



IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

Agradecimentos

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.006/95

FORMALISMO DE FOCK-TANI PARA A FÍSICA HADRÔNICA

Dimitar Hadjimichef

Rogério Assis
Mário J. H. F. F. F.
Elaine Angela Veit
Zhang
C. F. F.



Orientador

Gastão Inacio Krein

Dezembro 1995

Agradecimentos

Resumo

Eu gostaria de agradecer ao meu orientador prof. Gastão I. Krein, pela sugestão do assunto desta tese, pela paciência, dedicação e amizade demonstrada ao longo destes anos.

Tenho que agradecer, em particular,

ao sr. Methodius Kalkasliel pelo apoio que me deu nos meus primeiros tempos em São Paulo,

ao Fernando Kokubun e Ricardo Barbosa pela ajuda em cálculo numérico e computação,

ao Claudio Maekawa, Jaime S. da Veiga e Sérgio Szpigel por terem formado comigo uma “equipe”, possibilitando discussões importantes sobre o assunto desta tese,

ao pessoal da biblioteca pelo excelente serviço de cópias e material bibliográfico,

ao pessoal da minha sala pela amizade,

à minha mãe pelo apoio, carinho e dedicação extrema ao longo de todos estes anos,

à Claudia, pelo amor e pelo significado que deu à minha vida.

Dimiter Hadjimichef

Resumo

O formalismo de teoria de campos Fock-Tani, o qual foi originalmente desenvolvido na física atômica para tratar sistemas em que os graus de liberdade internos dos átomos não podem ser desprezados, é generalizado para sistemas de hádrons compostos. Partindo da representação no espaço de Fock dos estados hadrônicos num modelo de quarks, uma mudança de representação é implementada de tal maneira que os hádrons sejam descritos por operadores de campo de partículas elementares. A aplicação da transformação unitária ao Hamiltoniano microscópico de quarks dá origem a Hamiltonianos efetivos que descrevem interações quark-quark, hádron-hádron, e hádron-quark. Hamiltonianos bariônicos efetivos foram derivados no contexto de um modelo de quarks constituintes. Em particular, um potencial efetivo NN foi obtido, deslocamentos de fase singletos de spin foram calculados para este potencial e comparados aos deslocamentos de fase gerados pela troca de mésons ω do potencial de Bonn.

Palavras Chave: Modelo de quarks constituintes, interações núcleon - núcleon.

Área de conhecimento: 1.05.03.03-0, 1.05.04.00-1

Abstract

The field theoretic Fock-Tani formalism, originally developed in atomic physics to deal with systems where the internal degrees of freedom of atoms cannot be neglected, is generalized to composite hadronic systems. Starting from the Fock space representation of hadron bound states in a quark model, a change of representation is implemented by a unitary transformation such that the composite hadrons are redescribed by elementary-particle field operators. Application of the unitary transformation to the microscopic quark Hamiltonian gives rise to effective Hamiltonians that describe quark-quark, hadron-hadron, and quark-quark interactions. Effective baryon Hamiltonians are derived in the context of a constituent quark model. In particular, an effective NN Fock-Tani potential was obtained, spin-singlet phase shifts were calculated for this potential and compared with the ones generated by the ω exchange of the Bonn potential.

Keywords: nonrelativistic quark model, nucleon-nucleon interactions

PACS: 12.39.Jh, 13.75.Cs

Índice

I	Introdução	3
II	A Cromodinâmica Quântica e o Modelo de Quarks - Uma Breve Revisão	10
II.1	Introdução	10
II.2	O Modelo de Quarks	13
III	A Interação Bárion-Bárion	22
III.1	Introdução	22
III.2	Troca de Mésons - O Potencial de Bonn	23
III.3	Troca de Quarks e Glúons - "Resonating Group Method"	26
III.3.1	Formulação Original em Primeira Quantização	26
III.3.2	Formulação em Segunda Quantização do RGM	31
III.4	O "Quark Born Diagram Formalism"	37
	<i>This is my letter to the World</i>	
IV	O Formalismo de Fock-Tani	41
	<i>That never wrote to Me-</i>	
IV.1	Introdução	41
	<i>The simple News that Nature told-</i>	
IV.2	A Transformação dos Operadores	45
	<i>With tender Majesty</i>	
IV.2.1	Cálculo de Múltiplos Comutadores	45
IV.2.2	O Método Iterativo das "Equações de Fock-Tani"	48
IV.2.3	A Transformação de Fock-Tani	50
	<i>To Hands I cannot see-</i>	
IV.3	O Hamiltoniano de Fock-Tani	57
	<i>For love of Her - Sweet - countrymen-</i>	
IV.3.1	A existência de um Novo Estado	58
	<i>Judge tenderly - of Me</i>	
IV.3.2	A Interação Bárion-Quark	62
IV.3.3	A Interação Bárion-Bárion	63
	<i>(Emily Dickinson)</i>	

Índice

I Introdução 3

II A Cromodinâmica Quântica e o Modelo de Quarks -Uma Breve Revisão- 10

II.1 Introdução 10

II.2 O Modelo de Quarks 13

IIIA Interação Bárion-Bárion 22

III.1 Introdução 22

III.2 Troca de Mésons - O Potencial de Bonn 23

III.3 Troca de Quarks e Glúons - “Resonating Group Method” 26

III.3.1 Formulação Original em Primeira Quantização 26

III.3.2 Formulação em Segunda Quantização do RGM 33

III.4 O “Quark Born Diagram Formalism” 37

IV O Formalismo de Fock-Tani 41

IV.1 Introdução 41

IV.2 A Transformação dos Operadores 45

IV.2.1 Cálculo de Múltiplos Comutadores 45

IV.2.2 O Método Iterativo das “Equações de Movimento” 46

IV.2.3 A Transformação de Fock-Tani Generalizada 50

IV.3 O Hamiltoniano de Fock-Tani 57

IV.3.1 A Inexistência de um Novo Estado Ligado 58

IV.3.2 A Interação Bárion-Quark 62

IV.3.3 A Interação Bárion-Bárion 63

IV.3.4 As Correções de Ortogonalização e a Relação entre Fock-Tani e o RGM	65
V Algumas Aplicações do Formalismo de Fock-Tani	68
V.1 Cálculo do Kernel de Normalização	69
V.2 O Potencial Núcleon-Núcleon de Fock-Tani	77
V.2.1 Potencial NN com Interação Microscópica Spin-Spin	77
V.2.2 Espalhamento NN com Interação Microscópica do Oscilador Harmônico	88
VI Conclusões e Perspectivas	98
A Transformação de Observáveis e a Ausência de Termos Seculares	102
B As Regras de Substituição de Spin-Isospin	105
C O Espalhamento NN e os Deslocamentos de Fase	109
C.1 Cálculo da Matriz R	109
C.2 Ondas Parciais	113
C.3 Os Deslocamentos de Fase	114
C.4 Relações Envolvendo os Estados de Helicidade e os Polinômios de Jacobi .	115
C.5 O Potencial NN de Fock-Tani e o Formalismo da Matriz R	116
C.6 As Tabelas dos Deslocamentos de Fase	119
D As Variáveis de Mandelstam e a Aproximação Local do Potencial	127
Referências Bibliográficas	128

Capítulo I

Introdução

O modelo nuclear para os átomos foi proposto por Rutherford em 1911. Ele verificou que incidindo partículas α sobre uma placa de ouro, parte do feixe atravessava a placa enquanto outra parte era defletida em grandes ângulos. Ele concluiu que havia grandes vazios na matéria e também centros espalhadores “duros” que ele reconheceu como sendo o núcleo atômico. A concepção atômica aceita de um sistema com distribuição de carga homogênea, não tinha mais fundamento.

O progresso nas técnicas de investigação subatômicas permitiu descobrir o próton e o neutron assim como estudar a estrutura nuclear. O objetivo do estudo era determinar a natureza da força nuclear que mantinha os núcleons ligados dentro do núcleo. As descrições baseadas em potenciais fenomenológicos adquiriram grande popularidade na década de '30. No entanto, o trabalho de Yukawa [1] introduziu na física nuclear um conceito novo que fora bem desenvolvido na física atômica. Ele postulou que a interação nuclear era devido a troca de mésons entre os núcleons, semelhante à ligação atômica covalente onde os átomos “compartilham” (trocam) elétrons entre si. Durante a década de '50, após a descoberta do pión (o méson de Yukawa), do múon e da partícula V (hoje identificada com a família dos káons), um número muito grande de partículas foram descobertas. Das partículas descobertas neste período apenas o múon não é um hádron [2].

Um trabalho mais sistemático iniciou com Taketani, Nakamura e Sasaki (TNS) em 1951 [3]. Eles propuseram subdividir o alcance da força nuclear em três regiões. TNS identificaram uma região “clássica”, de longo alcance ($r \gtrsim 2 \text{ fm}$, onde r denota a distância entre os centros dos dois núcleons), uma região denominada “dinâmica” de alcance intermediário

($1 \text{ fm} \lesssim r \lesssim 2 \text{ fm}$) e uma região chamada de “fenomenológica” ou de caroço (“core”), de curto alcance ($r \lesssim 1 \text{ fm}$). O programa proposto por TNS foi de fundamental importância teórica e experimental por permitir uma exploração , passo a passo, das diferentes partes da força nuclear. Desta forma, no desenvolvimento de modelos e formalismos para estudar a interação NN não é necessário enfrentar o problema como um todo incorporando toda a sua complexidade.

Já na década de '50 a troca de um pión, para a região de longo alcance, era um fato bem estabelecido. As evidências vinham do espalhamento NN em pequenos ângulos e do deuteron [4], [5]. Isto levou ao desenvolvimento do potencial de troca de um pión (OPEP). Problemas mais sérios ocorreram quando as contribuições de troca de dois píons foram incorporadas à interação NN . Nenhuma das tentativas obteve êxito, por não encontrar uma força de spin-órbita suficientemente forte a partir da troca de dois píons [6].

A descoberta experimental da existência de mésons pesados no início da década de '60, especialmente de bósons vetoriais, forneceu elementos novos, que estavam faltando na pesquisa da interação NN da década anterior. A hipótese básica destes modelos era que a troca de múltiplos píons podia ser representada, numa forma adequada, pela troca apropriada de múltiplas ressonâncias de píons. Portanto a troca de múltiplos píons não correlacionados era desprezível. Esta hipótese era certamente muito extrema, pois a existência de uma ressonância de baixa energia, em onda-S, de dois píons nunca foi confirmado experimentalmente. Entretanto, o grande mérito dos modelos de troca de um bóson (OBE) é de demonstrar a importância de bósons vetoriais e da troca de partículas correlacionadas. O sucesso do OBE também revelou porque o programa de troca de píons da década de '50 falhou: as correlações entre píons não foram consideradas. A crítica aos modelos de OBE é de natureza conceitual e um tratamento mais completo para a interação nuclear ainda estava por ser desenvolvido.

Os trabalhos modernos de construção de potenciais de troca de mésons, realizados pelos grupos de Paris e Bonn, iniciou na década de '70 e se estende até o presente. Estes potenciais incluem, além do OPEP, uma descrição teórica bastante precisa da região intermediária, associada à troca de dois píons. O potencial de Bonn [7], por exemplo, descreve a região intermediária da interação NN por trocas de dois píons independentes como também por

Hb
reforça

dois correlacionados. Uma troca de dois píons independentes corresponde a situação onde cada um dos dois núcleons emite um pión, que por sua vez, viaja sem interagir até atingir o outro núcleon. A troca de píons sem correlação também deve incluir a situação em que o núcleon, entre uma emissão de pión e absorção do outro, se transforma numa Δ . A outra possibilidade a ser considerada numa troca de píons é aquela em que há interação entre eles durante o “vôo”. Também é considerada a possibilidade de troca de um ρ que é nada mais do que uma ressonância de dois píons. Finalmente o grupo de Bonn atribuiu a parte de curto alcance a troca de um méson vetorial ω . No entanto, a introdução deste méson apresenta um problema. Os dados experimentais de espalhamento núcleon-núcleon só podem ser descritos se for empregada uma constante de acoplamento ω -núcleon aproximadamente duas vezes maior que o valor extraído de dados de espalhamento eletromagnético, onde se emprega o conceito de dominância de mésons vetoriais. Nas palavras de Fäbller, o méson ω não está preparado para carregar um “fardo” tão pesado. Esta observação sugere imediatamente que a repulsão NN é apenas em parte devido a troca de um ω e, possivelmente, graus de liberdade sub-nucleônicos devam ser invocados.

As experiências destes últimos 30 anos, relacionadas com interações fortes, em energias mais altas, têm demonstrado que os hádrons são partículas que possuem uma estrutura interna. A descoberta da simetria $SU(3)$ dos bárions e mésons serviu de base para criar o modelo de quarks. Mais tarde estes seriam identificados como sendo os reais constituintes dos hádrons pelas experiências de espalhamento profundamente inelástico de léptons. Hoje há seis tipos de quarks (u,d,s,c,t,b) conhecidos, genericamente chamados de *sabores*. Os quarks ainda possuem três *cores*, nome dado à carga responsável pela interação forte. Acredita-se, na atualidade, que a teoria fundamental que descreve as interações fortes seja a cromodinâmica quântica (QCD) [8], [9]. Em princípio, toda a física nuclear deveria ser derivada a partir da QCD, no entanto, torna-se muito difícil resolver suas equações na região de baixa energia. Propriedades básicas na física nuclear como, por exemplo, as massas ou momentos magnéticos dos hádrons não podem ser calculadas diretamente. A forma de contornar estas dificuldades consiste em extrair da QCD algumas de suas propriedades qualitativas, como simetria quiral e confinamento, e incorporá-las na construção de modelos fenomenológicos para os hádrons.

O desenvolvimento dos modelos de hádrons compostos de quarks tem mudado a ênfase da pesquisa em física nuclear. Por exemplo, é inevitável perguntar quais as implicações destes modelos para a estrutura dos núcleos complexos, considerando o núcleon composto de quarks. Muitos fatos importantes sobre o núcleo podem ser explicados considerando-se este como um gás de Fermi de núcleons pontuais, possuindo um grande livre caminho médio. Esta descrição leva ao modelo de camadas, cuja validade aproximada é comprovada por numerosos fatos experimentais. Ao se procurar uma justificativa para este modelo na teoria de muitos corpos, faz-se uso essencialmente do princípio de exclusão de Pauli, o qual inibe colisões de núcleons no meio nuclear, fato este que leva a um grande livre caminho médio para os núcleos no núcleo. No modelo de quarks não - relativístico, foi demonstrado que esta argumentação fica comprometida se os núcleons forem suficientemente extensos para se superporem apreciavelmente no núcleo [10]. Nesta situação, o princípio de Pauli não pode mais ser aplicado ao nível dos núcleons, mas sim ao nível dos quarks constituintes. Mesmo que o tamanho real do núcleon autorizar o argumento usual, as trocas de quarks entre núcleons diferentes introduzem correções nas propriedades nucleares, por exemplo, nas funções de estrutura medidas no espalhamento lépton-núcleo profundamente inelástico [11].

Nestes últimos anos tem-se tentado descrever, não só a estrutura de núcleons individuais, mas também a interação entre núcleons, a partir dos seus constituintes elementares. A busca por uma interpretação microscópica, isto é, a partir dos quarks e glúons constituintes, tem sido o alvo de muito estudo na literatura recente. Motivado pelas dificuldades dos modelos de troca de mésons em descrever a parte repulsiva, de curto alcance, da interação NN , esta parte da interação tem sido atribuída a uma interação perturbativa de troca de um glúon (*one gluon exchange potential* - *OGEP*) [12]. Em particular, têm sido mostrada que a interação núcleon-núcleon (NN) de curto alcance recebe contribuição predominantemente da interação spin-spin entre quarks que são trocados entre os núcleons.

Não se espera obter sucesso em descrever as propriedades da interação NN a distâncias intermediárias e longas usando *OGEP*, pela simples razão dos constituintes se encontrarem confinados neste regime. Para incorporar a subestrutura do núcleon e explorar o mecanismo bem conhecido de troca de pión a longas distâncias considera-se o acoplamento quark-pión,

muito importante pelo fato de garantir a simetria quiral em modelos mais sofisticados. No modelo de quarks, usualmente se trata o pión como um par quark-antiquark ($q\bar{q}$) e portanto esta imagem pode ser vista como incluindo um processo criando um par $q\bar{q}$ na interação NN . Diferente da troca de um glúon, a criação de um par $q\bar{q}$ é um efeito não - perturbativo que pode exercer um papel importante na região de baixa energia. A troca de um pión entre núcleons é um fato bem estabelecido, no entanto o conhecimento de como surge o pión a partir dos constituintes elementares é uma questão dinâmica a ser respondida pela QCD.

Apesar dos esforços até o momento de se descrever certos aspectos das interações entre hádrons terem levado a algum progresso, muito ainda resta a ser feito. Por exemplo, o método tradicionalmente empregado para estudar a interação entre hádrons é essencialmente adequado para modelos de quarks não-relativísticos, conhecido como “Resonating Group Method” (RGM) [13]. Uma outra questão importante está relacionada com a descrição de sistemas em que os hádrons e seus constituintes estejam simultaneamente presentes, como é o caso de uma colisão de íons pesados ultra-relativísticos. A experiência em outras áreas da Física tem demonstrado que o tratamento de sistemas de muitos corpos é enormemente facilitado quando se emprega técnicas de teorias de campos. É claro que a situação no presente caso é muito mais complicada devido à presença simultânea de compostos (hádrons) e constituintes (quarks). Neste sentido, o desenvolvimento de um formalismo que empregue as técnicas de teoria de campos parece ser de fundamental importância para o estudo de efeitos dos graus de liberdade de quarks na matéria nuclear quente e densa.

Na Física existem muitos exemplos de sistemas nos quais os graus de liberdade internos de partículas compostas não podem ser desprezados. Para estes sistemas o formalismo em segunda quantização da mecânica quântica é uma ferramenta matemática muito difícil de ser usada. A presença de estados ligados complica a aplicação do teorema de Wick, cálculo de funções de Green etc. Por isso foi desenvolvida a idéia de fazer um mapeamento do espaço de Hilbert físico para um espaço de Hilbert ideal onde as partículas compostas são representadas por operadores elementares ideais, obedecendo regras de comutação canônicas [14], [15]. A informação sobre a sua estrutura interna é transferida para um Hamiltoniano

de interação efetivo. O desenvolvimento posterior de uma transformação capaz de realizar este mapeamento foi conseguido por S. Tani [16] e generalizado por M. D. Girardeau [17] e, de forma independente, por V.S. Vorob'ev e A.L. Khomkin [18]. Esta transformação generalizada construída por Girardeau e colaboradores [19]-[29], sendo por eles denominada de transformação de Fock-Tani, está relacionada com o método de quasi-partícula de Weinberg [30], [31] onde os estados ligados são subtraídos do problema, restando apenas uma interação residual fraca.

Esta tese trata da generalização do formalismo de Fock-Tani ao problema da interação hadrônica. Suscintamente, esta técnica consiste no seguinte. Partindo-se da representação no espaço de Fock dos estados hadrônicos em um modelo de quarks, uma mudança de representação é implementada através de uma transformação unitária de tal maneira que os operadores de campo de hádrons compostos são transformados em operadores de campo de hádrons ideais. Enquanto os operadores de criação e destruição de partículas compostas não obedecem relações de (anti)comutação canônicas, os operadores ideais obedecem a relações de (anti)comutação canônicas. Além de se transformar os estados, também efetua-se a transformação dos operadores da teoria (operadores de quarks e bárions, por exemplo) obtendo, de forma iterativa, uma expansão em potências da função de onda. Com estes operadores efetivos torna-se possível construir quantidades efetivas em termos das quantidades fundamentais. Uma destas quantidades efetivas importantes que podem ser construídas é o Hamiltoniano $H_{\text{efetivo}} = U^{-1} H U$ que possui, entre outras estruturas, diagramas correspondendo a espalhamentos hadrônicos com troca de constituintes. Em mais baixa ordem do formalismo pode-se obter um potencial efetivo de Fock-Tani para a interação bárion - bárion.

Quando o formalismo é aplicado ao modelo de quarks não-relativístico [33], o resultado é compatível ao obtido por outros métodos: "Resonating Group Method" (RGM), aplicado a modelos de quarks originalmente por J.E.T.F. Ribeiro [34], A. Faessler e colaboradores [35], [36], M. Oka e K. Yazaki [37], [38]; K. Holinde, usando técnicas abináticas [39], [40]. Recentemente uma outra abordagem, introduzida por T. Barnes e colaboradores e chamada de "Quark Born Diagram Formalism" (QBDF) também estudou o problema usando os conceitos de troca de constituintes e diagramas de Born de quarks [41]-[43]. O

formalismo de Fock-Tani também é suficientemente geral para descrever a região de longo alcance da interação núcleon - núcleon. Para isto, basta substituir na estrutura formal do potencial, a interação microscópica de troca de um glúon pela de um pión entre quarks, obtendo um resultado compatível com outras abordagens conhecidas na literatura.

A generalização do formalismo apresentada aqui é válida para uma grande variedade de modelos de quarks, relativísticos ou não-relativísticos, onde os bárions são descritos como estados ligados de três quarks. Entre estes estão os modelos de potenciais, os modelos de sacola do tipo MIT, e o modelo de sólitons não-topológicos. A generalização para o caso de mésons é apresentada na Tese de Sérgio Szpigel [44]. O formalismo pode também ser generalizado para tratar a interação méson-bárion, como também pode considerar estados hadrônicos no espaço de Fock com um número indefinido de quarks, anti-quarks e glúons [45],[46]. Este último aspecto é fundamental para tratar situações onde a criação e destruição de partículas e anti-partículas desempenha um papel importante.

A divisão dos capítulos será a seguinte. O capítulo II será destinado a uma revisão geral de assuntos relacionados com a QCD e o desenvolvimento dos modelos de quarks.

No capítulo III apresentaremos a formulação do potencial de Bonn, ressaltando os aspectos de curto alcance da interação NN . Será também mostrado o método do RGM em primeira quantização e uma formulação diferente do RGM, realizada por nós, partindo de equações em segunda quantização. Isto servirá de base para delinear um paralelo entre o método de Fock-Tani, a ser apresentado no capítulo seguinte. A última seção do capítulo será destinada à apresentação do QBDF.

No capítulo IV iniciaremos a discussão do formalismo Fock-Tani, onde obteremos os operadores transformados e o cálculo do potencial efetivo bárion-bárion.

O capítulo V será destinado a aplicações numéricas. Usaremos o potencial de Fock-Tani para estudar os deslocamentos de fase e efetuar uma comparação da região de curto alcance repulsiva com o potencial de Bonn.

O capítulo VI será de conclusões e perspectivas, seguido por apêndices onde serão apresentados cálculos complementares aos desenvolvidos ao longo da tese.

Capítulo II

A Cromodinâmica Quântica e o Modelo de Quarks -Uma Breve Revisão-

II.1 Introdução

Acredita-se que a cromodinâmica quântica (QCD) seja a teoria fundamental que descreve as interações fortes. Diferente da eletrodinâmica quântica (QED), onde a força eletromagnética decresce com a separação das cargas elétricas, a QCD descreve um tipo de força que aumenta de intensidade à medida que os quarks, que carregam um novo tipo de carga, chamada de “cor”, se afastam e diminui assim que eles se aproximam. Desta forma, na região de alta energia (distâncias pequenas), os quarks encontram-se essencialmente livres, condição conhecida como *liberdade assintótica* [47]. Este fato permite o uso de técnicas perturbativas para testar a teoria neste limite. Na região de baixas energias (distâncias longas), o que corresponde ao domínio da física nuclear, os quarks apresentam-se em estados fortemente ligados e os hádrons aparecem como singletos de cor, ocorrendo então o fenômeno conhecido como *confinamento de cor*.

A QCD baseia-se no postulado de simetria local (invariância de gauge) $SU(3)$ associada à carga de cor; a sua densidade Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (\text{II.1})$$

onde $\psi_\xi(x)$ é o campo de quarks, $\xi \equiv (t, s, c)$ é um índice compacto que representa sabor, spin e cor respectivamente; γ^μ são as matrizes de Dirac e m a matriz de massa dos quarks.

Na expressão (II.1) os índices $\xi \equiv (t, s, c)$ foram suprimidos. A derivada covariante D_μ é

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s G_\mu \quad (\text{II.2})$$

com ∂_μ sendo a derivada espaço-temporal, g_s a constante de acoplamento e

$$G_\mu(x) = \frac{1}{2} \lambda^a G_\mu^a(x) \quad (\text{II.3})$$

onde G_μ^a ($a = 1, \dots, 8$) é o campo de glúons e λ^a as matrizes de Gell-Mann (foi utilizado a convenção de soma para índices repetidos). O tensor de campo gluônico é dado por

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu G_\nu^a(x) - \partial_\nu G_\mu^a(x) - g_s f^{abc} G_\mu^b(x) G_\nu^c(x), \quad (\text{II.4})$$

onde f_{abc} é a constante de estrutura do grupo $SU(3)$.

Pode-se mostrar que a densidade lagrangiana da QCD de 3 sabores (II.1) no chamado limite quiral, isto é, $m_u = m_d = m_s = 0$, possui uma invariância global do tipo $U(3)_L \otimes U(3)_R$, onde L representa esquerdo (left) e R direito (right). Este grupo de simetria pode ser decomposto em componentes vetoriais e axiais obtendo

$$U(3)_L \otimes U(3)_R \equiv SU(3)_V \otimes SU(3)_A \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A. \quad (\text{II.5})$$

Pela conhecida anomalia axial de Adler-Bell-Jackiw [48], [49] a simetria $U(1)_A$ é quebrada no processo de quantização, não sendo portanto uma simetria da respectiva teoria quântica.

Afora esta anomalia acredita-se que a simetria quiral é espontaneamente quebrada como

$$U(3)_L \otimes U(3)_R / U(1)_A \longrightarrow SU(3)_V \otimes U(1)_V \quad (\text{II.6})$$

com o aparecimento de oito bósons de Goldstone, sem massa, que formam o octeto pseudoescalar de mésons: $\pi^0, \pi^\pm, \eta, K^0, \bar{K}^0, K^\pm$. A simetria $SU(3)_V$ corresponde à conservação do isospin e da estranheza, nas interações fortes, enquanto que a simetria $U(1)_V$ está relacionada com a conservação do número bariônico.

A forma usual de tratar as teorias com interações locais é mediante a expansão em potências da constante de acoplamento. Porém este tipo de procedimento é infrutífero quando aplicado para QCD pelo fato da interação ser caracterizada por um acoplamento grande e técnicas perturbativas não serem aplicáveis.

Entre as propriedades mais importantes da QCD de baixa energia estão a quebra dinâmica da simetria quiral e o confinamento da cor. Estes dois fenômenos são essencialmente não - perturbativos, não podem ser obtidos mesmo somando toda a série perturbativa, e estão relacionados com o fato do valor esperado do vácuo de certos operadores que são funções escalares dos campos de glúons (condensado de glúons) e de quarks (condensado de quarks) ser diferente de zero. Na teoria de perturbação estes condensados seriam zero em qualquer ordem. Acredita-se que o fato do condensado de glúons ser diferente de zero está relacionado com o aumento da energia de interação com a distância, contrastando com o que acontece com a energia Coulombiana. O valor diferente de zero para o condensado de quarks dá origem aos bósons de Goldstone, e fornecem uma massa dinâmica aos quarks da ordem de centenas de MeV a qual, para os quarks de sabor u e d é muito maior que as correspondentes massas que aparecem na Lagrangiana da QCD que são da ordem de uma dezena de MeV.

Para entender o espectro de massa hadrônico a partir da QCD bem como as propriedades de interação entre os hádrons, é necessário saber algo sobre a força de longo alcance responsável pelo confinamento dos quarks nos mésons e bárions. No entanto, não existe nenhuma descrição completamente satisfatória para esta região da QCD. Algumas informações podem ser extraídas diretamente da formulação da QCD na rede [50], [51]. Nesta formulação, os quarks estão localizados nos sítios de uma rede do espaço-tempo, e os campos de gauge são associados às ligações entre sítios vizinhos. As simetrias de gauge do modelo são as rotações independentes do $SU(3)$ nos sítios da rede. Apesar de em princípio não haver dificuldade em calcular qualquer propriedade hadrônica usando esta técnica, a limitação está na tecnologia atual dos supercomputadores que impedem o uso de redes de tamanhos realistas e impõe restrições ao alcance do método. Neste sentido, a construção de modelos fenomenológicos é parte essencial para o entendimento das interações fortes a baixas energias. Note que mesmo que a formulação da QCD na rede venha a fornecer resultados confiáveis para as propriedades hadrônicas, não se deve esquecer que estes serão essencialmente números que não revelam os mecanismos físicos básicos envolvidos nos processos. Para um entendimento tal, o emprego de modelos e métodos analíticos é imprescindível na análise da QCD a baixas energias.

II.2 O Modelo de Quarks

Historicamente o modelo de quarks precedeu ao desenvolvimento da QCD e da idéia de glúons. A descoberta da simetria $SU(3)$ de sabor dos bárions e mésons abriu o caminho para criar o modelo de quarks, cuja versão mais simples foi a de um modelo não -relativístico (sem cor) introduzido para explicar os números quânticos do espectro bariônico e mesônico de baixa energia [52],[53]. Este modelo foi estendido para tratar outras propriedades dos hádrons utilizando-se das hipóteses dinâmicas mais simples [54]. Os resultados obtidos para a aniquilação núcleon-antinúcleon, *splittings* de massa dos hádrons, propriedades eletromagnéticas, etc estavam, surpreendentemente, em boa concordância com os resultados da espectroscopia hadrônica. O grau de liberdade de cor foi introduzido em modelos de quarks fenomenológicos em 1973 para dar conta do Princípio de Pauli em certos estados hadrônicos [55].

Após a descoberta da liberdade assintótica e a introdução do conceito do confinamento da cor na QCD, A. De Rújula, H. Georgi e S. L. Glashow (DGG) propuseram [12] introduzir estas idéias no modelo de quarks. Eles atribuíram a dependência em spin da interação de dois corpos à parte dependente de spin da interação de troca de um glúon. Estes autores foram motivados pela formulação da QCD na rede, onde a energia de interação entre dois quarks estáticos é escrita como uma expansão do inverso da potência da constante de acoplamento quark-glúon α_s , que é considerada como sendo grande para longas distâncias. O termo principal nesta expansão é proporcional a N , o número de ligações excitadas da rede entre os quarks. A energia de interação do tipo spin-spin, a qual é essencial para a explicação por exemplo do splitting das massas do núcleon e da Δ , decresce com α_s^{-N} , o que leva à conclusão que a interação spin-spin é de curto alcance. Deste modo, num cálculo das massas hadrônicas no modelo de quarks, uma interação efetiva de curto alcance pode-se originar da troca de um glúon. Isto explicou pela primeira vez o sinal do splitting hiperfino, isto é, porque a Δ é mais pesada que o núcleon e relacionou as respectivas magnitudes do splitting hiperfino às massas dos quarks.

As principais características do modelo são:

1. Os graus de liberdade fundamentais dos hadrons são quarks não-relativísticos de massa m_q , e a massa do estado fundamental do hadron m_h é aproximadamente $m_h \sim 3 m_q$.
2. Numa primeira aproximação, os hádrons podem ser classificados em multipletos de $SU(6)$ de sabor.
3. Os quarks são confinados por forças de longo alcance que são independentes de sabor.
4. A liberdade assintótica justifica o emprego de um potencial dependente de spin de curto alcance através da redução não -relativística do diagrama correspondente à troca de um glúon, analogamente à obtenção do potencial de Fermi-Breit, no caso Coulombiano.

A hipótese de quarks não-relativísticos merece uma discussão um pouco mais detalhada. A justificativa para uma massa $m_q \sim 1/3 m_h$ vem do fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral. Além do aparecimento dos oito bósons de Goldstone, este fenômeno de quebra de simetria produz quarks efetivos que são o resultado da interação dos quarks originais da QCD com as excitações coletivas do vácuo. Estes quarks são chamados quarks constituintes, e sua massa está diretamente relacionada ao condensado de quarks no vácuo $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ como

$$m_q \sim | \langle \bar{\psi}\psi \rangle |^{1/3}. \quad (\text{II.7})$$

Para o que segue nos próximos capítulos, vamos derivar o potencial de Fermi-Breit de interação entre quarks parte-se resultante da troca de um glúon. Para tal, partimos de um Hamiltoniano relativístico da forma:

$$\begin{aligned} H_{qq} &= T_{qq} + V_{qq} \\ &= \int d\mathbf{x} \, \psi^\dagger(\mathbf{x}) [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m] \psi(\mathbf{x}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d^4y \, J^\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y) \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

onde $J^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\lambda^a/2\gamma^\mu\psi(x)$ é a corrente de cor, $D_{\mu\nu}$ é o propagador do glúon e $\psi(x)$ é o campo de Dirac o qual pode ser expandido em um dado instante de tempo ($t = 0$, por

exemplo) como:

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \sum_s \left[u_s(\mathbf{p}) q_s(\mathbf{p}) + v_s(-\mathbf{p}) \bar{q}_s^\dagger(-\mathbf{p}) \right] \quad (\text{II.9})$$

onde

$$u_s(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \begin{pmatrix} \Upsilon_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E_p + m} \Upsilon_s \end{pmatrix} \quad (\text{II.10})$$

$$v_s(-\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E_p + m} \Upsilon_s^c \\ \Upsilon_s^c \end{pmatrix} \quad (\text{II.11})$$

com $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ e o espinor de Pauli definido por $\Upsilon_s^c = -i\sigma^2 \Upsilon_s^*$, sendo normalizado da seguinte forma

$$\Upsilon_s^* \Upsilon_{s'} = \Upsilon_s^c \Upsilon_{s'}^c = \delta_{ss'}. \quad (\text{II.12})$$

Os operadores $q^\dagger$ e q são respectivamente os operadores de criação e destruição de quarks, e $\bar{q}^\dagger$ e $\bar{q}$ são respectivamente os operadores de criação e destruição de anti-quarks, os quais obedecem às seguintes relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{q_{tsc}(\mathbf{p}), q_{t's'c'}(\mathbf{p}')\} &= \{\bar{q}_{tsc}(\mathbf{p}), \bar{q}_{t's'c'}(\mathbf{p}')\} = 0, \\ \{q_{tsc}(\mathbf{p}), q_{t's'c'}^\dagger(\mathbf{p}')\} &= \{\bar{q}_{tsc}(\mathbf{p}), \bar{q}_{t's'c'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = \delta_{tt'} \delta_{ss'} \delta_{cc'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Para obter o respectivo Hamiltoniano não - relativístico o operador de quarks $\psi(\mathbf{x})$ pode ser escrito em termos de uma expansão em potências do operador ∇ como:

$$\psi(\mathbf{x}) \approx \left[1 + i\beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla}{2m} + \frac{\nabla^2}{8m^2} \right] \psi'(\mathbf{x}) \quad (\text{II.14})$$

onde $\psi'(\mathbf{x})$ é o operador não - relativístico de quarks dado por

$$\psi'_{tc}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \sum_s \left[q_{tsc}(\mathbf{p}) \begin{pmatrix} \Upsilon_s \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{q}_{tsc}^\dagger(-\mathbf{p}) \begin{pmatrix} 0 \\ \Upsilon_s^c \end{pmatrix} \right] \quad (\text{II.15})$$

e os índices s , t e c são de spin, isospin e cor respectivamente. Uma expansão tal pode ser obtida através da transformação de Foldy-Wouthuysen ou, equivalentemente, expandindo

os espinores $u_s(\mathbf{p})$ e $v_s(-\mathbf{p})$ acima até a ordem $(\mathbf{p}/m)^2$, o que resulta em

$$u_s(\mathbf{p}) \approx \begin{pmatrix} \left[1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2}\right] \Upsilon_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \Upsilon_s \end{pmatrix} \quad (\text{II.16})$$

$$v_s(-\mathbf{p}) \approx \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \Upsilon_s^c \\ \left[1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2}\right] \Upsilon_s^c \end{pmatrix}. \quad (\text{II.17})$$

A parte livre T_{qq} do Hamiltoniano (II.8) fica após substituir (II.14) e a respectiva expressão conjugada

$$\begin{aligned} T_{\text{qq}} &\approx \psi^\dagger'(\mathbf{x}) \left[1 - i\beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla}{2m} + \frac{\nabla^2}{8m^2} \right] [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m] \left[1 + i\beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla}{2m} + \frac{\nabla^2}{8m^2} \right] \psi'(\mathbf{x}) \\ &= \psi^\dagger'(\mathbf{x}) \left[\beta m - \beta \frac{\nabla^2}{2m} \right] \psi'(\mathbf{x}) = \psi^\dagger'(\mathbf{x}) \beta T(\mathbf{x}) \psi'(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

e $T(\mathbf{x})$, a energia cinética, é definida

$$T(\mathbf{x}) \equiv m - \frac{\nabla^2}{2m}. \quad (\text{II.19})$$

Usaremos a seguinte forma para as matrizes de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.20})$$

e as matrizes de Dirac

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.21})$$

Desta maneira podemos usar (II.21) e (II.15) para completar o cálculo do Hamiltoniano livre em (II.18) obtendo a expressão no espaço de momento

$$T_{\text{qq}} = \sum_{tsc} \int d\mathbf{p} T_t(\mathbf{p}) \left[q_{tsc}^\dagger(\mathbf{p}) q_{tsc}(\mathbf{p}) - \bar{q}_{tsc}(\mathbf{p}) \bar{q}_{tsc}^\dagger(\mathbf{p}) \right]. \quad (\text{II.22})$$

O cálculo da parte de interação exige um pouco mais de trabalho pois envolve o produto de duas correntes. Lembrando que

$$\mathbf{p} = -i\nabla \quad (\text{II.23})$$

$$\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.24})$$

e usando a expansão (II.9) para o campo de Dirac a corrente de quarks pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 J(\mathbf{x}) &= \psi^\dagger(\mathbf{x}) \gamma^0 \Gamma \psi(\mathbf{x}) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}' e^{-i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{p}' - \mathbf{p})} \sum_{ss'} \left[u_{s'}^\dagger(\mathbf{p}') \gamma^0 \Gamma u_s(\mathbf{p}) q_{s'}^\dagger(\mathbf{p}') q_s(\mathbf{p}) \right. \\
 &\quad + u_{s'}^\dagger(\mathbf{p}') \gamma^0 \Gamma v_s(-\mathbf{p}) q_{s'}^\dagger(\mathbf{p}') \bar{q}_s^\dagger(-\mathbf{p}) \\
 &\quad + v_{s'}^\dagger(-\mathbf{p}') \gamma^0 \Gamma u_s(\mathbf{p}) \bar{q}_{s'}(-\mathbf{p}') q_s(\mathbf{p}) \\
 &\quad \left. + v_{s'}^\dagger(-\mathbf{p}') \gamma^0 \Gamma v_s(-\mathbf{p}) \bar{q}_{s'}(-\mathbf{p}') \bar{q}_s^\dagger(-\mathbf{p}) \right] \quad (\text{II.25})
 \end{aligned}$$

onde $\Gamma = \{1, \beta, \alpha, \gamma\} \times \lambda/2$.

Desta forma para, por exemplo, $\Gamma = 1$ temos

$$\begin{aligned}
 u_{s'}^\dagger(\mathbf{p}') \gamma^0 u_s(\mathbf{p}) &\approx \left[1 - \frac{\mathbf{P}}{8m^2} - i \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{p})}{4m^2} \right] \delta_{ss'} \\
 u_{s'}^\dagger(\mathbf{p}') \gamma^0 v_s(-\mathbf{p}) &\approx -\Upsilon_{s'}^* \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}}{2m} \Upsilon_s^c \\
 v_{s'}^\dagger(-\mathbf{p}') \gamma^0 u_s(\mathbf{p}) &\approx -\Upsilon_{s'}^{c*} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}}{2m} \Upsilon_s \\
 v_{s'}^\dagger(-\mathbf{p}') \gamma^0 v_s(-\mathbf{p}) &\approx - \left[1 - \frac{\mathbf{P}}{8m^2} - i \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{p})}{4m^2} \right] \delta_{ss'} \quad (\text{II.26})
 \end{aligned}$$

onde por conveniência não explicitamos a matriz de cor $\lambda/2$, e $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \mathbf{p}'$. As demais combinações podem ser encontradas na literatura [57]. No decorrer desta tese nos fixaremos no estudo de sistemas que possuem somente quarks e, portanto, não iremos incluir os anti-quarks no restante dos cálculos. O Hamiltoniano de interação resulta em

$$\begin{aligned}
 V_{\text{qq}} &= \frac{1}{2} \sum_{s_n, i_m} \int d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_4 \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \delta_{t_1 t_2} \delta_{t_3 t_4} \\
 &\quad \times \left[J_{I_1 I_2}^0(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) D_{00}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) J_{I_3 I_4}^0(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \right. \\
 &\quad \left. + J_{I_1 I_2}^i(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) D_{ij}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) J_{I_3 I_4}^j(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \right] q_{I_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) q_{I_2}(\mathbf{p}_2) q_{I_3}^\dagger(\mathbf{p}_3) q_{I_4}(\mathbf{p}_4) \quad (\text{II.27})
 \end{aligned}$$

com $I \equiv (t, s, c)$ e também

$$D_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} D_{\mu\nu}(\mathbf{p}). \quad (\text{II.28})$$

Note que nas expressões acima foi feita a aproximação estática, a qual consiste em desprezar a componente temporal do momento transferido no propagador.

A determinação de maneira completa do potencial de Fermi-Breit para a troca de um glúon requer a explicitação do propagador do glúon $D_{\mu\nu}(\mathbf{p})$, o qual é fixado no gauge de Coulomb

$$D_{00}(\mathbf{p}) = -\frac{4\pi\alpha_s}{\mathbf{p}^2}, \quad D_{0i}(\mathbf{p}) = 0 \quad (\text{II.29})$$

$$D_{ij}(\mathbf{p}) = \frac{4\pi\alpha_s}{\mathbf{p}^2} \left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^2} \right). \quad (\text{II.30})$$

Utilizando a convenção de soma, agora incluindo índices contínuos, juntamente com a seguinte notação

$$V_{\mathbf{q}\mathbf{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \equiv \delta(\mathbf{p}_\mu + \mathbf{p}_\nu - \mathbf{p}_\rho - \mathbf{p}_\sigma) \delta_{t_\mu t_\rho} \delta_{t_\nu t_\sigma} \mathcal{F}^a \cdot \mathcal{F}^a V_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^{\text{OGEP}}(\mu\nu; \sigma\rho) \quad (\text{II.31})$$

onde os índices $\mu, \nu, \dots$ representam momento, spin, isospin e cor, e $\mathcal{F}^a = \lambda^a/2$, obtemos para $V_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^{\text{OGEP}}$ a seguinte expressão

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^{\text{OGEP}} = & 4\pi\alpha_s \left[\frac{1}{\mathbf{q}^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{m_1 m_2 \mathbf{q}^2} + \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q})}{m_1 m_2 \mathbf{q}^4} \right. \\ & + \frac{i}{\mathbf{q}^2} \left\{ \frac{\mathbf{S}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_1)}{m_1^2} - \frac{2\mathbf{S}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{m_1^2} - \frac{\mathbf{S}_2 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{m_2^2} + \frac{\mathbf{S}_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}_2)}{m_1^2} \right\} \\ & \left. - \frac{2}{3m_1 m_2} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + \frac{1}{m_1 m_2} \left\{ \frac{1}{\mathbf{q}^2} (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{q})(\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{q}) - \frac{1}{3} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \right\} \right] \quad (\text{II.32}) \end{aligned}$$

onde m_i , é massa do i -ésimo quark, e $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$.

Podemos, então, escrever o Hamiltoniano de interação (II.27), em ordenamento normal, numa forma simples e compacta

$$V_{\mathbf{q}\mathbf{q}} = \frac{1}{2} V_{\mathbf{q}\mathbf{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma. \quad (\text{II.33})$$

No potencial de Fermi - Breit (II.32) destacamos a força spin-spin

$$V_{\text{ss}} = -\frac{8\pi\alpha_s}{3m_i m_j} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad (\text{II.34})$$

que é responsável por uma categoria muito importante de splittings como, por exemplo, o splitting de massa $\Delta - N$ nos bárions e $\rho - \pi$ e $K^* - K$ nos mésons.

Juntando (II.22) e (II.33) obtemos o Hamiltoniano do modelo de quarks não - relativístico

$$H_{\mathbf{q}\mathbf{q}} = T_{\mathbf{q}\mathbf{q}}(\mu) q_\mu^\dagger q_\mu + \frac{1}{2} V_{\mathbf{q}\mathbf{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \quad (\text{II.35})$$

Nesta formulação em segunda quantização um bárion também pode ser descrito por um operador de criação. O estado ligado é obtido aplicando este operador no vácuo

$$|\alpha\rangle = B_\alpha^\dagger |0\rangle \quad (\text{II.36})$$

tal que

$$q_\mu |0\rangle = 0. \quad (\text{II.37})$$

O índice α identifica os números quânticos do bárion, de espaço, spin, e isospin. A forma explícita do operador de criação de bárions $B_\alpha^\dagger$ é dada por

$$B_\alpha^\dagger = \frac{1}{\sqrt{3!}} \Psi_\alpha^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} q_{\mu_1}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger, \quad (\text{II.38})$$

com a normalização da função de onda dada por

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \Psi_\alpha^{*\mu_1 \mu_2 \mu_3} \Psi_\beta^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{II.39})$$

A função de onda do núcleon é dada por

$$\Psi_\alpha^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \equiv \frac{\mathcal{N}(\mathbf{p}_\alpha)}{\sqrt{3! \cdot 18}} \epsilon^{c_{\mu_1} c_{\mu_2} c_{\mu_3}} \chi_\alpha^{I_{\mu_1} I_{\mu_2} I_{\mu_3}} \phi(\mathbf{p}_1) \phi(\mathbf{p}_2) \phi(\mathbf{p}_3) \delta(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \quad (\text{II.40})$$

com $\epsilon^{c_{\mu_1} c_{\mu_2} c_{\mu_3}}$ sendo o tensor antisimétrico de cor; $\chi_\alpha^{I_{\mu_1} I_{\mu_2} I_{\mu_3}}$ o Clebsch-Gordan de spin-isospin; ϕ a função de onda do quark e $\mathcal{N}(\mathbf{p}_\alpha)$ a normalização do estado. O fator $1/\sqrt{3! \cdot 18}$ está relacionada com a normalização da cor e spin-isospin respectivamente.

Uma equação de Schrödinger em primeira quantização pode ser obtida aplicando o Hamiltoniano H_{qq} de (II.35) sobre o estado definido em (II.36) e efetuando as contrações nos operadores de quarks

$$H_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{\sigma\rho\lambda} = \mathcal{E}_{[\alpha]} \Psi_{[\alpha]}^{\mu\nu\lambda} \quad (\text{II.41})$$

onde $\mathcal{E}_\alpha$ é a energia total (energia do centro de massa mais energia interna) do bárion e

$$H_{qq}(\mu\nu, \sigma\rho) = 3 \left[\delta_{[\mu]\sigma} \delta_{\nu\rho} T_{qq}([\mu]) + V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \right]. \quad (\text{II.42})$$

Por uma questão de consistência na convenção de soma, adotamos a notação de índices repetidos dentro de colchetes não representarem somas.

Mostraremos a seguir alguns resultados relacionados do modelo de quarks de Isgur e Karl [56]. Neste modelo o potencial V_{qq} é dado por

$$V_{qq} = V_{qq}^{\text{CONF}} + V_{qq}^{\text{OGEP}}, \quad (\text{II.43})$$

a parte de confinamento é quadrática

$$V_{qq}^{\text{CONF}}(ij) = -(k_0 + \frac{1}{2} k r_{ij}^2) \mathcal{F}_i^a \mathcal{F}_j^a \quad (\text{II.44})$$

onde k é a constante do oscilador harmônico, $r_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, correspondendo ao i -ésimo e j -ésimo quark respectivamente e k_0 uma constante. A transformada de Fourier de (II.44) resulta em

$$\begin{aligned} V_{qq}^{\text{CONF}}(\mathbf{p}) &= \int \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^3} \exp(-i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) V_{qq}(ij) \\ &= -\left[k_0 \delta(\mathbf{p}) - \frac{1}{2} k \nabla_{\mathbf{p}}^2 \delta(\mathbf{p}) \right] \mathcal{F}_i^a \mathcal{F}_j^a. \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

A parte hiperfina de troca de um glúon V_{qq}^{OGEP} é dada por (II.32). Este termo hiperfino é tratado em primeira ordem de teoria de perturbação.

A solução da equação (II.41) para o potencial (II.45) é a uma gaussiana para cada quark

$$\phi(\mathbf{p}) = \left(\frac{b}{\sqrt{\pi}} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{b^2 p^2}{2} \right), \quad (\text{II.46})$$

onde b está relacionado com a constante do oscilador e a massa dos quarks m_q por:

$$b^4 = \frac{1}{2m_q k}. \quad (\text{II.47})$$

Com isto, a normalização da parte espacial da função de onda do bárion (II.40) é dada por

$$\mathcal{N}(\mathbf{p}) = \left(\frac{3\pi}{b^2} \right)^{3/4} \exp\left(\frac{b^2 p^2}{6} \right). \quad (\text{II.48})$$

A energia do bárion consiste na energia do centro de massa e uma energia interna

$$\mathcal{E}_\alpha = \frac{\mathbf{P}^2}{6m_q} + m_\alpha \quad (\text{II.49})$$

onde m_α é a massa do bárion

$$m_\alpha = 3m_q + \frac{3}{m_q b^2} - 2k_0. \quad (\text{II.50})$$

O raio quadrático médio do bárion é dado por

$$\langle r^2 \rangle = b^2. \tag{II.51}$$

O termo hiperfino [37],[38] introduz uma correção na massa do núcleon e da Δ , dadas respectivamente pelas expressões

$$\begin{aligned} \delta m_N &= -\frac{4\alpha_s}{\sqrt{2\pi}b} - \frac{2\alpha_s}{3\sqrt{2\pi}m_q^2b^3} \\ \delta m_\Delta &= -\frac{4\alpha_s}{\sqrt{2\pi}b} + \frac{2\alpha_s}{3\sqrt{2\pi}m_q^2b^3}. \end{aligned} \tag{II.52}$$

Isto leva para a diferença de massa Δ -núcleon

$$m_\Delta - m_N = \frac{4\alpha_s}{3\sqrt{2\pi}m_q^2b^3}. \tag{II.53}$$

Dedicaremos este capítulo ao estudo das diferentes abordagens relacionadas com a interação bárion-bárion. A primeira seção será dedicada à apresentação do potencial de Bonn que é um dos modelos de força de núcleon mais bem sucedidos para descrever a interação NN . Em particular, será destacado o comportamento de curto alcance do potencial de Bonn juntamente com suas limitações.

Na seção seguinte descreveremos a visão a conhecida da força nuclear como "Resonância Group Theory" (RGT). Esta tem sido empregada por J.E.T.F. Ribeiro [34], A. Faessler e colaboradores [35], [36], e M. Oka e K. Yabuki [37], [38] para estudar a interação bárion-bárion no âmbito de quarks não-relativísticos. Ainda nesta mesma seção, terceira seção, será discutida uma formulação alternativa para a RGT, originalmente desenvolvida por nós, onde as equações da RGT são escritas em linguagem quantização. Os resultados desta sub-seção servem de base para uma comparação entre a RGT e o formalismo de Fock-Tani para o caso de interação bárion-bárion.

Na última seção apresentaremos uma outra abordagem, introduzida por T. Barone e os colaboradores e chamada de "Quark Bethe Diagram Formalism" [11]-[13]. Recentemente estes autores estudaram o problema da parte de curto alcance da força nuclear usando os conceitos de teoria de renormalização e diagramas de Bethe de quarks.

III.1 Troca de Mésons - O Potencial de Bonn

Capítulo III

A Interação Bárion-Bárion

III.1 Introdução

Dedicaremos este capítulo ao estudo das diferentes abordagens relacionadas com a interação bárion-bárion. A primeira seção será destinada à apresentação do potencial de Bonn que é um dos modelos de troca de mésons mais bem sucedidos para descrever a interação NN . Em particular, será destacado o comportamento de curto alcance do potencial de Bonn juntamente com suas limitações.

Na seção seguinte descreveremos a técnica conhecida na física nuclear como “Resonating Group Method” (RGM). Esta tem sido empregada por J.E.T.F. Ribeiro [34], A. Faessler e colaboradores [35], [36], e M. Oka e K. Yazaki [37], [38] para estudar a interação bárion-bárion no modelo de quarks não-relativístico. Ainda nesta mesma seção, terceira seção será discutida uma formulação alternativa para o RGM, originalmente desenvolvida por nós, onde as equações do RGM são escritas em segunda quantização. Os resultados desta sub-seção servirão de base para uma comparação entre o RGM e o formalismo de Fock-Tani para o caso da interação bárion-bárion.

Na última seção mostraremos uma outra abordagem, introduzida por T. Barnes e colaboradores e chamada de “Quark Born Diagram Formalism” [41]-[43]. Recentemente estes autores estudaram o problema da parte de curto alcanceda força nuclear usando os conceitos de troca de constituintes e diagramas de Born de quarks.

III.2 Troca de Mésons - O Potencial de Bonn

O potencial de Bonn tem origem num modelo de teoria de campos de troca de mésons para a interação núcleon-núcleon. O esquema geral consiste em tratar os núcleons, Δ e mésons de maneira equivalente. Começa-se por um Hamiltoniano relativístico onde as partes de interação são compostas por vértices do tipos NN -mésons e $N\Delta$ -mésons. A estrutura extensa dos hádrons é levada em conta por fatores de forma nos vértices e parametrizados pela massa de corte Λ_α , onde aqui o índice α se refere aos diferentes mésons. As restrições impostas nestas massas de corte vem dos dados experimentais do espalhamento NN e impõe valores numa faixa de 1.2 GeV a 1.5 GeV. As características básicas do potencial de Bonn podem ser resumidas abaixo:

Troca de 1 pión. Associada à atração verificada na região de longo alcance do potencial nuclear.

Troca de 2 píons. Mostrado na figura III.2, o diagrama de troca de dois píons é uma expansão em diversas contribuições. Os aspectos mais relevantes são a presença de contribuições de ressonâncias isobáricas. Uma troca de dois píons independentes, primeiro diagrama de III.2, corresponde a situação onde cada um dos dois núcleons emite um pión, que por sua vez, viaja sem interagir até atingir o outro núcleon. A troca de píons sem correlação também deve incluir a situação em que o núcleon, entre uma emissão de pión e absorção do outro, se transforma numa Δ (spin=3/2, isospin=3/2 e massa 1232 MeV). Existem, também, processos análogos envolvendo outras ressonâncias πN de massas maiores como por exemplo, $P_{11}(1470)$, Roper e $F_{15}(1688)$, mas são despezados por contribuírem pouco. Uma outra possibilidade a ser considerada numa troca de píons é aquela que corresponde a uma troca correlacionada, pois é um fato bem conhecido a existência de interação forte entre dois píons. A troca de um méson ρ , que aparece no terceiro diagrama da figura III.2, é nada mais do que uma ressonância de dois píons num estado de onda- P . Há a possibilidade de ocorrer espalhamento $\pi\pi$ em onda- S , entretanto isto não conduz a uma ressonância. A interação $\pi\pi$ em onda- S foi bem estudada na literatura [58] e se mostrou que ela pode ser bem aproximada pela troca de um bóson escalar σ . O σ é responsável por

aproximadamente 2/3 do efeito total de troca de dois píons.

Troca de 3 píons. Dos resultados obtidos da troca de um bóson para os mésons π e ρ , verificou-se que as suas forças tensoriais se apresentam com sinais opostos. Portanto é tentadora a idéia de incluir um diagrama $\pi\rho$ no sentido de contrabalançar a força atrativa oriunda da troca de dois píons. A interação $\pi\rho$ reduz a atração e melhora consideravelmente a consistência da descrição simultânea dos deslocamentos de fase para valores de momento angular baixos.

Para os nossos objetivos de comparar efeitos de quarks e troca de mésons, destacamos a parte da densidade Lagrangiana do modelo que envolve a troca de mésons vetoriais. Estes são mésons responsáveis pela força a curtas distâncias. A densidade Lagrangiana correspondente é a seguinte

$$\mathcal{L}_{NNv} = g_v \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \phi_v^\mu + \frac{f_v}{4m} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi (\partial^\mu \phi_v^\nu - \partial^\nu \phi_v^\mu) \quad (\text{III.1})$$

onde $v = \omega$ ou ρ . A respectiva expressão para potencial de Bonn, de curto alcance, com troca de mésons vetoriais é dada por

$$\begin{aligned} V_v(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = & \frac{1}{k^2 + m_v^2} \left\{ g_v^2 \left[1 + \frac{3p^2}{2m_N^2} - \frac{k^2}{8m_N^2} + \frac{3i}{2m_N^2} \mathcal{S} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{p}) - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \frac{k^2}{4m_N^2} \right. \right. \\ & + \frac{1}{4m_N^2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}) \left. \right] + \frac{g_v f_v}{2m_N} \left[-\frac{k^2}{m_N} + \frac{4i}{m_N} \mathcal{S} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{p}) - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \frac{k^2}{m_N} \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{m_N} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}) \right] + \frac{f_v^2}{4m_N^2} \left[-\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 k^2 + (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}) \right] \right\} \quad (\text{III.2}) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{S} = (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)/2$, g_v , f_v as constantes de acoplamento e m_N a massa do núcleon.

Como será discutido mais adiante no Capítulo V, o méson ω contribui significativamente para as ondas S e tem pouca influência nas ondas parciais mais altas. Se, num primeiro momento, for desprezada a contribuição $\pi\rho$ e considerada apenas a troca de um ω , com o valor da constante de acoplamento igual ao valor usado para as ondas parciais mais altas ($g_{\omega N}^2/4\pi \sim 10$), não é possível fitar os dados experimentais, é encontrada uma atração excessiva em todas as ondas parciais. O próximo passo consiste em incluir a contribuição $\pi\rho$ juntamente com a troca de um ω . Os resultados obtidos são um pouco melhores, mas não levam a um acordo razoável com a experiência. A onda 1S_0 , e todas as ondas-P são descritas consistentemente, ainda que com valores um pouco altos. O último passo é

aumentar o valor da constante de acoplamento de ω (quase o dobro) no sentido de obter simultaneamente uma baixa nas ondas- P . Outros diagramas de troca de 3 ou 4 píons têm pouca importância devido a cancelamentos mútuos entre si. Desta forma, este procedimento de expansão diagramática do potencial de Bonn possui uma convergência forte, desde que os diagramas sejam agrupados de maneira conveniente, ditado pela física da interação NN .

As dificuldades em fitar a região de curto alcance da força nuclear sugere imediatamente que a repulsão NN é apenas em parte devido a troca de um ω . Uma outra questão que provavelmente indique que quarks sejam relevantes provém da física nuclear. A distância média entre núcleons dentro de um núcleo grande é da ordem de ~ 1.8 fm. Por outro lado o raio de núcleon é da ordem de ~ 0.8 fm. Destas considerações concluímos que dois núcleons dentro do núcleo têm uma probabilidade grande de se sobreporem e portanto a troca de um méson (que também possui extensão espacial) é cenário um tanto artificial.

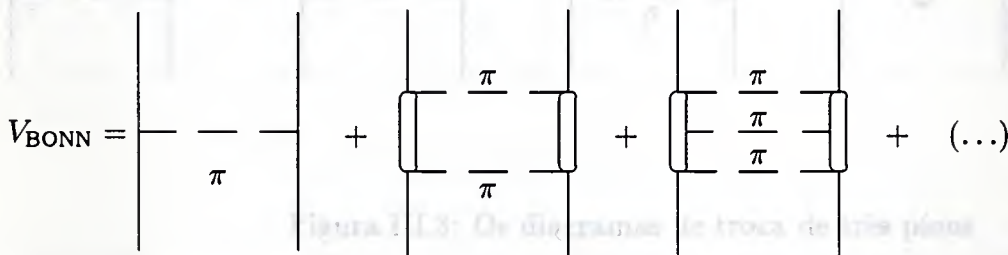


Figura III.1: Os diagramas de troca de três píons

III.3 Troca de Quarks e Glúons - "Resonating Group Method"

III.3.1 Formulação

Figura III.1: Os diagramas do potencial de Bonn

Nesta formulação, todos os constituintes são quarks e um bárion é considerado como sendo um aglomerado de três quarks. Vamos construir a função de onda total do sistema a seguir. Primeiro precisamos definir um conjunto de coordenadas independentes

$$\begin{aligned} \xi_1 &= r_1 - r_2 & \xi_2 &= r_2 - \frac{r_1 + r_3}{2} & R_1 &= \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3) \\ \xi_3 &= r_3 - r_1 & \xi_4 &= r_3 - \frac{r_1 + r_2}{2} & R_2 &= \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3) \\ R_{12} &= R_1 - R_2 & R_3 &= \frac{1}{3}(R_1 + R_2) \end{aligned}$$

Aqui, r_i é a coordenada do i -ésimo quark, ξ_1 e ξ_2 (ξ_3 e ξ_4) são as coordenadas internas do

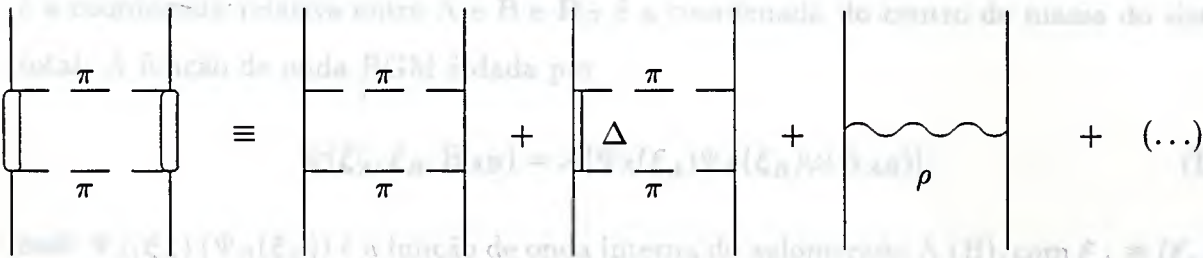


Figura III.2: Os diagramas de troca de dois pions

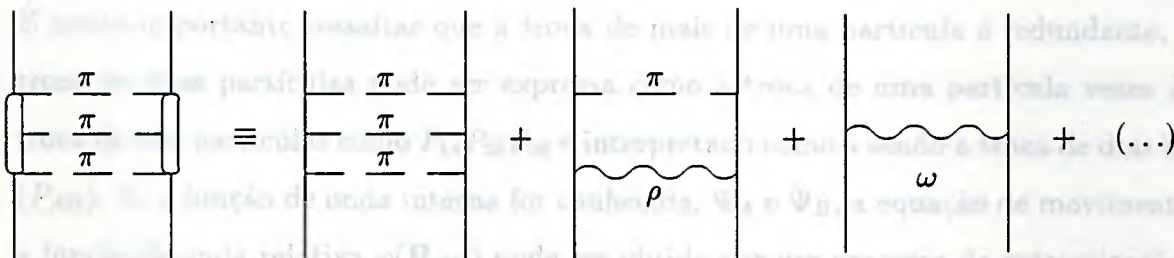


Figura III.3: Os diagramas de troca de três pions

III.3 Troca de Quarks e Glúons - “Resonating Group Method”

III.3.1 Formulação Original em Primeira Quantização

Nesta formulação, todos os constituintes são quarks e um bárion é considerado como sendo um aglomerado de três quarks. Vamos construir a função de onda total do sistema a seguir. Primeiro precisamos definir um conjunto de coordenadas convenientes

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 & \xi_2 &= \mathbf{r}_3 - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} & \mathbf{R}_A &= \frac{1}{3}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) \\ \xi_3 &= \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_5 & \xi_4 &= \mathbf{r}_6 - \frac{\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_5}{2} & \mathbf{R}_B &= \frac{1}{3}(\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_5 + \mathbf{r}_6) \\ \mathbf{R}_{AB} &= \mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B & \mathbf{R}_G &= \frac{1}{2}(\mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B) \end{aligned}$$

Aqui, $\mathbf{r}_i$ é a coordenada do i -ésimo quark, ξ_1 e ξ_2 (ξ_3 e ξ_4) são as coordenadas internas do

aglomerado A (B), $\mathbf{R}_A$ ($\mathbf{R}_B$) é a coordenada do centro de massa do aglomerado A (B), $\mathbf{R}_{AB}$ é a coordenada relativa entre A e B e $\mathbf{R}_G$ é a coordenada do centro de massa do sistema total. A função de onda RGM é dada por

$$\psi(\xi_A, \xi_B, \mathbf{R}_{AB}) = \mathcal{A}[\Psi_A(\xi_A)\Psi_B(\xi_B)\varphi(\mathbf{R}_{AB})] \quad (\text{III.3})$$

onde $\Psi_A(\xi_A)$ ($\Psi_B(\xi_B)$) é a função de onda interna do aglomerado A (B), com $\xi_A \equiv (\xi_1, \xi_2)$, $\xi_B \equiv (\xi_3, \xi_4)$ e $\varphi(\mathbf{R}_{AB})$ é a função de onda relativa entre A e B e $\mathcal{A}$ é o operador anti-simetrizador definido por

$$\mathcal{A} = 1 - \mathcal{A}' = 1 - \sum_{i \in A, j \in B} P_{ij}. \quad (\text{III.4})$$

É muito importante ressaltar que a troca de mais de uma partícula é redundante, pois a troca de duas partículas pode ser expressa como a troca de uma partícula vezes P_{ij} e a troca de três partículas como $P_{14}P_{25}P_{36}$ é interpretado como a sendo a troca de dois bárions (P_{AB}). Se a função de onda interna for conhecida, Ψ_A e Ψ_B , a equação de movimento para a função de onda relativa $\varphi(\mathbf{R}_{AB})$ pode ser obtida por um processo de extremização

$$\delta_\varphi \int d\xi_A d\xi_B \Psi_A^*(\xi_A)\Psi_B^*(\xi_B)[H_{\text{qq}} - E]\psi(\xi_A, \xi_B, \mathbf{R}_{AB}) = 0. \quad (\text{III.5})$$

Vamos reescrever a expressão (III.5) para deixá-la numa forma mais conveniente. Inicialmente definimos o Hamiltoniano efetivo de cluster

$$H(\mathbf{R}', \mathbf{R}) \equiv T(\mathbf{R}', \mathbf{R}) + V(\mathbf{R}', \mathbf{R}) \quad (\text{III.6})$$

com

$$\begin{aligned} T(\mathbf{R}', \mathbf{R}) &\equiv T^{(d)}(\mathbf{R})\delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}) - T^{(ex)}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) \\ V(\mathbf{R}', \mathbf{R}) &\equiv V^{(d)}(\mathbf{R})\delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}) - V^{(ex)}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

onde as partes de (III.7) que possuem superscrito (d) correspondem às partes diretas enquanto que o superscrito (ex) correspondem às partes de troca. Há um termo adicional que aparece após a extremização e que corresponde ao kernel de normalização

$$N(\mathbf{R}', \mathbf{R}) \equiv N^{(d)}(\mathbf{R})\delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}) - N^{(ex)}(\mathbf{R}', \mathbf{R}). \quad (\text{III.8})$$

A importância deste termo está relacionada com a renormalização do Hamiltoniano que será discutida mais tarde. A forma explícita para o kernel de normalização é

$$N^{(d)}(\mathbf{R}) = 1 \quad (III.14)$$

$$N^{(ex)}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = \int d\xi_A d\xi_B d\mathbf{R}_{AB} \Psi_A^*(\xi_A) \Psi_B^*(\xi_B) \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}_{AB}) \times (1 - \mathcal{A}') [\Psi_A(\xi_A) \Psi_B(\xi_B) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_{AB})] \quad (III.9)$$

representado na figura (III.4). Os diagramas diretos correspondem a uma parte energia cinética e outra de potencial

$$T^{(d)}(\mathbf{R}) = -\frac{1}{2\mu} \nabla_R^2 + T_{int}$$

$$V^{(d)}(\mathbf{R}) = V_{rel}^{(d)}(\mathbf{R}) + V_{int}, \quad (III.10)$$

onde $\mu (= \frac{3}{2}m_q)$ é a massa reduzida de A e B, T_{int} é a energia cinética interna e V_{int} é a parte de energia potencial interna constituindo a contribuição de partícula única dadas por

$$T_{int} = \int d\xi_A \Psi_A^*(\xi_A) \left[\frac{1}{2m_q} \sum_{i \in A} p_i^2 - \frac{1}{6m_q} \left(\sum_{i \in A} p_i \right)^2 \right] \Psi_A(\xi_A) + (A \longleftrightarrow B) \quad (III.10)$$

$$V_{int} = \int d\xi_A \Psi_A^*(\xi_A) \sum_{i < j \in A} V_{qq}(ij) \Psi_A(\xi_A) + (A \longleftrightarrow B) \quad (III.11)$$

e representadas na figura (III.5). A energia de interação direta entre os aglomerados A e B é

$$V_{rel}^{(d)}(\mathbf{R}) = \int d\xi_A d\xi_B d\mathbf{R}_{AB} \Psi_A^*(\xi_A) \Psi_B^*(\xi_B) \sum_{i \in A, j \in B} V_{qq}(ij) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_{AB}) \psi(\xi_A, \xi_B, \mathbf{R}_{AB}), \quad (III.12)$$

lembrando que $V_{qq}(ij) = V_{qq}^{CONF}(ij) + V_{qq}^{OGEP}(ij)$. A parte de troca de quarks do potencial é diferente da parte direta por apresentar o antisimetrizador $(1 - \mathcal{A}')$. Desta forma as energias cinética e potencial de troca são dadas por

$$T^{(ex)}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = \int d\xi_A d\xi_B d\mathbf{R}_{AB} \Psi_A^*(\xi_A) \Psi_B^*(\xi_B) \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}_{AB}) T_{qq} \times (1 - \mathcal{A}') [\Psi_A(\xi_A) \Psi_B(\xi_B) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_{AB})] \quad (III.12)$$

$$V^{(ex)}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = \int d\xi_A d\xi_B d\mathbf{R}_{AB} \Psi_A^*(\xi_A) \Psi_B^*(\xi_B) \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}_{AB}) V_{qq} \times (1 - \mathcal{A}') [\Psi_A(\xi_A) \Psi_B(\xi_B) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_{AB})] \quad (III.13)$$

Desta forma, usando as expressões anteriores em (III.5), obtemos a equação integro-diferencial do RGM

$$\int d\mathbf{R} \mathcal{L}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) \varphi(\mathbf{R}) = 0 \quad (\text{III.14})$$

na qual

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) &\equiv H(\mathbf{R}', \mathbf{R}) - EN(\mathbf{R}', \mathbf{R}) \\ &= \left[-\frac{1}{2\mu} \nabla_{\mathbf{R}}^2 + V_{rel}^{(d)}(\mathbf{R}) - E_{rel} \right] \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \\ &\quad - \left[T^{(ex)}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) + V^{(ex)}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) - EN^{(ex)}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

onde $E \equiv E_{rel} + E_{int} = E_{rel} + (T_{int} + V_{int})$.

Nota-se que a função $\varphi(\mathbf{R})$ obtida por este método não está normalizada a um e, portanto não pode ser interpretada estritamente como uma função de onda. A normalização de $\varphi(\mathbf{R})$ é obtida de (III.3)

$$\int d\mathbf{R} d\mathbf{R}' \varphi(\mathbf{R}) N(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \varphi(\mathbf{R}') = 1 \quad (\text{III.16})$$

onde N é o kernel de normalização do RGM. Entretanto, pode-se definir uma função de onda relativa renormalizada

$$\bar{\varphi}(\mathbf{R}) \equiv \int d\mathbf{R}' N^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \varphi(\mathbf{R}') \quad (\text{III.17})$$

a qual satisfaz

$$\bar{\varphi}^* \bar{\varphi} = \varphi^* N \varphi = 1. \quad (\text{III.18})$$

Em termos da função renormalizada, obtemos uma equação de Schrödinger não-local

$$\int d\mathbf{R}' \bar{H}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \bar{\varphi}(\mathbf{R}') = E \bar{\varphi}(\mathbf{R}) \quad (\text{III.19})$$

onde

$$\bar{H}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \equiv \int d\mathbf{R}'' d\mathbf{R}''' N^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}'') H(\mathbf{R}'', \mathbf{R}''') N^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}', \mathbf{R}'''). \quad (\text{III.20})$$

Os kernels direto e de troca possuem uma representação diagramática que podem ser vistas nas figuras (III.4)-(III.6). O segundo diagrama de 3 não contribui no nosso caso

porque o elemento de matriz direto $(\lambda_i \cdot \lambda_j)$ é nulo quando o i -ésimo e o j -ésimo quark pertencem a bárions diferentes. Isto também pode ser entendido da seguinte forma: hádrons isolados não podem trocar um único glúon, ie, $V_{rel}^D(\mathbf{R}) = 0$.

Os resultados principais obtidos por este tratamento podem ser resumidos abaixo [35]-[38]:

1. O confinamento não contribui significativamente. Em particular, para um potencial microscópico de oscilador harmônico não há contribuição alguma.
2. A repulsão de curto alcance entre núcleons pode ser entendido como um efeito combinado de princípio de Pauli e interação spin-spin dos quarks.
3. A repulsão forte não é universal. Interações atrativas são previstas para estados $\Delta\Delta$ com spin e isospin $(S, T) = (3, 0), (1, 0), (0, 1)$.
4. Incluindo uma região intermediária atrativa devido a troca de mésons, para estados $\Delta\Delta$, configurações fortemente ligadas podem aparecer correspondendo às ressonâncias de dibárions.
5. Em particular o caso $(S, T) = (3, 0)$ a função de onda relativa para o estado ligado é aproximadamente descrita por uma função de onda de 6 quarks num modelo de camadas para os quarks. É possível se considerar um estado de 6 quarks e não um estado de dois bárions.

Figura III.3. Teoria de partícula única, onde X denota inserção de energia cinética e V denota inserção de potencial.

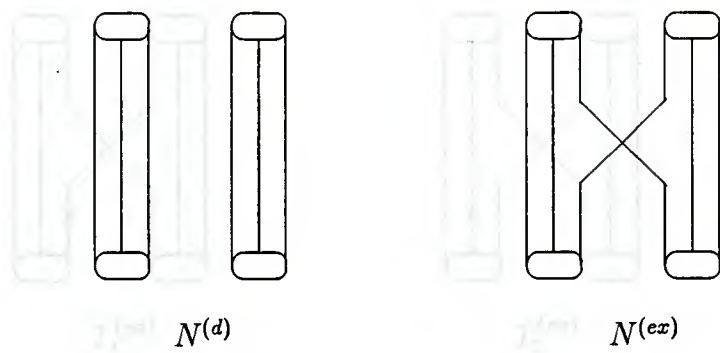


Figura III.3: Termos de energia cinética de troca

Figura III.4: Kernel de normalização

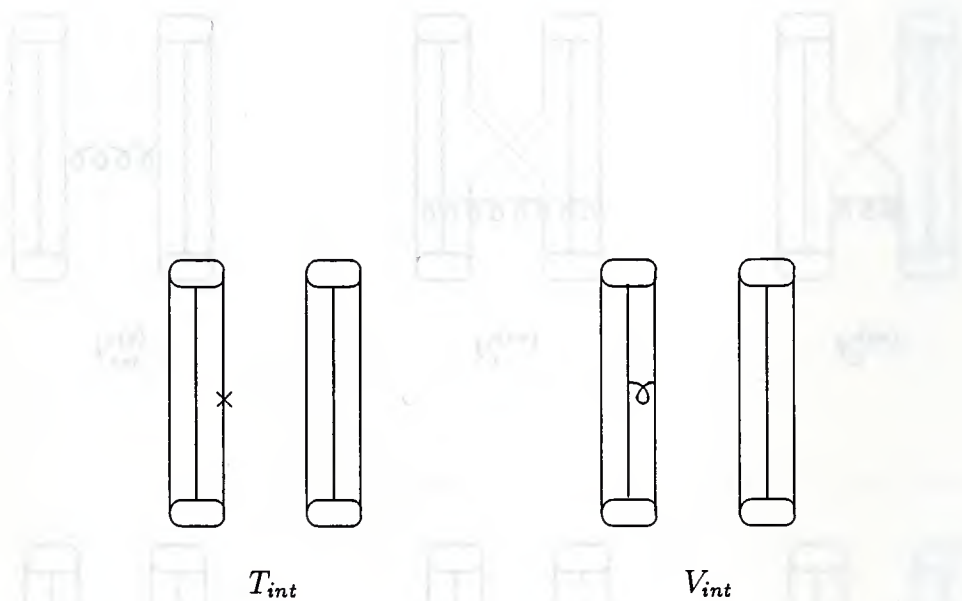


Figura III.5: Termos de partícula única, onde X denota inserção de energia cinética e a linha ondulada o potencial.

Figura III.6: Termos de interação, direto e de troca

III.3.2 Formulação em Segunda Quantização da RGM

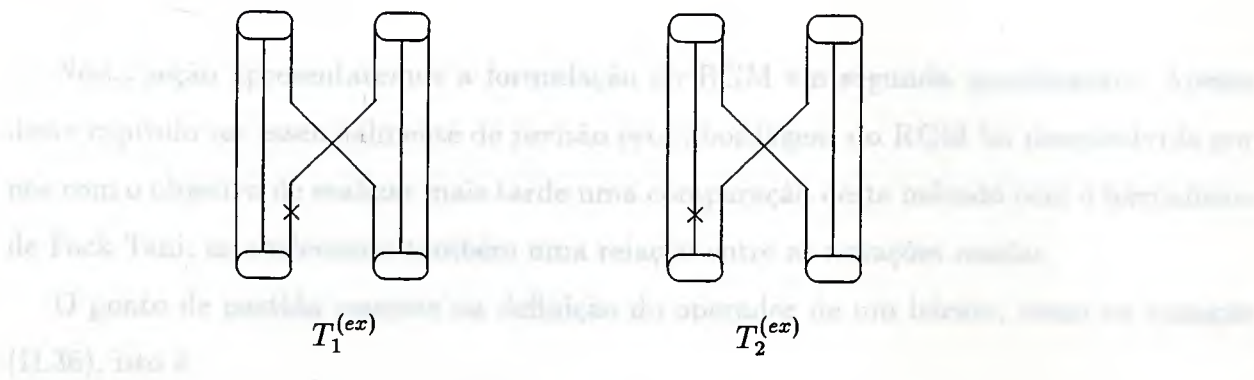


Figura III.6: Termos de energia cinética de troca.

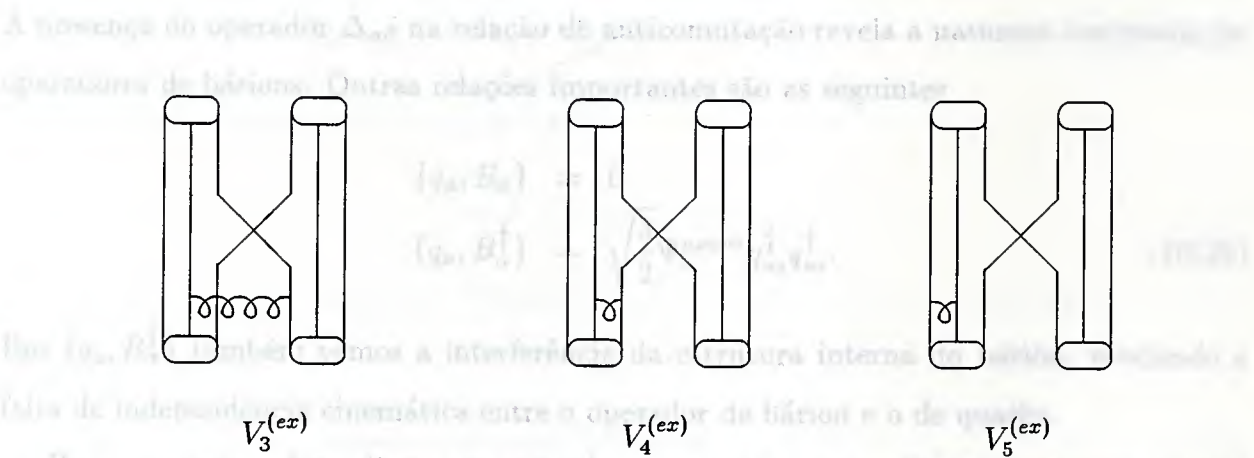
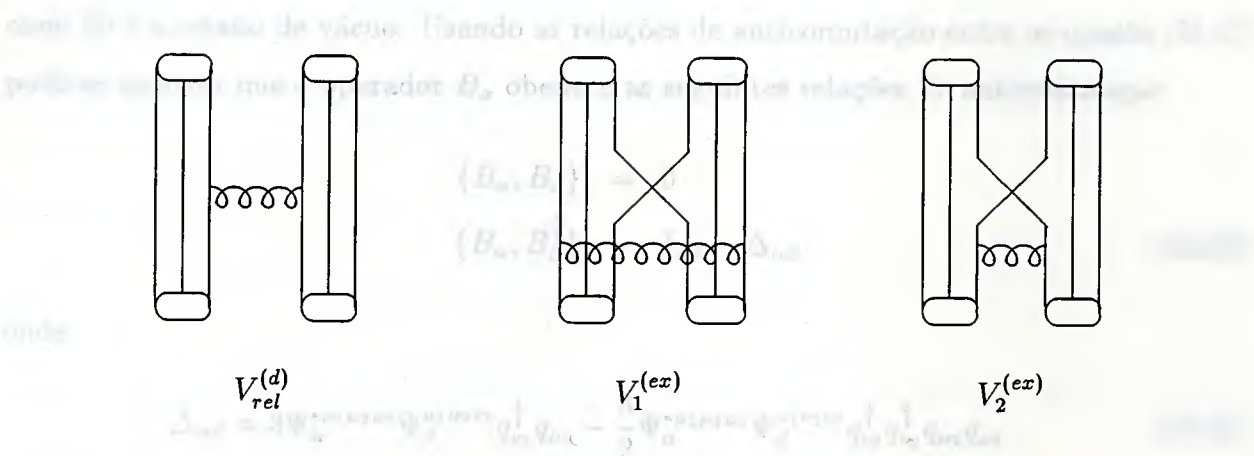


Figura III.7: Termos de interação: direto e de troca.

III.3.2 Formulação em Segunda Quantização do RGM

Nesta seção apresentaremos a formulação do RGM em segunda quantização. Apesar deste capítulo ser essencialmente de revisão esta abordagem do RGM foi desenvolvida por nós com o objetivo de realizar mais tarde uma comparação deste método com o formalismo de Fock-Tani, estabelecendo também uma relação entre as notações usadas.

O ponto de partida consiste na definição do operador de um bárion, como na equação (II.36), isto é,

$$|\alpha\rangle = B_\alpha^\dagger |0\rangle \quad (\text{III.21})$$

onde $|0\rangle$ é o estado de vácuo. Usando as relações de anticomutação entre os quarks (II.13) pode-se mostrar que o operador B_α obedece as seguintes relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{B_\alpha, B_\beta\} &= 0 \\ \{B_\alpha, B_\beta^\dagger\} &= \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

onde

$$\Delta_{\alpha\beta} = 3\Psi_\alpha^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu_3}q_{\nu_3}^\dagger q_{\mu_3} - \frac{3}{2}\Psi_\alpha^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu_3}q_{\nu_3}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2}q_{\mu_3}. \quad (\text{III.23})$$

A presença do operador $\Delta_{\alpha\beta}$ na relação de anticomutação revela a natureza composta dos operadores de bárions. Outras relações importantes são as seguintes

$$\begin{aligned} \{q_\mu, B_\alpha\} &= 0 \\ \{q_\mu, B_\alpha^\dagger\} &= \sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_\alpha^{\mu\mu_2\mu_3}q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger. \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Em $\{q_\mu, B_\alpha^\dagger\}$ também vemos a interferência da estrutura interna do bárion, revelando a falta de independência cinemática entre o operador de bárion e o de quarks.

Para construir o formalismo em segunda quantização para o RGM precisamos inicialmente definir o estado de dois bárions $|\Lambda\rangle$:

$$|\Lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_\Lambda^{\alpha\beta} B_\alpha^\dagger B_\beta^\dagger |0\rangle \quad (\text{III.25})$$

onde $\Lambda \equiv \{ \text{spin, isospin, momentum} \}$. A função de onda relativa φ , com a seguinte propriedade de antisimetria,

$$\varphi_{\Lambda}^{\alpha\beta} = -\varphi_{\Lambda}^{\beta\alpha} \quad (\text{III.26})$$

pode ser determinada, juntamente com a sua equação de movimento, pela equação variacional

$$\delta_{\varphi} \langle \Lambda | (H_{\text{qq}} - E_{\Lambda}) | \Lambda' \rangle = 0, \quad (\text{III.27})$$

onde H_{qq} é o Hamiltoniano de quarks. A normalização deste estado é dada por

$$\langle \Lambda | \Lambda' \rangle = \varphi_{\Lambda}^{*\alpha\beta} N(\alpha\beta; \gamma\delta) \varphi_{\Lambda'}^{\gamma\delta} \quad (\text{III.28})$$

onde

$$N(\alpha\beta; \gamma\delta) = \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - N^{(ex)}(\alpha\beta; \gamma\delta) \quad (\text{III.29})$$

é o kernel de normalização e

$$N^{(ex)}(\alpha\beta; \gamma\delta) = 9 \Psi_{\alpha}^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_{\beta}^{*\nu_1\nu_2\nu_3} \Psi_{\gamma}^{\nu_1\nu_2\nu_3} \Psi_{\delta}^{\mu_1\mu_2\mu_3}. \quad (\text{III.30})$$

Após contrair todos os operadores de quarks em (III.27) e efetuar a minimização da equação variacional obtemos a equação de movimento do RGM

$$\left[H_{\text{RGM}}(\alpha\beta; \gamma\delta) - E_{[\Lambda]} N(\alpha\beta; \gamma\delta) \right] \varphi_{[\Lambda]}^{\gamma\delta} = 0. \quad (\text{III.31})$$

O Hamiltoniano resultante para o RGM fica

$$H_{\text{RGM}} = T_{\text{RGM}} + V_{\text{RGM}} \quad (\text{III.32})$$

onde o termo que corresponde a “energia cinética” do RGM é o termo de partícula única dado por

$$T_{\text{RGM}} = 2 \delta_{\beta\gamma} \Psi_{\alpha}^{*\mu\nu\tau} H_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_{\delta}^{\sigma\rho\tau}, \quad (\text{III.33})$$

onde $H_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho)$ está definida em II.42. Do mesmo modo a parte de interação fica

$$V_{\text{RGM}} = \sum_{i=1}^5 v_i(\alpha\beta; \gamma\delta) + \sum_{i=1}^3 h_i^{\text{intra}}(\alpha\beta; \gamma\delta). \quad (\text{III.34})$$

Esta decomposição antecipa um procedimento e também uma nomenclatura relacionada com o formalismo de Fock-Tani. Os diagramas v_i são chamados de *inter - bariônicos* e têm a seguinte forma

$$\begin{aligned}
 v_1(\alpha\beta; \gamma\delta) &= 9V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu\nu_2\nu_3} \Psi_\gamma^{\rho\nu_2\nu_3} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} \\
 v_2(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -36V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu\nu_2\nu_3} \Psi_\gamma^{\rho\nu_2\mu_3} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\nu_3} \\
 v_3(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -9V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu\nu_2\nu_3} \Psi_\gamma^{\sigma\nu_2\nu_3} \Psi_\delta^{\rho\mu_2\mu_3} \\
 v_4(\alpha\beta; \gamma\delta) &= 18V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\nu\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu_3} \Psi_\gamma^{\rho\nu_2\nu_3} \Psi_\delta^{\nu_1\sigma\mu_3} \\
 v_5(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -18V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu} \Psi_\gamma^{\nu_1\nu_2\mu_3} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\rho}. \quad (\text{III.35})
 \end{aligned}$$

onde $V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho)$ define a interação entre os quarks. Os termos h_i^{intra} , chamados de *intra - bariônicos*, resultam da soma da energia cinética com a energia potencial em parte dos diagramas do RGM

$$\begin{aligned}
 h_1^{\text{intra}}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -6H_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\nu} \Psi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu_3} \Psi_\gamma^{\nu_1\nu_2\rho} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\nu_3} \\
 h_2^{\text{intra}}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -6H_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu} \Psi_\gamma^{\nu_1\nu_2\mu_3} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\rho} \\
 h_3^{\text{intra}}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -6H_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\nu\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu_3} \Psi_\gamma^{\nu_1\nu_2\mu_3} \Psi_\delta^{\sigma\rho\nu_3}. \quad (\text{III.36})
 \end{aligned}$$

Este procedimento de decomposição está relacionado com a renormalização do Hamiltoniano que será mostrado a seguir. Os fatores que aparecem multiplicando cada termo de (III.35) são de natureza combinatória. Cada linha de troca de quarks corresponde a um fator 9, vezes o número de possibilidades de ligação entre a linha do glúon com as linhas de quarks restantes. Por exemplo, o diagrama v_2 possui uma linha de troca e 4 possibilidades de ligação da linha do glúon com as linhas de quarks restantes, assim $9 \times 4 = 36$. Por outro lado, no diagrama v_3 temos apenas uma possibilidade de ligação da linha de glúon, portanto $9 \times 1 = 9$. Nos diagramas que contém H_{qq} o procedimento é o mesmo apenas com a ressalva de dividir por 3 o resultado final, pois a definição (II.42) absorve um fator 3.

A relação de (III.35) e (III.36) com as expressões da seção anterior pode ser estabelecida com facilidade

$$\begin{aligned}
 v_1 &\equiv V_{rel}^{(d)} & , & \quad v_2 \equiv V_1^{(ex)} \\
 v_3 &\equiv V_2^{(ex)} & , & \quad v_4 \equiv \frac{1}{2} V_3^{(ex)} \\
 v_5 &\equiv \frac{1}{2} V_4^{(ex)} & , & \quad h_1 \equiv \frac{1}{2} [T_1^{(ex)} + V_3^{(ex)}] \\
 h_2 &\equiv \frac{1}{2} [T_1^{(ex)} + V_4^{(ex)}] & , & \quad h_3 \equiv T_2^{(ex)} + V_5^{(ex)}
 \end{aligned}$$

Se considerarmos a situação (II.41) em que Ψ é autofunção do Hamiltoniano de quarks H_{qq} , o termo de partícula única (III.33) se reduz a

$$T_{RGM} = 2 \delta_{[\alpha]\delta} \delta_{\beta\gamma} \mathcal{E}_{[\alpha]}. \quad (III.37)$$

Desta forma temos

$$H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = 2 \delta_{[\alpha]\delta} \delta_{\beta\gamma} \mathcal{E}_{[\alpha]} + V_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta). \quad (III.38)$$

Introduzindo a definição da função de onda renormalizada como na seção anterior

$$\bar{\varphi}_\Lambda^{\alpha\beta} \equiv N^{\frac{1}{2}}(\alpha\beta; \gamma\delta) \varphi_\Lambda^{\gamma\delta} \quad (III.39)$$

obtemos uma equação de movimento renormalizada

$$[\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) - E_{[\Lambda]} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}] \bar{\varphi}_{[\Lambda]}^{\gamma\delta} = 0 \quad (III.40)$$

com $\bar{H}_{RGM}$ tomando a seguinte forma

$$\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) \equiv N^{-\frac{1}{2}}(\alpha\beta; \sigma\omega) H_{RGM}(\sigma\omega; \rho\lambda) N^{-\frac{1}{2}}(\rho\lambda; \gamma\delta). \quad (III.41)$$

Introduzimos a definição de kernel de estado ligado para bárions, $\Delta(\mu\nu\tau; \mu'\nu'\tau')$, que também será importante no Fock-Tani,

$$\Delta(\mu\nu\tau; \mu'\nu'\tau') = \Psi_\beta^{\mu\nu\tau} \Psi_\beta^{*\mu'\nu'\tau'}, \quad (III.42)$$

que obedece a seguinte propriedade elementar

$$\Psi_\alpha^{\mu'\nu'\tau'} \Delta(\mu\nu\tau; \mu'\nu'\tau') = \Psi_\alpha^{\mu'\nu'\tau'} \Psi_\beta^{\mu\nu\tau} \Psi_\beta^{*\mu'\nu'\tau'} = \delta_{\alpha\beta} \Psi_\beta^{\mu\nu\tau} = \Psi_\alpha^{\mu\nu\tau}. \quad (III.43)$$

Um fato importante pode ser observado com relação aos termos intra. Construimos uma quantidade $\mathcal{T}$ que é dada pela soma da expressão para a energia de partícula única (III.33) e os termos h^{intra} de (III.36)

$$\mathcal{T}(\alpha\beta; \gamma\delta) \equiv T_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) + \sum_{i=1}^3 h_i^{intra}(\alpha\beta; \gamma\delta). \quad (III.44)$$

No caso de Ψ ser autofunção do Hamiltoniano H_{qq} encontramos o seguinte resultado para (III.44)

$$\begin{aligned} T(\alpha\beta; \gamma\delta) &= (\mathcal{E}_\alpha + \mathcal{E}_\delta) \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - (\mathcal{E}_\alpha + \mathcal{E}_\delta) N^{(ex)}(\alpha\beta; \gamma\delta) \\ &= (\mathcal{E}_\alpha + \mathcal{E}_\delta) N(\alpha\beta; \gamma\delta). \end{aligned} \quad (III.45)$$

A expressão para T renormalizada é

$$\begin{aligned} \overline{T}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= N^{-\frac{1}{2}}(\alpha\beta; \sigma\omega) T(\sigma\omega; \rho\lambda) N^{-\frac{1}{2}}(\rho\lambda; \gamma\delta) \\ &= (\mathcal{E}_\alpha + \mathcal{E}_\delta) \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \end{aligned} \quad (III.46)$$

o que demonstra, formalmente, que o processo de renormalização implica no cancelamento da contribuição *intra* para o Hamiltoniano do RGM. A forma final de $\overline{H}_{RGM}$ fica

$$\overline{H}_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = T_{RGM} + \sum_{i=1}^5 \overline{v}_i(\alpha\beta; \gamma\delta) \quad (III.47)$$

onde

$$\overline{v}_i(\alpha\beta; \gamma\delta) = N^{-\frac{1}{2}}(\alpha\beta; \sigma\omega) v_i(\sigma\omega; \rho\lambda) N^{-\frac{1}{2}}(\rho\lambda; \gamma\delta). \quad (III.48)$$

III.4 O “Quark Born Diagram Formalism”

Este método, desenvolvido bem recentemente, envolve escrever os diagramas de troca de quarks entre os bárions, obtendo a amplitude que é convertida num potencial efetivo. Este potencial, por sua vez, é integrado numa equação de Schrödinger efetiva, obtendo resultados não - perturbativos. O método pode fornecer expressões analíticas, até ordem de aproximação de Born, para as seções de choque, comprimentos de espalhamento e outros observáveis. A validade do método requer que a informação sobre a física dominante esteja contida nas amplitudes de Born. Este será o caso para a situação que estudaremos a seguir onde as reações em questão não envolvem troca de méson em baixa energia e a aniquilação de quarks não é significativa.

Iremos mostrar alguns detalhes deste cálculo realizado por T. Barnes *et al* [43] pois irá servir de base para efetuar uma comparação direta com os resultados obtidos com o formalismo de Fock-Tani.

Iniciamos definido a amplitude de espalhamento para uma estado de dois bárions como sendo a soma de uma primeira parte contendo os diagramas associados com (III.35) e uma segunda parte onde aparecem os mesmos diagramas com os estados finais permutados,

$$\langle f|v_{int}|i\rangle = \langle B'_1 B'_2|v_{int}|B_1 B_2\rangle \equiv \delta(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) \mathcal{M}_{fi}. \quad (\text{III.49})$$

Os resultados que serão apresentados a seguir se relacionam com os cinco diagramas da figura de (III.35), sendo que a segunda parte da amplitude pode ser obtida a partir da primeira sem dificuldade no final. O potencial de interação v_{int} será dado pelo termo spin-spin do potencial de Breit-Fermi (II.34), como nos restringiremos a interações entre núcleons as massas dos quarks serão consideradas iguais ($m_i = m_j \equiv m_q$)

$$v_{int} \equiv V_{ss}(\mathbf{p}) \mathcal{F}_i^a \cdot \mathcal{F}_j^a = -k_{ss} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \mathcal{F}_i^a \mathcal{F}_j^a \quad (\text{III.50})$$

onde

$$k_{ss} \equiv \frac{8\pi\alpha_s}{3m_q^2(2\pi)^3}. \quad (\text{III.51})$$

O termo $\mathcal{M}_{fi}$, em (III.49) é o elemento de matriz para cada diagrama e se constituindo como um produto de quatro fatores: $\mathcal{C}$ fator que absorve o sinal de (III.50) e um fator de natureza combinatória que contém uma fase global oriunda da anticomutação de operadores fermiônicos, I_{COR} fator de cor, I_{ST} fator de spin-isospin, I_E integral da parte espacial

$$\mathcal{M}_{fi}(\text{cada diagrama}) \equiv \omega I_E(\text{cada diagrama}) \quad (\text{III.52})$$

onde

$$\omega \equiv \mathcal{C} I_{\text{COR}} I_{\text{ST}}. \quad (\text{III.53})$$

Há quatro canais acessíveis para o espalhamento NN , $T = 1$ e $S = 1$, $T = 1$ e $S = 0$, $T = 0$ e $S = 1$, $T = 0$ e $S = 0$. O caroço repulsivo de onda- S está relacionado com canais de $L = 0$, isto é $T = 1$ e $S = 0$, $T = 0$ e $S = 1$. Apresentaremos a seguir os valores para ω para cada um dos canais do espalhamento NN de cada um dos diagramas

$$\omega_{1,\dots,5}^{T=1,S=1} = \left(0, \frac{10}{81}, \frac{59}{81}, \frac{17}{81}, \frac{17}{81}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \omega_{1,\dots,5}^{T=1,S=0} &= \left(0, 0, \frac{31}{27}, \frac{7}{27}, \frac{7}{27}\right) \\
 \omega_{1,\dots,5}^{T=0,S=1} &= \left(0, \frac{2}{27}, \frac{19}{27}, \frac{7}{27}, \frac{7}{27}\right) \\
 \omega_{1,\dots,5}^{T=0,S=0} &= \left(0, 0, -\frac{1}{9}, \frac{5}{9}, \frac{5}{9}\right)
 \end{aligned} \tag{III.54}$$

Dois comentários podem ser feitos sobre o resultado de (III.54). Em primeiro lugar vemos que o coeficiente associado a v_1 é sempre zero. Este fato é evidentemente verdadeiro, pois este diagrama corresponde ao primeiro diagrama da figura III.7 onde há troca de um glúon entre dois hádrons. Este diagrama, como foi dito antes, não contribui pelo fato de duas partículas brancas não poderem trocar entre si uma de cor. O segundo comentário está relacionado com o fato de todos os coeficientes associados aos canais de onda- S , $T = 1$ e $S = 0$, $T = 0$ e $S = 1$ serem positivos ou zero, o que caracteriza uma interação repulsiva. Lembrando que a parte espacial de $\mathcal{M}_f$ é constituído de integrais sobre gaussianas acopladas, portanto nenhum sinal adicional vem deste termo.

O resultado da integração na parte espacial pode ser representado por uma expressão geral

$$I_E(n) = k_{ss} \eta_n \exp \left[-b^2 (A_n - B_n \mu) P^2 \right] \tag{III.55}$$

onde P é o módulo do momento, no centro de massa, de cada bárion, considerando que $P^2 = P_{B_1}^2 = P_{B_2}^2 = P_{B'_1}^2 = P_{B'_2}^2$ e $\mu = \cos(\theta_{c.m.})$. Os coeficientes de (III.55) são os seguintes

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
A_n	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{20}{33}$	$\frac{20}{33}$
B_n	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{11}$
η_n	1	$\left(\frac{3}{4}\right)^{3/2}$	1	$\left(\frac{12}{11}\right)^{3/2}$	$\left(\frac{12}{11}\right)^{3/2}$

Um potencial equivalente, na aproximação de Born, é obtido [43] a partir da amplitude de baixa energia (III.52)

$$V_{NN}(r) = \frac{8\alpha_s}{3\sqrt{\pi}m_q^2} \sum_{n=1}^5 \frac{\omega_n^{TS} \eta_n}{(A_n + B_n)^{3/2}} \exp \left[-\frac{r^2}{(A_n + B_n)} \right] \tag{III.56}$$

O gráfico deste potencial é mostrado na figura III.8 para os canais do núcleon de onda- S , $T = 1$ e $S = 0$, $T = 0$ e $S = 1$. Os parâmetros de (III.56) dados por $\alpha_s = 0.6$, $m_q = 0.33$ GeV, $b = 2.5$ GeV $^{-1}$.

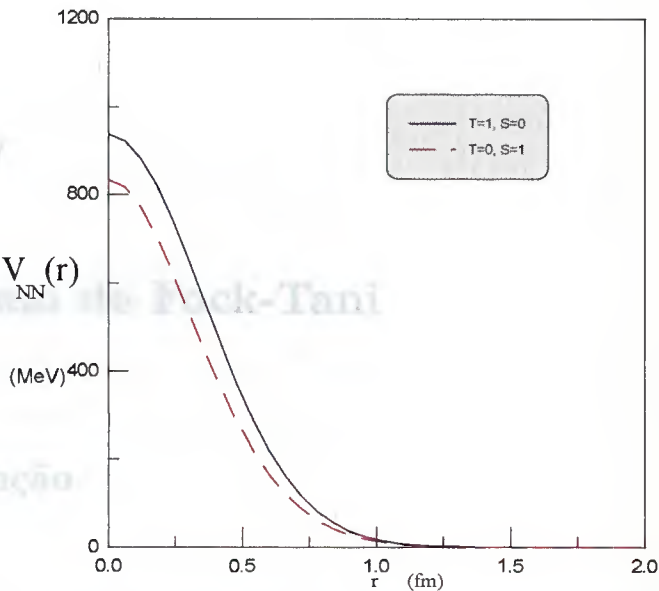


Figura III.8: O potencial NN do QBDF

A figura mostra claramente que a interação NN derivada é consistente com a física de um caroço repulsivo. Este caroço tem um alcance da ordem de 0.5 fm e um valor máximo da ordem de 1 GeV. No Capítulo V, um potencial similar a este será derivado, onde correções de ortogonalidade desprezadas no formalismo de Barnes et. al foraam incluídas de maneira consistente. Também, uma comparação com a troca do méson ω será feita calculando deslocamentos de fase do espalhamento NN.

$$\begin{array}{ccc} B_0^1|0\rangle & \equiv & b_0^1|0\rangle \\ \text{bárion} & & \text{bárion} \\ f^0|0\rangle & & \text{m=1} \end{array}$$

(IV.1)

(IV.2)

Uma forma mais de realizar a substituição (IV.1) consiste em usar o operador

$$F_0 = B_0^\dagger B_0 \quad (IV.3)$$

onde o estado vazio, isto é,

Capítulo IV

$$F_0|0\rangle = B_0^\dagger B_0|0\rangle = B_0^\dagger B_0 B_0^\dagger|0\rangle = B_0^\dagger (-B_0^\dagger B_0 + B_0 B_0^\dagger)|0\rangle = B_0^\dagger|0\rangle$$

O Formalismo de Fock-Tani

de modo que a atuação de F_0 sobre o estado vazio produz simplesmente um fator elementar. Podemos construir, a partir de (IV.3), um operador F_0 com a seguinte

IV.1 - Introdução

$$F_0 = I_0 - \int d^3x H_0 = B_0^\dagger H_0 - B_0^\dagger b_0 \quad (IV.4)$$

Passaremos neste capítulo a descrever em detalhe a construção da representação de Fock-Tani para bárions. Como havia sido dito, a estrutura interna do bárion implica numa grande complicação ao estudar sistemas onde bárions e quarks podem estar simultaneamente presentes nos processos de interação. A idéia do método de Fock-Tani consiste em efetuar uma troca de representação, tal que os operadores associadas às partículas compostas são reescritas em termos de operadores que satisfazem relações de anticomutação canônicas. Toda a complicação relacionada com a estrutura interna será transferida para outro lugar dentro do formalismo. $U(c) = \exp(ieF_0)$

Em outras palavras, queremos efetuar a seguinte substituição

o operador F_0 está o gerador da transformação. Utilizando (IV.6), podemos obter as expressões para as potências de F_0 aplicado nos estados compostos e relacioná-las com os

$B_\alpha^\dagger 0\rangle$	$\Rightarrow$	$b_\alpha^\dagger 0\rangle$	(IV.1)
bárion físico		bárion ideal	
$f_\alpha^\dagger 0\rangle$		$id_\alpha^\dagger 0\rangle$	

com a seguinte propriedade

$$\{b_\alpha, b_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (IV.2)$$

Uma forma *naive* de realizar a substituição (IV.1) consiste em atuar o operador

$$U^{-1}(0) B_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle = \left(1 - F_0 + \frac{1}{2} F_0^2 + \dots\right) B_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle = b_{\alpha}^{\dagger} B_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle \quad (\text{IV.3})$$

sobre o estado composto, isto é,

$$\begin{aligned} f_0 |\beta\rangle &= b_{\alpha}^{\dagger} B_{\alpha} |\beta\rangle = b_{\alpha}^{\dagger} B_{\alpha} B_{\beta}^{\dagger} |0\rangle = b_{\alpha}^{\dagger} \left(-B_{\beta}^{\dagger} B_{\alpha} + \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}\right) |0\rangle \\ &= b_{\beta}^{\dagger} |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

de onde vemos que a atuação de f_0 sobre o estado composto produz efetivamente um estado elementar. Podemos construir, a partir de (IV.3), um operador F_0 , anti-hermitiano ($F_0^{\dagger} = -F_0$) da seguinte forma

$$F_0 = f_0 - f_0^{\dagger} = b_{\alpha}^{\dagger} B_{\alpha} - B_{\alpha}^{\dagger} b_{\alpha}, \quad (\text{IV.5})$$

onde a atuação de F_0 sobre os estados composto e elementar resulta em

$$\begin{aligned} F_0 |\alpha\rangle &= b_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle \\ F_0 b_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle &= -|\alpha\rangle. \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Finalmente podemos construir, a partir de (IV.5), uma transformação unitária capaz de implementar (IV.1)

$$U(\epsilon) = \exp(\epsilon F_0) \quad (\text{IV.7})$$

o operador F_0 será o gerador da transformação. Utilizando (IV.6), podemos obter as expressões para as potências de F_0 aplicado nos estados compostos e elementares respectivamente

$$\begin{aligned} F_0^2 B_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle &= -B_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle \\ F_0^3 B_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle &= -b_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

$$|0\rangle \equiv |0\rangle : |0\rangle, \quad (\text{IV.9})$$

$$F_0^2 b_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle = -b_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle$$

$$F_0^3 b_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle = B_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle$$

$$: \vdots$$

Desta forma podemos realizar a transformação unitária sobre o estado composto

$$\begin{aligned}
 U^{-1}(\epsilon) B_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle &= \left(1 - \epsilon F_0 + \frac{1}{2}\epsilon^2 F_0^2 - \frac{1}{3!}\epsilon^3 F_0^3 + \dots\right) B_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon^2 F_0^2 + \frac{1}{4!}\epsilon^4 F_0^4 + \dots\right) B_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle \\
 &\quad - \left(\epsilon F_0 + \frac{1}{3!}\epsilon^3 F_0^3 + \frac{1}{5!}\epsilon^5 F_0^5 + \dots\right) B_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{1}{4!}\epsilon^4 - \dots\right) B_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle - \left(\epsilon - \frac{1}{3!}\epsilon^3 + \frac{1}{5!}\epsilon^5 - \dots\right) b_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle \\
 &= (\cos \epsilon) B_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle - (\sin \epsilon) b_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle
 \end{aligned} \tag{IV.9}$$

Se tomarmos $\epsilon = -\pi/2$ obtemos o estado transformado

$$U^{-1} B_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle = b_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle \equiv |\alpha\rangle. \tag{IV.10}$$

A transformação do estado implica na necessidade de se obter a transformação de um operador $\mathcal{O}$ qualquer

$$\mathcal{O}_{\text{FT}} = U^{-1} \mathcal{O} U. \tag{IV.11}$$

Os operadores ideais de criação e destruição atuam num espaço de Fock aumentado $\mathcal{I}$, que é um produto direto do espaço de Fock original $\mathcal{F}$ (físico) pelo espaço ideal $\mathcal{B}$ (varrido pelos operadores de bárions ideais).

$$\mathcal{I} = \mathcal{F} \times \mathcal{B} \tag{IV.12}$$

Por definição os operadores ideais são cinematicamente independentes dos operadores de quarks, isto é,

$$\{b_{\alpha}, q_{\mu}\} = 0. \tag{IV.13}$$

O estado de vácuo de $\mathcal{I}$ é também o produto direto dos vácuos de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{B}$

$$|0\rangle \equiv |0\rangle \times |0\rangle_{\mathcal{B}}. \tag{IV.14}$$

Portanto, $|0\rangle$ é o vácuo dos graus de liberdade quarks e também de bárions ideais.

O próximo passo importante consiste em estabelecer uma correspondência unívoca entre os estados de bárion físico em $\mathcal{F}$ e os bárions ideais que constituem um subespaço do espaço

$\mathcal{I}$. Em $\mathcal{I}$ há um subespaço que é isomórfico ao espaço de Fock $\mathcal{F}$, denotado por $\mathcal{I}_0$, varrido por aqueles estados $|\Omega\rangle$ que não possuem bárions ideais, isto é,

$$b_\alpha |\Omega\rangle = 0. \quad (\text{IV.15})$$

A condição (IV.15) é uma equação de vínculo, chamada de *condição subsidiária*, que garante que não haja dupla contagem em $\mathcal{I}$. A transformação U atua em $\mathcal{I}$, não podendo ser definida em $\mathcal{F}$. A transformação unitária atuando sobre os estados de $\mathcal{I}_0$ originam um subespaço $\mathcal{F}_{\text{FT}} = U^{-1}\mathcal{I}_0$, onde os estados físicos obedecem uma equação de vínculo transformada

$$U^{-1} b_\alpha |\Omega\rangle = 0 \quad (\text{IV.16})$$

onde

$$|\Omega\rangle = U^{-1} |\Omega\rangle. \quad (\text{IV.17})$$

Em $\mathcal{F}_{\text{FT}}$ todos os operadores satisfazem relações de (anti)comutação canônicas. Pelo fato de ser uma transformação unitária os elementos de matriz e produtos escalares são preservados na troca de representação

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \alpha \rangle &= \langle \alpha | \alpha \rangle, \\ \langle \alpha | \mathcal{O} | \alpha \rangle &= \langle \alpha | \mathcal{O}_{\text{FT}} | \alpha \rangle \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

Um estado de n-bárions $|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle$ construído a partir de pacotes de onda sem superposição e bem separados é transformado em um estado de n-bárions ideais

$$\begin{aligned} |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle &\rightarrow U^{-1} |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle = |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle \\ &= b_{\alpha_1}^\dagger \dots b_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

Em situações como, por exemplo, num espalhamento, onde os estados assintóticos estão bem separados (IV.19) se constitui numa boa aproximação. No entanto quando U atua sobre um estado arbitrário com bárions que possuem algum grau de superposição, (IV.19) não é mais verdadeira. Esta situação mais geral, requer transformação dos operadores $B_\alpha^\dagger$ individuais e não apenas do estado. Este assunto será abordado na próxima seção.

IV.2 A Transformação dos Operadores

IV.2.1 Cálculo de Múltiplos Comutadores

O primeiro passo na implementação do método requer a transformar os operadores básicos do modelo em estudo. À primeira vista, a transformação unitária poderia ser avaliada com uma expansão em múltiplos comutadores. A transformação de um operador de bárion, por exemplo, seria da seguinte forma

$$\begin{aligned} B_{\alpha}^{\dagger}(\epsilon) &= U^{-1}(\epsilon) B_{\alpha}^{\dagger} U(\epsilon) = \exp(-\epsilon F_0) B_{\alpha}^{\dagger} \exp(\epsilon F_0) \\ &= B_{\alpha}^{\dagger} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon^j}{j!} [B_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_j \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

onde $[B_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_j$ denota o múltiplo comutador definido de maneira recursiva por

$$\begin{aligned} [B_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_1 &= [B_{\alpha}^{\dagger}, F_0] \\ [B_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_{j+1} &= [[B_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_j, F_0]. \end{aligned} \quad (\text{IV.21})$$

Com a lembrança de algumas relações operatoriais simples

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \quad (\text{IV.22})$$

$$[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\} \quad (\text{IV.23})$$

$$\{A, BC\} = B\{A, C\} + [A, B]C = \{A, B\}C - B[A, C] \quad (\text{IV.24})$$

podemos calcular alguns $[B_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_j$. Se desprezarmos os termos envolvendo potências de $\Delta_{\alpha\beta}$ o cálculo fica simplificado. No entanto estamos, com isso, eliminando do problema os efeitos da estrutura interna dos bárions. Desta forma, o cálculo a seguir é de caráter ilustrativo e um procedimento mais elaborado será apresentado mais adiante.

$$\begin{aligned} [B_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_1 &\approx -b_{\alpha}^{\dagger}, & [B_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_2 &\approx -B_{\alpha}^{\dagger} \\ [B_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_3 &\approx b_{\alpha}^{\dagger}, & [B_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_4 &\approx B_{\alpha}^{\dagger} \\ [B_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_5 &\approx -b_{\alpha}^{\dagger}, & [B_{\alpha}^{\dagger}, F_0]_6 &\approx -B_{\alpha}^{\dagger} \\ && \vdots & \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

onde encontramos

$$B_{\alpha}^{\dagger}(\epsilon) \approx (\cos \epsilon) B_{\alpha}^{\dagger} - (\sin \epsilon) b_{\alpha}^{\dagger}, \quad (\text{IV.26})$$

em particular quando $\epsilon = -\pi/2$ temos

$$B_{\alpha}^{\dagger}(\epsilon) \approx b_{\alpha}^{\dagger}. \quad (\text{IV.27})$$

A expansão em múltiplos comutadores (IV.20) usada para avaliar a transformação de operadores não é muito útil. A razão disto reside no fato de, até na aproximação de “ordem zero” (equação IV.26), envolver a soma de uma série infinita. A medida que levamos em conta o termo operatorial $\Delta_{\alpha\beta}$, a série gerada pela expansão em múltiplos comutadores torna-se muito mais complicada. Há pouca esperança em reconhecer termos gerais da série relevante e proceder na tentativa de efetuar a sua soma. Então, torna-se uma necessidade desenvolver um método consistente e eficiente para avaliar os operadores transformados.

Na próxima subseção mostraremos uma técnica chamada de *método das equações de movimento*, que servirá para construir a transformação de Fock-Tani dos operadores de maneira iterativa.

IV.2.2 O Método Iterativo das “Equações de Movimento”

O método das “equações de movimento” fornece a abordagem que procuramos. Partindo da definição de $U(\epsilon)$ sabemos que a transformação de um operador $\mathcal{O}$, dado por (IV.10), é da forma

$$\mathcal{O}(\epsilon) = U^{-1}(\epsilon) \mathcal{O} U(\epsilon) \quad (\text{IV.28})$$

com as seguintes condições sobre o operador transformado

$$\mathcal{O}(0) = \mathcal{O} \quad (\text{IV.29})$$

$$\mathcal{O}(-\pi/2) = U^{-1}(-\pi/2) \mathcal{O} U(-\pi/2). \quad (\text{IV.30})$$

Se derivarmos a equação (IV.28) encontraremos

$$\frac{d\mathcal{O}(\epsilon)}{d\epsilon} = U^{-1}(\epsilon) [\mathcal{O}, F_0] U(\epsilon) = [\mathcal{O}(\epsilon), F_0(\epsilon)] \quad (\text{IV.31})$$

que tem a forma de uma equação de movimento para operadores. Os operadores básicos no modelo são B_α , b_α e q_μ os quais obedecem a equações operatoriais no formalismo de Fock-Tani. As quantidades fundamentais do modelo, como o Hamiltoniano e as correntes, são escritas em termos de operadores de quarks. Portanto, a transformação de Fock-Tani destas quantidades implica em transformar o operador de quarks. A equação de movimento para o operador de quarks é dada por

$$\frac{dq_\mu(\epsilon)}{d\epsilon} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^\dagger(\epsilon) q_{\mu_3}^\dagger(\epsilon) b_\beta(\epsilon). \quad (\text{IV.32})$$

No lado direito da expressão (IV.32) aparece o operador de bárions $b_\beta(\epsilon)$, cuja equação de movimento é

$$\frac{db_\alpha(\epsilon)}{d\epsilon} = B_\alpha(\epsilon). \quad (\text{IV.33})$$

Para resolver (IV.33) precisamos encontrar a equação para $B_\alpha(\epsilon)$

$$\frac{dB_\alpha(\epsilon)}{d\epsilon} = -b_\alpha(\epsilon) + \Delta_{\alpha\beta}(\epsilon) b_\beta(\epsilon), \quad (\text{IV.34})$$

que nos conduz a um sistema de equações diferenciais acopladas. A resolução do sistema (IV.32)-(IV.34) é tão difícil quanto o cálculo de múltiplos comutadores. No entanto, uma forma sistemática de efetuar a sua resolução consiste em fazer uma expansão dos operadores transformados em potências da função de onda [19], isto é,

$$\begin{aligned} B_\alpha(\epsilon) &= \sum_{i=1}^{\infty} B_\alpha^{(i)}(\epsilon) \\ b_\alpha(\epsilon) &= \sum_{i=1}^{\infty} b_\alpha^{(i)}(\epsilon) \\ q_\mu(\epsilon) &= \sum_{i=1}^{\infty} q_\mu^{(i)}(\epsilon). \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

Estas expansões não são de potências do parâmetro ϵ , que assume um valor grande $\epsilon = -\pi/2$, mas de potências da densidade do sistema. Desta forma as equações de ordem zero são ¹

$$\dot{B}_\alpha^{(0)}(\epsilon) = -b_\alpha^{(0)}(\epsilon) \quad (\text{IV.36})$$

¹Adotamos a notação $\dot{\mathcal{O}}$ para a derivada em relação a ϵ de um operador $\mathcal{O}$.

$$\dot{b}_\alpha^{(0)}(\epsilon) = B_\alpha^{(0)}(\epsilon) \quad (\text{IV.37})$$

$$\dot{q}_\mu^{(0)}(\epsilon) = 0. \quad (\text{IV.38})$$

O termo proporcional a $\Delta_{\alpha\beta}$ foi desprezado em (IV.36) por ser de segunda ordem em Ψ e portanto não contribuir. Também na equação (IV.38) o lado direito foi tomado igual a zero porque no lado direito de (IV.32) temos uma função de onda multiplicando os operadores.

A solução de (IV.38) é trivial

$$q_\mu^{(0)}(\epsilon) = \text{cte}, \quad (\text{IV.39})$$

mas pela condição “inicial” (IV.29) encontramos

$$q_\mu^{(0)}(\epsilon) = q_\mu. \quad (\text{IV.40})$$

As equações (IV.36) e (IV.37) podem ser resolvidas derivando uma vez mais a equação (IV.37) e substituindo este resultado em (IV.36), obtendo

$$\ddot{b}_\alpha^{(0)}(\epsilon) + \dot{b}_\alpha^{(0)}(\epsilon) = 0. \quad (\text{IV.41})$$

A solução geral de (IV.41) é

$$b_\alpha^{(0)}(\epsilon) = c_1 \sin \epsilon + c_2 \cos \epsilon$$

$$B_\alpha^{(0)}(\epsilon) = c_1 \cos \epsilon - c_2 \sin \epsilon. \quad (\text{IV.42})$$

A determinação das constantes operatoriais c_1 e c_2 vem novamente das condições “iniciais”

$$b_\alpha^{(0)}(0) = b_\alpha, \quad B_\alpha^{(0)}(0) = B_\alpha. \quad (\text{IV.43})$$

Resultando nos operadores transformados de ordem zero

$$b_\alpha^{(0)}(\epsilon) = B_\alpha \sin \epsilon + b_\alpha \cos \epsilon$$

$$B_\alpha^{(0)}(\epsilon) = B_\alpha \cos \epsilon - b_\alpha \sin \epsilon. \quad (\text{IV.44})$$

Note que as expressões acima são de ordem zero na função de onda, portanto por uma questão de consistência, não se contam as funções de onda contidas nos operadores B_α no lado direito. Observamos também que a presença de senos e cossenos nos operadores

transformados conduz a interpretar a transformação como uma rotação no espaço dos operadores.

As equações de primeira ordem, isto é, aquelas equações que contém potências da função de onda até a primeira ordem, são obtidas a seguir

$$\dot{B}_\alpha^{(1)}(\epsilon) = -b_\alpha^{(1)}(\epsilon) \quad (\text{IV.45})$$

$$\dot{b}_\alpha^{(1)}(\epsilon) = B_\alpha^{(1)}(\epsilon) \quad (\text{IV.46})$$

$$\dot{q}_\mu^{(1)}(\epsilon) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^\dagger{}^{(0)}(\epsilon) q_{\mu_3}^\dagger{}^{(0)}(\epsilon) b_\beta^{(0)}(\epsilon). \quad (\text{IV.47})$$

Novamente o termo proporcional a $\Delta_{\alpha\beta}$ foi desprezado em (IV.45) por ser de segunda ordem em Ψ e portanto não contribuir. Desta vez, no entanto, o lado direito de (IV.47) não foi tomado igual a zero por ser efetivamente de primeira ordem.

Como as condições “iniciais” já foram usadas nas soluções de ordem zero devemos, então ter que

$$B_\alpha^{(i)}(0) = b_\alpha^{(i)}(0) = q_\mu^{(i)}(0) = 0 \quad \text{para } i \geq 1. \quad (\text{IV.48})$$

Assim encontramos que

$$B_\alpha^{(1)}(\epsilon) = b_\alpha^{(1)}(\epsilon) = 0. \quad (\text{IV.49})$$

Para encontrar a solução para (IV.47) substituímos nesta equação os resultados de (IV.40) e (IV.42) e integramos de 0 a ϵ

$$\begin{aligned} q_\mu^{(1)}(\epsilon) &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger \int_0^\epsilon d\epsilon' b_\beta^{(0)}(\epsilon') \\ &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger [b_\beta \sin \epsilon + B_\beta(1 - \cos \epsilon)]. \end{aligned} \quad (\text{IV.50})$$

A obtenção dos operadores de segunda ordem segue o mesmo procedimento na contagem de potências nas equações de movimento

$$\dot{B}_\alpha^{(2)}(\epsilon) = -b_\alpha^{(2)}(\epsilon) + \Delta_{\alpha\beta}(\epsilon) b_\alpha^{(0)}(\epsilon) \quad (\text{IV.51})$$

$$\dot{b}_\alpha^{(2)}(\epsilon) = B_\alpha^{(2)}(\epsilon) \quad (\text{IV.52})$$

$$\dot{q}_\mu^{(2)}(\epsilon) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3} \left[q_{\mu_2}^\dagger{}^{(0)}(\epsilon) q_{\mu_3}^\dagger{}^{(1)}(\epsilon) b_\beta^{(0)}(\epsilon) + q_{\mu_2}^\dagger{}^{(1)}(\epsilon) q_{\mu_3}^\dagger{}^{(0)}(\epsilon) b_\beta^{(0)}(\epsilon) \right]. \quad (\text{IV.53})$$

A resolução das equações para B_α e b_α envolve encontrar a solução para um sistema de equações diferenciais acopladas e inhomogêneas. Vamos omitir os detalhes deste cálculo que não apresenta grande dificuldade, mostrando o seu resultado final

$$\begin{aligned} B_\alpha^{(2)}(\epsilon) &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} [\epsilon B_\beta \sin \epsilon + b_\beta (\sin \epsilon + \epsilon \cos \epsilon)] \\ b_\alpha^{(2)}(\epsilon) &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} [\epsilon b_\beta \sin \epsilon + B_\beta (\sin \epsilon - \epsilon \cos \epsilon)]. \end{aligned} \quad (\text{IV.54})$$

Um comentário pode ser feito sobre (IV.54): os termos proporcionais a potências de ϵ (i.e. termos que não estão contidos em senos ou em cossenos) estragam a interpretação da transformação de Fock-Tani como implementadora de uma rotação sobre os operadores e foi mostrado [27] que a eliminação destes termos implica na existência da simetria post-prior no potencial. Estes termos proporcionais a potências de ϵ foi chamado por M. D. Girardeau de *termos seculares*. A integração do operador de quarks $q_\mu^{(2)}(\epsilon)$ é simples e também apresenta termos seculares

$$\begin{aligned} q_\mu^{(2)}(\epsilon) &= \frac{3}{2} \Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu} \left[b_\gamma^\dagger q_{\mu_3} B_\beta (\epsilon - \sin \epsilon \cos \epsilon) + b_\gamma^\dagger q_{\mu_3} b_\beta \sin^2 \epsilon \right. \\ &\quad \left. + 2B_\gamma^\dagger q_{\mu_3} B_\beta (1 - \cos \epsilon - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon) + 2B_\gamma^\dagger q_{\mu_3} b_\beta (-\frac{1}{2} \epsilon + \sin \epsilon - \frac{1}{2} \sin \epsilon \cos \epsilon) \right] \\ &\quad - \frac{3}{2} \Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu} \left[b_\gamma^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3} B_\beta (\frac{1}{2} \epsilon - \sin \epsilon \cos \epsilon) + b_\gamma^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3} b_\beta \sin^2 \epsilon \right. \\ &\quad \left. + 2B_\gamma^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3} B_\beta (1 - \cos \epsilon - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon) \right. \\ &\quad \left. + 2B_\gamma^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3} b_\beta (-\frac{1}{2} \epsilon + \sin \epsilon - \frac{1}{2} \sin \epsilon \cos \epsilon) \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.55})$$

IV.2.3 A Transformação de Fock-Tani Generalizada

Construiremos nesta subseção uma transformação de Fock-Tani generalizada que será capaz de cancelar os termos seculares. Esta generalização envolve obter um gerador F mais geral que (IV.5)

$$F \equiv F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \dots \quad (\text{IV.56})$$

o que é equivalente a definir uma expansão num operador O_α

$$O_\alpha \equiv O_\alpha^{(0)} + O_\alpha^{(1)} + O_\alpha^{(2)} + O_\alpha^{(4)} + \dots \quad (\text{IV.57})$$

de forma que o novo gerador fica formalmente igual ao antigo apenas com a substituição de B_α por O_α , ou seja,

$$F = b_\alpha^\dagger O_\alpha - O_\alpha^\dagger b_\alpha, \quad (\text{IV.58})$$

tal que

$$O_\alpha^{(0)} \equiv B_\alpha. \quad (\text{IV.59})$$

Impomos que o novo operador O_α , que substitui ao operador de bárions composto, deva obedecer relações canônicas de anticomutação

$$\{O_\alpha, O_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{IV.60})$$

A construção deste anticomutador é feita de maneira iterativa. Em ordem mais baixa a anticomutação de O_α resulta em

$$\{O_\alpha^{(0)}, O_\beta^{\dagger(0)}\} = \{B_\alpha, B_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{IV.61})$$

Para cancelar o termo operatorial $\Delta_{\alpha\beta}$ e garantir que o anticomutador seja canônico até segunda ordem, soma-se a $O_\alpha^{(0)}$ um termo com uma estrutura adequada, isto é,

$$O_\alpha \equiv B_\alpha + a_1 \Delta_{\alpha\beta} B_\beta. \quad (\text{IV.62})$$

A determinação da constante a_1 é realizada mediante o cálculo do anticomutador de (IV.62), usando a relação (IV.24)

$$\begin{aligned} \{O_\alpha, O_\beta^\dagger\} &= \{B_\alpha, B_\beta^\dagger\} + a_1 \{B_\alpha, B_\gamma^\dagger \Delta_{\gamma\beta}\} + a_1 \{B_\beta^\dagger, \Delta_{\alpha\gamma} B_\gamma\} + a_1^2 \{\Delta_{\alpha\gamma} B_\gamma, B_\lambda^\dagger \Delta_{\lambda\beta}\} \\ &\approx \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta} + a_1 \left(B_\gamma^\dagger [\Delta_{\gamma\beta}, B_\alpha] + \{B_\alpha, B_\gamma^\dagger\} \Delta_{\gamma\beta} + \right. \\ &\quad \left. + \Delta_{\alpha\gamma} \{B_\gamma, B_\beta^\dagger\} + [B_\beta^\dagger, \Delta_{\alpha\gamma}] B_\gamma \right) + \mathcal{O}(\Psi^{\geq 4}) \end{aligned} \quad (\text{IV.63})$$

na expressão acima foi desprezado termos que envolvem potências iguais ou maiores que quatro na função de onda. Reagrupando os termos encontramos o seguinte resultado

$$\{O_\alpha, O_\beta^\dagger\} \approx \delta_{\alpha\beta} + (-1 + 2a_1) \Delta_{\alpha\beta} + a_1 \left(B_\gamma^\dagger [\Delta_{\gamma\beta}, B_\alpha] + [B_\beta^\dagger, \Delta_{\alpha\gamma}] B_\gamma \right) + \mathcal{O}(\Psi^{\geq 4})$$

Para ocorrer o cancelamento do termo de segunda ordem o coeficiente a_1 deve ser igual a $1/2$ e assim temos que

$$\{O_\alpha, O_\beta^\dagger\} \approx \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left(B_\gamma^\dagger [\Delta_{\gamma\beta}, B_\alpha] + [B_\beta^\dagger, \Delta_{\alpha\gamma}] B_\gamma \right) + \mathcal{O}(\Psi^{\geq 4}). \quad (\text{IV.64})$$

A expressão acima é canônica até a segunda ordem. Os termos entre parênteses são de terceira ordem na função de onda e foram gerados pela inclusão do contra-termo proporcional a a_1 em (IV.62). O cancelamento destes termos irá ocorrer mediante uma nova modificação do operador O_α capaz, agora, de eliminar estas contribuições. Definindo um novo “ansatz” para O_α tal que,

$$O_\alpha \equiv B_\alpha + \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} B_\beta + a_2 B_\beta^\dagger [\Delta_{\beta\gamma}, B_\alpha] B_\gamma \quad (\text{IV.65})$$

garantirá que a transformação de Fock-Tani seja consistente, até ordem três, nos operadores. Como ficará claro mais tarde, na dedução do potencial bárion - bárion, esta é a ordem mínima, na função de onda, para se obter de maneira consistente o gerador F . O valor de $a_2 = -1/2$ é encontrado pelo cálculo do anticomutador de (IV.65), semelhante ao procedimento utilizado para determinar a_1 . A inclusão do contra-termo proporcional a a_2 em (IV.65) irá, por sua vez, gerar contribuições operatoriais em ordens mais altas. O cancelamento destes termos segue o mesmo procedimento. A nova transformação de Fock-Tani fica

$$U(\epsilon) = \exp(\epsilon F) \quad (\text{IV.66})$$

de tal maneira que as respectivas equações de movimento resultam em

$$\dot{O}_\alpha(\epsilon) = [O_\alpha(\epsilon), F(\epsilon)] \quad (\text{IV.67})$$

$$\dot{b}_\alpha(\epsilon) = [b_\alpha(\epsilon), F(\epsilon)] \quad (\text{IV.68})$$

$$\dot{q}_\mu(\epsilon) = [q_\mu(\epsilon), F(\epsilon)] \quad (\text{IV.69})$$

Uma das grandes vantagens da formulação generalizada começa a aparecer na resolução destas equações de movimento. As equações (IV.67) e (IV.68) são

$$\dot{O}_\alpha(\epsilon) = -b_\alpha(\epsilon) \quad (\text{IV.70})$$

$$\dot{b}_\alpha(\epsilon) = O_\alpha(\epsilon) \quad (\text{IV.71})$$

que podem ser integradas sem problemas resultando em

$$O_\alpha(\epsilon) = O_\alpha \cos \epsilon - b_\alpha \sin \epsilon \quad (\text{IV.72})$$

$$b_\alpha(\epsilon) = O_\alpha \sin \epsilon + b_\alpha \cos \epsilon. \quad (\text{IV.73})$$

Nesta formulação generalizada vemos que operadores transformados possuem a propriedade de uma rotação no espaço dos operadores. Na formulação “restrita”, isto é, com o gerador igual a F_0 são apenas os operadores de ordem zero que constituem uma rotação. Estas equações podem ser escritas ordem a ordem

$$\begin{aligned} O_\alpha^{(0)}(\epsilon) &= B_\alpha \cos \epsilon - b_\alpha \sin \epsilon \\ O_\alpha^{(1)}(\epsilon) &= 0 \\ O_\alpha^{(2)}(\epsilon) &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\gamma} B_\gamma \cos \epsilon \\ O_\alpha^{(3)}(\epsilon) &= -\frac{1}{2} B_\gamma^\dagger [\Delta_{\gamma\rho}, B_\alpha] B_\rho \cos \epsilon \end{aligned} \quad (\text{IV.74})$$

e

$$\begin{aligned} b_\alpha^{(0)}(\epsilon) &= B_\alpha \sin \epsilon + b_\alpha \cos \epsilon \\ b_\alpha^{(1)}(\epsilon) &= 0 \\ b_\alpha^{(2)}(\epsilon) &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\gamma} B_\gamma \sin \epsilon \\ b_\alpha^{(3)}(\epsilon) &= -\frac{1}{2} B_\gamma^\dagger [\Delta_{\gamma\rho}, B_\alpha] B_\rho \sin \epsilon \end{aligned} \quad (\text{IV.75})$$

A simplicidade das equações para O_α e b_α não se reflete na equação para o operador de quarks. A sua equação de movimento até terceira ordem é dada por

$$\begin{aligned} \dot{q}_\mu(\epsilon) &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^\dagger(\epsilon) q_{\mu_3}^\dagger(\epsilon) b_\beta(\epsilon) \\ &\quad - \frac{3}{2} \Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu} \left[b_\gamma^\dagger(\epsilon) q_{\mu_3}(\epsilon) B_\beta(\epsilon) - B_\gamma^\dagger(\epsilon) q_{\mu_3}(\epsilon) b_\beta(\epsilon) \right] \\ &\quad + \frac{3}{2} \Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu} \left[b_\gamma^\dagger(\epsilon) q_{\mu_2}^\dagger(\epsilon) q_{\mu_2}(\epsilon) q_{\mu_3}(\epsilon) B_\beta(\epsilon) \right. \\ &\quad \left. - B_\gamma^\dagger(\epsilon) q_{\mu_2}^\dagger(\epsilon) q_{\mu_2}(\epsilon) q_{\mu_3}(\epsilon) b_\beta(\epsilon) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_\gamma^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^\dagger(\epsilon) q_{\mu_3}^\dagger(\epsilon) \Delta_{\gamma\beta}(\epsilon) b_\beta(\epsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_{\rho}^{*\nu_1\nu_2\nu_3} \Psi_{\beta}^{\nu_1\mu\mu_3} b_{\gamma}^{\dagger}(\epsilon) B_{\rho}^{\dagger}(\epsilon) q_{\mu_1}(\epsilon) q_{\mu_2}(\epsilon) q_{\nu_2}(\epsilon) q_{\nu_3}(\epsilon) B_{\beta}(\epsilon) \\
& - 3 \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_{\rho}^{\mu_1\mu_2\nu_3} \Psi_{\beta}^{\mu\nu_2\mu_3} + \frac{1}{2} \Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_{\rho}^{\mu\mu_2\mu_3} \Psi_{\beta}^{\mu_1\nu_2\nu_3} \right. \\
& \quad \left. - \Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_{\rho}^{\mu\mu_2\nu_3} \Psi_{\beta}^{\mu_1\nu_2\mu_3} - \frac{1}{2} \Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_{\rho}^{\mu_1\nu_2\nu_3} \Psi_{\beta}^{\mu\mu_2\mu_3} \right] \\
& \times B_{\gamma}^{\dagger}(\epsilon) q_{\nu_3}^{\dagger}(\epsilon) q_{\nu_2}^{\dagger}(\epsilon) B_{\rho}(\epsilon) b_{\beta}(\epsilon) \\
& + 3 \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_{\rho}^{\mu_1\nu_2\nu_3} \Psi_{\beta}^{\nu_1\mu\mu_3} - \Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_{\rho}^{\mu_1\mu\nu_3} \Psi_{\beta}^{\nu_1\nu_2\mu_3} \right] \\
& \times B_{\gamma}^{\dagger}(\epsilon) q_{\nu_3}^{\dagger}(\epsilon) q_{\nu_2}^{\dagger}(\epsilon) q_{\nu_1}^{\dagger}(\epsilon) q_{\mu_2}(\epsilon) B_{\rho}(\epsilon) b_{\beta}(\epsilon). \tag{IV.76}
\end{aligned}$$

Uma equação de primeira ordem pode ser obtida de (IV.76), desprezando os termos que possuem potências mais altas da função de onda

$$\dot{q}_{\mu}^{(1)}(\epsilon) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_{\beta}^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^{\dagger(0)}(\epsilon) q_{\mu_3}^{\dagger(0)}(\epsilon) b_{\beta}^{(0)}(\epsilon). \tag{IV.77}$$

A resolução de (IV.77) é igual a (IV.47), no entanto neste ponto podemos apresentar uma maneira alternativa de resolver esta equação. Substituímos (IV.40) e (IV.71) em (IV.77), obtendo

$$\dot{q}_{\mu}^{(1)}(\epsilon) = \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_{\beta}^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^{\dagger} q_{\mu_3}^{\dagger} \dot{O}_{\beta}^{(0)}(\epsilon). \tag{IV.78}$$

No lado direito de (IV.78) vemos a presença de uma derivada total que por sua vez possui uma solução simples

$$\begin{aligned}
q_{\mu}^{(1)}(\epsilon) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_{\beta}^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^{\dagger} q_{\mu_3}^{\dagger} \left[O_{\beta}^{(0)}(\epsilon) - O_{\beta}^{(0)}(0) \right] \\
&= -\sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_{\beta}^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^{\dagger} q_{\mu_3}^{\dagger} \left[b_{\beta} \sin \epsilon + B_{\beta} (1 - \cos \epsilon) \right] \tag{IV.79}
\end{aligned}$$

Esta propriedade, a de sempre encontrar uma derivada total no lado direito das equações de movimento, constituiu um aspecto novo do formalismo de Fock-Tani descoberto por nós. Ela auxiliou na resolução das equações de movimento para os operadores de quarks de ordens mais altas.

A equação em segunda ordem é

$$\dot{q}_{\mu}^{(2)}(\epsilon) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_{\beta}^{\mu\mu_2\mu_3} \left[q_{\mu_2}^{\dagger(0)}(\epsilon) q_{\mu_3}^{\dagger(1)}(\epsilon) + q_{\mu_2}^{\dagger(1)}(\epsilon) q_{\mu_3}^{\dagger(0)}(\epsilon) \right] b_{\beta}^{(0)}(\epsilon)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{3}{2}\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\beta}^{\mu_1\mu_2\mu}\left[b_{\gamma}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\mu_3}^{(0)}(\epsilon)B_{\beta}^{(0)}(\epsilon)-B_{\gamma}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\mu_3}^{(0)}(\epsilon)b_{\beta}^{(0)}(\epsilon)\right] \\
 & +\frac{3}{2}\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\beta}^{\mu_1\nu_2\mu}\left[b_{\gamma}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\nu_2}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\mu_2}^{(0)}(\epsilon)q_{\mu_3}^{(0)}(\epsilon)B_{\beta}^{(0)}(\epsilon)\right. \\
 & \left.-B_{\gamma}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\nu_2}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\mu_2}^{(0)}(\epsilon)q_{\mu_3}^{(0)}(\epsilon)b_{\beta}^{(0)}(\epsilon)\right]
 \end{aligned} \tag{IV.80}$$

Usando o fato de $B_{\alpha}^{(0)}(\epsilon) = O_{\alpha}^{(0)}(\epsilon)$ e novamente a condições (IV.40) e (IV.71) encontramos

$$\dot{q}_{\mu}^{(2)}(\epsilon) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\epsilon}\left[O_{\alpha}^{\dagger(0)}(\epsilon)\hat{X}_{\alpha\beta}^{\mu}O_{\beta}^{(0)}(\epsilon)-B_{\alpha}^{\dagger}\hat{X}_{\alpha\beta}^{\mu}O_{\beta}^{(0)}(\epsilon)\right] \tag{IV.81}$$

onde

$$\hat{X}_{\alpha\beta}^{\mu} \equiv 3\Psi_{\alpha}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\beta}^{\mu_1\mu_2\mu}q_{\mu_3}-3\Psi_{\alpha}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\beta}^{\mu_1\nu_2\mu}q_{\nu_3}^{\dagger}q_{\mu_2}q_{\mu_3}. \tag{IV.82}$$

A integração de (IV.81) resulta em

$$\begin{aligned}
 q_{\mu}^{(2)}(\epsilon) = & \frac{1}{2}\left[O_{\alpha}^{\dagger(0)}(\epsilon)\hat{X}_{\alpha\beta}^{\mu}O_{\beta}^{(0)}(\epsilon)-O_{\alpha}^{\dagger(0)}(0)\hat{X}_{\alpha\beta}^{\mu}O_{\beta}^{(0)}(0)-B_{\alpha}^{\dagger}\hat{X}_{\alpha\beta}^{\mu}O_{\beta}^{(0)}(\epsilon)\right. \\
 & \left.+B_{\alpha}^{\dagger}\hat{X}_{\alpha\beta}^{\mu}O_{\beta}^{(0)}(0)\right]
 \end{aligned} \tag{IV.83}$$

ou escrito de uma forma aberta

$$\begin{aligned}
 q_{\mu}^{(2)}(\epsilon) = & \frac{3}{2}\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\beta}^{\mu_1\mu_2\mu}\left[-b_{\gamma}^{\dagger}q_{\mu_3}B_{\beta}\sin\epsilon\cos\epsilon\right. \\
 & +b_{\gamma}^{\dagger}q_{\mu_3}b_{\beta}\sin^2\epsilon+2B_{\gamma}^{\dagger}q_{\mu_3}B_{\beta}(1-\cos\epsilon-\frac{1}{2}\sin^2\epsilon) \\
 & \left.+2B_{\gamma}^{\dagger}q_{\mu_3}b_{\beta}(\sin\epsilon-\frac{1}{2}\sin\epsilon\cos\epsilon)\right] \\
 & -\frac{3}{2}\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\beta}^{\mu_1\nu_2\mu}\left[-b_{\gamma}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\mu_2}q_{\mu_3}B_{\beta}\sin\epsilon\cos\epsilon+b_{\gamma}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\mu_2}q_{\mu_3}b_{\beta}\sin^2\epsilon\right. \\
 & +2B_{\gamma}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\mu_2}q_{\mu_3}B_{\beta}(1-\cos\epsilon-\frac{1}{2}\sin^2\epsilon) \\
 & \left.+2B_{\gamma}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\mu_2}q_{\mu_3}b_{\beta}(\sin\epsilon-\frac{1}{2}\sin\epsilon\cos\epsilon)\right],
 \end{aligned} \tag{IV.84}$$

onde vemos, em comparação com (IV.55), que esta transformação generalizada efetivamente cancela os termos seculares.

O operador de terceira ordem é obtido da respectiva equação de movimento de terceira ordem

$$\dot{q}_{\mu}^{(3)}(\epsilon) = -\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_{\beta}^{\mu\mu_2\mu_3}\left[q_{\mu_2}^{\dagger(1)}(\epsilon)q_{\mu_3}^{\dagger(1)}(\epsilon)+q_{\mu_2}^{\dagger(2)}(\epsilon)q_{\mu_3}^{\dagger(0)}(\epsilon)+q_{\mu_2}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\mu_3}^{\dagger(2)}(\epsilon)\right]b_{\beta}^{(0)}(\epsilon)$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_{\beta}^{\mu\mu_2\mu_3}q_{\mu_2}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\mu_3}^{\dagger(0)}(\epsilon)b_{\beta}^{(2)}(\epsilon) \\
& -\frac{3}{2}\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\beta}^{\mu_1\mu_2\mu}\left[b_{\gamma}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\mu_3}^{(1)}(\epsilon)B_{\beta}^{(0)}(\epsilon)-B_{\gamma}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\mu_3}^{(1)}(\epsilon)b_{\beta}^{(0)}(\epsilon)\right] \\
& +\frac{3}{2}\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\beta}^{\mu_1\nu_2\mu}\left\{b_{\gamma}^{\dagger(0)}(\epsilon)\left[q_{\nu_2}^{\dagger(1)}(\epsilon)q_{\mu_2}^{(0)}(\epsilon)q_{\mu_3}^{(0)}(\epsilon)+q_{\nu_2}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\mu_2}^{(1)}(\epsilon)q_{\mu_3}^{(0)}(\epsilon)\right.\right. \\
& \left.+q_{\nu_2}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\mu_2}^{(0)}(\epsilon)q_{\mu_3}^{(1)}(\epsilon)\right]B_{\beta}^{(0)}(\epsilon)-B_{\gamma}^{\dagger(0)}(\epsilon)\left[q_{\nu_2}^{\dagger(1)}(\epsilon)q_{\mu_2}^{(0)}(\epsilon)q_{\mu_3}^{(0)}(\epsilon)\right. \\
& \left.+q_{\nu_2}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\mu_2}^{(1)}(\epsilon)q_{\mu_3}^{(0)}(\epsilon)+q_{\nu_2}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\mu_2}^{(0)}(\epsilon)q_{\mu_3}^{(1)}(\epsilon)\right]b_{\beta}^{(0)}(\epsilon)\left.\right\} \\
& -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_{\gamma}^{\mu\mu_2\mu_3}q_{\mu_2}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\mu_3}^{\dagger(0)}(\epsilon)\Delta_{\gamma\beta}(\epsilon)b_{\beta}^{(0)}(\epsilon) \\
& +\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\rho}^{*\nu_1\nu_2\nu_3}\Psi_{\beta}^{\nu_1\mu\mu_3}b_{\gamma}^{\dagger(0)}(\epsilon)B_{\rho}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\mu_1}^{(0)}(\epsilon)q_{\mu_2}^{(0)}(\epsilon) \\
& \times q_{\nu_2}^{(0)}(\epsilon)q_{\nu_3}^{(0)}(\epsilon)B_{\beta}^{(0)}(\epsilon) \\
& -3\sqrt{\frac{3}{2}}\left[\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\rho}^{\mu_1\mu_2\nu_3}\Psi_{\beta}^{\mu\nu_2\mu_3}+\frac{1}{2}\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\rho}^{\mu\mu_2\mu_3}\Psi_{\beta}^{\mu_1\nu_2\nu_3}\right. \\
& \left.-\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\rho}^{\mu\mu_2\nu_3}\Psi_{\beta}^{\mu_1\nu_2\mu_3}-\frac{1}{2}\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\rho}^{\mu_1\nu_2\nu_3}\Psi_{\beta}^{\mu\mu_2\mu_3}\right] \\
& \times B_{\gamma}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\nu_3}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\nu_2}^{\dagger(0)}(\epsilon)B_{\rho}^{(0)}(\epsilon)b_{\beta}^{(0)}(\epsilon) \\
& +3\sqrt{\frac{3}{2}}\left[\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\rho}^{\mu_1\nu_2\nu_3}\Psi_{\beta}^{\nu_1\mu\mu_3}-\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\rho}^{\mu_1\mu\nu_3}\Psi_{\beta}^{\nu_1\nu_2\mu_3}\right] \\
& \times B_{\gamma}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\nu_3}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\nu_2}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\nu_1}^{\dagger(0)}(\epsilon)q_{\mu_2}^{(0)}(\epsilon)B_{\rho}^{(0)}(\epsilon)b_{\beta}^{(0)}(\epsilon)
\end{aligned} \tag{IV.85}$$

que, após a integração, resulta em

$$\begin{aligned}
q_{\mu}^{(3)}(\epsilon) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_{\gamma}^{\mu\mu_2\mu_3}q_{\mu_2}^{\dagger}q_{\mu_3}^{\dagger}\Delta_{\gamma\beta}\left[2B_{\beta}(\cos\epsilon-1)-b_{\beta}\sin\epsilon\right] \\
& +\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\rho}^{*\nu_1\nu_2\nu_3}\Psi_{\beta}^{\mu\mu_2\nu_3}\left[B_{\gamma}^{\dagger}B_{\rho}^{\dagger}q_{\mu_1}q_{\mu_3}q_{\nu_2}q_{\nu_1}B_{\beta}(\cos\epsilon-\cos^2\epsilon)\right. \\
& +B_{\gamma}^{\dagger}B_{\rho}^{\dagger}q_{\mu_1}q_{\mu_3}q_{\nu_2}q_{\nu_1}b_{\beta}(\cos\epsilon\sin\epsilon-\sin\epsilon)+b_{\gamma}^{\dagger}B_{\rho}^{\dagger}q_{\mu_1}q_{\mu_3}q_{\nu_2}q_{\nu_1}B_{\beta}\cos\epsilon\sin\epsilon \\
& \left.-b_{\gamma}^{\dagger}B_{\rho}^{\dagger}q_{\mu_1}q_{\mu_3}q_{\nu_2}q_{\nu_1}b_{\beta}\sin^2\epsilon\right] \\
& +\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\left[2\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\rho}^{\mu_1\mu_2\nu_3}\Psi_{\beta}^{\mu\nu_2\mu_3}-\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\rho}^{\mu_1\nu_2\nu_3}\Psi_{\beta}^{\mu\mu_2\mu_3}\right] \\
& \times\left\{b_{\gamma}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\nu_3}^{\dagger}b_{\rho}b_{\beta}\sin^3\epsilon\right. \\
& +B_{\gamma}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\nu_3}^{\dagger}B_{\rho}B_{\beta}(1-\cos\epsilon+\cos^2\epsilon-\cos^3\epsilon) \\
& +B_{\gamma}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\nu_3}^{\dagger}B_{\rho}b_{\beta}(\sin\epsilon-\cos\epsilon\sin\epsilon+\cos^2\epsilon\sin\epsilon) \\
& \left.+b_{\gamma}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\nu_3}^{\dagger}B_{\rho}B_{\beta}(-\cos\epsilon\sin\epsilon+\cos^2\epsilon\sin\epsilon)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +b_{\gamma}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\nu_3}^{\dagger}B_{\rho}b_{\beta}(\sin^2 \epsilon - \cos \epsilon \sin^2 \epsilon) \\
& +B_{\gamma}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\nu_3}^{\dagger}b_{\rho}B_{\beta} \cos^2 \epsilon \sin \epsilon \\
& -B_{\gamma}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\nu_3}^{\dagger}b_{\rho}b_{\beta} \cos \epsilon \sin^2 \epsilon \\
& -b_{\gamma}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\nu_3}^{\dagger}b_{\rho}B_{\beta} \cos \epsilon \sin^2 \epsilon \} \\
& -3\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_{\gamma}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\rho}^{\mu_1\nu_2\nu_3}\Psi_{\beta}^{\mu\tau_2\mu_3}\{b_{\gamma}^{\dagger}q_{\tau_2}^{\dagger}q_{\nu_3}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\mu_2}b_{\rho}b_{\beta}\sin^3 \epsilon \\
& +B_{\gamma}^{\dagger}q_{\tau_2}^{\dagger}q_{\nu_3}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\mu_2}B_{\rho}B_{\beta}(1 - \cos \epsilon + \cos^2 \epsilon - \cos^3 \epsilon) \\
& +B_{\gamma}^{\dagger}q_{\tau_2}^{\dagger}q_{\nu_3}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\mu_2}B_{\rho}b_{\beta}(\sin \epsilon - \cos \epsilon \sin \epsilon + \cos^2 \epsilon \sin \epsilon) \\
& +b_{\gamma}^{\dagger}q_{\tau_2}^{\dagger}q_{\nu_3}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\mu_2}B_{\rho}B_{\beta}(-\cos \epsilon \sin \epsilon + \cos^2 \epsilon \sin \epsilon) \\
& +b_{\gamma}^{\dagger}q_{\tau_2}^{\dagger}q_{\nu_3}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\mu_2}B_{\rho}b_{\beta}(\sin^2 \epsilon - \cos \epsilon \sin^2 \epsilon) \\
& +B_{\gamma}^{\dagger}q_{\tau_2}^{\dagger}q_{\nu_3}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\mu_2}b_{\rho}B_{\beta} \cos^2 \epsilon \sin \epsilon \\
& -B_{\gamma}^{\dagger}q_{\tau_2}^{\dagger}q_{\nu_3}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\mu_2}b_{\rho}b_{\beta} \cos \epsilon \sin^2 \epsilon \\
& -b_{\gamma}^{\dagger}q_{\tau_2}^{\dagger}q_{\nu_3}^{\dagger}q_{\nu_2}^{\dagger}q_{\mu_2}b_{\rho}B_{\beta} \cos \epsilon \sin^2 \epsilon \}. \tag{IV.86}
\end{aligned}$$

Este resultado conclui a dedução dos operadores de quarks transformados básicos que serão necessários para obtenção do Hamiltoniano de Fock-Tani a ser mostrado na próxima seção.

IV.3 O Hamiltoniano de Fock-Tani

A transformação de Fock-Tani realizada sobre os operadores (IV.67) - (IV.69) permite, agora, obter um Hamiltoniano efetivo onde não só estão presentes os hádrons, mas também e os seus constituintes elementares. A transformação de Fock-Tani generalizada quando aplicada ao Hamiltoniano microscópico H_{qq} automaticamente gera termos que representam processos de espalhamento, “ionização”, recombinação, etc. O procedimento geral para obter este Hamiltoniano consiste em calcular a seguinte transformação

$$\mathcal{H}_{FT} = U^{-1} H_{qq} U. \tag{IV.87}$$

Na prática isto implica substituir em (IV.87) as equações para os operadores (IV.67) - (IV.69), colocando em ordenamento normal a expressão resultante. De uma maneira

genérica escrevemos o Hamiltoniano de Fock-Tani como

$$\mathcal{H}_{\text{FT}} = \mathcal{H}_{\text{quark-quark}} + \mathcal{H}_{\text{báron-quark}} + \mathcal{H}_{\text{báron-báron}}. \quad (\text{IV.88})$$

O primeiro termo de (IV.88) envolve somente operadores de quarks e representa as diversas interações entre quarks sem, no entanto, formar novos estados ligados. A transformação de Fock-Tani, mediante a introdução do conceito de báron ideal implementa a idéia de Weinberg da quasi-partícula onde os estados ligados são subtraídos do problema. O segundo termo envolve tanto operadores bárions ideais quanto de quarks, representando processos de ionização e recombinação espontânea de bárions; processos de interações de bárions com quarks sem ocorrer quebra a bariônica; processos representando colisões binárias de bárions com a quebra total dos compostos; etc. O terceiro termo é constituído somente de operadores de bárions ideais e tem entre os seus termos representativos a interação efetiva báron-báron.

IV.3.1 A Inexistência de um Novo Estado Ligado

Uma das questões iniciais, após a obtenção do Hamiltoniano transformado, consiste em saber se a nova interação quark-quark contida em $\mathcal{H}_{\text{quark-quark}}$ forma ou não um novo estado ligado de três quarks

$$\mathcal{H}_{\text{quark-quark}} = \mathcal{H}_{3q} + \mathcal{H}_{Nq} \quad (\text{IV.89})$$

Em princípio toda a informação sobre o estado ligado está contido em b_α e qualquer interação entre quarks, agora, só poderá produzir espalhamento. A interação original deve ser enfraquecida a tal ponto que sobre apenas uma força residual e nenhum novo estado ligado deve surgir. A obtenção deste termo implica em efetuar a transformação de Fock-Tani sobre H_{qq} , como é mostrado em (IV.87), e coletar os operadores de quarks transformados nas potências mais baixas da função de onda, retendo a estrutura operatorial desejada

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{3q} &= U^{-1} H_{qq} U \\ &= T_{qq}(\mu) U^{-1} q_\mu^\dagger q_\mu U + \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) U^{-1} q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & T_{\text{qq}}(\mu) \left[q_{\mu}^{\dagger(0)}(\epsilon) q_{\mu}^{(0)}(\epsilon) + q_{\mu}^{\dagger(0)}(\epsilon) q_{\mu}^{(1)}(\epsilon) + q_{\mu}^{\dagger(1)}(\epsilon) q_{\mu}^{(0)}(\epsilon) + q_{\mu}^{\dagger(1)}(\epsilon) q_{\mu}^{(1)}(\epsilon) \right] \\
& + \frac{1}{2} V_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) \left[q_{\mu}^{\dagger(0)}(\epsilon) q_{\nu}^{\dagger(0)}(\epsilon) q_{\rho}^{(0)}(\epsilon) q_{\sigma}^{(0)}(\epsilon) + q_{\mu}^{\dagger(1)}(\epsilon) q_{\nu}^{\dagger(0)}(\epsilon) q_{\rho}^{(0)}(\epsilon) q_{\sigma}^{(0)}(\epsilon) \right. \\
& \left. + q_{\mu}^{\dagger(0)}(\epsilon) q_{\nu}^{\dagger(0)}(\epsilon) q_{\rho}^{(0)}(\epsilon) q_{\sigma}^{(1)}(\epsilon) + q_{\mu}^{\dagger(1)}(\epsilon) q_{\nu}^{\dagger(0)}(\epsilon) q_{\rho}^{(0)}(\epsilon) q_{\sigma}^{(1)}(\epsilon) \right] \quad (\text{IV.90})
\end{aligned}$$

onde na expressão acima se toma $\epsilon = -\pi/2$. O cálculo da expressão (IV.90) implica em calcular produtos dos operadores transformados. Mostraremos a seguir alguns exemplos

$$\begin{aligned}
T_{\text{qq}}(\mu) q_{\mu}^{\dagger(0)} q_{\mu}^{(1)} &= \sqrt{\frac{3}{2}} T_{\text{qq}}(\mu) \Psi_{\beta}^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu}^{\dagger} q_{\mu_2}^{\dagger} q_{\mu_3}^{\dagger} b_{\beta} \\
&\quad - \frac{1}{2} T_{\text{qq}}(\mu) \Delta(\mu\mu_2\mu_3; \nu_1\nu_2\nu_3) q_{\mu}^{\dagger} q_{\mu_2}^{\dagger} q_{\mu_3}^{\dagger} q_{\nu_1} q_{\nu_2} q_{\nu_3} \quad (\text{IV.91})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\text{qq}}(\mu) q_{\mu}^{\dagger(1)} q_{\mu}^{(1)} &= \frac{3}{2} T_{\text{qq}}(\mu) \Psi_{\alpha}^{\mu\mu_2\mu_3} \Psi_{\beta}^{\mu\nu_2\nu_3} (-b_{\alpha}^{\dagger} + B_{\alpha}^{\dagger}) q_{\nu_2}^{\dagger} q_{\nu_3}^{\dagger} q_{\mu_3} q_{\mu_2} (-b_{\beta} + B_{\beta}) \\
&\quad - 3 T_{\text{qq}}(\mu) \Psi_{\alpha}^{\mu\mu_2\mu_3} \Psi_{\beta}^{\mu\nu_2\nu_3} (-b_{\alpha}^{\dagger} + B_{\alpha}^{\dagger}) q_{\nu_3}^{\dagger} q_{\mu_3} (-b_{\beta} + B_{\beta}) \\
&\quad + 3 T_{\text{qq}}(\mu) \Psi_{\alpha}^{\mu\mu_2\mu_3} \Psi_{\beta}^{\mu\nu_2\nu_3} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta} \\
&\quad - \sqrt{\frac{3}{2}} T_{\text{qq}}(\mu) \Psi_{\beta}^{\mu\tau_2\tau_3} \Delta(\nu_1\nu_2\nu_3; \mu\tau_2\tau_3) q_{\nu_1}^{\dagger} q_{\nu_2}^{\dagger} q_{\nu_3}^{\dagger} b_{\beta} \\
&\quad + \sqrt{\frac{3}{2}} T_{\text{qq}}(\mu) \Psi_{\alpha}^{\mu\tau_2\tau_3} \Delta(\mu\tau_2\tau_3; \nu_1\nu_2\nu_3) b_{\alpha}^{\dagger} q_{\nu_1} q_{\nu_2} q_{\nu_3} \quad (\text{IV.92}) \\
&\quad - 3 T_{\text{qq}}(\mu) \Delta(\nu_1\nu_2\nu_3; \mu\tau_2\tau_3) \Delta(\mu\tau_2\tau_3; \mu_1\mu_2\mu_3) q_{\nu_1}^{\dagger} q_{\nu_2}^{\dagger} q_{\nu_3}^{\dagger} q_{\mu_1} q_{\mu_2} q_{\mu_3}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, um exemplo de (IV.90) que envolve o potencial

$$\begin{aligned}
V_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_{\mu}^{\dagger(1)}(\epsilon) q_{\nu}^{\dagger(0)}(\epsilon) q_{\rho}^{(0)}(\epsilon) q_{\sigma}^{(0)}(\epsilon) \\
= & -2\sqrt{\frac{3}{2}} V_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_{\alpha}^{*\mu\nu\mu_3} b_{\alpha}^{\dagger} q_{\mu_3} q_{\sigma} q_{\rho} \\
& - \sqrt{\frac{3}{2}} V_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_{\alpha}^{*\mu\mu_2\mu_3} b_{\alpha}^{\dagger} q_{\nu}^{\dagger} q_{\mu_3} q_{\mu_2} q_{\sigma} q_{\rho} \\
& - V_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Delta(\mu_1\mu_2\mu_3; \mu\nu\nu_3) q_{\mu_1}^{\dagger} q_{\mu_2}^{\dagger} q_{\mu_3}^{\dagger} q_{\nu_3} q_{\sigma} q_{\rho} \\
& + \frac{1}{2} V_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Delta(\mu_1\mu_2\mu_3; \mu\nu_2\nu_3) q_{\mu_1}^{\dagger} q_{\mu_2}^{\dagger} q_{\mu_3}^{\dagger} q_{\nu}^{\dagger} q_{\nu_2} q_{\nu_3} q_{\sigma} q_{\rho} \quad (\text{IV.93})
\end{aligned}$$

Assim o Hamiltoniano $\mathcal{H}_{3q}$ fica

$$\mathcal{H}_{3q} = H_{\text{qq}} + \tilde{H}_{\text{qq}} \quad (\text{IV.94})$$

onde $\tilde{H}_{\text{qq}}$ tem a seguinte forma

$$\tilde{H}_{\text{qq}} = \frac{1}{6} \left[\Delta(\nu_1\nu_2\nu_3; \mu_1\mu\nu) H_{\text{qq}}(\mu\nu; \mu_2\mu_3) + H_{\text{qq}}(\nu_1\nu_2; \sigma\rho) \Delta(\sigma\rho\nu_3; \mu_1\mu_2\mu_3) \right] \quad (\text{IV.95})$$

$$+ - \Delta(\nu_1 \nu_2 \nu_3; \tau \mu \nu) H_{\text{qq}}(\mu \nu; \sigma \rho) \Delta(\sigma \rho \tau; \mu_1 \mu_2 \mu_3) \Big] q_{\nu_1}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger q_{\mu_1} q_{\mu_2} q_{\mu_3}. \quad (\text{IV.95})$$

Assumindo que Ψ é autofunção de H_{qq} e usando a propriedade (III.43) temos que

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\text{qq}} &= \frac{1}{6} \mathcal{E}_\alpha \Psi_\alpha^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Psi_\alpha^{*\mu_1 \mu_2 \mu_3} q_{\nu_1}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger q_{\mu_1} q_{\mu_2} q_{\mu_3} = -\mathcal{E}_\alpha B_\alpha^\dagger B_\alpha \\ &= -\mathcal{E}_\alpha \hat{N}_\alpha \end{aligned} \quad (\text{IV.96})$$

onde $\hat{N}_\alpha$ é o “operador número” para bárions. Assim $\mathcal{H}_{3\text{q}}$ fica

$$\mathcal{H}_{3\text{q}} = H_{\text{qq}} - \mathcal{E}_\alpha \hat{N}_\alpha. \quad (\text{IV.97})$$

Apesar de estarmos considerando uma interação quark-quark, que gera apenas um único estado ligado a demonstração da inexistência de novos estados ligados não se restringe a esta situação. Ela será válida para interações que geram vários estados ligados.

Consideremos um estado genérico de três quarks dado por $|\Phi\rangle$ tal que

$$|\Phi_\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}} \Phi_\alpha^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} q_{\mu_1}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger |0\rangle. \quad (\text{IV.98})$$

Se $|\Phi_\alpha\rangle$ pertencer ao conjunto de autofunções $|\alpha\rangle$ a ação de $\mathcal{H}_{\text{q}}$ sobre este estado é

$$\mathcal{H}_{3\text{q}}|\Phi_\alpha\rangle = (H_{\text{qq}} - \mathcal{E}_\beta \hat{N}_\beta) |\Phi_\alpha\rangle = (\mathcal{E}_\alpha - \mathcal{E}_\alpha) |\Phi_\alpha\rangle = 0. \quad (\text{IV.99})$$

Por outro lado se Φ_α for ortogonal a Ψ_α encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{3\text{q}}|\Phi_\alpha\rangle &= (H_{\text{qq}} - \mathcal{E}_\beta \hat{N}_\beta) |\Phi_\alpha\rangle = H_{\text{qq}}|\Phi_\alpha\rangle - \mathcal{E}_\alpha \Phi_\beta^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \Psi_\alpha^{*\mu_1 \mu_2 \mu_3} |\alpha\rangle \\ &= H_{\text{qq}}|\Phi_\alpha\rangle. \end{aligned} \quad (\text{IV.100})$$

Qualquer estado $|\Phi\rangle$ pode ser expandido como

$$|\Phi\rangle = c_\alpha |\Phi_\alpha\rangle + c_k |\psi_k\rangle \quad (\text{IV.101})$$

onde $|\psi_k\rangle$ são as autofunções do contínuo de um estado de três quarks com autovalores ϵ_k e assim

$$\mathcal{H}_{3\text{q}}|\Phi\rangle = \epsilon_k c_k |\psi_k\rangle \quad (\text{IV.102})$$

de onde segue

$$\langle \Phi | \mathcal{H}_{3q} | \Phi \rangle = \epsilon_k |c_k|^2 \quad (\text{IV.103})$$

o Hamiltoniano $\mathcal{H}_{3q}$ é positivo e semi-definido e portanto não possui um estado ligado de três quarks.

IV.3.2 A Interação Bárion-Quark

Entre os diversos termos de interação bárion-quark que surgem após a transformação de Fock-Tani iremos destacar dois que são interessantes. A partir do primeiro termo de (IV.91) e do quarto termo de (IV.92) pode-se extrair o termo que está relacionado com a ionização bariônica, ou seja,

$$\mathcal{H}_{ion} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[H_{qq}(\mu_1 \mu_2; \sigma \rho) \Psi_{\beta}^{\sigma \rho \mu_3} - H_{qq}(\mu \nu; \sigma \rho) \Psi_{\beta}^{\sigma \rho \tau_3} \Delta(\mu_1 \mu_2 \mu_3; \mu \nu \tau_3) \right] q_{\mu_1}^{\dagger} q_{\mu_2}^{\dagger} q_{\mu_3}^{\dagger} b_{\beta}. \quad (\text{IV.104})$$

O conjugado da expressão acima corresponde ao termo de recombinação, isto é, três quarks se recombinando para formar uma bárion. Usando o fato de Ψ ser autofunção de H_{qq} descobrimos que

$$\mathcal{H}_{ion} = 0. \quad (\text{IV.105})$$

Na ausência de perturbações externas, este resultado reflete a estabilidade do estado ligado de um bárion frente à probabilidade de decaimento espontâneo.

A interação que corresponde a colisão binária entre bárions com ionização de quarks deve, num modelo de quarks com confinamento de cor, contribuir somente para estados intermediários e é dada por

$$\begin{aligned} V_{col \text{ bin}} &= \frac{1}{2} V_{qq}(\mu \nu; \sigma \rho) q_{\mu}^{\dagger(0)} q_{\nu}^{\dagger(0)} q_{\rho}^{(1)} q_{\sigma}^{(1)} \\ &= \frac{3}{4} \Psi_{\alpha}^{\rho \nu_2 \mu_3} \Psi_{\beta}^{\sigma \nu_2 \nu_3} V_{qq}(\mu \nu; \sigma \rho) q_{\mu}^{\dagger} q_{\nu}^{\dagger} q_{\mu_2}^{\dagger} q_{\mu_3}^{\dagger} q_{\nu_2}^{\dagger} q_{\nu_3}^{\dagger} b_{\alpha} b_{\beta} \end{aligned} \quad (\text{IV.106})$$

As figuras associadas ao processo de ionização e colisão binária podem ser vistos nas figuras IV.1 e IV.2, respectivamente.

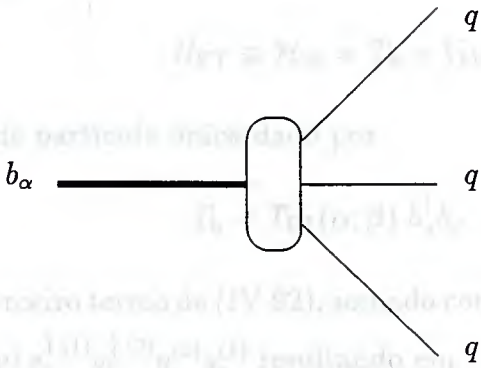


Figura IV.1: Termo de ionização de bárions.

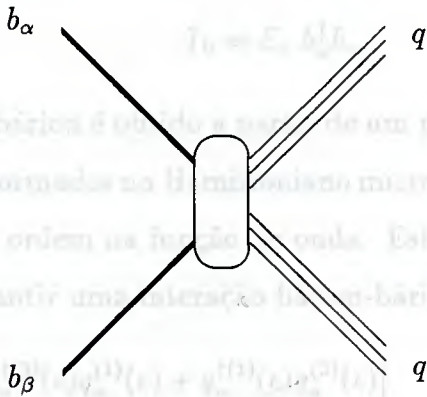


Figura IV.2: Termo de colisão binária com quebra de bárions.

IV.3.3 A Interação Bárion-Bárion

Nesta subsecção iremos deduzir, a partir do formalismo de Fock-Tani, a interação bárion-bárion $\mathcal{H}_{\text{bárion-bárion}}$. Este termo contém as contribuições oriundas apenas das interações entre bárions, sendo que operadores de quarks foram totalmente contraídos. Escrito numa forma genérica temos

$$\mathcal{H}_{\text{bárion-bárion}} = \mathcal{H}_{2b} + \mathcal{H}_{Nb}$$

(IV.107)

onde $\mathcal{H}_{2b}$ é o termo de interação entre dois bárions e $\mathcal{H}_{Nb}$ representa a interação entre N bárions. O Hamiltoniano efetivo de Fock-Tani H_{FT} para a interação entre dois bárions é escrito da seguinte forma

$$H_{FT} \equiv \mathcal{H}_{2b} = T_b + V_{bb} \quad (IV.108)$$

onde T_b é o termo de partícula única dado por

$$T_b = T_{FT}(\alpha; \beta) b_\alpha^\dagger b_\beta \quad (IV.109)$$

obtido a partir do terceiro termo de (IV.92), somado com a respectiva contribuição originada no termo $V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger(1) q_\nu^\dagger(0) q_\rho^{(0)} q_\sigma^{(1)}$ resultando em

$$T_{FT}(\alpha; \beta) \equiv \Psi_\alpha^{*\mu\nu\tau} H_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\beta^{\sigma\rho\tau}. \quad (IV.110)$$

Se Ψ é autofunção de $H_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho)$ encontramos

$$T_b = \mathcal{E}_\alpha b_\alpha^\dagger b_\alpha. \quad (IV.111)$$

O potencial bárion-bárion é obtido a partir de um procedimento similar, onde se substitui os operadores transformados no Hamiltoniano microscópico H_{qq} retendo as contribuições combinadas até quarta ordem na função de onda. Este truncamento em quarta ordem na função de onda irá garantir uma interação bárion-bárion de dois corpos.

$$\begin{aligned} V_{bb} = & T_{qq}(\mu) \left[q_\mu^\dagger(3)(\epsilon) q_\mu^{(1)}(\epsilon) + q_\mu^\dagger(1)(\epsilon) q_\mu^{(3)}(\epsilon) \right] \\ & + \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \left[q_\mu^\dagger(1)(\epsilon) q_\nu^\dagger(1)(\epsilon) q_\rho^{(1)}(\epsilon) q_\sigma^{(1)}(\epsilon) + q_\mu^\dagger(1)(\epsilon) q_\nu^\dagger(0)(\epsilon) q_\rho^{(2)}(\epsilon) q_\sigma^{(1)}(\epsilon) \right. \\ & + q_\mu^\dagger(1)(\epsilon) q_\nu^\dagger(2)(\epsilon) q_\rho^{(0)}(\epsilon) q_\sigma^{(1)}(\epsilon) + q_\mu^\dagger(3)(\epsilon) q_\nu^\dagger(0)(\epsilon) q_\rho^{(0)}(\epsilon) q_\sigma^{(1)}(\epsilon) \\ & \left. + q_\mu^\dagger(1)(\epsilon) q_\nu^\dagger(0)(\epsilon) q_\rho^{(0)}(\epsilon) q_\sigma^{(3)}(\epsilon) \right]. \end{aligned} \quad (IV.112)$$

Após realizar o ordenamento normal de (IV.112) e efetuar a contração total dos operadores de quarks, o potencial bárion-bárion de mais baixa ordem é

$$V_{bb} = \frac{1}{2} V_{FT}(\alpha\beta; \gamma\delta) b_\alpha^\dagger b_\beta^\dagger b_\gamma b_\delta \quad (IV.113)$$

onde

$$V_{FT}(\alpha\beta; \gamma\delta) = \sum_{i=1}^5 v_i(\alpha\beta; \gamma\delta) + \sum_{i=1}^3 h_i^{intra}(\alpha\beta; \gamma\delta). \quad (IV.114)$$

com

$$\begin{aligned}
v_1(\alpha\beta; \gamma\delta) &= 9V_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu\nu_2\nu_3} \Psi_\gamma^{\rho\nu_2\nu_3} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} \\
v_2(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -36V_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu\nu_2\nu_3} \Psi_\gamma^{\rho\nu_2\mu_3} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\nu_3} \\
v_3(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -9V_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu\nu_2\nu_3} \Psi_\gamma^{\sigma\nu_2\nu_3} \Psi_\delta^{\rho\mu_2\mu_3} \\
v_4(\alpha\beta; \gamma\delta) &= 18V_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\nu\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu_3} \Psi_\gamma^{\rho\nu_2\nu_3} \Psi_\delta^{\nu_1\sigma\mu_3} \\
v_5(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -18V_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu} \Psi_\gamma^{\nu_1\nu_2\mu_3} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\rho}
\end{aligned} \tag{IV.115}$$

e

$$\begin{aligned}
h_1^{\text{intra}}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -6H_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\nu} \Psi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu_3} \Psi_\gamma^{\nu_1\nu_2\rho} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\nu_3} \\
h_2^{\text{intra}}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -6H_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu} \Psi_\gamma^{\nu_1\nu_2\mu_3} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\rho} \\
h_3^{\text{intra}}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -6H_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\nu\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu_3} \Psi_\gamma^{\nu_1\nu_2\mu_3} \Psi_\delta^{\sigma\rho\nu_3}.
\end{aligned} \tag{IV.116}$$

Notamos que este é exatamente o mesmo potencial que foi obtido a partir do cálculo com o RGM, revelando uma proximidade nestes dois métodos.

IV.3.4 As Correções de Ortogonalização e a Relação entre Fock-Tani e o RGM

A coincidência entre os dois métodos pode ser investigada em outro nível. Uma das características da formulação do RGM é o processo de renormalização da função de onda. Uma questão pertinente consiste em saber se no potencial bárion-bárion de Fock-Tani, deduzido na subseção anterior, existe uma estrutura em mais alta ordem na transformação capaz de cancelar os termos intra-bariônicos. As *correções de ortogonalização* aparecem como potências do kernel de estado ligado Δ . Como vimos numa situação anterior a presença de termos proporcionais a Δ enfraquecem a interação quark-quark impedindo a formação de novos estados ligados no Hamiltoniano transformado. Mostramos também que a renormalização da soma do termo de partícula única com os termos intra-bariônicos implica no cancelamento dos termos intra-bariônicos renormalizados em todas as ordens. Em particular, no RGM as expressões que cancelam os termos intra-bariônicos da expansão surgem do kernel de normalização em mais baixa ordem:

$$\bar{H}_{\text{RGM}} = N^{-\frac{1}{2}} H_{\text{RGM}} N^{-\frac{1}{2}} \approx H_{\text{RGM}} + N^{(ex)} H_{\text{RGM}} + H_{\text{RGM}} N^{(ex)} + \dots \tag{IV.117}$$

onde no RGM temos para o termo de partícula única, por exemplo, a seguinte expressão

$$T_{\text{RGM}} N^{(ex)} = 9 \Psi_{\alpha}^{*\tau\mu\nu} \Psi_{\beta}^{*\nu_1\nu_2\mu_3} H_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Delta(\sigma\rho\tau; \mu_1\mu_2\nu_3) \Psi_{\gamma}^{\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_{\delta}^{\nu_1\nu_2\nu_3}. \quad (\text{IV.118})$$

Procuramos agora no Fock-Tani uma estrutura semelhante usando as correções de ortogonalização. Para isto escrevemos a seguinte estrutura

$$V_{\text{corr}} = T_{\text{qq}}(\mu) q_{\mu}^{\dagger(1)}(\epsilon) q_{\mu}^{(5)}(\epsilon) + \frac{1}{2} V_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_{\mu}^{\dagger(1)}(\epsilon) q_{\nu}^{\dagger(0)}(\epsilon) q_{\rho}^{(0)}(\epsilon) q_{\sigma}^{(5)}(\epsilon) \quad (\text{IV.119})$$

pode ser obtida no Fock-Tani. Embora haja várias contribuições de quinta ordem para $q_{\mu}^{(5)}(\epsilon)$ a única relevante para este cálculo, obtida da equação (IV.32), é dada por

$$\begin{aligned} q_{\mu}^{(5)}(\epsilon) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_{\gamma}^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^{\dagger(0)}(\epsilon) q_{\mu_3}^{\dagger(0)}(\epsilon) \Delta_{\gamma\beta}^{(4)}(\epsilon) b_{\beta}^{(0)}(\epsilon) \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta(\mu\mu_2\mu_3; \nu_1\nu_2\nu_3) \left[3 \Psi_{\beta}^{\nu_1\nu_2\nu_3} q_{\tau_3}^{\dagger(1)}(\epsilon) q_{\nu_3}^{\dagger(1)}(\epsilon) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \Psi_{\beta}^{\nu_1\tau_2\tau_3} q_{\tau_3}^{\dagger(1)}(\epsilon) q_{\tau_2}^{\dagger(0)}(\epsilon) q_{\nu_2}^{\dagger(0)}(\epsilon) q_{\nu_3}^{\dagger(1)}(\epsilon) \right] b_{\beta}^{(0)}(\epsilon) \end{aligned} \quad (\text{IV.120})$$

Após efetuar algumas manipulações algébricas obtemos a expressão desejada

$$V_{\text{corr}} = 3 \Psi_{\alpha}^{*\tau\mu\nu} \Psi_{\beta}^{*\nu_1\nu_2\mu_3} H_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Delta(\sigma\rho\tau; \mu_1\mu_2\nu_3) \Psi_{\gamma}^{\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_{\delta}^{\nu_1\nu_2\nu_3} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta}^{\dagger} b_{\gamma} b_{\delta} \quad (\text{IV.121})$$

Esta expressão tem a mesma estrutura operatorial que (IV.118), a diferença está no coeficiente numérico. Como existem outras combinações dos operadores de quarks de mesma ordem o coeficiente 3 na frente de (IV.121) irá mudar.

No sentido de comparar o formalismo de Fock-Tani com do RGM construímos um estado de dois bárions ideais

$$|\Lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_{\Lambda}^{\alpha\beta} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta}^{\dagger} |0\rangle \quad (\text{IV.122})$$

onde ϕ é a função de onda relativa para o estado de dois bárions ideais com as seguintes propriedades

$$\phi_{\Lambda}^{\alpha\beta} = -\phi_{\Lambda}^{\beta\alpha} \quad (\text{IV.123})$$

e

$$(\Lambda | \Lambda') = \phi_{\Lambda}^{*\alpha\beta} \phi_{\Lambda'}^{\alpha\beta} = \delta_{\Lambda\Lambda'}. \quad (\text{IV.124})$$

A equação de movimento pode ser obtida minimizando a expressão abaixo

$$\delta_{\phi}(\Lambda |(H_{\text{FT}} - E_{\Lambda})| \Lambda') = 0. \quad (\text{IV.125})$$

lembrando que H_{FT} calculado antes é dado por

$$H_{\text{FT}} = T_{\text{FT}}(\alpha; \beta) b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta} + \frac{1}{2} V_{\text{FT}}(\alpha\beta; \gamma\delta) b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta}^{\dagger} b_{\gamma} b_{\delta}. \quad (\text{IV.126})$$

Após efetuar a contração dos operadores de bárions e minimização da equação (IV.125) obtemos

$$\left[H_{\text{FT}}(\alpha\beta; \gamma\delta) - E_{[\Lambda]} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \right] \phi_{[\Lambda]}^{\gamma\delta} = 0. \quad (\text{IV.127})$$

onde

$$H_{\text{FT}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = 2 \delta_{[\alpha]\delta} \delta_{\beta\gamma} \mathcal{E}_{[\alpha]} + V_{\text{FT}}(\alpha\beta; \gamma\delta). \quad (\text{IV.128})$$

A partir desta equação concluímos que

$$H_{\text{FT}} = H_{\text{RGM}}. \quad (\text{IV.129})$$

Como o problema físico tratado pelos dois métodos é o mesmo, temos que as ordens mais altas da transformação de Fock-Tani que foram incluídas correspondem ao kernel de normalização do RGM.

V.1 Cálculo do Kernel de Normalização

Capítulo V

Algumas Aplicações do Formalismo de Fock-Tani

Neste capítulo vamos apresentar algumas aplicações das equações derivadas nos capítulos anteriores. Na próxima subseção, discutimos o kernel de normalização, o qual ~~joga~~ um papel importante na renormalização e eliminação das interações efetivas.

Na subseção V.2.2 apresentamos a prova de que uma interação microscópica do tipo oscilador harmônico não contribui para o espalhamento bárion-bárion. Este resultado é muito importante, pois indica que possivelmente forças de confinamento não sejam relevantes ao espalhamento. Isto foi demonstrado numericamente por Oka e Yazaki [38] para o caso de um potencial do tipo linear. Isto parece indicar que ocorre uma espécie de “saturação” das forças de confinamento. Isto não acontece para o caso de mésons [44].

Tendo em vista a não contribuição do potencial de confinamento, na seção V.2.1 investigamos o efeito da interação spin-spin da troca de um glúon para o espalhamento NN. Investigamos o efeito da renormalização do potencial NN pelo kernel de normalização e calculamos deslocamentos de fase do espalhamento. Este nosso último cálculo tem o objetivo de comparar o efeito da troca de quarks com a troca de mésons ω do potencial de Bonn. Deve ficar claro que não é nosso objetivo comparar com dados experimentais, mas sim explorar a possibilidade de se obter uma descrição consistente, no sentido de se empregar uma constante de acoplamento g_ω menor que a usada no potencial de Bonn.

V.1 Cálculo do Kernel de Normalização

Este primeiro cálculo tem por objetivo avaliar as correções de mais alta ordem ao potencial bárion-bárion que será apresentado na próxima seção. Isto poderá ser feito mediante o cálculo do kernel de normalização, equação (III.28), apresentada no capítulo sobre o RGM

é

$$N(\alpha\beta; \gamma\delta) = \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - N^{(ex)}(\alpha\beta; \gamma\delta) \quad (V.1)$$

e o termo de troca $N^{(ex)}$ é dado por

$$N^{(ex)}(\alpha\beta; \gamma\delta) = 9\Psi_{\alpha}^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_{\beta}^{*\nu_1\nu_2\nu_3}\Psi_{\gamma}^{\nu_1\nu_2\nu_3}\Psi_{\delta}^{\mu_1\mu_2\mu_3}. \quad (V.2)$$

O procedimento de renormalização implica em efetuar uma expansão em série de (V.1)

$$N^{-\frac{1}{2}} = [1 - N^{(ex)}]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} N^{(ex)} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} N^{2(ex)} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} N^{3(ex)} + \dots \quad (V.3)$$

O cálculo das potências de $N^{(ex)}$ é dado por

$$N^{2(ex)}(\alpha\beta; \gamma\delta) = N^{(ex)}(\alpha\beta; \sigma\rho)N^{(ex)}(\sigma\rho; \gamma\delta) \quad (V.4)$$

$$N^{3(ex)}(\alpha\beta; \gamma\delta) = N^{(ex)}(\alpha\beta; \sigma\rho)N^{(ex)}(\sigma\rho; \xi\eta)N^{(ex)}(\xi\eta; \gamma\delta) \quad (V.5)$$

onde há somas e interações nos índices repetidos. Utilizando a definição da função de onda em (II.40) podemos calcular explicitamente o kernel de normalização. Semelhante à expressão (III.52) do quark Born diagram formalism (QBDF), o $N^{(ex)}$ pode ser decomposto num produto de quatro fatores: $\mathcal{C}$ fator de natureza combinatória que contém uma fase global que surge da anticomutação de operadores fermiônicos, I_{COR} fator de cor, I_{ST} fator de spin-isospin, N_E integral da parte espacial

$$N^{(ex)} = \omega N_E \quad (V.6)$$

onde novamente ω é dado por

$$\omega = \mathcal{C} I_{\text{COR}} I_{\text{ST}}. \quad (V.7)$$

• O cálculo do fator de cor

Da expressão (V.2) vemos que o fator combinatório é simplesmente $\mathcal{C} = 9$. O cálculo da contribuição, para o kernel de normalização, originada pela parte de cor das funções de onda Ψ é

$$I_{\text{COR}} = \frac{1}{36} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \epsilon^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \epsilon^{\nu_1 \nu_2 \mu_3} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \nu_3}. \quad (\text{V.8})$$

A contração dos ϵ em (V.8) pode ser avaliada usando a fórmula conhecida da álgebra tensorial

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{lmk} = \delta^{il} \delta^{jm} - \delta^{im} \delta^{jl}, \quad (\text{V.9})$$

resultando em

$$I_{\text{COR}} = \frac{1}{3} \quad (\text{V.10})$$

assim o produto do fator combinatório com a cor resulta em

$$\mathcal{C} I_{\text{COR}} = 9 \times \frac{1}{3} = 3. \quad (\text{V.11})$$

• O cálculo do fator de spin-isospin

O termo I_{ST} dado por

$$I_{\text{ST}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = \frac{1}{18^2} \chi_{\alpha}^{*\mu_1 \mu_2 \mu_3} \chi_{\beta}^{*\nu_1 \nu_2 \nu_3} \chi_{\gamma}^{\nu_1 \nu_2 \mu_3} \chi_{\delta}^{\mu_1 \mu_2 \nu_3} \quad (\text{V.12})$$

envolve um cálculo um pouco mais elaborado, pois além de precisarmos definir quem são os Clebsch-Gordans χ em (V.12) e depois efetuar a contração nos índices de spin e isospin, precisamos também fixar os índices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ em valores de spin e isospin do núcleon. Por uma questão de clareza estes índices serão acoplados e projetados sobre os estados de spin e isospin totais S e T de dois núcleons, semelhante ao que foi feito no cálculo do QBDF.

Apresentaremos agora uma forma fechada e elegante de determinar I_{ST} bem conhecida na literatura [39], [40]. Em primeiro lugar reescrevemos a expressão (V.12) introduzindo o operador de permutação P_{ij} definido em (III.4), assim

$$\begin{aligned} I_{\text{ST}}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \frac{1}{18^2} P_{\mu_3 \nu_3} \chi_{\alpha}^{*\mu_1 \mu_2 \mu_3} \chi_{\beta}^{*\nu_1 \nu_2 \nu_3} \chi_{\gamma}^{\nu_1 \nu_2 \mu_3} \chi_{\delta}^{\mu_1 \mu_2 \nu_3} \\ &\equiv \langle \chi_A \chi_B | P_{36} | \chi_A \chi_B \rangle. \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

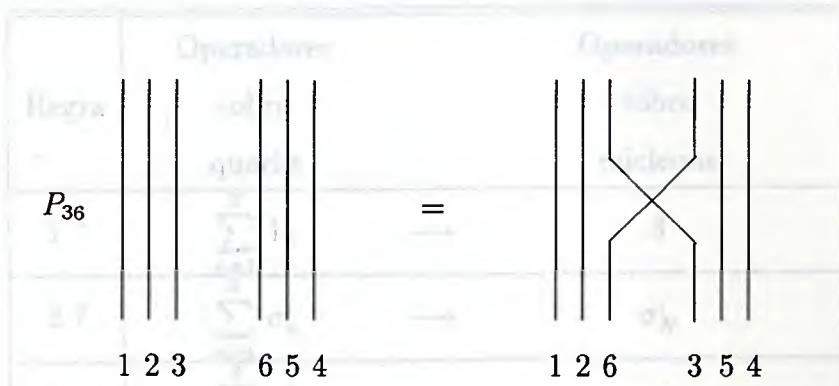


Figura V.1: A ação do operador de permutação sobre o diagrama de bárions permutando o quark 3 com o quark 6

A operação de permutação pode ser esquematicamente representada na figura (V.1)

Sabemos da mecânica quântica [59] que para um sistema de partículas idênticas o operador de permutação pode ser representado por

$$P_{36} = \frac{1}{4} (1 + \tau_3 \cdot \tau_6)(1 + \sigma_3 \cdot \sigma_6). \quad (V.14)$$

A simetria da função de onda do modelo de quarks para o núcleon permite obter um conjunto de regras de substituição. A essência destas regras consiste em projetar os graus de liberdade de spin e isospin em graus de liberdade do núcleon. Estas regras são deduzidas com o requerimento de que os elementos de matriz de spin e isospin são os mesmos tanto atuando no espaço de quarks quanto no espaço de núcleons.

A forma de deduzir estas regras são mostradas no apêndice (B). Como ilustração usaremos dois exemplos bem simples. Primeiro consideremos um único operador quark-núcleon de spin

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sum_{i=1}^3 \sigma_1^i \sigma_2^i. \quad (V.15)$$

Usando a regra nº 5 encontramos

$$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 (-2) = -1. \quad (V.16)$$

Para operadores envolvendo quarks de dois núcleons, as regras de substituição devem ser usadas para cada núcleon separadamente. Assim supondo a configuração de quarks dada

Regra	Operadores sobre quarks	Operadores sobre núcleons
1 ^a	$\sum_{n=1}^3 1_n \longrightarrow$	3
2 ^a	$\sum_{n=1}^3 \sigma_n^i \longrightarrow$	σ_N^i
3 ^a	$\sum_{n=1}^3 \tau_n^a \longrightarrow$	τ_N^a
4 ^a	$\sum_{n=1}^3 \sigma_n^i \tau_n^a \longrightarrow$	$\frac{5}{3} \sigma_N^i \tau_N^a$
5 ^a	$\sum_{n \neq m=1}^3 \sigma_n^i \sigma_m^j \longrightarrow$	$-2 \delta_{ij}$
6 ^a	$\sum_{n \neq m=1}^3 \sigma_n^i \tau_m^j \longrightarrow$	$-\frac{2}{3} \sigma_N^i \tau_N^j$
7 ^a	$\sum_{n \neq m=1}^3 \sigma_n^i \sigma_m^j \tau_n^a \tau_m^b \longrightarrow$	$\frac{10}{3} \delta_{ij} \delta_{ab} - 2 \epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} \sigma_N^k \tau_N^c$

Figura V.2: Regras de substituição para os elementos de matriz de spin e isospin. Os índices n, l, m denotam quarks; i, j, k e a, b, c são as componentes vetoriais de σ e τ respectivamente. pela figura (V.1), onde o núcleon A contém os quarks (123) e o núcleon (B) os quarks (456), o operador

$$(\tau_1 \cdot \tau_4)(\sigma_1 \cdot \sigma_4)(\tau_3 \cdot \tau_6)(\sigma_3 \cdot \sigma_6) = \sum_{ijab} \sigma_1^i \sigma_3^j \tau_1^a \tau_3^b \sigma_4^i \sigma_6^j \tau_4^a \tau_6^b \tag{V.17}$$

deve ser substituído, de acordo com a regra nº 7, por

$$\sum_{ijklabcd} \frac{1}{6} \left(\frac{10}{3} \delta_{ij} \delta_{ab} - 2 \epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} \sigma_N^k \tau_N^c \right) \times \frac{1}{6} \left(\frac{10}{3} \delta_{ij} \delta_{ab} - 2 \epsilon_{ijl} \epsilon_{abd} \sigma_N^l \tau_N^d \right) \tag{V.18}$$

resultando finalmente em

$$\frac{25}{9} + \frac{4}{9} (\tau_A \cdot \tau_B)(\sigma_A \cdot \sigma_B) \tag{V.19}$$

que é o operador de spin-isospin para os dois núcleons A e B. A presença do fator 1/6 em (V.16) e (V.18) é devido ao fato das regras usadas envolverem uma soma sobre todos as seis possíveis combinações de pares de quarks.

Podemos, então, retornar ao cálculo da parte operatorial de (V.13)

$$P_{36} = \frac{1}{4} \left[1_3 1_6 + \tau_3^a \tau_6^a + \sigma_3^i \sigma_6^i + \tau_3^a \tau_6^a \sigma_3^i \sigma_6^i \right]. \quad (\text{V.20})$$

Para realizar este cálculo vamos usar as regras 1-4,

$$\begin{aligned} 1_3 1_6 &\longrightarrow \left(\frac{1}{3} \times 3 \right) \times \left(\frac{1}{3} \times 3 \right) = 1 \\ \tau_3^a &\longrightarrow \frac{1}{3} \tau_N^a \\ \sigma_3^i &\longrightarrow \frac{1}{3} \sigma_N^i \\ \sigma_3^i \tau_3^a &\longrightarrow \frac{5}{9} \sigma_N^i \tau_N^a. \end{aligned} \quad (\text{V.21})$$

Colocando este resultado em (V.20) encontramos

$$P_{36} \longrightarrow \Theta \equiv \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{9} \tau_A \cdot \tau_B + \frac{1}{9} \left(1 + \frac{25}{9} \tau_A \cdot \tau_B \right) \sigma_A \cdot \sigma_B \right]. \quad (\text{V.22})$$

Desta forma o elemento de matriz $I_{ST}(\alpha\beta; \gamma\delta)$ pode ser substituído pela respectiva expressão operatorial Θ dada por (V.22), resultando na forma final para ω

$$\omega = 3 \Theta, \quad (\text{V.23})$$

e assim

$$\omega^{TS} = 3 \langle T S | \Theta | T S \rangle. \quad (\text{V.24})$$

No caso da interação NN os canais de onda- S , $T = 1$ e $S = 0$, $T = 0$ e $S = 1$ obtemos

$$\omega^{T=1, S=0} = \omega^{T=0, S=1} = 3 \times \left(-\frac{1}{27} \right) = -\frac{1}{9}. \quad (\text{V.25})$$

• O cálculo da parte espacial

Passaremos agora ao cálculo das integrais espaciais. A expressão para a parte espacial será avaliada considerando a definição de função de onda usada pelo QBDF, isto é, a gaussiana dada pela equação (II.46). Assim temos

$$\begin{aligned} N_E(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) &= \delta(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}_\delta) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\alpha) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\beta) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\delta) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\delta) \\ &\times \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 |\phi(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)|^2 |\phi(\mathbf{p}_2)|^2 |\phi(\mathbf{p}_3)|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times |\phi(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_1)|^2 |\phi(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_\delta)|^2 |\phi(\mathbf{p}_\delta - \mathbf{p}_1)|^2 \\
& = b^3 \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{3/2} \delta(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}_\delta) \\
& \times \exp \left(-\frac{b^2 p_\alpha^2}{2} - \frac{b^2 p_\beta^2}{4} + \frac{b^2 p_\gamma^2}{6} - \frac{7b^2 p_\delta^2}{12} \right) \\
& \times \exp \left(b^2 \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{p}_\delta + \frac{b^2 \mathbf{p}_\beta \cdot \mathbf{p}_\delta}{2} - \frac{b^2 \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{p}_\beta}{3} \right). \quad (\text{V.26})
\end{aligned}$$

Na expressão (V.26) os momentos $(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta)$ podem ser escritos em termos de variáveis do centro de massa $(\mathbf{p}, -\mathbf{p}, -\mathbf{p}', \mathbf{p}')$, chegando numa forma simplificada e muito útil para a parte espacial do kernel de normalização

$$N_E(\mathbf{p}, -\mathbf{p}, -\mathbf{p}', \mathbf{p}') = b^3 \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{3/2} \delta(0) \exp \left[-\frac{5b^2}{12}(p^2 + p'^2) + \frac{b^2}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' \right] \equiv \delta(0) N^{(ex)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \quad (\text{V.27})$$

onde

$$N^{(ex)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv b^3 \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{5b^2}{12}(p^2 + p'^2) + \frac{b^2}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' \right]. \quad (\text{V.28})$$

O cálculo de $N^{2(ex)}$ segue de forma direta. O fator combinatório vezes cor, spin-isospin é apenas o quadrado de (V.23). Já a parte espacial é um pouco mais complicada por envolver uma integração nos momentos de centro de massa, isto é,

$$\begin{aligned}
N^{2(ex)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \int d\mathbf{q} N^{(ex)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) N^{(ex)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}') \\
&= b^3 \left(\frac{27}{40\pi} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{41b^2}{120}(p^2 + p'^2) + \frac{3b^2}{20} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' \right]. \quad (\text{V.29})
\end{aligned}$$

Aparentemente não há nenhuma padrão relacionando $N^{(ex)}$ com $N^{2(ex)}$. No sentido de encontrar um padrão calculamos as potências de $N^{(ex)}$ até ordem 5. Encontramos uma estrutura geral para a solução de ordem n que é da forma

$$N^{n(ex)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \left(\frac{b}{\sqrt{\pi}} \right)^3 C_n^{3/2} \exp \left[-b^2 A_n (p^2 + p'^2) + b^2 B_n \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' \right] \quad (\text{V.30})$$

e os valores para os coeficientes A_n, B_n, C_n estão listados na tabela (V.3).

Observamos por este cálculo que existe um padrão quando $n \rightarrow \infty$:

$$A_n \rightarrow \frac{1}{3} \quad (\text{V.31})$$

$$B_n \rightarrow 0 \quad (\text{V.32})$$

$$C_n \rightarrow \frac{2}{3} \quad (\text{V.33})$$

n	A_n	B_n	C_n
1	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
2	$\frac{41}{120}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{27}{40}$
3	$\frac{365}{1092}$	$\frac{9}{182}$	$\frac{243}{364}$
4	$\frac{3281}{9840}$	$\frac{27}{1640}$	$\frac{2187}{3280}$
5	$\frac{29525}{88572}$	$\frac{81}{14762}$	$\frac{19683}{29524}$

Figura V.3: Valores para os coeficientes das potências de $N^{(ex)}$

assim podemos escrever uma forma limite para a série

$$N_L(p,p') \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} N^{n(ex)}(p,p') = b^3 \left(\frac{2}{3\pi}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{b^2}{3}(p^2 + p'^2)\right]. \tag{V.34}$$

Ainda não temos uma forma fechada para a série dada em (V.3) e talvez não seja possível efetuar esta soma. No entanto, podemos introduzir uma aproximação na expansão que permitirá realizar este cálculo. Assim em (V.3) temos (afora uma $\delta(0)$ global)

$$\begin{aligned} N^{-\frac{1}{2}} &= [1 - N^{(ex)}]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\omega N^{(ex)} + \frac{3}{8}\omega^2 N^{2(ex)} + \frac{15}{48}\omega^3 N^{3(ex)} + \dots \\ &\approx 1 + N^{(ex)}(p,p') \left[\frac{1}{2}\omega + \frac{3}{8}\omega^2 + \frac{15}{48}\omega^3 + \dots\right]. \end{aligned} \tag{V.35}$$

↑

hipótese

Precisamos testar a qualidade desta aproximação e para isto basta fazer uma comparação entre cada termo da linha de cima de (V.35) da expansão usual com o respectivo de termo de mesma ordem da aproximação na linha de baixo de (V.35), isto é,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega N^{(ex)} &\longrightarrow \frac{1}{2}\omega N^{(ex)} \\ \frac{3}{8}\omega^2 N^{2(ex)} &\longrightarrow \frac{3}{8}\omega^2 N^{(ex)} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{V.36}$$

O resultado desta comparação é representado graficamente, onde foi tomado por simplicidade $|p| = |p'| = 1/b^2$, ângulo entre p e p' igual a zero e $\omega = -1/9$.

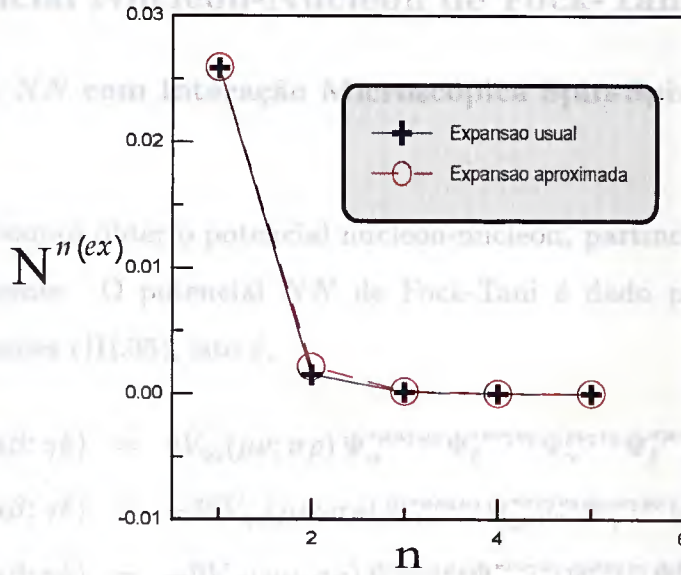


Figura V.4: Comparação entre a expansão usual e a aproximada

Este resultado nos mostra o quanto cada termo da aproximação se afasta do termo correto da expansão usual. O resultado gráfico revela que esta diferença é quase indistinguível a medida que n cresce, o que revela que a aproximação que usamos é boa. A série que obtivemos, com a aproximação, pode ser somada. Para isto basta somar e subtrair 1 dentro dos colchetes da última linha de (V.35) obtendo uma forma fechada para representar o kernel de normalização

$$\begin{aligned}
 N^{-\frac{1}{2}} &\approx 1 + N^{(ex)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \left[-1 + 1 + \frac{1}{2} \omega + \frac{3}{8} \omega^2 + \frac{15}{48} \omega^3 + \dots \right] \\
 &= 1 + \varpi N^{(ex)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')
 \end{aligned}
 \tag{V.37}$$

onde

$$\varpi \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \omega}} - 1.
 \tag{V.38}$$

Na próxima seção usaremos este resultado no cálculo do potencial núcleon-núcleon de Fock-Tani renormalizado.

V.2 O Potencial Núcleon-Núcleon de Fock-Tani

V.2.1 Potencial NN com Interação Microscópica Spin-Spin

Nesta subseção vamos obter o potencial núcleon-núcleon, partindo da estrutura formal deduzida anteriormente. O potencial NN de Fock-Tani é dado pelos diagramas inter-bariônicos das equações (III.35), isto é,

$$\begin{aligned}
 v_1(\alpha\beta; \gamma\delta) &= 9V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu\nu_2\nu_3} \Psi_\gamma^{\rho\nu_2\nu_3} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} \\
 v_2(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -36V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu\nu_2\nu_3} \Psi_\gamma^{\rho\nu_2\mu_3} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\nu_3} \\
 v_3(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -9V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu\nu_2\nu_3} \Psi_\gamma^{\sigma\nu_2\nu_3} \Psi_\delta^{\rho\mu_2\mu_3} \\
 v_4(\alpha\beta; \gamma\delta) &= 18V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\nu\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu_3} \Psi_\gamma^{\rho\nu_2\nu_3} \Psi_\delta^{\nu_1\sigma\mu_3} \\
 v_5(\alpha\beta; \gamma\delta) &= -18V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{*\nu_1\nu_2\nu} \Psi_\gamma^{\nu_1\nu_2\mu_3} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\rho}, \quad (V.39)
 \end{aligned}$$

onde V_{qq} é a interação microscópica entre os quarks e Ψ a função de onda do estado ligado. No caso que iremos estudar, a interação V_{qq} é de spin-spin entre quarks definida em (III.50):

$$V_{qq}(\mathbf{p}) = -k_{ss} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \mathcal{F}_i^a \mathcal{F}_j^a. \quad (V.40)$$

Cada termo v_i de (V.39) será, como no caso do QBDF, um produto de quatro termos: $\mathcal{C}(i)$ fator que absorve o sinal de (V.40) e um fator de natureza combinatória oriunda da anticomutação de operadores fermiônicos, uma parte de cor $I_{\text{COR}}(i)$, uma parte de spin-isospin $I_{\text{ST}}(i)$ e uma parte espacial I_i

$$v_i = \omega_i I_i. \quad (V.41)$$

onde

$$\omega_i = \mathcal{C}(i) I_{\text{COR}}(i) I_{\text{ST}}(i). \quad (V.42)$$

• O cálculo do fator de cor

O fator $\mathcal{C}$ para cada um dos diagramas é simplesmente

$$\mathcal{C}(1, \dots, 5) = (-9, 36, 9, -18, 18). \quad (\text{V.43})$$

Cada termo de (V.39) gera um fator de cor e estes podem ser calculados facilmente, usando a seguinte propriedade das matrizes do $SU(N)$

$$M_{\mu\sigma}^a M_{\nu\rho}^a = 2\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - f \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} \quad \text{com} \quad f = \begin{cases} 1, & \text{se } M^a = \sigma^a, (a = 1, 2, 3) \\ \frac{2}{3}, & \text{se } M^a = \lambda^a, (a = 1, \dots, 8) \end{cases} \quad (\text{V.44})$$

Assim encontramos

$$\begin{aligned} I_{\text{COR}}(1) &= \frac{1}{36} \mathcal{F}_{\mu\sigma}^a \mathcal{F}_{\nu\rho}^a \epsilon^{\mu\mu_2\mu_3} \epsilon^{\nu\nu_2\nu_3} \epsilon^{\rho\nu_2\nu_3} \epsilon^{\sigma\mu_2\mu_3} = 0 \\ I_{\text{COR}}(2) &= \frac{1}{36} \mathcal{F}_{\mu\sigma}^a \mathcal{F}_{\nu\rho}^a \epsilon^{\mu\mu_2\mu_3} \epsilon^{\nu\nu_2\nu_3} \epsilon^{\rho\nu_2\mu_3} \epsilon^{\sigma\mu_2\nu_3} = \frac{1}{9} \\ I_{\text{COR}}(3) &= \frac{1}{36} \mathcal{F}_{\mu\sigma}^a \mathcal{F}_{\nu\rho}^a \epsilon^{\mu\mu_2\mu_3} \epsilon^{\nu\nu_2\nu_3} \epsilon^{\sigma\nu_2\nu_3} \epsilon^{\rho\mu_2\mu_3} = \frac{4}{9} \\ I_{\text{COR}}(4) &= \frac{1}{36} \mathcal{F}_{\mu\sigma}^a \mathcal{F}_{\nu\rho}^a \epsilon^{\mu\nu\mu_3} \epsilon^{\nu_1\nu_2\nu_3} \epsilon^{\rho\nu_2\nu_3} \epsilon^{\nu_1\sigma\mu_3} = \frac{2}{9} \\ I_{\text{COR}}(5) &= \frac{1}{36} \mathcal{F}_{\mu\sigma}^a \mathcal{F}_{\nu\rho}^a \epsilon^{\mu\mu_2\mu_3} \epsilon^{\nu_1\nu_2\nu} \epsilon^{\nu_1\nu_2\mu_3} \epsilon^{\sigma\mu_2\rho} = -\frac{2}{9}. \end{aligned} \quad (\text{V.45})$$

O produto do fator combinatório pelo respectivo fator de cor fornece

$$\mathcal{C} I_{\text{COR}}(1, \dots, 5) = (0, 4, 4, -4, -4). \quad (\text{V.46})$$

O zero no primeiro fator (V.46) deve-se novamente ao fato de um glúon estar sendo trocado entre dois objetos brancos.

• O cálculo do fator de spin-isospin

A parte de spin e isospin de cada diagrama é dada por

$$\begin{aligned} I_{\text{ST}}(1) &= \frac{1}{18^2} S_{s_\mu s_\sigma}^i S_{s_\nu s_\rho}^i \delta_{t_\mu t_\sigma} \delta_{t_\nu t_\rho} \chi_\alpha^{I_\mu I_{\mu_2} I_{\mu_3}} \chi_\beta^{I_\nu I_{\nu_2} I_{\nu_3}} \chi_\gamma^{I_\rho I_{\nu_2} I_{\nu_3}} \chi_\delta^{I_\sigma I_{\mu_2} I_{\mu_3}} \\ I_{\text{ST}}(2) &= \frac{1}{18^2} S_{s_\mu s_\sigma}^i S_{s_\nu s_\rho}^i \delta_{t_\mu t_\sigma} \delta_{t_\nu t_\rho} \chi_\alpha^{I_\mu I_{\mu_2} I_{\mu_3}} \chi_\beta^{I_\nu I_{\nu_2} I_{\nu_3}} \chi_\gamma^{I_\rho I_{\nu_2} I_{\mu_3}} \chi_\delta^{I_\sigma I_{\mu_2} I_{\nu_3}} \\ I_{\text{ST}}(3) &= \frac{1}{18^2} S_{s_\mu s_\sigma}^i S_{s_\nu s_\rho}^i \delta_{t_\mu t_\sigma} \delta_{t_\nu t_\rho} \chi_\alpha^{I_\mu I_{\mu_2} I_{\mu_3}} \chi_\beta^{I_\nu I_{\nu_2} I_{\nu_3}} \chi_\gamma^{I_\sigma I_{\nu_2} I_{\nu_3}} \chi_\delta^{I_\rho I_{\mu_2} I_{\mu_3}} \\ I_{\text{ST}}(4) &= \frac{1}{18^2} S_{s_\mu s_\sigma}^i S_{s_\nu s_\rho}^i \delta_{t_\mu t_\sigma} \delta_{t_\nu t_\rho} \chi_\alpha^{I_\mu I_\nu I_{\mu_3}} \chi_\beta^{I_{\nu_1} I_{\nu_2} I_{\nu_3}} \chi_\gamma^{I_\rho I_{\nu_2} I_{\nu_3}} \chi_\delta^{I_{\nu_1} I_\sigma I_{\mu_3}} \\ I_{\text{ST}}(5) &= \frac{1}{18^2} S_{s_\mu s_\sigma}^i S_{s_\nu s_\rho}^i \delta_{t_\mu t_\sigma} \delta_{t_\nu t_\rho} \chi_\alpha^{I_\mu I_{\mu_2} I_{\mu_3}} \chi_\beta^{I_{\nu_1} I_{\nu_2} I_\nu} \chi_\gamma^{I_{\nu_1} I_{\nu_2} I_{\mu_3}} \chi_\delta^{I_\sigma I_{\mu_2} I_\rho}. \end{aligned} \quad (\text{V.47})$$

Cada termo de (V.47) pode ser representado por uma expressão similar àquela mostrada na equação (V.13)

$$\begin{aligned}
 I_{ST}(1) &= \frac{1}{4} \langle \chi_A \chi_B | \sigma_3 \cdot \sigma_6 | \chi_A \chi_B \rangle \\
 I_{ST}(2) &= \frac{1}{4} \langle \chi_A \chi_B | P_{36} \sigma_1 \cdot \sigma_4 | \chi_A \chi_B \rangle \\
 I_{ST}(3) &= \frac{1}{4} \langle \chi_A \chi_B | P_{36} \sigma_3 \cdot \sigma_6 | \chi_A \chi_B \rangle \\
 I_{ST}(4) &= \frac{1}{4} \langle \chi_A \chi_B | P_{36} \sigma_2 \cdot \sigma_6 | \chi_A \chi_B \rangle \\
 I_{ST}(5) &= \frac{1}{4} \langle \chi_A \chi_B | P_{36} \sigma_2 \cdot \sigma_3 | \chi_A \chi_B \rangle
 \end{aligned} \tag{V.48}$$

onde pelas regras de substituição encontramos

$$\begin{aligned}
 \sigma_3 \cdot \sigma_6 &\longrightarrow \Theta_1 = \frac{1}{9} \tau_A \cdot \tau_B \\
 P_{36} \sigma_1 \cdot \sigma_4 &\longrightarrow \Theta_2 = \frac{1}{12} \left[\left(1 + \frac{1}{9} \tau_A \cdot \tau_B \right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{9} \tau_A \cdot \tau_B \right) \sigma_A \cdot \sigma_B \right] \\
 P_{36} \sigma_3 \cdot \sigma_6 &\longrightarrow \Theta_3 = \frac{3}{4} \left[\left(1 + \frac{1}{9} \tau_A \cdot \tau_B \right) - \frac{1}{27} \left(1 + \frac{25}{9} \tau_A \cdot \tau_B \right) \sigma_A \cdot \sigma_B \right] \\
 P_{36} \sigma_2 \cdot \sigma_6 &\longrightarrow \Theta_4 = -\frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{1}{9} \tau_A \cdot \tau_B \right) - \frac{1}{9} \left(1 - \frac{5}{9} \tau_A \cdot \tau_B \right) \sigma_A \cdot \sigma_B \right] \\
 P_{36} \sigma_2 \cdot \sigma_3 &\longrightarrow \Theta_5 = \Theta_4.
 \end{aligned} \tag{V.49}$$

Desta forma, fazendo o produto do fator 1/4 de (V.48) com (V.49) e depois multiplicando por (V.46) encontramos o resultado para ω_i

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= 0 \\
 \omega_2 &= \frac{1}{12} \left[\left(1 + \frac{1}{9} \tau_A \cdot \tau_B \right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{9} \tau_A \cdot \tau_B \right) \sigma_A \cdot \sigma_B \right] \\
 \omega_3 &= \frac{3}{4} \left[\left(1 + \frac{1}{9} \tau_A \cdot \tau_B \right) - \frac{1}{27} \left(1 + \frac{25}{9} \tau_A \cdot \tau_B \right) \sigma_A \cdot \sigma_B \right] \\
 \omega_4 &= \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{1}{9} \tau_A \cdot \tau_B \right) - \frac{1}{9} \left(1 - \frac{5}{9} \tau_A \cdot \tau_B \right) \sigma_A \cdot \sigma_B \right] \\
 \omega_5 &= \omega_4.
 \end{aligned} \tag{V.50}$$

Novamente podemos calcular o valor de ω no estado de spin e isospin total

$$\omega_i^{TS} = \langle TS | \omega_i | TS \rangle \tag{V.51}$$

obtendo a seguinte tabela

	ω_1^{TS}	ω_2^{TS}	ω_3^{TS}	ω_4^{TS}	ω_5^{TS}
$T = 1, S = 1$	0	$\frac{10}{81}$	$\frac{59}{81}$	$\frac{17}{81}$	$\frac{17}{81}$
$T = 1, S = 0$	0	0	$\frac{31}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{7}{27}$
$T = 0, S = 1$	0	$\frac{2}{27}$	$\frac{19}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{7}{27}$
$T = 0, S = 0$	0	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$

Estes valores são os mesmos que foram obtidos pelo “quark Born diagram formalism” para os respectivos canais de spin e isospin da interação NN .

• O cálculo da parte espacial da interação NN

A parte espacial do potencial núcleon-núcleon de Fock-Tani envolve uma integração multi-dimensional nas funções de onda acopladas nas variáveis de momento. A forma geral para estas integrais é

$$\begin{aligned}
 I_1(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) &= \delta(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}_\delta) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\alpha) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\beta) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\delta) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\delta) \\
 &\times V_{qq}(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_\delta) \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 |\phi(\mathbf{p}_1)|^2 |\phi(\mathbf{p}_2)|^2 |\phi(\mathbf{p}_3)|^2 |\phi(\mathbf{p}_4)|^2 \\
 &\times \phi^*(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \phi^*(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \phi(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\delta - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \\
 &\times \phi(\mathbf{p}_\delta - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) &= \delta(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}_\delta) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\alpha) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\beta) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\delta) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\delta) \\
 &\times \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 V_{qq}(\mathbf{p}_4) |\phi(\mathbf{p}_1)|^2 |\phi(\mathbf{p}_2)|^2 |\phi(\mathbf{p}_3)|^2 \\
 &\times \phi^*(\mathbf{p}_\delta - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4) \phi^*(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \phi(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) \\
 &\times \phi(\mathbf{p}_\delta - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) |\phi(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_\delta + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4)|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) &= \delta(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}_\delta) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\alpha) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\beta) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\delta) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\delta) \\
 &\times \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 V_{qq}(\mathbf{p}_4) |\phi(\mathbf{p}_1)|^2 |\phi(\mathbf{p}_2)|^2 |\phi(\mathbf{p}_3)|^2 \\
 &\times \phi^*(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \phi^*(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\delta - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \\
 &\times \phi(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\delta - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \phi(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4) \\
 &\times |\phi(-\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\delta + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4)|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_4(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) &= \delta(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}_\delta) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\alpha) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\beta) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\delta) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\delta) \\
 &\times \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 V_{qq}(\mathbf{p}_4) \phi^*(\mathbf{p}_1) |\phi(\mathbf{p}_2)|^2 |\phi(\mathbf{p}_3)|^2 \\
 &\times \phi(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_4) \phi(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) \phi(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times |\phi(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\delta - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4)|^2 \\
& \times |\phi(-\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\delta + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_4)|^2 \\
I_5(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) &= \delta(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}_\delta) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\alpha) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\beta) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\delta) \mathcal{N}(\mathbf{p}_\delta) \\
& \times \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 V_{qq}(\mathbf{p}_4) |\phi(\mathbf{p}_1)|^2 |\phi(\mathbf{p}_2)|^2 |\phi(\mathbf{p}_3)|^2 \\
& \times \phi^*(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) \phi^*(-\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\delta + \mathbf{p}_3) \\
& \times \phi(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \phi(-\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\delta + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) \\
& \times |\phi(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\delta - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)|^2
\end{aligned} \tag{V.52}$$

O cálculo destas integrais pode ser simplificado pela escolha de funções de onda gaussianas para os quarks. O resultado destas integrais é dado a seguir

$$\begin{aligned}
I_1(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) &= b^3 \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{3/2} V_{qq}(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_\delta) \delta(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}_\delta) \\
& \times \exp \left(-\frac{b^2 p_\alpha^2}{2} - \frac{b^2 p_\beta^2}{6} + \frac{b^2 p_\gamma^2}{6} - \frac{b^2 p_\delta^2}{2} \right) \\
& \times \exp \left(b^2 \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{p}_\delta + \frac{b^2 \mathbf{p}_\beta \cdot \mathbf{p}_\delta}{3} - \frac{b^2 \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{p}_\beta}{3} \right) \\
I_2(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) &= N_E(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) f_2(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) \\
I_3(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) &= N_E(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) f_3(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) \\
I_4(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) &= N_E(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) f_4(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) \\
I_5(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) &= N_E(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) f_5(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta)
\end{aligned} \tag{V.53}$$

onde N_E é a parte espacial do kernel de normalização dada por (V.26) e as funções f_i são integrais que envolvem o potencial quark-quark V_{qq} :

$$\begin{aligned}
f_2(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) &= \int d\mathbf{q} V_{qq}(\mathbf{q}) \exp \left[-b^2 q^2 + b^2 \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_\delta) \right] \\
f_3(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) &= \int d\mathbf{q} V_{qq}(\mathbf{q}) \exp \left[-\frac{3b^2}{4} q^2 + \frac{b^2}{2} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\delta) \right] \\
f_4(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) &= \int d\mathbf{q} V_{qq}(\mathbf{q}) \exp \left[-\frac{11b^2}{16} q^2 + b^2 \mathbf{q} \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}_\alpha + \frac{1}{4} \mathbf{p}_\beta - \frac{3}{4} \mathbf{p}_\delta \right) \right] \\
f_5(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta) &= \int d\mathbf{q} V_{qq}(\mathbf{q}) \exp \left[-\frac{11b^2}{16} q^2 + b^2 \mathbf{q} \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}_\alpha - \frac{1}{4} \mathbf{p}_\beta - \frac{1}{4} \mathbf{p}_\delta \right) \right].
\end{aligned} \tag{V.54}$$

Uma simplificação adicional ocorre se novamente considerarmos as variáveis $(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_\delta)$ escritas em termos de variáveis do centro de massa $(\mathbf{p}, -\mathbf{p}, -\mathbf{p}', \mathbf{p}')$. Quando isto é feito

toda a dependência nos momentos é reduzida a uma dependência em termos de $(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ e as equações (V.53), (V.54) podem ser escritas assim (afora uma $\delta(0)$ global)

$$\begin{aligned} v_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &\equiv b^3 \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{3/2} V_{qq}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \exp \left[-\frac{b^2}{3} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 \right] \\ v_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &\equiv N^{(ex)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \\ v_3(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &\equiv N^{(ex)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f_3(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \\ v_4(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &\equiv N^{(ex)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f_4(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \\ v_5(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &\equiv N^{(ex)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f_5(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \end{aligned} \quad (\text{V.55})$$

onde as funções f_i são reduzidas a

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \int d\mathbf{q} V_{qq}(\mathbf{q}) \exp \left[-b^2 q^2 + b^2 \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \right] \\ f_3(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \int d\mathbf{q} V_{qq}(\mathbf{q}) \exp \left[-\frac{3b^2}{4} q^2 - \frac{b^2}{2} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{p}') \right] \\ f_4(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \int d\mathbf{q} V_{qq}(\mathbf{q}) \exp \left[-\frac{11b^2}{16} q^2 + \frac{b^2}{4} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} - 3\mathbf{p}') \right] \\ f_5(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= f_4(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (\text{V.56})$$

Estas integrais podem ser calculadas quando o potencial microscópico V_{qq} for dado pela interação spin-spin (V.40), resultando em

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= k_{ss} \left(\frac{\pi}{b^2} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{b^2}{4} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 \right] \\ f_3(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= k_{ss} \left(\frac{4\pi}{3b^2} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{b^2}{12} (\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2 \right] \\ f_4(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= k_{ss} \left(\frac{16\pi}{11b^2} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{b^2}{44} (\mathbf{p} - 3\mathbf{p}')^2 \right] \\ f_5(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= f_4(\mathbf{p}', \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (\text{V.57})$$

• A expressão final para o potencial NN

A forma final para o potencial núcleon-núcleon de Fock-Tani é obtido substituindo (V.57) em (V.56) e depois em (V.55). Este resultado é multiplicado pelos coeficientes ω_i fornecendo o potencial NN . Na sua forma geral temos

$$\begin{aligned} V_{NN} &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{Q} d\mathbf{Q}' d\mathbf{p} d\mathbf{p}' \delta(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}') \langle \zeta_2 \zeta_1 | V_{NN}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') | \zeta_3 \zeta_4 \rangle \\ &\quad \times b_{\zeta_1}^\dagger(\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2) b_{\zeta_2}^\dagger(-\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2) b_{\zeta_3}(-\mathbf{p}' + \mathbf{Q}'/2) b_{\zeta_4}(\mathbf{p}' + \mathbf{Q}'/2) \end{aligned} \quad (\text{V.58})$$

onde Q é o momento total de centro de massa, $\zeta \equiv (m_s, m_t)$,

$$V_{NN}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sum_{i=1}^5 \omega_i v_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \quad (\text{V.59})$$

e

$$\begin{aligned} v_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= v_3(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = k_{ss} \exp \left[-\frac{b^2}{3} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 \right] \\ v_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= k_{ss} \left(\frac{3}{4} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{b^2}{6} (\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2) \right] \\ v_4(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= v_5(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = k_{ss} \left(\frac{12}{11} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{2b^2}{11} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 - \frac{b^2}{33} (\mathbf{p}^2 + 7\mathbf{p}'^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{V.60})$$

Um potencial local pode ser obtido a partir de (V.60) pelo procedimento mostrado no apêndice D. Assim a transformada de Fourier de (D.9) fornece esta expressão como função da posição

$$V_{NN}(r) = \sum_{i=1}^5 \omega_i \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} v_i(s \rightarrow 4m^2 + \mathbf{q}^2, t \rightarrow -\mathbf{q}^2). \quad (\text{V.61})$$

A forma final para o potencial NN local fica

$$\begin{aligned} v_1(r) &= v_3(r) = k_{ss} \left(\frac{\sqrt{3\pi}}{b} \right)^3 \exp \left[-\frac{3}{4b^2} r^2 \right] \\ v_2(r) &= k_{ss} \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{b} \right)^3 \exp \left[-\frac{3}{b^2} r^2 \right] \\ v_4(r) &= v_5(r) = k_{ss} \left(\frac{3\sqrt{2\pi}}{2b} \right)^3 \exp \left[-\frac{33}{32b^2} r^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{V.62})$$

• A expressão final para o potencial NN renormalizado

A forma final para o potencial núcleon-núcleon de Fock-Tani renormalizado é obtido aplicando a expressão para o kernel de normalização (V.37) sobre (V.59)

$$\begin{aligned} \bar{V}_{NN}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \int d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \left[1 + \varpi N^{(ex)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] V_{NN}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \left[1 + \varpi N^{(ex)}(\mathbf{q}', \mathbf{p}') \right] \\ &= k_{ss} \sum_{i=1}^{20} \bar{C}_i \exp \left[-b^2 (\bar{A}_i p^2 + \bar{A}'_i p'^2) + b^2 \bar{B}_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' \right] \end{aligned} \quad (\text{V.63})$$

e os valores para os coeficientes $\bar{A}_i, \bar{A}'_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i$ estão listados na tabela (V.5).

Um potencial local equivalente pode ser obtido a partir de (V.63) por um procedimento similar a (V.61)

$$\bar{V}_{NN}(r) = \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \bar{V}_{NN}(s \rightarrow 4m^2 + \mathbf{q}^2, t \rightarrow -\mathbf{q}^2) = \frac{k_{ss}}{b^3} \sum_{i=1}^{20} \alpha_i \exp \left[-\beta_i \frac{r^2}{b^2} \right]. \quad (\text{V.64})$$

i	$\overline{A}_i$	$\overline{A}'_i$	$\overline{B}_i$	$\overline{C}_i$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	ω_1
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} \omega_2$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	ω_3
4	$\frac{7}{33}$	$\frac{13}{33}$	$\frac{4}{11}$	$\left(\frac{12}{11}\right)^{3/2} \omega_4$
5	$\frac{7}{33}$	$\frac{13}{33}$	$\frac{4}{11}$	$\left(\frac{12}{11}\right)^{3/2} \omega_5$
6	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\varpi \omega_1$
7	$\frac{13}{42}$	$\frac{1}{6}$	0	$\left(\frac{9}{7}\right)^{3/2} \varpi \omega_2$
8	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\varpi \omega_3$
9	$\frac{79}{249}$	$\frac{85}{249}$	$\frac{12}{83}$	$\left(\frac{99\pi}{83}\right)^{3/2} \varpi \omega_4$
10	$\frac{109}{321}$	$\frac{55}{321}$	$\frac{12}{107}$	$\left(\frac{99\pi}{107}\right)^{3/2} \varpi \omega_5$

i	$\overline{A}_i$	$\overline{A}'_i$	$\overline{B}_i$	$\overline{C}_i$
11	$\frac{5}{27}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\varpi \omega_1$
12	$\frac{1}{6}$	$\frac{13}{42}$	0	$\left(\frac{9}{7}\right)^{3/2} \varpi \omega_2$
13	$\frac{5}{27}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\varpi \omega_3$
14	$\frac{85}{249}$	$\frac{79}{249}$	$\frac{12}{83}$	$\left(\frac{99\pi}{83}\right)^{3/2} \varpi \omega_4$
15	$\frac{55}{321}$	$\frac{109}{321}$	$\frac{12}{107}$	$\left(\frac{99\pi}{107}\right)^{3/2} \varpi \omega_5$
16	$\frac{61}{195}$	$\frac{61}{195}$	$\frac{6}{65}$	$\left(\frac{81}{65}\right)^{3/2} \varpi^2 \omega_1$
17	$\frac{13}{42}$	$\frac{13}{42}$	0	$\left(\frac{81}{49}\right)^{3/2} \varpi^2 \omega_2$
18	$\frac{61}{195}$	$\frac{61}{195}$	$\frac{6}{65}$	$\left(\frac{81}{65}\right)^{3/2} \varpi^2 \omega_3$
19	$\frac{703}{2265}$	$\frac{703}{2265}$	$\frac{36}{755}$	$\left(\frac{81\pi}{755}\right)^{3/2} \varpi^2 \omega_4$
20	$\frac{703}{2265}$	$\frac{703}{2265}$	$\frac{36}{755}$	$\left(\frac{81}{755}\right)^{3/2} \varpi^2 \omega_5$

Figura V.5: Valores para os coeficientes de $\overline{V}_{NN}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$

Os valores para os coeficientes α_i e β_i estão listados na tabela (V.6). Gráficos comparativos entre o potencial “bare” e o potencial renormalizado podem ser vistos em (V.7) e (V.8) para os canais $T = 1, S = 0$ e $T = 0, S = 1$, respectivamente, com $b = .3$ fm e α_s/m_q^2 determinado pelo modelo de quarks [37], [38] como sendo

$$\frac{\alpha_s}{m_q^2} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{4} (m_\Delta - m_N) b^3 \quad (\text{V.65})$$

com $m_\Delta - m_N = 300$ MeV, a diferença de massa Δ -núcleon, de onde tiramos para esse caso que

$$\frac{\alpha_s}{m_q^2} = 5.5 \quad \text{GeV}^{-2}, \quad (\text{V.66})$$

sendo que estes valores de parâmetros são iguais aos usados no QBDF, apresentados anteriormente. O valor de ϖ é igual a $-.05$.

i	α_i	β_i
1	$(3\pi)^{3/2} \omega_1$	$\frac{3}{4}$
2	$(9\pi)^{3/2} \omega_2$	3
3	$(3\pi)^{3/2} \omega_3$	$\frac{3}{4}$
4	$\left(\frac{9\pi}{2}\right)^{3/2} \omega_4$	$\frac{33}{32}$
5	$\left(\frac{9\pi}{2}\right)^{3/2} \omega_5$	$\frac{33}{32}$
6	$\left(\frac{27\pi}{5}\right)^{3/2} \varpi \omega_1$	$\frac{27}{20}$
7	$\left(\frac{54\pi}{5}\right)^{3/2} \varpi \omega_2$	$\frac{21}{10}$
8	$\left(\frac{27\pi}{5}\right)^{3/2} \varpi \omega_3$	$\frac{27}{20}$
9	$\left(\frac{297\pi}{50}\right)^{3/2} \varpi \omega_4$	$\frac{249}{200}$
10	$\left(\frac{297\pi}{50}\right)^{3/2} \varpi \omega_5$	$\frac{321}{200}$

i	α_i	β_i
11	$\left(\frac{27\pi}{5}\right)^{3/2} \varpi \omega_1$	$\frac{27}{20}$
12	$\left(\frac{54\pi}{5}\right)^{3/2} \varpi \omega_2$	$\frac{21}{10}$
13	$\left(\frac{27\pi}{5}\right)^{3/2} \varpi \omega_3$	$\frac{27}{20}$
14	$\left(\frac{297\pi}{50}\right)^{3/2} \varpi \omega_4$	$\frac{249}{200}$
15	$\left(\frac{297\pi}{50}\right)^{3/2} \varpi \omega_5$	$\frac{321}{200}$
16	$\left(\frac{243\pi}{35}\right)^{3/2} \varpi^2 \omega_1$	$\frac{39}{28}$
17	$\left(\frac{972\pi}{91}\right)^{3/2} \varpi^2 \omega_2$	$\frac{21}{13}$
18	$\left(\frac{243\pi}{35}\right)^{3/2} \varpi^2 \omega_3$	$\frac{39}{28}$
19	$\left(\frac{2673\pi}{392}\right)^{3/2} \varpi^2 \omega_4$	$\frac{2265}{1568}$
20	$\left(\frac{2673\pi}{392}\right)^{3/2} \varpi^2 \omega_5$	$\frac{2265}{1568}$

Figura V.6: Valores para os coeficientes de $\bar{V}_{NN}(r)$ **• Cálculo dos deslocamentos de fase para o potencial NN de Fock-Tani**

O cálculo dos deslocamentos de fase é realizado utilizando o formalismo que foi mostrado no apêndice C sobre a matriz R . De uma forma sucinta podemos descrever este cálculo, reservando os detalhes para o apêndice. O cálculo da matriz R é central na determinação do deslocamento de fase. Escrita numa base de helicidade, para um sistema de dois núcleons no centro de massa, a matriz R está relacionada com o potencial de interação por

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}' \lambda'_1 \lambda'_2 | R(E) | \mathbf{q} \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= \langle \mathbf{q}' \lambda'_1 \lambda'_2 | V(E) | \mathbf{q} \lambda_1 \lambda_2 \rangle \\ &+ \sum_{h_1 h_2} \mathcal{P} \int \frac{d\mathbf{k}}{E - 2E_k} \langle \mathbf{q}' \lambda'_1 \lambda'_2 | V(E) | \mathbf{k} h_1 h_2 \rangle \langle \mathbf{k} h_1 h_2 | R(E) | \mathbf{q} \lambda_1 \lambda_2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{V.67})$$

onde $\mathcal{P}$ é o valor principal da integral. Podemos aplicar este procedimento em (V.58) e (V.59), reescrevendo o potencial NN explicitando os operadores de spin e isospin

$$\begin{aligned} V_{NN}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= V_c(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \boldsymbol{\tau}_A \cdot \boldsymbol{\tau}_B V_\tau(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B V_\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \\ &+ \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B \boldsymbol{\tau}_A \cdot \boldsymbol{\tau}_B V_{\sigma\tau}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \end{aligned} \quad (\text{V.68})$$

onde

$$\begin{aligned}
 V_c &= \frac{1}{12} v_2 + \frac{3}{4} v_3 + \frac{1}{4} (v_4 + v_5) \\
 V_\tau &= \frac{1}{108} v_2 + \frac{1}{12} v_3 - \frac{1}{36} (v_4 + v_5) \\
 V_\sigma &= \frac{1}{36} v_2 - \frac{1}{36} v_3 - \frac{1}{36} (v_4 + v_5) \\
 V_{\sigma\tau} &= \frac{1}{324} v_2 - \frac{25}{324} v_3 + \frac{5}{324} (v_4 + v_5).
 \end{aligned} \tag{V.69}$$

O deslocamento de fase é obtido efetuando a decomposição em ondas parciais de (V.67) e resolvendo as equações acopladas com o potencial (V.68). O resultado é expresso como combinações lineares de R em diferentes estados de helicidade. Destacamos as seguintes situações

- Singletos de spin ($L = S$)

$$\tan {}^0\delta^J(E_{lab}) = -\frac{1}{2}\pi q E_q {}^0R^J(q, q; E). \tag{V.70}$$

- Tripletos de spin ($L = S$)

$$\tan {}^1\delta^J(E_{lab}) = -\frac{1}{2}\pi q E_q {}^1R^J(q, q; E). \tag{V.71}$$

Os detalhes relativos ao cálculo dos deslocamentos de fase juntamente com as tabelas contendo estes resultados são mostrado no apêndice C.

Os parâmetros do modelo de quarks são fixados em $b = .45$ fm resultando na razão $\alpha_s/m_q^2 = 6.67$. Estes valores para os parâmetros garantem que o deslocamento de fase seja igual ao deslocamento de fase originado pelo potencial de Bonn, em onda- S , com constante de acoplamento igual a 10. Como foi dito antes, aumenta-se o valor da constante de acoplamento de ω no sentido de obter uma melhora nos resultados das ondas mais altas. Nas figuras V.9 e V.10 plotamos os deslocamentos de fase para o potencial NN de Fock-Tani (troca de quarks), o potencial de Bonn com $g_{\omega N}^2/4\pi \sim 10$ e o potencial de Bonn com $g_{\omega N}^2/4\pi \sim 20$. Observamos que para a onda- S o deslocamento de fase potencial NN de Fock-Tani coincide com o respectivo deslocamento de fase do potencial de Bonn com $g_{\omega N}^2/4\pi \sim 10$. Nas ondas mais altas o potencial de Fock-Tani não é suficientemente repulsivo. Uma razão para isto está no fato de usarmos funções de onda gaussianas que

cujo alcance cai rapidamente. Nas figuras V.11 e V.12 plotamos os deslocamentos de fase para o potencial NN de Fock-Tani variando o parâmetro b da função de onda. Vemos que aumentando o aclance da função de onda todos os deslocamentos de fase ficam mais repulsivos. Finalmente na figura V.13 vemos que aumentando b no potencial local NN de Fock-Tani, efetivamente, aumentamos o alcance da região do hard core.

$$V_{NN}(r) = -(b_0 + \frac{1}{2} b r^2) \mathcal{F} \mathcal{F}^{\dagger} \tag{V.70}$$

Para obter este resultado devemos que usar todos os diagramas do renormalizing group mostrados na figura (III.1), isto é,

$$V_{NN}(0,0) = \sum_{m=1}^5 v_m(0,0) + \sum_{m=1}^5 v_m^{ren}(0,0) \tag{V.71}$$

* O cálculo do fator de cor, spin e isospin

O fator combinatorial $\mathcal{C}$ de cor é igual ao fator combinatorial spin, considerando a mesma função de onda Ψ , mostrado na seção anterior, isto é,

$$\mathcal{C} I_{\text{cor}}(1, \dots, 5) = (5! - 4! - 3!) \tag{V.72}$$

de mesma forma as combinações dos diagramas são dadas

$$\mathcal{C} I_{\text{spin}}^{ren}(1, 2, 3) = (-1 - 4 - 2). \tag{V.73}$$

Por último, pelo fato da interação não depender de spin e isospin, o respectivo fator I_{is} fica igual ao fator de spin e isospin da kernel na combinação para todos os termos do potencial NN , isto é,

$$\mathcal{C} = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{3} \tau_A \cdot \tau_B + \frac{1}{9} \left(1 - \frac{25}{9} \tau_A \cdot \tau_B \right) \sigma_A \cdot \sigma_B \right] \tag{V.74}$$

O resultado final para η de oscilador harmônico é

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0, \quad \omega_2 = \omega_3 = 1/2 \\ \omega_4 &= -\omega_5 = \omega_1^{ren} = \omega_2^{ren} = \omega_3^{ren} = -1/2 \end{aligned} \tag{V.75}$$

V.2.2 Espalhamento NN com Interação Microscópica do Oscilador Harmônico

Nesta última subseção iremos mostrar um cálculo, usando o potencial NN de Fock-Tani na situação em que a interação microscópica V_{qq} é igual a de um oscilador harmônico, isto é, à interação de confinamento dos quarks no modelo de Isgur e Karl [56]. No trabalho original de Oka e Yazaki [37], [38] eles mostram que um potencial de confinamento quadrático microscópico não contribui para o espalhamento na equação do resonating group. A seguir mostraremos este cálculo usando o potencial de Fock-Tani com o potencial microscópico V_{qq} dado por (II.44), isto é

$$V_{qq}(ij) = -(k_0 + \frac{1}{2} k r_{ij}^2) \mathcal{F}_i^a \mathcal{F}_j^a \quad (V.72)$$

Para obter este resultado teremos que usar todos os diagramas do resonating group mostrado na figura (III.7), isto é,

$$V_{FT}(\alpha\beta; \gamma\delta) = \sum_{i=1}^5 v_i(\alpha\beta; \gamma\delta) + \sum_{i=1}^3 v_i^{intra}(\alpha\beta; \gamma\delta). \quad (V.73)$$

• O cálculo do fator de cor, spin e isospin

O fator combinatório e de cor é igual ao do potencial spin-spin, considerando a mesma função de onda Ψ , mostrado na seção anterior, isto é,

$$\mathcal{C} I_{COR}(1, \dots, 5) = (0, 4, 4, -4, -4). \quad (V.74)$$

da mesma forma as contribuições dos diagramas *intra* ficam

$$\mathcal{C} I_{COR}^{intra}(1, 2, 3) = (-4, -4, -4). \quad (V.75)$$

No entanto, pelo fato da interação não depender de spin e isospin, o respectivo fator I_{ST} fica igual ao fator de spin e isospin do kernel de normalização para todos os termos do potencial NN , isto é,

$$\Theta = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{9} \tau_A \cdot \tau_B + \frac{1}{9} \left(1 + \frac{25}{9} \tau_A \cdot \tau_B \right) \sigma_A \cdot \sigma_B \right]. \quad (V.76)$$

O resultado final para o ω_i do oscilador harmônico é

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0, & \omega_2 &= \omega_3 = 4\Theta \\ \omega_4 &= \omega_5 = \omega_1^{intra} = \omega_2^{intra} = \omega_3^{intra} = -4\Theta. \end{aligned} \quad (V.77)$$

• O cálculo da parte espacial

As integrais espaciais dos termos *intra* se constituem como a novidade desta parte do cálculo. Entretanto, os termos v_1^{intra} e v_2^{intra} são iguais a v_4 e v_5 , respectivamente. Portanto, para incluir estas duas contribuições *intra* para o cálculo basta multiplicar v_4 e v_5 por dois. O último termo, v_3^{intra} , é dado por uma expressão similar as anteriores, ou seja,

$$v_3^{intra}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = N^{(ex)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \int d\mathbf{q} V_{qq}(\mathbf{q}) \exp(-b^2 q^2). \quad (V.78)$$

Deste modo as funções f_i para este problema podem ser avaliadas lembrando que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{p} \nabla_{\mathbf{p}}^2 \delta(\mathbf{p}) F(\mathbf{p}) &= \nabla_{\mathbf{p}}^2 F(\mathbf{p}) \Big|_{\mathbf{p}=0} \\ \nabla_{\mathbf{p}}^2 \exp[a p^2 + b \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}] \Big|_{\mathbf{p}=0} &= 6a + b^2 q^2 \end{aligned} \quad (V.79)$$

onde $F(\mathbf{p})$ é uma função vetorial arbitrária. Assim encontramos

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \left\{ k_0 - \frac{k}{2} [b^4 (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 - 6b^2] \right\} \\ f_3(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \left\{ k_0 - \frac{k}{2} \left[\frac{b^4}{4} (\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2 - \frac{9}{2} b^2 \right] \right\} \\ f_4(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \left\{ k_0 - \frac{k}{2} \left[\frac{b^4}{16} (\mathbf{p} - 3\mathbf{p}')^2 - \frac{33}{8} b^2 \right] \right\} \\ f_5(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= f_4(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (V.80)$$

e (V.78) resulta em

$$v_3^{intra}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = N^{(ex)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \left\{ k_0 - \frac{3kb^2}{2} \right\}. \quad (V.81)$$

Desta forma multiplicando as partes de cor, spin-isospin e espaço obtemos o resultado final

$$\begin{aligned} V_{FT}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= 4\omega_2 N^{(ex)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \left(\left\{ k_0 - \frac{k}{2} [b^4 (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 - 6b^2] \right\} \right. \\ &\quad + \left\{ k_0 - \frac{k}{2} \left[\frac{b^4}{4} (\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2 - \frac{9}{2} b^2 \right] \right\} - 2 \left\{ k_0 - \frac{k}{2} \left[\frac{b^4}{16} (\mathbf{p} - 3\mathbf{p}')^2 - \frac{33}{8} b^2 \right] \right\} \\ &\quad \left. - 2 \left\{ k_0 - \frac{k}{2} \left[\frac{b^4}{16} (\mathbf{p}' - 3\mathbf{p})^2 - \frac{33}{8} b^2 \right] \right\} - \left\{ k_0 - \frac{3kb^2}{2} \right\} \right) \\ &= -4\omega_2 \left(3k_0 + \frac{3kb^2}{2} \right) N^{(ex)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \end{aligned} \quad (V.82)$$

Este resultado mostra que se a interação microscópica for idêntica à interação de confinamento o potencial de Fock-Tani será simplesmente proporcional à parte de troca do kernel

de normalização. O fato deste resultado para o potencial NN não produzir espalhamento pode ser esquematicamente mostrado. Consideremos, então, um potencial proporcional à parte de troca do kernel de normalização

$$V = c N^{(ex)} \quad (V.83)$$

onde c é a constante de proporcionalidade. A equação do RGM fica

$$(T + V - EN) \varphi = 0. \quad (V.84)$$

onde $N = 1 - N^{(ex)}$. Colocando (V.83) em (V.84) e efetuando uma pequena manipulação algébrica obtemos

$$(T' - E'N) \varphi = 0 \quad (V.85)$$

onde

$$\begin{aligned} T' &\equiv T + c \\ E' &\equiv E + c, \end{aligned} \quad (V.86)$$

ou seja, chegamos numa expressão de partícula livre na qual as energias cinética e total sofreram apenas uma mudança de escala.

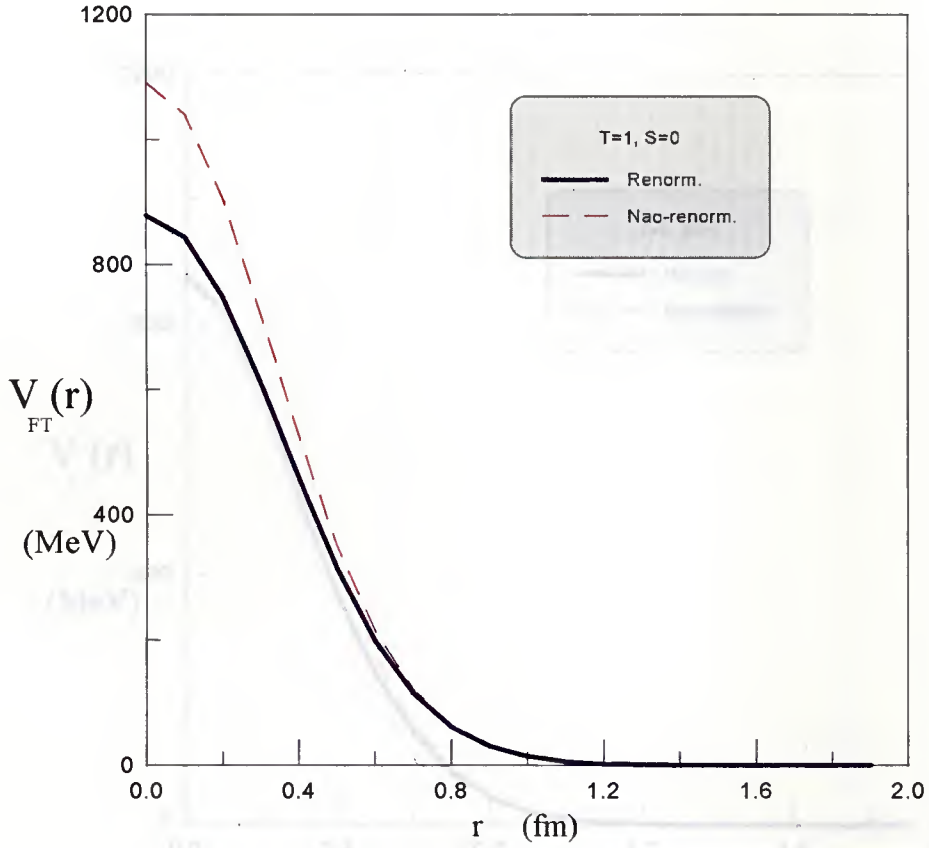


Figura V.7: Os gráficos do potencial “bare” e do potencial renormalizado para $T = 1$, $S = 0$ com $\alpha_s/m_q^2 = 5.5 \text{ GeV}^{-2}$, $b = .3 \text{ fm}$.

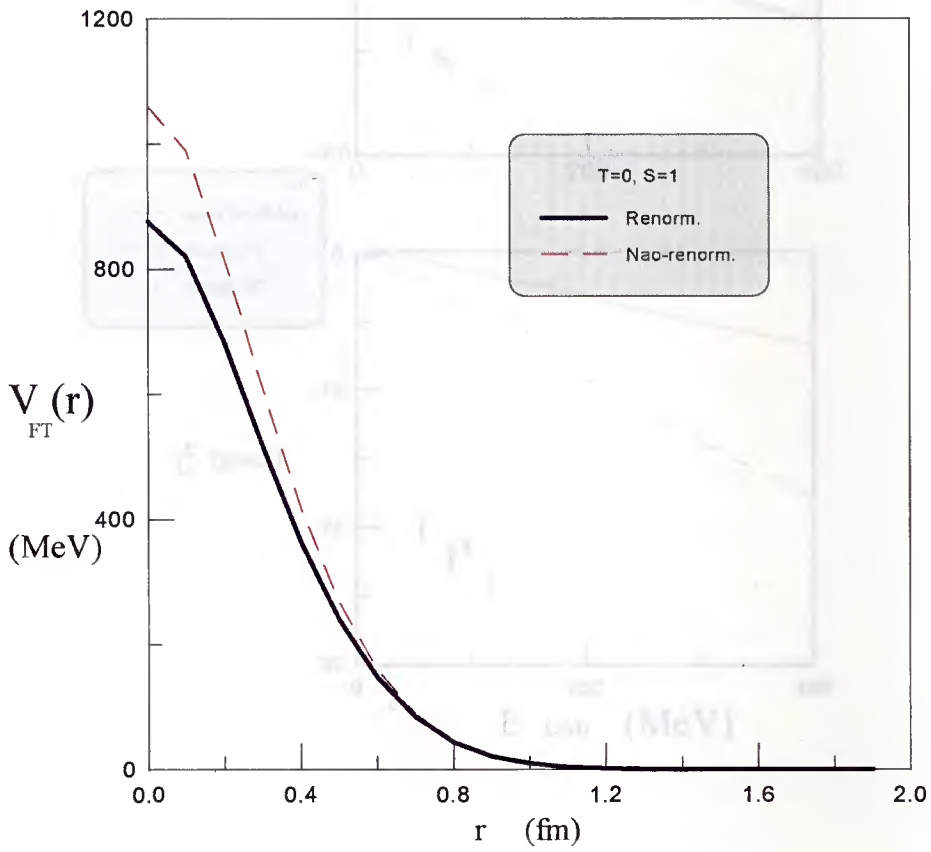


Figura V.8: (a) V_{FT} para Fock-Tani, Parâmetros $(g_{\sigma\pi\pi}^2/4\pi \sim 10)$ e $(g_{\sigma\pi\pi}^2/4\pi \sim 20)$.

Figura V.8: Os gráficos do potencial “bare” e do potencial renormalizado para $T = 0$, $S = 1$, com $\alpha_s/m_q^2 = 5.5 \text{ GeV}^{-2}$, $b = .3 \text{ fm}$.

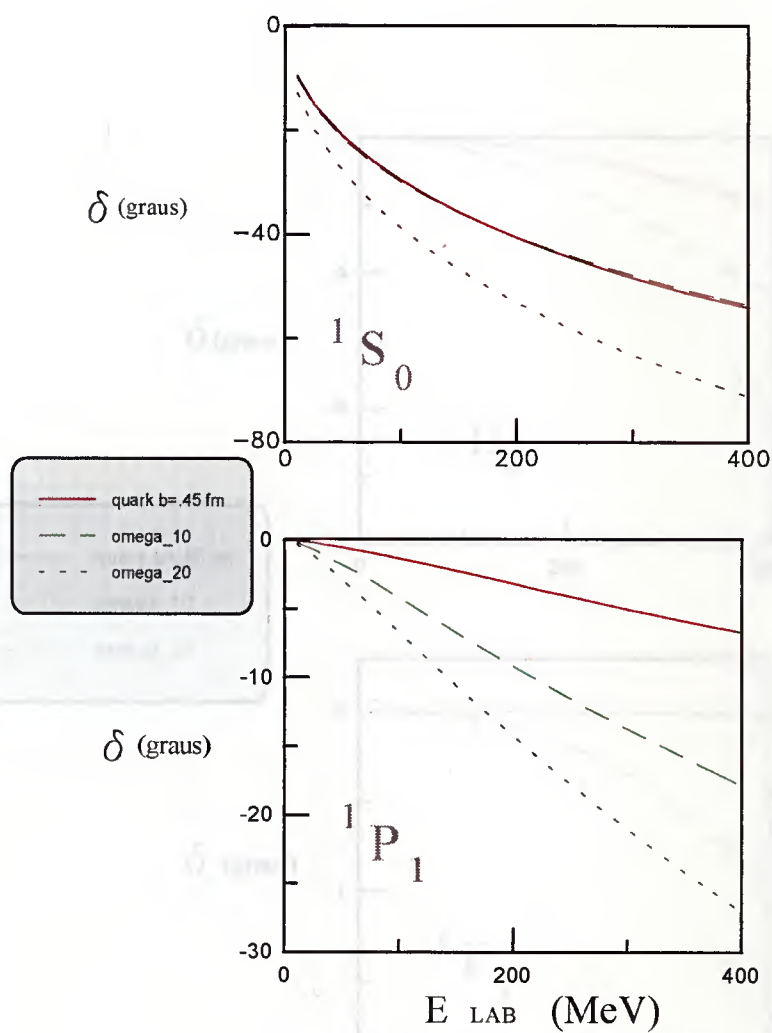


Figura V.9: Os δ para Fock-Tani, Bonn ($g_{\omega N}^2/4\pi \sim 10$) e Bonn ($g_{\omega N}^2/4\pi \sim 20$)

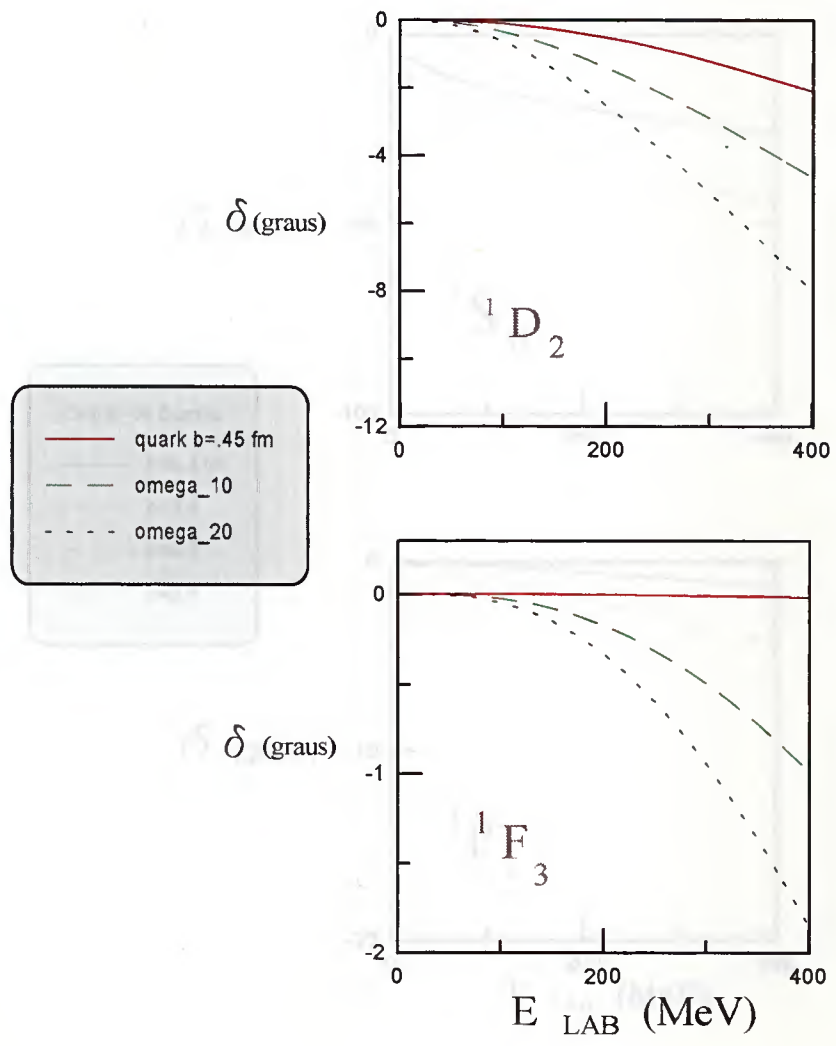


Figura V.10: Os δ para Fock-Tani, Bonn ($g_{\omega N}^2/4\pi \sim 10$) e Bonn ($g_{\omega N}^2/4\pi \sim 20$)

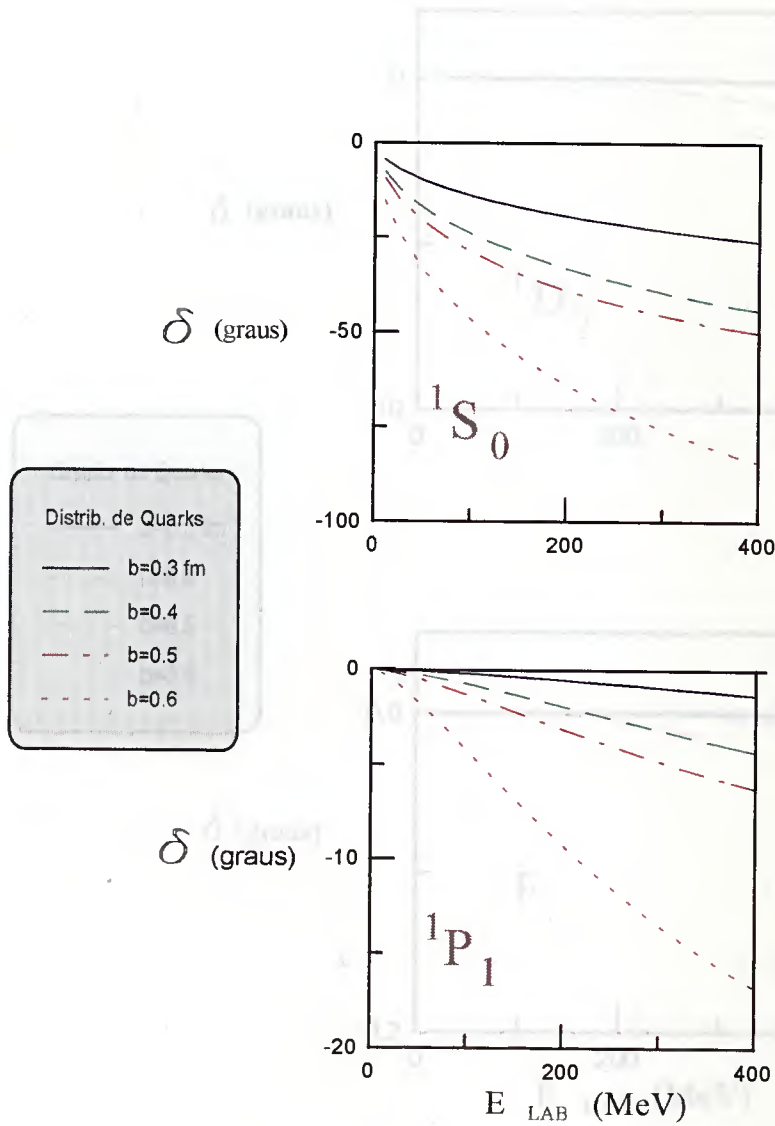


Figura V.11: Os δ para Fock-Tani com $b = .3, .4, .5, .6$ fm

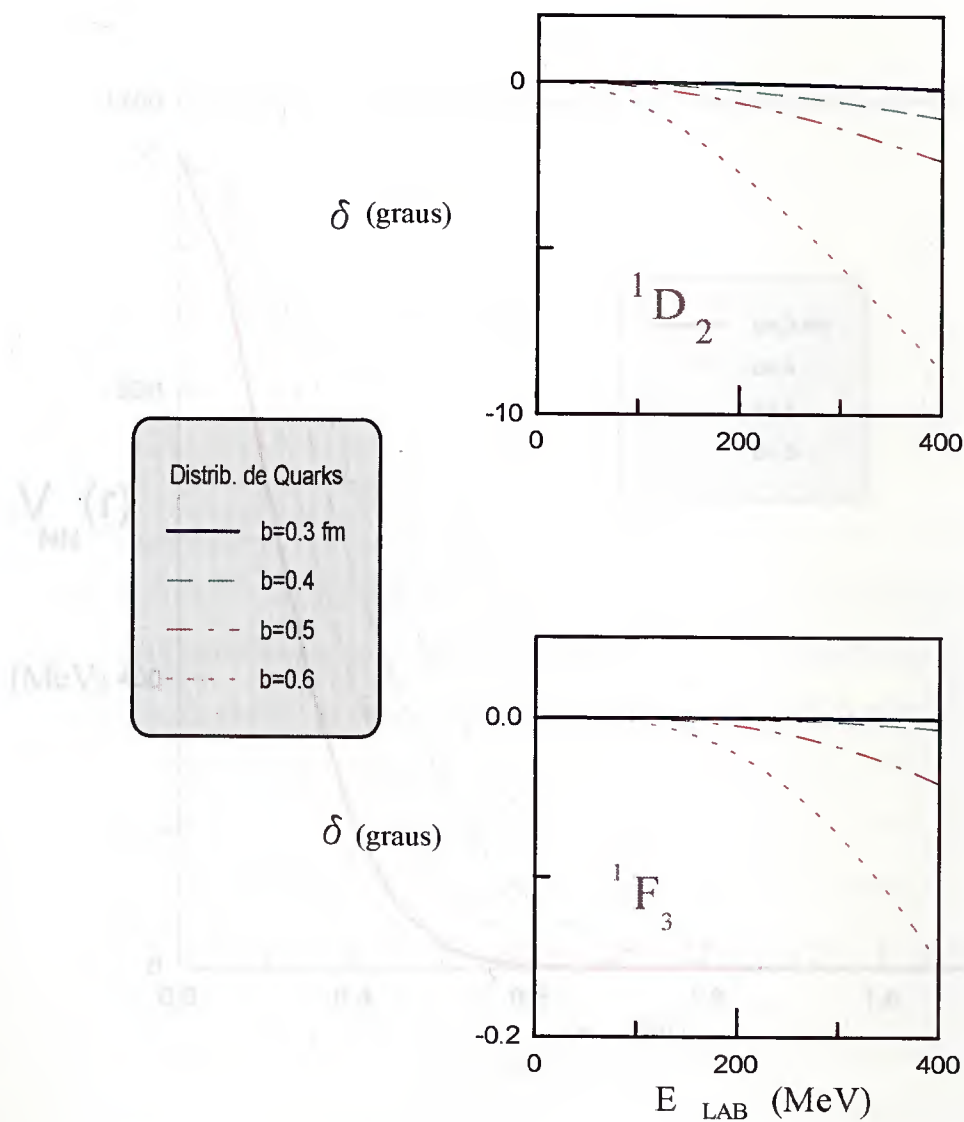


Figura V.12: Os δ para Fock-Tani com $b = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ fm

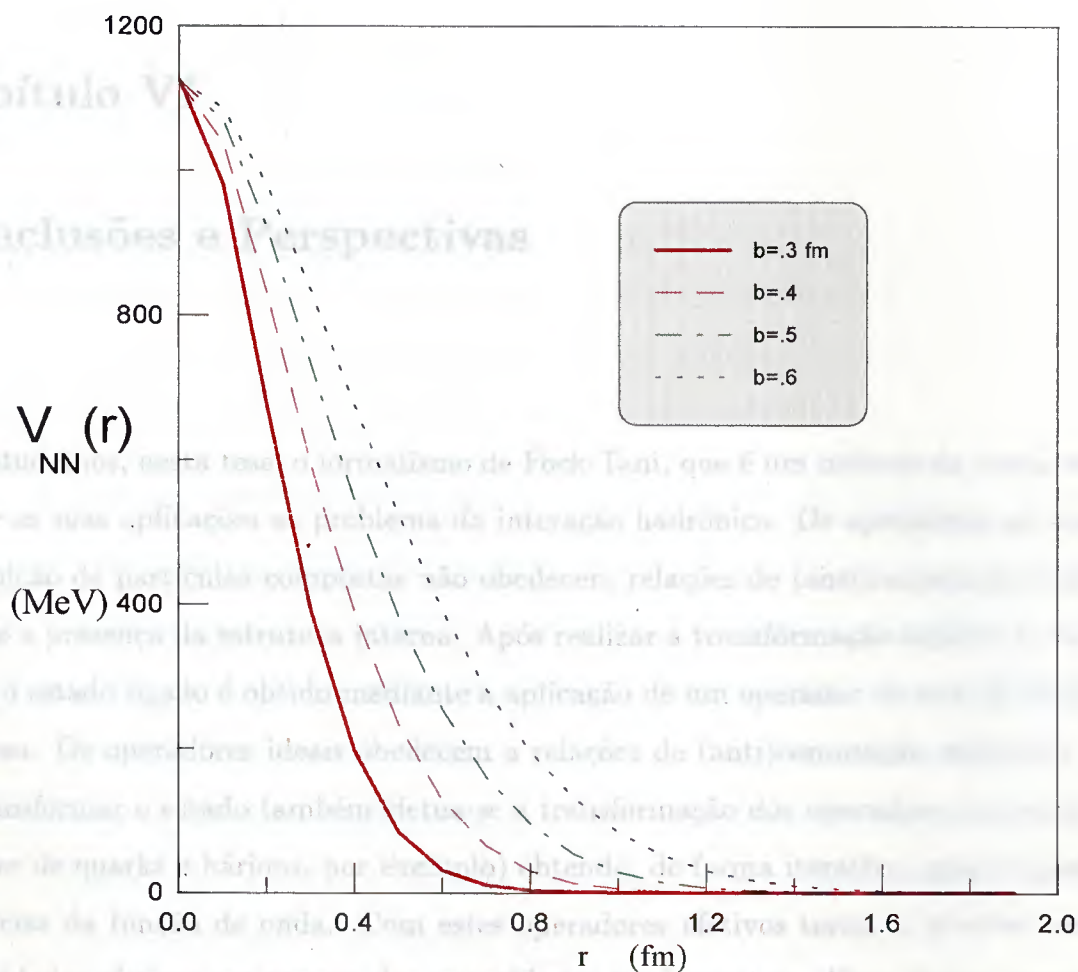


Figura V.13: O potencial de Fock-Tani local, com $b = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ fm

Capítulo VI

Conclusões e Perspectivas

Estudamos, nesta tese, o formalismo de Fock-Tani, que é um método de teoria de campos, e as suas aplicações ao problema da interação hadrônica. Os operadores de criação e destruição de partículas compostas não obedecem relações de (anti)comutação canônicas, devido a presença da estrutura interna. Após realizar a transformação unitária U de Fock-Tani, o estado ligado é obtido mediante a aplicação de um operador de criação ideal sobre o vácuo. Os operadores ideais obedecem a relações de (anti)comutação canônicas. Além de transformar o estado também efetua-se a transformação dos operadores da teoria (operadores de quarks e bárions, por exemplo) obtendo, de forma iterativa, uma expansão em potências da função de onda. Com estes operadores efetivos torna-se possível construir quantidades efetivas em termos das quantidades fundamentais. Uma destas quantidades efetivas importantes que podem ser construídas é o hamiltoniano efetivo que possui, entre outras estruturas, diagramas correspondendo a espalhamentos hadrônicos com troca de constituintes. Em mais baixa ordem do formalismo pode-se obter um potencial efetivo de Fock-Tani para a interação méson - méson e bárion - bárion que é compatível ao obtido por outros métodos (RGM, técnicas abináticas, QBDF). O formalismo de Fock-Tani também é suficientemente geral para descrever a região de longo alcance da interação núcleon - núcleon. Para isto, basta substituir na estrutura formal do potencial, a interação microscópica de troca de um glúon pela de um pión entre quarks, obtendo um resultado compatível com outras abordagens conhecidas na literatura.

• Os resultados principais que foram obtidos podem ser resumidos abaixo:

1. A transformação de Fock-Tani generalizada gera operadores transformados que não possuem termos seculares, cuja dependência em ϵ , parâmetro da transformação, será apenas por através de fatores envolvendo potências do tipo $(\sin \epsilon)^n (\cos \epsilon)^m$.
2. A transformação de Fock-Tani realizada sobre os operadores de bárions e de quarks permite obter um Hamiltoniano efetivo a partir do Hamiltoniano microscópico onde estão presentes não só os hádrons, mas também e os seus constituintes elementares. O Hamiltoniano efetivo contém termos que representam processos de espalhamento, ionização, recombinação, entre outros. Mostrou-se também que
 - o Hamiltoniano transformado não forma um novo estado ligado.
 - o Hamiltoniano associado com a ionização bariônica é zero, se a função de onda Ψ for autofunção do Hamiltoniano microscópico. Este resultado garante a estabilidade do estado ligado de um bárion frente à probabilidade de decaimento espontâneo.
 - a interação bárion-bárion do Fock-Tani é igual a do RGM em mais baixa ordem na expansão da função de onda. As correções de ortogonalização para o Fock-Tani correspondem ao processo de renormalização para o RGM.
3. Foi também mostrado que se o potencial microscópico for igual ao potencial de confinamento quadrático a interação NN efetiva não produza espalhamento. Isto se deve basicamente ao fato do potencial quadrático gerar uma interação efetiva proporcional ao kernel de normalização e este, por sua vez, não contribuir para o espalhamento. Fisicamente isto pode estar indicando que as forças de confinamento saturam no espalhamento bárion-bárion.
4. Usa-se um potencial microscópico de troca de um glúon. No modelo de quarks a parte de curto alcance é modelada pela parte correspondente à interação do tipo spin-spin do Hamiltoniano de Breit-Fermi. A comparação entre o potencial NN de Fock-Tani “bare” e com o renormalizado, cálculo realizado usando a aproximação que

foi postulada para o kernel de normalização, mostrou que o potencial renormalizado é um pouco mais atrativo que o potencial “bare”.

5. Os deslocamentos de fase revelam que nas ondas mais altas o potencial NN de gerado pelos quarks desaparece rapidamente. Uma razão para isto está no fato de usarmos funções de onda gaussianas que cujo alcance cai rapidamente. Aumentando o parâmetro b que regula o alcance das funções de onda os resultados indicam um aumento da importância do potencial de quarks. Tanto os deslocamentos de fase ficam mais repulsivos, para todas as ondas, quanto o hard core do potencial local fica mais largo.
6. O fato de que para as ondas mais altas não receberem contribuições significativas do potencial de quarks tem a consequência importante que talvez a repulsão de curto alcance da interação NN possa ser devido a parte da troca de mésons ω com uma constante de acoplamento próxima a 10, e parte vinda da troca de quarks e glúons a curtas distâncias. Se isto puder ser confirmado em um cálculo mais elaborado no futuro, teríamos uma descrição consistente da interação NN envolvendo troca de mésons com uma constante de acoplamento g_ω realista.

• Perspectivas futuras

1. O fato do potencial NN de curto alcance, obtido pela troca de quarks, ser pouco repulsivo pode ser modificado pela usando uma outra função de onda para os bárions. Foi mostrado que aumentando o alcance da função de onda o potencial se torna mais repulsivo. No entanto, esta modificação no parâmetro b da gaussiana tem implicações na razão α_s/m_q^2 , o que impede a sua variação de modo arbitrário. Um cálculo imediato que pode ser feito consiste em variar a função de onda Ψ , trocando-a por uma função que decresce mais lentamente. Neste caso, as integrações multidimensionais no potencial NN de Fock-Tani devem ser feitas usando, por exemplo, técnicas de integração Monte-Carlo.

2. Uma das motivações básicas para a introdução dos graus de liberdade de quarks e glúons na física nuclear é o chamado *plasma de quarks e glúons* (QGP) que presumivelmente é formado a altas temperaturas e densidades. Uma passagem do regime considerado “efetivo” da interação nuclear, onde se descreve a força nuclear por trocas de mésons, para um regime “fundamental”, onde os quarks e glúons são responsáveis pela interação forte, constitui um ingrediente importante na descrição teórica da formação do QGP. Portanto, formalismo de Fock-Tani se constitui numa ferramenta importante para este tipo de cálculo.

3. O estudo do potencial cáon-núcleon (KN) via o formalismo de Fock-Tani se constitui em outra aplicação interessante. As interações KN estão relacionadas com muitos problemas de grande interesse em física nuclear e hadrônica na atualidade. O conhecimento das propriedades de espalhamento KN na matéria nuclear é importante em outras áreas, como, por exemplo, na interpretação da produção de estranheza em colisões nucleares e na medida de correlação de dois káons. A condensação de káons, que é outro aspecto importante do problema, atua de maneira decisiva no colapso de estrelas massivas e os seus efeitos sobre o mecanismo de explosão de supernovas ainda está por ser explorado. Nestes problemas a aplicação do formalismo de Fock-Tani também é direta.

Apêndice A

Transformação de Observáveis e a Ausência de Termos Seculares

Dedicaremos este apêndice à demonstração da eliminação dos termos seculares pela transformação de Fock-Tani geral [46]. A transformação de Fock-Tani para um operador genérico A_α é

$$\frac{dA_\alpha}{d\epsilon} = \exp(-\epsilon F) [A_\alpha, F] \exp(\epsilon F) \quad (\text{A.1})$$

com

$$F = b_\alpha^\dagger \mathcal{O}_\alpha - \mathcal{O}_\alpha^\dagger b_\alpha. \quad (\text{A.2})$$

O comutador em (A.1) resulta em

$$[A_\alpha, F] = -b_\beta^\dagger \{A_\alpha, \mathcal{O}_\beta\} - \{A_\alpha, \mathcal{O}_\beta^\dagger\} b_\beta + \mathcal{O}_\beta^\dagger \{A_\alpha, b_\beta\} + \{A_\alpha, b_\beta^\dagger\} \mathcal{O}_\beta. \quad (\text{A.3})$$

Desta forma a equação de movimento (A.1) resulta em

$$\begin{aligned} \dot{A}_\alpha(\epsilon) = & -b_\beta^\dagger(\epsilon) \{A_\alpha(\epsilon), \mathcal{O}_\beta(\epsilon)\} - \{A_\alpha(\epsilon), \mathcal{O}_\beta^\dagger(\epsilon)\} b_\beta(\epsilon) \\ & + \mathcal{O}_\beta^\dagger(\epsilon) \{A_\alpha(\epsilon), b_\beta(\epsilon)\} + \{A_\alpha(\epsilon), b_\beta^\dagger(\epsilon)\} \mathcal{O}_\beta(\epsilon) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Se $A_\alpha = \mathcal{O}_\alpha$ ou $A_\alpha = b_\alpha$ encontramos as equações usuais

$$\dot{\mathcal{O}}_\alpha(\epsilon) = -b_\alpha(\epsilon) \quad (\text{A.5})$$

$$\dot{b}_\alpha(\epsilon) = \mathcal{O}_\alpha(\epsilon). \quad (\text{A.6})$$

Na situação de A_α ser genérico a equação de movimento (A.4) se reduz a

$$\dot{A}_\alpha(\epsilon) = -b_\beta^\dagger(\epsilon)\{A_\alpha(\epsilon), \mathcal{O}_\beta(\epsilon)\} - \{A_\alpha(\epsilon), \mathcal{O}_\beta^\dagger(\epsilon)\}b_\beta(\epsilon) \quad (\text{A.7})$$

pelo fato de

$$\{A_\alpha, b_\beta\} = \{A_\alpha, b_\beta^\dagger\} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Substituindo a equação (A.5) em (A.7) obtemos

$$\dot{A}_\alpha(\epsilon) = -\dot{\mathcal{O}}_\beta^\dagger(\epsilon)\{A_\alpha(\epsilon), \mathcal{O}_\beta(\epsilon)\} - \{A_\alpha(\epsilon), \mathcal{O}_\beta^\dagger(\epsilon)\}\dot{\mathcal{O}}_\beta(\epsilon). \quad (\text{A.9})$$

Para o restante da demonstração podemos usar a seguinte forma para a expressão (A.9)

$$\dot{A}_\alpha(\epsilon) = -\dot{\mathcal{O}}_\beta^\dagger(\epsilon) \left[A_\alpha(\epsilon) \cdot \mathcal{O}_\beta(\epsilon) \right] - \left[A_\alpha(\epsilon) \cdot \mathcal{O}_\beta^\dagger(\epsilon) \right] \dot{\mathcal{O}}_\beta(\epsilon) \quad (\text{A.10})$$

onde $A \cdot \mathcal{O}$ representa a aplicação do teorema de Wick para converter o produto $A \mathcal{O}$ numa série em ordenamento normal. O termo $\mathcal{O} A$ é omitido para simplificar a conta e em nada afeta o resultado final. O mesmo procedimento é considerado para $A \mathcal{O}^\dagger$. Integrando por partes o lado direito de (A.10) de 0 a ϵ encontramos

$$\begin{aligned} A_\alpha(\epsilon) &= \mathcal{O}_\beta^\dagger(\epsilon) [A_\alpha(\epsilon) \cdot \mathcal{O}_\beta(\epsilon)] + [A_\alpha(\epsilon) \cdot \mathcal{O}_\beta^\dagger(\epsilon)] \mathcal{O}_\beta(\epsilon) \\ &\quad - \mathcal{O}_\beta^\dagger [A_\alpha \cdot \mathcal{O}_\beta] - [A_\alpha \cdot \mathcal{O}_\beta^\dagger] \mathcal{O}_\beta \\ &\quad - \int_0^\epsilon dt \left(\mathcal{O}_\beta^\dagger(t) \frac{d}{dt} [A_\alpha(t) \cdot \mathcal{O}_\beta(t)] + \frac{d}{dt} [A_\alpha(t) \cdot \mathcal{O}_\beta^\dagger(t)] \mathcal{O}_\beta(t) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Usando as expressões (A.5) e (A.8) para calcular as derivadas na última linha de (A.11)

$$\frac{d}{dt} [A_\alpha(t) \cdot \mathcal{O}_\beta(t)] = -\dot{\mathcal{O}}_\gamma^\dagger(t) \left[\mathcal{O}_\beta(t) \cdot [A_\alpha(t) \cdot \mathcal{O}_\gamma(t)] \right] + \left[\mathcal{O}_\beta(t) \cdot [A_\alpha(t) \cdot \mathcal{O}_\gamma^\dagger(t)] \right] \dot{\mathcal{O}}_\gamma(t)$$

onde a segunda derivada em (A.11) é obtida simplesmente tomando o conjugado de $\mathcal{O}_\beta(t)$ na expressão acima. Colocando este resultado na última linha de (A.11) e usando (A.8)

$$\begin{aligned} A_\alpha(\epsilon) &= \mathcal{O}_\beta^\dagger(\epsilon) [A_\alpha(\epsilon) \cdot \mathcal{O}_\beta(\epsilon)] + [A_\alpha(\epsilon) \cdot \mathcal{O}_\beta^\dagger(\epsilon)] \mathcal{O}_\beta(\epsilon) \\ &\quad - \mathcal{O}_\beta^\dagger [A_\alpha \cdot \mathcal{O}_\beta] - [A_\alpha \cdot \mathcal{O}_\beta^\dagger] \mathcal{O}_\beta \\ &\quad - \int_0^\epsilon dt \left[\dot{\mathcal{O}}_\gamma^\dagger(t) \left\{ \mathcal{O}_\beta^\dagger(t) \left[\mathcal{O}_\beta(t) \cdot [A_\alpha(t) \cdot \mathcal{O}_\gamma(t)] \right] \right\} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \left[\mathcal{O}_\beta^\dagger(t) \cdot [A_\alpha(t) \cdot \mathcal{O}_\gamma(t)] \right] \mathcal{O}_\beta(t) \Big\} \\ & + \left\{ \mathcal{O}_\beta^\dagger(t) \left[\mathcal{O}_\beta(t) \cdot [A_\alpha(t) \cdot \mathcal{O}_\gamma^\dagger(t)] \right] \right. \\ & \left. - \left[\mathcal{O}_\beta^\dagger(t) \cdot [A_\alpha(t) \cdot \mathcal{O}_\gamma^\dagger(t)] \right] \mathcal{O}_\beta(t) \right\} \dot{\mathcal{O}}_\gamma(t) \Big]. \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

Apêndice B

Uma nova integração por partes pode ser aplicada à expressão (A.12), substituindo este resultado em (A.11). As derivadas de anticomutadores duplos são eliminadas em termos de anticomutadores triplos, obtendo após este procedimento, uma expressão explícita em termos de anticomutadores duplos mais uma integral envolvendo anticomutadores triplos e as suas derivadas. Este processo pode ser repetido indefinidamente, resultando numa série para $A_\alpha(\epsilon)$ livre de derivadas ou integrais. Podemos substituir as expressões explícitas para $\mathcal{O}_\alpha(\epsilon)$, que contém apenas $\sin \epsilon$ ou $\cos \epsilon$, em (A.12). O resultado final para $A_\alpha(\epsilon)$ será uma expressão cuja dependência em ϵ será apenas por através de fatores envolvendo potências do tipo $(\sin \epsilon)^n (\cos \epsilon)^m$.

Partimos da definição da função de onda totalmente antisimétrica ψ (B.1) e a parte espacial ψ é simétrica, a parte de spin antisimétrica e a de spin-isospin χ é simétrica, podemos escrever na forma dada a seguir

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\psi^s(\mathbf{r}_1) \psi^s(\mathbf{r}_2) \psi^s(\mathbf{r}_3) + \psi^s(\mathbf{r}_1) \psi^s(\mathbf{r}_2) \psi^s(\mathbf{r}_3) \right]$$

onde ψ é a função de onda de spin enquanto que ξ é a função de onda de isospin. As derivadas de partes em singlete e tripleto em relação ao primeiro par de quarks são respectivamente (60).

As variáveis m_s e m_t são as projeções de spin e isospin de nucleons. Como exemplo calcularemos o seguinte elemento da matriz

$$Q = \langle \chi_{m_s, m_t} | \sigma_1^i \sigma_2^j \sigma_3^k | \chi_{m_s, m_t} \rangle \quad (\text{B.2})$$

onde i, j, k são índices vectoriais e 1, 2, 3 são índices de quarks. Usando (B.1) e (B.2) obtemos

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{6} \left\{ (\eta^s(m_s') | \sigma_1^i \sigma_2^j | \eta^s(m_s)) (\xi^s(m_t') | \sigma_3^k | \xi^s(m_t)) \right. \\ &+ (\eta^s(m_s') | \sigma_1^i \sigma_2^j | \eta^s(m_s)) (\xi^s(m_t') | \sigma_3^k | \xi^s(m_t)) \\ &+ (\eta^s(m_s') | \sigma_1^i \sigma_2^j | \eta^s(m_s)) (\xi^s(m_t') | \sigma_3^k | \xi^s(m_t)) \\ &+ (\eta^s(m_s') | \sigma_1^i \sigma_2^j | \eta^s(m_s)) (\xi^s(m_t') | \sigma_3^k | \xi^s(m_t)) \Big\} \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

Apêndice B

As Regras de Substituição de Spin-Isospin

Realizaremos, neste apêndice, a demonstração das regras de substituição para spin-isospin seguindo o procedimento apresentado em [40]. A essência desta prova consiste em comparar os elementos de matriz na base de quarks com os elementos na base de núcleons.

Parimos da definição da função de onda totalmente antisimétrica Ψ definida em (II.40). A parte espacial ϕ é simétrica, a parte de cor antisimétrica e a de spin-isospin simétrica a qual por sua vez podemos escrever na forma dada a seguir

$$|\chi_{m_s m_t}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\eta^\rho(m_s)\rangle |\xi^\rho(m_t)\rangle + |\eta^\lambda(m_s)\rangle |\xi^\lambda(m_t)\rangle \right] \quad (\text{B.1})$$

onde η é a função de onda de spin enquanto que ξ é a função de onda de isospin, ρ e λ denotam as partes em singlete e tripleto em relação ao primeiro par de quarks de $|q_1 q_2 q_3\rangle$ respectivamente [60]. As variáveis m_s e m_t são as projeções de spin e isospin do núcleon.

Como exemplo calcularemos o seguinte elemento de matriz

$$Q \equiv \langle \chi_{m'_s m'_t} | \sigma_1^i \sigma_3^j \tau_1^a \tau_3^b | \chi_{m_s m_t} \rangle \quad (\text{B.2})$$

onde i, j, a, b são índices vetoriais e 1, 3 são índices de quarks. Usando (B.1) em (B.2) obtemos

$$\begin{aligned} Q = & \frac{1}{2} \left[\langle \eta^\rho(m'_s) | \sigma_1^i \sigma_3^j | \eta^\rho(m_s) \rangle \langle \xi^\rho(m'_t) | \tau_1^i \tau_3^j | \xi^\rho(m_t) \rangle \right. \\ & + \langle \eta^\rho(m'_s) | \sigma_1^i \sigma_3^j | \eta^\lambda(m_s) \rangle \langle \xi^\rho(m'_t) | \tau_1^i \tau_3^j | \xi^\lambda(m_t) \rangle \\ & + \langle \eta^\lambda(m'_s) | \sigma_1^i \sigma_3^j | \eta^\rho(m_s) \rangle \langle \xi^\lambda(m'_t) | \tau_1^i \tau_3^j | \xi^\rho(m_t) \rangle \\ & \left. + \langle \eta^\lambda(m'_s) | \sigma_1^i \sigma_3^j | \eta^\lambda(m_s) \rangle \langle \xi^\lambda(m'_t) | \tau_1^i \tau_3^j | \xi^\lambda(m_t) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Como as funções de onda de spin e isospin têm a mesma estrutura, basta calcular os elementos de matriz de isospin, por exemplo, pois no resultado final a parte de spin será similar. Desta forma vamos definir

$$\begin{aligned} Q_1 &\equiv \langle \xi^\rho(m'_t) | \tau_1^i \tau_3^j | \xi^\rho(m_t) \rangle \\ Q_2 &\equiv \langle \xi^\rho(m'_t) | \tau_1^i \tau_3^j | \xi^\lambda(m_t) \rangle \\ Q_3 &\equiv \langle \xi^\lambda(m'_t) | \tau_1^i \tau_3^j | \xi^\rho(m_t) \rangle \\ Q_4 &\equiv \langle \xi^\lambda(m'_t) | \tau_1^i \tau_3^j | \xi^\lambda(m_t) \rangle. \end{aligned} \quad (B.4)$$

As seguintes propriedades das matrizes de Pauli são importantes

$$\begin{aligned} \tau^1 |u\rangle &= |d\rangle & ; & & \tau^1 |d\rangle &= |u\rangle \\ \tau^2 |u\rangle &= i|d\rangle & ; & & \tau^2 |d\rangle &= -i|u\rangle \\ \tau^3 |u\rangle &= |u\rangle & ; & & \tau^3 |d\rangle &= -|d\rangle, \end{aligned} \quad (B.5)$$

onde $|u\rangle$ corresponde a um estado de quark up e $|d\rangle$ a um estado de quark down. A função de onda $|\xi\rangle$ tem a seguinte decomposição

$$\begin{aligned} |\xi^\rho(\tfrac{1}{2})\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|udu\rangle - |duu\rangle] \\ |\xi^\rho(-\tfrac{1}{2})\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|udd\rangle - |dud\rangle] \\ |\xi^\lambda(\tfrac{1}{2})\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} [|udu\rangle + |duu\rangle] - \sqrt{\frac{2}{3}} |uud\rangle \\ |\xi^\lambda(-\tfrac{1}{2})\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{6}} [|udd\rangle + |dud\rangle] + \sqrt{\frac{2}{3}} |duu\rangle. \end{aligned} \quad (B.6)$$

Usando os estados definidos em (B.6) podemos calcular os elementos de matriz de (B.4).

Para Q_1 encontramos

$$Q_1 = 0. \quad (B.7)$$

Do mesmo modo encontramos o resultado para Q_2

$$Q_2 = -\frac{2}{3} \delta_{ab} \langle m'_t | m_t \rangle. \quad (B.8)$$

Nesta notação para o estado de um núcleon suprimimos o índice T de isospin total. Assim $|m_t\rangle$ pode assumir dois valores $m_t = 1/2$ para designar um próton e $m_t = -1/2$ para um neutrão.

O cálculo de Q_3 é um pouco mais elaborado resultando em

$$\begin{aligned}
 \langle \xi^\lambda(\tfrac{1}{2}) | \tau_1^1 \tau_3^1 | \xi^\rho(\tfrac{1}{2}) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 \langle \xi^\lambda(\tfrac{1}{2}) | \tau_1^2 \tau_3^2 | \xi^\rho(\tfrac{1}{2}) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 \langle \xi^\lambda(\tfrac{1}{2}) | \tau_1^3 \tau_3^3 | \xi^\rho(\tfrac{1}{2}) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 \langle \xi^\lambda(\tfrac{1}{2}) | \tau_1^1 \tau_3^2 | \xi^\rho(\tfrac{1}{2}) \rangle &= \frac{i}{\sqrt{3}} \equiv \frac{i}{\sqrt{3}} \epsilon_{123} \langle \tfrac{1}{2} | \tau_N^3 | \tfrac{1}{2} \rangle \\
 \langle \xi^\lambda(\tfrac{1}{2}) | \tau_1^2 \tau_3^1 | \xi^\rho(\tfrac{1}{2}) \rangle &= -\frac{i}{\sqrt{3}} \equiv \frac{i}{\sqrt{3}} \epsilon_{213} \langle \tfrac{1}{2} | \tau_N^3 | \tfrac{1}{2} \rangle \\
 \langle \xi^\lambda(\tfrac{1}{2}) | \tau_1^1 \tau_3^3 | \xi^\rho(-\tfrac{1}{2}) \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \equiv \frac{i}{\sqrt{3}} \epsilon_{132} \langle \tfrac{1}{2} | \tau_N^2 | -\tfrac{1}{2} \rangle \\
 \langle \xi^\lambda(\tfrac{1}{2}) | \tau_1^2 \tau_3^3 | \xi^\rho(-\tfrac{1}{2}) \rangle &= \frac{i}{\sqrt{3}} \equiv \frac{i}{\sqrt{3}} \epsilon_{231} \langle \tfrac{1}{2} | \tau_N^1 | -\tfrac{1}{2} \rangle \\
 \langle \xi^\lambda(\tfrac{1}{2}) | \tau_1^3 \tau_3^2 | \xi^\rho(-\tfrac{1}{2}) \rangle &= -\frac{i}{\sqrt{3}} \equiv \frac{i}{\sqrt{3}} \epsilon_{321} \langle \tfrac{1}{2} | \tau_N^1 | -\tfrac{1}{2} \rangle \\
 \langle \xi^\lambda(\tfrac{1}{2}) | \tau_1^3 \tau_3^1 | \xi^\rho(-\tfrac{1}{2}) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \equiv \frac{i}{\sqrt{3}} \epsilon_{312} \langle \tfrac{1}{2} | \tau_N^2 | -\tfrac{1}{2} \rangle \\
 \langle \xi^\lambda(-\tfrac{1}{2}) | \tau_1^1 \tau_3^3 | \xi^\rho(\tfrac{1}{2}) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \equiv \frac{i}{\sqrt{3}} \epsilon_{132} \langle -\tfrac{1}{2} | \tau_N^2 | \tfrac{1}{2} \rangle \\
 \langle \xi^\lambda(-\tfrac{1}{2}) | \tau_1^2 \tau_3^3 | \xi^\rho(\tfrac{1}{2}) \rangle &= \frac{i}{\sqrt{3}} \equiv \frac{i}{\sqrt{3}} \epsilon_{231} \langle -\tfrac{1}{2} | \tau_N^1 | \tfrac{1}{2} \rangle \\
 \langle \xi^\lambda(-\tfrac{1}{2}) | \tau_1^3 \tau_3^2 | \xi^\rho(\tfrac{1}{2}) \rangle &= -\frac{i}{\sqrt{3}} \equiv \frac{i}{\sqrt{3}} \epsilon_{321} \langle -\tfrac{1}{2} | \tau_N^1 | \tfrac{1}{2} \rangle \\
 \langle \xi^\lambda(-\tfrac{1}{2}) | \tau_1^3 \tau_3^1 | \xi^\rho(\tfrac{1}{2}) \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \equiv \frac{i}{\sqrt{3}} \epsilon_{312} \langle -\tfrac{1}{2} | \tau_N^2 | \tfrac{1}{2} \rangle \\
 \langle \xi^\lambda(-\tfrac{1}{2}) | \tau_1^1 \tau_3^1 | \xi^\rho(-\tfrac{1}{2}) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 \langle \xi^\lambda(-\tfrac{1}{2}) | \tau_1^2 \tau_3^2 | \xi^\rho(-\tfrac{1}{2}) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 \langle \xi^\lambda(-\tfrac{1}{2}) | \tau_1^3 \tau_3^3 | \xi^\rho(-\tfrac{1}{2}) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 \langle \xi^\lambda(-\tfrac{1}{2}) | \tau_1^1 \tau_3^2 | \xi^\rho(-\tfrac{1}{2}) \rangle &= -\frac{i}{\sqrt{3}} \equiv \frac{i}{\sqrt{3}} \epsilon_{123} \langle -\tfrac{1}{2} | \tau_N^3 | -\tfrac{1}{2} \rangle \\
 \langle \xi^\lambda(-\tfrac{1}{2}) | \tau_1^2 \tau_3^1 | \xi^\rho(-\tfrac{1}{2}) \rangle &= \frac{i}{\sqrt{3}} \equiv \frac{i}{\sqrt{3}} \epsilon_{213} \langle -\tfrac{1}{2} | \tau_N^3 | -\tfrac{1}{2} \rangle
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

onde τ_N é a matriz de Pauli definida no espaço de núcleons. Assim encontramos

$$Q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle m'_t | [\delta_{ab} + i \epsilon_{abc} \tau_N^c] | m_t \rangle. \tag{B.10}$$

O elemento de matriz Q_4 é o conjugado de Q_3 , evitando a repetição do cálculo tedioso,

$$Q_4 = Q_3^\dagger = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle m'_t | [\delta_{ab} - i\epsilon_{abc} \tau_N^c] | m_t \rangle. \tag{B.11}$$

A expressão final para o elemento de matriz Q em (B.3) é obtida pelo produto de (B.7), (B.8), (B.10) e (B.11) pela respectiva parte de spin, formalmente igual, apenas com a troca de τ por σ

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \langle m'_s m'_t | \left[\frac{4}{9} \delta_{ij} \delta_{ab} + \frac{1}{3} \left(\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_N^k \right) \left(\delta_{ab} + i\epsilon_{abc} \tau_N^c \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left(\delta_{ij} - i\epsilon_{ijk} \sigma_N^k \right) \left(\delta_{ab} - i\epsilon_{abc} \tau_N^c \right) \right] | m_s m_t \rangle \\ &= \langle m'_s m'_t | \left[\frac{5}{9} \delta_{ij} \delta_{ab} - \frac{1}{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} \sigma_N^k \tau_N^c \right] | m_s m_t \rangle. \end{aligned} \tag{B.12}$$

Desta forma demonstramos a regra de substituição nº 7, isto é

$$\sum_{n \neq m=1}^3 \sigma_n^i \sigma_m^j \tau_n^a \tau_m^b \longrightarrow \frac{10}{3} \delta_{ij} \delta_{ab} - 2 \epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} \sigma_N^k \tau_N^c \tag{B.13}$$

onde multiplica-se por 6 a parte operatorial de (B.12), para resultar na regra acima, por estarmos somando sobre seis quarks.

matriz $R(E)$ para $R(E)$

$$R(E) = V(E) + V(E) \frac{1}{E - t_N} R(E) \quad (C.4)$$

Apêndice C

O Espalhamento NN e os Deslocamentos de Fase

C.1 Cálculo da Matriz R

No sentido de completar a discussão sobre os deslocamentos de fase calculados anteriormente, apresentaremos neste apêndice uma reprodução de parte do formalismo e dos cálculos encontrados na referência sobre o potencial de Bonn [7].

No cálculo do espalhamento NN se define a matriz de transição T (restrita ao espaço de dois núcleons) relacionando-a com a matriz S

$$\langle B'_1 B'_2 | S | B_1 B_2 \rangle = \langle B'_1 B'_2 | B_1 B_2 \rangle - 2\pi i \delta^4(P' - P) \langle B'_1 B'_2 | T | B_1 B_2 \rangle \quad (C.1)$$

onde $P(P')$ é o momento total do estado imergente (emergente). O Hamiltoniano para a interação núcleon-núcleon pode ser tratado pela teoria de perturbação com ordenamento temporal e expandido numa série definida por diagramas contendo duas linhas de núcleons entrando e duas linhas saindo. A série pode ser parcialmente somada resolvendo uma equação de Lippmann-Schwinger do tipo

$$T(E) = V(E) + V(E) \frac{1}{E - t_N + i\varepsilon} T(E) \quad (C.2)$$

onde t_N é a parte de energia cinética do núcleon. Para avaliar os deslocamentos de fase é conveniente trabalhar com a matriz R que está relacionado com a matriz T assim

$$T(E) = R(E) + i\pi R(E) \delta(E - t_N) T(E), \quad (C.3)$$

portanto obtemos para $R(E)$

$$R(E) = V(E) + V(E) \frac{\mathcal{P}}{E - t_N} R(E) \quad (C.4)$$

onde o símbolo $\mathcal{P}$ denota valor principal a ser aplicado à integração sobre o contínuo de t_N . As contribuições de troca de mésons para $V(E)$ são convenientemente representadas no formalismo de helicidade. Consideraremos a equação (C.4) escrita numa base de helicidade num sistema de dois núcleons no centro de massa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}' \lambda'_1 \lambda'_2 | R(E) | \mathbf{q} \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= \langle \mathbf{q}' \lambda'_1 \lambda'_2 | V(E) | \mathbf{q} \lambda_1 \lambda_2 \rangle \\ &+ \sum_{h_1 h_2} \mathcal{P} \int \frac{d\mathbf{k}}{E - 2E_k} \langle \mathbf{q}' \lambda'_1 \lambda'_2 | V(E) | \mathbf{k} h_1 h_2 \rangle \langle \mathbf{k} h_1 h_2 | R(E) | \mathbf{q} \lambda_1 \lambda_2 \rangle. \end{aligned} \quad (C.5)$$

Aqui denotamos de $\mathbf{q}, \mathbf{q}'$ e $\mathbf{k}$ os momentos relativos para os estados iniciais, finais e intermediários respectivamente; λ_i, λ'_i e h_i (com $i = 1, 2$) as correspondentes helicidades para o núcleon 1 e 2. Por exemplo para o núcleon 1 no estado de helicidade inicial λ_1 é definido como sendo o autovalor do operador helicidade $(1/2\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})/|\mathbf{q}|$, com $1/2\boldsymbol{\sigma}_1$ sendo o operador de spin para o núcleon 1 onde os autovalores são $h_i = \pm 1/2$.

O potencial que aparece em (C.5) é definido em termos da soma das contribuições de troca de um bóson (OBE)

$$V \equiv \sum_{\alpha=\pi,\rho,\eta,\omega,\delta,\sigma} V_\alpha^{\text{OBE}} \quad (C.6)$$

No estudo realizado nesta tese investigamos a parte de curto alcance da interação forte, portanto estas contribuições se restringiram à troca de um méson vetorial ω . O potencial de troca de um ω fica

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}' \lambda'_1 \lambda'_2 | V_\omega^{\text{OBE}} | \mathbf{q} \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{E_{q'}}} \sqrt{\frac{m}{E_q}} \frac{F_\omega^2 [(\mathbf{q}' - \mathbf{q})^2]}{(\mathbf{q}' - \mathbf{q})^2 + m_\omega^2} \left\{ (g_\omega + f_\omega) \bar{u}(\mathbf{q}', \lambda'_1) \gamma_\mu u(\mathbf{q}, \lambda_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{f_\omega}{2m} \bar{u}(\mathbf{q}', \lambda'_1) [(q' + q)_\mu + (E_{q'} - E_q)(g_\mu^0 - \gamma_\mu \gamma^0)] u(\mathbf{q}, \lambda_1) \right\} \\ &\quad \times \left\{ (g_\omega + f_\omega) \bar{u}(-\mathbf{q}', \lambda'_2) \gamma^\mu u(-\mathbf{q}, \lambda_2) - \frac{f_\omega}{2m} \bar{u}(-\mathbf{q}', \lambda'_2) [(q' + q)_\mu \right. \\ &\quad \left. + (E_{q'} - E_q)(g^{\mu 0} - \gamma^\mu \gamma^0)] u(-\mathbf{q}, \lambda_2) \right\} \end{aligned} \quad (C.7)$$

com o fator de forma que é aplicado a cada vértice sendo

$$F_\omega^2[(\mathbf{q}' - \mathbf{q})^2] = \left(\frac{\Lambda_\omega^2 - m_\omega^2}{\Lambda_\omega^2 + (\mathbf{q}' - \mathbf{q})^2} \right)^{n_\omega}. \quad (\text{C.8})$$

Os espinores de Dirac são normalizados por

$$\bar{u}(\mathbf{q}, \lambda) u(\mathbf{q}, \lambda) = 1 \quad (\text{C.9})$$

e em particular na representação de helicidade são dados por

$$\begin{aligned} u(\mathbf{q}, \lambda_1) &= \sqrt{\frac{E_q + m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\lambda_1 q / (E_q + m) \end{pmatrix} |\lambda_1\rangle \\ u(-\mathbf{q}, \lambda_2) &= \sqrt{\frac{E_q + m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\lambda_2 q / (E_q + m) \end{pmatrix} |\lambda_2\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

onde $q \equiv |\mathbf{q}|$ e $E_q \equiv \sqrt{q^2 + m^2}$. Escolhendo $\mathbf{q}$ ao longo do eixo z e $\mathbf{q}'$ no plano xz temos

$$\begin{aligned} |\lambda_1\rangle &= \Upsilon_{\lambda_1}, & |\lambda_2\rangle &= \Upsilon_{-\lambda_2} \\ |\lambda'_1\rangle &= \exp\left(-\frac{i}{2}\sigma_y\vartheta\right) \Upsilon_{\lambda'_1}, & |\lambda'_2\rangle &= \exp\left(-\frac{i}{2}\sigma_y\vartheta\right) \Upsilon_{\lambda'_2} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

onde ϑ é o ângulo de espalhamento e Υ o espinor de Pauli.

Os deslocamentos de fase são apenas definidos em termos de uma decomposição em ondas parciais, portanto é desejável que se efetue esta decomposição em (C.5). Introduzindo uma base de dois núcleons $|JM\lambda_1\lambda_2\rangle$, com momento total J e M a sua componente na direção z . Assumimos a existência de invariância rotacional obtendo a seguinte expansão para $R(E)$:

$$\langle \mathbf{q}'\lambda'_1\lambda'_2 | R(E) | \mathbf{q}\lambda_1\lambda_2 \rangle = \sum_{JM} \langle \hat{\mathbf{q}}'\lambda'_1\lambda'_2 | JM\lambda'_1\lambda'_2 \rangle \langle \lambda'_1\lambda'_2 | R^J(q', q; E) | \lambda_1\lambda_2 \rangle \langle JM\lambda_1\lambda_2 | \hat{\mathbf{q}}\lambda_1\lambda_2 \rangle, \quad (\text{C.12})$$

onde $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/q$, $\hat{\mathbf{q}}' = \mathbf{q}'/q'$. Uma decomposição equivalente pode ser obtida para $V(E)$. A transformação dos elementos de matriz de uma base de ondas planas de helicidade para estados de momento angular de helicidade é

$$\langle JM\lambda_1\lambda_2 | \hat{\mathbf{q}}\lambda'_1\lambda'_2 \rangle = \left(\frac{2J+1}{4\pi} \right)^{1/2} D_{M\lambda}^{(J)}(\varphi, \vartheta, -\varphi) \delta_{\lambda_1\lambda'_1} \delta_{\lambda_2\lambda'_2}, \quad (\text{C.13})$$

no qual ϑ e φ são os ângulos polares e azimutais definindo a direção de $\mathbf{q}$ com relação ao eixo z ; $D_{M\lambda}^{(J)}$ é a convencional matriz irredutível de rotação e $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$. Estes elementos de matriz satisfazem a condição de normalização

$$\int d\Omega \langle JM\lambda_1\lambda_2|\hat{\mathbf{q}}\lambda_1\lambda_2\rangle\langle\hat{\mathbf{q}}\lambda_1\lambda_2|J'M'\lambda_1\lambda_2\rangle = \delta_{JJ'}\delta_{MM'} \quad (\text{C.14})$$

com $d\Omega = d\cos\vartheta d\varphi$. Desta forma usando (C.13) e (C.14) podemos obter a esperada decomposição em ondas parciais da equação (C.5)

$$\begin{aligned} \langle\lambda'_1\lambda'_2|R^J(q', q; E)|\lambda_1\lambda_2\rangle &= \langle\lambda'_1\lambda'_2|V^J(q', q; E)|\lambda_1\lambda_2\rangle \\ &+ \sum_{h_1h_2} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dk k^2}{E - 2E_k} \langle\lambda'_1\lambda'_2|V^J(q', k; E)|h_1h_2\rangle \\ &\times \langle h_1h_2|R^J(k, q; E)|\lambda_1\lambda_2\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Por uma questão de simplicidade foi desprezada a dependência em isospin, assumindo independência de carga há duas equações separadas para cada isospin, $T = 0$ e $T = 1$. A equação (C.15) representa um sistema de equações integrais acopladas que precisam ser resolvidas para obter R^J .

A solução de (C.15) pode ser facilitada consideravelmente. Há dois autovalores para cada helicidade, resultando em 16 amplitudes de helicidade $\langle\lambda'_1\lambda'_2|R^J(q', q; E)|\lambda_1\lambda_2\rangle$ acopladas. Devido a propriedade invariância por reflexões espaciais (conservação de paridade) da interação NN

$$\langle\lambda'_1\lambda'_2|R^J(q', q; E)|\lambda_1\lambda_2\rangle = \langle-\lambda'_1-\lambda'_2|R^J(q', q; E)|-\lambda_1-\lambda_2\rangle \quad (\text{C.16})$$

somente seis amplitudes são independentes. A conservação de spin total, que é uma consequência da conservação de isospin e paridade em conjunto com o requerimento de antisimetria do estado de dois núcleons, resulta em

$$\langle\lambda'_1\lambda'_2|R^J(q', q; E)|\lambda_1\lambda_2\rangle = \langle\lambda'_2\lambda'_1|R^J(q', q; E)|\lambda_2\lambda_1\rangle. \quad (\text{C.17})$$

Escolhemos o seguinte conjunto de seis amplitudes

$$\begin{aligned} R_1^J(q', q; E) &\equiv \langle++|R^J(q', q; E)|++\rangle, & R_2^J(q', q; E) &\equiv \langle++|R^J(q', q; E)|--\rangle, \\ R_3^J(q', q; E) &\equiv \langle+-|R^J(q', q; E)|+-\rangle, & R_4^J(q', q; E) &\equiv \langle+-|R^J(q', q; E)|-+\rangle, \\ R_5^J(q', q; E) &\equiv \langle++|R^J(q', q; E)|+-\rangle, & R_6^J(q', q; E) &\equiv \langle+-|R^J(q', q; E)|++\rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

onde $\lambda_i = \pm 1/2$ é denotado por $\pm$. A reverção temporal implica em

$$R_5^J(q', q) = R_6^J(q, q'). \quad (C.19)$$

No sentido de simplificar o cálculo futuro convém introduzir uma combinação linear de R_i^J

$$\begin{aligned} {}^0R^J &\equiv R_1^J - R_2^J, & {}^1R^J &\equiv R_3^J - R_4^J, & {}^{12}R^J &\equiv R_1^J + R_2^J \\ {}^{34}R^J &\equiv R_3^J + R_4^J, & {}^{55}R^J &\equiv 2R_5^J, & {}^{66}R^J &\equiv 2R_6^J. \end{aligned} \quad (C.20)$$

Convém observar que ${}^0R^J$ e ${}^1R^J$ são indênticos ao singlete de spin e o tripleto desacoplado de spin, respectivamente, da representação convencional LSJ . Para V^J introduzimos definições análogas a (C.20) e assim obtemos o seguinte conjunto de equações integrais

$$\begin{aligned} {}^0R^J(q', q; E) &= {}^0V^J(q', q; E) + \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dk k^2}{E - 2E_k} {}^0V^J(q', k; E) {}^0R^J(k, q; E) \\ {}^1R^J(q', q; E) &= {}^1V^J(q', q; E) + \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dk k^2}{E - 2E_k} {}^1V^J(q', k; E) {}^1R^J(k, q; E) \\ {}^{12}R^J(q', q; E) &= {}^{12}V^J(q', q; E) + \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dk k^2}{E - 2E_k} \left[{}^{12}V^J(q', k; E) {}^{12}R^J(k, q; E) \right. \\ &\quad \left. + {}^{55}V^J(q', k; E) {}^{66}R^J(k, q; E) \right], \\ {}^{34}R^J(q', q; E) &= {}^{34}V^J(q', q; E) + \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dk k^2}{E - 2E_k} \left[{}^{34}V^J(q', k; E) {}^{34}R^J(k, q; E) \right. \\ &\quad \left. + {}^{66}V^J(q', k; E) {}^{55}R^J(k, q; E) \right], \\ {}^{55}R^J(q', q; E) &= {}^{55}V^J(q', q; E) + \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dk k^2}{E - 2E_k} \left[{}^{12}V^J(q', k; E) {}^{55}R^J(k, q; E) \right. \\ &\quad \left. + {}^{55}V^J(q', k; E) {}^{34}R^J(k, q; E) \right], \\ {}^{66}R^J(q', q; E) &= {}^{66}V^J(q', q; E) + \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dk k^2}{E - 2E_k} \left[{}^{34}V^J(q', k; E) {}^{66}R^J(k, q; E) \right. \\ &\quad \left. + {}^{66}V^J(q', k; E) {}^{12}R^J(k, q; E) \right]. \end{aligned} \quad (C.21)$$

C.2 Ondas Parciais

A decomposição em ondas parciais de V é

$$\langle \mathbf{q}' \lambda'_1 \lambda'_2 | V | \mathbf{q} \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \sum_{JM} \langle \hat{\mathbf{q}}' \lambda'_1 \lambda'_2 | JM \lambda'_1 \lambda'_2 \rangle \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \langle JM \lambda_1 \lambda_2 | \hat{\mathbf{q}} \lambda_1 \lambda_2 \rangle, \quad (C.22)$$

com os elementos de matriz de transformação dados por (C.13). Os coeficientes da transformação são consideraavelmente simplificados utilizando o teorema da adição para as matrizes de rotação e novamente escolhendo o eixo q ao longo do eixo z e q' no plano xz :

$$\langle q' \lambda'_1 \lambda'_2 | V | q \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_J (2J+1) d_{\lambda\lambda'}^J(\vartheta) \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle, \quad (C.23)$$

com $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, $\lambda' = \lambda'_1 - \lambda'_2$ e $d_{\lambda\lambda'}^J(\vartheta)$ as matrizes de rotação reduzidas (polinômios de Jacobi), satisfazendo

$$d_{\lambda\lambda'}^J(\vartheta) = d_{-\lambda, -\lambda'}^J(\vartheta) (-)^{\lambda-\lambda'} d_{\lambda\lambda'}^J(\vartheta) \quad (C.24)$$

possuindo a relação de ortonormalidade

$$\int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) d_{\lambda\lambda'}^J(\vartheta) d_{\lambda''\lambda'''}^{J'}(\vartheta) = \delta_{JJ'} \frac{2}{2J+1}. \quad (C.25)$$

Usando (C.25) a expressão (C.23) pode ser invertida

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) d_{\lambda\lambda'}^J(\vartheta) \langle q' \lambda'_1 \lambda'_2 | V | q \lambda_1 \lambda_2 \rangle. \quad (C.26)$$

Esta é a expressão básica para representação de V em ondas parciais de helicidade.

C.3 Os Deslocamentos de Fase

Os deslocamentos de fase podem ser calculados a partir da matriz R .

- Singletos de spin ($L = S$)

$$\tan {}^0\delta^J(E_{lab}) = -\frac{1}{2}\pi q E_q {}^0R^J(q, q; E). \quad (C.27)$$

- Tripletos de spin ($L = S$)

$$\tan {}^1\delta^J(E_{lab}) = -\frac{1}{2}\pi q E_q {}^1R^J(q, q; E). \quad (C.28)$$

- Estados acoplados

$$\begin{aligned} \tan \delta_{\mp}^J(E_{lab}) &= -\frac{1}{4}\pi q E_q \left[{}^{12}R^J + {}^{34}R^J \mp \frac{{}^{12}R^J - {}^{34}R^J - 4\sqrt{J(J+1)} {}^{55}R^J}{(2J+1) \cos 2\epsilon_J} \right], \\ \tan 2\epsilon_J(E_{lab}) &= -2 \frac{\sqrt{J(J+1)}({}^{12}R^J - {}^{34}R^J) + {}^{55}R^J}{{}^{12}R^J - {}^{34}R^J - 4\sqrt{J(J+1)} {}^{55}R^J} \end{aligned} \quad (C.29)$$

onde os argumentos $(q, q; E)$ significa que os elementos de matriz estão “on-shell” e o índice inferior de (C.29) $\mp$ representa $L = J \mp 1$.

C.4 Relações Envolvendo os Estados de Helicidade e os Polinômios de Jacobi

- Inicialmente listaremos algumas propriedades envolvendo os estados de helicidade

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \{ |\lambda'_1 + \lambda_1| \cos \frac{1}{2} \vartheta + (\lambda'_1 - \lambda_1) \sin \frac{1}{2} \vartheta \} \{ |\lambda'_2 + \lambda_2| \cos \frac{1}{2} \vartheta - (\lambda'_2 - \lambda_2) \sin \frac{1}{2} \vartheta \}$$

$$\begin{aligned} & \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \sigma_1 \cdot \sigma_2 | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \\ &= -\{ (\lambda'_1 + \lambda_1) \sin \frac{1}{2} \vartheta + |\lambda'_1 - \lambda_1| \cos \frac{1}{2} \vartheta \} \{ (\lambda'_2 + \lambda_2) \sin \frac{1}{2} \vartheta - |\lambda'_2 - \lambda_2| \cos \frac{1}{2} \vartheta \} \\ &\quad - \{ |\lambda'_1 + \lambda_1| \sin \frac{1}{2} \vartheta - (\lambda'_1 - \lambda_1) \cos \frac{1}{2} \vartheta \} \{ |\lambda'_2 + \lambda_2| \sin \frac{1}{2} \vartheta - (\lambda'_2 - \lambda_2) \cos \frac{1}{2} \vartheta \} \\ &\quad - \{ (\lambda'_1 + \lambda_1) \cos \frac{1}{2} \vartheta - |\lambda'_1 - \lambda_1| \sin \frac{1}{2} \vartheta \} \{ (\lambda'_2 + \lambda_2) \cos \frac{1}{2} \vartheta + |\lambda'_2 - \lambda_2| \sin \frac{1}{2} \vartheta \}. \end{aligned} \quad (C.30)$$

Também temos

$$\begin{aligned} \langle ++ | ++ \rangle &= \frac{1}{2} (1 + \cos \vartheta) \\ \langle ++ | -- \rangle &= -\frac{1}{2} (1 - \cos \vartheta) \\ \langle +- | +- \rangle &= \frac{1}{2} (1 + \cos \vartheta) \\ \langle +- | -+ \rangle &= \frac{1}{2} (1 - \cos \vartheta) \\ \langle ++ | +- \rangle &= -\frac{1}{2} \sin \vartheta \\ \langle +- | ++ \rangle &= \frac{1}{2} \sin \vartheta \\ \langle ++ | \sigma_1 \cdot \sigma_2 | ++ \rangle &= -\frac{1}{2} (3 - \cos \vartheta) \\ \langle ++ | \sigma_1 \cdot \sigma_2 | -- \rangle &= \frac{1}{2} (3 + \cos \vartheta) \\ \langle +- | \sigma_1 \cdot \sigma_2 | +- \rangle &= \frac{1}{2} (1 + \cos \vartheta) \\ \langle +- | \sigma_1 \cdot \sigma_2 | -+ \rangle &= \frac{1}{2} (1 - \cos \vartheta) \\ \langle ++ | \sigma_1 \cdot \sigma_2 | +- \rangle &= -\frac{1}{2} \sin \vartheta \\ \langle +- | \sigma_1 \cdot \sigma_2 | ++ \rangle &= \frac{1}{2} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (C.31)$$

- Os polinômios de Jacobi podem ser expressos em termos de polinômios de Legendre

$$\begin{aligned}
 d_{00}^J(\vartheta) &= P_J(\cos \vartheta) \\
 (1 + \cos \vartheta) d_{11}^J(\vartheta) &= P_J + \frac{J+1}{2J+1} P_{J-1} + \frac{J}{2J+1} P_{J+1} \\
 &= P_J + \frac{J}{J+1} \cos \vartheta P_J + \frac{1}{J+1} P_{J-1} \\
 (1 - \cos \vartheta) d_{-11}^J(\vartheta) &= -P_J + \frac{J+1}{2J+1} P_{J-1} + \frac{J}{2J+1} P_{J+1} \\
 &= -P_J + \frac{J}{J+1} \cos \vartheta P_J + \frac{1}{J+1} P_{J-1}, \\
 \sin \vartheta d_{10}^J(\vartheta) &= -\sin \vartheta d_{10}^J(\vartheta) = \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\
 &= \sqrt{\frac{J}{J+1}} (\cos \vartheta P_J - P_{J-1}). \tag{C.32}
 \end{aligned}$$

C.5 O Potencial NN de Fock-Tani e o Formalismo da Matriz R

Nesta seção vamos apresentar as equações do formalismo da matriz R relacionadas com o potencial de Fock-Tani e que não foram mostradas, em detalhe, no capítulo V sobre as aplicações por uma questão de clareza do texto.

O potencial NN de Fock-Tani pode ser reescrito explicitando os operadores de spin e isospin

$$\begin{aligned}
 V_{NN}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= V_c(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \boldsymbol{\tau}_A \cdot \boldsymbol{\tau}_B V_\tau(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B V_\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \\
 &\quad + \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B \boldsymbol{\tau}_A \cdot \boldsymbol{\tau}_B V_{\sigma\tau}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tag{C.33}
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 V_c &= \frac{1}{12} v_2 + \frac{3}{4} v_3 + \frac{1}{4} (v_4 + v_5) \\
 V_\tau &= \frac{1}{108} v_2 + \frac{1}{12} v_3 - \frac{1}{36} (v_4 + v_5) \\
 V_\sigma &= \frac{1}{36} v_2 - \frac{1}{36} v_3 - \frac{1}{36} (v_4 + v_5) \\
 V_{\sigma\tau} &= \frac{1}{324} v_2 - \frac{25}{324} v_3 + \frac{5}{324} (v_4 + v_5). \tag{C.34}
 \end{aligned}$$

A expressão (C.33) para o potencial núcleon-núcleon pode ser escrita na base de helicidade

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}' \lambda'_1 \lambda'_2 | V_{NN} | \mathbf{q} \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \lambda_1 \lambda_2 \rangle V_c(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \boldsymbol{\tau}_A \cdot \boldsymbol{\tau}_B \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \lambda_1 \lambda_2 \rangle V_\tau(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \\ &+ \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B | \lambda_1 \lambda_2 \rangle V_\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \\ &+ \boldsymbol{\tau}_A \cdot \boldsymbol{\tau}_B \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B | \lambda_1 \lambda_2 \rangle V_{\sigma\tau}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'). \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Fazendo a decomposição em ondas parciais de (C.33)

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V_{NN}^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) d_{\lambda\lambda'}^J(\vartheta) \langle \mathbf{q}' \lambda'_1 \lambda'_2 | V_{NN} | \mathbf{q} \lambda_1 \lambda_2 \rangle. \quad (\text{C.36})$$

e definindo

$$\begin{aligned} V_1^J(q', q) &\equiv \langle ++ | V_{NN}^J(q', q) | ++ \rangle, & V_2^J(q', q) &\equiv \langle ++ | V_{NN}^J(q', q) | -- \rangle, \\ V_3^J(q', q) &\equiv \langle +- | V_{NN}^J(q', q) | +- \rangle, & V_4^J(q', q) &\equiv \langle +- | V_{NN}^J(q', q) | -+ \rangle, \\ V_5^J(q', q) &\equiv \langle ++ | V_{NN}^J(q', q) | +- \rangle, & V_6^J(q', q) &\equiv \langle +- | V_{NN}^J(q', q) | ++ \rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

onde novamente $\lambda_i = \pm 1/2$ é denotado por $\pm$. Como foi feito antes em (C.20), introduzimos uma combinação linear, desta vez com os V_i^J

$$\begin{aligned} {}^0V^J &\equiv V_1^J - V_2^J, & {}^1V^J &\equiv V_3^J - V_4^J, & {}^{12}V^J &\equiv V_1^J + V_2^J \\ {}^{34}V^J &\equiv V_3^J + V_4^J, & {}^{55}V^J &\equiv 2V_5^J, & {}^{66}V^J &\equiv 2V_6^J. \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Utilizando (C.31) e (C.32) em (C.36) chegamos nas expressões para cada uma das partes de (C.33).

O termo central

$$\begin{aligned} V_{c_1}^J &= 2\pi \int_{-1}^1 dt P_J(t) \left[\frac{1}{2}(1+t) \right] V_c(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \\ V_{c_2}^J &= 2\pi \int_{-1}^1 dt P_J(t) \left[-\frac{1}{2}(1-t) \right] V_c(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \\ V_{c_3}^J &= 2\pi \int_{-1}^1 dt \frac{1}{2} \left[P_J(t) + \frac{J+1}{2J+1} P_{J-1}(t) + \frac{J}{2J+1} P_{J+1}(t) \right] V_c(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \\ V_{c_4}^J &= 2\pi \int_{-1}^1 dt \frac{1}{2} \left[-P_J(t) + \frac{J+1}{2J+1} P_{J-1}(t) + \frac{J}{2J+1} P_{J+1}(t) \right] V_c(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \\ V_{c_5}^J &= V_{c_6}^J = 2\pi \int_{-1}^1 dt \frac{1}{2} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} [P_{J-1}(t) - P_{J+1}(t)] V_c(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

Desta forma usando (C.39) em (C.38) encontramos

$$\begin{aligned}
 {}^0V_c^J &= 2\pi \int_{-1}^1 dt P_J(t) V_c(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \\
 {}^1V_c^J &= 2\pi \int_{-1}^1 dt P_J(t) V_c(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \\
 {}^{12}V_c^J &= 2\pi \int_{-1}^1 dt t P_J(t) V_c(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \\
 {}^{34}V_c^J &= 2\pi \int_{-1}^1 dt \left[\frac{J+1}{2J+1} P_{J-1}(t) + \frac{J}{2J+1} P_{J+1}(t) \right] V_c(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \\
 {}^{55}V_c^J &= {}^{66}V_c^J = 2\pi \int_{-1}^1 dt \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} [P_{J-1}(t) - P_{J+1}(t)] V_c(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t)
 \end{aligned} \tag{C.40}$$

O termo spin-spin

$$\begin{aligned}
 V_{\sigma_1}^J &= 2\pi \int_{-1}^1 dt P_J(t) \left[-\frac{1}{2}(3-t) \right] V_{\sigma}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \\
 V_{\sigma_2}^J &= 2\pi \int_{-1}^1 dt P_J(t) \left[\frac{1}{2}(1+t) \right] V_{\sigma}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \\
 V_{\sigma_3}^J &= 2\pi \int_{-1}^1 dt \frac{1}{2} \left[P_J(t) + \frac{J+1}{2J+1} P_{J-1}(t) + \frac{J}{2J+1} P_{J+1}(t) \right] V_{\sigma}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \\
 V_{\sigma_4}^J &= 2\pi \int_{-1}^1 dt \frac{1}{2} \left[-P_J(t) + \frac{J+1}{2J+1} P_{J-1}(t) + \frac{J}{2J+1} P_{J+1}(t) \right] V_{\sigma}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \\
 V_{\sigma_5}^J &= V_{\sigma_6}^J = 2\pi \int_{-1}^1 dt \frac{1}{2} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} [P_{J-1}(t) - P_{J+1}(t)] V_{\sigma}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t)
 \end{aligned} \tag{C.41}$$

onde de uma forma similar a (C.40) obtemos

$$\begin{aligned}
 {}^0V_{\sigma}^J &= 2\pi \int_{-1}^1 dt (-3) P_J(t) V_{\sigma}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \\
 {}^1V_{\sigma}^J &= 2\pi \int_{-1}^1 dt P_J(t) V_{\sigma}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \\
 {}^{12}V_{\sigma}^J &= 2\pi \int_{-1}^1 dt t P_J(t) V_{\sigma}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \\
 {}^{34}V_{\sigma}^J &= 2\pi \int_{-1}^1 dt \left[\frac{J+1}{2J+1} P_{J-1}(t) + \frac{J}{2J+1} P_{J+1}(t) \right] V_{\sigma}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \\
 {}^{55}V_{\sigma}^J &= {}^{66}V_{\sigma}^J = 2\pi \int_{-1}^1 dt \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} [P_{J-1}(t) - P_{J+1}(t)] V_{\sigma}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t)
 \end{aligned} \tag{C.42}$$

O termo proporcional a $\tau_A \cdot \tau_B$ é obtido multiplicando as expressões de V_c por $\tau_A \cdot \tau_B$.

O termo proporcional a $\tau_A \cdot \tau_B \sigma_A \cdot \sigma_B$ é obtido multiplicando as expressões de V_{σ} por

$\tau_A \cdot \tau_B$.

C.6 As Tabelas dos Deslocamentos de Fase

Nesta seção apresentaremos as tabelas dos deslocamentos de fase associados aos gráficos mostrados no capítulo V, onde nas tabelas (C.1) - (C.4) usamos $b = .45$ fm. A notação omega 10 e omega 20 significa $g^2_{\omega N}/4\pi \sim 10$ e $g^2_{\omega N}/4\pi \sim 20$, respectivamente.

E_{LAB} (MeV)	δ_{quarks} (graus)	$\delta_{\omega 10}$ (graus)	$\delta_{\omega 20}$ (graus)
10	-9.58812	-9.90025	-12.74604
25	-15.09775	-15.52325	-20.01588
50	-21.20441	-21.66354	-28.00170
75	-25.78998	-26.20171	-33.94692
100	-29.57190	-29.89786	-38.82257
125	-32.83014	-33.05158	-43.01023
150	-35.70928	-35.81874	-46.70792
175	-38.29579	-38.29299	-50.03440
200	-40.64640	-38.29299	-53.06762
225	-42.80079	-38.29299	-55.86204
250	-44.78801	-44.48845	-58.45746
275	-46.63017	-46.25343	-60.88400
300	-48.34454	-47.90409	-63.16511
325	-49.94493	-49.45520	-65.31944
350	-51.44265	-50.91874	-67.36208
375	-52.84703	-52.30457	-69.30549
400	-54.16596	-53.62090	-71.16004

Figura C.1: Os deslocamentos de fase para a onda 1S_0 .

E_{LAB} (MeV)	δ_{quarks} (graus)	$\delta_{\omega 10}$ (graus)	$\delta_{\omega 20}$ (graus)
10	-0.04941	-0.18238	-0.30700
25	-0.18983	-0.67872	-1.12872
50	-0.51269	-1.75004	-2.86280
75	-0.90060	-2.95533	-4.77174
100	-1.32744	-4.21130	-6.72793
125	-1.77802	-5.47891	-8.67654
150	-2.24236	-6.73788	-10.59178
175	-2.71347	-7.97729	-12.46150
200	-3.18623	-9.19126	-14.28038
225	-3.65683	-10.37683	-16.04678
250	-4.12239	-11.53272	-17.76104
275	-4.58067	-12.65868	-19.42455
300	-5.02995	-13.75507	-21.03924
325	-5.46888	-14.82258	-22.60731
350	-5.89642	-15.86216	-24.13103
375	-6.31177	-16.87482	-25.61267
400	-6.71431	-17.86165	-27.05441

Figura C.2: Os deslocamentos de fase para a onda 1P_1 .

E_{LAB} (MeV)	δ_{quarks} (graus)	$\delta_{\omega 10}$ (graus)	$\delta_{\omega 20}$ (graus)
10	-0.00042	-0.00157	-0.00297
25	-0.00401	-0.01459	-0.02748
50	-0.02165	-0.07455	-0.13945
75	-0.05699	-0.18642	-0.34617
100	-0.11174	-0.34872	-0.64280
125	-0.18646	-0.55728	-1.01983
150	-0.28102	-0.80707	-1.46663
175	-0.39482	-1.09303	-1.97293
200	-0.52699	-1.41035	-2.52934
225	-0.67646	-1.75468	-3.12762
250	-0.84204	-2.12211	-3.76059
275	-1.02252	-2.50922	-4.42213
300	-1.21665	-2.91299	-5.10699
325	-1.42318	-3.33080	-5.81072
350	-1.64092	-3.76037	-6.52955
375	-1.86870	-4.19972	-7.26029
400	-2.10541	-4.64713	-8.00023

Figura C.3: Os deslocamentos de fase para a onda 1D_2 .

E_{LAB} (MeV)	δ_{quarks} (graus)	$\delta_{\omega 10}$ (graus)	$\delta_{\omega 20}$ (graus)
10	0.00000	-0.00001	-0.00002
25	0.00000	-0.00026	-0.00051
50	-0.00002	-0.00256	-0.00503
75	-0.00008	-0.00940	-0.01839
100	-0.00022	-0.02293	-0.04474
125	-0.00046	-0.04485	-0.08727
150	-0.00085	-0.07641	-0.08727
175	-0.00141	-0.11843	-0.22906
200	-0.00217	-0.17143	-0.33051
225	-0.00316	-0.23565	-0.45286
250	-0.00440	-0.31115	-0.59597
275	-0.00593	-0.39780	-0.75942
300	-0.00776	-0.49538	-0.94258
325	-0.00991	-0.60359	-1.14465
350	-0.01239	-0.72204	-1.36477
375	-0.01521	-0.85032	-1.60199
400	-0.01839	-0.98800	-1.85534

Figura C.4: Os deslocamentos de fase para a onda 1F_3 .

E_{LAB} (MeV)	$\delta_{b=.3}$ (graus)	$\delta_{b=.4}$ (graus)	$\delta_{b=.5}$ (graus)	$\delta_{b=.6}$ (graus)
10	-4.52735	-7.81350	-9.50721	-15.23820
25	-7.13428	-12.30631	-14.93645	-23.97467
50	-10.03266	-17.29082	-20.89755	-33.62565
75	-12.21800	-21.03850	-25.31756	-40.84178
100	-14.02798	-24.13340	-28.91475	-46.76783
125	-15.59421	-26.80332	-31.97046	-51.85134
150	-16.98456	-29.16586	-34.63055	-56.32388
175	-18.23961	-31.29131	-36.98258	-60.32421
200	-19.38593	-33.22580	-39.08421	-63.94353
225	-20.44209	-35.00153	-40.97591	-67.24574
250	-21.42169	-36.64214	-42.68747	-70.27773
275	-22.33505	-38.16554	-44.24162	-73.07520
300	-23.19025	-39.58576	-45.65622	-75.66611
325	-23.99373	-40.91403	-46.94564	-78.07286
350	-24.75077	-42.15951	-48.12169	-80.31375
375	-25.46574	-43.32978	-49.19420	-82.40396
400	-26.14229	-44.43124	-50.17151	-84.35626

Figura C.5: Os deslocamentos de fase dos quarks para a onda 1S_0 .

E_{LAB} (MeV)	$\delta_{b=.3}$ (graus)	$\delta_{b=.4}$ (graus)	$\delta_{b=.5}$ (graus)	$\delta_{b=.6}$ (graus)
10	-0.00716	-0.02842	-0.05204	-0.18340
25	-0.02800	-0.10991	-0.19897	-0.68623
50	-0.07770	-0.30000	-0.53304	-1.78088
75	-0.14008	-0.53223	-0.92897	-3.01890
100	-0.21168	-0.79187	-1.35865	-4.30882
125	-0.29039	-1.07012	-1.80597	-5.60430
150	-0.37477	-1.36103	-2.26047	-6.87905
175	-0.46372	-1.66031	-2.71499	-8.11733
200	-0.55636	-1.96470	-3.16443	-9.30944
225	-0.65201	-2.27168	-3.60509	-10.44939
250	-0.75009	-2.57927	-4.03426	-11.53356
275	-0.85010	-2.88587	-4.44993	-12.55983
300	-0.95162	-3.19019	-4.85065	-13.52716
325	-1.05430	-3.49119	-5.23534	-14.43517
350	-1.15783	-3.78801	-5.60326	-15.28401
375	-1.26192	-4.07993	-5.95389	-16.07413
400	-1.36634	-4.36639	-6.28692	-16.80626

Figura C.6: Os deslocamentos de fase dos quarks para a onda 1P_1 .

E_{LAB} (MeV)	$\delta_{b=.3}$ (graus)	$\delta_{b=.4}$ (graus)	$\delta_{b=.5}$ (graus)	$\delta_{b=.6}$ (graus)
10	-0.00003	-0.00019	-0.00053	-0.00290
25	-0.00025	-0.00181	-0.00509	-0.02725
50	-0.00140	-0.00985	-0.02722	-0.14136
75	-0.00378	-0.02620	-0.07097	-0.35730
100	-0.00761	-0.05190	-0.13785	-0.67317
125	-0.01303	-0.08749	-0.22794	-1.08042
150	-0.02016	-0.13319	-0.34045	-1.56783
175	-0.02907	-0.18900	-0.47412	-2.12352
200	-0.03981	-0.25476	-0.62739	-2.73601
225	-0.05242	-0.33018	-0.79855	-3.39467
250	-0.06691	-0.41492	-0.98584	-4.08996
275	-0.08329	-0.50857	-1.18751	-4.81349
300	-0.10156	-0.61066	-1.18751	-5.55793
325	-0.12170	-0.72073	-1.62721	-6.31698
350	-0.14369	-0.83830	-1.86205	-7.08525
375	-0.16750	-0.96286	-2.10494	-7.85813
400	-0.19311	-1.09393	-2.35451	-8.63173

Figura C.7: Os deslocamentos de fase dos quarks para a onda 1D_2 .

E_{LAB} (MeV)	$\delta_{b=.3}$ (graus)	$\delta_{b=.4}$ (graus)	$\delta_{b=.5}$ (graus)	$\delta_{b=.6}$ (graus)
10	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
25	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00002
50	0.00000	-0.00001	-0.00005	-0.00026
75	0.00000	-0.00003	-0.00021	-0.00102
100	-0.00001	-0.00008	-0.00055	-0.00261
125	-0.00001	-0.00017	-0.00115	-0.00536
150	-0.00002	-0.00031	-0.00208	-0.00952
175	-0.00004	-0.00051	-0.00342	-0.01531
200	-0.00007	-0.00080	-0.00522	-0.02291
225	-0.00010	-0.00117	-0.00754	-0.03244
250	-0.00014	-0.00165	-0.01043	-0.04397
275	-0.00019	-0.00224	-0.01393	-0.05751
300	-0.00026	-0.00295	-0.01806	-0.07305
325	-0.00034	-0.00379	-0.02285	-0.09053
350	-0.00043	-0.00478	-0.02832	-0.10985
375	-0.00054	-0.00591	-0.03446	-0.13090
400	-0.00066	-0.00721	-0.04128	-0.15354

Figura C.8: Os deslocamentos de fase dos quarks para a onda 1F_3 .

Apêndice D

As Variáveis de Mandelstam e a Aproximação Local do Potencial

Neste apêndice mostraremos como obter um potencial local a partir de uma dependência geral nas variáveis de quadri-momento iniciais (p_1, p_2) e finais (p_3, p_4) . Primeiro definimos as variáveis de Mandelstam

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Escrevemos as variáveis p_i no centro de massa, introduzindo as seguintes variáveis relativas

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \\ \mathbf{q} &= \mathbf{p} - \mathbf{p}' \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

onde a variável $\mathbf{q}$ é o momento transferido. Desta forma a variável de Mandelstam s pode ser escrita assim

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = 2(m^2 + E_1 E_2) - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 \\ &= 2(m^2 + E^2) + 2\mathbf{p}^2 \\ &= 4m^2 + 4(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q})^2 \\ &= 4(m^2 + \mathbf{p}^2) + \mathbf{q}^2 + 4\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

enquanto que a variável t de Mandelstam fica igual a

$$t = -q^2. \quad (D.4)$$

A parte espacial do potencial NN de Fock-Tani (V.60)

$$\begin{aligned} v_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= v_3(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = k_{ss} \exp \left[-\frac{b^2}{3} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 \right] \\ v_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= k_{ss} \left(\frac{3}{4} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{b^2}{6} (\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2) \right] \\ v_4(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= v_5(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = k_{ss} \left(\frac{12}{11} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{2b^2}{11} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 - \frac{b^2}{33} (\mathbf{p}^2 + 7\mathbf{p}'^2) \right] \end{aligned} \quad (D.5)$$

pode ser rescrito em termos de (D.1) obtendo

$$\begin{aligned} v_1(s, t) &= v_3(s, t) = k_{ss} \exp \left[\frac{b^2 t}{3} \right] \\ v_2(s, t) &= k_{ss} \left(\frac{3}{4} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{b^2}{12} (s - 4m^2) \right] \\ v_4(s, t) &= v_5(s, t) = k_{ss} \left(\frac{12}{11} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{2b^2 t}{11} - \frac{2b^2}{33} (s - 4m^2) \right]. \end{aligned} \quad (D.6)$$

Realizar a aproximação local significa eliminar a dependência em $\mathbf{p}$ do potencial, restando apenas a variável local $\mathbf{q}$ associada ao momento transferido, isto é, tomar

$$\mathbf{p} \approx 0, \quad (D.7)$$

o que é equivalente a fazer as seguintes substituições

$$\begin{aligned} s &\longrightarrow 4m^2 + q^2 \\ t &\longrightarrow -q^2 \end{aligned} \quad (D.8)$$

em (D.6), resultando na seguinte expressão

$$\begin{aligned} v_1(\mathbf{q}) &= v_3(\mathbf{q}) \approx k_{ss} \exp \left[-\frac{b^2}{3} q^2 \right] \\ v_2(\mathbf{q}) &\approx k_{ss} \left(\frac{3}{4} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{b^2}{12} q^2 \right] \\ v_4(\mathbf{q}) &= v_5(\mathbf{q}) \approx k_{ss} \left(\frac{12}{11} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{8b^2}{33} q^2 \right]. \end{aligned} \quad (D.9)$$

Referências Bibliográficas

- [1] H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **17**, 48 (1935).
- [2] I. S. Hughes, *Elementary particles*, Cambridge University Press, Cambridge, 3rd edition (1991).
- [3] M. Taketani, S. Nakamura, N. Sasaki, Prog. Theor. Phys. (Kyoto) **6**, 581 (1951).
- [4] G. Breit, Rev. Mod. Phys. **34**, 766 (1962).
- [5] N. K. Glendenning, G. Krammer, Phys. Rev. **126**, 2159 (1962).
- [6] N. Hoshizaki, S. Machida, Prog. Theor. Phys. (Kyoto) **27**, 288 (1962).
- [7] R. Machleidt, K. Holinde, Ch. Elster, Phys. Rep. **149**, 1 (1987).
- [8] K. Huang, *Quarks, leptons & gauge fields*, Singapore: World Scientific Publishing Co. (1982).
- [9] Taizo Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics - An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*, World Scientific Lecture Notes in Physics - vol. 5, (1987)
- [10] M. Betz, G. I. Krein, Th.A.J. Maris, Nucl. Phys. A **437**, 509 (1985).
- [11] G. I. Krein, Th.A.J. Maris, Phys. Rev. C **36**, 365 (1987).
- [12] A. De Rújula, G. Howard, S. L. Glashow, Phys. Rev. D **12**, 147 (1975).
- [13] J.A. Wheeler, Phys. Rev. **52**, 1083, 1107 (1937).
- [14] D. Bohm and D. Pines, Phys. Rev. **92**, 609 (1953).

- [15] F.J. Dyson, Phys. Rev. **102**, 1217 (1956).
- [16] S. Tani, Phys. Rev. **117**, 252 (1960).
- [17] M.D. Girardeau, Phys. Rev. Lett. **27**, 1416 (1971).
- [18] V.S. Vorob'ev and A.L. Khomkin, Teor. i Mat. Fiz. **8**, 109 (1971) (in Russian).
Tradução para o inglês: Consultants Bureau, Plenum Publ. Co., New York, (1972).
- [19] M.D. Girardeau, J.Math. Phys. **16**, 1901 (1975).
- [20] M.D. Girardeau and J.D. Gilbert, Physica **97 A**, 42 (1979).
- [21] M.D. Girardeau, J. Math. Phys. **16**, 1901 (1975).
- [22] J. D. Gilbert, J. Math. Phys. **18**, 791 (1977).
- [23] M.D. Girardeau, J. D. Gilbert, Physica **97 A**, 42 (1979).
- [24] M.D. Girardeau, Phys. Rev. A **26**, 217 (1982).
- [25] P. C. Ojha, M.D. Girardeau, J. D. Gilbert, J. C. Straton, Phys. Rev. A **33**, 112 (1986).
- [26] J. C. Straton, Phys. Rev. A **35**, 3725 (1987).
- [27] J. C. Straton, M.D. Girardeau, Phys. Rev. A **40** , 2991 (1989).
- [28] Chaomei Lo, M.D. Girardeau, Phys. Rev. A **41** , 158 (1990).
- [29] J. C. Straton, Phys. Rev. A **43** , 6018 (1991).
- [30] S. Weinberg, Phys. Rev. **130**, 776 (1963).
- [31] S. Weinberg, Phys. Rev. **131**, 440 (1963).
- [32] D. Hadjimichef, G. Krein, S. Szpigel, J. S. da Veiga, *HADRON PHYSICS - 94, Topics on the Structure and Interaction of Hadronic Systems*, edited by Victoria E. Herscovitz, Cesar A. Z. Vasconcellos and Erasmo Ferreira. Pag. 273-276 e 277-280, World Scientific (1995).

- [33] D. Hadjimichef, G. Krein, S. Szpigel, J. S. da Veiga, *Second quantization approach to composite hadron interactions in the quark models*, Aceito para publicação em Phys. Lett. B. *Fock-Tani representation for hadron-hadron interactions. II. Baryons*. Submetido para publicação.
- [34] J.E.T.F. Ribeiro, Z. Phys. C **5**, 27 (1980).
- [35] A. Faessler, F. Fernandes, G. Lübeck and K. Shimizu, Phys. Lett. **112B**, 201 (1982).
- [36] A. Faessler and F. Fernandes, Phys. Lett. **124B**, 145 (1983).
- [37] M. Oka and K. Yazaki, Prog. Theor. Phys. **66**, 556 (1981).
- [38] M. Oka and K. Yazaki, Prog. Theor. Phys. **66**, 572 (1981)).
- [39] K. Holinde, Nucl. Phys. A **415**, 477 (1984).
- [40] G. Q. Liu, M. Swift, A. W. Thomas and K. Holinde, Nuclear Phys. A **556**, 331 (1993).
- [41] E.S. Swanson, Ann. Phys. (N.Y.) **220**, 73 (1992).
- [42] T. Barnes, E.S. Swanson, Phys. Rev. D **46**, 131 (1992)
- [43] T. Barnes, S. Capstick, M.D. Kovarik and E.S. Swanson, Phys. Rev. C **48**, 539 (1993).
- [44] S. Szpigel, Tese de Doutorado a ser apresentada no IF-USP em Março de 1996.
- [45] M. D. Girardeau, G. Krein, D. Hadjimichef, *Field-theoretic approach for systems of composite hadrons*, Submetido para publicação.
- [46] M. Betz, M. D. Girardeau, G. Krein, *Fock-Tani representation for hadron and nuclear physics*. Em preparação.
- [47] D.J. Gross e F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973); H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [48] S. Adler, Phys. Rev. **117**, 2426 (1969).
- [49] J. Bell, R. Jackiw, Nuov. Cimento **60 A**, 47 (1969).

- [50] J. Kogut, L. Susskind, Phys. Rev. D **9**, 3501 (1974).
- [51] K. Wilson, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974).
- [52] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [53] G. Zweig ,CERN Report th401,4r12 (1964).
- [54] H. J. Lipkin, Phys. Rep. C **8**, 173, (1973).
- [55] H. J. Lipkin, Phys. Lett. B **45**, 267, (1973). 
- [56] N. Isgur, G. Karl, Phys. Rev. D **18**, 4187 (1978).
- [57] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Relativistic Quantum Theory*, Pergamon Press, London (1960).
- [58] J. W. Durso, A. D. Jackson, B. J. Verwest, Nucl. Phys. A **345**, 471 (1980).
- [59] A. Messiah, *Mecanica Cuantica*, tomo II, editorial Tecnos, Madrid, 586 (1964).
- [60] S. S. M. Wong, *Introductory Nuclear Physics*, Prentice-Hall International Editions, (1990).

