

6

GUSTAVO ADOLFO TORRES FERNANDES DA COSTA

O MÉTODO DE SOMA DE BOREL APLICADO AO ESTUDO DAS SÉRIES
PERTURBATIVAS DE UMA INTERAÇÃO RACIONAL EM MECÂNICA
QUÂNTICA E TEORIA QUÂNTICA DOS CAMPOS



Dissertação de Doutorado
apresentada no
Instituto de Física Teórica

Orientador: Marcelo Otávio Caminha Gomes (USP)

São Paulo

Novembro de 1988

IFT/TE-D-38

AGRADECIMENTOS

É uma honra para mim expressar os mais sinceros agradecimentos ao Prof. Marcelo O. C. Gomes pela magnífica orientação a este trabalho de doutorado, aos amigos do Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IFUSP) e do Instituto de Física Teórica (IFT) que franquearam-me seus conhecimentos e acolhimento constante. Obrigado aos Profs. Domingos Marchetti e César Bonatto (que participou diretamente na elaboração da última parte deste trabalho) e Vicent Rivasseau (École Polytechnique, Palaiseau, França) pelas inúmeras discussões. Não posso deixar, ainda, de mencionar alguns amigos e colegas cuja amizade ajudou a vencer as dificuldades normais do dia-a-dia: U. Wichoski (que fez as figuras no computador), C. Goldman e D. Marchetti, J.C. Brunelli, R.S. Mendes, R.F. Ribeiro, S. Brunini, bem como muito especialmente, minha família. Obrigado, também, à FAPESP pelo suporte financeiro.

RESUMO

Estudamos as séries perturbativas de um modelo com interação racional, nos contextos da mecânica quântica e da teoria quântica de campos em duas dimensões. No primeiro contexto, provamos a somabilidade de Borel (SB) das séries perturbativas para o espectro de energia; no segundo contexto, a existência local da transformada de Borel para as funções de Schwinger de N pontos e a estabilidade do modelo, quando o ordenamento de Wick é restrito à parte polinomial da interação. Neste caso, o modelo é equivalente a uma teoria polinomial o que implica na SB das séries perturbativas.

ABSTRACT

We have studied the perturbative expansions of a model with a rational interaction in both contexts of quantum mechanics and quantum field theory in two dimensions. In the former one, Borel Summability (BS) of the expansions for the energy levels was proved while in the latter, the local existence of the Borel transform for the N point Schwinger functions and the stability of the model, when Wick ordering is restricted to the polynomial part of the interaction. In this case, the model is equivalent to a polynomial theory and as such the series are Borel summable.

Í N D I C E

Página

I. INTRODUÇÃO.....	01
II. UMA INTERAÇÃO RACIONAL EM MECÂNICA QUÂNTICA: A SOMABILIDADE DE BOREL DAS SÉRIES PERTURBATIVAS.....	06
1. Propriedades do operador $H(g)$	10
2. Somabilidade de Borel.....	17
III. UMA INTERAÇÃO RACIONAL EM TEORIA DE CAMPOS.....	36
1. Existência local da Transformada de Borel das funções de Schwinger.....	40
2. O propagador da interação $R(\emptyset)$	50
IV. DISCUSSÃO.....	80
APÊNDICE A: ALGUMAS PROPRIEDADES DO OPERADOR $H(g)$	90
APÊNDICE B: A FORMA QUADRÁTICA E SUAS PROPRIEDADES.....	93
APÊNDICE C: DEDUÇÃO DA FÓRMULA (2.26).....	97
APÊNDICE D: PROVA DO LEMA 4.....	100
APÊNDICE E: ALGUMAS RELAÇÕES IMPORTANTES.....	108
APÊNDICE F: CÁLCULO DE $: \phi^6(x) \omega_S \phi(x) :$	113
APÊNDICE G: CÁLCULO DOS VALORES ESPERADOS	
1. $\langle : \phi^n : (1 + \alpha g \phi^2)^{-1} \rangle \quad n = 0, 2, 4$	
2. $\langle (1 + \alpha g \phi^2)^{-1} (1 + \alpha g \phi^2)^{-1} \rangle$	116
NOTAS DE PÉ DE PÁGINA.....	120
BIBLIOGRAFIA.....	122

I. INTRODUÇÃO

O método perturbativo (MP) é um dos métodos mais importantes de que dispomos para obter informações sobre os fenômenos físicos, em geral. É, talvez, a ferramenta mais abrangente no que tange à sua aplicabilidade nos mais diferentes contextos. Essencialmente, o método consiste em construir séries de potências da forma

$$G(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1.1)$$

para representar grandezas de interesse, $G(z)$, como, por exemplo, as funções de Schwinger em teorias de campos e os níveis de energia em mecânica quântica, cuja forma analítica exata não conhecemos mas que dependem do parâmetro de perturbação z .

Sabemos, hoje, que as séries perturbativas são, em geral, divergentes. Este comportamento é verificado, por exemplo, quando os coeficientes a_n são estudados em grandes ordens de perturbação através do método de ponto de sela adaptado por Lipatov às integrais funcionais. Mostra-se, em geral, que $|a_n| \sim K n! n^b$ quando $n \rightarrow \infty$, porém, os primeiros termos da expansão aproximam o valor de $G(z)$ quando z é muito pequeno. Neste caso, a função $G(z)$ e a série perturbativa satisfazem a relação

$$\left| G(z) - \sum_{n=0}^N a_n z^n \right| \leq |z|^{N+1} K(N) \quad (1.2)$$

onde $K(N)$ é uma constante positiva que depende apenas de N .

A série é chamada, então, de assintótica. Quando a série é convergente, $K(N) \sim (\mathcal{I}_e)^{N+1}$, e a aproximação da função pela série truncada melhora quanto maior o valor de N . Ao contrário, se a série diverge, o valor de $K(N)$ tende a crescer a partir de uma determinada ordem piorando a aproximação.

Em geral, uma série assintótica divergente não representa unívocamente uma função, a menos que determinadas condições se verifiquem. Somente, então, a função poderá ser reconstruída. Vamos registrar aqui o teorema de Nevanlinna-Sokal [1] cujas condições para a reconstrução da função $G(z)$ são as mais sensíveis ao nosso trabalho.

Teorema de Nevanlinna-Sokal

Seja $G(z)$ uma função analítica no círculo (fig.1)

$$C_R = \left\{ z \mid \operatorname{Re} \frac{1}{z} > \frac{1}{R} \right\} \quad (1.3)$$

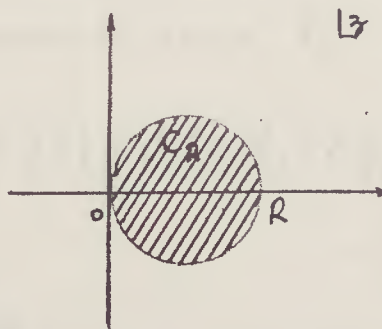


Fig. 1

onde sua representação em série $\sum a_n z^n$ satisfaz a condição de forte assintoticidade, ou seja,

$$\left| G(z) - \sum_{n=0}^N a_n z^n \right| \leq C \cdot \sigma^{N+1} (N+1)! |z|^{N+1} \quad (1.4)$$

uniformemente em N e $z \in C_R$. Então, a função $G(z)$ é única; a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} b^n \quad (1.5)$$

é convergente no círculo definido por $|b| < \frac{1}{\sigma}$ (fig. 2),

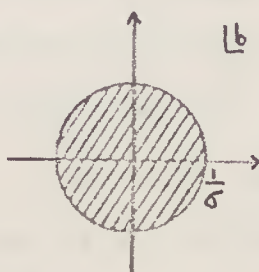


Fig. 2

e sua soma, $B(b)$, chamada de transformada de Borel, é contínua analiticamente na faixa F_σ (fig. 3) definida como

$$F_\sigma = \left\{ b \mid \text{dist}(b, \mathbb{R}_+) < \frac{1}{\sigma} \right\} \quad (1.6)$$

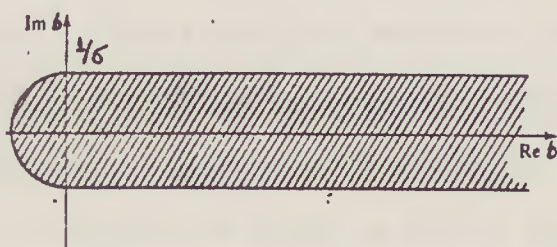


Fig. 3

onde

$$|B(b)| < K \cdot e^{\frac{|b|}{R}} \quad (1.7)$$

uniformemente em $F_{\delta'}$, com $\delta' > \delta$; a soma de Borel, definida pela integral

$$\frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-b/z} B(b) db \quad (1.8)$$

é absolutamente convergente e igual à função $G(z)$, para todo $z \in C_R$. O teorema recíproco também vale: se $B(t)$ é uma função analítica em $F_{\delta''}(\delta'' < \delta)$ e satisfaz (1.7), então, a função $G(z)$, definida pela integral (1.8), é analítica em C_R e satisfaz (1.4) uniformemente em todo $C_{R'}$, com $R' < R$ e $a_n = B^{(n)}(b)|_{b=0}$.

As fórmulas (1.5) e (1.8) constituem o chamado método de soma de Borel. Quando as condições do teorema de Nevanlinna-Sokal, ou de seu recíproco, são satisfeitos, dizemos que a série $\sum a_n z^n$ é somável de Borel e denotaremos a somabilidade de Borel de qualquer série pelas iniciais SB.

Esta tese tem por escopo estudar a propriedade de SB das séries perturbativas de um modelo com uma interação racional em ambos os contextos da mecânica quântica e da teoria de campos em duas dimensões. Ela é formada de quatro capítulos e vários apêndices. O capítulo I consiste desta introdução e, nele, expomos o método de soma de Borel juntamente com o teorema de Nevanlinna-Sokal. No capítulo II, estudamos um sistema

quântico com um potencial racional e demostramos a SB das séries perturbativas para o seu espectro de energia. No capítulo III, o mesmo modelo é considerado em teoria de campos. É provada a existência local da transformada de Borel das funções de Schwinger e aspectos relacionados com a construção do modelo são discutidos. Reunimos no último capítulo, o IV, alguns comentários gerais e uma discussão sobre os resultados obtidos e questões em aberto.

Atenção: A numeração entre colchetes, [.], refere-se à bibliografia (pg. 122) enquanto que aquela entre parênteses e com um asterisco no canto superior direito, (.)*, refere-se às notas de pé de página (pg. 120).

II. UMA INTERAÇÃO RACIONAL EM MECÂNICA QUÂNTICA: A SOMABILIDADE DE BOREL DAS SÉRIES PERTURBATIVAS.

Neste segundo capítulo da tese, provaremos a somabilidade de Borel das séries perturbativas para os níveis de energia de um sistema quântico unidimensional cujo operador Hamiltoniano

$$H(g) = \frac{1}{2} p^2 + V(x; g) \equiv \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{g^2 x^6}{1 + \alpha g x^2} \quad (2.1)$$

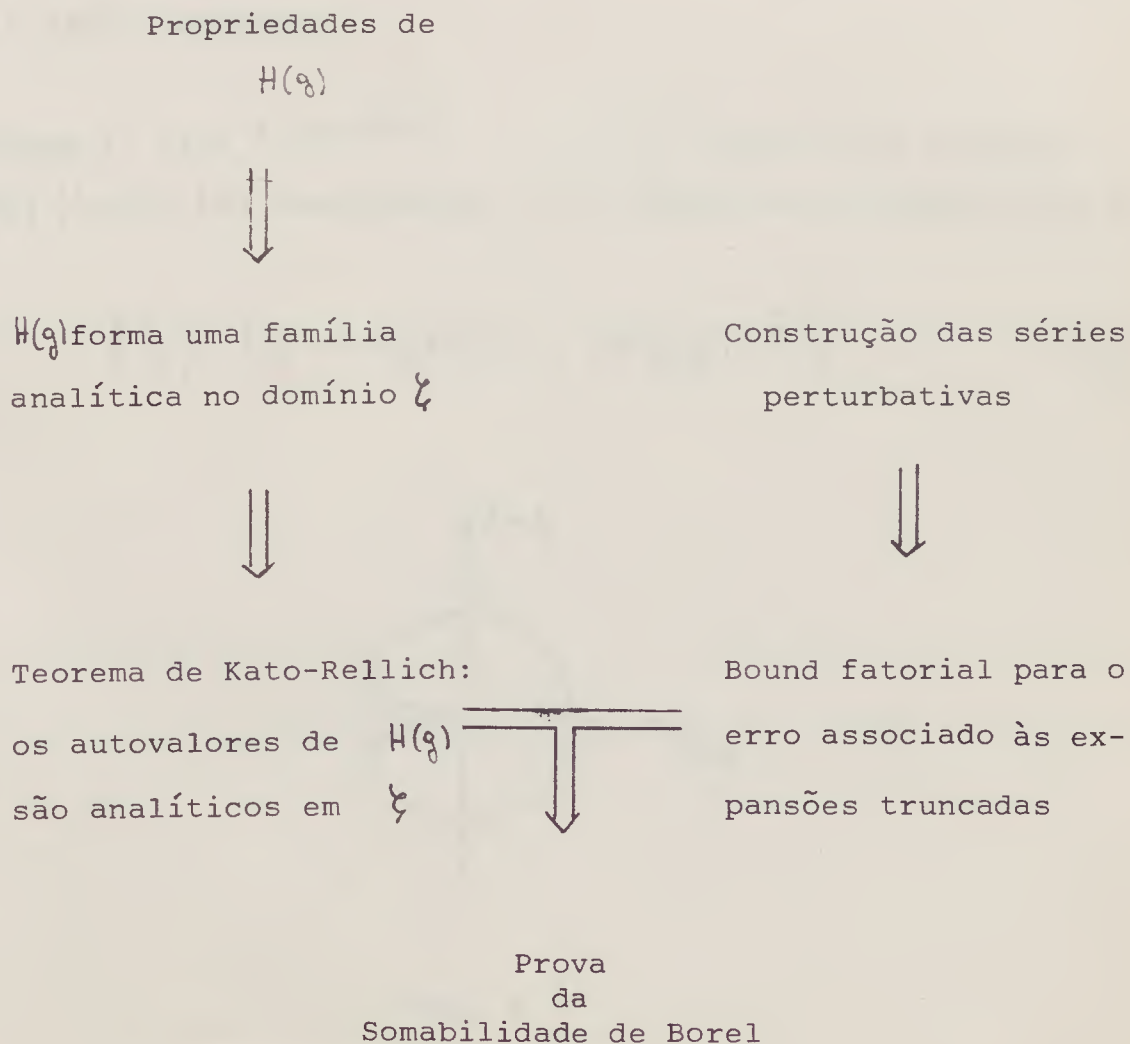
está definido no espaço de Hilbert $L^2(-\infty, \infty)$ das funções quadraticamente integráveis. Na fórmula (2.1), α é uma constante positiva maior que a unidade e g é o parâmetro de perturbação.

O termo não polinomial aparecendo em (2.1), porém, com valores dois e quatro em vez de seis como potência de x vem sendo extensamente considerados hoje em dia em modelos da teoria do laser. Veja, por exemplo, [2] e referências ali citadas para maiores informações sobre os mesmos, o trabalho de Varshni [3], onde pode ser encontrada uma análise numérica dos autovalores de energia para o potencial tridimensional $V(x) = \frac{1}{2} \vec{x}^2 + \frac{\lambda \vec{x}^2}{2(1 + g \vec{x}^2)}$ estudado em anos recentes. Flessas [4] e Blecher e Leach [5] obtiveram, para certos valores de $\lambda(g)$, algumas soluções exatas para o mesmo potencial.

Nosso interesse no modelo definido pela Hamiltoniana (2.1) surgiu do fato de que o termo não polinomial é a soma do bem conhecido potencial quártico $g x^4 / \alpha$ e de um, já citado, estudado na teoria do laser, $\frac{g x^4}{\alpha} (1 + \alpha g x^2)^{-1}$. Ambos já foram estudados. O primeiro, por Simon [6], Simon, Graffi e Grecchi [7] e, o segundo, por Auberson [2]. Eles provaram a somabilidade de Borel (SB) das séries perturbativas dos seus respectivos

espectros. Demonstraremos que as séries perturbativas para o espectro de energia do operador (2.1) satisfazem, também, a condição de forte assintoticidade e, portanto, a SB.

Uma das peculiaridades da demonstração da propriedade de forte assintoticidade está na sua dificuldade, mormente pelo fato de ser necessário o conhecimento de propriedades analíticas de uma função a priori desconhecida. No que diz respeito à mecânica quântica, dispomos, hoje em dia, de métodos muito poderosos, desenvolvidos principalmente por Kato [8] e Simon [6,9], que nos ajudam enormemente a levar a tarefa a bom conteúdo. No que diz respeito a nosso trabalho, seguiremos de perto a lógica de cálculo de Auberson em [2] onde aqueles métodos são sistematicamente empregados e que esquematizamos, agora, em termos gerais.



Em primeiro lugar, investigaremos algumas propriedades importantes do operador Hamiltoniano $H(q)$ no espaço de Hilbert $L^2(-\infty, \infty)$: por exemplo, se seu domínio é denso, se ele é autoadjunto, a natureza do seu espectro, etc. Em seguida, de acordo com o esquema, verificaremos que ele forma uma família analítica (Lema 1) numa certa região ζ do plano complexo. Poderemos, então, aplicar o teorema de Kato-Rellich para obter a região de analiticidade dos autovalores $\{E_j(q)\}$. De posse destas informações, passaremos à construção das séries perturbativas propriamente ditas. A ferramenta básica para isso será o operador resolvente $(H(q) - \lambda)^{-1}$, $\lambda \notin \{E_j(q)\}$. Mostraremos que o erro associado às expansões truncadas está limitado de acordo com a condição de forte assintoticidade pertinente para termos a SB demonstrada.

Os teoremas seguintes resumem os resultados principais deste capítulo:

Teorema I: Seja θ , $0 \leq \theta < \pi$. O espectro de energia $\{E_j(q)\}$ ($j=0,1,2,\dots$) da Hamiltoniana (2.1) é analítico nos setores (fig. 4)

$$\{S_j\} = \{q: 0 < |q| \leq R_j < 1, |\arg q| \leq \theta\} \quad (2.2)$$

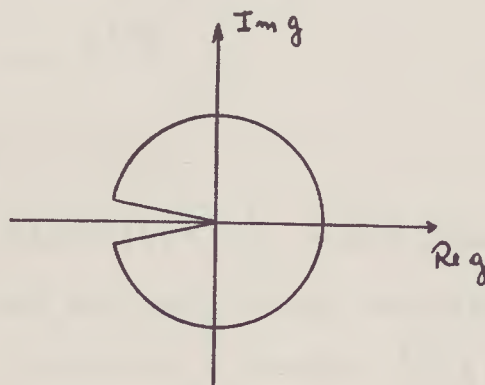


Fig. 4

onde as séries perturbativas respectivas são assintoticamente fortes, i.e., para todo $N = 0, 1, 2, \dots$

$$\left| E_j(q) - \sum_{m=0}^N E_{j,m} q^m \right| \leq K_j \Gamma\left(\alpha(N+1) + \frac{q}{2}\right) (\sigma_j d_q)^{N+1} |q|^{N+1} \quad (2.3)$$

onde

$$d_q = \begin{cases} 1 & \text{se } |\arg q| \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 / \sin |\arg q| & \text{se } \frac{\pi}{2} < |\arg q| \leq \theta \end{cases} \quad (2.4)$$

e K_j , σ_j são constantes positivas para j fixado.

Teorema II: O espectro $\{E_j(q)\}$ satisfaz às condições do teorema de Nevanlinna-Sokal generalizado (pg.34). Portanto, a série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^m)!} E_{j,m} b^{2m} \quad (2.5)$$

é convergente no disco $|b| < \frac{1}{\sigma_j}$ e, sua soma, a transformada de Borel $B_j(b)$, tem uma continuação analítica na faixa $F_\sigma = \{b \mid \text{dist}(b, \mathbb{R}_+) < \frac{1}{\sigma_j}\}$ e, portanto, a função $E_j(q)$ pode ser reconstruída pela integral

$$E_j(g) \equiv \int_0^{\infty} e^{-b} B_j(g b^2) db \quad , \quad (2.6)$$

absolutamente convergente no interior $\operatorname{Re} \frac{1}{g} > \frac{1}{R_j}$ da cardióide mostrada na fig. 5

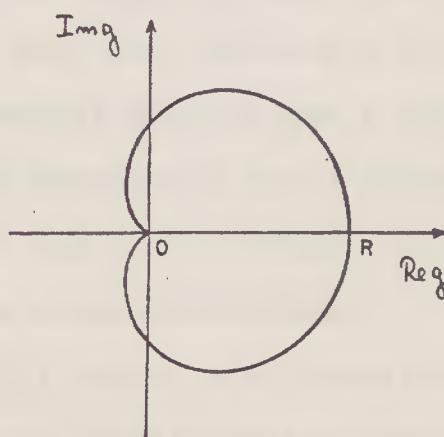


Fig. 5

II. 1. Propriedades do operador $H(g)$

O domínio $\mathcal{D}(H)$ onde o operador H está definido é formado por funções $\psi \in L^2$ tais que a condição de integrabilidade $\|H\psi\| < \infty$ seja satisfeita. H não é limitado superiormente, razão pela qual $\mathcal{D}(H)$ não pode ser todo o espaço de Hilbert mas está formado pelas funções que decaem mais rapidamente que x^4 quando $x \rightarrow \infty$, ou seja,

$$\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(p^2) \cap \mathcal{D}(x^4) \quad (2.7)$$

As funções de Hermite

$$e_n = \alpha_n e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \quad (2.8)$$

onde $\alpha_n = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}$ e $H_n(x)$ é o polinômio de Hermite de ordem n , estão no domínio de $H(q)$. Segue disto que $\mathcal{D}(H)$ é um domínio denso em L^2 porque as funções e_n formam um conjunto ortonormal em termos do qual todo vetor do espaço L^2 pode ser expresso. Este fato garante a existência do operador adjunto $H^\dagger$ e permite mostrar que a Hamiltoniana é autoadjunta. Portanto, seu espectro é real. Segue, também, de teoremas básicos, que ele é discreto. Deixamos para o Apêndice A os detalhes que permitem estas conclusões.

O Lema 1 abaixo é um importante requisito para a aplicação do Teorema de Kato-Rellich, mencionado antes, para se obter informações sobre a analiticidade do espectro (1)*.

Lema 1: A Hamiltoniana $H(q)$ forma uma família analítica no plano cortado $\zeta = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$, i.e.,

- a) $H(q)$ é um operador fechado (Apêndice A, b)), $\forall q \in \zeta$
- b) $H(q)$ tem um conjunto resolvente (Apêndice B, Definição 3) não vazio,
- c) $H(q)\varphi$ é uma função vetorial analítica em ζ .

Prova:

- a) Podemos escrever $H(q)$ como a soma dos operadores

$$C(q) = \frac{1}{2} p^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) x^2 + q \frac{x^4}{\alpha} \quad (2.9)$$

que é fechado [6] e

$$b(q) = + \frac{x^2}{\alpha^2 (1 + \alpha q x^2)} \quad (2.10)$$

que é limitado por $1/\alpha^3 |q|$, se $\operatorname{Re} q \geq 0$, e por $1/\alpha^3 |\operatorname{Im} q|$, se $\operatorname{Re} q < 0$. Além disso, $\mathcal{D}(b) \supset \mathcal{D}(c)$ de modo que a soma $C + b$ é um operador fechado [8].

b) Veja o Lema 2 para a demonstração deste item.

c) O valor esperado

$$(\psi, H(q)\psi) = (\psi, H(0)\psi) + q^2 (\psi, x^6/(1 + \alpha q x^2)\psi) \quad (2.11)$$

com $\psi \in L^2(-\infty, \infty)$ e $\psi \in \mathcal{D}(H)$, é uma função analítica no parâmetro $q \in \zeta$, com valores complexos, e, como vetor no espaço de Hilbert, $H\psi$ está bem definido devido à convergência das integrais no lado direito de (2.11). Portanto, $H\psi$ é função vetorial analítica em ζ .

Lema 2: O eixo real negativo $(-\infty, 0)$ está contido no conjunto resolvente $\rho(H(q))$, $\forall q \in \zeta$ e $\alpha > 1$.

Prova: O potencial $V(x; q) = \frac{1}{2}x^2 + q^2 x^6/(1 + \alpha q x^2)$ com $q \in \zeta$ e $|x| \leq \infty, \alpha > 1$, mapeia o plano cortado ζ nele mesmo. Os pontos $V(x; q)$ formam o setor $S = \{V \mid |\arg V| < \pi\}$ (fig. 6) (2^*)

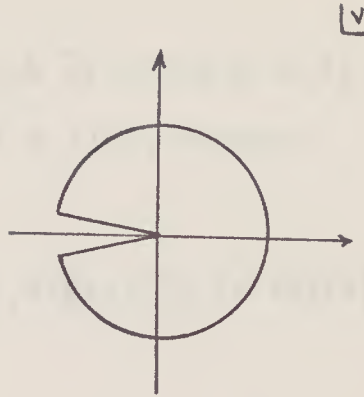


Fig. 6

Seja $q = |q| e^{i\theta}$. Vamos considerar, em primeiro lugar, o setor delimitado por $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (fig. 7) no qual $\operatorname{Im} V \geq 0$

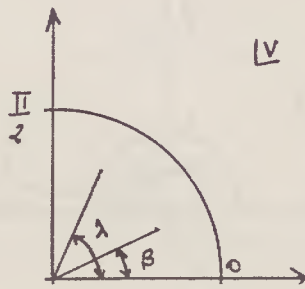


Fig. 7

e

$$\operatorname{Im}(\psi, H(q)\psi) = (\psi, \operatorname{Im} V \psi) \geq 0$$

(2.12)

Para $0 \leq \arg V = \beta \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$
então,

temos $\operatorname{tg} \beta \leq \operatorname{tg} \lambda$ e,

$$\operatorname{Im} V = \operatorname{Re} V \cdot \operatorname{tg} \beta \leq \operatorname{Re} V \cdot \operatorname{tg} \lambda$$

(2.13)

Por outro lado, $\operatorname{tg} \lambda \cdot \operatorname{Re}(\psi H(q) \psi) \geq \operatorname{tg} \lambda \cdot \operatorname{Re}(\psi V \psi)$. Portanto, pelas relações (12) e (13), obtemos

$$\operatorname{Im}(\psi, H(q) \psi) \leq \operatorname{Re}(\psi, H(q) \psi) \cdot \operatorname{tg} \lambda \quad (2.14)$$

Comparando as relações (13) e (14) vem que os valores esperados $(\psi, H(q) \psi)$ estão definidos num setor análogo àquele caracterizado por (13).

Consideremos, agora, o setor (fig. 8) onde $\frac{\pi}{2} < \beta \leq \lambda' < \pi$, $\operatorname{tg} \beta \leq \operatorname{tg} \lambda'$ e $\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{Im} V / |\operatorname{Re} V|$

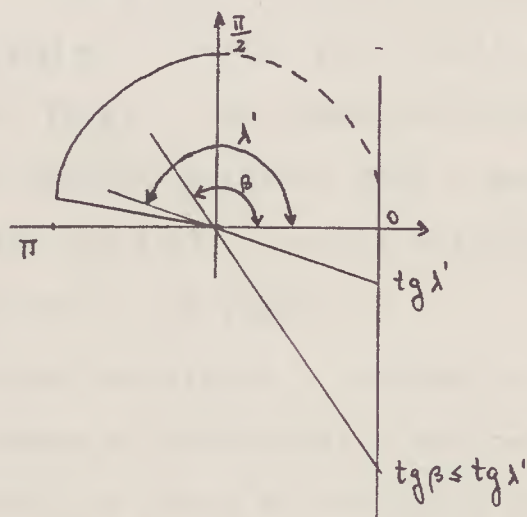


Fig. 8

ou

$$\operatorname{Im} V \geq \operatorname{Re} V \cdot \operatorname{tg} \lambda' \quad (2.15)$$

Mas $\operatorname{Re} H(q) \geq -|\operatorname{Re} V|$; logo, como $\operatorname{tg} \lambda' < 0$, decorre que

$$\operatorname{tg} \lambda' (\varphi \operatorname{Re} H \varphi) \leq \operatorname{tg} \lambda' (\varphi \operatorname{Re} V \varphi) \quad (2.16)$$

com $|\operatorname{Re} V| = -\operatorname{Re} V$. Usando as relações (15) e (12) obtemos

$$\operatorname{Im} (\varphi, H \varphi) \geq \operatorname{tg} \lambda' \operatorname{Re} (\varphi H(g) \varphi) \quad (2.17)$$

Como antes, a implicação desta relação é a de que o valor esperado $(\varphi, H(g) \varphi)$ está também definido no setor onde $\frac{\pi}{2} < \lambda' < \pi$ como pode-se deduzir comparando as relações (17) e (15). $(\varphi, H(g) \varphi)$ está, pois, definido no setor com ângulo de abertura $[0, \pi)$. De forma inteiramente similar é possível estender o domínio anterior para o seu complementar $(-\pi, 0)$ e o valor esperado $(\varphi H \varphi)$ estará definido em todo o setor com ângulo de abertura $(-\pi, \pi) (2^*)$.

Apelamos, agora, para o teorema 8.17 da referência [9a] (veja também o Apêndice B) o qual assegura que os pontos não pertencendo ao setor de definição dos valores esperados $(\varphi H(g) \varphi)$ estão no conjunto resolvente. O Lema 2 está, então, demonstrado.

Uma consequência importante do último lema é a de que o espectro de autovalores está certamente limitado inferiormente assegurando a estabilidade do sistema, já que o conjunto $(-\infty, 0)$ pertence ao resolvente estando o espectro no seu complemento.

Outro tipo de estabilidade, i.e., a de que a teoria com $g \equiv 0$ é obtida quando $|g| \rightarrow 0$, está garantida pelo seguinte lema

Lema 3: Seja $0 \leq \theta < \pi$ e $\lambda \in \rho(H(0))$, o conjunto resolvente de $H(0)$. Então,

$$\lim_{\substack{|g| \rightarrow 0 \\ |\arg g| \leq \theta}} \|(H(g) - \lambda)^{-1} - (H(0) - \lambda)^{-1}\| = 0 \quad (2.18)$$

Prova: Antes de tomar o limite vamos escrever a diferença entre barras como

$$(H(g) - \lambda)^{-1} (H(0) - H(g)) (H(0) - \lambda)^{-1} \quad (2.19)$$

com

$$H(0) - H(g) \equiv -H_1(g) + H_2(g) \quad (2.20)$$

onde

$$H_1(g) = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} x^2 + g \frac{x^4}{\alpha} \quad (2.21)$$

e

$$H_2(g) = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} x^2 + g \frac{x^4}{\alpha} (1 + \alpha g x^2)^{-1}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
H_1 - H_2 &= - (H_1 - \lambda) \left[\frac{1}{H_1 - \lambda} - \frac{1}{H(0) - \lambda} \right] (H(0) - \lambda) \\
&+ (H_2 - \lambda) \left[\frac{1}{H_2 - \lambda} - \frac{1}{H(0) - \lambda} \right] (H(0) - \lambda)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

de forma que

$$\begin{aligned}
(2.19) \leq & \left\| (H(q) - \lambda)^{-1} (H_1 - \lambda) \right\| \left\| \frac{1}{H_1 - \lambda} - \frac{1}{H(0) - \lambda} \right\| + \\
& + \left\| (H(q) - \lambda)^{-1} (H_2 - \lambda) \right\| \left\| \frac{1}{H_2 - \lambda} - \frac{1}{H(0) - \lambda} \right\|
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Sabemos através dos trabalhos de Simon [6] e Auberson [2] que quando o limite $|q| \rightarrow 0$ é tomado, as normas $\left\| (H_1 - \lambda)^{-1} - (H_0 - \lambda)^{-1} \right\|$ e $\left\| (H_2 - \lambda)^{-1} - (H_0 - \lambda)^{-1} \right\|$ são nulas, seguindo-se, então, a demonstração do lema. (3)*

II. 2. Somabilidade de Borel

Nesta seção, construiremos as séries perturbativas para os autovalores $E_j(q)$ do operador $H(q)$. Sendo $\Omega_j(q)$ os estados correspondentes, temos que

$$(\Omega_j(0), H(q) \Omega_j(q)) = (\Omega_j(0), E_j(q) \Omega_j(q)) \quad (2.24)$$

onde $\Omega_j(0)$ são autoestados do oscilador harmônico. Portanto,

$$E_j(q) = E_j(0) + g^2 \frac{(\Omega_j(0), U(q) \Omega_j(q))}{(\Omega_j(0), \Omega_j(q))} \quad (2.25)$$

pois $H(q) = H(0) + g^2 U(q)$, onde $U(q) = x^6 / (1 + \alpha q x^2)$.

Os autoestados $\Omega_j(q)$ podem ser escritos em termos do operador resolvente da Hamiltoniana $H(q)$ (Apêndice C) como

$$\Omega_j(q) = \frac{i}{2\pi} \oint_{|E-E_j(0)|=\frac{1}{2}} dE \frac{1}{H(q) - E} \Omega_j(0) \quad (2.26)$$

Numa forma mais conveniente,

$$R_q(E) \equiv (H(q) - E)^{-1} = R_0(E) \frac{1}{1 + g^2 U(q) R_0(E)} \quad (2.27)$$

onde $R_0(E) = (H(0) - E)^{-1}$. Podemos, agora, expandir o denominador e construir uma série para $\Omega_j(q)$ como:

$$\begin{aligned} \Omega_j(q) = & \sum_{m=0}^N (-q^2)^m \frac{i}{2\pi} \oint_{|E-E_j(0)|=\frac{1}{2}} dE R_0(E) [U(q) \cdot R_0(E)]^m \Omega_j(0) \\ & + (-q^2)^{N+1} \frac{i}{2\pi} \oint_{|E-E_j(0)|=\frac{1}{2}} dE R_0(E) [U(q) R_0(E)]^{N+1} \Omega_j(0) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Para explicitarmos completamente a série em q , resta, ainda, expandir $U(q)$, como:

$$U(q) = \sum_{m=0}^M (-\alpha q)^m x^{6+2m} + (-\alpha q)^{M+1} U_{M+1}(q) \quad (2.29)$$

onde $U_{M+1}(q) = x^{6+2(M+1)} / (1 + \alpha q x^2)$. A seguinte fórmula, então, pode ser verificada [2] :

$$\begin{aligned}
[U(g) \cdot R_0(E)]^n &= \sum_{h=0}^M (-\alpha g)^h \sum_{\substack{m_i \geq 0 \\ m_1 + \dots + m_n = h}} x^{6+2m_1} R_0(E) \dots x^{6+2m_n} R_0(E) + \\
&+ (-\alpha g) \sum_{p=1}^{M+1} \sum_{\substack{m_i \geq 0 \\ m_1 + \dots + m_p = M}} x^{6+2m_1} R_0(E) \dots x^{6+2m_{p-1}} R_0(E) U_{m_p+1}(g) R_0(E) [U(g) R_0(E)]^{n-p}
\end{aligned}$$

(2.30)

Inserindo, agora, esta última relação naquela para $\Omega_j(g)$

(28), obtemos (escolhendo $M = 2N - 2n + 1$) a seguinte série truncada:

$$\Omega_j(g) = \sum_{n=0}^{2N+1} g^n \Omega_{j,n} + g^{2N+2} R_{j,2N+2}(g)$$

(2.31)

com $\Omega_{j,n}$ e $R_{j,2n+2}(q)$ sendo definidos como

$$\Omega_{j,n} = \begin{cases} \sum_{\substack{r=0 \\ r \text{ par}}}^{n-2} (-1)^{\frac{n-r}{2}} \alpha^r C_{r,j,n} & , \text{ se } n \text{ é par} \\ (-1) \sum_{\substack{r=0 \\ r \text{ ímpar}}}^{n-2} (-1)^{\frac{n-r}{2}} \alpha^r C_{r,j,n} & , \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (2.32)$$

onde

$$C_{k,j,n} = \sum_{\substack{m_1 \geq 0 \\ m_1 + \dots + m_{n-1} = k}} \frac{j}{2\pi} \oint_{|E-E_j(0)|=\frac{1}{2}} dE R_0(E) x^{6+2m_1} R_0(E) \dots x^{6+2m_{n-1}} R_0(E) \Omega_j(0) \quad (2.33)$$

com

$$C_{0,0,j} = \Omega_j^{(0)} \quad C_{1,1,j} = -\alpha \Omega_j^{(0)}$$

e

$$R_{j,2N+2}(g) = (-1)^{N+1} \left\{ \sum_{n=0}^N (-\alpha^2)^{N-n+1} \frac{i}{2\pi} \oint_{|E-E_j^{(0)}|=\frac{1}{2}} dE R_0(E) \sum_{p=1}^n \sum_{\substack{m_i \geq 0 \\ m_1+\dots+m_p = 2N-2n+1}} x^{6+2m_1} R_0(E) \dots \right.$$

$$\dots x^{6+2m_{p-1}} R_0(E) U_{m_p+1}(g) R_0(E) [U(g) R_0(E)]^{n-p} +$$

$$\left. + \frac{i}{2\pi} \oint_{|E-E_j^{(0)}|=\frac{1}{2}} dE R_j(E) [U(g) R_0(E)]^{N+1} \right\} \Omega_j^{(0)}$$

(2.34)

De acordo com a fórmula (25) para os autovalores $E_j(g)$, o denominador e o numerador são funções de g . Vamos analisá-los, separadamente, usando a expansão (31) para $\Omega_j(g)$, substituída em (25).

Consideramos, primeiramente, o denominador $\mathcal{D}(g) = (\Omega_j^{(0)}, \Omega_j(g))$. De (31), vem que

$$|\mathcal{D}(g) - \sum_{n=0}^{2N+1} g^n (\Omega_j^{(0)}, \Omega_{j,n})| \leq |g|^{2N+2} \|\Omega_j^{(0)}\| \cdot \|R_{j,2N+2}(g)\|$$

(2.35)

com $\|\Omega_j(0)\| = 1$. Prosseguindo, calcularemos um limite superior para $\|R_{j,2N+2}(g)\|$, válido no setor $0 < |g| < 1$, $|\arg g| \leq \theta < \pi$. Lembrando que o resolvente $R_0(E)$ é limitado (Apêndice B) e aplicando a desigualdade de Darboux $\|\oint_C f(E) dE\| \leq |C| \sup_C \|f(E)\|$, a expressão (3) para $R_{j,2N+2}$ está limitada por

$$\|R_{j,2N+2}(g)\| \leq C_1 \sum_{n=0}^N \alpha^{2N+2-2n} \sum_{p=1}^n \sum_{\substack{m_1 \geq 0 \\ m_1 + \dots + m_p = 2N-2n+1}} \sup_{|E-E_j(0)|=\frac{1}{2}} \| [x^{6+2m_1} R_0(E)] \dots$$

$$\dots [x^{6+2m_{p-1}} R_0(E)] [U_{m_p+1}(g) R_0(E)] [U(g) R_0(E)]^{n-p} \Omega_j(0) \| +$$

$$+ C_2 \sup_{|E-E_j(0)|=\frac{1}{2}} \| [U(g) R_0(E)]^{N+1} \Omega_j(0) \|$$

(2.36)

Será mais fácil limitarmos as normas $\|\cdot\|$, objetos bem definidos graças à função de Hermite $\Omega_j(0)$, calculando um limite superior para cada um dos seus fatores, separadamente. No entanto, quando $x \rightarrow \infty$, eles comportam-se, individualmente, como $U(g) R_0(E) \rightarrow x^2 \rightarrow \infty$ ou como $x^{6+2m} R_0(E) \rightarrow x^{4+2m} \rightarrow \infty$. Portanto, para levarmos o cálculo pretendido adiante, é necessário controlarmos este comportamento, em primeiro lugar. Isto será feito mediante o seguinte lema, a ser demonstrado no Apêndice D.

Lema 4: Existem constantes $\underline{a}$ e $\underline{c}$ que dependem apenas de j e não de $m = 0, 1 \dots$ e $n = 1, 2 \dots$ tais que

$$[H_0 - E]^+ [(c q)^{4q} + x^{8q}] [H_0 - E] \geq \underline{a}^2 x^{4m+12} [(c(n-1))^{4(n-1)} + x^{8(n-1)}]$$

(2.37)

onde $q = m+n$ e $H_0 = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} x^2$ com E satisfazendo $|E - E_j^{(0)}| = \frac{1}{2} (4)^*$.

O Lema 4 é crucial para calcularmos um limite superior para o erro $R_{2N+2,j}$, pois, se definirmos o operador

$$M_{m,n} = x^{6+2m} [(c(n-1))^{4(n-1)} + x^{8(n-1)}]^{\frac{1}{2}} R_0(E) [(c(n+m))^{4(n+m)} + x^{8(n+m)}]^{-\frac{1}{2}}$$

(2.38)

a desigualdade (37) poderá ser expressa, equivalentemente, como

$$\|M_{m,n}(E)\| \leq \frac{1}{a}$$

(2.39)

Isto pode ser visto do seguinte modo. De (37)

$$\left[(c(n+m))^{4(n+m)} + x^{8(n+m)} \right] [H_0 - E] \geq$$

$$\geq \alpha^2 \left([H_0 - E]^{-1} \right)^{\dagger} \left[(c(n-1))^{4(n-1)} + x^{8(n-1)} \right]^{\frac{1}{2}} x^{12+4m} \left[(c(n-1))^{4(n-1)} + x^{8(n-1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.40)$$

ou ainda, multiplicando $[H_0 - E]^{-1}$ pela direita,

$$1 \geq \alpha^2 \left[(c(n+m))^{4(n+m)} + x^{8(n+m)} \right]^{-\frac{1}{2}} + R_0(E) \left[(c(n-1))^{4(n-1)} + x^{8(n-1)} \right]^{\frac{1}{2}} x^{6+2m}.$$

$$x^{6+2m} \left[(c(n-1))^{4(n-1)} + x^{8(n-1)} \right]^{\frac{1}{2}} R_0(E) \left[(c(n+m))^{4(n+m)} + x^{8(n+m)} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.41)$$

Comparando o lado direito de (41) com $M_{m,n}$, descobre-se que ele é igual a $M_{m,n}^{\dagger} \cdot M_{m,n}$; logo, $1 \geq \alpha^2 \|M_{m,n}\|^2 (4^*)$.

$M_{m,n}$ é, portanto, um operador limitado. A desigualdade (39) autoriza-nos a multiplicar, convenientemente, certos operadores, à direita e à esquerda daqueles presentes na expressão (36) para o erro $R_{j,2N+2}$, tornando os produtos entre colchetes em objetos limitados da forma $M_{m,n}$. Consideremos o segundo termo em (36). Observe que podemos escrever

$$\begin{aligned} \left\| [U(g) \cdot R_0(E)]^{\dagger} \Omega_j(\cdot) \right\| &\equiv \left\| \prod_{n=1}^{N+1} \left[U(g) \left((c(n-1))^{4(n-1)} + x^{8(n-1)} \right)^{\frac{1}{2}} R_0(E) \left((c(n))^{4n} + x^{8n} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\| \\ &\cdot \left\| \left[(c(N+1))^{4(N+1)} + x^{8(N+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \Omega_j(\cdot) \right\| \end{aligned} \quad (2.42)$$

Assim,

$$\| [U(g)R_0(E)] \Omega_j^{(0)} \| \leq \prod_{n=1}^{N+1} \| U(g) \left((c(n))^{4(n-1)} + x^{8(n-1)} \right)^{\frac{1}{2}} R_0(E) \left((c(n))^{4n} + x^{8n} \right)^{-\frac{1}{2}} \| \cdot \omega_{N+1} \quad (2.43)$$

onde $\omega_{N+1} = \left\| \left((c(N+1))^{4(N+1)} + x^{8(N+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \Omega_j^{(0)} \right\|$. Além disso,

$$|U(g)| \leq d_g x^6 \quad \text{onde (Apêndice E)}$$

$$d_g = \begin{cases} 1 & \text{se } |\arg g| \leq \frac{\pi}{2} \\ 1/\sin |\arg g| & \text{se } \frac{\pi}{2} < |\arg g| \leq \theta \end{cases} \quad (2.44)$$

de sorte que

$$\| [U(g)R_0(E)] \Omega_j^{(0)} \| \leq (d_g)^{N+1} \omega_{N+1} \prod_{n=1}^{N+1} \| M_{0,n}(E) \| \leq \omega_{N+1} \left(\frac{d_g}{c_i} \right)^{N+1} \quad (2.45)$$

O mesmo procedimento permite controlar os demais termos de $R_{j,2N+2}(g)$. Assim usando que $|U_m(g)| \leq d_g x^{6+2m}$ obtemos

$$\| [x^{6+2m_1} R_0(E)] \dots [x^{6+2m_{p-1}} R_0(E)] [U_{m_p+1}(g) R_0(E)] [U(g) R_0(E)]^{\overbrace{m-p}} \Omega_j^{(0)} \| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq (d_g)^{n-p+1} \omega_{2N-n+2} \prod_{i=1}^{p-1} \|M_{m_i, m_i, \dots, m_{i-1}+i}^{(E)}\| \\
&\quad \cdot \|M_{m_p+1, m_i, \dots, m_{p-1}+p}^{(E)}\| \prod_{q=2N-2n+2}^{2N-n+1} \|M_{0, q+1}^{(E)}\| \quad (2.46)
\end{aligned}$$

Porém, como $\|M_{m,n}\| \leq \frac{1}{a}$, o lado direito de (46) ainda é menor ou igual a

$$(d_g)^{n-p+1} \omega_{2N-n+2} \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad (2.47)$$

Reunindo os resultados (45) e (47), o erro está limitado como

$$\begin{aligned}
\|R_{j, 2N+2}(g)\| &\leq C_1 \sum_{n=0}^N \alpha^{2N-2n+2} \sum_{p=1}^n \frac{\alpha^{2N+p+1}}{(2^2 a)^n} d_g^{m-p+1} \omega_{2N-n+2} + \\
&\quad + C_2 \omega_{N+1} \left(\frac{d_g}{a}\right)^{N+1} \quad (2.48)
\end{aligned}$$

onde o número de termos na soma sobre os m_i foi limitado por $2^{2N-2n+1+p}$ (Apêndice E).

Resta ω_N por ser estimado. Temos que

$$\omega_N = \left[(C_N)^{4N} + \|\alpha^{4N} \Omega_{j(0)}\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.49)$$

onde $\|x^M \Omega_j^{(0)}\|^2 \leq 2^j (4M)^M$ (Apêndice E). Portanto,
 to,

$$\omega_N \leq (cN)^{2N} \left[2^j \left(\frac{16}{c} \right)^{4N} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.50)$$

Tomando $c \geq 16$, vem que

$$\omega_N \leq (2^{j+1})^{\frac{1}{2}} (cN)^{2N} \leq [e(2^{j+1})]^{\frac{1}{2}} \Gamma(2N + \frac{1}{2}) \left(\frac{c \cdot e}{2} \right)^{2N} \quad (2.51)$$

Note que $\omega_N \leq \omega_{N+1}$ é, portanto, $\omega_{2N-2m+2} \leq \omega_{2N+2}$ para qualquer $m \leq N$. Ademais, $(d_g/a) \geq 1$ porque $d_g \geq 1$ e $a < 1$ e, então, $(d_g/a)^{N+1} \leq (d_g/a)^{2N+2}$, $d_g^{m-p+1}/a^n \leq (d_g/a)^{2N}$.
 Portanto,

$$\begin{aligned} \|R_{j,2N+2}(g)\| &\leq C_1 \omega_{2N+2} \left(\frac{2d_g}{a} \right)^{2N} \sum_{n=0}^N \frac{\alpha}{2^n} \sum_{p=1}^{2N-2m+2} 2^{p+1} + \\ &+ C_2 \omega_{2N+2} \left(\frac{d_g}{a} \right)^{2N+2} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Como $\sum_{i=1}^m 2^i \leq 2^{m+1}$,

$$\|R_{2N+2}(g)\| \leq C_1 \omega_{2N+2} \left(\frac{2dg}{a} \right)^{2N+2} \sum_{n=0}^N (\alpha^2)^{N-n+1} + C_2 \omega_{2N+2} \left(\frac{2dg}{a} \right)^{2N+2} \quad (2.53)$$

O lado direito de (48) é, ainda, menor ou igual a

$$C_3 \omega_{2N+2} \left(\frac{2dg}{a} \right)^{2N+2} \sum_{q=0}^{N+1} \alpha^{2q} \quad (2.54)$$

onde

$$\sum_{q=0}^{N+1} \alpha^{2q} = \frac{1 - (\alpha^2)^{N+2}}{1 - \alpha^2} \leq \begin{cases} \frac{(\alpha^2)^{2N+2}}{1 - \alpha^2}, & \text{se } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1 - \alpha^2}, & \text{se } \alpha < 1 \end{cases} \quad (2.55)$$

e, assim,

$$\|R_{j,2N+2}(g)\| \leq C_4 \cdot \omega_{2N+2} \cdot \begin{cases} \left(\frac{2dg\alpha^2}{a} \right)^{2N+2}, & \text{se } \alpha > 1 \\ \left(\frac{2dg}{a} \right)^{2N+2}, & \text{se } \alpha < 1 \end{cases} \quad (2.56)$$

onde $C_4 = C_3 \cdot \frac{1}{|1 - \alpha^2|}$.

Seja

$$S = 2 \frac{dg}{a} \text{Max}(\alpha_{i,1}^2) = \begin{cases} 2 \frac{dg}{a} & \text{se } \alpha < 1 \\ 2 \frac{dg}{a} \cdot \alpha^2 & \text{se } \alpha > 1 \end{cases} \quad (2.57)$$

Então,

$$\|R_{2N+2}(g)\| \leq C_4 \cdot w_{2N+2} \cdot S^{2N+2} \quad (2.58)$$

Se $\alpha = 1$, então, $\forall \alpha' \geq 1$,

$$\sum_0^{N+1} \alpha'^{2j} \leq \sum_0^{N+1} \alpha'^{2j} \leq \frac{(\alpha')^{2(N+2)}}{\alpha'^2 - 1} \quad (2.59)$$

Neste caso, $S = 2 \frac{dg}{a} \cdot \alpha'^2$.

Em vista destes últimos resultados, podemos escrever

$$\|R_{j,2N+2}\| \leq C_4 \left[e(2^{j+1}) \right]^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(2(2N+2) + \frac{g}{2}\right) \left[\left(\frac{c \cdot e}{2}\right)^d \cdot S \right]^{2N+2} \quad (2.60)$$

e concluir que

$$\|D(g) - \sum_{m=0}^{2N+1} g(\Omega_j(\cdot), \Omega_m)\| \leq |g|^{2N+2} A_j \Gamma\left(2(2N+2) + \frac{g}{2}\right) \left[\left(\frac{c \cdot e}{2}\right)^d \cdot S \right]^{2N+2} \quad (2.61)$$

Consideremos, em seguida, o numerador $N(g) = (\Omega_j(\cdot), U(g)\Omega_j(g))$. O seu tratamento é análogo ao de $D(g)$, re-
produzindo o mesmo resultado. A presença de um fator $U(g)$ a-
crescentará aos produtos de operadores $U \cdot R$, na fórmula (2.28)
fatores extras $U(g)R_0(E)$ e $U(g)R_g(E)$:

$$\begin{aligned}
 U(g)\Omega_j(g) = & \sum_m^N (-g^2)^m \frac{i}{2\pi} \oint_{|E-E_j(g)|=\frac{1}{2}} dE [U(g)R_0(E)]^{n+1} \Omega_j(\cdot) + \\
 & + (-g^2)^{N+1} \frac{i}{2\pi} \oint_{|E-E_j(g)|=\frac{1}{2}} dE U(g)R_g(E) [U(g)R_0(E)]^{N+1} \Omega_j(\cdot) \quad (2.62)
 \end{aligned}$$

A única mudança que isto traz ao cálculo de um limite superior
para $\|R_{j,2N+2}\|$ ocorrerá, então, nas constantes C_1 e C_2
e, por conseguinte, em C_3 e C_4 . O produto $U(g)R_g(E)$ apa-
recendo em (62), pode ser absorvido, facilmente, mediante à se-
guinte desigualdade. Do lema 3, sabemos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{|g| \rightarrow 0} \|R_g(E) - R_0(E)\| &= 0 \\
 |\arg g| &\leq \theta \\
 0 &\leq \theta < \pi
 \end{aligned} \quad (2.63)$$

Porém,

$$\|UR_g\| - \|UR_0\| \leq \|U(R_g - R_0)\| \leq \|U\| \cdot \|R_g - R_0\| \quad (2.64)$$

No limite $|g| \rightarrow 0$ segue, então, que

$$\|U(g)R_g(E)\| \leq \|U(g)R_0(E)\| \quad (2.65)$$

Empreendendo o mesmo cálculo de antes para $D(g)$ obtemos, finalmente,

$$\|N(g) - \sum_{n=0}^{2N+1} g^n (\Omega_j(0), U(g)\Omega_n(0))\| \leq |g|^{2N+2} B_j \Gamma(2(2N+2) + \frac{g}{2})(\sigma_j d_g)^{2N+2} \quad (2.66)$$

onde $\sigma_j = \frac{5}{d_g} \left(\frac{c \cdot e}{2}\right)^2$, $B_j = \bar{C}_4 [e(2^{j+1})]^{\frac{1}{2}} \bar{C}_4$ é uma constante positiva distinta de C_4 .

Evidentemente, a condição de forte assintoticidade deve ser satisfeita para toda ordem onde a série é truncada. Sendo assim, nossa análise ainda não está completa tendo em vista que consideramos apenas ordens ímpares para o truncamento quando escolhemos $M = 2N - 2n + 1$ na fórmula (31). Felizmente, podemos escolher $M = 2N - 2n$, mas encontraremos a seguinte expressão para $\Omega_j(g)$:

$$\Omega_j(g) = \sum_{n=0}^{2N} g^n \Omega_{n,j} + g^{2N+1} R_{j,2N+1}(g) \quad (2.67)$$

onde

$$R_{j,2N+1}(g) = \sum_{n=0}^N (-1)^n (-\alpha)^{2N-2n+1} \frac{1}{2\pi} \oint_{|E-E_j(0)|=\frac{1}{2}} dE \sum_{p=1}^n \sum_{\substack{m_1 \geq 0 \\ m_1 + \dots + m_p = 2N-2n}} x^{6+2m_1} R_0(E) \dots$$

$$\dots \propto R_0(E) U_{m_p+1}(g) R_0(E) [U(g) R_0(E)]^{n-p} \Omega_j(0) +$$

$$+ (-1)^{N+1} g \frac{i}{2\pi} \oint_{|E-E_j(0)|=\frac{1}{2}} dE R_g(E) [U(g) R_0(E)]^{N+1} \Omega_j(0) \quad (2.68)$$

Contudo, ao estimarmos a norma

$$\|R_{2N+1,j}(g)\|$$

podemos fazer $|g| < 1$ no segundo termo da fórmula (68) e reduzir o cálculo àquele já feito para $\|R_{j,2N+2}(g)\|$ (pg. 23 e seguintes). É possível, então, mostrar que a série truncada, agora numa potência par, satisfaz a mesma condição de forte assintoticidade.

De acordo com teoremas gerais [9b), 10] , duas funções, $N(g)$ e $D(g)$, obedecendo às condições de assintoticidade (61) e (66), corretas para qualquer ordem onde as expressões são truncadas, transmitem à razão $N(g)/D(g)$ a mesma propriedade havendo alterações apenas das constantes A_j e B_j por uma outra (K_j , p.ex.). Consequentemente, provamos que as séries perturbativas para os autovalores $E_j(g)$ da Hamiltoniana $H(g)$ satisfazem a condição de forte assintoticidade

$$|E_j(g) - \sum_{m=0}^N E_{j,m} g^m| \leq K_j \Gamma\left(2(N+1) + \frac{9}{2}\right) (c_j d_g)^{N+1} |g|^{N+1} \quad (2.69)$$

enunciada no Teorema I, pg. 8. .

Usando a expressão (69) podemos calcular um limite superior para os coeficientes $E_{j,m}$. Truncando a série em ordem N e, depois, em ordem $N-1$ e, em seguida, subtraindo uma da outra, encontraremos que

$$|E_{j,n}| \leq K_j (\sigma_j \cdot d_g)^n \left\{ \Gamma\left(2(n+1) + \frac{g}{2}\right) |g| + \Gamma\left(2n + \frac{g}{2}\right) \right\} \quad (2.70)$$

No limite de $|g|$ muito pequeno

$$|E_{j,n}| \leq K_j (\sigma_j \cdot d_g)^n \Gamma\left(2n + \frac{g}{2}\right) \quad (2.71)$$

Podemos generalizar o teorema de Nevanlinna-Sokal (enunciado, na sua forma original, no primeiro capítulo, pg. 2) fazendo $z \rightarrow z^{\frac{1}{2}}$: Assim, substitua $C_R = \{z \mid \operatorname{Re} \frac{1}{z} > \frac{1}{R}\}$ (I.3) por $C_R = \{z \mid \operatorname{Re} \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} > \frac{1}{R}\}$, que corresponde ao interior da cardióide mostrado na fig. 9, a condição de forte

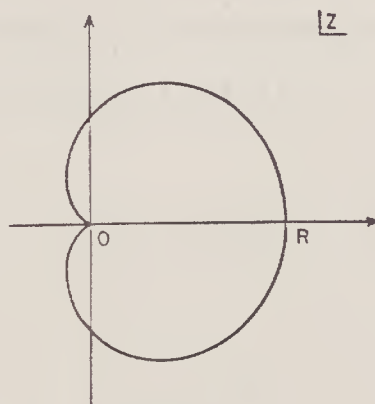


Fig. 9

assintoticidade (1.4) por

$$\left| G(z) - \sum_{n=0}^N a_n z^n \right| \leq C \cdot \sigma^{N+1} [2(n+1)]! |z|^{N+1}, \quad (2.72)$$

a transformada de Borel pela transformada de Leroy

$$\sum \frac{a_n}{(2n)!} b^n \quad (2.73)$$

e a fórmula de inversão por

$$G(z) = \int_0^\infty e^{-bz} B(zb^2) db \quad (2.74)$$

Certamente o domínio de analiticidade dos autovalores $\{E_j(q)\}$ contém a cardióide da figura acima. Além disso, na fórmula (69) podemos, ainda, fazer

$$\Gamma\left(2(N+1) + \frac{9}{2}\right) = \left(2(N+1) + \frac{7}{2}\right)! \leq \left(2(N+1)\right)! \left(\frac{7}{2}\right)! 2^{2(N+1) + \frac{7}{2}} \quad (2.75)$$

Dessa forma, as condições do teorema de Nevanlinna-Sokal generalizado estão satisfeitas.

III. UMA INTERAÇÃO RACIONAL EM TEORIA DE CAMPOS

Neste terceiro capítulo de nosso trabalho, consideraremos o modelo definido pela Lagrangeana escalar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{g^2 \phi^6}{1 + \alpha g \phi^3} \quad (3.1)$$

no contexto da teoria de campos Euclidiana em duas dimensões onde ele é, perturbativamente, superrenormalizável. As únicas amplitudes divergentes são aquelas associadas ao diagrama tad-pole. Na seção III.1, eliminaremos este problema através do ordenamento de Wick da interação e investigaremos a somabilidade de Borel das séries perturbativas para as funções de Schwinger de E pontos e provaremos o seguinte

Teorema III: A expansão

$$\sum B_m b^m, \quad B_m = \frac{A_m^{(E)}}{m!}, \quad (3.2)$$

para a transformada de Borel $B^{(E)}(b)$ da função de Schwinger de E pontos $S^{(E)} \sim \sum A_m^{(E)} g^m$ da teoria (3.1), converge no interior do círculo de raio $1/k$, $k > 0$, onde ela define uma função analítica de b .

Como sabemos, as singularidades locais que resultam de produtos de campos livres como, por exemplo, $\phi^2(x)$, $\phi^3(x)$, ..., são removidas facilmente através do ordenamento de Wick. Dessa forma, os objetos

$$:\phi^2(x): = \phi^2(x) - C(0) \quad (3.3)$$

e

$$:\phi^3(x): = \phi^3(x) - 3\phi(x)C(0)$$

onde $C(0)$ é o propagador livre no ponto zero, estão bem definidos $(\langle 0|:\phi^2:|0\rangle = \langle 0|:\phi^3:|0\rangle = 0)$, muito embora, individualmente, os termos à direita, não. Investigaremos esta propriedade no caso da interação racional

$$:\mathcal{R}(\phi): = : \frac{g^2 \phi^6(x)}{1 + \alpha g \phi^2(x)} : \quad (3.4)$$

Como uma série de potências de g , $:\mathcal{R}(\phi):$ está bem definida ordem a ordem, porém, como mostraremos na seção III.2, a função de dois pontos associada está dada por uma série divergente que não pode ser somada pelos métodos usuais. Mediante a seguinte representação integral formal para $\mathcal{R}(\phi)$:

$$\mathcal{R}(\phi) = g^2 \phi^6(x) \int_0^\infty db e^{-b} \cos(\phi \sqrt{\alpha g} b) \quad (3.5)$$

provamos o

Teorema IV: As funções de correlação de $: \mathcal{R}_\Lambda(\phi) :$, onde

$$: \mathcal{R}_\Lambda(\phi) : = g^2 \int_0^\Lambda db e^{-b} : \phi^6 \cos(b\phi \sqrt{\alpha g}) : \quad (3.6)$$

estão bem definidas se e somente se $\Lambda < \left(\frac{4\pi}{\alpha g}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Outra propriedade importante que discutimos foi a da existência de um limite inferior para a nova interação (3.6). Verificamos que ele não existe e, portanto, o modelo é, neste sentido, instável. Este comportamento é devido ao próprio ordenamento de Wick da interação mas, também, é devido ao corte Λ .

Uma outra possibilidade de tratamento da interação $\mathcal{R}(\phi)$ é sugerida pelo fato que a mesma pode ser escrita como

$$\mathcal{R}(\phi) = \mathcal{P}(\phi) + \mathcal{N}(\phi) \quad (3.7)$$

onde

$$\mathcal{P}(\phi) = \frac{g\phi^4}{\alpha} - \frac{\phi^2}{\alpha^2}$$

e

(3.8)

$$\mathcal{N}(\phi) = \frac{1}{\alpha^3 g} - \frac{1}{\alpha^3 g (1 + \alpha g \phi^2)}$$

Definimos, então,

$$\vdots R(\phi) \vdots \equiv \vdots P(\phi) \vdots + N(\phi) \quad (3.9)$$

onde apenas a parte polinomial $P(\phi)$ recebe o ordenamento de Wick. Verificamos a estabilidade ultravioleta de $\vdots R(\phi) \vdots$ mediante aproximantes $\phi_k(x)$ para os campos, definidos como

$$\phi_k(x) = \int \phi(y) \delta_k(x-y) dy \quad (3.10)$$

onde $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k(x-y) = \delta(x-y)$.

A estabilidade ultravioleta deste modelo está assegurada pelo

Teorema V: Seja $Z_{k,\Omega}$ a função de partição dada por

$$Z_{k,\Omega} = \int d\mu(\phi) e^{-\int_{\Omega} d^2x \vdots R_k(\phi) \vdots} \quad (3.11)$$

onde $d\mu(\phi) = \mathcal{D}\phi \exp - \int d^2x \phi (\Delta + m^2) \phi$ e $|\Omega|$ é um volume finito. Então,

$$\lim_{\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, k \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_{k, \Omega}}{|\Omega|} \leq M \quad (3.12)$$

sendo M uma constante positiva.

Concluimos, ainda, mediante análise da função de dois pontos de $:\mathcal{R}(\phi):$, que este modelo é equivalente ao modelo com interação polinomial $:\mathcal{P}(\phi):$, e, como tal, a propriedade de SB mostrada para estes modelos, em geral, aplica-se a este caso, também.

III.1 Existência local da transformada de Borel das funções de Schwinger

Formalmente, podemos expandir a interação $-\mathcal{R}(\phi)$ em série de potências de g como

$$-\frac{g^2 \phi^6(x)}{1 + \alpha g \phi^2(x)} = \sum_{\nu=2}^{\infty} (-1)^{\nu-1} g^{\nu} \alpha^{\nu-2} \phi^{2\nu+2}(x) \quad (3.13)$$

onde o sinal no lado esquerdo da interação é aquele que multiplica toda a ação do sistema. Dado um vértice do tipo $K=2\nu+2$, isto é, um vértice ao qual se ligam K campos, a ele corresponderá um fator $g^{\nu} \cdot (-1)^{\nu} \cdot (\alpha)^{\nu}$ onde

$$x = v(k) = \frac{k-2}{2}$$

$$z = v(k) - 1 = \frac{k}{2} - 2 \quad (3.14)$$

$$y = v(k) - 2 = \frac{k}{2} - 3$$

Como se verifica em (3.13), a teoria de perturbação deste modelo comporta infinitos tipos de vértices. Seja G um gráfico genérico em ordem n de perturbação. A ele corresponderá então, um fator g^n onde

$$n = \sum v(k) V_k \quad (3.15)$$

A soma varre todos os tipos de vértices no gráfico: V_k é o número de vértices do tipo k e $v(k)$ é dado por (3.14). Como $v \geq 2$, então $n \geq 2V$ ou

$$V(G) \leq \frac{n}{2} \quad (3.16)$$

Em termos do número total de campos $\sum k V_k$ em G ,

$$n = \frac{1}{2} \sum k V_k - V \quad (3.17)$$

onde V é o número total de vértices. Aplicando a desigualdade (3.16) à fórmula acima, obtemos esta outra:

$$6V \leq \sum \kappa V_k \leq 3n \quad (3.18)$$

Em termos dos números de linhas externas, E , e internas, I , o número de campos está dado como

$$\sum \kappa V_k = E + 2I \quad (3.19)$$

Substituindo esta relação na (3.17) obtemos

$$n = \frac{E}{2} + I - V \quad (3.20)$$

Por sua vez, pela relação de Euler

$$I - V = L - 1, \quad (3.21)$$

temos,

$$n = \frac{E}{2} + L - 1 \quad (3.22)$$

Podemos concluir, baseados na relação (3.22), que a ordem n de um gráfico de E pontos é dada, essencialmente, pelo número de seus loops L , idêntico, aliás, para todos os gráficos da mesma ordem de perturbação. Observe, também, que E é sempre par.

Resulta das relações (3.21), (3.16) e (3.22) a seguinte desigualdade para o número de linhas internas de $\mathcal{G}$:

$$I \leq \frac{n}{2} + L - 1 = \frac{3}{2}n - \frac{E}{2} \leq \frac{3}{2}n \quad (3.23)$$

Ainda, de (3.22),

$$L = n + 1 - \frac{E}{2} \leq n + 1 \quad (3.24)$$

Agrupamos, no Lema 5, as fórmulas calculadas até aqui e que caracterizam a topologia de um gráfico genérico $\mathcal{G}$:

Lema 5: Seja $\mathcal{G}$ um gráfico contribuindo para a função de Schwinger de E pontos do modelo (3.1). Então, as seguintes relações são válidas:

$$1) \quad V \leq n/2$$

$$2) \quad n = \frac{1}{2} \sum k V_k - V$$

$$3) \quad 6V \leq \sum k V_k \leq 3n$$

$$4) \quad \sum k V_k = E + 2I$$

$$5) \quad n = I + \frac{E}{2} - V$$

$$6) \quad n = L - 1 + \frac{E}{2} \quad . \text{ Portanto, } L \leq n + 1$$

$$7) \quad I \leq \frac{3}{2}n - \frac{E}{2} \leq \frac{3}{2}n$$

onde L = número de loops; E = número de linha externas; I = número de linhas internas; V = número de vértices; $\sum_k$ varre todos os tipos de vértices; V_k = número de vértices com k campos.

Juntamente com g^n , cada gráfico contribui com o fator $(-1)^{Z(G)} \cdot (\alpha)^{Y(G)}$. Usando as relações (3.15), (3.14) e (3.17), descobrimos que

$$Y(G) = \sum \left(\frac{k}{2} - 3 \right) V_k = n - 2V$$

$$Z(G) = \sum \left(\frac{k}{2} - 2 \right) V_k = n - V \quad (3.25)$$

Podemos, então, escrever a série perturbativa para a função de E pontos como

$$S^{(E)} \sim \sum_n g^n A_n^{(E)} \quad (3.26)$$

onde

$$A_n^{(E)} = \sum_{\{V_k\}} \alpha^{n-2V(G)} (-1)^{n-V(G)} \frac{A_{n, \{V_k\}}^{(E)}}{\prod_k V_k!}$$

$$\sum \left(\frac{k}{2} - 1 \right) V_k = n \quad (3.27)$$

A soma $\sum_{\{V_k\}}$ varre todas as possíveis atribuições $\{V_k\}$ de

vértices que satisfazem o vínculo $\sum \left(\frac{k}{2} - 1\right) V_k = n$ e $A_{n, \{V_k\}}^{(E)}$ é a soma de todos os gráficos $G_n^{(E)}$ com $V(G)$ vértices correspondendo a uma dada atribuição.

As únicas amplitudes divergentes são aquelas para as quais o gráfico é um tadpole. Isto é verificado do seguinte modo. O grau superficial de divergência $\omega(G)$ associado ao gráfico G é definido como

$$\omega(G) = d \cdot L - 2 \cdot I \quad (3.28)$$

Tomando $d=2$ (a dimensão do espaço-tempo), a relação de Euler (3.21) implica que

$$\omega(G) = 2 - 2V \quad (3.29)$$

Note que $\omega \geq 0$ somente quando $V=1$ e o gráfico tem apenas um vértice. Como sabemos, a divergência ultravioleta típica destes gráficos pode ser sanada através do ordenamento de Wick da interação. O modelo definido pela Lagrangiana (3.1) é, então, em perturbação, superrenormalizável e todas as amplitudes são completamente convergentes.

No que segue, estimaremos o número de gráficos conexos IPI em ordem n de perturbação. Esta contagem é bastante facilitada pelo método desenvolvido na referência [11].

Seja G um gráfico conexo IPI. É sempre possível desenhá-lo dispondo todos os vértices sobre uma circunferência, formada a partir de duas linhas de cada vértice que o unem a outros dois. Dado um vértice com k linhas, temos $\binom{k}{2} \leq 2^k$ maneiras de escolher duas delas. Há duas possibilidades, ainda,

de se contrair cada um dos campos correspondendo a estas linhas, com dois campos dos vértices adjacentes. São possíveis, então, $2^{V-1} \leq 2^n$ (Lema 5, desigualdade 1)) contrações e a circunferência pode ser formada de

$$2^{V-1} \prod_K \binom{K}{2}^{V_K} \leq 2^{n + \sum K V_K} \leq 2^{4n} \quad (3.30)$$

(pelo Lema 5, desigualdade 3)) modos.

Seja $V_{j,K} \leq V_K$ o número de vértices do tipo K com $j \leq K-2$ campos disponíveis para contrações externas. Podemos escolhê-los de

$$\prod_j \binom{K-2}{j}^{V_{j,K}} \leq 2^{(K-2)V_K} \quad (3.31)$$

modos. Considerando, como em (3.30), a presença de outros tipos de vértices, isto pode ser feito de

$$\prod_K 2^{(K-2)V_K} = 2^{\sum_K (K-2)V_K} \leq 2^{2n} \quad (3.32)$$

maneiras (Lema 5, desigualdades 1) e 3)).

São possíveis $E!$ contrações destes campos com os campos externos. O número de arranjos das E linhas externas (formadadas a partir destas contrações) nos V vértices do diagrama é V^E devendo este número ser, todavia, vinculado ao máximo de linhas permitido em cada vértice, ou seja, devem ser excluídos aqueles arranjos cujo número de campos num único vértice supera o máximo permitido. Portanto, se Ω é número de arranjos possíveis,

$$\Omega \leq V^E \quad (3.33)$$

O número de linhas, I , é dado pela relação

$$I = \frac{1}{2}l + (\text{nº de linhas na circunferência}) \quad (3.34)$$

onde l é o número de campos disponíveis para contrações internas. Como sobre a circunferência há V vértices, que a divide em V segmentos de arco, então

$$l = 2I - 2V \quad (3.35)$$

Pelo lema 5, desigualdade 5),

$$I - V = n - \frac{E}{2} \quad ; \quad (3.36)$$

logo,

$$l = 2n - E \quad (3.37)$$

O número total de contrações entre os l campos internos é $(l-1)!!$: escolhido um campo, posso contraí-lo com algum dos $(l-1)$ campos restantes. Feita esta primeira contração, a segunda poderá ser feita de $(l-3)!!$ maneiras, e assim por diante.

São possíveis, ainda, $V!$ permutações dos vértices.

Conclusão: Se $\gamma(n)$ é o número de diagramas em ordem n de perturbação, com uma dada atribuição $\{v_k\}$ dos vértices, contribuindo para a função de Schwinger de E pontos, então:

Lema 6:

$$\gamma(n) \leq E! \, V! \, (J-1)!! \, 2^{6n} \, V^E \quad (3.38)$$

Pelo lema 5, desigualdade 1), $V \leq \frac{n}{2}$; de (3.37), $J = 2n - E$;
 $J!! = 2^{\frac{J}{2}} \left(\frac{J}{2}\right)!$, de forma que

$$\gamma(n) \leq 2^{7n} n! \, V! \, n^E \, E! \quad (3.39)$$

Na fórmula (3.27), a soma $\sum_{\{v_k\}}$, que varre as atribuições possíveis dos vértices, está limitada por 2^n (Apêndice E). Na referência [12], foi demonstrado que gráficos completamente convergentes, como os que nos concerne aqui, tem suas amplitudes limitadas por K^n , onde K é uma constante positiva independente da topologia do diagrama.

Reunindo os resultados acima, concluimos, então, que o módulo da amplitude total $\mathcal{A}_m(E)$ (fórmula (3.26)) está limitada por:

$$|\mathcal{A}_m| \leq E! \, n! \, n^E \, K_1^n \sup_{\substack{\{v_k\} \\ \sum \left(\frac{k-1}{2}\right) v_k = n}} \left(\frac{V!}{\prod_k v_k!} \right)$$

(3.40)

onde $K_1 = 2^8 K$ e

$$\frac{V!}{\prod_k V_k!} = \binom{\sum_{k \geq 6} V_k}{V_6} \binom{\sum_{k \geq 8} V_k}{V_8} \dots \leq 2^{\sum_{k \geq 6} \left(\frac{k}{2} - 2\right) V_k} \leq 2^n \quad (3.41)$$

Portanto,

Lema 7:

$$|A_m| \leq E! m! m^E K_2^n \quad (3.42)$$

com $K_2 = 2^9 K$. Este último resultado implica que a série perturbativa $\sum g^n A_n$ tem uma transformada de Borel livre de singularidades pelo menos no interior de um disco de raio $1/K_2$ com centro na origem do plano de Borel

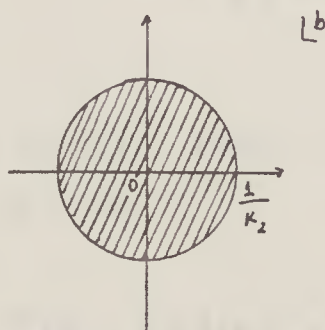


Fig. 10

Está demonstrado, assim, o Teorema III. O passo seguinte, consiste em mostrar a existência de uma continuação analítica da função $\mathcal{B}^{(E)}(b)$ (a transformada de Borel) para além do círculo de convergência de sua série (fig. 10) e, especialmente, numa vizinhança do eixo real positivo. Para dar sentido à soma de Borel

$$\int_0^{\infty} e^{-b/g^{(E)}} B(b) db, \quad (3.43)$$

certamente é decisivo saber se a continuação analítica de $B^{(E)}(b)$ tem alguma singularidade no ponto $b = 1/\kappa_2$, por exemplo. Não tentamos resolver aqui este problema e deixamos para o capítulo IV uma discussão sobre o mesmo.

III.2 O propagador da interação $:R(\phi):$

Nesta seção, investigaremos em que sentido o objeto

$$:R(\phi): = : \frac{g^2 \phi^6(x)}{1 + \alpha g \phi^2(x)} : \quad (3.44)$$

está bem definido. Em primeiro lugar, calculemos a sua função de dois pontos definida como

$$S(x, y) = \langle :R(\phi): :R(\phi(y)): \rangle \quad (3.45)$$

Formalmente, podemos expandir $R(\phi)$ como:

$$\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \alpha^{v-2} g^v : \phi^{2v+2}(x) : \quad (3.46)$$

Sendo $C(x, y)$ o propagador livre do campo fundamental $\phi(x)$, temos que

$$\langle : \phi^m(x) : : \phi^m(y) : \rangle = \delta_{m,m} m! C^m(x,y) \quad (3.47)$$

e, portanto,

$$S(x,y) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \alpha^{2\nu-4} g^{2\nu} (2\nu+2)! C^{2\nu+2}(x,y) \quad (3.48)$$

Observe que esta última série é divergente. E mais, colocando $1/g^2 \alpha^6$ em evidência em (3.48), a série transformada de Borel da série obtida é igual a

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} (\alpha C b)^{2\nu+2} \quad (3.49)$$

Sua soma, $B(b)$, analítica para $\alpha \cdot C(x,y) \cdot b < 1$, é

$$B(b) = (\alpha C b)^2 (1 - b \alpha C)^{-1} - \alpha^2 b^2 C^2 - \alpha^4 b^4 C^4 \quad (3.50)$$

Podemos continuá-la analiticamente para todo b , porém, há um pólo em $b = + \frac{1}{\alpha C}$ que não permite calcular, diretamente, uma soma para (3.48), através da soma de Borel, a integral

$$\int_0^{\infty} e^{-b/g} B(b) db \quad (3.51)$$

Um outro modo de estudarmos a interação $\mathcal{R}(\phi)$ consiste em representá-la como

$$R(\phi) = -\frac{\beta^3}{2} \int_0^\infty \frac{db}{b^6} e^{-\frac{b}{\beta}} \frac{d^6}{d\mu^6} \left[e^{-i\mu\phi b} + e^{+i\mu\phi b} \right]$$

(3.52)

onde $\beta = \sqrt{g}$ e $\mu = \sqrt{\alpha}$. O ordenamento de Wick de $R(\phi)$ será da do pelo ordenamento de Wick das exponenciais. É conveniente de finirmos a "medida"

$$\mathcal{D}_\mu b \equiv -\frac{1}{2} \beta^3 \frac{db}{b^6} e^{-\frac{b}{\beta}} \frac{d^6}{d\mu^6} \quad (3.53)$$

de modo que

$$:R(\phi): = \int_0^\infty \mathcal{D}_\mu b \left(:e^{-i\mu\phi b}: + :e^{+i\mu\phi b}: \right) \quad (3.54)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle :R(\phi(x)): :R(\phi(y)): \rangle &= \int \mathcal{D}_\mu b \mathcal{D}_\mu b' \left(\langle :e^{-i\mu\phi_x b}: :e^{-i\mu'\phi_y b'}: \rangle \right. \\ &\quad + \langle :e^{-i\mu\phi_x b}: :e^{+i\mu'\phi_y b'}: \rangle + \\ &\quad + \langle :e^{+i\mu\phi_x b}: :e^{-i\mu'\phi_y b'}: \rangle + \\ &\quad \left. + \langle :e^{+i\mu\phi_x b}: :e^{+i\mu'\phi_y b'}: \rangle \right) \end{aligned}$$

(3.55)

Como

$$\langle : e^{i\alpha_1\phi_1} :: e^{i\alpha_2\phi_2} :: \dots :: e^{i\alpha_N\phi_N} : \rangle = e^{-\sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j C(x_i - x_j)} \quad (3.56)$$

vem que

$$\langle : R(\phi(x)) :: R(\phi(y)) : \rangle = 2 \int_0^\infty D_\mu b D_{\mu'} b' \left\{ e^{-\mu\mu' b b' C_{xy}} + e^{+\mu\mu' b b' C_{xy}} \right\} \quad (3.57)$$

Podemos representar graficamente as exponenciais no lado direito de (3.56) se as mesmas forem vistas como propagadores e as seguintes regras forem observadas:

----- : se α_i e α_j tiverem o mesmo sinal

~~~~~ : se  $\alpha_i$  e  $\alpha_j$  tiverem sinais contrários

Graficamente, então, os valores esperados no integrando de (3.55) podem ser representados como:

$$a) \quad \langle : e^{i(-\mu b)\phi_x} :: e^{i(-\mu' b')\phi_y} : \rangle = e^{-\mu\mu' b b' C_{xy}} \quad \text{ou}$$

$$\begin{array}{ccc} (-\mu b) & (-\mu' b') & \mu\mu' b b' / 2\pi \\ \cdot \text{-----} \cdot & & \sim (m|x-y|) \\ x & y & |x-y| \rightarrow 0 \end{array}$$

$$b) \quad \langle : e^{i(-\mu b)\phi_x} :: e^{i(+\mu' b')\phi_y} : \rangle = e^{+\mu\mu' b b' C_{xy}} \quad \text{ou}$$

$$\begin{array}{c} (-)\mu b \quad \quad \quad (+)\mu' b' \\ \text{---} \quad \quad \quad \text{---} \\ x \quad \quad \quad y \end{array} \sim \frac{1}{(m|x-y|)^{\mu\mu'bb'/2\pi}}$$

$$c) \quad \langle : e^{i(\mu b)\phi_x} :: e^{i(-\mu' b')\phi_y} : \rangle = e^{\mu\mu'bb' C_{xy}} \quad \text{ou}$$

$$\begin{array}{c} (+)\mu b \quad \quad \quad (-)\mu' b' \\ \text{---} \quad \quad \quad \text{---} \\ x \quad \quad \quad y \end{array} \sim \frac{1}{(m|x-y|)^{\mu\mu'bb'/2\pi}}$$

$$d) \quad \langle : e^{i(\mu b)\phi_x} :: e^{i(\mu' b')\phi_y} : \rangle = e^{-\mu\mu'bb' C_{xy}} \quad \text{ou}$$

$$\begin{array}{c} (+)\mu b \quad \quad \quad (+)\mu' b' \\ \text{---} \quad \quad \quad \text{---} \\ x \quad \quad \quad y \end{array} \sim \frac{1}{(m|x-y|)^{\mu\mu'bb'/2\pi}}$$

onde consideramos o comportamento a pequenas distâncias do propagador  $C(x,y)$  (fórmula (3.66)). Certamente, às funções com maior número de pontos corresponderão gráficos mais complicados onde participam os dois tipos de linhas acima.

Lembrando a definição (3.53) da "medida"  $\mathcal{D}_{\mu} b$ , vem que:

$$\mathcal{D}_{\mu} b' e^{\pm \mu\mu'bb' C_{xy}} = -\frac{3}{2} db' e^{-\frac{b'}{\beta}} \pm \mu\mu'bb' C_{xy} (\pm \mu b C_{xy})^6$$

(3.58)

e, por conseguinte,

$$D_{\mu} b D_{\mu'} b' e^{\pm \mu \mu' b b' C_{xy}} =$$

$$= \frac{b^6}{4} d b d b' e^{-\frac{b}{\beta} - \frac{b'}{\beta} C_{xy}} \frac{d^6}{d \mu^6} \left( e^{\pm \mu \mu' b b' C_{xy}} \mu^6 \right)$$

(3.59)

Neste ponto, é útil a definição de polinômio de Laguerre  $L_n(x)$  segundo a qual [13]

$$L_n(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{n-m} \frac{x^m}{m!} \quad (3.60)$$

ou ainda,

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \quad (3.61)$$

Usando (3.61), vem que

$$\frac{d^6}{d \mu^6} \left( e^{\pm \mu \mu' b b' C_{xy}} \mu^6 \right) = 6! e^{\pm \mu \mu' b b' C_{xy}} L_6(\mp \mu \mu' b b' C_{xy})$$

(3.62)

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_\mu b \mathcal{D}_{\mu'} b' e^{\pm \mu \mu' b b' C_{xy}} &= \\
 &= \beta^6 db db' e^{-\frac{b}{\beta} - \frac{b'}{\beta}} C_{xy}^6 6! e^{\pm \mu \mu' b b' C_{xy}} L_6(\mp \mu \mu' b b' C_{xy}) \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

Substituindo este último resultado na fórmula (3.57) e, agora, usando a definição (3.60) para  $L_6(x)$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 \langle :R(\phi(x))::R(\phi(y)):\rangle &= \frac{\alpha}{4} (\beta C_{xy})^6 \sum_{m=0}^6 \binom{6}{6-m} \frac{6!}{m!} (\mu \mu' C_{xy})^m \times \\
 &\times \beta^{2+2m} \int_0^\infty db db' e^{-b-b'} (b \cdot b')^m \times \\
 &\times \left[ (-1)^m e^{-\mu \mu' b b' C_{xy} \beta^2} + e^{+\mu \mu' b b' C_{xy} \beta^2} \right]
 \end{aligned}$$

(3.64)

onde fizemos  $\frac{b}{\beta} \rightarrow b$  e  $\frac{b'}{\beta} \rightarrow b'$ . Tendo sido realizadas as derivadas em  $\mu$  e  $\mu'$ , podemos fazer  $\mu = \mu'$ .

É pertinente, a esta altura, estudarmos a convergência das integrais que aparecem na fórmula (3.64). Observe que para grandes valores do expoente das exponenciais, as integrais (e, portanto, a função de dois pontos) não estão bem definidas.

Primeiro, vamos controlar o comportamento delas quando  $b, b' \rightarrow \infty$  fazendo um corte  $\Lambda$  no domínio de integração:

$$\int_0^{\infty} db db' (\dots) \rightarrow \int_0^{\Lambda} db db' (\dots) \quad (3.65)$$

Segundo, o resultado das integrais deve ser uma distribuição bem definida devido ao propagador  $C(x, y)$ . Disto, decorrerá uma relação entre o corte  $\Lambda$  e a constante de acoplamento necessária para dar sentido à função de dois pontos.

Lembramos que [14]

$$C(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln(m|x-y|), & \text{se } |x-y| \rightarrow 0 \\ \left(\frac{1}{4\pi m|x-y|}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-m|x-y|}, & \text{se } |x-y| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.66)$$

Os termos a serem examinados em (3.64) são:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int_0^{\Lambda} db e^{-b} b^m \int_0^{\Lambda} db' b'^m e^{-b' - b' \mu^2 b C_{xy} \beta^2} \\ \text{b)} \quad & \int_0^{\Lambda} db e^{-b} b^m \int_0^{\Lambda} db' b'^m e^{-b' + b' b \mu^2 C_{xy} \beta^2} \end{aligned} \quad (3.67)$$

A grandes distâncias  $|x-y| \rightarrow \infty$ ,  $C(x,y) \rightarrow 0$  e as integrais acima convergem para qualquer valor de  $\lambda$ . Problemas podem ocorrer, todavia, a pequenas distâncias onde  $C(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \ln(m|x-y|)$ . Neste caso, existe o problema da última integral se ela se estender até o infinito pois

$$\int_0^\lambda db' b'^m e^{-b' + b'b\mu^2\beta^2} C_{xy} = \int_0^\lambda db' b'^m e^{-b'} (m|x-y|)^{-\frac{\mu^2 b b' \beta^2}{2\pi}} \quad |x-y| \rightarrow 0 \quad (3.68)$$

O propagador  $C(x,y)$  é uma distribuição e como tal a integral (3.68) só tem sentido como

$$\int d^2x f(x) \int_0^\lambda db (\dots) \int_0^\lambda db' b'^m e^{-b'} \frac{1}{(m^2|x-y|^2)^{\frac{\mu^2 b b' \beta^2}{4\pi}}} \quad (3.69)$$

onde  $f(x)$  é uma função teste adequada.

A distribuição acima está bem definida quando  $b, b' \rightarrow 0$  não o sendo, todavia, para valores grandes de  $b$  e  $b'$  a menos que

$$\frac{\mu^2 \lambda^2 \beta^2}{4\pi} < 1 \quad (3.70)$$

Analisaremos o significado desta desigualdade, posteriormente. Queremos nos certificar, primeiro, se ela é válida em geral, i.e., se as funções de  $N$  pontos

$$\langle :R(\phi_1): \dots :R(\phi_N): \rangle = \int \mathcal{D}_{\mu_1} b_1 \dots \mathcal{D}_{\mu_N} b_N \langle \prod_{k=1}^N ( :e^{-i\mu_k \phi_k b_k \beta}: + :e^{+i\mu_k \phi_k b_k \beta}: ) \rangle \quad (3.71)$$

estão bem definidas pela mesma desigualdade.

Seja  $\mathcal{B} = \{1, 2, \dots, N\}$ . Vamos usar a fórmula

$$\prod_{i \in \mathcal{B}} (a_i + b_i) = \sum_{\Gamma \subset \mathcal{B}} \left( \prod_{i \in \frac{\mathcal{B}}{\Gamma}} a_i \right) \left( \prod_{j \in \Gamma} b_j \right) \quad (3.72)$$

onde a soma  $\sum_{\Gamma}$  varre as partições do conjunto  $\mathcal{B}$ . Então,

$$\begin{aligned} \langle \prod_k ( :e^{-i\mu_k \phi_k b_k \beta}: + :e^{+i\mu_k \phi_k b_k \beta}: ) \rangle &= \\ &= \sum_{\Gamma \in \mathcal{B}} \langle \prod_{i \in \frac{\mathcal{B}}{\Gamma}} :e^{i\alpha_i \phi_i}: \prod_{j \in \Gamma} :e^{i\alpha_j \phi_j}: \rangle \end{aligned} \quad (3.73)$$

onde  $\alpha_i = -\mu_i b_i \beta$  e  $\alpha_j = +\mu_j b_j \beta$ .

Usando fórmula (3.56) deduzimos que

$$\begin{aligned} \sum_{\Gamma \in \mathcal{B}} \langle \prod_{i \in \frac{\mathcal{B}}{\Gamma}} :e^{i\alpha_i \phi_i}: \prod_{j \in \Gamma} :e^{i\alpha_j \phi_j}: \rangle &= \\ &= \sum_{\Gamma \in \mathcal{B}} \exp \left\{ - \sum_{\substack{i < j \\ i, j \in \Gamma}} \alpha_i \alpha_j C_{ij} - \sum_{\substack{i < j \\ i, j \in \frac{\mathcal{B}}{\Gamma}}} \alpha_i \alpha_j C_{ij} - \left[ \sum_{\substack{i < j \\ i \in \Gamma \\ j \in \frac{\mathcal{B}}{\Gamma}}} \alpha_i \alpha_j C_{ij} + \sum_{\substack{i < j \\ i \in \frac{\mathcal{B}}{\Gamma} \\ j \in \Gamma}} \alpha_i \alpha_j C_{ij} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.74)$$

onde o produto  $\alpha_i \cdot \alpha_j$  é:

- a) positivo, se  $i, j \in \Gamma$ . Neste caso, se  $n$  é o número de elementos de  $\Gamma$ , então a soma  $\sum_{i, j \in \Gamma}$  terá  $\binom{n}{2}$  termos.
- b) positivo, se  $i, j \in \frac{B}{\Gamma}$ . Neste caso, se  $s$  é o número de elementos de  $\frac{B}{\Gamma}$ , então a soma  $\sum_{i, j \in \frac{B}{\Gamma}}$  terá  $\binom{s}{2}$  termos.
- c) negativo, se  $i \in \Gamma$  e  $j \in \frac{B}{\Gamma}$  ou vice-versa. Neste caso, o número total de termos entre colchetes na fórmula (3.74) será  $n \cdot s$ .

O número total de termos na exponencial é, portanto,

$$\binom{n}{2} + \binom{s}{2} + n \cdot s = \binom{n+s}{2} \quad (3.75)$$

O gráfico  $G$  associado a este exponencial, tem

$$I = \binom{n+s}{2} \quad (3.76)$$

linhas internas. Em (3.76),  $n+s$  é igual ao número de vértices  $V$  (veja o lado esquerdo de (3.74)) ou, ainda, igual ao número de pontos  $N$  da função a que pertence o gráfico; logo,

$$I = \binom{V}{2} = \binom{N}{2} \quad (3.77)$$

Podemos concluir desta última relação que, dados dois vértices, só pode haver uma linha ligando os dois. O número de loops é

$$L = I - V + 1 = \binom{V}{2} - V + 1 = \frac{V^2}{2} - \frac{3}{2}V + 1 \quad (3.78)$$

À pequenas distâncias,

$$(3.74) \rightarrow \sum_{|x-y| \rightarrow 0} \prod_{\substack{i < j \\ i, j \in \Gamma}} \left( m |x_i - x_j| \right)^{\frac{\alpha_i \cdot \alpha_j}{2\pi}} \prod_{\substack{i < j \\ i, j \in \frac{B}{\Gamma}}} \left( m |x_i - x_j| \right)^{\frac{\alpha_i \cdot \alpha_j}{2\pi}} x$$

$$\prod_{\substack{i < j \\ i \in \Gamma \\ j \in \frac{B}{\Gamma}}} \frac{1}{(m |x_i - x_j|)^{|\alpha_i \cdot \alpha_j|/2\pi}} \prod_{\substack{i < j \\ i \in B/\Gamma \\ j \in \Gamma}} \frac{1}{(m |x_i - x_j|)^{|\alpha_i \cdot \alpha_j|/2\pi}} \quad (3.79)$$

O termo geral da soma  $\sum_{\Gamma}$ , acima, corresponde a um gráfico  $G$  com  $V=N$  vértices e números de linhas e loops dados pelas relações (3.77) e (3.78). Estudaremos a convergência de sua amplitude  $A_G$  no espaço dos momentos.

Segundo Gelfand e Shilov [15], a transformada de Fourier de  $h^{2\lambda}$ , onde  $h = \sqrt{\sum_j x_j^2}$ , é,

$$C(\lambda) \cdot \frac{1}{(p^2)^{\lambda+1}} = 2^{\lambda(\lambda+1)} \pi \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(-\lambda)} \cdot \frac{1}{p^{2(\lambda+1)}} \quad (3.80)$$

Por isso, no espaço dos momentos, temos as regras:

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \\ +(-) \qquad \qquad +(-) \end{array} \quad \underset{p \rightarrow \infty}{=} \quad C(\lambda) \cdot \frac{1}{p^{2(\lambda+1)}}$$

e

(3.81)

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \\ +(-) \qquad \qquad -(+) \end{array} \quad \underset{p \rightarrow \infty}{=} \quad C(-\lambda) p^{2(\lambda-1)}$$

onde  $2\lambda = \frac{\mu^2 \Lambda^2 \beta^2}{2\pi} \left( \equiv \frac{\alpha \Lambda^2 g^2}{2\pi} \right)$ , de forma que

$$A_G \sim \int (d^2 k)^L \frac{(k^2)^{(\lambda-1)} (\# \text{ de linhas } \sim)}{(k^2)^{(\lambda+1)} (\# \text{ de linhas } \text{---})} \quad (3.82)$$

Mas, por (3.75)

$$\# \text{ de linhas } \sim = h \cdot s$$

$$\# \text{ de linhas } \text{---} = \binom{h}{2} + \binom{s}{2} \quad (3.83)$$

O grau superficial de divergência  $\mathcal{S}$  da integral (3.82) é, fazendo contagem de potências do momento  $k$ , igual a

$$\mathcal{S} = 2L - 2(\lambda+1) \left[ \binom{h}{2} + \binom{s}{2} \right] + 2(\lambda-1) h \cdot s \quad (3.84)$$

onde  $L = \frac{V^2}{2} - \frac{3V}{2} + 1$  e de sorte que

$$\delta = 2 - (\lambda + 1)(h - s)^2 + v^2 + (\lambda - 2)v - 4hs \quad (3.85)$$

Mas  $V = h + s$  e  $(h + s)^2 - 4hs = (h - s)^2$ . Então,

$$\delta = 2 - \lambda [(h - s)^2 - v] - 2v \quad (3.86)$$

onde  $(h - s)^2 - v = -v(v - 1) - 4hs$ . Pela fórmula (3.77)

$$v(v - 1) = 2I \quad ; \text{ logo,}$$

$$\delta = 2 + \lambda (2I + 4hs) - 2v \quad (3.87)$$

Se  $\lambda > 1$ ,  $\delta$  cresce com o número de vértices (é cada vez mais positivo) pois  $\lambda 2I = \lambda v(v - 1) > 2v$  para  $v \geq 3$ , de forma que o número de infinitos cresce com o número de vértices.  $\delta < 0$ , se e somente se

$$\lambda < \frac{2v - 2}{2I + 4hs} \quad (3.88)$$

Como  $\lambda < \lambda + \frac{2}{2I + 4hs}$  e  $I \geq 1$ , vem que

$$\lambda < \frac{v}{I + 2hs} \leq \frac{h + s}{1 + 2hs} \quad (3.89)$$

Se  $h$  e  $s$  são diferentes de zero, o lado direito de (3.89) é sempre menor que 1. Se  $h = 0$ , então

$$\delta = 2 - \lambda s^2 - (2 - \lambda)s$$

$$= (1 - s) [2 + \lambda \cdot s]$$

(3.90)

e  $\delta < 0$  se  $s > 1$ ,  $\forall \lambda$ . (Idem, se  $s = 0$ ,  $\lambda \neq 0$ ). Podemos concluir que  $\delta < 0$ ,  $\forall \lambda, s$ , se  $\lambda < 1$ . Como  $2\lambda = \frac{\mu^2 \Lambda^2 \beta^2}{2\pi} = \alpha \frac{\Lambda^2 g}{2\pi}$ , devemos ter

$$\frac{\mu^2 \Lambda^2 \beta^2}{4\pi} < 1$$

(3.91)

que é a mesma condição de convergência obtida anteriormente para a função de 2 pontos. A integral

$$-\frac{\beta^3}{2} \int_0^1 \frac{db}{b^6} e^{-\frac{b}{\beta}} \frac{d}{d\mu^6} \left[ :e^{-i\mu\phi_b}: + :e^{+i\mu\phi_b}: \right] \quad (3.92)$$

que, formalmente, define a interação:  $g^2 \phi^6 (1 + \alpha g \phi^2)^{-1}$ ; para  $\Lambda = \infty$ , na verdade, só tem sentido, então, se

$$\Lambda < \left( \frac{4\pi}{\alpha g} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.93)$$

Por este resultado, se considerarmos a constante de acoplamento  $g$  como um parâmetro livre, o limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  implica em  $g \rightarrow 0$  de forma que  $\Lambda = \infty$  é consistente apenas com uma teoria livre.

Podemos, entretanto, fixar  $g$  e considerar  $\alpha$  como o parâmetro livre e, assim, concluir que a grandes distâncias, quando  $\Lambda \rightarrow \infty$ , é ele que se anula de modo que a interação torna-se polinomial.

Do que foi dito e calculado acima, o propagador associado a

$$: R(\phi) : = : g^2 \phi^6(x) (1 + \alpha g \phi^2(x))^{-1} : \quad (3.94)$$

não está bem determinado a menos que ele seja redefinido como

$$: R_\Lambda(\phi) : = -\frac{\beta^3}{2} \int_0^\Lambda \frac{db}{b^6} e^{-b/\beta} \frac{d^6}{d\mu^6} : \left( e^{-i\mu\phi^6} + e^{+i\mu\phi^6} \right) : \quad (3.95)$$

onde  $\beta = g^{\frac{1}{2}}$ ,  $\mu = \alpha^{\frac{1}{2}}$  e  $\Lambda < \left( \frac{4\pi}{\alpha g} \right)^{\frac{1}{2}}$ , mostrando o teorema IV. Note que podemos reescrever (3.95) como

$$: \mathcal{R}_\lambda(\phi) : = \beta^4 : \phi^6(x) \int_0^1 db e^{-b} \cos(\mu \beta b \phi(x)) : \quad (3.96)$$

Dessa forma, a interação original que pode ser escrita como a soma de um termo quártico com um termo racional foi transformado no produto de uma interação polinomial  $\phi^6$  com a interação (a menos de uma integral) do modelo sine-Gordon. O cálculo explícito da integral (3.96) revela que o ordenamento de Wick de  $: \phi^6(x) \cdot \cos(\mu \beta b \phi) :$  desestabiliza a interação. No Apêndice F, nós calculamos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} : \phi^6(x) \cos \delta \phi(x) : &= \\ &= (-1) e^{\delta^2 \frac{C}{2}} \left\{ \cos \delta \phi \sum_{\nu \text{ par}}^6 \binom{6}{\nu} (-1)^{\frac{1}{2}(6-\nu)(7-\nu)} \phi^{6-\nu} \sum_{j=0}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]} \frac{\nu!}{j!(\nu-2j)!} (\delta(2C)^{\frac{1}{2}})^{\nu-2j} \left(\frac{C}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \sin \delta \phi \sum_{\nu \text{ ímpar}}^6 \binom{6}{\nu} (-1)^{\frac{1}{2}(6-\nu)(7-\nu)} \phi^{6-\nu} \sum_{j=0}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]} \frac{\nu!}{j!(\nu-2j)!} (\delta(2C)^{\frac{1}{2}})^{\nu-2j} \left(\frac{C}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (3.97)$$

onde  $\delta = \mu \beta b$  e  $C = C(0)$  com  $\mu = \sqrt{\alpha'}$  e  $\beta = \sqrt{g}$ . Substituindo (3.97) em (3.96), obtemos:

$$\begin{aligned} : \mathcal{R}_\lambda(\phi) : &= g^2 \sum_{\nu=0}^6 \sum_{j=0}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]} \binom{6}{\nu} \binom{\nu}{2j} \frac{(2j)!}{j!} (-1)^{\frac{1}{2}(6-\nu)(7-\nu)} \phi^{6-\nu} (2\alpha' C(0))^{\frac{\nu-2j}{2}} \cdot \\ &\quad \cdot I_{\nu-2j}(\lambda) \end{aligned} \quad (3.98)$$

onde

$$I_{r-2j}(\Lambda) \equiv \int_0^\Lambda db \, e^{-b + b^2 \alpha g \frac{C(0)}{2}} b^{r-2j} \begin{cases} \cos(b\sqrt{\alpha g} \phi), & r \text{ par} \\ \sin(b\sqrt{\alpha g} \phi), & r \text{ ímpar} \end{cases}$$

(3.99)

Observe que, devido à constante infinita  $C(0)$  a exponencial  $\exp(+b^2 \alpha g C(0)/2)$ , oriunda do ordenamento de Wick (Apêndice F), leva os termos negativos de (3.98) rapidamente para  $-\infty$ . Poderíamos eliminar este efeito da exponencial definindo  $\alpha \sim 1/C(0)$  ou  $g \sim 1/C(0)$ , mas isto implicaria numa teoria polinomial ou livre, respectivamente. No caso de regularizarmos  $C(0)$  como  $C_\kappa(0)$ , o modelo passará a depender de um parâmetro arbitrário  $\kappa$ , o regulador, além do corte  $\Lambda$  na integral  $I(\Lambda)$ . Se  $\alpha$  ou  $g \sim 1/C_\kappa(0)$ ,  $\Lambda e^\kappa$  poderão ser relacionados pois  $\Lambda < \sqrt{\frac{4\Gamma}{\alpha g}}$ .

Uma maneira de solucionarmos o problema com a estabilidade da interação consiste em evitar o ordenamento de Wick, pelo menos parcialmente, ou seja, definindo

$$\vdots R(\phi) \vdots = \frac{g}{\alpha} \vdots \phi^4(x) \vdots - \frac{1}{\alpha^2} \vdots \phi^2(x) \vdots + \frac{1}{\alpha^2 g} - \frac{1}{\alpha^2 g} (1 + \alpha g \phi^2(x))^{-1}$$

(3.100)

No que segue mostraremos que o logaritmo da função de partição  $Z_{\Omega, \kappa}$ , definida como

$$\log Z_{\Omega, \kappa} \equiv \log \int d\mu(\phi) \cdot e^{-\int_{\Omega} :R(\phi): d^2x} \quad , \quad (3.101)$$

onde a integral  $\int_{\Omega}$  é realizada no volume finito  $\Omega$  e

$$\phi_{\kappa}(x) \equiv \int d^2x' \phi(x') \delta_{\kappa}(x-x') \quad (3.102)$$

sendo  $\delta_{\kappa}(x-x') \equiv \frac{\kappa}{\sqrt{\pi}} e^{-\kappa^2 x^2}$  um aproximante da delta de Dirac, existe quando  $\kappa \rightarrow \infty$  e  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ , no espaço  $L^2(\mathcal{D}', d\mu(\phi))$  das distribuições temperadas com medida gaussiana

$$d\mu(\phi) = \exp - \int \phi (\Delta + m^2) \phi \quad (3.103)$$

Definimos  $:P(\phi_{\kappa}):$  como

$$:P(\phi_{\kappa}): \equiv \frac{g}{\alpha} : \phi_{\kappa}^4(x) : - \frac{1}{\alpha^2} : \phi_{\kappa}^2(x) : \quad (3.104)$$

Então, temos o aproximante

$$Z_{\Omega, \kappa} = \int d\mu(\phi) e^{-\int_{\Omega} :P(\phi_{\kappa}): d^2x} e^{\frac{1}{\alpha^3 g} \int_{\Omega} (1 + \alpha g \phi_{\kappa}^2)^{-1} d^2x - \frac{|\Omega|}{\alpha^3 g}} \quad (3.105)$$

Usando a desigualdade de Schwartz  $\int |f \cdot g| \leq (\int |f|^2)^{\frac{1}{2}} (\int |g|^2)^{\frac{1}{2}}$   
temos que

$$|Z_{\Omega, \kappa}| \leq Z_{\Omega, \kappa}(\mathcal{P}(\phi_{\kappa})) \left( \int d\mu(\phi) \left| e^{-\frac{2|\Omega|}{\alpha^2 g} + \frac{2}{\alpha^2 g} \int_{\Omega} (1 + \alpha g \phi_{\kappa}^2)^{-1} d^2 x} \right| \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.106)$$

onde  $Z_{\Omega, \kappa}(\mathcal{P}(\phi_{\kappa})) \xrightarrow{\Omega, \kappa \rightarrow \infty} Z(\mathcal{P}(\phi))$  é a função de partição do modelo polinomial em duas dimensões construída por Glimm, Jaffe [14]. Segundo estes autores

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} e^{-2 \int_{\Omega} : \mathcal{P}(\phi_{\kappa}) : d^2 x} = e^{-2 \int_{\Omega} : \mathcal{P}(\phi) : d^2 x} \in L^2(\mathcal{S}', d\mu(\phi))$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \int d\mu(\phi) e^{-2 \int_{\Omega} : \mathcal{P}(\phi_{\kappa}) : d^2 x} \leq e^{2M|\Omega|}$$

(3.107)

onde  $M$  é uma constante positiva independente de  $\kappa$ .

Quanto à segunda integral em (3.106), ela converge quando  $\kappa \rightarrow \infty$  para um limite  $\mathcal{G}(\phi) \in L^2(\mathcal{S}', d\mu(\phi))$ , bem definido, como mostraremos a seguir. Temos a seguinte limitação: Fixado  $\phi_{\kappa}(x)$ ,

$$(1 + \alpha g \phi_{\kappa}^2(x))^{-1} \leq 1 \quad \forall \phi_{\kappa}(x) \quad (3.108)$$

e, portanto,

$$e^{-\frac{2|\Omega|}{\alpha^2 g}} + \frac{2}{\alpha^2 g} \int_{\Omega} (1 + \alpha g \phi_k^2(x))^{-1} d^2x \leq 1 \quad (3.109)$$

logo,

$$|Z_{\Omega, k}| \leq e^{2M|\Omega|}$$

e

$$\lim_{|\Omega| \rightarrow \infty} \frac{\log |Z_{\Omega, k}|}{|\Omega|} \leq 2M < \infty \quad (3.110)$$

A existência do limite superior em (3.108) não implica que o lado esquerdo possui um limite, podendo oscilar quando  $k \rightarrow \infty$ . Entretanto, mostraremos que a sequência  $\{(1 + \phi_k)^{-1}\}$  é de Cauchy em  $L^2(\mathcal{A}', d\mu(\phi))$ .

Seja

$$F_k(\phi) = e^{2 \int_{\Omega} d^2x (1 + \phi_k^2(x))^{-1}} \quad (3.111)$$

Calculemos  $\|F_k(\phi) - F_{k'}(\phi)\|_2^2$ , onde  $\|\cdot\|_2$  é a norma em  $L^2(\mathcal{A}', d\mu(\phi))$ , ou seja,

$$\|F_k(\phi) - F_{k'}(\phi)\|_2^2 = \int d\mu(\phi) \left| e^{2 \int_{\Omega} d^2x (1 + \phi_k^2)^{-1}} - e^{2 \int_{\Omega} d^2x (1 + \phi_{k'}^2)^{-1}} \right|^2 \quad (3.112)$$

Aplicando o teorema da média segundo o qual  $e^a - e^b = e^\xi \cdot (b-a)$  com  $\xi \in [a, b]$ , vem que o integrando em (3.112) é menor ou igual a

$$(\sup e^{2\xi}) \cdot \int d\mu(\phi) \left( \int_{\Omega} d^2x \left| (1 + \phi_k^2)^{-1} - (1 + \phi_{k'}^2)^{-1} \right| \right)^2 \quad (3.113)$$

onde  $\xi \in \left[ 2 \int_{\Omega} d^2x (1 + \phi_k^2)^{-1}, 2 \int_{\Omega} d^2x (1 + \phi_{k'}^2)^{-1} \right]$  e  $a, b \leq 2|\Omega|$  pela limitação (3.108) e, assim,  $\sup \exp 2\xi \leq \exp 4|\Omega|$ .

Mas

$$(1 + \phi_k^2)^{-1} - (1 + \phi_{k'}^2)^{-1} = \frac{(\phi_k + \phi_{k'})(\phi_{k'} - \phi_k)}{(1 + \phi_k^2)(1 + \phi_{k'}^2)} \quad (3.114)$$

Aplicando a desigualdade de Schwartzs, vem que:

$$\int \left( \int_{\Omega} d^2x \left| \frac{(\phi_{k'}^2 - \phi_k^2)}{(1 + \phi_k^2)(1 + \phi_{k'}^2)} \right| \right)^2 \leq \int d\mu(\phi) \int_{\Omega} d^2x \left| \frac{\phi_{k'} + \phi_k}{(1 + \phi_k^2)(1 + \phi_{k'}^2)} \right|^2 \int_{\Omega} d^2x (\phi_k - \phi_{k'})^2 \quad (3.115)$$

onde a segunda integral à direita é sobre uma função limitada do tipo

$$\frac{(x+y)^2}{(1+x^2)^2 (1+y^2)^2}$$

Portanto,

$$\|F_k(\phi) - F_{k'}(\phi)\|_2^2 \leq e^{4|\Omega|} |\Omega| I(\Omega) \quad (3.116)$$

onde

$$I(\Omega) = \int d\mu(\phi) \int_{\Omega} d^2x (\phi_k(x) - \phi_{k'}(x))^2 \quad (3.117)$$

Lembrando que

$$\phi_k(x) = \int d^2x' \delta_k(x-x') \phi(x') \quad (3.118)$$

podemos escrever

$$\phi_k(x) - \phi_{k'}(x) \equiv \int d^2y \phi(y) f(x-y) \equiv \phi(f(x-\cdot)) \quad (3.119)$$

Com

$$f_1 \equiv f(x-y) = \delta_k(x-y) - \delta_{k'}(x-y)$$

e

(3.120)

$$f_2 \equiv f(x-z) = \delta_k(x-z) - \delta_{k'}(x-z)$$

Obtemos

$$I(\Omega) = \int d\mu(\phi) \int_{\Omega} d^2x \phi(f_1) \phi(f_2) \quad (3.121)$$

Sabemos que

$$\int d\mu(\phi) \phi(f_1) \phi(f_2) = (f_1, C f_2) \quad (3.122)$$

onde

$$(f_1, C f_2) \equiv \int d^2y d^2z f_1(x-y) C(y-z) f_2(x-z) \quad (3.123)$$

e

$$C(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{-i k \cdot (y-z)}}{k^2 + m^2} d^2k \quad (3.124)$$

Em termos de transformadas de Fourier:

$$f(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d^2k e^{i k(x-y)} \tilde{f}(k) \quad (3.125)$$

e

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d^2x e^{-i k(x-y)} f(x) \quad (3.126)$$

Substituindo (3.125) em (3.123) obtemos:

$$\begin{aligned} I(Q) &= \int_Q d^2x \frac{1}{2\pi} \int d^2k \frac{|\tilde{f}(k)|^2}{k^2 + m^2} \\ &= \frac{|Q|}{2\pi} \int d^2k \frac{|\tilde{f}(k)|^2}{k^2 + m^2} \end{aligned} \quad (3.127)$$

De (3.120) e (3.126)

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \left[ \tilde{\delta}_k(k) - \tilde{\delta}_{k'}(k) \right] \quad (3.128)$$

Lembrando a definição de  $\delta_k(z)$  (após (3.102)), sua transformada de Fourier é igual a

$$\tilde{\delta}_k(k) = (\alpha \sqrt{\pi} k)^{-1} e^{-k^2/4k^2} \quad (3.129)$$

e, então,

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\pi}} \left[ \frac{e^{-k^2/4k^2}}{k} - \frac{e^{-k^2/4k'^2}}{k'} \right] \quad (3.130)$$

e

$$I(\Omega) = \frac{|\Omega|}{8\pi^{5/2}} \int \frac{d^2 k}{k^2 + m^2} \left[ \frac{e^{-k^2/4K^2}}{K} - \frac{e^{-k^2/4K'^2}}{K'} \right]^2 \quad (3.131)$$

Usando, outra vez, a desigualdade de Schwartz, obtemos:

$$I(\Omega) \leq \frac{|\Omega|}{8\pi^{5/2}} \left( \int \frac{d^2 k}{(k^2 + m^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int d^2 k \left[ \frac{e^{-k^2/4K^2}}{K} - \frac{e^{-k^2/4K'^2}}{K'} \right]^4 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \rightarrow 0 \quad (3.132) \\ K, K' \rightarrow \infty$$

Disto podemos concluir que dado  $\varepsilon > 0$ , arbitrário, existe uma constante  $K_0 > 0$  tal que para  $K, K' > K_0$

$$I(\Omega) < \varepsilon \quad (3.133)$$

Para concluir, analisemos a função de dois pontos para  $:R(\phi):$

$$S(x, y) = \langle :R(\phi(x))::R(\phi(y)):\rangle \quad (3.134)$$

igual a

$$\frac{g^2}{\alpha^2} \langle :\phi^4(x)::\phi^4(y): \rangle - \frac{g}{\alpha^3} \langle :\phi^4(x)::\phi^2(y): \rangle +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\alpha^4} \langle : \phi^4(x) : \rangle - \frac{1}{\alpha^4} \langle : \phi^4(x) : (1 + \alpha g \phi^2(y))^{-1} \rangle - \frac{g}{\alpha^3} \langle : \phi^2(x) : : \phi^4(y) : \rangle \\
& + \frac{1}{\alpha^4} \langle : \phi^2(x) : : \phi^2(y) : \rangle + \frac{1}{\alpha^4} \langle : \phi^2(x) : : \phi^4(y) : \rangle - \frac{1}{\alpha^5 g} \langle : \phi^2(x) : \rangle + \\
& + \frac{1}{\alpha^5 g} \langle : \phi^2(x) : (1 + \alpha g \phi^2(y))^{-1} \rangle + \frac{1}{\alpha^4} \langle : \phi^4(y) : \rangle - \frac{1}{\alpha^5 g} \langle : \phi^2(y) : \rangle + \frac{1}{\alpha^6 g^2} \\
& - \frac{1}{\alpha^6 g^2} \langle (1 + \alpha g \phi^2(x))^{-1} \rangle - \frac{1}{\alpha^4} \langle (1 + \alpha g \phi^2(x))^{-1} : \phi^4(y) : \rangle + \\
& + \frac{1}{\alpha^5 g} \langle (1 + \alpha g \phi^2(x))^{-1} : \phi^2(y) : \rangle - \frac{1}{\alpha^6 g^2} \langle (1 + \alpha g \phi^2(y))^{-1} \rangle \\
& + \frac{1}{\alpha^6 g^2} \langle (1 + \alpha g \phi^2(x))^{-1} (1 + \alpha g \phi^2(y))^{-1} \rangle
\end{aligned} \tag{3.135}$$

Deixando os detalhes de cálculo para o apêndice G, temos que:

$$a) \quad \langle : \phi^4(x) : : \phi^4(y) : \rangle = 4! C^4(x, y) \text{ e } \langle : \phi^2(x) : : \phi^2(y) : \rangle = 2! C^2(x, y)$$

$$b) \quad \langle : \phi^4(x) : : \phi^2(y) : \rangle = 0$$

$$c) \quad \langle : \phi^4(x) : \rangle = 0$$

$$d) \quad \langle : \phi^4(x) : (1 + \alpha g \phi^2(y))^{-1} \rangle = (\alpha g)^2 C^4(x, y) \int_0^\infty db b^2 e^{-b - \alpha g b^2 \frac{C(0)}{2}}$$

$$e) \quad \langle : \phi^2(x) : \rangle = 0$$

$$f) \quad \langle : \phi^2(x) : (1 + \alpha g \phi^2(y))^{-1} \rangle = -\alpha g C^2(x, y) \int_0^\infty db \, b^2 e^{-b - \alpha g b^2 \frac{C(0)}{2}}$$

$$g) \quad \langle (1 + \alpha g \phi^2(x)) \rangle = \int_0^\infty db \, e^{-b - \alpha g b^2 \frac{C(0)}{2}}$$

$$h) \quad \langle (1 + \alpha g \phi^2(x))^{-1} (1 + \alpha g \phi^2(y))^{-1} \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty ds \int_0^\infty dt \, e^{-s - t - \alpha g \frac{s^2}{2} C(0) - \alpha g \frac{t^2}{2} C(0)} \left\{ e^{-\alpha g s t C(x, y)} + e^{+\alpha g s t C(x, y)} \right\}$$

Em d) e f),

$$\begin{aligned} \int_0^\infty db \, b^2 e^{-b - \alpha g b^2 \frac{C(0)}{2}} &= - \left( 2 \alpha^2 g^2 C^2(0) \right)^{-1} + \\ &+ \frac{1}{8} (1 + \alpha g C(0)) \left( 2\pi / \alpha^5 g^5 C(0) \right)^{\frac{1}{2}} e^{1/2 \alpha g C(0)} \left[ 1 - \Phi \left( \sqrt{2} / 2 \sqrt{\alpha g C(0)} \right) \right] \end{aligned}$$

(3.136)

Em g),

$$\int_0^\infty db \, e^{-b - \alpha g b^2 \frac{C(0)}{2}} = \left( \frac{2\pi}{\alpha g C(0)} \right) e^{1/2 \alpha g C(0)} \left[ 1 - \Phi \left( \sqrt{2} / \sqrt{\alpha g C(0)} \right) \right]$$

(3.137)

Em h), uma das integrais pode ser calculada. Seja  $A \equiv c(0)$  e  $B \equiv c(x, y)$ . Então,

$$\begin{aligned}
 h) = & \frac{1}{2\alpha g A \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}}} \left\{ e^{\frac{(1 - \frac{B}{A})^2}{2\alpha g A (1 + \frac{B^2}{A^2})} + \frac{1}{2\alpha g A} \int_0^\infty du e^{-\frac{1}{2}u^2} \operatorname{erf} \left[ \frac{1}{\sqrt{\alpha g A}} \right. \right.} \\
 & \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{\alpha g A}} \sqrt{1 - \frac{B}{A}} \right] \sqrt{1 + \frac{B}{A}} \right. \\
 & \left. - \frac{B/A}{\sqrt{\alpha g A} (1 + \frac{B}{A})} + u \frac{B/A}{\sqrt{1 - B^2/A^2}} \right] + e^{\frac{(1 + \frac{B}{A})^2}{2\alpha g (1 - \frac{B^2}{A^2}) A} + \frac{1}{2\alpha g A} \int_0^\infty} \\
 & \left. \int_0^\infty dw e^{-\frac{1}{2}w^2} \operatorname{erf} \left[ \frac{1}{\sqrt{\alpha g A}} + \frac{B/A}{\sqrt{\alpha g A} (1 - \frac{B}{A})} - \frac{w \cdot B/A}{\sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}}} \right] \right\} \\
 & \frac{1}{\sqrt{\alpha g A}} \sqrt{1 + \frac{B}{A}} \sqrt{1 - \frac{B}{A}}
 \end{aligned}
 \tag{3.138}$$

Observe que  $A \equiv c(0) = \infty$  é uma constante infinita de modo que para  $x \neq y$ , todos os valores  $\langle \cdot \rangle$  se anulam com exceção de a). Neste caso,

$$S(x, y) = \frac{g^2}{\alpha^2} 4! C^4(x, y) + \frac{2!}{\alpha^4} C^2(x, y) + \frac{1}{\alpha^6 g^2}
 \tag{3.139}$$

o que é equivalente à função de dois pontos de

$$\frac{g}{\alpha} : \phi^4(x) : - \frac{1}{\alpha^2} : \phi^2(x) : + \frac{1}{\alpha^3 g} \quad (3.140)$$

Pelas mesmas razões, as funções de correlação do campo fundamental  $\phi$  serão equivalentes àquelas quando a interação é da forma (3.140). O modelo, então, se reduz a uma teoria polinomial em duas dimensões valendo a SB das séries perturbativas que foi demonstrada por Magnen e Seneor [16] para qualquer teoria polinomial em duas dimensões.

## IV. DISCUSSÃO

No capítulo II, demonstramos a SB das séries perturbativas para o espectro  $\{E_j(g)\}$  de um sistema quântico sujeito ao potencial

$$V(x;g) = \frac{1}{2} x^2 + g^2 x^6 (1 + \alpha g x^2)^{-1} \quad (4.1)$$

regular para  $g \in \zeta = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ , o que corresponde ao plano cortado da (fig. 11)

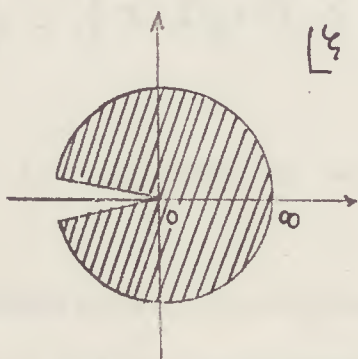


Fig. 11

Note que quando  $g \rightarrow 0^-$ , o potencial desenvolve um pólo em  $x^2 = 1/|\alpha g|$  tornando-se singular. No entanto, é regular quando  $g \rightarrow 0^+$ . Além disso,  $V(x;g) \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow \infty$ . As séries perturbativas para os autovalores  $E_j(g)$  foram construídas a partir de expansões em torno deste ponto de fronteira do domínio  $\zeta$ ,  $g=0$ , onde  $V$  não está bem definido, razão pela qual devem ser divergentes. A condição de forte assintoticidade, fórmula (2.69), também sugere isso. Observe que o erro cometido quando a função  $E_j(g)$  é aproximada pela série truncada  $\sum_{n=0}^N E_{j,n} g^n$ , i.e., o

$$\text{erro} = \left| E_j(g) - \sum_{m=0}^N E_{j,m} g^m \right| \leq K_j (\sigma_j \sigma_g)^{N+1} \Gamma\left(2(N+1) + \frac{g}{2}\right) |g|^{N+1} \quad (4.2)$$

é limitado por uma quantidade que cresce fatorialmente com  $N$ , para  $g$  fixo, indicando que a precisão da aproximação diminui o que é peculiar de séries divergentes, apenas. Este comportamento teve sua origem na norma  $\|x^M \Omega_j(\cdot)\|^2$  cujo cálculo foi necessário para obtermos a estimativa final (4.2) para o erro (confira pags. 27-30, fórmulas 2.49-260). Mostramos, no Apêndice E, que

$$2^M \Gamma\left(M + \frac{1}{2}\right) \leq \|x^M \Omega_j(\cdot)\|^2 \leq 2^{2M+j} \Gamma(M+1) \quad (4.3)$$

o que sugere que o limite superior em (4.2) não pode ser melhorado.

As considerações anteriores são apenas indicativas do comportamento das séries perturbativas do modelo estudado. O coeficiente  $E_{m,j}$  é uma soma bastante complicada com termos positivos e negativos (por exemplo, verifique fórmula 2.32) podendo haver, por isso, cancelamentos entre elas. Isto dificulta enormemente o cálculo de um limite inferior para  $E_{m,j}$  e, finalmente, a dedução de uma prova rigorosa da divergência da expansão, que não apresentamos aqui.

Provamos que as autovalores  $E_j(g)$  - não conhecidas, a priori - são analíticas no subdomínio  $\mathcal{S}$  em que  $|g| < 1$  (técnicamente, isto foi uma consequência do fato de que a Hamiltoniana  $H(g)$  forma uma família analítica em  $\mathcal{S}$ , condição para que, pelo teorema de Kato-Rellich,  $E_j(g)$  seja analítica neste domínio)

onde, também, vale a condição de forte assintoticidade (fórmula 2.69). Decorreu disto que as séries perturbativas  $\{\sum E_j g^n\}$  definem unívocamente o espectro  $\{E_j(g)\}$ . A soma bilidade de Borel foi obtida de uma generalização simples do teorema de Nevanlinna-Sokal segundo a qual as funções  $E_j(g)$  podem ser definidas pela integral

$$E_j(g) = \int_0^{\infty} e^{-b} B_j(g b^2) db \quad (4.4)$$

absolutamente convergente para  $g$  no interior da cardióide da fig. 9 (pag. 34) contida no subdomínio de  $\xi$  mencionado acima. A integral (4.4) permite o cálculo de  $E_j(g)$  uma vez conhecida explicitamente a transformada de Borel  $B_j$ , mas as séries perturbativas são bastante complicadas tornando esta tarefa praticamente impossível. No entanto, se isto fosse possível, o passo seguinte consistiria em estudar a existência de uma extensão analítica do resultado para  $|g| \geq 1$ .

Em teoria de campos, a divergência das séries perturbativas se devem a dois fatos: o número de diagramas que cresce ordem a ordem, fatorialmente, e amplitudes, típicas de teorias estritamente renormalizáveis, apenas, que, individualmente, comportam-se como  $\sim n!$ . Em teorias superrenormalizáveis, portanto, como aquela considerada no capítulo III, as propriedades de convergência das séries perturbativas podem ser reveladas por uma contagem do número de diagramas em ordem  $n$  de perturbação. Neste espírito, provamos, no capítulo III, a existência local da transformada de Borel  $B^{(E)}(b)$  para a função de Schwinger de  $E$  pontos,  $\mathcal{S}^{(E)}$ , (Teorema III) do modelo com interação racional

$$: \mathcal{R}(\phi) : = : g^2 \phi^6(x) (1 + \alpha g^2 \phi^2(x))^{-1} : \quad (4.5)$$

Para estimar o número de diagramas conexos e IPI em ordem  $m$  de perturbação, todos os vértices de um diagrama genérico foram dispostos sobre uma circunferência e, em seguida, via uma análise combinatória, contamos o número de maneiras possíveis de realizar contrações entre os campos associados aos diversos vértices do gráfico. Este método, devido à A. Jaffe, foi empregado pelo seu autor na demonstração da divergência das séries perturbativas dos modelos  $\mathcal{P}(\phi)$ . Oxalá fosse possível utilizá-lo, com o mesmo propósito, no caso do modelo (4.4), mas, como ocorre no contexto quântico discutido no início deste capítulo, as amplitudes, numa mesma ordem de perturbação, trocam de sinal consoante o número de vértices do gráfico associado seja par ou ímpar (veja fórmula 3.27, pg. 44), podendo produzir cancelamentos em cada ordem. Embora isto não seja importante no cálculo de um limite superior para o número de diagramas, é indispensável considerá-lo no cálculo de um limite inferior.

Aliás, o problema do cancelamento de amplitudes é típico de teorias renormalizáveis onde a operação de subtração de infinitos modifica o sinal das amplitudes numa mesma ordem e foi solucionado, apenas, no modelo  $\lambda : \phi^4 :$ , que é super-renormalizável [17]. A única renormalização necessária, neste caso, é a da amplitude associada ao gráfico  $\ominus$ . A solução para o problema de mostrar a divergência das séries perturbativas deste modelo, consistiu em reescrevê-las em termos de amplitudes convergentes e positivas envolvendo um novo

propagador convenientemente definido. Em seguida, estimou-se as novas amplitudes e calculou-se um limite inferior para o seu número em ordem  $n$  de perturbação mediante o método de Jaffe.

No nosso caso, o problema de sinais que ocorre entre as amplitudes não é devido a qualquer processo de renormalização mas tão somente ao caráter não polinomial da interação que, quando expandida numa série de potências de  $g$ , gera uma alternância de sinal (veja fórmula 3.13) responsável pelo problema.

Uma vez provada a existência local da transformada de Borel  $\mathcal{B}^{(E)}(b)$ , é necessário, agora, saber se ela pode ser continuada analiticamente ao longo de uma vizinhança do eixo  $\text{Re } b \geq 0$ , ou se a função  $\mathcal{B}^{(E)}(b)$  tem singularidades para  $\text{Re } b \geq \frac{1}{k}$  que impeçam a convergência da integral

$$\int_0^{\infty} e^{-b/g} \mathcal{B}^{(E)}(b) db \quad (4.6)$$

É natural procurar, primeiramente, uma primeira singularidade no ponto  $b = +1/k$ , na fronteira do círculo de convergência de  $\mathcal{B}(b)$ . Neste estudo é, também, importante saber em que medida ocorrem cancelamentos entre as amplitudes positivas e negativas dentro de uma mesma ordem para determinar, com precisão, se ocorre efetivamente um sinal negativo no termo geral  $A_n$  da série. Se for verificada uma alternância de sinal na expansão, isto determinará em que região do plano de Borel estão as singularidades. Neste caso, elas ocorrerão no semi eixo  $\text{Re } b < 0$ . Este é, talvez, o ponto principal, ainda sem solução completa, no estudo das singularidades da transformada de Borel, centrado, principalmente, no modelo  $\lambda \phi_{1,2,3,4}^4$ .

A somabilidade de Borel foi demonstrada, via métodos construtivistas, para o modelo em 1, 2 e 3 dimensões de sorte que não existem singularidades pelo menos para  $\text{Re } b \geq 0$ , nestas dimensões. No caso de 3 dimensões, conseguiu-se provar a existência de uma singularidade no semieixo  $\text{Re } b < 0$ . A técnica empregada na prova foi o método de Lipatov que permite calcular precisamente o raio  $R$  de convergência de  $B(b)$ . Em seguida, estuda-se o comportamento das suas derivadas neste ponto. No caso do modelo  $\phi^4$ , provou-se que [18]

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{a_n}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} = e^{-\sigma + \alpha} \quad (4.7)$$

$$\sigma = \inf S(\phi) \equiv \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} [(\partial_\mu \phi)^2(x) + \phi^2(x)] dx - \log \int_{\mathbb{R}^d} \phi^4(x) \right\}$$

A justificativa rigorosa desta fórmula é bastante complicada e, em essência, ela é obtida calculando-se limites inferior e superior para  $\sup \left| \frac{a_n}{n!} \right|^{\frac{1}{n}}$  que convergem para um mesmo limite quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $R^{-1}$ . Um requisito básico para a prova e a construção de (4.7) é a estabilidade de  $S(\phi)$  (i.e., que  $S(\phi)$  é limitada inferiormente).

Retornando ao nosso problema, então, o método indicado para estudarmos a existência de uma singularidade em  $b = t\mathbf{1}/\kappa$  parece ser o de Lipatov. Contudo, como mostramos no capítulo anterior, o ordenamento de Wick da interação  $\mathcal{R}_\Lambda(\phi)$  e o corte  $\Lambda$  na sua representação integral, necessário para termos um propagador bem definido, destroem a estabilidade de  $S(\phi)$ .

Porisso, arriscamos conjecturar que as séries perturbativas para este modelo não são somáveis por Borel devendo

haver singularidades na função  $\overset{(E)}{B(b)}$  sobre o eixo  $Re\,b \geq \frac{1}{\kappa}$ . O papel delas seria de impedir que funções de Schwinger bem definidas para este modelo com a interação  $:R_\lambda(\phi):$  possam existir, devido à sua instabilidade.

Modelos com interação racional da forma  $:L_I: = :g_1(1+g_2\phi(x))^{-1}:$  já foram estudados no passado [19]. A característica mais estudada destes modelos está na função de dois pontos  $S(x,y)$  de  $:L_I:$ , dada pela série divergente

$$S(x,y) = g_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(n+1) (g_2^2 c(x,y))^n \quad (4.8)$$

Efimov e Fradkin [20] sugeriram redefinir  $S(x,y)$  através da soma de Borel da série (4.8) dada por

$$\int_0^{\infty} e^{-b} (1 - g_2^2 c(x,y)b)^{-1} db \quad (4.9)$$

tomando, em seguida, o valor principal da integral (4.9) como uma prescrição para contornar o problema do polo que ocorre no integrando. Provou-se, no entanto, que esta prescrição, bem como outras, destrói propriedades importantes que uma teoria de campo deve satisfazer. Posteriormente, A. Salam [19] observou que os problemas com as interações racionais originam-se do seu ordenamento de Wick. De fato, pode-se obter uma expansão convergente para  $S(x,y)$  se o ordenamento de Wick for evitado. Vamos mostrar isto no caso da interação  $L_I$ . Podemos escrevê-la como

$$(1 + g \phi(x))^{-1} = \int_0^{\infty} l(t) e^{-t g \phi(x)} dt \quad (4.10)$$

onde  $l(t) = e^{-t}$ . A função de dois pontos é, então, dada por

$$S(x, y) = \langle 0 | \int_0^{\infty} l(t_1) e^{-t_1 g \phi(x)} dt_1 \int_0^{\infty} l(t_2) e^{-t_2 g \phi(y)} dt_2 | 0 \rangle \quad (4.11)$$

onde podemos usar que  $e^{\varepsilon \phi} = : e^{\varepsilon \phi} : e^{-c(0) \frac{\varepsilon^2}{2}}$ .  $C(0)$  é o propagador do campo  $\phi$ , no ponto  $x=0$ . Portanto, formalmente,

$$S(x, y) = \int_0^{\infty} dt_1 dt_2 l(t_1) l(t_2) e^{-c(0) \frac{t_1^2}{2} g^2 - c(0) \frac{t_2^2}{2} g^2 - t_1 \phi(x) g - t_2 \phi(y) g} \langle 0 | : e^{-t_1 \phi(x) g} : : e^{-t_2 \phi(y) g} : | 0 \rangle \quad (4.12)$$

onde

$$\langle 0 | : e^{-t_1 \phi(x) g} : : e^{-t_2 \phi(y) g} : | 0 \rangle = e^{t_1 t_2 C(x, y) g^2} = \sum_n \left( t_1 t_2 C(x, y) g^2 \right)^n \frac{1}{n!} \quad (4.13)$$

Substituindo este último resultado em (4.12), vem que

$$S(x, y) = \sum_n \frac{a_n^2}{n!} C^n(x, y) g^{2n} \quad (4.14)$$

onde  $a_n = \int_0^{\infty} dt l(t) t^n \exp \left\{ -\frac{c(0)}{2} t^2 g^2 \right\}$ . Lembrando que  $l(t) = e^{-t}$ ,  $a_n$  é da forma [13]

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\beta x^2 - \gamma x} dx = (2\beta)^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu) e^{-\frac{\gamma^2}{8\beta}} D_{-\nu} \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}} \right) \quad (4.15)$$

com  $\operatorname{Re} \beta > 0$ ,  $\operatorname{Re} \nu > 0$ , e onde  $D_{-\nu}(x)$  é a função cilíndrica-parabólica. Portanto,

$$a_n = n! \left( g^2 C(0) \right)^{-(n+1)/2} e^{-1/4 g^2 C(0)} D_{-(n+1)} \left( 1/g \sqrt{C(0)} \right) \quad (4.16)$$

Como  $C(0) = \infty$ ,  $a_n \simeq n! \left( g^2 C(0) \right)^{-\frac{n+1}{2}} D_{-(n+1)}(0)$  onde [13]

$$D_{-p}(0) = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_0^{\infty} e^{-x^2/2} x^{-p-1} dx \quad (4.17)$$

se  $\operatorname{Re} p < 0$ . Para  $p = -(n+1)$ , então,  $D_{-(n+1)}(0) = 2^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{(n-1)!}{2} \right) / n!$ ; logo,

$$a_n \simeq 2^{\frac{n-1}{2}} \left( g^2 C(0) \right)^{-(\frac{n+1}{2})} \left( \frac{n-1}{2} \right)! \quad (4.18)$$

Substituindo (4.18) em (4.14), segue que

$$S(x, y) = \sum_n 2^{\frac{n-1}{2}} \left( g^2 C(0) \right)^{-(\frac{n+1}{2})} \frac{\left( \frac{n-1}{2} \right)!}{n!} C(x, y) g^{2n} \quad (4.19)$$

Note que, como  $\left( \frac{n-1}{2} \right)! \leq (n-1)! < n!$ , a expansão (4.19) é convergente

e decai a zero, mesmo quando  $x=y$ , pois  $C(0)=\infty$ , preservando o decaimento natural da interação. A rigor, deveríamos ter regularizado e, posteriormente, renormalizado, o propagador  $C(0)$  para evitar a trivialização da teoria. Isto poderia ser feito tomando-se  $g = 1/\sqrt{C_k(0)}$ , onde  $k$  é o regulador. Neste caso,  $S(x,y)$  seria finita, porém, no limite  $k \rightarrow \infty$  teríamos  $g \rightarrow 0$ . Outra possibilidade seria fazer  $\phi \rightarrow \frac{\phi}{\sqrt{C_k(0)}}$ . Em ambos os casos, a renormalização multiplica ao termo  $g\phi$ , na interação  $(1+g\phi)^{-1}$ , um fator  $1/\sqrt{C_k(0)}$  que no limite  $k \rightarrow \infty$  sempre a trivializará. Este problema também foi observado no caso da interação  $g^2 \phi^6(x)(1+2g\phi^2(x))^{-1}$ , que pode ser decomposta na soma de um polinômio (do tipo  $\alpha \phi^2 + \beta \phi^4$ ) com um termo racional. O ordenamento de Wick foi mantido apenas na parte polinomial. A função de dois pontos para a interação definida desse modo foi calculada. Foram verificadas as mesmas propriedades de decaimento, ilustradas acima, naqueles termos envolvendo o termo racional  $(1+\alpha g \phi^2(x))^{-1}$ , mas não naqueles envolvendo somente a parte polinomial da interação. Neste sentido, este modelo é equivalente a uma teoria polinomial e, como tal, a SB das séries perturbativas, demonstrada para as teorias  $\mathcal{P}(\phi)_2$ , também ocorre neste contexto.

## Apêndice A: Algumas propriedades do operador $H(q)$

Neste primeiro apêndice, provaremos algumas propriedades da Hamiltoniana (1.1).

Já sabemos que

- a) O domínio de definição de  $H(q)$ ,  $\mathcal{D}(H) \subset L^2(-\infty, \infty)$ , é denso;
- b) Pelo Lema 1,  $H(q)$  é um operador fechado (i.e., se  $(\phi_n)$ ,  $\phi_n \in \mathcal{D}(H)$ , é uma sequência de vetores tal que  $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n$  e  $\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} H(q)\phi_n$ , então,  $\phi \in \mathcal{D}(H)$  e  $H\phi = \psi$ );
- c) Pelo Lema 2, o estado fundamental  $E_0(q)$  de  $H(q)$  é estritamente positivo.
- d) O potencial  $V(x, q)$  satisfaz:  $V \geq 0$  e  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x, q) = \infty$ .

Provaremos, com o auxílio de alguns teoremas, a serem enunciados em seguida, que o operador  $H(q)$

- e) é autoadjunto;
- f) tem um espectro puramente discreto;
- g) tem um estado fundamental não degenerado.

Teorema A.1: [9a, pg. 257] : Um operador  $T$  tal que  $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^\dagger)$  é auto adjunto se ele é fechado e  $\text{Ker}(T^\dagger \pm i) = \{0\}$ . (Por de

definição,  $\text{Ker } T = \{ x \in \mathcal{D}(T) \mid Tx = 0 \}$  ).

O operador  $H(g)$  é fechado (b) e  $\mathcal{D}(H^\dagger) \supset \mathcal{D}(H)$  pois ele é hermitiano. Suponha, agora, que existe um vetor  $\varphi \in \mathcal{D}(H^\dagger)$  tal que  $H^\dagger \varphi = i\varphi$ . Então,

$$-i(\varphi, \varphi) = (i\varphi, \varphi) = (H^\dagger \varphi, \varphi) \quad (\text{A.1})$$

Como  $\mathcal{D}(H)$  é denso, existe uma sequência de vetores  $\varphi_n \in \mathcal{D}(H)$  tal que  $\varphi = \lim \varphi_n$ . Portanto,

$$(H^\dagger \varphi, \varphi) = \lim (H^\dagger \varphi, \varphi_n) = \lim (\varphi, H \varphi_n) \quad (\text{A.2})$$

Ora,  $\varphi_n \in \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H^\dagger)$  de sorte que  $H \varphi_n = H^\dagger \varphi_n \rightarrow i\varphi$  pois o operador  $H^\dagger$  é fechado (o adjunto  $T^\dagger$  de um operador arbitrário  $T$  cujo domínio é denso, é um operador fechado [2]). Portanto,

$$(H^\dagger \varphi, \varphi) = \lim (\varphi, H \varphi_n) = \lim (\varphi, H^\dagger \varphi_n) = i(\varphi, \varphi) \quad (\text{A.3})$$

ou, de (A.1)

$$-i(\varphi, \varphi) = i(\varphi, \varphi) \quad (\text{A.4})$$

Isto é verdade se  $\varphi = 0$ . Segue daí que  $\text{Ker}(H \pm i) = \{0\}$  e o operador  $H(g)$  é, então, autoadjunto.

Teorema A.2: [9b , pg. 249]: Seja  $V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , limitado inferiormente, e  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V = \infty$ . Então, o operador  $H = -\Delta + V$  tem um operador resolvente compacto (Apêndice B).  $H$  tem um espectro puramente discreto e um conjunto de autofunções.

Teorema A.3: [9b , pg.207]:Seja  $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , limitado inferiormente, e suponha que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ . Então, o operador  $H = -\Delta + V$  tem um estado fundamental não degenerado e estritamente positivo.

Por definição,  $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$  se

$$\left( \int_A |f|^p d^n x \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (\text{A.5})$$

em qualquer conjunto finito  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ . O potencial

$$V = \frac{1}{2} x^2 + g^2 x^6 (1 + \alpha g x^2)^{-1} \quad (\text{A.6})$$

satisfaz (A.4) para  $p=1$ ,  $2$  e  $n=1$ , em particular, se  $g \in \mathcal{G}$ .  $V$ , também, satisfaz a propriedade d) e, portanto, o operador  $H(g)$ , definido como  $\frac{1}{2} p^2 + V$ , verifica os teoremas acima.

## Apêndice B: A forma quadrática e suas propriedades

Neste apêndice enunciaremos, em primeiro lugar, algumas definições e teoremas a respeito de formas quadráticas [9a].

Definição 1: Uma forma quadrática é uma aplicação  $q: Q(q) \times Q(q) \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $Q(q)$  é um subconjunto denso de  $\mathcal{H}$ .

Definição 2: Uma forma quadrática é dita ser estritamente  $m$ -acretiva se

i)  $q$  é fechada, i.e., se  $\varphi_n \in Q(q)$ ,  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  e  $\lim_{n,m \rightarrow \infty} q(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) = 0$ , então  $\varphi \in Q(q)$  e  $q(\varphi_n - \varphi, \varphi_n - \varphi) \rightarrow 0$ .

ii) Existe um  $\beta$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ , com  $|\arg [q(\varphi, \varphi)]| \leq \beta$  para todo  $\varphi \in Q(q)$ .

Teorema B.1: Seja  $q$  uma forma estritamente  $m$ -acretiva. Então, há um único operador  $T$  em  $\mathcal{H}$  tal que

i)  $T$  é fechado ;

ii)  $\mathcal{D}(T) \subset Q(q)$  e se  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(T) \Rightarrow q(\varphi, \psi) = (\varphi, T\psi)$  ;

iii)  $\mathcal{D}(T^*) \subset Q(q)$  e se  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(T^*) \Rightarrow q(\varphi, \psi) = (T^*\varphi, \psi)$  .

Lema B.1: Seja  $T$  um operador estritamente  $m$ -acretivo (i.e., o operador associado à forma  $q$  do teorema B.1). Então, qualquer  $\lambda$  com  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  está no conjunto resolvente  $\rho(T)$  e

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq (-R_\lambda)^{-1}.$$

Definição 3: O operador

$$R(z) = (T - z)^{-1} \quad (\text{B.1})$$

chama-se operador resolvente associado ao operador  $T$ . Os pontos  $z$ , tal que  $R(z)$  está bem definido, forma o conjunto resolvente, denotado por  $\rho(T)$ .

É necessário e suficiente que  $z$  seja diferente de qualquer autovalor de  $T$  para que  $R(z)$  seja um operador não singular e limitado.

Definição 4: Uma forma  $q$  é chamada estritamente  $m$ -setorial se há complexos  $z$  e  $e^{i\alpha}$ ,  $\alpha$  real, tais que  $e^{i\alpha}q + z$  é estritamente  $m$ -acretivo. O operador  $T$  associado a  $q$  é chamado estritamente  $m$ -setorial.

Teorema B.2: Seja  $q$  uma forma estritamente  $m$ -setorial;  $S_q$ , um setor onde  $q$  está definida, e,  $T$ , o operador associado. Se  $\lambda \notin S_q$ , então  $\lambda \in \rho(T)$  e  $\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq [\text{dist}(\lambda, S_q)]^{-1}$ .

No que segue, verificamos as propriedades acima para  $T = H(q)$ , o operador Hamiltoniano do nosso sistema.

A forma  $h(\varphi, \varphi)$  definida como

$$h(\varphi, \varphi) = (\varphi, H\varphi)$$

$$h: \mathcal{D}_H \times \mathcal{D}_H \rightarrow \mathbb{C} - (-\infty, 0] \subset \mathbb{C} \quad (\text{B.2})$$

onde  $\mathcal{D}_H$  é o domínio do operador  $H$ , é uma forma quadrática.  $\mathcal{D}_H$  é um domínio denso no espaço de Hilbert.

Lema B.2: A forma  $h(\varphi, \varphi) = (\varphi, H\varphi)$  é uma forma estritamente m-setorial, i.e., existem números  $\beta$  e  $e^{i\alpha}$ ,  $\alpha$  real,  $-\frac{\pi}{2} - \theta < \alpha < \frac{\pi}{2} - \theta$ ,  $|\theta| < \pi$  e  $\beta = 0$ , tais que  $e^{i\alpha} h + \beta$  é uma forma estritamente m-acretiva.

Prova: Já mostramos antes que  $H(g)$  é um operador fechado; portanto, se  $\varphi_n \in \mathcal{D}_H$ ,  $\varphi_n \rightarrow \varphi \in \mathcal{D}_H$  e, então,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} h(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} (\varphi_n - \varphi_m, H(\varphi_n - \varphi_m)) = 0 \quad (\text{B.3})$$

pois  $H\varphi_n \rightarrow \psi$ ,  $H\varphi_m \rightarrow \psi$  e, assim,  $H(\varphi_n - \varphi_m) \rightarrow 0$ . Segue, também, que  $h(\varphi_n - \varphi, \varphi_n - \varphi) \rightarrow 0$ . Concluimos que  $h(\varphi, \varphi)$  (bem como  $e^{i\alpha} h(\varphi, \varphi)$ ) é uma forma fechada.

Mostramos, também, (Lema 2, Capítulo I) que os valores esperados  $(\varphi, H\varphi)$  estão definidos num setor  $S_h$  com ângulo de abertura  $\theta$ ,  $|\theta| < \pi$ . Seja  $\alpha$  em  $h' = e^{i\alpha} h$  tal que  $-\frac{\pi}{2} - \theta < \alpha < \frac{\pi}{2} - \theta$  ou  $|\alpha + \theta| < \frac{\pi}{2}$ . Ora, como  $\alpha + \theta = \arg[h'(\varphi, \varphi)]$  uma vez que,  $h = |h|e^{i\theta}$  e  $h' = e^{i(\alpha + \theta)}|h|$ , então existe  $\beta = |\alpha + \theta|$  tal que  $|\arg[h'(\varphi, \varphi)]| \leq \beta$  para  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  e todo  $\varphi \in \mathcal{D}_H$ . Estes resultados implicam que  $h(\varphi, \varphi) = (\varphi, H\varphi)$  é uma forma quadrática m-setorial. Há números  $\beta = 0$  e  $e^{i\alpha}$  com  $-\frac{\pi}{2} - \theta < \alpha < \frac{\pi}{2} - \theta$  e  $|\theta| < \pi$ , tal que  $e^{i\alpha} h(\varphi, \varphi) + \beta$  é estritamente m-acretiva. Tendo em vista que  $h(\varphi, \varphi)$  é uma forma m-setorial definida no setor  $S_h$ , sendo  $H(g)$  o operador associado, apelamos paa o teorema B.2 segundo o qual todo  $\lambda \notin S_h$  pertence ao

conjunto resolvente. Segundo este mesmo teorema  $\| (H - \lambda)^{-1} \| \leq$   
 $\leq [\text{dist}(\lambda, S_h)]^{-1}$ . O conjunto  $(-\infty, 0)$  não pertence a  $S_h$ .  
 Deve, portanto, estar contido no resolvente.

### Apêndice C: Dedução da fórmula (2.26)

Já sabemos (Apêndice A) que o Hamiltoniano  $H(g)$  é autoadjunto e seu espectro consiste de autovalores discretos. Podemos, então, expressá-lo como

$$H = \sum_n E_n P_n \quad (C.1)$$

onde  $P_n$  são operadores de projeção correspondendo aos autovalores  $E_n$ :

$$P_m P_n = \delta_{mn} P_n, \quad \sum_n P_n = 1 \quad (C.2)$$

Vamos expandir o operador resolvente  $R_g(z) = (H(g) - z)^{-1}$  como

$$R_g(z) = -\frac{1}{z} \sum_n \left( \frac{H(g)}{z} \right)^n \quad (C.3)$$

Esta série é convergente se  $\left\| \left( \frac{H}{z} \right)^n \right\| < 1$ , ou ainda, se  $|z| > \|H\|$  (raio espectral de  $H$ : veja [8, pg. 27]). Substituindo a relação (C.1) em (C.3) e empregando (C.2), obtemos que

$$R_g(z) = \sum_\alpha \frac{P_\alpha}{E_\alpha(g) - z} \quad (C.4)$$

Seja  $\oint$  a integral realizada na circunferência de raio dado por  $|z - E_j(0)| = \frac{1}{2}$  no interior da qual há um único autovvalor  $E_j(g)$  próximo de  $E_j(0)$  para  $g \sim 0$  (Teorema de Kato-Rellich). Integrando, então, ambos os lados da fórmula (C.4) como dito acima, teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z - E_j(0)| = \frac{1}{2}} dz R_g(z) &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z - E_j(0)| = \frac{1}{2}} dz \frac{P_{\alpha}}{E_{\alpha}(g) - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\alpha} P_{\alpha} \delta_{j\alpha} (-2\pi i) \\ &= -P_j(g) \end{aligned} \quad (C.5)$$

ou seja,

$$P_j(g) = \frac{i}{2\pi} \oint_{|z - E_j(0)| = \frac{1}{2}} dz \left( H(g) - z \right)^{-1} \quad (C.6)$$

$P_j(g)$  é a projeção sobre o autovetor  $\Omega_j(g)$  com autovalor  $E_j(g)$ . Se  $H\Omega_k(g) = E_k\Omega_k(g)$ , então

$$P_j(g)\Omega_k(g) = \frac{i}{2\pi} \oint_{|z - E_j(0)| = \frac{1}{2}} \frac{\Omega_k(g)}{E_k(g) - z} dz = \begin{cases} \Omega_j(g), & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (C.7)$$

Vamos definir  $\Omega_j(g)$  como

$$\Omega_j(g) \equiv P_j \Omega_j(0) = \frac{i}{2\pi} \oint d\lambda (H(g) - \lambda)^{-1} \Omega_j(0) \quad (C.8)$$

onde  $\Omega_j(0)$  é o autovetor não perturbado. As razões para isso são duas. Primeiro, porque

$$P_j(g) \Omega_j(g) = P_j^2(g) \Omega_j(0) = P_j(g) \Omega_j(0) \equiv \Omega_j(g) \quad (C.9)$$

confirmando que  $P_j(g)$  é a projeção sobre o autovetor. Segundo, porque

$$\lim_{g \rightarrow 0} P_j(g) \Omega_j(0) = \frac{i}{2\pi} \oint \frac{\Omega_j(0)}{E_j(0) - E} dE \equiv \Omega_j(0) \quad (C.10)$$

$|E - E_j(0)| = \frac{1}{2}$

Apêndice D: Prova do Lema 4

Vamos precisar das seguintes desigualdades:

$$(H_0 - E^*)(H_0 - E) \geq \frac{1}{4} \quad (\text{D.1})$$

e

$$(H_0 - E^*)(H_0 - E) \geq \frac{a^2 x^4}{4} \quad (\text{D.2})$$

onde

$$E = j + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{i\beta}, \quad (\text{D.3})$$

pois  $|E - E_j(0)| = \frac{1}{2}$ , e  $a = a(j)$  é uma constante positiva para  $j$  fixado.

A primeira delas, (D.1), segue do Teorema espectral segundo o qual

$$H_0 - E = \sum_{n=0}^{\infty} (E_n - E) |\Omega_n(0)\rangle \langle \Omega_n(0)| \quad (\text{D.4})$$

O produto  $|\Omega_n(0)\rangle \langle \Omega_n(0)| \equiv P_n$  leva qualquer vetor em suas componentes sobre os estados  $|\Omega_n(0)\rangle$ , sendo um projetor. De (D.4), obtemos

$$(H_0 - E)^\dagger (H_0 - E) = \sum_{n,m} (E_n - E)^\dagger (E_m - E) P_n P_m \quad (\text{D.5})$$

onde  $P_n P_m = \delta_{nm} P_n$ , de forma que

$$(H_0 - E)^{\dagger} (H_0 - E) = \sum_n^{\infty} \left| n + \frac{1}{2} - E \right|^2 P_n \quad (D.6)$$

Mas por (D.3),

$$\left| n + \frac{1}{2} - E \right| \geq \left| n - j \right| - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2} \quad (D.7)$$

A desigualdade (D.1) segue, então, da identidade  $\sum_n^{\infty} P_n = 1$ .  
Usando (D.3) deduzimos, ainda:

$$(H_0 - E^*)(H_0 - E) = H_0^2 - 2(j+1)H_0 + j^2 + 1 + (1 - \omega\beta)(H_0 - \frac{1}{2}) + j(1 + \omega\beta) \quad (D.8)$$

Como  $H_0 \geq \frac{1}{2}$ , então

$$(H_0 - E^*)(H_0 - E) \geq H_0^2 - 2(j+1)H_0 + j^2 + 1 \quad (D.9)$$

Além do mais (pois  $x^2 p - p x^2 = 2jx$ ),

$$H_0^2 = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{4} p^4 + \frac{1}{2} p x^2 p - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{4} p^4 - \frac{1}{2} \quad (D.10)$$

Por isso,

$$(H_0 - E^*)(H_0 - E) \geq \frac{1}{4} x^4 - (j+1)x^2 + \frac{1}{4} p^4 - \frac{1}{2} - (j+1)p^2 + j^2 + 1 \quad (D.11)$$

onde  $\frac{p^4}{4} - p^2(j+1) + j^2 + 1 = -2j + \left[ \frac{1}{2} p^2 - (j+1) \right]^2 \geq -2j$ ; logo,

$$(H_0 - E^*)(H_0 - E) \geq \frac{1}{4} x^4 + (j+1)x^2 - \left( \frac{1}{2} + 2j \right) \quad (D.12)$$

Seja  $0 < \mu < 1$ . Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} x^4 + (j+1) x^2 - \left( \frac{1}{2} + 2j \right) &\equiv \frac{\mu x^4}{4} + \frac{1}{4} \left\{ \sqrt{1-\mu} x^2 - \frac{2(j+1)}{\sqrt{1-\mu}} \right\}^2 - \\ &- \left\{ \frac{(j+1)^2}{1-\mu} + 2j + \frac{1}{2} \right\} \geq \frac{\mu x^4}{4} - \left\{ \frac{(j+1)^2}{1-\mu} + 2j + \frac{1}{2} \right\} 4 \cdot \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (D.13)$$

Pela desigualdade (D.1), segue que

$$(H_0 - E^*)(H_0 - E) \geq \frac{\mu x^4}{4} - \left\{ \frac{(j+1)^2}{1-\mu} + 2j + \frac{1}{2} \right\} 4 (H_0 - E^*)(H_0 - E)$$

ou

$$(H_0 - E^*)(H_0 - E) \geq \frac{\mu x^4}{4 \left\{ 1 + 4 \left[ \frac{(j+1)^2}{1-\mu} + j + \frac{1}{2} \right] \right\}} \quad (D.14)$$

Então, se  $\alpha^2$  é o supremo do coeficiente de  $x^4/4$  em (D.14), para  $0 < \mu < 1$  (note que  $\alpha < 1$ ), teremos obtido (D.2).

Segue da desigualdade (D.2) que

$$(H_0 - E^*) \left[ (c_q)^{4q} + x^{8q} \right] (H_0 - E) \geq \frac{\alpha^2}{4} (c_q)^{4q} x^4 + (H_0 - E^*) x^{8q} (H_0 - E) \quad (D.15)$$

onde

$$\begin{aligned}
 (H_0 - E^*) x^{8q} (H_0 - E) &= \left( \frac{p^2}{2} - E^* \right) x^{8q} \left( \frac{p^2}{2} - E \right) - R_0 E x^{8q+2} + \frac{x^{8q+4}}{4} \\
 &\quad + \frac{1}{4} p^2 x^{8q+2} + \frac{1}{4} x^{8q+2} p^2
 \end{aligned}$$

(D.16)

Mas  $px^n = -n_j x^{n-1} + x^n p$  . Então:

$$\frac{1}{4} p^2 x^{8q+2} + \frac{1}{4} x^{8q+2} p^2 = \frac{1}{2} p x^{8q+2} p - \frac{1}{4} (8q+2)(8q+2) x^{8q}$$

(D.17)

onde  $(8q+2)(8q+1) \leq 90q^2$  . Além disso,  $R_0 E = j + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \beta \leq j+1$   
de modo que

$$(H_0 - E^*) x^{8q} (H_0 - E) \geq \frac{x^{4+8q}}{4} - (j+1) x^{8q+2} - \frac{45}{2} q^2 x^{8q} \quad (D.18)$$

Inserindo a desigualdade  $x^2 \leq \frac{1}{2} \left( \frac{p x^4}{q^2} + \frac{q^2}{p} \right)$  ,  
válida  $\forall p > 0$  e  $q \geq 1$  , obtemos

$$(H_0 - E^*) x^{8q} (H_0 - E) \geq \left( \frac{1}{4} - \frac{p(j+1)}{2q^2} \right) x^{4+8q} - \left( \frac{45}{2} + \frac{j+1}{2p} \right) q^2 x^{8q} \quad (D.19)$$

Seja  $\Delta(x)$  o lado esquerdo de (2.37) menos o seu lado direito. Então,

$$\Delta(x) = (H_0 - E)^{\dagger} \left[ (c_q)^{4q} + x^{8q} \right] (H_0 - E) -$$

$$- a^2 x^{4m+12} \left[ (c_{(n-1)})^{4(n-1)} + x^{8(n-1)} \right]$$
(D.20)

Se mostrarmos que  $\Delta(x) \geq 0$  (ou  $\delta(y)$ , mais adiante), teremos mos-  
trado o lema.

Reunindo os resultados anteriores, vem que

$$\Delta(x) \geq (c_q)^{4q} \frac{a^2 x^4}{4} + \left( \frac{1}{4} - \frac{\rho(j+1)}{2} \right) x^{4+8q} -$$

$$- \left( \frac{45}{2} + \frac{j+1}{2\rho} \right) \frac{a^2}{q} x^{8q} - a^2 (c_{(n-1)})^{4(n-1)} x^{4m+12} -$$

$$- a^2 x^{4m+8n+4}$$
(D.21)

Aplicando a desigualdade

$$1 \leq x^{4m} + \frac{K}{x^{4m+8n}},$$
(D.22)

válida  $\forall x$  e  $K \geq 1$ , no termo  $-a^2 x^{4m+8n+4}$  da (D.21) com  
 $K = (c_q)^{4q}/8$ , então

$$\Delta(x) \geq (c_q)^{4q} \frac{a^2 x^4}{8} + \left( \frac{1}{4} - \frac{\rho(j+1)}{2} - a^2 \right) x^{4+8q} - \left( \frac{45}{2} + \frac{j+1}{2\rho} \right) \frac{a^2}{q} x^{8q} -$$

$$- a^2 x^{4m+12} (c_{(n-1)})^{4(n-1)}$$
(D.23)

Fazendo  $x^4 = y c^2 q^2$ ,

$$\Delta(y) \geq \frac{1}{8} y (c q)^{4q+2} a^2 \delta(y) \quad (D.24)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta(y) = 1 + \left( \frac{2 - 4(j+1)p}{q^2} - 8 \right) y^{2q} - \frac{1}{a^2 c^2} \left( 180 + 4 \frac{(j+1)}{p} \right) y^{2q-1} \\ - \frac{8 y^{m+2}}{c^{2m} q^{2m}} \left( \frac{n-1}{m+n} \right)^{4(n-1)} \end{aligned} \quad (D.25)$$

Em seguida ajustamos os parâmetros  $p$  e  $c$  escolhendo os coeficientes de  $y^{2q}$  e  $y^{2q-1}$  como sendo iguais a 1, i.e.,

$$p = \frac{2 - 9a^2}{4(j+1)}$$

e (D.26)

$$c^2 = \frac{180}{q^2} + \frac{4(j+1)}{p q^2}$$

Como  $(c q)^{-2m} \leq 1$ , obtemos que

$$\delta(y) \geq 1 + y^{2m+2n} - y^{2m+2n-1} - 8 \left( \frac{n-1}{m+n} \right)^{4(n-1)} y^{m+2} \quad (D.27)$$

Para  $n = 1$ ,

$$S(y) = 1 + y^{2m+2} - y^{2m+1} \begin{cases} = y^2 - y + 1 > \frac{3}{4}, & \text{se } m=0 \\ \geq 1 - \left( \frac{2^{m+1}}{2^{m+2}} \right)^{2^{m+1}} > 0, & \text{se } m \geq 1 \end{cases} \quad (D.28)$$

Quando  $n \geq 2$ , usando que  $8 \left( \frac{n-1}{n+m} \right)^{4(n-1)} \leq \frac{1}{m+2}$ ,  $\forall m=0,1,\dots$

$$S(y) \geq -y^{2m+2n-1}(1-y) + \frac{1-y^{m+2}}{m+2} \quad (D.29)$$

O lado direito de (D.29) ainda é igual a

$$y^{m+1} \left( 1 - y^{m+2n+2} \right) (1-y) + \frac{1-y^{m+2}}{m+2} \quad (D.30)$$

ou, ainda,

$$(1-y)^2 \left\{ y^{m+1} \cdot \frac{1-y^{m+2n-2}}{1-y} + \frac{1}{m+2} \left[ \frac{-(m+2)(1-y)y^{m+1} + (1-y^{m+2})}{(1-y)^2} \right] \right\} \quad (D.31)$$

Mas

$$\sum_{m=0}^{N-1} y^m = \frac{1-y^N}{1-y}$$

e

(D.32)

$$\sum_{n=1}^{M-1} n y^{n-1} = \frac{-M y^{M-1} (1-y) + (1-y^M)}{(1-y)^2}$$

Lembrando que  $y \geq 0$ , então

$$\begin{aligned} \delta(y) \geq (1-y)^2 \left[ y^{m+1} (1+y+\dots+y^{m+2n-3}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{m+2} (1+2y+\dots+(m+1)y^m) \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

Consequentemente,  $\Delta(x) \geq 0$  provando o lema.

### Apêndice E: Algumas relações importantes

Deduzimos, neste apêndice, as seguintes relações importantes:

$$1) \quad |U(g)| \leq d_g x^6 \quad \text{onde}$$

$$U(g) = x^6 (1 + \alpha g x^2)^{-1} \quad (\text{E.1})$$

e

$$d_g = \begin{cases} 1 & , \text{ se } |\arg g| \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 / |\sin |\arg g||, & \text{ se } \frac{\pi}{2} < |\arg g| \leq \pi \end{cases}$$

Prova: Se  $|\arg g| \leq \frac{\pi}{2}$ , então  $\operatorname{Re} g = |g| \cos \theta \geq 0$  e

$$|1 + \alpha g x^2|^2 = (1 + \alpha \operatorname{Re} g x^2)^2 + \alpha^2 \operatorname{Im} g^2 x^4 \geq 1 \quad (\text{E.2})$$

Seja  $f(x^2)$  o lado esquerdo de (E.2). Então,

$$f(x^2) = (1 + \alpha |g| \cos \theta x^2)^2 + \alpha^2 |g|^2 \sin^2 \theta x^4 \quad (\text{E.3})$$

Calculando  $\frac{df}{dx} = 0$  obteremos que  $x^2 = -(\cos \theta / \alpha |g|) > 0$ , se  $\theta = \arg g > \frac{\pi}{2}$ . Substituindo este resultado em  $f(x)$ , teremos

$$f(x^2) \geq \sin^2 \theta$$

(E.4)

e, portanto,  $|1 + \alpha g x^2|^{-1} \leq (\sin |\arg g|)^{-1}$ .

2) O nº de termos na soma  $\sum_{m_1 + \dots + m_p = S} (\dots)$ .

O nº de termos na soma acima pode ser obtido considerando a multiplicação de  $p$  somas iguais a

$$1 + x + x^2 + \dots = (1 - x)^{-1} \quad (\text{E.5})$$

Diferentes potências de  $x$  são obtidas, assim, cada uma ocorrendo um certo nº de vezes. Por exemplo,  $x^2$  pode ser obtido multiplicando o termo  $x^2$  da primeira soma pelo termo 1 das demais, ou ainda, dois termos  $x$  de duas das somas pelos termos 1 das restantes. Podemos saber o nº de vezes que o termo  $x^S$  aparece, calculando o seu coeficiente no produto final. Este termo pode ser obtido escolhendo um termo  $x^{t_1}$  na primeira soma,  $x^{t_2}$  na segunda, e assim por diante, com a condição de que

$$t_1 + t_2 + \dots + t_p = S \quad (\text{E.6})$$

Seja  $f(s, p)$  o coeficiente de  $x^S$  em  $(1 - x)^{-p}$ . Sabemos que

$$(1 - x)^{-p} = \sum_S \binom{p + S - 1}{S} x^S \quad (\text{E.7})$$

Logo, o nº de termos que satisfazem (E.6) é igual a

$$f(s, p) = \binom{p+s-1}{s} \leq 2^{p+s} \quad (\text{E.8})$$

3) Cálculo de  $\|x^M \Omega_j(0)\|^2$ .

Os estados  $\Omega_j(0)$  do oscilador harmônico estão dados pela expressão

$$\Omega_j(0) = \alpha_j e^{-x^2/2} H_j(x) \quad (\text{E.9})$$

onde  $\alpha_j = \left(2^j \pi^{1/2} j!\right)^{-1/2}$  e  $H_j(0)$  é o polinômio de Hermite de ordem  $j$ . Posto isso,

$$\|x^M \Omega_j(0)\|^2 = \alpha_j^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_j^2(x) x^{2M} \quad (\text{E.10})$$

O cálculo da integral (E.10) será feito como segue. Temos [13]

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos bx H_m^2(x) dx = 2^{m-1/2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} m! e^{-b^2/4} L_m\left(\frac{b^2}{2}\right) \quad (\text{E.11})$$

Derivando  $I$ ,  $2M$  vezes com respeito a  $\underline{b}$  e fazendo, no final,  $b=0$ , vem que

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2M} H_m^2(x) dx = (-1)^{M(m-\frac{1}{2})/2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} m! \cdot \frac{d^{2M}}{db^{2M}} \left( e^{-b^2/4} L_m\left(\frac{b^2}{2}\right) \right) \Big|_{b=0} \quad (\text{E.12})$$

Mediante um cálculo explícito

$$\frac{d^{2M}}{db^{2M}} \left( e^{-b^2/4} L_m\left(\frac{b^2}{2}\right) \right) \Big|_{b=0} = (-1)^M \frac{(2M)!}{2^M M!} \sum_{v=0}^M \left(\frac{1}{2}\right)^v \binom{M}{v} \binom{m}{M-v} \quad (\text{E.13})$$

de forma que

$$\|x^M \Omega_j^{(0)}\|^2 = \frac{(2M)!}{2^M M!} \sum_{v=0}^M \left(\frac{1}{2}\right)^v \binom{M}{v} \binom{j}{M-v} \quad (\text{E.14})$$

Como  $\left(\frac{1}{2}\right)^v \leq 1$ , a soma aparecendo em (E.14) é menor ou igual a [13]:

$$\sum_{v=0}^M \binom{M}{v} \binom{j}{M-v} = \binom{M+j}{M} \quad (\text{E.15})$$

Portanto,

$$\|x^M \Omega_j^{(0)}\|^2 \leq \frac{(2M)!}{2^M (M!)^2} \cdot \frac{(M+j)!}{j!} \quad (\text{E.16})$$

Aplicando a desigualdade  $(a+b)! \leq 2^{a+b} a! b!$  à  $(2M)!$  e, em seguida, à  $(M+j)!$ , obtemos, finalmente:

$$\|x^M \Omega_j\|^2 \leq 2^M \frac{(M+j)!}{j!} \leq 2^{2M+j} M! \leq (4M)^M 2^j$$

(E.17)

É importante calcularmos um limite inferior para  $\|x^M \Omega_j\|^2$ . Pela relação (E.14),

$$\|x^M \Omega_j\|^2 \geq \frac{(2M)!}{2^M M!} = 2^M \Gamma\left(M + \frac{1}{2}\right)$$

pois,  $\Gamma(2y+1) = 2^{2y} \Gamma\left(y + \frac{1}{2}\right) \Gamma(y+1) (\pi)^{-\frac{1}{2}}$ .

# Apêndice F: Cálculo de $:\phi^6(x) \omega \delta\phi(x):$

Neste apêndice calcularemos uma fórmula explícita para o ordenamento de Wick do produto  $\phi^6(x) \omega \delta\phi(x)$ .

Em primeiro lugar sabemos por [14] que

$$:\phi^n(x): = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!}{(n-2j)!j!2^j} (-1)^j C^j \phi^{n-2j}(x) \quad (F.1)$$

onde  $C = C(0)$  é o propagador livre no ponto zero. A expressão acima é, basicamente, aquela para um polinômio de Hermite definido como

$$H_n(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j \frac{n!}{(n-2j)!j!} (2x)^{n-2j} \quad (F.2)$$

Fazendo, então,  $x = \phi(x)/(2c)^{\frac{1}{2}}$ , encontraremos que

$$H_n\left(\frac{\phi(x)}{(2c)^{\frac{1}{2}}}\right) = \left(\frac{2}{c}\right)^{\frac{n}{2}} :\phi^n(x): \quad (F.3)$$

ou seja,

$$:\phi^n(x): = \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{\phi(x)}{(2c)^{\frac{1}{2}}}\right) \quad (F.4)$$

Esta fórmula é necessária para o cálculo de  $:e^{i\delta\phi}:$

Temos que

$$: e^{i\delta\phi} : = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left( i\delta \left( \frac{c}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^m H_m \left( \frac{\phi}{(2c)^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (\text{F.5})$$

$$\begin{aligned} \text{com } \sum_m \frac{t^m}{m!} \frac{H_m(y)}{m!} &= e^{-t^2 + 2ty} \quad ; \text{ logo,} \\ : e^{i\alpha\phi} : &= e^{\delta^2 \frac{c}{2} + i\delta\phi} \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Podemos, agora, calcular  $: \cos \delta\phi :$  pois

$$: \cos \delta\phi : = \text{Re} : e^{i\delta\phi} : = e^{\delta^2 \frac{c}{2}} \cos \delta\phi \quad (\text{F.7})$$

e, consequentemente,  $: \phi^6 \cos \delta\phi :$  :

$$\begin{aligned} : \phi^6 \cos \delta\phi : &= (-1) \frac{d^6}{d\delta^6} : \cos \delta\phi : = \\ &= (-1) \frac{d^6}{d\delta^6} \left( e^{\delta^2 \frac{c}{2}} \cos(\delta\phi) \right) \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

Usando a regra de Leibnitz,

$$: \phi^6 \cos \delta\phi : = (-1) \sum_{\nu=0}^6 \binom{6}{\nu} \frac{d^{\nu}}{d\delta^{\nu}} e^{\delta^2 \frac{c}{2}} \cdot \frac{d^{6-\nu}}{d\delta^{6-\nu}} \cos \delta\phi \quad (\text{F.9})$$

onde

$$\frac{d^l}{d\delta^l} \cos \delta\phi = (-1)^{l(l+1)/2} \phi^l \begin{cases} \cos \delta\phi, & \text{se } l \text{ é par} \\ \sin \delta\phi, & \text{se } l \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(F.10)

e

$$\begin{aligned} \frac{d^l}{d\delta^l} e^{\delta^2 \frac{c}{2}} &= \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{l}{2}} (-1)^l e^{\delta^2 \frac{c}{2}} H_l \left( i\delta \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{l}{2}} e^{\delta^2 \frac{c}{2}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \frac{l!}{(l-2j)! j!} (\delta(2c)^{\frac{1}{2}})^{l-2j} \end{aligned}$$

(F.11)

temos, finalmente:

$$\begin{aligned} :\phi^b(x) \cos \delta\phi(x): &= (-1)^b e^{\delta^2 \frac{c}{2}} \times \\ &\left\{ \cos \delta\phi \sum_{v \text{ par}}^b \binom{b}{v} (-1)^{\frac{1}{2}(b-v)(7-v)} \phi^{b-v} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{v}{2}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{v}{2} \rfloor} \frac{v!}{j! (v-2j)!} (\delta(2c)^{\frac{1}{2}})^{v-2j} + \right. \\ &\left. \sin \delta\phi \sum_{v \text{ ímpar}}^b \binom{b}{v} (-1)^{\frac{1}{2}(b-v)(7-v)} \phi^{b-v} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{v}{2}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{v}{2} \rfloor} \frac{v!}{j! (v-2j)!} (\delta(2c)^{\frac{1}{2}})^{v-2j} \right\} \end{aligned}$$

(F.12)

Apêndice G: Cálculo dos valores esperados

$$1. \quad \langle : \phi^n(x) : (1 + \alpha g \phi^2(x))^{-1} \rangle \quad n = 0, 2, 4$$

$$2. \quad \langle (1 + \alpha g \phi^2(x))^{-1} (1 + \alpha g \phi^2(y))^{-1} \rangle$$

1. Empregando a representação integral  $\int_0^\infty e^{-b} \cos(\sqrt{\alpha g} \phi b) db$  para o termo racional  $(1 + \alpha g \phi^2)^{-1}$ , temos que

$$\langle 0 | : \phi^4(x) : (1 + \alpha g \phi^2(y))^{-1} | 0 \rangle = \int_0^\infty db e^{-b} \langle 0 | : \phi^4(x) : \cos(b \sqrt{\alpha g} \phi(y)) | 0 \rangle \quad (G.1)$$

Decompondo o cosseno numa soma de exponenciais e usando a (F.6), obtemos

$$\begin{aligned} (G.1) = & \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-b} e^{-\alpha g b^2 \frac{C(0)}{2}} \left[ \langle 0 | : \phi^4(x) : e^{i b \sqrt{\alpha g} \phi(y)} : | 0 \rangle + \right. \\ & \left. + \langle 0 | : \phi^4(x) : e^{-i b \sqrt{\alpha g} \phi(y)} : | 0 \rangle \right] db \quad (G.2) \end{aligned}$$

O cálculo dos valores esperados em (G.2) se faz como segue. Seja

$$T = : \phi^n(x) : e^{i \delta \phi(y)} : \quad (G.3)$$

onde

$$:\phi^n(x): = :(\phi_+(x) + \phi_-(x))^n: = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \phi_+^j \phi_-^{n-j} \quad (\text{G.4})$$

Então,

$$T = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \phi_+^j(x) \phi_-^{n-j}(x) e^{i\delta\phi_+(y)} e^{i\delta\phi_-(y)} \quad (\text{G.5})$$

Lembrando que  $\phi_-(x)\phi_+(y) = C(x,y) + \phi_+(y)\phi_-(x)$  é fácil mostrar que

$$\phi_-^k(x) e^{i\delta\phi_+(y)} = e^{i\delta\phi_+(y)} (i\delta C(x,y) + \phi_-(x))^k \quad (\text{G.6})$$

e, assim, que

$$T = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \phi_+^j(x) e^{i\delta\phi_+(y)} (i\delta C(x,y) + \phi_-(x))^{n-j} e^{i\delta\phi_-(y)} \quad (\text{G.7})$$

Mas,

$$(i\delta C(x,y) + \phi_-(x))^l e^{i\delta\phi_-(y)} |0\rangle =$$

$$\sum_{t=0}^l \binom{l}{t} (i\delta C(x,y))^t \phi_-^{l-t}(x) |0\rangle = (i\delta C(x,y))^l |0\rangle \quad (\text{G.8})$$

Portanto,

$$\langle 0 | T | 0 \rangle = (i \delta C(x, y))^n \quad (G.9)$$

Aplicando (G.9) em (G.2), vem que

$$(G.1) = (\alpha g)^2 C^4(x, y) \int_0^\infty db b^2 e^{-b - \alpha g \frac{b^2}{2} \frac{C(0)}{2}} \quad (G.10)$$

De forma similar, calcula-se, para  $n=2$  :

$$\langle 0 | : \phi^2(x) : (1 + \alpha g \phi^2(y))^{-1} | 0 \rangle = -\alpha g C^2(x, y) \int_0^\infty db e^{-b - \alpha g \frac{b^2}{2} \frac{C(0)}{2}} b^2 \quad (G.11)$$

E para  $n=0$  ,

$$\langle 0 | (1 + \alpha g \phi^2(y))^{-1} | 0 \rangle = \int_0^\infty e^{-b - \alpha g \frac{b^2}{2} \frac{C(0)}{2}} b^2 db \quad (G.12)$$

A integral em (G.10), (G.11) e (G.12) está tabelada em [13] .

Tem-se, finalmente:

$$\begin{aligned} \langle : \phi^n(x) : (1 + \alpha g \phi^2(y))^{-1} \rangle &= (-\alpha g)^{\frac{n}{2}} C^n(x, y) \left\{ -1 / 2 \alpha^2 g^2 C(0) + \right. \\ &+ \frac{1}{8} (1 + \alpha g C(0)) \left( \frac{2\pi}{\alpha^5 g^5 C(0)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2\alpha g C(0)}} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{\sqrt{2}}{2 \sqrt{\alpha g C(0)}} \right) \right] \left. \right\} \quad (G.13) \end{aligned}$$

onde  $n = 0, 2, 4$ .

2. Como antes, calculamos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \langle (1 + \alpha g \phi^2(x))^{-1} (1 + \alpha g \phi^2(y))^{-1} \rangle &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds e^{-s-t} \\ &\cdot e^{-\alpha g \frac{s^2}{2} C(0) - \alpha g \frac{t^2}{2} C(0)} \left\{ e^{-st \alpha g C(x,y)} + e^{\alpha g st C(x,y)} \right\} \end{aligned} \quad (G.14)$$

Uma das integrais pode ser calculada explicitamente em termos da função

$$\text{erf}(x) = \int_x^\infty e^{-\frac{1}{2} w^2} dw \quad (G.15)$$

Basta completar os quadrados nos expoentes em (G.14) e, obteremos, após um cálculo tedioso, a expressão (3.138) (Capítulo III, pg. 78).

### Bibliografia

- [1] Sokal, A.D.: J. Math. Phys. 21, (2), (1980)
- [2] Auberson, G.: Comm. Math. Phys. 84, 531 (1982)
- [3] Varshni, Y.P.: Phys. Rev. A, 36, 3009 (1987)
- [4] Flessas, G.P.: Phys. Lett. 831, 121 (1981)
- [5] Blecher, M.H., Leach, P.G.L.: J. Phys. A: Math. Gen. 20, 5923 (1987)
- [6] Simon, B.: Ann. of Phys., 58, 76 (1970)
- [7] Graffi, S., Grecchi, V., Simon, B.: Phys. Lett. 32B, 631 (1970)
- [8] Kato, T.: Perturbative Theory for Linear Operators, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-NY (1966)
- [9] Reed, M., Simon, B.: Methods of Modern Mathematical Physics:
  - a) Vol. I(Functional Analysis) Academic Press, NY, London (1972);
  - b) Vol. IV(Analysis of Operaors) Academic Press, Ny-San Francisco-London (1978)
- [10] Auberson, G., Menessier, G.: J. Math. Phys. 22, 2472(1981)
- [11] Jaffe, A., Comm. Math. Phys. 1, 127 (1965)
- [12] Feldman, J., Magnen, J., Rivasseau, V., Seneor, R., Comm. Math. Phys., 98, 273 (1985)
- [13] Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., Table of Integrals, Series and Products. Academic Press, Ny-London (1965)
- [14] Glimm, J., Jaffe, A., Quantum Physics: A Functional Integral Point of View. Springer-Verlag, NY-Heidelberg Berlin (1981)

Notas de pé de página

(1)\* O teorema de Kato-Rellich reza o seguinte:

Teorema de Kato-Rellich [9b]: Seja  $T(q)$  um operador que forma uma família analítica no domínio  $\mathcal{R}$  e,  $E_0$ , um autovalor discreto e não degenerado de  $T(q_0)$ . Então, para  $q$  próximo de  $q_0$ , há exatamente um ponto  $E(q) \in \sigma(T(q))$  (o espectro de  $T(q)$ ) próximo de  $E_0$  e, este ponto, é isolado e não degenerado.  $E(q)$  é uma função analítica de  $q$ , para  $q$  próximo de  $q_0$ .

Uma vez que, pelo Lema 1, o operador Hamiltoniano  $H(q)$  forma uma família analítica no domínio  $\mathcal{E} = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ , podemos aplicar o teorema acima com  $\mathcal{R} \equiv \mathcal{E}$ ,  $T(q) \equiv H(q)$ ,  $q_0 = 0$  e  $E_0 \equiv E(0)$ , um autovalor de  $H(0)$ , a Hamiltoniana do oscilador harmônico. De acordo com o teorema de Kato-Rellich, então, os autovalores  $E(q)$  de  $H(q)$  são funções analíticas de  $q$ , para  $q \sim 0$ .

(2)\* Pelas relações (2.9) e (2.10), sabemos que a Hamiltoniana pode ser escrita como a soma dos operadores

$$C(q) = \frac{1}{2} p^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) x^2 + q \frac{x^4}{\alpha} \quad (2.1)^*$$

e

$$b(q) = \frac{x^2}{\alpha} (1 + \alpha q x^2)^{-1} \quad (2.2)^*$$

Para  $\alpha > 1$  e  $g \in \mathcal{S}$ , temos que  $(\varphi c(g) \varphi)$  e  $(\varphi b(g) \varphi)$  são operadores positivos definidos e estão bem definidos num setor similar a  $\mathcal{S}$ .

(3)\* As normas  $\| (H(g) - \lambda)^{-1} (H_1 - \lambda) \varphi \|$  e  $\| (H(g) - \lambda)^{-1} (H_2 - \lambda) \varphi \|$  são limitadas,  $\forall \varphi \in L^2(-\infty, \infty)$ . Na verdade, como o espaço de Schwartz  $\mathcal{S}$  é denso em  $L^2$  basta que  $\varphi \in \mathcal{S}$ .

(4)\* A desigualdade (2.37) deve ser tomada no sentido de operadores positivos no espaço de Schwartz  $\mathcal{S}$  das funções  $C^\infty$  de rápido decaimento. Por definição, um operador  $B$  é positivo num certo espaço  $\mathcal{E}$  - simbolicamente,  $B \geq 0$  - se

$$(\varphi, B \varphi) \geq 0$$

(4.1)\*

para  $\varphi \in \mathcal{E}$ . da mesma forma,  $A \geq B$ , em  $\mathcal{E}$ , se  $A - B \geq 0$ . Em particular,  $\mathcal{E} = L^2(-\infty, \infty)$  e, como sabemos, o espaço de Schwartz  $\mathcal{S}$  é denso em  $L^2$  de sorte que é suficiente termos  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Nestas condições,

$$(\varphi, [H_0 - E]^\dagger [(c \varphi)^{4q} + x^{8q}] [H_0 - E] \varphi) \geq \alpha^2 (\varphi, x^{4m+12} [(c^{(n-1)})^{4(n-1)} + x^{8(n-1)}] \varphi) \quad (4.2)^*$$

Segundo Simon ([6], Lema II.11.1), o operador  $R_0 = (H_0 - E)^{-1}$  é uma aplicação contínua de  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  e, portanto, existe  $\psi \in \mathcal{S}$  tal que  $\varphi = [H_0 - E]^{-1} \psi$ . Podemos, então, escrever que

$$(\varphi, [(c \varphi)^{4q} + x^{8q}] \varphi) \geq \alpha^2 (\psi, R_0^\dagger x^{4m+12} [(c^{(n-1)})^{4(n-1)} + x^{8(n-1)}] R_0 \psi) \quad (4.3)^*$$

Seja  $\phi = \left[ (c q)^{4q} + x^{8q} \right]^{\frac{1}{2}} \psi$  ; logo,

$$(\phi, \phi) \geq a^2 \left( \phi, \left[ (c q)^{4q} + x^{8q} \right]^{\frac{-1}{2}} R_0 \left[ (c(n-1))^{4(n-1)} + x^{8(n-1)} \right]^{\frac{1}{2}} x^{2m+6} \right).$$

$$\cdot x^{2m+6} \left[ (c(n-1))^{4(n-1)} + x^{8(n-1)} \right]^{\frac{1}{2}} R_0 \left[ (c q)^{4q} + x^{8q} \right]^{\frac{-1}{2}} \phi \Big)$$

$$\equiv a^2 \left( \phi, M_{m,n}^{\dagger} M_{m,n} \phi \right)$$

(4.4)\*

ou, finalmente,

$$\| M_{m,n} \phi \| \leq \frac{1}{a} \| \phi \|$$

(4.5)\*

- [15] Gelfand, I.M., Shilov, G.E., Generalized Functions, Vol. I  
Academic Press, NY-London (1964)
- [16] Eckmann, J.P., Magnen, J., Seneor, R. Comm. Math. Phys.  
39, 251 (1975)
- [17] Calan, C., Rivasseau, V., Comm. Math. Phys. 83, 77 (1982)
- [18] Feldman, J., Rivasseau, V., Ann. Inst. H. Poincaré, 44,  
427 (1986)
- [19] Cin, M.C., Iverson, G.J., Perlmotter, A. (editores),  
Coral Gables Conference on Fundamental Interactions at  
High Energy (1971)
- [20] Roman, P., Some Modern Mathematics for Physicists and  
outsiders. Vol. 2. Pergamon Press Inc. (1975)

