



Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.002/14

**Constantes de Movimento para o Modelo Sinh-Gordon Supersimétrico**  
 **$N = 1$  com Defeito**

Nathaly Infantini Spano

Orientador

*Abraham Hirszt Zimmerman*

Coorientador

*José Francisco Gomes*

Fevereiro de 2014

# Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer ao meu orientador Abraham Hirsz Zimmerman e ao Prof. José Francisco Gomes, pelo apoio que recebi quando cheguei ao instituto, e por toda a ajuda e ensinamentos que possibilitaram a conclusão dessa dissertação.

Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro.

Sou imensamente grata à minha antiga orientadora Regina Maria Ricotta, que foi muito mais do que uma professora, foi uma mentora, amiga, conselheira. Enfim obrigada por tudo Regina.

Aos meus amigos da FATEC-SP, Fernando, Leandro, Marcelo, Nadia, Livia pelas conversas e momentos de descontração. Obrigada pelos bons momentos que passamos.

Aos colegas do IFT, pelas discussões construtivas. Em especial agradeço ao Jonathan pelas ajudas em diversos momentos. Ao Alexis pela colaboração.

Por fim agradeço profundamente à minha família, pelo carinho, dedicação e apoio, sem o qual eu não teria chegado até aqui. Agradeço à minha mãe por estar sempre ao meu lado, me apoiando em tudo e aconselhando da melhor forma. Em especial devo um agradecimento ao meu avô, Paulo Infantini, que de todas as pessoas foi sem dúvida aquele que mais acreditou em mim, quem me incentivava em sempre seguir adiante nos estudos, que sonhava em me ver entrando numa faculdade pública. Infelizmente, você foi embora antes de ver tudo isso. Obrigada por tudo vô, essa dissertação é dedicada ao senhor, saudades eternas vô Paulinho.

*Em memória ao meu avô, Paulo Infantini*

# Resumo

A partir dos geradores da superálgebra de Kac-Moody  $\tilde{sl}(2, 1)$  escrevemos o par de Lax para o modelo sinh-Gordon supersimétrico. Em adição, verificamos que através da equação de curvatura nula o Lax obtido, reproduz as equações de movimento do modelo. Para a análise de teorias com defeito calculamos, por meio de uma transformação de Gauge, a matriz de defeito para o modelo sinh-Gordon supersimétrico, e apresentamos o resultado similar obtido para o modelo sine-Gordon. Notamos ainda que na região do defeito, os campos da teoria obedecem equações do tipo das transformações de Backlund. Foram obtidas também a energia e o momento para o modelo super sinh-Gordon, a partir de uma expressão geral, que nos permite obter o conjunto infinito de cargas conservadas para modelo. Além disso, as contribuições do defeito dessas quantidades foram também encontradas.

**Palavras chave:** Modelos integráveis; Modelo sinh-Gordon supersimétrico; Leis de conservação; Transformações de Backlund.

**Área do Conhecimento:** Teoria de campos; Física matemática.

# Abstract

From the generators of the Kac-Moody superálgebra  $\tilde{sl}(2, 1)$  write the Lax pair for the supersymmetric sinh-Gordon model. In addition, we find that through the zero curvature obtained the Lax equation reproduces the equations of motion of the model. For the analysis of defective theories calculated by means of a gauge transformation, the default matrix for the model sinh supersymmetric Gordon, and present the result similar to the sine-Gordon model. We also note that in the defect region, the field equations of the theory obey the type of Backlund transformations. The energy and momentum for the super sinh-Gordon model were also obtained from a general expression that allows us to obtain the infinite set of conserved charges for style. In addition, the contributions of the defect these quantities have also been found.

**Key words:** Integrable Models; Supersymmetric sinh-Gordon model; Conservation Laws; Backlund Transformations.

**Area:** Field Theory; Mathematical Physics.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Iniciais</b>	<b>3</b>
2.1	Integrabilidade . . . . .	3
2.2	Par de Lax . . . . .	5
2.3	Equação de curvatura nula . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Transformações de Backlund</b>	<b>8</b>
3.1	Transformações de Backlund para a equação sine-Gordon . . . . .	8
3.2	Transformações de Backlund para a equação sinh-Gordon supersimétrico . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Teorias de Campos com Defeito</b>	<b>15</b>
4.1	Formulação Lagrangeana . . . . .	15
4.2	Teoria bosônica . . . . .	17
4.3	Teoria fermiônica . . . . .	20
4.4	Modelo super sinh-Gordon $N = 1$ . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Superálgebra de Lie <math>sl(2, 1)</math></b>	<b>26</b>
5.1	Superálgebra de Kac-Moody $\tilde{sl}(2, 1)$ . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Par de Lax do modelo sinh-Gordon supersimétrico <math>N = 1</math></b>	<b>30</b>
<b>7</b>	<b>Matriz defeito</b>	<b>33</b>
7.1	Modelo sine-Gordon . . . . .	34
7.2	Modelo super sinh-Gordon . . . . .	36
7.2.1	Caso Bosônico . . . . .	36
7.2.2	Caso Fermiônico . . . . .	38
7.2.3	Caso Bosônico-Fermiônico . . . . .	40

<b>8</b>	<b>Quantidades Conservadas</b>	<b>43</b>
8.1	Teoria sem defeito . . . . .	43
<b>9</b>	<b>Contribuições do Defeito</b>	<b>51</b>
9.1	Caso Bosônico . . . . .	54
9.2	Caso Fermiônico . . . . .	55
9.3	Caso Bosônico Fermiônico . . . . .	57
<b>10</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>59</b>
<b>A</b>	<b>Relações de comutação e anti comutação para <math>\tilde{sl}(2, 1)</math></b>	<b>60</b>
<b>B</b>	<b>Cálculos para as matrizes defeito</b>	<b>62</b>
B.1	Equações para o caso bosônico . . . . .	63
B.2	Equações para o caso fermiônico . . . . .	64
B.3	Equações para o caso bosônico-fermiônico . . . . .	66
<b>C</b>	<b>Cálculos e Equações das Quantidades Conservadas</b>	<b>73</b>
C.1	Primeira Linha-Expansão em Potências Positivas . . . . .	73
C.2	Primeira Linha-Expansão em Potências Negativas . . . . .	77
C.3	Vetor $\Psi$ . . . . .	79

# Capítulo 1

## Introdução

Sistemas integráveis admitem soluções do tipo sóliton. Essas soluções são ondas não lineares localizadas (representando uma concentração de energia em uma região finita do espaço), que se propagam com velocidade constante e mantém a sua forma preservada. A estabilidade dessas soluções está associada à existência de um número infinito de quantidades conservadas ou constantes de movimento em involução.

Um tópico interessante no estudo desse tipo de sistema é analisá-lo na presença de defeitos ou impurezas. Nesse sentido, em teorias de campos integráveis essa descontinuidade é introduzida como uma condição de contorno interna, localizada em um ponto  $a$  do eixo  $x$ , que liga uma teoria de campo em  $x < a$  à outra teoria (possivelmente diferente) em  $x > a$  [11]. Em particular, nota-se que com a introdução desse tipo de defeito, a invariância por translação espacial é quebrada, uma vez que impomos uma restrição à variável  $x$ , e portanto espera-se uma violação na conservação do momento. Contudo foi verificado por P. Bowcock, E. Corrigan e C. Zambon em [11], que para manter a integrabilidade do modelo, os campos da teoria na região do defeito devem satisfazer equações do tipo das transformações de Backlund. Isso introduz potenciais de defeito que nos permite construir quantidades modificadas do momento e energia, e com isso levando em consideração a contribuição do defeito o momento volta a ser conservado.

Uma maneira de se obter as infinitas quantidades conservadas, em um sistema integrável é através do método do espalhamento inverso. M. Wadati mostrou em [7] que para obter as leis de conservação a partir do espalhamento inverso, as funções associadas às equações de Riccati (que surgem do espalhamento inverso), devem ser expandidas em série de potências do parâmetro espec-

tral efetivo  $\lambda$ . No seu artigo foi abordado o caso em que a expansão é para potências negativas de  $\lambda$ , contudo em [5, 17, 18] vemos que a expansão em potências positivas também foi considerada. Usaremos esse formalismo para determinar as cargas conservadas para o modelo sinh-Gordon supersimétrico  $N = 1$ , e em particular obtemos o momento e a energia antes derivados da formulação Lagrangeana.

Esta dissertação está organizada como segue. No capítulo 2, apresentamos brevemente algumas definições úteis quando tratamos de modelos integráveis: integrabilidade, formulação de Lax e a equação de curvatura nula, esta última gerando as equações de movimento do sistema integrável.

No capítulo 3, discutimos transformações de Backlund, um método útil para a obtenção de soluções para equações não lineares. Esse método é aplicado ao modelo sine-Gordon segundo [1], [2], [16]. Em seguida usaremos o formalismo de supercampos [4, 13, 14], a fim de obter tais transformações para o modelo sinh-Gordon supersimétrico com  $N = 1$ .

No capítulo 4, introduzimos a formulação Lagrangeana para teorias com defeito [9], analisando os casos: bosônico, fermiônico e super sinh-Gordon. Notamos que condições devem ser impostas aos potenciais do defeito, para que a conservação das quantidades modificadas seja preservada.

A seguir no capítulo 5, é apresentada a superálgebra  $sl(2, 1)$  na qual se baseia o modelo super sinh-Gordon  $N = 1$ . Com isso foi possível no capítulo 6 escrevermos o par de Lax para o modelo em questão, bem como a equação de curvatura nula e, portanto as respectivas equações de movimento.

No capítulo 7, mostramos como obter a matriz de defeito  $K$ , e apresentamos o resultado obtido em [5], para o modelo sine-Gordon. E da mesma, encontramos a forma explícita de  $K$  para o modelo super sinh-Gordon.

No capítulo 8, apresentamos a função geradora do infinito conjunto de cargas conservadas seguindo as referências [5, 17, 18]. Aplicamos a expressão obtida para o modelo sinh-Gordon, e escrevemos o momento e a energia como combinação linear das cargas encontradas.

No capítulo 9, são calculadas as contribuições do defeito para as quantidades mencionadas acima. Contudo um problema de sinal nos resultados obtidos deixa em aberto uma futura investigação.

Finalmente, no último capítulo fazemos as considerações finais e discutimos perspectivas para trabalhos futuros.

Nos apêndices são explicitados alguns cálculos úteis presentes nessa dissertação.

# Capítulo 2

## Conceitos Iniciais

### 2.1 Integrabilidade

Nessa seção discutiremos a definição de integrabilidade no sentido de Liouville. E para isso, vamos considerar primeiro um sistema mecânico, descrito em um espaço de fase  $2N$  dimensional com coordenadas canônicas  $q_i, p_i$  onde  $i = 1, \dots, N$ . Nesse espaço de fase a trajetória de um corpo será dada pelas seguintes equações de movimento [16]

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.1)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.2)$$

onde  $H$  é a Hamiltoniana do sistema, as chaves representam os parênteses de Poisson. Que por definição para duas funções  $f(q_i, p_i, t)$  e  $g(q_i, p_i, t)$  das variáveis canônicas e do tempo é dado por:

$$\{f, g\}_{PB} = \sum_{m=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (2.3)$$

tal que são satisfeitas as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\} \\ \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} &= 0 . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Desse modo, usando essa definição encontramos que as coordenadas canônicas satisfazem à

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} . \quad (2.5)$$

Portanto para uma função  $f(q_i, p_i, t)$  sua evolução temporal será

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Se  $f$  for independente de  $t$ , então  $\{H, f\} = 0$  e  $f$  será chamada de constante de movimento.

Para estender esse formalismo ao caso contínuo, vamos considerar  $N$  campos  $\phi_i(x, t)$  no espaço de fase, de modo que a Hamiltoniana do sistema será agora um funcional dos campos, isto é,

$$H[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} f[\phi, \phi_x, \phi_{xx} \dots] dx . \quad (2.7)$$

Deve-se ainda substituir as derivadas parciais por derivadas funcionais e as somatórias por integrais em  $x$ , de tal forma que, o parêntese de Poisson para dois funcionais  $F[\phi]$  e  $G[\phi]$  é definido como

$$\{F[\phi], G[\phi]\}_{PB} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \frac{\delta F}{\delta \phi_i(x, t)} v(x, y) \frac{\delta G}{\delta \phi_j(y, t)} \quad (2.8)$$

denotamos  $v(x, y) = \{\phi_i(x, t), \phi_j(y, t)\}$ . E as derivadas funcionais são dadas por

$$\frac{\delta H}{\delta \phi(x, t)} = \frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \phi_x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial \phi_{xx}} + \dots \quad (2.9)$$

com

$$\frac{\delta \phi_i(x, t)}{\delta \phi_j(y, t)} = \delta_{ij} \delta(x - y) \quad (2.10)$$

onde  $\delta(x - y)$  é a função delta de Dirac e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Assim podemos escrever a evolução temporal do campo como

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} dy v(x, y) \frac{\delta H}{\delta \phi_j(y, t)}. \quad (2.11)$$

Podemos então, definir que um sistema Hamiltoniano é integrável se existirem  $N$  funções  $I_j(q_i, p_i)$  linearmente independentes definidas no espaço de fase  $2N$  dimensional, que satisfazem à

$$\frac{dI_j}{dt} = \{H_i, I_j\} = 0, \quad \{I_i, I_j\} = 0. \quad (2.12)$$

Essas funções são chamadas constantes de movimento (ou integrais primeiras), e da segunda relação em (2.12) são ditas estarem em involução, ou seja, seus parênteses de Poisson são nulos. A existência de uma solução exata para o sistema integrável é garantida pelo teorema de Liouville [16].

Portanto, nesse sentido a integrabilidade para um sistema de ordem infinita, consiste na existência de um número infinito de cargas conservadas, bem como a involução de tais quantidades.

## 2.2 Par de Lax

O método de Lax consiste em associar equações de movimento não lineares à operadores lineares [16]. Para entender essa relação, vamos considerar primeiramente, o operador linear  $V$  satisfazendo

$$V(x, t, \lambda)\Psi(x, t, \lambda) = \lambda\Psi(x, t, \lambda), \quad \frac{d\lambda}{dt} = 0 \quad (2.13)$$

ou seja, o problema se resume portanto, a uma equação de autovalores para o operador  $V$ , que possui autovalores  $\lambda$  independentes do tempo ( $t$ ). Verifica-se que essa condição de independência temporal do autovalores é satisfeita, somente se a autofunção  $\Psi$  evoluir de acordo com

$$\partial_t \Psi(x, t, \lambda) = U(x, t, \lambda)\Psi(x, t, \lambda) \quad (2.14)$$

onde  $U$  é um operador linear. E assim teremos

$$\frac{\partial V}{\partial t} \Psi + V \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} \Psi + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t}\Psi + VU\Psi &= \lambda_t\Psi + U\lambda\Psi \\ \frac{\partial V}{\partial t}\Psi &= [U, V]\Psi .\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = [U, V] . \quad (2.15)$$

Essa é a equação de Lax e os operadores  $V$  e  $U$  são chamados par de Lax. Aqui temos portanto, que a equação de Lax aparece como condição de compatibilidade, para o problema de autovalores proposto acima.

Um exemplo amplamente abordado na literatura [16] é o caso da equação KdV, assim escolhendo o par de Lax como

$$V = -D^2 - A, \quad U = 4D^3 + 3(AD + DA) .$$

Logo,

$$\partial_t A + 6A\partial_x A + \partial_x^3 A = 0$$

que é como mencionado antes a equação KdV (Korteweg-de Vries).

## 2.3 Equação de curvatura nula

Uma outra formulação importante ao tratarmos de modelos integráveis é a equação de curvatura nula. Para essa abordagem, vamos considerar o seguinte sistema de equações

$$\partial_t \Psi(x, t, \lambda) = U(x, t, \lambda)\Psi(x, t, \lambda) \quad (2.16)$$

$$\partial_x \Psi(x, t, \lambda) = V(x, t, \lambda)\Psi(x, t, \lambda) \quad (2.17)$$

onde identificamos o par de Lax  $U$  e  $V$  que são matrizes  $m \times m$ ,  $\Psi(x, t, \lambda)$  é um vetor  $m$  dimensional,  $\lambda$  é o parâmetro espectral. Aplicando  $\partial_x$  e  $\partial_t$  em (2.16) e (2.17), respectivamente

$$\begin{aligned}\partial_x \partial_t \Psi &= \partial_x U \Psi + U \partial_x \Psi \\ \partial_t \partial_x \Psi &= \partial_t V \Psi + V \partial_t \Psi .\end{aligned}$$

Devemos ainda usar a condição de integrabilidade

$$\partial_x \partial_t \Psi(x, t, \lambda) = \partial_t \partial_x \Psi(x, t, \lambda) . \quad (2.18)$$

Dessa forma obtemos

$$\partial_t V - \partial_x U + [V, U] = 0 . \quad (2.19)$$

Essa é a equação de curvatura nula, nos permite escrever as equações de movimento para modelos integráveis. Como veremos no capítulo 6.

# Capítulo 3

## Transformações de Backlund

As transformações de Backlund (TB) foram desenvolvidas para estudar superfícies pseudoesféricas (superfícies com constante de curvatura negativa) [3]. Essas transformações formam um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem, e juntamente com o teorema da permutabilidade nos fornecem uma fórmula de superposição não linear, para construir algebricamente novas soluções de equações não lineares [1]. Um sistema cujas soluções podem ser obtidas através das TB(s) é o modelo sine-Gordon (SG), que apresenta como solução ondas do tipo sóliton.

### 3.1 Transformações de Backlund para a equação sine-Gordon

A equação de sine-Gordon é descrita pela expressão:

$$\partial_{xx}u - \partial_{tt}u = \sin u \quad (3.1)$$

onde consideramos um espaço bidimensional  $(x, t)$ , no qual vale a métrica  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1)$ . A equação (3.1) pode ser reescrita em termos das coordenadas do cone de luz, aqui definidas como  $x_{\pm} = x \pm t$  e portanto  $\partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_x \pm \partial_t)$  onde  $\partial_{x_{\pm}} = \partial_{\pm}$ .

$$\partial_+ \partial_- u = \frac{1}{4} \sin u . \quad (3.2)$$

Uma forma de se obter as soluções de (3.2) é através das transformações de Backlund. Tais transformações são definidas pelo seguinte conjunto [16],

$$\partial_+(\tilde{u} - u) = \omega \sin\left(\frac{\tilde{u} + u}{2}\right) \quad (3.3)$$

$$\partial_-(u + \tilde{u}) = \frac{1}{\omega} \sin\left(\frac{\tilde{u} - u}{2}\right) \quad (3.4)$$

onde  $\omega$  é o parâmetro da transformação. E pela condição de integrabilidade ( $\partial_+\partial_- = \partial_-\partial_+$ ) mostra-se, que  $\tilde{u}$  também satisfaz à equação SG, ou seja, as TB(s) relacionam duas soluções da equação de sine-Gordon. Assim pode-se encontrar a solução de 1-soliton, a partir da solução do vácuo com  $\tilde{u} = 0$  as equações de Backlund ficam

$$\partial_+u = -\omega \sin\left(\frac{u}{2}\right) \quad (3.5)$$

$$\partial_-u = -\frac{1}{\omega} \sin\left(\frac{u}{2}\right) . \quad (3.6)$$

Por integração a solução de 1-soliton será:

$$u(x, t) = 4 \arctan \left( \exp \left[ \left( \frac{1}{\omega} - \omega \right) \frac{t}{2} - \left( \frac{1}{\omega} + \omega \right) \frac{x}{2} + \delta \right] \right)$$

onde  $\delta$  é a constante de integração. Usando agora a notação  $v = \frac{1 - \omega^2}{\omega^2 + 1}$  pode-se reescrever a solução acima como

$$u(x, t) = 4 \arctan \left[ \exp \left( \varepsilon \frac{(x - vt - x_0)}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right] \quad (3.7)$$

onde  $v$  é a velocidade de constante propagação,  $\delta = -x_0$  representa a posição inicial do sólton e  $\varepsilon = \pm 1$  indica se o sólton é um kink ou anti kink, respectivamente. Nos casos limites quando  $x = +\infty$  e  $x = -\infty$  (3.7)  $u$  varia de  $2\pi$ . Uma solução que vai de 0 a  $2\pi$  é chamada de kink, já se a solução muda de  $2\pi$  para 0 ela é chamada de anti kink.

As demais soluções da equação SG são obtidas através do teorema da permutabilidade, representado pelo diagrama de Bianchi [3].

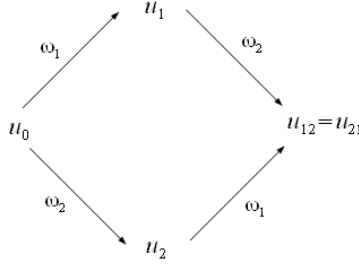


Figura 3.1: Diagrama de Bianchi.

Esse teorema nos diz que as transformações de Backlund são comutativas, ou seja,  $u_{12} = u_{21}$ . Assim duas TB's definidas a partir de parâmetros diferentes  $\omega_1$  e  $\omega_2$  mapeiam uma solução  $u_0$  a outra solução  $u_{12}$ . Então com o auxílio do diagrama acima e da equação (3.3) podemos escrever as seguintes transformações de Backlund

$$\partial_+(u_0 - u_1) = \omega_1 \sin\left(\frac{u_0 + u_1}{2}\right) \quad (3.8)$$

$$\partial_+(u_1 - u_{12}) = \omega_2 \sin\left(\frac{u_1 + u_{12}}{2}\right) \quad (3.9)$$

$$\partial_+(u_0 - u_2) = \omega_2 \sin\left(\frac{u_0 + u_2}{2}\right) \quad (3.10)$$

$$\partial_+(u_2 - u_{12}) = \omega_1 \sin\left(\frac{u_0 + u_{12}}{2}\right) . \quad (3.11)$$

E com isso obtemos uma fórmula de superposição não linear.

$$\tan\left(\frac{u_{12} - u_0}{4}\right) = \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{\omega_2 - \omega_1}\right) \tan\left(\frac{u_2 - u_1}{4}\right) . \quad (3.12)$$

Assim assumindo  $u_0 = 0$  e ainda soluções kink para  $u_1$  e  $u_2$  inicialmente na origem ( $x_0 = 0$ ), encontramos usando (3.12) a solução de 2-soliton para a equação SG [3]

$$u_{12} = 4 \arctan \left[ \frac{\sinh\left(\frac{vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)}{v \cosh\left(\frac{x}{\sqrt{1-v^2}}\right)} \right] \quad (3.13)$$

onde consideramos também que os solitons  $u_1$  e  $u_2$  propagam-se com velocidades opostas ( $v_1 = -v_2 = v$ ).

A generalização do teorema de Bianchi fornece, algebricamente as soluções multi-solitons ou de N-soliton. E, com isso construímos uma hierarquia de soluções da equação de sine-Gordon, em que cada solução é obtida de uma solução anterior [2], [1]. Portanto a partir das transformações de Backlund pode-se encontrar uma série de soluções para equações não lineares de forma algébrica usando um princípio de superposição [1].

## 3.2 Transformações de Backlund para a equação sinh-Gordon supersimétrico

Nesta seção vamos obter as transformações de Backlund associadas às equações supersimétricas de sinh-Gordon (6.6), (6.7) e (6.8), e para isso usaremos o método de supercampos [4, 13, 14].

Considere o supercampo bosônico

$$\Phi = \phi + \theta_1 \bar{\psi} + i\theta_2 \psi - \theta_1 \theta_2 F, \quad (3.14)$$

onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são parâmetros fermiônicos satisfazendo  $\theta^2 = 0$ ,  $\phi$  e  $F$  são campos bosônicos,  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  são campos fermiônicos.

Considere também as derivadas covariantes supesimétricas

$$D_+ = \partial_{\theta_1} + \theta_1 \partial_+, \quad D_- = \partial_{\theta_2} + \theta_2 \partial_-, \quad (3.15)$$

que implicam em

$$D_+^2 = \partial_+, \quad D_-^2 = \partial_-, \quad D_+ D_- = -D_- D_+ \quad (3.16)$$

onde estamos usando as coordenadas do cone de luz  $x_{\pm} = x \pm t$ , logo  $\partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_x \pm \partial_t)$ .

O supercampo (3.14) satisfaz à seguinte equação de movimento

$$D_+ D_- \Phi = 2i \sinh \Phi. \quad (3.17)$$

E então verifica-se usando as superderivadas em (3.16)

$$D_+ D_- \Phi = F - \theta_2 \partial_- \bar{\psi} + i\theta_1 \partial_+ \psi + \theta_1 \theta_2 \partial_- \partial_+ \phi.$$

Para o lado direito de (3.17) usamos  $\sinh\Phi = \frac{e^\Phi - e^{-\Phi}}{2}$ . Então

$$\begin{aligned} e^\Phi &= e^\phi e^{\theta_1 \bar{\psi} + i\theta_2 \psi - \theta_1 \theta_2 F} \\ &= e^\phi (1 + \theta_1 \bar{\psi} + i\theta_2 \psi - \theta_1 \theta_2 F - i\theta_1 \theta_2 \bar{\psi} \psi) . \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\sinh\Phi = \sinh\phi + \theta_1 \bar{\psi} \cosh\phi + i\theta_2 \psi \cosh\phi - \theta_1 \theta_2 F \cosh\phi - i\theta_1 \theta_2 \bar{\psi} \psi \sinh\phi .$$

Substituindo esses resultados em (3.17) obtemos as equações (6.6), (6.7) e (6.8) em termos das componentes de  $\Phi$  e para isso

$$F = 2i \sinh\phi . \quad (3.18)$$

E sejam as transformações de Backlund para o modelo sinh-Gordon supersimétrico definidas em [9] como

$$D_+(\Phi_1 - \Phi_2) = -\frac{4i}{\omega} f \cosh\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right) \quad (3.19)$$

$$D_-(\Phi_1 + \Phi_2) = 2\omega f \cosh\left(\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}\right) \quad (3.20)$$

onde  $f$  é um campo fermiônico e  $\omega$  é um parâmetro constante. E a condição de integrabilidade  $D_+ D_- + D_- D_+ = 0$  aplicada às equações acima, nos leva à (3.17). Caso o campo  $f$  satisfaça às seguintes equações de primeira ordem

$$D_- f = \omega \sinh\left(\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}\right), \quad (3.21)$$

$$D_+ f = \frac{2i}{\omega} \sinh\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right) . \quad (3.22)$$

E ainda considerando o supercampo  $f$  como

$$f = f_1 + \theta_1 b_1 + \theta_2 b_2 + \theta_1 \theta_2 f_2, \quad (3.23)$$

sendo  $b_1, b_2$  campos bosônicos e  $f_1, f_2$  campos fermiônicos.

A fim de obtermos as equações para as componentes dos supercampos acima

$(\Phi_i, f)$ , usaremos como obtido anteriormente as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right) &= \sinh\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{1}{2}\theta_1\bar{\psi}_+ \cosh\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{i}{2}\theta_2\psi_+ \cosh\left(\frac{p}{2}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2}\theta_1\theta_2 F_+ \cosh\left(\frac{p}{2}\right) - \frac{i}{4}\theta_1\theta_2\bar{\psi}_+\psi_+ \sinh\left(\frac{p}{2}\right) \\ \cosh\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right) &= \cosh\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{1}{2}\theta_1\bar{\psi}_+ \sinh\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{i}{2}\theta_2\psi_+ \sinh\left(\frac{p}{2}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2}\theta_1\theta_2 F_+ \sinh\left(\frac{p}{2}\right) - \frac{i}{4}\theta_1\theta_2\bar{\psi}_+\psi_+ \cosh\left(\frac{p}{2}\right) . \end{aligned}$$

De forma análoga para os argumentos contendo  $\Phi_1 - \Phi_2$ . Aqui denotamos

$$\begin{aligned} p &= \phi_1 + \phi_2, \quad q = \phi_1 - \phi_2, \quad F_{\pm} = F_1 \pm F_2, \\ \bar{\psi}_{\pm} &= \bar{\psi}_1 \pm \bar{\psi}_2, \quad \psi_{\pm} = \psi_1 \pm \psi_2 . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Portanto as equações (3.19)-(3.22) em termos das componentes de  $\Phi$  e  $f$  podem ser escritas como:

$$f_1 = -\frac{\omega}{4i} \frac{\bar{\psi}_-}{\cosh\left(\frac{p}{2}\right)} = \frac{i}{2\omega} \frac{\psi_+}{\cosh\left(\frac{q}{2}\right)}, \quad (3.25)$$

$$f_2 = -\frac{\omega}{2} \cosh\left(\frac{q}{2}\right) \bar{\psi}_- = -\frac{1}{\omega} \cosh\left(\frac{p}{2}\right) \psi_+, \quad (3.26)$$

$$b_1 = \frac{2i}{\omega} \sinh\left(\frac{p}{2}\right), \quad (3.27)$$

$$b_2 = \omega \sinh\left(\frac{q}{2}\right), \quad (3.28)$$

$$F_- = -\frac{4i}{\omega} \left[ \frac{f_1}{2} \sinh\left(\frac{p}{2}\right) \psi_+ - b_2 \cosh\left(\frac{p}{2}\right) \right], \quad (3.29)$$

$$F_+ = -2\omega \left[ \frac{f_1}{2} \sinh\left(\frac{q}{2}\right) \bar{\psi}_- - b_1 \cosh\left(\frac{q}{2}\right) \right], \quad (3.30)$$

$$\partial_{+q} = \frac{4i}{\omega} \left[ \frac{f_1}{2} \sinh\left(\frac{p}{2}\right) \bar{\psi}_+ - b_1 \cosh\left(\frac{p}{2}\right) \right], \quad (3.31)$$

$$\partial_{-p} = -2\omega \left[ \frac{if_1}{2} \sinh\left(\frac{q}{2}\right) \psi_- - b_2 \cosh\left(\frac{q}{2}\right) \right], \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
i\partial_+\psi_- &= \frac{4i}{\omega} \left[ \frac{f_1}{2} \sinh\left(\frac{p}{2}\right) F_+ - \frac{if_1}{4} \cosh\left(\frac{p}{2}\right) \psi_+\bar{\psi}_+ \right] \\
&\quad - \frac{4i}{\omega} \left[ \frac{ib_1}{2} \sinh\left(\frac{p}{2}\right) \psi_+ - \frac{b_2}{2} \sinh\left(\frac{p}{2}\right) \bar{\psi}_+ \right] \\
&\quad - \frac{4i}{\omega} f_2 \cosh\left(\frac{p}{2}\right), \tag{3.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_-\bar{\psi}_+ &= -2\omega \left[ -\frac{f_1}{2} \sinh\left(\frac{q}{2}\right) F_- + \frac{if_1}{4} \cosh\left(\frac{q}{2}\right) \psi_-\bar{\psi}_- \right] \\
&\quad + 2\omega \left[ \frac{ib_1}{2} \sinh\left(\frac{q}{2}\right) \psi_- - \frac{b_2}{2} \sinh\left(\frac{q}{2}\right) \bar{\psi}_- \right] \\
&\quad + 2\omega f_2 \cosh\left(\frac{q}{2}\right), \tag{3.34}
\end{aligned}$$

$$\partial_-f_1 = \frac{i\omega}{2} \cosh\left(\frac{q}{2}\right) \psi_-, \tag{3.35}$$

$$\partial_+f_1 = \frac{i}{\omega} \cosh\left(\frac{p}{2}\right) \bar{\psi}_+, \tag{3.36}$$

$$\partial_-b_1 = -\omega \left[ -\frac{1}{2} \cosh\left(\frac{q}{2}\right) F_- + \frac{i}{4} \sinh\left(\frac{q}{2}\right) \psi_-\bar{\psi}_- \right], \tag{3.37}$$

$$\partial_+b_2 = \frac{2i}{\omega} \left[ -\frac{1}{2} \cosh\left(\frac{p}{2}\right) F_+ + \frac{i}{4} \sinh\left(\frac{p}{2}\right) \psi_+\bar{\psi}_+ \right]. \tag{3.38}$$

Por fim a partir das equações (3.25)-(3.38) obtemos:

$$\partial_+q = -\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{p}{2}\right) \bar{\psi}_-\bar{\psi}_+ + \frac{4}{\omega^2} \sinh p, \tag{3.39}$$

$$\partial_+\bar{\psi}_- = \frac{1}{2} \bar{\psi}_- \tanh\left(\frac{p}{2}\right) \partial_+p + \frac{4}{\omega^2} \cosh^2\left(\frac{p}{2}\right) \bar{\psi}_+ \tag{3.40}$$

$$\partial_-q = \frac{\omega^2}{8} \frac{\tanh(q/2)}{\cosh^2(p/2)} \bar{\psi}_-\partial_-\bar{\psi}_- + \omega^2 \sinh q, \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
\partial_-\bar{\psi}_+ &= \tanh\left(\frac{p}{2}\right) \tanh\left(\frac{q}{2}\right) \partial_-\bar{\psi}_- \\
&\quad - \frac{\omega^2}{2} \tanh^2\left(\frac{p}{2}\right) \tanh\left(\frac{q}{2}\right) \sinh q \bar{\psi}_- \\
&\quad + \omega^2 \cosh^2\left(\frac{q}{2}\right) \bar{\psi}_-. \tag{3.42}
\end{aligned}$$

# Capítulo 4

## Teorias de Campos com Defeito

Em teorias de campos integráveis, um defeito é introduzido como uma descontinuidade, localizada em um ponto  $a$  qualquer ao longo do eixo  $x$  [11]. Essa descontinuidade liga duas teorias de campos, uma na região  $x < a$  e outra em  $x > a$ , como mostrado na figura abaixo:

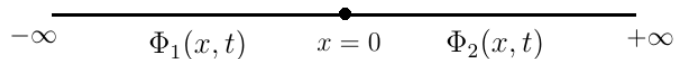


Figura 4.1: Representação do defeito.

Podemos escolher, sem perda de generalidade  $a = 0$ . Os campos da teoria de cada lado do defeito se relacionam através de um conjunto de condições de defeito, que como veremos obedecem equações do tipo Backlund [11]. Vamos agora apresentar o formalismo lagrangeano para teorias com defeito, e analisar as contribuições para cargas conservadas como: energia e momento na presença de defeitos.

### 4.1 Formulação Lagrangeana

A princípio devemos definir uma densidade de Lagrangeana para a região  $x < 0$  descrita por  $\Phi_1 = (\phi_1, \psi_1, \bar{\psi}_1)$  aqui o campo  $\phi_1$  é bosônico e os campos  $\bar{\psi}_1, \psi_1$  são fermiônicos e da mesma forma para  $\Phi_2 = (\phi_2, \psi_2, \bar{\psi}_2)$  em  $x > 0$ , com a introdução de um defeito em  $x = 0$  teremos que o sistema será descrito

pela seguinte densidade de Lagrangeana,

$$\mathcal{L} = \theta(-x)\mathcal{L}_1 + \theta(x)\mathcal{L}_2 + \delta(x)\mathcal{L}_D, \quad (4.1)$$

onde  $\delta(x)$  é a função delta de Dirac,  $\theta(x)$  é função Heaviside inseridas para assegurar que os campos  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  fiquem restritos aos seus respectivos domínios.  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  são as densidades de Lagrangeana da teoria bulk, ou seja,  $-\infty < x < +\infty$  e  $\mathcal{L}_D$  é a densidade de Lagrangeana do defeito.

com,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p &= \frac{1}{2}(\partial_x \phi_p)^2 - \frac{1}{2}(\partial_t \phi_p)^2 + \bar{\psi}_p(\partial_t - \partial_x)\bar{\psi}_p + \psi_p(\partial_x + \partial_t)\psi_p + V_p(\phi_p) + \\ &+ W_p(\phi_p, \psi_p, \bar{\psi}_p), \quad p = 1, 2 \\ \mathcal{L}_D &= \frac{1}{2}(\phi_2 \partial_t \phi_1 - \phi_1 \partial_t \phi_2) - \psi_1 \psi_2 - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 + 2f_1 \partial_t f_1 + B_0(\phi_1, \phi_2) + \\ &+ B_1(\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, f_1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde  $f_1$  é um campo auxiliar fermiônico,  $V_p$  e  $W_p$  são os potenciais da teoria bulk e  $B_0$ ,  $B_1$  são os potenciais do defeito.

Notamos que os potenciais bosônicos  $V_1$  e  $V_2$  dependem apenas dos campos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  respectivamente, de maneira análoga para os potenciais fermiônicos  $W_1$  e  $W_2$ . Por outro lado os potenciais do defeito  $B_0$  e  $B_1$  dependem dos valores dos campos no contorno  $x = 0$ .

Assim como temos na densidade de Lagrangeana (4.2) um campo auxiliar fermiônico, pode-se também adicionar um campo auxiliar bosônico ( $\Lambda$ ), veremos a introdução desse campo no capítulo 7. Se  $\Lambda = f_1 = 0$  classificamos o defeito como tipo I, caso contrário ele será chamado de tipo II.

A equação de Euler Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) = 0 \quad (4.3)$$

nos fornece para as regiões mencionadas as seguintes equações de movimento  $x < 0$  :

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 - \partial_t^2)\phi_1 &= \partial_{\phi_1} V_1 + \partial_{\phi_1} W_1 \\ (\partial_x + \partial_t)\psi_1 &= -\frac{1}{2}\partial_{\psi_1} W_1 \\ (\partial_t - \partial_x)\bar{\psi}_1 &= -\frac{1}{2}\partial_{\bar{\psi}_1} W_1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$x > 0$  :

$$\begin{aligned}
(\partial_x^2 - \partial_t^2)\phi_2 &= \partial_{\phi_2} V_2 + \partial_{\phi_2} W_2 \\
(\partial_x + \partial_t)\psi_2 &= -\frac{1}{2}\partial_{\psi_2} W_2 \\
(\partial_t - \partial_x)\bar{\psi}_2 &= -\frac{1}{2}\partial_{\bar{\psi}_2} W_2
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$x = 0$  :

$$\begin{aligned}
\partial_x \phi_1 - \partial_t \phi_2 &= -\partial_{\phi_1}(B_0 + B_1) \\
\partial_x \phi_2 - \partial_t \phi_1 &= \partial_{\phi_2}(B_0 + B_1) \\
\psi_1 + \psi_2 &= \partial_{\psi_1} B_1 = -\partial_{\psi_2} B_1 \\
\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 &= -\partial_{\bar{\psi}_1} B_1 = -\partial_{\bar{\psi}_2} B_1 \\
\partial_t f_1 &= -\frac{1}{4}\partial_{f_1} B_1
\end{aligned} \tag{4.6}$$

com  $\partial_{\phi_p} = \frac{\partial}{\partial \phi_p}$  sendo uma derivada bosônica, e  $\partial_{\psi_p} = \frac{\partial}{\partial \psi_p}$  o mesmo vale para  $\partial_{\bar{\psi}_p}$ ,  $\partial_{f_1}$  sendo derivadas fermiônicas agindo à esquerda. Seja o tensor energia momento definido como

$$T^{\lambda\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \partial^\lambda \phi_i - \eta^{\lambda\mu} \mathcal{L} . \tag{4.7}$$

A energia e o momento são dados por

$$E = \int_{-\infty}^0 dx T_1^{00} + \int_0^{+\infty} dx T_2^{00}, \quad P = \int_{-\infty}^0 dx T_1^{01} + \int_0^{+\infty} dx T_2^{01} . \tag{4.8}$$

Vamos analisar o que acontece com essas quantidades na presença do defeito, considerando os caso bosônico, fermiônico e em seguida o modelo supersimétrico sinh-Gordon  $N = 1$ .

## 4.2 Teoria bosônica

Nesse caso consideramos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_p &= \frac{1}{2}(\partial_x \phi_p)^2 - \frac{1}{2}(\partial_t \phi_p)^2 + V_p(\phi_p), \quad p = 1, 2 \\
\mathcal{L}_D &= \frac{1}{2}(\phi_2 \partial_t \phi_1 - \phi_1 \partial_t \phi_2) + B_0(\phi_1, \phi_2) .
\end{aligned} \tag{4.9}$$

A equação de Euler-Lagrange para o campo  $\phi_1$  fornece as seguintes equações de movimento

$$\partial_x^2 \phi_1 - \partial_t^2 \phi_1 = \partial_{\phi_1} V_1, \quad x < 0 \quad (4.10)$$

$$\partial_x \phi_1 - \partial_t \phi_2 = -\partial_{\phi_1} B_0, \quad x = 0. \quad (4.11)$$

Similarmente para o campo  $\phi_2$  teremos

$$\partial_x^2 \phi_2 - \partial_t^2 \phi_2 = \partial_{\phi_2} V_2, \quad x > 0 \quad (4.12)$$

$$\partial_x \phi_2 - \partial_t \phi_1 = \partial_{\phi_2} B_0, \quad x = 0. \quad (4.13)$$

Vamos analisar agora o que acontece com o momento e a energia desse sistema, o momento é dado por

$$P = \int_{-\infty}^0 dx (\partial_t \phi_1 \partial_x \phi_1) + \int_0^{+\infty} dx (\partial_t \phi_2 \partial_x \phi_2). \quad (4.14)$$

Tomando a derivada no tempo da quantidade acima, usando as equações de movimento em (4.10) e (4.12) encontramos após a integração que,

$$\frac{dP}{dt} = \left[ \frac{1}{2} (\partial_x \phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_t \phi_1)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \phi_2)^2 - \frac{1}{2} (\partial_t \phi_2)^2 - V_1 + V_2 \right]_{x=0} \quad (4.15)$$

onde desconsideramos as contribuições dos campos em  $\pm\infty$ .

Com as equações do defeito (4.11) e (4.13) encontramos,

$$\frac{dP}{dt} = \left[ \frac{1}{2} (\partial_{\phi_1} B_0)^2 - \frac{1}{2} (\partial_{\phi_2} B_0)^2 - (\dot{\phi}_2 \partial_{\phi_1} + \dot{\phi}_1 \partial_{\phi_2}) B_0 - V_1 + V_2 \right]_{x=0} \quad (4.16)$$

onde  $\dot{\phi}_i = \partial_t \phi_i$ . Analisando a densidade de Lagrangeana (4.1), nota-se que a introdução do defeito quebra a invariância por translação espacial, que por consequência, violaria a conservação do momento. Contudo se assumirmos as seguintes condições sobre o potencial do defeito  $B_0$

$$(\partial_{\phi_1} B_0)^2 - (\partial_{\phi_2} B_0)^2 = 2(V_1 - V_2), \quad \frac{\partial^2 B_0}{\partial \phi_1^2} = \frac{\partial^2 B_0}{\partial \phi_2^2}. \quad (4.17)$$

E introduzindo as variáveis  $\phi_{\pm} = \phi_1 \pm \phi_2$  podemos reescrever a expressão (4.16) como

$$\frac{dP}{dt} = \left[ \frac{\partial B_0}{\partial \phi_-} \dot{\phi}_- - \frac{\partial B_0}{\partial \phi_+} \dot{\phi}_+ \right] \Big|_{x=0} \quad (4.18)$$

onde  $B_0 = B_0^+(\phi_+) + B_0^-(\phi_-)$ .

Com isso o momento modificado incluindo a contribuição do defeito será  $\mathcal{P} = P + (B_0^+ - B_0^-)|_{x=0}$  que é conservado. Ou seja, a escolha na forma do potencial do defeito nos permite adicionar um termo de defeito ao momento da teoria no bulk, de modo que essa nova quantidade seja de fato conservada. Para a energia, dada por,

$$E = \int_{-\infty}^0 dx \left[ \frac{1}{2}(\partial_x \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_t \phi_1)^2 + V_1 \right] + \int_0^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{2}(\partial_x \phi_2)^2 + \frac{1}{2}(\partial_t \phi_2)^2 + V_2 \right]. \quad (4.19)$$

Como feito anteriormente vamos derivar a energia e usando as equações de movimento (4.10), (4.12) teremos após a integração

$$\frac{dE}{dt} = [\partial_x \phi_1 \partial_t \phi_1 - \partial_x \phi_2 \partial_t \phi_2] |_{x=0} = 0. \quad (4.20)$$

E substituindo as equações envolvendo o defeito (4.11) e (4.13) obtemos a energia modificada que inclui a contribuição do defeito

$$\mathcal{E} = E + B_0|_{x=0} = E + (B_0^+ + B_0^-)|_{x=0}. \quad (4.21)$$

Notamos que não há vínculos para o potencial do defeito  $B_0$ , como visto no caso do momento pela equação (4.17). Isso se deve ao fato de a densidade de Lagrangeana (4.1) ser invariante por translação temporal, de modo que a energia total é conservada.

Vamos agora exemplificar dois casos usando a estrutura acima, primeiro consideramos o modelo sine-Gordon onde  $V_p = \cos \phi_p - 1$  portanto de (4.17)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\partial_{\phi_1} B_0)^2 - \frac{1}{2}(\partial_{\phi_2} B_0)^2 &= \cos \phi_1 - \cos \phi_2 \\ &= -2 \sin \phi_+ \sin \phi_- \end{aligned} \quad (4.22)$$

que nos fornece o seguinte potencial

$$B_0 = \frac{1}{\omega^2} \cos(\phi_+) - \omega^2 \cos(\phi_-) \quad (4.23)$$

onde  $\omega$  é um parâmetro livre. Podemos ainda obter as transformações de Backlund para o modelo sine-Gordon

$$\partial_x \phi_1 - \partial_t \phi_2 = \frac{1}{2\omega^2} \sin(\phi_+) - \frac{\omega^2}{2} \sin(\phi_-) \quad (4.24)$$

$$\partial_x \phi_2 - \partial_t \phi_1 = -\frac{1}{2\omega^2} \sin(\phi_+) - \frac{\omega^2}{2} \sin(\phi_-). \quad (4.25)$$

O segundo exemplo que vamos abordar é o modelo sinh-Gordon para o qual  $V_p = 4 \cosh(2\phi_p)$ , ou seja de (4.17) teremos

$$\frac{1}{2}(\partial_{\phi_1} B_0)^2 - \frac{1}{2}(\partial_{\phi_2} B_0)^2 = 8 \sinh(\phi_+) \sinh(\phi_-) . \quad (4.26)$$

Assim o potencial do defeito será

$$B_0 = -\frac{4}{\omega^2} \cosh(\phi_+) - \omega^2 \cosh(\phi_-) \quad (4.27)$$

onde fixamos a massa ( $m = 1$ ). Então as transformações de Backlund para esse modelo são dadas segundo (4.11) e (4.13) por

$$\partial_x \phi_1 - \partial_t \phi_2 = \frac{2}{\omega^2} \sinh(2\phi_+) + \frac{\omega^2}{2} \sinh(2\phi_-) \quad (4.28)$$

$$\partial_x \phi_2 - \partial_t \phi_1 = \frac{\omega^2}{2} \sinh(2\phi_-) - \frac{2}{\omega^2} \sinh(2\phi_+) . \quad (4.29)$$

Até agora consideramos o caso puramente bosônico, o próximo passo será mostrar o caso fermiônico puro.

### 4.3 Teoria fermiônica

Vamos considerar para a teoria bulk a seguinte densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}_p = \bar{\psi}_p \partial_t \psi_p - \bar{\psi}_p \partial_x \psi_p + \psi_p \partial_x \psi_p + \psi_p \partial_t \psi_p + W_p(\bar{\psi}_p, \psi_p) \quad (4.30)$$

e a Lagrangeana associada ao defeito será

$$\mathcal{L}_D = -\psi_1 \psi_2 - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 + 2f_1 \partial_t f_1 + B_1(\psi_1, \psi_2, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, f_1) \quad (4.31)$$

onde  $f_1$  é um campo auxiliar fermiônico,  $W_p$  é potencial no bulk e  $B_1$  é o potencial do defeito. Obtemos então para cada região as seguintes equações para os campos

$x < 0$  :

$$(\partial_x + \partial_t) \psi_1 = -\frac{1}{2} \partial_{\psi_1} W_1, \quad (4.32)$$

$$(\partial_t - \partial_x) \bar{\psi}_1 = -\frac{1}{2} \partial_{\bar{\psi}_1} W_1, \quad (4.33)$$

$x > 0$  :

$$(\partial_x + \partial_t)\psi_2 = -\frac{1}{2}\partial_{\psi_2}W_2, \quad (4.34)$$

$$(\partial_t - \partial_x)\bar{\psi}_2 = -\frac{1}{2}\partial_{\bar{\psi}_2}W_2, \quad (4.35)$$

$x = 0$  :

$$\psi_1 + \psi_2 = \partial_{\psi_1}B_1 = -\partial_{\psi_2}B_1, \quad (4.36)$$

$$\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 = -\partial_{\bar{\psi}_1}B_1 = -\partial_{\bar{\psi}_2}B_1, \quad (4.37)$$

$$\partial_t f_1 = -\frac{1}{4}\partial_{f_1}B_1. \quad (4.38)$$

Nesse caso o momento será dado por

$$P = \int_{-\infty}^0 dx (-\psi_1\partial_x\psi_1 - \bar{\psi}_1\partial_x\bar{\psi}_1) + \int_0^{+\infty} dx (-\psi_2\partial_x\psi_2 - \bar{\psi}_2\partial_x\bar{\psi}_2). \quad (4.39)$$

Atuando com a derivada no tempo e usando as equações de movimento em (4.32) e (4.34) e após a integração teremos

$$\frac{dP}{dt} = [\psi_2\partial_t\psi_2 + \bar{\psi}_2\partial_t\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1\partial_t\bar{\psi}_1 - \psi_1\partial_t\psi_1 + W_2 - W_1] |_{x=0}. \quad (4.40)$$

Agora, usando as condições do defeito (4.36) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = & \left[ \dot{\psi}_2\partial_{\psi_2}B_1 + \dot{\psi}_1\partial_{\psi_1}B_1 - \dot{\bar{\psi}}_2\partial_{\bar{\psi}_2}B_1 - \dot{\bar{\psi}}_1\partial_{\bar{\psi}_1}B_1 + \partial_t(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2) + \right. \\ & \left. + W_2 - W_1 \right] |_{x=0}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Introduzimos as novas variáveis  $\psi_{\pm} = (\psi_1 \pm \psi_2)$  e  $\bar{\psi}_{\pm} = (\bar{\psi}_1 \pm \bar{\psi}_2)$ , a expressão acima fica

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = & \left[ \dot{\psi}_+\partial_{\psi_+}B_1 + \dot{\psi}_-\partial_{\psi_-}B_1 - \dot{\bar{\psi}}_+\partial_{\bar{\psi}_+}B_1 - \dot{\bar{\psi}}_-\partial_{\bar{\psi}_-}B_1 + \right. \\ & \left. + \partial_t(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2) + W_2 - W_1 \right] |_{x=0}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Aqui nós também devemos assumir condições para a forma do potencial de defeito, a fim de que o momento modificado seja conservado, logo

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_+ \partial_{\psi_+} B_1 + \dot{\psi}_- \partial_{\psi_-} B_1 - \dot{\bar{\psi}}_+ \partial_{\bar{\psi}_+} B_1 - \dot{\bar{\psi}}_- \partial_{\bar{\psi}_-} B_1 &= 2(W_1 - W_2), \\ \partial_{\bar{\psi}_+} \partial_{\psi_-} B_1 &= 0 .\end{aligned}\quad (4.43)$$

E assim como antes o potencial do defeito pode ser decomposto como  $B_1 = B_1^+(\bar{\psi}_+, f_1) + B_1^-(\psi_-, f_1)$ . Portanto a quantidade conservada será

$$\mathcal{P} = P + \left[ B_1^+ - B_1^- + \psi_1 \psi_2 - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 \right]_{x=0} . \quad (4.44)$$

Já para a energia dada por

$$\begin{aligned}E &= \int_{-\infty}^0 dx (\psi_1 \partial_x \psi_1 - \bar{\psi}_1 \partial_x \bar{\psi}_1 + W_1) \\ &+ \int_0^{+\infty} dx (\psi_2 \partial_x \psi_2 - \bar{\psi}_2 \partial_x \bar{\psi}_2 + W_2)\end{aligned}\quad (4.45)$$

vamos também analisar sua conservação

$$\frac{dE}{dt} = \left[ \psi_1 \partial_t \psi_1 - \bar{\psi}_1 \partial_t \bar{\psi}_1 - \psi_2 \partial_t \psi_2 + \bar{\psi}_2 \partial_t \bar{\psi}_2 \right]_{x=0} \quad (4.46)$$

onde usamos (4.32) e (4.34) e por fim realizamos a integração, desprezando os valores dos campos em  $\pm\infty$ . Introduzindo as equações do defeito (4.36) a equação anterior em termos das novas variáveis  $\bar{\psi}_\pm$  e  $\psi_\pm$  será

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \left[ \partial_t (\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 + \psi_1 \psi_2) - \dot{\psi}_+ \partial_{\psi_+} B_1 - \dot{\psi}_- \partial_{\psi_-} B_1 - \dot{\bar{\psi}}_+ \partial_{\bar{\psi}_+} B_1 - \right. \\ &\quad \left. - \dot{\bar{\psi}}_- \partial_{\bar{\psi}_-} B_1 \right]_{x=0} .\end{aligned}\quad (4.47)$$

Logo a energia modificada possui o termo do defeito e é essa quantidade que será conservada

$$\mathcal{E} = E + \left[ B_1 - \psi_1 \psi_2 - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 \right]_{x=0} . \quad (4.48)$$

Aqui novamente notamos que devido à densidade de Lagrangeana em (4.1) ser invariante por translação temporal a energia se conserva independentemente da forma do potencial do defeito  $B_1$ .

## 4.4 Modelo super sinh-Gordon $N = 1$

Vamos considerar a densidade de Lagrangeana (4.1) com os seguintes potenciais da teoria bulk

$$V_p = 4 \cosh(2\phi_p), \quad W_p = 8 \bar{\psi}_p \psi_p \cosh \phi_p \quad (4.49)$$

e para os potenciais do defeito temos

$$B_0 = -\omega^2 \cosh(\phi_1 - \phi_2) - \frac{4}{\omega^2} \cosh(\phi_1 + \phi_2) \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{4i}{\omega} \cosh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) f_1(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) + \\ &+ 2i\omega \cosh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) f_1(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Para cada região encontramos as seguintes equações de movimento

$x < 0$ :

$$(\partial_x^2 - \partial_t^2)\phi_1 = 8\sinh(2\phi_1) + 8\bar{\psi}_1\psi_1\sinh\phi_1, \quad (4.52)$$

$$(\partial_x - \partial_t)\bar{\psi}_1 = 4\psi_1 \cosh \phi_1, \quad (4.53)$$

$$(\partial_x + \partial_t)\psi_1 = 4\bar{\psi}_1 \cosh \phi_1, \quad (4.54)$$

$x > 0$ :

$$(\partial_x^2 - \partial_t^2)\phi_2 = 8\sinh(2\phi_2) + 8\bar{\psi}_2\psi_2\sinh\phi_2, \quad (4.55)$$

$$(\partial_x - \partial_t)\bar{\psi}_2 = 4\psi_2 \cosh \phi_2, \quad (4.56)$$

$$(\partial_x + \partial_t)\psi_2 = 4\bar{\psi}_2 \cosh \phi_2. \quad (4.57)$$

$x = 0$ :

$$\begin{aligned} \partial_x\phi_1 - \partial_t\phi_2 &= \omega^2\sinh(\phi_1 - \phi_2) + \frac{4}{\omega^2}\sinh(\phi_1 + \phi_2) + \\ &+ \frac{2i}{\omega}\sinh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) f_1(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) - \\ &- i\omega\sinh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) f_1(\psi_1 - \psi_2), \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\partial_x\phi_2 - \partial_t\phi_1 = \omega^2\sinh(\phi_1 - \phi_2) - \frac{4}{\omega^2}\sinh(\phi_1 + \phi_2) -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2i}{\omega} \sinh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) f_1(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) - \\
& - i\omega \sinh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) f_1(\psi_1 - \psi_2), \tag{4.59}
\end{aligned}$$

$$\psi_1 + \psi_2 = -2i\omega \cosh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) f_1, \tag{4.60}$$

$$\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 = -\frac{4i}{\omega} \cosh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) f_1, \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t f_1 &= \frac{i}{\omega} \cosh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) (\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) - \\
& - \frac{i\omega}{2} \cosh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) (\psi_1 - \psi_2). \tag{4.62}
\end{aligned}$$

Fazendo  $(\partial_x + \partial_t)(\psi_1 + \psi_2)$

$$\begin{aligned}
\partial_x f_1 &= \frac{2i}{\omega} \left[ \cosh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) (\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) \right. \\
& + \left. \tanh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \sinh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2) \right] - \\
& - (\partial_x + \partial_t)(\phi_1 - \phi_2) \tanh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) f_1 - \partial_t f_1 \\
& = \frac{2i}{\omega} \cosh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) (\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) \\
& + \frac{4}{\omega^2} \tanh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \sinh(\phi_1 + \phi_2) f_1 - \\
& - \frac{4}{\omega^2} \sinh(\phi_1 + \phi_2) \tanh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) f_1 - \partial_t f_1.
\end{aligned}$$

Obtemos:

$$\begin{aligned}
\partial_x f_1 &= \frac{i}{\omega} \cosh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) (\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) + \\
& + \frac{i\omega}{2} \cosh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) (\psi_1 - \psi_2). \tag{4.63}
\end{aligned}$$

A energia e o momento são dados por

$$\begin{aligned}
P &= \int_{-\infty}^0 dx (\partial_t \phi_1 \partial_x \phi_1 - \bar{\psi}_1 \partial_x \bar{\psi}_1 - \psi_1 \partial_x \psi_1) + \\
&+ \int_0^{+\infty} dx (\partial_t \phi_2 \partial_x \phi_2 - \bar{\psi}_2 \partial_x \bar{\psi}_2 - \psi_2 \partial_x \psi_2), \quad (4.64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-\infty}^0 dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_x \phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_t \phi_1)^2 - \bar{\psi}_1 \partial_x \bar{\psi}_1 + \psi_1 \partial_x \psi_1 + \cosh(2\phi_1) + \right. \\
&+ \left. 4\bar{\psi}_1 \psi_1 \cosh \phi_1 \right] + \int_0^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_x \phi_2)^2 + \frac{1}{2} (\partial_t \phi_2)^2 - \bar{\psi}_2 \partial_x \bar{\psi}_2 + \psi_2 \partial_x \psi_2 + \right. \\
&+ \left. \cosh(2\phi_2) + 4\bar{\psi}_2 \psi_2 \cosh \phi_2 \right]. \quad (4.65)
\end{aligned}$$

Com as seguintes condições para os potenciais do defeito

$$\partial_{\phi_+} \partial_{\phi_-} B_0 = 0, \quad \partial_{\phi_+} \partial_{\phi_-} B_1 = 0, \quad \partial_{\bar{\psi}_+} \partial_{\psi_-} B_0 = 0, \quad (4.66)$$

$$(\partial_{\phi_1} B_0)^2 - (\partial_{\phi_2} B_0)^2 = 2(V_1 - V_2), \quad (4.67)$$

$$\partial_{f_1} B_1^+ \partial_{f_1} B_1^- + \partial_{\phi_+} B_0^+ \partial_{\phi_-} B_1^- + \partial_{\phi_-} B_0^- \partial_{\phi_+} B_1^+ = 2(W_1 - W_2). \quad (4.68)$$

Com as seguintes decomposições

$$B_0 = B_0^+(\phi_+) + B_0^-(\phi_-), \quad B_1 = B_1^+(\phi_+, \bar{\psi}_+, f_1) + B_1^-(\phi_-, \psi_-, f_1). \quad (4.69)$$

Com isso teremos a energia e momento modificados

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= P + \left[ -\omega^2 \cosh(\phi_1 - \phi_2) + \frac{4}{\omega^2} \cosh(\phi_1 + \phi_2) - \right. \\
&- \frac{4i}{\omega} \cosh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) f_1(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) - \\
&- \left. 2i\omega \cosh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) f_1(\psi_1 - \psi_2) - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 + \psi_1 \psi_2 \right]_{x=0}, \quad (4.70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= E + \left[ -\omega^2 \cosh(\phi_1 - \phi_2) - \frac{4}{\omega^2} \cosh(\phi_1 + \phi_2) - \right. \\
&- \frac{4i}{\omega} \cosh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) f_1(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) + \\
&+ \left. 2i\omega \cosh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) f_1(\psi_1 - \psi_2) - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 - \psi_1 \psi_2 \right]_{x=0} \quad (4.71)
\end{aligned}$$

onde novamente lembramos que definimos  $m = 1$ .

# Capítulo 5

## Superálgebra de Lie $sl(2, 1)$

Neste capítulo vamos introduzir certas noções sobre a superálgebra  $sl(2, 1)$ , que será importante para determinarmos o par Lax, e por consequência as equações de movimento para o modelo sinh-Gordon supersimétrico com  $N = 1$ , a partir da equação de curvatura nula.

Essa superálgebra possui geradores de cartan  $\{H_1, H_2\}$ , ou seja,  $[H_1, H_2] = 0$ , e geradores step  $\{E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}, E_{\alpha_2}, E_{-\alpha_2}, E_{-\alpha_1-\alpha_2}, E_{\alpha_1+\alpha_2}\}$  dados por

$$\begin{aligned} H_1 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & H_2 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ E_{\alpha_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-\alpha_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{\alpha_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-\alpha_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{\alpha_1+\alpha_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-\alpha_1-\alpha_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Esses geradores satisfazem às seguintes relações:

$$[h_+, E_{\pm\alpha_1}] = \pm E_{\pm\alpha_1}, \quad [h_1, E_{\mp\alpha_2}] = \pm E_{\mp\alpha_2}, \quad [h_2, E_{\pm\alpha_1}] = \mp E_{\pm\alpha_1}$$

$$[h_2, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}] = \mp E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad [E_{\pm\alpha_1}, E_{\mp\alpha_2}] = 0, \quad [E_{\pm\alpha_1}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}] = 0,$$

$$\begin{aligned}
[E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}] &= 0, & [E_{\pm\alpha_1}, E_{\mp(\alpha_1+\alpha_2)}] &= \mp E_{\mp\alpha_2}, & [h_+, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}] &= 0, \\
[h_+, h_2] &= 0, & [h_2, E_{\pm\alpha_2}] &= 0, & [E_{\pm\alpha_1}, E_{\pm\alpha_2}] &= \pm E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)} \\
\{E_{\pm\alpha_2}, E_{\pm\alpha_2}\} &= 0, & \{E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}, E_{\mp\alpha_2}\} &= E_{\pm\alpha_1}, \\
\{E_{\pm(\alpha_1\alpha_2)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}\} &= 0, & \{E_{\pm\alpha_2}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}\} &= 0, \\
\{E_{\alpha_1+\alpha_2}, E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}\} &= h_+, & \{E_{-\alpha_2}, E_{\alpha_2}\} &= h_2. & & (5.2)
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
h_1 &= 2H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & h_2 &= H_2 - H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
h_+ &= h_1 + h_2. & & & & (5.3)
\end{aligned}$$

E notamos que os geradores  $\{H_1, H_2, E_{\pm\alpha_1}\}$  são bosônicos e os geradores  $\{E_{\pm\alpha_2}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}\}$  são fermiônicos. Desse modo satisfazem resumidamente às seguintes relações:  $[B, B'] = B''$ ,  $\{F, F'\} = B$ ,  $[B, F] = F'$ .

## 5.1 Superálgebra de Kac-Moody $\tilde{sl}(2, 1)$

A partir da superálgebra anterior pode-se obter a superálgebra de Kac-Moody  $\tilde{sl}(2, 1)$ , ao introduzirmos um parâmetro  $\bar{\lambda}$ , de modo que

$$h \rightarrow h^{(n)} = \bar{\lambda}^n h, \quad h \in sl(2, 1) \quad (5.4)$$

e usando as relações em (5.2) e a regra a seguir

$$[g^n, h^m]_{\pm} = [g, h]_{\pm}^{(m+n)} + n\delta_{m+n,0} str(gh)\hat{c}, \quad g, h \in sl(2, 1) \quad (5.5)$$

onde agora usamos a notação:  $[g, h]_- = [g, h]$ ,  $[g, h]_+ = \{g, h\}$ ,  $\hat{c}$  é a carga central e  $str$  é o supertraço da matriz dado por  $str(m) = m_{11} + m_{22} - m_{33}$ . Logo as relações de comutação e anticomutação para a superálgebra de Kac-Moody  $\tilde{sl}(2, 1)$ , são dadas por:

$$[h_+^{(n)}, E_{\pm\alpha_1}^{(m)}] = \pm E_{\pm\alpha_1}^{(n+m)}, \quad [h_+^{(n)}, E_{\mp\alpha_2}^{(m)}] = \pm E_{\mp\alpha_2}^{(n+m)}, \quad [h_2^{(n)}, E_{\pm\alpha_1}^{(m)}] = \mp E_{\pm\alpha_1}^{(n+m)},$$

$$\begin{aligned}
[h_2^{(n)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}] &= \mp E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(n+m)}, \quad [h_+^{(n)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}] = 0, \quad [h_2^{(n)}, E_{\mp\alpha_2}^{(m)}] = 0, \\
[E_{\pm\alpha_1}^{(n)}, E_{\mp\alpha_2}^{(m)}] &= 0, \quad [E_{\pm\alpha_1}^{(n)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}] = 0, \quad [h_+^{(n)}, h_2^{(m)}] = -n \delta_{n+m,0} \hat{c}, \\
[E_{\pm\alpha_1}^{(n)}, E_{\mp(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}] &= \mp E_{\mp\alpha_2}^{(n+m)}, \quad [E_{\pm\alpha_1}^{(n)}, E_{\pm\alpha_2}^{(m)}] = \pm E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(n+m)}, \\
[E_{\alpha_1}^{(n)}, E_{-\alpha_1}^{(m)}] &= h_1^{(n+m)} + n \delta_{n+m,0} \hat{c}, \quad \{E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n)}, E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(m)}\} = h_+^{(n+m)} + n \delta_{n+m,0} \hat{c}, \\
\{E_{\mp\alpha_2}^{(n)}, E_{\mp\alpha_2}^{(m)}\} &= 0, \quad \{E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(n)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}\} = 0, \quad \{E_{\mp\alpha_2}^{(n)}, E_{\mp(\alpha_1+\alpha_2)}^{(m)}\} = 0, \\
\{E_{-\alpha_2}^{(n)}, E_{\alpha_2}^{(m)}\} &= h_2^{(n+m)} - n \delta_{n+m,0} \hat{c}, \quad \{E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(n)}, E_{\mp\alpha_2}^{(m)}\} = E_{\pm\alpha_1}^{(n+m)}. \quad (5.6)
\end{aligned}$$

A superálgebra  $\tilde{sl}(2,1)$  pode ser decomposta em subespaços de grau inteiro, associados a bósons, e semi inteiro relacionado com os férmions. Essa divisão é feita introduzindo o operador de gradação  $Q$ :

$$Q = 2D + \frac{1}{2}h_1 \quad (5.7)$$

onde  $D = \bar{\lambda} \frac{d}{d\lambda}$  é o operador derivação e satisfaz à  $[D, T_a^{(n)}] = nT_a^{(n)}$ . Aqui  $T_a^{(n)} = \{H_i^{(n)}, E_\alpha^{(n)}\}$ .

Segundo essa gradação a base escolhida é dada por:

$$\begin{aligned}
F_1^{(2n+3/2)} &= (E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n+1/2)} - E_{\alpha_2}^{(n+1)}) + (E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1)} - E_{-\alpha_2}^{(n+1/2)}), \\
F_2^{(2n+1/2)} &= -(E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n)} - E_{\alpha_2}^{(n+1/2)}) + (E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1/2)} - E_{-\alpha_2}^{(n)}), \\
G_1^{(2n+1/2)} &= (E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n)} + E_{\alpha_2}^{(n+1/2)}) + (E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1/2)} + E_{-\alpha_2}^{(n)}), \\
G_2^{(2n+3/2)} &= -(E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n+1/2)} + E_{\alpha_2}^{(n+1)}) + (E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1)} + E_{-\alpha_2}^{(n+1/2)}), \\
K_1^{(2n+1)} &= -E_{-\alpha_1}^{(n+1)} - E_{\alpha_1}^{(n)}, \\
K_2^{(2n+1)} &= h_+^{(n+1/2)} + h_2^{(n+1/2)}, \\
M_1^{(2n+1)} &= E_{-\alpha_1}^{(n+1)} - E_{\alpha_1}^{(n)}, \\
M_2^{(2n)} &= h_1^{(n)}. \quad (5.8)
\end{aligned}$$

No apêndice A apresentamos a superálgebra satisfeita pelos geradores acima. Definimos um elemento semisimples dessa superálgebra,

$$E^{(1)} = K_1^{(1)} + K_2^{(1)} . \quad (5.9)$$

Teremos que o *kernel*  $\mathcal{K}$  desse elemento em  $\tilde{g} = \tilde{sl}(2, 1)$  é dado pelos elementos de  $\tilde{g}$  que comutam com  $E^{(1)}$ , isto é,

$$\mathcal{K} = \{x \in \tilde{sl}(2, 1), [E^{(1)}, x] = 0 \text{ ou } [E^{(1)}, x] \propto \hat{c}\},$$

e a imagem  $\mathcal{M}$  desse elemento são os elementos de  $\tilde{g}$  que não comutam com  $E^{(1)}$ , ou seja,

$$\mathcal{M} = \{x \in \tilde{sl}(2, 1), [E^{(1)}, x] \neq 0\}.$$

Assim, com as relações de comutação e anti-comutação para os geradores em (5.8) encontramos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{Bose} &= \{M_1^{(2n+1)}, M_2^{(2n)}\}, & \mathcal{M}_{Fermi} &= \{G_1^{(2n+1/2)}, G_2^{(2n+3/2)}\}, \\ \mathcal{K}_{Bose} &= \{K_1^{(2n+1)}, K_2^{(2n+1)}\}, & \mathcal{K}_{Fermi} &= \{F_1^{(2n+3/2)}, F_2^{(2n+1/2)}\}. \end{aligned}$$

ou seja,

$$\tilde{sl}(2, 1) = \tilde{g} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{K} . \quad (5.10)$$

# Capítulo 6

## Par de Lax do modelo sinh-Gordon supersimétrico

$$N = 1$$

Neste capítulo, vamos escrever o par de lax e a formulação de curvatura nula para o modelo super sinh-Gordon. A construção do par de Lax é baseada na superálgebra  $sl(2, 1)$  mostrada no capítulo anterior. Então consideramos a forma para o Lax proposta em [11], temos

$$\mathcal{A}_+ = E^{(1)} - \partial_+ B B^{(-1)} + A_{1/2}, \quad (6.1)$$

$$\mathcal{A}_- = B E^{(-1)} B^{-1} + B j_{-1/2} B^{-1} \quad (6.2)$$

onde

$$B = e^{\phi M_2^{(0)} + \nu \hat{c}}, \quad A_{1/2} = \bar{\psi} G_1^{(1/2)}, \quad j_{-1/2} = \psi G_2^{(-1/2)}.$$

Os campos  $\phi$  e  $\nu$  são bosônicos, já os campos  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  são fermiônicos. Assim usando a seguinte identidade,

$$e^L T e^{-L} = T + [L, T] + \frac{1}{2!} [L, [L, T]] + \dots$$

Podemos calcular cada termo separadamente, assim

$$\begin{aligned} e^{\phi M_2^{(0)} + \nu \hat{c}} K_1^{(-1)} e^{-(\phi M_2^{(0)} + \nu \hat{c})} &= K_1^{(-1)} \cosh(2\phi) + M_1^{(-1)} \sinh(2\phi), \\ e^{\phi M_2^{(0)} + \nu \hat{c}} K_2^{(-1)} e^{-(\phi M_2^{(0)} + \nu \hat{c})} &= K_2^{(-1)}. \end{aligned}$$

Assim temos que

$$\begin{aligned} BE^{(-1)}B^{-1} &= K_2^{(-1)} + K_1^{(-1)} \cosh(2\phi) + M_1^{(-1)} \sinh(2\phi), \\ \partial_+ B B^{-1} &= M_2^{(0)} \partial_+ \phi + \hat{c}\nu . \end{aligned}$$

E o termo que falta será

$$\begin{aligned} Bj_{-1/2}B^{-1} &= \psi e^{\phi M_2^{(0)} + \nu \hat{c}} G_2^{(-1/2)} e^{-(\phi M_2^{(0)} + \nu \hat{c})} \\ &= \psi G_2^{(-1/2)} + \psi \phi [M_2^{(0)}, G_2^{(-1/2)}] + \frac{1}{2!} \psi \phi^2 [M_2^{(0)}, [M_2^{(0)}, G_2^{(-1/2)}]] + \\ &+ \frac{1}{3!} \psi \phi^3 [M_2^{(0)}, [M_2^{(0)}, [M_2^{(0)}, G_2^{(-1/2)}]]] + \dots \\ &= \psi G_2^{(-1/2)} - \psi \phi F_1^{(-1/2)} - \frac{1}{2!} \psi \phi^2 [M_2^{(0)}, F_1^{(-1/2)}] - \\ &- \frac{1}{3!} \psi \phi^3 [M_2^{(0)}, [M_2^{(0)}, F_1^{(-1/2)}]] \\ &= \psi G_2^{(-1/2)} - \psi \phi F_1^{(-1/2)} + \frac{1}{2!} \psi \phi^2 G_2^{(-1/2)} + \\ &+ \frac{1}{3!} \psi \phi^3 [M_2^{(0)}, G_2^{(-1/2)}] + \dots \\ &= \psi G_2^{(-1/2)} - \psi \phi F_1^{(-1/2)} + \frac{1}{2!} \psi \phi^2 G_2^{(-1/2)} - \frac{1}{3!} \psi \phi^3 F_1^{(-1/2)} + \dots \\ &= \psi G_2^{(-1/2)} \left( 1 + \frac{1}{2!} \phi^2 + \dots \right) - \psi F_1^{(-1/2)} \left( \phi + \frac{1}{3!} \phi^3 + \dots \right) \\ &= \psi G_2^{(-1/2)} \cosh(\phi) - \psi F_1^{(-1/2)} \sinh(\phi) . \end{aligned}$$

Substituindo esses resultados nas equações (6.1) e (6.2), e escrevendo os geradores em (5.8) em função do parâmetro espectral efetivo  $\lambda$ , que atribui grau aos geradores da superálgebra, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_- &= \lambda^{-1/2} [\psi (-E_{\alpha_1 + \alpha_2} + E_{-\alpha_2}) e^\phi + h_+ + h_2] - \lambda^{-1} E_{\alpha_1} e^{2\phi} - E_{-\alpha_1} e^{-2\phi} - \\ &- \psi (E_{\alpha_2} - E_{-\alpha_1 - \alpha_2}) e^{-\phi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_+ &= -\lambda E_{-\alpha_1} + \lambda^{1/2} [h_+ + h_2 + \bar{\psi} (E_{\alpha_2} + E_{-\alpha_1 - \alpha_2})] - E_{\alpha_1} - h_1 \partial_+ \phi + \\ &+ \bar{\psi} (E_{\alpha_1 + \alpha_2} + E_{-\alpha_2}) - \hat{c} \partial_+ \nu . \end{aligned}$$

Teremos então o seguinte par de Lax

$$\mathcal{A}_+ = \begin{pmatrix} \lambda^{1/2} - \partial_+ \phi & -1 & \bar{\psi} \\ -\lambda & \lambda^{1/2} + \partial_+ \phi & \lambda^{1/2} \bar{\psi} \\ \lambda^{1/2} \bar{\psi} & \bar{\psi} & 2\lambda^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

$$\mathcal{A}_- = \begin{pmatrix} \lambda^{-1/2} & -\lambda^{-1} e^{2\phi} & -\lambda^{-1/2} \psi e^\phi \\ -e^{-2\phi} & \lambda^{-1/2} & -\psi e^{-\phi} \\ \psi e^{-\phi} & \lambda^{-1/2} \psi e^\phi & 2\lambda^{-1/2} \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Pode-se verificar ainda que, a partir da equação de curvatura nula

$$\partial_+ \mathcal{A}_- - \partial_- \mathcal{A}_+ + [\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_-] = 0 \quad (6.5)$$

obtemos após comparar as potências de  $\lambda$

$$\partial_+ \partial_- \phi = 2 \sinh(2\phi) + 2\bar{\psi} \psi \sinh(\phi), \quad (6.6)$$

$$\partial_+ \psi = 2\bar{\psi} \cosh(\phi), \quad (6.7)$$

$$\partial_- \bar{\psi} = 2\psi \cosh(\phi) \quad (6.8)$$

que são as equações de movimento do modelo sinh-Gordon supersimétrico.

# Capítulo 7

## Matriz defeito

Como mencionado na seção 2.3, existe um sistema de equações diferenciais parciais associado aos sistemas integráveis. Tal sistema gera a equação de curvatura nula, e portanto as equações de movimento do modelo. Vamos reescrever essas equações aqui, introduzindo as coordenadas do cone de luz,

$$\partial_{\pm}\Psi^{(1)} = -\mathcal{A}_{\pm}^{(1)}\Psi^{(1)} \quad (7.1)$$

onde definimos  $\mathcal{A}_{\pm} = -\frac{1}{2}(V \pm U)$ .

Considerando uma nova solução para o problema acima, dada por

$$\Psi^{(2)} = K\Psi^{(1)} . \quad (7.2)$$

Então

$$\begin{aligned} \partial_{\pm}\Psi^{(2)} &= \partial_{\pm}(K\Psi^{(1)}) = (\partial_{\pm}K)\Psi^{(1)} + K\partial_{\pm}\Psi^{(1)} \\ &= (\partial_{\pm}K)K^{-1}\Psi^{(2)} - K\mathcal{A}_{\pm}^{(1)}\Psi^{(1)} \\ &= \left[ (\partial_{\pm}K)K^{-1} - K\mathcal{A}_{\pm}^{(1)}K^{-1} \right] \Psi^{(2)} = -\mathcal{A}_{\pm}^{(2)}\Psi^{(2)} . \end{aligned}$$

Logo

$$\mathcal{A}_{\pm}^{(2)} = K\mathcal{A}_{\pm}^{(1)}K^{-1} - (\partial_{\pm}K)K^{-1}$$

que nos leva à seguinte transformação

$$\partial_{\pm}K = K\mathcal{A}_{\pm}^{(1)} - \mathcal{A}_{\pm}^{(2)}K \quad (7.3)$$

onde  $K$  é chamada de matriz defeito,  $\mathcal{A}_{\pm}^{(1)}$  e  $\mathcal{A}_{\pm}^{(2)}$  são os pares de Lax para duas soluções distintas do modelo em estudo, como mostraremos nas seções a seguir.

## 7.1 Modelo sine-Gordon

Para o modelo sine-Gordon temos

$$\mathcal{A}_+ = \begin{pmatrix} \frac{i}{2}\partial_+\phi & \frac{1}{2}\lambda e^{\frac{i}{2}\phi} \\ -\frac{1}{2}\lambda e^{-\frac{i}{2}\phi} & -\frac{i}{2}\partial_+\phi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_- = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\partial_-\phi & -\frac{1}{2}\lambda^{-1}e^{-\frac{i}{2}\phi} \\ \frac{1}{2}\lambda^{-1}e^{\frac{i}{2}\phi} & \frac{i}{2}\partial_-\phi \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

E, nesse caso  $\mathcal{A}_\pm^{(1)}$  e  $\mathcal{A}_\pm^{(2)}$  estão relacionados, respectivamente à duas soluções  $\phi_1$  e  $\phi_2$  da equação (3.1) e  $\lambda$  é o parâmetro espectral efetivo. E ainda a matriz  $K$  a ser determinada, é proposta nesse caso da seguinte forma

$$K = \alpha + \lambda^{-1}\beta + \lambda^{-2}\gamma \quad (7.5)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são matrizes  $2 \times 2$ . As equações em (7.3), juntamente com (7.5) nos fornece um sistema de equações para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , que pode ser separado em dois subconjuntos. Resultando assim em duas formas distintas para a matriz de defeito.

Do primeiro conjunto formado pelas componentes  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{22}$ ,  $\beta_{21}$ ,  $\beta_{12}$ ,  $\gamma_{11}$ ,  $\gamma_{22}$  temos

$$\alpha_{11} = a_{11}e^{-\frac{i}{4}q}, \quad \alpha_{22} = a_{11}e^{\frac{i}{4}q}, \quad \gamma_{11} = c_{11}e^{\frac{i}{4}q}, \quad \gamma_{22} = c_{11}e^{-\frac{i}{4}q}. \quad (7.6)$$

Nota-se que o termo  $\beta_{21}$  pode ser parametrizado da seguinte forma:

$$\beta_{21} = b_{21}e^{-\frac{i}{2}\Lambda}e^{\frac{i}{4}p} \quad (7.7)$$

onde foi incluído o campo auxiliar  $\Lambda$ . Assim, substituindo os resultados anteriores nas equações envolvendo  $\partial_+\alpha_{11}$ ,  $\partial_-\gamma_{11}$ ,  $\partial_+\beta_{21}$ ,  $\partial_-\beta_{21}$ ,  $\partial_+\beta_{12}$  e  $\partial_-\beta_{12}$  teremos, respectivamente

$$\begin{aligned} i\partial_+q &= \frac{1}{2a_{11}} \left( b_{21}e^{-\frac{i}{2}\Lambda}e^{\frac{i}{2}p} + \beta_{12}e^{-\frac{i}{4}p} \right), \\ i\partial_-q &= \frac{1}{2c_{11}} \left( b_{21}e^{-\frac{i}{2}\Lambda} + \beta_{12}e^{\frac{i}{4}p} \right), \\ i\partial_+\Lambda &= -\frac{c_{11}}{2b_{21}}e^{\frac{i}{2}\Lambda}e^{-\frac{i}{2}p} \left( e^{\frac{i}{2}q} - e^{-\frac{i}{2}q} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i\partial_-(\Lambda - p) &= -\frac{a_{11}}{2b_{21}}e^{\frac{i}{2}\Lambda}\left(e^{\frac{i}{2}q} - e^{-\frac{i}{2}q}\right), \\
\partial_+\beta_{12} &= -\frac{i}{4}\beta_{12}\partial_+p + \frac{c_{11}}{4}e^{\frac{i}{4}p}\left(e^{\frac{i}{2}q} - e^{-\frac{i}{2}q}\right), \\
\partial_-\beta_{12} &= \frac{i}{4}\beta_{12}\partial_-p + \frac{a_{11}}{4}e^{-\frac{i}{4}p}\left(e^{\frac{i}{2}q} - e^{-\frac{i}{2}q}\right). \quad (7.8)
\end{aligned}$$

Essas são as transformações de Backlund tipo II para o modelo sine-Gordon. Uma solução possível para esse sistema é [5]

$$\beta_{12} = -\frac{b_{21}}{2}e^{\frac{i}{2}\Lambda}e^{-\frac{i}{4}p}\left(e^{\frac{i}{2}q} + e^{-\frac{i}{2}q} + \eta\right) \quad (7.9)$$

onde  $\eta$  é uma constante,  $p = \phi_1 + \phi_2$  e  $q = \phi_1 - \phi_2$ . Logo, escolhendo  $a_{11} = 0$

$$K = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{4}q} + \frac{1}{\lambda^2}c_{11}e^{-\frac{i}{4}q} & -\frac{1}{2\lambda}b_{21}e^{\frac{i}{2}\Lambda}e^{-\frac{i}{4}p}\left(e^{\frac{i}{2}q} + e^{-\frac{i}{2}q} + \eta\right) \\ \frac{1}{\lambda}b_{21}e^{-\frac{i}{2}\Lambda}e^{\frac{i}{4}p} & e^{\frac{i}{4}q} + \frac{1}{\lambda^2}c_{11}e^{-\frac{i}{4}q} \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

E considerando os limites especificados em [5] para  $c_{11} = 0$ :

$$b_{21}e^{-\frac{i}{2}\Lambda} = B, \quad b_{21}e^{\frac{i}{2}\Lambda} \rightarrow 0, \quad \frac{b_{21}}{2}e^{\frac{i}{2}\Lambda}\eta \rightarrow B. \quad (7.11)$$

A matriz  $K$  será

$$K = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{4}q} & -\frac{1}{\lambda}Be^{-\frac{i}{4}p} \\ \frac{1}{\lambda}Be^{\frac{i}{4}p} & e^{\frac{i}{4}q} \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

onde  $B$  é constante. E portanto as equações em (7.8) se reduzem a

$$\partial_-p = \frac{1}{B}\sin\left(\frac{q}{2}\right), \quad \partial_+q = B\sin\left(\frac{p}{2}\right) \quad (7.13)$$

que são as mesmas transformações apresentadas em (3.3) e (3.4) com  $B = \omega$ . Pode-se mostrar ainda, que de fato os campos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  satisfazem a equação de SG [5], ou seja,

$$\begin{aligned}
\partial_x^2\phi_1 - \partial_t^2\phi_1 &= \sin\phi_1, \\
\partial_x^2\phi_2 - \partial_t^2\phi_2 &= \sin\phi_2.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, para o segundo conjunto, contendo os elementos  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{21}$ ,  $\beta_{22}$ ,  $\beta_{11}$ ,  $\gamma_{21}$ ,  $\gamma_{12}$  foram obtidas equações similares e com resultados parecidos. E nota-se, que as equações desse segundo conjunto estão relacionadas com o primeiro, através da seguinte transformação  $p \rightarrow q$ , ou ainda  $\phi_2 \rightarrow -\phi_2$  [5].

## 7.2 Modelo super sinh-Gordon

Nesse caso vamos considerar a seguinte expansão para  $K$

$$K = \alpha + \lambda^{-1/2}\beta + \lambda^{1/2}\gamma \quad (7.14)$$

onde agora  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são matrizes  $3 \times 3$  e  $\mathcal{A}_{\pm}^{(1)}$  e  $\mathcal{A}_{\pm}^{(2)}$  estão relacionados à duas soluções das equações em (6.6).

Nas seções seguintes calculamos explicitamente a matriz  $K$  para os casos: bosônico, fermiônico. Em seguida apresentamos a forma geral de  $K$  com ambos os campos bosônico e fermiônico. Os sistemas de equações que foram resolvidos para cada um desses três casos são apresentados no apêndice B.

### 7.2.1 Caso Bosônico

Fazendo  $\psi = \bar{\psi} = 0$  então

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_+ &= \begin{pmatrix} \lambda^{1/2} - \partial_+ \phi & -1 & 0 \\ -\lambda & \lambda^{1/2} + \partial_+ \phi & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda^{1/2} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}_- &= \begin{pmatrix} \lambda^{-1/2} & -\lambda^{-1}e^{2\phi} & 0 \\ -e^{-2\phi} & \lambda^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda^{-1/2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Da primeira equação em (7.3) e usando (7.14) encontramos após igualar as potências de  $\lambda$  que

$$\begin{aligned} \alpha_{22} &= \alpha_{11}, & \gamma_{22} &= \gamma_{11}, & \gamma_{23} &= -\alpha_{13}, & \gamma_{31} &= -\alpha_{32} \\ \alpha_{12} &= 0, & \gamma_{12} &= 0, & \gamma_{13} &= 0 & \gamma_{32} &= 0. \end{aligned}$$

E da segunda equação em (7.3) temos

$$\begin{aligned} \beta_{13} &= -e^{p-q}\alpha_{23}, & \beta_{32} &= -e^{p+q}\alpha_{31}, & \alpha_{22} &= \alpha_{11}e^{2q}, & \beta_{22} &= \beta_{11}e^{2q} \\ \alpha_{21} &= 0, & \beta_{21} &= 0, & \beta_{23} &= 0, & \beta_{31} &= 0 \end{aligned}$$

onde introduzimos as variáveis  $p$  e  $q$  que relacionam as duas configurações dos campos como,

$$p = \phi_1 + \phi_2, \quad q = \phi_1 - \phi_2 . \quad (7.16)$$

E assim temos resumidamente os seguinte resultados

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= b_{11}e^{-q}, \quad \beta_{13} = b_{13}e^{\frac{p-q}{2}}, \quad \alpha_{23} = a_{23}e^{\frac{-(p-q)}{2}} \\ \alpha_{31} &= a_{31}e^{\frac{-(p+q)}{2}}, \quad \beta_{32} = b_{32}e^{\frac{p+q}{2}}, \quad \gamma_{22} = \gamma_{11} = c_{11}, \\ \partial_+ \beta_{12} &= \beta_{22} - \beta_{11} + \beta_{12} \partial_+ p, \\ \partial_+ \gamma_{21} &= -\gamma_{21} \partial_+ p + \beta_{11} - \beta_{22}, \\ \partial_- \beta_{11} &= e^{p-q} \gamma_{21} - e^{-(p+q)} \beta_{12}, \\ \partial_- \beta_{12} &= \gamma_{11} (e^{p-q} - e^{p+q}), \\ \partial_- \gamma_{21} &= \gamma_{11} (e^{-(p-q)} - e^{-(p+q)}) \end{aligned} \quad (7.17)$$

onde escolhemos as constantes fermiônicas ( $a_{23}, a_{13}, a_{31}, a_{32}$ ) iguais a zero. Assim o sistema se reduz a

$$\begin{aligned} \partial_+ q &= \frac{1}{c_{11}} (\gamma_{21} - \beta_{12}), \\ \partial_- q &= -\frac{1}{b_{11}} (e^p \gamma_{21} - e^{-p} \beta_{12}), \\ \partial_+ \beta_{12} &= \beta_{12} \partial_+ p + b_{11} (e^q - e^{-q}), \\ \partial_- \beta_{12} &= -c_{11} e^p (e^q - e^{-q}), \\ \partial_+ \gamma_{21} &= -\gamma_{21} \partial_+ p - b_{11} (e^q - e^{-q}), \\ \partial_- \gamma_{21} &= c_{11} e^{-p} (e^q - e^{-q}) . \end{aligned} \quad (7.18)$$

Introduzindo o campo auxiliar  $\Lambda$  de modo que

$$\gamma_{21} = c_{21} e^{\Lambda-p} .$$

Encontramos que as equações envolvendo  $\partial_{\pm} q$  e  $\partial_{\pm} \gamma_{21}$  ficam

$$\begin{aligned} \partial_+ q &= \frac{1}{c_{11}} (c_{21} e^{\Lambda-p} - \beta_{12}), \\ \partial_- q &= -\frac{1}{b_{11}} (c_{21} e^{\Lambda} - e^{-p} \beta_{12}), \\ \partial_+ \Lambda &= -\frac{b_{11}}{c_{21}} e^{p-\Lambda} (e^q - e^{-q}), \\ \partial_- (\Lambda - p) &= \frac{c_{11}}{c_{21}} e^{-\Lambda} (e^q - e^{-q}), \end{aligned} \quad (7.19)$$

que juntamente com as equações para  $\partial_+\beta_{12}$  e  $\partial_-\beta_{12}$  em (7.17). Aqui também identificamos o sistema acima como o Backlund tipo II para o modelo sinh-Gordon supersimétrico  $N = 1$ , uma solução compatível é

$$\beta_{12} = c_{21}e^{p-\Lambda}(e^q + e^{-q} + \eta) . \quad (7.20)$$

Assim teremos que  $K$  é dado por

$$K = \begin{pmatrix} \lambda^{-1/2}b_{11}e^{-q} + \lambda^{1/2}c_{11} & \lambda^{-1/2}c_{21}e^{p-\Lambda}(e^q + e^{-q} + \eta) & 0 \\ \lambda^{1/2}c_{21}e^{\Lambda-p} & \lambda^{-1/2}b_{11}e^q + \lambda^{1/2}c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} + \lambda^{-1/2}b_{33} + \lambda^{1/2}c_{33} \end{pmatrix} .$$

No caso limite onde  $\Lambda = \Omega = cte$ , e para  $\Omega, \eta$  grandes e  $c_{21}$  pequeno, encontramos que

$$c_{21}e^\Lambda = B, \quad c_{21}e^{-\Lambda}\eta \rightarrow B, \quad c_{21}e^{-\Lambda} \rightarrow 0. \quad (7.21)$$

onde  $B$  é constante. De modo que escolhendo  $b_{11} = b_{33} = 0$  a matriz fica

$$K = \begin{pmatrix} \lambda^{1/2}c_{11} & \lambda^{-1/2}Be^p & 0 \\ \lambda^{1/2}Be^{-p} & \lambda^{1/2}c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} + \lambda^{1/2}c_{33} \end{pmatrix} . \quad (7.22)$$

Além disso as equações em (7.19) ficam (com  $c_{11} = 1$ )

$$\begin{aligned} \partial_+q &= -2B\sinh p, \\ \partial_-p &= \frac{2}{B}\sinh q \end{aligned} \quad (7.23)$$

que são as transformações de Backlund tipo-I para o modelo sinh-Gordon. onde  $B = -\frac{2}{\omega^2}$ .

## 7.2.2 Caso Fermiônico

Agora para o caso fermiônico fazemos  $\phi = 0$ , assim

$$\mathcal{A}_+ = \begin{pmatrix} \lambda^{1/2} & -1 & \bar{\psi} \\ -\lambda & \lambda^{1/2} & \lambda^{1/2}\bar{\psi} \\ \lambda^{1/2}\bar{\psi} & \bar{\psi} & 2\lambda^{1/2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_- = \begin{pmatrix} \lambda^{-1/2} & -\lambda^{-1} & -\lambda^{-1/2}\psi \\ -1 & \lambda^{-1/2} & -\psi \\ \psi & \lambda^{-1/2}\psi & 2\lambda^{-1/2} \end{pmatrix} . \quad (7.24)$$

Como na seção anterior vamos usar as equações (7.14), (7.3) e igualar as potências de  $\lambda$ , para obter  $K$  explicitamente. Obtemos primeiramente

$$\beta_{11} = b_{11}, \quad \beta_{33} = b_{33}, \quad \gamma_{11} = c_{11}, \quad \gamma_{33} = c_{33} .$$

Com esses resultados vamos analisar as seguintes equações,

$$\begin{aligned} \alpha_{13} + \gamma_{23} &= \bar{\psi}_2 c_{33} - c_{11} \bar{\psi}_1, & \alpha_{32} + \gamma_{31} &= c_{33} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 c_{11}, \\ \alpha_{31} + \beta_{32} &= b_{33} \psi_1 - \psi_2 b_{11}, & \alpha_{23} + \beta_{13} &= b_{11} \psi_1 - \psi_2 b_{33} . \end{aligned}$$

Podemos escolher convenientemente  $c_{33} = c_{11}$  e  $b_{33} = b_{11} = 0$ , e introduzindo o campo auxiliar  $f_1$

$$f_1 = \frac{i}{2\omega}(\psi_1 + \psi_2) = \frac{i\omega}{4}(\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2) . \quad (7.25)$$

De tal forma que

$$\begin{aligned} \alpha_{13} + \gamma_{23} &= -c_{11}(\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2) = \frac{4ic_{11}}{\omega} f_1, \\ \beta_{13} &= -\alpha_{23}, \quad \beta_{32} = -\alpha_{31} . \end{aligned}$$

Gerando as seguintes transformações de Backlund:

$$\begin{aligned} \partial_- f_1 &= \frac{i\omega}{2}(\psi_1 - \psi_2), \\ \partial_+ f_1 &= \frac{i\omega}{2} \frac{a_{33}}{c_{11}}(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) . \end{aligned}$$

E com  $c_{11} = 1$  então  $-c_{21} = a_{33} = -B = \frac{2}{\omega^2}$ .

Assim encontramos as seguintes equações,

$$\begin{aligned} \partial_+ \psi_k &= 2\bar{\psi}_k, \\ \partial_- \bar{\psi}_k &= 2\psi_k, \\ \psi_1 + \psi_2 &= -2i\omega f_1, \\ \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 &= -\frac{4i}{\omega} f_1, \\ \partial_- f_1 &= \frac{i\omega}{2}(\psi_1 - \psi_2), \\ \partial_+ f_1 &= \frac{i}{\omega}(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) . \end{aligned} \quad (7.26)$$

Por simplicidade escolhamos também:  $\alpha_{32} = \gamma_{31}$ ,  $\alpha_{13} = \gamma_{23}$  e ainda obtemos  $a_{23} = a_{31} = 0$ . Teremos portanto que a matriz defeito será dada por

$$K = \begin{pmatrix} \lambda^{1/2} c_{11} & \lambda^{-1/2} B & \frac{2i}{\omega} c_{11} f_1 \\ \lambda^{1/2} B & \lambda^{1/2} c_{11} & \lambda^{1/2} \frac{2i}{\omega} c_{11} f_1 \\ -\lambda^{1/2} \frac{2i}{\omega} c_{11} f_1 & -\frac{2i}{\omega} c_{11} f_1 + & -B + \lambda^{1/2} c_{11} \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$

### 7.2.3 Caso Bosônico-Fermiônico

Como nos casos anteriores das equações em (7.3) e usando (7.14), e inicialmente teremos:

$$\gamma_{11} = c_{11}, \quad \gamma_{33} = c_{33}, \quad \beta_{33} = b_{33}, \quad \gamma_{22} = \gamma_{11}, \quad \beta_{22} = b_{22} e^q, \quad \beta_{11} = b_{11} e^{-q}.$$

E vamos convenientemente fazer as seguintes escolhas  $b_{33} = -b_{11}$ ,  $c_{33} = c_{11}$ ,  $\alpha_{32} = -\alpha_{13}$ ,  $\gamma_{31} = -\gamma_{23}$ , de modo que ao introduzirmos o campo auxiliar  $f_1$  dado por,

$$f_1 = \frac{i}{2\omega \cosh\left(\frac{q}{2}\right)} (\psi_1 + \psi_2) = \frac{i\omega}{4 \cosh\left(\frac{p}{2}\right)} (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2) \quad (7.28)$$

ficamos com

$$\begin{aligned} \alpha_{13} + \gamma_{23} &= -(\gamma_{31} + \alpha_{32}) = \frac{4i c_{11}}{\omega} \cosh\left(\frac{p}{2}\right) f_1, \\ \alpha_{31} e^{\frac{p+q}{2}} + \beta_{32} e^{\frac{-(p+q)}{2}} &= -\left(\alpha_{23} e^{\frac{p-q}{2}} + \beta_{13} e^{\frac{-(p-q)}{2}}\right) = 2i\omega b_{11} \cosh\left(\frac{q}{2}\right) f_1. \end{aligned}$$

Das expressões acima notamos que podemos escolher adequadamente  $\beta_{13} = \alpha_{23} e^p$ ,  $\beta_{32} = \alpha_{31} e^p$  e  $\gamma_{23} = \alpha_{13} e^{-p}$ , tal que todos esses elementos sejam proporcionais ao campo  $f_1$ , como segue

$$\alpha_{23} = -i\omega b_{11} e^{-\frac{p}{2}} f_1, \quad \alpha_{31} = i\omega b_{11} e^{-\frac{p}{2}} f_1, \quad \alpha_{13} = -\frac{2}{i\omega} c_{11} e^{\frac{p}{2}} f_1.$$

Notamos que para os elementos bosônico de  $K$  devemos resolver o seguinte sistema de equações

$$\partial_{+q} = \frac{1}{c_{11}} (\gamma_{21} - \beta_{12}) + \frac{2i}{\omega} \sinh\left(\frac{p}{2}\right) f_1 (\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2),$$

$$\begin{aligned}
\partial_- q &= \frac{1}{b_{11}} [\beta_{12} e^{-p} - \gamma_{21} e^p], \\
\partial_+ \beta_{12} &= \beta_{12} \partial_+ p + 2b_{11} \sinh q, \\
\partial_+ \gamma_{21} &= -\gamma_{21} \partial_+ p - 2b_{11} \sinh q, \\
\partial_- \beta_{12} &= -2c_{11} e^p \sinh q + \frac{2ic_{11}}{\omega} e^p \sinh\left(\frac{q}{2}\right) f_1(\psi_1 - \psi_2), \\
\partial_- \gamma_{21} &= 2c_{11} e^{-p} \sinh q - \frac{2ic_{11}}{\omega} e^{-p} \sinh\left(\frac{q}{2}\right) f_1(\psi_1 - \psi_2). \quad (7.29)
\end{aligned}$$

Tal sistema para a parte bosônica é o mesmo que aparece em (7.18). Logo podemos usar os resultados do caso bosônico (com defeito tipo I) com  $\gamma_{21} = Be^{-p}$ ,  $\beta_{12} = Be^p$  e  $c_{11} = 1$ ,  $b_{11} = 0$ , para obter as transformações de Backlund:

$$\begin{aligned}
\partial_+ q &= -2B \sinh p + \frac{2i}{\omega} \sinh\left(\frac{p}{2}\right) f_1(\psi_1 + \bar{\psi}_2), \\
\partial_- p &= -\frac{2}{B} \sinh q + \frac{2i}{B\omega} \sinh\left(\frac{q}{2}\right) f_1(\psi_1 - \psi_2).
\end{aligned}$$

Portanto a matriz de defeito será dada por

$$K = \begin{pmatrix} \lambda^{1/2} c_{11} & \lambda^{-1/2} B e^p & \frac{2i}{\omega} c_{11} e^{\frac{p}{2}} f_1 \\ \lambda^{1/2} B e^{-p} & \lambda^{1/2} c_{11} & \lambda^{1/2} \frac{2i}{\omega} c_{11} e^{-\frac{p}{2}} f_1 \\ -\lambda^{1/2} \frac{2i}{\omega} c_{11} e^{-\frac{p}{2}} f_1 & -\frac{2i}{\omega} c_{11} e^{\frac{p}{2}} f_1 + & -B + \lambda^{1/2} c_{11} \end{pmatrix}. \quad (7.30)$$

E ainda encontramos as seguintes equações para os campos

$$\begin{aligned}
\partial_+ \partial_- \phi_k &= 2 \sinh(2\phi_k) + 2\bar{\psi}_k \psi_k \sinh \phi_k, \\
\partial_- \bar{\psi}_k &= 2\psi_k \cosh \phi_k, \\
\partial_+ \psi_k &= 2\bar{\psi}_k \cosh \phi_k, \\
\partial_- p &= -\frac{2}{B} \sinh q + \frac{2i}{B\omega} \sinh\left(\frac{q}{2}\right) f_1(\psi_1 - \psi_2), \\
\partial_+ q &= -2B \sinh p + \frac{2i}{\omega} \sinh\left(\frac{p}{2}\right) f_1(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2), \\
\psi_1 + \psi_2 &= -2i\omega \cosh\left(\frac{q}{2}\right) f_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 &= -\frac{4i}{\omega} \cosh\left(\frac{p}{2}\right) f_1, \\
\partial_+ f_1 &= \frac{i}{\omega} \cosh\left(\frac{p}{2}\right) (\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2), \\
\partial_- f_1 &= \frac{i\omega}{2} \cosh\left(\frac{q}{2}\right) (\psi_1 - \psi_2).
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Os cálculos detalhados para a obtenção dessas equações de movimento estão no apêndice B.

# Capítulo 8

## Quantidades Conservadas

Nesse capítulo vamos seguir o proposto em [5, 17, 18], para encontrar uma função geradora para o conjunto infinito de quantidades conservadas. Aqui essa abordagem será aplicada ao modelo sinh-Gordon supersimétrico.

### 8.1 Teoria sem defeito

Sendo o problema linear mostrado no capítulo 7

$$\partial_+ \Psi = -\mathcal{A}_+ \Psi, \quad \partial_- \Psi = -\mathcal{A}_- \Psi \quad (8.1)$$

onde as coordenadas do cone de luz são  $x_{\pm} = x \pm t$  e portanto  $\partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_x \pm \partial_t)$ . E ainda  $U \equiv \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_- - \mathcal{A}_+$ ,  $V \equiv \mathcal{A}_x = -(\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-)$ . Podemos reescrever o problema acima como segue

$$\partial_t \Psi = U \Psi, \quad \partial_x \Psi = V \Psi \quad (8.2)$$

onde no caso do modelo sinh-Gordon supersimétrico  $N = 1$ ,  $U$  e  $V$  são matrizes  $3 \times 3$ ,  $\Psi$  é um vetor coluna dado como  $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \epsilon \Psi_3 \end{pmatrix}$ , sendo as

componentes  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ ,  $\Psi_3$  são bosônicas e  $\epsilon$  é um parâmetro fermiônico. Em C.3 apresentamos outra forma para  $\Psi$ .

O sistema de equações diferenciais parciais em (8.2) gera as seguintes equações, para seus respectivos elementos de matriz:

$$\partial_t \Psi_1 = U_{11} \Psi_1 + U_{12} \Psi_2 + U_{13} \Psi_3 \epsilon, \quad \partial_x \Psi_1 = V_{11} \Psi_1 + V_{12} \Psi_2 + V_{13} \Psi_3 \epsilon$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \Psi_2 &= U_{22} \Psi_2 + U_{21} \Psi_1 + U_{23} \Psi_3 \epsilon, & \partial_x \Psi_2 &= V_{22} \Psi_2 + V_{21} \Psi_1 + V_{23} \Psi_3 \epsilon \\
\epsilon \partial_t \Psi_3 &= U_{33} \Psi_3 \epsilon + U_{31} \Psi_1 + U_{32} \Psi_2, & \epsilon \partial_x \Psi_3 &= V_{33} \Psi_3 \epsilon + V_{31} \Psi_1 + V_{32} \Psi_2 .
\end{aligned} \tag{8.3}$$

Vamos considerar a primeira equação do sistema acima, correspondente à primeira linha do problema em (8.2), multiplicando essas equações por  $\Psi_1^{-1}$  teremos

$$\begin{aligned}
(\partial_t \Psi_1) \Psi_1^{-1} &= U_{11} + U_{12} \Psi_2 \Psi_1^{-1} + U_{13} \Psi_3 \Psi_1^{-1} \epsilon, \\
(\partial_x \Psi_1) \Psi_1^{-1} &= V_{11} + V_{12} \Psi_2 \Psi_1^{-1} + V_{13} \Psi_3 \Psi_1^{-1} \epsilon .
\end{aligned}$$

Derivando a primeira em relação à  $x$  e a segunda com respeito à  $t$ , teremos

$$\begin{aligned}
\partial_x [(\partial_t \Psi_1) \Psi_1^{-1}] &= \partial_x [U_{11} + U_{12} \Psi_2 \Psi_1^{-1} + U_{13} \Psi_3 \Psi_1^{-1} \epsilon], \\
\partial_t [(\partial_x \Psi_1) \Psi_1^{-1}] &= \partial_t [V_{11} + V_{12} \Psi_2 \Psi_1^{-1} + V_{13} \Psi_3 \Psi_1^{-1} \epsilon] .
\end{aligned}$$

Subtraindo essas duas expressões e usando a condição de integrabilidade  $\partial_x \partial_t = \partial_t \partial_x$  encontramos a seguinte equação de conservação,

$$\partial_t [V_{11} + V_{12} \Gamma_{21} + V_{13} \Gamma_{31}] = \partial_x [U_{11} + U_{12} \Gamma_{21} + U_{13} \Gamma_{31}] \tag{8.4}$$

onde definimos as funções auxiliares  $\Gamma_{21} = \Psi_2 \Psi_1^{-1}$ ,  $\Gamma_{31} = \epsilon \Psi_3 \Psi_1^{-1}$ .

O primeiro conjunto de cargas conservadas será então

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx [V_{11} + V_{12} \Gamma_{21} + V_{13} \Gamma_{31}] . \tag{8.5}$$

Com esse mesmo procedimento pode-se obter os demais conjuntos das quantidades conservadas, para a segunda e terceira linhas em (8.2), respectivamente

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx [V_{22} + V_{21} \Gamma_{12} + V_{23} \Gamma_{32}], \tag{8.6}$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} dx [\epsilon V_{33} + V_{32} \Gamma_{23} + V_{31} \Gamma_{13}], \tag{8.7}$$

ou seja, para determinarmos tais quantidades devemos obter as funções auxiliares  $\Gamma$ . Para isso notamos,

$$\begin{aligned}
\partial_x \Gamma_{21} &= \partial_x (\Psi_2 \Psi_1^{-1}) = (\partial_x \Psi_2) \Psi_1^{-1} + \Psi_2 (\partial_x \Psi_1^{-1}) = \\
&= (\partial_x \Psi_2) \Psi_1^{-1} - \Psi_2 \Psi_1^{-1} (\partial_x \Psi_1) \Psi_1^{-1} = (\partial_x \Psi_2) \Psi_1^{-1} - \Gamma_{21} (\partial_x \Psi_1) \Psi_1^{-1} \\
&= (V_{22} \Psi_2 + V_{21} \Psi_1 + V_{23} \Psi_3 \epsilon) \Psi_1^{-1} - \Gamma_{21} (V_{11} \Psi_1 + V_{12} \Psi_2 + V_{13} \Psi_3 \epsilon) \Psi_1^{-1} \\
&= V_{21} + (V_{22} - V_{11}) \Gamma_{21} + V_{23} \Gamma_{31} - V_{12} (\Gamma_{21})^2 - V_{13} \Gamma_{21} \Gamma_{31} .
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Analogamente para  $\partial_t \Gamma_{21}$

$$\partial_t \Gamma_{21} = U_{21} + (U_{22} - U_{11})\Gamma_{21} + U_{23}\Gamma_{31} - U_{12}(\Gamma_{21})^2 - U_{13}\Gamma_{21}\Gamma_{31} . \quad (8.9)$$

A forma do Lax desse modelo, nos permite usar para a obtenção de quantidades conservadas, como o momento e a energia os conjuntos referentes às equações (8.5) e (8.6). Assim as equações restantes satisfeitas pelos  $\Gamma$ , que usaremos são

$$\partial_x \Gamma_{31} = V_{31} + (V_{33} - V_{11})\Gamma_{31} + V_{32}\Gamma_{21} - V_{13}\Gamma_{21}\Gamma_{31}, \quad (8.10)$$

$$\partial_x \Gamma_{32} = V_{32} + (V_{33} - V_{22})\Gamma_{32} + V_{31}\Gamma_{12} - V_{21}\Gamma_{12}\Gamma_{32}, \quad (8.11)$$

$$\begin{aligned} \partial_x \Gamma_{12} &= V_{12} + (V_{11} - V_{22})\Gamma_{12} + V_{13}\Gamma_{32} - V_{21}(\Gamma_{12})^2 - \\ &- V_{23}\Gamma_{12}\Gamma_{32} \end{aligned} \quad (8.12)$$

e

$$\partial_t \Gamma_{31} = U_{31} + (U_{33} - U_{11})\Gamma_{31} + U_{32}\Gamma_{21} - U_{13}\Gamma_{21}\Gamma_{31}, \quad (8.13)$$

$$\partial_t \Gamma_{32} = U_{32} + (U_{33} - U_{22})\Gamma_{32} + U_{31}\Gamma_{12} - U_{21}\Gamma_{12}\Gamma_{32}, \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_{12} &= U_{12} + (U_{11} - U_{22})\Gamma_{12} + U_{13}\Gamma_{32} - U_{21}(\Gamma_{12})^2 - \\ &- U_{23}\Gamma_{12}\Gamma_{32}, \end{aligned} \quad (8.15)$$

onde definimos  $\Gamma_{32} = \epsilon \Psi_3 \Psi_2^{-1}$ ,  $\Gamma_{12} = \Psi_1 \Psi_2^{-1}$ .

As funções  $\Gamma$  podem ser expandidas em potências positivas e negativas do parâmetro espectral efetivo  $\lambda$  [7, 17, 18], e então as equações (8.8), (8.10)-(8.12) são resolvidas recursivamente para cada coeficiente, como veremos a seguir. E as expressões (8.5) e (8.6) fornecem uma expansão de  $I$  em termos de  $\lambda$ , e assim obtemos um conjunto infinito de quantidades conservadas. Mostraremos na seção seguinte, que o momento e a energia são dados como uma combinação linear do conjunto em  $I_1$  e  $I_2$  com  $\lambda^{1/2}$ .

Vamos agora, desenvolver os cálculos usando o par de Lax em (6.3) e (6.4). Teremos que para o primeiro conjunto de cargas conservadas  $I_1$  devemos resolver as equações (8.8) e (8.10) logo,

$$\begin{aligned} \partial_x \Gamma_{21} &= \lambda + e^{-2\phi} - (\partial_x + \partial_t)\phi \Gamma_{21} - (\lambda^{1/2}\bar{\psi} - e^{-\phi}\psi) \Gamma_{31} - \\ &- (1 + \lambda^{-1}e^{2\phi}) (\Gamma_{21})^2 + (\bar{\psi} - \lambda^{-1/2}e^{\phi}\psi) \Gamma_{21}\Gamma_{31}, \end{aligned} \quad (8.16)$$

$$\begin{aligned} \partial_x \Gamma_{31} &= -\lambda^{1/2}\bar{\psi} - \psi e^{-\phi} - \left( \lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2} + \frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t)\phi \right) \Gamma_{31} - \\ &- (\bar{\psi} + \lambda^{-1/2}\psi e^{\phi}) \Gamma_{21} - (1 + \lambda^{-1}e^{2\phi}) \Gamma_{31}\Gamma_{21} . \end{aligned} \quad (8.17)$$

Vamos considerar as seguintes expansões para  $\Gamma_{21}$ ,  $\Gamma_{31}$ , a fim de resolvermos as equações acima

$$\Gamma_{21} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n/2} \Gamma_{21}^{(n/2)}, \quad \Gamma_{31} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n/2} \Gamma_{31}^{(n/2)}. \quad (8.18)$$

Das equações em (C.1) notamos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{31}^{(0)} \left[ 1 + e^{2\phi} \Gamma_{21}^{(1/2)} \right] &= 0, \\ \psi \Gamma_{31}^{(0)} \left[ e^{-\phi} - e^{\phi} \Gamma_{21}^{(1/2)} \right] + \left[ e^{-2\phi} - e^{2\phi} \left( \Gamma_{21}^{(1/2)} \right)^2 \right] &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja, temos então duas soluções possíveis: 1) se  $\Gamma_{21}^{(1/2)} = e^{-2\phi}$  então  $\Gamma_{31}^{(0)} = 0$ ; 2) se  $\Gamma_{21}^{(1/2)} = -e^{-2\phi} \log \Gamma_{31}^{(0)} \propto \psi$ . Ao substituirmos ambos os casos no sistema (C.1) vemos que para o primeiro caso os coeficientes são obtidos de forma recursiva, enquanto que no segundo caso isso não ocorre. De modo que vamos escolher como solução o caso 1). Desse modo encontramos que

$$\Gamma_{21}^{(0)} = 0, \quad (8.19)$$

$$\Gamma_{21}^{(1/2)} = e^{-2\phi}, \quad (8.20)$$

$$\Gamma_{21}^{(1)} = \frac{1}{2} (\partial_x - \partial_t) \phi e^{-2\phi}, \quad (8.21)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}^{(3/2)} &= \frac{1}{2} (1 - e^{-4\phi}) + \frac{1}{2} e^{-\phi} \bar{\psi} \psi (1 - e^{-2\phi}) + \frac{1}{8} [ (\partial_x - \partial_t) \phi ]^2 e^{-2\phi} - \\ &- \frac{1}{4} (\partial_x^2 - \partial_x \partial_t) \phi e^{-2\phi}, \end{aligned} \quad (8.22)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}^{(2)} &= \frac{1}{2} \partial_t \phi e^{-4\phi} - \partial_x \phi \left( e^{-4\phi} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} (\partial_x - \partial_t) \phi e^{-3\phi} \bar{\psi} \psi - \\ &- \frac{1}{8} (\partial_x - \partial_t) \phi e^{-2\phi} \psi \partial_x \psi - \frac{1}{4} e^{-\phi} (e^{-2\phi} + 1) (\partial_x \phi \bar{\psi} \psi + 2 \bar{\psi} \partial_x \psi) + \\ &+ \frac{1}{4} e^{-\phi} (e^{-2\phi} - 1) \partial_x \bar{\psi} \psi + \frac{1}{8} (\partial_x^3 - \partial_x^2 \partial_t) \phi e^{-2\phi} - \\ &- \frac{1}{8} (\partial_x - \partial_t) \phi (\partial_x^2 - \partial_x \partial_t) \phi e^{-2\phi}, \end{aligned} \quad (8.23)$$

$$\Gamma_{31}^{(0)} = 0, \quad (8.24)$$

$$\Gamma_{31}^{(1/2)} = -e^{-\phi}\psi, \quad (8.25)$$

$$\Gamma_{31}^{(1)} = \frac{1}{2}e^{-\phi}\partial_x\psi - \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 + e^{-2\phi}) - \frac{1}{4}(\partial_x - \partial_t)\phi e^{-\phi}\psi, \quad (8.26)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{31}^{(3/2)} &= \frac{1}{2}e^{-\phi}\psi(1 + e^{-2\phi}) + \frac{1}{4}\bar{\psi}\partial_t\phi e^{-2\phi} + \frac{1}{4}\bar{\psi}\partial_x\phi - \frac{1}{4}e^{-\phi}\partial_x^2\psi + \\ &+ \frac{1}{4}\partial_x\bar{\psi}(1 + e^{-2\phi}) - \frac{1}{2}e^{-2\phi}\bar{\psi}\partial_x\phi + \frac{1}{8}(\partial_x - \partial_t)\phi e^{-\phi}\partial_x\psi + \\ &+ \frac{1}{8}(\partial_x^2 - \partial_x\partial_t)\phi e^{-\phi}\psi. \end{aligned} \quad (8.27)$$

De (8.5) teremos o primeiro conjunto de cargas conservadas

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ -\lambda^{1/2} - \lambda^{-1/2} + \frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t)\phi + (1 + \lambda^{-1}e^{2\phi})\Gamma_{21} + \right. \\ &\left. + (\lambda^{-1/2}e^{\phi}\psi - \bar{\psi})\Gamma_{31} \right]. \end{aligned} \quad (8.28)$$

E com os valores dos coeficientes dos  $\Gamma$ 's obtidos anteriormente, primeiro vemos que  $I_1^{(-1/2)} = 0$  e  $I_1^{(0)}$  nos fornece a carga topológica. Sendo a primeira contribuição dada por,

$$I_1^{(1/2)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ -1 + \cosh 2\phi + \frac{1}{8}[(\partial_x - \partial_t)\phi]^2 + \frac{1}{2}\psi\partial_x\psi + 2\bar{\psi}\psi \cosh \phi \right]. \quad (8.29)$$

Vamos agora considerar a expansão em potências negativas, como segue

$$\Gamma_{21} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{\hat{\Gamma}_{21}^{(n/2)}}{\lambda^{n/2}}, \quad \Gamma_{31} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\Gamma}_{31}^{(n/2)}}{\lambda^{n/2}}. \quad (8.30)$$

Nesse caso novamente encontramos duas possíveis soluções, vindas de  $\hat{\Gamma}_{21}^{(-1/2)} = \pm 1$ , mas da mesma forma notamos que para resolvermos as (8.16), (8.17) recursivamente devemos ter ( $\hat{\Gamma}_{21}^{(-1/2)} = 1$ ), como indicado pelo sistema de equações em (C.2). Logo as componentes de  $\hat{\Gamma}_{21}$  serão,

$$\hat{\Gamma}_{21}^{(-1/2)} = 1, \quad (8.31)$$

$$\hat{\Gamma}_{21}^{(0)} = -\frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t)\phi, \quad (8.32)$$

$$\hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)} = \frac{1}{4}(\partial_x^2 + \partial_x\partial_t)\phi + \frac{1}{8}[(\partial_x + \partial_t)\phi]^2 - \sinh 2\phi + \psi\bar{\psi}\sinh\phi, \quad (8.33)$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{21}^{(1)} &= \frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t)\phi e^{2\phi} - \frac{1}{2}\psi\partial_x\bar{\psi}\sinh\phi - \frac{1}{2}\psi\bar{\psi}(\partial_x + \partial_t)\phi e^\phi + \\
&+ \frac{1}{8}\partial_x\bar{\psi}\bar{\psi}(\partial_x + \partial_t)\phi - \frac{1}{8}(\partial_x^3 + \partial_x^2\partial_t)\phi - \frac{1}{8}(\partial_x + \partial_t)\phi(\partial_x^2 + \partial_x\partial_t)\phi + \\
&+ \partial_x\phi \cosh 2\phi - \frac{1}{2}\psi\bar{\psi}\partial_x\phi \cosh \phi - \frac{1}{2}(\partial_x\psi\bar{\psi} + \psi\partial_x\bar{\psi})\sinh\phi . \quad (8.34)
\end{aligned}$$

E para  $\hat{\Gamma}_{31}$  teremos,

$$\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} = -\bar{\psi}, \quad (8.35)$$

$$\hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} = \frac{1}{4}(\partial_x + \partial_t)\phi \bar{\psi} + \frac{1}{2}\partial_x\bar{\psi} - \psi \cosh \phi, \quad (8.36)$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{31}^{(1)} &= \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 + e^{2\phi}) + \frac{1}{4}(\partial_x + \partial_t)\phi e^\phi\psi - \frac{1}{8}(\partial_x^2 + \partial_x\partial_t)\phi \bar{\psi} - \frac{1}{4}\partial_x^2\bar{\psi} + \\
&+ \frac{1}{2}\partial_x\psi \cosh \phi + \frac{1}{2}\psi\sinh\phi \partial_x\phi - \frac{1}{8}(\partial_x + \partial_t)\phi \partial_x\bar{\psi} . \quad (8.37)
\end{aligned}$$

E como anteriormente teremos do primeiro conjunto de cargas conservadas, a primeira contribuição não nula será,

$$\hat{I}_1^{(-1/2)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ 1 + \frac{1}{2}\bar{\psi}\partial_x\bar{\psi} - \frac{1}{8}[(\partial_x + \partial_t)\phi]^2 - \cosh 2\phi - 2\bar{\psi}\psi \cosh \phi \right]. \quad (8.38)$$

Agora as equações (8.12) e (8.11) ficam

$$\begin{aligned}
\partial_x\Gamma_{12} &= 1 + \lambda^{-1}e^{2\phi} + (\partial_x + \partial_t)\phi \Gamma_{12} + (\lambda^{-1/2}e^\phi\psi - \bar{\psi})\Gamma_{32} - \\
&- (\lambda + e^{-2\phi})(\Gamma_{12})^2 + (\lambda^{1/2}\bar{\psi} - e^{-\phi}\psi)\Gamma_{12}\Gamma_{32}, \quad (8.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x\Gamma_{32} &= -\bar{\psi} - \lambda^{-1/2}e^\phi\psi + \left(\frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t)\phi - \lambda^{1/2} - \lambda^{-1/2}\right)\Gamma_{32} - \\
&- (\lambda^{1/2}\bar{\psi} + \psi e^{-\phi})\Gamma_{12} - (\lambda + e^{-2\phi})\Gamma_{32}\Gamma_{12} . \quad (8.40)
\end{aligned}$$

Novamente podemos expandir  $\Gamma_{12}$  e  $\Gamma_{32}$  em potências positivas e negativas. Vamos considerar primeiramente a seguinte expansão,

$$\Gamma_{12} = \sum_{n=-1}^{\infty} \lambda^{n/2}\Gamma_{12}^{(n/2)}, \quad \Gamma_{32} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n/2}\Gamma_{32}^{(n/2)}. \quad (8.41)$$

Teremos

$$\Gamma_{12}^{(-1/2)} = e^{2\phi}, \quad (8.42)$$

$$\Gamma_{12}^{(0)} = -\frac{1}{2}(\partial_x - \partial_t)\phi e^{2\phi}, \quad (8.43)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^{(1/2)} &= \frac{1}{2}e^\phi\bar{\psi}\psi(1 - e^{2\phi}) + \frac{1}{2}(1 - e^{4\phi}) + \frac{1}{8}[(\partial_x - \partial_t)\phi]^2 e^{2\phi} + \\ &+ \frac{1}{4}(\partial_x^2 - \partial_x\partial_t)\phi e^{2\phi}, \end{aligned} \quad (8.44)$$

$$\Gamma_{32}^{(0)} = -e^\phi\psi, \quad (8.45)$$

$$\Gamma_{32}^{(1/2)} = -\frac{1}{2}\bar{\psi}(1 + e^{2\phi}) + \frac{1}{4}(\partial_x - \partial_t)\phi e^\phi\psi + \frac{1}{2}e^\phi\partial_x\psi. \quad (8.46)$$

Da equação (8.6) obtemos o segundo conjunto de cargas conservadas

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ -\frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t)\phi + (\lambda + e^{-2\phi})\Gamma_{12} + (e^{-\phi}\psi - \lambda^{1/2}\bar{\psi})\Gamma_{32} - \right. \\ &\left. - \lambda^{1/2} - \lambda^{-1/2} \right]. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Novamente a primeira contribuição diferente de zero será na ordem  $\lambda^{1/2}$ ,

$$\begin{aligned} I_2^{(1/2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ -1 + \frac{1}{8}[(\partial_x - \partial_t)\phi]^2 + \frac{1}{2}\psi\partial_x\psi + 2\bar{\psi}\psi \cosh\phi + \right. \\ &\left. + \cosh 2\phi \right]. \end{aligned} \quad (8.48)$$

E para a expansão em potências negativas

$$\Gamma_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\Gamma}_{12}^{(n/2)}}{\lambda^{n/2}}, \quad \Gamma_{32} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\Gamma}_{32}^{(n/2)}}{\lambda^{n/2}}. \quad (8.49)$$

E portanto das equações (8.39), (8.40) encontramos

$$\hat{\Gamma}_{12}^{(1/2)} = 1, \quad (8.50)$$

$$\hat{\Gamma}_{12}^{(1)} = \frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t)\phi, \quad (8.51)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{12}^{(3/2)} &= \bar{\psi}\psi \sinh\phi + \frac{1}{8}[(\partial_x + \partial_t)\phi]^2 - \frac{1}{4}(\partial_x^2 + \partial_x\partial_t)\phi + \\ &+ \sinh 2\phi, \end{aligned} \quad (8.52)$$

$$\hat{\Gamma}_{32}^{(1/2)} = -\bar{\psi}, \quad (8.53)$$

$$\hat{\Gamma}_{32}^{(0)} = 0, \quad (8.54)$$

$$\hat{\Gamma}_{32}^{(1)} = -\frac{1}{4}\bar{\psi}(\partial_x + \partial_t)\phi - \psi \cosh\phi + \frac{1}{2}\partial_x\bar{\psi}. \quad (8.55)$$

Do segundo conjunto de cargas conservadas em (8.47) obtemos a primeira contribuição dada por

$$\begin{aligned} \hat{I}_2^{(-1/2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ 2\bar{\psi}\psi \cosh \phi + \frac{1}{8} [(\partial_x + \partial_t)\phi]^2 - \frac{1}{2}\bar{\psi}\partial_x\bar{\psi} - 1 + \right. \\ &\quad \left. + \cosh 2\phi \right]. \end{aligned} \quad (8.56)$$

Notamos que  $\hat{I}_2^{(-1/2)} = -\hat{I}_1^{(-1/2)}$  e  $I_2^{(1/2)} = I_1^{(1/2)}$ , podemos então definir as quantidades

$$\mathbb{I}^{(+1/2)} = I_1^{(1/2)} + I_2^{(1/2)}, \quad \hat{\mathbb{I}}^{(-1/2)} = I_2^{(-1/2)} - I_1^{(-1/2)}. \quad (8.57)$$

Nós encontramos então que as expressões para a energia e o momento são dadas por,

$$\begin{aligned} E &= \mathbb{I}^{(+1/2)} + \hat{\mathbb{I}}^{(-1/2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 4 \cosh 2\phi + \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 + 8\bar{\psi}\psi \cosh \phi - \right. \\ &\quad \left. - \bar{\psi}\partial_x\bar{\psi} + \psi\partial_x\psi - 4 \right], \end{aligned} \quad (8.58)$$

$$P = \hat{\mathbb{I}}^{(-1/2)} - \mathbb{I}^{(+1/2)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \partial_x\phi\partial_t\phi - \psi\partial_x\psi - \bar{\psi}\partial_x\bar{\psi} \right]. \quad (8.59)$$

# Capítulo 9

## Contribuições do Defeito

No capítulo anterior foi apresentado o formalismo, que permite obter as infinitas quantidades conservadas, em uma teoria sem defeito. Agora veremos como a introdução do defeito afeta tais quantidades. Para isso vamos considerar como nos capítulos anteriores um defeito em  $x = 0$ , com isso (8.5) e (8.6) ficam

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= \int_{-\infty}^0 dx \left[ V_{11}^{(1)} + V_{12}^{(1)} \Gamma_{21}^{(1)} + V_{13}^{(1)} \Gamma_{31}^{(1)} \right] + \\ &+ \int_0^{\infty} dx \left[ V_{11}^{(2)} + V_{12}^{(2)} \Gamma_{21}^{(2)} + V_{13}^{(2)} \Gamma_{31}^{(2)} \right], \\ \mathcal{I}_2 &= \int_{-\infty}^0 dx \left[ V_{22}^{(1)} + V_{21}^{(1)} \Gamma_{12}^{(1)} + V_{23}^{(1)} \Gamma_{32}^{(1)} \right] + \\ &+ \int_0^{\infty} dx \left[ V_{22}^{(2)} + V_{21}^{(2)} \Gamma_{12}^{(2)} + V_{23}^{(2)} \Gamma_{32}^{(2)} \right],\end{aligned}\tag{9.1}$$

Derivando em relação a  $t$  e usando (8.4), teremos para o primeiro conjunto de cargas conservadas

$$\frac{d\mathcal{I}_1}{dt} = \left[ U_{11}^{(1)} + U_{12}^{(1)} \Gamma_{21}^{(1)} + U_{13}^{(1)} \Gamma_{31}^{(1)} - U_{11}^{(2)} - U_{12}^{(2)} \Gamma_{21}^{(2)} - U_{13}^{(2)} \Gamma_{31}^{(2)} \right]_{x=0}. \tag{9.2}$$

De forma análoga para  $\mathcal{I}_2$

$$\frac{d\mathcal{I}_2}{dt} = \left[ U_{22}^{(1)} + U_{21}^{(1)} \Gamma_{12}^{(1)} + U_{23}^{(1)} \Gamma_{32}^{(1)} - U_{22}^{(2)} - U_{21}^{(2)} \Gamma_{12}^{(2)} - U_{23}^{(2)} \Gamma_{32}^{(2)} \right]_{x=0}. \tag{9.3}$$

Podemos ainda encontrar a relação entre as funções  $\Gamma_{21}^{(1)}$ ,  $\Gamma_{21}^{(2)}$  e  $\Gamma_{12}^{(1)}$ ,  $\Gamma_{32}^{(2)}$  usando (7.2), ou seja,

$$\Psi^{(2)} = K\Psi^{(1)}, \quad \Psi^{(2)} = \begin{pmatrix} \Psi_1^{(2)} \\ \Psi_2^{(2)} \\ \tilde{\epsilon} \Psi_3^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (9.4)$$

Da mesma forma como definido no capítulo 8,  $\Psi_1^{(2)}$ ,  $\Psi_2^{(2)}$ ,  $\Psi_3^{(2)}$  são componentes bosônicas e  $\tilde{\epsilon}$  é um parâmetro fermiônico. Portanto teremos as seguintes expressões

$$\Psi_1^{(2)} = K_{11}\Psi_1^{(1)} + K_{12}\Psi_2^{(1)} + K_{13}\Psi_3^{(1)}\epsilon, \quad (9.5)$$

$$\Psi_2^{(2)} = K_{21}\Psi_1^{(1)} + K_{22}\Psi_2^{(1)} + K_{23}\Psi_3^{(1)}\epsilon, \quad (9.6)$$

$$\tilde{\epsilon}\Psi_3^{(2)} = K_{31}\Psi_1^{(1)} + K_{32}\Psi_2^{(1)} + K_{33}\Psi_3^{(1)}\epsilon. \quad (9.7)$$

Para (9.2) vamos obter as seguintes relações entre os  $\Gamma$

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(2)}(\Psi_1^{(2)})^{-1} &= (K_{21}\Psi_1^{(1)} + K_{22}\Psi_2^{(1)} + K_{23}\Psi_3^{(1)}\epsilon)(\Psi_1^{(2)})^{-1} \\ &= \frac{K_{21}\Psi_1^{(1)} + K_{22}\Psi_2^{(1)} + K_{23}\Psi_3^{(1)}\epsilon}{K_{11}\Psi_1^{(1)} + K_{12}\Psi_2^{(1)} + K_{13}\Psi_3^{(1)}\epsilon} \times \frac{(\Psi_1^{(1)})^{-1}}{(\Psi_1^{(1)})^{-1}} \\ \Gamma_{21}^{(2)} &= \frac{K_{21} + K_{22}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{23}\Gamma_{31}^{(1)}}{K_{11} + K_{12}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{13}\Gamma_{31}^{(1)}}, \end{aligned} \quad (9.8)$$

e ainda

$$\Gamma_{31}^{(2)} = \frac{K_{31} + K_{32}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{33}\Gamma_{31}^{(1)}}{K_{11} + K_{12}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{13}\Gamma_{31}^{(1)}}. \quad (9.9)$$

Em adição obtemos também

$$\Gamma_{12}^{(2)} = \frac{K_{12} + K_{11}\Gamma_{12}^{(1)} + K_{13}\Gamma_{32}^{(1)}}{K_{22} + K_{21}\Gamma_{12}^{(1)} + K_{23}\Gamma_{32}^{(1)}}, \quad \Gamma_{32}^{(2)} = \frac{K_{32} + K_{31}\Gamma_{12}^{(1)} + K_{33}\Gamma_{32}^{(1)}}{K_{22} + K_{21}\Gamma_{12}^{(1)} + K_{23}\Gamma_{32}^{(1)}}.$$

Vamos explicitar os cálculos para o primeiro conjunto, para os demais conjuntos os resultados seguem da mesma maneira. Substituindo os resultados (9.9), (9.8) em (9.2) teremos

$$\frac{d\mathcal{I}_1}{dt} = \left\{ \left[ U_{11}^{(1)} \left( K_{11} + K_{12}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{13}\Gamma_{31}^{(1)} \right) - U_{11}^{(2)} \left( K_{11} + K_{12}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{13}\Gamma_{31}^{(1)} \right) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& U_{12}^{(1)}\Gamma_{21}^{(1)} \left( K_{11} + K_{12}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{13}\Gamma_{31}^{(1)} \right) - U_{12}^{(2)} \left( K_{21} + K_{22}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{23}\Gamma_{31}^{(1)} \right) + \\
& U_{13}^{(1)}\Gamma_{31}^{(1)} \left( K_{11} + K_{12}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{13}\Gamma_{31}^{(1)} \right) - U_{13}^{(2)} \left( K_{31} + K_{32}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{33}\Gamma_{31}^{(1)} \right) \Big] \div \\
& \div \left( K_{11} + K_{12}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{13}\Gamma_{31}^{(1)} \right) \Big\}_{x=0},
\end{aligned} \tag{9.10}$$

e considerando a primeira linha para a equação matricial  $\partial_t K = U^{(2)}K - KU^{(1)}$ , podemos reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{I}_1}{dt} &= \left\{ \left[ -\partial_t K_{11} - \partial_t K_{12}\Gamma_{21}^{(1)} - \partial_t K_{13}\Gamma_{31}^{(1)} - \right. \right. \\
& K_{13}(U_{31}^{(1)} + (U_{33}^{(1)} - U_{11}^{(1)})\Gamma_{31}^{(1)} + U_{32}^{(1)}\Gamma_{21}^{(1)} - U_{13}^{(1)}\Gamma_{21}^{(1)}\Gamma_{31}^{(1)}) - \\
& \left. K_{12}(U_{21}^{(1)} + (U_{22}^{(1)} - U_{11}^{(1)})\Gamma_{21}^{(1)} + U_{23}^{(1)}\Gamma_{31}^{(1)} - U_{12}^{(1)}(\Gamma_{21}^{(1)})^2 - U_{13}^{(1)}\Gamma_{21}^{(1)}\Gamma_{31}^{(1)}) \right] \div \\
& \div \left( K_{11} + K_{12}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{13}\Gamma_{31}^{(1)} \right) \Big\}_{x=0},
\end{aligned}$$

onde identificamos  $\partial_t \Gamma_{21}$ ,  $\partial_t \Gamma_{31}$  dados em (8.9) e (8.13), respectivamente. Logo,

$$\frac{d\mathcal{I}_1}{dt} = \frac{dD_1}{dt} = \left\{ \frac{-\partial_t \left( K_{11} + K_{12}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{13}\Gamma_{31}^{(1)} \right)}{K_{11} + K_{12}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{13}\Gamma_{31}^{(1)}} \right\}_{x=0}, \tag{9.11}$$

ou seja, a contribuição do defeito para o primeiro conjunto de quantidades conservadas será

$$D_1 = -\ln \left[ K_{11} + K_{12}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{13}\Gamma_{31}^{(1)} \right]_{x=0}. \tag{9.12}$$

E repetindo esse procedimento para o segundo conjunto as contribuições do defeito serão

$$D_2 = -\ln \left[ K_{22} + K_{21}\Gamma_{12}^{(1)} + K_{23}\Gamma_{32}^{(1)} \right]_{x=0}, \tag{9.13}$$

onde  $K$  é a matriz do defeito obtida anteriormente, dada em (7.30).

A fim de resolvermos as equações para  $\frac{dD_1}{dt}$  em (9.11) devemos expandir  $D_1$  em potências de  $\lambda$  e multiplicar pelo denominador, assim para potências

positivas temos

$$\begin{aligned} & \left( \frac{dD_1^{(0)}}{dt} + \lambda^{1/2} \frac{dD_1^{(1/2)}}{dt} + \dots \right) \left( K_{11} + K_{12}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{13}\Gamma_{31}^{(1)} \right) = \\ & - \left[ \partial_t K_{11} + \partial_t \left( K_{12}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{13}\Gamma_{31}^{(1)} \right) \right], \end{aligned} \quad (9.14)$$

e para potências negativas

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d\hat{D}_1^{(0)}}{dt} + \lambda^{-1/2} \frac{d\hat{D}_1^{(-1/2)}}{dt} + \dots \right) \left( K_{11} + K_{12}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{13}\Gamma_{31}^{(1)} \right) = \\ & - \left[ \partial_t K_{11} + \partial_t \left( K_{12}\Gamma_{21}^{(1)} + K_{13}\Gamma_{31}^{(1)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.15)$$

E de maneira análoga para  $D_2$ .

## 9.1 Caso Bosônico

Vamos considerar primeiro o caso puramente bosônico ( $\psi = \bar{\psi} = 0$ ). E para potências positivas obtemos

$$D_1^{(0)} = d_1^{(0)}(\phi_1 - \phi_2), \quad (9.16)$$

$$D_1^{(1/2)} = -d_1^{(1/2)} \left[ \frac{1}{2} \partial_- \phi_1 + \frac{c_{11}}{B} e^{\phi_1 - \phi_2} \right], \quad (9.17)$$

$$D_2^{(0)} = -d_2^{(0)}(\phi_1 - \phi_2), \quad (9.18)$$

$$D_2^{(1/2)} = -d_2^{(1/2)} \left[ -\frac{1}{2} \partial_- \phi_1 + \frac{c_{11}}{B} e^{-(\phi_1 - \phi_2)} \right]. \quad (9.19)$$

E para potências negativas

$$\hat{D}_1^{(0)} = \hat{d}_1^{(0)}, \quad (9.20)$$

$$\hat{D}_1^{(-1/2)} = -\hat{d}_1^{(-1/2)} \frac{B}{c_{11}} e^{\phi_1 + \phi_2}, \quad (9.21)$$

$$\hat{D}_2^{(0)} = \hat{d}_2^{(0)}, \quad (9.22)$$

$$\hat{D}_2^{(-1/2)} = -\hat{d}_2^{(-1/2)} \frac{B}{c_{11}} e^{-(\phi_1 + \phi_2)}. \quad (9.23)$$

onde  $d_i^{(0)}$ ,  $d_i^{(1/2)}$  ... são constantes de integração.

Com isso definimos as quantidades

$$\mathbb{D}^{(-1/2)} = \hat{D}_1^{(-1/2)} + \hat{D}_2^{(-1/2)}, \quad \mathbb{D}^{(+1/2)} = D_1^{(1/2)} + D_2^{(1/2)}.$$

Logo obtemos as contribuições do defeito para o momento e a energia, como combinação dos resultados anteriores como segue

$$P_D = \omega^2 \cosh(\phi_1 - \phi_2) - \frac{4}{\omega^2} \cosh(\phi_1 + \phi_2), \quad (9.24)$$

$$E_D = -\omega^2 \cosh(\phi_1 - \phi_2) - \frac{4}{\omega^2} \cosh(\phi_1 + \phi_2) \quad (9.25)$$

onde  $c_{11} = 1$  e  $\frac{1}{B} = -\frac{\omega^2}{2}$ . E ainda foram escolhidas para as constantes de integração  $d_i^{(1/2)} = \hat{d}_i^{(1/2)} = -1$ .

## 9.2 Caso Fermiônico

Iremos agora analisar o caso fermiônico ( $\phi = 0$ ) e assim temos com os valores obtidos para os  $\Gamma'$ s e igualando as potências de  $\lambda$ ,

$$D_1^{(0)} = d_1^{(0)}, \quad (9.26)$$

$$D_1^{(1/2)} = -d_1^{(1/2)} \left[ \frac{c_{11}}{B} + \frac{c_{11}}{B} \frac{2}{i\omega} f_1 \psi_1 \right], \quad (9.27)$$

$$D_2^{(0)} = d_2^{(0)}, \quad (9.28)$$

$$D_2^{(1/2)} = -d_2^{(1/2)} \left[ \frac{c_{11}}{B} + \frac{c_{11}}{B} \frac{2}{i\omega} f_1 \psi_1 \right]. \quad (9.29)$$

E para potências negativas obtemos

$$\hat{D}_1^{(0)} = \hat{d}_1^{(0)}, \quad (9.30)$$

$$\hat{D}_1^{(-1/2)} = -\hat{d}_1^{(-1/2)} \left[ \frac{B}{c_{11}} + \frac{2}{i\omega} f_1 \bar{\psi}_1 \right], \quad (9.31)$$

$$\hat{D}_2^{(0)} = \hat{d}_2^{(0)}, \quad (9.32)$$

$$\hat{D}_2^{(-1/2)} = -\hat{d}_2^{(-1/2)} \left[ \frac{B}{c_{11}} + \frac{2}{i\omega} f_1 \bar{\psi}_1 \right]. \quad (9.33)$$

Como no caso anterior encontramos

$$\begin{aligned}
P_D = \hat{\mathbb{D}}^{(-1/2)} - \mathbb{D}^{(+1/2)} &= \omega^2 - \frac{4}{\omega^2} - 2i\omega f_1 \psi_1 - \frac{4i}{\omega} f_1 \bar{\psi}_1 \\
&= \omega^2 - \frac{4}{\omega^2} + \psi_2 \psi_1 - \bar{\psi}_2 \bar{\psi}_1, \tag{9.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_D = \hat{\mathbb{D}}^{(-1/2)} + \mathbb{D}^{(+1/2)} &= -\omega^2 - \frac{4}{\omega^2} + 2i\omega f_1 \psi_1 - \frac{4i}{\omega} f_1 \bar{\psi}_1 \\
&= -\omega^2 - \frac{4}{\omega^2} - \psi_2 \psi_1 - \bar{\psi}_2 \bar{\psi}_1. \tag{9.35}
\end{aligned}$$

Notamos que podemos reescrever essas contribuições, usando a expressão do campo  $f_1$  dado em (7.25) por

$$f_1 = -\frac{1}{2i\omega}(\psi_1 + \psi_2) = -\frac{\omega}{4i}(\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2).$$

Portanto

$$\begin{aligned}
-2i\omega f_1 \psi_1 - \frac{4i}{\omega} f_1 \bar{\psi}_1 &= -\frac{4i}{\omega} f_1 (\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) - 2i\omega f_1 (\psi_1 - \psi_2) - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 + \psi_1 \psi_2 \\
&= \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_2 \bar{\psi}_1 - \psi_1 \psi_2 + \psi_2 \psi_1 - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 + \psi_1 \psi_2 \\
&= \psi_2 \psi_1 - \bar{\psi}_2 \bar{\psi}_1.
\end{aligned}$$

Analogamente para a contribuição da energia

$$2i\omega f_1 \psi_1 - \frac{4i}{\omega} f_1 \bar{\psi}_1 = -\psi_2 \psi_1 - \bar{\psi}_2 \bar{\psi}_1.$$

Então as contribuições são reescritas como

$$P_D = \omega^2 - \frac{4}{\omega^2} - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 + \psi_1 \psi_2 - 2i\omega f_1 (\psi_1 - \psi_2) - \frac{4i}{\omega} f_1 (\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2), \tag{9.36}$$

$$E_D = -\omega^2 - \frac{4}{\omega^2} - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 - \psi_1 \psi_2 + 2i\omega f_1 (\psi_1 - \psi_2) - \frac{4i}{\omega} f_1 (\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2). \tag{9.37}$$

### 9.3 Caso Bosônico Fermiônico

Vamos agora considerar a matriz (7.30) e para potências positivas

$$D_1^{(0)} = d_1^{(0)}(\phi_1 - \phi_2), \quad (9.38)$$

$$D_1^{(1/2)} = -d_1^{(1/2)} \left[ \frac{1}{2} \partial_- \phi_1 + \frac{c_{11}}{B} e^{\phi_1 - \phi_2} + \frac{c_{11}}{B} \frac{2}{i\omega} e^{\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}} f_1 \psi_1 \right], \quad (9.39)$$

$$D_2^{(0)} = -d_2^{(0)}(\phi_1 - \phi_2), \quad (9.40)$$

$$D_2^{(1/2)} = -d_2^{(1/2)} \left[ -\frac{1}{2} \partial_- \phi_1 + \frac{c_{11}}{B} e^{-(\phi_1 - \phi_2)} + \frac{c_{11}}{B} \frac{2}{i\omega} e^{-\frac{(\phi_1 - \phi_2)}{2}} f_1 \psi_1 \right] \quad (9.41)$$

E para potências negativas encontramos

$$\hat{D}_1^{(0)} = \hat{d}_1^{(0)}, \quad (9.42)$$

$$\hat{D}_1^{(-1/2)} = -\hat{d}_1^{(-1/2)} \left[ \frac{B}{c_{11}} e^{\phi_1 + \phi_2} + \frac{2}{i\omega} e^{\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}} f_1 \bar{\psi}_1 \right], \quad (9.43)$$

$$\hat{D}_2^{(0)} = \hat{d}_2^{(0)}, \quad (9.44)$$

$$\hat{D}_2^{(-1/2)} = -\hat{d}_2^{(-1/2)} \left[ \frac{B}{c_{11}} e^{-(\phi_1 + \phi_2)} + \frac{2}{i\omega} e^{-\frac{(\phi_1 + \phi_2)}{2}} f_1 \bar{\psi}_1 \right]. \quad (9.45)$$

Com isso definimos as quantidades

$$\mathbb{D}^{(-1/2)} = \hat{D}_1^{(-1/2)} + \hat{D}_2^{(-1/2)}, \quad \mathbb{D}^{(+1/2)} = D_1^{(1/2)} + D_2^{(1/2)}.$$

Portanto somando e subtraindo as expressões anteriores, obtemos as modificações impostas pelo defeito ao momento e a energia, respectivamente

$$\begin{aligned} P_D &= \hat{\mathbb{D}}^{(-1/2)} - \mathbb{D}^{(+1/2)} = \omega^2 \cosh(\phi_1 - \phi_2) - \frac{4}{\omega^2} \cosh(\phi_1 + \phi_2) - \\ &- 2i\omega \cosh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) f_1 \psi_1 - \frac{4i}{\omega} \cosh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) f_1 \bar{\psi}_1, \end{aligned} \quad (9.46)$$

$$\begin{aligned} E_D &= \mathbb{D}^{(+1/2)} + \hat{\mathbb{D}}^{(-1/2)} = -\omega^2 \cosh(\phi_1 - \phi_2) - \frac{4}{\omega^2} \cosh(\phi_1 + \phi_2) + \\ &+ 2i\omega \cosh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) f_1 \psi_1 - \frac{4i}{\omega} \cosh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) f_1 \bar{\psi}_1. \end{aligned} \quad (9.47)$$

E como anteriormente podemos reescrevê-las como

$$\begin{aligned}
P_D &= \omega^2 \cosh(\phi_1 - \phi_2) - \frac{4}{\omega^2} \cosh(\phi_1 + \phi_2) - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 + \psi_1 \psi_2 - \\
&- 2i\omega \cosh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) f_1(\psi_1 - \psi_2) - \frac{4i}{\omega} \cosh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) f_1(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2),
\end{aligned} \tag{9.48}$$

$$\begin{aligned}
E_D &= -\omega^2 \cosh(\phi_1 - \phi_2) - \frac{4}{\omega^2} \cosh(\phi_1 + \phi_2) - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 - \psi_1 \psi_2 + \\
&+ 2i\omega \cosh\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) f_1(\psi_1 - \psi_2) - \frac{4i}{\omega} \cosh\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) f_1(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2).
\end{aligned} \tag{9.49}$$

# Capítulo 10

## Considerações Finais

Nessa dissertação estudamos a estrutura de teorias de campos integráveis na presença de defeitos. Notamos que mesmo com a introdução de uma condição de contorno interna (defeito), a integrabilidade do modelo é preservada por meio de um conjunto de condições na posição do defeito ( $x = 0$ ). Como definido a integrabilidade está associada à presença de um conjunto infinito de quantidades conservadas, desse modo devemos obter essas cargas conservadas. Para isso utilizamos, por exemplo a abordagem dada em [18], e assim resolvemos de forma recursiva as equações de Ricatti em (8.8), (8.10), (8.12), (8.11) e somando à contribuição do defeito obtida de (9.12) e (9.13), teremos as quantidades conservadas modificadas. Em particular, calculamos explicitamente as contribuições do defeito para a energia e o momento para o modelo sinh-Gordon supersimétrico.

A fim de encontrarmos a matriz de defeito  $K$ , diretamente relacionada com as contribuições do defeito, usamos o formalismo proposto em [6], em que foi apresentado uma construção geral de hierarquias superintegráveis através de superálgebras, analisamos o modelo sinh-Gordon supersimétrico com  $N = 1$  onde usamos a superálgebra de Kac-Moody  $\tilde{sl}(2, 1)$  e assim foi possível obter o par de Lax (6.3), (6.4), bem como as equações de movimento para o modelo sinh-Gordon supersimétrico. Além disso, a partir da transformação de gauge (7.3) obtivemos as transformações de Backlund de tipo II, e a matriz de defeito  $K$ , que relaciona duas configurações de campo em  $x > 0$  e  $x < 0$  para o modelo. Como proposta de estudos futuros esperamos considerar o caso de defeitos tipo II, com a introdução de mais campos auxiliares, adicionando mais termos à expansão da matriz  $K$ . A princípio uma expansão possível seria  $K = \alpha + \lambda^{-1/2}\beta + \lambda^{1/2}\gamma + \lambda\delta$ .

# Apêndice A

## Relações de comutação e anti comutação para $\tilde{sl}(2, 1)$

$$\begin{aligned}
[K_1^{(2n+1)}, K_2^{(2m+1)}] &= 0, \\
\{F_1^{(2n+3/2)}, F_2^{(2m+1/2)}\} &= [(2n+1) - 2m]\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
[F_1^{(2n+3/2)}, K_1^{(2m+1)}] &= -[F_1^{(2n+3/2)}, K_2^{(2m+1)}] = F_2^{2(n+m+1)+1/2}, \\
[F_2^{(2n+1/2)}, K_1^{(2m+1)}] &= -[F_2^{(2n+1/2)}, K_2^{(2m+1)}] = F_1^{2(n+m)+3/2}, \\
\{F_1^{(2n+3/2)}, F_1^{(2m+3/2)}\} &= 2(K_2^{2(n+m+1)+1} + K_1^{2(n+m+1)+1}), \\
\{F_2^{(2n+1/2)}, F_2^{(2m+1/2)}\} &= -2(K_2^{2(n+m)+1} + K_1^{2(n+m)+1}), \\
\{F_2^{(2n+1/2)}, G_1^{(2m+1/2)}\} &= 2M_1^{2(n+m)+1}, \\
\{F_1^{(2n+3/2)}, G_2^{(2m+3/2)}\} &= -2M_1^{2(n+m+1)+1}, \\
\{F_1^{(2n+3/2)}, G_1^{(2m+1/2)}\} &= 2M_2^{2(n+m+1)} + [(2n+1) + 2m]\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
\{F_2^{(2n+1/2)}, G_2^{(2m+3/2)}\} &= -2M_2^{2(n+m+1)} - [2n + (2m+1)]\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
[M_1^{(2n+1)}, F_1^{(2m+3/2)}] &= G_1^{2(n+m+1)+1/2}, \\
[M_1^{(2n+1)}, F_2^{(2m+1/2)}] &= -[M_2^{(2n)}, F_1^{(2m+3/2)}] = G_2^{2(n+m)+3/2}, \\
[M_2^{(2n)}, F_2^{(2m+1/2)}] &= -G_1^{2(n+m)+1/2}, \\
[M_1^{(2n+1)}, K_1^{(2m+1)}] &= 2M_2^{2(n+m+1)} + (n+m)\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
[M_1^{(2n+1)}, K_2^{(2m+1)}] &= 0, \\
[K_2^{(2n+1)}, K_2^{(2m+1)}] &= -(n-m)\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
[M_2^{(2n)}, K_1^{(2m+1)}] &= 2M_1^{2(n+m)+1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[M_2^{(2n)}, K_2^{(2m+1)}] &= 0, \\
[G_1^{(2n+1/2)}, K_1^{(2m+1)}] &= -G_2^{2(n+m)+3/2}, \\
[G_1^{(2n+1/2)}, K_2^{(2m+1)}] &= -G_2^{2(n+m)+3/2}, \\
[G_2^{(2n+3/2)}, K_1^{(2m+1)}] &= -G_1^{2(n+m+1)+1/2}, \\
[G_2^{(2n+3/2)}, K_2^{(2m+1)}] &= -G_1^{2(n+m+1)+1/2}, \\
\{G_1^{(2n+1/2)}, G_2^{(2m+3/2)}\} &= [2n - (2m + 1)]\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
\{G_1^{(2n+1/2)}, G_1^{(2m+1/2)}\} &= 2(K_2^{2(n+m)+1} - K_1^{2(n+m)+1}), \\
\{G_2^{(2n+3/2)}, G_2^{(2m+3/2)}\} &= -2(K_2^{2(n+m+1)+1} - K_1^{2(n+m+1)+1}), \\
[M_1^{(2n+1)}, G_1^{(2m+1/2)}] &= -F_1^{2(n+m)+3/2}, \\
[M_1^{(2n+1)}, G_2^{(2m+3/2)}] &= -F_2^{2(n+m+1)+1/2}, \\
[M_2^{(2n)}, G_1^{(2m+1/2)}] &= -F_2^{2(n+m)+1/2}, \\
[M_2^{(2n)}, G_2^{(2m+3/2)}] &= -F_1^{2(n+m)+3/2}, \\
[M_1^{(2n+1)}, M_2^{(2m)}] &= -2K_1^{2(n+m)+1}, \\
[M_1^{(2n+1)}, M_1^{(2m+1)}] &= -(n - m)\delta_{n+m+1,0}\hat{c}, \\
[M_2^{(2n)}, M_2^{(2m)}] &= (n - m)\delta_{n+m,0}\hat{c}, \\
[K_1^{(2n+1)}, K_1^{(2m+1)}] &= (n - m)\delta_{n+m+1,0}\hat{c}.
\end{aligned} \tag{A.1}$$

# Apêndice B

## Cálculos para as matrizes defeito

Lembramos que

$$\partial_{\pm}K = KA_{\pm}^{(1)} - A_{\pm}^{(2)}K \quad (\text{B.1})$$

onde

$$K = \alpha + \lambda^{-1/2}\beta + \lambda^{1/2}\gamma \quad (\text{B.2})$$

E sendo o par de Lax

$$\mathcal{A}_+ = \begin{pmatrix} \lambda^{1/2} - \partial_+\phi & -1 & \bar{\psi} \\ -\lambda & \lambda^{1/2} + \partial_+\phi & \lambda^{1/2}\bar{\psi} \\ \lambda^{1/2}\bar{\psi} & \bar{\psi} & 2\lambda^{1/2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$\mathcal{A}_- = \begin{pmatrix} \lambda^{-1/2} & -\lambda^{-1}e^{2\phi} & -\lambda^{-1/2}\psi e^{\phi} \\ -e^{-2\phi} & \lambda^{-1/2} & -\psi e^{-\phi} \\ \psi e^{-\phi} & \lambda^{-1/2}\psi e^{\phi} & 2\lambda^{-1/2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Vamos apresentar a seguir, as equações obtidas, bem como alguns cálculos detalhados para cada um dos três casos: bosônico, fermiônico e bosônico fermiônico que foram abordados nessa dissertação.

## B.1 Equações para o caso bosônico

Fazendo  $\psi = \bar{\psi} = 0$

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} &= 0, & \gamma_{12} &= 0, & \gamma_{13} &= 0, & \gamma_{32} &= 0, & \beta_{21} &= 0, & \beta_{23} &= 0 \\
\alpha_{21} &= 0, & \beta_{31} &= 0, & \alpha_{22} &= \alpha_{11} = 0, & \beta_{22} &= \beta_{11}e^{2q} \\
\gamma_{22} &= \gamma_{11}, & \gamma_{23} &= -\alpha_{13}, & \gamma_{31} &= -\alpha_{32}, & \beta_{13} &= -e^{p-q}\alpha_{23} \\
\beta_{32} &= -e^{p+q}\alpha_{31}, & \partial_- \alpha_{32} &= 0, & \partial_+ \beta_{33} &= 0, & \partial_+ \gamma_{33} &= 0, & \partial_- \gamma_{33} &= 0 \\
\partial_+ \alpha_{33} &= 0, & \partial_- \alpha_{33} &= 0, & \partial_- \beta_{33} &= 0, & \partial_- \gamma_{11} &= 0, & \partial_- \alpha_{13} &= 0 \\
\partial_+ \beta_{11} &= -\beta_{11}\partial_+ q \iff \beta_{11} = b_{11}e^{-q} \\
\partial_+ \beta_{22} &= \beta_{22}\partial_+ q \iff \beta_{22} = b_{22}e^q \\
\partial_+ \beta_{13} &= \beta_{13}\partial_+ \left( \frac{p-q}{2} \right) \iff \beta_{13} = b_{13}e^{\frac{p-q}{2}} \\
\partial_+ \alpha_{23} &= -\alpha_{23}\partial_+ \left( \frac{p-q}{2} \right) \iff \alpha_{23} = a_{23}e^{-\frac{(p-q)}{2}} \\
\partial_+ \alpha_{31} &= -\alpha_{31}\partial_+ \left( \frac{p+q}{2} \right) \iff \alpha_{31} = a_{31}e^{-\frac{(p+q)}{2}} \\
\partial_+ \beta_{32} &= \beta_{32}\partial_+ \left( \frac{p+q}{2} \right) \iff \beta_{32} = b_{32}e^{\frac{p+q}{2}} \\
\partial_+ \gamma_{11} &= \gamma_{21} - \gamma_{11}\partial_+ q - \beta_{12} \\
\partial_+ \gamma_{11} &= \beta_{12} + \gamma_{11}\partial_+ q - \gamma_{21} \\
\partial_+ \alpha_{13} &= \beta_{13} + \alpha_{13}\partial_+ \left( \frac{p-q}{2} \right) + \alpha_{23} \\
\partial_+ \alpha_{13} &= -\alpha_{23} - \beta_{13} - \alpha_{13}\partial_+ \left( \frac{p-q}{2} \right) \\
\partial_+ \alpha_{32} &= \alpha_{31} + \beta_{32} - \alpha_{32}\partial_+ \left( \frac{p+q}{2} \right) \\
\partial_+ \alpha_{32} &= -\beta_{32} - \alpha_{31} + \alpha_{32}\partial_+ \left( \frac{p+q}{2} \right) \\
\partial_+ \beta_{12} &= \beta_{22} - \beta_{11} + \beta_{12}\partial_+ p \\
\partial_+ \gamma_{21} &= -\gamma_{21}\partial_+ p + \beta_{11} - \beta_{22} \\
\partial_- \beta_{11} &= e^{p-q}\gamma_{21} - e^{-(p+q)}\beta_{12} \\
\partial_- \beta_{22} &= e^{-(p-q)}\beta_{12} - e^{p+q}\gamma_{21} \\
\partial_- \beta_{12} &= \gamma_{11}(e^{p-q} - e^{p+q})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_- \gamma_{21} &= \gamma_{11}(e^{-(p-q)} - e^{-(p+q)}) \\
\partial_- \beta_{13} &= -e^{p-q} \alpha_{13} + \alpha_{13} \\
\partial_- \alpha_{23} &= -\alpha_{13} + e^{-(p-q)} \alpha_{13} \\
\partial_- \alpha_{31} &= \alpha_{32} - e^{-(p+q)} \alpha_{32} \\
\partial_- \beta_{32} &= -\alpha_{32} + e^{p+q} \alpha_{32}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

## B.2 Equações para o caso fermiônico

Com  $\phi = 0$

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} &= 0, & \gamma_{12} &= 0, & \gamma_{13} &= 0, & \gamma_{32} &= 0, & \gamma_{11} &= \gamma_{22} \\
\alpha_{21} &= 0, & \beta_{21} &= 0, & \beta_{23} &= 0, & \beta_{31} &= 0, & \beta_{22} &= \beta_{11} \\
\alpha_{11} - \alpha_{22} &= \alpha_{13} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \alpha_{32}, & \alpha_{11} - \alpha_{22} &= \bar{\psi}_2 \gamma_{31} - \gamma_{23} \bar{\psi}_1 \\
\gamma_{21} - \beta_{12} &= \bar{\psi}_2 \gamma_{31} - \alpha_{13} \bar{\psi}_1, & \gamma_{21} - \beta_{12} &= \gamma_{23} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \alpha_{32} \\
\beta_{12} - \gamma_{21} &= \beta_{13} \psi_1 + \psi_2 \alpha_{31}, & \gamma_{21} - \beta_{12} &= \psi_2 \beta_{32} + \alpha_{23} \psi_1 \\
\alpha_{13} + \gamma_{23} &= \bar{\psi}_2 \gamma_{33} - \gamma_{11} \bar{\psi}_1, & \alpha_{32} + \gamma_{31} &= \gamma_{33} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \gamma_{11} \\
\alpha_{31} + \beta_{32} &= \beta_{33} \psi_1 - \psi_2 \beta_{11}, & \alpha_{23} + \beta_{13} &= \beta_{11} \psi_1 - \psi_2 \beta_{33} \\
\alpha_{22} - \alpha_{11} &= \psi_2 \alpha_{31} + \alpha_{23} \psi_1, & \alpha_{11} - \alpha_{22} &= \psi_2 \beta_{32} + \beta_{13} \psi_1 \\
\partial_+ \gamma_{11} &= 0, & \partial_+ \beta_{11} &= 0, & \partial_+ \beta_{33} &= 0, & \partial_+ \gamma_{33} &= 0 \\
\partial_- \beta_{11} &= 0, & \partial_- \gamma_{11} &= 0, & \partial_- \gamma_{33} &= 0, & \partial_- \beta_{33} &= 0 \\
\partial_+ \alpha_{11} &= -\bar{\psi}_2 \alpha_{31} + \beta_{13} \bar{\psi}_1 \\
\partial_+ \beta_{12} &= \beta_{13} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \beta_{32} \\
\partial_+ \alpha_{13} &= (\alpha_{11} + \beta_{12}) \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \alpha_{33} + \alpha_{23} + \beta_{13} \\
\partial_+ \beta_{13} &= \beta_{11} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \beta_{33} \\
\partial_+ \gamma_{21} &= \alpha_{23} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \alpha_{31} \\
\partial_+ \alpha_{22} &= \alpha_{23} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \beta_{32} \\
\partial_+ \alpha_{23} &= \beta_{11} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \beta_{33} \\
\partial_+ \gamma_{23} &= (\gamma_{21} + \alpha_{22}) \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \alpha_{33} + \beta_{13} + \alpha_{23} \\
\partial_+ \alpha_{31} &= \beta_{33} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \beta_{11} \\
\partial_+ \gamma_{31} &= \alpha_{33} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 (\gamma_{21} + \alpha_{11}) - \beta_{32} - \alpha_{31} \\
\partial_+ \alpha_{32} &= \alpha_{33} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 (\alpha_{22} + \beta_{12}) - \alpha_{31} - \beta_{32} - \\
\partial_+ \beta_{32} &= \beta_{33} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \beta_{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_+ \alpha_{33} &= (\alpha_{31} + \beta_{32})\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2(\alpha_{23} + \beta_{13}) \\
\partial_- \alpha_{11} &= \alpha_{13}\psi_1 + \psi_2\gamma_{31} \\
\partial_- \beta_{12} &= \psi_2\alpha_{32} + \alpha_{13}\psi_1 \\
\partial_- \alpha_{13} &= \psi_2\gamma_{33} - \gamma_{11}\psi_1 \\
\partial_- \beta_{13} &= \psi_2\alpha_{33} - (\alpha_{11} + \beta_{12})\psi_1 + \gamma_{23} + \alpha_{13} + \\
\partial_- \gamma_{21} &= \psi_2\gamma_{31} + \gamma_{23}\psi_1 \\
\partial_- \alpha_{22} &= \psi_2\alpha_{32} + \gamma_{23}\psi_1 \\
\partial_- \alpha_{23} &= \psi_2\alpha_{33} - (\alpha_{22} + \gamma_{21})\psi_1 + \alpha_{13} + \gamma_{23} \\
\partial_- \gamma_{23} &= -\gamma_{11}\psi_1 + \psi_2\gamma_{33} \\
\partial_- \alpha_{31} &= \alpha_{33}\psi_1 - \psi_2(\gamma_{21} + \alpha_{11}) - \alpha_{32} - \gamma_{31} \\
\partial_- \gamma_{31} &= \gamma_{33}\psi_1 - \psi_2\gamma_{11} \\
\partial_- \alpha_{32} &= -\psi_2\gamma_{11} + \gamma_{33}\psi_1 \\
\partial_- \beta_{32} &= \alpha_{33}\psi_1 - \psi_2(\beta_{12} + \alpha_{22}) - \gamma_{31} - \alpha_{32} \\
\partial_- \alpha_{33} &= -(\alpha_{32} + \gamma_{31})\psi_1 - \psi_2(\alpha_{13} + \gamma_{23})
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Portanto vemos que,

$$\beta_{11} = b_{11}, \quad \beta_{33} = b_{33}, \quad \gamma_{11} = c_{11}, \quad \gamma_{33} = c_{33}$$

e notamos que podemos escolher adequadamente  $c_{33} = c_{11}$  e  $b_{33} = -b_{11}$ . Com a introdução do campo auxiliar  $f_1$ , como indicado

$$f_1 = \frac{i\omega}{4}\bar{\psi}_- = \frac{i}{2\omega}\psi_+$$

E assim,

$$\begin{aligned}
\partial_-(\gamma_{31} + \alpha_{32}) &= 2c_{11}(\psi_1 - \psi_2) \\
\partial_-\left(\frac{4c_{11}}{i\omega}f_1\right) &= 2c_{11}\psi_- \\
\partial_-f_1 &= \frac{i\omega}{2}\psi_-
\end{aligned}$$

Substituindo  $f_1$  na equação acima

$$\partial_-\bar{\psi}_- = 2\psi_-$$

E de forma análoga usando as relações  $\partial_+\beta_{13}$  e  $\partial_+\alpha_{23}$  teremos

$$\partial_+f_1 = \frac{i}{\omega}\bar{\psi}_+$$

e também  $\partial_- \bar{\psi}_- = 2\psi_-$ . Notando que temos a seguinte relação

$$\bar{\psi}_- = \frac{2}{\omega^2} \psi_+$$

encontramos  $\partial_{\pm} \alpha_{33} = 0$ , e portanto  $\alpha_{33} = a_{33}$ . E escolhendo convenientemente  $\alpha_{32} = \gamma_{31}$ ,  $\alpha_{23} = \beta_{13}$ ,  $\alpha_{31} = \beta_{32}$ ,  $\alpha_{13} = \gamma_{23}$ , concluimos que  $\alpha_{22} = \alpha_{11}$  e  $\beta_{12} = \gamma_{21}$ . Desse modo,

$$\begin{aligned} \partial_+ \alpha_{11} &= -\bar{\psi}_2 \alpha_{31} + \beta_{13} \bar{\psi}_1 \\ &= -i\omega b_{11} (\bar{\psi}_2 f_1 + f_1 \bar{\psi}_1) \\ &= -4b_{11} [\bar{\psi}_2 (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2) + (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2) \bar{\psi}_1] \\ &= 0 \end{aligned}$$

e também da mesma maneira  $\partial_- \alpha_{11} = 0$ ,  $\partial_- \gamma_{21} = 0$  e  $\partial_+ \gamma_{21} = 0$ , ou seja,  $\alpha_{11} = a_{11}$ ,  $\gamma_{21} = c_{21}$ .

### B.3 Equações para o caso bosônico-fermiônico

$$\begin{aligned} \beta_{21} &= 0, & \beta_{31} &= 0, & \beta_{23} &= 0, & \alpha_{21} &= 0, & \gamma_{13} &= 0 \\ \gamma_{32} &= 0, & \alpha_{12} &= 0, & \gamma_{12} &= 0, & \gamma_{22} &= \gamma_{11}, & \beta_{22} &= \beta_{11} e^{2q}, \\ \partial_- \gamma_{11} &= 0, & \partial_- \gamma_{33} &= 0, & \partial_+ \beta_{33} &= 0 \\ \alpha_{11} - \alpha_{22} &= \alpha_{13} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \alpha_{32}, & \alpha_{11} - \alpha_{22} &= \bar{\psi}_2 \gamma_{31} - \gamma_{23} \bar{\psi}_1 \\ \alpha_{13} + \gamma_{23} &= \bar{\psi}_2 \gamma_{33} - \gamma_{11} \bar{\psi}_1, & \gamma_{31} + \alpha_{32} &= \gamma_{33} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \gamma_{11} \\ \alpha_{22} e^{-q} - \alpha_{11} e^q &= e^{\frac{p}{2}} \left( \alpha_{23} \psi_1 e^{-\frac{q}{2}} + e^{\frac{q}{2}} \psi_2 \alpha_{31} \right), \\ \alpha_{11} e^q - \alpha_{22} e^{-q} &= e^{-\frac{p}{2}} \left( \beta_{13} \psi_1 e^{\frac{q}{2}} + e^{-\frac{q}{2}} \psi_2 \beta_{32} \right), \\ \alpha_{31} e^{p+q} + \beta_{32} &= e^{\frac{p}{2}} (\beta_{33} \psi_1 e^{\frac{q}{2}} - e^{-\frac{q}{2}} \psi_2 \beta_{22}), \\ \beta_{32} e^{-(p+q)} + \alpha_{31} &= e^{-\frac{p}{2}} (\beta_{33} \psi_1 e^{-\frac{q}{2}} - e^{\frac{q}{2}} \psi_2 \beta_{11}), \\ \beta_{13} e^{-(p-q)} + \alpha_{23} &= e^{-\frac{p}{2}} (\beta_{22} \psi_1 e^{-\frac{q}{2}} - e^{\frac{q}{2}} \psi_2 \beta_{33}), \\ \alpha_{23} e^{p-q} + \beta_{13} &= e^{\frac{p}{2}} (\beta_{11} \psi_1 e^{\frac{q}{2}} - e^{-\frac{q}{2}} \psi_2 \beta_{33}) \\ \partial_- \alpha_{11} &= e^{-\frac{q}{2}} (\alpha_{13} \psi_1 e^{-\frac{p}{2}} + e^{\frac{p}{2}} \psi_2 \gamma_{31}) \\ \partial_- \beta_{11} &= e^{-q} (\gamma_{21} e^p - \beta_{12} e^{-p}) + e^{-\frac{q}{2}} (\beta_{13} \psi_1 e^{-\frac{p}{2}} + e^{\frac{p}{2}} \psi_2 \alpha_{31}) \\ \partial_- \beta_{12} &= \gamma_{11} e^p (e^{-q} - e^q) + e^{\frac{p}{2}} (\alpha_{13} \psi_1 e^{\frac{q}{2}} + e^{-\frac{q}{2}} \psi_2 \alpha_{32}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_- \alpha_{13} &= e^{\frac{p}{2}} (e^{-\frac{q}{2}} \psi_2 \gamma_{33} - \gamma_{11} \psi_1 e^{\frac{q}{2}}) \\
\partial_- \beta_{13} &= \gamma_{23} e^{p-q} + \alpha_{13} + e^{\frac{(p-q)}{2}} \psi_2 \alpha_{33} - (\alpha_{11} e^{\frac{p+q}{2}} + \beta_{12} e^{-\frac{(p+q)}{2}}) \psi_1 \\
\partial_- \gamma_{21} &= \gamma_{11} e^{-p} (e^q - e^{-q}) + e^{-\frac{p}{2}} (\gamma_{23} \psi_1 e^{-\frac{q}{2}} + e^{\frac{q}{2}} \psi_2 \gamma_{31}) \\
\partial_- \alpha_{22} &= e^{\frac{q}{2}} (e^{-\frac{p}{2}} \psi_2 \alpha_{32} + \gamma_{23} \psi_1 e^{\frac{p}{2}}) \\
\partial_- \beta_{22} &= e^q (\beta_{12} e^{-p} - \gamma_{21} e^p) + e^{\frac{q}{2}} (\alpha_{23} \psi_1 e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}} \psi_2 \beta_{32}) \\
\partial_- \alpha_{23} &= \gamma_{23} + \alpha_{13} e^{-(p-q)} + e^{-\frac{(p-q)}{2}} \psi_2 \alpha_{33} - (\gamma_{21} e^{\frac{p+q}{2}} + \alpha_{22} e^{-\frac{(p+q)}{2}}) \psi_1 \\
\partial_- \gamma_{23} &= e^{-\frac{p}{2}} (e^{\frac{q}{2}} \psi_2 \gamma_{33} - \gamma_{11} \psi_1 e^{-\frac{q}{2}}) \\
\partial_- \alpha_{31} &= -\gamma_{31} - \alpha_{32} e^{-(p+q)} + \alpha_{33} \psi_1 e^{-\frac{(p+q)}{2}} - \psi_2 (e^{-\frac{(p-q)}{2}} \alpha_{11} + e^{\frac{p-q}{2}} \gamma_{21}) \\
\partial_- \gamma_{31} &= e^{-\frac{p}{2}} (\gamma_{33} \psi_1 e^{-\frac{q}{2}} - e^{\frac{q}{2}} \psi_2 \gamma_{11}) \\
\partial_- \alpha_{32} &= e^{\frac{p}{2}} (\gamma_{33} \psi_1 e^{\frac{q}{2}} - e^{-\frac{q}{2}} \psi_2 \gamma_{11}) \\
\partial_- \beta_{32} &= -\alpha_{32} - \gamma_{31} e^{p+q} + \alpha_{33} \psi_1 e^{\frac{p+q}{2}} - \psi_2 (e^{\frac{p-q}{2}} \alpha_{22} + e^{-\frac{(p-q)}{2}} \beta_{12}) \\
\partial_- \alpha_{33} &= -(\gamma_{31} e^{\frac{p+q}{2}} + \alpha_{32} e^{-\frac{(p+q)}{2}}) \psi_1 - \psi_2 (e^{-\frac{(p-q)}{2}} \alpha_{13} + e^{\frac{p-q}{2}} \gamma_{23}) \\
\partial_- \beta_{33} &= -(\beta_{32} e^{-\frac{(p+q)}{2}} + \alpha_{31} e^{\frac{p+q}{2}}) \psi_1 - \psi_2 (e^{-\frac{(p-q)}{2}} \beta_{13} + e^{\frac{p-q}{2}} \alpha_{23}) \\
\partial_+ \alpha_{11} &= -\alpha_{11} \partial_+ q + \beta_{13} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \alpha_{31} \\
\partial_+ \beta_{11} &= -\beta_{11} \partial_+ q \Leftrightarrow \beta_{11} = b_{11} e^{-q} \\
\partial_+ \gamma_{11} &= -\gamma_{11} \partial_+ q + \gamma_{21} - \beta_{12} + \alpha_{13} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \gamma_{31} \\
\partial_+ \gamma_{11} &= \gamma_{11} \partial_+ q - \gamma_{21} + \beta_{12} + \gamma_{23} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \alpha_{32} \\
\partial_+ \beta_{12} &= \beta_{12} \partial_+ p + \beta_{22} - \beta_{11} - \bar{\psi}_2 \beta_{32} + \beta_{13} \bar{\psi}_1 \\
\partial_+ \alpha_{13} &= \alpha_{13} \partial_+ \left( \frac{p-q}{2} \right) + \beta_{13} + \alpha_{23} - \bar{\psi}_2 \alpha_{33} + (\alpha_{11} + \beta_{12}) \bar{\psi}_1 \\
\partial_+ \beta_{13} &= \beta_{13} \partial_+ \left( \frac{p-q}{2} \right) - \bar{\psi}_2 \beta_{33} + \beta_{11} \bar{\psi}_1 \\
\partial_+ \gamma_{21} &= -\gamma_{21} \partial_+ p + \beta_{11} - \beta_{22} + \alpha_{23} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \alpha_{31} \\
\partial_+ \alpha_{22} &= \alpha_{22} \partial_+ q + \alpha_{23} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \beta_{32} \\
\partial_+ \beta_{22} &= \beta_{22} \partial_+ q \Leftrightarrow \beta_{22} = b_{22} e^q \\
\partial_+ \alpha_{23} &= -\alpha_{23} \partial_+ \left( \frac{p-q}{2} \right) + \beta_{22} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \beta_{33} \\
\partial_+ \gamma_{23} &= -\gamma_{23} \partial_+ \left( \frac{p-q}{2} \right) + \beta_{13} + \alpha_{23} - \bar{\psi}_2 \alpha_{33} + (\alpha_{22} + \gamma_{21}) \bar{\psi}_1 \\
\partial_+ \alpha_{31} &= -\alpha_{31} \partial_+ \left( \frac{p+q}{2} \right) + \beta_{33} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \beta_{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_+ \gamma_{31} &= -\gamma_{31} \partial_+ \left( \frac{p+q}{2} \right) - \beta_{32} - \alpha_{31} + \alpha_{33} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 (\alpha_{11} + \gamma_{21}) \\
\partial_+ \alpha_{32} &= \alpha_{32} \partial_+ \left( \frac{p+q}{2} \right) - \alpha_{31} - \beta_{32} + \alpha_{33} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 (\beta_{12} + \alpha_{22}) \\
\partial_+ \beta_{32} &= \beta_{32} \partial_+ \left( \frac{p+q}{2} \right) - \bar{\psi}_2 \beta_{22} + \beta_{33} \bar{\psi}_1 \\
\partial_+ \alpha_{33} &= (\beta_{32} + \alpha_{31}) \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 (\alpha_{23} + \beta_{13}) \\
\partial_+ \gamma_{33} &= (\alpha_{32} + \gamma_{31}) \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 (\alpha_{13} + \gamma_{23})
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Notamos que como  $\gamma_{11} = \gamma_{22} = c_{11}$  então das para  $\partial_+ \gamma_{11}$ , teremos

$$\begin{aligned}
\partial_+ q &= \frac{1}{c_{11}} (\gamma_{21} - \beta_{12} + \alpha_{13} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \gamma_{31}) \\
&\mathbf{e} \\
\partial_+ q &= \frac{1}{c_{11}} (\gamma_{21} - \beta_{12} - \gamma_{23} \bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2 \alpha_{32})
\end{aligned}$$

Assim somando as equações anteriores

$$\partial_+ q = \frac{1}{c_{11}} [\gamma_{21} - \beta_{12} - c_{33} \bar{\psi}_2 \bar{\psi}_1 + \alpha_{13} \bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2 \alpha_{32}]$$

E de forma similar para  $\partial_- \gamma_{11}$ ,

$$\partial_- q = \frac{1}{b_{11}} \left[ \beta_{12} e^{-p} - \gamma_{21} e^p + b_{33} \psi_2 \psi_1 + \alpha_{23} \psi_1 e^{\frac{p-q}{2}} - \psi_2 \alpha_{31} e^{\frac{p+q}{2}} \right]$$

E para as equações de movimento fermiônicas usamos primeiramente as equações para  $\partial_- \alpha_{13}$ ,  $\partial_- \gamma_{23}$

$$\begin{aligned}
\partial_- (\alpha_{13} + \gamma_{23}) &= -c_{11} \left[ \psi_1 \left( e^{\frac{p+q}{2}} + e^{-\frac{p+q}{2}} \right) - \psi_2 \left( e^{\frac{p-q}{2}} + e^{-\frac{p-q}{2}} \right) \right] \\
-c_{11} \partial_- (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2) &= -2c_{11} \left[ \psi_1 \cosh \left( \frac{p+q}{2} \right) - \psi_2 \cosh \left( \frac{p-q}{2} \right) \right] \\
\partial_- (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2) &= 2\psi_1 \cosh \phi_1 - 2\psi_2 \cosh \phi_2
\end{aligned}$$

Introduzindo o campo auxiliar  $f_1$  dado por

$$f_1 = \frac{i}{2\omega} \frac{1}{\cosh \left( \frac{q}{2} \right)} \psi_+ = \frac{i\omega}{4} \frac{1}{\cosh \left( \frac{p}{2} \right)} \bar{\psi}_-$$

Notamos que

$$\partial_-(\alpha_{13} + \alpha_{32}) = 0, \quad \partial_-(\gamma_{31} + \gamma_{23}) = 0$$

onde vamos considerar a solução mais simples desse sistema, em que os elementos são não nulos, ou seja,  $\alpha_{32} = -\alpha_{13}$ ,  $\gamma_{31} = -\gamma_{23}$ . Vamos analisar a seguinte equação (com as escolhas  $c_{11} = c_{33}$  e  $b_{11} = -b_{33}$ )

$$\begin{aligned} \beta_{13}e^{-(p-q)} + \alpha_{23} &= b_{11}e^{-\frac{-(p-q)}{2}}(\psi_1 + \psi_2) \quad \times e^{\frac{(p-q)}{2}} \\ \alpha_{23}e^{\frac{(p-q)}{2}} + \beta_{13}e^{-\frac{(p-q)}{2}} &= -2i\omega b_{11} \cosh\left(\frac{q}{2}\right) f_1 \\ &= -i\omega b_{11} \left(e^{\frac{q}{2}} + e^{-\frac{q}{2}}\right) f_1 \end{aligned}$$

aqui escolheremos  $\beta_{13} = \alpha_{23}e^p$  então o termo com exponenciais irá cancelar, logo

$$\alpha_{23} = -i\omega b_{11}e^{-\frac{p}{2}}f_1$$

Procedemos da mesma forma para as equações envolvendo  $\alpha_{31}$ ,  $\beta_{32}$ ,  $\alpha_{13}$ ,  $\gamma_{23}$ , para obter.

$$\alpha_{23} = -i\omega b_{11}e^{-\frac{p}{2}}f_1, \quad \alpha_{31} = i\omega b_{11}e^{-\frac{p}{2}}f_1, \quad \alpha_{13} = -\frac{2}{i\omega}c_{11}e^{\frac{p}{2}}f_1$$

e com isso

$$\begin{aligned} \alpha_{11} - \alpha_{22} &= \alpha_{13}\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2\alpha_{13} = 0 \\ \alpha_{11} &= \alpha_{22} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} 2\partial_-\alpha_{11} &= (\beta_{13} + \alpha_{23})\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2(\alpha_{31} + \beta_{32}) \\ &= i\omega b_{11} \frac{i\omega}{4} \frac{1}{\cosh\left(\frac{p}{2}\right)} \left[ -\left(e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}}\right)(\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2)\bar{\psi}_1 - \right. \\ &\quad \left. - \bar{\psi}_2(\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2)(e^{-\frac{p}{2}} + e^{\frac{p}{2}}) \right] \\ &= -2 \cosh\left(\frac{p}{2}\right) \frac{\omega^2}{4} \frac{b_{11}}{\cosh\left(\frac{p}{2}\right)} \left[ -(\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2)\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2(\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2) \right] \\ &= -\frac{\omega^2 b_{11}}{2} (\bar{\psi}_2\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2\bar{\psi}_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

de maneira análoga encontramos:  $\partial_+ \alpha_{11} = \partial_- \alpha_{33} = \partial_+ \alpha_{33} = 0$ , ou seja,  $\alpha_{11} = a_{11}$ ,  $\alpha_{33} = a_{33}$ . E ainda teremos:

$$\begin{aligned}
\partial_+ q &= \frac{1}{c_{11}} [\gamma_{21} - \beta_{12} - c_{11} \bar{\psi}_2 \bar{\psi}_1 + \alpha_{13} \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \alpha_{13}] \\
&= \frac{1}{c_{11}} \left\{ \gamma_{21} - \beta_{12} - c_{11} \bar{\psi}_2 \bar{\psi}_1 - \frac{c_{11}}{2} \frac{e^{\frac{p}{2}}}{\cosh\left(\frac{p}{2}\right)} [(\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2) \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2)] \right\} \\
&= \frac{1}{c_{11}} \left[ \gamma_{21} - \beta_{12} + c_{11} \bar{\psi}_2 \bar{\psi}_1 \left( \frac{e^{\frac{p}{2}}}{\cosh\left(\frac{p}{2}\right)} - 1 \right) \right] \\
&= \frac{1}{c_{11}} (\gamma_{21} - \beta_{12}) + \bar{\psi}_2 \bar{\psi}_1 \tanh \frac{p}{2} \\
&= \frac{1}{c_{11}} (\gamma_{21} - \beta_{12}) + \frac{2i}{\omega} \sinh\left(\frac{p}{2}\right) f_1(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_- q &= \frac{1}{b_{11}} [\beta_{12} e^{-p} - \gamma_{21} e^p - b_{11} \psi_2 \psi_1 + \alpha_{23} \psi_1 e^{\frac{p-q}{2}} - \psi_2 \alpha_{31} e^{\frac{p+q}{2}}] \\
&= \frac{1}{b_{11}} \left\{ \beta_{12} e^{-p} - \gamma_{21} e^p - b_{11} \psi_2 \psi_1 + \frac{b_{11}}{2 \cosh\left(\frac{q}{2}\right)} \psi_2 \psi_1 [e^{-\frac{q}{2}} + e^{\frac{q}{2}}] \right\} \\
&= \frac{1}{b_{11}} [\beta_{12} e^{-p} - \gamma_{21} e^p - b_{11} \psi_2 \psi_1 + b_{11} \psi_2 \psi_1] \\
&= \frac{1}{b_{11}} [\beta_{12} e^{-p} - \gamma_{21} e^p]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_+ \beta_{12} &= \beta_{12} \partial_+ p + b_{11} (e^q - e^{-q}) - \bar{\psi}_2 \beta_{32} + \beta_{13} \bar{\psi}_1 \\
&= \beta_{12} \partial_+ p + b_{11} (e^q - e^{-q}) + \frac{\omega^2 b_{11}}{4} \frac{e^{\frac{p}{2}}}{\cosh\left(\frac{p}{2}\right)} [\bar{\psi}_2 (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2) + (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2) \bar{\psi}_1] \\
&= \beta_{12} \partial_+ p + b_{11} (e^q - e^{-q})
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\partial_+ \gamma_{21} &= -\gamma_{21} \partial_+ p - b_{11} (e^q - e^{-q}) \\
\partial_- \beta_{12} &= -2c_{11} e^p \sinh q + \frac{2ic_{11}}{\omega} e^p \sinh\left(\frac{q}{2}\right) f_1(\psi_1 - \psi_2) \\
\partial_- \gamma_{21} &= 2c_{11} e^{-p} \sinh q - \frac{2ic_{11}}{\omega} e^{-p} \sinh\left(\frac{q}{2}\right) f_1(\psi_1 - \psi_2)
\end{aligned}$$

E usando o resultado do caso bosônico  $\gamma_{21} = Be^{-p}$ ,  $\beta_{12} = Be^p$ . Então (com  $c_{11} = 1$ )

$$\begin{aligned}\partial_+ q &= -2B \operatorname{senh} p + \frac{4i}{\sqrt{2}\omega} \operatorname{senh} \left( \frac{p}{2} \right) f_1(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) \\ \partial_- p &= -\frac{2}{B} \operatorname{senh} q + \frac{4i}{\sqrt{2}B\omega} \operatorname{senh} \left( \frac{q}{2} \right) f_1(\psi_1 - \psi_2)\end{aligned}$$

Notamos que  $B = -\frac{2}{\omega^2}$ . E assim

$$\begin{aligned}\partial_-(\alpha_{13} + \gamma_{23}) &= -2c_{11} \cosh \left( \frac{p}{2} \right) \cosh \left( \frac{q}{2} \right) (\psi_1 - \psi_2) - \\ &\quad - 2c_{11} \operatorname{senh} \left( \frac{p}{2} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{q}{2} \right) (\psi_1 + \psi_2) \\ \partial_- f_1 &= \frac{\omega i}{2} \left[ \cosh \left( \frac{q}{2} \right) (\psi_1 - \psi_2) + \tanh \left( \frac{p}{2} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{q}{2} \right) (\psi_1 + \psi_2) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \tanh \left( \frac{p}{2} \right) \partial_- \left( \frac{p}{2} \right) f_1 \\ &= \frac{1}{2} \tanh \left( \frac{p}{2} \right) f_1 (\omega^2 \operatorname{senh} q - \partial_- p) + \omega i \cosh \left( \frac{q}{2} \right) (\psi_1 - \psi_2) \\ &= \omega i \cosh \left( \frac{q}{2} \right) (\psi_1 - \psi_2)\end{aligned}$$

E ainda podemos encontrar que

$$\begin{aligned}\partial_- \partial_+ q &= \frac{4}{\omega^2} \cosh p \partial_- p + \frac{2i}{\omega} \operatorname{senh} \left( \frac{p}{2} \right) [\partial_- f_1 \bar{\psi}_+ + f_1 \partial_- \bar{\psi}_+] + \frac{i}{\omega} \cosh \left( \frac{p}{2} \right) f_1 \bar{\psi}_+ \partial_- p \\ &= \frac{4}{\omega^2} \cosh p \left( \omega^2 \operatorname{senh} q - i\omega \operatorname{senh} \left( \frac{q}{2} \right) f_1 \psi_- \right) + \\ &\quad + \frac{2i}{\omega} \operatorname{senh} \left( \frac{p}{2} \right) \left[ \frac{i\omega}{2} \cosh \left( \frac{q}{2} \right) \psi_- \bar{\psi}_+ + \right. \\ &\quad \left. + 2f_1 \left( \psi_+ \cosh \left( \frac{q}{2} \right) \cosh \left( \frac{p}{2} \right) + \psi_- \operatorname{senh} \left( \frac{q}{2} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{p}{2} \right) \right) \right] + \\ &\quad + \frac{i}{\omega} \cosh \left( \frac{p}{2} \right) f_1 \bar{\psi}_+ \omega^2 \operatorname{senh} q \\ &= 4 \cosh p \operatorname{senh} q + \cosh p \operatorname{senh} \left( \frac{q}{2} \right) \frac{1}{\cosh \left( \frac{p}{2} \right)} \bar{\psi}_- \psi_- + \\ &\quad + \operatorname{senh} \left( \frac{p}{2} \right) \cosh \left( \frac{q}{2} \right) \bar{\psi}_+ \psi_- + \frac{1}{2} \operatorname{senh} q \cosh \left( \frac{p}{2} \right) \frac{1}{\cosh \left( \frac{q}{2} \right)} \bar{\psi}_+ \psi_+ -\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sinh\left(\frac{p}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{p}{2}\right)} \bar{\psi}_- \left( \psi_+ \cosh\left(\frac{q}{2}\right) \cosh\left(\frac{p}{2}\right) + \psi_- \sinh\left(\frac{q}{2}\right) \sinh\left(\frac{p}{2}\right) \right) \\
& = 4 \cosh p \sinh q + \left( \cosh \frac{p}{2} + \tanh\left(\frac{p}{2}\right) \sinh \frac{p}{2} \right) \sinh\left(\frac{q}{2}\right) \bar{\psi}_- \psi_- + \\
& + \sinh\left(\frac{p}{2}\right) \cosh\left(\frac{q}{2}\right) \bar{\psi}_+ \psi_- + \sinh\left(\frac{q}{2}\right) \cosh\left(\frac{p}{2}\right) \bar{\psi}_+ \psi_+ - \\
& - \bar{\psi}_- \psi_+ \sinh\left(\frac{p}{2}\right) \cosh\left(\frac{q}{2}\right) - \bar{\psi}_- \psi_- \tanh\left(\frac{p}{2}\right) \sinh\left(\frac{q}{2}\right) \sinh\left(\frac{p}{2}\right) \\
& = 4 \cosh p \sinh q + \cosh \frac{p}{2} \sinh\left(\frac{q}{2}\right) (\bar{\psi}_- \psi_- + \bar{\psi}_+ \psi_+) + \\
& + \sinh\left(\frac{p}{2}\right) \cosh\left(\frac{q}{2}\right) (\bar{\psi}_+ \psi_- - \bar{\psi}_- \psi_+) \\
& = 2 \sinh(2\phi_1) - 2 \sinh(2\phi_2) + 2 \bar{\psi}_1 \psi_1 \sinh(\phi_1) - 2 \bar{\psi}_2 \psi_2 \sinh(\phi_2)
\end{aligned}$$

onde usamos  $\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1$  e ainda  $f_1^2 = 0$ .

Analogamente ões encontramos

$$\partial_+(\alpha_{13} - \gamma_{23}) = (\alpha_{13} + \gamma_{23}) \partial_+ \left( \frac{p-q}{2} \right) + (\beta_{12} - \gamma_{21}) \bar{\psi}_1$$

Como no cálculo de  $\partial_- f_1$  vamos substituir os resultados obtidos em  $K$  então teremos

$$\begin{aligned}
\partial_+ f_1 & = -\frac{\cosh \frac{p}{2}}{2 \sinh \frac{p}{2}} f_1 \partial_+ q - \frac{Bi\omega \sinh p}{2c_{11} \sinh \frac{p}{2}} \bar{\psi}_1 \\
& = \frac{Bi\omega \sinh p}{4 \sinh \frac{p}{2}} (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2) - \frac{Bi\omega \sinh p}{2 \sinh \frac{p}{2}} \bar{\psi}_1 \\
& = -\frac{Bi\omega}{2} \cosh\left(\frac{p}{2}\right) (\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) \\
& = \frac{i}{\omega} \cosh \frac{p}{2} (\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2)
\end{aligned}$$

Onde lembramos que  $B = -\frac{2}{\omega^2}$  e  $c_{11} = 1$ .

# Apêndice C

## Cálculos e Equações das Quantidades Conservadas

### C.1 Primeira Linha-Expansão em Potências Positivas

$$\begin{aligned}
\Gamma_{21}^{(0)} &= 0 \\
0 &= e^{-\phi}\psi\Gamma_{31}^{(0)} - e^{2\phi}\left(\Gamma_{21}^{(1/2)}\right)^2 - e^{\phi}\psi\Gamma_{21}^{(1/2)}\Gamma_{31}^{(0)} + e^{-2\phi} \\
0 &= \Gamma_{31}^{(0)} + e^{2\phi}\Gamma_{21}^{(1/2)}\Gamma_{31}^{(0)} \\
\partial_x\Gamma_{21}^{(1/2)} &= e^{-\phi}\psi\Gamma_{31}^{(1/2)} - \bar{\psi}\Gamma_{31}^{(0)} - 2e^{2\phi}\Gamma_{21}^{(1/2)}\Gamma_{21}^{(1)} + \bar{\psi}\Gamma_{21}^{(1/2)}\Gamma_{31}^{(0)} - e^{\phi}\psi\Gamma_{21}^{(1/2)}\Gamma_{31}^{(1/2)} - \\
&\quad - e^{\phi}\psi\Gamma_{21}^{(1)}\Gamma_{31}^{(0)} - (\partial_x + \partial_t)\phi\Gamma_{21}^{(1/2)} \\
\partial_x\Gamma_{21}^{(1)} &= \bar{\psi}\Gamma_{21}^{(1/2)}\Gamma_{31}^{(1/2)} + \bar{\psi}\Gamma_{21}^{(1)}\Gamma_{31}^{(0)} - e^{\phi}\psi\Gamma_{21}^{(1/2)}\Gamma_{31}^{(1)} - e^{\phi}\psi\Gamma_{21}^{(1)}\Gamma_{31}^{(1/2)} + 1 + \\
&\quad + e^{-\phi}\psi\Gamma_{31}^{(1)} - \bar{\psi}\Gamma_{31}^{(1/2)} - \left(\Gamma_{21}^{(1/2)}\right)^2 - e^{2\phi}\left(\Gamma_{21}^{(1)}\right)^2 - 2e^{2\phi}\Gamma_{21}^{(1/2)}\Gamma_{21}^{(3/2)} - \\
&\quad - (\partial_x + \partial_t)\phi\Gamma_{21}^{(1)} - e^{\phi}\psi\Gamma_{21}^{(3/2)}\Gamma_{31}^{(0)} \\
\partial_x\Gamma_{21}^{(3/2)} &= e^{-\phi}\psi\Gamma_{31}^{(3/2)} - \bar{\psi}\Gamma_{31}^{(1)} - 2\Gamma_{21}^{(1/2)}\Gamma_{21}^{(1)} - 2e^{2\phi}\Gamma_{21}^{(1)}\Gamma_{21}^{(3/2)} - 2e^{2\phi}\Gamma_{21}^{(1/2)}\Gamma_{21}^{(2)} + \\
&\quad + \bar{\psi}\Gamma_{21}^{(1/2)}\Gamma_{31}^{(1)} + \bar{\psi}\Gamma_{21}^{(1)}\Gamma_{31}^{(1/2)} + \bar{\psi}\Gamma_{21}^{(3/2)}\Gamma_{31}^{(0)} - e^{\phi}\psi\Gamma_{21}^{(1/2)}\Gamma_{31}^{(3/2)} - \\
&\quad - e^{\phi}\psi\Gamma_{21}^{(3/2)}\Gamma_{31}^{(1/2)} - e^{\phi}\psi\Gamma_{21}^{(1)}\Gamma_{31}^{(1)} - e^{\phi}\psi\Gamma_{21}^{(2)}\Gamma_{31}^{(0)} - (\partial_x + \partial_t)\phi\Gamma_{21}^{(3/2)} \\
\partial_x\Gamma_{31}^{(0)} &= -\Gamma_{31}^{(1/2)} - e^{\phi}\psi\Gamma_{21}^{(1/2)} - e^{2\phi}\Gamma_{21}^{(1/2)}\Gamma_{31}^{(1/2)} - e^{2\phi}\Gamma_{21}^{(1)}\Gamma_{31}^{(0)} - e^{-\phi}\psi - \\
&\quad - \frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t)\phi\Gamma_{31}^{(0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x \Gamma_{31}^{(1/2)} &= -\Gamma_{31}^{(1)} - \Gamma_{31}^{(0)} - \bar{\psi} \Gamma_{21}^{(1/2)} - e^\phi \psi \Gamma_{21}^{(1)} - \Gamma_{21}^{(1/2)} \Gamma_{31}^{(0)} - e^{2\phi} \Gamma_{21}^{(1/2)} \Gamma_{31}^{(1)} - \\
&- e^{2\phi} \Gamma_{21}^{(3/2)} \Gamma_{31}^{(0)} - \bar{\psi} - \frac{1}{2} (\partial_x + \partial_t) \phi \Gamma_{31}^{(1/2)} - e^{2\phi} \Gamma_{21}^{(1)} \Gamma_{31}^{(1/2)} \\
\partial_x \Gamma_{31}^{(1)} &= -e^{2\phi} \Gamma_{21}^{(1/2)} \Gamma_{31}^{(3/2)} - e^{2\phi} \Gamma_{21}^{(1)} \Gamma_{31}^{(1)} - e^{2\phi} \Gamma_{21}^{(3/2)} \Gamma_{31}^{(1/2)} - e^{2\phi} \Gamma_{21}^{(2)} \Gamma_{31}^{(0)} - \\
&- \Gamma_{31}^{(1/2)} - \bar{\psi} \Gamma_{21}^{(1)} - \Gamma_{31}^{(3/2)} - e^\phi \psi \Gamma_{21}^{(3/2)} - \Gamma_{21}^{(1/2)} \Gamma_{31}^{(1/2)} - \Gamma_{21}^{(1)} \Gamma_{31}^{(0)} - \\
&- \frac{1}{2} (\partial_x + \partial_t) \phi \Gamma_{31}^{(1)} \\
\partial_x \Gamma_{31}^{(3/2)} &= -e^{2\phi} \Gamma_{21}^{(1/2)} \Gamma_{31}^{(2)} - e^{2\phi} \Gamma_{21}^{(1)} \Gamma_{31}^{(3/2)} - e^{2\phi} \Gamma_{21}^{(3/2)} \Gamma_{31}^{(1)} - e^{2\phi} \Gamma_{21}^{(2)} \Gamma_{31}^{(1/2)} - \\
&- \Gamma_{31}^{(2)} - \Gamma_{31}^{(1)} - \bar{\psi} \Gamma_{21}^{(3/2)} - e^\phi \psi \Gamma_{21}^{(2)} - \Gamma_{21}^{(1/2)} \Gamma_{31}^{(1)} - \Gamma_{21}^{(1)} \Gamma_{31}^{(1/2)} - \\
&- \frac{1}{2} (\partial_x + \partial_t) \phi \Gamma_{31}^{(3/2)} - e^{2\phi} \Gamma_{21}^{(5/2)} \Gamma_{31}^{(0)} - \Gamma_{21}^{(3/2)} \Gamma_{31}^{(0)} \tag{C.1}
\end{aligned}$$

Como já foi dito do sistema (C.1) obtemos os coeficientes de  $\Gamma_{21}$  e  $\Gamma_{31}$  recursivamente.

E com esses resultados encontramos o primeiro conjunto de cargas conservadas. E pode-se verificar que  $I_1^{(1/2)}$  é conservada

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I_1^{(1/2)} &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \cosh 2\phi + \frac{1}{8} [(\partial_x - \partial_t)\phi]^2 - 1 + \frac{1}{2} \psi \partial_x \psi + 2\bar{\psi} \psi \cosh \phi \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ 2\sinh 2\phi \partial_t \phi + \frac{1}{4} \partial_x \phi \partial_x \partial_t \phi + \frac{1}{4} \partial_t \phi \partial_t^2 \phi - \frac{1}{4} \partial_t^2 \phi \partial_x \phi + \right. \\
&+ 2\partial_t \bar{\psi} \psi \cosh \phi + 2\bar{\psi} \partial_t \psi \cosh \phi + 2\bar{\psi} \psi \partial_t \phi \sinh \phi - \frac{1}{4} \partial_t \phi \partial_t \partial_x \phi + \\
&+ \left. \frac{1}{2} \partial_t \psi \partial_x \psi + \frac{1}{2} \psi \partial_t \partial_x \psi \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ (2\sinh 2\phi + 2\bar{\psi} \psi \sinh \phi + \frac{1}{4} \partial_t^2 \phi - \frac{1}{4} \partial_x^2 \phi) \partial_t \phi - \frac{1}{2} \psi \partial_x^2 \psi + \right. \\
&+ 2\partial_x \bar{\psi} \psi \cosh \phi - 2\bar{\psi} \partial_x \psi \cosh \phi + 2\bar{\psi} \partial_x \psi \cosh \phi + 2\psi \partial_x \bar{\psi} \cosh \phi + \\
&+ \left. 2\psi \bar{\psi} \partial_x \phi \sinh \phi + 2\bar{\psi} \psi \sinh \phi \partial_x \phi \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ 2\bar{\psi} \psi \sinh \phi \partial_x \phi + 2\partial_x \bar{\psi} \psi \cosh \phi + 2\partial_x \psi \bar{\psi} \cosh \phi + \right. \\
&+ \left. 2\bar{\psi} \partial_x \psi \cosh \phi + 2\psi \partial_x \bar{\psi} \cosh \phi + 2\psi \bar{\psi} \partial_x \phi \sinh \phi \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

onde usamos as equações de movimento (6.6).

Vamos agora apresentar os resultados obtidos para  $I_1^{(1)}$  e  $I_1^{(3/2)}$ .

$$\begin{aligned}
I_1^{(1)} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \Gamma_{21}^{(1)} + e^{2\phi} \Gamma_{21}^{(2)} + e^{\phi} \psi \Gamma_{31}^{(3/2)} - \bar{\psi} \Gamma_{31}^{(1)} \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_x - \partial_t) \phi e^{-2\phi} - \frac{1}{2} e^{-\phi} \bar{\psi} \partial_x \psi + \frac{1}{4} (\partial_x - \partial_t) \phi e^{-\phi} \bar{\psi} \psi + \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{-\phi} \bar{\psi} \psi \partial_x \phi + \frac{1}{8} (\partial_x - \partial_t) \phi \psi \partial_x \psi + \frac{1}{2} \partial_t \phi e^{-2\phi} - e^{-2\phi} \partial_x \phi - \frac{1}{2} \partial_x \phi e^{2\phi} - \\
&\quad - \frac{1}{4} \bar{\psi} \psi \partial_t \phi e^{-\phi} - \frac{1}{4} \bar{\psi} \psi \partial_x \phi e^{\phi} - \frac{1}{4} \psi \partial_x^2 \psi - \frac{1}{2} \partial_x \bar{\psi} \psi \cosh \phi - \\
&\quad - \frac{1}{2} (\partial_x - \partial_t) \phi e^{-\phi} \bar{\psi} \psi - \sinh \phi \bar{\psi} \partial_x \psi - \frac{1}{8} (\partial_x - \partial_t) \phi \psi \partial_x \psi + \\
&\quad + \frac{1}{8} (\partial_x^3 - \partial_x^2 \partial_t) \phi - \frac{1}{2} \cosh \phi \partial_x \phi \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2} \sinh \phi \partial_x \bar{\psi} \psi - \\
&\quad \left. - \frac{1}{8} (\partial_x - \partial_t) \phi (\partial_x^2 - \partial_x \partial_t) \phi - \frac{1}{8} (\partial_x - \partial_t) \phi (\partial_x^2 - \partial_x \partial_t) \phi \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ -\cosh 2\phi \partial_x \phi - \frac{1}{2} e^{\phi} \bar{\psi} \partial_x \psi - \frac{1}{2} \partial_x \phi \bar{\psi} \psi e^{\phi} - \frac{1}{2} \partial_x \bar{\psi} \psi e^{\phi} - \frac{1}{4} \psi \partial_x^2 \psi \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ -\frac{1}{2} \partial_x (\sinh 2\phi) - \frac{1}{16} \partial_x [(\partial_x \phi - \partial_t \phi)^2] - \frac{1}{2} \partial_x (\bar{\psi} \psi e^{\phi}) - \frac{1}{4} \partial_x (\psi \partial_x \psi) \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1^{(3/2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \Gamma_{21}^{(3/2)} + e^{2\phi} \Gamma_{21}^{(5/2)} + e^{\phi} \psi \Gamma_{21}^{(2)} - \bar{\psi} \Gamma_{31}^{(3/2)} \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cosh 4\phi + \frac{1}{4} (\partial_x^2 - \partial_x \partial_t) \phi \sinh 2\phi + \frac{1}{2} \psi \partial_t \phi e^{-3\phi} - \right. \\
&\quad - e^{-3\phi} \psi \partial_x \phi - \frac{1}{2} \psi \partial_x \phi e^{\phi} + \frac{1}{2} (e^{-2\phi} - 1) \psi \bar{\psi} \partial_x \psi - \\
&\quad - \frac{1}{8} \psi (\partial_x - \partial_t) \phi (\partial_x^2 - \partial_x \partial_t) \phi e^{-\phi} - \bar{\psi} \partial_x^2 \psi \left( \frac{3}{4} e^{\phi} - e^{-\phi} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{8} \bar{\psi} \partial_x \bar{\psi} (e^{-2\phi} - e^{2\phi}) + \frac{1}{8} \psi (\partial_x^3 - \partial_x^2 \partial_t) \phi e^{-\phi} + \\
&\quad + (\partial_x - \partial_t) \phi \left[ \frac{1}{16} \bar{\psi} \psi \partial_t \phi e^{-\phi} + \bar{\psi} \psi \partial_x \phi \left( \frac{1}{16} e^{\phi} - \frac{3}{8} e^{-\phi} \right) \right] - \\
&\quad \left. - \frac{1}{16} (\partial_x - \partial_t) \phi \psi \partial_x \bar{\psi} (e^{\phi} + 6e^{-\phi}) - \frac{1}{4} \bar{\psi} \partial_x \bar{\psi} (1 + e^{-2\phi}) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{16} [(\partial_x - \partial_t)\phi]^2 \psi \partial_x \psi + \frac{1}{16} (\partial_x - \partial_t)\phi \bar{\psi} \partial_x \psi (5e^{-\phi} - e^\phi) - \\
& - \frac{3}{16} [(\partial_x - \partial_t)\phi]^2 \bar{\psi} \psi \cosh \phi - \frac{1}{4} \sinh 2\phi \psi \partial_x \psi - \\
& - \frac{1}{128} [(\partial_x - \partial_t)\phi]^4 - \frac{1}{32} [(\partial_x^2 - \partial_x \partial_t)\phi]^2 + \\
& + \left( -\frac{1}{8} e^{-3\phi} - \frac{3}{8} e^{3\phi} - \frac{1}{8} e^{-\phi} - \frac{3}{8} e^\phi \right) \bar{\psi} \psi + \frac{1}{4} \sinh \phi (\partial_x \phi)^2 \bar{\psi} \psi + \\
& + \frac{1}{8} (\partial_x^2 - \partial_x \partial_t)\phi \bar{\psi} \psi (2e^{-\phi} + e^\phi) - \frac{1}{8} \cosh 2\phi [(\partial_x - \partial_t)\phi]^2 + \\
& + (\partial_x \phi)^2 e^{2\phi} + \frac{1}{2} \cosh \phi \partial_x \phi \partial_x \bar{\psi} \psi + \frac{1}{4} \sinh \phi \partial_x^2 \bar{\psi} \psi
\end{aligned}$$

Com

$$\begin{aligned}
\Gamma_{21}^{(5/2)} & = -\frac{3}{8} \bar{\psi} \partial_x^2 \psi (e^{-\phi} - e^{-3\phi}) + \frac{1}{8} \bar{\psi} \partial_x \bar{\psi} (e^{-4\phi} - 1) - \frac{1}{4} e^{-2\phi} - \frac{1}{8} e^{2\phi} + \frac{3}{8} e^{-6\phi} + \\
& + \frac{1}{16} (\partial_x - \partial_t)\phi \bar{\psi} \partial_x \psi (7e^{-3\phi} - e^{-\phi}) + \frac{1}{8} (\partial_x^2 - \partial_x \partial_t)\phi \bar{\psi} \psi (3e^{-3\phi} + e^{-\phi}) + \\
& + \frac{1}{16} \bar{\psi} \psi (\partial_x - \partial_t)\phi \partial_t \phi e^{-3\phi} + \frac{1}{8} (\partial_x - \partial_t)\phi e^{-2\phi} \psi \partial_x^2 \psi + \\
& + (\partial_x - \partial_t)\phi \left[ \bar{\psi} \psi \partial_x \phi \left( \frac{1}{16} e^{-\phi} - \frac{3}{8} e^{-3\phi} \right) - \frac{1}{16} \psi \partial_x \bar{\psi} (e^{-\phi} + 6e^{-3\phi}) \right] - \\
& - \frac{1}{16} [(\partial_x - \partial_t)\phi]^2 e^{-2\phi} \psi \partial_x \psi - \frac{1}{4} [(\partial_x - \partial_t)\phi]^2 e^{-4\phi} + \frac{1}{8} (\partial_x^2 - \partial_x \partial_t)\phi e^{-4\phi} - \\
& - \frac{3}{32} [(\partial_x - \partial_t)\phi]^2 \bar{\psi} \psi (e^{-3\phi} + e^{-\phi}) - \frac{1}{128} [(\partial_x - \partial_t)\phi]^4 e^{-2\phi} + \\
& + \frac{1}{32} [(\partial_x^2 - \partial_x \partial_t)\phi]^2 e^{-2\phi} - \frac{1}{16} (1 - e^{-4\phi}) [(\partial_x - \partial_t)\phi]^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + \\
& + \frac{1}{8} (\partial_x^2 - \partial_x \partial_t)\phi + \frac{1}{32} [(\partial_x - \partial_t)\phi]^2 (\partial_x^2 - \partial_x \partial_t)\phi e^{-2\phi} - e^{-4\phi} (\partial_x \phi)^2 - \\
& - \frac{1}{8} (1 - e^{-4\phi}) \psi \partial_x \psi + \frac{1}{8} (\partial_x^2 - \partial_x \partial_t)\phi e^{-2\phi} \psi \partial_x \psi + \frac{1}{2} \partial_x \phi \partial_t \phi e^{-4\phi} + \\
& + \left( \frac{7}{8} e^{-5\phi} - \frac{3}{8} e^\phi - \frac{1}{8} e^{-3\phi} - \frac{3}{8} e^{-\phi} \right) \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2} (e^{-3\phi} - e^{-\phi}) \partial_x \phi \bar{\psi} \partial_x \psi + \\
& + \frac{1}{8} (\partial_x - \partial_t)\phi \partial_x \phi e^{-2\phi} \psi \partial_x \psi + \frac{1}{4} (e^{-3\phi} + e^{-\phi}) \partial_x \phi \partial_x \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} \partial_x \partial_t \phi e^{-4\phi} + \\
& + \frac{1}{2} e^{-4\phi} \partial_x^2 \phi + \frac{1}{4} \partial_x^2 \phi + \frac{3}{8} (e^{-\phi} - e^{-3\phi}) \partial_x \bar{\psi} \partial_x \psi - \frac{1}{16} (\partial_x^4 - \partial_x^3 \partial_t)\phi e^{-2\phi} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{8}(\partial_x - \partial_t)\phi\partial_x\phi e^{-2\phi}\psi\partial_x\psi + \frac{1}{8}(e^{-\phi} - e^{-3\phi})(\partial_x\phi)^2\bar{\psi}\psi + \\
& + \frac{1}{8}(7e^{-3\phi} - e^{-\phi})\partial_x\phi\bar{\psi}\partial_x\psi - \frac{1}{8}(e^{-3\phi} - e^{-\phi})\partial_x^2\bar{\psi}\psi + \\
& + \frac{1}{16}(\partial_x - \partial_t)\phi(\partial_x^3 - \partial_x^2\partial_t)\phi e^{-2\phi}
\end{aligned}$$

Usando as equações de movimento a conservação de  $I_1^{(3/2)}$  também é verificada.

## C.2 Primeira Linha-Expansão em Potências Negativas

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{21}^{(0)} &= -\frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t)\phi & \hat{\Gamma}_{21}^{(-1/2)} &= 1, & \hat{\Gamma}_{31}^{(0)} &= -\bar{\psi} \\
\partial_x\hat{\Gamma}_{21}^{(0)} &= -\bar{\psi}\hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} + e^{-\phi}\psi\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} - \left(\hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\right)^2 - 2\hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)} - e^{2\phi} + e^{-2\phi} - e^\phi\psi\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} + \\
& + \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} + \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} - (\partial_x + \partial_t)\phi\hat{\Gamma}_{21}^{(0)} \\
\partial_x\hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)} &= -2\hat{\Gamma}_{21}^{(1)} - 2\hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)} - 2e^{2\phi}\hat{\Gamma}_{21}^{(0)} - \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{31}^{(1)} + e^{-\phi}\psi\hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} - e^\phi\psi\hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} - \\
& - e^\phi\psi\hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} + \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)}\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} + \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} + \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{31}^{(1)} - (\partial_x + \partial_t)\phi\hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)} \\
\partial_x\hat{\Gamma}_{21}^{(1)} &= -2\hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\hat{\Gamma}_{21}^{(1)} - 2\hat{\Gamma}_{21}^{(3/2)} - \left(\hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)}\right)^2 - e^{2\phi}\left(\hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\right)^2 - 2e^{2\phi}\hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)} - \\
& - \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{31}^{(3/2)} + e^{-\phi}\psi\hat{\Gamma}_{31}^{(1)} - e^\phi\psi\hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)}\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} - e^\phi\psi\hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} - e^\phi\psi\hat{\Gamma}_{31}^{(1)} + \\
& + \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{21}^{(1)}\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} + \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)}\hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} + \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\hat{\Gamma}_{31}^{(1)} + \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{31}^{(3/2)} - (\partial_x + \partial_t)\phi\hat{\Gamma}_{21}^{(1)} \\
\partial_x\hat{\Gamma}_{21}^{(3/2)} &= -2\hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\hat{\Gamma}_{21}^{(3/2)} - 2\hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)}\hat{\Gamma}_{21}^{(1)} - 2\hat{\Gamma}_{21}^{(2)} - 2e^{2\phi}\hat{\Gamma}_{21}^{(1)} - 2e^{2\phi}\hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)} - \\
& - \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{31}^{(2)} + e^{-\phi}\psi\hat{\Gamma}_{31}^{(3/2)} - e^\phi\psi\hat{\Gamma}_{21}^{(1)}\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} - e^\phi\psi\hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)}\hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} - e^\phi\psi\hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\hat{\Gamma}_{31}^{(1)} - \\
& - e^\phi\psi\hat{\Gamma}_{31}^{(3/2)} + \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{21}^{(1)}\hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} + \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{21}^{(3/2)}\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} + \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)}\hat{\Gamma}_{31}^{(1)} + \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{31}^{(2)} + \\
& + \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\hat{\Gamma}_{31}^{(3/2)} - (\partial_x + \partial_t)\phi\hat{\Gamma}_{21}^{(3/2)} \\
-\partial_x\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} &= e^\phi\psi + \hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} + \psi e^{-\phi} + \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{21}^{(0)} + \hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} + \hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} + \frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t)\phi\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} \\
-\partial_x\hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} &= e^\phi\psi\hat{\Gamma}_{21}^{(0)} + \hat{\Gamma}_{31}^{(1)} + \hat{\Gamma}_{31}^{(0)} + \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)} + e^{2\phi}\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} + \hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)}\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} + \hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} + \\
& + \hat{\Gamma}_{31}^{(1)} + \frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t)\phi\hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} \\
-\partial_x\hat{\Gamma}_{31}^{(1)} &= e^\phi\psi\hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)} + \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{21}^{(1)} + \hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} + \hat{\Gamma}_{21}^{(1)}\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} + \hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)}\hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} + \hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\hat{\Gamma}_{31}^{(1)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\hat{\Gamma}_{31}^{(3/2)} + e^{2\phi}\hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} + e^{2\phi}\hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} + \frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t)\phi \hat{\Gamma}_{31}^{(1)} \\
-\partial_x\hat{\Gamma}_{31}^{(3/2)} & = \hat{\Gamma}_{31}^{(1)} + \hat{\Gamma}_{31}^{(2)} + \bar{\psi}\hat{\Gamma}_{21}^{(3/2)} + e^\phi\psi\hat{\Gamma}_{21}^{(1)} + \hat{\Gamma}_{21}^{(1)}\hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} + \hat{\Gamma}_{21}^{(3/2)}\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} + \hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)}\hat{\Gamma}_{31}^{(1)} + \\
& + \hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\hat{\Gamma}_{31}^{(3/2)} + \hat{\Gamma}_{31}^{(2)} + e^{2\phi}\hat{\Gamma}_{21}^{(1/2)}\hat{\Gamma}_{31}^{(0)} + e^{2\phi}\hat{\Gamma}_{21}^{(0)}\hat{\Gamma}_{31}^{(1/2)} + e^{2\phi}\hat{\Gamma}_{31}^{(1)} + \\
& + \frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t)\phi \hat{\Gamma}_{31}^{(3/2)} \tag{C.2}
\end{aligned}$$

Após obtermos os valores das componentes acima, e as respectivas quantidades conservadas podemos ainda verificar que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{I}_1^{(-1/2)} & = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ 1 + \frac{1}{2}\bar{\psi}\partial_x\bar{\psi} - \frac{1}{8}[(\partial_x + \partial_t)\phi]^2 - \cosh 2\phi + 2\psi\bar{\psi} \cosh \phi \right] \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{1}{2}(\partial_t\bar{\psi}\partial_x\bar{\psi} + \bar{\psi}\partial_t\partial_x\bar{\psi}) - \frac{1}{4}(\partial_x + \partial_t)\phi (\partial_t\partial_x + \partial_t^2)\phi - \right. \\
& - 2\sinh 2\phi\partial_t\phi + 2(\partial_t\psi\bar{\psi} + \psi\partial_t\bar{\psi}) \cosh \phi + 2\psi\bar{\psi}\sinh\phi\partial_t\phi \left. \right] \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ -2\psi\partial_x\bar{\psi} \cosh \phi + \frac{1}{2}\bar{\psi}(\partial_x^2\bar{\psi} - 4\partial_x\psi \cosh \phi - 4\psi\sinh\phi\partial_x\phi) - \right. \\
& - \frac{1}{4}[\partial_t\partial_x\phi(\partial_t + \partial_x)\phi + \partial_x\phi(\partial_x^2\phi - 8\sinh 2\phi - 8\bar{\psi}\psi\sinh\phi) + \partial_t\phi\partial_t^2\phi] - \\
& - 2\sinh 2\phi\partial_t\phi + 2(\psi\partial_x\bar{\psi} - \partial_x\psi\bar{\psi}) \cosh \phi - 2\bar{\psi}\psi\sinh\phi\partial_t\phi \left. \right\} \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ -\frac{1}{4}[-\partial_t\phi\partial_x^2\phi + \partial_t\phi\partial_t^2\phi] - 2\sinh 2\phi\partial_t\phi - 2\bar{\psi}\psi\sinh\phi\partial_t\phi \right\} \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \partial_t\phi\left[\frac{1}{4}(\partial_x^2\phi - \partial_t^2\phi) - 2\sinh 2\phi - 2\bar{\psi}\psi\sinh\phi\right] \right\} \\
& = 0
\end{aligned}$$

onde usamos as equações de movimento. E como no caso anterior

$$\begin{aligned}
\hat{I}_1^{(-1)} & = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ -\bar{\psi}\Gamma_{31}^{(1)} + e^\phi\psi\Gamma_{31}^{(1/2)} + e^{2\phi}\Gamma_{21}^{(0)} + \Gamma_{21}^{(1)} \right] \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ -\frac{1}{4}(\partial_x + \partial_t)\phi e^\phi\bar{\psi}\psi + \frac{1}{8}(\partial_x + \partial_t)\phi \bar{\psi}\partial_x\bar{\psi} + \frac{1}{4}\bar{\psi}\partial_x^2\bar{\psi} - \right. \\
& - \frac{1}{2}\bar{\psi}\partial_x\psi \cosh \phi + \left. -\frac{1}{2}\bar{\psi}\psi\sinh\phi \partial_x\phi \right] + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ e^\phi\psi \left( \frac{1}{4}(\partial_x + \partial_t)\phi \bar{\psi} + \frac{1}{2}\partial_x\bar{\psi} \right) + \frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t)\phi e^{2\phi} - \right. \\
& - \left. \frac{1}{2}(\partial_x + \partial_t)\phi e^{2\phi} - \frac{1}{2}\psi\partial_x\bar{\psi}\sinh\phi - \frac{1}{2}\psi\bar{\psi}(\partial_x + \partial_t)\phi e^\phi + \frac{1}{8}\partial_x\bar{\psi}\bar{\psi}(\partial_x + \partial_t)\phi \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ -\frac{1}{2} \bar{\psi} \partial_x \psi \cosh \phi - \frac{1}{2} \bar{\psi} \psi \sinh \phi \partial_x \phi - \frac{1}{2} e^{\phi} \partial_x \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2} \psi \partial_x \bar{\psi} \sinh \phi \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ -\frac{1}{2} \bar{\psi} \partial_x \psi \cosh \phi - \frac{1}{2} \bar{\psi} \psi \sinh \phi \partial_x \phi + \frac{1}{2} \psi \partial_x \bar{\psi} \cosh \phi \right] \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \partial_x (\bar{\psi} \psi \cosh \phi) \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Para as demais linhas da equação envolvendo  $\partial_x \Gamma$  tratadas nessa dissertação os cálculos são similares.

### C.3 Vetor $\Psi$

Vamos considerar  $\Psi$  como

$$\Psi = \begin{pmatrix} \epsilon \Psi_1 \\ \epsilon \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon \partial_t \Psi_1 &= \epsilon U_{11} \Psi_1 + \epsilon U_{12} \Psi_2 + U_{13} \Psi_3, & \epsilon \partial_x \Psi_1 &= \epsilon V_{11} \Psi_1 + \epsilon V_{12} \Psi_2 + V_{13} \Psi_3 \\
\epsilon \partial_t \Psi_2 &= \epsilon U_{22} \Psi_2 + \epsilon U_{21} \Psi_1 + U_{23} \Psi_3, & \epsilon \partial_x \Psi_2 &= \epsilon V_{22} \Psi_2 + \epsilon V_{21} \Psi_1 + V_{23} \Psi_3 \\
\partial_t \Psi_3 &= U_{33} \Psi_3 + U_{31} \Psi_1 \epsilon + U_{32} \Psi_2 \epsilon, & \partial_x \Psi_3 &= V_{33} \Psi_3 + V_{31} \Psi_1 \epsilon + V_{32} \Psi_2 \epsilon
\end{aligned}$$

Leis de conservação

$$\begin{aligned}
\epsilon (\partial_t \Psi_1) \Psi_1^{-1} &= \epsilon U_{11} + \epsilon U_{12} \Psi_2 \Psi_1^{-1} + U_{13} \Psi_3 \Psi_1^{-1} \\
\epsilon (\partial_x \Psi_1) \Psi_1^{-1} &= \epsilon V_{11} + \epsilon V_{12} \Psi_2 \Psi_1^{-1} + V_{13} \Psi_3 \Psi_1^{-1}
\end{aligned}$$

$$\epsilon \partial_x [(\partial_t \Psi_1) \Psi_1^{-1}] = \partial_x [\epsilon U_{11} + U_{12} \Gamma_{21} + U_{13} \Gamma_{31}]$$

$$\epsilon \partial_t [(\partial_x \Psi_1) \Psi_1^{-1}] = \partial_t [\epsilon V_{11} + V_{12} \Gamma_{21} + V_{13} \Gamma_{31}]$$

Com  $\Gamma_{31} = \Psi_3 \Psi_1^{-1}$ ,  $\Gamma_{21} = \epsilon \Psi_2 \Psi_1^{-1}$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx [\epsilon V_{11} + V_{12} \Gamma_{21} + V_{13} \Gamma_{31}]$$

Analogamente

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx [\epsilon V_{22} + V_{21}\Gamma_{12} + V_{23}\Gamma_{32}]$$
$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx [V_{33} + V_{31}\Gamma_{13} + V_{32}\Gamma_{23}]$$

onde  $\Gamma_{32} = \Psi_3\Psi_2^{-1}$ ,  $\Gamma_{12} = \epsilon\Psi_1\Psi_2^{-1}$ ,  $\Gamma_{13} = \epsilon\Psi_1\Psi_3^{-1}$ ,  $\Gamma_{23} = \epsilon\Psi_2\Psi_3^{-1}$ . Observamos que componentes como  $\Gamma_{32}$  e  $\Gamma_{31}$ , que antes eram fermiônicas, são agora para essa nova forma de  $\Psi$  elementos bosônicos. O mesmo acontecendo para  $\Gamma_{21}$  e  $\Gamma_{12}$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] C. Rogers and W.F. Schadwick, *Backlund Transformations and Their Applications*, University of Waterloo, Canada (1982).
- [2] C. Rogers and W.K. Schief, *Bäcklund and Darboux Transformations - Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*, Cambridge University Press, 2002.
- [3] S. Cuenda, N.R. Quintero, A.Sanchez, *Sine-Gordon Wobbles Through Bäcklund Transformations*, AIMS (2010), dcdss.2011.4.1047 [doi:10.3934].
- [4] M. Chaichian, P. P. Kulish, *Phys. Letters B* **78**, 413 (1978).
- [5] A.R. Aguirre , T.R. Araujo , J.F. Gomes and A.H. Zimerman, *Type-II Bäcklund Transformations via Gauge Transformations*, nlin.SI (2011) [arXiv:1110.1589v2].
- [6] H. Aratyn, J. F. Gomes, A. H. Zimerman, hep-th/0408231 v1 - apresentado em Praga (República Tcheca) em junho de 2004 e a ser publicado nos anais do “11<sup>th</sup> International Conference on Supersymmetry Methods in Physics”.
- [7] M. Wadati, H. Sanuki, K. Konno, *Relationships among Inverse Method Backlund Transformation and an Infinite Number of Conservation Laws* (1975) Prog. Theor. Phys. Vol 53, 419-436.
- [8] S. Skorik, *Topics in 2D Integrable Field Theories with Boundary Interactions* (1996) [arXiv:hep-th/9604174 v1].
- [9] J.F. Gomes, L.H. Ymai, A.H. Zimerman, *Classical Integrable Super sinh-Gordon equation with Defects* (2006) [arXiv:hep-th/0601014 v2].

- [10] J.F. Gomes, L.H. Ymai, A.H. Zimerman, *Integrable Field Theories with Defects* (2006) [arXiv:hep-th/0609077 v2].
- [11] P. Bowcock, E. Corrigan, C. Zambon *Classically Integrable Field Theory with Defects* (2003) [arXiv:hep-th/0305022 v2].
- [12] Veja também a tese de doutoramento de A.R. Aguirre, IFT (2012).
- [13] L. Girardello, S. Sciuto, *Phys. Letters B* **77**, 267 (1978).
- [14] S. Ferrara, L. Girardello, S. Sciuto, *Phys. Letters B* **76**, 303 (1978).
- [15] T. Inami, S. Odake, Y.Z. Zhang, *Phys. Letters B* **359**, 118 (1995).
- [16] Ashok Das, "Integrable Models", World Scientific Lecture Notes in Physics, Vol. 30
- [17] V. Caudrelier, *On a systematic approach to defect in classical integrable field theories* (2008) [arXiv: math-ph/0704.2326 v2].
- [18] A.R. Aguirre, *Inverse scattering approach for massive thirring models with integrable type-II defects* (2012) [arXiv: math-ph/11115249 v2].
- [19] P. Bowcock, E. Corrigan, C. Zambon, *Affine Toda field theories with defects* (2004) [arXiv: math-ph/0401020 v1].
- [20] A.R. Aguirre, J.F. Gomes, L.H. Ymai, A.H. Zimerman,  *$N = 1$  super sinh-Gordon model in the half line: Breather solutions* (2013) [arXiv:hep-th/13044582 v1].