maneira independente, mas constituíram perspectivas complementares que possibilitaram compreender os processos de produção de conhecimentos matemáticos desenvolvidos ao longo da investigação.

3.2 PRODUÇÃO DE DADOS

A produção dos dados foi organizada em duas sessões, com a participação de duas duplas. Cada sessão, com duração máxima de duas horas, contemplou uma dupla por vez e aconteceu em dias e horários distintos, definidos conforme a disponibilidade dos participantes. Todos os encontros foram previamente agendados, com flexibilidade para possíveis intercorrências, e concentraram-se no mês de outubro de 2025 (Figura 18).

Figura 18 – Cronograma da produção de dados



Fonte: Elaboração própria (2025)

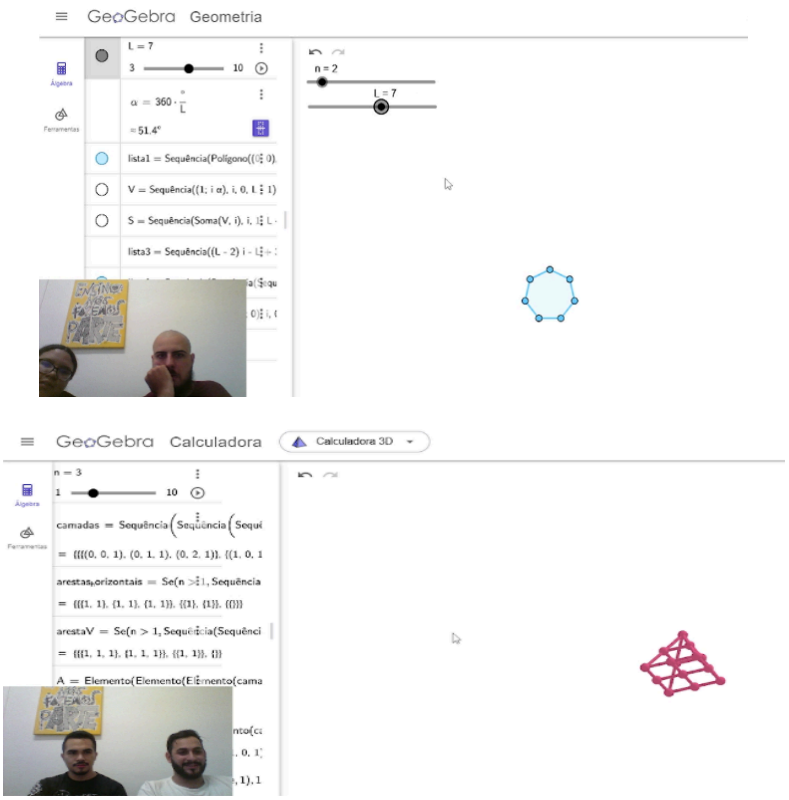
A Figura 18 apresenta o cronograma elaborado para a realização da produção dos dados, evidenciando a distribuição das sessões ao longo do mês, indicando os dias reservados a cada uma das duas duplas participantes (Grupo 1 e Grupo 2). Todos os encontros foram gravados em vídeo, com o consentimento dos participantes, e suas gravações puderam ser transcritas total ou parcialmente, com o objetivo de registrar os processos investigativos, criativos e formativos vivenciados ao longo das sessões. As gravações foram realizadas por meio de três *softwares* distintos: *OBS Studio, Google Meet* e Ferramenta de Captura. As transcrições foram produzidas utilizando o *Turbo Scribe*, ferramenta que converte áudio em texto. Para as atividades de investigação matemática, utilizou-se o *GeoGebra*. Nele a pesquisadora construiu todo o aplicativo, proporcionando uma abordagem interativa e original

para a visualização e a manipulação de objetos geométricos e matemáticos. Todos os registros gerados serão utilizados exclusivamente para fins acadêmicos e científicos.

3.3 CENÁRIO DA PRODUÇÃO DE DADOS

As sessões destinadas à produção dos dados foram realizadas no mês de outubro de 2025, na Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto. Os participantes foram alunos regulares do curso de Licenciatura em Matemática da referida instituição, os quais estavam matriculados, naquele período, nas disciplinas de Estágio Supervisionado I e Estágio Supervisionado II, sob a responsabilidade do orientador desta pesquisa. Todos os discentes foram convidados a integrar a pesquisa, e a seleção foi realizada a partir da manifestação de interesse. Durante esse período, quatro licenciandos participaram das atividades, organizados em duas duplas formadas conforme a compatibilidade de horários e a disponibilidade dos interessados, como ilustra a Figura 19.

Figura 19 – Participantes nos encontros da produção de dados



Fonte: Elaboração própria (2025)

A Figura 19 registra o momento dos encontros de produção de dados, realizados por meio do ambiente virtual utilizado na pesquisa. A primeira sessão foi dedicada à investigação matemática. Nessa etapa, os participantes analisaram os números figurados planos, com ênfase nos números triangulares, quadrangulares e retangulares. O trabalho contou com o uso do *software GeoGebra*, que possibilitou a construção e a visualização das figuras no plano. As duplas de licenciandos exploraram padrões e propriedades matemáticas por meio das representações geométricas, identificando regularidades e discutindo possíveis generalizações. O enfoque foi o desenvolvimento do raciocínio matemático e da visualização geométrica, além do incentivo à formulação de hipóteses e conjecturas.

Dando continuidade à investigação matemática, na segunda sessão os participantes exploraram números figurados espaciais, como pirâmides triangulares, pirâmides quadradas e cubos. Essa etapa permitiu a transição do raciocínio bidimensional para o tridimensional, aprofundando a compreensão sobre a construção e a generalização dos números figurados em diferentes dimensões. Também foi utilizado o *GeoGebra*, com foco nas representações espaciais e em suas relações com os números figurados planos, apresentadas na Figura 20.

Figura 20 – Licenciandos na sala em que ocorreu a produção dos dados



Fonte: Elaboração própria (2025)

A Figura 20 registra a participação voluntária dos licenciandos durante a sessão presencial de produção de dados, mediante a autorização por meio do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) assinado pelos próprios participantes, que

permitiu o uso de suas imagens e a transcrição de suas falas (ver modelo no APÊNDICE B). Ressalta-se que os nomes utilizados para se referir aos participantes são fictícios. Por envolver seres humanos, o estudo foi submetido à apreciação e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP)[2], garantindo a possibilidade de realização da produção de dados.

3.4 PARTICIPANTES DA PESQUISA

O estudo contou com a participação de quatro licenciandos do curso de Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", matriculados nas disciplinas de Estágio I e II, correspondentes ao terceiro e ao quarto ano daquele curso. Entre os participantes, havia três homens e uma mulher, organizados em duas duplas que permaneceram juntas ao longo de todas as sessões, garantindo continuidade na interação e nas atividades colaborativas.

A participação foi voluntária. O convite foi direcionado aos licenciandos matriculados nas disciplinas mencionadas, ministradas pelo orientador da pesquisa, sendo incluídos aqueles que demonstraram interesse e disponibilidade. Todos assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), assegurando seus direitos como participantes da pesquisa, bem como o anonimato e a confidencialidade das informações coletadas.

Em termos de conhecimento prévio, os licenciandos não possuíam familiaridade com os números figurados, embora a leitura do TCLE tenha fornecido uma compreensão inicial sobre o conceito e sobre as atividades a serem realizadas. Quanto ao *software GeoGebra*, todos apresentavam experiência básica adquirida ao longo da graduação em Matemática, o que possibilitou a construção e a visualização das figuras geométricas de forma autônoma durante as sessões. Ressalta-se que essa habilidade não constituiu um critério obrigatório para a participação.

As atividades ocorreram ao longo de dois encontros, totalizando aproximadamente quatro horas, em um ambiente silencioso e equipado com recursos tecnológicos adequados à execução das tarefas investigativas e criativas. Os participantes demonstraram motivação e engajamento ao longo dos encontros, colaborando ativamente nas atividades propostas e interagindo de forma construtiva entre seus pares, conforme perfil detalhado no Quadro 2.

---

[2] CAAE: 88026225.5.0000.5466

Quadro 2 – Informações dos participantes

	Nomes (fictícios)	Gênero	Idade	Ano da Graduação	Disciplina
Grupo 1	Miguel	Masculino	25 anos	3º ano	Estágio I
	Maria	Feminino	20 anos	3º ano	Estágio I
Grupo 2	Vitor	Masculino	24 anos	5° ano	Estágio II
	Davi	Masculino	21 anos	4º ano	Estágio I

Fonte: Elaboração própria (2025)

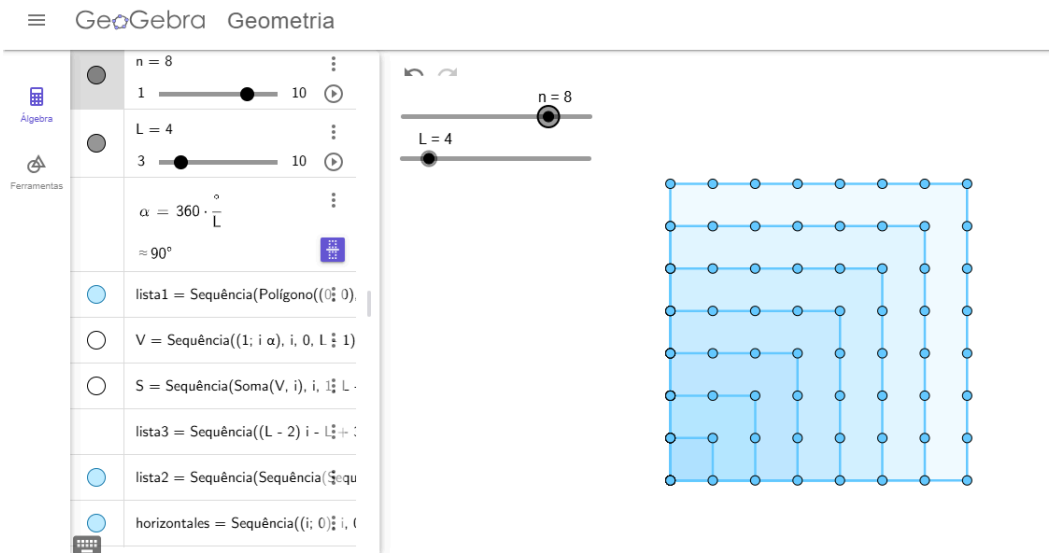
3.5 ATIVIDADES PARA A PRODUÇÃO DE DADOS

As atividades destinadas à produção dos dados foram elaboradas ao longo do segundo semestre de 2024 e início do primeiro semestre de 2025, com o objetivo de explorar os números figurados, tanto em suas formas planas quanto espaciais, por meio da participação ativa dos licenciandos durante a produção de dados. Para isso, foram planejadas duas atividades exploratórias, cuidadosamente estruturadas para incentivar a manipulação, a observação e a reflexão matemática.

Destaca-se, nas atividades, a utilização de programas criados especificamente no *GeoGebra* pela pesquisadora, capazes de gerar números figurados planos e espaciais. No caso dos números figurados planos, o programa permitiu que os licenciandos alterassem o número n (o índice que representa a posição na sequência) por meio de um controle deslizante, modificando a quantidade de pontos que compõem a configuração. Da mesma forma, foi possível ajustar o valor L, que representa o número de lados do polígono, por meio de outro controle deslizante, modificando a forma do polígono correspondente.

Embora as atividades tenham se concentrado nos números figurados triangulares, quadrados e retangulares, o aplicativo possibilitou a visualização de números poligonais de até 10 lados, ampliando as possibilidades de exploração pelos licenciandos, como pode ser observado na Figura 21. Para os números figurados espaciais (números piramidais), pirâmide triangular, pirâmide quadrada e cubo, outro programa foi desenvolvido, permitindo visualizações tridimensionais dinâmicas e igualmente manipuláveis pelos participantes da pesquisa.

Figura 21 – Aplicativo do *GeoGebra* para números figurados planos



Fonte: Elaboração própria (2025)

Cada atividade foi planejada de modo que os licenciandos pudessem explorar os controles deslizantes do *GeoGebra* de forma autônoma, recebendo explicações sobre o significado de cada controle, e registrando suas percepções individualmente em folhas, mesmo quando trabalhavam em dupla. Assim, conforme manipulavam os elementos de ajustes, os participantes buscavam padrões, formulavam conjecturas e testavam hipóteses, avançando progressivamente para a formulação de generalizações. Para cada sessão, cada participante recebeu uma cópia da atividade, permitindo registro individual de suas observações e reflexões, embora a interação com a dupla fosse contínua e colaborativa.

A primeira atividade teve como objetivo explorar, por meio de construções geométricas realizadas no *software GeoGebra*, as propriedades e as relações existentes entre diferentes tipos de números figurados planos, em especial os números triangulares, quadrados e retangulares. A proposta partiu da premissa de que a aprendizagem matemática pode ser potencializada quando conceitos abstratos são associados a representações visuais, uma vez que "[...] a visualização é protagonista na produção de sentido e na aprendizagem matemática" (Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2015, p. 53).

Ao utilizar o *GeoGebra* para construir, observar e interagir com as configurações de pontos que definem os números figurados, os licenciandos puderam: visualizar as somas de sequências numéricas (como as de números naturais) e compreender a estrutura que origina as

fórmulas algébricas correspondentes. Além disso, puderam estabelecer conexões explícitas entre as representações geométricas e algébricas dos padrões investigados nesta pesquisa.

A Figura 22 apresenta a primeira atividade proposta. Inicialmente, os licenciandos foram orientados a preencher uma tabela a partir das interações no *GeoGebra,* calculando e registrando os valores correspondentes a T_n (números triangulares), S_n (números quadrados) e R_n (números retangulares). A atividade propunha que os licenciandos identificassem e generalizassem as expressões algébricas que definem cada uma dessas sequências numéricas, de modo a estabelecer conexões entre sua representação numérica e a forma geométrica daqueles números figurados.

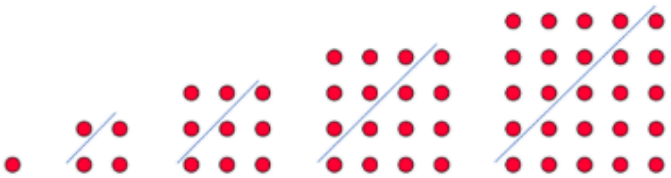
Figura 22 – Primeira atividade proposta

Com as interações no GeoGebra preencha a tabela abaixo e responda a questão:

n	T_n	Expressão Tn	S_n	Expressão S_n	R_n	Expressão R_n
1						
2						
3						
4						
5						
⋮						
n						

A. Como o número retangular R_n se relaciona com o número triangular T_n?

Observe a imagem abaixo e responda a questão:



A. Todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos?

Fonte: Elaboração própria (2025)

A Figura 23 apresenta a segunda atividade proposta, com o intuito de ampliar a investigação, estendendo as propriedades dos números figurados planos para suas correspondentes versões tridimensionais (os números figurados espaciais). Para isso, os licenciandos manipularam controles deslizantes em um aplicativo do *GeoGebra*, construindo

pirâmides triangulares (números tetraédricos) (P_n), pirâmides quadradas (números piramidais quadrados) (Q_n) e cubos (números cúbicos) (C_n), a fim de preencher uma nova tabela com valores e buscar generalizar suas expressões algébricas. O objetivo foi possibilitar a percepção de que os padrões numéricos e de crescimento observados nos números triangulares e quadrados se estendem ao contexto tridimensional, originando sequências específicas como a dos números piramidais e números cúbicos.

Figura 23 – Segunda atividade proposta

Manipule os controles deslizantes disponíveis em todos os links, complete a tabela abaixo e responda as questões:

n	P_n	Expressão Pn	Q_n	Expressão Q_n	C_n	Expressão C_n	$\sum_{n}^{1} C_n$
1							
2							
3							
4							
5							
⋮							
n							

A. Qual é o padrão oculto entre as formas planas e suas versões espaciais?

Por inspeção aos números em linhas sucessivas, temos:

- $S_n + C_n = n\,(R_n) = n^2(n+1)$,
- $T_n + S_n + C_n = 3(Q_n)$

B. Prove que $T_n + S_n + C_n = 3\,(Q_n)$ equivale à fórmula habitual $\sum_{1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Fonte: Elaboração própria (2025)

3.6 ANÁLISE DE DADOS DA PESQUISA

Os dados desta pesquisa foram produzidos em diferentes formatos, permitindo uma análise abrangente do processo de produção de conhecimento pelos licenciandos. Entre eles: gravações das sessões, realizadas por meio de filmadora digital e captura da tela dos

computadores; registros das interações entre os participantes; atividades desenvolvidas pelos licenciandos e o diário de campo da pesquisadora, contendo observações sobre a participação e as estratégias mobilizadas pelos licenciandos. Dessa forma, os dados foram constituídos por registros de diferentes naturezas, como visuais, digitais e textuais, possibilitando uma análise mais completa e detalhada do processo investigativo.

Os dados audiovisuais apresentam benefícios significativos, pois permitem revisitar as sessões, observar detalhes das interações e dos comportamentos que poderiam passar despercebidos em registros textuais ou digitais, favorecendo uma análise mais precisa e completa do processo. De acordo com Powell, Francisco e Maher (2004, p. 4), "Utilizando os registros de vídeo como dados, pesquisadores têm produzido descrições fascinantes de professores e estudantes em cenários clínicos e de sala de aula envolvidos numa matriz de tarefas matemáticas". Considerando a natureza dos dados produzidos, optou-se por analisá-los segundo o modelo proposto por Powell, Francisco e Maher (2004). Os autores apontam que esse modelo analítico é constituído por sete fases não lineares e interativas, apresentadas no Quadro 3.

Quadro 3 – Etapas do modelo analítico de Powell, Francisco e Maher

ETAPA DO MODELO	DESCRIÇÃO
Observar atentamente os dados do vídeo	Assistir os vídeos repetidamente, sem uma lente analítica específica, com o objetivo de compreender o contexto em sua totalidade.
Descrever os dados do vídeo	O objetivo é descrever objetivamente o conteúdo, podendo utilizar códigos de tempo para identificar cada período.
Identificar eventos críticos	Rever detalhadamente os vídeos identificando momentos significativos para as perguntas de pesquisa.
Transcrever	Nesse momento ocorre a transcrição dos momentos críticos, podendo ser de falas ou acontecimentos.
Codificar	Identificar os temas que auxiliam a pesquisa, de acordo com as questões e a perspectiva teórica do pesquisador.
Construir o enredo	Analisando os códigos gerados, o pesquisador tenta discernir uma narrativa sobre os dados.
Compor a narrativa	Ocorre em todas as fases, é a conexão de todos os dados e interpretações.

Fonte: Adaptado de Powell, Francisco e Maher (2004)

A análise contempla dois momentos distintos: a experimentação-com-GeoGebra sobre números figurados planos e a experimentação-com-GeoGebra sobre números figurados espaciais. Ao longo desses dois momentos, considera-se também a articulação entre as estruturas planas e espaciais, conforme as relações produzidas pelos participantes.

Nos momentos iniciais, privilegia-se a análise de construções relacionadas aos números figurados planos; em seguida, aos números figurados espaciais, ainda que estes possam, em determinados casos, ser compreendidos como composições de estruturas planas; por fim, considera-se explicitamente a articulação entre essas duas naturezas, evidenciando as relações estabelecidas pelos participantes.

A fim de exemplificar a linguagem que será utilizada na análise dos dados, apresenta-se um breve recorte transcrito de uma das sessões de investigação, utilizando o *GeoGebra*, no qual se evidencia a interação entre pesquisadora e licenciandos:

> **Miguel:** *Fixa N igual a três. Aí e lá também.*
> **Miguel:** *Todos fixados em três. A gente tem seis pontos formando esse triângulo... Isso. Agora foi igual. Aqui no quadrado. Aí, mudou L para quatro. E a gente tem nove. A gente consegue observar a quantidade de pontos de triângulo para quadrado para retângulo. E tem uma variação grande.*
> **Pesquisadora:** *Se a gente olhar o triângulo e o retângulo, alguma coisa?*
> **Maria:** *O dobro?*
> **Pesquisadora:** *Escreve aí para a gente ver depois se a gente pode testar se vale o dobro.*

Esse recorte tem apenas a finalidade de ilustrar a natureza dos dados que compõem o corpus da pesquisa, bem como a linguagem que será utilizada nas análises desenvolvidas no capítulo seguinte.

Cabe destacar que, na análise das construções produzidas pelos licenciandos, buscou-se atenção especial aos momentos em que a manipulação geométrica dos números figurados se aproximava do modo de raciocínio historicamente atribuído aos pitagóricos, ou seja, da identificação de regularidades e da formulação de generalizações a partir da organização visual de pontos. Essa lente de análise busca não apenas compreender os processos de produção de conhecimento matemático dos participantes, mas também discutir em que medida a experimentação com o *GeoGebra* pode revisitar, de forma didática, uma tradição historicamente consolidada e pouco explorada na formação inicial de professores de Matemática.

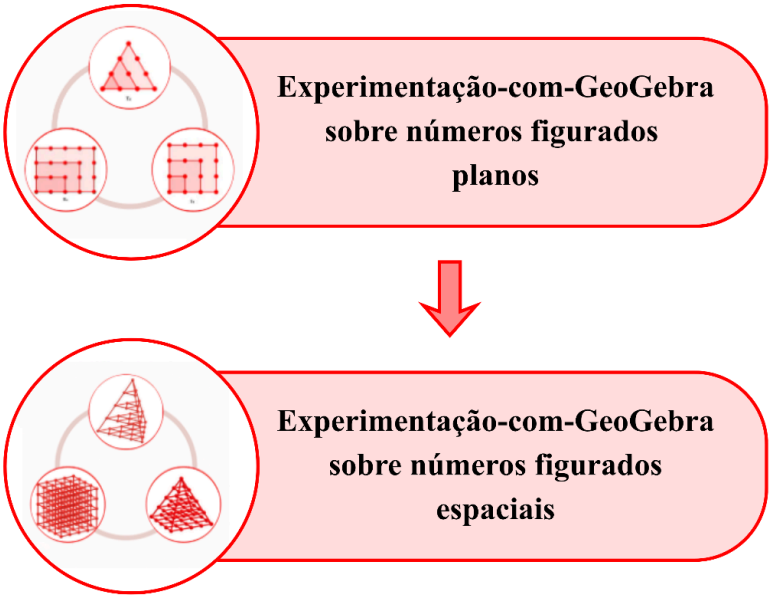
4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

O presente capítulo reúne a análise dos dados produzidos nesta pesquisa, buscando responder à seguinte pergunta de pesquisa: Como licenciandos em Matemática produzem conhecimentos sobre números figurados em um ambiente de experimentação-com-*GeoGebra*?

Em consonância com o objetivo geral de compreender como licenciandos em Matemática exploram relações, propriedades e generalizações sobre números figurados em um ambiente de experimentação-com-GeoGebra e com os objetivos específicos de analisar a exploração de regularidades, compreender a produção de conjecturas e examinar o papel do GeoGebra na produção do conhecimento sobre números figurados, este capítulo busca interpretar os processos evidenciados nos dados produzidos.

Para fins de organização analítica, os dados foram estruturados em dois temas, apresentados na Figura 24, que orientam a análise e a discussão dos resultados.

Figura 24 – Organização dos temas da análise dos dados



Fonte: Elaboração própria (2026)

Conforme ilustrado na Figura 24, a análise foi organizada em dois temas articulados. Inicialmente, são analisadas as produções de conhecimentos relacionados à experimentação-com-*GeoGebra* sobre números figurados planos. Em seguida, são discutidas

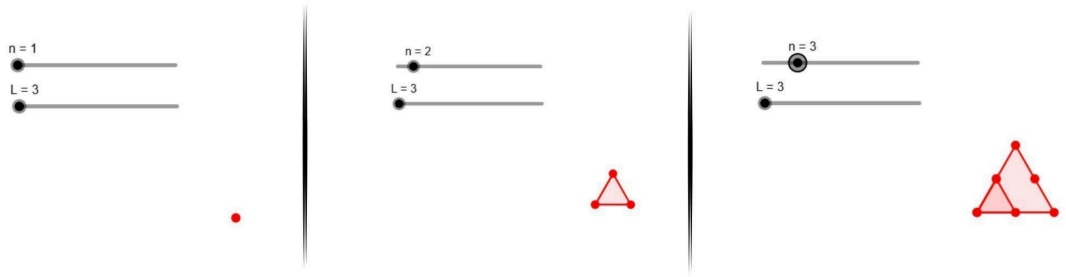
as produções de conhecimentos relativos à experimentação-com-*GeoGebra* sobre números figurados espaciais.

4.1 EXPERIMENTAÇÃO-COM-*GEOGEBRA* SOBRE NÚMEROS FIGURADOS PLANOS

A análise das interações produzidas na primeira sessão do experimento de ensino se orienta pelo objetivo geral de compreender como licenciandos em Matemática exploram relações, propriedades e generalizações sobre números figurados em um ambiente de experimentação-com-*GeoGebra*. Nesse sentido, ao longo das atividades, observa-se que os participantes não apenas manipulam as representações disponíveis no ambiente, mas passam a explorar relações entre diferentes configurações, buscando identificar regularidades e formular conjecturas que são progressivamente testadas e reorganizadas. A primeira sessão do experimento de ensino foi dedicada à experimentação com o *GeoGebra* sobre números figurados planos, em que os licenciandos receberam uma atividade a ser investigada, acompanhada de um roteiro sobre as funcionalidades e recursos do aplicativo, desenvolvido pela própria pesquisadora.

Nas atividades com números figurados, os aplicativos desenvolvidos possuíam controles deslizantes para a manipulação dinâmica das figuras. Nos números figurados planos, havia dois controles independentes: um para selecionar o número de lados do polígono regular (por exemplo: triângulo, quadrado, pentágono etc.), definindo assim o número figurado plano; e outro para ajustar a ordem do número figurado, isto é, sua posição na sequência. Essa organização permitia aos participantes variar parâmetros e observar, de modo imediato, as transformações produzidas na quantidade e na disposição dos pontos. Por exemplo, para a configuração triangular, a ordem $n = 1$ gerava 1 ponto; a ordem $n = 2$ gerava 3 pontos; $n = 3$ gerava 6 pontos, seguindo a sequência dos números triangulares, como ilustrado na Figura 25.

Figura 25 – Variação da ordem n em números figurados triangulares no *GeoGebra*



Fonte: Elaboração própria (2026)

No contexto do construto dos seres-humanos-com-mídias (Borba; Villarreal, 2005), essa organização do aplicativo não pode ser compreendida apenas como uma forma de apresentação visual dos números figurados, mas como parte constitutiva do modo como os licenciandos passam a pensar matematicamente com o *GeoGebra*. Os controles deslizantes, ao permitirem a variação simultânea do número de lados do polígono e da ordem da figura, criam condições para que a observação de casos particulares se transforme em exploração sistemática de regularidades. Assim, a mídia digital não apenas exibe uma representação previamente dada, mas participa da produção do conhecimento ao reorganizar o campo de ação dos participantes: eles podem variar parâmetros, comparar configurações, observar permanências e mudanças e, a partir disso, formular conjecturas.

Esse movimento aproxima-se da experimentação com tecnologias discutida por Borba e Villarreal (2005), na medida em que o feedback rápido do ambiente favorece a realização de testes sucessivos, a comparação entre exemplos e a construção progressiva de relações matemáticas. Essa compreensão aproxima-se do argumento de Hegedus e Moreno-Armella (2009, p. 397), segundo os quais, em ambientes tecnológicos dinâmicos, "os estudantes são capazes de manifestar novas formas de expressão associadas às suas explorações e novas formas de compreensão, fundamentadas na capacidade do ambiente de reagir às ações propostas pelos estudantes" (tradução nossa).

A figura permite visualizar que, ao aumentar o valor de n, novos pontos são adicionados à configuração triangular, formando camadas sucessivas. Esse aspecto se mostra relevante para a investigação desenvolvida, não apenas por tornar visível o crescimento da figura, mas por ter sido a partir dessa percepção de camadas sucessivas que os participantes começaram a associar cada novo valor de n a uma quantidade de pontos adicionados, associação que, mais adiante, sustenta a passagem para a expressão algébrica de T_n, na

medida em que possibilita aos participantes acompanhar o crescimento da figura e perceber regularidades associadas à variação da ordem.

No início da atividade, a pesquisadora propôs uma questão com a mesma essência para as duas duplas, com o objetivo de identificar possíveis conhecimentos prévios acerca dos números figurados. Tal encaminhamento se aproxima da perspectiva do experimento de ensino, uma vez que permite ao pesquisador identificar os conhecimentos mobilizados pelos estudantes em determinado momento e acompanhar suas possíveis transformações ao longo da atividade (Steffe; Thompson, 2000). As respostas obtidas evidenciam diferentes formas de aproximação inicial ao tema:

Primeira dupla:

> **Pesquisadora:** *Vocês já ouviram falar de números figurados? Conhecem?*
> **Miguel:** *Não*
> **Maria:** *Que eu estou lembrando, não*
> **Pesquisadora:** *E pelo nome vocês imaginam alguma coisa?*
> **Maria:** *Então, depois de ter lido aqui, e visto que nos espaciais tem pirâmides e tudo mais, então eu imagino que seja o plano… que tem triângulos, quadrados, retângulos.*

Segunda dupla:

> **Pesquisadora:** *Vocês já estudaram ou já ouviram falar sobre os números figurados?*
> **Vitor:** *Mais ou menos*
> **Davi:** *Não, eu não*
> **Pesquisadora:** *O que você conhece mais ou menos? Lembra de alguma coisa?*
> **Vitor:** *Ah, tipo, pra tentar formar objetos, sabe*
> **Pesquisadora:** *Figuras, polígonos?*
> **Vitor:** *Uhum*

A fala de Maria, uma das licenciandas da primeira dupla, faz referência a um material previamente apresentado no início da sessão. Trata-se do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, lido pelos participantes antes do início da produção de dados, no qual havia menções aos números figurados.

A partir dessas interações, evidencia-se que os participantes não demonstraram familiaridade prévia com o conceito de números figurados. Ainda assim, em ambas as duplas, observa-se a tentativa de atribuir sentido ao termo. Na primeira dupla, uma das participantes mobiliza elementos presentes no material inicial para elaborar uma interpretação, enquanto, na segunda, um dos participantes esboça uma ideia ainda inicial ao associar os números figurados à formação de objetos.

Após esse momento inicial, os participantes foram orientados a explorar livremente os controles deslizantes disponíveis no aplicativo, sem a necessidade de resolver ou registrar as

atividades propostas. Esse primeiro contato tinha como objetivo permitir que se familiarizassem com o ambiente e construíssem uma compreensão inicial sobre o funcionamento do *GeoGebra* e das representações ali presentes. A familiarização com o ambiente digital mostrou-se relevante, pois criou condições para que os participantes pudessem utilizá-lo com maior autonomia e segurança nos processos posteriores de exploração e investigação matemática.

Durante essa exploração, as ações dos participantes passam a se concentrar na variação dos controles deslizantes, especialmente na tentativa de compreender o papel de cada um na construção das figuras. Em vez de apenas manipular os valores, procuram interpretar o que cada alteração produz, como se observa no trecho a seguir:

> **Vitor:** *Aumenta o n*
> **Pesquisadora:** *O que vocês percebem a hora que vocês mexem no controle deslizante n?*
> **Vitor:** *É, o n meio que vai associar... Deixa eu colocar no 1 para ter uma noção melhor... E não precisar ficar contando um monte de coisa.*
> **Vitor:** *Bom, o 1 é um ponto. O L então... deixa eu só voltar*
> **Davi:** *É a quantidade de lados*
> **Vitor:** *tá associado à quantidade de vértices do objeto. E o n é meio que... 1 é um ponto apenas. O 2 está relacionado ao quê? Eu sei que o L está diretamente relacionado à quantidade de pontos aparentemente.*
> **Vitor:** *Deixa eu ver o 3. Ele gerou o objeto.*
> **Pesquisadora:** *O objeto que ele gerou é o mesmo do primeiro?*
> **Vitor:** *É um objeto duplicado. Não, não é o mesmo objeto, né? Porque vai associado ao nome, se não me engano, de acordo com a quantidade de vértices que ele tem.*
> **Pesquisadora:** *Tenta colocar no L igual a 3, pra ver se fica mais fácil da gente visualizar.*
> **Vitor:** *1 mais 2 mais 3. Ai, dá a impressão que é uma PA.*

À medida que a exploração avança, as relações entre os valores assumidos por n passam a ser observadas de forma mais sistemática, especialmente quando o participante tenta organizar os resultados produzidos. A enunciação “1 mais 2 mais 3” está associada à tentativa de compreender como a figura se constitui à medida que novos pontos são adicionados. Nesse momento, observa-se uma passagem importante da contagem pontual dos elementos para a identificação de uma estrutura de crescimento. A figura deixa de ser interpretada apenas como um conjunto de pontos a serem contados e passa a ser compreendida como uma organização formada por camadas sucessivas.

A organização da soma indica que o participante começa a reconhecer uma regularidade aditiva, na qual cada nova ordem da figura incorpora uma quantidade maior de pontos em relação à anterior. Essa transição emerge da interação entre as tentativas de Vitor e

as respostas produzidas pelo *GeoGebra* a cada novo valor atribuído a n: o software fornece o resultado numérico, o participante o reinterpreta e retorna ao *software* com uma nova hipótese, configurando um processo de moldagem recíproca (Borba, 1999), no qual a mídia reorganiza o raciocínio produzido e é, simultaneamente, reconduzida pelas escolhas do participante.

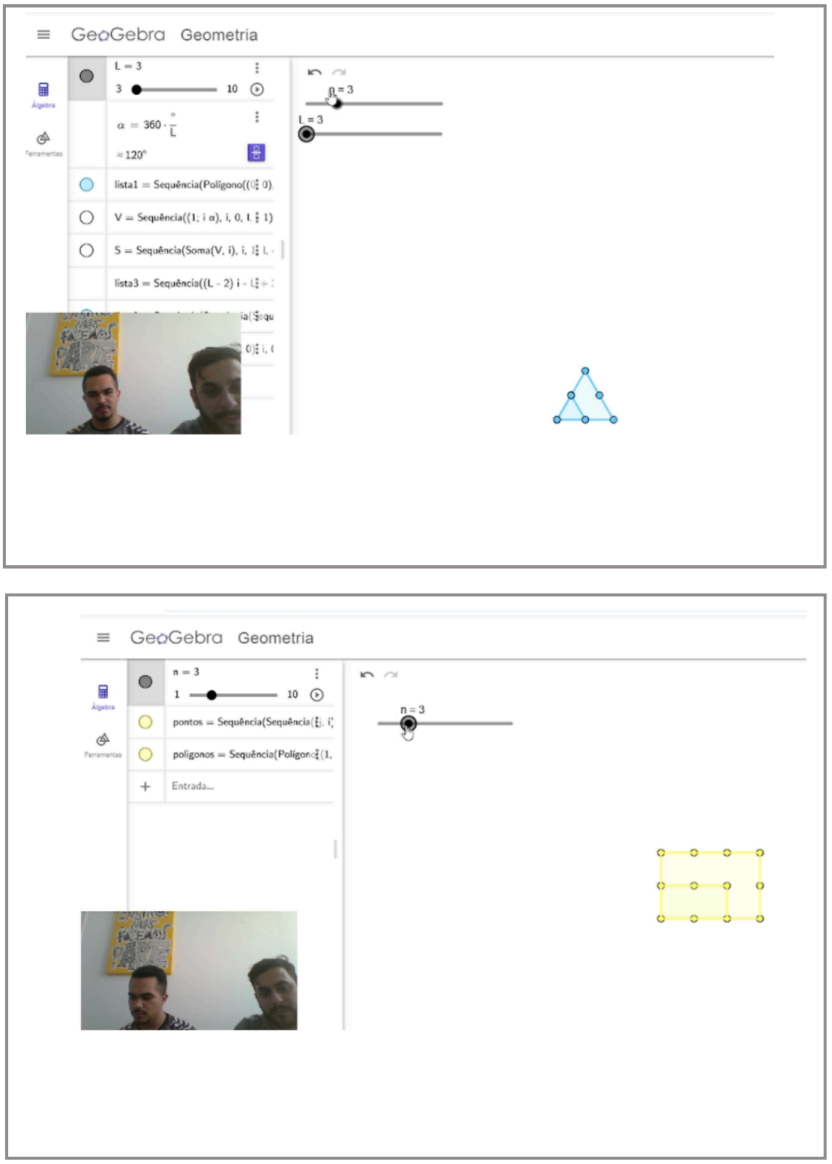
Esse raciocínio evidencia características da investigação matemática, uma vez que o participante busca identificar regularidades e produzir explicações para o comportamento observado (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2019). Dessa maneira, o foco deixa de estar apenas na manipulação das representações e passa a incluir a busca por regularidades que permitam explicar o comportamento observado. Ainda que a referência à progressão aritmética não esteja formalmente estruturada, ela revela uma tentativa de organizar numericamente o crescimento da figura, aproximando-se de uma interpretação mais geral.

A partir dessa tentativa de organizar o crescimento da figura, os participantes passam a explorar outras formas de interpretar a configuração construída, buscando relacioná-la com diferentes disposições dos pontos, como se observa no trecho a seguir:

> **Vitor:** *Eu teria que testar. Aparentemente não ia dar, mas deixa eu ver o que eu fiz aqui. A associação do n, no caso aqui, aparentemente é o n vezes o seu sucessor, para gerar a quantidade de pontos. Que é tipo, tanto no* n *igual a* 3*, que deu 12, que é 3 vezes 4; no* n *igual a* 4*, deu 20, que é 4 vezes 5; no n igual a 5, deu 30 pontos, que é 5 vezes 6.*
> **Pesquisadora:** *Então você está falando que pra calcular um número retangular é só fazer* n *vezes* n *menos* 1*, ou* n *mais* 1*?*
> **Vitor:** n *mais* 1

Essa forma de visualização, retratada por Vitor, envolve não apenas a observação da figura, mas sua transformação. A interpretação da figura como passível de reorganização, ao considerar que é possível "deslocar peças" para formar outras configurações, indica um uso ativo da visualização. Nesse caso, a figura não é apenas observada, mas transformada mentalmente, o que favorece a construção de relações entre diferentes números figurados. A Figura 26 apresenta um registro desse momento de exploração, no qual é possível observar a construção desenvolvida no *GeoGebra* e a forma como os participantes interagem com o ambiente durante a atividade.

Figura 26 – Registro da interação dos participantes com o *GeoGebra* na exploração de números figurados triangulares e retangulares



Fonte: Dados da pesquisa (2026)

Nesse episódio, ilustrado na Figura 26, observa-se um avanço na investigação, na medida em que os participantes passam a considerar a possibilidade de reorganizar a disposição dos pontos, ao relacionar os números figurados triangulares e retangulares. Esse avanço se distingue do momento anterior porque os participantes deixam de tratar cada número figurado como uma construção isolada e passam a manipular um mesmo conjunto de pontos sob duas organizações geométricas diferentes, o que indica uma primeira aproximação, ainda visual, da relação algébrica entre T_n e R_n que será formalizada nas páginas seguintes. A reorganização visual da figura evidencia o papel da visualização matemática, entendida como

processo que favorece a produção de significados e o estabelecimento de conexões entre diferentes representações (Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2015).

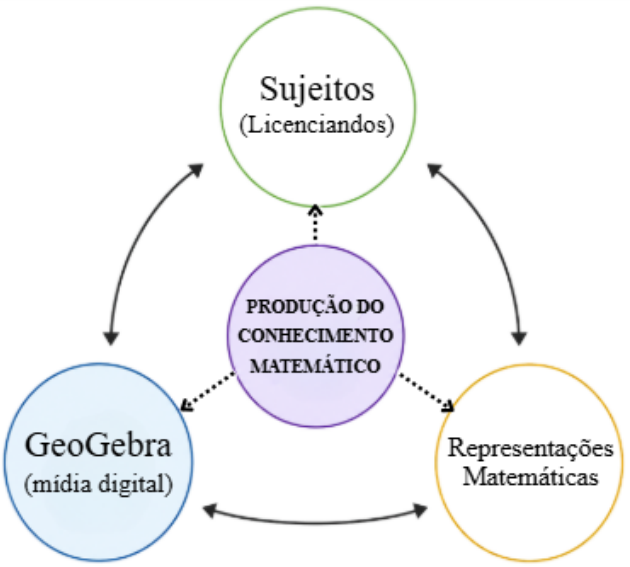
A visualização, nesse contexto, não se limita à observação da figura, mas envolve sua transformação, indicando uma compreensão mais elaborada das relações entre as configurações. Essa perspectiva aproxima-se do argumento de Santos-Trigo, Moreno-Armella e Camacho-Machín (2016, p. 841), para quem, em ambientes de geometria dinâmica, "as figuras geométricas não são apenas desenhos ou representações estáticas; elas vivem em um 'filme' geométrico" (tradução nossa). No episódio analisado, essa dimensão dinâmica manifesta-se na possibilidade de reorganizar os pontos e interpretar uma mesma configuração sob diferentes formas, favorecendo a identificação da relação entre números triangulares e retangulares.

A partir dessa reorganização, os participantes passam a estabelecer relações entre diferentes números figurados, comparando quantidades e buscando padrões que expliquem os resultados obtidos. O episódio evidencia um avanço do trabalho investigativo, pois os participantes deixam de operar apenas com casos particulares e passam a construir uma relação geral capaz de explicar diferentes configurações numéricas (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2019). Esse movimento se explicita quando o participante associa a quantidade de pontos ao produto de um número pelo seu sucessor, produzindo a relação $n(n + 1)$. Embora, nesse momento, a relação surja como conjectura, ela se consolida posteriormente como expressão geral para o cálculo do número figurado retangular, isto é, $R_n = n(n + 1)$. Destaca-se, ainda, a contribuição do ambiente digital nesse processo, uma vez que o retorno imediato permite comparar diferentes casos e validar as hipóteses levantadas, aspecto discutido por Borba e Villarreal (2005) no contexto da experimentação com tecnologias.

Esse episódio também permite observar como a experimentação com o *GeoGebra* favorece a coordenação entre diferentes representações dos números figurados planos. Ao perceber que uma configuração triangular poderia ser reorganizada e relacionada a uma configuração retangular, os participantes não operam apenas com a contagem de pontos, mas com transformações visuais que sustentam novas relações algébricas. A ideia de "deslocar peças", mencionada por Vitor, sugere um processo de visualização dinâmica, no qual a figura é mentalmente transformada para produzir outra configuração matemática. Nesse sentido, o *GeoGebra* atua como mídia que favorece o trânsito entre o figural, o numérico e o algébrico: a disposição dos pontos permite visualizar o crescimento; os valores obtidos pelos controles

deslizantes possibilitam comparar casos; e as regularidades percebidas são posteriormente reorganizadas em expressões. Essa articulação reforça a ideia de que a compreensão dos números figurados planos emerge de um processo de pensar-com-o-*GeoGebra*, no qual visualização, experimentação e generalização são produzidas em uma rede de interações entre sujeitos, mídia digital e representações matemáticas. A Figura 27 sintetiza esse processo, evidenciando a rede de interações entre sujeitos, *GeoGebra* e representações matemáticas na produção do conhecimento.

Figura 27 – Interações entre sujeitos, *GeoGebra* e representações matemáticas



Fonte: Elaboração própria

A manipulação dos controles deslizantes no *GeoGebra* contribuiu diretamente para esse processo, na medida em que possibilita testar diferentes valores de forma rápida, comparar resultados e verificar a consistência das relações identificadas. Essa dinâmica favorece a articulação entre diferentes casos e amplia as possibilidades de identificação de regularidades, apoiando a construção de generalizações no ambiente de experimentação.

Com base nos padrões identificados ao longo da investigação, ambos os grupos conseguiram chegar à fórmula geral para o cálculo do número triangular, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Além disso, na atividade proposta, a primeira questão, "Como o número retangular R_n se relaciona com o número triangular T_n?", já havia sido antecipada pelas duas duplas durante a exploração inicial no *GeoGebra*. Mesmo sem conhecer previamente essa pergunta, os participantes identificaram essa relação, registraram suas observações e, posteriormente, por

meio das descobertas realizadas e das demonstrações construídas, puderam confirmar a veracidade da conjectura levantada.

Primeira dupla:

> ***Maria:*** *é o dobro, né? Tipo, o R_n é o dobro do T_n.*
> ***Miguel:*** *O dobro do T_n, sim.*
> ***Pesquisadora:*** *Isso vale mesmo? Se a gente pegar o lado de $2T_n$, a gente vai chegar no valor de $n(n+1)$?*
> ***Miguel:*** *Sim.*
> ***Pesquisadora:*** *É?*
> ***Miguel:*** *Porque T_n é aqui, o que a gente obteve aqui. n que multiplica n mais 1 sobre 2. Se a gente multiplicar pelo 2...*
> ***Maria:*** *Vai ficar em evidência e vai cortar de novo.*
> ***Miguel:*** *Corta de novo. Então sim.*

Segunda dupla:

> ***Pesquisadora:*** *E a questão A, vocês fizeram? Conseguiram?*
> ***Vitor:*** *A, R_n é 2 vezes T_n*

A interação entre os participantes revela que ambas as duplas identificam a relação entre os números triangulares e retangulares, reconhecendo que $R_n = 2T_n$. Além disso, observa-se que os participantes não apenas enunciam essa relação, mas também buscam justificá-la a partir da expressão algébrica de T_n, ao argumentarem que, ao multiplicar $\frac{n(n+1)}{2}$ por 2, obtém-se $n(n+1)$. Isso ocorre porque o fator 2 no numerador e no denominador constitui um quociente igual a 1, não alterando o valor da expressão. Esse movimento indica que os licenciandos avançam na identificação de um padrão para sua validação, articulando diferentes representações e consolidando a generalização construída.

Ao explorar os números quadrados, observa-se um momento em que os participantes buscam identificar a natureza da sequência associada à construção das figuras, formulando e testando diferentes hipóteses. O diálogo a seguir ilustra esse processo, no qual uma interpretação inicial é revista ao longo da investigação, evidenciando um movimento de tentativa, verificação e reformulação característico dos processos de construção do conhecimento (Steffe; Thompson, 2000).

> ***Pesquisadora:*** *E a expressão se você fizer igual a gente fez ali? No primeiro vai ficar 1, certo? E no segundo vai ficar 1 mais 3, pra dar 4, certo?*
> ***Vitor:*** *Sim*
> ***Pesquisadora:*** *E aí o outro vai ficar 1 mais 3, mais 5, pra dar 9. Seria uma soma do que essa soma aí?*

> ***Vitor:*** *Soma de primos? Aparentemente, só que a última eu não sei se eu fiz certo. Aparentemente poderia ser uma soma de primos, mas o 25 deu 9, o que furou*
> ***Pesquisadora:*** *O 1, o 3, o 5, o 7, o 9, o próximo vai ser o 11, o outro vai ser o 13, o outro 15. O que são esses números?*
> ***Vitor:*** *Sempre ímpares.*

Ao sugerir inicialmente que se tratava de uma "soma de primos" e, em seguida, reconhecer que essa hipótese "furou", o participante explicita um processo de reflexão sobre o próprio raciocínio. A identificação do equívoco não interrompe a investigação, mas atua como elemento que desencadeia a reorganização das ideias, conduzindo à formulação de uma interpretação mais adequada, no caso, a identificação da sequência como composta por números ímpares. Nesse contexto, o erro assume papel produtivo, na medida em que possibilita a revisão de hipóteses e a construção progressiva de significados. Esse movimento evidencia que a produção de conhecimento não ocorre de forma linear, mas por meio de avanços, recuos e reformulações, em um processo contínuo de validação das ideias construídas.

A partir desse processo de tentativa e reformulação, os participantes passam a organizar essas relações de maneira mais sistemática. Ao manipular os controles deslizantes no *GeoGebra*, perceberam que, ao alterar o valor de n, a quantidade de pontos correspondia a n^2, formando o número figurado quadrado. Além disso, estabeleceram relações com os números triangulares, retomando uma expressão que já havia sido encontrada e demonstrada anteriormente: o número quadrado pode ser obtido pela soma do número triangular da posição considerada com o número triangular imediatamente anterior, isto é, $S_n = T_n + T_{n-1}$. O diálogo a seguir evidencia esse processo de articulação entre resultados prévios e novas generalizações.

> ***Miguel:*** *Posso dar uma sugestão?*
> ***Pesquisadora:*** *Pode falar*
> ***Miguel:*** *A gente vai encontrar o T, na verdade S. É no S_2 a gente soma T_2 mais T_1. Certo? A gente soma um antecessor do outro. Então, usando isso daqui, eu substituí T_n, que é o que a gente já tem, mais T_{n-1}. E fiz as contas que cabem aqui. E eu encontrei n^2, que é igual a S_n*
> ***Maria:*** *Então, você fez...*
> ***Miguel:*** *A gente tem aqui o nosso T_n, né?*
> ***Maria:*** *Isso. Ele é o T_n. E o que você falou aqui é que é o T_n?*
> ***Miguel:*** *Ó, Por exemplo, S_2. Certo? S_2 é igual a T_2 mais T_1. Ou seja, S_n vai ser igual a T_n mais T_{n-1}. Que é o antecessor. Aí eu fiz T_n mais T_{n-1}, substituindo aqui,*

> *né? Onde é n por n, no T_n. E onde é T_{n-1} por $n-1$. Aí eu fiz as continhas que tem que fazer e achei n^2, que é o que a gente quer. Que é o S_n.*
> ***Maria:*** *Tá.*

O trabalho em dupla favoreceu o processo investigativo, uma vez que possibilitou aos participantes explorar ideias conjuntamente, levantar conjecturas e construir demonstrações de forma colaborativa. A interação entre os integrantes mostrou-se fundamental para o desenvolvimento da atividade, pois, por meio da troca de ideias, do questionamento mútuo e da validação de raciocínios, os participantes avançaram nas investigações e na compreensão dos conceitos envolvidos.

Essas construções, descritas nas interações apresentadas acima, aproximam-se do que é discutido na perspectiva da investigação matemática, na qual o conhecimento é produzido por meio da exploração, da identificação de padrões, da formulação de conjecturas e da construção de relações pelos próprios participantes (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2019). A manipulação dinâmica das representações no *GeoGebra* favorece esse processo ao possibilitar a experimentação com diferentes valores e a observação das variações produzidas, contribuindo para a identificação de regularidades.

Além disso, a interação com o ambiente digital influencia diretamente a forma como os participantes pensam e constroem suas ideias. O *GeoGebra* fornece resultados que reorientam as tentativas da dupla, ao mesmo tempo em que os participantes direcionam os valores testados e reinterpretam o que a mídia devolve, caracterizando o processo de moldagem recíproca (Borba, 1999) que sustenta o construto de seres-humanos-com-mídias (Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2015). Nesse processo, o conhecimento não é apenas aplicado, mas construído ao longo da investigação, envolvendo exploração, reorganização e generalização.

Desse modo, observa-se que os licenciandos produzem conhecimento matemático ao estabelecer relações entre diferentes representações, testar hipóteses e formular generalizações, respondendo à questão de como essas ideias emergem em um ambiente de experimentação com o *GeoGebra*.

Além das questões anteriormente analisadas, a atividade proposta também contemplava o preenchimento de uma tabela, com o objetivo de organizar os valores observados no *GeoGebra* e favorecer a identificação de regularidades nas sequências numéricas. Na primeira coluna, registravam-se os valores de n. Nas colunas referentes a T_n,

S_n e R_n, os participantes anotavam a quantidade de pontos correspondente a cada figura. Já nas colunas intituladas "Expressão", os participantes deveriam representar cada número figurado na forma de soma de termos sucessivos. Durante o preenchimento da tabela, observou-se um momento relevante em que os participantes discutiram as regularidades presentes nos valores obtidos, conforme o diálogo a seguir:

> ***Miguel:*** *Bom, a gente pode pensar nisso como progressões. Principalmente essa aqui.*
> ***Pesquisadora:*** *Pensar em uma PA é uma boa.*
> ***Maria:*** *A gente pode... Nessa outra também vai acontecer, só que vai aumentar de 2.*
> ***Miguel:*** *Se a gente pensar em PA, a gente tem que achar um termo para ser a razão aqui, olhando para o 3, para o 5, para o 7.*
> ***Maria:*** *Tem que ser sem depender de nenhum termo?*
> ***Miguel:*** *Depende só do primeiro e do último.*
> ***Maria:*** *Se a gente achar dessa, a gente consegue achar as outras.*
> ***Miguel:*** *Aqui é multiplicado por n, né?*
> ***Pesquisadora:*** *Isso.*
> ***Miguel:*** *O A_n não pode ser n, senão seria aqui 2, aqui 3, aqui 4.*
> ***Pesquisadora:*** *Por que A_n não pode ser n?*
> ***Miguel:*** *Porque A_n basicamente é a soma. É... Aqui é o n indexado, então, basicamente o meu A_n seria a soma dos n primeiros termos. Que aí eu queria colocar essa soma dentro da fórmula geral da PA.*
> ***Pesquisadora:*** *Aqui você colocou 1 mais 2, que é o que tá aqui na frente, certo? Então embaixo vai ser 1 mais 2 mais 3 mais 4 mais... até n. Então o último termo vai ser n.*
> ***Miguel:*** *Sim.*
> ***Pesquisadora:*** *Então o A_n vai ser n. Porque se você pegar uma soma que vai de 1 até n... O primeiro termo é 1, o segundo é 2, o terceiro é 3... Então o último vai ser n .*
> ***Miguel:*** *Sim.*

A fala de Miguel é particularmente relevante porque evidencia um deslocamento no modo de perceber a figura. Inicialmente, o participante experimenta o *GeoGebra* por meio da manipulação dos controles e da observação da disposição dos pontos; contudo, ao enunciar "1 mais 2 mais 3", ele passa a coordenar a configuração visual com uma estrutura numérica aditiva. Esse movimento indica que a visualização não atua apenas como apoio ilustrativo, mas como meio para a reorganização do pensamento matemático. A figura triangular, construída dinamicamente no ambiente, passa a ser interpretada como uma soma de camadas sucessivas, permitindo que o participante articule representação geométrica, sequência numérica e possibilidade de generalização. Nessa perspectiva, o conhecimento produzido não pode ser atribuído isoladamente ao estudante nem ao *software*, mas ao coletivo constituído

por licenciando-com-*GeoGebra*, no qual a manipulação, o feedback visual e a linguagem matemática emergente se entrelaçam na produção de significados.

O diálogo evidencia que, ao analisarem os valores anotados, os participantes passaram a observar não apenas os termos das sequências, mas também as diferenças entre termos consecutivos, identificando a formação de uma Progressão Aritmética (PA). Esse movimento mostrou-se importante para a formulação das expressões gerais, uma vez que possibilitou compreender a lógica de crescimento de cada sequência numérica por meio do processo de pensar-com-o-*GeoGebra*. Observa-se, nesse momento, uma mudança na forma de abordagem do problema, na medida em que os participantes deixam de se apoiar predominantemente na observação das representações construídas no *GeoGebra* e passam a mobilizar uma estrutura matemática conhecida para interpretar os dados. Ao tentar organizar os valores por meio da noção de progressão aritmética, evidenciam um deslocamento de uma abordagem mais empírica para uma tentativa de formalização por meio da linguagem matemática.

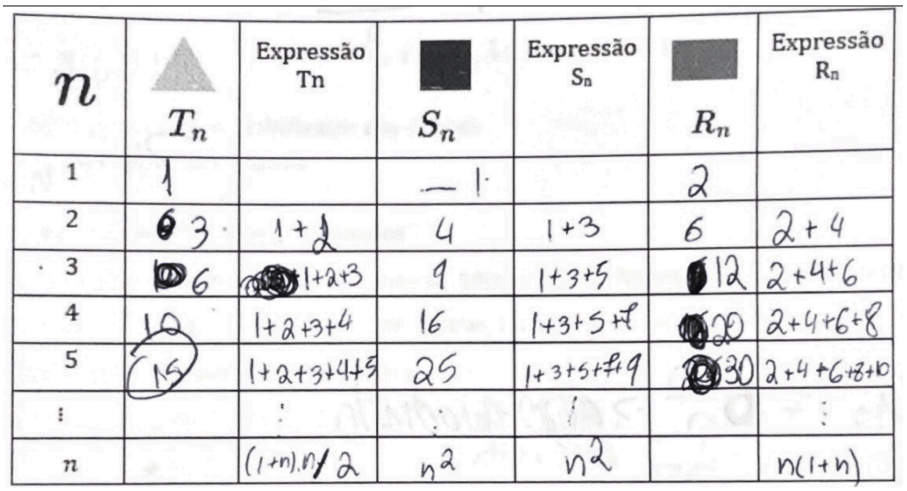
Além disso, a interação entre os integrantes da dupla favoreceu a troca de ideias, o levantamento de conjecturas e a validação dos resultados encontrados. Esse processo também pode ser observado nos registros produzidos pelos participantes, apresentados na Figura 28 e na Figura 29.

Figura 28 – Tabela preenchida pela dupla 1 (Maria e Miguel) - Números Figurados Planos

n	T_n	Expressão Tn	S_n	Expressão S_n	R_n	Expressão R_n
1	1	1	1	1^2	2	2
2	3	1+2	4	2^2	6	2+4
3	6	1+2+3	9	3^2	12	2+4+6
4	10	1+2+3+4	16	4^2	20	2+4+6+8
5	15	1+2+3+4+5	25	5^2	30	2+4+6+8+10
⋮		⋮				
n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2}$	n^2	n^2	$n(n+1)$	$n(n+1)$

Fonte: Dados da pesquisa (2026).

Figura 29 – Tabela preenchida pela dupla 2 (Vitor e Davi) - Números Figurados Planos



n	T_n	Expressão Tn	S_n	Expressão S_n	R_n	Expressão R_n
1	1		1		2	
2	3	1+2	4	1+3	6	2+4
3	6	1+2+3	9	1+3+5	12	2+4+6
4	10	1+2+3+4	16	1+3+5+7	20	2+4+6+8
5	15	1+2+3+4+5	25	1+3+5+7+9	30	2+4+6+8+10
⋮		⋮	⋮	⋮		⋮
n		$(1+n).n/2$	n^2	n^2		$n(1+n)$

Fonte: Dados da pesquisa (2026).

As Figuras 28 e 29 mostram que mídias como o *GeoGebra*, o lápis e o papel também fizeram parte do processo coletivo de investigação. Isso reforça a ideia de que uma mídia não substitui a outra, mas se integra a ela na produção do conhecimento matemático (Borba; Villarreal, 2005).

A análise dos registros permite verificar que os participantes relacionaram os números triangulares à soma dos números naturais sucessivos, os números quadrados à soma dos números ímpares consecutivos e os números retangulares à soma dos números pares consecutivos, relações que não decorreram da simples leitura da figura, mas da forma como o *GeoGebra* permitiu acompanhar visualmente a formação de cada termo antes de traduzi-lo algebricamente. Dessa forma, a atividade possibilitou a passagem da observação empírica para a generalização matemática, conduzindo à construção das expressões gerais dos números figurados triangulares, quadrados e retangulares, que constituem os números planos abordados neste trabalho. A leitura produzida pelos participantes revela um movimento investigativo, ao transformar a observação da figura em uma tentativa de explicação numérica para seu crescimento (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2019). Esse movimento situa o ambiente dinâmico não como ilustração posterior ao raciocínio, mas como parte do processo pelo qual esse raciocínio foi construído.

Em seguida, os licenciandos foram instigados a estabelecer relações entre os números figurados já investigados - triangular, quadrado e retangular. Além das relações inicialmente obtidas por ambos os grupos durante a investigação, os participantes também identificaram novas conexões entre essas sequências, ampliando as possibilidades de compreensão dos

padrões matemáticos envolvidos. Entre as relações produzidas, destacam-se diferentes formas de representar o número retangular a partir de expressões já construídas anteriormente, como evidenciam os diálogos a seguir:

Primeira dupla:

> ***Miguel:*** *Do retângulo e a do quadrado*
> ***Maria:*** *aumenta um*
> ***Miguel:*** *R_n, então é S_n mais n*
> ***Miguel:*** *a gente só precisa desenvolver a parte do Sn mais n*

Segunda dupla:

> ***Davi:*** *Parece que o R_n é igual ao S_n, mais o T_n menos o T_{n-1}.*
> ***Pesquisadora:*** *Você testou? Deu certo para todos?*
> ***Davi:*** *Ah, nesse início sim, pelo menos deu.*
> ***Vitor:*** *Ai é verdade. É tipo, é uma forma de se pensar generalizando a própria R_n igual ao S_n, mais n. Que o S_n tem a equivalência de ser os dois triângulos sucessivos. Então, você só coloca a equivalência que é para dar certo.*

Os diálogos mostram que ambas as duplas mobilizaram resultados anteriormente obtidos para construir novas relações envolvendo o número retangular. Enquanto a primeira dupla associou essa sequência ao número quadrado acrescido de n, a segunda articulou números quadrados e triangulares consecutivos para produzir uma expressão equivalente.

A relação $R_n = S_n + n$, identificada por ambas as duplas, pode ser compreendida ao considerar que o número quadrado é dado por $S_n = n^2$, enquanto o número retangular corresponde a $R_n = n(n + 1)$. Dessa forma, o número retangular pode ser interpretado como o resultado da adição de uma nova camada de pontos ao número quadrado, o que justifica a expressão proposta pelos participantes. No caso da segunda dupla, a expressão $R_n = S_n + T_n - T_{n-1}$ evidencia um raciocínio mais elaborado, no qual os participantes articulam diferentes números figurados para representar uma mesma quantidade. Ao considerar que o número quadrado pode ser expresso como a soma de dois números triangulares consecutivos, os participantes constroem uma relação equivalente para o número retangular, mobilizando conhecimentos previamente estabelecidos ao longo da investigação.

Essas formulações indicam que os participantes não apenas identificam padrões, mas também estabelecem conexões entre diferentes representações, reinterpretando resultados anteriores para produzir novas expressões. Esse processo evidencia um movimento de

generalização, no qual as relações deixam de ser percebidas de forma isolada e passam a integrar uma rede de significados mais ampla.

A elaboração de expressões distintas para representar o número retangular traduz um trabalho investigativo no qual conhecimentos anteriores são reorganizados em novas relações matemáticas (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2019). Além disso, observa-se que as conjecturas não surgem de forma isolada, mas são discutidas, testadas e reformuladas no diálogo entre os integrantes das duplas. O trabalho colaborativo favoreceu a circulação de ideias e a validação das relações propostas, contribuindo para o aprofundamento da compreensão matemática construída ao longo da atividade. As diferentes relações produzidas pelos participantes ao longo da investigação podem ser sintetizadas no Quadro 4, no qual se observam tanto expressões comuns aos dois grupos quanto formulações particulares elaboradas por cada dupla.

Quadro 4 – Expressões e relações algébricas identificadas pelos grupos para os números figurados planos

Grupo 1	Grupo 2
$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$	$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$
$T_n = T_{n-1} + n$	$2T_n = T_n + T_{n-1} + n$
$S_n = n^2$	$S_n = n^2$
$S_n = T_n + T_{n-1}$	$S_n = T_n + T_{n-1}$
$S_n = R_n - n$	$S_n = R_n - n$
$R_n = n(n+1)$	$S_n = R_{n-1} + n$
$R_n = 2 \cdot T_n$	$R_n = n(n+1)$
$R_n = R_{n-1} + 2n$	$R_n = 2 \cdot T_n$
$R_n = S_n + n$	$R_n = S_n + T_n - T_{n-1}$
	$R_n = S_n + n$

Fonte: Dados da pesquisa (2026)

A sistematização apresentada no Quadro 4 permite observar que os participantes não se limitaram à obtenção das fórmulas gerais dos números figurados estudados, mas avançaram na construção de relações recursivas e equivalências algébricas entre números triangulares, quadrados e retangulares. Essa multiplicidade de representações para um mesmo objeto

matemático é, em si, um indício de generalização mais robusta do que a simples obtenção de uma fórmula: o fato de os participantes relacionarem R_n tanto a $2 \cdot T_n$ quanto a $S_n + n$ mostra que compreenderam a mesma estrutura numérica sob diferentes decomposições, e não apenas memorizaram um resultado. O conjunto dessas produções indica ampliação da compreensão acerca das estruturas envolvidas e reforça o caráter investigativo da atividade desenvolvida. O fato de as duas duplas terem chegado a formulações parcialmente distintas entre si sugere, ainda, que essa generalização não foi guiada por um caminho único imposto pela atividade, mas construída a partir das explorações particulares que cada dupla realizou no aplicativo, reforçando o argumento de que o conhecimento produzido resulta do coletivo licenciando-com-*GeoGebra*, e não de um procedimento previamente fixado.

As demonstrações dessas relações encontram-se apresentadas no Apêndice D. Na sequência, a análise é ampliada para os números figurados espaciais, buscando compreender como os participantes mobilizaram estratégias semelhantes diante de figuras tridimensionais e de novas relações matemáticas.

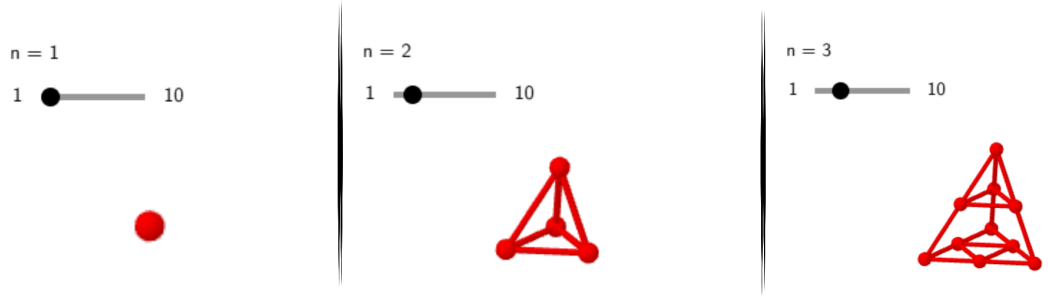
4.2 EXPERIMENTAÇÃO-COM-*GEOGEBRA* SOBRE NÚMEROS FIGURADOS ESPACIAIS

A experimentação com o *GeoGebra* envolvendo números figurados espaciais constituiu a segunda sessão da produção dos dados. Nesse contexto, os participantes exploraram números piramidais e o cubo por meio de aplicativos desenvolvidos pela própria pesquisadora, acompanhados de um roteiro com orientações sobre suas funcionalidades e possibilidades de exploração. As construções dinâmicas favoreceram articulações entre diferentes ideias matemáticas produzidas ao longo da experimentação, contribuindo para novas interpretações sobre os números figurados espaciais. As discussões desenvolvidas ao longo dessa exploração contribuíram para a formulação de conjecturas, a identificação de padrões e a elaboração de expressões matemáticas, características que marcaram os episódios apresentados ao longo do texto.

Nas atividades com números figurados espaciais, foram desenvolvidos três aplicativos no *GeoGebra*, referentes ao número piramidal triangular, ao número piramidal quadrado e ao cubo. Cada aplicativo possuía um controle deslizante destinado à variação da ordem da figura, isto é, sua posição na sequência, permitindo aos participantes observar dinamicamente a

formação de novas camadas e explorar diferentes configurações dessas construções. No caso do número piramidal triangular, por exemplo, a ordem $n = 1$ gerava 1 ponto; a ordem $n = 2$ gerava 4 pontos; e a ordem $n = 3$ gerava 10 pontos, como ilustrado na Figura 30.

Figura 30 – Variação da ordem nn em números figurados piramidais triangulares no *GeoGebra*



Fonte: Elaboração própria (2026)

A Figura 30 apresenta a representação dinâmica do número piramidal triangular utilizada durante a atividade. Por meio do controle deslizante, os participantes podiam alterar a ordem da construção e acompanhar imediatamente as transformações produzidas na figura. Em *softwares* de geometria dinâmica, como o *GeoGebra*, a possibilidade de manipular objetos matemáticos e observar, em tempo real, os efeitos dessas alterações amplia as oportunidades de visualização e investigação matemática (Borba; Scucuglia; Gadanidis, 2015). Nesse contexto, as construções disponibilizadas no aplicativo não apenas permitiram observar diferentes configurações dos números figurados estudados, mas também favoreceram a produção de interpretações sobre sua organização e as relações matemáticas associadas à sequência investigada.

Ao explorar o número piramidal triangular, os participantes recorreram a conhecimentos produzidos em atividades anteriores para interpretar a construção apresentada no *GeoGebra*. Nesse processo, passaram a identificar relações entre as camadas das figuras e os números triangulares, evidenciando que a interpretação da figura espacial não partiu da observação independente da construção, mas do reconhecimento dos números triangulares como estrutura já consolidada na etapa anterior da investigação. Esse reconhecimento pode ser observado no diálogo da primeira dupla, apresentado a seguir:

> **Miguel:** *Aqui, olhando, não sei se você conseguiu reparar, posso estar errado, mas eu já observei. Aqui a gente tem o triângulo que a gente trabalhou, em cada camada. A gente tem que contar depois para ver se é isso mesmo, mas parece.*
> **Miguel:** *Aqui ó, 1, 3, 6, 10, acredito que seja isso.*

> **Miguel:** *Aqui é como se a gente viesse n igual a 5, tem que ter a mesma quantidade.*
> **Maria:** *tem*
> **Miguel:** *Então, de fato, cada camada representa o nosso n de T_n. Que aqui vai ser P_n.*

Uma interpretação semelhante foi produzida pela segunda dupla:

> **Davi:** *É, está parecendo esses daqui só que um em cima do outro*
> **Vítor:** *É verdade tipo, ele meio que, em quantidade de pontos, ele vai somando os casos, tipo assim, ele vai meio que somando os casos anteriores com o próximo caso.*
> **Davi:** *Isso.*
> **Pesquisadora:** *Vocês fizeram a ligação dessa pirâmide com os números triangulares?*
> **Davi***: Isso*
> **Vítor:** *É! No caso $n = 4$, a base é 10, então, tipo assim, 1, mais 3, mais 6, mais 10.*

As interpretações produzidas pelas duas duplas sugerem que os números triangulares passaram a assumir um papel central na compreensão do número piramidal triangular. Enquanto uma das duplas reconheceu que cada camada da representação correspondia a um número triangular, a outra avançou ao interpretar a construção como resultado da adição sucessiva desses valores. Ao explicitar a soma "1 mais 3 mais 6 mais 10", os participantes passaram a compreender que cada termo do número piramidal triangular era constituído pelo somatório dos números triangulares das ordens anteriores. Essa compreensão encontra respaldo em Baron (1985), segundo o qual o número piramidal triangular é obtido pela soma sucessiva dos números triangulares, evidenciando que sua organização espacial pode ser compreendida a partir das relações estabelecidas entre diferentes famílias de números figurados.

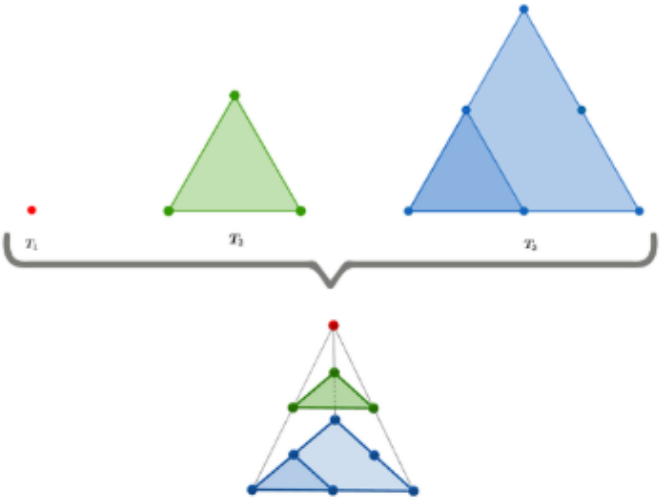
As possibilidades de manipulação oferecidas pelo *GeoGebra* contribuíram para esse processo. Ao alterar sucessivamente a ordem da construção por meio do controle deslizante, os participantes puderam explorar diferentes casos, acompanhar as transformações produzidas na representação e comparar distintas configurações. Hegedus e Moreno-Armella (2009, p. 397, tradução nossa) observam que, em ambientes tecnológicos dinâmicos, "os estudantes são capazes de manifestar novas formas de expressão associadas às suas explorações e novas formas de compreensão decorrentes da capacidade do ambiente de reagir às ações propostas pelos estudantes". Essas ações favoreceram a produção de relações que dificilmente seriam percebidas apenas por meio de uma representação estática, permitindo articular a organização visual da construção com propriedades matemáticas associadas à sua formação. O número piramidal triangular deixou de ser interpretado apenas como uma configuração espacial

composta por pontos. As discussões desenvolvidas pelos participantes evidenciam uma compreensão que considera tanto sua organização em camadas quanto as relações matemáticas que sustentam sua formação. Esse processo de exploração aproxima-se da perspectiva de experimentação com tecnologias digitais discutida por Borba e Villarreal (2005), segundo a qual a possibilidade de manipular objetos matemáticos e observar suas transformações favorece processos investigativos que vão além da simples visualização, permitindo que novas relações sejam produzidas durante a interação com a mídia.

Essa produção de conhecimento pode ser compreendida como resultado de um processo de pensar-com-o-*GeoGebra*. As interpretações construídas não emergiram exclusivamente da observação da representação nem apenas das ações dos participantes, mas das interações estabelecidas entre os licenciandos e a mídia digital, constituindo um coletivo de seres-humanos-com-mídias (Borba; Villarreal, 2005). Os *feedbacks* produzidos pela construção dinâmica permitiram que novas interpretações fossem continuamente avaliadas, reformuladas e reorganizadas ao longo da exploração, ao passo que os próprios participantes direcionavam essa produção ao escolher quais valores testar no controle deslizante, configurando um processo de moldagem recíproca (Borba, 1999), coerente com a Teoria da Reorganização de Tikhomirov (1981, apud Borba, 1999).

Ao explorar diferentes casos, confrontar ideias e reorganizar formas de compreender o objeto investigado, os participantes produziram uma interpretação que serviu de base para as discussões posteriores voltadas à busca de expressões mais gerais para o número piramidal triangular. O padrão identificado pelos participantes nesse episódio também esteve presente na questão A da atividade proposta para a produção dos dados, que buscava investigar o padrão entre os números figurados planos e suas versões espaciais. No entanto, tal compreensão emergiu durante a exploração da construção dinâmica no *GeoGebra*, antes mesmo de os participantes terem acesso à questão, evidenciando que as conexões entre as formas planas e espaciais foram percebidas a partir da observação e da manipulação das construções, não como resposta imediata a uma solicitação da atividade. Quando a questão foi apresentada, as duplas já haviam produzido elementos que lhes permitiam discutir tais conexões, evidenciando que parte dos conhecimentos mobilizados na resposta havia sido construída durante a própria exploração.

Figura 31 – Representação do número piramidal triangular como composição dos números triangulares



Fonte: Elaboração própria (2026)

A Figura 31 sistematiza a relação identificada pelos participantes, representando o número piramidal triangular de ordem 3 como composição das camadas T_1, T_2 e T_3. Essa representação evidencia a interpretação produzida ao longo das discussões, na qual a construção deixa de ser observada apenas como uma configuração espacial e passa a ser compreendida a partir dos números triangulares que a constituem. Desse modo, a figura sintetiza a ideia elaborada pelos participantes de que cada novo número piramidal triangular pode ser obtido pela adição sucessiva dos números triangulares das ordens anteriores.

A compreensão produzida até esse momento abriu espaço para uma nova questão: como determinar termos correspondentes a ordens mais elevadas do número piramidal triangular? Com esse objetivo, a pesquisadora propôs às duas duplas que discutissem a obtenção de um termo distante dos casos explorados no aplicativo, tomando como referência o número piramidal triangular de ordem 100. O diálogo a seguir, referente à primeira dupla, apresenta as reflexões iniciais dos participantes diante desse desafio.

> **Pesquisadora:** *E se eu pedir para vocês calcularem o P de 100?*
> **Miguel:** *P de 100, no caso, a gente depende do valor disso, então não é tão interessante.*
> **Maria:** *Então tem outra forma.*
> **Miguel:** *É, tem alguma outra forma.*
> **Pesquisadora:** *Porque se a gente for calcular o P de 100 usando o T, a gente tem que fazer T de um, mais T de dois, mais T ... até o cem.*

Na segunda dupla, a mesma situação também levou os participantes a refletirem sobre a necessidade de encontrar uma forma mais geral de representar o número piramidal triangular, conforme mostra o diálogo a seguir.

> **Pesquisadora:** *Aí se eu pedisse para vocês calcularem o* C_{200} *aqui, vocês fariam* 200^3. *E se eu pedisse para vocês calcularem o* P_{200}*?*
> **Vítor:** *Aí teria que calcular o* P_{199}.
> **Pesquisadora:** *Aí iria fazer o* P_1 *mais* P_2 *mais* P_3 *...?*
> **Vítor:** *Teria que recorrer à generalização para conseguir.*

A determinação de termos correspondentes a ordens maiores evidencia uma nova demanda para os participantes. As estratégias construídas ao longo da exploração mostravam-se adequadas para explicar os casos investigados até então, restritos a valores particulares de n. Esse deslocamento não emergiu espontaneamente da atividade, mas foi provocado pela pesquisadora, ao propor às duplas a determinação de um termo distante dos casos já explorados, como P_{100}. Essa intervenção evidencia o papel ativo da pesquisadora na produção dos dados, característica dos experimentos de ensino (Steffe; Thompson, 2000), nos quais o pesquisador não apenas observa os participantes, mas participa da construção das situações que impulsionam a investigação.

Entretanto, o cálculo de um termo como P_{100} indica limites nessa abordagem, uma vez que sua utilização exigiria a mobilização sucessiva de uma grande quantidade de valores anteriormente produzidos. Até esse momento, a experimentação no aplicativo, apoiada pela visualização e pela manipulação da configuração piramidal, havia possibilitado aos participantes observar regularidades, comparar diferentes ordens e construir relações entre os números figurados. Ao sintetizarem pesquisas sobre o tema, Suparman, Marasabessy e Helsa (2024, p. 4) destacam que "o GeoGebra permite aos estudantes ou professores manipular e construir objetos geométricos tridimensionais por meio de uma interface bidimensional" (tradução nossa). No episódio analisado, essa manipulação favoreceu a compreensão da estrutura tridimensional do número piramidal triangular e a produção de conjecturas com base nos casos visualizados. Contudo, o desafio de determinar P100 desloca a atividade para além da experimentação com casos particulares, evidenciando a necessidade de uma generalização algébrica que permita calcular diretamente um termo de ordem n, sem depender da construção recursiva de todos os termos anteriores.

A observação de Miguel de que “a gente depende do valor disso” explicita a dificuldade identificada pelo participante. A expressão refere-se à necessidade de conhecer os valores dos números triangulares que compõem o número piramidal triangular para, somente então, determinar o termo desejado. Embora esse caminho permitisse chegar ao resultado, sua aplicação tornava-se cada vez menos viável à medida que a ordem considerada aumentava. A questão proposta pela pesquisadora desloca, portanto, a atenção dos participantes para uma demanda que ainda não havia sido problematizada: a necessidade de produzir uma forma mais eficiente de representar o comportamento da sequência. Essa mesma percepção aparece na fala de Vítor ao afirmar que seria necessário “recorrer à generalização para conseguir”. O comentário sugere o reconhecimento de que as relações produzidas até aquele momento já não eram suficientes para responder ao novo desafio colocado. Mais do que compreender como os termos eram formados, tornava-se necessário encontrar uma maneira de representar qualquer caso sem depender dos casos anteriores.

A literatura sobre números figurados também contribui para compreender esse movimento. Deza e Deza (2012) mostram que a construção incremental dos números poligonais conduz à obtenção de uma expressão geral para essas sequências. De maneira semelhante, os participantes passaram a reconhecer que calcular sucessivamente novos termos já não era suficiente, tornando necessária a explicitação de uma relação capaz de representar qualquer elemento da sequência.

Observa-se, nesse episódio, uma mudança nas ações matemáticas desenvolvidas pelos participantes. As discussões deixam de se concentrar predominantemente na compreensão da estrutura do número piramidal triangular e passam a envolver a busca por relações capazes de descrever seu comportamento para qualquer ordem. A generalização emerge, assim, como uma necessidade produzida pelas limitações das estratégias estabelecidas pelos participantes. Não se trata apenas de formalizar ideias anteriormente construídas, mas de elaborar um novo modo de abordar o problema, capaz de ultrapassar os casos particulares explorados durante a experimentação. O desafio proposto pela pesquisadora impulsiona a investigação ao revelar que os procedimentos desenvolvidos até aquele momento permitiam compreender os casos explorados ($n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) mas não eram suficientes para lidar com casos correspondentes a ordens superiores. A relevância do episódio não reside apenas na obtenção de uma expressão capaz de representar qualquer termo do número piramidal triangular, mas também no percurso desenvolvido durante a investigação, marcado pela reformulação de estratégias e pela produção de novas formas para solucionar o problema.

A exploração do número piramidal quadrado ampliou as discussões desenvolvidas até então sobre números figurados espaciais. Diante dessa nova construção, os participantes passaram a buscar relações com outros números figurados, procurando compreender sua organização e identificar possíveis conexões com propriedades já observadas durante a experimentação. O diálogo a seguir apresenta as discussões da primeira dupla sobre esse processo:

> **Maria:** *você quer olhar um por um e depois a gente volta?*
> **Miguel:** *Pode ser, fiz as observações*
> **Miguel:** *Tá, é, será que vai ser a mesma coisa?*
> **Maria:** *Parece, Coloca para trás*
> **Maria:** *É, 9, 4...*
> **Miguel:** *Ou seja*
> **Maria:** *É,. então é a somatória do outro também*
> **Miguel:** *Ou seja,* Q_n *é somatória de* S_n

A interpretação produzida pela primeira dupla também apareceu nas discussões de Davi e Vítor:

> **Davi:** *No caso da base quadrada, é a mesma coisa que o outro.*
> **Vítor:** *É, cai sobre o caso... só que no caso de base quadrada.*
> **Davi:** *É.*
> **Pesquisadora:** *Então o que vocês encontraram?*
> **Vítor:** *Que é mais ou menos igual à da pirâmide triangular, tipo assim, os resultados conforme você evolui o n é tipo a soma dos casos anteriores.*
> **Vítor:** Q_5 *aí vai pegar o* S_n1, S_n2, *somar* S_n3, S_n4, S_n5.

As duas duplas produziram interpretações semelhantes para o número piramidal quadrado. Enquanto Miguel e Maria formularam a conjectura de que a sequência poderia ser representada pela soma dos números quadrados, Davi e Vítor também estabeleceram uma relação direta com o número piramidal triangular, afirmando que a nova construção era "a mesma coisa que o outro", mas formada a partir dos números quadrados. Em ambos os casos, os participantes procuraram compreender a nova construção a partir das relações matemáticas que a constituem. Mais do que descrever características observadas em ordens específicas, suas interpretações revelam uma tentativa de explicar como a sequência é formada e quais elementos sustentam sua organização. A partir da observação das camadas produzidas no *GeoGebra*, os participantes passaram a compreender o número piramidal quadrado como resultado da soma sucessiva dos números quadrados, estabelecendo uma relação análoga àquela anteriormente produzida para o número piramidal triangular. Suparman, Marasabessy e

Helsa (2024, p. 9) ressaltam que "aulas de Geometria mediadas pelo *GeoGebra* exercem um efeito positivo sobre a visualização espacial dos estudantes" (tradução nossa).

Esses episódios evidenciam um elemento característico da investigação matemática, no qual resultados produzidos em uma situação passam a ser mobilizados na análise de novos problemas (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2019). Nesse caso, a hipótese elaborada pelos participantes não se manifesta de uma aplicação direta de procedimentos já conhecidos, mas da busca por padrões observados durante a exploração da construção disponibilizada no *GeoGebra.* Para além de reproduzir uma estratégia utilizada anteriormente, os participantes passam a utilizar uma interpretação construída em outro contexto como recurso para compreender uma nova situação. A conjectura produzida não resulta apenas da observação da figura, mas também da mobilização de conhecimentos elaborados durante a investigação do número piramidal triangular.

A possibilidade de comparar diferentes construções no próprio ambiente de experimentação também desempenhou um papel importante nesse processo. Ao alternarem entre as ordens da sequência e confrontarem a nova construção com aquela anteriormente investigada, os participantes passaram a identificar semelhanças estruturais entre os números piramidais triangular e quadrado. Essa identificação representa um deslocamento na produção do conhecimento, na medida em que os participantes deixam de generalizar cada número piramidal isoladamente e passam a reconhecer um princípio comum subjacente a construções distintas. Esse princípio consiste em compreender que ambos podem ser interpretados como acumulação sucessiva de camadas planas de mesma natureza. Nessa perspectiva, a interpretação produzida não emerge apenas da observação de resultados numéricos, mas do processo de pensar-com-o-*GeoGebra*, no qual as compreensões elaboradas pelos participantes são constituídas em interação com as representações dinâmicas disponibilizadas pelo *software*.

A exploração dos números cúbicos constituiu um novo momento da investigação. Diferentemente dos números piramidais triangular e quadrado, nos quais os participantes identificaram relações com números figurados planos, a nova construção não apresentou uma relação imediatamente evidente para os participantes. Diante dessa situação, os participantes passaram a analisar as primeiras ordens da sequência na tentativa de identificar padrões que possibilitassem compreender a organização dos pontos que compunham a figura, conforme ilustra o diálogo a seguir:

Miguel: *Precisa ver o cubo, talvez o cubo seja... Talvez não tenha nenhuma relação. Bem provável que não.*
Maria: *1 é o ponto.*
Miguel: *2 são 8.*
Maria: *É.*
Miguel: *8, tá. Se for 20 no próximo, talvez tenha...*
Miguel: *Volta para n igual a 3 para ver se dá 20.*
Maria: *27. É 3 camadas, né?*
Miguel: *É*
Maria: *Todas elas têm 9, então 27.*
Miguel: *27, então não. Não dá o que eu pensei que fosse*

As falas dos participantes evidenciam uma tentativa inicial de compreender a sequência associada ao cubo por meio da observação dos primeiros termos produzidos pela construção dinâmica. Ao sugerir um possível valor para a ordem seguinte da sequência, Miguel formula uma conjectura que é confrontada com o resultado apresentado pelo *GeoGebra*. Quando a terceira ordem apresenta 27 pontos, o valor observado não corresponde à conjectura inicialmente formulada, levando o participante a reconsiderar sua interpretação. A análise do episódio revela características próprias da investigação matemática, uma vez que a produção de conjecturas não ocorre de forma linear, mas envolve constantes processos de elaboração, teste e reformulação (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2019).

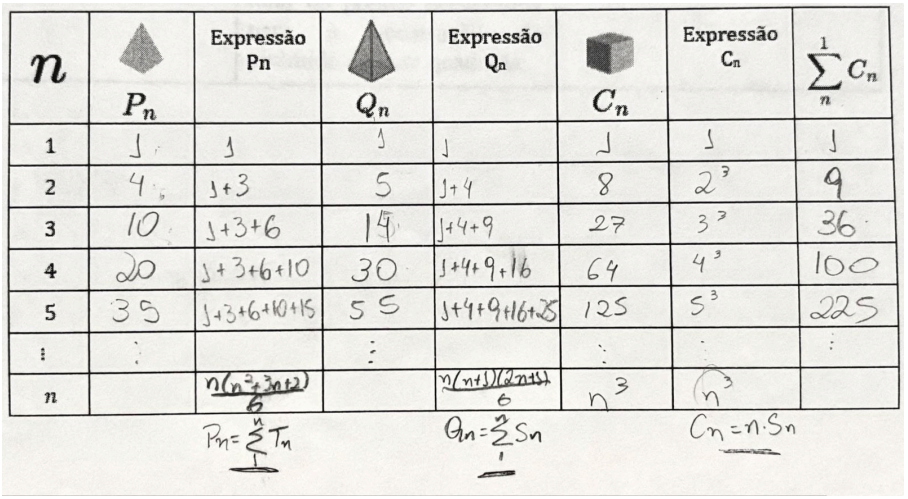
Maria: *Vamos começar de lá com os pontos.*
Miguel: *n igual a 3 deu 27 e 27 é 3 elevado a 3.*
Maria: *Ai, o outro que ficou aqui deu quanto? Deu 64, que é... Quanto é 4 elevado a 3?*
Maria: *Ó mais, é porque, como é ao cubo, fica em 3, 27, e em 4, 16...64, 8 vezes 8.*
Miguel: *Eu tinha imaginado.*

A continuidade da exploração levou os participantes a formularem uma nova interpretação para a sequência. Ao observarem que as ordens analisadas apresentavam 27 e 64 pontos, Miguel e Maria passaram a relacionar esses valores às potências cúbicas. Chama atenção o fato de que essa percepção não se resume aos resultados numéricos obtidos, mas passa a ser associada à própria natureza da construção. Ao afirmar que "como é ao cubo", Maria articula características da representação geométrica e dos valores observados, produzindo uma interpretação que relaciona diferentes componentes. Nesse episódio, a construção dinâmica teve papel importante no confronto entre hipótese e observação. Ao alterar a ordem do cubo, os participantes puderam comparar os valores esperados com aqueles produzidos no aplicativo, o que levou à revisão da interpretação inicial. Esse movimento, em que a hipótese dos participantes direciona o que é testado no *GeoGebra* e o resultado obtido

reorganiza a interpretação em curso, caracteriza um processo de moldagem recíproca (Borba, 1999). A relação $C_n = n^3$ foi construída, portanto, em um processo de teste de casos, observação da configuração espacial e articulação com os valores numéricos obtidos.

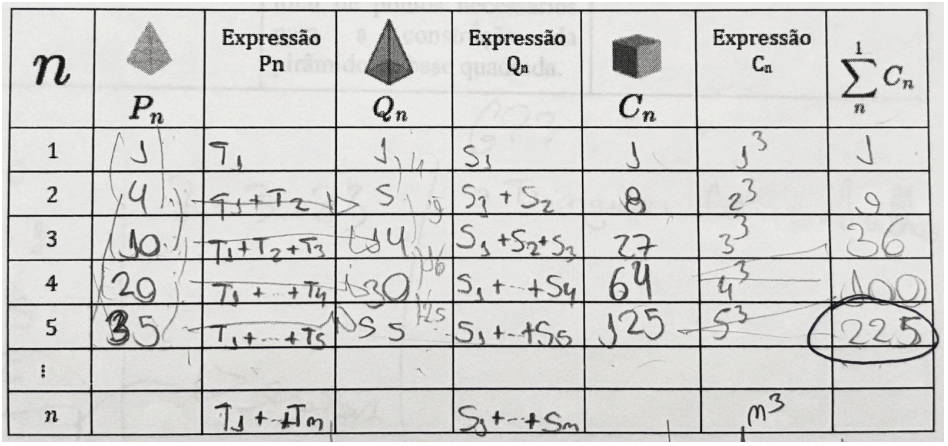
Parte das interpretações produzidas pelos participantes também foram registradas nas tabelas que compunham a atividade. As Figuras 32 e 33 apresentam os registros elaborados pelas duas duplas, evidenciando como as relações identificadas durante a exploração dos números figurados espaciais foram organizadas e expressas por meio de registros escritos.

Figura 32 – Tabela preenchida pela dupla 1 (Maria e Miguel) - Números Figurados Espaciais



Fonte: Dados da pesquisa (2026).

Figura 33 – Tabela preenchida pela dupla 2 (Vitor e Davi) - Números Figurados Espaciais



Fonte: Dados da pesquisa (2026).

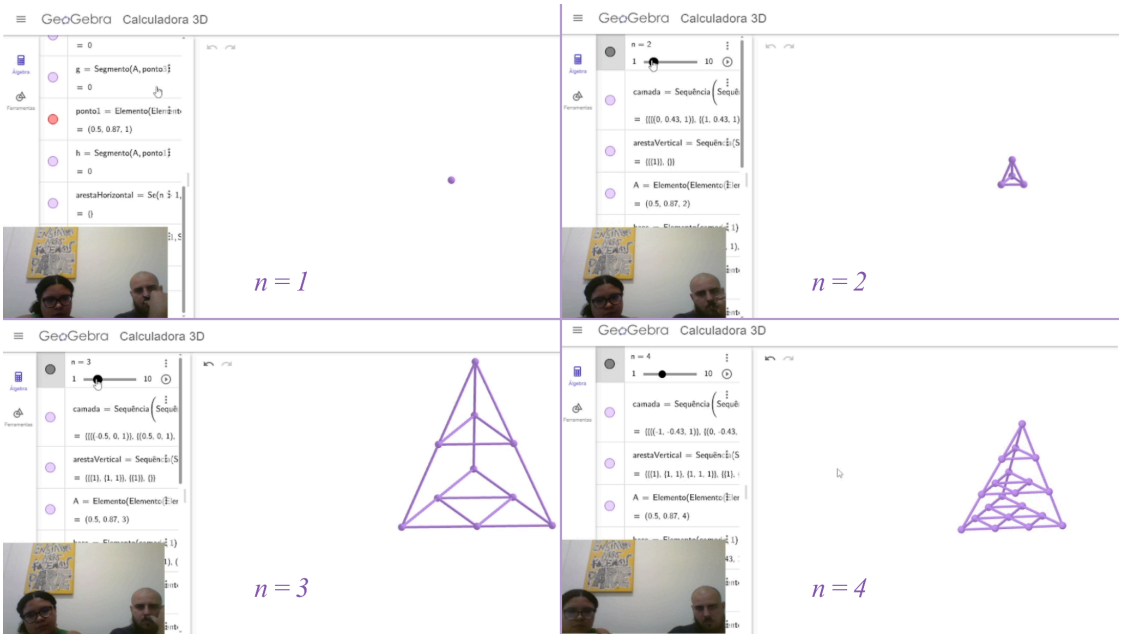
Os registros apresentados nas Figuras 32 e 33 revelam que as produções das duas duplas não se restringiram à obtenção de valores para os números figurados espaciais

explorados. Ao preencherem as tabelas, os participantes passaram a registrar interpretações construídas durante a exploração realizada no *GeoGebra*. A tabela funcionou como uma passagem entre o pensamento geométrico e o algébrico, e não apenas como um repositório de resultados: ao preencher a coluna de expressões, os licenciandos passaram a explicitar por escrito relações que, até então, haviam sido apenas manipuladas visualmente na construção dinâmica. Embora as duas duplas tenham produzido compreensões semelhantes acerca das relações identificadas ao longo da atividade, os registros evidenciam formas distintas de representá-las. Enquanto a primeira dupla privilegiou a escrita dos valores numéricos envolvidos nas somas, a segunda passou a utilizar a notação associada aos números figurados planos, representando os números piramidais por meio de expressões envolvendo T_n e S_n. Essas diferenças indicam que compreensões semelhantes puderam ser expressas de maneiras distintas. Além de sintetizar as relações produzidas durante a atividade, os registros escritos tornaram visíveis interpretações que nem sempre se evidenciaram nas discussões orais, fornecendo indícios sobre a forma como os participantes organizaram e representaram seus conhecimentos acerca dos números figurados espaciais.

A elaboração desses registros ocorreu em um coletivo constituído pelos licenciandos e por diferentes mídias, entre elas as construções dinâmicas do *GeoGebra*, os registros escritos, a linguagem matemática mobilizada durante a atividade e as interações entre os licenciandos, possibilitando a discussão, o confronto e a reorganização das relações produzidas ao longo da investigação. Nessa perspectiva, as mídias não desempenham um papel meramente instrumental, mas participam da própria produção dos conhecimentos construídos ao longo da investigação. Villarreal e Borba (2009, p. 51, tradução nossa) reforçam essa compreensão ao afirmarem que "as mídias são componentes do sujeito epistêmico, não sendo auxiliares nem suplementares, mas parte essencial e constitutiva dele. Elas são tão relevantes que diferentes mídias conduzem à produção de diferentes conhecimentos". Assim, os registros escritos deixam de ser compreendidos apenas como um produto da atividade e passam a integrar o conjunto de mídias que participou da produção dos conhecimentos evidenciados pelas duplas.

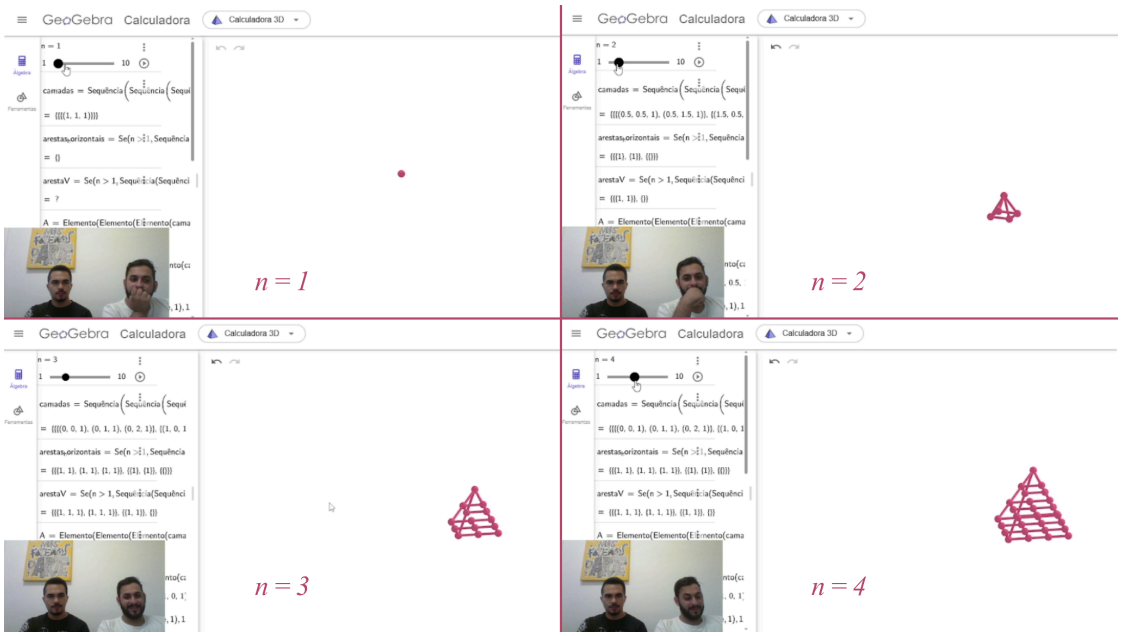
Embora os registros escritos permitam compreender as relações sistematizadas pelas duplas, eles não evidenciam integralmente o processo pelo qual essas interpretações foram produzidas. As Figuras 34 e 35 ilustram alguns momentos da exploração realizada no *GeoGebra*, permitindo observar a manipulação das construções dinâmicas que antecederam a elaboração das tabelas.

Figura 34 – Exploração da Dupla 1 no *GeoGebra*



Fonte: Dados da pesquisa (2026).

Figura 35 – Exploração da Dupla 2 no *GeoGebra*



Fonte: Dados da pesquisa (2026).

A compreensão desse processo torna-se mais evidente quando se observa a exploração realizada pelas duplas no *GeoGebra*. As Figuras 34 e 35 apresentam alguns momentos dessa

experimentação, na qual a manipulação das construções dinâmicas possibilitou a comparação entre diferentes configurações dos números figurados espaciais. Nessa perspectiva, a produção das relações identificadas pelas duplas pode ser compreendida como resultado das interações estabelecidas entre participantes e mídia digital, em consonância com o construto dos seres-humanos-com-mídias (Borba; Villarreal, 2005).

Ao longo da atividade, diferentes expressões e relações foram sendo construídas e, em alguns momentos, passaram a ser mobilizadas na interpretação de outros resultados produzidos durante a exploração. Foi nesse contexto que emergiram novas possibilidades de compreender os números figurados investigados, como pode ser observado no diálogo a seguir:

> **Miguel:** *Assim, eu achei uma relação meio besta aqui, mas que talvez possa ser interessante, é o somatório de* C_n *é igual a n ao quadrado mais n sobre quatro* R_n.
> **Pesquisadora:** *mais* R_n*?*
> **Miguel:** *É no caso aqui ó, essa última fórmula*
> **Pesquisadora:** *Você testou? Vale? Para esses cinco números que a gente tem aí?*
> **Miguel:** *Eu testei para todos os primeiros, para os cinco primeiros*
> **Pesquisadora:** *E deu certo?*
> **Miguel:** *Sim*
> **Pesquisadora:** *Será que se a gente desenvolver esse lado aqui, do n ao quadrado mais n vezes o Rn a gente chega nessa fórmula aqui?*
> **Miguel:** *Bem provável, Vou fazer*

Ao apresentar a igualdade envolvendo a soma dos números figurados cúbicos e os números figurados retangulares, Miguel afirma ter verificado sua ocorrência nos cinco primeiros números naturais ($n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$). Esse aspecto indica que a expressão proposta não foi apresentada apenas a partir de uma observação pontual, mas após sucessivas comparações com os valores produzidos durante a atividade. A concordância observada nesses casos forneceu elementos para sustentar a conjectura formulada pelo participante. Entretanto, a validação da igualdade não se encerra nos exemplos analisados. Ao questionar se o desenvolvimento algébrico da expressão $\frac{n^2+n}{4} \cdot R_n$ conduziria à fórmula obtida para a soma dos números cúbicos, a pesquisadora apresenta a necessidade de uma justificativa que extrapole os casos particulares. A discussão desloca-se da observação de que a igualdade funciona para determinados valores para a busca de argumentos capazes de sustentar sua validade para qualquer valor de $n \in N$, com $n \geq 1$.

A passagem da verificação empírica para a busca de uma justificativa algébrica aproxima-se das discussões de Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) sobre a validação de

conjecturas em investigações matemáticas. Embora a concordância observada nos primeiros termos tenha fornecido indícios favoráveis à expressão proposta, as discussões desenvolvidas pelos participantes indicam que a aceitação de uma relação matemática não se apoia exclusivamente na observação de casos particulares. A necessidade de produzir argumentos capazes de sustentar a igualdade para qualquer valor de n amplia o escopo da investigação e atribui um novo papel à generalização, que passa a ser compreendida não apenas como uma forma de representar padrões, mas também como um recurso para fundamentar matematicamente as relações identificadas durante a exploração.

A articulação entre expressões produzidas em diferentes momentos da investigação também esteve presente nas discussões da segunda dupla, conforme ilustra o diálogo a seguir:

> **Pesquisadora:** *E entre as somatórias dos cubos, e alguma outra da aula passada?*
> **Vítor:** *Meio que é implícito né, tipo, o T_n consegue ser gerado pelas diferenças dos P_n e se a gente tem o somatório de cada P_n, a gente consegue, diretamente, também colocar o T_n, que é, tipo, é T_n ao quadrado, é igual ao somatório de C_n.*

Ao comentar a igualdade envolvendo a soma dos números cúbicos, Vítor não se limita a afirmar sua validade. Sua fala sugere uma tentativa de justificá-la a partir de relações estabelecidas em momentos anteriores. Ao retomar a relação entre os números triangulares e as diferenças sucessivas dos números piramidais triangulares, cuja validade já havia sido discutida e justificada anteriormente, o participante articula resultados produzidos ao longo da atividade para construir uma explicação para a igualdade analisada. As expressões registradas deixam, assim, de ocupar apenas a função de representar relações identificadas durante a exploração e passam a integrar o próprio processo argumentativo.

Ao longo da experimentação-com-*GeoGebra*, foram identificadas diversas relações envolvendo números figurados planos e espaciais. O Quadro 5 reúne as relações matemáticas produzidas pelas duplas, evidenciando como diferentes números figurados passaram a ser articulados na construção de novas interpretações e generalizações.

Quadro 5 – Expressões e relações algébricas produzidas pelos grupos para os números figurados espaciais/planos

Grupo 1	Grupo 2
$P_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$	$P_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
$Q_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$Q_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$C_n = n^3$	$C_n = n^3$
$C_n = n \cdot S_n$	$\sum_{k=1}^{n} C_n = \left(P_n - P_{n-1}\right)^2$
$\sum_{k=1}^{n} C_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(T_n\right)^2$	$P_n = P_{n-1} + T_n$
$\sum_{k=1}^{n} C_n = \frac{n^2+n}{4} \cdot R_n$	$T_n = P_n - P_{n-1}$
$T_n = P_n - P_{n-1}$	$S_n = Q_n - Q_{n-1}$
$S_n = Q_n - Q_{n-1}$	
$\sum_{k=1}^{n} R_k = 2P_n$	

Fonte: Dados da pesquisa (2026).

As relações reunidas no Quadro 5, demonstradas e apresentadas no Apêndice E, permitem observar que, ao longo da atividade, os números figurados passaram a assumir funções que ultrapassam aquelas associadas às suas definições iniciais. Os números triangulares, por exemplo, deixam de ser mobilizados apenas como uma sequência específica e passam a participar da interpretação dos números piramidais triangulares e da soma dos números cúbicos. De modo semelhante, números quadrados e retangulares passam a ser utilizados na construção de outras expressões produzidas pelos participantes. Nesse processo, os diferentes números figurados investigados passam a ser compreendidos não apenas por suas características individuais, mas também pelas relações que estabelecem entre si, o que se aproxima da compreensão de Bortoli, Silva e Yassunaga (2026) de que o estudo dos números figurados envolve conexões entre diferentes conhecimentos matemáticos. As relações indicam que um mesmo número figurado assumiu diferentes funções ao longo da investigação. Esse

deslocamento reforça a leitura, apresentada no início do capítulo, de que o conhecimento produzido não decorre da observação isolada de cada figura, mas do coletivo licenciando-com-*GeoGebra*: é a possibilidade de manipular, comparar e reorganizar as construções dinâmicas que permite aos participantes perceberem essas múltiplas funções de um mesmo número figurado, e não apenas registrá-las separadamente.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) destacam que a investigação matemática envolve um movimento contínuo de produção e reorganização de ideias. Ao longo da exploração, resultados produzidos em determinados momentos deixam de constituir apenas respostas para questões específicas e passam a assumir novos significados quando mobilizados na interpretação de outras situações. As relações registradas pelas duplas ilustram esse movimento, uma vez que conhecimentos produzidos em uma exploração reaparecem posteriormente na construção de novas expressões e igualdades.

Esse processo também evidencia que a produção de conhecimentos observada não pode ser atribuída exclusivamente aos participantes ou ao *GeoGebra*. As relações produzidas ao longo da atividade emergem das interações estabelecidas entre as construções dinâmicas, os registros escritos, as discussões realizadas pelas duplas e as interpretações elaboradas durante a experimentação (Borba; Villarreal, 2005). Assim, mais do que favorecer a visualização dos números figurados, o *GeoGebra* participou da constituição de um ambiente no qual diferentes formas de explorar, interpretar e relacionar ideias matemáticas tornaram-se possíveis. Nesse sentido, a experimentação possibilitou não apenas a identificação de propriedades e relações algébricas, mas também a produção de novas formas de compreender e investigar números figurados em um coletivo de seres-humanos-com-mídias.

Em síntese, a experimentação com os números figurados espaciais evidenciou um percurso investigativo no qual visualização, manipulação, formulação de conjecturas, generalização e validação se constituíram de maneira articulada. A exploração dinâmica das diferentes ordens permitiu que os participantes interpretassem os números piramidais triangulares e quadrados como composições sucessivas de números figurados planos, reconhecessem no cubo uma relação entre a configuração espacial e as potências cúbicas e, posteriormente, mobilizassem essas compreensões na produção de novas expressões e igualdades. Nesse movimento, as ideias matemáticas não foram construídas de forma linear: hipóteses foram elaboradas, confrontadas com casos particulares, reformuladas e transformadas em relações mais gerais, cuja validade passou a exigir justificativas que ultrapassassem a simples verificação empírica. Tal dinâmica aproxima-se do que Ponte,

Brocardo e Oliveira (2019) caracterizam como investigação matemática, na qual a exploração de situações, a identificação de regularidades, a formulação e o teste de conjecturas e a construção de argumentos integram um processo contínuo de produção e reorganização do conhecimento. Ao mesmo tempo, as possibilidades de variar rapidamente os valores de n, observar a formação das camadas e comparar diferentes representações favoreceram articulações entre aspectos visuais, numéricos e algébricos, corroborando a compreensão de Borba, Scucuglia e Gadanidis (2015) de que ambientes de matemática dinâmica ampliam as condições de experimentação, visualização e produção de significados matemáticos.

Os episódios analisados também mostram que o *GeoGebra* não atuou apenas como recurso para ilustrar propriedades previamente conhecidas, mas como participante do processo de produção do conhecimento. As relações identificadas emergiram das interações entre os participantes, as construções dinâmicas, os controles deslizantes, os registros em tabelas, as expressões algébricas, os questionamentos da pesquisadora e os conhecimentos produzidos em etapas anteriores da atividade. Nessa perspectiva, o avanço da observação de casos particulares para a elaboração de generalizações e demonstrações pode ser compreendido como uma reorganização do pensamento no interior de um coletivo de seres-humanos-com-mídias, conforme proposto por Borba e Villarreal (2005). A mídia digital condicionou formas específicas de observar, testar, comparar e justificar, enquanto as discussões entre os participantes atribuíram novos significados às representações produzidas, fazendo com que um mesmo número figurado assumisse diferentes funções ao longo da investigação.

Esse conjunto de resultados permite retomar a pergunta que orienta esta pesquisa: como os licenciandos em Matemática produzem conhecimentos sobre números figurados em um ambiente de experimentação-com-*GeoGebra*? Os episódios analisados evidenciam que essa produção não decorre de um percurso individual e linear, mas de um processo coletivo, mediado pelo *software*, no qual observação, experimentação e discussão se entrelaçam na construção do conhecimento matemático. Assim, a experimentação-com-*GeoGebra* favoreceu não apenas a descoberta de padrões ou a obtenção de fórmulas, mas a constituição de uma rede de relações entre números figurados planos e espaciais, na qual resultados anteriormente produzidos foram retomados, ressignificados e utilizados como argumentos para novas construções matemáticas, sintetizadas nas expressões e demonstrações apresentadas no Apêndice E.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa foi conduzida no contexto de um experimento de ensino (Steffe; Thompson, 2000), com a participação de duas duplas de licenciandos em Matemática, que exploraram os números figurados planos e espaciais utilizando o *software GeoGebra* por meio de controles deslizantes. A análise dos dados, conduzida com base no método proposto por Powell, Francisco e Maher (2004), permite responder à questão que orientou esta investigação: como licenciandos em Matemática produzem conhecimentos sobre números figurados em um ambiente de experimentação-com-*GeoGebra*? Os resultados evidenciam que essa produção ocorreu por meio de um processo investigativo não linear, em que a visualização dinâmica das construções possibilitou a identificação de regularidades, a formulação e o teste de conjecturas, a construção de generalizações e a articulação entre representações geométricas, numéricas e algébricas dos números figurados.

A partir das análises realizadas, considera-se que essa produção se constituiu de maneira dinâmica, à medida que os licenciandos exploraram diferentes possibilidades, formularam interpretações, confrontaram ideias, reorganizaram estratégias e elaboraram justificativas durante as atividades. As compreensões construídas não surgiram de forma imediata, mas foram sendo construídas à medida que novas possibilidades de exploração eram proporcionadas pelo ambiente de experimentação.

As evidências reunidas nesta investigação permitem compreender que a produção de conhecimentos sobre números figurados não ocorreu como resultado da simples apresentação de conceitos. Ao longo das atividades, os conhecimentos foram sendo produzidos progressivamente, por meio das explorações realizadas no ambiente de experimentação-com-*GeoGebra*. As relações matemáticas construídas pelos licenciandos emergiram das sucessivas interações estabelecidas com as representações dinâmicas, das discussões realizadas entre os participantes e da constante reformulação das interpretações produzidas durante as investigações. Desse modo, a produção de conhecimentos caracterizou-se como um processo contínuo de construção de significados, no qual observar, manipular, discutir, testar e justificar constituíram ações indissociáveis do próprio desenvolvimento das atividades.

Especificamente, os licenciandos produziram conhecimentos por meio da visualização dinâmica das construções, identificando regularidades entre configurações sucessivas de números figurados; produziram generalizações ao estenderem propriedades observadas em

casos particulares para relações mais amplas; e validaram relações algébricas ao confrontarem as expressões formuladas com o comportamento das representações geométricas e numéricas no *GeoGebra*, articulando, assim, representações visuais, numéricas e algébricas na produção desses conhecimentos.

A compreensão produzida ao longo desta investigação também permite retomar a opção pela expressão experimentação-com-*GeoGebra*, adotada desde o título deste trabalho. As análises desenvolvidas evidenciaram que a experimentação matemática não ocorreu com o *GeoGebra* entendido como um recurso externo ao processo investigativo, mas constituiu-se nas interações estabelecidas entre os licenciandos, a mídia digital e as tarefas propostas. Assim, experimentação e *GeoGebra* não se apresentaram como elementos independentes, mas como componentes de um mesmo coletivo responsável pela produção de conhecimentos sobre os números figurados. Nessa perspectiva, os resultados desta pesquisa corroboram o entendimento de Borba e Villarreal (2005) de que o conhecimento é produzido no coletivo seres-humanos-com-mídias. No decorrer das atividades, observou-se que as possibilidades oferecidas pelo *GeoGebra* influenciavam continuamente as ações desenvolvidas pelos licenciandos, ao mesmo tempo em que as decisões tomadas pelos participantes redefiniam novas formas de exploração do ambiente digital, em um processo de moldagem recíproca (Borba; Villarreal, 2005), no qual a mídia molda o pensamento do sujeito ao mesmo tempo em que é remodelada por ele. Não se tratou, portanto, da utilização de um *software* para ilustrar propriedades matemáticas previamente conhecidas, mas da constituição de um ambiente em que a mídia participou efetivamente da produção de conhecimentos, reorganizando as compreensões, favorecendo novas formas de visualização e possibilitando o estabelecimento de relações que dificilmente seriam produzidas apenas em um ambiente de lápis e papel.

Os episódios analisados ao longo desta pesquisa evidenciaram que a organização das atividades possibilitou a constituição de um ambiente de investigação matemática, no qual os licenciandos assumiram papel ativo na produção de conhecimentos sobre os números figurados. Em vez de percorrerem um caminho previamente definido para chegar às respostas esperadas, os participantes foram continuamente desafiados a explorar as representações construídas no *GeoGebra*, interpretar as regularidades observadas, confrontar diferentes possibilidades de resolução e construir argumentos que sustentassem as relações identificadas durante as atividades. Esse conjunto de ações revelou que a produção de conhecimentos esteve diretamente relacionada ao processo investigativo vivenciado pelos licenciandos, e não

apenas aos resultados matemáticos alcançados ao final de cada tarefa. Essa compreensão encontra respaldo em Ponte, Brocardo e Oliveira (2019), para quem a investigação matemática desloca o foco da simples obtenção de respostas para os processos de exploração, formulação de conjecturas, teste de estratégias, construção de justificativas e comunicação de resultados. Os episódios analisados mostraram que essas práticas constituíram elementos recorrentes durante todo o experimento de ensino, evidenciando que a investigação matemática não se restringiu à organização metodológica da oficina, mas caracterizou a forma como os licenciandos produziram conhecimentos sobre os números figurados em um ambiente de experimentação-com-*GeoGebra*.

A visualização constituiu um dos elementos centrais para a produção de conhecimentos ao longo do experimento de ensino. A possibilidade de manipular dinamicamente as construções no *GeoGebra* favoreceu a observação do crescimento dos números figurados, a comparação entre diferentes configurações geométricas e o estabelecimento de relações entre suas representações planas e espaciais. Ao movimentarem os controles deslizantes, os licenciandos passaram a acompanhar simultaneamente as alterações nas construções geométricas e nos valores numéricos correspondentes, condição que lhes permitiu identificar regularidades, formular conjecturas, testar interpretações e construir generalizações fundamentadas nas evidências produzidas durante a própria experimentação. Esse processo dialoga com Borba, Scucuglia e Gadanidis (2015), ao evidenciarem que as tecnologias digitais ampliam as possibilidades de experimentação e de visualização matemática. Os resultados desta pesquisa reforçam essa perspectiva ao mostrar que as representações dinâmicas favoreceram formas de exploração que dificilmente seriam desenvolvidas apenas com lápis e papel.

Diante disso, a visualização assumiu um papel epistemológico no processo investigativo: foi por meio dela que os licenciandos produziram conhecimentos sobre os números figurados, identificando regularidades entre configurações sucessivas, construindo generalizações a partir da observação do crescimento das figuras e validando relações algébricas ao confrontarem as expressões formuladas com o comportamento das representações dinâmicas no *GeoGebra*.

O processo descrito até aqui também evidenciou uma contínua reorganização das ideias matemáticas mobilizadas pelos licenciandos durante as atividades. À medida que exploravam as representações dinâmicas dos números figurados, os participantes retomavam conhecimentos anteriormente construídos, reinterpretavam estratégias inicialmente adotadas e

atribuíam novos significados às relações identificadas durante a experimentação-com-*GeoGebra*. Esse movimento tornou-se particularmente evidente quando propriedades inicialmente reconhecidas em casos específicos passaram a ser utilizadas na construção de relações mais gerais, permitindo aos licenciandos transitar entre representações geométricas e algébricas, bem como estabelecer conexões entre os números figurados planos e espaciais. Esse entendimento é corroborado pela Teoria da Reorganização, discutida por Borba (1999) a partir das contribuições de Tikhomirov (1981), segundo a qual as tecnologias não apenas ampliam as possibilidades de realização de determinadas tarefas, mas reorganizam os processos de pensamento. Nessa perspectiva, o *GeoGebra* não atuou apenas como um recurso para visualizar construções matemáticas; as possibilidades de manipulação, experimentação e obtenção de *feedbacks* imediatos favoreceram a reorganização dos conhecimentos mobilizados pelos licenciandos ao longo da investigação. Assim, os conhecimentos relacionados à geometria, às sequências numéricas, ao reconhecimento de padrões, à generalização e à demonstração passaram a ser articulados de novas formas, possibilitando a produção de compreensões mais amplas acerca dos números figurados.

As compreensões construídas ao decorrer desta investigação permitiram compreender como licenciandos em Matemática produzem conhecimentos sobre números figurados em um ambiente de experimentação-com-*GeoGebra*. As interpretações evidenciaram que essa produção de conhecimentos foi constituída por um processo investigativo no qual a exploração de representações dinâmicas, a formulação de conjecturas, o estabelecimento de relações entre números figurados planos e espaciais, a construção de justificativas e a elaboração de generalizações ocorreram de forma articulada durante todo o experimento de ensino. Além disso, tornou-se possível compreender como a construção e a manipulação das representações dinâmicas favoreceram a exploração de propriedades e relações associadas aos números figurados, confirmando o papel da experimentação-com-*GeoGebra* na produção de conhecimentos matemáticos.

Os resultados obtidos apontam para importantes contribuições para a formação inicial de professores de Matemática e para práticas que articulam tecnologias digitais e investigação matemática. Eles evidenciam que a experimentação-com-*GeoGebra* favoreceu um ambiente em que os licenciandos assumiram papel ativo na produção de conhecimentos, produzindo conjecturas, estabelecendo relações, construindo justificativas e elaborando generalizações a partir da exploração das representações dinâmicas. Nesse contexto, os números figurados mostraram-se um objeto matemático fértil para a investigação, por possibilitarem a

articulação entre representações geométricas e algébricas e favorecerem a construção de uma rede de relações entre números figurados planos e espaciais, progressivamente ampliada ao longo das atividades.

Os resultados desta investigação também indicam possibilidades para pesquisas futuras sobre o potencial da experimentação-com-*GeoGebra* na formação inicial de professores, evidenciando que a integração entre investigação matemática, tecnologias digitais e o construto dos seres-humanos-com-mídias (Borba; Villarreal, 2005) pode favorecer práticas de ensino em que os estudantes assumam um papel ativo na produção de conhecimentos matemáticos. Ao mesmo tempo, os resultados aqui apresentados oferecem possibilidades para novas investigações que ampliem essa proposta para outros conteúdos matemáticos, diferentes contextos de formação docente e distintos ambientes de experimentação, aprofundando as discussões sobre a produção de conhecimentos em coletivos constituídos por seres humanos e mídias.

Como possibilidade de continuidade, pesquisas futuras podem ampliar o número e a diversidade de participantes, contemplando licenciandos de diferentes instituições, professores em exercício e estudantes da Educação Básica, de modo a investigar como distintos repertórios matemáticos e experiências com tecnologias digitais influenciam a produção de conhecimentos sobre números figurados. Estudos longitudinais também poderiam acompanhar a apropriação dessas formas de experimentação ao longo da formação docente, examinando se e como os futuros professores incorporam atividades investigativas com o *GeoGebra* em suas próprias práticas. Outra frente relevante consiste em explorar diferentes conteúdos matemáticos e comparar ambientes de experimentação que articulem representações bidimensionais e tridimensionais, buscando compreender com maior profundidade os processos de transição entre visualização, reconhecimento de padrões, generalização algébrica e construção de argumentos. Além disso, novas investigações podem focalizar mais diretamente as intervenções do professor ou pesquisador, analisando como perguntas, provocações e momentos de sistematização contribuem para que conjecturas produzidas experimentalmente sejam transformadas em relações matemáticas mais gerais e justificadas.

No âmbito pedagógico, os resultados sugerem que atividades com números figurados podem favorecer propostas de ensino que integrem geometria, álgebra, sequências, generalização e argumentação matemática. Para isso, o *GeoGebra* não deve ser utilizado apenas como recurso de ilustração de fórmulas previamente apresentadas, mas como parte

constitutiva de situações nas quais os estudantes possam manipular construções, observar variações, comparar configurações, levantar conjecturas e discutir a validade das relações identificadas. A atuação docente permanece, contudo, fundamental para organizar as tarefas, selecionar perguntas produtivas e promover a passagem da exploração de casos particulares para a elaboração de expressões gerais e justificativas matemáticas. Desse modo, a experimentação-com-*GeoGebra* pode contribuir para práticas formativas em que o conhecimento não seja somente recebido, mas produzido pelos estudantes em interação com os colegas, com as tarefas e com as possibilidades oferecidas pela mídia digital.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. *Historia de la filosofía*. Traducción de Juan Estelrich e J. Pérez Ballestar. 4. ed. v. 1. Barcelona: Hora, 1994.

ALMEIDA, M. C. *Platão redimido: a teoria dos números figurados na ciência antiga e moderna*. Curitiba: Editora Champagnat, 2003.

ARAÚJO, W. A. *O GeoGebra: Uma Experimentação na Abordagem da Função Afim*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, Aracaju, 2014.

BARBOSA, L. M.; SCUCUGLIA, R. R. S. O pensamento computacional envolvendo a construção de fractais com o GeoGebra. *Educação Matemática em Revista – RS*, v. 2, n. 23, p. 71-80, nov. 2022. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/EMR-RS/article/view/3089/2237. Acesso em: 08 jul. 2025.

BARBOSA, L. M. *Aspectos do Pensamento Computacional na Construção de Fractais com o software GeoGebra*. 2019. 168f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2019.

BARON, M. E. *Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo*. Tradução de J. R. B. Coelho. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BARROS, F. E. *Engenharia didática sobre os números figurados k-dimensionais: relações recorrentes, termo geral, função geradora e representação por meio de recursos computacionais*. 2021. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Campus Fortaleza, Fortaleza, 2021.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. *Pro-Posições*, Campinas, v. 4, n. 1, p. 18-23, mar. 1993.

BORBA, M. C. Tecnologias informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, M. A. V. (org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 285-295.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (org.). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer, 2005.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BORBA, M. C.; SOUTO, D. L. P.; CANEDO JUNIOR, N. R. *Vídeos na educação matemática: Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais*. São Paulo: Autêntica Editora, 2022. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BORBA, M. C.; XAVIER, J. F. Vídeos curtos na perspectiva dos seres-humanos-com-mídias e da Teoria da Atividade. *Intermaths*, Vitória da Conquista, v. 3, n. 2, p. 1-14, 2022. Disponível em: https://periodicos2.uesb.br/intermaths/article/view/11869. Acesso em: 5 nov. 2025.

BORTOLI, A.; SILVA, R. S. R. da; YASSUNAGA, E. J. I. Explorando números figurados: possibilidades em cenários do Ensino Superior. *PARADIGMA*, v. 47, n. 1, e2026005, 2026. Disponível em: https://revistaparadigma.com.br/index.php/paradigma/article/view/1776. Acesso em: 10 ago. 2026.

BOYER, B. C.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. Tradução de Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2018.

CANAL, A. P.; BISOGNIN, V.; ISAIA, S. M. A. Pensamento computacional no ensino da Matemática: planejamento de atividade didática sobre os números figurados. *Nuevas Ideas en Informática Educativa*, v. 14, p. 340-347, 2018.

CARDOSO, J. A. P. S.; SARAVALI, E. G. Investigações Matemáticas no Ensino Fundamental I: Análise das Pesquisas Brasileiras. In: MANZINI, Eduardo José (org.). Educação, ensino e inclusão em diferentes contextos. Marília: Oficina Universitária; São Paulo: Cultura Acadêmica, 2025. p. 11-40.

CARMO, J. V. G. *Práticas experimentais de cálculo com calculadoras*. 2024. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2024. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/entities/publication/455bd057-2305-4b3c-93a6-7f4329809747. Acesso em: 24 set. 2025.

D'AMBROSIO, U. Por que e como ensinar História da Matemática. *REMATEC*, Natal, v. 8, n. 12, p. 7–21, 2013. Disponível em: https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/355. Acesso em: 25 ago. 2026.

DEZA, E.; DEZA, M. M. *Figurate numbers*. Singapore: World Scientific Publishing, 2012.

DUARTE, A. M. Entendendo a fórmula da progressão aritmética visualmente: uma experiência didática através de números figurados, geometria e História da Matemática. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, Campo Mourão, v. 14, n. 34, p. 1-22, 2025. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/9177. Acesso em: 20 set. 2025.

DUTRA, T. M. S. *Produção de significado a respeito de números figurados em um processo de formação de professores de matemática*. 2020. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2020. Disponível em: https://repositorio.ifes.edu.br/items/e3fddcb8-2e7f-4491-a08b-17fb73666d42. Acesso em: 20 ago. 2025.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 2011.

GEOGEBRA. *About GeoGebra*. [S. l.], s.d. Disponível em: https://www.geogebra.org/about. Acesso em: 2 fev. 2025.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. *RAE – Revista de Administração de Empresas*, São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63, mar. 1995.

GOOGLE. *Google Meet*. Mountain View, CA, s.d. Disponível em: https://meet.google.com/. Acesso em: 5 ago. 2025.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7., 1996, Belo Horizonte. *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*. Belo Horizonte: SBIE, 1996. p. 1-13.

HEGEDUS, S. J.; MORENO-ARMELLA, L. Introduction: the transformative nature of "dynamic" educational technology. *ZDM Mathematics Education*, v. 41, n. 4, p. 397-398, 2009. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-009-0201-9. Acesso em: 12 jul. 2026.

HOHENWARTER, M.; LAVICZA, Z. Mathematics teacher development with ICT: towards an International GeoGebra Institute. In: KÜCHEMANN, D. (ed.). *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, v. 27, n. 3. London: British Society for Research into Learning Mathematics, 2007. p. 49-54.

JESUS, S. V. S. *Os números figurados e a sequência de Fibonacci no EB*. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino do 1.º e do 2.º Ciclo do Ensino Básico) – Universidade de Aveiro, Aveiro, 2013. Disponível em: https://ria.ua.pt/handle/10773/12970. Acesso em: 05 fev. 2025.

MAZZI, L. C. Convergência de sequências: uma abordagem com o software GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, São Paulo, v. 4, n. 1, p. 5-17, 2015. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/23049/17169. Acesso em: 20 abr. 2026.

MICROSOFT. *Ferramenta de Captura*. Redmond, WA, s.d. Disponível em: https://support.microsoft.com/windows. Acesso em: 5 ago. 2026.

MONTEIRO, M. S.; GABRIELLI, A. M. Atividades com Números Poligonais e Sequências. *Revista do Professor de Matemática*. v. 68, p. 7-12, 2009.

OBS PROJECT. *OBS Studio*. [S. l.], s.d. Disponível em: https://obsproject.com/. Acesso em: 5 ago. 2025.

PEREIRA, T. *Aspectos sobre o ensino de matemática e a inclusão de estudantes cegos: reflexões a partir de falas e práticas de professoras*. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2021. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/entities/publication/23864bed-fed8-46cc-96fb-138e8baec970. Acesso em: 30 jan. 2026.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma abordagem à Análise de Dados de Vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. *Bolema*, Rio Claro, v. 17, n. 21, p. 81-140, 2004.

REZENDE, W. M.; PESCO, D. U.; BORTOLOSSI, H. J. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. In: CONFERÊNCIA LATINO-AMERICANA DE GEOGEBRA, 1., 2012. *Anais da 1ª Conferência Latino-Americana de GeoGebra*. 2012. p. 74-89. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8370/6580. Acesso em: 3 mar. 2025.

RODRIGUES, T. F.; OLIVEIRA, G. S.; SANTOS, J. A. As pesquisas qualitativas e quantitativas na educação. *Revista Prisma*, v. 2, n. 1, p. 154–174, 25 dez. 2021.

ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSSETTO, D. Z.; BALIEIRO FILHO, I. F. A resolução de problemas no currículo de Matemática do Estado de São Paulo e no caderno do aluno. *Práxis Educacional*, Vitória da Conquista, v. 17, n. 45, p. 428-450, 2021. Disponível em: https://periodicos2.uesb.br/index.php/praxis/article/view/7060. Acesso em: 10 set. 2025.

SANTOS, A. G.; MAIA, A. M. O.; SOUTO, D. L. P. Construto seres-humanos-com-mídias (SHCM) por pós-graduandos em Educação Matemática e Científica. *Ciência & Educação*, Bauru, v. 28, e22034, 2022. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ciedu/a/35JpPKVHSPsSvTQtJBPWdnH/?lang=pt. Acesso em: 25 fev. 2025.

SANTOS-TRIGO, M.; MORENO-ARMELLA, L.; CAMACHO-MACHÍN, M. *Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework*. *ZDM Mathematics Education*, v. 48, n. 6, p. 827-842, 2016. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-016-0757-0. Acesso em: 12 abr. 2026.

SCUCUGLIA, R. R. S. *A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas*. 2006. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2006.

SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G.; RONDINI, C. A.; BORBA, M. C.; HUGHES, J. M. Sensitive Computational Thinking of Pre-Service Mathematics Teachers on Nested Loops. *Perspectivas da Educação Matemática*, Campo Grande, v.13, n. 32, p. 1-18, 2020.

SILVA, F. M. Reconfigurações na pesquisa educacional: a produção de vídeos e a experiência na sala de aula de matemática. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 27., 2023, Vitória. *Anais do XXVII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*. Vitória: SBEM, 2023. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/ocs/index.php/EBRAPEM/EBRAPEM027/paper/viewFile/2520/1592. Acesso em: 2 out. 2025.

SOUTO, D. L. P.; BORBA, M. C. Seres humanos – com – internet ou internet – com – seres humanos: uma troca de papéis? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, México, DF, v. 19, n. 2, p. 217-242, 2016.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In: KELLY, A. E.; LESH, R. A. (ed.). *Handbook of research design in mathematics and science education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p. 267-307.

SUPARMAN; MARASABESSY, R.; HELSA, Y. *Fostering spatial visualization in GeoGebra-assisted geometry lesson: A systematic review and meta-analysis*. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, v. 20, n. 9, em2509, p. 1-18, 2024. Disponível em: https://www.ejmste.com/article/fostering-spatial-visualization-in-geogebra-assisted-geometry-lesson-a-systematic-review-and-15170. Acesso em: 12 jul. 2026.

TURBOSCRIBE. *TurboScribe*. [S. l.], s.d. Disponível em: https://turboscribe.ai/. Acesso em: 2 set. 2025.

YASSUNAGA, E. J. I.; BORTOLI, A. de. GeoGebra-Ferramenta para explorar atividades históricas sobre números figurados desde sua representação geométrica. *TANGRAM – Revista de Educação Matemática*, v. 7, n. 4, p. 92-111, 2024. Disponível em: https://ojs.ufgd.edu.br/tangram/article/view/18280. Acesso em: 10 ago. 2026.

APÊNDICE A - MATERIAL BASE PARA A OFICINA "EXPLORANDO OS NÚMEROS FIGURADOS

ETAPA/SESSÃO 1 - INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Atividade 1 – Números Figurados Planos
Parte 1 - Material a ser disponibilizado aos licenciandos

O que você conhece sobre "Números Figurados"?

Você sabia que os números podem formar figuras geométricas? Alguns deles se organizam perfeitamente em triângulos, quadrados e até outras formas! Vamos descobrir como isso acontece. Abaixo temos os números triangulares:



Acesse os links e explore os materiais disponíveis.

No primeiro link temos a construção de números figurados de polígonos regulares, é possível notar dois controles deslizantes, 'L' que define o número de lados do polígono regular, ou seja, ele determina se a figura será um triângulo, quadrado, pentágono, etc. Ao ajustar esse valor, você altera a forma do polígono, e 'n' que representa o índice do número figurado, à medida que você ajusta o valor de 'n', o número de pontos na construção muda.

- link 1: https://www.geogebra.org/geometry/y4jdhmmc

No segundo link, temos a construção de números figurados retangulares, com um controle deslizante 'n' que representa o índice do número figurado.

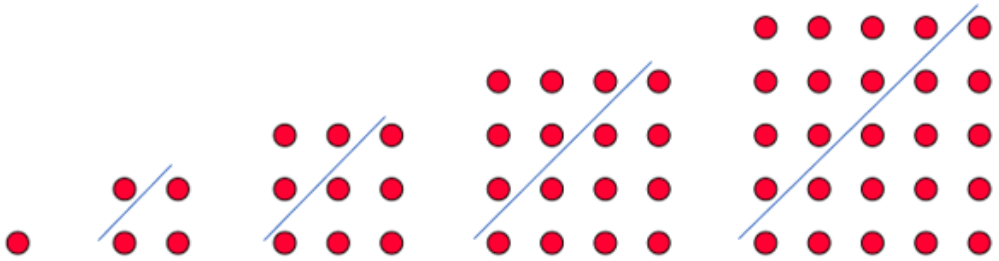
- link 2: https://www.geogebra.org/geometry/wd9tvfzu

Com as interações no *GeoGebra* preencha a tabela abaixo e responda à questão:

n	T_n	Expressão Tn	S_n	Expressão S_n	R_n	Expressão R_n
1						
2						
3						
4						
5						
⋮						
n						

A. Como o número retangular R_n se relaciona com o número triangular T_n?

Observe a imagem abaixo e responda à questão:



A. Todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos?

A partir das construções geométricas e observações no *GeoGebra*, foi possível identificar três sequências importantes:

- $T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (número triangular)
- $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ (quadrado perfeito)
- $R_n = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots + 2n = n(n + 1)$ (número retangular)

Essas expressões mostram como os padrões numéricos se conectam com formas geométricas e permitem visualizar propriedades fundamentais dos números naturais.

ETAPA/SESSÃO 2 - INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Atividade 2 – Números Figurados Espaciais
Parte 2 - Material a ser disponibilizado aos licenciandos

Acesse os links e explore os materiais disponíveis.

No link 3 temos a construção da pirâmide de base triangular. Na janela de álgebra, é possível notar um controle deslizante ‘n’ que representa o índice do número figurado. À medida que você ajusta o valor de 'n', o número de pontos na construção e a quantidade de camadas mudam.

- link 3: https://www.geogebra.org/3d/ejvqgdmn

Do mesmo modo, temos o link 4, que representa a construção da pirâmide de base quadrada. Assim como no caso anterior, a janela de álgebra apresenta um controle deslizante ‘n’ que representa o índice do número figurado.

- link 4: https://www.geogebra.org/calculator/fetsjxvs

Por fim, no link 5 temos a construção do cubo, com o controle deslizante ‘n’ que representa o índice do número figurado.

- link 5: https://www.geogebra.org/3d/vpmznng4

Manipule os controles deslizantes disponíveis em todos os links, complete a tabela abaixo e responda as questões:

n	P_n	Expressão P_n	Q_n	Expressão Q_n	C_n	Expressão C_n	$\sum_{n}^{1} C_n$
1							
2							
3							
4							
5							
⋮							
n							

A. Qual é o padrão oculto entre as formas planas e suas versões espaciais?

Por inspeção aos números em linhas sucessivas, temos:

- $S_n + C_n = n\ (R_n) = n^2(n+1)$,
- $T_n + S_n + C_n = 3(Q_n)$

B. Prove que $T_n + S_n + C_n = 3\ (Q_n)$ equivale à fórmula habitual $\sum_{1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum_{1}^{n} Cn$ (última coluna da tabela) determina a soma dos cubos. Ao analisarmos, é possível perceber que em cada linha a soma dos cubos é igual ao quadrado do número triangular naquela linha, isto é:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Os números figurados constituem um recurso relevante para a investigação de propriedades dos números naturais, permitindo, em especial, a formulação de expressões equivalentes:

$\sum_{1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{1}^{n} r^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
A soma representa a sequência dos números triangulares: 1, 3, 6, 10,... Cada termo dessa sequência corresponde ao número de pontos em um triângulo de lado *n*.	A soma representa a construção de uma pirâmide de base quadrada e cada camada segue a sequência dos números quadrados: 1, 4, 9, 16,..., . A soma de todas as camadas resulta no total de pontos necessários para a construção da pirâmide de base quadrada.	A soma dos números cúbicos $1,8,27,\ldots,n^3$ resulta em um quadrado perfeito. Em outras palavras, a soma dos cubos até *n* corresponde ao quadrado do *n-ésimo* número triangular.

APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO



Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE

(Conselho Nacional de Saúde, Resolução 466/2012/Resolução 510/2016)

Você está sendo convidado a participar como voluntário do projeto de pesquisa "Desvendando Números Figurados com Inteligência Artificial" da pesquisadora Victoria Ratzat de Oliveira.

O objetivo da pesquisa é explorar o uso da inteligência artificial na criação de músicas como recurso pedagógico no ensino da Matemática, na formação inicial de professores, com a inclusão de mensagens subliminares e de modo secundário Investigar como alunos de graduação do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), campus de São José do Rio Preto, utilizam ferramentas de inteligência artificial (Chat GPT e Suno AI) para criar músicas com mensagens subliminares baseadas no conceito de "Números Figurados". analisando sua percepção e conhecimentos sobre essas ferramentas no ensino de Matemática. Esta pesquisa justifica-se pela necessidade de ampliar as práticas docentes, especialmente diante dos desafios e possibilidades trazidos pelas novas tecnologias, como a inteligência artificial. Em um cenário educacional em constante transformação, torna-se necessário investigar como ferramentas baseadas em IA podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem, incentivando a criatividade, o pensamento crítico e o uso de recursos inovadores no ensino da Matemática.

Todos os encontros serão gravados em áudio e vídeo, com o consentimento dos participantes, podendo ser transcritos total ou parcialmente, com o objetivo de registrar os processos investigativos, criativos e formativos vivenciados ao longo da oficina. As gravações e transcrições serão utilizadas exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, assegurando o anonimato dos envolvidos e a confidencialidade das informações. As atividades acontecerão no contraturno das aulas, em cinco encontros presenciais, com duração de 2 (duas) horas, totalizando 10 (dez) horas de participação por estudante, ao todo, participarão 10 (dez) alunos, organizados em 5 (cinco) duplas.Os encontros estão organizados em cinco etapas (ou sessões), conforme descrito a seguir:

- **Etapa/Sessão 1: Investigação Matemática (2 horas)**
- Parte I - Números Figurados Planos

Na primeira parte desta etapa, os participantes serão convidados a investigar os números figurados planos, com ênfase nos números triangulares,quadrangulares e retangulares. A investigação será realizada com o uso do software GeoGebra, que permitirá a construção e visualização dessas figuras no plano. As duplas de estudantes explorarão padrões e propriedades matemáticas por meio das representações geométricas, identificando regularidades e discutindo possíveis generalizações.

O foco será desenvolver o raciocínio matemático e a visualização geométrica, além de incentivar a formulação de hipóteses e conjecturas. As reflexões e observações feitas pelos estudantes serão registradas em diários de campo individuais e também por meio do instrumento pedagógico estruturado (anexo a este projeto), que funciona como roteiro didático da sequência de atividades.

- **Etapa/Sessão 2: Investigação Matemática (2 horas)**
- Parte 2 – Números Figurados Espaciais

Na sequência, os participantes explorarão os números figurados espaciais, como pirâmides de base triangular, pirâmide de base quadrada e cubo. Essa atividade permitirá a transição do raciocínio bidimensional para o tridimensional, aprofundando a compreensão sobre a construção e estrutura dos números figurados em diferentes dimensões. Também será utilizado o GeoGebra, com foco nas representações espaciais e suas relações com os números figurados planos.

As anotações e reflexões surgidas durante o processo continuarão sendo registradas no instrumento anexo e no diário de campo da pesquisadora.

- **Etapa/Sessão 3 – Músicas Matemáticas (2 horas)**

Nesta etapa, os participantes utilizarão o ChatGPT como uma ferramenta de apoio para a criação de letras de músicas com base nos conteúdos matemáticos desenvolvidos nas sessões anteriores. A proposta é transformar os conhecimentos adquiridos sobre os números figurados em expressões artísticas, ampliando as possibilidades de representação e comunicação de ideias matemáticas.
O processo será conduzido de forma ativa e autoral: os próprios estudantes alimentarão o ChatGPT com ideias, conceitos, descrições e exemplos extraídos de suas aprendizagens.

- **Etapa/Sessão 4 – Produção Musical (2 horas)**

Nesta etapa, os participantes utilizarão o aplicativo Suno AI para compor as melodias das músicas criadas anteriormente. As duplas terão liberdade para escolher os estilos musicais que considerarem mais apropriados, de acordo com suas preferências e com o tom que desejam dar às letras.
Além da criação melódica, este momento incluirá a definição das mensagens subliminares que serão inseridas nas músicas. Essas mensagens podem assumir diferentes formas: palavras sussurradas, ruídos, pausas estratégicas ou sons simbólicos que tenham relação com os conceitos matemáticos estudados. Por exemplo, efeitos sonoros que remetam a contagens, progressões ou estruturas geométricas podem ser utilizados para evocar de forma sutil as ideias trabalhadas.

- **Etapa/Sessão 5 – Inserção das Mensagens Subliminares (2 horas)**

Na última etapa, os participantes realizarão a inserção das mensagens subliminares previamente planejadas nas músicas compostas. Essa atividade será realizada com o auxílio da pesquisadora e com o uso do software de edição de áudio Audacity. A proposta é que essas mensagens componham uma camada simbólica da música, permitindo novas formas de acesso ao conteúdo.
Durante toda a realização da pesquisa, serão adotadas medidas éticas rigorosas para garantir o respeito aos direitos dos participantes, a proteção de suas informações pessoais e o uso responsável dos dados gerados. Os registros audiovisuais, as interações com os softwares utilizados (GeoGebra, ChatGPT, Suno AI e Audacity) e todas as produções dos participantes serão utilizados exclusivamente para fins acadêmicos, com acesso restrito à pesquisadora. A identidade dos envolvidos será preservada por meio de anonimização e pseudônimos, e o uso de imagem será previamente autorizado por meio de termo específico. A participação será voluntária, sendo assegurado aos estudantes o direito de se retirar da pesquisa ou solicitar a exclusão de seus dados a qualquer momento, sem prejuízo acadêmico. Todos os dados serão armazenados em dispositivo eletrônico local, protegido por senha e criptografia, de modo a evitar o acesso por terceiros não autorizados. Após o período de cinco anos, previsto para o armazenamento dos dados, todos os arquivos digitais (gravações, textos, imagens e produções musicais) serão permanentemente excluídos por meio de procedimentos seguros, que impeçam sua recuperação. O tratamento dos dados seguirá os princípios estabelecidos pela Lei Geral de Proteção de Dados (Lei nº 13.709/2018), bem como as orientações éticas vigentes determinadas pela Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP).

Os **riscos** relativos à sua participação nesta pesquisa são mínimos, está exposto ao risco de constrangimento ou desconforto durante a realização da pesquisa. Há riscos também característicos do ambiente virtual ou meios eletrônicos, em função das limitações das tecnologias utilizadas. Para garantir a privacidade de dados em relação a Plataforma, embora existam limitações do pesquisador para assegurar total confidencialidade e potencial risco de sua violação, depois de concluída a coleta de dados, a fim de minimizar problemas com a quebra de sigilo, será feito o download de todos os dados obtidos em um dispositivo local (HD externo), apagando qualquer registro de ambientes compartilhados, de acordo com a Carta Circular n° 01/2021-CONEP/SECNS/MS.

Para participar da pesquisa, o aluno precisa estar cursando Licenciatura em Matemática, e será solicitado que a coordenação do curso envie um convite, via e-mail institucional, a todos alunos do curso, logo, se desejarem participar devem manifestar interesse respondendo ao e-mail. O critério da seleção dos participantes serão: Disponibilidade para participar das atividades propostas e análise de histórico escolar.

Os benefícios que você terá serão diretos, por meio do contato e da familiarização com ferramentas de inteligência artificial aplicadas ao ensino da Matemática, e indiretos, pois contribuirá para o avanço do conhecimento nessa área e para a revisão das práticas pedagógicas, promovendo o conhecimento de experiências sobre o uso de tecnologias e inteligências artificiais nas práticas educacionais.

Durante esse período, o participante pode solicitar explicações sobre qualquer aspecto das atividades e terá total liberdade para decidir sobre o uso de seus dados, tanto no momento quanto no futuro.

Sua **participação é voluntária**, o que significa que escolherá se quer ou não participar, assim como poderá desistir a qualquer momento, retirando seu consentimento, sem que isso lhe traga qualquer prejuízo ou penalidade.

Todas as informações obtidas serão **sigilosas** e seu nome não será identificado em nenhum momento. Os dados serão arquivados em local seguro e a divulgação dos resultados em congressos e/ou publicações em revistas científicas será feita de forma a não identificar os participantes.

Se você sofrer qualquer dano resultante de sua participação neste estudo, sendo ele imediato ou tardio, previsto ou não, você tem direito a **assistência integral e gratuita**, pelo tempo que for necessário, **ressarcimento de despesas**, e também o direito de buscar **indenização** por meio de vias judiciais, se quiser. Ao assinar este termo de consentimento, você não está abrindo mão de nenhum direito legal, incluindo de pedir indenização por danos e assistência completa por lesões resultantes de sua participação neste estudo, conforme determina as Resoluções CNS 466/12 e 510/16.

O pesquisador se compromete a fornecer informações atualizadas, ainda que estas possam afetar sua vontade em continuar participando da pesquisa.

Este documento foi elaborado em duas vias que deverão ser rubricadas em todas as suas páginas e assinadas por você e pelo pesquisador ao final do documento, ficando uma via com cada um de nós. Durante todo o período da pesquisa você poderá esclarecer suas dúvidas contatando a Victoria Ratzat de Oliveira, pesquisadora responsável, de segunda-feira a sexta-feira das 8:00 horas às 18:00 horas, no endereço Rua Cristóvão Colombo, nº 2265, bairro Jardim Nazareth, telefone (16) 99625-3192, e-mail victoria.ratzat@unesp.br, além do Comitê de Ética em Pesquisa do IBILCE/UNESP, no endereço Rua Cristóvão Colombo, nº 2265, bairro Jardim Nazareth, telefones (17) 3221.2480 e 3221.2545, cep.ibilce@unesp.br, das 14:00 às 17:00, de segunda-feira a sexta-feira, exceto feriados .

O Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) é um colegiado interdisciplinar e independente, criado para defender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos, ou seja, o CEP é responsável pela avaliação e acompanhamento dos aspectos éticos de todas as pesquisas envolvendo seres humanos.

Consentimento Livre e Esclarecido

Declaro que, tendo lido as informações aqui contidas, compreendi o objetivo desta pesquisa, como ela será realizada, os riscos e benefícios envolvidos e estou plenamente de acordo com a minha participação. Também declaro estar ciente de poder desistir de participar da pesquisa a qualquer momento, sem quaisquer penalidades. Assim, autorizo a participação nesta pesquisa e concordo plenamente com a utilização de todos os registros obtidos para fins de ensino e pesquisa, além da publicação em revistas científicas e/ou apresentação em congressos, uma vez que é assegurada a confidencialidade dos dados. Autorizo, ainda, o uso da minha imagem, voz e/ou registros audiovisuais realizados durante as atividades da pesquisa para fins acadêmicos, científicos e de divulgação dos resultados, desde que garantido o anonimato e a privacidade.

Nome:_____R.G._____

Endereço:_____Fone:_____

_____,_____ de _____ de 20____

_____ _____

Assinatura do Participante | Assinatura do Pesquisador(a) responsável

APÊNDICE C - DESCRIÇÃO DOS PROCEDIMENTOS DE CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS FIGURADOS NO *GEOGEBRA*

Descrição detalhada do procedimento desenvolvido pela pesquisadora para construir os números figurados planos regulares no *GeoGebra.*

N.	Nome	Descrição
1	n	ponto n com controle deslizante de 1 a 10, com incremento de 1
2	L	ponto L com controle deslizante de 1 a 10, com incremento de 1
3	α	360°/L
4	lista1	Sequência(Polígono((0,0),(i; 0),L),i,1,n-1)
5	V	Sequência((1; i α),i,0,L-1)
6	S	Sequência(Soma(V,i),i,1,L-1)
7	lista3	Sequência((L-2) i-L+3,i,1,n)
8	lista2	Sequência(Sequência(Sequência(i Elemento(S,j-1)+d Elemento(V,j),d,1,i),j,1,L),i,1,n-1)
9	horizontales	Sequência((i; 0),i,0,n-1)

Descrição detalhada do procedimento desenvolvido pela pesquisadora para construir os números figurados retangulares no *GeoGebra.*

N.	Nome	Descrição
1	n	ponto n com controle deslizante de 1 a 10, com incremento de 1
2	pontos	Sequência(Sequência((j,i),j,1,n+1),i,1,n)
3	poligonos	Sequência(Polígono((1,1),(1,k),(k+1,k),(k+1,1)),k,2,n)

Descrição detalhada do procedimento desenvolvido pela pesquisadora para construir os números figurados piramidais de base triangular no *GeoGebra*.

N.	Nome	Descrição
1	n	ponto n com controle deslizante de 1 a 10, com incremento de 1
2	camada	Sequência(Sequência(Sequência(Ponto({i-((j)/(2))-((n-k)/(2)),j*((sqrt(3))/(2))-(n-k)*((sqrt(3))/(4)),k}),j,1,i,1),i,1,n-k+1,1),k,1,n,1)
3	arestaVertical	arestaVertical=Sequência(Sequência(Sequência(Segmento(Elemento(Elemento(Elemento(camada,k),i),j),Elemento(Elemento(Elemento(camada,k),i+1),j)),j,1,Comprimento(Elemento(Elemento(camada,k),i)),1),i,1,Comprimento(Elemento(camada,k))-1,1),k,1,n,1)
4	A	A=Elemento(Elemento(Elemento(camada,n),1),1)

5	base	base=Elemento(camada,1)
6	ponto3	ponto3=Elemento(Elemento(base,Comprimento(base)),n)
7	ponto2	ponto2=Elemento(Elemento(base,n),1)
8	f	f=Segmento(A,ponto2)
9	g	g=Segmento(A,ponto3)
10	ponto1	ponto1=Elemento(Elemento(base,1),1)
11	h	h=Segmento(A,ponto1)
12	arestaHorizontal	arestaHorizontal=Se(n>1,Sequência(Sequência(Sequência(Segmento(Elemento(Elemento(Elemento(camada,k),i),j),Elemento(Elemento(Elemento(camada,k),i),j+1)),j,1,i,1),i,1,n-k+1,1),k,1,n,1),{})
13	arestaDiagonal	arestaDiagonal=Se(n>1,Sequência(Sequência(Sequência(Segmento(Elemento(Elemento(Elemento(camada,k),i),j),Elemento(Elemento(Elemento(camada,k),i+1),j+1)),j,1,i,1),i,1,n-k+1,1),k,1,n,1),{})

Descrição detalhada do procedimento desenvolvido pela pesquisadora para construir os números figurados piramidais de base quadrada no *GeoGebra*.

N.	Nome	Descrição
1	n	ponto n com controle deslizante de 1 a 10, com incremento de 1
2	camadas	Sequência(Sequência(Sequência(Ponto({i-((n-k)/(2)),j-((n-k)/(2)),k}),j,1,n-k+1,1),i,1,n-k+1,1),k,1,n,1)
3	arestashorizontais	Se(n>1,Sequência(Sequência(Sequência(Segmento(Elemento(Elemento(Elemento(camadas,k),i),j),Elemento(Elemento(Elemento(camadas,k),i),j+1)),j,1,n-k,1),i,1,n-k+1,1),k,1,n,1),{})
4	arestaV	Se(n>1,Sequência(Sequência(Sequência(Segmento(Elemento(Elemento(Elemento(camadas,k),i),j),Elemento(Elemento(Elemento(camadas,k),i+1),j)),j,1,n-k+1,1),i,1,n-k,1),k,1,n,1))
5	A	Elemento(Elemento(Elemento(camadas,n),1),1)
6	base	Sequência(Elemento(Elemento(camadas,1),i),i,1,Comprimento(Elemento(camadas,1)),1)
7	ponto1	Elemento(Elemento(base,1),1)
8	ponto2	Elemento(Elemento(base,n),1)
9	ponto3	Elemento(Elemento(base,Comprimento(base)),n)
10	ponto4	Elemento(Elemento(base,1),n)
11	f	Segmento(A,ponto1)
12	g	Segmento(A,ponto2)
13	h	Segmento(A,ponto3)
14	i	Segmento(A,ponto4)

Descrição detalhada do procedimento desenvolvido pela pesquisadora para construir os números figurados cúbicos no *GeoGebra*.

N.	Nome	Descrição
1	n	ponto n com controle deslizante de 1 a 10, com incremento de 1
2	cama	Sequência(Sequência(Sequência(Ponto({i,j,k}),i,1,n,1),j,1,n,1),k,1,n,1)
3	arestasX	Sequência(Sequência(Sequência(Segmento(Elemento(Elemento(Elemento(cama,k),j),i),Elemento(Elemento(Elemento(cama,k),j),i+1)),i,1,n-1,1),j,1,n,1),k,1,n,1)
4	arestasY	Sequência(Sequência(Sequência(Segmento(Elemento(Elemento(Elemento(cama,k),j),i),Elemento(Elemento(Elemento(cama,k),j+1),i)),i,1,n,1),j,1,n-1,1),k,1,n,1)
5	arestasZ	Sequência(Sequência(Sequência(Segmento(Elemento(Elemento(Elemento(cama,k),j),i),Elemento(Elemento(Elemento(cama,k+1),j),i)),i,1,n,1),j,1,n,1),k,1,n-1,1)

APÊNDICE D - DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS DOS NÚMEROS FIGURADOS PLANOS

As demonstrações apresentadas neste apêndice foram elaboradas pela pesquisadora a partir das conjecturas, relações e justificativas produzidas pelos participantes ao longo da investigação. Seu objetivo é explicitar, em linguagem matemática formal, argumentos que emergiram durante a experimentação, preservando as ideias matemáticas produzidas pelas duplas e distinguindo-as da sistematização realizada pela pesquisadora.

- **Demonstração da expressão $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$**

Pretende-se demonstrar, por indução finita, que $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, isto é,

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Seja $P(n)$: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Caso base

Para $n = 1$, tem-se: $P(1) = \frac{1(1+1)}{2} = 1$, logo é verdadeira para $n = 1$.

Hipótese de indução

Suponhamos que a proposição seja verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é, que $P(k)$ seja verdadeira: $P(k)$: $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Passo indutivo

Deve-se mostrar que a proposição também é válida para $k + 1$:

$P(k + 1)$: $1 + 2 + 3 + \ldots + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Utilizando a hipótese de indução, temos:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Portanto, pelo princípio da indução matemática, conclui-se que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- **Demonstração da expressão $S_n = n^2$**

Pretende-se demonstrar, por indução finita, que $S_n = n^2$, isto é,

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Seja $P(n)$: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Caso base

Para $n = 1$, tem-se: $P(1) = 1^2 = 1$, logo é verdadeira para $n = 1$.

Hipótese de indução

Suponhamos que a proposição seja verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é, que $P(k)$ seja verdadeira: $P(k)$: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$

Passo indutivo

Deve-se mostrar que a proposição também é válida para $k + 1$:

$P(k + 1)$: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) = (k + 1)^2$

Utilizando a hipótese de indução, temos:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Portanto, pelo princípio da indução matemática, conclui-se que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

- **Demonstração da expressão** $R_n = n(n + 1)$

Pretende-se demonstrar, por indução finita, que $R_n = n(n + 1)$, isto é,

$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$

Seja $P(n)$: $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$

Caso base

Para $n = 1$, tem-se: $P(1) = 1(1 + 1) = 2$, logo é verdadeira para $n = 1$.

Hipótese de indução

Suponhamos que a proposição seja verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é, que $P(k)$ seja verdadeira: $P(k)$: $2 + 4 + 6 + \ldots + 2k = k(k + 1)$

Passo indutivo

Deve-se mostrar que a proposição também é válida para $k + 1$:

$P(k + 1)$: $2 + 4 + 6 + \ldots + (2k + 2) = (k + 1)(k + 2)$

Utilizando a hipótese de indução, temos:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + (2k + 2) = k(k + 1) + (2k + 2) = k(k + 1) + 2(k + 1) =$$

$$= (k + 1)(k + 2)$$

Portanto, pelo princípio da indução matemática, conclui-se que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$

- **Demonstração da equivalência** $T_n = T_{n-1} + n$

$$T_{n-1} + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = T_n$$

- **Demonstração da equivalência** $S_n = T_n + T_{n-1}$

$$T_n + T_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2 = S_n$$

- **Demonstração da equivalência** $S_n = R_n - n$

$$R_n - n = n(n + 1) - n = n^2 + n - n = n^2 = S_n$$

- **Demonstração da equivalência** $R_n = 2 \cdot T_n$

$$2 \cdot T_n = 2 \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = n(n + 1) = R_n$$

- **Demonstração da equivalência** $R_n = R_{n-1} + 2n$

$$R_{n-1} + 2n = n(n - 1) + 2n = n^2 - n + 2n = n^2 + n = n(n + 1) = R_n$$

- **Demonstração da equivalência** $R_n = S_n + n$

$$S_n + n = n^2 + n = n(n + 1) = R_n$$

- **Demonstração da equivalência** $2T_n = T_n + T_{n-1} + n$

$$T_n + T_{n-1} + n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 + n + n^2 - n + 2n}{2} = \frac{2n^2 + 2n}{2} = 2 \cdot \frac{n^2 + n}{2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 2T_n$$

- **Demonstração da equivalência** $S_n = R_{n-1} + n$

$$R_{n-1} + n = n(n - 1) + n = n^2 - n + n = n^2 = S_n$$

- **Demonstração da equivalência** $R_n = S_n + T_n - T_{n-1}$

$$S_n + T_n - T_{n-1} = n^2 + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n^2 + \frac{n^2+n-n^2+n}{2} = n^2 + \frac{2n}{2} = n^2 + n =$$
$$= n(n+1) = R_n.$$

APÊNDICE E - DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS DOS NÚMEROS FIGURADOS ESPACIAIS

As demonstrações apresentadas neste apêndice foram elaboradas pela pesquisadora a partir das conjecturas, relações e justificativas produzidas pelos participantes ao longo da investigação. Seu objetivo é explicitar, em linguagem matemática formal, argumentos que emergiram durante a experimentação, preservando as ideias matemáticas produzidas pelas duplas e distinguindo-as da sistematização realizada pela pesquisadora. Algumas demonstrações recorrem a resultados estabelecidos para os números figurados planos, as respectivas demonstrações encontram-se reunidas no Apêndice D.

- **Demonstração da expressão** $P_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, isto é,

$$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Seja $P(n)$: $T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

Inicialmente, verifica-se o caso de $n = 1$. De fato,

$P(1)$: $\frac{1(1+1)(1+2)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1 = T_1$, logo $P(1)$ é verdadeira.

Suponha agora que a afirmação seja verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$P(k)\text{: } T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_k = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$

Deve-se mostrar que a proposição também é válida para $P(k+1)$, ou seja,

$$P(k+1)\text{: } T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

Pela hipótese de indução, temos:

$$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_k + T_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + T_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} =$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira. Como $P(1)$ é verdadeira e $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, conclui-se, pelo princípio da indução matemática, que $P_n = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$

- **Demonstração da expressão** $Q_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, isto é,

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Seja $P(n)$: $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Inicialmente, verifica-se o caso de $n = 1$. De fato,

$P(1)$: $\frac{1(1+1)((2\cdot1)+1)}{6} = \frac{2\cdot3}{6} = \frac{6}{6} = 1 = S_1$, logo $P(1)$ é verdadeira.

Suponha agora que a afirmação seja verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$P(k)\text{: } S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Deve-se mostrar que a proposição também é válida para $P(k+1)$, ou seja,

$$P(k+1)\text{: } S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_k + S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Pela hipótese de indução, temos:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n + S_{k+1} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + S_{k+1} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira. Como $P(1)$ é verdadeira e $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, conclui-se, pelo princípio da indução matemática, que $Q_n = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$

- **Demonstração da expressão** $\sum_{k=1}^{n} C_k = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, isto é,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Seja $P(n)$: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Inicialmente, verifica-se o caso de $n = 1$. De fato,

$P(1)$: $1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$, logo $P(1)$ é verdadeira.

Suponha agora que a afirmação seja verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$P(k)\text{: } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

Deve-se mostrar que a proposição também é válida para $P(k+1)$, ou seja,

$$P(k+1)\text{: } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

Pela hipótese de indução, temos:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$$

$$(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) = (k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right) = (k+1)^2\left(\frac{(k+2)^2}{4}\right) = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira. Como $P(1)$ é verdadeira e $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, conclui-se, pelo princípio da indução matemática, que $\sum_{k=1}^{n} C_k = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$.

Além disso, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, logo $\sum_{k=1}^{n} C_k = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(T_n\right)^2$

- **Demonstração da expressão** $\sum_{k=1}^{n} R_k = 2P_n$, isto é,

$$2 + 6 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Seja $P(n)$: $2 + 6 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Inicialmente, verifica-se o caso de $n = 1$. De fato,

$1(1+1) = 2$ e $\frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2$, logo $P(1)$ é verdadeira.

Suponha agora que a afirmação seja verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$P(k)\text{: } 2 + 6 + \ldots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Deve-se mostrar que a proposição também é válida para $P(k+1)$, ou seja,

$$P(k+1)\text{: } 2 + 6 + \ldots + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Pela hipótese de indução, temos:

$$P(k)\text{: } 2 + 6 + \ldots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)+3((k+1)(k+2))}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira. Como $P(1)$ é verdadeira e $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, conclui-se, pelo princípio da indução matemática, que

$\sum_{k=1}^{n} R_k = 2 + 6 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = 2P_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$

- **Demonstração da expressão** $C_n = n \cdot S_n$

$$C_n = n^3 = n \cdot n^2 = n \cdot S_n$$

- **Demonstração da expressão** $T_n = P_n - P_{n-1}$

$$P_n - P_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n-1)(n+1)}{6} = \frac{n^3+3n^2+2n-n^3+n}{6} = \frac{3n^2+3n}{6} = \frac{3n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{2} = T_n$$

- **Demonstração da expressão** $S_n = Q_n - Q_{n-1}$

$$Q_n - Q_{n-1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n-2n^3+3n^2-n}{6} = \frac{6n^2}{6} = n^2 = S_n$$

- **Demonstração da expressão** $P_n = P_{n-1} + T_n$

$$P_{n-1} + T_n = \frac{n(n-1)(n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3-n}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3+3n^2+2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = P_n$$

- **Demonstração da expressão** $\sum_{k=1}^{n} C_k = \frac{n^2+n}{4} \cdot R_n$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n(n+1)}{4} \cdot \frac{n(n+1)}{1} = \frac{n^2+n}{4} \cdot n(n+1) = \frac{n^2+n}{4} \cdot R_n$$

- **Demonstração da expressão** $\sum_{k=1}^{n} C_k = \left(P_n - P_{n-1}\right)^2$

$$\left(P_n - P_{n-1}\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n-1)(n+1)}{6}\right)^2 = \left(\frac{n^3+3n^2+2n-n^3+n}{6}\right)^2 = \left(\frac{3n^2+3n}{6}\right)^2 = \left(\frac{3n(n+1)}{6}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} C_k$$