

UNESP

Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá

Guaratinguetá

2004



1110000557



***"Remoção de Asteróides
da Ressonância 3:1
pelos Planetas Interiores"***

ERICA CRISTINA NOGUEIRA

203



CARO LEITOR NÃO
RISQUE O LIVRO

Érica Cristina Nogueira

Remoção de Asteróides da Ressonância 3:1 pelos Planetas Interiores

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia
do Campus de Guaratinguetá, Universidade
Estadual Paulista, para a obtenção do título de
Mestre em Física na área de Dinâmica Orbital e
Planetologia.

Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter
**Co-orientador: Prof. Dr. Antonio F. Bertachini de
A. Prado**

557

Guaratinguetá
2003

FACULDADE DE ENGENHARIA
DE GUARATINGUETÁ
BIBLIOTECA



Remoção de Asteróides da Ressonância 3:1 pelos Planetas Interiores

- N778r Nogueira, Érica Cristina
Remoção de asteróides da ressonância 3:1 pelos planetas interiores /
Érica Cristina Nogueira . – Guaratinguetá : [s.n.], 2003
77f. : il.
- Bibliografia: f. 76-77
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade
de Engenharia de Guaratinguetá, 2003
Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter
Co-orientador: Prof. Dr. Antonio F. Bertachini de A. Prado
1. Mecânica celeste I. Título
- CDU 521.1

**“REMOÇÃO DE ASTERÓIDES DA RESSONÂNCIA 3:1
PELOS PLANETAS INTERIORES”**

ERICA CRISTINA NOGUEIRA

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”**

ESPECIALIDADE: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. Othon Cabo Winter
Coordenador

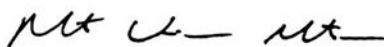
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. OTHON CABO WINTER
Orientador / Unesp-Feg



Prof. Dr. ERNESTO VIEIRA NETO
Unesp-Feg



Prof. Dr. ROBERTO VIEIRA MARTINS
ON

Fevereiro de 2003

DADOS CURRICULARES

ÉRICA CRISTINA NOGUEIRA

NASCIMENTO	15/06/1975 – GUARATINGUETÁ - S.P.
FLIAÇÃO	Yolanda Aparecida Ruzene Nogueira Antonio Augusto Nogueira
1995/2001	Curso de Graduação Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - Unesp
2002/2003	Curso de pós-graduação em Física, nível de Mestrado, na Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - Unesp

Dedico este trabalho aos amigos das repúblicas APAE, Inferninho e Calimucho, aos meus amigos, aos meus pais e aos Professores Othon e Bertachini pelo carinho, amizade e incentivo.

AGRADECIMENTO

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, por ter me concedido essa oportunidade.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Aos professores dos Departamentos de Matemática e de Física e Química desta instituição, especialmente àqueles do Grupo de Dinâmica Orbital e Planetologia pelos exemplos de trabalho, dedicação e profissionalismo. Obrigada pelo muito que me ensinaram.

Aos colegas da pós-graduação pelo apoio e incentivo nos momentos difíceis, pelo incansável bom humor e alegria que foram primordiais no desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos das repúblicas Apae, Inferninho, Calimucho e a todos os amigos que acreditaram no meu trabalho. Obrigada pelo apoio e pela amizade durante todos esses anos.

E em especial aos meus orientadores Othon e Bertachini pelo carinho, dedicação, amizade, incentivo, persistência e pelo não tão simples fato de terem acreditado em mim.

"Eu poderia suportar, embora sem dor,
que tivessem morrido todos os meus amores,
mas enlouqueceria se morressem todos os meus amigos!
A alguns deles não procuro, basta-me saber que eles existem.
Esta mera condição me encoraja a seguir em frente pela vida...
mas é delicioso que eu saiba e sinta que os adoro,
embora não declare e não os procure sempre".

(Vinícius de Moraes)

NOGUEIRA, E. C. REMOÇÃO DE ASTERÓIDES DA RESSONÂNCIA 3:1 PELOS PLANETAS INTERIORES 2003. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.

RESUMO

Estudando a falha de Kirkwood associada à ressonância 3:1 com Júpiter, Jack Wisdom mostrou que hipotéticos asteróides nesta ressonância teriam movimento caótico. Estas órbitas atingiriam altas excentricidade passando a cruzar a órbita de Marte e eventualmente a da Terra. A partir disto, Wisdom sugeriu que os asteróides podem ter sido removidos da ressonância após terem tido uma grande aproximação com estes planetas, resultando na falha observada. O objetivo principal do nosso trabalho é entender o efeito de uma grande aproximação entre esses asteróides e os planetas Marte, Terra e Vênus. Para isso realizamos um estudo analítico e outro numérico sobre as condições em que a perturbação, devido a aproximação com o planeta, altera a órbita desses asteróides a ponto de removê-los da ressonância. A abordagem analítica consistiu em, utilizando a técnica "swing-by", analisarmos a variação da excentricidade e do semi-eixo maior orbital dos asteróides após eles terem tido uma grande aproximação com estes planetas. A abordagem numérica consistiu na implementação de simulações numéricas do problema restrito de três corpos. Assumindo que o fluxo de asteróides que cruzam as órbitas dos três planetas é o mesmo, os nossos resultados mostram que a Terra é o planeta mais relevante neste mecanismo de remoção. Vênus contribui um pouco menos do que a Terra, pois a velocidade relativa com que os asteróides cruzam sua órbita é mais alta. Em função de sua pequena massa, em relação aos outros planetas, Marte não é um grande contribuinte neste mecanismo. Nosso estudo mostrou uma dependência significativa na velocidade relativa entre o asteróide e o planeta para que ocorra o efeito esperado. Assim sendo, propomos uma abordagem para a obtenção da esfera de influência de um corpo em função da velocidade relativa.

PALAVRAS-CHAVE: Ressonância 3 : 1, asteróides, grande aproximação com Marte, Terra e Vênus.

NOGUEIRA, E. C. **A STUDY OF CLOSE ENCOUNTERS BETWEEN INNER PLANETS AND ASTEROIDS FROM THE 3:1 RESONANCE** 2003. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá

ABSTRACT

Studying the Kirkwood gaps associated to the resonance 3:1 with Jupiter, Jack Wisdom showed that hypothetical asteroids in this resonance would have chaotic trajectories such that their orbital eccentricities could suffer very large variation. The orbits could reach values of eccentricities such that the asteroids would become Mars' or even Earth's crossers. The mechanism to remove the asteroids, in order to create the gaps, would be the gravitational effect due to close encounters with these planets. The main goal of our work is to understand the effect of close approaches between those asteroids and the planets Mars, Earth and Venus. In this work we present a study based on an analytical and a numerical approach on the conditions in which the perturbation due to close encounters with the inner planets is enough to remove asteroids from the 3:1 resonance with Jupiter. The analytical approach was to use the swing-by technique to analyze the variation of the semi-major axis and eccentricity of asteroids after they have had a close approach with those planets. The numerical approach consisted of the implementation of numerical simulations of the restricted three-body problem. Assuming that the flow of asteroids that cross the orbits of the three planets is the same, our results show that the Earth is the planet with larger contribution to the mechanism of clearing the gap. The contribution of Venus is a little bit smaller than the Earth since its relative velocity to the asteroids is a little bit higher. Due to its smaller mass, relative to the other planets, Mars is not a great contributor to this mechanism. Our study showed a significant dependence of the relative velocity between the asteroid and the planet in order to occur the expected effect. Therefore, we propose an approach for obtaining the sphere of influence of a body as a function of the relative velocity.

KEYWORDS: 3 : 1 Resonance, asteroids, close approach

Conteúdo

Lista de Abreviaturas e Siglas

Lista de Símbolos

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1. Introdução	22
Metodologia	25
2. Considerações Teóricas	26
2.1. Introdução	26
2.2. Manobra Assistida por Gravidade	26
2.2.1 Descrição do “Swing-by”	28
2.3 Esfera de influência	33
3. Abordagem Analítica	38
3.1 Introdução	38
3.2 Condições Iniciais	38
4. Abordagem Numérica	48
4.1 Introdução	48
4.2 Condições Iniciais	48
4.3 Simulações Numéricas	49
4.4 Um Método para Determinação de Esfera de Influência	57

5. Resultados	62
5.1 Resultados de Marte	62
5.2 Resultados da Terra	63
5.3 Resultados de Vênus	65
5.4 Discussão dos Resultados Numéricos	66
6. Parâmetros Relevantes	69
6.1 Diferença da geometria das órbitas	69
6.2 Relação da massa do planeta com o tamanho da esfera de influência	72
7. Comentários Finais	74
8. Referências Bibliográficas	76

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

G	Constante Gravitacional
h	Momento Angular
km/s	Quilômetro por segundo
PCR3C	Problema Circular Restrito de três Corpos
U.A.	Unidade Astrônômica

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Semi eixo maior orbital
a_{ast}	Semi eixo maior orbital do asteróide
a_f	Semi eixo maior orbital final
a_i	Semi eixo maior orbital inicial
a_h	Semi eixo maior orbital hiperbólico
A	Aceleração gravitacional devido a um planeta
A_2	Aceleração gravitacional devido ao planeta
A_1	Aceleração gravitacional devido ao Sol
C	ponto de cruzamento da órbita do planeta e do asteróide
d	Distância entre a órbita do asteróide e do planeta nos limites da esfera de influência
E	Energia
E_i	Energia inicial
E_f	Energia final
E_t	Energia no instante t
E_-	Energia antes do encontro
E_+	Energia depois do encontro
e	Excentricidade
e_h	Excentricidade hiperbólica
e_{min}	Excentricidade mínima
e_M	Excentricidade da órbita de Marte
e_T	Excentricidade da órbita da Terra
e_V	Excentricidade da órbita de Vênus
f_{ast}	Anomalia verdadeira do asteróide
f_C	Anomalia verdadeira no ponto de cruzamento

f_h	Anomalia verdadeira hiperbólica
M_1	Massa do Sol
M_2	Massa de um planeta
M_M	Massa de Marte
M_T	Massa da Terra
M_V	Massa de Vênus
m_L	Massa da Lua
m	Corpo de massa negligenciável
n	unidade de medida correspondente a $(1/5) R_{inf}$
n_2	Velocidade angular
n_{ast}	Movimento médio do asteróide
n_{pla}	Movimento médio do planeta
P_1	Perturbação devido ao Sol
P_2	Perturbação devido ao Planeta
r_{12}	Distância do Sol ao planeta
r_{23}	Distância do planeta ao corpo
r_{13}	Distância do Sol ao corpo
$r_{\odot\oplus}$	Módulo da distância do Sol a Terra
r_p	Distância de máxima aproximação
R_{Hill}	Raio da esfera de Hill
R_{inf}	Raio da esfera de influência
R_{Lap}	Raio da esfera de influência de Laplace
T	Período orbital do planeta
$\vec{V}_-$	Vetor velocidade da partícula relativo ao planeta antes do encontro
$\vec{V}_+$	Vetor velocidade da partícula relativo ao planeta depois do encontro
$\vec{V}_2$	Vetor velocidade do planeta relativo ao Sol
$\vec{V}_i$	Vetor velocidade da partícula relativo ao Sol antes do encontro
$\vec{V}_f$	Vetor velocidade da partícula relativo ao Sol depois do encontro

V_{∞}	magnitude do vetor velocidade da partícula no infinito
V_{rel}	Vetor velocidade relativa
V_x, V_y	Componentes da velocidade do asteróide relativo ao planeta
V_{x0}, V_{y0}	Componentes da velocidade do asteróide no novo sistema de coordenadas
X, Y	Coordenadas iniciais do planeta
X_0, Y_0	Componentes da posição do asteróide no novo sistema de coordenadas
X_2	Posição do planeta
X_c, Y_c	Ponto de cruzamento entre a órbita do planeta e do asteróide
$\dot{X}, \dot{Y}$	Componente da velocidade do planeta
$\dot{x}, \dot{y}$	Componente da velocidade relativa ao planeta depois do swing-by
Δa	Variação do semi-eixo maior orbital
ΔE	Variação da energia
Δe	Variação da excentricidade
Δf_{ast}	Variação da anomalia verdadeira do asteróide
$\Delta f_{planeta}$	Variação da anomalia verdadeira do planeta
Δh	Variação do momento angular
Δt	Variação temporal
ΔV	Diferença entre a velocidade antes e depois do encontro
$\Delta X, \Delta Y$	Variação das componentes da posição inicial do planeta
$\Delta \dot{X}, \Delta \dot{Y}$	Variação das componentes da velocidade do planeta
$\Delta \theta$	Variação do arco orbital do planeta
α	Ângulo entre a posição do asteróide e o ponto de cruzamento
β	Ângulo entre a posição do planeta e o ponto de cruzamento
δ	Metade do ângulo de curvatura da hipérbole
γ	Ângulo formado entre o asteróide (no novo sistema de coordenadas) e a linha imaginária que une o planeta ao Sol
μ	Parâmetro de massa do sistema
μ_1	Massa adimensional do Sol

μ_2	Massa adimensional do planeta
μ_3	Massa adimensional da Lua
Ψ	Ângulo formado entre a linha do periapse e a linha Sol-planeta
ξ	Ângulo formado entre os segmentos Sol-planeta e planeta-corpo
ρ	Ângulo formado entre os segmentos Sol-planeta e Sol-corpo
τ	Período de tempo

LISTA DE FIGURAS

1.1 - Distribuição de asteróides do cinturão principal indicando as localizações das principais ressonâncias (Murray, 1993).

1.2 - Excentricidade e semi-eixo maior de asteróides na região de ressonância 3:1. As curvas denotam os limites da zona de libração (Murray, 1993).

1.3 - Evolução caótica da excentricidade de um asteróide fictício na ressonância 3:1 com Júpiter. (Murray, 1993).

2.1 Geometria do encontro (Adaptada de Prado, 2001).

2.2 - Descrição geométrica da técnica “swing-by” e algumas de suas variáveis: $\vec{V}_2$ é o vetor velocidade do planeta em relação ao Sol; $\vec{V}_{\infty-}$, $\vec{V}_{\infty+}$ são os vetores velocidade do asteróide relativos ao planeta antes e depois do encontro; δ é a metade do ângulo de curvatura (o ângulo entre $\vec{V}_{\infty-}$ e $\vec{V}_{\infty+}$); r_p é a distância do encontro mais próximo (ponto m) entre o planeta e o asteróide; Ψ é o ângulo entre a linha do pericentro (linha conectando o planeta ao ponto m) e a linha Sol-planeta. (Extraído de Prado, 2001)

2.3 - Soma de vetores velocidades envolvidos na técnica “swing-by”. (Extraído de Prado, 2001)

2.4 - Vetores velocidades envolvidos na técnica “swing-by”. (Extraído de Prado, 2001)

2.5 - Representação do sistema Sol, planeta e um terceiro corpo. Os segmentos r_{13} , r_{23} e r_{12} , denotam as distâncias Sol-corpo, planeta-corpo e Sol-planeta, respectivamente. Os símbolos ρ e ξ denotam os ângulos formados entre os segmentos Sol-planeta e Sol-corpo, Sol-planeta e planeta-corpo, respectivamente.

3.1 - Excentricidade mínima que o asteróide deverá ter para cruzar as órbitas dos planetas, assumindo que os planetas estão em órbitas circulares.

3.2 - Anomalia do Ponto de Cruzamento f_c . A linha tracejada representa a órbita do planeta e a linha cheia a órbita do asteróide.

3.3 - Posição inicial do Asteróide e do Planeta. A_1 e P_1 são a posição inicial do asteróide e do planeta nos limites da esfera de influência, P_2 é a posição final do planeta nos limites da esfera de influência e C é o ponto de cruzamento das órbitas.

3.4 - Anomalia verdadeira do planeta e do asteróide nos limites da esfera de influência. f_c é a anomalia verdadeira do ponto de cruzamento; f é a anomalia verdadeira do asteróide ($f = f_c - \alpha$); f_{p1} é a anomalia verdadeira do planeta ($f_{p1} = f_c - \beta$).

3.5 - Diagrama mostrando a região em que ocorre a intersecção entre as órbitas do planeta (linha tracejada) e do asteróide (linha cheia).

3.6 - Posição do Planeta após a rotação do sistema de coordenadas.

4.1 - Posição inicial do asteróide e do planeta. A_1 e P_1 são a posição inicial do asteróide e do planeta nos limites da esfera de influência, P_2 é a posição final do planeta nos limites da esfera de influência e C é o ponto de cruzamento das órbitas.

4.2 - Topo: Trajetória do asteróide (linha verde) na região de estudo (linha azul) $R_{inf} = 100R_{Lap}$, Esquerda: Energia do problema de 2 corpos versus distância ao Sol e Direita: Energia do problema de 2 corpos versus distância à Terra .
Dados: $e = 0,61$, $\theta = +1,4$.

4.3 - Topo: Trajetória do asteróide (linha verde) na região de estudo (linha azul) $R_{inf} = 100R_{Lap}$, Esquerda: Energia do problema de 2 corpos versus distância ao Sol e Direita: Energia do problema de 2 corpos versus distância à Terra .
Dados: $e = 0,61$, $\theta = -2,2$.

4.4 - Esquerda: Trajetória do asteróide (linha verde) na região de estudo (linha azul) $R_{inf} = 100R_{Lap}$, Direita: Energia do problema de 2 corpos versus distância à Terra. Dados: $e = 0,71$, $\theta = 0$.

4.5 - Esquerda: Trajetória do asteróide (linha preta) na região de estudo (linha azul) $R_{inf} = 100R_{Lap}$, Direita: Energia do problema de 2 corpos versus distância à Marte. Dados: $e = 0,44$ - $\theta = 0,1$.

4.6 - Esquerda: Trajetória do asteróide (linha preta) na região de estudo (linha azul) $R_{inf} = 100R_{Lap}$, Direita: Energia do problema de 2 corpos versus distância à Marte. Dados: $e = 0,49$ - $\theta = -0,1$.

4.7 - Esquerda: Trajetória do asteróide (linha preta) na região de estudo (linha azul) $R_{inf} = 100R_{Lap}$, Direita: Energia do problema de 2 corpos versus distância à Vênus. Dados: $e = 0,84$ - $\theta = 0,7$.

4.8 - Esquerda: Trajetória do asteróide (linha verde) na região de estudo (linha azul) $R_{inf} = 100R_{Lap}$, Direita: Energia do problema de 2 corpos versus distância à Vênus. Dados: $e = 0,97$ - $\theta = -0,4$.

4.9 - Ilustração das órbitas de um planeta (linha tracejada) e de um objeto (linha cheia) ao redor do Sol. As áreas A e B denotam as regiões onde a evolução orbital do objeto pode ser dominada pelo campo gravitacional do planeta.

4.10 - Topo: Trajetória do asteróide (linha verde) na região de estudo (linha azul) $R_{inf} = 100R_{Lap}$, Esquerda: Energia do problema de 2 corpos versus distância ao Sol e Direita: Energia do problema de 2 corpos versus distância à Terra. Dados: $e = 0,61$ - $\theta = -2,2$.

4.11 - Energia do problema de dois corpos versus Evolução da distância do planeta. A linha pontilhada mostra uma variação de 10% na energia e a linha tracejada variação de 1%.

4.12 - Energia do problema de dois corpos versus Evolução da distância do planeta. A linha pontilhada mostra uma variação de 10% na energia e a linha tracejada variação de 1%.

4.13 - Energia do problema de dois corpos versus Evolução da distância do planeta. A linha pontilhada mostra uma variação de 10% na energia e a linha tracejada variação de 1%.

5.1 - Excentricidade (e) versus variação do tamanho do arco orbital de Marte ($\Delta\theta$).

5.2 - Excentricidade (e) versus variação do tamanho do arco orbital da Terra ($\Delta\theta$).

5.3 - Excentricidade (e) versus variação do tamanho do arco orbital de Vênus ($\Delta\theta$).

5.4 - Excentricidade versus variação do tamanho do arco orbital de Marte e Vênus ($\Delta\theta$).

5.5 - Excentricidade versus variação do tamanho do arco orbital da Terra e Marte ($\Delta\theta$).

6.1 - Representação esquemática da trajetória de um asteroide que cruza as órbitas dos planetas: Marte, Terra e Vênus.

6.2 - Velocidade relativa (km/s) versus excentricidade do asteroide.

6.3 - Representação esquemática da trajetória de um asteroide, com excentricidade $e = 0,9$ e $e = 0,6$, que cruza a órbita do planeta.

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Raios das esferas de influência de alguns planetas.

Tabela 3.1 - CONDIÇÕES INICIAIS

Tabela 3.2 - Valores obtidos para um asteróide com $e = 0,61$ quando sofre uma grande aproximação com a Terra. As linhas em verde indicam o limite do arco angular onde ocorre uma variação de pelo menos 0,3% no semi-eixo maior orbital.

Tabela 4.1 - Valores obtidos para um asteróide com $e = 0,83$ quando sofre uma grande aproximação com Vênus.

Tabela 5.1 - Resultados Numéricos.

Tabela 6.1 - Arco orbital para o planeta Marte (em graus)

Tabela 6.2 - Arco orbital para o planeta Terra (em graus)

Tabela 6.3 - Arco orbital para o planeta Vênus (em graus)

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A existência das falhas de Kirkwood no cinturão principal de asteróides está associada ao movimento médio ressonante com Júpiter (Kirkwood, 1867). Uma das lacunas mais relevantes está associada à ressonância 3:1, enquanto que existem grupos nas ressonâncias 3:2 e 1:1. (Figura 1.1)

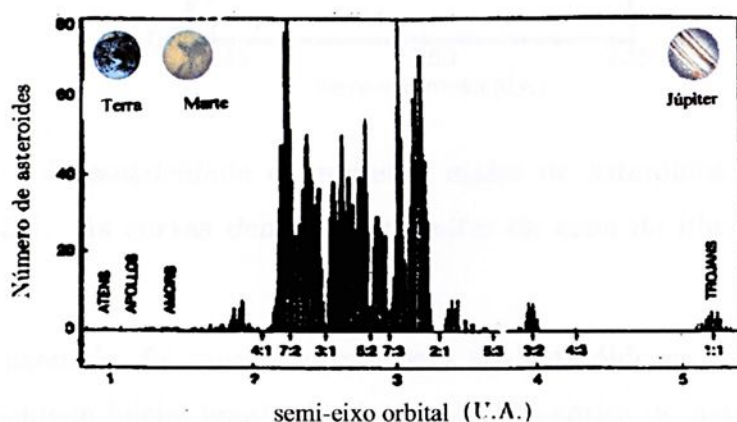


Figura 1.1 - Distribuição de asteróides do cinturão principal indicando as localizações das principais ressonâncias (Murray, 1993).

A origem da falha associada à ressonância 3:1 foi atribuída, segundo Wisdom (1982), ao movimento caótico dos asteróides que teriam atingido altas excentricidades passando a cruzar a órbita de Marte e a órbita da Terra (Morbidelli & Moons (1995)), de modo que estes fragmentos possam colidir ou serem desviados por tais planetas e, eventualmente colidir com o Sol (Ferraz-Mello et al., 1996). A partir disto Wisdom (1982, 1983) e, mais tarde, Dvorack (1992) sugeriram que o “close approach” entre Marte (ou entre a Terra) e os asteróides removeriam os mesmos desta ressonância, resultando na falha observada. Observando a Figura 1.2, vemos que para asteróides com excentricidade inferior a 0,1 basta apenas uma variação de pelo menos 0,3% no semi-eixo maior orbital para que ele seja removido da ressonância 3:1. Para asteróides com alta excen-

tricidade ($e = 0,3$), a variação no semi-eixo maior orbital deve ser de no mínimo 1,0%.

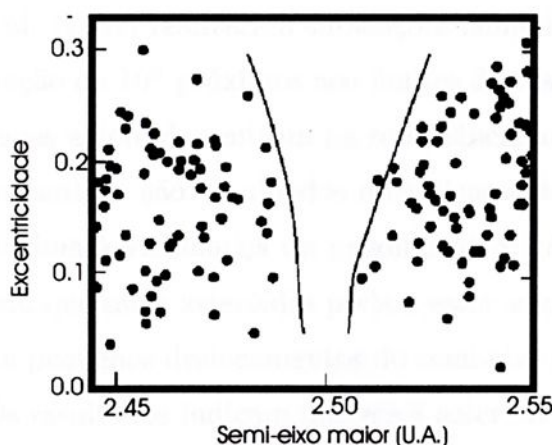


Figura 1.2 - Excentricidade e semi-eixo maior de asteróides na região de ressonância 3:1. As curvas denotam os limites da zona de libração (Murray, (1993)).

Por exemplo, foi mostrado que para um asteróide na ressonância 3:1 com excentricidade inicial igual a 0,15 a evolução caótica do movimento pode elevar esta excentricidade a valores superiores a 0,33. Este é o caso reproduzido na Figura 1.3.

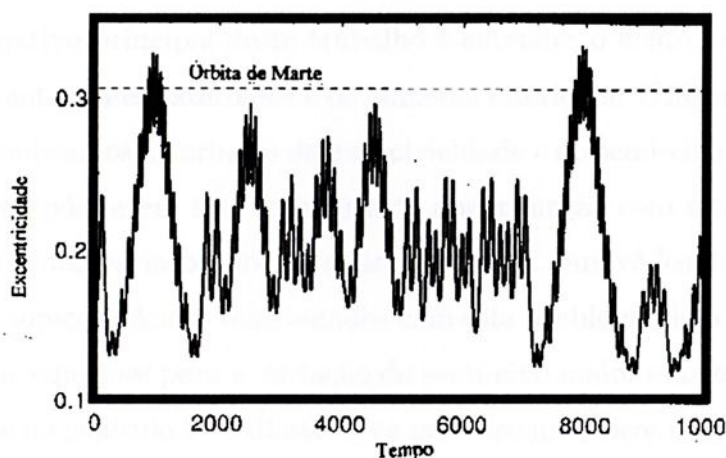


Figura 1.3 - Evolução caótica da excentricidade de um asteróide fictício na ressonância 3:1 com Júpiter. (Murray, (1993)).

Neste caso a órbita do asteróide, que inicialmente não cruzava qualquer

órbita planetária está, em algumas ocasiões, passando a cruzar a órbita do planeta Marte e conseqüentemente podendo ser removido por ele.

Guillens et al. (2002) realizaram simulações numéricas para 41 asteróides com uma inclinação de 10° próximos aos limites da ressonância 3:1 e verificaram que 40% desses asteróides entram na ressonância antes de 100 milhões de anos e subseqüentemente são eliminados dinamicamente. Este fato sugere que a população próxima à vizinhança da ressonância 3:1 é continuamente reposta. Eles sugeriram que estes asteróides podem estar vagando nos limites da ressonância devido a pequenos deslocamentos do semi-eixo maior causado pelo efeito Yarkovsky. Os resultados indicam que esses asteróides poderiam abastecer continuamente a região da ressonância 3:1 e conseqüentemente cruzarem a órbita de Marte e da Terra.

Em seu trabalho, Gladman et al. (1997) estudaram o estado final de asteróides pertencentes às famílias na vizinhança das ressonâncias 3:1, ν_6 e 5:2. Eles mostraram, através de simulações numéricas, que asteróides em ressonância 3:1 com Júpiter, em sua maioria (cerca de 2/3) são removidos da ressonância 3:1 pelos planetas Terra e Vênus, uma parte (cerca de 1/3) pelo Sol e uma pequena fração (menos de 5% deles) são removidos por Marte.

O objetivo principal deste trabalho é entender o efeito de uma grande aproximação entre esses asteróides e os planetas interiores. Utilizando a técnica "swing-by" analisamos a variação da excentricidade e do semi-eixo maior orbital dos asteróides após terem tido uma grande aproximação com estes planetas, e verificamos se estas variações foram suficientes para removê-los da referida ressonância. Os tópicos básicos relacionados com este problema, isto é, a descrição da técnica e as equações para a variação do semi-eixo maior e da excentricidade são abordados no capítulo 2. Utilizando-se métodos analíticos e uma abordagem numérica estudamos a real contribuição de cada planeta neste mecanismo de remoção. No capítulo 3, nós apresentamos a análise analítica para a variação da excentricidade e do semi-eixo maior orbital para um asteróide fictício em ressonância 3:1 com Júpiter após ele sofrer uma grande aproximação com Marte,

Terra ou Vênus.

No capítulo 4, nós discutimos os resultados das simulações numéricas para o encontro entre esses asteróides e os planetas interiores. Através do monitoramento da energia do problema de dois corpos, estudamos a variação do semi-eixo maior orbital desses asteróides após eles terem uma grande aproximação com os planetas interiores. Neste capítulo, propomos uma técnica para caracterizar a esfera de influência a ser utilizada em problemas do tipo “swing-by”, através do monitoramento numérico da energia do problema de dois corpos durante o processo de passagem próxima de uma partícula por um determinado planeta. No capítulo 5 comparamos os resultados numéricos obtidos para cada planeta e, assumindo que o fluxo de asteróides que cruza a órbita de cada planeta é o mesmo, determinamos a contribuição de cada planeta no mecanismo de remoção. Neste capítulo, também comparamos os resultados analíticos com os resultados numéricos obtidos. No capítulo 6, discutimos alguns parâmetros relevantes, tais como dependência do raio orbital do planeta, da excentricidade do asteróide e da massa do planeta para determinar a importância de cada planeta neste mecanismo de remoção.

METODOLOGIA

Para os nossos estudos utilizamos uma abordagem analítica e outra numérica. Na abordagem analítica usamos a técnica “Swing-by” para calcular a variação no semi-eixo maior orbital de um asteróide fictício. Para este estudo desenvolvemos um programa utilizando o software MATHEMATICA, onde estudamos se um asteróide, ao se aproximar do planeta sofre variação no semi-eixo maior de pelo menos 0,3%, sendo removido da ressonância 3:1. Na abordagem numérica consideramos o problema restrito de três corpos. Utilizando o integrador numérico RADAU (Everhard, 1985) integramos as condições iniciais obtidas na abordagem analítica, monitorando a energia do problema de dois corpos para obter as condições em que o semi-eixo maior varia pelo menos 0,3%.



CAPÍTULO 2

CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

2.1 - Introdução

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos e algumas técnicas relevantes estudadas no desenvolvimento do trabalho. Primeiramente, é feita uma breve introdução sobre trajetória assistida por gravidade (normalmente conhecida por técnica “swing-by”) e conceito de esfera de influência, encontrados na literatura. Em seguida, são apresentados e analisados, com relação a literatura apresentada, os valores obtidos numericamente para a esfera de influência considerando a variação da energia do problema de dois corpos (planeta-partícula ou Sol-partícula).

2.2 - Manobra Assistida por Gravidade

A importância da trajetória assistida pela gravidade vem do fato que corpos celestes, sob determinadas condições, podem ser capturados pelo campo gravitacional de planetas. Essa idéia, conhecida como hipótese de captura (temporária), é atribuída a Laplace e tem sido discutida ao longo dos tempos (Everhart, 1969; Broucke, 1988; Broucke & Prado, 1993).

Para estudar a aproximação da partícula com o planeta assume-se que este movimento possa ser dividido em várias etapas. Estuda-se cada uma dessas etapas através do modelo do problema de dois corpos. Essa abordagem é conhecida como “aproximações por cônicas”. Assume-se um sistema dinâmico formado por três corpos: o Sol com massa $M_{\odot}$, um planeta de massa M e um terceiro corpo de massa desprezível m (asteróide, sonda espacial...); e que este sistema obedece a todas restrições do Problema Planar Circular Restrito de Três Corpos (Broucke, 1988; Prado, 1997). Neste caso o Sol e o planeta estão em órbitas circulares ao redor do centro de massa do sistema; o movimento do



objeto é no plano orbital do Sol e do planeta, e é governado por eles. Neste sistema, representado na Figura 2.1, o Sol está no centro do sistema; o planeta está em órbita Kepleriana em torno do Sol; o objeto está em uma órbita elíptica ao redor do Sol, quando faz um encontro próximo com o planeta. A este encontro que altera a órbita do objeto em relação ao Sol é chamado de “swing-by”. De acordo com essas hipóteses, as órbitas do planeta e do Sol não se alteram.

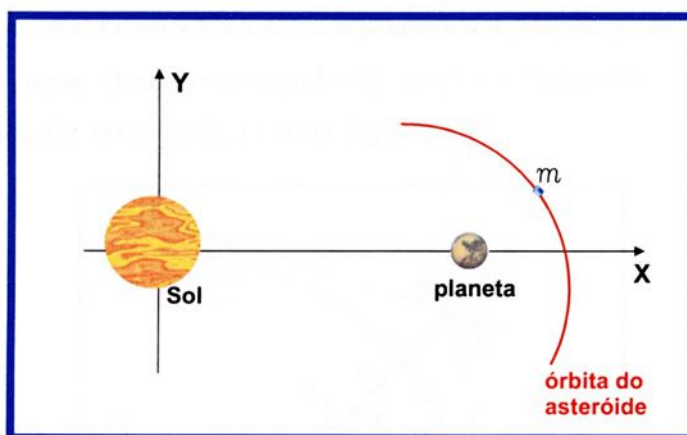


Figura 2.1- Geometria do encontro. (Adaptada de Prado, 2001).

Portanto isto nada mais é do que um problema de três corpos estudado como problema de dois corpos em três etapas. A primeira etapa ocorre quando o objeto encontra-se longe do planeta, portanto descrevendo uma órbita heliocêntrica. A segunda ocorre quando o objeto passa próximo ao planeta e a presença do Sol é negligenciada, neste caso a órbita do objeto é considerada hiperbólica em relação ao planeta. A última etapa ocorre quando o objeto volta a sofrer somente a influência do Sol, deixando as proximidades do planeta com órbita alterada com relação à órbita inicial em torno do Sol.

2.2.1 - Descrição do “Swing-by”

As variáveis envolvidas na técnica do swing-by são: $\vec{V}_{\infty-}, \vec{V}_{\infty+}$: vetores velocidade da partícula relativos ao planeta, antes e depois do encontro, respectivamente; $\vec{V}_i, \vec{V}_0$: vetores velocidade da partícula relativos ao Sol, antes e depois do encontro em um referencial inercial, respectivamente; δ : metade do ângulo de curvatura (o ângulo entre $\vec{V}_{\infty-}$ e $\vec{V}_{\infty+}$); r_p : a distância de máxima aproximação durante o encontro entre o planeta e a partícula; Ψ : o ângulo entre a linha do periapse (linha conectando M a m) e a linha $M_{\odot} - M$. Algumas dessas quantidades estão indicadas na Figura 2.2

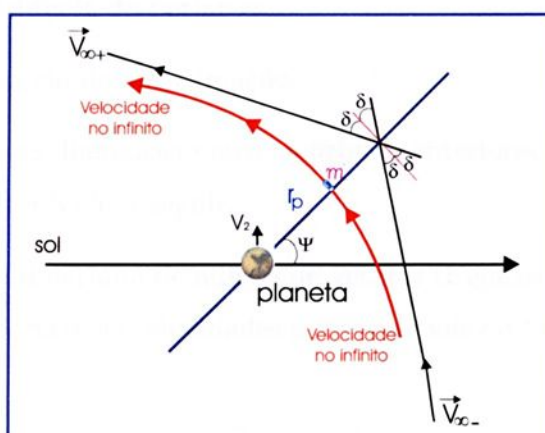


Figura 2.2 - Descrição geométrica da técnica “swing-by” e algumas de suas variáveis: $\vec{V}_2$ é o vetor velocidade do planeta em relação ao Sol; $\vec{V}_{\infty-}, \vec{V}_{\infty+}$ são os vetores velocidade do asteroide relativos ao planeta antes e depois do encontro; δ é a metade do ângulo de curvatura (o ângulo entre $\vec{V}_{\infty-}$ e $\vec{V}_{\infty+}$); r_p é a distância do encontro mais próximo (ponto m) entre o planeta e o asteroide; Ψ é o ângulo entre a linha do pericentro (linha conectando o planeta ao ponto m) e a linha Sol-planeta. (Extraído de Prado, 2001)

Para encontrar as equações necessárias é preciso em primeiro lugar usar a teoria das órbitas hiperbólicas, com o objetivo de se obter uma expressão para δ . Esta expressão pode ser facilmente encontrada na literatura e é dada por (Broucke, 1988):

$$\text{sen}\delta = \frac{1}{1 + \frac{r_p V_\infty^2}{\mu_2}} \tag{2.1}$$

onde: $\mu_2 = GM$, sendo G a constante universal de gravitação. A partir desta equação e da Figura 2.2, é possível identificar as variáveis independentes que definem completamente a técnica do “swing-by”, que são as seguintes:

- i) $V_\infty = | \vec{V}_\infty |$, a magnitude do vetor velocidade da partícula no infinito, antes ou depois da passagem próxima ao planeta;
- ii) r_p , a distância do periapse;
- iii) Ψ , o ângulo de aproximação.

O estudo das diferenças entre as órbitas anteriores e posteriores a esse encontro será desenvolvido a seguir.

Através do diagrama de adição de vetores (Figuras 2.3 e 2.4) podemos calcular a diferença entre as velocidades antes e depois do “swing-by” (Broucke, 1988):

$$\Delta V = | \Delta \vec{V} | = 2 | \vec{V}_\infty | \text{sen}\delta \tag{2.2}$$

e verificar que $\Delta \vec{V}$ faz um ângulo de $\Psi + 180^0$ com a linha Sol-planeta.

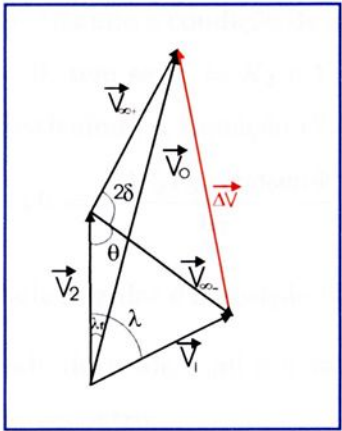


Figura 2.3 - Soma de vetores velocidades envolvidos na técnica “swing-by”.
(Extraído de Prado, 2001)

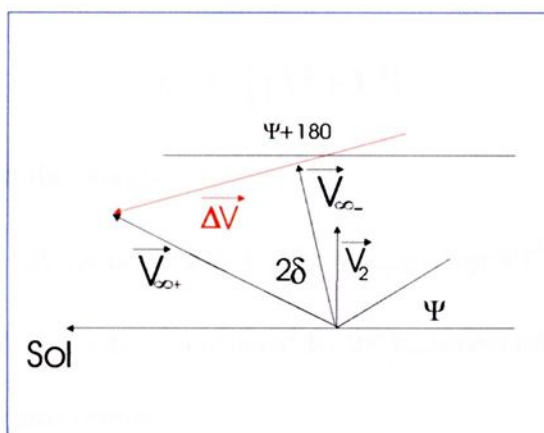


Figura 2.4 - Vetores velocidades envolvidos na técnica “swing-by”. (Extraído de Prado, 2001)

Essa geometria fornece as seguintes equações para o incremento da velocidade:

$$\Delta \dot{X} = -2V_{\infty} \sin \delta \cos \Psi \quad (2.3)$$

$$\Delta \dot{Y} = -2V_{\infty} \sin \delta \sin \Psi \quad (2.4)$$

Desta importante quantidade, obtêm-se a variação do momento angular h . Da definição $h = X\dot{Y} - Y\dot{X}$, obtemos:

$$\Delta h = X\Delta \dot{Y} + \dot{Y}\Delta X - (Y\Delta \dot{X} + \dot{X}\Delta Y) \quad (2.5)$$

para a sua primeira variação. Usando a condição de que o encontro é instantâneo ($\Delta X = \Delta Y = 0$) e que $t = 0$, tem-se $X = X_2$ e $Y = 0$, logo a Equação (2.5) torna-se: $\Delta h = X_2\Delta \dot{Y}$. Substituindo a Equação (2.4) obtêm-se:

$$\Delta h = \frac{-2V_2 V_{\infty} \sin \delta \sin \Psi}{n_2} \quad (2.6)$$

onde: n_2 e X_2 são a velocidade angular e a posição do planeta, respectivamente.

A terceira quantidade derivada aqui é a variação da energia. Através da energia antes e depois do encontro:

$$E_+ = \frac{1}{2} [(\dot{X} + \Delta \dot{X})^2 + (\dot{Y} + \Delta \dot{Y})^2] \quad (2.7)$$

e

$$E_- = \frac{1}{2}[\dot{X}^2 + \dot{Y}^2] \quad (2.8)$$

obtêm-se a variação da energia:

$$\Delta E = \frac{1}{2}[(\dot{X} - 2V_\infty \sin\delta \cos\Psi)^2 + (\dot{Y} - 2V_\infty \sin\delta \sin\Psi)^2 - (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)]$$

$$\Delta E = -2\dot{X}V_\infty \sin\delta \cos\Psi + 2V_\infty^2 \sin^2\delta \cos^2\Psi - 2\dot{Y}V_\infty \sin\delta \sin\Psi - 2V_\infty^2 \sin^2\delta \sin^2\Psi$$

rearranjando os termos temos:

$$\Delta E = 2V_\infty \sin\delta [V_\infty \sin\delta - (\dot{X} \cos\Psi + \dot{Y} \sin\Psi)], \quad (2.9)$$

Esta expressão pode ser simplificada se considerarmos $\dot{X} = \dot{x}$ e $\dot{Y} = \dot{y} + V_2$, com $\dot{x}$ e $\dot{y}$ as velocidades relativas a M depois do swing-by.

$$\dot{x} = V_\infty \cos(\Psi - \delta + 90^\circ) = -V_\infty \sin(\Psi - \delta)$$

$$\dot{y} = V_\infty \sin(\Psi - \delta + 90^\circ) = V_\infty \cos(\Psi - \delta)$$

$$\dot{x} \cos\Psi + \dot{y} \sin\Psi = V_2 \sin\Psi + V_\infty \sin\delta$$

substituindo em (2.9) temos:

$$\Delta E = 2V_\infty \sin\delta [V_\infty \sin\delta - V_2 \sin\Psi - V_\infty \sin\delta]$$

$$\Delta E = -2V_2 V_\infty \sin\delta \sin\Psi. \quad (2.10)$$

Comparando as Equações (2.6) e (2.10) um resultado fundamental pode ser encontrado:

$$\Delta h = \frac{\Delta E}{n_2} \quad (2.11)$$

Algumas implicações importantes podem ser derivadas estudando a Equação (2.10) em maior detalhe. Os parâmetros V_2 e V_∞ são quantidades positivas (elas são as magnitudes dos dois vetores), assim como $\sin\delta$ (porque $0 < \delta < 90^\circ$), portanto o único parâmetro que afeta o sinal de ΔE é $\sin\Psi$. A conclusão é que, para valores de Ψ no intervalo $0^\circ < \Psi < 180^\circ$, ΔE é negativo

(decrece em energia) e para Ψ no intervalo $180^0 < \Psi < 360^0$, ΔE é positivo (aumenta em energia). Assim, conclui-se que:

- Há uma perda máxima (para $\Psi = 90^0$) quando o “swing-by” ocorre com periapse “na frente” do planeta, ocasionando decréscimo máximo da energia.

- Há um ganho máximo (para $\Psi = 270^0$) quando o “swing-by” ocorre com periapse “atrás” do planeta, ocasionando aumento máximo da energia.

No presente trabalho, estamos interessados em analisar a variação do semi-eixo maior, a , e da excentricidade, e , do asteróide. Portanto, vamos calcular a variação ocorrida durante o encontro com o planeta.

Para o problema de dois corpos a energia e o semi-eixo orbital estão relacionados por:

$$E = -\frac{\mu_1}{2a}, \quad (2.12)$$

onde $\mu_1 = GM_{\odot}$.

Igualmente, para o problema de dois corpos, a excentricidade está relacionada com o semi-eixo maior e o momento angular por:

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu_1 a}} \quad (2.13)$$

Então, derivando as Equações (2.12) e (2.13) obtemos a variação do semi-eixo maior e da excentricidade como função da variação da energia:

$$\Delta a = \frac{2a^2}{\mu_1} \Delta E = -\frac{7a^2 V_{\infty} V_0}{\mu_1} \sin \delta \sin \Psi \quad (2.14)$$

$$\Delta e = \frac{h \Delta E}{\mu_1} \left(\frac{h}{\mu_1} - \frac{1}{a n_2} \right) \sqrt{\frac{\mu_1 a}{\mu_1 a + h^5}} \quad (2.15)$$

2.3 - Esfera de Influência

A idéia de esfera de influência está fortemente relacionada à técnica de “patched conic”, ou seja, é a região onde a atração gravitacional de um corpo sobre um objeto é predominante, em relação a atração gravitacional de outros corpos sobre este mesmo objeto.

De acordo com Prussing & Conway (1993), Roy (1988) e Kaplan (1876), o conceito de esfera de influência está relacionado à região onde um corpo, perturbado por outros corpos, tem seu movimento predominantemente influenciado por um desses corpos; definindo assim a esfera de influência relacionada a tal corpo. Portanto, se assumirmos o sistema Sol, planeta e um terceiro corpo (asteróide, partícula, nave espacial, ...), a definição de esfera de influência está associada a região onde este problema pode ser tratado como um problema de dois corpos (Sol-corpo ou planeta-corpo), sendo que o terceiro corpo estará sobre a influência predominante de um dos corpos é perturbado pelo outro. Vamos considerar a situação apresentada na Figura 2.5, onde M_1 , M_2 e m_3 são as massas do Sol, do planeta e do terceiro corpo, respectivamente.

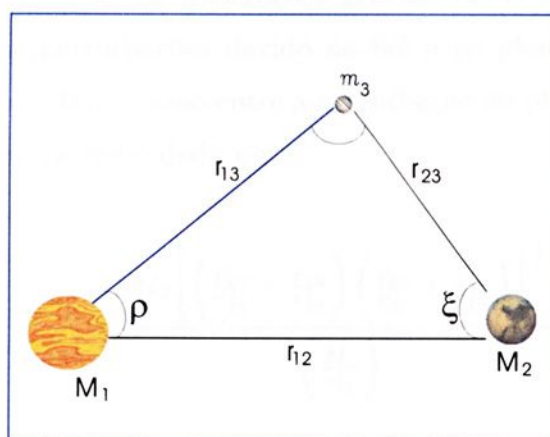


Figura 2.5 - Representação do sistema Sol, planeta e um terceiro corpo. Os segmentos r_{13} , r_{23} e r_{12} , denotam as distâncias Sol-corpo, planeta-corpo e Sol-planeta, respectivamente. Os símbolos ρ e ξ denotam os ângulos formados entre os segmentos Sol-planeta e Sol-corpo, Sol-planeta e planeta-cotpo, respectivamente.

Conforme a Figura 2.5, as equações do movimento do terceiro corpo em relação ao Sol e a Terra são dadas por

$$\ddot{\vec{r}}_{13} + G \left(\frac{M_1 + m_3}{r_{13}^3} \right) \vec{r}_{13} = -GM_2 \left(\frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} + \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \quad (2.16)$$

$$\ddot{\vec{r}}_{23} + G \left(\frac{M_2 + m_3}{r_{23}^3} \right) \vec{r}_{23} = -GM_1 \left(\frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} - \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \quad (2.17)$$

onde r_{23} , r_{13} e r_{12} são as distâncias planeta-corpo, Sol-Corpo e Sol-planeta, respectivamente.

De acordo com a definição apresentada para esfera de influência, esta depende das razões entre as forças perturbativas e as atrações gravitacionais referentes a cada uma das equações de movimento do terceiro corpo (2.16 e 2.17), isto é, a esfera de influência é a superfície ao longo da qual a razão entre a perturbação devido ao Sol e a aceleração devido ao planeta é igual à razão da perturbação do planeta pela aceleração devido ao Sol.

Para simplificar a análise, as forças podem ser escritas de maneira mais compacta, sendo $\vec{A}_2$ e $\vec{A}_1$ as acelerações gravitacionais devido ao planeta e ao Sol, $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$ as perturbações devido ao Sol e ao planeta. Considerando $m_3 \ll M_2$ e $M_1 \gg M_2$, a razão entre a perturbação do planeta e a aceleração gravitacional devido ao Sol é dada por:

$$\frac{|\vec{P}_2|}{|\vec{A}_1|} = \frac{M_2 \left[\left(\frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} + \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \left(\frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} + \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{M_1}{r_{13}^2} \right)} \quad (2.18)$$

onde:

$$\begin{aligned} -\vec{A}_1 &= GM_1 \left(\frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} \right) \\ -\vec{A}_2 &= GM_2 \left(\frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} \right) \\ \vec{P}_1 &= -GM_1 \left(\frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} + \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \end{aligned}$$

$$\vec{P}_2 = -GM_2 \left(\frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} - \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right)$$

A razão entre a perturbação do Sol e a aceleração gravitacional devido ao planeta é dada por

$$\frac{|\vec{P}_1|}{|\vec{A}_2|} = \frac{M_1 \left[\left(\frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} - \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \left(\frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} - \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{M_2}{r_{23}^2} \right)} \quad (2.19)$$

Usando a trigonometria na Figura 2.5 têm-se

$$r_{13}^2 = r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{23}r_{12}\cos\xi$$

reescrevendo:

$$\frac{r_{13}}{r_{12}} = \left[1 - 2\frac{r_{23}}{r_{12}}\cos\xi + \left(\frac{r_{23}}{r_{12}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.20)$$

Da Figura 2.5 têm-se também que:

$$\cos\rho = \frac{r_{12}}{r_{13}} - \frac{r_{23}}{r_{13}}\cos\xi \quad (2.21)$$

Substituindo as Equações (2.20) e (2.21) em (2.18) e (2.19) obtêm-se

$$\frac{|\vec{P}_2|}{|\vec{A}_1|} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{r_{13}/r_{12}}{r_{23}/r_{12}} \right)^2 \left[1 + 2\left(\frac{r_{23}}{r_{12}} \right) \left(1 - \frac{r_{13}}{r_{12}}\cos\xi \right) + \left(\frac{r_{13}}{r_{12}} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{|\vec{P}_1|}{|\vec{A}_2|} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{r_{23}}{r_{12}} \right)^{-2} \left[1 - 2\frac{r_{23}}{r_{12}}\cos\xi + \left(\frac{r_{23}}{r_{12}} \right)^2 \right] + \left[1 - 2\left(\frac{r_{23}}{r_{12}} \right)^2 \cos\xi + \left(\frac{r_{13}}{r_{12}} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}$$

De acordo com esta definição o raio da esfera de influência do planeta ou do Sol se define quando

$$\frac{|\vec{P}_1|}{|\vec{A}_2|} = \frac{|\vec{P}_2|}{|\vec{A}_1|} \quad (2.22)$$

sendo que as razões $\frac{|\vec{P}_1|}{|\vec{A}_2|}$ e $\frac{|\vec{P}_2|}{|\vec{A}_1|}$ fornecem a ordem de magnitude da perturbação sofrida pelo corpo devido ao planeta (sistema de referência solar) e a razão da perturbação do Sol (sistema de referência do planeta), respectivamente. Neste caso tem-se

$$\left(\frac{r_{23}}{r_{12}}\right)^4 = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2 \left(\frac{r_{13}}{r_{12}}\right)^4 \left[\frac{1 - 2\left(\frac{r_{23}}{r_{12}}\right)^2 \cos \xi + \left(\frac{r_{23}}{r_{12}}\right)^4}{1 + 2\left(\frac{r_{23}}{r_{12}}\right)\left(1 - \frac{r_{23}}{r_{12}} \cos \xi\right) + \left(\frac{r_{13}}{r_{12}}\right)^4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Resolvendo a equação acima para r_{13}/r_{12} considerando $m_3 \ll M_2$ e $M_1 \gg M_2$, o que implica em $r_{13} \ll r_{12}$, Tisserand mostrou que a superfície é circular (Roy, 1988) de raio:

$$r_{23} \cong \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{2}{5}} r_{12} = R_{Lap} \quad (2.23)$$

O modelo de esfera de influência normalmente adotado é a esfera de Hill. Se assumirmos que os dois maiores corpos se movem em órbitas circulares, então sua separação é sempre uma constante a . Considerando $m = 0$, e que os três corpos estão alinhados e que $M_2 \ll M_1$, temos que r_{23} deve ser muito pequeno. A solução para r_{23} muito pequeno pode ser obtida por (Murray & Dermott, 1999):

$$R_{Hill} = \left(\frac{M_2}{3M_1}\right)^{1/3} r_{12} \quad (2.24)$$

Das Equações (2.24) e (2.23) pode-se obter a esfera de influência de um corpo qualquer em relação a outro, bastando apenas substituir a razão M_2/M_1 pela razão das massas de tais corpos. No caso do sistema Terra-Lua, para obter o raio da esfera de influência da Lua utiliza-se a fração $m_L/M_\oplus$, sendo m_L a massa da Lua e $M_\oplus$ a massa da Terra. Na Tabela 2.1 são apresentados os raios das esferas de influência da Lua em relação a Terra e de alguns planetas em relação ao Sol, conforme as Equações (2.23) e (2.24). É feita também uma

correlação entre a esfera de influência do planeta e seu raio, o que nos permite notar a dimensão de tal esfera com relação ao planeta.

Tabela 2.1 - Raios das esferas de influência de alguns planetas.

Planeta	Raio do planeta (Km)	R_{Lap} (Raios do planeta)	R_{Hill} (Raios do planeta)
Mercúrio	2487	45	89
Vênus	6187	100	164
Terra	6378	145	236
Marte	3380	170	323
Júpiter	71370	677	746
Lua *	1738	38**	35**

* Em relação a Terra.

** Raios da Lua.

CAPÍTULO 3

ABORDAGEM ANALÍTICA

3.1 - Introdução

Neste capítulo é feita uma discussão sobre as condições iniciais que asteróides em ressonância 3:1 com Júpiter devem ter para cruzarem a órbita de Marte e eventualmente a da Terra e Vênus. São apresentados alguns resultados da análise da variação do semi-eixo maior e da excentricidade desses asteróides após terem uma grande aproximação com um destes planetas. Apresentamos também uma análise das esferas de influência de Marte, Terra e Vênus e um estudo sobre a excentricidade mínima que um asteróide deverá ter para cruzar a órbita de cada um desses planetas. O objetivo é obter uma estimativa dos asteróides cujo semi-eixo maior sofre uma variação de pelo menos 0,3% ou 1,0%, removendo-os da ressonância.

3.2 - Condições Iniciais

No estudo analítico usamos a técnica “Swing-by” onde dividimos o problema restrito de três corpos em dois problemas de dois corpos: asteróide-planeta e asteróide-Sol. Num primeiro instante o asteróide está numa órbita kepleriana ao redor do Sol quando entra na região A, passando a sofrer apenas a influência gravitacional do planeta para retornar em uma nova órbita kepleriana ao redor do Sol. O estudo da região B é análogo ao da região A (Figura 3.2).

Utilizando o software MATHEMATICA, desenvolvemos uma rotina que nos dá a variação do semi-eixo maior orbital e excentricidade. Para isso consideramos a órbita do planeta circular de raio unitário ($a_p = 1$, $e_p = 0$) e asteróides que estão em ressonância exata 3:1 com Júpiter, isto é, $a = 2,5 \text{ U.A.}$, com excentricidade $e \geq e_{\min}$ ($e_{\min}$ é o valor mínimo da excentricidade para que ocorra o cruzamento da órbita do planeta).



O primeiro passo é determinar a **excentricidade mínima** que o asteroide deverá ter para cruzar a órbita do planeta. Para isto basta calcularmos o valor da excentricidade da órbita do asteroide para que o pericentro dessa órbita coincida com o raio orbital do planeta. Sabemos que o semi-eixo maior orbital e a excentricidade estão relacionados por: $a(1 - e) < 1$ e $a(1 + e) > 1$. Como o asteroide é sempre exterior ao planeta ($a > 1$), é suficiente definir e_{min} a partir da primeira condição ou seja:

$$a(1 - e_{min}) = 1 \Rightarrow e_{min} = 1 - \frac{1}{a}$$

Os valores de excentricidade mínima que um asteroide deverá ter para cruzar a órbita de Marte, Terra, Vênus e Mercúrio são apresentados na Figura 3.1.

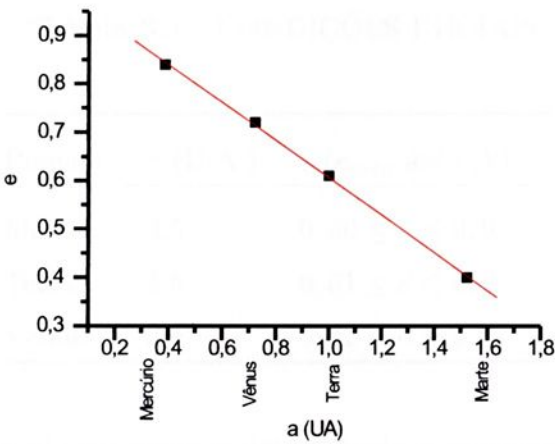


Figura 3.1 - Excentricidade mínima que o asteroide deverá ter para cruzar as órbitas dos planetas, assumindo que os planetas estão em órbitas circulares.

Numa análise preliminar, vemos que para valores de excentricidade entre $e = 0,40$ e $e = 0,60$, Marte é o único planeta que pode atuar no mecanismo de remoção. Para valores de excentricidade maiores do que 0,60 a contribuição de Marte é insignificante quando comparada à contribuição de Vênus e Terra, como veremos em nossos resultados. Para valores de excentricidade entre $e = 0,61$ e $e = 0,71$, a Terra domina quase que exclusivamente e Vênus só começa a interferir neste mecanismo para asteroides com excentricidade superior a 0,72. Mercúrio só influenciará asteroides que possuam excentricidade superior

a 0,83, contribuindo muito pouco neste processo devido a alta excentricidade que os asteróides deverão ter para cruzarem sua órbita e a sua proximidade com o Sol. Portanto, não estudamos o caso de Mercúrio. Nossos dados são válidos quando consideramos as órbitas dos planetas como circulares. Se considerarmos as excentricidades dos planetas ($e_{Marte} = 0,0934$, $e_{Terra} = 0,0167$, $e_{Venus} = 0,0068$) a única alteração significativa é a de Marte que poderá remover asteróides com excentricidade superior a $e = 0,33$.

Desta maneira estabelecemos nossas condições iniciais (Tabela 3.1). Estudaremos asteróides com semi-eixo maior inicial $a = 2,5\text{U.A.}$, que corresponde ao centro da ressonância 3:1 com Júpiter, com excentricidade no intervalo entre e_{min} e 0,9.

Tabela 3.1 - CONDIÇÕES INICIAIS

Planeta	a (U.A.)	e (e_{min} até 0,9)
Marte	2,5	$0,40 \leq e \leq 0,9$
Terra	2,5	$0,61 \leq e \leq 0,9$
Vênus	2,5	$0,72 \leq e \leq 0,9$

Fixado o semi-eixo maior e determinada a excentricidade, calculamos o **ponto de cruzamento das órbitas**. Como assumimos que a órbita do planeta é circular e a órbita do asteróide é elíptica, para encontrarmos o ponto de cruzamento dessas órbitas basta igualarmos as expressões dessas cônicas:

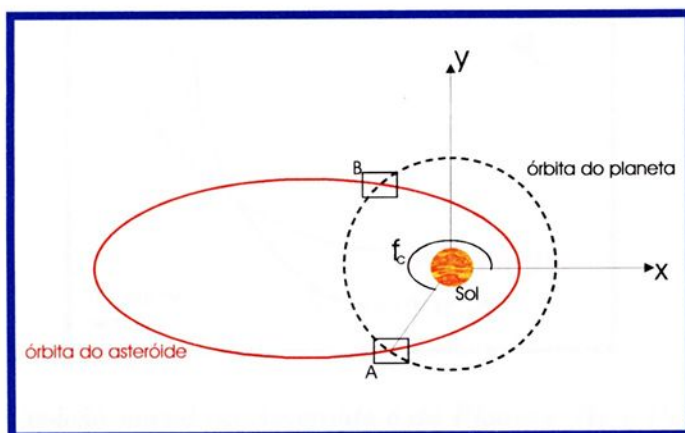


Figura 3.2 - Anomalia do Ponto de Cruzamento f_c . A linha tracejada representa a órbita do planeta e a linha cheia a órbita do asteroide.

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (3.1)$$

$$\frac{(x + ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.2)$$

lembrando que $b^2 = a^2(1 - e^2)$, temos portanto:

$$x_c = \frac{a(1 - e^2) \pm 1}{e} \quad (3.3)$$

$$y_c = \pm \sqrt{1 - x^2} \quad (3.4)$$

Para escolhermos adequadamente a posição de x_c lembramos que:

$$-1 < x_c < 1 \Rightarrow -1 < \frac{a(1 - e^2) \pm 1}{e} < 1 \Rightarrow -e < a(1 - e^2) \pm 1 < e$$

como a excentricidade é menor do que 1 a expressão $a(1 - e^2)$ é maior do que zero e portanto nas Equações (3.3) e (3.4) utilizaremos o sinal negativo.

Em seguida, consideramos a esfera de influência centrada no ponto de cruzamento. Usaremos o raio da esfera de influência com valores $R_{inf} = 1R_{Lap}$ e $R_{inf} = 2R_{Lap}$.

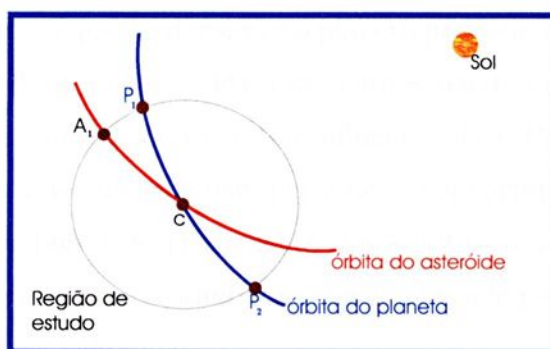


Figura 3.3 - Posição inicial do Asteróide e do Planeta. A_1 e P_1 são a posição inicial do asteróide e do planeta nos limites da esfera de influência, P_2 é a posição final do planeta nos limites da esfera de influência e C é o ponto de cruzamento das órbitas.

A posição inicial do asteróide é na borda da esfera de influência, A_1 , sendo que a posição inicial do planeta pode ser desde uma borda da esfera de influência, P_1 , até a outra, P_2 . Definidas as posições iniciais do asteróide e do planeta, calculamos a anomalia verdadeira do planeta e do asteróide, onde α é o ângulo entre a posição do asteróide e o ponto de cruzamento e β é o ângulo entre a posição do planeta e o ponto de cruzamento.

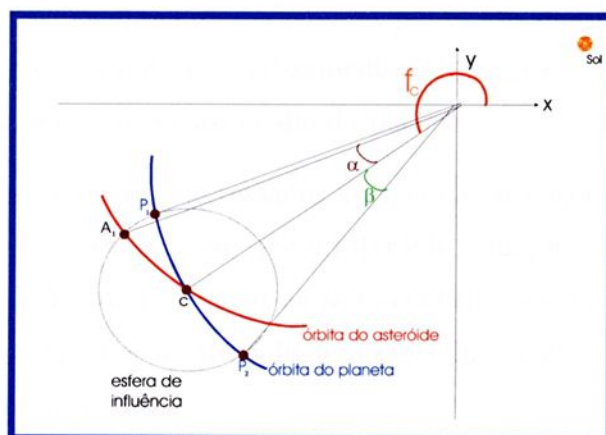


Figura 3.4 - Anomalia verdadeira do planeta e do asteróide nos limites da esfera de influência. f_c é a anomaxia verdadeira do ponto de cruzamento; f é a anomalia verdadeira do asteróide ($f = f_c - \alpha$); f_{p1} é a anomalia verdadeira do planeta ($f_{p1} = f_c - \beta$).

Se assumirmos que o asteroide e o planeta possuem a mesma velocidade angular, eles irão colidir no ponto de cruzamento se partirem no mesmo instante de suas posições nos limites da esfera de influência A_1 e P_1 . Porém como eles possuem diferentes velocidades e distâncias de c , nem sempre eles passarão ao mesmo tempo pelo ponto de cruzamento das órbitas causando uma colisão. Nosso objetivo é encontrar o instante em que o asteroide passa tão próximo do planeta para que haja colisão.

Como conhecemos o tempo, Δt , que o asteroide leva para ir do limite da esfera de influência até o ponto de cruzamento, calculamos a posição inicial em que o planeta deverá estar para que ocorra a colisão com o asteroide. Ou seja, temos que:

$$f_{ast} - f_C = \Delta f_{ast}$$

$$\Rightarrow \Delta t \simeq \frac{\Delta f_{ast}}{n_{ast}}$$

$$\Rightarrow \Delta t \cdot n_{pla} = \Delta f_{pla}$$

sendo: f_c a anomalia verdadeira no ponto de cruzamento; f_{ast} a anomalia verdadeira do asteroide; Δt é o tempo que o asteroide leva para percorrer a distância entre a anomalia verdadeira no ponto em que se encontra até a anomalia verdadeira do ponto de cruzamento (C); n_{ast} é o movimento médio do asteroide, n_{pla} é o movimento médio do planeta.

Porém não estamos interessados apenas nas situações de colisão, estamos interessados em situações em que o asteroide tenha um encontro próximo com o planeta e sofra uma variação no semi-eixo maior orbital de pelo menos 0,3%. Por isso mudaremos o asteroide de posição inicial até encontrarmos esta variação no semi-eixo maior.

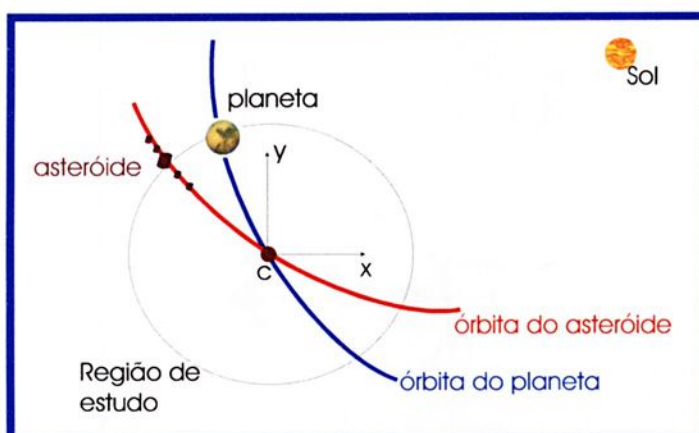


Figura 3.5 - Diagrama mostrando a região em que ocorre a intersecção entre as órbitas do planeta (linha tracejada) e do asteróide (linha cheia).

Definiremos uma nova unidade de medida p que corresponde a uma fração da distância limite da esfera de influência ao ponto de cruzamento. Colocaremos o asteróide na região interna à esfera de influência próximo aos limites dessa esfera, então calculamos o tempo que o asteróide leva para chegar ao ponto de cruzamento e voltamos este tempo na órbita do planeta obtendo a posição θ em que o planeta deverá estar para colidir com o asteróide no ponto de cruzamento ou que o asteróide passe tão próximo do planeta a ponto de ter sua trajetória alterada. Mudaremos o asteróide de posição até encontrarmos a condição inicial tal que proporcione ele passar pelo planeta e ter sua trajetória alterada, em pelo menos 0,3% do valor do semi-eixo maior, podendo ser removido da ressonância. Repetimos este mesmo procedimento para a região externa da esfera de influência. Desta maneira calculamos o arco orbital ($\Delta\theta$) em que o planeta deverá estar para alterar em, pelo menos, 0,3% o semi-eixo maior orbital do asteróide.

Usando a condição que o encontro é instantâneo, rotacionaremos o sistema de coordenadas para manter o planeta sobre o eixo X (com $Y = 0$) obtendo assim, a posição e velocidade para o asteróide neste novo sistema de coordenadas.

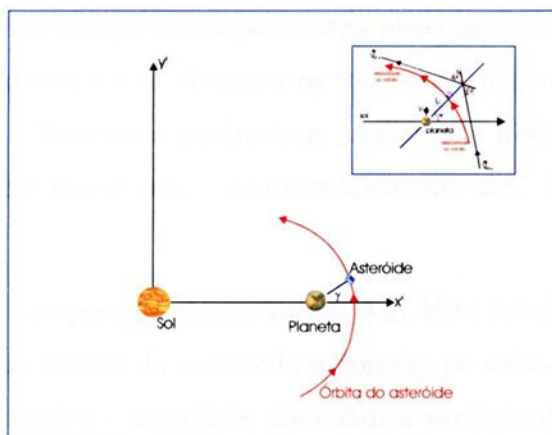


Figura 3.9 - Posição do Planeta após a rotação do sistema de coordenadas.

Da teoria do “swing-by”, sabemos que a órbita do asteroide em relação ao planeta é uma hipérbole e usando a teoria das órbitas hiperbólicas calculamos:

★ o semi-eixo maior hiperbólico:

$$a_h = \left(\frac{v^2}{\mu_2} - \frac{2}{r} \right)^{-1}$$

★ a excentricidade hiperbólica:

$$e_h = \sqrt{2 + \frac{h^8}{\mu_2 a_h}}$$

★ a distância do pericentro:

$$r_p = a_h(e_h - 1)$$

Conhecendo o pericentro e a posição do asteroide no novo sistema de coordenadas (Figura 3.6), calculamos a anomalia verdadeira hiperbólica do planeta (f_h) e o ângulo γ : ângulo entre o asteroide (no novo sistema de coordenadas) e a linha imaginária que une o planeta ao Sol. Estes dois ângulos nos permite calcular o valor do ângulo de aproximação Ψ :

$$\Psi = 360^\circ - (f_h + \gamma)$$

Resumindo: calculada distância do pericentro obtemos o valor do $\text{sen}\delta$. Calculando os valores de $\text{sen}\delta$ e Ψ obtemos os valores para a variação da energia e momento angular. Com estes parâmetros (ΔE e Δh) podemos determinar a variação do semi-eixo maior, Δa , e da excentricidade, Δe . (Equações (2.14) e (2.15).)

Um exemplo é apresentado na Tabela 3.2. Esta tabela está identificada com a excentricidade inicial do asteróide e contém os valores de r_p : a menor distância entre o planeta e o asteróide; Δe e Δa : a variação da excentricidade e do semi-eixo maior orbital do asteróide para cada valor da longitude do planeta θ . Os valores para r_p são obtidos considerando a distância Sol-planeta igual a unidade. Em geral, há uma simetria na longitude do planeta (θ) ou seja, a ordem de grandeza da variação do semi-eixo maior orbital e da excentricidade do asteróide não é alterada se tomarmos o valor de θ em módulo. Para asteróides com excentricidade inicial superior a $e = 0,61$, não observamos uma mudança significativa na trajetória do asteróide quando ele cruza a órbita de Marte. Os resultados também mostram que a variação da excentricidade é muito pequena, sendo da ordem de 10^{-7} e para alguns casos até mesmo da ordem de 10^{-8} . De um modo semelhante ao caso de $R_{inf} = 1R_{Lap}$, quando consideramos $R_{inf} = 2R_{Lap}$ também não encontramos uma variação significativa para asteróides com excentricidade inicial superior a 0,54 e a variação da excentricidade é da ordem de 10^{-7} . Para os dois casos estudados, isto é, $R_{inf} = 1R_{Lap}$ e $R_{inf} = 2R_{Lap}$, os resultados mostram que asteróides que partem do limite da esfera de influência ($\theta = 0$) ou de regiões muito próximas a este limite colidem com Marte. A diferença de sinal para os diferentes valores de Δa nos fornece informações sobre a variação da energia do asteróide, isto é, se há ganho de energia (valores negativos de Δa) ou perda de energia (valores positivos de Δa). Esta relação pode ser vista nas Equações (2.10) e (2.14). A análise para Terra e Vênus é análoga à de Marte.

Tabela 3.2 - Valores obtidos para um asteróide com $e = 0,61$ quando sofre uma grande aproximação com a Terra. As linhas em verde indicam o limite do arco angular onde ocorre uma variação de pelo menos 0,3% no semi-eixo maior orbital.

Planeta: Terra – $e = 0,61$ – $R_{inf} = 1R_{Lap}$

θ (graus)	r_p	Ψ	$\text{sen}\delta$	ΔE	$\Delta a/a$	Δe
-3,4	$3,34 \times 10^{-3}$	90,88	$9,90 \times 10^{-4}$	$-5,96 \times 10^{-4}$	$-2,99 \times 10^{-3}$	$2,33 \times 10^{-6}$
-3,3	$3,24 \times 10^{-3}$	90,81	$1,81 \times 10^{-4}$	$-6,15 \times 10^{-4}$	$-3,08 \times 10^{-3}$	$2,33 \times 10^{-6}$
3,7	$3,29 \times 10^{-3}$	-91,20	$1,00 \times 10^{-4}$	$6,04 \times 10^{-4}$	$3,03 \times 10^{-3}$	$2,45 \times 10^{-6}$
3,8	$3,38 \times 10^{-3}$	-91,26	$9,77 \times 10^{-4}$	$5,88 \times 10^{-4}$	$2,95 \times 10^{-3}$	$2,45 \times 10^{-6}$

CAPÍTULO 4

ABORDAGEM NUMÉRICA

Neste capítulo, apresentamos uma abordagem numérica que consistiu-se na implementação de simulações numéricas do problema restrito de três corpos. Para estas simulações, adotamos uma região de estudo no valor de $100R_{Lap}$ e através do monitoramento da energia do problema de dois corpos, estudamos a variação do semi-eixo maior orbital do asteróide.

4.1 - Introdução

No estudo numérico, assim como no estudo analítico, assumimos que o asteróide possui semi-eixo maior inicial $a = 2,5U.A.$ e que a excentricidade de sua órbita está entre e_{min} e $0,9$ ($e_{min} \leq e \leq 0,9$). A órbita do planeta é circular. Usando o software MATHEMATICA geramos as condições iniciais: velocidade e posição do asteróide.

4.2 - Condições Iniciais

O primeiro passo é determinar a **excentricidade mínima** que o asteróide deverá ter para cruzar a órbita do planeta. Os resultados são os mesmos apresentados no estudo analítico, dados na Tabela 3.1.

Fixado o semi-eixo maior e a excentricidade inicial do asteróide, calculamos o **ponto de cruzamento das órbitas**. Assim como foi feito no caso analítico, dados pelas Equações (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4).

Em seguida, colocamos a região de estudo centrada no ponto de cruzamento. Usaremos uma esfera com raio igual a $100R_{Lap}$.



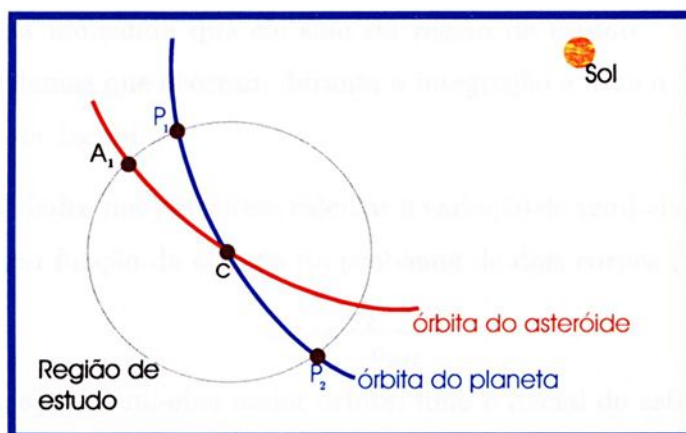


Figura 4.1 - Posição inicial do asteroide e do planeta. A_1 e P_1 são a posição inicial do asteroide e do planeta nos limites da região de estudo. P_2 é a posição final do planeta nos limites da região de estudo e C é o ponto de cruzamento das órbitas.

A posição inicial do asteroide é na borda da esfera de influência, A_1 , sendo que a posição do planeta pode ser desde uma borda a esfera de influência, P_1 , até a outra, P_2 . Definidas as posições iniciais do asteroide e do planeta, calculamos a anomalia verdadeira do planeta e do asteroide. Do mesmo modo como foi feito no estudo analítico, obtemos a posição e velocidade do asteroide.

4.3 - Simulações Numéricas

Estabelecidas as condições iniciais, integramos as equações de movimento utilizando a linguagem de programação FORTRAN e o integrador é o Radau 15 (Everhard, 1985). Este integrador não é o integrador mais adequado para encontros próximos mas a escolha do tempo de integração pequeno (uma fração do período orbital do asteroide) e passos de integração adequados não comprometem os resultados. Este programa gera um arquivo de saída, onde dadas as condições iniciais: velocidade e posição, é fornecida a menor distância com que o asteroide aproxima-se do planeta. Se esta distância for menor ou igual ao raio do planeta, a integração é interrompida indicando que o asteroide colidiu com o planeta. Se não houver colisão entre o asteroide e o planeta considerado, quando este atingir a distância igual ou maior que $100R_{Lap}$ a integração

é interrompida indicando que ele saiu da região de estudo. Para monitorar possíveis problemas que ocorram durante a integração é feito o monitoramento da constante de Jacobi.

Esses dados nos permitem calcular a variação do semi-eixo maior orbital do asteróide em função da energia do problema de dois corpos (asteróide-Sol):

$$\Delta a = \frac{a_f - a_i}{a_{ast}}$$

onde: a_f e a_i são o semi-eixo maior orbital final e inicial do asteróide; a_{ast} é o semi-eixo maior orbital do asteróide na ressonância exata (2.5U.A.).

Estamos interessados em obter uma estimativa dos asteróides cujo semi-eixo maior sofre uma variação de pelo menos 0,3% removendo-os da ressonância 3:1. Um exemplo dos resultados é dado na Tabela 4.1 que está identificada com a excentricidade inicial do asteróide. Nela estão os resultados de ΔE e Δa : a variação da energia e do semi-eixo maior orbital do asteróide para cada valor da longitude do planeta θ .

Tabela 4.1 - Valores obtidos para um asteróide com $e = 0,83$ quando sofre uma grande aproximação com Vênus.

Planeta: Vênus - $e = 0,83$ - $R_{inf} = 100R_{Lap}$		
θ (graus)	ΔE	$\Delta a/a$
-0,9	$-4,05 \times 10^{-4}$	$-2,79 \times 10^{-3}$
-0,8	$-4,55 \times 10^{-4}$	$-3,13 \times 10^{-3}$
0,7	$4,84 \times 10^{-4}$	$3,36 \times 10^{-3}$
0,8	$4,22 \times 10^{-4}$	$2,93 \times 10^{-3}$

O monitoramento numérico da energia do problema de dois corpos durante um processo de passagem próximo de um asteróide por um determinado planeta, deixa claro a dependência entre o tamanho da esfera de influência e a velocidade relativa entre os corpos. Nossos resultados mostram que o asteróide precisa ter de fato uma grande aproximação com Marte, Terra e Vênus a ponto

de ser removido da ressonância 3 : 1 com Júpiter. A seguir, apresentamos uma amostra das figuras geradas a partir dos resultados obtidos numericamente. Nestas figuras, é adotado um sistema girante onde o Sol está sempre à esquerda numa linha horizontal que passa pelo planeta (ponto no centro da figura).

Nas Figuras 4.2 e 4.3, estão representadas as trajetórias de um asteróide com excentricidade 0,61 ao entrar na esfera de influência da Terra. Nos nossos estudos, obtemos a energia do problema de dois corpos: Sol-asteróide quando o asteróide sofre uma variação de 0,3% no seu semi-eixo maior orbital após sofrer um grande encontro com a Terra.

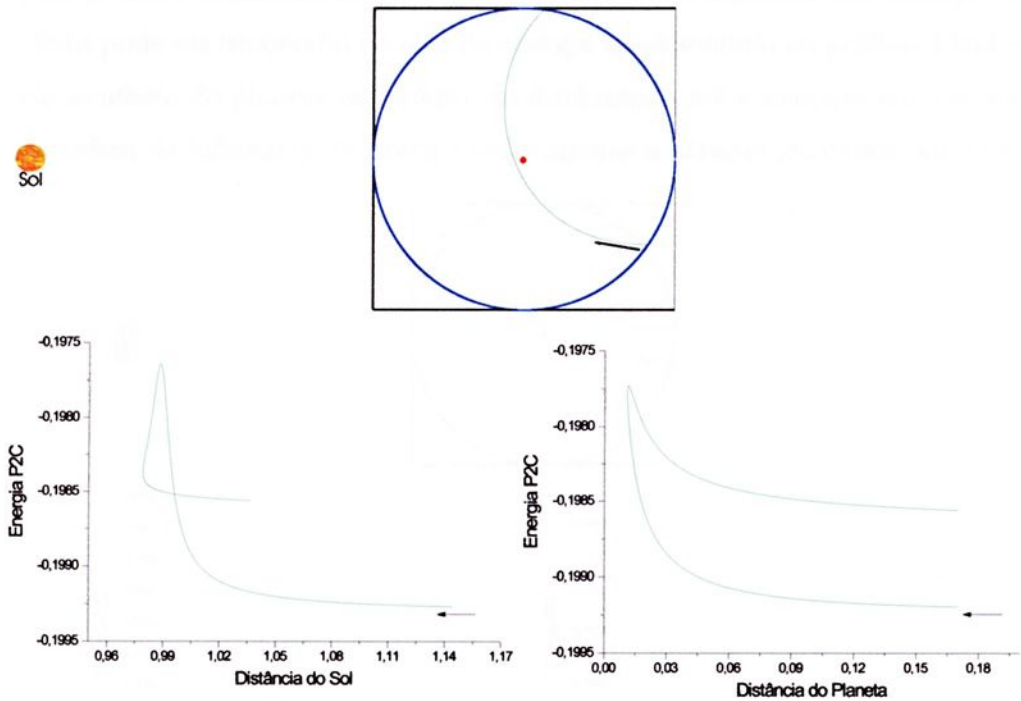


Figura 4.2 - *Topo: Trajetória do asteróide (linha verde) na região de estudo (linha azul) $R_{inf} = 100R_{Lap}$, Esquerda: Energia do problema de 2 corpos versus distância ao Sol e Direita: Energia do problema de 2 corpos versus distância à Terra . Dados: $e = 0,61$, $\theta = +1,4$*

Na Figura 4.2, comparando o gráfico da evolução da distância da Terra versus a energia do problema de dois corpos e a trajetória do asteróide, observamos a relação entre o ângulo Ψ (o ângulo de aproximação) e a variação da

energia: quando a passagem é feita com o periapse atrás do planeta ($180^\circ < \Psi < 360^\circ$) há um acréscimo de energia. Esta relação pode ser vista claramente no gráfico da energia do problema de 2 corpos versus distância à Terra. O asteróide aproxima-se do planeta com energia inicial igual a $E_i = -0,1992$ ganhando energia até sofrer uma grande aproximação com a Terra. Após este encontro, que altera sua trajetória, ele ganha energia saindo da região de estudo com energia final igual a $E_f = -0,1986$. Quando o asteróide está muito próximo do planeta (dentro da esfera de influência), a atração gravitacional do Sol é menor do que a do planeta, ou seja, é como se o asteróide fosse “puxado” pelo planeta aumentando sua velocidade e por consequência sua energia. Este efeito pode ser observado no pico de energia apresentado no gráfico. Conforme ele se afasta do planeta este efeito vai diminuindo até o instante em que ele sai da esfera de influência da Terra e sofre apenas a atração gravitacional do Sol.

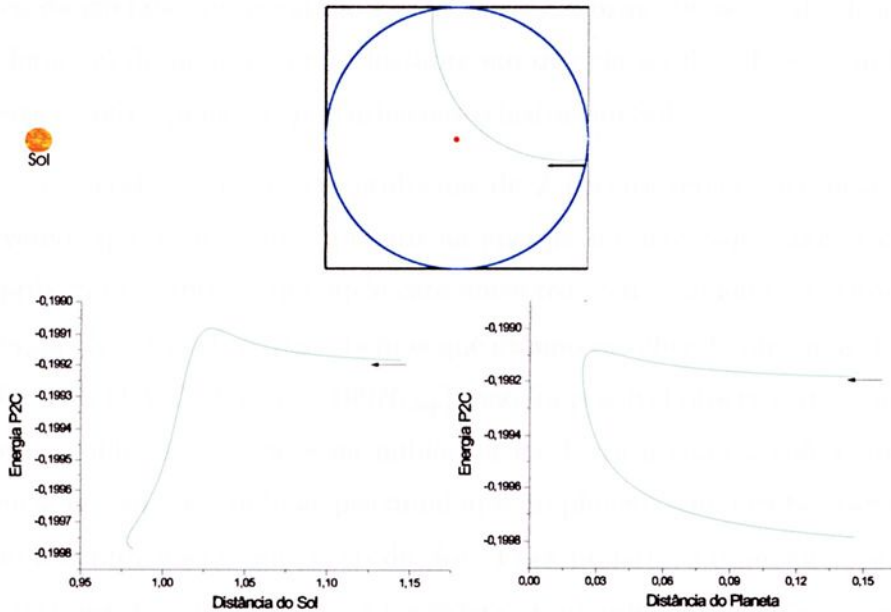


Figura 4.3 - *Topo: Trajetória do asteróide (linha verde) na região de estudo (linha azul) $R_{inf} = 100R_{Lap}$, Esquerda: Energia do problema de 2 corpos versus distância ao Sol e Direita: Energia do problema de 2 corpos versus distância à Terra. Dados: $e = 0,61$, $\theta = -2,2$*

Na Figura 4.3, a análise é análoga ao da Figura 4.2. Comparando o

gráfico da Evolução da distância da Terra versus a energia do problema de dois corpos e a trajetória do asteróide, observamos a relação entre o ângulo Ψ (o ângulo de aproximação) e a variação da energia: quando a passagem é feita com o periapse à frente do planeta ($0^\circ < \Psi < 180^\circ$) há um decréscimo de energia. Esta relação pode ser vista claramente no gráfico da energia do problema de 2 corpos versus distância à Terra. O asteróide aproxima-se do planeta com energia inicial igual a $E_i = -0,1992$ ganhando energia até sofrer uma grande aproximação com a Terra. Após este encontro, que altera sua trajetória, ele perde energia saindo da região de estudo com energia final igual a $E_f = -0,1998$. Quando o asteróide está muito próximo do planeta (dentro da esfera de influência), a atração gravitacional do Sol é menor do que a do planeta, ou seja, é como se o asteróide fosse “puxado” pelo planeta aumentando sua velocidade e por consequência sua energia. Este efeito pode ser observado no pico de energia apresentado no gráfico. Conforme ele se afasta do planeta este efeito vai diminuindo até o instante em que ele sai da esfera de influência da Terra e sofre apenas as perturbações relativas ao Sol.

No gráfico energia do problema de 2 corpos versus distância ao Sol observamos que ocorre um aumento na energia do asteróide quando ele está bem próximo da Terra e que após este encontro com o planeta ele sofre perda de energia. Neste gráfico, percebemos que mesmo escolhendo um valor de esfera de influência elevado ($R_{inf} = 100R_{Lap}$), não foi possível observar o instante em que o asteróide sai da esfera de influência da Terra e volta a sofrer apenas a influência do Sol, deixando as proximidades do planeta com órbita alterada em relação à órbita inicial em torno do Sol. Para podermos observar este efeito, neste caso específico, deveríamos considerar uma esfera de influência com um raio maior do que o valor adotado.

A Figura 4.4, mostra a colisão de um asteróide com excentricidade 0,71 com a Terra.

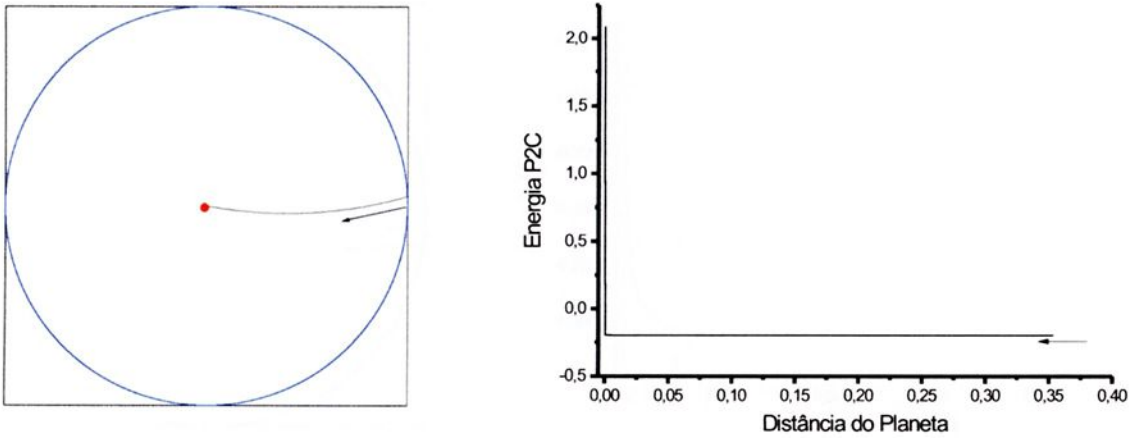


Figura 4.4 - Esquerda: Trajetória do asteróide (linha verde) na região de estudo (linha azul) $R_{inf} = 100R_{Lap}$, Direita: Energia do problema de 2 corpos versus distância à Terra. Dados: $e = 0,71$, $\theta = 0$

As figuras a seguir, mostram as trajetórias de asteróides que cruzam as órbitas de Marte, Terra e Vênus.

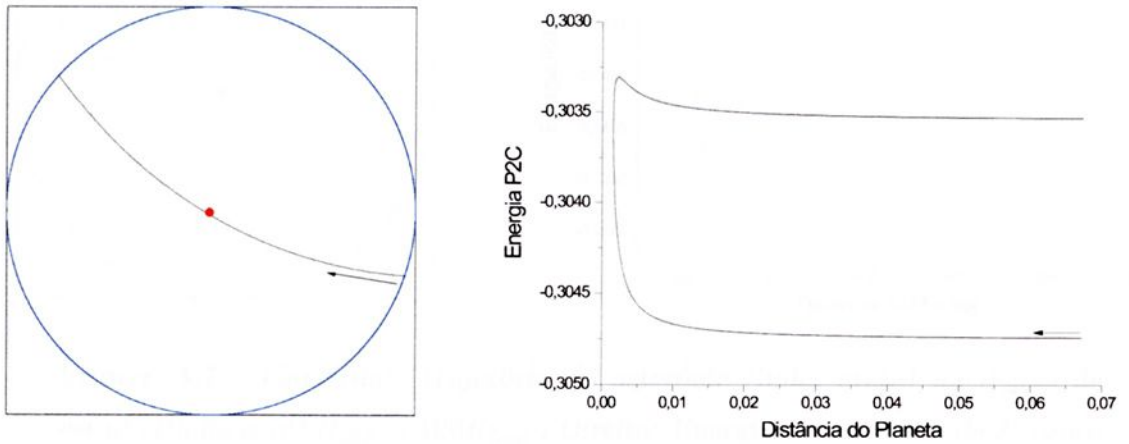


Figura 4.5 - Esquerda: Trajetória do asteróide (linha preta) na região de estudo (linha azul) $R_{inf} = 100R_{Lap}$, Direita: Energia do problema de 2 corpos versus distância à Marte. Dados: $e = 0,44$ - $\theta = 0,1$

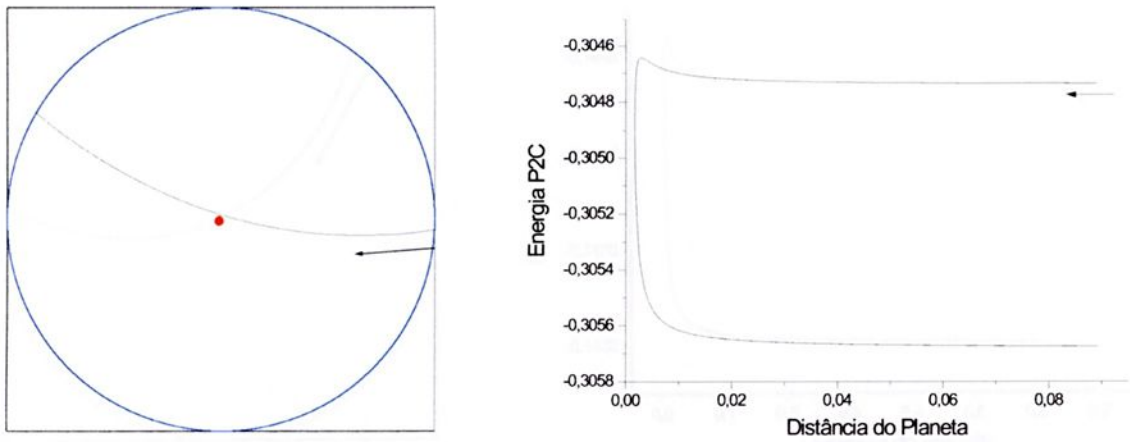


Figura 4.6 - Esquerda: Trajetória do asteróide (linha preta) na região de estudo (linha azul) $R_{inf} = 100R_{Lap}$, Direita: Energia do problema de 2 corpos versus distância à Marte. Dados: $e = 0,49$ - $\theta = -0,1$

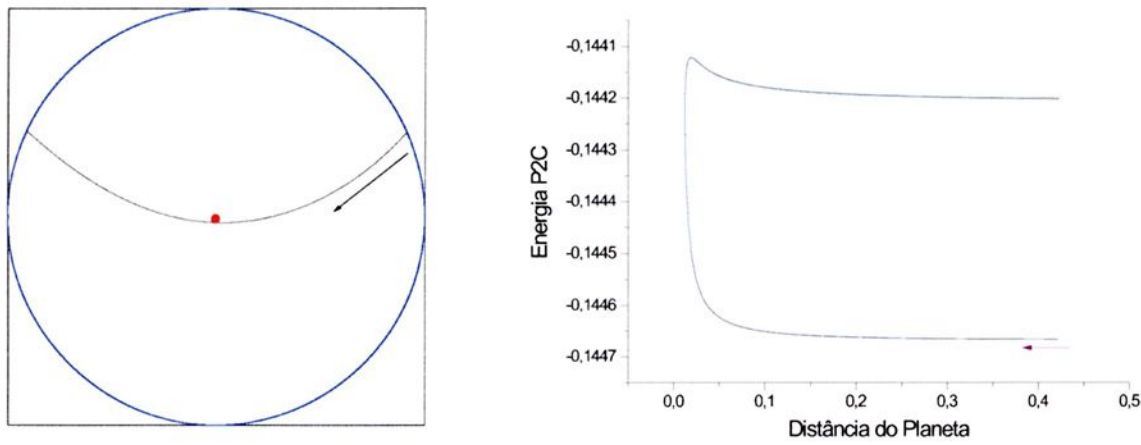


Figura 4.7 - Esquerda: Trajetória do asteróide (linha preta) na região de estudo (linha azul) $R_{inf} = 100R_{Lap}$, Direita: Energia do problema de 2 corpos versus distância à Vênus. Dados: $e = 0,84$ - $\theta = 0,7$

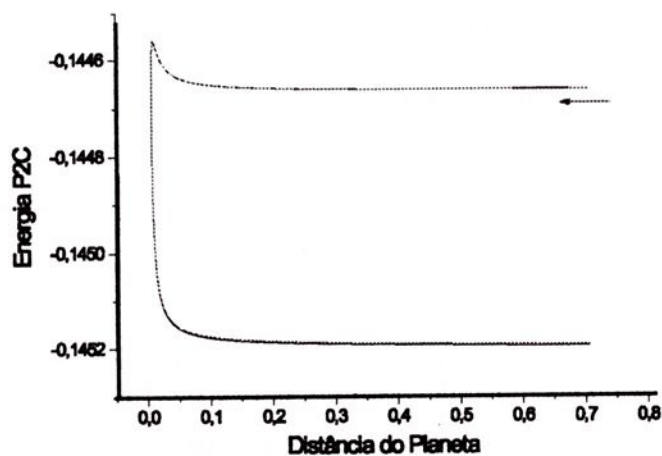
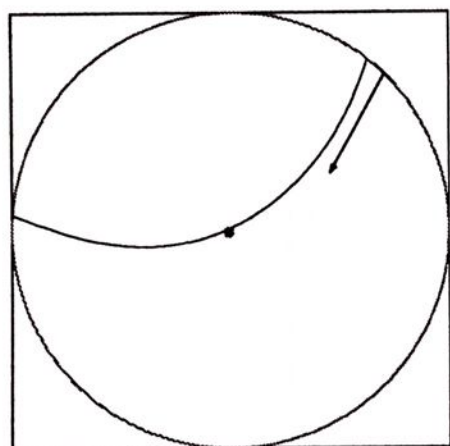


Figura 4.8 - Esquerda: Trajetória do asteroide (linha verde) na região de estudo (linha azul) $R_{inf} = 100R_{Lap}$, Direita: Energia do problema de 2 corpos versus distância à Vênus. Dados: $e = 0,97$ - $\theta = -0,4$

4.4 - Um Método para Determinação de Esfera de Influência.

Da análise dos resultados e dos gráficos obtidos propomos um método para determinação de esfera de influência.

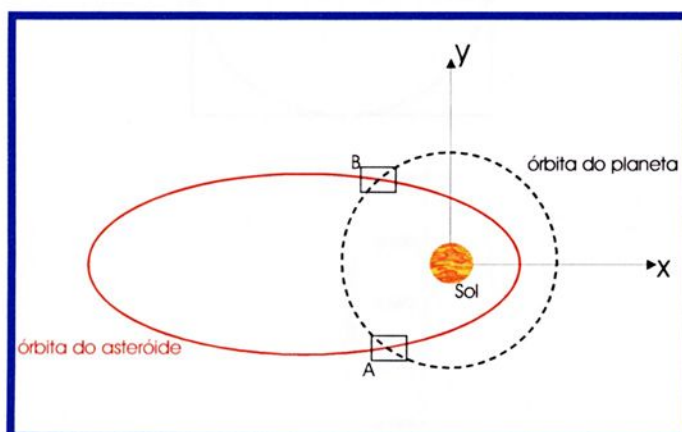


Figura 4.9- Ilustração das órbitas de um planeta (linha tracejada) e de um objeto (linha cheia) ao redor do Sol. As áreas A e B denotam as regiões onde a evolução orbital do objeto pode ser dominada pelo campo gravitacional do planeta.

Utilizando a técnica “swing-by” dividimos o P3C (Sol-asteróide-planeta) em P2C: asteróide-planeta e Sol-asteróide. Vimos que quando o asteróide entra na região A (ou região B) a influência gravitacional do planeta é maior do que a do Sol, isto é, quando o asteróide está dentro da região A a influência do planeta predomina sobre a influência do Sol.

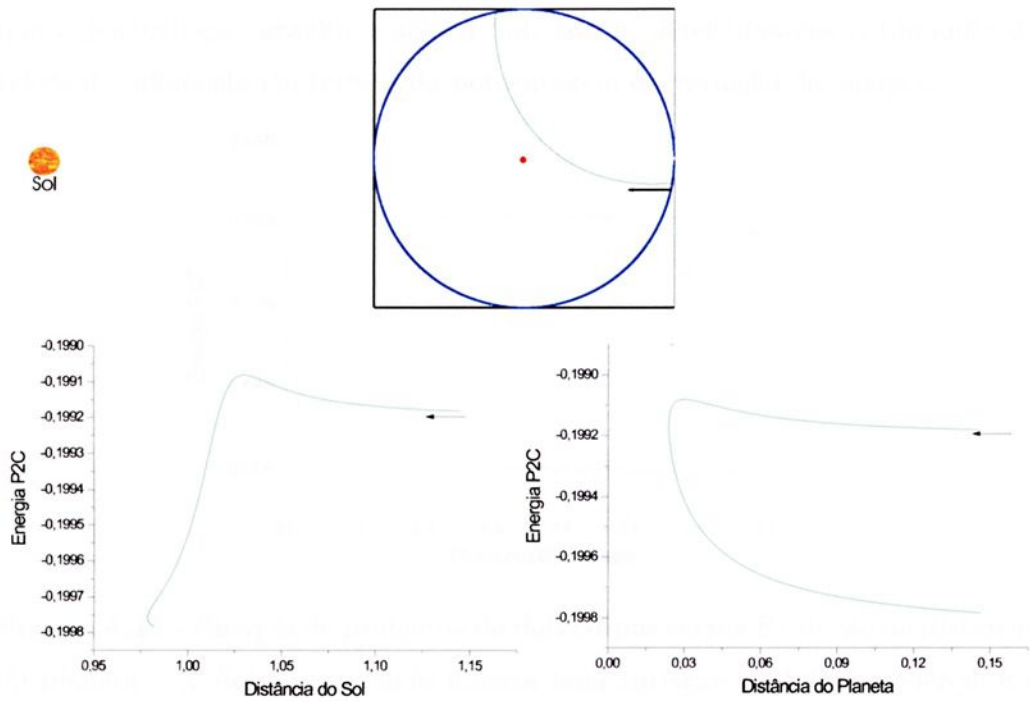


Figura 4.10 - *Topo: Trajetória do asteroide (linha verde) na região de estudo (linha azul) $R_{inf} = 100R_{Lap}$, Esquerda: energia do problema de 2 corpos versus distância ao Sol e Direita: energia do problema de 2 corpos versus distância à Terra. Dados: $e = 0,61$ - $\theta = -2,2$*

Na Figura 4.10 podemos perceber o instante em que o asteroide está sob a influência do Sol e sob a influência do planeta. Quando o asteroide está sob a influência gravitacional do Sol (antes de entrar na região A) sua energia permanece constante. Conforme ele vai se aproximando do planeta (entra na região A) a energia, vai gradativamente, sendo alterada atingindo um valor máximo quando ele está no pericentro e conforme ele se afasta do planeta, volta a sofrer apenas as perturbações gravitacionais do Sol. Há uma queda gradual de energia até que ela volte a ser constante.

Como a transição de um regime para o outro não é bem definida, propomos um novo método de determinação para a esfera de influência. Através do monitoramento da energia do problema de dois corpos podemos determinar o instante em que a perturbação gravitacional do planeta torna-se mais forte do

que a perturbação gravitacional do Sol, isto é, determinamos o tamanho da esfera de influência em termos da porcentagem da variação da energia.

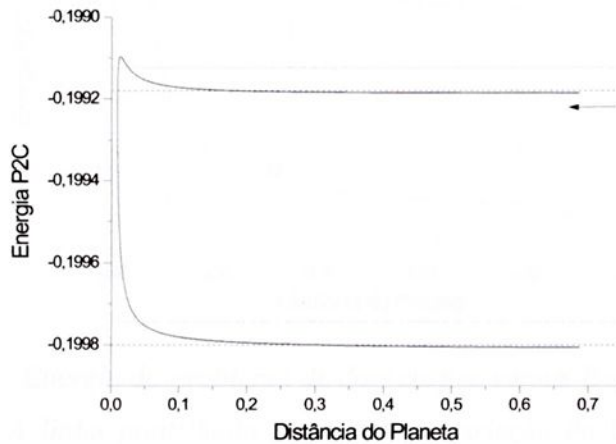


Figura 4.11 - *Energia do problema de dois corpos versus Evolução da distância do planeta . A linha pontilhada mostra uma variação de 10% na energia e a linha tracejada variação de 1%.*

A Figura 4.11, descreve o comportamento de uma partícula que sofre uma grande aproximação com um determinado planeta. Calculamos a variação do semi-eixo maior pela variação da energia:

$$\Delta a = -\frac{\mu_1}{2\Delta E}$$

Desta maneira, podemos determinar o tamanho da esfera de influência do planeta em termos da porcentagem da variação da energia:

$$\left(\frac{E(t) - E_i}{E_f - E_i} \right) 100\% = E_{\%}$$

onde $E(t)$ é a energia do asteróide num dado instante t , E_f e E_i são a energia final e inicial do asteróide, respectivamente. Este estudo permite determinar o limite do raio da esfera de influência em função da variação da energia.

Podemos, por exemplo determinar o tamanho da esfera de influência quando a energia do problema de dois corpos variar 10%.

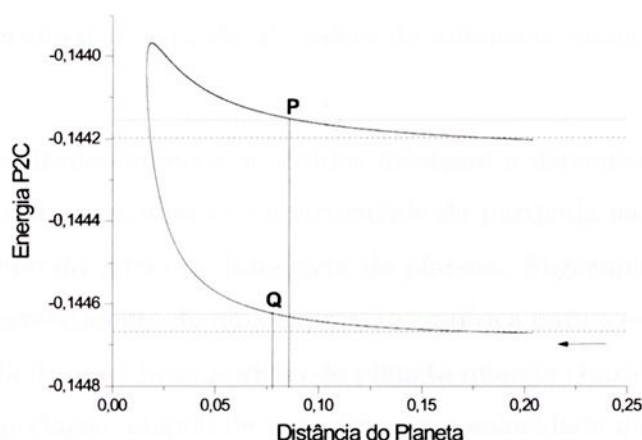


Figura 4.12 - Energia do problema de dois corpos versus Evolução da distância do planeta . A linha pontilhada mostra uma variação de 10% na energia e a linha tracejada variação de 1%.

Na Figura 4.12 os pontos **Q** e **P** marcam o instante em que a energia varia 10% antes e depois do encontro com o planeta, respectivamente. Conhecendo estas distâncias podemos determinar o tamanho da esfera de influência. Na figura 4.16, definimos o tamanho da esfera de influência quando a energia varia 1%. O estudo é feito de maneira análoga ao da Figura 4.15.

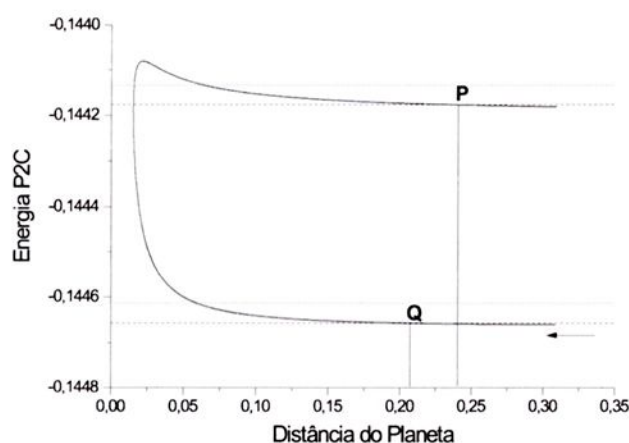


Figura 4.13 - Energia do problema de dois corpos versus Evolução da distância do planeta . A linha pontilhada mostra uma variação de 10% na energia e a linha tracejada variação de 1%.

De modo semelhante a Figura 4.12, conhecendo as distâncias **Q** e **P**,

podemos determinar o tamanho da esfera de influência quando a energia varia 1%.

Os resultados numéricos obtidos mostram a dependência entre o periapse, o ângulo de aproximação e a velocidade da partícula na determinação do tamanho do raio da esfera de influência do planeta. Sugerimos, como trabalho futuro, o desenvolvimento de uma expressão empírica para a esfera de influência para uma dada massa e nova posição do planeta quando considerados diferentes condições de periapse, ângulo de aproximação e velocidade da partícula.



CAPÍTULO 5

RESULTADOS

Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos para o caso analítico e para o caso numérico.

5.1 - Resultados de Marte

Para o estudo analítico, consideramos dois casos: o primeiro quando a esfera de influência possui raio igual a $1R_{Lap}$ e o segundo quando a esfera de influência possui raio igual a $2R_{Lap}$. No estudo numérico, consideramos a esfera de influência com raio igual a $100R_{Lap}$.

No estudo analítico, o comportamento observado quando adotamos o tamanho da esfera de influência de raio igual a $1R_{Lap}$ (círculos rosas) foi semelhante ao comportamento observado para a esfera de influência de raio igual a $2R_{Lap}$ (triângulos vermelhos): a variação angular de Marte diminui com o aumento da excentricidade da órbita do asteroide. A variação do arco orbital de Marte, quando consideramos $R_{inf} = 1R_{Lap}$ é de $0,01^\circ < \Delta\theta < 0,71^\circ$ e para $R_{inf} = 2R_{Lap}$ é de $0,01^\circ < \Delta\theta < 0,53^\circ$. Estes resultados concordam com o resultado numérico obtido (círculos azul claro), quando assumimos $R_{inf} = 100R_{Lap}$, obtendo $0,01^\circ < \Delta\theta < 0,38^\circ$. Estes resultados indicam que dos 360° da órbita de Marte, somente $0,4^\circ$, aproximadamente, no caso numérico e aproximadamente $0,55^\circ$ no estudo analítico contribuem para o mecanismo de remoção dos asteroides na falha da ressonância 3 : 1.

Para asteroides com valores de excentricidade maiores do que 0,61 não observamos variação de pelo menos 0,3% no semi-eixo maior orbital do asteroide.



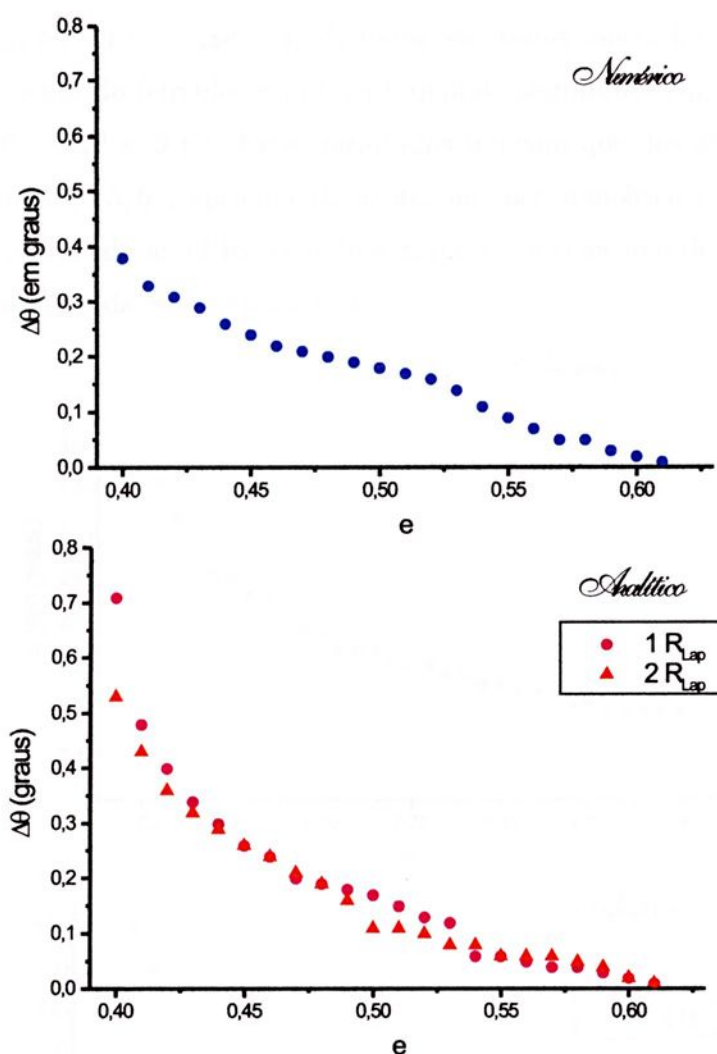


Figura 5.1 - Excentricidade (e) versus variação do tamanho do arco orbital de Marte ($\Delta\theta$).

5.2 - Resultados da Terra

No estudo analítico, o comportamento observado quando adotamos o tamanho da esfera de influência de raio igual a $1R_{Lap}$ (círculos rosas) foi semelhante ao comportamento observado para a esfera de influência de raio igual a $2R_{Lap}$ (triângulos verdes): a variação angular da Terra diminui com o aumento da excentricidade da órbita do asteroide. A variação do arco orbital da Terra, quando consideramos $R_{inf} = 1R_{Lap}$ é de $0,7^\circ < \Delta\theta < 4,4^\circ$ e para

$R_{inf} = 2R_{Lap}$ é de $0,6^\circ < \Delta\theta < 4,5^\circ$. Estes resultados concordam com o resultado numérico obtido (círculos azul claro), quando assumimos $R_{inf} = 100R_{Lap}$, obtendo $1,0^\circ < \Delta\theta < 3,6^\circ$. Estes resultados indicam que dos 360° da órbita da Terra, somente $3,6^\circ$, aproximadamente, no caso numérico e aproximadamente $4,5^\circ$ no estudo analítico contribuem para o mecanismo de remoção dos asteróides na falha da ressonância 3 : 1.

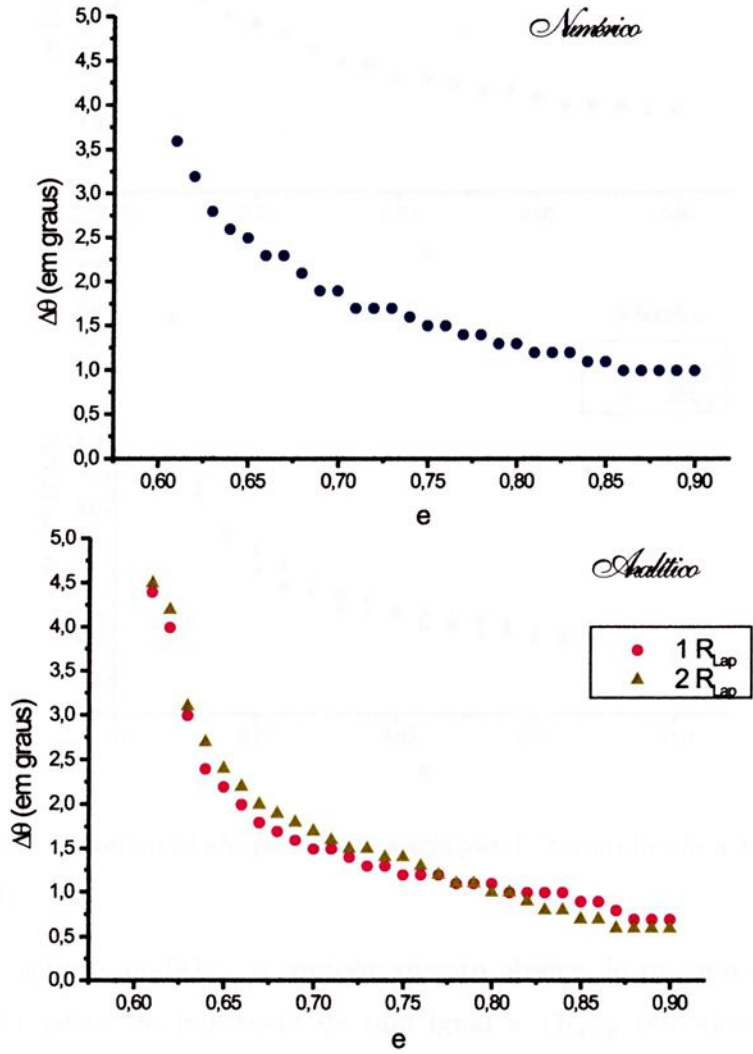


Figura 5.2 - Excentricidade (e) versus variação do tamanho do arco orbital da Terra ($\Delta\theta$).

5.3 - Resultados de Vênus

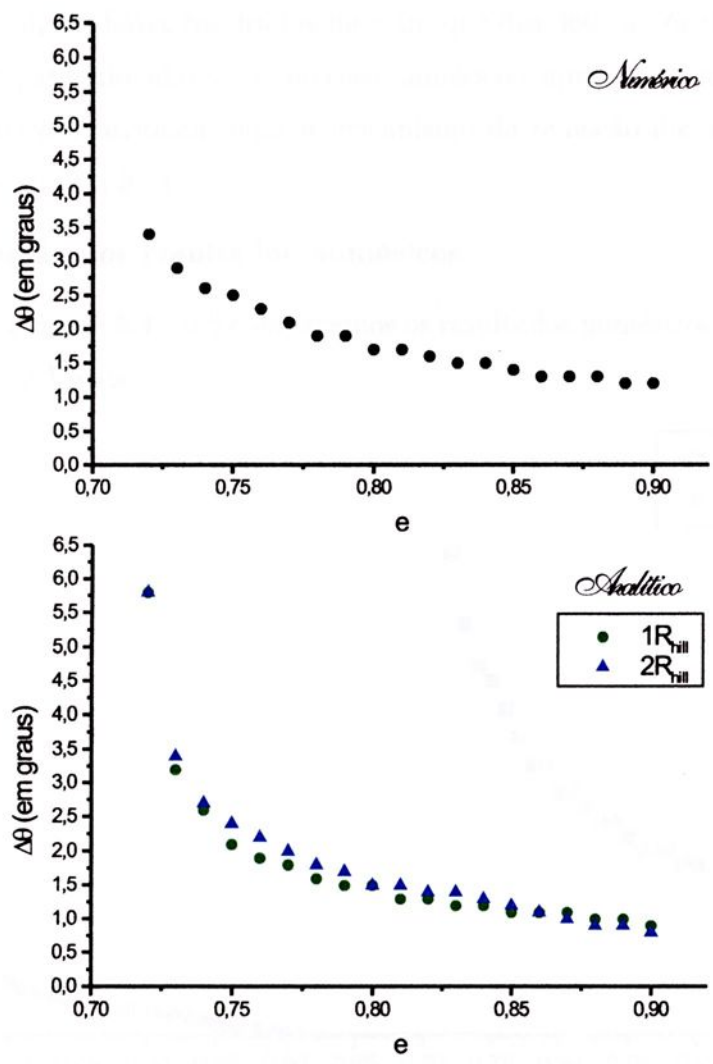


Figura 5.3 - Excentricidade (e) versus variação do tamanho do arco orbital de Vênus ($\Delta\theta$).

No estudo analítico, o comportamento observado quando adotamos o tamanho da esfera de influência de raio igual a $1R_{Lap}$ (círculos verdes) foi semelhante ao comportamento observado para a esfera de influência de raio igual a $2R_{Lap}$ (triângulos azuis): a variação angular de Vênus diminui com o aumento da excentricidade da órbita do asteroide. A variação do arco orbital de Vênus, quando consideramos $R_{inf} = 1R_{Lap}$ é de $0,9^\circ < \Delta\theta < 5,8^\circ$ e para $R_{inf} = 2R_{Lap}$ é de $0,8^\circ < \Delta\theta < 5,8^\circ$. Estes resultados concordam com o resultado

numérico obtido (círculos pretos), quando assumimos $R_{inf} = 100R_{Lap}$, obtendo $1,2^\circ < \Delta\theta < 3,4^\circ$. Estes resultados indicam que dos 360° da órbita de Vênus, somente $3,4^\circ$, aproximadamente, no caso numérico e aproximadamente $5,8^\circ$ no estudo analítico contribuem para o mecanismo de remoção dos asteróides na falha da ressonância 3 : 1.

5.4 - Discussão dos resultados numéricos

Nas Figuras 5.4 e 5.5 comparamos os resultados numéricos obtidos para Marte, Terra e Vênus.

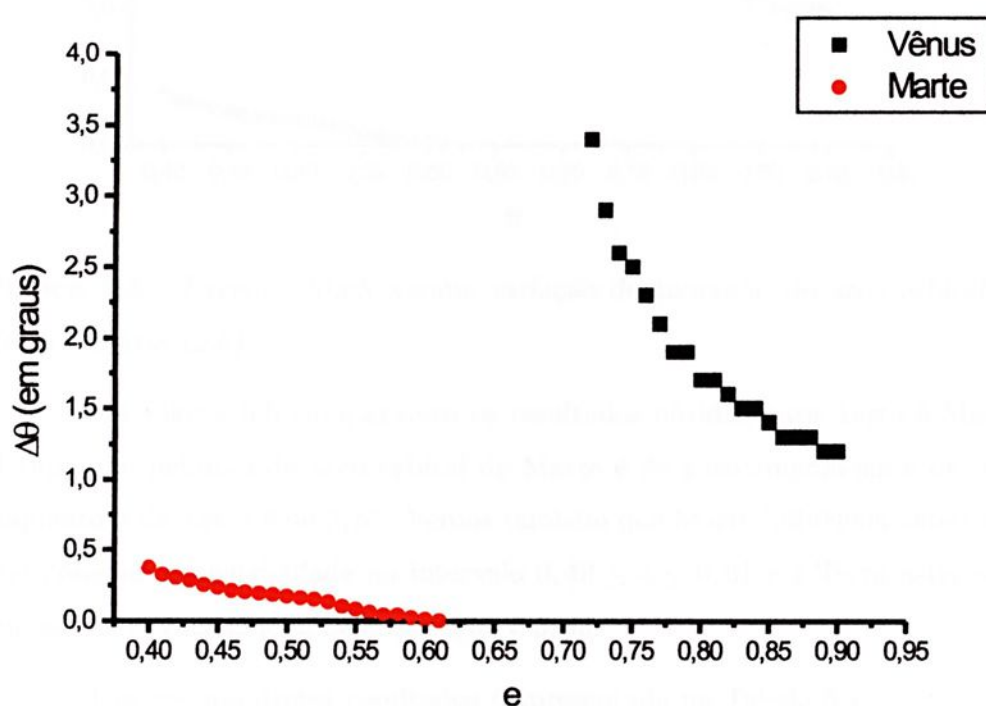


Figura 5.4 - Excentricidade versus variação do tamanho do arco orbital de Marte e Vênus ($\Delta\theta$).

Na Figura 5.4 comparamos os resultados numéricos obtidos para Vênus e Marte. O tamanho máximo do arco orbital de Marte é de aproximadamente $0,4^\circ$ enquanto que o de Vênus é de $3,4^\circ$. Vemos também que Marte influencia asteróides que possuem excentricidade no intervalo $0,40 \leq e \leq 0,61$ e Vênus asteróides que possuem excentricidade entre 0,72 e 0,90.

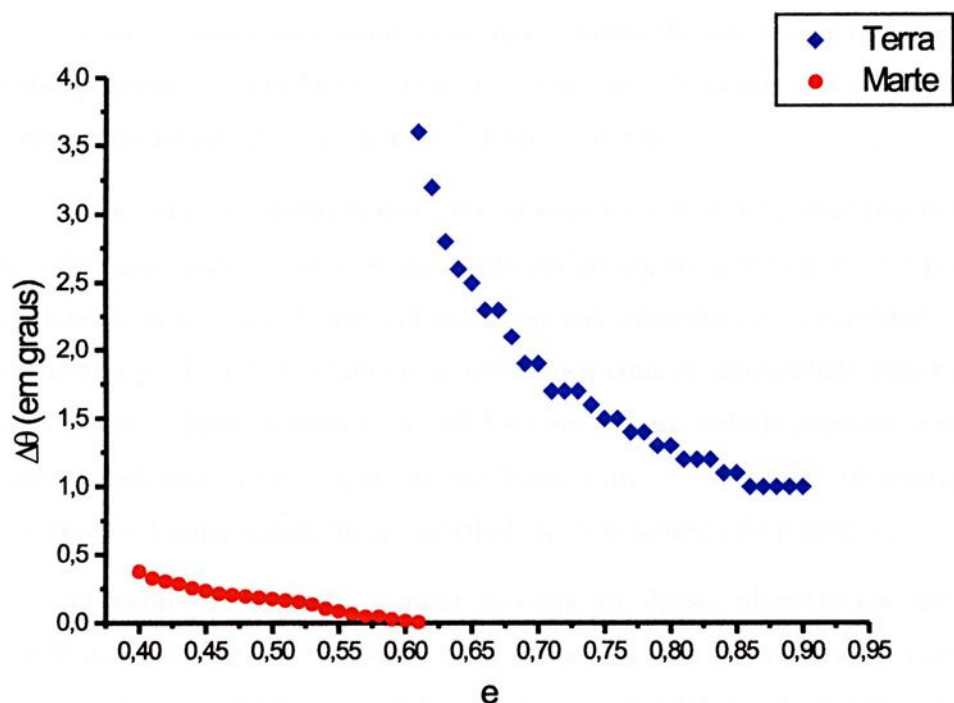


Figura 5.5 - Excentricidade versus variação do tamanho do arco orbital da Terra e Marte ($\Delta\theta$).

Na Figura 5.5 comparamos os resultados obtidos para Terra e Marte. O tamanho máximo do arco orbital de Marte é de aproximadamente de $0,4^\circ$ enquanto o da Terra é de $3,6^\circ$. Vemos também que Marte influencia asteróides que possuem excentricidade no intervalo $0,40 \leq e \leq 0,61$ e a Terra asteróides que possuem excentricidade entre $0,61$ e $0,90$.

Um resumo destes resultados é apresentado na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Resultados Numéricos

Planeta	$\Delta\theta_{max}$	intervalo de excentricidade
Vênus	2,2	$0,72 \leq e \leq 0,90$
Terra	2,6	$0,61 \leq e \leq 0,90$
Marte	0,4	$0,40 \leq e \leq 0,61$

Nossos resultados tornam claro que o asteroide precisa ter de fato uma grande aproximação com Marte, Terra e Vênus a fim de sofrer uma perturbação e poder ser removido da ressonância 3:1 com Júpiter.

O estudo do intervalo das excentricidades que o asteroide precisa ter para sofrer uma variação de pelo menos 0,3% no seu semi-eixo maior ao passar pelo planeta mostra que Marte influencia apenas asteroides com excentricidade entre 0,40 e 0,61; a Terra influencia asteroides com excentricidade superior a 0,61 e Vênus influencia apenas asteroides com excentricidade superior a 0,72; em outras palavras dizemos que quando Marte para de influenciar os asteroides é que Terra e Vênus começam a contribuir no mecanismo de remoção.

O estudo da variação angular de cada um desses planetas nos diz que dos 360° da órbita de Marte apenas 0,4°, aproximadamente, contribuem para o mecanismo de remoção dos asteroides que cruzam sua órbita. A contribuição da Terra ($\Delta\theta_{Terra} = 2,6^\circ$) é aproximadamente igual a de Vênus ($\Delta\theta_{Venus} = 2,2^\circ$), porém a faixa de asteroides que cruza sua órbita é maior do que a que cruza a órbita de Vênus.

CAPÍTULO 6

PARÂMETROS RELEVANTES

Neste capítulo apresentaremos os parâmetros relevantes para determinarmos a importância de cada planeta no mecanismo de remoção de asteróides da falha 3:1 com Júpiter.

6.1 - Diferença da geometria das órbitas:

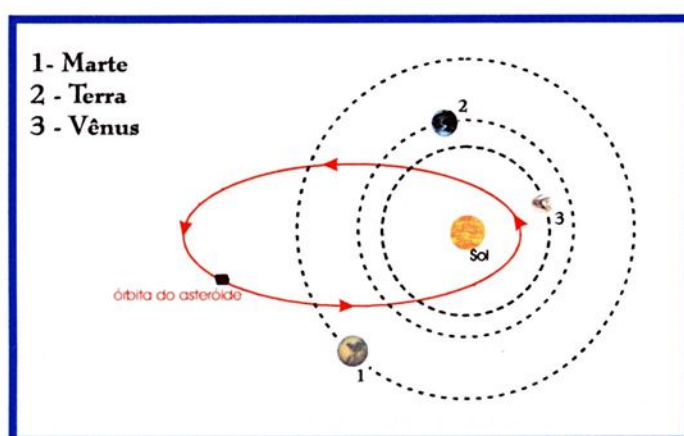


Figura 6.1 - Representação esquemática da trajetória de um asteróide que cruza as órbitas dos planetas: Marte, Terra e Vênus.

Da Figura 6.1, podemos observar que um asteróide com uma dada excentricidade (suficiente para cruzar as órbitas dos três planetas) cruzará a órbita de um planeta com um ângulo que será cada vez menor quanto maior for o raio orbital do planeta. Ou seja, o ângulo formado com a órbita da Terra será maior do que com a de Marte, e o de Vênus será ainda maior do que o da Terra. Isto implica numa maior velocidade relativa e portanto numa menor influência gravitacional do planeta. Na Figura 6.2, podemos comparar a velocidade relativa de um asteróide com uma dada excentricidade ao cruzar as órbitas dos planetas Marte, Terra e Vênus. Vemos que a velocidade relativa

com que um asteróide cruza a órbita da Terra é, menos de 30% maior do que a relativa a Marte e menos de 30% menor do que a relativa a Vênus.

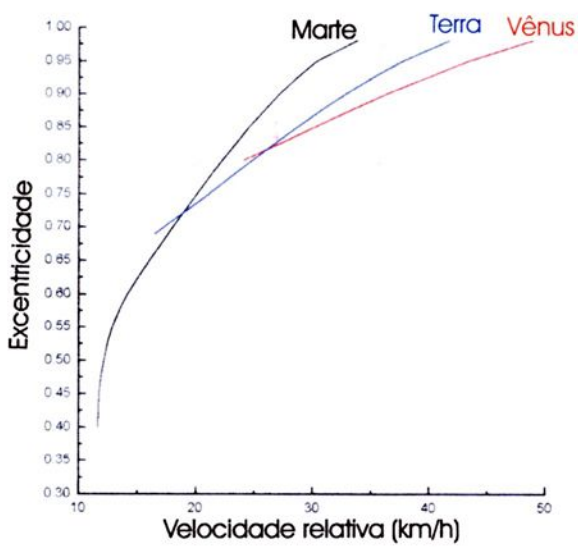


Figura 6.2 - Velocidade relativa (km/s) versus excentricidade do asteróide.

Devido a geometria das órbitas e suas massas, sabemos que a velocidade angular de Marte é menor do que a da Terra e a de Vênus, isto é seus movimentos médios são: $191,36^\circ/\text{ano}$, $359,81^\circ/\text{ano}$ e $585,56^\circ/\text{ano}$ respectivamente. Da Equação 2.6, temos que quanto maior a velocidade angular do planeta maior poderá ser a velocidade relativa do asteróide. Além da dependência na velocidade relativa, existe a dependência em d : quanto mais excêntrica a órbita, maior será d : a distância entre a órbita do asteróide e do planeta nos limites da esfera de influência.

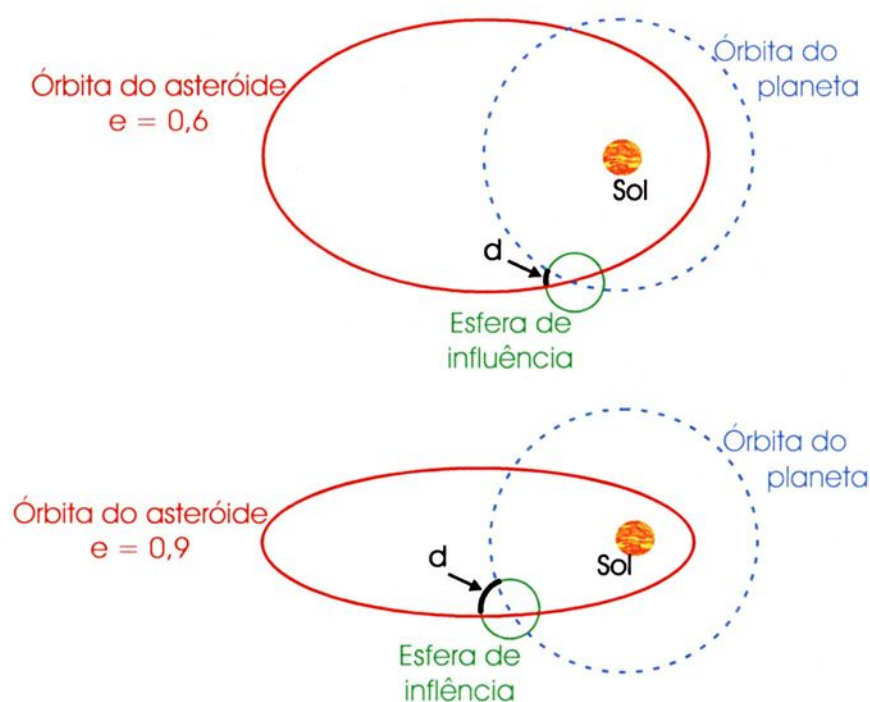


Figura 6.3 - Representação esquemática da trajetória de um asteroide, com excentricidade $e = 0,9$ e $e = 0,6$, que cruza a órbita do planeta.

Destas duas dependências temos que asteroides com alta excentricidade e uma grande distância entre a órbita do asteroide e do planeta nos limites da esfera de influência, sofrem uma pequena variação de energia e asteroides com baixa excentricidade e uma pequena distância entre a órbita do asteroide e do planeta nos limites da esfera de influência, sofrem uma grande variação de energia. Resumindo:

- $e \uparrow \Rightarrow V_{rel} \text{ e } d \uparrow \Rightarrow \Delta E \downarrow$
- $e \downarrow \Rightarrow V_{rel} \text{ e } d \downarrow \Rightarrow \Delta E \uparrow$

Da relação entre a variação da energia com a variação do semi-eixo maior orbital (Equação 2.14) e com a excentricidade (Equação 2.15) podemos afirmar que quanto maior a velocidade relativa do asteroide menor será a variação do semi-eixo maior orbital e da excentricidade e portanto menor será a chance de remoção do asteroide pelo planeta na falha observada.

6.2 - Relação da massa do planeta com o tamanho da esfera de influência

Da Equação (2.24) temos a relação da massa do planeta com a esfera de influência: quanto maior a massa do planeta, maior será sua esfera de influência e maiores serão as chances de um asteróide, passando pelo planeta, ter sua trajetória alterada a ponto de ser removido da ressonância 3:1. A pequena diferença encontrada para os valores do arco orbital da Terra e de Vênus ocorre por que estes dois planetas possuem aproximadamente a mesma massa: $M_{Terra} = 3,00 \times 10^{-6}$ e $M_{Venus} = 2,45 \times 10^{-6}$. Marte é o planeta com a menor massa ($M_{Marte} = 3,21 \times 10^{-7}$) e menor arco orbital. Os valores para as massas dos planetas estão em unidade de massa solar.

Desta análise e dos resultados obtidos, temos a contribuição de cada planeta no mecanismo de remoção de asteróides da ressonância 3:1 com Júpiter. A Terra é o planeta mais importante neste mecanismo em relação aos outros dois planetas. Vênus contribui menos que a Terra devido a alta velocidade relativa com que os asteróides cruzam sua órbita. Por causa de sua massa pequena, em relação aos outros dois planetas, Marte não é um grande contribuinte neste mecanismo de remoção.

O estudo para a variação do tamanho do arco orbital do planeta, quando o semi-eixo maior orbital do asteróide sofre uma variação de pelo menos 1% é análoga à variação de 0,3%. Como era esperado, o tamanho do arco orbital, neste caso, é bem menor do que no caso anterior. Não foi observado uma mudança significativa nas órbitas de asteróides com $e = 0,50$ e $e = 0,90$ que sofrem uma grande aproximação com Marte e Terra, respectivamente. Uma compilação dos resultados é apresentada nas tabelas 6.1, 6.2 e 6.3.

Tabela 6.1 - Arco orbital para o planeta Marte (em graus)

excentricidade do asteróide	$1R_{Lap}$ (0,3%)	$1R_{Lap}$ (1,0%)	$2R_{Lap}$ (0,3%)	$2R_{Lap}$ (1,0%)
0,40	0,71	0,20	0,70	0,19
0,50	0,17	0,01	0,06	-

Tabela 6.2 - Arco orbital para o planeta Terra (em graus)

excentricidade do asteróide	$1R_{Lap}$ (0,3%)	$1R_{Lap}$ (1,0%)	$2R_{Lap}$ (0,3%)	$2R_{Lap}$ (1,0%)
0,61	7,0	2,00	6,9	2,00
0,70	1,9	0,40	1,8	0,21
0,80	1,2	0,07	0,9	0,03

Tabela 6.3 - Arco orbital para o planeta Vênus (em graus)

excentricidade excentricidade	$1R_{Lap}$ (0,3%)	$1R_{Lap}$ (1,0%)	$2R_{Lap}$ (0,3%)	$2R_{Lap}$ (1,0%)
0,72	5,8	1,60	5,8	1,60
0,80	1,8	0,40	1,6	0,15
0,90	1,0	0,10	0,5	0,08

COMENTÁRIOS FINAIS

Para os nossos estudos, consideramos apenas asteróides em ressonância 3:1 com Júpiter, com semi-eixo maior orbital igual a 2,5U.A. Temos que a fim de criar a falha observada, o semi-eixo maior deve variar pelo menos 0,3%, dependendo da excentricidade, para que o asteróide seja removido da ressonância. Analisamos a contribuição individual de Marte, Terra e Vênus neste mecanismo de remoção e assumimos que o asteróide passa apenas uma única vez pela órbita do planeta. Assim sendo, não são considerados efeitos acumulativos de passagens anteriores do asteróide pela órbita do planeta.

No estudo analítico, o comportamento observado quando adotamos o tamanho da esfera de influência de raio igual a $1R_{Lap}$ foi semelhante ao comportamento observado para a esfera de influência de raio igual a $2R_{Lap}$: a variação do tamanho do arco orbital do planeta diminui com o aumento da excentricidade da órbita do asteróide.

Comparando os modelos analítico e numérico vemos que ambos são adequados para asteróides com órbitas altamente excêntricas, porém o modelo analítico apresenta problemas para asteróides com órbitas pouco excêntricas, pois nestes casos tanto a influência gravitacional do Sol quanto a influência gravitacional do planeta são relevantes durante parte significativa da trajetória do asteróide.

Assumindo que o fluxo de asteróides que cruzam as órbitas dos três planetas é o mesmo, os nossos resultados mostram que a Terra é o planeta mais relevante neste mecanismo de remoção. Vênus contribui um pouco menos do que a Terra pois a velocidade relativa com que os asteróides cruzam sua órbita é mais alta e Marte não é um grande contribuinte neste mecanismo devido a sua massa ser muito inferior a dos outros planetas. Determinamos a importância de cada planeta neste mecanismo devido a:



1 - dependência do raio orbital do planeta: o ângulo com que o asteróide cruzará a órbita dos três planetas é cada vez menor quanto maior for o raio orbital do planeta, o que implica numa velocidade relativa menor e portanto numa maior influência gravitacional do planeta;

2 - dependência da excentricidade do asteróide: quanto mais excêntrica a órbita do asteróide maior será a sua velocidade relativa e menor será a variação da energia, o que implica numa menor variação do semi-eixo maior orbital;

3 - dependência da massa do planeta: quanto maior a massa do planeta maior será o efeito gravitacional sobre o asteróide.

É necessário determinar qual destes parâmetros predomina no mecanismo de remoção: a massa do planeta ou a velocidade relativa do asteróide. Sabendo que a variação do semi-eixo maior orbital é diretamente proporcional à massa e inversamente proporcional à velocidade e lembrando que a massa da Terra é aproximadamente dez vezes a massa de Marte e aproximadamente igual a massa de Vênus e que a velocidade relativa com que um asteróide cruza a órbita da Terra é, pelo menos de 30% menor do que a que ele cruza a órbita de Vênus e 30% maior do que a que ele cruza a órbita de Marte podemos dizer que a massa é o fator predominante no mecanismo de remoção por estes planetas.

Nos nossos estudos não consideramos a frequência com que os asteróides em ressonância 3:1 com Júpiter cruzam a órbita de cada um dos planetas. Se o asteróide cruzar mais vezes a órbita de Marte do que a da Terra, por exemplo, a probabilidade de que Marte o remova da ressonância poderá ser maior do que a do planeta Terra. Portanto, caso fosse disponível a informação relativa a parcela de tempo em que os asteróides permanecem em determinados valores de excentricidade seria possível determinar a eficiência de cada planeta neste mecanismo de remoção.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Broucke, R.A. "The Celestial Mechanics of Gravity Assist", AIAA. Paper 88-4220, 1988.

Broucke, R.A., Prado, A.F.B.A. "Jupiter Swing-by Trajectories Passing Near the Earth". Space Flight Mechanics. Ed. R.G., L.J. Wood, R.C. Thompson, and S. J. Kerridge, Vol 82, Pt 2, Advances in Astronautical Sciences, American Astronautical Society, Pasadena, CA, 1159-1176, 1993.

Dvorak R. "New Results on the motions of Asteroids in Resonances", IAU Symposia, **152**(2), 145-152, 1992.

Everhart, E. "Close Encounters of Comets and Planets". Astronomical Journal, Vol. 74, No 5, 735-750, 1969.

Everhart, E. "An Efficient Integrator That Uses Gauss-Radau Spacings", in Dynamics of Comets: Their Origin and evolution, Eds. A. Carusi and G. B. Valsecchi, D. Reidel Publishing Company (Holanda), 185-202, 1985.

Ferraz-Mello S, Klafke J.C., Michtchenko TA, Nesvorny D. "Chaotic transitions in resonant asteroidal dynamics", Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy **64**(1-2), 93-105, 1996.

Gladman, B.J., F. Migliorini, A. Morbidelli, V. Zappalà, P. Michel, A. Cellino, C. Froeschlé, H. F. Levison, M. Bailey e M. Duncan. "Dynamical Lifetimes of Objects Injected into Asteroid Belt Resonances". Science **277**, 197-201, 1997.

Guillens S.A., Martins R.V., Gomes R.S. "A global study of the 3:1 resonance neighborhood: A search for unstable asteroids". Astronomical Journal **124** (4), 2322-2331, 2002.

Kaplan, M. H. "Modern Spacecraft Dynamics & Control". John Wiley & Sons, Canadá, 1976.



Kirkwood, D. "Meteoric Astronomy: A Treatise on Shooting-Stars, Fire-Balls and Aerolites." J.B.Lippincott & CO, Filadélfia, 1867.

Morbidelli A., Moons M. "Numerical Evidence on the Chaotic Nature of the 3/1 Mean Motion Commensurability", *Icarus* **115**, 60-65, 1995.

Murray, C.D., Dermott S.F. "Solar System Dynamics". Cambridge University Press. Cambridge, Inglaterra, 1999.

Murray, C.D., "Unpredictable Clockwork: Chaos in the Solar System". Transcrito de uma palestra dada na British Association Meeting, Keele University, 2 de setembro de 1993.

Prado, A.F.B.A., "Close-Approach Trajectories in The Elliptic Restricted Problem". *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 20, No 4, 797-802, 1997.

Prado, A.F.B.A., "Trajetórias Espaciais e Manobras Assistidas por Gravidade". INPE, 2001.

Prussing, J. E., Conway, B. A., "Orbital Mechanics", 1993.

Roy, A.E. "Orbital Motion", Adam Hilger, Bristol, 168, 1988.

Wisdom, J. "The origin of Kirkwood gaps: A mapping for asteroidal motions near the 3/1 commensurability". *The Astronomical Journal* **87**(3), 557-593, 1982.

Wisdom, J. "Meteoritos May Follow a Chaotic Route to Earth" *Nature*. **315**, 731-733, 1983.

Wisdom, J. "Urey Prize Lecture: Chaotic Dynamics in the Solar System" *Icarus* **72**, 241-275, 1987.



