

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Programa de Pós - Graduação em Educação Matemática
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

**A PRODUÇÃO MATEMÁTICA EM UM AMBIENTE VIRTUAL DE
APRENDIZAGEM: O CASO DA GEOMETRIA EUCLIDIANA
ESPACIAL**

Silvana Claudia Santos

Orientador: Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao
Programa de Pós-Graduação em Educação
Matemática – Área de Concentração em
Ensino e Aprendizagem da Matemática e
seus Fundamentos Filosófico-Científicos,
para obtenção de título de Mestre em
Educação Matemática.

**Rio Claro (SP)
2006**

BANCA EXAMINADORA

Prof^o. Dr. Marcelo de Carvalho Borba (Orientador)

Prof^a Dr^a Siobhan Victoria Healy

Prof^o. Dr. Marcus Vinicius Maltempi

Silvana Claudia Santos (Aluna)

Rio Claro, 12 de Dezembro de 2006.

Resultado: Aprovada

*Aos meus pais, exemplos de coragem,
honestidade e dedicação.*

AGRADECIMENTOS

Agradecer é manifestar gratidão. Foram muitas as contribuições, dicas, sugestões para que este trabalho se consolidasse. Houve ricas discussões (nas caminhadas, na república, no LIEM, no seminário, ou nas salinhas) sobre os encaminhamentos da pesquisa. Entretanto, houve, também, inúmeras contribuições de outra natureza, tão importantes quanto. As conversas, a amizade, a força, o exemplo, a confiança, o incentivo... Eu NUNCA estive sozinha! E por essas razões, eu não poderia deixar de citar alguns nomes que se tornaram fundamentais para que eu pudesse seguir na caminhada.

Peço licença, antes de mais nada, para exprimir minha eterna gratidão àquelas pessoas, as quais aconteça o que acontecer, SEMPRE estarão comigo: meus pais amados José e Terezinha, meus irmãos queridos Iana, Sérgio e Jocemar. Família maravilhosa e que me faz sentir orgulho. Muito obrigada por acreditarem em mim, vibrarem com minhas conquistas, pela força, confiança e pelas palavras de carinho (ao telefone, no MSN, nos “torpedos”) nos momentos difíceis, de ausência e de muita saudade, sempre me encorajando, me incentivando e me fazendo acreditar que cada dia era uma vitória. Amo muito todos vocês!

Ao Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, por me deixar “voar”, mas por sempre me lembrar dos lugares mais seguros para pousar. Por ter desempenhado com brilhantismo os três papéis que ocupou nessa fase de minha vida: orientador, coordenador e amigo. Inevitavelmente, a orientação e a coordenação passam, mas que a amizade perdure.

À Prof^a Dr^a Lulu Healy e ao Prof^o Dr. Marcus Vinicius Maltempi pelas importantes sugestões, críticas e comentários sobre meu trabalho.

Aos professores da Pós-Graduação, principalmente, Marcelo Borba, Marcus Maltempi, Rosa Baroni, Claudemir Murari, Ole Skovsmose e Miriam Penteado, meus professores durante as disciplinas da PGEM.

À Anne Kepple pelo competente trabalho na elaboração do abstract dessa pesquisa.

Aos funcionários do Departamento de Matemática e da Pós-Graduação da UNESP, campus de Rio Claro, pela prontidão em me atender sempre que precisei.

Aos amigos da PGEM, pela troca de idéias, o clima amigável, as confraternizações e tantas vezes que pudemos dividir as angústias.

Aos membros do GPIMEM, Marcelo, Maltempi, Orlando, Telma, Rúbia, Norma, Sueli, Paula, Fernanda, Maurício, Sandra, Ricardo, Adriana, Leandro, João, Maria Helena, Geraldo Lima, Antonio, Simone Gouvêa e Simone Lírio, pelas críticas, sugestões, ajuda, espírito de grupo e pela doação no dia a dia.

À família que constitui em Rio Claro, meninas da República, Sueli (Su), Marli (Marloca), Luciele (Lú), Márcia, Aira e Carolina (a Carol do tempo do cafofo), presença marcante, companheiras em todos os momentos, desde as horas do cafezinho, da choradeira, do desabafo, da bagunça, da faxina, dos empurrões que me impulsionavam...

Aos meus lindos sobrinhos, Thomas, Lucas e Pedro e à minha eterna princesinha Taisy (é uma pena que eles crescem...). Por sempre me fazerem lembrar que eu devia dar o meu melhor, pois tinha que ser o exemplo para os pequeninos.

Ao Eduard (Dú), pessoa maravilhosa que amo muito, por tantas discussões sobre Matemática e Educação Matemática (quase nunca chegávamos a um acordo...), pelos momentos de alegria, pela paciência, por saber me ouvir, pelo cuidado, pelo carinho, por cada segundo que estive ao meu lado nesta fase tão importante da minha vida.

Aos amigos da Graduação em Matemática da UNESP, principalmente, Eduard (Dú), Camila (Cá), Tatiana (Sodi), Cristiane (Cris), Paulo Liboni (Liboni) e Paulo Mendes (Mendes), a patota mais animada e unida que já conheci.

Aos alunos-professores que participaram desta pesquisa, pelo empenho e dedicação no curso a distância.

Aos professores e amigos do CEFET – PR, unidade de Pato Branco, que sempre me incentivaram e que, graças aos recursos da Internet, encontro de vez em quando para matar a saudade.

Aos amigos de Rio Claro - SP, em especial, Paula, Anne, Tomas, Leo, Rúbia e tantos outros na cantina da UNESP, no RU, no Sujinhos, que me ofereceram o que tinham de mais precioso, um sorriso, uma palavra, o bom-humor, a amizade.

Aos amigos de Pato Branco - PR, cidade linda que me acolheu durante quatro anos, dos quais guardarei boas lembranças.

Aos meus amigos de Mangueirinha - PR, que sempre acreditaram em mim e torceram para que eu pudesse ir cada vez mais longe.

A todos que estiveram comigo, perto ou longe, no presencial ou no virtual, um caloroso, MUITO OBRIGADA!!!

RESUMO

Neste trabalho investigo como se dá a produção matemática de alunos-professores em um curso de extensão universitária à distância sobre "Tendências em Educação Matemática". As interações entre os participantes aconteceram, em geral, por meio de encontros semanais síncronos e a distância, nos quais eram discutidas questões relacionadas a algumas das tendências em Educação Matemática e sobre o desenvolvimento de atividades de geometria euclidiana espacial, sendo que este último tema consiste no foco de estudo desta pesquisa. Para as construções geométricas sugeri o uso do *software* gratuito Wingeom, contudo, outros recursos como materiais manipulativos, bem como diferentes estratégias de resolução foram observadas. Essa dinâmica evidenciou a coordenação de diferentes mídias durante o processo investigativo, que exigiu dos participantes grande envolvimento e empatia para melhor compreender a explicação apresentada durante a discussão no *chat*. A sala de bate-papo do TelEduc, ambiente utilizado, apresentou algumas limitações com relação à troca do fazer matemática, contudo, isso não impediu que a discussão acontecesse e que a produção matemática se consolidasse de um modo muito particular. Analisei os dados baseando-me no construto teórico seres-humanos-com-mídias de Borba e Villarreal (2005) e nas idéias de Lévy (1993, 1999, 2003) no que se refere ao pensamento coletivo e à inteligência coletiva. Os resultados obtidos indicaram que as mídias (lápiz e papel, materiais manipulativos, Wingeom, Internet e suas diferentes interfaces) em um ambiente virtual de aprendizagem, condicionaram a forma que os participantes discutiram as conjecturas formuladas durante as construções geométricas e transformaram a produção matemática.

Palavras-Chave: Educação Matemática. Educação a Distância. Geometria Euclidiana Espacial. Produção Matemática. Tecnologias da Informação e da Comunicação.

ABSTRACT

In this study, I investigate how teacher-students produce mathematics in a university extension distance course entitled “Trends in Mathematics Education”. The interactions between participants generally occurred in weekly synchronous on-line sessions in which issues were discussed related to some of the current trends in mathematics as well as development of spatial Euclidean geometry, the latter being the focus of this study. I suggested the use of the free software Wingeom for the geometrical constructions, but other resources, such as manipulatives, as well as different strategies for problem solving were observed. This dynamic showed evidence of the coordination of different media during the inquiry process, which demanded considerable involvement and empathy on the part of the participants to better understand the explanation presented during the on-line chat discussions. The chat room of TelEuc, the environment used, presented some limitations with respect to the exchange of mathematical activity; nevertheless, this did not impede the discussion nor prevent the mathematical production from consolidating in a very specific way. I based the data analysis on Borba and Villarreal’s (2005) theoretical construct “humans-with-media” and the ideas of Lévy (1993, 1999, 2003) regarding collective thinking and collective intelligence. The results suggest that the different media (paper-and-pencil, manipulatives, Wingeom, and the Internet with its various interfaces) in a virtual learning environment conditioned the way the participants discussed the conjectures formulated during the geometric constructions and transformed the production of mathematics.

Key words: Mathematics Education. Distance Education. Spatial Euclidean Geometry. Mathematical Production. Information and Communication Technologies.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1	
GÊNESE DA PESQUISA	12
1.1 Introdução	12
1.2 A Problemática e Relevância da Pesquisa.....	14
1.3 A Estrutura do Trabalho	19
CAPÍTULO 2	
GEOMETRIA E AS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO	21
2.1 Seres-Humanos-com-Mídias: uma teoria, uma inspiração.....	21
2.1.1 A Abordagem Experimental-com-Tecnologias e a Geometria.....	22
2.1.2 A Visualização e as Tecnologias da Informação e Comunicação ...	24
2.1.3 Geometria em Ambientes Virtuais: avanços e limites.....	27
2.2 O Uso de Softwares no Ensino e na Aprendizagem de Geometria.....	33
2.2.1 O SGD e a Prova ou Demonstração Matemática	33
2.2.2 O SGD e a Investigação Matemática.....	36
CAPÍTULO 3	
CIBERESPAÇO: UM AMBIENTE PARA A PRODUÇÃO MATEMÁTICA ONLINE	39
3.1 Espaço: do cotidiano à Matemática.....	40
3.2 Ciberespaço: o espaço além da tela	42
3.3 O Ciberespaço como um Espaço de Ensinar e Aprender	46
3.4 A Produção Matemática no Ciberespaço	48
CAPÍTULO 4	
ARTICULANDO VISÃO DE CONHECIMENTO COM PROCEDIMENTOS	
METODOLÓGICOS	49
4.1 Metodologia de Pesquisa Qualitativa	49
4.2 O Contexto	52
4.2.1 O curso "Tendências em Educação Matemática".....	52
4.2.2 Os Participantes	54
4.2.3 O Ambiente Comunicacional	56
4.2.4 O Wingeom.....	58
4.3 Os Procedimentos Metodológicos.....	61
4.3.1 A Elaboração das Atividades	61
4.3.2 A Observação-Participante no Curso	63
4.3.3 Os Dados da Pesquisa	65
4.3.3.1 Os Registros das Aulas	65
4.3.3.2 Os Portfólios	66
4.3.3.3 Os Fóruns de Discussão.....	66
4.3.3.4 Os Questionários e a Ferramenta Perfil	67
4.3.4 Análise dos Dados.....	67
4.3.4.1 A Natureza do Discurso no <i>Chat</i>	68
CAPÍTULO 5	
A PRODUÇÃO MATEMÁTICA EM UM CURSO A DISTÂNCIA.....	71
5.1 Os Momentos de Análise	71
5.2 A Discussão Matemática no <i>Chat</i> : seres-humanos-com-e-no-chat.....	73

5.3 A Matemática e o Wingeom: seres-humanos-com-Wingeom.....	80
5.3.1 Visualização	81
5.3.2 Investigação	85
5.3.3 Elaboração e Validação de Conjecturas.....	87
5.4 Demonstração Matemática em um Ambiente Virtual de Aprendizagem ...	90
5.5 Coordenando Tecnologias da Informação e Comunicação.....	99
CAPÍTULO 6	
DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	107
6.1 O <i>Chat</i> Enquanto Espaço-Mídia.....	107
6.2 Múltiplas Interfaces, Múltiplas Mídias, Múltiplos Saberes.....	111
6.3 A Matemática Colcha de Retalhos e o Hipertexto	114
6.4 O Wingeom em um Ambiente Virtual de Aprendizagem	115
6.5 Visão dos Participantes	118
6.5.1 Com Relação à Aprendizagem Matemática	119
6.5.2 Com Relação a Produzir Matemática a Distância.....	121
6.6 Considerações Finais	123
REFERÊNCIAS	129
APÊNDICE	135

ÍNDICE DE FIGURAS E QUADROS

Figura 4.1 - A interface do Wingeom e a construção de uma secção a partir de um ponto E qualquer na aresta AB de um tetraedro regular.	60
Figura 4.2 - Usando o menu <i>Anim</i> e <i>Variação de #...</i> o qual indica que a secção será deformada conforme variar a coordenada do ponto E.	60
Figura 5.1 - Construção geométrica da atividade apresentada no Quadro 5.1.....	77
Figura 5.2 - A razão entre os volumes de um paralelepípedo e um cubo.....	83
Figura 5.3 - A razão entre os volumes do paralelepípedo e do cubo se mantém constante ao variar as dimensões dos sólidos.	83
Figura 5.4 - Investigando o ângulo formado entre as diagonais de um cubo.	86
Figura 5.5 - Investigando o segmento RS obtido a partir dos pontos médios de duas arestas reversas de um tetraedro regular.....	89
Figura 5.6 - Construção de uma secção determinada a partir de um ponto qualquer E na aresta AB e paralela às arestas AC e BD de um tetraedro regular.	95
Figura 5.7 - Investigando a secção determinada no tetraedro regular a partir do ponto E paralela às arestas AC e BD.....	95
Figura 5.8 - Construção de uma atividade proposta na segunda aula sobre discussão matemática.	96
Figura 5.9 - Investigando dois planos obtidos a partir de um paralelepípedo.	106
Quadro 5.1 - Atividade proposta na primeira aula sobre discussão matemática.....	76
Quadro 5.2 - Atividade proposta na segunda aula sobre discussão matemática.	100
Quadro 5.3 - Atividade proposta na terceira aula sobre discussão matemática.	104
Quadro 5.4 - Atividade proposta na segunda aula sobre discussão matemática.	105

CAPÍTULO 1

GÊNESE DA PESQUISA

Neste capítulo, apresento os caminhos percorridos para a consolidação do projeto que deu origem a esta pesquisa. Inicio com uma breve introdução, trazendo alguns momentos de minha trajetória acadêmica. A seguir, apresento a problemática investigada e a relevância do trabalho realizado. Para finalizar, relato como foi organizada a dissertação de modo a propiciar uma visão geral acerca dos demais capítulos que a compõe.

1.1 Introdução

Grande parte dos pesquisadores, em particular do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da UNESP, Rio Claro, inicia sua dissertação ou tese relatando aspectos de sua trajetória pessoal e acadêmica. Trata-se do momento de contar um pouco da história da pesquisadora ou pesquisador, apesar de que não há regra ou determinação a respeito. Mas o leitor pouco familiarizado com esta prática pode estranhar tal procedimento. Afinal, considero pouco provável que o motivo que o levou a ler este texto seja conhecer a minha história, mas sim os detalhes da pesquisa em questão. Talvez leia apenas um capítulo ou outro, dependendo de seu interesse. Por esta razão cabe alguns questionamentos como: O que importa onde ela estudou? Por que saber quais disciplinas ela cursou antes mesmo de ingressar na pós-graduação? Qual é a relação disso tudo com a pesquisa desenvolvida por ela?

O fato é que ao optar por desenvolver um projeto de pesquisa, diversas angústias, inquietações e ansiedades influenciam para que escolhas sejam feitas e

tomar conhecimentos do porquê dessas escolhas justificam vários aspectos presentes nos resultados do estudo realizado. Por me incluir no rol de pesquisadores que se vêem participantes de suas próprias pesquisas é que considero importante retroceder ao início de todo o processo de desenvolvimento desta investigação, que não começa em Rio Claro, SP, mas tem como ponto de partida a cidade de Pato Branco, PR, onde cursei minha graduação.

No terceiro ano da Licenciatura em Matemática, em 2002, no CEFET-PR¹, atual UTF-PR², cursei a disciplina anual optativa "Tecnologia na Educação", que consistia em dar noções básicas de como utilizar alguns recursos tecnológicos, como softwares educacionais, planilhas eletrônicas, retroprojetor, vídeos e aplicativos durante uma aula (de matemática). Essa disciplina foi muito importante, já que me despertou o interesse por questões relacionadas às possibilidades do uso das Tecnologias Informáticas (TI) na Educação, em especial na Educação Matemática. Até o momento, eu só tinha vontade de fazer pós-graduação. Mas por onde começar?

Já em 2003, último ano da graduação, fiz uma busca na Internet sobre programas de pós-graduação. Por sugestão de uma professora procurei pela UNESP e encontrei Rio Claro, que me interessou por ter pós-graduação em Educação Matemática e, principalmente, por ter uma linha de pesquisa intitulada "Novas Tecnologias e Educação Matemática".

À época as universidades federais enfrentavam uma greve, o que para mim, de certo modo, foi providencial, pois pude estudar para o processo de seleção e elaborar uma proposta de projeto de pesquisa. Contudo, não ingressei em 2004 como aluna regular do Programa. Mas nesse mesmo ano, em dezembro de 2003, retornei à Rio Claro e participei da conferência de dez anos do GPIMEM³, onde fiquei conhecendo um pouco mais deste grupo, o qual insere suas pesquisas na temática das TI. Após ter concluído a graduação, em 2004, passei a integrar o GPIMEM e a cursar as disciplinas

¹ Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná, unidade de Pato Branco.

² Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Sudoeste.

³ Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática, coordenado pelo Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba. *Home-page*: www.rc.unesp.br/igce/pgem/gpimem.html

de Fundamentos de Geometria Elementar e Metodologia de Pesquisa Qualitativa como aluna especial do Programa.

Ter participado deste Programa, enquanto aluna especial, foi fundamental para o meu amadurecimento científico. Da mesma forma, ter me mudado para Rio Claro foi muito importante, pois além das disciplinas eu também participava de seminários, conferências, palestras, reuniões discentes e principalmente, das reuniões semanais e das atividades periódicas no LIEM⁴ com o grupo de pesquisa que passei a integrar desde então.

No GPIMEM, me aproximei, principalmente, de questões relacionadas às Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC) e, em particular, à Educação a Distância (EaD). Durante as reuniões, o grupo me ajudou na descoberta do “fazer pesquisa” em Educação Matemática, a partir de leituras de textos sobre informática e Educação Matemática e outros temas considerados pertinentes, colaborando, assim, com a construção de um quadro teórico para minha pesquisa.

As discussões sobre metodologia de pesquisa qualitativa e sobre atividades de matemática, bem como o contato com diversas tecnologias que ocorreram no GPIMEM, contribuíram em vários aspectos em minha formação e me ajudaram a olhar de maneira crítica diversas questões educacionais.

As reuniões do GPIMEM supriram minha falta de iniciação científica e foram além, uma vez que me ensinaram como exercer a crítica, ouvi-la também, organizar e administrar projetos. A partir da minha trajetória neste grupo, emergiram perspectivas de EaD e Educação Matemática que me levaram a uma proposta de pesquisa, a qual apresento na seção seguinte.

1.2 A Problemática e Relevância da Pesquisa

Por acreditar no potencial didático dos softwares educacionais, passei a me interessar por discussões sobre o papel das TIC na Educação e a refletir sobre *como* e *o que* pode ser feito na tentativa de proporcionar novas formas de produzir matemática. No que se refere a questões epistemológicas, é possível observar que, com o avanço

⁴ Laboratório de Informática e Educação Matemática.

da Internet, novas possibilidades de comunicação surgem para a Educação, em especial à Educação Matemática, por modificar as noções de espaço e tempo (KENSKI, 2003) e, principalmente, pelas sutilezas que a linguagem matemática apresenta. "A Internet e as interfaces associadas a ela criaram uma nova forma de pensarmos a Tecnologia Informática (TI) em Educação Matemática" (BORBA, 2004b, p. 296).

Diante deste fato, pesquisas têm sido realizadas para investigar como que a Internet tem transformado o cenário educacional (BORBA, 2005; KENSKI, 2003; GRACIAS, 2003; BAIRRAL, 2002 entre outras). E a Educação a Distância tem sido uma das temáticas de pesquisas no GPIMEM desde 2000, quando começou a ser oferecido a professores de matemática, pelo IGCE, UNESP, Rio Claro o curso de extensão universitária⁵ intitulado "Tendências em Educação Matemática", ministrado pelo Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba. A sexta edição deste curso, em 2005, serviu de cenário para a coleta de dados desta pesquisa. Contudo, já no seu primeiro ano, em 2000, Gracias (2003) analisou as interações entre os participantes durante as discussões que ocorriam sobre as diversas tendências em Educação Matemática, dando origem ao seu doutoramento, no qual pesquisou a reorganização do pensamento em um curso a distância, baseado-se nas idéias de reorganização do pensamento de Tikhomirov (1981) e em Lévy (1993), no que se refere aos coletivos pensantes.

De acordo com Gracias (2003, p. 36) "as interações proporcionadas pelas redes telemáticas, correio eletrônico, listas e grupos de discussão e sites, dentre outros, apresentam a vantagem de combinar a flexibilidade da interação humana com a independência no tempo e no espaço, sem perda de velocidade".

Borba (2004b) passou a se preocupar como os problemas matemáticos poderiam ser discutidos neste curso à distância, o que não foi foco da pesquisa de Gracias (2003), pois ainda não havia um momento específico para discussões de atividades de matemática. Contudo, nesta pesquisa analiso a produção matemática dos participantes, já que em edições anteriores deste curso, foi notada a problemática de se realizar esse tipo de discussão em um ambiente comunicacional baseado na Internet

⁵ Especificidades do curso "Tendências em Educação Matemática" serão tratadas no capítulo 4.

(BORBA, 2004b; BORBA e VILLARREAL, 2005). Deste modo, o que pretendo é observar como a produção matemática ocorre utilizando as salas de bate-papo do ambiente TelEduc⁶, analisando a discussão sobre as conjecturas formuladas durante as construções geométricas realizadas com o *software* Wingeom⁷, pelos participantes do curso. A versão deste *software*, utilizada durante o curso, está disponível para *download* na *home-page* do GPIMEM.

A geometria é um ramo da Matemática que exige certa capacidade visual para ser desenvolvida. Neste sentido, do ponto de vista pedagógico, o uso das TI pode acarretar contribuições consideráveis com relação à aprendizagem, como: a capacidade de visualização das relações geométricas, a possibilidade de exploração das construções e descoberta de relações e propriedades geométricas, a validação de conjecturas e de teoremas, de forma experimental, entre outras. Acredito que possibilitar que os estudantes construam e visualizem conceitos e propriedades geométricas, que até então poderiam ser verificadas mediante um procedimento formal, complexo e abstrato, auxiliaria na compreensão de aspectos dedutivos em geometria espacial.

Contudo, é necessário saber administrar o uso de tecnologias na Educação, pois adaptar em aulas recursos tecnológicos não é suficiente se não existir uma visão aprofundada de que o aluno pode produzir o seu conhecimento utilizando as TIC. Como afirma Borba (2001, p. 138), “ela [a informática] é uma nova extensão de memória, com diferenças qualitativas em relação às outras tecnologias da inteligência e permite que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação e em uma nova linguagem que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea”.

Neste sentido, as atividades realizadas com o uso do Wingeom podem proporcionar situações de investigação que os estudantes necessitam para construir seu conhecimento geométrico. Contudo, outras questões surgem quando essa discussão passa a ocorrer à distância, via Internet, utilizando basicamente o *chat*.

⁶ <http://teleduc.nied.unicamp.br/teleduc>

⁷ <http://math.exeter.edu/rparris>

Já há algum tempo, muitos autores discutem a situação de abandono da geometria (LORENZATTO, 1995; PEREZ, 1991; GAZIRE, 2000) e evidenciam que, quando lembrada, a maioria dos professores acaba abordando-a de maneira desinteressante e sem sentido para os alunos. Segundo Fainguelernt (1995, p.46), a geometria é um campo extremamente amplo que possui grande relevância no desenvolvimento intelectual do aluno. Para essa autora a geometria

[...] também ativa as estruturas mentais possibilitando a passagem do estágio das operações concretas para o das operações abstratas. É, portanto, tema integrador entre as diversas áreas da Matemática, bem como, campo fértil para o exercício de aprender a fazer, e aprender a pensar.

Mesmo que esta situação já tenha sido muito discutida, trata-se de uma situação em movimento, que ainda não está resolvida e com a presença de softwares geométricos, por exemplo, muitos avanços já aconteceram. Uma tensão, hoje, passa a ser a implementação de recursos digitais para ensinar e aprender Matemática, com auxílio de softwares e à distância.

A crescente evolução das TIC, principalmente com o acelerado uso da Internet, tem provocado inúmeras mudanças no âmbito educacional, exigindo a produção de novos conhecimentos. Para Oliveira (2003, p. 33-4), esse novo contexto de educação que surgiu

indica a necessidade de (re)pensar a educação, passando pelas formas de produzir, adquirir, transmitir e estocar o conhecimento, em que a formação se torne preponderante. Nessa formação deve ser incentivado o pensar e ativada a capacidade crítica, os quais, garantindo a produção do conhecimento, reafirmem as noções de ética e de solidariedade. [...] Essa modalidade de educação se reveste de imensa potencialidade, não como solução para todos os problemas, mas cumprindo papel relevante como modalidade de educação do futuro, tanto nos países desenvolvidos como naqueles em via de desenvolvimento.

Existe a preocupação de discutir como fazer com que professores vejam nas TIC uma das possibilidades de criar um ambiente que proporcione ao aluno realizar discussões, questionamentos, conjecturar e possibilitar a descoberta. Isso ainda tem sido tema de muitas pesquisas atuais no cenário da educação presencial e, sem que se tenha encontrado a solução para todos os problemas, já é necessário que pesquisas, discutindo essa mesma problemática, sejam realizadas para um ambiente baseado na Internet. Além de que, a geometria espacial, em particular, é um assunto matemático

pouco abordado em pesquisas, apesar da constante preocupação com a geometria de maneira geral.

Como principal objetivo, proponho-me, nesta pesquisa, investigar como ocorre a *produção matemática* em um dado contexto. Mas o que vem a ser essa produção? Nesta investigação o termo **produção** está em destaque e por esta razão uma explicitação torna-se pertinente.

Produção matemática nesta pesquisa é entendida como o processo de exploração de conceitos matemáticos (geométricos) e verificação de propriedades, validação e criação de conjecturas, visando a generalizá-las. Um processo contínuo de organização e reorganização do pensamento matemático. Delcin (2005, p.74 grifo meu), discute esta questão e acredita que

Ninguém sabe tudo e todos sabem alguma coisa, cada pessoa tem um conjunto de saberes, produz conhecimentos humanos e é a expressão de múltiplos componentes relativamente autônomos e inter-relacionados. A individualidade de cada um reflete um coletivo, que se auto-organiza no interior da mente social, participando simultaneamente da sua incessante **produção**.

Diante disso, não se trata de fazer com que os alunos-professores reinventem a geometria euclidiana espacial que já existe, ou que interfiram num corpo de conhecimento matemático rigorosamente elaborado, mas que se sintam envolvidos e em trabalho de significação e (re)significação de conceitos matemáticos, possibilitado pelo desenvolvimento das atividades propostas e a posterior socialização com os pares. Toda vez que uma pessoa consegue organizar e reorganizar seus conhecimentos matemáticos ela passa por um momento de produção matemática, no qual emergem experiências que justificam o seu estar no mundo e caracterizam o *como fazer* e o *saber fazer* de cada um.

No meu caso, a pergunta que deu direção a esta investigação visando à produção de conhecimento em Educação Matemática é:

Como se dá a produção matemática em um ambiente virtual de aprendizagem, de um coletivo formado por humanos e não humanos?

Gracias (2003, p.33) acredita que a "EaD não pode ser entendida apenas como consequência da evolução das tecnologias; ela deve ser considerada também como uma possibilidade de superação de alguns desafios educacionais contemporâneos".

Nesse aspecto, Kenski (2003, p. 68) acredita que o fato de se utilizar a Internet na Educação não significa que o espaço educacional presencial será suprimido, mas pelo contrário, ela o ampliará. Para essa autora

Os projetos de educação permanente, as diversas instituições e os vários cursos que podem ser oferecidos para todos os níveis de ensino e para todas as idades, a internalização do ensino – através das redes – criam novas dimensões para o acesso à educação, novas possibilidades de comunicação e agregação, novas oportunidades para o avanço na ação e na formação do cidadão que habita os múltiplos espaços das escolas – e das suas múltiplas linguagens.

Pesquisas visando a investigar como utilizar um *software* de geometria em aulas (presenciais) de matemática, em diferentes aspectos, ainda são necessárias. Mas por outro lado, já se torna igualmente necessário investigar essa mesma problemática em aulas de matemática à distância, baseadas na Internet, nas quais as concepções de espaço, por exemplo, já não são as que usualmente se conhece, conforme apresento no capítulo 3. O espaço moldado a partir da geometria de Euclides, ilustrado a partir de atividades realizadas em um *software*, encontra-se com o espaço cibernético da Internet e o meu objetivo é, com base em um curso de extensão à distância para professores de matemática, investigar a produção matemática neste contexto, após os participantes terem realizado as construções geométricas com o Wingeom e, deste modo, descrever quais as possibilidades desta produção.

1.3 A Estrutura do Trabalho

A pesquisa deu origem a este texto, que foi organizado em seis capítulos. Neste primeiro capítulo apresentei minha trajetória e o problema de pesquisa.

No capítulo dois trago a visão teórica seres-humanos-com-mídias, apresentada por Borba e Villarreal (2005), com a qual busco relacionar questões da produção do conhecimento geométrico. Além disso, faço uma revisão de literatura acerca da geometria euclidiana, no que diz respeito a algumas evidências de como as TIC interferem no processo de investigação dos conceitos geométricos.

No capítulo três apresento as teorias de Lévy (1993, 1999, 2003) com relação ao pensamento coletivo (coletivo pensante) e à inteligência coletiva e, as relaciono com

diferentes facetas assumidas pelo espaço, com base em uma ampla revisão de literatura, sendo que nesta pesquisa são evidenciadas conexões entre espaços distintos.

No capítulo quatro explico a metodologia de pesquisa adotada. Apresento, também, o cenário da coleta dos dados, bem como os participantes, os recursos tecnológicos utilizados e os procedimentos de coleta e análise dos dados.

A descrição e análise dos dados são apresentadas no capítulo cinco e finalmente, no capítulo seis, apresento o confronto dos resultados alcançados com a literatura sobre o tema, a avaliação dos participantes e as considerações finais.

CAPÍTULO 2

GEOMETRIA E AS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

Neste capítulo apresento a visão teórica seres-humanos-com-mídias, apresentada por Borba e Villarreal (2005), com a qual busco relacionar questões da produção do conhecimento geométrico. Para ampliar essa discussão, faço uma revisão de literatura acerca da geometria euclidiana, no que diz respeito a algumas evidências de como as TIC interferem no processo de investigação dos conceitos geométricos, com ênfase no uso de softwares de geometria dinâmica (SGD).

2.1 Seres-Humanos-com-Mídias: uma teoria, uma inspiração

Existe uma preocupação com relação a como se dá a produção de conhecimento quando as TIC se inserem no processo de desenvolvimento cognitivo humano. Essa é uma das vertentes que Borba e Villarreal (2005) discutem ao proporem o construto teórico seres-humanos-com-mídias. Nesta visão os autores defendem que o conhecimento é algo produzido a partir de um coletivo intelectual, composto por humanos e não humanos. Por não humanos, Borba e Villarreal (2005) entendem as mídias oralidade, escrita e informática. Com esta perspectiva teórica, eles acreditam, com base nas idéias de Tikhomirov (1981), que as mídias, enfatizando o uso das mídias informáticas, reorganizam o pensamento humano, já que elas moldam as ações quando se busca resolver um determinado problema matemático.

Neste sentido, a proposta é que se possa considerar uma unidade de homens-coisas (LÉVY, 1993), os seres-humanos-com-mídias. Assim, as tecnologias, o contexto

e tudo o que está ao redor não são meros acessórios e sim compõem um todo integrado que pensa *junto*. Neste aspecto, Borba e Villarreal (2005) vêem o coletivo seres-humanos-com-mídias como sendo uma unidade básica de análise e reconhecem a importância de examinar a relação dentro desta unidade, e propor que exista uma relação dialógica entre o usuário de um *software* e as intenções do grupo ou da pessoa que desenvolve este *software*. Para Borba e Villarreal (2005) essa relação dialógica é vista como uma **moldagem recíproca**, ou seja, ao mesmo tempo que a mídia condiciona a forma como determinadas ações são desenvolvidas, o usuário é que decide o que fazer.

Concordando com essas idéias, busco convergências das mesmas com a produção de conhecimento geométrico, o qual é objeto de estudo nesta pesquisa. Para tanto, discuto a visão desses autores no que se refere à abordagem experimental-com-tecnologias, a visualização e as TIC e a geometria em ambientes virtuais.

2.1.1 A Abordagem Experimental-com-Tecnologias e a Geometria

O termo *experimental* pode obter diversas conotações, mas, sobretudo está ligado ao ato de realizar um *experimento*. A palavra experimento pode ser entendida como algo que possui um valor específico, uma experiência controlada, dirigida, ou seja, uma observação (ABBAGNANO, 2000). Nesse sentido, a idéia converge com a compreensão que se faz no âmbito educacional e, inclusive, em Educação Matemática.

Para Borba e Villarreal (2005), uma abordagem experimental em Educação Matemática, significa fazer uso de procedimentos de tentativas e processos educativos que possibilitem a geração de conjecturas, a descoberta de resultados matemáticos desconhecidos, a possibilidade de testar modos alternativos de coletar resultados, a chance de proporcionar novos experimentos, enfim, em um modo diferente de aprender Matemática.

Estes autores acreditam que essa abordagem pode incentivar estudantes a fazerem tentativas utilizando tecnologias informáticas, como por exemplo, calculadoras gráficas, softwares gráficos e geométricos. Esse processo experimental pode conduzir alunos a elaborarem conjecturas, formularem hipóteses que podem ser testadas e

generalizadas. Este enfoque é ressonante com a idéia de seres-humanos-com-mídias, uma vez que o *feedback* dado pelas mídias informáticas durante uma experimentação pode gerar uma discussão, talvez de idéias nunca pensadas pelos estudantes. As possibilidades criadas pela experimentação-com-tecnologias nem sempre se consolidariam em ambientes que privilegiassem apenas o enfoque analítico. Essa combinação de seres-humanos-com-mídias possibilita o desenvolvimento de atividades mais abertas e investigativas.

Com relação ao desenvolvimento do pensamento geométrico, acredito que essa abordagem possibilita um envolvimento dos estudantes com o conteúdo e os leva a uma investigação de conceitos, que podem vir a obter um novo sentido quando estudados de modo a enfatizar questões qualitativas de exploração. Borba e Villarreal (2005) em grande parte de seus exemplos, nos quais ilustram essa abordagem, os relacionam com a possibilidade de se analisar representações múltiplas de funções (tabular, gráfica, algébrica).

Essa abordagem vem sendo utilizada em diversas pesquisas desenvolvidas por membros do GPIMEM. Recentemente, Scucuglia (2006) pesquisou como programas e comandos da calculadora gráfica TI-83 condicionaram o pensamento de estudantes na investigação do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Realizando sessões de experimento de ensino, ele observou que os coletivos pensantes formados por Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas estabeleceram conjecturas sobre o TFC. Com o intuito de chegar a uma demonstração deste Teorema, foram utilizadas noções intuitivas e notações simplificadas, antes que fosse usada a simbologia própria da matemática acadêmica. A abordagem experimental-com-tecnologias adotada por este autor possibilitou o envolvimento de estudantes em discussões matemáticas que tinham características dedutivas obtidas de maneira experimental.

No que tange a experimentos com atividades de geometria, este enfoque também pode ser incorporado, como no caso desta pesquisa. Por exemplo, um experimento em geometria euclidiana espacial pode ser realizado com o objetivo de investigar o que acontece com a área total de dois cilindros de mesmo volume, quando suas dimensões variam. Pode ser constatado, por exemplo, que mesmo que esses

sólidos mantenham constante o volume, as áreas são distintas e é possível identificar qual deles é que possui a menor área e em que momento, até se chegar a uma generalização do tipo *entre todos os cilindros de mesmo volume, os eqüiláteros são os que possuem a menor área*. Em geometria essa possibilidade de variar medidas, animar, movimentar, arrastar uma construção geométrica é o que se entende por experimentação. Tendo em vista as possibilidades das TI neste processo, acredito que a experimentação é qualitativamente diferente dependendo da mídia. Os SGD, por exemplo, potencializam a abordagem experimental e criam novas possibilidades no processo investigativo. Borba e Villarreal (2005, p. 78) acreditam que as

[...] tecnologias computacionais e suas diferentes interfaces estão mudando a natureza do sentido que usamos para comunicar dentro de uma unidade de seres-humanos-com-mídias. Se vemos nosso próprio corpo-mente como interfaces, podemos propor que parte da reorganização do pensamento tem a ver com diferentes combinações de humanos e interfaces computacionais, e que cada um desses “atores” constitui um ao outro⁸.

Com relação à experimentação, esses autores evidenciam que as tecnologias, em particular a Internet e as suas diferentes interfaces, podem reorganizar o pensamento, uma vez que o coletivo pensante, formado por humanos e TIC pensa a partir do *feedback* dado por estas mídias moldando, assim, o modo de pensar e agir.

Diante disso, a geometria pode ser considerada uma área propícia para um ensino que enfatize a exploração de situações matemáticas a partir de uma abordagem experimental-com-tecnologias. Esse enfoque pode contribuir para a compreensão de relações geométricas sem a necessidade de memorização e utilização de estratégias rigorosamente elaboradas, ou técnicas de resolução analítica e, com as TI a experimentação passa a obter um papel importante na produção matemática.

2.1.2 A Visualização e as Tecnologias da Informação e Comunicação

A geometria está intimamente ligada ao aspecto visual. As tecnologias informáticas proporcionam uma abordagem dinâmica para a investigação matemática,

⁸ Tradução de: [...] computer technology and its different interfaces are changing the nature of the senses we use to communicate within a humans-with-media unit. If we see our own body-mind as interfaces, we can propose that part of the reorganization of thinking has to do with different combinations of human and computer interfaces, and each on these “actors” constitute each other.

em particular para a geometria, e, por conseguinte, uma ênfase à visualização, já que as imagens na tela do computador, por exemplo, podem ser exploradas sob diferentes aspectos.

Em se tratando da aprendizagem da geometria espacial, em que se estudam os objetos matemáticos no espaço euclidiano tridimensional, a visualização se torna ainda mais importante. Muitas vezes, se não há uma visualização da situação matemática a ser estudada, a própria investigação se torna impraticável. Em geometria, geralmente é mais difícil investigar um objeto quando não se consegue conceber uma imagem mental deste objeto.

Quando falo da importância da visualização, não estou afirmando que o conhecimento geométrico só acontece se houver um desenho, figura, imagem "real" dos objetos matemáticos, pois algumas pessoas conseguem visualizar mentalmente, ou seja, imaginar e elaborar conjecturas. Neste sentido, penso que a visualização também ocorreu. Por outro lado, creio que quando instigados por uma ferramenta de construção geométrica, a partir de uma abordagem experimental, o pensamento passa por um processo de reorganização e novas idéias podem emergir. Neste sentido, entendo que a visualização condiciona o desenvolvimento de idéias para que uma atividade seja compreendida e investigada. Os softwares matemáticos, em particular os SGD, assumem um papel muito importante no que diz respeito ao pensamento coletivo e, principalmente, na visualização, devido aos recursos que dispõe.

No que diz respeito ao pensamento coletivo, Lévy (1993) acredita que fora da coletividade, desprovido de tecnologias intelectuais (oralidade, escrita e informática) não é possível pensar. Para ele "*o pensamento já é sempre a realização de um coletivo*" (p. 169, grifo do autor). Por isso acredito que quando os SGD foram inseridos no ambiente educacional, um coletivo de humanos e SGD passou a permear a produção do conhecimento matemático e a reorganizar a maneira de pensar a geometria, possibilitando, assim, novas formas de abordá-la, ou seja, com dinamismo. A então chamada geometria dinâmica é um misto entre desenho geométrico, pelo fato de valorizar a construção com régua e compasso, mas com uma dimensão dinâmica que potencializa a investigação e amplia as possibilidades de exploração dos conceitos

geométricos. Diante disso, "o papel da mídia no processo de visualização vai além do simples ato de mostrar uma imagem" (BORBA e VILLARREAL, 2005, p. 97).

Fainguelernt (1999, p. 53 grifo meu) discute a importância da geometria e a conecta ao aspecto visual afirmando que

O estudo da Geometria é de fundamental importância para se desenvolver o pensamento espacial e o **raciocínio ativado pela visualização**, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para leitura do mundo [...].

Neste sentido, "uma imagem visual não apenas organiza os dados disponíveis em estruturas significativas, mas é também um fator importante na orientação do desenvolvimento analítico de uma solução" (FAINGUELERNT, 1999, p. 55). Uma vez reconhecida a relevância da visualização no processo de investigação e verificação de propriedades geométricas, Borba e Villarreal (2005) argumentam sobre o papel da tecnologia informática, já que ela

ênfatiza o componente visual da matemática, mudando o status da visualização em educação matemática. [...] A mídia usada para comunicar, representar e produzir idéias matemáticas condicionam o tipo de matemática que é feita e o tipo do pensamento que está sendo desenvolvido neste processo. Ao mesmo tempo, o processo de visualização atinge uma nova dimensão se considerar um ambiente computacional de aprendizagem com um coletivo pensante particular, onde estudantes, professores/pesquisadores, mídia e conteúdos matemáticos residem juntos (BORBA e VILLARREAL, 2005, p. 96)⁹.

Diante do exposto, ao usar as TI durante o desenvolvimento de uma atividade matemática o modo de se pensar, os caminhos a percorrer em busca da solução ou do entendimento, são moldados pelas possibilidades que estas mídias oferecem e, além disso, a maneira de investigar e a visualização são qualitativamente diferentes daquelas na qual lápis e papel e suas interfaces são as únicas tecnologias utilizadas.

⁹ Tradução de: Computer technology stress the visual component of mathematics, changing the status of visualization in mathematics education. [...] The media used to communicate, represent and produce mathematical ideas conditions the type of mathematics that is made and the kind of thinking to be developed in those processes. At same time, the visualization process reaches a new dimension if one considers the computational learning environment as a particular thinking collective, where students, teacher/researcher, media and mathematical contents reside together.

2.1.3 Geometria em Ambientes Virtuais: avanços e limites

Educação Matemática a distância, em nível nacional e internacional, ainda é um campo pouco explorado e por esta razão é natural que poucas sejam as pesquisas que abordem a geometria em ambientes baseados na Internet até o momento. Contudo, alguns avanços já foram alcançados e apontam para uma demanda de pesquisas que abordem diferentes aspectos (metodológicos e epistemológicos) dessa nova modalidade de educação que surgiu, a EaD.

As pesquisas desenvolvidas por Bello (2004) e Lopes (2004) tiveram o mesmo contexto, contudo com objetivos e focos distintos. Ambos os pesquisadores, realizaram suas coletas de dados em um curso de matemática à distância, juntamente com outros pesquisadores e professores, oferecido a alunos do Ensino Médio de três escolas particulares da cidade de São Paulo. Este curso estava vinculado ao “Projeto Transformações”, no qual utilizaram a plataforma TelEduc e o *software* Cabri-Géomètre II para as interações e realização das atividades, respectivamente. Por um lado, Bello (2004) preocupou-se com a colaboração entre os participantes, no que se refere às possibilidades de produção de conhecimento e Lopes (2004), por outro lado, tinha como objetivos propor e analisar um modelo de avaliação para o curso em questão. A interação se dava a partir de discussões sobre atividades de geometria, mais especificamente transformações geométricas (isometrias).

Dezoito alunos participaram do curso e foram divididos, em um primeiro momento, em seis grupos, sendo que cada aluno do grupo era de uma escola, mantendo assim o caráter a distância do curso. Semanalmente eram disponibilizadas no TelEduc as atividades que deveriam ser resolvidas em grupo e a distância. *A priori*, os estudantes compartilhavam suas soluções consensuais, via portfólio, apenas com os formadores e, após o *feedback* eram compartilhadas com todos os participantes do curso. O próximo passo era a socialização das soluções nos encontros síncronos semanais.

Em um segundo momento, na sexta e última semana em que aconteceu o curso, os alunos eram divididos em apenas dois grupos no intuito de realizarem o

trabalho final: criar mosaicos e/ou pavimentações utilizando os conceitos trabalhados no decorrer do curso e tendo como recurso as ferramentas do Cabri.

Por se tratar de uma discussão sobre situações matemáticas, a explicitação textual do pensamento poderia ser uma tarefa complexa, tanto para quem está expressando a idéia quanto para quem está acompanhando a explanação. Por esta razão, Lopes (2004) afirma que o Cabri-Géomètre foi muito importante no processo de experimentação e expressão do pensamento, visto que, por meio do recurso chamado “Rever construção” do Cabri, permitiu que os participantes verificassem, passo a passo, a maneira como o colega havia realizado as construções, o que facilitou a discussão do processo investigativo das atividades.

No que se refere às atividades, este último autor acredita que aquelas que não caracterizavam verdadeiras situações-problema, no sentido de apresentarem dificuldades em solucioná-las, foram resolvidas individualmente, ou seja, nesses casos o trabalho colaborativo, esperado pelo pesquisador, não foi evidenciado. Assim, os estudantes, em grupo, apenas comparavam suas soluções individuais e as apresentavam aos formadores. Por outro lado, as atividades que se mostravam desafiadoras suscitaram a troca de idéias em pares, caracterizando um trabalho coletivo e colaborativo.

Bello (2004) defende que as intervenções por parte dos professores caracterizaram uma dinâmica particular deste curso, que evoluiu gradativamente em relação ao trabalho colaborativo e, deste modo, possibilitou uma (re)elaboração dos conceitos matemáticos com base na articulação das soluções das atividades, tanto individuais quanto na discussão em grupo.

Neste mesmo sentido, em um artigo do BOLEMA¹⁰ nº 22, Bairral (2004) relata algumas contribuições das teleinterações em um ambiente *online* à distância para o desenvolvimento docente. Este artigo é resultado de um projeto desenvolvido pelo autor para a formação continuada de professores de matemática dos 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental. “Trata-se de um estudo longitudinal, cujo objetivo geral é analisar a importância da mediação por Internet para formação continuada em Geometria” (p.40).

¹⁰ Boletim de Educação Matemática, *home-page*: www.rc.unesp.br/igce/matematica/bolema

Diante disso, foi oferecido um curso a distância, no qual as interações ocorreram de maneira síncrona e assíncrona. Contudo, neste trabalho, o autor analisa o discurso dos participantes em um dos chats realizados no curso. No que se refere a este tipo de interação, via *chat*, Bairral (2004) descreve algumas vantagens, como a comunicação em tempo real, e ainda, algumas dificuldades, das quais destaco a impossibilidade de inserção de imagens e desenhos explicativos.

Foi possível observar que “não é apenas a discussão no *chat* que contribui com o processo formativo, senão um conjunto de tarefas de provocação e o processo teleinterativo que é gerado com contribuição e idiossincrasia discursiva de cada espaço comunicativo do contexto virtual” (BAIRRAL, 2004, p.56).

A partir desta investigação, o autor percebeu num primeiro momento, que

a interação virtual pode parecer desorganizada e, por ser uma manifestação discursiva escrita, torna possível o resgate de idéias que, porventura, necessitem ser aprofundadas por usuários interessados. Desta forma, as teleinterações estarão trazendo novos elementos para a análise da simetria nos debates, onde, além das características pessoais dos participantes, o tempo de reflexão será outro fator importante de ser considerado (BAIRRAL, 2004, p.56).

Já Socolowski (2004), em sua pesquisa de mestrado, analisou as interações entre participantes de um curso a distância, via Internet, no qual eram abordados temas específicos de geometria - sistema de medidas, áreas, perímetros, entre outros - e que serviu como fonte de dados da pesquisa de doutorado de Bairral (2002).

Em sua investigação, Socolowski (2004) se preocupou em analisar as interações entre participante e tutor no intuito de melhor compreender os argumentos contidos nos discursos dos sujeitos envolvidos e, para isto a autora analisou os documentos (listas de discussão, e-mails e os discursos no *chat*) gerados no curso, a fim de verificar os significados produzidos nos diálogos entre o tutor e um dos participantes.

Dois olhares foram privilegiados: o da prática pedagógica, tanto do tutor quanto do participante, e o conteúdo matemático. Socolowski (2004) conclui que "a análise da estratégia argumentativa das interações entre os participantes e o Tutor pode ser um

ponto de partida para a Avaliação de um Curso de Desenvolvimento Profissional a Distância" (p.54).

Os cursos de extensão à distância, oferecidos a professores de vários estados brasileiros e, também, de outros países, pelo IGCE, UNESP de Rio Claro, ministrados pelo orientador desta pesquisa, sempre envolveram conteúdos teóricos sobre tendências atuais em Educação Matemática (BORBA, 2004b). Mas com o passar dos anos, foi se configurando a necessidade de abordar em tais cursos questões específicas de Matemática.

Já em 2002, chegou-se a discutir algumas atividades de geometria euclidiana e de funções, sendo que foi sugerido aos participantes a utilização de qualquer *software* apropriado e, em 2003, além desses dois temas matemáticos, uma das aulas foi destinada à discussão sobre fractais (BORBA e VILLARREAL, 2005).

A necessidade de compreender como a Matemática é produzida em ambientes virtuais foi a preocupação de pesquisadores como Borba e Villarreal (2005). Segundo esses autores, o fato de abordar tópicos matemáticos neste curso a distância, em particular, não quer dizer que o objetivo seja ensinar matemática a professores. Para eles os motivos são vários e estão voltados à formação continuada. Neste sentido, argumentam que

educação continuada pressupõe que os professores já sabem algo sobre os tópicos, e também, acreditamos que "ensinar" deverá tornar-se uma atividade progressivamente dialógica, como proposto por Freire e seus seguidores. Além do que, não temos a intenção de atender nenhum tópico em sessões de duas ou três horas. Uma outra razão é que não temos uma ementa de curso, já que precisamos ser flexíveis nesse sentido para que os professores possam explorar questões matemáticas no nível que eles preferirem, uma vez que eles são de ensino médio, fundamental e nível universitário, e poucos ensinam para diferentes níveis ao mesmo tempo, ou que se graduaram recentemente e estão procurando um emprego (BORBA e VILLARREAL, 2005, p. 180)¹¹.

¹¹ Tradução de: continuing education presupposes that teachers already know something about the topics, and also, we believe that "teaching" should become an increasingly dialogical activity, as proposed by Freire and his followers. Secondly we have no intention of covering any topic in two three-hour sessions. Another reason is that we have no rigid syllabus, since we need to be flexible in order for teachers to explore mathematical issues at the level they prefer, since there middle school, high school and university level teachers, and a few who taught at different levels at the same time, or had graduated recently and were looking for a job.

No que se refere à possibilidade de produção matemática no desenvolvimento de atividades, bem como na discussão e compartilhamento de soluções, estes pesquisadores, a partir de experiências vivenciadas em cursos a distância, elaboraram a conjectura de que uma plataforma como o TelEduc, a qual apresento em detalhes no capítulo 4, apresentava limitações para propiciar o "fazer" Matemática, uma vez que particularidades da linguagem matemática não são possíveis de serem expressas.

Em 2005, decidiu-se reservar um espaço neste curso para discutir atividades de geometria espacial buscando identificar diferentes facetas da Educação Matemática no contexto da Internet, o que veio a se tornar tema da presente pesquisa. Neste aspecto, visto a investigar essas questões a fim de melhor compreendê-las.

Descobrir se a Matemática ou, em especial, a geometria, se transforma com a Internet, assim como muitos pesquisadores já se convenceram que isso acontece quando SGD são utilizados, é bem provável que seja possível em breve, uma vez que já há pesquisadores unindo esforços para o desenvolvimento de ambientes virtuais dotados de recursos que possibilitem a troca do "fazer" Matemática. Contudo, nesta pesquisa cabe estudar qual e como a Matemática acontece a partir do contexto em questão. Esta reflexão será retomada, no capítulo 5, quando os dados coletados, bem como a interpretação dos mesmos será apresentada.

Diante do exposto, cabe destacar que não apenas as pesquisas em Educação Matemática à distância sobre geometria estão "engatinhando", como já mencionado, mas também aquelas que têm como objeto de estudo a geometria euclidiana, em seus diferentes aspectos, pouco têm investigado sobre geometria espacial, especificamente. A partir da revisão bibliográfica realizada, é possível notar que ou a geometria é abordada de maneira geral, ou em sua grande maioria trata de questões específicas da geometria plana. No entanto, não é apenas para suprir a falta de pesquisas sobre geometria espacial que me concentrei neste tema, mas principalmente pela sua importância para o desenvolvimento da matemática de maneira geral. Concordo que em muitas situações a geometria espacial parece depender da geometria plana (se é que possível estabelecer uma relação de independência entre geometrias) pelo fato de que, em alguns momentos, é necessário apoiar-se nos resultados da geometria plana

para estudar situações da geometria espacial. Esse fato, talvez, seja decorrente de, desde o Ensino Fundamental, ser estabelecida uma ordem no estudo de geometria que se inicia com a geometria plana ao invés da espacial (FONSECA *et al.*, 2002; PORTANOVA, 2005).

Não sugiro que invertendo essa ordem o problema esteja resolvido, mas parece que ao se trabalhar de maneira isolada (primeiro plana e depois espacial) sem conexões, a passagem da geometria plana para a espacial torna-se problemática e muitas vezes confunde os estudantes. Um exemplo disso se evidencia ao questionar sobre qual é a medida do ângulo formado entre duas diagonais de um cubo e, de maneira quase que natural e imediata, a idéia seja transportada para o caso do quadrado e, assim, a resposta dada seja que o ângulo é reto, conforme discuto no capítulo 5. Parece-me contraditória tamanha dificuldade, uma vez que as pessoas convivem em um ambiente onde quase tudo é formado por objetos sólidos, tridimensionais. “Já estruturas que fazem parte da Geometria plana ou bidimensional, como por exemplo, o plano, não nos permitem vivenciar experiências reais, mas sim elementos que dêem essas idéias” (PORTANOVA, 2005, p. 28). Ainda Dienes (*apud* PORTANOVA, 2005, p.28) acredita que

Parece ser uma sugestão sensata começar a Geometria pela geometria Sólida. Eu gostaria de acrescentar outra sugestão, ou seja, a introdução de exercícios de abstração juntamente com o tratamento com os corpos sólidos, reais, para que a criança venha a compreender que o que está aprendendo é a inter-relação em alguma estrutura, e que essa estrutura pode apresentar mais de uma representação física.

Pela relevância de tal assunto é que julgo pertinente a pesquisa ora apresentada, tendo como uma de suas preocupações a geometria euclidiana espacial, uma vez que a geometria “é uma habilidade básica, pois oferece oportunidade para desenvolver a percepção espacial que é necessária à compreensão da Matemática e das Ciências (PORTANOVA, 2005, p. 31).

Sendo assim, no intuito de relatar como pesquisas vêm discutindo o uso de tecnologias informáticas no ambiente educacional, na seção seguinte faço uma revisão de literatura sobre essa temática destacando dois aspectos do uso didático-pedagógico

dos SGD: com relação à prova ou demonstração matemática e no que se refere às investigações matemáticas.

2.2 O Uso de Softwares no Ensino e na Aprendizagem de Geometria

Muitas pesquisas têm mostrado o importante papel de softwares para o ensino e aprendizagem de geometria, tanto no aspecto metodológico quanto no epistemológico (MARIOTTI, 2000; ZULATTO, 2002; MARTINS, 2003; ALMEIDA, 2003; GOUVÊA, 2005; RICHIT, 2005 entre outros). O uso destes recursos informáticos tem transformado a maneira de produzir o conhecimento sobre este tema e é possível notar uma maior difusão de softwares em sala de aula nos últimos anos. Um sintoma disso pode ser o grande número de aplicativos da área disponíveis na Internet. Neste sentido pretendo mostrar como os SGD moldam a produção matemática, baseando-me em pesquisas já realizadas.

2.2.1 O SGD e a Prova ou Demonstração Matemática

Existe uma ampla discussão entre educadores matemáticos e matemáticos profissionais, com opiniões nem sempre convergentes, sobre a possibilidade de softwares contribuírem para que estudantes tentem chegar a uma justificativa matemática e façam a ligação entre a exploração indutiva e o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Apesar de ainda existir uma polêmica com relação a este tema, acredito que com estes softwares é possível investigar diferentes variações de uma construção geométrica e, conseqüentemente, inferir propriedades, chegar a generalizações e verificar teoremas. Devido à natureza indutiva do SGD, novas possibilidades experimentais, e teóricas, podem ser exploradas, uma vez que com esta tecnologia a elaboração de conjecturas e suas respectivas justificativas podem ser favorecidas. Desse modo, é possível estabelecer uma importante discussão acerca das possibilidades da inclusão de SGD no contexto educacional em seus diferentes níveis.

Pesquisadores como Christou *et al.* (2004), por exemplo, buscam formas de mostrar como os SGD podem fornecer não apenas dados a serem confirmados ou

conjecturas a serem testadas, mas, também, podem induzir idéias associadas a uma prova dedutiva.

Com base em estudos sobre funções, e por acreditarem no potencial do uso de SGD, Giraldo *et al.* (2004) analisaram um estudo de caso, no qual as reações dos estudantes sobre um determinado problema diferiram dos padrões usuais ao observarem um curso para professores. Os autores argumentam que os diferentes *backgrounds* dos estudantes - no caso, professores - provocaram um conflito entre os significados produzidos, que expandiu a apropriação de conceitos. Estes pesquisadores contrastaram este comportamento com o efeito restritivo da mera aplicação da fórmula, o que tem sido observado em respostas típicas dadas por professores sobre um mesmo problema.

Estes estudantes-professores eram questionados, por exemplo, sobre como encontrar, empiricamente, a área do retângulo com perímetro 40m. No desenvolvimento desta tarefa, utilizando SGD, os participantes notaram que alguns deles apresentavam valores aproximados, gerando, assim, conflitos em relação aos conceitos geométricos produzidos em um ambiente de geometria dinâmica. A partir dessa experiência os autores concluíram que essa limitação do SGD, além de outras possíveis, poderia ser usada "a favor" dos estudantes no momento da investigação e não como um obstáculo, ou seja, esse conflito fazia do SGD uma ferramenta importante no desenvolvimento do raciocínio dedutivo em geometria, levando os professores a sentirem a necessidade de uma prova formal. Nesse caso, o *feedback* dado pelo SGD pode induzir a uma demonstração.

Demonstração ou prova matemática é um tema que demanda diversas discussões no âmbito da Educação Matemática, levando muitos pesquisadores a investigarem seu papel em diferentes contextos e, assim, identificarem suas várias facetas (HANNA, 2000; MARIOTTI, 2000; LABORDE, 2000, entre outros). Essa discussão passou a ser mais intensa quando os softwares começaram a se tornar realidade na sala de aula, trazendo uma nova perspectiva para a demonstração, colocando "em xeque" o rigor matemático em determinados contextos educacionais. Por que demonstrar, se a construção no *software* garante e/ou convence?

Lourenço (2002, p.100) considera que "embora a prova em Matemática seja de grande importância, a forma segundo a qual ela tem se reproduzido, sobretudo quando se trata de ensino, deve ser revista". Para este autor, o uso de softwares pode abrir novas perspectivas de investigação e, ainda, segundo ele, "demonstrar é convencer. [...] o convencimento deve se caracterizar pela coerência e compatibilidade com o contexto. O que é necessário num momento talvez seja perfeitamente dispensável em outro momento e outro contexto" (p.108-9).

Hanna (2000, p.13) acredita que os SGD

têm o potencial para encorajar a exploração e a prova, pois eles tornam mais fácil propor e testar conjecturas. Mas, infelizmente, o sucesso do uso destes softwares na exploração tem emprestado apoio à uma visão entre os educadores de que a prova dedutiva em geometria deveria ser menos enfatizada ou abandonada em favor de uma abordagem totalmente experimental para a justificação matemática¹².

Essa autora também afirma que a utilização da exploração em matemática não é algo recente e existe muito antes dos computadores terem sido inventados e, usar dessa estratégia, não significava uma incoerência com a visão de Matemática, de ciência e de prova matemática. Para ela, o importante é que meios exploratórios (ou experimentais) e dedutivos (demonstração) sejam ambos considerados, sendo que um complementa o outro. "A exploração induz à descoberta enquanto a demonstração é a confirmação" (p. 14).

De fato, ambientes computacionais interferem nas ações quando se tem que resolver uma atividade ou um problema matemático. No que se refere ao uso dos SGD, diferentes estratégias são utilizadas em complemento ao uso do lápis e papel. Ele afeta, principalmente, o *feedback* proporcionado ao usuário.

Autores como Cassol e Hammer (2004) acreditam que o SGD não faz demonstrações, mas que a partir de sua utilização elas poderão ser estimuladas. Neste

¹² Tradução de: has the potential to encourage both exploration and proof, because it makes it so easy to pose and test conjectures. But unfortunately the successful use of this software in exploration has lent support to a view among educators that deductive proof in geometry should be downplayed or abandoned in favour of an entirely experimental approach to mathematical justification.

sentido, afirmam, ainda, que ao ser estimulada a demonstração terá um novo sentido para os alunos.

Considerando as diferentes concepções sobre o “demonstrar” em Educação Matemática, observo que estudantes, professores e pesquisadores desenvolvem seus raciocínios matemáticos sob diferentes olhares.

Marrades e Gutierrez (2000) afirmam que as atividades podem induzir os alunos ao processo de demonstração através de perguntas abertas que sejam desafiadoras. Acredito que atividades que tenham como objetivos levantar questionamentos, suscitar discussões e propiciar a produção de conhecimento, por exemplo, com perguntas do tipo: “o que você pode afirmar sobre...? Justifique”, podem orientar os estudantes a uma investigação mais aprofundada podendo chegar, dependendo da concepção de prova, demonstração ou justificativa, a uma formalização matemática.

Zulatto (2002) diz que “Justificar’, do ponto de vista teórico matemático, está extremamente ligado à abordagem dedutiva” (p.92). Assim como uma justificativa pode vir a se tornar demonstração, reciprocamente, uma demonstração não deixa de ser uma justificativa. E ela acrescenta ainda que “os softwares auxiliam também na realização de atividades investigativas, proporcionando um ambiente onde os alunos podem levantar conjecturas e testá-las” (p. 93).

Diante disso, as possibilidades de investigação e experimentação dos SGD podem levar estudantes a desenvolverem suas idéias a ponto de criarem conjecturas, validá-las e elaborarem uma demonstração matemática.

2.2.2 O SGD e a Investigação Matemática

Conforme Zulatto (2002), a visualização e a investigação estão entre as principais potencialidades apontadas por professores de matemática que utilizam SGD em suas aulas. Por já ter tratado do primeiro tema, anteriormente neste capítulo, neste item, destacarei o tema *investigação* por também considerá-lo relevante sob o ponto de vista didático-pedagógico, já que “investigar constitui uma poderosa forma de construir [ou produzir] o conhecimento” (PONTE *et al.*, 2003, p.10).

O que é investigar? De acordo com o dicionário de língua portuguesa, investigar significa seguir vestígios, indagar, pesquisar, inquirir. Sob esta ótica, o termo *investigação* carrega consigo as possibilidades de exploração e experimentação. Para Ponte *et al.* (2003) investigar não significa resolver problemas difíceis, mas sim lidar com questões abertas, para os quais não se tem ainda uma resposta ou uma única resposta e, em uma investigação, sempre que possível, buscar argumentos cada vez mais fundamentados. Este autor acrescenta ainda que investigar em matemática

assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração (PONTE *et al.*, 2003, p. 10).

Vejo como investigação o ato de explorar de diferentes formas e experimentar, por exemplo, diferentes variações da construção geométrica, além de questionar a intuição, de modo a instigar a busca de argumentos para validar determinadas conjecturas formuladas durante a investigação. Nesta perspectiva, acredito que quando um resultado é "validado" com base em um processo investigativo, ele passa a fazer mais sentido aos estudantes e, assim, aumenta a possibilidade de outros conceitos matemáticos serem construídos.

Cassol e Hammer (2004) desenvolveram um trabalho no qual buscam, por meio de construções lúdicas com a utilização de SGD, explorar conceitos geométricos com alunos da 8ª série do Ensino Fundamental. Os pesquisadores apoiaram-se na possibilidade de *animação* (dinamismo) desses softwares para *investigar* situações do cotidiano (o funcionamento de um limpador de pára-brisa, por exemplo) e fazer com que os alunos percebessem que teriam que buscar na geometria os conceitos necessários para o desenvolvimento da construção. Segundo esses autores,

Se perguntarmos aos alunos sobre o que é uma circunferência, muitos deles, como foi no caso, lembrarão que já foi definida, com um pouco de ajuda, conseguem repeti-la [...]. Entretanto, não é feita ligação sobre o uso deste conceito na construção do limpador, para manter o mesmo comprimento de haste. Uma ótima estratégia metodológica, para que conceitos possam ser entendidos, é que os mesmos tenham que produzir efeitos no momento em que são apresentados (CASSOL e HAMMER, 2004, p. 43).

Também, ao realizar um trabalho com alunos do Ensino Fundamental (7^a e 8^a séries) e as duas professoras destas turmas, Rigodanzo e Angelo (2004) viram no SGD um ator importante no processo de exploração de conceitos geométricos. Para eles, "ao manipular o software Cabri-Géomètre para realizar as construções geométricas, analisar figuras já construídas e chegar a conclusões, o aluno se torna agente de seu próprio aprendizado" (RIGODANZO e ANGELO, 2004, p. 23).

Em consequência da investigação com SGD, um ambiente com características próprias é criado, no qual as construções podem ser submetidas à prova do arrastar, do dinamismo, do movimento, da animação, de modo que as propriedades e conjecturas formuladas poderão ser testadas para vários casos e validadas ou refutadas. Contudo, nesta pesquisa a investigação será realizada com um SGD, além de outras mídias, e será socializada em um ambiente virtual de aprendizagem. Diante disso, buscarei compreender as características do processo investigativo a partir das interações evidenciadas nesse novo espaço com um grupo de professores de matemática fisicamente distantes.

Sendo assim, no próximo capítulo, trago uma discussão sobre o espaço e suas diferentes facetas, por acreditar que este assunto está intimamente relacionado com as questões desta pesquisa, uma vez que lido, ao mesmo tempo, com o espaço geométrico de Euclides, a partir de interações realizadas via Internet, ou seja, no *ciberespaço*, o qual desafia os conceitos de distância e presença que estão ligados ao espaço geográfico.

CAPÍTULO 3

CIBERESPAÇO: UM AMBIENTE PARA A PRODUÇÃO MATEMÁTICA ONLINE

Como mencionado no capítulo anterior, alguns pesquisadores têm investigado especificidades da Educação Matemática à distância, que evidenciam as mudanças em relação à produção, à discussão e ao fazer Matemática via Internet. Bairral (2002), por exemplo, analisou as influências do processo teleinterativo para o desenvolvimento do conteúdo do conhecimento profissional em geometria, a partir de uma experiência com professores de matemática. Já Morgado (2003) investigou um curso a distância, via Internet, oferecido a professores de matemática, cuja ênfase era o uso de planilhas eletrônicas de cálculo, o MS/Excel, nas aulas de matemática. A autora analisou as questões pedagógicas, computacionais e matemáticas que surgiram durante o curso.

Nos cursos de extensão universitária a distância sobre "Tendências em Educação Matemática" oferecidos pela UNESP, Rio Claro, nos últimos anos Borba (2005) tem observado que a natureza da discussão matemática que ocorre a distância, via *chat*, tem reorganizado a maneira de se produzir o conhecimento matemático. Neste caso, Borba (2005) acredita que o conhecimento foi produzido por um coletivo não só de humanos, mas de humanos com mídias, ou como diz Lévy (1993) um coletivo pensante. O coletivo seres-humanos-com-Internet gera um tipo de escrita matemática, quando realizada em chats, que é diferente daquela desenvolvida na sala de aula presencial, já que durante a interação gestos e olhares, próprios da comunicação, não são explicitados.

Ainda no sentido de investigar como a Matemática acontece em um ambiente *online*, mas agora observando a atuação de alunos de Ensino Médio e não professores, Lopes (2004) discute a viabilidade da implementação de processos avaliativos em ambientes virtuais, abordando como tema matemático as transformações geométricas. E da mesma forma, Bello (2004), investiga a possibilidade de construção de conhecimento em um ambiente virtual de ensino e aprendizagem, focando a colaboração entre os alunos.

Considerando os trabalhos mencionados é possível notar que atualmente, com a expansão da Internet, a noção de espaço vem sofrendo transformações, embora esta não seja uma discussão central desses trabalhos.

Levando em conta a pergunta diretriz desta pesquisa, também inserida na temática de Educação Matemática à distância: *"Como se dá a produção matemática em um ambiente virtual de aprendizagem, de um coletivo formado por humanos e não humanos?"*, um aspecto que me parece pertinente discutir, são as diferentes concepções de espaço.

Esta preocupação surgiu durante o processo de coleta de dados desta pesquisa, em um curso ministrado a distância, via Internet. Durante o desenvolvimento das atividades do curso, notei que um novo ambiente educacional havia sido criado, diferente do ambiente usual da sala de aula presencial, no qual as interações se davam de maneira muito particular.

Teorizar acerca do espaço não é o objetivo central desta pesquisa. Entretanto, pretendo, neste capítulo, apresentar algumas das diferentes concepções de espaço, com o objetivo de clarificar esta idéia, e com esse intuito caracterizo diversas das facetas nas quais o espaço pode ser entendido e as relaciono com os objetivos desta investigação.

3.1 Espaço: do cotidiano à Matemática

Ao pensar em espaço, diversas situações, objetos e, sobretudo, lugares, ambientes no sentido físico, emergem da imaginação das pessoas. Mas como definir espaço hoje? Ao analisar diferentes pontos de vista (filosóficos, geográficos, físicos,

matemáticos), percebi que não é trivial definir espaço. De acordo com a definição dos dicionários, o espaço é uma região delimitada, uma distância entre dois pontos, área, volume entre limites determinados, mas só isso não é suficiente para defini-lo. A palavra *espaço* pode assumir diversas conotações, como, por exemplo, espaço artístico, espaço cultural, bem como na Matemática se estuda espaços topológicos, espaços métricos, espaço vetorial, espaço da geometria euclidiana, entre outros.

No sentido matemático que esta palavra apresenta, de modo geral, cada um destes conteúdos citados pode ser entendido como um conjunto não vazio que possui uma definição e obedece algumas propriedades. Por exemplo, espaço vetorial é definido como um conjunto não vazio V sobre um corpo F se V é um grupo abeliano com relação a uma operação que indicamos por $+$, e se para todos $\alpha \in F$, $v \in V$ está definido um elemento, indicado por αv , em V , tal que satisfaz algumas propriedades (para detalhes veja HERNSTEIN, 1970).

A concepção de espaço, do ponto de vista da Matemática, foi se transformando de acordo com a necessidade de efetuar medidas, entender as formas que estavam na natureza, lidar com quantidades, construir objetos. E isso, fez com que os povos antigos tivessem que buscar meios de entender o espaço que estava ao seu redor. Alguns nomes podem ser destacados como Pitágoras, Tales, Eudócio, entre muitos outros, os quais estudavam propriedades que explicavam certos padrões e regularidades observadas no espaço. Esses podem ser considerados os primeiros passos da geometria. Foi então, que após muitos estudos o matemático Euclides sistematizou essas idéias e criou o que veio a ser denominado como geometria euclidiana, baseada em axiomas e deduções, a qual passou a obter um *status* importante no âmbito da Matemática.

Sendo assim, o espaço na geometria euclidiana é aquele que obedece a geometria desenvolvida por Euclides, entre 330 e 320 a.C., a partir de um sistema axiomático que deu origem a sua mais famosa obra "Os Elementos". Nesta obra, composta de treze livros, sendo que os seis primeiros são sobre geometria plana e os últimos três sobre geometria espacial, Euclides parte de certas "verdades"

incontestáveis, para a construção de sua geometria, chamadas de "noções primitivas" e mais um conjunto de cinco postulados:

- I. Pode-se traçar uma reta por quaisquer dois pontos;
- II. Pode-se continuar uma reta infinitamente;
- III. Pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio;
- IV. Todos os ângulos retos são iguais;
- V. Se uma reta corta duas outras e a soma de dois ângulos colaterais internos é menor que dois ângulos retos, as duas retas continuadas infinitamente encontram-se no lado no qual a soma é menor que dois retos.

Tais postulados juntamente com os axiomas (assumidos como verdades), tomados como noções primitivas, constituem-se no que se denomina, hoje, geometria euclidiana (CASTRUCCI, 1978). A estrutura axiomática da geometria euclidiana apresenta as demonstrações dos teoremas mediante raciocínios dedutivos. O trabalho de Euclides é reconhecido, pelo fato de ter ordenado, sistematizado e ampliado algumas idéias desenvolvidas por seus antecessores e, por isso, serviu de inspiração para vários outros estudos.

É importante mencionar como o espaço pensado por Euclides foi constituído, uma vez que ele é muito importante em relação a esta pesquisa, cujo foco central é o processo investigativo acerca de atividades de geometria euclidiana espacial. Diante disso, no caso desta pesquisa, é igualmente importante observar como que pessoas em diferentes espaços geográficos, desenvolvem atividades sobre geometria euclidiana espacial, utilizando um *software* geométrico, no espaço imaterial da Internet, o qual possui características próprias e que passo a abordar a seguir.

3.2 Ciberespaço: o espaço além da tela

Com o advento da Internet a sociedade tornou-se mais global, e por esta razão o mesmo ocorreu com o espaço. Ou seja, com a Internet é possível conceber um espaço imaterial (WERTHEIM, 2001), ou como Bachelard (1993) menciona, um espaço

que não é *concreto*. Esse último autor diz que as pessoas não mudam de lugar, mas sim de natureza. Não existe um ponto de referência e, simultaneamente, as pessoas se deslocam não em corpo, para os mais diversos lugares, transcendendo as leis da física.

Num sentido muito profundo, esse novo espaço digital está "além" do espaço que a física descreve, pois o ciberdomínio não é feito de partículas físicas, mas de *bits* e *bytes*. Esses pacotes de dados são o fundamento ontológico do ciberespaço, as sementes das quais o fenômeno global "emerge". A afirmação de que o ciberespaço não é feito de partículas e forças físicas pode ser óbvia, mas é também revolucionária (WERTHEIM, 2003, p.167).

Esta nova faceta do espaço, ainda em movimento, dá origem ao que se denomina *ciberespaço*. Para Lévy (1999) ele é um novo meio de comunicação que surgiu com a interconexão mundial de computadores e, segundo este autor, não se trata apenas de um suporte ou apoio material da comunicação, mas se constitui a partir de uma imensidão de informações, no qual os seres humanos "navegam" e se nutrem desse universo digital. O ciberespaço passou a fazer parte da vida diária de muitas pessoas de maneira a reorganizá-la e, ainda, reorganizar a sociedade de maneira geral. Santos (2004) diz que o espaço atual é global. O espaço se modifica para atender às necessidades ou transformações sociais. Apesar deste autor não estar se referindo a aspectos do ciberespaço, em particular, é possível fazer uma analogia com tal contexto, uma vez que o crescente uso da Internet vem acarretando mudanças sociais. Por exemplo, não há mais a necessidade de se deslocar até o banco para realizar diversas transações como: pagar contas, efetuar depósitos, transferências, solicitar saldo e extrato da conta etc. O banco está no mesmo lugar, mas se desloca, também, para a tela do computador que, em poucos minutos, estará confirmando que a operação foi realizada com sucesso. Esta forma peculiar de se comunicar é fruto da necessidade e, sobretudo das possibilidades dispostas à sociedade em um determinado momento histórico, o que resulta em uma seletividade histórica e geográfica (SANTOS, 2004).

O tempo de uma viagem, agora pode durar apenas um "clique", independente da distância que separa as pessoas, visto que se trata de uma outra geografia, na qual não importa se o clicar é para outro lado do mundo ou para a casa do amigo que mora na esquina. Kerchove (1997, p. 237), ao usar a metáfora "nômades telemáticos", ilustra como as pessoas têm, hoje, a facilidade de lidar com esta coincidência histórica entre

espaço e tempo e a oportunidade de estar em todos os lugares sem sair do lugar. As distâncias foram encurtadas, uma vez que o ciberespaço aproxima pessoas que estão geograficamente distantes. De acordo com Castells (2003, p.170), a Internet tem uma geografia própria e acrescenta, ainda, que ela

redefine distâncias, mas não cancela a geografia. Novas configurações territoriais emergem de processos simultâneos de concentração, descentralização e conexão espaciais, incessantemente elaborados pela geometria variável dos fluxos de informação.

Ao longo da história é possível notar que a estrutura social e a maneira como as pessoas se comunicam variam de acordo com as tecnologias e meios de difusão disponíveis em um dado momento. O tempo em relação à emissão de uma mensagem e o efetivo processo de recepção dependem da distância entre emissor e receptor. Por outro lado, a cibercomunicação ocorre independente da distância, pois a mensagem emitida pode ser recebida no tempo disponível de cada receptor ou em tempo real. Atualmente, o que se desloca é a informação e não necessariamente as pessoas (VIRILIO, 1996). Não faz mais sentido falar em "ponto de referência", pois no ciberespaço existem muitos caminhos, os quais levam a outros caminhos, e outros, e outros...

A WWW¹³ foi criada, com o objetivo de "implementar um espaço global de dados compartilhável, a que os pesquisadores do mundo inteiro pudessem ter acesso" (WERTHEIM, 2001, p.169). Contudo, ela tornou-se muito mais do que um espaço de pesquisa formal, e sim um ambiente cultural, social, educacional e de entretenimento. O que se nota é que ela assumiu um papel importantíssimo e é característica marcante da vida pós-moderna.

A partir da idéia de Lévy (2003), de que o espaço compreende ao mesmo tempo as mensagens, as representações que elas evocam, as pessoas que as trocam e a situação como um todo, tal como é produzida e reproduzida pelos atos dos participantes, Gracias (2003) considera o *chat*, em se tratando de comunicação no ciberespaço, um ambiente plástico, dotado de certa autonomia de ação e reação, como espaço de significações, onde há uma construção em comum a partir de diálogos,

¹³ World Wide Web.

debates e demais interações entre as pessoas. Nesse sentido, Lévy (2003) acredita que o crescimento do ciberespaço corresponde a um desejo de comunicação recíproca e de inteligência coletiva. Na inteligência coletiva, Lévy (2003) destaca a relação entre as pessoas, a socialização, contudo, o ser humano por si só é coletivo. Ou seja, assim como as tecnologias estão nos sujeitos, os sujeitos também estão nas tecnologias. Há uma moldagem recíproca que faz com que na inteligência coletiva, com relação ao aspecto cognitivo humano, exista uma forte influência de atores não humanos (BORBA e VILLARREAL, 2005).

É extremamente radical pensar um espaço que não seja físico. Neste aspecto, "ninguém (nem nada vivo) escapa inalterado desse novo mundo em que até o corpo torna-se opcional, pois algumas pessoas são mentes que existem apenas no Ciberespaço" (FRANCO, 1997, p. 74).

Wertheim (2001) resgatou a história das concepções ocidentais acerca do espaço a partir da Idade Média até a atual era digital. Ao que parece estamos a ponto de criar um dualismo entre espaço físico e o espaço telemático da Internet, o ciberespaço. Voltaremos a conceber um espaço físico para o corpo e um espaço "imaterial" como no período medieval? Em termos científicos, isso parece um retrocesso?

Vejo que não só espaços significativamente pequenos causam fobia, já que essa imensidão espacial, que é o ciberespaço, também sufoca, quase que causando uma agorafobia telemática, uma vez que ele vem crescendo intensamente e, diante disso, "quando estou on-line, a questão de 'onde' estou não pode ser plenamente respondida em termos físicos" (WERTHEIM, 2001, p. 30). Por outro lado, há autores, como Virilio (1996), que divergem e afirmam que

não fazemos nada mais do que pensar as dimensões que o olho é incapaz de ver, que o espaço e o tempo são para nós nada mais do que intenções, as ferramentas de percepção e de comunicação poderão realizar esse *paradoxo das aparências* que consiste em comprimir a dimensão do universo em um *efeito de encolhimento* (VIRILIO, 1996, p. 43, grifo do autor).

Ainda não há consenso sobre as diversas concepções que existem. A verdade é que o ciberespaço é utilizado cada vez mais, muitas vezes quase que não é possível

viver fora dele, pelo fato de que as atividades diárias de grande parte das pessoas estariam comprometidas se isso acontecesse, e mesmo com toda essa importância que ele vem atingindo, elas mal conseguem entender sua dimensão.

3.3 O Ciberespaço como um Espaço de Ensinar e Aprender

Além de considerar as dimensões sociais e culturais do ciberespaço, outro aspecto que deve ser mencionado é o educacional. Torna-se importante refletir acerca do potencial do ciberespaço, enquanto espaço pedagógico, ou com base em Lévy (2003, p.127) um "espaço do saber". Para este autor,

como criação antropológica em curso, ele [o espaço do saber] é um plano vivo, qualitativamente diferenciado, desenvolvido pelas metáforas e navegações dos intelectuais coletivos que o percorrem. Não deve ser confundido com uma espécie de recipiente abstrato de todos os saberes possíveis: ele produz, pelo contrário, uma forma bem específica de saber, e reorganiza, hierarquiza, insere no meio ativo que é o seu os modos de conhecimento resultantes dos outros espaços antropológicos.

A expressão **espaço do saber** não é aqui entendida apenas no aspecto da cognição, do conhecimento. Lévy (2003, p. 127) acredita que “o estrato cognitivo está, evidentemente, presente em toda a atividade humana”. Ou seja, o ser humano pensa desde sua origem e seu pensamento é coletivo, uma vez que nasce da relação homem-coisas, constituindo, assim, um coletivo pensante.

Com o crescimento da comunicação baseada na Internet, e em particular da EaD, uma reorganização torna-se relevante. Quando o processo educativo ocorre de maneira híbrida, ou seja, divide-se em presencial e a distância, as dúvidas de qualquer natureza que surgem durante a interação, podem ser esclarecidas nos momentos presenciais. Por outro lado, se a interação se dá por meio da Internet e à distância, acredito que é necessário repensar as práticas educacionais e a produção de conhecimento. Neste aspecto, a revolução digital transformou o espaço educacional. Trata-se de um outro espaço, mesmo que ainda indefinido, com características próprias.

Comparando a educação presencial e à distância, Kenski (2003, p. 32) lembra que

nas épocas anteriores, a educação era oferecida em lugares física e “espiritualmente” estáveis: nas escolas e nas mentes dos professores. O ambiente educacional era situado no tempo e no espaço. O aluno precisava deslocar-se regularmente até os lugares do saber [...] para aprender. Na era digital, é o saber que viaja veloz nas estradas virtuais da informação.

Considero de extrema importância discutir as questões culturais, geográficas, os desafios, e, sobretudo, as possibilidades de produção matemática no ambiente *online*. Essa nova modalidade de ensino possibilita que pessoas localizadas, fisicamente, em diversos lugares possam trocar idéias, experiências e elaborar projetos conjuntos, os quais sem essa flexibilidade da EaD não seriam possíveis. Nesse sentido, é possível dizer que uma inteligência coletiva pode se constituir.

Um curso, como o que será descrito nesta pesquisa, por exemplo, no qual não há encontros presenciais, apresenta suas particularidades. No que diz respeito à produção matemática, diversos são os cuidados que devem ser tomados devido ao espaço no qual essa interação acontece.

Em relação às possibilidades advindas com a inserção das tecnologias digitais no âmbito educacional, devido à plasticidade e a flexibilidade é possível que haja uma interatividade diferenciada no processo de comunicação e de produção do conhecimento. Neste aspecto, Lévy (1999, p. 32, grifo meu) acredita que o ciberespaço é “um novo espaço de comunicação, de sociabilidade, de organização e de transação, mas também novo mercado da informação e do *conhecimento*”.

O tempo, que está intimamente ligado às questões do espaço, também sofre uma resignificação. A discussão que ocorre não é linear, pois de maneira geral “a EAD vem trazer as possibilidades de respeito aos ritmos de cada um” (RAMAL, 2003, p.45).

O ciberespaço tem transformado a forma como o conhecimento é produzido e vem provocando rupturas. A comunicação, o relacionamento pessoal, o desenvolvimento de tarefas, os diálogos simultâneos, o dualismo corpo-mente provenientes da interação via Internet, podem reorganizar o pensamento e a produção de conhecimentos a partir de um coletivo inteligente seres-humanos-com-Internet (BORBA, 2004b).

3.4 A Produção Matemática no Ciberespaço

O contexto desta pesquisa é diferenciado (à distância, via Internet) daquele no qual usualmente ocorre a produção matemática e, neste caso, investigo como se dá essa produção e as suas possibilidades. O *chat*, disponível na plataforma TelEduc, é basicamente textual e não permite que a simbologia, característica da linguagem matemática, seja explicitada. Cabe destacar que, embora com algumas limitações, não se deixa de discutir sobre Matemática, mas torna-se evidente que todo o processo passa por uma transformação, criam-se estratégias de comunicação e a produção matemática pode se moldar ao contexto em que ela ocorre. Por exemplo, a visualização das construções geométricas não é imediata, mas é possível de ser analisada por meio dos portfólios individuais que funcionam como uma "estante" onde são disponibilizadas as construções e outros materiais.

Borba e Villarreal (2005) acreditam que, além da noção de diálogo e tempo, na Internet a noção de espaço é transformada quando um coletivo de humanos e não humanos trabalham e pensam juntos.

É, então, com a concepção de que a produção matemática é fortemente condicionada pelas mídias e suas várias interfaces que empreendo esta pesquisa, cujo foco está na produção matemática de alunos-professores em um ambiente *online*, a partir de atividades de geometria espacial realizadas com um determinado *software*.

Este foco faz com que dois espaços estejam claramente em evidência: o chamado ciberespaço e o espaço da geometria euclidiana. Como lidar com espaços tão distintos e ao mesmo tempo relacionados? Daí a necessidade de, neste capítulo, ter considerado diferentes concepções de espaço, já que lido com alguns aspectos geométricos no espaço tridimensional euclidiano, considerando-o no contexto da EaD, e ter explicitado a noção de ciberespaço. Além disso, relacionei as idéias de Lévy (1993, 1999, 2003) no que se refere ao pensamento coletivo e à inteligência coletiva, as quais corroboram as mudanças ocasionadas pelo ciberespaço. Como será apontado na análise dos dados, este espaço possui características próprias que modifica a forma como as atividades são propostas e desenvolvidas pelos participantes, ou seja, influencia sua produção matemática.

CAPÍTULO 4

ARTICULANDO VISÃO DE CONHECIMENTO COM PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, relato a concepção sobre metodologia de pesquisa qualitativa que acredito. Apresento, ainda, o contexto no qual foi desenvolvida a coleta dos dados, caracterizando o cenário, os participantes, as Tecnologias da Informação e Comunicação utilizadas, alguns procedimentos metodológicos e os dados que serão analisados.

4.1 Metodologia de Pesquisa Qualitativa

Definir a metodologia de pesquisa a ser utilizada não é uma tarefa fácil, mesmo porque a pesquisa em Educação Matemática está em constante movimento (BICUDO e BORBA, 2004). Não existem receitas, nem fórmulas de como realizar uma pesquisa. Quando um pesquisador se engaja em um estudo, suas primeiras reflexões, as quais, dentre outras, se estendem ao longo do processo, devem estar voltadas aos objetivos que deseja alcançar antes mesmo de escolher uma metodologia de pesquisa adequada. Ou seja, “o que determina como trabalhar é o problema que se quer trabalhar: só se escolhe o caminho quando se sabe onde se quer chegar” (GOLDENBERG, 2003, p. 14).

Para Borba e Villarreal (2005) metodologia de pesquisa é entendida como uma interface entre os procedimentos metodológicos e a visão de conhecimento defendida pelo pesquisador. Deste modo, torna-se importante que ambos, procedimentos e visão de conhecimento, estejam em consonância para que não haja discordâncias e

contradições que possam, no futuro, causar problemas quanto à credibilidade da pesquisa.

Concordo com Araújo e Borba (2004, p. 41) que “o conhecimento não é descoberto e nem é transmitido: ele é uma produção gradativa de um coletivo pensante”. Esse coletivo não se refere apenas a um grupo de pessoas, ou seja, os artefatos culturais presentes também se tornam atores dessa produção intelectual, não por serem determinantes, mas sim por moldarem o processo. Gracias (2003) afirma que o conhecimento é transformado quando as tecnologias da inteligência (oralidade, escrita e informática) encontram-se presentes no seu processo de produção.

Sendo assim, cabe realçar que a questão que conduz esta investigação é: *Como se dá a produção matemática em um ambiente virtual de aprendizagem, de um coletivo formado por humanos e não humanos?* Esta interrogação está ligada a minha visão de produção matemática e a minha visão de produção de conhecimento. E, produzir matemática não significa reinventar a geometria euclidiana espacial ou criar um novo corpo de conhecimento matemático, mas que seja possível um envolvimento dos investigados em um trabalho de significação e (re)significação de conceitos matemáticos.

Além da visão de produção matemática, esta investigação tem como princípio epistemológico que o conhecimento é resultado de um coletivo que inclui atores não humanos, as mídias informáticas, por exemplo. Daí, a importância de optar por propor atividades investigativas que valorizam o pensar e que as discussões sejam em grupo e em um ambiente virtual, pois, de maneira mais ampla, “toda espécie de ser tem por essência seus modos de dar-se e, portanto, seu método de conhecimento” (ABBAGNANO, 2000, p. 182).

Para Ponte (2006, p. 120) o pesquisador que adota uma perspectiva interpretativa deve ter como idéia central “de que a actividade humana é fundamentalmente uma experiência social em que cada um vai constantemente elaborando significado [...]. A investigação procura reconstruir essa experiência, usando para isso métodos que nela se baseiam directamente ou que dela se aproximam” Ao realizar sua análise ele carrega consigo valores, crenças e pressuposições que

interferem diretamente em seu trabalho. Deste modo, imaginar a verdade como sendo única e acabada, livre de contestação, pode tornar irrelevante o papel do pesquisador. Diferentes olhares determinam diferentes verdades sobre um mesmo problema.

Neste sentido, concordo com Borba (2004a, p.2) ao argumentar que

o que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa, prioriza procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. O que é considerado "verdadeiro", dentro desta concepção, é sempre dinâmico e passível de ser mudado.

A abordagem qualitativa permite ao pesquisador observar a realidade estudada, ao mesmo tempo em que participa ativamente de todo o processo. Como afirmam Denzin e Lincoln (2000), a pesquisa qualitativa é uma atividade que localiza o observador no mundo, fazendo com que ele possa criar uma visão de mundo. Para esses autores, os pesquisadores qualitativos interpretam os fenômenos em termos dos significados que as pessoas dão para esses fenômenos.

Araújo e Borba (2004, p.40) evidenciam que "quando decidimos desenvolver uma pesquisa, partimos de uma inquietação inicial e, com algum planejamento, não muito rígido, desencadeamos um processo de busca".

Para nós, em uma pesquisa em Educação (Matemática), a metodologia que embasa seu desenvolvimento deve ser coerente com as visões de Educação e de conhecimento sustentadas pelo pesquisador, o que inclui suas concepções de Matemática e de Educação Matemática. Portanto, o que o pesquisador acredita ser a Matemática e a Educação Matemática e seu entendimento de conhecimento e de como ele é produzido (ou transmitido, ou descoberto) são fundamentos que influenciam diretamente os resultados da pesquisa (ARAÚJO e BORBA, 2004, p.43).

Por outro lado, a influência do humano, ou seja, do pesquisador, não significa que nada se possa conhecer. O subjetivo está sempre presente no conhecimento, desde a formulação da pergunta de pesquisa à visão de geometria. Mas, a subjetividade é balizada por procedimentos que evitam que impressões sejam pensadas como conhecimento. É, neste sentido, que, por exemplo, em pesquisa qualitativa é utilizada a triangulação (multiplicidade de procedimentos). Determinada conjectura é confrontada com os dados construídos, buscando-se coerência. Por essa razão, é que se busca a consonância entre a visão de conhecimento e os

procedimentos e é também por isso que existe a defesa aberta ao público de dissertações e teses, apresentações em seminários, congressos, etc.

A característica descritiva da pesquisa qualitativa, embora pessoal, dá chances ao leitor realizar generalizações ou não, e adaptar resultados de uma certa pesquisa para o seu contexto.

Diante disso, o conhecimento é impregnado de humanidade, assim como as mídias, e é balizado pelo momento histórico-cultural no qual é produzido, como por exemplo, no caso do Programa de Pós-Graduação no qual esta pesquisa de consolidou.

4.2 O Contexto

Nesta seção apresento de maneira geral o curso de “Tendências em Educação Matemática”, os seus participantes e faço uma breve descrição das principais Tecnologias da Informação e Comunicação utilizadas: o ambiente TelEduc e o *software* Wingeom.

4.2.1 O curso "Tendências em Educação Matemática"

O cenário desta pesquisa é o curso de extensão universitária à distância "Tendências em Educação Matemática" que vem sendo oferecido desde 2000 pelo IGCE - UNESP, campus de Rio Claro, a professores de diversos lugares do país e da América Latina. Na sexta edição do curso, em 2005, a carga horária foi de 33 horas, divididas em 11 encontros semanais síncronos (em tempo real), no qual objetivos centrais eram capacitar professores a discutir criticamente algumas das tendências em Educação Matemática como: Modelagem Matemática, Informática e Educação Matemática, Educação Matemática de Jovens e Adultos, História da Matemática, entre outras e habilitar os professores a entenderem, de forma inicial, o que é pesquisa em Educação Matemática e, ainda, discutir atividades de matemática. Nesta versão do curso foram abordados tópicos de geometria euclidiana espacial.

Já os objetivos desta pesquisa, neste curso, é analisar como se dá e, sobretudo, quais as possibilidades de produção matemática à distância, ou seja,

investigar como os participantes discutiram, no *chat*, as conjecturas formuladas durante as construções geométricas realizadas no Wingeom, a partir do desenvolvimento das atividades de geometria espacial propostas. Diante disso, dos 11 encontros do curso, três foram destinados às discussões matemáticas. Além dos encontros síncronos, previamente agendados, também havia interações assíncronas por meio de ferramentas como portfólios, fórum e correio eletrônico, disponíveis no ambiente comunicacional.

O professor Marcelo Borba liderou a maior parte das discussões e distribuiu tarefas entre os participantes. As aulas *online* aconteceram às terças-feiras, no período de 22 de março a 07 de junho de 2005, das 19h às 22h. Em cada aula dois participantes eram escolhidos para atuarem como debatedores, no intuito de fomentarem a discussão com questões relacionadas à bibliografia indicada. Próximo ao término da aula, da mesma forma, outro participante ficava responsável por elaborar um resumo da aula, que era enviado por *e-mail* para que eu o disponibilizasse no TelEduc para o acesso dos demais. Cabe destacar que os três resumos referentes às aulas de discussão matemática foram feitos por mim, como forma de realizar um primeiro sumário das atividades desenvolvidas durante o curso.

Acompanhei todos os encontros *online* e atuava no curso, de maneira geral, como monitora e pesquisadora, no entanto, participei mais ativamente das aulas sobre discussão matemática e nelas assumi a função de liderar as discussões e, além disso, respondi por diversas questões administrativas. O curso contava, também, com um técnico vinculado ao GPIMEM, por meio de bolsa do CNPq, Geraldo Lima, que respondia às questões relativas à operacionalidade informática do curso.

As leituras foram previamente estabelecidas e as atividades eram enviadas com uma semana de antecedência aos participantes, para que, com o auxílio do Wingeom, realizassem suas investigações que seriam discutidas no *chat*. Dúvidas quanto a utilização do Wingeom ou sobre as atividades eram discutidas em fóruns do TelEduc ou por *e-mail*. Atividades de familiarização com o Wingeom foram enviadas antes mesmo de iniciar o curso, visando a auxiliar os participantes na realização das atividades que seriam discutidas nas aulas.

Já na inscrição os participantes estavam cientes de que as informações obtidas no curso seriam analisadas por mim, como dados da pesquisa. Diante disso, alguns dos alunos-professores pareceram se dedicar mais à realização das tarefas com o intuito de colaborar com a coleta dos dados da pesquisa, os quais apresento no capítulo 5.

4.2.2 Os Participantes

No total 17 professores foram matriculados e como em todo curso (a distância ou não), por motivos diversos, houve desistências e assim, 12 professores concluíram o curso. As condições iniciais para participar do curso eram ter curso superior, preferencialmente em Matemática, e ter acesso à Internet.

Havia uma diversidade muito grande de participantes. No aspecto geográfico, vários estados do país estavam representados: 03 do Paraná, 01 de São Paulo, 05 da Bahia, 01 do Mato Grosso, 01 de Tocantins e, também, havia 01 participante de Córdoba (Argentina). Já no que se refere à experiência profissional, havia desde professores recém formados até doutores, por isso as razões em participar do curso também eram variadas, como, por exemplo, atualização intelectual e profissional, maior contato com o Programa de pós-graduação, e conhecer como é realizado um curso a distância. É importante lembrar que havia tanto participantes com grande experiência em geometria, quanto alguns que tinham pouco contato com o conteúdo e isso influenciou no desenvolvimento e discussões das atividades propostas. A seguir faço uma breve descrição dos professores que participaram do curso, sujeitos desta pesquisa:

Carlos – Baiano e residente em Salvador, licenciado em Matemática pela Universidade Federal da Bahia, UFBA, e Especialista em Educação Matemática pela Universidade Católica do Salvador, UCSAL, na área de Modelagem Matemática. No momento, era professor da Faculdade Jorge Amado e lecionava a disciplina de Modelagem Matemática no curso de Licenciatura em Matemática. Além disso, cursava o Mestrado em História, Filosofia e Ensino de Ciências na UFBA em conjunto com a Universidade Estadual de Feira de Santana na área de Modelagem.

Claudia – Baiana, também residente em Salvador, cursou Licenciatura em Matemática na Universidade Federal da Bahia, UFBA. Especialista em Educação Matemática pela Universidade Católica do Salvador, UCSAL, e sua área de interesse é Psicologia da Educação Matemática. Na ocasião do curso, trabalhava com formação continuada de professores do primeiro e segundo ciclos

Clessi – Residente em Pato Branco, PR, fez magistério e especialização de pré-escola, na qual trabalhou por alguns anos. Cursou Ciências-Habilitação em Matemática e, desde então, começou a trabalhar com o Ensino Fundamental e Médio.

Elielma - Mora em Corumbá, MS, fronteira com a Bolívia. Graduada em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso, UFMS, em 1993, e especialista em Informática na Educação em 1998 na mesma universidade. Na ocasião trabalhava no Núcleo de Tecnologia Educacional do município. Em 2002 concluiu o mestrado em Educação pela UFMS.

Keila - Paranaense da cidade de Astorga. Cursou Licenciatura em Matemática na Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Mandaguari, FAFIMAN, e fez especialização em Geometria pela mesma faculdade. Leciona disciplinas de Desenho Geométrico para o Ensino Fundamental e Matemática para Ensino Fundamental e Médio.

Márcia - Goiana, mas estava naquele momento morando em Palmas, TO. Fez Bacharelado e Mestrado em Física, ambos pela Universidade Federal de Goiás. Sua intenção era fazer um doutorado na área de Educação e, se possível, abordando a Educação Matemática.

Maria - Professora de matemática em Córdoba, na Argentina. Trabalhava, no momento com alunos de 12 e 13 anos e, paralelamente, cursava, à distância, mestrado em Educação Matemática, na Universidade de Exeter, Inglaterra.

Marie - Paulista, mas passou a maior parte de sua vida no Paraná. Cursou licenciatura em Matemática e também Engenharia Civil, apesar de nunca ter atuado como engenheira. Fez especialização e mestrado em Estatística e doutorado em Tecnologia de Ensino. Trabalhou durante 23 anos na Universidade Estadual de Londrina, UEL, na qual se aposentou. Foi professora de Geometria, Desenho geométrico, Desenho

Técnico, Arquitetônico, dentre outras dessa área em cursos de graduação. Em cursos de especialização, de mestrado e de formação de professores, basicamente, trabalhou com Geometria e com o uso de Novas Tecnologias aplicadas ao ensino de Geometria.

Marluce - Licenciada em Matemática pela Universidade do Estado da Bahia, UNEB, e Bacharel em Ciências Contábeis, Faculdade Visconde de Cairu. Trabalhava, na ocasião, no SAC e ministrava aulas na Fundação Bradesco em curso de capacitação para menor aprendiz. Além disso, desenvolvia pesquisa de mestrado na qual investigava como a Matemática pode auxiliar na formação de cidadãos, por meio da Modelagem Matemática.

Ricardo – Coursou licenciatura em Matemática na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Guaxupé, FAFIG, em Guaxupé, MG, mas mudou-se para Lins, SP, no início de 2004, após ter sido aprovado em concurso público. Sua área de interesse é formação de professores de matemática.

Taís - Paranaense, natural de Foz do Iguaçu. Coursou Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual do Oeste do Paraná, UNIOESTE, em 2004. À época, tinha interesse nas áreas de Informática Educacional e a Formação de Professores.

Victória – Baiana e residente em Salvador. Coursou Licenciatura em Matemática na Universidade Católica do Salvador, UCSAL e é professora de Matemática na rede pública estadual. Já trabalhou com educação de jovens e adultos.

Esta breve descrição dos alunos-professores foi feita com base nos questionários respondidos por eles e na apresentação informal que eles fizeram na ferramenta perfil do ambiente TelEduc. Foi possível observar que, mesmo em um curso à distância, as pessoas podem parecer muito próximas. Criou-se um clima amigável durante o curso e o desejo de continuar mantendo contato para trocas de experiências.

4.2.3 O Ambiente Comunicacional

Para a realização do curso foi utilizado o ambiente gratuito TelEduc, criado pelo NIED da UNICAMP¹⁴. Ele foi desenvolvido com o objetivo de disponibilizar um "espaço" para a participação e administração de cursos via Internet, visando a contribuir com a

¹⁴ Núcleo de Informática Aplicada à Educação, Universidade de Campinas, <http://www.nied.unicamp.br>

formação de professores para informática educativa. O TelEduc vem sendo muito utilizado em pesquisas sobre educação a distância (GRACIAS, 2003; BELLO, 2004; LOPES, 2004, MISKULIN *et al*, 2005), como um ambiente alternativo ao da aula presencial em algumas disciplinas, em cursos a distância para formação continuada de professores, em projetos que visam a criar um ambiente colaborativo para professores discutirem questões relacionadas à sua prática escolar e trocar experiências (PENTEADO, 2004).

Este ambiente possui atualmente mais de vinte ferramentas disponíveis, mas durante o curso foram utilizadas de maneira mais intensa, devido aos objetivos e proposta do curso, as seguintes ferramentas:

- **Dinâmica do Curso:** apresentava informações sobre a organização do curso;
- **Agenda:** onde eram disponibilizadas as datas das aulas com o tema e bibliografia de cada uma;
- **Atividades:** trazia as atividades de geometria euclidiana espacial que deviam ser desenvolvidas durante o curso;
- **Material de Apoio:** foi usada para anexar os resumos das aulas feitos pelos participantes e por mim, no caso das aulas de discussão matemática;
- **Leituras:** listava toda a bibliografia indicada para as aulas;
- **Fórum de Discussão:** utilizada durante as interações assíncronas em que se discutia questões em aberto, atividades de geometria espacial que não eram discutidas em aula, por falta de tempo, e dúvidas sobre a utilização do Wingeom;
- **Bate-Papo (*chat*):** utilizada nas discussões síncronas (aulas *online*), semanalmente;
- **Correio:** permitia o envio de mensagens, mas foi pouco utilizado pois o correio eletrônico usual (*e-mail*) era mais comum;
- **Perfil:** era um espaço para os participantes se apresentarem de maneira informal e permitia anexar foto e
- **Portfólio:** foi muito utilizado para o envio das construções geométricas realizadas no Wingeom e outros materiais que os participantes desejassem compartilhar, como textos, por exemplo.

O TelEduc é um ambiente que está em desenvolvimento, suas ferramentas são atualizadas com frequência e outras são incorporadas à medida que isso se mostra necessário. Contudo, no que se refere às discussões matemáticas as limitações são mais evidentes, conforme discuto mais adiante no capítulo de resultados, devido à simbologia presente na linguagem matemática (letras gregas, símbolos e operadores, por exemplo) e a impossibilidade de compartilhamento, simultâneo, de gráficos e construções geométricas durante um discurso no *chat*. Assim, questões como estas têm levado educadores matemáticos a repensarem as especificidades da Educação Matemática à distância (BORBA *et al.*, 2005).

4.2.4 O Wingeom

Para as aulas de discussão matemática, nas quais a geometria espacial foi tema central, foi sugerido a utilização do *software* gratuito Wingeom, traduzido para o português e também em várias outras línguas, que permite construções geométricas em duas ou três dimensões e que por meio de animação, possibilita verificar diversas propriedades geométricas. Ele foi desenvolvido pelo Professor Richard Parris, da Philips Exeter Academy e está em constante desenvolvimento. Por isso, foi notada certa instabilidade, provavelmente, devido às diversas alterações que são feitas frequentemente de acordo com a necessidade dos usuários. Para lidar com problemas de natureza técnica durante a realização das atividades, foi disponibilizada uma versão na *home-page* do GPIMEM, para que todos os participantes do curso tivessem acesso à mesma versão.

Este *software* possibilita construções geométricas em duas e três dimensões. Entretanto, nesta pesquisa foi utilizado apenas o ambiente para o desenvolvimento de atividades sobre geometria euclidiana espacial. Ele possui treze menus principais, os quais são divididos em submenus (e seus respectivos “atalhos”) que indicam ações que podem ser realizadas na tela do Wingeom. A seguir, descrevo de maneira resumida, o que cada menu, do ambiente 3D deste *software*, possibilita:

- **Arquivo:** possibilita, em geral, criar e abrir novos arquivos, salvar, imprimir e copiar;

- **Ponto:** utilizando seus submenus é possível determinar coordenadas absoluta, relativas, marcar intersecção entre reta e plano e intersecção entre reta e superfície curva e também colar;
- **Linear:** cria segmento ou plano, mostra altitudes (às retas e aos planos) e constrói plano de corte;
- **Curvo:** insere esfera, cone, tronco, cilindro, disco e marca intersecções;
- **Unidades:** insere poliedros regulares, semi-regulares e outros. Também possibilita inserir superfícies (esfera, cone, cilindro, etc.).
- **Transf:** realiza transformações geométricas (translação, rotação, translação perpendicular, etc.)
- **Editar:** refaz e desfaz ações, edita elementos lineares, curvos, coordenadas, apaga pontos, textos e faces, faz cabeçalho, formata o número de casas decimais, edita funções e torna aleatório;
- **Medidas:** possibilita efetuar medidas como área, volume, medida de segmento, entre outros e permite inserir fórmulas matemáticas para realizar cálculos;
- **Botões:** possibilita formatar os botões direito e esquerdo do *mouse* de acordo com algumas opções do usuário;
- **Ver:** permite ao usuário escolher se deseja mostrar, tracejar ou esconder as retas (ou segmentos) escondidas dos sólidos, altera o *zoom*, rotaciona, restaura, formata as legendas, mostra os eixos e muda a aparência do objeto (espessura, cor, etc.)
- **Anim:** possibilita movimentar as construções geométricas a partir de parâmetros pré-estabelecidos na construção;
- **Outros:** no seu submenu “listas” apresenta a quantidade de pontos, faces, superfícies e um histórico da construção. Além disso, possibilita adicionar cores, determina o volume e utiliza a relação de Euler;
- **Ajuda:** apesar de cada menu ter seu próprio arquivo de ajuda, neste menu, em particular, encontram-se observações gerais de ajuda ao usuário.

As figuras a seguir, ilustram a interface do Wingeom para construções tridimensionais.

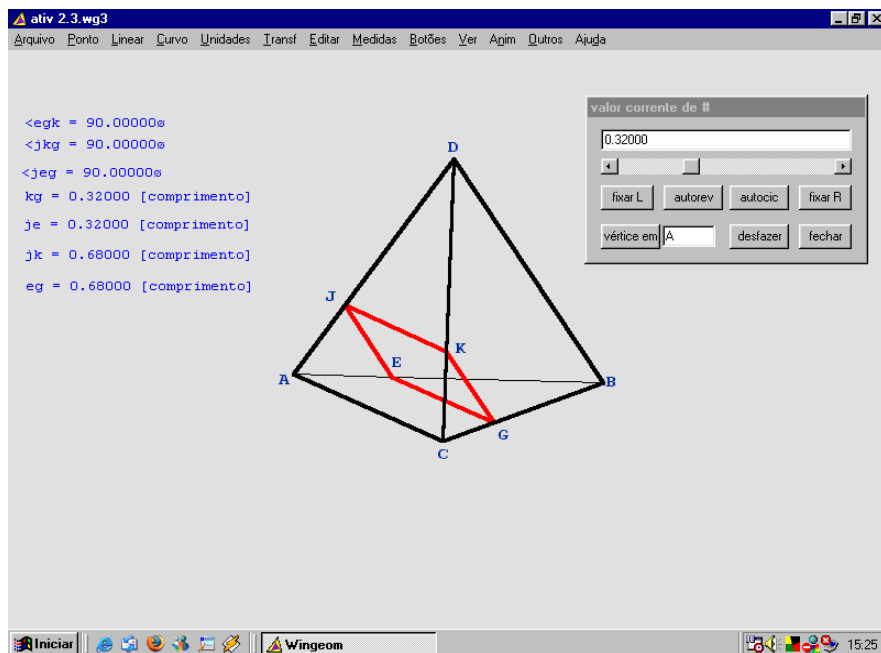


Figura 4. 1 - A interface do Wingeom e a construção de uma secção a partir de um ponto E qualquer na aresta AB de um tetraedro regular.

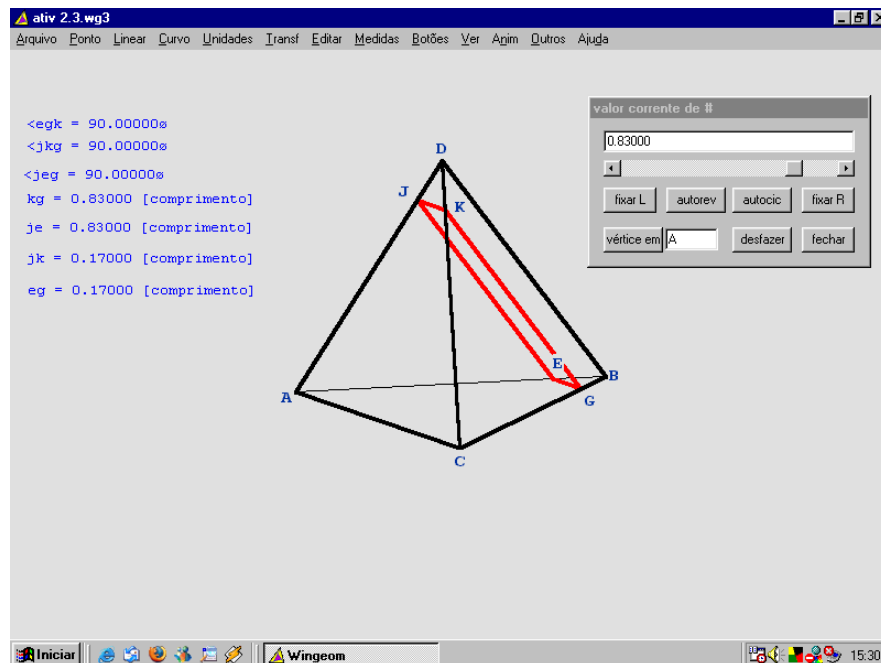


Figura 4. 2 - Usando o menu *Anim* e *Variação de #...* o qual indica que a secção será deformada conforme variar a coordenada do ponto E.

Apesar de algumas limitações apresentadas pelo Wingeom, seu papel durante as aulas de Matemática foi relevante já que com o auxílio deste recurso foi possível proporcionar situações de investigação, descobertas, validação e refutação de conjecturas.

4.3 Os Procedimentos Metodológicos

Nesta seção trago os passos dados para o desenvolvimento do curso. Relato o processo de elaboração das atividades até a sua versão definitiva, apresento comentários sobre a minha participação durante o curso, os dados obtidos e finalizo apresentando alguns comentários sobre a análise.

4.3.1 A Elaboração das Atividades

Preocupe-me em propor atividades que valorizassem a investigação e que possibilitassem aos alunos-professores criar conjecturas e realizar descobertas. Elas tinham um grau de dificuldade o qual considero de nível escolar médio e superior, nas quais eu esperava um tratamento dedutivo às resoluções.

Nesta perspectiva, inicialmente, a minha dúvida era no que se refere à estrutura da atividade: como propor uma atividade desafiadora aos alunos-professores e o que perguntar? Observei que as atividades deveriam ganhar uma nova "cara". O Wingeom era novidade para todos os participantes e, também, não haveria encontros presenciais. Ou seja, devido ao fato de estarmos em espaços geográficos distintos não era possível esclarecer dúvidas de caráter técnico - como usar os menus, por exemplo - enquanto realizavam as atividades.

Umas das atividades discutidas no curso, retirada do livro: "Introdução à Geometria Espacial", ilustra a maneira como reelaborei as atividades quando comparada com a que Carvalho (1999) apresenta:

Por um ponto qualquer da aresta AB de um tetraedro qualquer ABCD é traçado um plano paralelo às arestas AC e BD. Mostre que a secção determinada por este plano no tetraedro é um paralelogramo (CARVALHO, 1999, p. 34).

Observei que muitas conjecturas poderiam ser investigadas a partir de uma situação como esta. Porém, no modo como ela aparece, neste primeiro momento, o objetivo é “mostrar” algo que já está explícito: **o plano no tetraedro é um paralelogramo**. Neste caso a investigação consiste em mostrar esta afirmação e meu interesse era de que o próprio participante realizasse essa descoberta ou criasse outras conjecturas. Eu acreditava que a atividade deveria ser aberta, dar margem a um processo investigativo “flexível” do tipo: **o que você pode afirmar sobre...**

Além disso, preocupei-me em como os participantes realizariam a construção desta atividade no Wingeom, com tão pouco tempo de familiarização com o *software*, apesar de eu ter enviado algumas atividades introdutórias para um primeiro contato e reconhecimento dos menus. Caso houvesse dúvidas de como construir, eu não estaria “presente” para orientá-los e, assim, poderia estar comprometido o processo de investigação matemática.

Deste modo, busquei elaborar atividades que caracterizo não como abertas, mas semi-abertas, devido ao fato de apresentarem os passos para a construção, mas que possibilitassem a investigação e elaboração de conjecturas. Assim, o principal aspecto a ser considerado era a investigação e não a construção, apenas.

Após um longo período de estudo do *software* pude perceber que era necessário traçar um caminho que auxiliasse aos participantes na tarefa de construir. Desta forma, a mesma atividade foi reelaborada da seguinte maneira:

1. **Construa um tetraedro regular ABCD;**
2. **Marque na aresta AB um ponto E qualquer;**
3. **Construa um plano paralelo às arestas AC e BD passando pelo ponto E;**
4. **O que você pode afirmar quanto à secção determinada por este plano?**

Notei que a mudança não havia sido suficiente para garantir a construção no Wingeom. Já era possível imaginá-la, mas ainda levariam tempo para descobrir quais os menus do *software* utilizar. Para a execução do item 3, por exemplo, do modelo de atividade apresentada acima, os participantes poderiam não saber como construir este plano paralelo às arestas indicadas, já que o Wingeom permite a construção de planos de corte de diversas maneiras. Diante disso, a pouca familiarização dos alunos-

professores com o *software* e as dúvidas de construção com o mesmo poderiam causar certo desânimo e desmotivá-los a realizar todas as atividades.

As atividades foram elaboradas e, na seqüência, discutidas com os membros do GPIMEM para que pudessem ser “testadas” e aprimoradas. Esse processo de discussão coletiva, dinâmica comum no GPIMEM, tem como intenção propiciar atividades investigativas e, nesse sentido, o grupo se engaja na tentativa de diminuir problemas relacionados à compreensão dos enunciados. Desse modo, os comentários, críticas, sugestões e reflexões quanto a meu objetivo ao propor as atividades, fizeram com que a atividade anterior, bem como as outras, chegasse à seguinte estrutura:

- 1. Insira um tetraedro regular de aresta 1;**
- 2. Usando o menu *Anim/Variação de #* digite, na janela que se abre, 0 e em seguida clique fixar L. Do mesmo modo, digite 1 e clique fixar R;**
- 3. Marque na aresta AB um ponto E de coordenada relativa #;**
- 4. Construa um plano paralelo às arestas AC e BD através do ponto E usando *Linear/Cortar plano* ;**
- 5. Anime a sua construção e observe o que acontece;**
- 6. O que você pode afirmar quanto à secção determinada por este plano? Justifique sua resposta.**

A opção por utilizar o Wingeom e, principalmente, por ser em um curso a distância fez com que eu refletisse sobre como propor uma atividade considerando o contexto: os recursos disponíveis, os sujeitos envolvidos, bem como as suas limitações, para que desta forma, elas fossem adquirindo um *design* diferenciado, no caso, daquele proposto em livros texto ou fichas de trabalho.

4.3.2 A Observação-Participante no Curso

Comecei a me comunicar com os participantes bem antes do início do curso, ainda na sua divulgação, que também ocorreu basicamente de maneira eletrônica. Dúvidas e informações mais detalhadas acerca do curso eram encaminhadas para o endereço eletrônico do GPIMEM e respondidas por mim. Essa “aproximação” entre participantes e pesquisadora ajudou, de certa forma, a criar um clima amigável e de

confiança. Por essa razão acredito que o processo de observação já acontecia muito antes do início do curso propriamente dito.

Angrosino e Pérez (2000) estabelecem três tipos de observação:

- **Descritiva:** na qual o pesquisador descreve todos os detalhes observados no ambiente. Ele assume uma posição "ingênua", de modo a não estabelecer nenhuma hipótese acerca do que espera encontrar;
- **Focada:** neste caso, certas coisas definidas como irrelevantes podem ser ignoradas. Este tipo de observação é muito utilizada em entrevistas, nas quais o pesquisador pode direcionar suas perguntas para aquilo que exatamente procura saber;
- **Seletiva:** o observador considera diferentes tipos de atividades realizadas pelo(s) observado(s) para que possa chegar a uma conclusão mais confiável. Pode-se dizer que se busca formas variadas de coletar informações.

Acredito que esta última caracteriza a estratégia que utilizei com mais frequência durante o processo de observação, pelo fato de que obtive informações em diferentes momentos, ou seja, em fontes de dados variadas.

Eu era responsável por diversas questões administrativas a começar pela divulgação, fornecer informações, efetivar as matrículas, cadastrar os participantes no TelEduc, enviar a bibliografia solicitada via correio, entre outras. Além disso, eu também participei de todas as aulas do curso desempenhando diferentes papéis, muitos deles referentes à questões administrativas e/ou operacionais como: lembrar qual é o tema e a bibliografia de cada aula, lembrar quem será o debatedor e quem fará o resumo da aula, tirar dúvidas quanto ao funcionamento do Wingeom e do próprio ambiente comunicacional (dúvidas sobre funcionalidades informáticas também eram encaminhadas ao técnico), enviar as atividades de geometria, abrir fóruns de discussão, etc.

Nas aulas de discussão matemática, eu também desempenhava o papel de professora, de maneira mais ativa do que nas demais aulas. Neste sentido, eu propunha as atividades, fazia questionamentos, discutia resultados, tecia comentários, fazia os resumos das aulas e também aprendia com a experiência e diferentes formas de interpretar as situações geométricas apresentadas pelos alunos-professores. Assim,

eu também era uma participante durante todo o curso. Nas demais aulas, não específicas de discussão matemática, eu não assumia esse papel e, praticamente, não interferia nas discussões.

A minha atuação durante o curso faz com que a observação realizada na coleta dos dados para a pesquisa, além de ser seletiva, também possa ser considerada como uma observação-participante, já que geralmente ela está associada "à imersão total do pesquisador no contexto observado, passando a ser um membro do grupo" (ALVES-MAZZOTTI e GEWANDSZNAJDER p.167, 2004). E ainda neste aspecto, "na observação participante, o pesquisador se torna parte da situação observada, interagindo por longos períodos com os sujeitos, buscando partilhar o seu cotidiano para sentir o que significa estar naquela situação" (idem, p.166).

4.3.3 Os Dados da Pesquisa

Para Bogdan e Biklen (1994, p. 149) os dados são "materiais em bruto que os investigadores recolhem do mundo que se encontram a estudar; são os elementos que formam a base da análise [...] são simultaneamente as provas e as pistas". Também Goldenberg (2003, p.53) comenta que

os dados qualitativos consistem em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos. Estes dados não são padronizáveis como os dados quantitativos, obrigando o pesquisador a ter flexibilidade e criatividade no momento de coletá-los e analisá-los.

Pesquisas qualitativas geralmente geram um grande volume de dados que precisam ser compreendidos. Deste modo, diante do objetivo deste estudo, investigar como se dá a produção matemática, em um ambiente virtual de aprendizagem, de um coletivo formado por humanos, tecnologias informáticas e outras mídias, neste item explico os dados que selecionei para serem interpretados a fim de alcançar tal objetivo.

4.3.3.1 Os Registros das Aulas

Foram realizados 11 encontros (ou aulas) síncronos durante todo o curso, sendo que três deles foram sobre discussão matemática, ou seja as atividades

enviadas na semana que antecedia esses encontros eram desenvolvidas para serem discutidas no momento do *chat*. A discussão completa era registrada no ambiente TelEduc para posterior leitura, assim que cada aula era finalizada. Várias concepções acerca do ensino e aprendizagem de Matemática e da Educação Matemática vinham à tona em todas as aulas, no entanto, considero de acordo com a problemática em questão, as aulas específicas de discussão matemática como principais fontes de dados desta pesquisa.

4.3.3.2 Os Portfólios

As construções geométricas das atividades realizadas, bem como os comentários eram anexados nos portfólios individuais de cada participante e compartilhadas com os demais. Essa ferramenta foi de fundamental importância para que fosse possível acompanhar o desenvolvimento de cada um acerca das atividades propostas e como o compartilhamento era total, pois todos tinham acesso, muitas dúvidas que alguns tinham para encontrar a solução (no que diz respeito à justificativa e não à construção em si) eram esclarecidas ao consultar o portfólio do colega. Porém, alguns participantes não disponibilizaram suas construções geométricas, ou porque tiveram dificuldades de caráter técnico, ou por insegurança nos resultados que haviam obtido, ou ainda porque não haviam feito. Mesmo assim, nas aulas procuravam discutir com os colegas baseados nos comentários que surgiam e iam verificando, no momento da aula, a partir da utilização do Wingeom, o que estava sendo dito.

4.3.3.3 Os Fóruns de Discussão

Apesar de, especificamente, nesta versão do curso de "Tendências em Educação Matemática" ter havido discussões pertinentes ao tema desta investigação nos fóruns, mesmo assim houve pouca participação. Não se tem uma explicação plausível para isso, mas existem hipóteses uma vez que isso vem acontecendo em versões anteriores deste curso. Em se tratando de dados para a pesquisa em questão, os fóruns sobre "Demonstração Matemática em Geometria" e "Educação a Distância",

por exemplo, foram relevantes, pois revelaram concepções dos alunos-professores acerca de temas que permeiam o foco deste estudo.

4.3.3.4 Os Questionários e a Ferramenta Perfil

No início do curso foi enviado a todos os participantes um questionário visando a identificar quais os seus interesses, suas expectativas, a familiaridade com as tecnologias da informação e comunicação que cada um tinha e a opinião dos mesmos no que se refere à proposta de discutir matemática a distância no curso. O objetivo, diante disso, era traçar um perfil dos participantes, o qual também foi resumidamente disponibilizado por cada um deles na ferramenta perfil do próprio TelEduc.

4.3.4 Análise dos Dados

Para Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2004, p. 170) o processo de análise dos dados é “complexo, não-linear, que implica um trabalho de redução, organização e interpretação dos dados que inicia já na fase exploratória e acompanha toda a investigação”. De todo modo, caracterizo o momento da análise como sendo aquele em que confronto os dados obtidos com a literatura e, ancorada em minha visão de conhecimento, analiso as possíveis respostas à pergunta norteadora da pesquisa. Bogdan e Biklen (1999, p. 200) posicionam-se quanto a esse aspecto e entendem que

[...] os dados não são apenas aquilo que se recolhe no decurso de um estudo, mas a maneira como as coisas aparecem quando abordadas com um espírito de ‘investigação’. Tornar-se um bom investigador qualitativo é, em parte, aprender esta perspectiva; os detalhes específicos são pistas úteis para a compreensão do mundo dos sujeitos. A investigação qualitativa envolve pegar nos objetos e acontecimentos e levá-los ao instrumento sensível da sua mente de modo a discernir o seu valor como dados. Significa aperceber-se da razão por que os objetos foram produzidos e como também envolve saber quando descartar conjunto de dados como sendo de valor duvidoso e quando os manter.

No item a seguir faço comentários acerca da principal fonte de dados a ser analisada, o *chat*, por ter o maior número de participantes envolvidos, por conseguinte mais informações e por caracterizar momentos de interação simultânea a partir de interesses comuns: discutir as atividades de geometria espacial propostas e por se

tratar, também, do momento de produção matemática em que eu, enquanto pesquisadora, estive mais “presente”, uma vez que durante o processo de construção geométrica no Wingeom e da investigação realizada, *a priori*, não havia este envolvimento.

4.3.4.1 A Natureza do Discurso no *Chat*

Um *chat* ou sala de bate-papo é o "local" onde, geralmente, ocorre uma "conversa espontânea, mas que, devido às suas condições de produção via computador realiza-se com o suporte da escrita reestruturada, portanto, em outros moldes que não os de uma conversação que se realiza face a face" (BERNARDES e VIEIRA, 2005, p. 50). O *chat* é uma maneira de indivíduos, geograficamente separados, se comunicarem utilizando a fala escrita. Muitas vezes na comunicação via *chat* torna-se necessário desenvolver uma maior sensibilidade de "ouvir" e compreender o outro, uma vez que um momento de pausa (silêncio) pode ser entendido como uma recusa ao diálogo ou incompreensão do enunciado dirigido.

O texto escrito com as mídias lápis e papel e suas variações, na maioria das vezes carrega em si certa formalidade. Algumas normas da língua culta, como regras ortográficas, por exemplo, quase sempre são levadas em conta nesta forma de comunicação. Desde a alfabetização, ao escreverem suas primeiras palavras, as pessoas já o fazem seguindo certo padrão. O ato de escrever pode ser considerado uma manifestação cultural. Por esta razão, ele se transforma quando as tecnologias informáticas passam a integrar o processo de escrita.

Borba (2004b) acredita que a comunicação baseada na Internet, em particular no *chat*, gera um coletivo de humanos-com-Internet-sala-de-bate-papo..., o qual estende a idéia de Lévy (1993) com relação à oralidade primária e secundária. Para Lévy (1993) a oralidade primária é aquela utilizada para a comunicação estritamente oral, já a oralidade secundária surge com o advento da escrita, ou seja, a leitura da escrita. Sendo assim, a escrita produzida no *chat* ora se aproxima da comunicação escrita, ora da oralidade por se tratar de uma fala escrita. Diante disso, Borba (2004b)

afirma que a tecnologia digital possibilita a criação de uma escrita secundária ou uma oralidade terciária.

Essas transformações são decorrentes do fato de que normas, regras, formalidades, de maneira geral, não são características de um discurso no *chat*. O grande número de mensagens encaminhadas e em ritmo acelerado acaba gerando certa “liberdade” no interlocutor em utilizar-se de símbolos, abreviações, sinais, na tentativa estabelecer um diálogo o mais natural possível e deste modo até mesmo sentimentos são manifestados. Diante disso, considerar normas como sendo algo irrelevante não impede a comunicação no *chat*, pelo contrário, agiliza ainda mais o processo de comunicação e abre novas possibilidades.

Neste aspecto Souza (2003, p.118) espera que discursos realizados nesses moldes

[...] guardem principalmente um convite para olharmos as maneiras como a sedução irresistível exercida pelas oportunidades de comunicar-se levam os usuários de uma tecnologia recente a recriar os usos de uma tecnologia bem antiga, a escrita. Nessas conversações parece ser buscada a adequação de ambas as tecnologias aos requerimentos da organização das interações conversacionais.

As pessoas que se encontram em um *chat* estão dispostas a conversar, o que é possível por meio da escrita. Existem interesses comuns que as aproximam, como no caso deste curso. Neste sentido, uma nova oralidade e uma nova escrita se concretizam, uma vez que “os enunciados produzidos nas salas de bate-papo consistem em um novo estilo da língua” (BERNARDES e VIEIRA, 2005, p.81).

Enquanto escrita, existe um estilo muito particular que a difere daquilo que já se conheceu até hoje e, enquanto oralidade, surge uma voz desprovida de som que mesmo nestas condições, a entonação aparece nos exageros e repetições excessivas de fonemas. Borba (2004b, grifo do autor) diz que

A natureza do texto “escrito” na Internet é diferenciada, à medida que junta aspectos da oralidade e da escrita – já que apresenta a rapidez e informalidade da primeira e a ausência de explicação por gestos, olhares e sentidos da segunda – com uma linguagem cada vez mais multimídia, caracterizada pela inclusão de filmes, fotos e *links* variados.

Essa (com)fusão entre oralidade e escrita, mediada pelo computador, une as três tecnologias da inteligência (oralidade, escrita e informática) criando uma nova forma de agir, comunicar e produzir conhecimento. “Não se trata de suprimir uma ou outra modalidade de linguagem, mas de condensá-las e redirecioná-las, produzindo um novo estilo de linguagem que vai além da escrita alfabética, englobando os sistemas logográfico e semiótico” (BERNARDES e VIEIRA, 2005, p.82).

Os participantes do curso "Tendências em Educação Matemática", e em especial desta pesquisa, geraram um discurso com estas características e, neste caso, um discurso muito particular, o matemático. No próximo capítulo faço comentários acerca de como organizei esses dados para serem analisados e apresento a análise propriamente dita.

CAPÍTULO 5

A PRODUÇÃO MATEMÁTICA EM UM CURSO A DISTÂNCIA

Neste capítulo apresento os dados desta pesquisa, bem como sua análise. Os dados consistem, principalmente, das transcrições das três aulas *online* sobre discussão matemática que aconteceram no curso à distância de Tendências em Educação Matemática em 2005. Nestas aulas, além de textos relacionados a várias das tendências nesta área, foram discutidas atividades de geometria euclidiana espacial. Outros dados que também foram coletados na pesquisa, como os questionários, que foram enviados ao iniciar o curso, as discussões nos fóruns, os portfólios que contém as construções geométricas realizadas pelos participantes, e a ferramenta perfil do ambiente TelEduc, também foram considerados.

Juntamente com os trechos das "falas" dos participantes, trago minha compreensão dos mesmos, com base na seguinte pergunta:

Como se dá a produção matemática, em um ambiente virtual de aprendizagem, de um coletivo formado por humanos e não humanos?

5.1 Os Momentos de Análise

A análise é caracterizada por vários momentos que não são, necessariamente, fixos, ou seja, eles podem se repetir, já que idas e vindas são próprias da análise de dados qualitativos. Para a organização deste trabalho elaborei episódios, os quais entendo por um conjunto de cenas, as quais são partes, ou trechos, dos dados, que se mostram significativos para o pesquisador. O processo de elaboração dos episódios é particular e subjetivo, pois cabe ao pesquisador identificá-los a partir de seus interesses

e inquietações. Goldenberg (2003, p.51, grifo do autor) discute esta questão e afirma que

A totalidade de qualquer objeto de estudo é uma construção do pesquisador, definida em termos do que lhe parece mais útil para responder ao seu problema de pesquisa. É irreal supor que se pode ver, descrever e descobrir a relevância teórica de *tudo*. Na verdade, o pesquisador acaba se concentrando em alguns problemas específicos que lhe parecem de maior importância.

Nesta pesquisa, em particular, identifiquei seis grandes momentos de análise, os quais consistem em:

Primeiro momento: Leitura dos registros das aulas de matemática e elaboração dos resumos durante o curso, no intuito de lançar um primeiro olhar para os dados contidos nos chats;

Segundo momento: Leitura de todos os registros das aulas e releitura das aulas de matemática, bem como dos fóruns de discussão para obter uma visão geral do curso;

Terceiro momento: Identificação de diversas palavras-chave das quais emergiram os pré-temas, acordados com base nas leituras iniciais dos dados;

Quarto momento: Determinação de temas definitivos ou mais gerais, sendo que para chegar a eles, à luz da pergunta norteadora e das leituras sucessivas dos dados, os pré-temas passaram por um processo de condensação, ou seja, busquei as relações entre eles e agrupei em outros mais abrangentes;

Quinto momento: Elaboração de episódios a partir de cenas significativas, os quais serviram para dar forma ao trabalho e orientar a análise;

Sexto momento: Análise dos episódios e confronto com a literatura visando a alcançar os objetivos da pesquisa e encontrar possíveis encaminhamentos à pergunta norteadora.

Chamarei cada um dos temas definitivos, que foram levantados a partir da leitura dos dados, de episódios e os discuto segundo o meu olhar de pesquisadora. Os episódios elaborados são: 1) *A Discussão Matemática no Chat: seres-humanos-com-e-no-chat*, 2) *A Matemática e o Wingeom: seres-humanos-com-Wingeom*, 3)

Demonstração Matemática em um Ambiente Virtual de Aprendizagem 4) Coordenando diferentes Tecnologias da Informação e Comunicação.

Os dados que apresento neste capítulo são, basicamente, recortes das discussões sobre as atividades de geometria euclidiana espacial que ocorreram no curso. Uma das principais características da discussão no *chat* é o multiálogo, que são diversos diálogos entrecruzados com pessoas envolvidas em várias discussões (BORBA, 2004b), e para que o leitor possa acompanhar o desenvolvimento das atividades matemáticas descritas nesse discurso foi necessário omitir algumas “falas” que não se mostraram relevantes para a análise realizada. Em alguns trechos são necessários comentários ou explicações que esclarecem certas colocações dos participantes. Estes comentários são feitos por mim e aparecem entre colchetes no texto transcrito. Além disso, trago o nome de cada participante, antes de sua “fala” e, neste caso, o leitor poderá encontrar entre eles, os professores do curso que aparecem como “mborba” e “Silvana”. Foram mantidos os erros de digitação e de outra ordem, característicos da comunicação em uma sala de bate-papo.

5.2 A Discussão Matemática no *Chat*: seres-humanos-com-e-no-*chat*

Borba (2005) estuda como que diferentes mídias em diferentes contextos interferem na maneira como a matemática é produzida. Para ele a matemática é transformada quando o contexto passa a ser *online* e a distância, já que em alguns desses ambientes, como no caso do *chat*, a escrita é o único meio dos participantes se comunicarem, de modo que ela passa a moldar a discussão matemática. Neste aspecto, mudando as tecnologias, as possibilidades de produção matemática também mudam. Com isso, vejo que a escrita, o livro didático, o lápis e o papel, assim como outras mídias, como materiais manipulativos, também condicionam as discussões no *chat*. Nas falas de Marie é evidenciado como que mídias, presentes em muitas aulas presenciais de matemática, também foram utilizadas como estratégias pedagógicas nos encontros *online*.

<Marie> Quando fiz esse exercício me lembrei de um quebra-cabeça 3D que eu tenho. Vocês conhecem?

<Marie> Estou recortando o meu tetraedro para ver se visualizo melhor os ângulos. Peraí

<Marie> Bom, eu recortei o meu tetraedro de papel como o tal quebra cabeça, que é o caso particular do retângulo quando os lados são todos iguais e a secção é um quadrado.

A aula em ambientes virtuais, como o cenário da coleta dos dados dessa pesquisa, requer maior organização com relação à sua dinâmica, talvez uma reorganização, já que as discussões são desorganizadas, ou seja, cheias de hipertextos e multiálogos como discute Borba (2004b). Os trechos abaixo ilustram como que esta (re)organização foi sugerida pelos alunos-professores.

<Keila> com relação por onde começar. Acho que não deveria ser atividade por atividade, acho legal a ideia de comentário geral. Se isso não virar um pouquinho de bagunça. (hehe)

<Marie> (...) é melhor a gente ir falando dos exercícios na ordem senão vira bagunça

A discussão matemática nesse ambiente, no ciberespaço, ocorreu por meio da escrita, porém desprovida do simbolismo que a matemática apresenta. Pode-se dizer que em alguns momentos trata-se de uma outra oralidade e, em outros, de uma outra escrita, já que de um lado as características informais da fala como a espontaneidade, a pressa em falar, a qual leva a enganos e ambigüidades, bem como a inibição, o receio em expor a opinião aos demais que gera a um silêncio virtual e, de outro lado, a linearidade da escrita que faz com que seja necessário fazer escolhas: o assunto sobre o qual falar ou alguém com quem falar. Deste modo, o discurso, muitas vezes é informal e a matemática sofre uma forte impregnação da língua materna (MACHADO, 2001).

Em se tratando deste discurso tão particular, o matemático, é evidenciada a necessidade de imaginação, pelo fato de que a distância geográfica e a interação por meio da escrita, muitas vezes impede uma comunicação dotada de imagens explicativas como símbolos, gráficos, figuras, gestos, etc., mesmo havendo recursos informáticos para auxiliar neste processo. Alguns participantes do curso, além de visualizarem no Wingeom a construção da referente atividade, optaram por utilizar materiais manipulativos, os quais não estavam disponíveis a todos no momento da

discussão e, deste modo, foi necessário imaginar, analisando a escrita no *chat*, como o outro desenvolveu sua investigação utilizando-se de diferentes técnicas.

Quando Taís se manifesta dizendo: “*é que como amassando, eu imaginei que fosse dobrá-lo, daí quando falou em planificar daí ‘caiu a ficha’ de que seriam colineares..*”. fica explícito a utilização da imaginação durante a discussão sobre o desenvolvimento da atividade.

Na maioria das vezes, compreender um processo investigativo, realizado por outra pessoa, e sua respectiva explicação matemática, neste contexto, só é possível usando a imaginação, tendo como base aquilo que está sendo expresso no *chat*. O universo digital, considerando o ambiente virtual em questão e o *chat*, em particular, pode favorecer, entre outras coisas, a autonomia, o conhecimento compartilhado, a criatividade e, também, facilitar o desenvolvimento da *imaginação*, do diálogo do pensamento com o contexto e a abertura ao novo e ao criativo (DELCIN, 2005).

Neste sentido, as interações via *chat* exigem dos interlocutores uma maior sensibilidade e empatia, pois para compreender a explicação do outro se torna importante uma imersão nas condições em que este outro se encontra. Da mesma forma, aquele que se propõe a emitir uma mensagem tem a preocupação de buscar estratégias para fazer com que, por meio de sua escrita no *chat*, a voz também apareça e possibilite a criação de uma "presença virtual".

As interações *online* que ocorreram no curso propiciaram um ambiente no qual diferentes saberes, valores, experiências, formas de aprender emergissem e, assim, juntamente com as mídias utilizadas, uma compreensão individual se tornava evidente e era compartilhada e resignificada à medida que a socialização e a *produção coletiva* aconteciam. Em outras palavras a consciência é individual, mas o pensamento é coletivo (LÉVY, 1993), já que as tecnologias intelectuais estão nos sujeitos e os sujeitos estão nas tecnologias intelectuais.

Com base nessa experiência, diversas possibilidades de produção matemática foram observadas, já que mesmo com a distância física foi possível estabelecer um debate, rever conceitos matemáticos, discutir diferentes formas de abordar o conteúdo

de geometria espacial e, ainda, "aproximar" professores de diferentes lugares, com realidades distintas, para a troca de experiência.

A cena a seguir exemplifica como foi possível, lembrar, discutir e aprender conceitos matemáticos em um ambiente virtual, por meio da fala escrita e perceber que gestos, característicos da oralidade, são substituídos por um discurso criativamente elaborado. Ao ser proposta a atividade abaixo (Quadro 5.1) Carlos depara-se com uma dúvida sobre a definição de retas reversas e concomitantemente à discussão sobre o desenvolvimento desta atividade, outros participantes tentam ajudá-lo a entender este conceito geométrico.

1. Insira um tetraedro regular de aresta 1;
2. Marque o ponto médio M da aresta AC desse tetraedro;
3. Marque na aresta reversa BD o ponto médio N;
4. Trace o segmento MN;
5. Qual é a relação entre a medida do segmento MN com a distância entre as arestas reversas AC e BD? E quais são seus argumentos para garantir que sua resposta é válida?

Quadro 5. 1 - Atividade proposta na primeira aula sobre discussão matemática.

<Carlos> É a medida da distâncias entre os planos q contem as retas q passam por AC e DB, mas depois q falei isso Claudia me fez a seguinte pergunta : O q são mesmo retas reversas? quem pode me ajudar na resposta

<Silvana> são retas q não são coplanares

<Silvana> estou certa, marie????

<Taís> (uma explicação mais visual do que didática) é como se elas fossem concorrentes mas não estão no mesmo plano, não tem ponto em comum

<Marie> Sim, são retas "reversas" que não são coplanares de jeito nenhum. Então existe uma distância entre elas. E é essa distância que a Maria falou.

<Carlos> E se são paralela podem não ser coplanares e se são coplanares não reversa (por Silvana 9:20) mas se são paralelas não são concorrentes e se não são concorrentes não são reversas, ai q confusão!

Com o objetivo de esclarecer a dúvida de Carlos, alguns participantes expuseram suas opiniões acerca do que entendiam como retas reversas. No entanto, Carlos parecia estar confuso com as diferentes formas de explicar esse conceito matemático, apresentadas por cada uma de suas colegas. Contudo, Marie, busca

explicar por meio de argumentos matemáticos e, em seguida, parte para um método prático de expor o que são retas reversas.

<Taís> as paralelas sempre tem um plano que é comum entre elas.

<Taís> se são coplanares daí são concorrentes

<Marie> Carlos, é o seguinte: Duas retas ou pertencem a um mesmo plano ou não pertencem. Se elas pertencem, podem ser paralelas ou concorrentes (entre as concorrentes temos as perpendiculares, quando o ângulo entre elas é 90). Se não são coplanares, são reversas. Entre as reversas, temos as ortogonais que estão contidas em planos perpendiculares. Imagine uma reta no teto da sala onde você está e uma outra no chão, em planos que formam ângulos de 90 graus.

<Marcia> No teto e no chão?

<Silvana> ótima explicação

<Marie> Sim, pense numa reta no teto, na sua frente e outra na interseção da parede da direita com o chão. Uma lá em cima e outra aí em baixo.

<Maria> Ese ejemplo es cierto mientras no exista un plano que contenga a la recta del piso y la del techo,

<Marie> Certo Maria, mas você ainda não tinha lido minha resposta para a Marcia. Escrevemos ao mesmo tempo.

<Carlos> Legal! foi isso q tinha pensado, agora pense q esse tetno contem uma reta q passa por AC e o chão a reta q passa por DB (problema 1.4), daí num segmento q une perpendicularmente esses dois planos, foi assim q pensei a questão

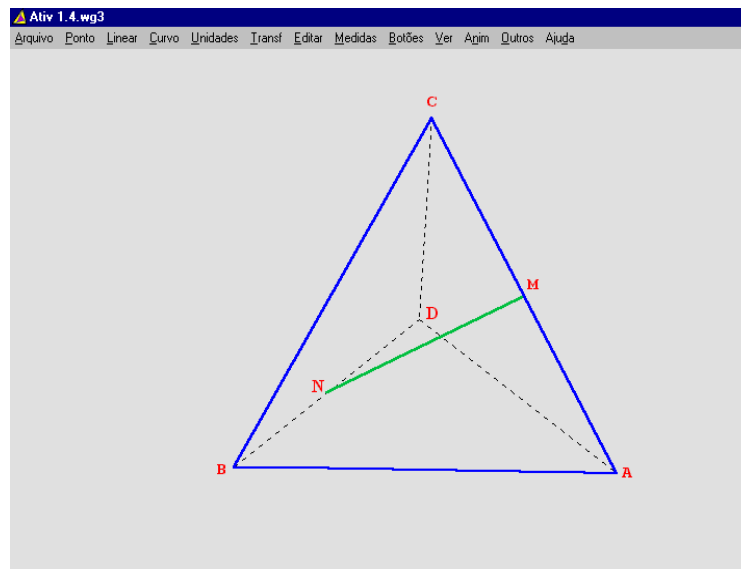


Figura 5. 1 - Construção geométrica da atividade apresentada no Quadro 5.1.

Na discussão acima, Carlos pôde esclarecer sua dúvida com relação à definição de retas reversas a partir do desenvolvimento de uma atividade, na qual, em seu enunciado, afirmava que a aresta BD era reversa a aresta AC. Na figura 5.1 é possível observar a construção da atividade proposta e confrontar com a discussão realizada pelos alunos-professores.

É importante destacar as potencialidades do Wingeom para a discussão matemática neste contexto. Porém, também é relevante refletir acerca das limitações evidenciadas neste curso, quando se trata de discussão matemática em um ambiente *online*. Maria, por exemplo, manifesta um sentimento de frustração após apresentar sua justificativa a respeito da conclusão que havia chegado com uma investigação, ao mencionar: *Lástima que no puedo colocar aquí la figura que hice!!!!* Neste caso, o desejo de compartilhar com os colegas a figura que havia feito não foi possível devido às condições do curso (à distância) e ao ambiente utilizado (TelEduc).

Com relação a este aspecto, Borba (2004b) relata que em um dos cursos que liderou de Tendências em Educação Matemática, em 2003, uma das participantes do curso, ao discutir sobre uma atividade de geometria, sentiu a necessidade de um contato presencial e também das mídias que usualmente são utilizadas no "fazer matemática", como lousa, giz, lápis e papel. No caso de Maria não, necessariamente, foi sentida a necessidade de um contato presencial, mas sua frustração era de nem sempre poder compartilhar suas figuras, esboços e construções feitas sem o Wingeom.

Próximo ao término de uma das aulas *online*, durante um momento de avaliação, Marie comenta sobre as dificuldades que teve em discutir matemática à distância, devido à impossibilidade de se discutir o desenvolvimento da atividade utilizando materiais manipulativos, uma estratégia pedagógica muito utilizada por ela em sua prática docente. Ela reconhece, mesmo com a vasta experiência que possui, no que se refere ao conteúdo, a dificuldade em discutir geometria em um *chat*.

<Marie> Bom, eu gostei da aula, mas queria ter conseguido mostrar mais coisas pra vocês. É difícil falar de Geometria. Quem já teve aula comigo sabe que para cada conceito eu tenho algo para "mostrar", para as pessoas manipularem e aqui eu fiquei meio amarrada.

As características do ambiente no qual as interações ocorreram, bem como a dinâmica do curso em si, condicionaram o desenvolvimento das atividades, possibilitaram novas formas de pensar, evidenciaram novas formas de ensinar e aprender, além de que desafiaram a linearidade do pensamento e, deste modo, permitiram uma abertura a um diálogo dinâmico, o multiálogo (BORBA, 2004b). Deste modo, as particularidades do contexto estavam intimamente relacionadas com a maneira que o conhecimento (matemático) ia sendo produzido.

Borba e Villarreal (2005) acreditam que o conhecimento não é produzido isoladamente, mas a partir de um coletivo formado por humanos e tecnologias da inteligência (oralidade, escrita e informática). Daí o construto teórico seres-humanos-com-mídias apresentado por estes autores. Ao descrever sobre a matemática discutida durante as aulas *online*, pelos alunos-professores nesta pesquisa, acredito que o *chat* pode assumir pelo menos dois papéis: mídia e espaço. Ao mesmo tempo em que ele é um espaço onde ocorrem discussões, também é uma mídia que influencia na natureza dessas discussões.

Pensar o *chat* como mídia remete à idéia de Lévy (1993) de que todas as coisas que estão ao redor, assim como as cidades, bibliotecas, etc., são co-autoras na produção do conhecimento e, deste modo o *chat*, uma das interfaces comunicacionais utilizadas neste curso, também é parte de um coletivo intelectual. Fazendo uma analogia com o lápis e papel (interface associada à escrita) o *chat* também é utilizado para escrever e comunicar, e com isso, é possível dizer que a escrita foi condicionada a ele e que sou eu com ele que produzo conhecimento.

Diante disso, as mídias não são apenas externas aos humanos elas transcendem as fronteiras do ser biológico e estão fora e dentro e, assim, reorganizam a forma de pensar (BORBA, 2004b). Mas qual papel do *chat* no curso de “Tendências em Educação Matemática” analisado nesta pesquisa?

Entendendo o *chat* como um espaço, conforme discuto no capítulo 3 sobre as características do ciberespaço, é evidenciado que o conhecimento é produzido COM o *chat*, mas também NO *chat*. Ou seja, o *chat* passa a assumir o papel de espaço de

interações, para a troca de informação, socialização, bem como de produção de conhecimento com os demais participantes e tecnologias da inteligência.

Sob este prisma, quero destacar esta faceta do *chat*, enquanto espaço, no qual as interações ocorreram. O fato de enfatizar este aspecto de que o conhecimento foi produzido *NO chat*, não contradiz aquilo proposto por Borba e Villarreal (2005), já que o ser-humano *está no mundo com os outros*, os seres-humanos-com-mídias. Traduzindo para o contexto do curso aqui analisado, cada participante estava no *chat* com os demais e com as outras tecnologias que estavam sendo utilizadas. Acredito que atualmente, com o advento da Internet, torna-se fundamental explicitar o contexto, o cenário, o espaço em que as interações ocorrem, uma vez que estar no *chat* muda a natureza de como as coisas acontecem.

Considero as interações do curso em questão, um *estar no chat* produzindo conhecimento *com os outros*, sendo que estes outros incluem os participantes do curso e as TIC utilizadas. *Chat* ou sala de bate-papo, como o próprio nome indica, é lugar de encontro, de diálogo. Neste aspecto, entendo que os conectivos COM e NO devem estar juntos, de modo a enfatizar a idéia de seres-humanos-com-mídias como sendo uma unidade cognitiva, conforme propõem Borba e Villarreal (2005) e, assim, pensar na combinação seres-humanos-com-e-no-*chat* como um coletivo que promove a produção de conhecimento. Como já disse, concordo que o *chat* também é uma mídia, mas o papel que ele assume de espaço reforça a idéia de que o ciberespaço é um novo espaço de comunicação, de sociabilidade, de organização e, ainda, de troca de informação e produção de conhecimento. Sendo assim, acredito que esse espaço é também co-autor nessa produção, bem como a biblioteca e a sala de aula presencial, porém com características e possibilidades qualitativamente diferentes.

5.3 A Matemática e o Wingeom: seres-humanos-com-Wingeom

Foi possível notar as várias formas como o Wingeom foi utilizado, além de servir para a construção geométrica propriamente dita. Em diversos momentos ele atuou como um veículo de comunicação, no que se refere à discussão matemática, devido ao contexto em que ela acontecia. Ou seja, a discussão se tornou possível

porque a construção proporcionada por este *software* serviu de guia, de referência. O processo de desenvolvimento das atividades passou, basicamente, pelos seguintes momentos: visualização, investigação, elaboração de conjecturas e justificativas ou validação da conjectura formulada. A seguir, discuto cada um destes momentos, buscando caracterizar as particularidades dos mesmos no curso a distância já descrito.

5.3.1 Visualização

A geometria exige certa capacidade visual e muitas vezes se não for possível criar uma imagem mental dos objetos geométricos, a dificuldade para justificar ou validar os resultados obtidos poderá ser maior. A visualização das construções, sob diferentes aspectos, proporcionada pelo Wingeom, ajudou os participantes na construção dessas imagens e, conseqüentemente, na investigação. Por outro lado, lidar com geometria espacial pareceu desafiador, uma vez que objetos tridimensionais quando visualizados em duas dimensões (a tela do computador) pareceram, em alguns momentos, distorcidos e de certo modo, questionaram o raciocínio dos alunos-professores, levando-os a uma justificativa apoiada na intuição.

Neste sentido, o uso de estratégias visando a obter uma outra visualização tornou-se necessárias. Claudia, por exemplo, utilizou um recurso do Wingeom para ajudá-la na visualização: *“precisei destacar o triangulo ARD com outra cor para visualizar melhor”*.

Já Keila, conforme o trecho a seguir, percebeu que investigar com o auxílio do *software* permitiu que ela visualizasse com mais facilidade certos resultados que supunha verdadeiros, no entanto nem sempre isso implicava em colaborar para a formulação de justificativas ou fortes argumentos para aquilo que ela estava investigando.

<Keila> pelo software na atividade 3 foi fácil ver, qual é a menor medida. Mas quando tive que passar para o papel, foi até engraçado algumas dúvidas. Não soube escrever o que faria.

Em alguns momentos o termo "visualização" reflete uma idéia física, ou seja, ver apenas com os olhos. Mas é possível notar que esta palavra, já tão comum em Educação Matemática, adquire também outras conotações. Acredito que a visualização

seja de fundamental importância por auxiliar na produção de imagens mentais que vão além do sentido da visão, uma vez que as imagens associadas ao aspecto físico são relevantes para se tentar atingir um maior nível de abstração. Além disso, a visualização pode ser vista como uma linguagem que pode expressar a matemática quando o padrão algébrico não consegue ser expresso (BORBA e VILLARREAL, 2005).

Alguns momentos da discussão matemática à distância deste curso, ilustram o importante papel da visualização. Carlos ao realizar a construção geométrica (Figuras 5.2 e 5.3) e utilizar a possibilidade de "animação" dos objetos matemáticos, pôde perceber que a razão entre os volumes de dois sólidos era constante e o fato de poder visualizar as diferentes variações das medidas desses sólidos, permitiu que ele encontrasse uma constante de proporcionalidade. Caso não houvesse essa possibilidade dinâmica, talvez não fosse possível que ele percebesse a relação implícita entre os volumes, o que é evidenciado em sua "fala":

<Carlos> Acho q isso, em sala é mais fácil percebe e demonstrar (algebricamente) para razões q não envolvem potências, mas qdo passamos para as áreas e os volumes já fica + difícil, já com essa nova experiência com o Wingeom... ai se eu soubesse antes...

Na figura 5.2, dois sólidos (cubo e paralelepípedo) foram inseridos, sendo que o cubo tinha como medida das arestas um valor variável e o paralelepípedo tinha comprimento igual à aresta do cubo (AB), largura igual à diagonal da face (AF) e altura igual a diagonal espacial do cubo (AG). Os volumes de ambos os sólidos foram encontrados, bem como a razão entre eles. Já na figura 5.3 estes mesmos sólidos foram movimentados, ou seja, houve uma variação das suas medidas, proporcionada pelo menu *Anim* do Wingeom e, assim, foi possível notar que a razão entre os volumes dos mesmos se mantinha constante, qualquer que fosse a variação das medidas.

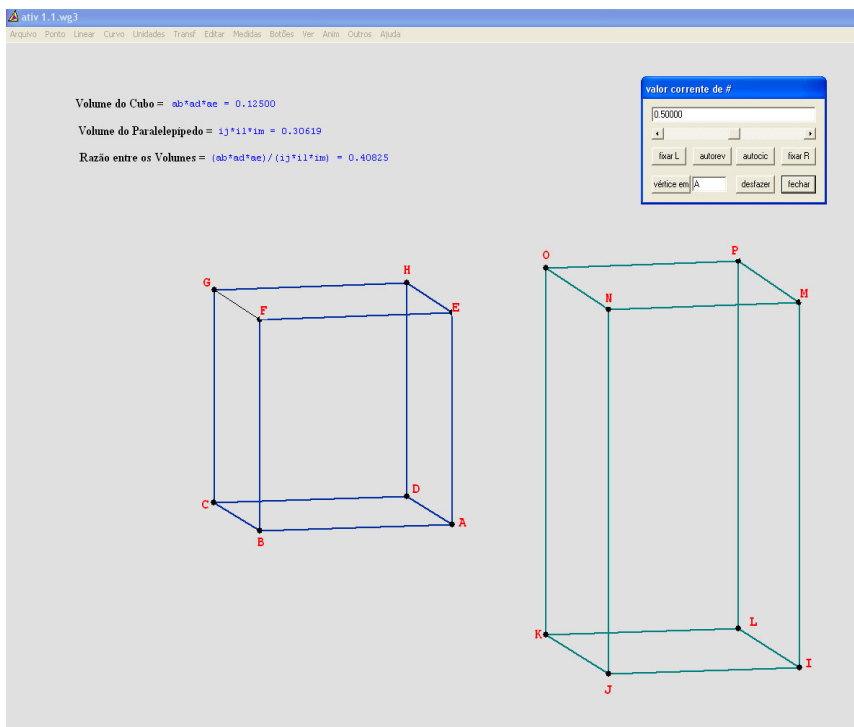


Figura 5. 2 - A razão entre os volumes de um paralelepípedo e um cubo.

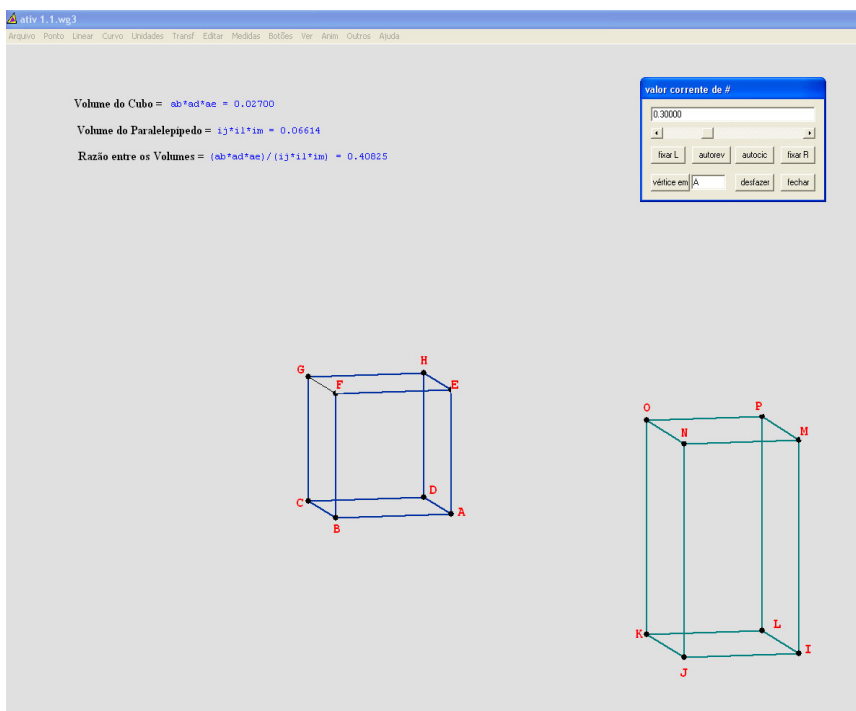


Figura 5. 3 - A razão entre os volumes do paralelepípedo e do cubo se mantém constante ao variar as dimensões dos sólidos.

Um outro exemplo, a seguir, evidencia como que a visualização, utilizando o Wingeom, no caso, pode auxiliar na elaboração de conjecturas, bem como na refutação das mesmas. Maria, por exemplo, deu a entender em sua mensagem *"Dije lo primero que vi, luego hice girar el dibujo y ya no lo vi recto. Marqué el punto medio de las diagonales (coincidían) y luego medí el ángulo"*, que o software a ajudou a ver algo que desafiava a sua intuição. Ou seja, tinha uma hipótese (intuitiva) formulada e, por conseguinte uma imagem, mas durante a construção geométrica pôde notar que esta era falsa, ao mesmo tempo em que se sentiu motivada a investigar ainda mais. Contudo, não é apenas com recursos informáticos que a visualização condiciona o pensamento matemático, durante essa mesma situação, ela utilizou materiais manipulativos para visualizar com mais detalhes aquilo que investigava.

<mborba> eu tentava visualizar o problema, mas ao visualizar o problema as vezes ja tinha uma ideia tambem. . .o bom do wingeom foi a facilidade (nem sempre) em facilitar minha visao em varios angulos! Ao mesmo tempo, as "distorcoes" sao problematicas, e questionam nossa imaginacao!

<Maria> Lo que dice es cierto. En algunas actividades, especialmente con tetraedros, tuve que tomar un sólido de madera para entender lo que se visualizaba en la pantalla

Como afirmam Borba e Villarreal (2005), a visualização condiciona a maneira como o conhecimento é produzido. Entretanto, com base na discussão matemática obtida durante o curso a distância de "Tendências em Educação Matemática", aspectos da visualização são transformados pelo fato dela acontecer em um ambiente virtual. De fato, a análise dos dados coletados não permite concluir que as construções realizadas pelos alunos-professores eram sempre iguais, pelo fato de que não foram disponibilizadas em seus portfólios as construções de todas as atividades discutidas, mesmo considerando que estas foram direcionadas no que diz respeito à construção geométrica com o Wingeom, conforme explico no capítulo 4.

Ainda neste sentido, devido ao contexto da discussão (à distância), uma visualização não compartilhada com todos, evidencia uma característica da discussão matemática gerada neste contexto, principalmente quando elas giravam em torno de investigações por meio de materiais manipulativos e outros softwares como o Cabri, que não estavam disponíveis a todos no momento da discussão e, por esta razão, a

visualização proporcionada por estes recursos não era socializada completamente e era necessário fazer o exercício de ver a partir dos olhos dos outros, ou visualizar sem ver.

Com esta perspectiva, aquilo que se entende por visualização em Educação Matemática é transformado quando o *chat* passa a se tornar o meio de comunicação entre os sujeitos. Concorro com Borba e Villarreal (2005) que a visualização condiciona o pensamento matemático e que ela influencia diretamente na produção de conhecimento. Sendo assim, se surgir uma outra visualização, que é descrita em um *chat*, acredito que uma outra maneira de produção matemática também surge. No entanto, é necessário que outras pesquisas levantem dados sobre este assunto e investiguem as particularidades dessa nova forma de pensar a visualização, tema sempre pertinente em Educação Matemática.

5.3.2 Investigação

Devido à possibilidade do Wingeom de movimentar objetos da construção geométrica, utilizando o menu *Anim*, Carlos, notou que em determinadas situações matemáticas, a utilização deste *software* potencializou a investigação.

<Carlos> Acho que isso, em sala é mais fácil de perceber e demonstrar (algebricamente) para razões q não envolvem potências, mas qdo passamos para áreas e os volumes já fica + difícil, já com essa nova experiência com o Wingeom... ai se eu soubesse antes...

Cabe destacar que a partir da investigação de uma atividade aberta, como aquelas propostas no curso, outras situações investigativas podem emergir. Foi o que aconteceu quando os professores, responsáveis pelo curso, realizavam uma das atividades que foi proposta aos participantes. Esta atividade foi apresentada durante a discussão no *chat*, sem que fosse enviada antecipadamente como as outras. Assim, intuitivamente, uma primeira conjectura foi criada por uma das participantes. A situação consistia em determinar quanto media o ângulo formado pela intersecção de duas diagonais espaciais de um cubo. Rapidamente, Maria manifestou-se afirmando que o ângulo era reto, ou seja, de 90° . Porém, ao utilizar o Wingeom para verificar sua afirmação, percebeu que ela não era verdadeira.

<Maria> Lo estoy midiendo y me parece que no es recto, me da 109°
 <Maria> Dije lo primero que vi, luego hice girar el dibujo y ya no lo vi recto. Marqué el punto medio de las diagonales (coincidían) y luego medí el ángulo
 <Carlos> É verdade não é 90, agora fiquei todo embaralhado
 <mborba> ou seja, ao lidar com o winggeom para resolver esse problema vi outra coisa, e tomei um susto, por que para mim era 90. talvez por causa da diagonal do cubo [ele quis dizer “quadrado” ao invés de “cubo”, como mostra sua fala mais abaixo]!
 <Maria> Tal vez eso pasó por pensar en la intersección de las diagonales de un cuadrado y trasladando esa idea al cubo
 <Márcia> Vc quer dizer que o computador eu aumento a possibilidade de investigações?
 <mborba> isso Maria, creio que levari do quadrado a idéia par ao cubo.

Na figura 5.4 apresento como que a construção desta atividade no Wingeom foi investigada.

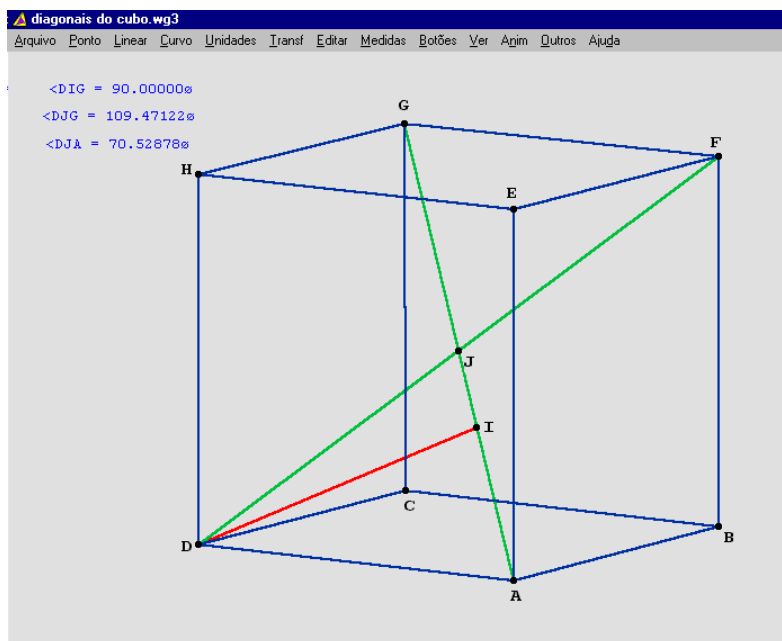


Figura 5. 4 - Investigando o ângulo formado entre as diagonais de um cubo.

Ao marcar a intersecção J entre as diagonais FD e AG, os participantes mediram o ângulo formado e perceberam que não era de 90° . Também foi possível verificar isso, de maneira mais intuitiva, quando eles “giraram” o cubo ou quando variavam suas medidas (largura, altura e comprimento). Caso a hipótese de que no encontro das diagonais de um cubo tem-se 90° fosse verdadeira, ao traçar um segmento perpendicular à diagonal AG passando pelo vértice D, este deveria coincidir

com a diagonal DF. No entanto, é possível observar na construção (Figura 5.4) que isto não acontece. Daí a necessidade de investigar quanto mede o ângulo entre as diagonais. Cabe destacar que esta atividade não estava prevista para a discussão no curso e nem havia sido enviada com antecedência como as demais. Entretanto, durante o desenvolvimento das atividades por parte dos professores, surgiu esta questão matemática que com o auxílio do Wingeom, proporcionou outra investigação.

Essa atividade emergencial, ou seja, não prevista, sugeriu a necessidade de “atividades extra” que pudessem ser pensadas e desenvolvidas durante o encontro síncrono no *chat*. Essa dinâmica poderia se transformar em uma possibilidade para um trabalho com resolução de problemas ou desenvolvimento de atividades investigativas, como venho me referindo neste texto, em um ambiente virtual de aprendizagem.

5.3.3 Elaboração e Validação de Conjecturas

Ao observar a construção realizada com o auxílio do *software*, os participantes notaram que era possível encontrar certas regularidades, mesmo variando medidas como: altura, lado e volume, por exemplo, dos sólidos geométricos. Nas duas cenas a seguir, Carlos fala de suas conjecturas e apresenta a preocupação de como validá-las utilizando o Wingeom.

<Carlos> gente na atividade 1 fiquei curioso para saber se minha conjectura de q os volumes variavam na mesma proporção, como poderia validar isso?

<Carlos> Acho q de início o computador da margem a conjectura mais seguras.

Nesse sentido, Maria viu no *software* a possibilidade de conjecturar devido à visualização proporcionada por ele. No entanto na sua concepção, para validar tal conjectura era necessária uma análise mais aprofundada por meio de propriedades geométricas que garantissem certas afirmações.

<Maria> En mi caso, prefiero visualizar y hacer conjeturas en el computador y luego verificar esas conjeturas analíticamente

Utilizar o menu *Medidas* muitas vezes foi suficiente para dar a certeza ou para pelo menos criar desconfiças e, talvez, ao invés de uma validação, chegar a uma refutação da conjectura elaborada. No entanto, diferentes concepções que emergiram,

mostravam que apenas medir não bastava para justificar determinado resultado e, então, era necessário apoiar-se nos axiomas e nas propriedades e teoremas já demonstrados em geometria euclidiana. Se alguma afirmação verdadeiramente assumida, no que tange ao corpo de conhecimento da geometria euclidiana, fosse encontrada, realmente a conjectura formulada era validada ou não. Já para outros, isto não era primordial e dependendo do contexto, medir garantia. No trecho a seguir, os participantes discutem sobre o segmento RS com relação ao triângulo ARD (Figura 5.5) com base no uso da medição e da visualização proporcionada pelo Wingeom.

<Carlos> [...] acabei concluindo q ele é a altura do triangulo pois ia do vértice ao lado formando um ângulo de 90 grau

<Marcia> Só altura?

<Keila> tem mais coisas em carlos!!

<Silvana> vc concluiu isso usando o menu medidas

<Silvana> boa, márcia

Quando Carlos apresenta a sua conclusão no que se refere ao segmento RS em relação ao triângulo ARD, ele foi questionado por suas colegas. Márcia e Keila pareciam não concordar com ele completamente, pois acreditavam que havia mais coisas a se dizer além daquilo que Carlos concluiu. Talvez ele não tivesse terminado a sua “fala”, afinal essa é uma característica da discussão matemática no *chat*. Conforme discutirei mais à frente, as explicações matemáticas vêm aos pedaços. Além disso, eu intervinha no sentido de questionar como ele havia chegado àquela conclusão, será que ele havia usado o Wingeom para medir ou fez um estudo mais analítico para encontrar o ângulo reto?

<Carlos> ah! ele é quase tudo ele tb vai do vértice ao pt média então...

<Marcia> É interessante como nossas reações são semelhantes à de nossos alunos durante uma investigação! Quando parar?

<mborba> Carlos, porque que e altura?

<Carlos> sim, medindo o ângulo, mais dei várias rodadas antes para ver se minha idéia era boa, aí qd deu 90 confirmei

<Silvana> mas vcs não falaram pq ela é a altura e algo mais

<Marcia> Convince-os a esgotarem todas as possibilidades...

<mborba> carlos, e como sabe que o 90 graus nao e uma aproximacao do software? essa pergunta e para todos!

<Marcia> É uma aproximação?

Carlos chegou a conclusão de que RS era a altura de ARD, pois havia usado o menu *Medidas* do Wingeom, mas destaca que também se apropriou da possibilidade de animação desse *software* para confirmar sua tese. Porém, fica a dúvida se o processo de medição possibilitada pelo Wingeom garante, uma vez que pode se tratar de uma aproximação.

<Maria> SR es altura y además S es punto medio de DA, entonces S es mediatriz también

<Marie> O triângulo ARD é isósceles pois AR e DR são medianas das faces do tetraedro. FG = RS (para você) é a altura do triângulo AFD (ou ARD) com relação ao lado AD. Também é a mediana do mesmo triângulo com relação ao lado AD e por fim, bissetriz do ângulo DRA.

<Carlos> fico sempre desconfiado disso, será q esse software esta aprox as coisa para facilitar, mas acho q qdo fazem no quadro ou produmos material manipulável dá a mesma sensação, e aí? <Marcia> No entanto, fazendo a atividade de geometria no papel corremos o risco de também incorrer em aproximações.

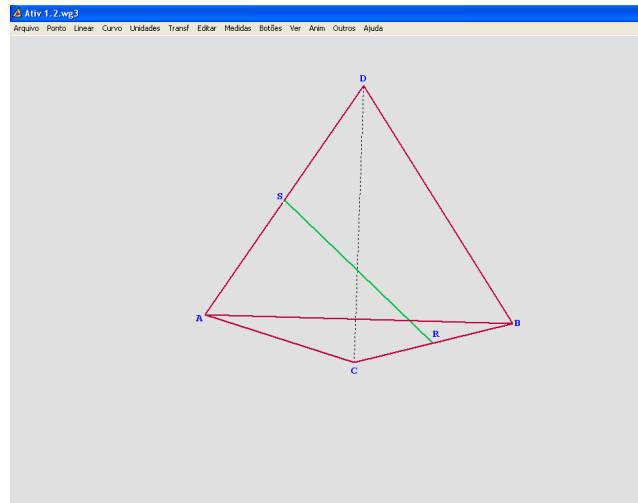


Figura 5. 5 - Investigando o segmento RS obtido a partir dos pontos médios de duas arestas reversas de um tetraedro regular.

Diante do exposto, Carlos já havia formulado uma hipótese quando realizou a construção com o Wingeom, e é provável que seus conhecimentos pré-existentes tivessem lhe influenciado no encaminhamento que deu à investigação. Mas, por outro lado, a convicção surgiu com a utilização do menu *Medidas* e a posterior exploração dos objetos matemáticos. Ao afirmar: “sim, medindo o ângulo, mais dei várias rodadas

antes para ver se minha idéia era boa, ai qd deu 90 confirmei”, foi possível perceber a busca pela validação de sua tese, a qual parecia estar garantida com base na medição realizada. Neste sentido, a intervenção dos professores e, também, de seus colegas, em particular Márcia e Keila, criou desconfiças que desafiaram a intuição e o raciocínio, de modo a levar os participantes a refletirem sobre a discussão e a buscarem argumentos para convencer os outros e, inclusive, convencer-se a si mesmo.

5.4 Demonstração Matemática em um Ambiente Virtual de Aprendizagem

Pelo fato de serem pedidas, nas atividades, justificativas às respostas ou às conclusões obtidas durante a investigação e, como justificativa está intimamente ligada à demonstração (ZULATTO, 2002), este tema foi muito debatido em diferentes aspectos durante as discussões no curso. Concepções do que vem a ser uma demonstração em Educação Matemática puderam ser observadas, bem como a maneira como ela, propriamente dita, apareceu nas discussões. Garnica (2002) discute que a maneira como a demonstração é entendida na comunidade de matemáticos profissionais, é apenas uma dentre as várias formas de argumentação matemática. Para ele, no campo da Educação Matemática, um novo regime de verdade se constituiu, no qual as concepções acerca das demonstrações são relativizadas. Por isso este autor acredita que

(a) o estudo das argumentações sobre conteúdos matemáticos pode ser visto sob diferentes perspectivas. Para tanto, torna-se necessário falarmos em diferentes formas de argumentação, ou de modos diferenciados [...] para o estabelecimento de justificações e que (b) numa Matemática formal, acadêmica que, na prática, segundo a literatura disponível, caracteriza-se como uma Matemática platônica, o modo de argumentação, por excelência é a prova rigorosa ou demonstração formal, envolta em paradoxos, mas com o objetivo de firmar, definitivamente, a veracidade das afirmações Matemáticas. Dirige-se na prática profissional e científica de justificação de conhecimento matemático, devendo ser **relativizada** e mais estudada quanto a sua forma de utilização em salas de aula (GARNICA, 2002, p. 97, grifo meu).

Tendo em vista isso, o que foi proposto no curso “Tendências em Educação Matemática”, com relação ao desenvolvimento das atividades de geometria, acredito que são evidenciados diferentes níveis de formalismo nas justificativas ou argumentações matemáticas, no que diz respeito às conclusões obtidas com as

investigações matemáticas realizadas com o Wingeom ou com outras mídias disponíveis a cada um dos participantes. Não pretendo aprofundar a discussão sobre se o que os alunos-professores apresentaram nas discussões *online* podem ser consideradas demonstrações ou provas rigorosas, do ponto de vista da matemática formal, mas busco caracterizar uma dinâmica de argumentação e justificação que teve como premissa a tentativa de se realizar a passagem do pensamento indutivo (de maneira experimental, com o Wingeom, por exemplo) para o dedutivo (justificativas) em um ambiente virtual que a condicionou.

Nesse sentido, em se tratando de demonstrações em um *chat*, parece que a sua discussão é qualitativamente diferente daquela que usualmente discutimos na sala de aula presencial. A demonstração matemática, neste caso, era hipertextual, ou seja, ela foi moldada ao contexto, mas, por outro lado, tinha o mesmo objetivo daquela que ocorre no espaço usual: apresentar a verdade e convencer. O ambiente virtual foi invadido por "velhas" práticas e tradições advindas de "velhas" mídias, mas com uma nova roupagem. Ou seja, o caos do multiálogo dificultava, muitas vezes, o acompanhamento da apresentação da demonstração ou explicação matemática. Conforme indica Márcia ao expressar-se dizendo: "*Estou perdida. Mas tudo bem; depois releio a aula*". Ela não conseguia acompanhar o raciocínio que estava sendo expresso no *chat*.

Ao analisarem as justificativas matemáticas apresentadas era feita uma distinção, pelos próprios alunos-professores, em relação ao que venha a ser *demonstrar* e *justificar*. Contudo, essa distinção não parecia estar completamente clara para todos. Será que é possível pensar em demonstrações mais fáceis e mais difíceis? Nesse aspecto é que penso que podem ser destacados diferentes níveis de formalismo.

A demonstração ou prova matemática está em movimento no âmbito da Educação Matemática e, com o advento das tecnologias, outros aspectos são observados. Se demonstrar é convencer (LOURENÇO, 2002), o que dizer do convencimento proporcionado pela visualização sob diferentes ângulos, devido ao dinamismo do *software* de geometria dinâmica e a possibilidade de efetuar medidas? Taís, por exemplo, em uma das atividades levantou a conjectura de que em um

tetraedro regular ligando os pontos centrais das faces tem-se um novo tetraedro também regular e com um terço do volume do original. Ela conseguiu verificar que estava correta utilizando o menu *Medidas* do Wingeom, mas mesmo assim sentiu a necessidade de uma prova formal.

<Taís> Essa eu não consegui provas de que era $1/3$... Só constatei por causa das medidas...

Nesse sentido, os participantes acreditavam que algumas demonstrações eram mais aprofundadas, ou seja, baseadas em axiomas e teoremas da geometria euclidiana que garantiam sua veracidade.

<Marie> (...) Maria demonstrou mesmo, eu só justifiquei sem muita fundamentação. A demonstração dela está legal.

Da mesma forma quando uma demonstração não era formalmente elaborada, isso parecia incomodar alguns participantes, mesmo quando já tinham certeza da veracidade de suas conjecturas. Este fato me leva a crer que um ambiente virtual, com diferentes mídias presentes, influenciou fortemente na produção dos alunos-professores, mas o uso de tradições matemáticas, velhas práticas, advindas de velhas mídias (livro, lápis e papel) e experiências vivenciadas também parecem permear essa mesma produção matemática.

<Marie> Maria, nós duas fazemos uma boa dupla. Você conhece todos os enunciados dos teoremas, e eu sei das coisas pela prática, de tanto trabalhar e procurar "concretizar" a geometria para os meus alunos.

<Maria> Si, Marie, Nos complementamos bien!!!

<Maria> Marie, mais no conozco todos los teoremas.... tengo el libro de consulta a mi lado!!!! je!!!

A discussão a seguir ilustra como que diferenças entre uma demonstração e outra eram evidenciadas. Numa das atividades proposta aos participantes, eles tinham que perceber que uma esfera só pode estar inscrita em um paralelepípedo se este for um cubo. Fazendo essa construção no Wingeom, Marie apresentou a sua resolução da seguinte forma:

<Marie> Eu fiz assim:

- 1. Obter as diagonais de uma das faces (como por exemplo da face CDHG)*
- 2. Obter o ponto de interseção entre essas diagonais (traçando uma perpendicular ao segmento GD passando pelo ponto K), ponto L. Para traçar a perpendicular, usar:*

Linear/Altitude/ às Retas (escolhendo o segmento GD e o ponto K). Isso nos dá o raio KL para traçar a esfera do item 8.

3. Para construir a esfera inscrita no paralelepípedo, o raio deve ser KI, como já foi dito. Esse raio vale a metade do lado da base (que inicialmente foi estabelecido como 3 cm). Assim sendo o raio vale 1,5 cm.

4. Para que a esfera esteja inscrita no paralelepípedo, ela deve tangenciar todas as faces dele. Assim sendo, a altura deve ser igual ao comprimento e a largura, o que faz com que o paralelepípedo seja na verdade um cubo.

Com o objetivo de apresentar as diferentes formas de se desenvolver a atividade apresentei a demonstração que eu havia feito, porém havia chegado à mesma conclusão que Marie. E em seguida a reação de Marie ao confrontar sua resolução com a minha é evidenciada.

<Silvana> Seja uma esfera E, de centro K e raio KI, e um plano ABF, face do paralelepípedo. Como as posições relativas de E e o pl (ABF) dependem da distância $d(K, \text{pl ABF})$ então temos que:

Se $d(K, \text{pl ABF})$ é exatamente igual a KI, existe um único ponto P do pl ABF que dista KI de K. Logo P é o pé da perpendicular traçada por K ao pl ABF. Dizemos, neste caso, que o pl ABF é tangente a E. De fato, em um paralelepípedo existe uma esfera inscrita se a distância de K ao plano das faces for igual ao raio KI. Portanto esse paralelepípedo é um cubo. (c.q.d)

<Marie> Nossa Sil, eu gostaria de saber falar matematiquês bonito igual voce. !!!!! cqd

<Maria> esteve lindo!

<Cláudia e Carlos> não basta só o falar matematiquês é preciso saber visualizar e isso vc tem bastante

<Marie> Merci beaucoup. Eu realmente sei mais visualizar e tentar fazer os outros visualizarem, do que explicar matematicamente.

Ao propor atividades de geometria espacial pude perceber que quando solicitava aos participantes que elaborassem uma justificativa acerca do que haviam observado, emergiam diferentes justificativas para uma mesma atividade, levando em conta, principalmente, as possibilidades do *software* Wingeom que eles estavam utilizando. Para alguns, em certos casos, bastava usar o menu *Medidas*, conforme indica a “fala” de Marie: “*Digo que são retos porque eu medi com o Wingeom*”.

Já outros, tinham a preocupação em apoiar-se nos teoremas e propriedades geométricas para realizar determinadas afirmações, de acordo com o trecho abaixo, no qual a participante buscava argumentos teóricos para justificar o que concluiu durante a investigação realizada no Wingeom:

<Maria> Para demostrar que JKGE es un rectángulo uso el siguiente teorema: Si una recta es paralela a un plano (AC es paralela a JKGE), todo plano que pase por ella (ACD) y corte al primero determina con éste una recta paralela a la dada (JK). Como JKGE es paralelo a AC, $GE \parallel AC$ y $JK \parallel AC$, entonces $GE \parallel JK$ (lados opuestos). El mismo razonamiento para BD. Entonces $KG \parallel JE$. Pero hay un problema no consigo demostrar que el ángulo JKG es recto!!! Ayuda!!!!

Tanto na “fala” anterior de Maria quanto no trecho abaixo, os participantes criaram a conjectura de que a secção paralela às arestas AC e BD de um tetraedro regular ABCD, determinada a partir de um ponto E qualquer na aresta AC era um paralelogramo com ângulos retos, ou seja, um retângulo e, em um momento específico, um quadrado, o que não parecia nada trivial de se justificar.

<Marie> Entao vamos para o terceiro. A minha conclusão é a mesma da Maria: A secção é um retângulo. A secção apresentada na figura tem dois lados paralelos à aresta AC e duas paralelas a BD, com medidas iguais (os lados opostos). Como os ângulos são retos, trata-se de um retângulo, que é o paralelogramo que tem os ângulos retos. Quando os pontos J, E, G e K forem os pontos médios das arestas do tetraedro, a secção é quadrada, que é um caso particular do retângulo.

<Silvana> e qto aos ângulos??????

<Maria> Por qué dices que los ángulos son rectos. No logro demostrar esto

<Silvana> esse é o problema...

<Maria> No logro demostrarlo Silvana, y vc?

<Marie> Digo que são retos porque eu medi com o Wingeom

<Maria> A yo también!!! Pero y la demostración?

<Silvana> hummmmmmmmm, então será q posso afirmar q é um rectángulo?????

<Maria> Si no demustro que son rectos, ... no!!!

<Maria> Pero puedo visualizar esta idea (del rectángulo) pero y cómo demuestro que son rectos los ángulos de esta sección?

Nas figuras 5.6 e 5.7 a construção obtida no Wingeom em diferentes momentos pode ser observada.

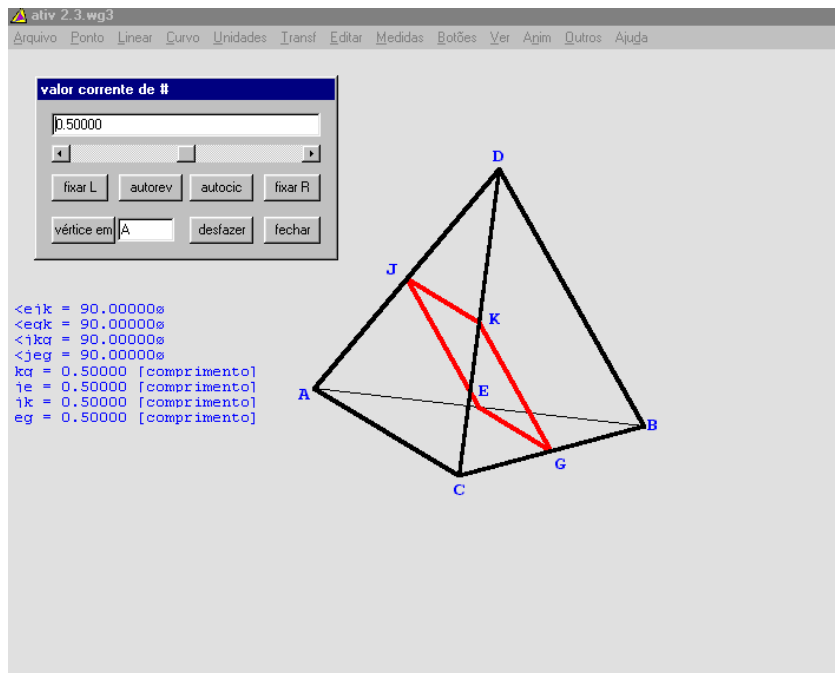


Figura 5. 6 - Construção de uma secção determinada a partir de um ponto qualquer E na aresta AB e paralela às arestas AC e BD de um tetraedro regular.

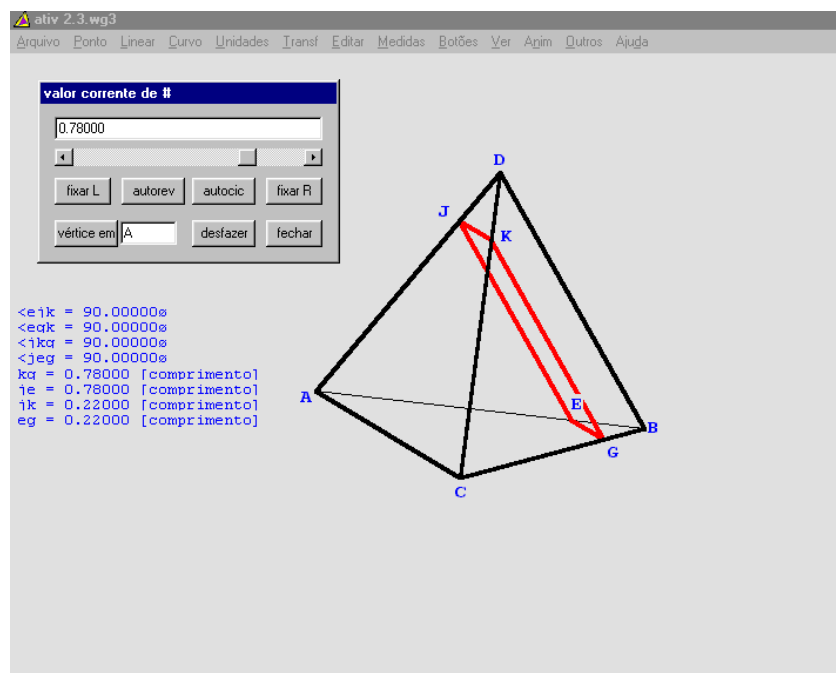


Figura 5. 7 - Investigando a secção determinada no tetraedro regular a partir do ponto E paralela às arestas AC e BD.

Ainda com relação as diferentes formas de justificar/demonstrar um resultado de uma investigação, ao analisar a demonstração apresentada por Carlos (feita em conjunto com Claudia e Victória), Marie e Maria, por exemplo, acreditam que ela era mais simples do que a que haviam feito, conforme mostra as falas a seguir:

<Marie> *Gostei da sua maneira de demonstrar também. Bem simples e facil de entender.*

<Maria> *Si tu demostración es más fácil que la mía.*

Por outro lado, questionamentos com relação ao que venha ser uma demonstração foram levantados pelos professores, e por outros participantes, o que suscitou uma ampla discussão.

<mborba> *Mas será que demonstrou? Talvez Marie e Maria tenham visto algo que Carlos viu, mas eu não.*

<Silvana> *me parece muito intuitivo q carlos está correto, mas tenho dúvida qdo falamos em demonstrar...*

<Maria> *Hay que ir siguiendo el razonamiento de carlos, por partes...*

A atividade consistia da seguinte situação: dado um paralelepípedo ABCDEFGH o que é possível afirmar sobre o segmento IJ em relação aos planos das bases ABCD e EFGH desse paralelepípedo, sendo que IJ foi obtido a partir dos pontos de interseção entre as diagonais das bases ABCD e EFGH. A figura 5.8 ilustra como a atividade foi construída no Wingeom.

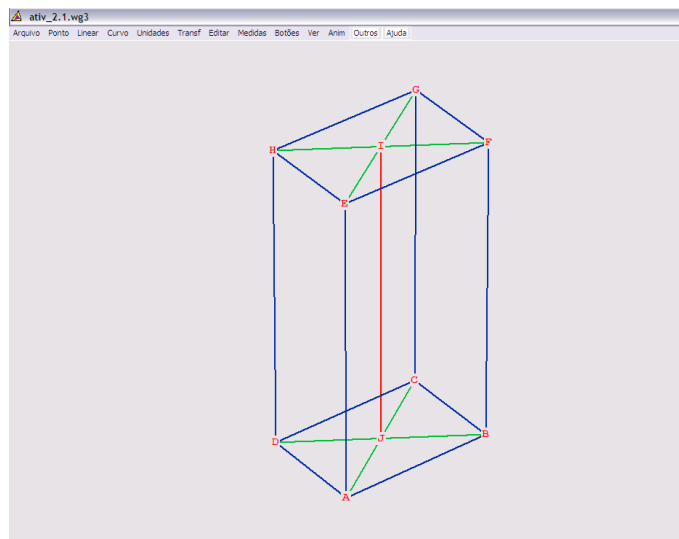


Figura 5. 8 - Construção de uma atividade proposta na segunda aula sobre discussão matemática.

<Maria> Demonstrando que Jl es paralela a una arista, ... listo!!!

<Marie> Vamos lá. No primeiro exercício eu só justifiquei porque o segmento IJ era perpendicular a ambos os planos. Alguem fez alguma demonstração?

<Maria> hice una demostración, quieren verla?

<Maria> Si se demuestra que Jl es paralelo a cualquiera de las aristas de este paralelepípedo recto, entonces Jl es perpendicular a cualquiera de las bases $ABCD$ o $EFGH$. $FHDB$ es un rectángulo pues $FH \parallel BD$ (son segmentos contenidos en planos paralelos,) y $FB \parallel HD$ (son aristas del paralelepípedo recto), y

<Maria> No miren en 7:31, miren aquí:

Si se demuestra que Jl es paralelo a cualquiera de las aristas de este paralelepípedo recto, entonces Jl es perpendicular a cualquiera de las bases $ABCD$ o $EFGH$.

$FHDB$ es un rectángulo pues $FH \parallel BD$ (son segmentos contenidos en planos paralelos,) y $FB \parallel HD$ (son aristas del paralelepípedo recto), y

<Maria> Que pasa se me corta la demostración ...!!!

<Marie> Entao continua de onde parou.

<Maria> y $FB \parallel HD$ (son aristas del paralelepípedo recto), y

<Maria> ... el ángulo JHD es recto (paaralelepípedo es recto). Jl es la base media de ese rectángulo, pues J e I son los puntos de intersección de las dos diagonales de las bases respectivamente (las diagonales de un paralelogramo se bisecan). Entonces Jl es paralela a HD , y por lo tanto es perpendicular a $ABCD$ (análogamente a $EFGH$).

<Silvana> como vc demonstra q IJ é paralelo a uma das arestas????

<Marie> Keila, a Maria demonstrou mesmo, eu só justifiquei sem muita fundamentação. A demonstração dela está legal.

<Maria> Acá va....

$FHDB$ es un rectángulo pues $FH \parallel BD$ (son segmentos contenidos en planos paralelos,) y $FB \parallel HD$ (son aristas del paralelepípedo recto), y el ángulo JHD es recto (paaralelepípedo es recto). Jl es la base media de ese rectángulo, pues J e I son los puntos de intersección de las dos diagonales de las bases respectivamente (las diagonales de un paralelogramo se bisecan). Entonces Jl es paralela a HD , y por lo tanto es perpendicular a $ABCD$ (análogamente a $EFGH$).

Maria apresentou a sua demonstração e estava tendo alguns problemas no momento de digitá-la no *chat*. Parece que sua demonstração foi interrompida e ela teve que iniciar novamente, mas percebendo que o problema persistia, Marie sugeriu que ela continuasse de onde parou. Até então os demais acompanhavam o raciocínio de Maria, mas Carlos (juntamente com Claudia e Victória) interpretaram a atividade de uma forma diferente.

<Claudia> acho que fizemos diferente

<Carlos> acho q pensamos em outra coisa, vimos algo diferente

<Carlos> achamos q o segmento IJ pode ser visto como interseção entre os planos $ACGE$ e $BDHF$

<Carlos> veja o q pensamos para demonstrar: O ponto I pertence tanto ao plano ACGE quanto ao plano BDHF, assim como o ponto J, dessa forma IJ é a reta de interseção entre os planos.

Desse modo todos os pontos de IJ pertencem ao mesmo tempo aos planos ACGE e BDHF.

<Silvana> mas, e a resposta à pergunta da atividade???

<Carlos> IJ é um segmento que pertence a interseção entre os dois planos

<Claudia> daí podemos concluir que IJ é paralelo as arestas??

<Carlos> sim, agora entendi era para sobre as base...

<Silvana> isso msm

<Carlos> acho q pelo o q fizemos não, acho q teríamos q usar o argumento de Maria acima

<Ricardo> a conclusão que cheguei aqui, foi que o seguimento IJ é ortogonal ao plano BAD. e que este seguimento IJ está contido nos planos EGC e FHB. mas não consegui desmonstrar isso matematicamente.

<Carlos> mas me ocorreu uma idéia vj, se o pt J pertence ao plano ABCD e I pertence as retas FH e EG q são para elas ao plano ABCD assim IJ é perpendicular a ABCD e EFGH.

O episódio anterior se refere à dificuldade em compreender uma demonstração ou explicação matemática apresentada no *chat*. Tal dificuldade pode estar relacionada ao fato de ela vir aos "pedaços", ou seja, uma parte é apresentada e em seguida já aparece outra mensagem, de outra pessoa, sobre o mesmo assunto ou não, enquanto isso aquele que estava apresentando sua demonstração está digitando e depois apresenta mais outra parte, e assim o processo vai se repetindo até que esteja concluída toda a demonstração. Daí o emprego da metáfora "colcha de retalhos" para demonstrações, já que ela vai sendo costurada aos poucos. Por esta razão, é necessário tentar olhar para a discussão de uma maneira linear, concentrar-se atentamente às explicações e muitas vezes ter que realizar escolhas e direcionar mais a atenção a certas discussões do que a outras. Essa, também, é uma característica da discussão matemática no *chat* e da produção matemática que ocorre com ele.

Pensar a matemática como uma colcha de retalhos pode ser uma nova faceta da forma não contínua com a qual Lévy (1993) caracterizava as mídias informáticas. Ao invés de uma produção linear, como geralmente ocorre na sala de aula presencial, no *chat* ela é condicionada pela participação de outros, já que a própria escrita e a leitura vai depender de intervenção dos participantes no *chat*. Além disso, a qualidade de

conexão da Internet (banda larga ou discada, por exemplo) e até mesmo a maneira de digitar influenciam o que é produzido. Entretanto, em cada retalho o texto é escrito e carrega, mesmo em um *chat*, a característica da linearidade. Diante disso, parece que a produção vive essa tensão de linearidade no retalho e “segmentos interrompidos” quando se olha o todo da colcha.

A produção matemática que ocorre neste contexto é particular devido ao fato do ambiente estar condicionando diretamente o processo de produção e, conseqüentemente, no resultado como um todo. O leitor pode achar trivial a conclusão: *é possível que a produção matemática aconteça no ciberespaço ou em um ambiente virtual*. Contudo, lidar com espaços distintos, o ciberespaço e o espaço no sentido de Euclides, no qual a geometria euclidiana se legitima, ambos em um mesmo contexto pareceu desafiador.

5.5 Coordenando Tecnologias da Informação e Comunicação

Um dos aspectos que ficou evidente durante o curso foi a utilização de outras mídias, além do Wingeom, para o desenvolvimento das atividades. Uma das participantes utilizou, por exemplo, o Cabri-Géomètre, por ter bastante familiaridade com este *software*. No entanto, essas outras mídias utilizadas não foram, necessariamente, informáticas. Alguns alunos-professores usaram materiais manipulativos de diferentes natureza (sólidos geométricos, envelopes de papel, etc.), livros texto e lápis e papel. Esses diferentes recursos foram utilizados conforme os participantes foram sentindo a necessidade de buscar outras formas de investigação, além daquelas que estavam fazendo no Wingeom. Isso também pode estar relacionado ao fato de terem mais facilidade ou experiência com determinadas mídias do que a outras. De acordo com a atividade proposta, as outras mídias “entravam em cena” antes ou depois da investigação no Wingeom ou, ainda, durante a discussão síncrona foi possível notar que alguns deles pareciam estar realizando a investigação com diferentes mídias para verificar alguma afirmação dada pelos colegas.

No trecho a seguir, Marie apresenta a maneira como ela fez a investigação de uma atividade, proposta na primeira aula específica de discussão matemática do curso. Essa atividade foi proposta da seguinte forma:

1. Insira um tetraedro regular de aresta 1;
2. Marque o ponto médio M da aresta AC desse tetraedro;
3. Marque na aresta reversa BD o ponto médio N;
4. Marque um ponto P, de coordenada #, na aresta CD;
5. Trace os segmentos MP e NP;
6. Meça as distâncias de cada um desses segmentos;
7. Meça a distância MP+NP;
8. Movimente o ponto P sobre a aresta CD, usando o menu *Anim/Varição de #*;
9. Qual é a menor medida, pela superfície do tetraedro, de M até N? Justifique.
10. E se você estivesse utilizando apenas lápis-e-papel, como você faria?

Quadro 5. 2 - Atividade proposta na segunda aula sobre discussão matemática.

<Marie> Bem, eu construí um tetraedro de papel, com um envelope usado. Vocês já construíram um assim? A Keila já conhece esse truque, não é Keila?

<Marie> É legal, mas só falando aqui não vai dar pra ter idéia. Você teria que ter um envelope já usado (colado) nas mãos agora.

<Taís> que tamanho?? quer um?

<Marie> O mais legal, além de descobrir que era no ponto médio, com o tetraedro de papel na mão descobri que se achatasse o tetraedro, os pontos M e N ficavam... o que? Como vocês acham que ele ficariam?

<Taís> eles coincidem??

<Marie> Qualquer tamanho de envelope serve. Você tem um aí?

<Taís> tenho.

Marie parece estar manipulando o tetraedro feito com um envelope para tentar identificar qual é a menor medida, pela superfície desse tetraedro, do ponto M até o ponto N. Conforme ela vai fazendo a sua investigação com o envelope, vai discutindo com os colegas sobre o que eles acreditam que acontecerá com os pontos M e N. Mas o que exatamente ela quer que os colegas percebam? Provavelmente, Marie já tem uma resposta.

<mborba> marie, . a silvana tinha visto isso planejando o tetraedro. .uma maneira de amassar!!!!

<Marie> O que vocês acham? Os pontos coincidem [conforme Taís havia pensado inicialmente]?

<Marie> Falei amassando, mas o termo geométrico seria planejando sim.

<mborba> da para imaginar, quem ainda nao viu?
 <Taís> ficam colineares.
 <mborba> Por que, Tais?
 <Marie> Exatamente Tais
 <Carlos> e se planificarmos o tetraedro de papel e ferificarmos a trajetória o q se poderia ver e entender?
 <malu> fica colineares
 <mborba> Marie e voce conseguiu demonstrar?

Acompanhando a discussão é possível perceber que o motivo de usar o envelope é que ao amassá-lo dava para identificar, com uma representação do tetraedro planificado, qual era a posição dos pontos M e N e, de maneira imediata, descobrir a menor medida entre eles. A forma com a qual Marie desenvolveu essa atividade está relacionada ao aspecto indutivo (experimental), já Maria buscou sistematizar uma justificativa de modo mais analítico, porém intimamente ligada à figura por ela explorada. Esta figura não foi possível de ser compartilhada com os demais participantes, uma vez que tudo indica que ela não a elaborou apenas no Wingeom. A frustração de Maria por não poder compartilhar a figura, me leva a crer que em sua demonstração a figura é parte integrante da mesma.

<Maria> Porque dos caras adyacentes del tetraedro, marcaría el punto medio M de AC y el punto medio N de BD, y trazaría el segmento que une los puntos M y N (la menor distancia) y quedaría la base media del paralelogramo CADB, donde P sería el punto de intersección de esta base media con la diagonal CD del paralelogramo. Por lo tanto es el punto medio de CD Lástima que no puedo colocar aquí la figura que hice!!!!)
 <Taís> é que como amassando, eu imaginei que fosse dobrá-lo, daí quando falou em planificar daí "caiu a ficha" de que seriam colineares...
 <Marie> Os pontos M e N ficam colineares na planificação. A menor distancia entre dois pontos é sobre a reta que os contém. Neste caso, se estivessemos no ponto médio de uma aresta um tetraedro e quiséssemos ir até o ponto médio da outra aresta (como indicado no problema) o caminho mais curto seria passando pelo ponto medio da aresta comum as duas faces do tetraedro. Legal né?
 <Maria> Hermoso!
 <mborba> mui hermoso!!!!!!!!!!!!!!
 <Marie> Quanto a demonstração disso, nao fiz. (...)
 <mborba> marie, claro que fez a demonstracao . . e so detalhara agora. . .
 <Carlos> sabe q eu já vivenciei isso, qd instavam uma extensão telefonica para o meu quarto e eu insistia em fazer um trajeto e o eleticista outro dizendo q gastaria mais fio do meu jeito, ele estava certo ...

<Marie> Eu so sei demonstrar falando, so em portugues. Em matematiques eu sou ruim pra caramba.

<Marie> (...) Esse exemplo pratico do Carlos foi otimo

Com base nesta cena, foram evidenciadas diferentes formas de desenvolver uma atividade matemática, bem como de justificá-la. Como foi possível notar, a passagem do aspecto indutivo para o dedutivo, nem sempre era algo trivial. Além disso, foi notada a coordenação de diferentes mídias no desenvolvimento da atividade, assim como durante a discussão sobre a mesma.

Deste modo, algumas ações parecem se tornar necessárias em se tratando de produção matemática em um ambiente virtual. Nesse sentido, da mesma forma como minimizar/maximizar diferentes "janelas" na tela do computador, como a do Wingeom, a do portfólio e a do *chat*, tornaram-se ações constantes durante as discussões, dinâmica condicionada pelo ambiente, o ato de copiar/colar também era utilizado com o intuito de linearizar a apresentação da demonstração ou justificativa matemática, já que a característica hipertextual dessa produção matemática tornava a demonstração, por exemplo, uma "colcha de retalhos" e, assim, copiar a demonstração disponibilizada no portfólio para em seguida colá-la no *chat*, tinha como objetivo diminuir a quantidade de retalhos desta colcha, já que, desta forma, ela podia ser apresentada até mesmo de uma única vez. No trecho abaixo é possível verificar um exemplo de como as ações minimizar/maximizar foram observadas durante a discussão.

<Taís> Para visualizar melhor, coloca o tetraedro com o vértice B virado para baixo... vocês vão reparar que AC e BD são ortogonais...

<Taís> no wingeom

Neste trecho, Taís pareceu ter se ausentado do *chat*, e sugere aos demais que façam o mesmo, para utilizar o Wingeom e experimentar diferentes variações de sua construção feita neste *software*. Com relação ao copiar/colar, algumas explicações ou justificativas apareciam de maneira completamente linear, com início, meio e fim. Ou seja, era evidente que alguns participantes, com o intuito de otimizar a discussão, copiavam do arquivo que tinham disponibilizado no portfólio e, em seguida, colavam no *chat* apresentando, assim, a sua resolução da atividade. No entanto, isso só era

possível com mensagens textuais, uma vez que figuras não podiam ser compartilhadas no *chat* mesmo utilizando-se desta estratégia.

Recursos próprios, bem como diferentes estratégias de ensino para diferentes formas de aprender tornaram-se necessários. A geometria, em particular, está intimamente ligada ao aspecto visual, por isso, o uso de imagens compartilhadas com o auxílio da ferramenta portfólio, por exemplo, evidenciaram como essa característica em ambientes virtuais aparece. Em outros momentos, quando o portfólio não era utilizado, a descrição da imagem, da construção geométrica, era feita por meio da fala escrita na sala de bate-papo. Assim, a língua materna e a linguagem matemática pareciam se (com)fundir em um mesmo discurso.

<Maria> Hola Marie. He visto tus actividades en tu portfolio y me ayudaron mucho

<Marie> Que bom que minhas atividades te ajudaram. Voce poderia dizer "como" elas ajudaram?

<Maria> Por ejemplo, en la Act. 4. punto 4, no consideré las "cuatro" caras del tetraedro y sus respectivas perpendiculares al vértice opuesto. Fue un problema de lectura mío.

No diálogo anterior, Maria e Marie manifestaram a importância do portfólio como um apoio quando alguém não consegue fazer as atividades. Assim como na sala de aula presencial, os alunos pedem ajuda ao professor ou aos colegas, num ambiente virtual isto também pode ocorrer. Contudo, o fato de ser uma interação à distância, ferramentas como o portfólio, são fundamentais para essa troca do "fazer matemática". Ricardo, no trecho abaixo, também manifesta como recebeu ajuda via portfólio da Marie, que sempre se propôs em ajudar, já que tinha uma vasta experiência em geometria, com o compartilhamento de todo o desenvolvimento das atividades, bem como das construções realizadas no Wingeom.

<Ricardo> este ejercicio eu não consegui fazer... mas ja paguei o portifolio da Marie.. tenho como acompanhar

<Marie> Vejam a minha figura lá no portfolio. Dá pra entender melhor visualizando a figura.

Assim como o portfólio servia de auxílio quando havia dificuldade em desenvolver uma atividade ou justificar os resultados obtidos na investigação, pois a resposta do colega ajudava no desenvolvimento da atividade, ele também servia de facilitador quando a explicação no *chat* não estava clara. Ou seja, a maneira de se

expressar no *chat* muitas vezes confundia quem estava lendo e acompanhar a colcha de retalhos matemática que ia surgindo se tornava problemático. Às vezes era difícil costurar os pedaços desta colcha. Na discussão da atividade a seguir, Claudia e Carlos (que em uma das aulas usaram o mesmo computador) não estavam conseguindo se expressar pelo *chat*.

1. Insira uma esfera de raio #, usando o menu *Unidades/Superfície/Esfera*;
2. Insira um disco de mesmo centro, raio e pólo da esfera anterior, usando o menu *Curvo/Disco*;
3. Inscreva um cone na semi-esfera, da esfera obtida, usando *Curvo/Cone* com centro A, raio # e com vértice em B;
4. Determine a razão entre o volume da esfera e o volume do cone inscrito nessa semi-esfera, usando o menu *Medidas*;
5. Da mesma forma, determine a razão entre a área da superfície esférica e a área lateral do mesmo cone;
6. Anime sua construção. O que você conclui a partir dos valores numéricos que obteve?

Quadro 5. 3 - Atividade proposta na terceira aula sobre discussão matemática.

<Claudia e Carlos> ao animar coloquei o valor 0.5 e percebi que são iguais
 <mborba> o que e igual cau??????
 <Claudia e Carlos> as razões
 <mborba>quais razoes, cau??
 <Claudia e Carlos> aí analisamos assim $1=V_e/V_c$ e $2=A_e/A_c$ qd r é maior que 0.5 a razão 1 é maior que 2 qd r é menor que 0.5 a razão 1 é menor que 2 e qd r é igual a 0.5 a razão 1 é igual a 2
 <mborba> claudia e carlos, estou com dificuldades de seguir o raciocinio. .
 <mborba> voces quiseram dizer 2, a metade da possibilidade da animacao. .ou .5 de 4???
 <Silvana> tá meio confuso!!!
 <Claudia e Carlos> vou colocar no portfólio
 <Marie> Esse portfolio é o "salvador da pátria", voces nao acham? É a maneira da gente se sentir mais próximo e conseguir mostrar o nosso pensamento em forma de imagens.
 <Claudia e Carlos> já coloquei no portfolio a [atividade]3.3
 <Marie> [...] eu tb fiz tudo algebricamente. Está lá no "santo protfolio" Não tem muito o que falar, pois é dificil de fazer as formulas aqui no msn [ela quis dizer no chat que estavam usando]

Diante disso, é possível notar que ao usar diferentes interfaces como *chat*, portfólio e o Wingeom a maneira de produzir matemática pelos participantes era

condicionada por elas. Ainda neste aspecto, Borba e Zulatto (2006) acreditam que pessoas diferentes, com mídias diferentes à disposição produzem matemática de maneira diferente. Para eles, a própria matemática se modifica. Nesse sentido, é necessária uma relação de empatia e sensibilidade para emergir nas condições em que o outro se encontra e melhor compreender suas idéias. Marie, no trecho a seguir, explica de uma forma prática e informal como pensou para mostrar que dois planos ACH e BGE eram paralelos.

<Marie> Vamos pensar em termos práticos. Você deve estar numa sala, não é? Pense nas paredes como planos. Pense em uma porta, considere um dos seus batentes como uma reta. Essa "reta" não é paralela a uma reta da parede oposta aquela onde está a porta? Pense em uma reta como o encontro de duas paredes. Daí você vai dizer que a porta é paralela a parede porque é paralela a intersecção das duas paredes, que é considerada uma reta. Ficou claro ou bagunçou mais?

Os planos que Marie estava tentando ilustrar com a *metáfora da sala* foram resultados da atividade abaixo (Quadro 5.4), e podem ser observados na construção realizada no Wingeom (Figura 5.9).

1. Insira um paralelepípedo de comprimento #, largura 2 e altura 6;
2. Usando o menu *Anim/Variação de #* digite, na janela que se abre, 0 e em seguida clique *fixar L*. Do mesmo modo, digite 3 e clique *fixar R*;
3. Trace os segmentos AC, CH e AH;
4. Clique em *Ver/Espessura do segmento*, escolha uma cor para os segmentos que acabou de traçar e em seguida clique em adicionar;
5. Trace os segmentos BE, EG e BG;
6. Do mesmo modo, adicione uma cor para esses segmentos;
7. Anime a sua construção e observe o que acontece;
8. O que você pode afirmar sobre os planos determinados pelos pontos ACH BEG? Justifique sua resposta.

Quadro 5. 4 - Atividade proposta na segunda aula sobre discussão matemática.

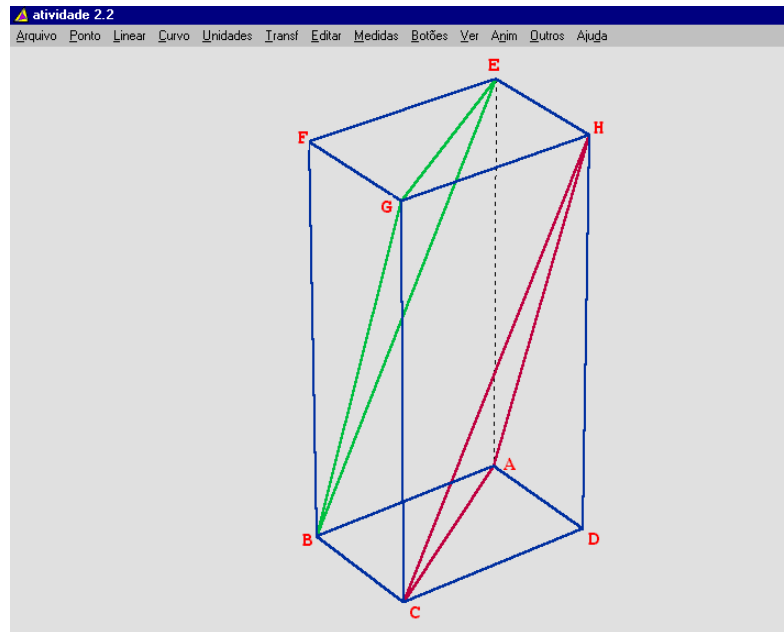


Figura 5. 9 - Investigando dois planos obtidos a partir de um paralelepípedo.

Além das diferentes mídias, ou tecnologias da informação que foram sendo coordenadas, também havia uma coordenação destas com as tecnologias da comunicação que garantiam a interação entre os participantes. A discussão acontecia por meio da escrita em uma sala de bate-papo e, nesse ambiente, era possível notar que minimizar/maximizar tornavam-se ações constantes entre as discussões, pelo fato de os participantes terem que consultar suas construções no Wingeom e também a ferramenta portfólio, ou para ver aquilo que os colegas haviam compartilhado (construções, justificativas, etc.) e, assim, buscar argumentos para fomentar a discussão, ou para compartilhar suas construções e outros materiais com os demais. Isso é evidenciado, por exemplo, quando Marie menciona: “*Vou tentar colocar no portfolio, nao falem muito enquanto nao estou lendo*”. Essa característica da discussão matemática em salas de bate-papo, como as do TelEduc, ilustra como que as TIC podiam ser coordenadas, devido ao contexto em que as interações ocorriam.

CAPÍTULO 6

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo faço uma discussão dos resultados apresentados no capítulo anterior. Essa discussão é realizada tendo como base o construto teórico seres-humanos-com-mídias, proposto por Borba e Villarreal (2005), e nas idéias de pensamento coletivo (ou coletivo pensante) e inteligência coletiva apresentada por Lévy (1993; 1999; 2003). Essa discussão se torna relevante à medida que investigo como se dá a produção matemática em um ambiente virtual de aprendizagem, de um coletivo formado por humanos e não humanos.

Apresento como a produção matemática se caracterizou em um ambiente virtual de aprendizagem, no qual diferentes mídias estiveram presentes. Busco confrontar os dados analisados nos episódios - 1) *A Discussão Matemática no Chat: seres-humanos-com-e-no-chat*, 2) *A Matemática e o Wingeom: seres-humanos-com-Wingeom*, 3) *Demonstração Matemática em um Ambiente Virtual de Aprendizagem*, 4) *Coordenando diferentes Tecnologias da Informação e Comunicação* - com um referencial teórico que sustenta essa análise. Acredito que o conhecimento é produzido coletivamente, pois as mídias ou tecnologias intelectuais (oralidade, escrita e informática) não são neutras no processo de produção matemática. Com esta concepção discuto os resultados encontrados na análise dos dados.

6.1 O Chat Enquanto Espaço-Mídia

Como se dá a produção matemática em um *chat*? Qual o papel do *chat* nessa produção? Essas são perguntas que instigam essa pesquisa. E na busca de

encaminhamentos, a partir da análise das discussões matemáticas em um curso a distância, via Internet, alguns indícios foram apontados. Neste curso, em geral, os participantes pensaram “dentro” de um *chat* e, inclusive, com ele, já que é difícil estabelecer uma dicotomia entre as formas de expressar o pensamento e o ato de pensar propriamente dito. Nesse aspecto, o *chat*, enquanto mídia, transforma a natureza da comunicação. Ele condiciona a maneira como as pessoas, separadas geograficamente, se comunicam e produzem conhecimento. A escrita que ocorre no *chat* é outra, pois apresenta características da fala. É uma fala escrita. Além disso, grande parte daquilo que integra a comunicação é transformado quando acontece nesse novo cenário. Por exemplo, as expressões faciais e os gestos, característicos da comunicação oral, são manifestados a partir de estratégias de linguagem, de um discurso mais detalhado e descritivo. Mas também chamo a atenção com relação ao papel do *chat* enquanto espaço de comunicação, por acreditar que ele transformou fortemente a maneira como a matemática foi produzida e isso não diminui o seu importante papel enquanto mídia. Nesse sentido, ele é mídia que permeia a produção matemática, de modo a condicioná-la conforme afirmam Borba e Villarreal (2005).

No episódio “A Discussão Matemática no *Chat*: seres-humanos-com-e-no-*chat*”, na cena em que Carlos mostra estar com dúvida com relação à definição de retas reversas, vários colegas tentam ajudá-lo de diferentes formas, ora apresentando a definição matemática, ora dando exemplos e, desta forma, o *chat* transforma a maneira como essas explicações foram dadas, já que estando fisicamente separados e ele sendo o principal recurso comunicacional, muitas vezes o discurso foi elaborado de maneira criativa para que os participantes pudessem imaginar certas situações.

Nesta cena, é possível notar que havia o objetivo de ajudar Carlos a entender o conceito de retas reversas, ou seja, havia uma preocupação comum, o que para Lévy (2003), no que diz respeito à inteligência coletiva, vai além do aspecto cognitivo e ela pode ser compreendida como “trabalhar em comum acordo”.

Quando Marie explica “*Imagine uma reta no teto da sala onde voce está e uma outra no chão, em planos que formam angulos de 90 graus*”, e em seguida complementa sua explicação com a mensagem “*pense numa reta no teto, na sua frente*”

e outra na interseção da parede da direita com o chão. Uma lá em cima e outra aí em baixo” fica explícito como a discussão matemática se transforma em um ambiente virtual. Ou seja, é bem provável que se Marie e Carlos estivessem em um mesmo espaço físico, ela apenas faria um gesto de apontar para determinados lugares da sala, a qual se refere no exemplo, para que ele imediatamente percebesse uma ilustração do que são retas reversas. Isso é um exemplo do que Lévy (2003) chama de espaços de significação. São espaços “que nascem da interação entre pessoas, compreendem ao mesmo tempo as mensagens, as representações que elas evocam, as pessoas que trocam e a situação como um todo, tal como é produzida e reproduzida pelos atos dos participantes” (LÉVY, 2003, p. 125).

Desse modo, foi possível identificar uma tensão com relação ao papel do *chat* na produção de conhecimento. Ele apresenta duas facetas que não são disjuntas, pelo contrário, estão ligadas. O *chat* é espaço-mídia. Para Gracias (2003, p. 117) “[...] a estrutura do chat tem alguma influência na organização dos diálogos, sendo que cada um fala quando quer. Este já é um exemplo de como uma tecnologia da inteligência pode condicionar a forma como se pensa [...]”. Assim, acredito que nos dois sentidos (espaço e mídia) o *chat* moldou a produção matemática do curso.

Pensando, especificamente, como espaço, ambiente comunicacional, o *chat* condiciona a maneira de comunicar e um coletivo formado por pessoas, que nele se encontram, e por outras mídias, vistas como co-autoras no processo cognitivo se constituiu. Um **coletivo pensante**, formado por humanos e não-humanos (LÉVY, 1993).

No campo da Educação Matemática esse coletivo é conhecido como seres-humanos-com-mídias (BORBA e VILLARREAL, 2005). Concorro com Borba e Villarreal (2005) de que a mídia molda a maneira como as pessoas pensam, assim como as pessoas moldam a mídia, já que a tecnologia está impregnada de humanidade. Por exemplo, no desenvolvimento de um ambiente virtual pode ser evidenciada uma forte influência humana, já que é o humano que o desenvolve para suprir as suas necessidades. Em outro sentido, esse ambiente virtual molda a comunicação entre os participantes que nele se encontram e, neste contexto, a metáfora da linearidade é

substituída pela descontinuidade característica da Internet. Os autores acreditam que o conhecimento é produzido com as mídias ou tecnologia da inteligência, ou seja, por um coletivo seres-humanos-com-mídias e não apenas pelo humano ou por coletivos dele. Uma das preocupações relacionada a essa visão teórica é de se refletir como as tecnologias podem ser vistas como atores de um coletivo pensante.

Pesquisas desenvolvidas por membros do GPIMEM ilustram como que softwares gráficos e geométricos, calculadoras gráficas e Internet tornam-se co-autores do conhecimento nesse coletivo (BENEDETTI, 2003; GRACIAS, 2003; BORBA, 2005; SCUCUGLIA, 2006; BORBA e ZULATTO, 2006). Nesta pesquisa, acredito que também se constituiu um coletivo pensante, uma vez que mídias como o Wingeom e o *chat*, por exemplo condicionaram a produção matemática dos alunos-professores.

E além desse coletivo pensante, acredito, também, que no curso se formou uma **inteligência coletiva** (LÉVY, 2003). Por inteligência coletiva entende-se “*uma inteligência distribuída por toda parte, incessantemente valorizada, coordenada em tempo real, que resulta em uma mobilização efetiva das competências*” (LÉVY, 2003, p. 28, grifo do autor). Sob esta ótica, o *chat* pode ser visto como um ambiente que tem como finalidade reunir pessoas com diferentes saberes ou inteligências para a constituição de uma inteligência coletiva. Desse modo o coletivo de humanos poderá socializar conhecimentos, desenvolvê-los e ampliá-los reciprocamente.

Para Lévy (2003, p.26)

a inteligência coletiva não é um conceito exclusivamente cognitivo. Inteligência deve ser compreendida aqui como na expressão “trabalhar em comum acordo” [...]. Trata-se de uma abordagem de caráter bem geral da vida em sociedade e de seu possível futuro.

E acrescenta ainda

Em nossas interações com as coisas, desenvolvemos competências. Por meio de nossas relações com os signos e com a informação adquirimos conhecimentos. Em relação com os outros, mediante iniciação e transmissão, fazemos viver o saber. Competência, conhecimento e saber (que podem dizer respeito aos mesmos objetos) são três modos complementares do negócio cognitivo, e se transformam constantemente uns nos outros (LÉVY, 2003, p. 27).

Sendo assim, acredito que a inteligência coletiva é uma teoria que valoriza o aspecto social enquanto que a idéia de pensamento coletivo e seres-humanos-com-mídias enfatiza o aspecto intelectual, cognitivo. Uma idéia não suplanta a outra, pelo contrário, entendo que as interações no *chat*, no caso desta pesquisa, foi possível identificar uma inteligência coletiva, uma vez que o *chat*, enquanto espaço, possibilitou a reunião de diferentes pessoas para socializarem suas experiências. Por outro lado, o *chat*, enquanto mídia, condicionou as ações, a comunicação, enfim, a produção matemática como um todo e um coletivo pensante formado por seres humanos e não humanos pensou junto. Nesse sentido, Borba (2005) acredita que chats transformam a Educação Matemática e, em particular, a produção matemática, já que o coletivo seres-humanos-com-*chat* gera um tipo de escrita matemática que é diferente daquela desenvolvida em ambientes usuais, nos quais gestos e olhares fazem parte da comunicação.

Com relação ao coletivo seres-humanos-no-*chat* há a emergência de uma inteligência coletiva que está intimamente ligada com os múltiplos saberes que foram evidenciados no grupo de alunos-professores que participou do curso analisado. No próximo item discuto essa idéia e a relação às múltiplas interfaces, mídias e saberes presentes no curso.

6.2 Múltiplas Interfaces, Múltiplas Mídias, Múltiplos Saberes

O grupo de alunos-professores era bastante heterogêneo, conforme apresentei no capítulo 4. Sendo assim, alguns tinham pouco contato com o conteúdo de geometria euclidiana, em particular a espacial, e, por essa razão, sentiam-se inseguros em discutir suas justificativas matemáticas e suas dúvidas. Por outro lado, alguns participantes, mesmo não apresentando uma ampla familiaridade com esse conteúdo, procuravam expor suas idéias sempre tentando vinculá-las a aspectos matemáticos formais. Além disso, uma das participantes era especialista em geometria, com vasta experiência na área e muito influenciada por sua prática pedagógica que incluía o uso do *software* Cabri e materiais manipulativos. Eram diferentes saberes. Concordo com Lévy (2003, p. 121) que o *saber* não se refere apenas ao conhecimento científico. Sendo assim, ele

pode abranger as experiências vivenciadas, a maneira de ser de cada um, a capacidade de organizar e reorganizar as informações.

Marcelo e eu, enquanto professores do curso, também éramos ajudados pelos alunos-professores, pois também tínhamos dúvidas, nos enganávamos e não entendíamos certas demonstrações ou justificativas matemáticas que eram por eles apresentadas no *chat*. Nesse sentido, também somos parte desse coletivo inteligente. É claro, que as tecnologias da inteligência (oralidade, escrita e informática) também estavam permeando a inteligência coletiva, uma vez que elas não são neutras no processo de produção do conhecimento. O Wingeom, os materiais manipulativos, livros didáticos e mesmo o ambiente virtual condicionavam as ações e as discussões matemáticas que ocorriam. Maria, em alguns momentos, destaca que “*tengo el libro de consulta a mi lado!!!!*”, o que evidencia o pensar com as mídias.

As múltiplas mídias e múltiplas interfaces utilizadas no processo de produção matemática também estavam relacionadas aos múltiplos saberes e formas de ensinar e aprender de cada um dos alunos-professores. Neste contexto foi possível observar que as diferentes experiências, familiaridade ou contato com o conteúdo de geometria espacial, possibilitava aos participantes desenvolverem as atividades de modo muito particular, ou seja, alguns usavam mais a intuição, experimentação, enquanto outros buscavam uma solução mais analítica. Nesse sentido, concordo com Lévy (1999) que no ciberespaço, em geral, se encontra “um novo estilo de pedagogia, que favorece ao mesmo tempo as aprendizagens personalizadas e a aprendizagem coletiva em rede” (p. 158).

Foi possível notar a necessidade de “trafegar” por diferentes interfaces como o Wingeom, os portfólios, o *chat* e outras “janelas” na tela do computador, o que gerava uma discussão hipertextual. E, além disso, recursos que não estavam ligados diretamente com o ambiente, como materiais manipulativos, também eram utilizados e se mostravam presentes, virtualmente, no fazer matemática à distância. Na tentativa de verificar como os participantes agiam com essa característica da discussão, perguntei se de fato eles usavam diferentes recursos durante o desenvolvimento das atividades e,

assim, fica evidenciado que era necessário certas habilidades informáticas para lidar com vários recursos e ao mesmo tempo ter que discutir, socializar no *chat*.

<Silvana> uma coisa q me intriga [...] é q dá para perceber q vcs usam vários recursos para fazer as atividades, não só o soft sugerido... é verdade isso???

<Claudia e Carlos> muitas vezes copiava e colava ou quando acompanhava muito digitava pouco

<mborba> e sobre fazer matematica tanto aqui no chat como no teleduc? algo a dizer?

<Maria> cuantas habilidades juntas realmente!!! queda la cabeza muyyyy cansada!!!!

No trecho a seguir, Taís acredita que sua participação nas aulas sobre discussão matemática não é a esperada, por julgar que não se sente segura para lançar suas conjecturas e dúvidas. No entanto, devido à sua preocupação em compreender as soluções e justificativas apresentadas pelos colegas, ficava testando no Wingeom aquilo que ia sendo discutido no *chat* e consultando os portfólios dos outros. Neste aspecto, sua participação é bastante relevante, pois mesmo não “falando” no *chat*, conseguiu acompanhar grande parte do desenvolvimento das atividades. Essa é uma das características da produção matemática no *chat*, ou seja, muitas vezes era necessário fazer escolhas: com quem falar ou até mesmo quando falar, já que para organizar e entender a “avalanche” de informações a respeito de uma explicação matemática, seja necessário, em alguns momentos, observar o andamento das discussões para então se posicionar. Do mesmo modo, Márcia mostra que as discussões sobre geometria espacial foram pertinentes, já que ela se considerava distante desse conteúdo e, assim, teve a oportunidade de voltar a estudá-lo. Já Marie, por ter muita experiência nesta área, pôde participar ativamente das discussões e contribuir com os colegas e professores com seus comentários.

<Taís> eu sinto que 'participo' menos nas aulas de geometria porque muitas vezes não sinto segurança para expor algumas conjecturas e, além disso, aproveito as dúvidas que são lançadas para testar no wingeom (que estás sempre aberto nessas aulas), tanto que às vezes meio que perco a noção, quando vejo já fiquei muito tempo sem ler o que se passa, daí... já viu, né. No final das contas é a aula que mais participo.

<Maria> en realidad, a mi me daban mas miedo las aulas de discusion sobre EdMat que sobre geometria

<Marie> Para mim as aulas de Geometria foram "um prato cheio". Adorei.

<Márcia> Sim Marie. Eu estava completamente out em geometria. Nem bibliografia possuo. Já fiz cópias de muitos portfólios para estudar.

O processo de produção matemática possibilitado pela oralidade, pela escrita e pelas mídias informáticas (como softwares) é transformado pela Internet, mais especificamente pelo *chat*. As várias mídias utilizadas durante o processo de produção matemática geravam um discurso hipertextual, já que a discussão matemática que aparecia no *chat* era fragmentada, vinha “aos pedaços”, pois havia um tráfego por diferentes interfaces. Sobre essa característica da matemática produzida nesse ambiente virtual, passo a discutir na seção seguinte.

6.3 A Matemática Colcha de Retalhos e o Hipertexto

Para o desenvolvimento das atividades de geometria espacial, o uso de diferentes mídias ocorreu de maneira e ênfases também diferentes. Investigações realizadas ora com o Wingeom, ora com lápis e papel, ou, ainda, com materiais manipulativos para, posteriormente, serem socializados no *chat*, compõem um coletivo pensante que produz matemática. Esses recursos são mídias que moldam o pensamento, de modo que a cada momento que são utilizados geram diferentes *insights* que direcionam as ações e a apropriação de conceitos matemáticos. Essas múltiplas mídias são co-autoras da produção de conhecimento e a discussão matemática passa a obter características que fazem com que ela se aproxime a um hipertexto. Sendo assim, essa metáfora ilustra como o pensamento acontece. O hipertexto possui relações estreitas com a maneira de produzir e organizar o conhecimento.

Estamos chegando à forma de leitura e de escrita mais próximas do nosso próprio esquema mental: assim como pensamos em hipertexto, sem limites para a imaginação a cada novo sentido dado a uma palavra, também navegamos nas múltiplas vias que o novo texto nos abre, não mais em páginas, mas em dimensões superpostas que se interpenetram e que podemos compor e recompor a cada leitura (RAMAL, 2002, p. 84).

A característica hipertextual se dá à medida que as informações não estão ligadas linearmente. Os alunos-professores lidavam com diferentes interfaces e chegavam a conclusões diferentes, ou às mesmas, porém, as expressavam de diferentes formas. Eles escreviam e liam maximizando e minimizando de maneira

constante “janelas” na tela do computador e tinham que relacionar, conectar, associar as informações de modo a estabelecer ligações entre diferentes fragmentos de idéias.

No episódio “Coordenando Tecnologias da Informação e Comunicação”, na cena em que os participantes discutiam sobre qual é a menor medida pela superfície do tetraedro, dados dois pontos em duas de suas arestas, Marie utilizou um envelope de papel para visualizar o tetraedro de maneira planificada. O que se nota nessa cena é que enquanto alguns alunos-professores utilizavam o Wingeom, outros usavam material manipulativo para, então, se manifestarem por meio do *chat*. Essas idas e vindas a contextos diferentes e utilizando mídias diferentes moldavam o pensamento, de modo que era necessário criar *links* entre as informações para compreender todo o processo que estava em desenvolvimento. Para Lévy (1993) a idéia de hipertexto está ligada à interpretação, à associação, pois “dar sentido a um texto [mensagem, informação] é o mesmo que ligá-lo, conectá-lo a outros textos, e portanto é o mesmo que construir um hipertexto” (LÉVY, 1993, p.72).

Outro aspecto que pode ser visto como uma característica da produção matemática hipertextual, é o fato dos alunos-professores terem que apresentar suas justificativas matemáticas aos poucos, já que consultar os portfólios, investigar no Wingeom, rascunhar soluções com lápis e papel, visualizar com materiais manipulativos e, além disso, discutirem no *chat* suas conclusões e confrontarem-nas com as dos colegas, eram todas ações que geravam uma produção matemática colcha de retalhos, sendo que o *chat* é visto como o espaço no qual os retalhos iam sendo costurados. Isso é evidenciado em vários momentos do episódio “Coordenando Tecnologias da Informação e Comunicação” durante a passagem de uma interface à outra.

Apesar da escrita, em geral, apresentar a característica linear, o pensamento era hipertextual. A colcha de retalhos ia sendo costurada aos poucos, mantendo a linearidade em cada retalho, mas se mostrando não-linear quando vista como um todo.

6.4 O Wingeom em um Ambiente Virtual de Aprendizagem

Desde a elaboração das atividades, que seriam propostas no curso “Tendências em Educação Matemática”, foi possível notar que o fato de ter sido

sugerido o uso do *software* Wingeom para o desenvolvimento dessas atividades sobre geometria espacial, poderia acarretar algumas transformações em todo o processo. Ao elaborar as atividades, por exemplo, percebi que elas deveriam ter um outro *design*, já que o objetivo era propor atividades investigativas, abertas e que oferecessem possibilidades de serem vistas sob diferentes aspectos ou diferentes modos de exploração.

A natureza do curso, via Internet e a distância, também condicionava o modo de propor as atividades, uma vez que eu, enquanto professora do curso, não estaria presente, fisicamente, no decorrer do desenvolvimento das mesmas para esclarecer dúvidas sobre como utilizar o *software* ao realizarem as construções geométricas. Além disso, havia o fato das discussões também serem a distância, por meio de um *chat*, e isso impossibilitava aos participantes mostrarem suas construções aos demais colegas e explicar a eles tendo a construção como apoio, pois por mais que cada um também tivesse realizado a sua construção, nada garantia que ela era a mesma para todos e, muitas vezes, quando se busca explicar uma investigação parece haver a necessidade de fazê-lo mostrando a construção geométrica. Diante disso, neste curso, muitos tiveram que usar a imaginação. A partir dessa característica do ambiente comunicacional, se constituiu um coletivo de seres-humanos-com-Wingeom no decorrer do desenvolvimento das atividades e esse coletivo pode ser estendido para seres-humanos-com-Wingeom-com-*chat* quando me refiro ao momento de produção matemática que ocorria durante as discussões na sala de bate-papo.

No episódio “A Matemática com o Wingeom: seres-humanos-com-Wingeom” é evidenciado como este *software* passou a fazer parte de um coletivo pensante seres-humanos-com-mídias, conforme propõem Borba e Villarreal (2005). A meu ver ele pode ser identificado quando cada participante pensava com o Wingeom para desenvolver as atividades. Nas cenas apresentadas com respeito à visualização, investigação, elaboração e validação de conjecturas, são observadas as diferentes maneiras que o Wingeom foi utilizado, sendo que com relação às construções geométricas, as atividades apresentavam todos os passos a serem seguidos para que ela se efetivasse.

Sendo assim, a produção matemática que se deu durante o desenvolvimento das atividades foi condicionada pelo Wingeom. Cada um dos participantes podia realizar as investigações em seu tempo, já que elas eram enviadas com uma semana de antecedência ao encontro síncrono. Durante o desenvolvimento das atividades, este *software* oferecia a cada aluno-professor, individualmente, as possibilidades dinâmicas e experimentais que eram qualitativamente diferentes daquelas oferecidas por outra tecnologia. Neste aspecto a produção matemática acontecia por meio do coletivo participante-com-Wingeom. Após a investigação cada um podia organizar suas soluções e disponibilizar aos demais em seu portfólio no ambiente TelEduc, para a posterior discussão, porém isso nem sempre acontecia.

Diante disso, a minha visão com relação à produção matemática desenvolvida por esse coletivo, tem como principais indicativos aquilo que os alunos-professores apresentavam no *chat*. A produção matemática evidenciada durante as discussões, ora apareciam como descrição acerca do desenvolvimento das atividades, ora de maneira sistematizada, ou seja como uma demonstração e, em outros momentos, como uma conversa informal. Uma outra forma de identificar como se deu a produção matemática com o Wingeom, era analisando as resoluções das atividades disponibilizadas nos portfólio, como já disse, nem todos realizavam esse procedimento.

Entretanto, no momento da discussão no *chat* havia múltiplas mídias e diferentes coletivos atuando, de modo que a produção matemática que cada um havia realizado era resignificada, moldada, condicionada durante a socialização e, assim, o processo de produção matemática continuava. Borba e Villarreal (2005, p. 24) defendem que “novas tecnologias da inteligência resultam em novos coletivos que produzem novos conhecimentos, os quais são qualitativamente diferentes dos conhecimentos produzidos por outros coletivos¹⁵”.

Acredito que uma reorganização, no sentido de Tikhomirov (1981), acontecia no momento da discussão, bem como era evidenciada a criação de um coletivo inteligente que pensava com o Wingeom, socializava, ou seja, pensava em conjunto e

¹⁵ Tradução de: a new technology of intelligence results in a new collective that produces new knowledge, which is qualitatively different from the knowledge produced by other collectives.

reorganizava o pensamento. Como afirma Gracias (2003), novas possibilidades são oferecidas pelas tecnologias digitais. Segundo essa autora, a disponibilidade da tecnologia digital permite que potencialidades sociais e coletivas de cada um se desenvolva e possa ser ampliada reciprocamente. Deste modo, pode haver a construção de um grupo em inteligência coletiva, como propõe Lévy (2003).

Sob esta ótica, pude perceber que quando se trata de produção matemática em ambientes virtuais, e mais que isso, utilizando softwares educacionais, torna-se necessário repensar os modelos de atividades que serão propostas. O que se nota é que em contextos como o desta pesquisa, é que novas maneiras de propor, desenvolver e discutir atividades de matemática estão sendo evidenciadas. Como já constatou Lopes (2004), em sua pesquisa, em um ambiente virtual no qual alunos desenvolveram e discutiram atividades sobre transformações geométricas utilizando o *software* Cabri-Géomètre II, aquelas que não se mostraram situações-problemas e desafiadoras não suscitaram discussões.

Nesse sentido, mesmo com alguns avanços no âmbito da Educação Matemática à distância, ainda há a necessidade de discutir qual o tipo de pedagogia mais adequada para ambientes virtuais de aprendizagem, no que tange à produção matemática. Pensar sobre como propor atividades, de acordo com as mídias disponíveis, é um ponto inicial. Além disso, observei que, o fato de existirem dois professores liderando o curso também foi fundamental, uma vez que um curso à distância demanda *feedbacks* mais freqüentes aos participantes (e-mail, responder e criar fóruns, suporte técnico, entre outros).

6.5 Visão dos Participantes

Nesta seção apresento e discuto algumas opiniões e visões dos alunos-professores com relação ao andamento do curso, bem como sua experiência ao participar de um curso a distância para discutir matemática, por meio das atividades de geometria espacial. Nesse sentido, abordo dois aspectos que foram evidenciados: com relação à aprendizagem matemática no decorrer das discussões e com relação ao fato de ter que discutir/produzir matemática à distância, via Internet.

6.5.1 Com Relação à Aprendizagem Matemática

“Toda atividade, todo ato de comunicação, toda relação humana implica um aprendizado” (LÉVY, 2003, p. 27). Com esta visão me sinto confortável em falar que houve indícios de aprendizagem no curso, mesmo sabendo que o interesse era discutir matemática com professores desta área, os quais já possuíam conhecimentos prévios sobre o conteúdo de geometria euclidiana espacial. De fato, como diz Lévy (2003) ninguém sabe tudo, todos sabem alguma coisa. Diante disso, no intuito de explicitar como os alunos-professores viram a experiência de participar do curso e, principalmente, de produzir matemática naquele contexto, nós lançávamos algumas questões ao término dos encontros sobre discussão matemática, para que eles pudessem expressar suas visões e descrever quais as contribuições da discussão sobre atividades de geometria euclidiana espacial para a sua formação. Marie, que possui uma ampla formação em geometria também manifestou interesse em saber se no curso a aprendizagem foi efetivada de alguma forma. Perguntas do tipo *alguém aprendeu matemática no chat? o que, como ou por que aprendeu aqui hoje?* foram destinadas e comentadas pelos participantes do curso.

<mborba> alguem acha que aprendeu matematica hoje aqui nesse chat? Por que?

<Maria> Si. Las dudas de los otros obligaban a volver a ver las figuras y volver a analizarlas

<Márcia> Claro que sim, principalmente que a muito tempo não trabalho com geometria.

<Maria> Por ejemplo, en el caso que arriesgué que las diagonales del cubo formaban un ángulo recto!!!!

<Marie> Gostaria de fazer uma pergunta para aqueles que não gostam (ou não gostavam) ou não sabem tanta geometria: voces conseguiram realmente APRENDER alguma coisa daquilo que não sabiam mesmo?

<Maria> tenia pocos conocimientos de geometria del espacio. se aprendio mucho aqui

<Taís> eu aprendi, revi, tive que refazer algumas atividades após as discussões para reparar algumas propriedades que não tinha percebido. Pra mim foi muito bom.

<Victória> Para mim aprendi mais geometria tentando fazer as atividades quanto nas discussões aqui. AS DISCUSSÕES também foram muito ricas para mim apesar da minha pouca participação delas.

<Taís> Aprendi muitas coisas novas hoje. Estou gostando muito dessas aulas de Geometria.

Outro aspecto referente à aprendizagem durante o curso se deve ao fato dos alunos-professores terem trabalhado com o Wingeom, uma vez que este *software* era novidade para todos eles. Carlos, em diferentes momentos fala da importância do contato com o Wingeom, mas Marie, por exemplo, mostrou algumas dificuldades na utilização do mesmo para a realização de cálculos matemáticos e aplicação de fórmulas matemáticas usando o menu *Medidas* do Wingeom. Em alguns momentos ela se sentia mais à vontade usando materiais manipulativos ou até mesmo lápis e papel.

<Carlos> foi um importante contato com o Wingeom, uma ótima discussão sobre o seu uso, dificuldades, perspectivas, idéias, foi muito legal

<Carlos> Ganhei estímulo em usar o Wingeom, a gente acaba sabendo q existe mas nunca usa por não conhecer ou por achar q não é muito funcional

<Carlos> O Wingeom não é tão difícil é preciso futucar mais, formular mais questões.

<Marie> Achei legal construir as figuras, descobrir as relações entre elas, mas achei complicado fazer os "cálculos" no Wingeom. Prefiro trabalhar sempre com as formulas [usando lápis e papel] para chegar as relações que a Sil pediu. Foram realmente interessantes as relações que tivemos que descobrir [...].

As atividades que foram propostas tinham um caráter aberto e possibilitaram aos participantes realizar investigações matemáticas. Nesse sentido, Keila comentou ter utilizado algumas das atividades com seus alunos e manifestou interesse em trocar idéias sobre outras atividades. Isso me leva a crer que o curso também serviu de ambiente para a troca de experiências. Nesse sentido, foi possível notar que tanto os alunos-professores podiam aprender nas discussões que ocorreram no *chat*, quando, por exemplo, era apresentada algumas soluções das atividades, quanto os próprios professores, quando equívocos eram evidenciados ou quando sua explicação era completada pelos alunos-professores.

<Keila> usei silvana, uma atividade sua da aula anterior com uns alunos do ensino médio que estavam tendo problema com diagonais de paralelepípedo, eles adoraram, e disseram: ahh. agora enxerguei a bendita.

<Keila> espero poder usar mais. Na escola onde trabalho tem um laboratório de informática bem legal, e podemos usá-lo livremente, tenho aulas lá toda semana. Não são meus alunos de geometria, são de álgebra, me procuraram com dúvidas e usei o software para explicar.

<Keila> espero usar mais. Se tiver mais atividades, pode mandar, mas especificamente para alunos do ensino fundamental e médio
<mborba> foi legal essa confusão no final. eu disse coisa errada, tinha achado que a marie disse errado por que para mim estava escrito algo que na verdade não estava.
<Maria> Todavía me ha dejado emocionada la demostración de silvana la estuve pensando todo el fin de semana. Gracias silvana!!!!

Esta pesquisa não tem como foco a aprendizagem, e sim investigar como se dá a produção matemática à distância. Contudo, discutir acerca da aprendizagem durante o processo de produção matemática me pareceu relevante, pois este é um aspecto que parece estar intimamente ligado ao processo de produção matemática. Nesta perspectiva, no item a seguir trago, do ponto de vista dos alunos-professores, alguns indícios de como a produção matemática ocorreu.

6.5.2 Com Relação a Produzir Matemática a Distância

Assim como indícios de produção matemática foram identificados, a maneira como essa produção se deu também foi caracterizada pelos alunos-professores. O fato de ter que discutir matemática nesse contexto gerava certas inquietações como, por exemplo, por que alguns participantes pouco ou quase nada manifestavam mesmo estando logados? Por que eram sempre os mesmos que pareciam participar de maneira ativa nas discussões? Por que outros nem sequer “compareciam” às aulas de matemática? Seria o problema com a matemática propriamente dita, ou com o fato de ser à distância?

Sendo assim, os alunos-professores apresentaram suas opiniões com relação ao produzir matemática à distância e à discussão e participação no *chat*.

<mborba> [...] eu queria fazer uma pergunta a vocês. Como é discutir matemática a distância? que diferenças existem com o presencial? [e] se tivéssemos discutindo geometria em ambientes usuais???

<Marie> Eu acho que não é só "a distância". Tem o fator de usar as TIC para experimentar as ideias antes de discuti-las. Isso é fantástico. Se estivessemos em uma sala de aula usando as Tic talvez não tivesse tanta diferença, mas se fosse numa aula tradicional, daí esta aqui (com Tic) seria sempre melhor.

<Márcia> [...] achei interessante como alguns de nós tem facilidade de se expressar, fora do quadro e giz. Um outro aspecto, são as leituras [e as atividades] serem feitas antes, para a discussão.

<Marie> O que eu senti é que algumas pessoas ficaram muito quietinhas... Por que não falaram nada apesar de estarem na lista. Alguém aqui tem trauma com geometria? Essa é uma questão muito importante pra mim que vivo lutando para melhorar o ensino de geometria. Muitas vezes não sei quais podem ser as dúvidas dos alunos, pois trabalho há muito tempo com o assunto.

<mborba> o que achei ruim, foram muitas ausências e muita gente calada!!!!

<Marie> Bom, eu gostei da aula, mas queria ter conseguido mostrar mais coisas pra vocês. É difícil falar de Geometria. Quem já teve aula comigo sabe que para cada conceito eu tenho algo para "mostrar", para as pessoas manipularem e aqui eu fiquei meio amarrada.

<Marie> A experiência de discutir matemática virtualmente, com base nas atividades desenvolvidas com as Tic para mim foi ótima. Eu não tinha ideia de como isso poderia ser feito e agora tenho. Foi muito rico, para conhecer o pensamento de outras pessoas sobre um mesmo problema, como tb para ver quais são as possibilidades e os limites de aprender matemática a distância.

O fato de o *chat* utilizado não possibilitar o compartilhamento simultâneo de figuras e construções feitas no Wingeom, evidencia uma forte característica que condicionou a produção matemática. Por outro lado, o envio com antecedência das atividades para serem desenvolvidas e discutidas no *chat*, na opinião de Maria, ajudou para que a discussão fosse mais direcionada.

<Maria> me parece que faltan las herramientas gráficas para acompañar las explicaciones. Salvando eso es casi un clase presencial

<Maria> pero hay que hacer las actividades antes de la clase, pues sino uno puede estar medio "perdido"

Claudia e Carlos mencionaram uma nova característica da visualização em um curso a distância, aquela na qual os participantes tinham que tentar visualizar a investigação feita pelos colegas, ao usarem o Wingeom, materiais manipulativos, por exemplo, analisando a descrição feita no *chat*.

<Claudia e Carlos> foi algo diferente e interessante principalmente qd tentamos visualizar o raciocínio do colega mesmo usando as tics.

<Maria> es cierto, seguir el razonamiento del otro es una interesante actividad

Sendo assim, nesta seção, analisei as dificuldades de interação no *chat* ao se discutir atividades de geometria euclidiana espacial. As ausências ou o “silêncio” durante as discussões no *chat* geram inquietações que vão além do escopo dessa pesquisa, pois afinal, pensar o que leva um aluno-professor “não participar” das

discussões, também não está resolvido no ambiente usual da sala de aula (presencial). E, além disso, não há certeza de que mesmo não “falando”, no caso do silêncio, não haja participação. Por fim, o não compartilhamento de figuras, construções, imagens levam a busca de outras formas de visualizar por meio da descrição de uma atividade realizada por alguém que não se encontra fisicamente próximo.

No decorrer deste capítulo apresentei uma discussão sobre os resultados obtidos na análise dos dados, a partir de um olhar teórico. Apresentei, ainda, o ponto de vista dos alunos-professores com relação à experiência vivenciada por eles. Com essa discussão busquei encontrar possíveis respostas, ou encaminhamentos, para a pergunta norteadora desta pesquisa que é: *como se dá a produção matemática, em um ambiente virtual de aprendizagem, de um coletivo formado por humanos e não humanos?* Sendo assim, no próximo item faço uma síntese desses possíveis encaminhamentos de maneira a concluir este trabalho, bem como, apresentar perspectivas para pesquisas futuras sobre a temática aqui abordada.

6.6 Considerações Finais

Neste trabalho, apoiada, principalmente, nas idéias de Borba e Villarreal (2005), e em Lévy (1993; 1999; 2003), discuto como se dá a produção matemática, mais especificamente sobre geometria euclidiana espacial, em um curso a distância sobre “Tendências em Educação Matemática”, com base em encontros síncronos, via *chat*, no qual um coletivo de seres humanos e não humanos se constituiu.

Pesquisas apontam para a importância de se estudar aspectos de ambientes virtuais (GRACIAS, 2003; MORGADO, 2003; RAMAL, 2003; BORBA, 2004b; BELLO, 2004; LOPES, 2004; BORBA, 2005 entre outras), pois se trata de um novo espaço, conforme discuto no capítulo 3. Nesta pesquisa explorei diferentes concepções de espaço. Partindo de várias conotações que emergem do cotidiano até uma noção mais tradicional que vem da Matemática e que é uma noção gerada a partir da geometria euclidiana. E, para finalizar apresentei a noção de ciberespaço a partir de uma revisão bibliográfica. Essa foi uma parte importante desse trabalho, uma vez que não tinha sido abordada pelas pesquisas do GPIMEM e, também, por boa parte da literatura.

Vários membros do GPIMEM vem desenvolvendo pesquisas que buscam explicitar como as mídias podem se tornar atores na produção de conhecimento. Gracias (2003) pesquisou qual é a natureza da reorganização do pensamento em um curso a distância via Internet, porém, ela não investigou questões específicas do pensamento matemático, pois não havia discussões matemáticas no curso que acompanhou, assim como discuto nessa pesquisa. Richit (2005) traz uma importante contribuição à medida que discute sobre tópicos de geometria analítica com o uso o *software* *geometricks* com licenciandos em matemática, na perspectiva de projetos. Entretanto, o contexto de pesquisa não incluía o ator Internet. Já, Borba (2004b) passou a se preocupar como que as discussões matemáticas podiam acontecer via Internet, mas não tinha dados para fazer essa análise. Para ele, plataformas como o TelEduc não eram apropriadas para o fazer matemática a distância. E, neste trabalho apresento possibilidades e limitações que emergiram da produção matemática utilizando essa plataforma. Já Borba e Zulatto (2006) investigaram questões sobre a produção coletiva em um curso a distância para professores de matemática, no qual propuseram atividades de geometria euclidiana para serem desenvolvidas com o *geometricks*. Contudo, não se tratava de geometria euclidiana espacial e não eram discutidas no *chat* apenas, já que a principal interface utilizada foi a videoconferência.

Essas são algumas pesquisas que o GPIMEM vem desenvolvendo ao longo dos últimos anos, nas quais algumas têm como foco a geometria euclidiana em ambientes computacionais e outras a educação matemática à distância. Estando esta pesquisa entre as que buscam aliar esses dois temas, o meu principal objetivo era investigar como se dá a produção matemática a partir de um coletivo que incluía atores humanos e não humanos como o *Winggeom* e a Internet, em particular.

Além disso, também houve a preocupação de desenvolver uma pesquisa que pudesse estar voltada à sala de aula (presencial ou não) e, neste sentido, ao propor atividades investigativas sobre geometria euclidiana espacial o professor de matemática poderá utilizá-las adaptando-as para o seu contexto.

Para atender a tais objetivos, uma pergunta me motivava constantemente: **como é possível uma produção matemática via Internet?** Daí nasceu a questão,

apresentada em vários momentos nesse texto, que conduziu todo o trabalho. Na tentativa de tentar encontrar respostas, foi necessário buscar apoio em um referencial teórico que sustentasse as idéias que eu me propunha a discutir.

Com esta perspectiva, no capítulo 2 apresentei pesquisas sobre o processo de ensino e aprendizagem de geometria utilizando mídias informáticas, como softwares de geometria dinâmica, por exemplo. Juntamente com essa revisão de literatura, trago a visão teórica dos seres-humanos-com-mídias de Borba e Villarreal (2005), na qual os autores defendem que o conhecimento é produzido por um coletivo de humanos e mídias. Esta visão é ressonante com as idéias apresentadas neste trabalho, já que no ambiente virtual de aprendizagem, no qual as interações ocorriam, a produção matemática se consolidava a partir de atores humanos e não humanos (as mídias) que se moldavam reciprocamente.

Ainda buscando aportes teóricos, no capítulo 3 apresentei diferentes concepções de espaço, com o intuito de mapear como essa noção foi se transformando com o passar do tempo até o advento da Internet. Relacionado a isso, apresento as idéias de Lévy (1993; 1999; 2003) no que se refere ao pensamento coletivo e inteligência coletiva, uma vez que um novo espaço se constituiu com a presença da Internet, o ciberespaço, e passou a invadir diferentes segmentos da sociedade, e inclusive, o educacional. Neste aspecto, o pensamento coletivo passa a sofrer fortes influências do ator Internet e é transformado pelas interfaces associadas a ela, como, por exemplo, o *chat*. E encarando o *chat* como um ponto de encontro, é possível notar que ao reunir pessoas com diferentes saberes, que se ajudam mutuamente, uma inteligência coletiva se consolida. Por esta razão, noções de espaço, hipertexto, conhecimento em rede, virtualidade, entre outros, são visivelmente evidenciados nos resultados dessa pesquisa por transformarem a forma como a produção matemática acontece.

No capítulo anterior apontei várias características da produção matemática à distância. E era esse o meu principal objetivo. Para mim, produzir matemática implica no processo de exploração de conceitos matemáticos, verificação de propriedades, validação e criação de conjecturas, podendo chegar a generalizações. Trata-se de um

processo de organização e reorganização de conhecimentos matemáticos, de pensar matemática, que possibilita momentos de produção matemática, no qual emergem experiências que justificam o estar no mundo de cada um.

Com base nesta concepção de produção matemática, investiguei como ela acontece em um ambiente virtual, no qual as interações eram condicionadas de acordo com as possibilidades comunicacionais que este ambiente oferecia. Comunicar matematicamente, ensinar e aprender matemática, enfim, fazer matemática são ações educacionais fortemente influenciadas por tradições. Existe uma cultura que permeia a comunidade matemática (e não estou excluindo a comunidade de Educação Matemática) de que matemática é difícil e que certamente exige a “presença” física do professor para que haja um diálogo. Entre as minhas inquietações de pesquisadora se incluía isto. Como que em um curso totalmente a distância poderia propiciar uma produção matemática que fizesse sentido para os alunos? No âmbito das pesquisas em Educação Matemática, que se apóiam em uma abordagem qualitativa, parece ser trivial uma investigação deste tipo: **é possível produção matemática à distância?**

Contudo, na atual conjuntura, na qual as tecnologias digitais (em particular a Internet) se infiltram em diferentes segmentos da sociedade, essa era uma dúvida que ainda estava no ar. Talvez, e assim espero, essa pesquisa seja uma resposta. E, sobretudo, aponto possibilidades, limites, desafios, avanços, que podem ser contrastados com outras pesquisas que utilizam diferentes interfaces e modelos comunicacionais (BORBA e ZULATTO, 2006). Não me preocupei em momento algum em apresentar uma produção matemática melhor ou pior daquela que acontece em ambientes usuais de sala de aula, mas preocupei-me sim em apontar algumas transformações que a Internet acarreta, de modo geral, no processo de produção matemática. **Mas então, o que muda em termos de produção matemática?** A discussão matemática, o próprio desenvolvimento das atividades de geometria, neste caso, a maneira como os objetos matemáticos são tratados, a visualização, a linguagem matemática, etc. Essas mudanças geram uma produção matemática condicionada à tecnologia.

Este trabalho, portanto, contribui para uma reflexão sobre a Educação Matemática a Distância, via Internet, área bastante fértil e recente. Muito já se tem pensado sobre as transformações que as tecnologias informáticas vêm acarretando na produção matemática e, ainda há demanda para que mais pesquisas sejam desenvolvidas sob diferentes enfoques. E, com a ascensão das tecnologias digitais, novas questões se apresentam no âmbito científico como desafios a serem investigados. Sendo assim, este trabalho traz um entendimento, uma visão com base em uma experiência e deixa um convite a novas pesquisas sobre essa problemática.

Sendo assim, algumas inquietações não puderam ser contempladas, uma vez que ia além do objetivo aqui proposto. Diante disso, trago algumas questões como perspectivas para pesquisas futuras. Como seria se todos os encontros síncronos do curso fossem sobre geometria? E se os participantes fossem alunos que não tivessem nenhum contato com o conteúdo? E se fosse possível compartilhar construções geométricas de maneira simultânea à fala? Essas são indagações, as quais nesta pesquisa não tenho como responder, uma vez que não se trata do contexto aqui investigado. Porém, alguns pesquisadores como Borba e Zulatto (2006) já vem discutindo esta última questão, entre outras, e apresentando novas possibilidades da produção matemática a distância, via Internet. Uma outra questão, mais pontual, que fica em aberto se refere à visualização. Tendo como contexto de investigação um ambiente virtual de aprendizagem, no qual não é possível compartilhar as mesmas construções geométricas, qual é o *status* da visualização, uma vez que só é possível visualizar a partir da visualização do outro? Esta última foi uma tensão identificada no decorrer desta pesquisa, contudo não cabia aqui um encaminhamento, pois não era este o foco principal. Por esta razão deixo aqui um convite à reflexão, no intuito que outros pesquisadores interessados nesta temática possam investigar tais aspectos.

Não restam dúvidas de que as conclusões aqui apresentadas não são únicas. Como é característico em pesquisa qualitativa, a noção de verdade é relativa e, por isso, cada pesquisador pode interpretar os mesmos dados de maneira distinta. Este é um olhar, que carrega com ele expectativas, interesses, inquietações muito particulares,

mas com a visão aqui apresentada espero que outros pesquisadores sintam-se instigados a investigar outras facetas da Educação Matemática a Distância.

REFERÊNCIAS

- ABBAGNANO, N. *Dicionário de Filosofia*. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2000.
- ALMEIDA, S. T. *Um estudo de Pavimentação do Plano utilizando Caleidoscópios e o Software Cabri-Géomètre II*. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.
- ALVES-MAZZOTTI, A.J.; GEWANDSZNAJDER, F. *O Método nas Ciências Naturais e Sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa*. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 2004.
- ANGROSINO, M. V.; PÉREZ, K. A. M. Rethinking Observation: from method to context. In.: DENZIN, N.K.; LINCOLN, Y.S. (Ed.). *Handbook of Qualitative Research*. London, Sage Publication, 2000.
- ARAÚJO, J.L.; BORBA, M.C. Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
- BACHELARD, G. *A Poética do Espaço*. São Paulo: Martins Fontes, 1993.
- BAIRRAL, M. A. Compartilhando e Construindo Conhecimento Matemático: análise do discurso nos chats. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, ano 17, n. 22, p. 37-62, 2004.
- BAIRRAL, M. A. *Desarrollo Profesional Docente en Geometria* : análisis de un proceso de Formación a Distancia. 2002. Tese (Doutorado em Didáctica de las Ciencias Experimentales i de las Matemáticas), Universitat de Barcelona, 2002.
- BELLO, W. R. *Possibilidades de Construção do Conhecimento em um Ambiente Telemático*: análise de uma experiência de Matemática em EaD. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.
- BENEDETTI, F. C. *Funções, Software Gráfico e Coletivos Pensantes*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.
- BERNARDES, A. S.; VIEIRA, P. M. T. O Chat como Produção de Linguagem. In.: FREITAS, M. T. A.; COSTA, S. R. *Leitura e Escrita de Adolescentes na Internet e na Escola*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- BICUDO, M. A.V.; BORBA, M. C. (Org.). *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2004.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Portugal: Porto Editora, 1999.

BORBA, M. C. *A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. In.: REUNIÃO ANUAL da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 27., 2004. Caxambu. *Anais...* Caxambu: ANPED, 2004a.

BORBA, M. C. As Dimensões da Educação Matemática a Distância. In.: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2004b.

BORBA, M. C.; MALTEMPI, M. V.; MALHEIROS, A. P.S. Internet Avançada e Educação Matemática: novos desafios para o ensino e aprendizagem on-line. *RENTE - Revista Novas Tecnologias na Educação*. Porto Alegre, v. 3, n. 1, maio, 2005. Disponível em <http://www.cinted.ufrgs.br/renote/maio2005/index.html>. Acesso em 03 de abril de 2006.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. V. *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. v. 39, New York: Springer, 2005.

BORBA, M.C. Coletivos Seres-Humanos-com-Mídias e a Produção de Matemática. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2001, Curitiba. *Anais...* Curitiba: UFPR, PUCPR, Universidade Tuiuti do Paraná, 2001.

BORBA, M.C. The Transformation of Mathematics in On-line Courses. In.: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL Group for the Psychology of Mathematics Education, 29, 2005, Melbourne, *Proceedings...*Melbourne: PME, 2005. v. 2, p. 177-184.

CARVALHO, P.C.P. *Introdução à Geometria Espacial*. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA ISOLGRAF, 1999. (Coleção do Professor de Matemática).

CASSOL, A.; HAMMER, M. Geometria Dinâmica: construções lúdicas. *Educação Matemática em Revista*, ano 11, n. 17, p. 40-46, 2004.

CASTELLS, M. *A Galáxia da Internet: reflexões sobre a Internet, os negócios e a sociedade*. Rio de Janeiro: Jorge ZAHAR, 2003.

CASTRUCCI, B. *Fundamentos da Geometria: Estudo Axiomático do Plano Euclidiano*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.

CHRISTOU, C.; MOUSOULIDES, N.; PITTALIS, M.; PITTA-PANTAZI, D. Proofs Trough Exploration in Dynamic Geometry Environments. CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL Group for the Psychology of Mathematics Education, 28., 2004, Bergen. *Proceedings...* Bergen: PME, 2004. v. 2, p. 215-222.

D'AMBRÓSIO, U. Prefácio. In.: BORBA, M. C.; ARAUJO, J. L. (Org). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

DELCIN, R. C. A. A Metamorfose da Sala de Aula para o Ciberespaço. In.: ASSMANN, H. (Org.). *Redes Digitais e Metamorfose do Aprender*. Petrópolis: Vozes, 2005. p. 56-83.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. The Discipline and of Qualitative Research. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Ed.). *Handbook of Qualitive Research*. London: Sage, 2000.

FAINGUELERNT, E. K. *Educação Matemática: representação e construção geométrica*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FAINGUELERNT, E. K. O Ensino de Geometria no 1º e 2º Graus. *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, São Paulo, ano 3, n. 4, 1995.

FONSECA, M. C.; LOPES, M.P.; BARBOSA, M.G.G.; GOMES, M.L.M; DYRELL, M. *O Ensino de Geometria na Escola Fundamental: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais*. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

FRANCO, M. A. *Ensaio sobre as Tecnologias Digitais da Inteligência*. Campinas: Papirus, 1997.

GARNICA, A. V. M. As Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, ano 15, n. 18, p. 91-122, 2002.

GAZIRE, E. S. *O Não Resgate das Geometrias*. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 2000.

GIRALDO, V.; BELFORT, E.; CARVALHO, L. M. Descreptions and Conflicts in Dynamic Geometry. CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL Group for the Psychology of Mathematics Education, 28., 2004, Bergen. *Proceedings...* Bergen: PME, 2004. v. 2, p. 455-462.

GOLDENBERG, M. *A Arte de Pesquisar*. 7. ed. Rio de Janeiro: Record, 2003.

GOUVÊA, F. R. *Um Estudo de Fractais Geométricos através de Caleidoscópios e Softwares da Geometria Dinâmica*. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

GRACIAS, T.A.S. *A Natureza da Reorganização do Pensamento em um Curso a Distância sobre "Tendências em Educação Matemática"*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

HANNA, G. Proof, Explanation and Exploration: an overviw. *Educational Studies Mathematics*, Dordrecht, v. 44, n. 1/2, p. 5-23, 2000.

HERNSTEIN, I. N. *Tópicos de Álgebra*. São Paulo: Editora da Universidade; Polígono, 1970.

KENSKI, V. M. *Tecnologias e Ensino Presencial e a Distância*. Campinas: Papirus, 2003.

KERCKHOVE, D. *A Pele da Cultura: uma investigação sobre a nova realidade eletrônica*. Lisboa: Relógio D' Água, 1997.

LABORDE, C. Dynamic Geometry Environments as a Source of Rich Learning Contexts for the Complex Activity of Proving. *Educational Studies Mathematics*, Dordrecht, v. 44, n. 1/2, p. 151-161, 2000.

LÉVY, P. *A Inteligência Coletiva: por uma antropologia do ciberespaço*. 4. ed. São Paulo: Loyola, 2003.

LÉVY, P. *As Tecnologias da Inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LÉVY, P. *Cibercultura*. São Paulo: Editora 34, 1999.

LOPES, A. *Avaliação em Educação Matemática a Distância: uma experiência de geometria no ensino médio*. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.

LORENZATTO, S. Por Que Ensinar Geometria? *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*. São Paulo, ano 3, n. 4, 1995.

LOURENÇO, M. L. A Demonstração com Informática Aplicada à Educação. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, ano 15, n. 18, p. 100-111, 2002.

MACHADO, N. J. *Matemática e a Língua Materna: análise de uma impregnação mútua*. São Paulo: Cortez, 2001.

MARIOTTI, M. A. Introduction to Proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies Mathematics*, Dordrecht, v. 44, n. 1/2, p. 25-53, 2000.

MARRADES, R.; GUTIERREZ, A. Proofs Produced by Secondary School Students Learning Geometry in Dynamic Computer Environment. *Educational Studies Mathematics*, Dordrecht, v. 44, n. 1/2, 2000.

MARTINS, R. A. *Ensino-Aprendizagem de Geometria: uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

MISKULIN, R. G. S.; AMORIN, J. A.; SILVA, M. R. C. As Possibilidades Pedagógicas do Ambiente computacional TELEDUC na Exploração, Disseminação e na Representação de Conceitos Matemáticos. In.: BARBOSA, R. M. (Org.). *Ambientes Virtuais de Aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed, 2005.

MORGADO, M. J. L. *Formação de Professores de Matemática para o uso Pedagógico de Planilhas Eletrônicas de Cálculo: análise de um curso a distância via Internet*. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2003.

NOVA, C.; ALVES, L. Educação a Distância: limites e possibilidades. In.: ALVES, L.; NOVA, C. (Org.). *Educação a Distância: uma nova concepção de aprendizado e interatividade*. São Paulo: Futura, 2003.

OLIVEIRA, E. G. *Educação a Distância na Transição Paradigmática*. Campinas: Papirus, 2003.

PENTEADO, M. G. Redes de Trabalho: expansão das possibilidades da informática na educação matemática da escola básica. In.: BICUDO, M. A.V.; BORBA, M. C. (Org.). *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2004.

PEREZ, G. *Pressupostos e Reflexões Teóricas e Metodológicas da Pesquisa Participante no Ensino de Geometria para as Camadas Populares*. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 1991.

PONTE, J. P. Estudos de Caso em Educação Matemática. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, ano 19, n. 25, p. 105-132, 2006.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PORTANOVA, R. (Org.). *Um Currículo de Matemática em Movimento*. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2005.

RAMAL, A. C. Educação a Distância: entre mitos e desafios. In.: ALVES, L.; NOVA, C. (Org.). *Educação a Distância: uma nova concepção de aprendizado e interatividade*. São Paulo: Futura, 2003.

RAMAL, A. C. *Educação na Cibercultura: hipertextualidade, leitura, escrita e aprendizagem*. Porto Alegre, Artmed, 2002.

RICHIT, A. *Projeto em Geometria Analítica Usando Software de Geometria Dinâmica*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

RIGODANZO, M.; ANGELO, C. L. Uma Experiência de Transposição Didática com o Cabri-Géomètre II. *Educação Matemática em Revista*, São Paulo, ano 11, n. 16, p. 16-24, 2004.

SANTOS, M. *Pensando o Espaço do Homem*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2004.

SCUCUGLIA, R. *A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas*. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SOCOLOWSKI, R. C. A. J. *Análise das Interações Tutor/Participante: um ponto de partida para avaliação de cursos de desenvolvimento profissional a distância*. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

SOUZA, R. A. Comunicação mediada pelo computador: o caso do *chat*. In.: COSCARELLI, C. V. (Org.). *Novas Tecnologias, Novos Textos, Novas Formas de Pensar*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

TIKROMIROV, O. K. The Psychological Consequences of Computerization. In.: WERTSCH, J. V. (Ed.). *The Concept of Activity in Soviet Psychology*. New York: M. E. Sharpe. Inc, 1981. p. 256-278.

VIRILIO, P. *A Arte do Motor*. São Paulo: Estação Liberdade, 1996.

WERTHEIM, M. *A História do Espaço de Dante à Internet*. Rio de Janeiro: Jorge ZAHAR, 2001.

ZULATTO, R. B. A. *Professores de Matemática que utilizam softwares de Geometria Dinâmica: suas características e perspectivas*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

APÊNDICE

As Atividades sobre Geometria Euclidiana Espacial

Tendências em Educação Matemática

Prof. Dr. Marcelo C. Borba

mborba@rc.unesp.br

Curso de Extensão a Distância

1ª AULA DE GEOMETRIA ESPACIAL (12 de Abril)

- **Enviar, por e-mail, o arquivo das construções, respostas, comentários e dúvidas para Silvana C. Santos no endereço gpimem@rc.unesp.br.**
- **Essas atividades estão em fase de desenvolvimento. Favor enviar críticas e sugestões.**
- **Em todas as atividades marque a opção *Ver/Retas Escondidas/Mostradas* para que as faces dos sólidos apareçam transparentes.**

Atividade 1.1

1. Insira um cubo de aresta # (use as teclas Ctrl+L para ver as letras dos vértices);
2. Insira, na mesa tela, um paralelepípedo de comprimento igual à aresta do cubo (AB), largura igual à diagonal da face (AF) e altura igual a diagonal espacial do cubo (AG);
3. Clique em *Editar/coordenadas* e altere as coordenadas do ponto P do paralelepípedo de modo a afastá-lo do cubo;
4. Use o menu *Anim/ Variação de #* para fazer variar as dimensões dos sólidos;
5. Qual é a relação que existe entre os volumes dos sólidos?

Atividade 1.2

1. Insira um tetraedro regular de aresta 1;
2. Marque o ponto médio R do segmento BC, usando o menu *Pontos/1 coordenadas relativas* (você pode mudar as letras dos pontos clicando com o botão direito do mouse no ponto desejado);
3. Marque, da mesma forma, o ponto médio S do segmento AD;

4. O que você pode afirmar sobre o segmento RS com relação ao triângulo ARD? Justifique sua resposta.

Atividade 1.3

1. Insira um tetraedro regular de aresta 1;
2. Marque o ponto médio M da aresta AC desse tetraedro;
3. Marque na aresta reversa BD o ponto médio N;
4. Marque um ponto P, de coordenada #, na aresta CD;
5. Trace os segmentos MP e NP;
6. Meça as distâncias de cada um desses segmentos;
7. Meça a distância MP+NP;
8. Movimente o ponto P sobre a aresta CD, usando o menu *Anim/Variação de #*;
9. Qual é a menor medida, pela superfície do tetraedro, de M até N? Justifique.
10. E se você estivesse utilizando apenas lápis-e-papel, como você faria?

Atividade 1.4

1. Repita os três primeiros passos da atividade 1.3;
2. Trace o segmento MN;
3. Qual é a relação entre a medida do segmento MN com a distância entre as arestas reversas AC e BD? E quais são seus argumentos para garantir que sua resposta é válida?

Atividade 1.5

1. Insira um cubo de aresta 4;
2. Construa um plano determinado pelos pontos I, J e K das arestas AE, AB, e AD, respectivamente cuja coordenada de cada um desses pontos seja #, para isso utilize o menu Ponto/1 coordenadas relativas;
3. Trace os segmentos IJ, JK e KI, usando o menu Linear/Segmento ou face;
4. Em Anim/ Variação de # e clique em autorev e em seguida autocic e veja o que acontece. Sempre que desejar parar a animação tecle a letra "s";
5. Meça o segmento AI;
6. Encontre a área do plano de corte IJK;

7. Construa um gráfico da área deste plano de corte em função do comprimento AI. Para isso, acesse Janela gráfica no menu *Animação*. Determine as variáveis, o intervalo de 0 a 4 e clique em OK, no menu *Gráfico* dessa nova janela, para desenhar o gráfico;
8. Que figura de corte você obteve? O que você pode afirmar com relação ao gráfico obtido? Qual é a expressão matemática que define essa função?

Atividade 1.6

1. Insira um cubo de aresta #;
2. Trace a diagonal BH;
3. Trace um segmento perpendicular a BH passando pelo vértice A. Para isso, clique no menu *Linear/ Altitudes/ às Retas*;
4. Clique em *Ver/Espessura do segmento* e na caixa que se abre digite AI. Em seguida, escolha uma cor e clique adicionar;
5. Usando o menu *Medidas* calcule a relação HI/BI;
6. No menu *Anim/Varição de #* anime a construção realizada. O que você pode observar?
7. Como determinar o comprimento AI? Qual é o valor do ângulo HAB? O que AI representa no triângulo HAB?

Tendências em Educação Matemática

Prof. Dr. Marcelo C. Borba
mborba@rc.unesp.br
Curso de Extensão a Distância

2ª AULA DE GEOMETRIA ESPACIAL (03 de Maio)

- **Insira em seu portfólio, o arquivo das construções, respostas, comentários e envie dúvidas para Silvana C. Santos no endereço gpimem@rc.unesp.br ou use o fórum de discussão.**
- **Essas atividades foram elaboradas por Silvana C. Santos com a colaboração de Marcelo C. Borba e membros do GPIMEM, em particular, Leandro Diniz. Elas estão em fase de desenvolvimento. Favor enviar críticas e sugestões.**
- **Em todas as atividades marque a opção Ver/Retas Escondidas/Mostradas para que as faces dos sólidos apareçam transparentes.**

Atividade 2.1

1. Insira um paralelepípedo¹⁶ de comprimento 3, largura 2 e altura 6 (use as teclas Ctrl+L para ver as letras dos vértices);
2. Trace as diagonais AC, BD, EG e HF das faces e considere o plano diagonal BDH;
3. Marque o ponto de interseção entre as diagonais AC e BD e o plano BDH, usando o menu *Ponto/Interseção de reta e/Plano*;
4. Da mesma forma, marque o ponto de interseção entre EG e o plano BDH;
5. Trace o segmento determinado pelos pontos de interseção entre as diagonais já traçadas;
6. O que você pode afirmar sobre esse segmento em relação aos planos das bases ABCD e EFGH? Justifique sua resposta ou elabore uma demonstração

¹⁶ O Wingeom não permite inserir paralelepípedo oblíquo assim, em todas as atividades estaremos lidando com poliedros retos.

para essa situação.

Atividade 2.2

1. Insira um paralelepípedo de comprimento #, largura 2 e altura 6;
2. Usando o menu *Anim/Variação de #* digite, na janela que se abre, 0 e em seguida clique *fixar L*. Do mesmo modo, digite 3 e clique *fixar R*;
3. Trace os segmentos AC, CH e AH;
4. Clique em *Ver/Espessura do segmento*, escolha uma cor para os segmentos que acabou de traçar e em seguida clique em adicionar;
5. Trace os segmentos BE, EG e BG;
6. Do mesmo modo, adicione uma cor para esses segmentos;
7. Anime a sua construção e observe o que acontece;
8. O que você pode afirmar sobre os planos determinados pelos pontos ACH e BEG? Justifique sua resposta.
9. O que acontece quando o valor corrente de # é zero?

Atividade 2.3

1. Insira um tetraedro regular de aresta 1;
2. Usando o menu *Anim/Variação de #* digite, na janela que se abre, 0 e em seguida clique *fixar L*. Do mesmo modo, digite 1 e clique *fixar R*;
3. Marque na aresta AB um ponto E de coordenada relativa #;
4. Construa um plano paralelo às arestas AC e BD através do ponto E usando *Linear/Cortar plano* ;
5. Anime a sua construção e observe o que acontece;
6. O que você pode afirmar quanto à secção determinada por este plano? Justifique sua resposta.

Atividade 2.4

1. Insira um tetraedro regular de aresta 1;
2. Trace a perpendicular ao plano da face ABC passando por D. Para isso use o menu *Linear/Altitude/aos planos*;
3. Repita o passo 2 para cada um dos outros vértice e sua face oposta;

4. Ligue os pontos obtidos pela interseção dessas perpendiculares com as faces;
5. Adicione uma cor para esses novos segmentos usando o menu *Ver/Espessura do segmento*;
6. Rotacione a sua construção usando *Anim/Unidade de rotação*;
7. O que você conclui a partir dessa construção? Justifique sua resposta.

Atividade 2.5

1. Insira um tetraedro regular de aresta 1;
2. Marque o ponto médio M da aresta BC;
3. Trace o segmento AM;
4. Trace o segmento DM;
5. Trace a perpendicular ao plano da face ABC passando por D. Para isso use o menu *Linear/Altitude/aos planos*;
6. Do mesmo modo trace a perpendicular ao plano da face BCD passando por A;
7. O que você pode afirmar sobre os segmentos AF e DE? Justifique sua resposta.
8. Marque o ponto G de coordenada # do segmento AF;
9. Do mesmo modo marque o ponto H, também de coordenada #, do segmento DE;
10. Anime a sua construção e observe o que acontece;
11. Trace os segmentos GB, GC e GD e verifique suas distâncias;
12. Adicione uma cor para esses novos segmentos usando o menu *Ver/Espessura do segmento*;
13. O que você conclui ao animar, novamente, essa construção?

Tendências em Educação Matemática

Prof. Dr. Marcelo C. Borba
mborba@rc.unesp.br
Curso de Extensão a Distância

3ª AULA DE GEOMETRIA ESPACIAL (31 de Maio)

- **Insira em seu portfólio, o arquivo das construções, respostas, comentários e envie dúvidas para Silvana C. Santos no endereço gpimem@rc.unesp.br ou use o fórum de discussão.**
- **Essas atividades foram elaboradas por Silvana C. Santos com a colaboração de Marcelo C. Borba e membros do GPIMEM, em particular, Leandro Diniz. Elas estão em fase de desenvolvimento. Favor enviar críticas e sugestões.**
- **Em todas as atividades marque a opção Ver/Retas Escondidas/Mostradas para que as faces dos sólidos apareçam transparentes.**

Atividades 3.1

1. Insira um paralelepípedo de comprimento 3, largura 3 e altura #;
2. Usando o menu *Anim/Variação de #* digite, na janela que se abre, 0 e em seguida clique *fixar L*. Do mesmo modo, digite 5 e clique *fixar R*;
3. Trace as diagonais das bases (AC, BD e EG, FH);
4. Marque o ponto de interseção entre o segmento AC e o plano diagonal que não o contém, usando *Ponto/Interseção de reta e/ Plano*;
5. Da mesma forma, marque o ponto de interseção entre o segmento EG com esse mesmo plano;
6. Trace o segmento determinado por esses pontos de interseção;
7. Marque o ponto médio desse segmento;
8. Inscreva uma esfera nesse paralelepípedo usando *Curvo/Esfera/Raio-centro*;
9. Anime sua construção e observe o que acontece;

10. É possível obter uma esfera inscrita nesse paralelepípedo? Justifique.

Atividade 3.2

1. Insira um cilindro de raio $\#$ e altura $16/(\#^2)$, usando o menu *Unidades/Superfície/Cilindro*;
2. Usando o menu *Anim/Variação de #* digite, na janela que se abre, 0 e em seguida clique *fixar L*. Do mesmo modo, digite 4 e clique *fixar R*;
3. Verifique o volume, digitando a fórmula no menu *Medidas*;
4. Do mesmo modo, verifique a área total desse cilindro;
5. Verifique a variação das medidas que AC (raio) e AB (altura) podem ter;
6. Anime sua figura e observe o que acontece;
7. O que você observou em relação à área e ao volume dos cilindros obtidos? Justifique

Atividade 3.3

1. Insira uma esfera de raio $\#$, usando o menu *Unidades/Superfície/Esfera*;
2. Insira um disco de mesmo centro, raio e pólo da esfera anterior, usando o menu *Curvo/Disco*;
3. Inscreva um cone na semi-esfera, da esfera obtida, usando *Curvo/Cone* com centro A, raio $\#$ e com vértice em B;
4. Determine a razão entre o volume da esfera e o volume do cone inscrito nessa semi-esfera, usando o menu *Medidas*;
5. Da mesma forma, determine a razão entre a área da superfície esférica e a área lateral do mesmo cone;
6. Anime sua construção. O que você conclui a partir dos valores numéricos que obteve?

Atividade 3.4

1. Insira um cilindro de raio $\#$ e altura $2\#$, usando *Unidades/Superfície/Cilindro*;
2. Trace o segmento AB, determinado pelos centros das bases desse cilindro;
3. Marque o ponto médio relativo ao segmento AB;
4. Inscreva uma esfera nesse cilindro usando *Curvo/Esfera/Raio-centro*;

5. Inscreva, também, nesse mesmo cilindro, um cone usando o menu *Curvo/Cone*;
6. Verifique os volumes dos três sólidos obtidos;
7. Anime sua construção e observe o que acontece;
8. Exprima, algebricamente, o que você concluiu em relação ao volume do cilindro e à soma dos volumes da esfera e do cone nele inscritos.

Atividade 3.5

1. Insira um cilindro qualquer, usando *Unidades/Superfície/Cilindro*;
2. Adicione duas esferas de mesmo raio, tangentes entre si, de tal maneira que essas tangenciem as bases do cilindro e a superfície lateral. Onde deverá ser o centro de cada uma dessas esferas? Quais serão os raios? Use o menu *Curvo/Esfera/Raio-centro* para implementar as medidas determinadas por você;
3. Verifique a diferença entre o volume do cilindro e o volume das duas esferas; O que você pode afirmar a partir dessa construção? Justifique.

