

UNESP  
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

Guaratinguetá  
2001



1110000447



unesp

Universidade Estadual Paulista

FACULDADE DE ENGENHARIA DE GUARATINGUETÁ

*"A Sombra da Terra e a  
Propagação da Atitude de  
Satélites Artificiais"*

REGINA ELAINE SANTOS CABETTE

PUBLICAÇÃO **REGINA ELAINE SANTOS CABETTE**

**136**

GUARATINGUETÁ - SP  
BRASIL





Governo do Estado de São Paulo  
Universidade Estadual Paulista

FACULDADE DE ENGENHARIA DE GUARATINGUETÁ

*A Sombra da Terra e a  
Propagação de Atitude  
de Satélites Artificiais*

REGINA ELAINE SANTOS CABETTE

PUBLICAÇÃO

GUARATINGUETÁ - SP  
BRASIL



**A SOMBRA DA TERRA E A  
PROPAGAÇÃO DE ATITUDE  
DE SATÉLITES ARTIFICIAIS**

**REGINA ELAINE SANTOS CABETTE**

Dissertação apresentada à Faculdade  
de Engenharia de Guaratinguetá da  
Universidade Estadual Paulista para  
a obtenção do título de Mestre em  
Física.

Orientador: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Cecília F. P. S. Zanardi

Co-orientador: Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes

Guaratinguetá

2001

00447

FACULDADE DE ENGENHARIA  
DE GUARATINGUETÁ

BIBLIOTECA

447





T629.783(043)  
C114s

Ficha catalográfica preparada na Seção de Aquisição e Tratamento da  
Informação da Biblioteca – FEG/UNESP

**Cabette, Regina Elaine Santos**

**C114s**

**A sombra da Terra e a propagação de atitude de satélites  
artificiais/Regina Elaine Santos Cabette.- Guaratinguetá, 2001  
131f.: il.; 30cm**

**Bibliografia: f.112-115**

**Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista,  
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2001.**

**Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Cecília F. P. S. Zanardi**

**1. satélites artificiais. I. Título**

**CDU 629.783(043)**

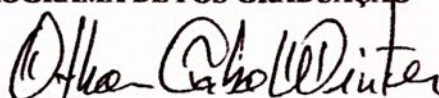
**“A SOMBRA DA TERRA E A PROPAGAÇÃO DA ATITUDE  
DE SATÉLITES ARTIFICIAIS”**

**REGINA ELAINE SANTOS CABETTE**

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“MESTRE EM FÍSICA”**

**ESPECIALIDADE: FÍSICA**

**APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**

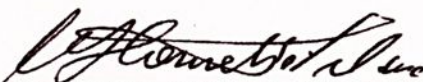


**Prof. Dr. Othon Cabo Winter**  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**



**Prof. Dr. MARIA CECÍLIA FRANÇA DE PAULA SANTOS ZANARDI**  
Orientadora / Unesp-Feg



**Prof. Dr. ROBERTO ARTUR CORNETTI SILVA**  
Unesp-Feg



**Prof. Dr. SANDRO DA SILVA FERNANDES**  
ITA

*Fevereiro de 2001*

## **DADOS CURRICULARES**

**REGINA ELAINE SANTOS CABETTE**

**NASCIMENTO** 31.07.1975 - GUARATINGUETÁ / SP

**FILIAÇÃO** Getulio Cabette  
Maria Celeste Graglia Santos Cabette

**1993/1998** Curso de Graduação  
Licenciatura em Física - UNESP

**1999/2001** Curso de Pós-Graduação em Física nível de Mestrado na  
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá  
da UNESP

*A memória de minha avó Iolanda Regina, que se quis  
aproveitar a vida pela vida, com coragem e amor, no  
seu tempo vivendo e nos meus dias por caminhos  
em minha vida.*

## AGRADECIMENTOS

A minha avózinha, Prof. Dr.<sup>a</sup> Maria Cecília Zanetti pela orientação dedicada que me proporcionou, pelo apoio e principalmente pela grande amizade e atenção oferecida.

Ao Prof. Dr. Roldão de Moraes pelo incentivo constante e pelas encorajadoras, e ainda pelo jeito gentil e amigo com que me trata.

Ao Prof. Dr. Maurício Zanetti pela disposição em aceitar durante espontaneamente na área de informática.

Aos amigos Lili Fernanda, Asten e Angelo pela amizade, colaboração em momentos difíceis e pelos bons momentos de convivência.

Ao meu irmão Eduardo pela grande exemplo de vida que me inspira a vencer, por todo seu apoio e principalmente o amor que me dedica.

Aos meus pais Celso e Gelza, pois são os responsáveis pela minha existência, que sempre ser para mim um motivo de grande orgulho e pelo amor que me deu muita vida.

E a Deus agradeço tudo que me deu e me dá, pois sem ele nada seria possível.

**A memória de meus avós José e Regina, com os quais aprendi a lutar pela vida com coragem e amor, ao meu irmão Eduardo e aos meus pais por existirem em minha vida.**



## AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, *Prof. Dr<sup>a</sup>. Maria Cecília Zanardi* pela orientação dedicada que me proporcionou, pelo apoio e principalmente pela grande amizade e atenção oferecida.

Ao *Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes* pelo incentivo constante e idéias esclarecedoras, e ainda pelo jeito gentil e amigo com que nos trata.

Ao *Prof. Dr. Maurício Zanardi* pela disposição em esclarecer dúvidas especialmente na área de informática.

Aos amigos *Luís Fernando, Aurea e Angelo* pela amizade, colaboração nos momentos difíceis e pelos bons momentos de convivência.

Ao meu irmão *Eduardo* pelo grande exemplo de vida que me incentiva a crescer, por todo seu apoio e principalmente o amor que me dedica.

Aos meus pais *Celeste e Getulio*, pois são os responsáveis pela minha luta em querer sempre ser para eles um motivo de grande orgulho e pelo amor presente em minha vida.

E a Deus agradeço tudo isso, por minha vida, por me fazer capaz de vencer mais uma barreira.





**Este trabalho contou com o apoio financeiro da entidade:**

**Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES - bolsa  
concedida de demanda social**

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS

SIMBIOLOGIA

RESUMO

ABSTRACT

1- INTRODUÇÃO

2- REVISÃO DE LITERATURA

3- EQUAÇÕES DO MOVIMENTO ROTACIONAL E O MODELO DO  
TORQUE DE PRESSÃO DE RADIAÇÃO

3.1 - Equações do Movimento Rotacional

3.2 - Modelo do Torque de Pressão de Radiação Solar

3.2.1 - Componentes do Torque para uma Seção de Falsa Área

3.2.2 - Componentes do Torque para um Sólido

4- FUNÇÃO SOMBRA DA TERRA

4.1 - Comentários Iniciais

4.2 - Função Sombra Geométrica

4.2.1 - Trajetória do Raio de Luz e sua Geometria

4.2.2 - Caso da Sombra

4.2.3 - Ângulo de "Visão" do Centro do Sol

### APRENDIZADO

Interrogativo ser  
na aventura  
de dobrar  
uma esquina  
Medo!

O assombro do desconhecido  
em sua eterna luta  
contra a sede de razão.

E aí,  
mais um passo, mais um passo...  
quebram-se barreiras!  
Dobrada a esquina,  
vislumbra-se uma longa avenida  
e mais a frente, outra esquina!

Eduardo Cabette

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS

SIMBOLOGIA

RESUMO

ABSTRACT

|                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1 - INTRODUÇÃO.....                                                                       | 27 |
| 2 - REVISÃO DE LITERATURA .....                                                           | 30 |
| 3 - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO ROTACIONAL E O MODELO DO<br>TORQUE DE PRESSÃO DE RADIAÇÃO ..... | 35 |
| 3.1 - Equações do Movimento Rotacional .....                                              | 35 |
| 3.2 - Modelo do Torque de Pressão de Radiação Solar .....                                 | 40 |
| 3.2.1 - Componentes do Torque para um Satélite de Forma Arbitrária .....                  | 42 |
| 3.2.2 - Componentes do Torque para um Satélite Cilíndrico .....                           | 44 |
| 4 - FUNÇÃO SOMBRA DA TERRA .....                                                          | 48 |
| 4.1 - Comentários Iniciais .....                                                          | 48 |
| 4.2 - Função Sombra Geométrica .....                                                      | 50 |
| 4.2.1 - Trajetória do Raio de Luz e sua Geometria .....                                   | 50 |
| 4.2.2 - Cones de Sombra .....                                                             | 52 |
| 4.2.3 - Ângulo de "Visão" do Centro do Sol .....                                          | 62 |

|                                                                                                                        |         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 4.2.4 - A Função Sombra Geométrica .....                                                                               | 63      |
| 4.3 - Função Sombra Física .....                                                                                       | 65      |
| 4.3.1 - Parâmetros Envolvidos no Conceito da Função Sombra Física .....                                                | 65      |
| 4.3.2 - Análise da Função Sombra Física .....                                                                          | 67      |
| <br>5 - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DA FUNÇÃO SOMBRA<br>GEOMÉTRICA .....                                                    | <br>73  |
| 5.1 - Características do Satélite Artificial .....                                                                     | 73      |
| 5.2 - Mapeamento da Função Sombra Geométrica .....                                                                     | 74      |
| <br>6 - ABORDAGEM SEMI-ANALÍTICA DO MOVIMENTO ROTACIONAL<br>DE UM SATÉLITE ARTIFICIAL .....                            | <br>84  |
| 6.1 - Comentários Iniciais .....                                                                                       | 84      |
| 6.2 - Movimento Rotacional Livre de Torques Externos .....                                                             | 84      |
| 6.3 - Solução Analítica para o Satélite Iluminado .....                                                                | 86      |
| 6.4 - Abordagem Semi-Analítica .....                                                                                   | 87      |
| 6.5 - Simulação Numérica da Abordagem Semi-Analítica .....                                                             | 89      |
| 6.5.1 - Movimento Rotacional Livre de Torques Externos e Movimento<br>Rotacional com TPRS com Satélite Iluminado ..... | 91      |
| 6.5.2 - Movimento Rotacional com TPRS com e sem Função Sombra .....                                                    | 96      |
| 6.6 - Movimento Rotacional com TPRS com Função Sombra Incluindo a<br>Função Sombra Física .....                        | 105     |
| <br>7 - CONCLUSÕES .....                                                                                               | <br>108 |
| <br>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....                                                                                   | <br>112 |

## LISTA DE FIGURAS

### APÊNDICE 1 - Variações Periódicas e Seculares nas Variáveis de Andoyer Devido ao Torque de Pressão de Radiação Solar ..... 116

|                                                                                                                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| FIGURA 1: Sistema principal $(O, X, Y, Z)$ e Sistema do satélite $(O', x, y, z)$ ..... 37                                                                     | 37 |
| FIGURA 2: Sistema principal $(O, X, Y, Z)$ , Sistema do satélite $(O', x, y, z)$ , Sistema de momento angular $(O', p, q, r)$ e Variáveis de Andoyer ..... 38 | 38 |
| FIGURA 3: Incidência da luz sobre o elemento de superfície $dS$ ..... 41                                                                                      | 41 |
| FIGURA 4: Posicionamento do CM do satélite e do elemento da superfície com relação ao Sol ..... 43                                                            | 43 |
| FIGURA 5: Superfícies do satélite cilíndricas ..... 44                                                                                                        | 44 |
| FIGURA 6: Focos de transição na trajetória do satélite no redor da Terra ..... 49                                                                             | 49 |
| FIGURA 7: Comparação de merúdios para a função senoidal ..... 49                                                                                              | 49 |
| FIGURA 8: Trajetória da luz e sua geometria ..... 50                                                                                                          | 50 |
| FIGURA 9: Cones de sombra ..... 52                                                                                                                            | 52 |
| FIGURA 10: Cone de sombra $A_1$ que representa a região de sombra ..... 53                                                                                    | 53 |
| FIGURA 11: Cone de sombra $A_2$ que representa a região de penumbra ..... 54                                                                                  | 54 |
| FIGURA 12: Cone de sombra $A_3$ que representa a região iluminada ..... 54                                                                                    | 54 |
| FIGURA 13: Posição do satélite $P(x, y, z)$ entre o cone de sombra $A_1$ e $A_2$ ..... 56                                                                     | 56 |
| FIGURA 14: Geometria da órbita do satélite entre os cones $A_1$ e $A_2$ ..... 57                                                                              | 57 |
| FIGURA 15: Sistema Orbital $(O', p, q, r)$ , Sistema Equatorial $(O, X, Y, Z)$ e elementos orbitais $a, Q, w, e, i$ ..... 59                                  | 59 |
| FIGURA 16: Sistema Equatorial $(O, X, Y, Z)$ , Sistema da Elíptica $(O, x', y', z')$ e obliquidade da Elíptica $(\epsilon)$ ..... 60                          | 60 |
| FIGURA 17: Sistema Terra-Sol $(O, X, Y, Z)$ , Sistema Elíptico $(O, x', y', z')$ e a longitude do Sol $Q_{\odot}$ ..... 61                                    | 61 |



## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                         |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>FIGURA 1:</b> Sistema principal ( $Oxyz$ ), Sistema do satélite ( $OXYZ$ ) e os Ângulos de Euler ( $\varphi, \theta, \psi$ ) .....                   | 37 |
| <b>FIGURA 2:</b> Sistema principal ( $Oxyz$ ), Sistema do satélite ( $OXYZ$ ), Sistema do momento angular ( $Ox_my_mz_m$ ) e Variáveis de Andoyer ..... | 38 |
| <b>FIGURA 3:</b> Incidência da luz sobre o elemento de superfície $dS$ .....                                                                            | 41 |
| <b>FIGURA 4:</b> Posicionamento do CM do satélite e do elemento de superfície com relação ao Sol .....                                                  | 43 |
| <b>FIGURA 5:</b> Superfícies do satélite cilíndrico .....                                                                                               | 44 |
| <b>FIGURA 6:</b> Fases de transição na trajetória do satélite ao redor da Terra .....                                                                   | 49 |
| <b>FIGURA 7:</b> Comparação de modelos para a função sombra .....                                                                                       | 49 |
| <b>FIGURA 8:</b> Trajetória do raio de luz e sua geometria .....                                                                                        | 50 |
| <b>FIGURA 9:</b> Cones de sombra .....                                                                                                                  | 52 |
| <b>FIGURA 10:</b> Cone de sombra $k_i$ que representa a região de sombra .....                                                                          | 53 |
| <b>FIGURA 11:</b> Cone de sombra $k_e$ que representa a região de penumbra .....                                                                        | 54 |
| <b>FIGURA 12:</b> Cone de sombra $k_E$ que representa a região iluminada.....                                                                           | 54 |
| <b>FIGURA 13:</b> Posição do satélite $P(t,x,y,z)$ entre o cone de sombra $k_i$ e $k_e$ .....                                                           | 56 |
| <b>FIGURA 14:</b> Geometria da órbita do satélite entre os cones $k_i$ e $k_e$ .....                                                                    | 57 |
| <b>FIGURA 15:</b> Sistema Orbital ( $Ox_oy_oz_o$ ), Sistema Equatorial ( $Ox_eY_eZ_e$ ) e elementos orbitais $v, \Omega, w$ e $I'$ .....                | 59 |
| <b>FIGURA 16:</b> Sistema Equatorial ( $Ox_eY_eZ_e$ ), Sistema da Eclíptica ( $Ox_eY_eZ_e$ ) e obliquidade da Eclíptica ( $\epsilon$ ) .....            | 60 |
| <b>FIGURA 17:</b> Sistema Terra-Sol ( $Ox_sy_sz_s$ ), Sistema Eclíptico ( $Ox_eY_eZ_e$ ) e a longitude do Sol ( $\lambda_o$ ) .....                     | 61 |

|                                                                                                                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>FIGURA 18:</b> Por do Sol visto do satélite (Ângulo $\Delta\chi$ ) .....                                                                                                           | 62  |
| <b>FIGURA 19:</b> Parâmetros da função sombra física .....                                                                                                                            | 66  |
| <b>FIGURA 20:</b> Gráfico da função sombra física obtido a partir dos valores da tabela 3 .....                                                                                       | 72  |
| <b>FIGURA 21:</b> Gráfico da função sombra geométrica obtido através dos valores da tabela 4 .....                                                                                    | 75  |
| <b>FIGURA 22:</b> Gráfico da função sombra geométrica obtido através dos valores da tabela 5 .....                                                                                    | 76  |
| <b>FIGURA 23:</b> Gráfico da função sombra geométrica para um período orbital .....                                                                                                   | 76  |
| <b>FIGURA 24:</b> Solução analítica para as variáveis de Andoyer $l_1, l_2 =$ variável angular, $L_2, L_3 =$ variável métrica .....                                                   | 93  |
| <b>FIGURA 25:</b> Solução analítica para a variável de Andoyer $l_1 =$ variável angular .....                                                                                         | 94  |
| <b>FIGURA 26:</b> Variação nas variáveis de Andoyer, em que: $\Delta L_2 = L_2 - L_{20}$ , $\Delta L_3 = L_3 - L_{30}$ .....                                                          | 94  |
| <b>FIGURA 27:</b> Variação nas variáveis de Andoyer, em que: $\Delta l_1 = l_1 - l_{10}$ , $\Delta l_2 = l_2 - l_{20} - \frac{L_{20}}{A} \cdot t$ e $\Delta l_3 = l_3 - l_{30}$ ..... | 95  |
| <b>FIGURA 28:</b> Gráfico da variável métrica $L_3$ que ilustra uma variação periódica de longo período .....                                                                         | 96  |
| <b>FIGURA 29:</b> Variações da variável angular $l_1$ , $\Delta l_1 = l_1 - l_{10}$ .....                                                                                             | 97  |
| <b>FIGURA 30:</b> Variações da variável angular $l_2$ , $\Delta l_2 = l_2 - l_{20} - (L_{20}/A) \cdot t$ .....                                                                        | 98  |
| <b>FIGURA 31:</b> Variações da variável angular $l_3$ , $\Delta l_3 = l_3 - l_{30}$ .....                                                                                             | 99  |
| <b>FIGURA 32:</b> Variações da variável métrica $L_3$ , $\Delta L_3 = L_3 - L_{30}$ .....                                                                                             | 100 |
| <b>FIGURA 33:</b> Variações da variável métrica $L_2$ , $\Delta L_2 = L_2 - L_{20}$ .....                                                                                             | 101 |
| <b>FIGURA 34:</b> Comportamento da variável $l_1$ na vizinhança da 1ª e 2ª entrada na penumbra: $\Delta l_1 = l_1 - l_{10}$ .....                                                     | 103 |



|                                                                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>FIGURA 35:</b> Comportamento da variável $l_2$ na vizinhança da 1ª e 2ª entrada na penumbra: delta $l_2 = l_2 - l_{20} - (L_{20}/A) \cdot t$ ..... | 103 |
| <b>FIGURA 36:</b> Comportamento da variável $l_3$ na vizinhança da 1ª e 2ª entrada na penumbra: delta $l_3 = l_3 - l_{30}$ .....                      | 104 |
| <b>FIGURA 37:</b> Comportamento da variável $L_2$ na vizinhança da 1ª e 2ª entrada na penumbra: delta $L_2 = L_2 - L_{20}$ .....                      | 104 |
| <b>FIGURA 38:</b> Comportamento da variável $L_3$ na vizinhança da 1ª e 2ª entrada na penumbra: delta $L_3 = L_3 - L_{30}$ .....                      | 105 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                                                                                      |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>TABELA 1:</b> Valores extremos da função sombra geométrica .....                                                                                  | 65  |
| <b>TABELA 2:</b> Valores necessários para o cálculo da função sombra física,<br>com $R_T = 6400 \text{ km}$ e $M(0^\circ) = 1$ .....                 | 71  |
| <b>TABELA 3:</b> Valores obtidos através dos dados da tabela 2 .....                                                                                 | 72  |
| <b>TABELA 4:</b> Valores da Função Sombra Geométrica (Psig) obtidos para<br>o 1º intervalo de tempo da passagem pela penumbra .....                  | 75  |
| <b>TABELA 5:</b> Valores da Função Sombra Geométrica (Psig) obtidos para<br>o 2º intervalo de tempo da passagem pela penumbra .....                  | 75  |
| <b>TABELA 6:</b> Resultados de algumas simulações, para diferentes<br>inclinações e semi-eixos .....                                                 | 78  |
| <b>TABELA 7:</b> Características orbitais do satélite .....                                                                                          | 78  |
| <b>TABELA 8:</b> Intervalos de duração da penumbra, sombra e região<br>iluminada para os satélites com semi-eixo igual a 7000 km<br>(série A) .....  | 79  |
| <b>TABELA 9:</b> Intervalos de duração da penumbra, sombra e região<br>iluminada para os satélites com semi-eixo igual a 8000 km<br>(série B) .....  | 80  |
| <b>TABELA 10:</b> Intervalos de duração da penumbra, sombra e região<br>iluminada para os satélites com semi-eixo igual a 9000 km<br>(série C) ..... | 81  |
| <b>TABELA 11:</b> Intervalos de duração da penumbra, sombra e região<br>iluminada para os satélites com semi-eixo igual a<br>10000km (série D) ..... | 82  |
| <b>TABELA 12:</b> Magnitudes da influência do TPRS para o satélite<br>iluminado com e sem a inclusão da função<br>sombra .....                       | 102 |

**TABELA 13:** Comparação da magnitude da influência do TPRS  
para  $\psi_f = 10^{-8}$ ,  $\psi_f = 10^{-5}$  e  $\psi_f = 1$  na 1ª passagem  
pela penumbra ..... 106

**TABELA 14:** Comparação da magnitude da influência do TPRS  
para  $\psi_f = 10^{-8}$ ,  $\psi_f = 10^{-5}$  e  $\psi_f = 1$  na 2ª passagem  
pela penumbra ..... 107



## LISTA DE ABREVIATURAS

|       |                                                  |
|-------|--------------------------------------------------|
| MRLTE | - Movimento Rotacional Livre de Torques Externos |
| P2C   | - Problema de Dois Corpos                        |
| PO    | - Período Orbital                                |
| TPRS  | - Torque de Pressão de Radiação Solar            |



## LISTA DE SÍMBOLOS

|              |                                                                                                                               |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $A, B, C$    | momentos principais de inércia do satélite                                                                                    |
| (A)          | ponto que se localiza mais próximo a superfície da Terra, onde a altitude em relação a superfície da Terra é $h$              |
| $a$          | semi-eixo maior da órbita do satélite ao redor da Terra                                                                       |
| $a_0$        | raio do Sol                                                                                                                   |
| $\alpha_0^o$ | ângulo sobre o qual é visto o raio do Sol do ponto $P$                                                                        |
| $b_0$        | pressão na superfície da Terra                                                                                                |
| $b_h$        | pressão a uma altura $h$ da superfície da Terra                                                                               |
| $d$          | distância entre $P(x,y,z)$ e o ponto que tangencia a esfera de raio $R_0$                                                     |
| $d_1$        | expoente da expressão da função sombra física que leva em conta a influência da refração dos raios solares causando dispersão |
| $d_2$        | expoente da expressão da função sombra física que leva em conta a influência da absorção atmosférica                          |
| $d_3$        | expoente da expressão da função sombra física que leva em conta a influência da difusão da luz                                |
| $d_4$        | expoente da expressão da função sombra física que leva em conta a influência da camada de ozônio                              |
| $dS$         | elemento de área do satélite                                                                                                  |
| $D$          | superfície inteira do disco solar                                                                                             |
| $\Delta D$   | superfície da parte do disco solar coberta pela Terra visto do satélite                                                       |
| $e$          | excentricidade da órbita do satélite ao redor da Terra                                                                        |
| $E$          | iluminação de saída dos raios solares da atmosfera da Terra                                                                   |
| $E^*$        | iluminação de entrada dos raios solares na atmosfera da Terra                                                                 |

|                                       |                                                                                                          |
|---------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $F$                                   | força de pressão de radiação solar                                                                       |
| $F^*$                                 | força de pressão de radiação solar quando o satélite está iluminado                                      |
| $H$                                   | Hamiltoniana do problema conservativo                                                                    |
| $h_s$                                 | altura do satélite                                                                                       |
| $h$                                   | altura de 0 a 100 km da superfície da Terra, que se considera a atmosfera terrestre                      |
| $\Delta h_h$                          | variação de altura devido a refração                                                                     |
| $\Delta h_0$                          | variação de altura devido a refração para $h = 0$                                                        |
| $I$                                   | inclinação do plano perpendicular ao vetor momento angular de rotação com relação ao plano $OXY$         |
| $I'$                                  | inclinação da órbita do satélite ao redor da Terra                                                       |
| $J$                                   | inclinação do plano perpendicular ao vetor momento angular de rotação com relação ao plano $Oxy$         |
| $k_i$                                 | cone na região de sombra                                                                                 |
| $k_e$                                 | cone na região de penumbra                                                                               |
| $k_E$                                 | cone na região iluminada                                                                                 |
| $K(R)$                                | pressão de radiação solar por $m^2$ a uma distância $R$ do elemento de superfície $dS$ e o Sol           |
| $L$                                   | Função Lagrangeana                                                                                       |
| $\delta L_k$                          | variação das variáveis métricas de Andoyer $L_2$ e $L_3$                                                 |
| $\delta l_i$                          | variação das variáveis angulares de Andoyer $l_1, l_2, l_3$                                              |
| $L_i, l_i, i=1,2,3$                   | Variáveis de Andoyer que descrevem o movimento rotacional                                                |
| $\bar{L}_{i0}, \bar{l}_{i0}, i=1,2,3$ | condições iniciais para as variáveis $L_i, l_i$                                                          |
| $L_2$                                 | vetor momento angular de rotação                                                                         |
| $M$                                   | massa do satélite                                                                                        |
| $M$                                   | anomalia média                                                                                           |
| $M(90^\circ)$                         | caminho equivalente do raio na camada homogênea numa altura de 7,99 km e distância zenital de $90^\circ$ |



|                                  |                                                                                                                               |
|----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $n$                              | movimento médio                                                                                                               |
| $\bar{n}_{10}, \bar{n}_{20}$     | movimento médio das variáveis $l_1$ e $l_2$ respectivamente relacionados com o movimento rotacional livre de torques externos |
| $\bar{n}_{j0}, \Delta \bar{n}_i$ | coeficientes lineares associados com o problema livre de torques                                                              |
| $N$                              | torque não-conservativo                                                                                                       |
| $N_x, N_y, N_z$                  | componentes do torque no sistema principal                                                                                    |
| $\mathbf{n}$                     | vetor unitário na direção normal a superfície do satélite                                                                     |
| $Oxyz$                           | sistema principal                                                                                                             |
| $OXYZ$                           | sistema do satélite                                                                                                           |
| $Ox'y'z'$                        | sistema intermediário para relacionar o sistema do satélite com o sistema principal de inércia                                |
| $Ox_my_mz_m$                     | sistema do momento angular                                                                                                    |
| $Ox_Sy_Sz_S$                     | sistema Terra-Sol                                                                                                             |
| $Ox_Oy_Oz_O$                     | sistema orbital                                                                                                               |
| $Ox_eY_eZ_e$                     | sistema Equatorial                                                                                                            |
| $Ox_Ey_Ez_E$                     | sistema da Eclíptica                                                                                                          |
| $Ox''y''z''$                     | sistema intermediário para relacionar o sistema da Eclíptica com o sistema Terra-Sol                                          |
| $P(t, x, y, z)$                  | ponto da órbita em que se encontra o satélite                                                                                 |
| $P_{90, h}$                      | ângulo de refração na altura $h$                                                                                              |
| $P_{90}$                         | ângulo de refração para $h = 0$                                                                                               |
| $p$                              | raio de luz se propagando de um ponto arbitrário do Sol                                                                       |
| $p_1, p_2$                       | retas tangentes a esfera de raio $R_h$                                                                                        |
| $P_i, S_i$                       | parcelas que dependem das componentes dos torques no sistema principal                                                        |
| $PO$                             | Período Orbital                                                                                                               |
| $Q_j$                            | parcela referente a perturbações que não derivam de um                                                                        |



|                          |                                                                                             |
|--------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{R}'$            | vetor do centro de massa do satélite ao Sol                                                 |
| $\mathbf{R}$             | vetor do Sol com relação ao elemento de área $dS$                                           |
| $R$                      | matriz rotação                                                                              |
| $R_1$                    | matriz rotação que relaciona o sistema orbital com o sistema Equatorial                     |
| $R_2$                    | matriz rotação que relaciona o sistema Equatorial com o sistema Eclíptico                   |
| $R_3$                    | matriz rotação entre o sistema Eclíptico e o sistema Terra-Sol                              |
| $\mathbf{r}$             | raio vetor do sistema Terra-Sol                                                             |
| $\mathbf{r}'$            | vetor posição do elemento de área $dS$ com relação ao centro de massa                       |
| $r_0$                    | distância média Terra-Sol                                                                   |
| $R_0^o$                  | ângulo sobre o qual é visto o raio da esfera substituta do ponto $P$                        |
| $R_0$                    | raio da esfera substituta para $h = h_0$                                                    |
| $R_T$                    | raio da Terra                                                                               |
| $R_h$                    | raio da esfera substituta na altura $h$                                                     |
| $S_1$                    | superfície circular do satélite                                                             |
| $S_2$                    | superfície cilíndrica do satélite                                                           |
| $t_0$                    | instante inicial                                                                            |
| $t_{ep1}, t_{ep2}$       | instante de entrada na 1ª e 2ª passagem pela penumbra                                       |
| $t_{sp1}, t_{sp2}$       | instante de saída da 1ª e 2ª passagem pela penumbra                                         |
| $t_{es}$                 | instante de entrada na sombra                                                               |
| $t_{ss}$                 | instante de saída da sombra                                                                 |
| $t_{el}$                 | instante de entrada na região iluminada                                                     |
| $t_{sl}$                 | instante de saída da região iluminada                                                       |
| $T$                      | energia cinética de rotação                                                                 |
| $T_{1l}, T_{2l}, T_{3l}$ | equivalem a 1ª coluna da matriz transformação entre o sistema orbital e o sistema principal |

|                  |                                                                                     |
|------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Delta T$       | intervalo de tempo de duração da passagem em cada região                            |
| $\mathbf{u}$     | vetor unitário na direção de incidência do raio solar                               |
| $V$              | energia potencial                                                                   |
| $x, y, z$        | componentes do vetor posição $\mathbf{r}$ no sistema Terra-Sol                      |
| $\alpha$         | ângulo formado pelo raio de luz $p$ e o eixo que conecta Terra-Sol (eixo da sombra) |
| $\alpha_i$       | ângulo relacionado com a região de sombra                                           |
| $\alpha'_i$      | ângulo auxiliar utilizado no cálculo de $\alpha_i$                                  |
| $\alpha_e$       | ângulo relacionado com a região de penumbra                                         |
| $\alpha'_e$      | ângulo auxiliar utilizado no cálculo de $\alpha_e$                                  |
| $\alpha_E$       | ângulo relacionado com a região iluminada                                           |
| $\alpha_O$       | ascensão reta do Sol                                                                |
| $\bar{\alpha}_O$ | ascensão reta do Sol no instante inicial                                            |
| $\beta$          | coeficiente de absorção                                                             |
| $\delta_O$       | declinação do Sol                                                                   |
| $\bar{\delta}_O$ | declinação do Sol no instante inicial                                               |
| $\varepsilon$    | obliquidade da Eclíptica                                                            |
| $\lambda$        | comprimento de onda da luz em $\mu\text{m}$                                         |
| $\lambda_O$      | longitude do Sol                                                                    |
| $v$              | anomalia verdadeira                                                                 |
| $\psi$           | função sombra da Terra                                                              |
| $\psi_g$         | função sombra geométrica                                                            |
| $\psi_f$         | função sombra física                                                                |
| $\psi_{f1}$      | função sombra física relacionada com a influência da refração                       |
| $\psi_{f2}$      | função sombra física relacionada com a absorção atmosférica                         |
| $\psi_{f3}$      | função sombra física relacionada com influência da difusão da luz                   |
| $\psi_{f4}$      | função sombra física relacionada com o efeito da camada de ozônio                   |

|                         |                                                                              |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $\psi_T, \psi_O$        | ângulos relacionados respectivamente com o centro da Terra e o centro do Sol |
| $\Delta\chi$            | ângulo de visão do Sol visualizado do satélite                               |
| $\sigma$                | raio do satélite                                                             |
| $\Omega$                | longitude do nodo ascendente                                                 |
| $w$                     | argumento do perigeu                                                         |
| $\theta$                | ângulo entre o raio incidente e a normal a superfície do satélite            |
| $\theta, \varphi, \psi$ | ângulos de Euler que relacionam o sistema principal com o sistema orbital    |



**CABETTE, R. E. S.** *A Sombra da Terra e a Propagação da Atitude de Satélites Artificiais*. Guaratinguetá, 2001. 131p. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia, Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

## **RESUMO**

O estudo do movimento rotacional de um satélite artificial é realizado, considerando-se o torque de pressão de radiação solar e a influência da sombra da Terra. As equações do movimento rotacional são dadas pelo formalismo Hamiltoniano, utilizando as variáveis de Andoyer para descrever o movimento rotacional do satélite. Um modelo anteriormente desenvolvido para o torque de pressão de radiação solar é utilizado, com suas componentes obtidas nos eixos principais do satélite, considerando um satélite de forma circular cilíndrica. No modelo utilizado para a função sombra da Terra, três regiões são analisadas: região totalmente iluminada, região de penumbra e região de sombra. Este modelo considera fatores geométricos, como posição mútua Sol-Terra-satélite, a forma cônica da sombra e a refração dos raios de luz ao atravessarem a atmosfera terrestre. Fatores físicos como os efeitos da difusão da luz devido à refração, à absorção atmosférica, à difusão da luz e ao efeito do ozônio são também incluídos no modelamento da função sombra. Um processo semi-analítico é aplicado. Neste processo a função sombra é obtida numericamente e uma solução analítica conhecida é utilizada quando o satélite não se encontra na sombra da Terra. Quando o satélite está iluminado, os resultados mostram que as variáveis angulares possuem variações lineares e periódicas devido ao torque de pressão de radiação solar, enquanto as variáveis métricas sofrem apenas variações periódicas.



**PALAVRAS-CHAVE:** Movimento Rotacional, Satélites Artificiais, Torque de Pressão de Radiação Solar, Variáveis de Andoyer, Função Sombra da Terra.

## ABSTRACT

A study of the rotation of an artificial satellite is developed, considering the solar radiation pressure torque and the influence of the Earth's shadow. The Hamiltonian formulation and the Andoyer's variables are used to describe the system of equations for the satellite rotational motion. A satellite of spherical cylindrical shape is considered here and the solar radiation pressure torque components are expressed in the satellite's principal axes of inertia. The developed model for the Earth's shadow function includes three regions: full sun, penumbra and umbra. This model considers geometrical parameters, such as the mutual position of Sun, Earth and satellite, the shape of the celestial bodies surfaces and the effect of refraction of the light rays when they pass through the atmosphere. Physical factors such as light diffusion due to reflection, atmospheric absorption, light diffusion and the effect of ozone are also taken into account. A semi-analytical solution process is applied. In this procedure the shadow function is obtained numerically and a known analytical solution is used when the satellite isn't in the Earth's shadow. When the satellite is illuminated, the results show that the angular velocities have linear and periodic variations and the solar radiation pressure torque and the Andoyer variables suffer only periodic variations.

**CABETTE, R. E. S.** *The Earth's Shadow and the Spacecraft's Attitude Propagation*. Guaratinguetá, 2001. 131p. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia, Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

## **ABSTRACT**

A study of the rotational of an artificial satellite is developed, considering the solar radiation pressure torque and the influence of the Earth's shadow. The Hamiltonian formalism and the Andoyer's variables are used to determine the system of equations for the satellite rotational motion. A satellite of circular cylinder shape is considered here and the solar radiation pressure torque components are expressed in the satellite's principal axes of inertia. The developed model for the Earth's shadow function includes three regions: full light, penumbra e umbra. This model considers geometrical parameters, such as the mutual position of Sun, Earth and satellite, the shape of the conical shadow surface and the effect of refraction of the light rays when they pass through the atmosphere. Physical factors such as light diffusion due to refraction, atmospheric absorption, light diffusion and the effect of ozone are also taken account. A semi-analytical solution process is applied. In this procedure the shadow function is obtained numerically and a known analytical solution is used when the satellite isn't in the Earth's shadow. When the satellite is illuminated, the results show that the angular variables have linear and periodic variation due the solar radiation pressure torque while the metric variables suffer only periodic variations.

**KEY WORDS:** Rotational Motion, Artificial Satellites, Solar Radiation Pressure Torque, Andoyer's Variables, Earth's Shadow Function

O estudo do movimento de rotação de corpos rígidos e sua influência no movimento de satélites artificiais vem sendo desenvolvido e aprimorado por pesquisadores brasileiros há mais de duas décadas. Modelos matemáticos para descrever a rotação de satélites e o torque de pressão de radiação solar e a influência da sombra da Terra são alguns dos tópicos abordados. Com isso, uma solução analítica ou numérica para o movimento de satélites artificiais é possível, permitindo a determinação de sua posição e velocidade em qualquer instante.

De acordo com os trabalhos de alguns autores de pesquisa em rotação solar (TPRS) e sua influência no movimento de satélites artificiais, os efeitos da radiação solar são considerados. No entanto, devido à complexidade da física envolvida, a modelagem do movimento de satélites artificiais é feita por meio de equações diferenciais não lineares. Para isso, são utilizadas técnicas de aproximação, como a expansão em séries de potências, para obter soluções analíticas ou numéricas que descrevem o movimento rotacional de satélites considerando a influência da sombra da Terra.

Neste trabalho é utilizado o método de Kahan (1988) para a solução de equações de movimento rotacional de satélites artificiais. O método de Kahan é baseado na solução de equações de movimento rotacional de satélites artificiais, considerando a influência da radiação solar e a sombra da Terra. O método de Kahan é baseado na solução de equações de movimento rotacional de satélites artificiais, considerando a influência da radiação solar e a sombra da Terra. O método de Kahan é baseado na solução de equações de movimento rotacional de satélites artificiais, considerando a influência da radiação solar e a sombra da Terra.

A solução de equações de movimento rotacional de satélites artificiais é feita por meio de equações diferenciais não lineares. Para isso, são utilizadas técnicas de aproximação, como a expansão em séries de potências, para obter soluções analíticas ou numéricas que descrevem o movimento rotacional de satélites considerando a influência da radiação solar e a sombra da Terra.



## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

O estudo da força de pressão de radiação solar e suas influências no movimento de satélites artificiais vem sendo desenvolvido e aprimorado por vários pesquisadores. Modelamentos cada vez mais precisos para descrever a influência da sombra da Terra no torque e força devido à pressão de radiação solar têm sido apresentados. Com isso uma solução analítica ou numérica para o sistema de equações que descreve o movimento destes satélites pode ser determinada também com mais precisão.

Da mesma forma, trabalhos onde o torque de pressão de radiação solar (TPRS) e sua influência na atitude de um satélite artificial são levados em conta estão sendo apresentados. Na maioria destes trabalhos a preocupação envolve o modelamento do torque atuante sobre o satélite artificial e a determinação de soluções analíticas e numéricas para sistema de equações dinâmicas que descreve o movimento rotacional do satélite, considerando-se a região de sombra da Terra.

Neste trabalho é introduzida a função sombra de Kabelac (1988) nas equações do movimento rotacional de um satélite artificial cilíndrico e um processo semi-analítico, similar a Vilhena de Moraes & Zanardi (1997), é aplicado para analisar o comportamento das variáveis de Andoyer que descrevem o movimento rotacional do satélite artificial. No processo semi-analítico, a solução analítica de Zanardi & Vilhena de Moraes (1994) é utilizada nas regiões em que o satélite está iluminado.

A escolha da utilização das variáveis de Andoyer para descrever a atitude do satélite se deve ao fato de tais variáveis possuírem um significado físico, das equações do movimento poderem ser apresentadas na forma canônica e uma solução analítica ser conhecida quando o torque de pressão de radiação solar é introduzido nas equações. Tais variáveis têm sido utilizadas



tanto para a análise de propagação da atitude de satélites artificiais (Kinoshita, 1972,1992; Deprit, 1967; Zanardi, 1986) quanto para o controle de atitude (Lum & Bloch, 1999; Santos *et al.*, 1999 ; Zanardi *et al.*, 2000).

O objetivo principal deste trabalho é realizar a implementação numérica da função sombra de Kabelac (1988) e aplicar um processo semi-analítico semelhante ao de Vilhena de Moraes & Zanardi (1997) buscando encontrar um comportamento mais próximo do real para as variáveis de Andoyer, que são utilizadas para descrever o movimento rotacional do satélite artificial sob a influência do TPRS, considerando a sombra da Terra.

No Capítulo 2 é apresentado e comentado alguns trabalhos relacionados com a função sombra da Terra, o torque de pressão de radiação solar direta e soluções analíticas e semi-analíticas para o movimento rotacional de satélites artificiais com a influência do TPRS.

No Capítulo 3 são introduzidas as equações do movimento de um satélite artificial utilizando o formalismo Hamiltoniano e apresentado um modelo para o torque de pressão de radiação solar direta, considerando um satélite cilíndrico. A função sombra é introduzida nas equações que descrevem o movimento rotacional, uma vez que o torque só ocorre quando o satélite está iluminado considerando também a passagem pela penumbra.

O Capítulo 4 trata do modelo para a análise da função que descreve a influência da sombra da Terra sobre o movimento rotacional e translacional do satélite. Alguns fatores físicos e geométricos são considerados no modelo matemático utilizado para descrever a função sombra, permitindo analisar com detalhes a influência do torque de radiação solar na atitude do satélite. A análise é realizada durante toda órbita do satélite, considerando a passagem deste por três regiões: sombra, penumbra e totalmente iluminada.

No Capítulo 5, de acordo com parâmetros utilizados no modelo de Kabelac (1988) a função sombra geométrica é mapeada, de modo que se possa notar a passagem pela região de penumbra, para características do satélite artificial considerado.

No Capítulo 6 é apresentada uma solução analítica para o sistema de equações que descrevem o movimento de um satélite artificial sobre a influência do torque de pressão de radiação solar direta. Uma abordagem semi-analítica também é apresentada para obter a atitude do satélite sobre a influência do TPRS e da sombra da Terra. Os resultados obtidos na implementação numérica das soluções analíticas e semi-analíticas são apresentados, mostrando a ordem de grandeza da influência do TPRS sob as variáveis de Andoyer.

O último capítulo contém os comentários finais sobre o trabalho realizado.

No Apêndice 1 são apresentadas as variações periódicas e seculares nas variáveis de Andoyer devido ao torque de pressão de radiação solar.





## **CAPÍTULO 2**

### **REVISÃO DE LITERATURA**

Dentre os trabalhos relacionados com o torque de pressão de radiação solar (TPRS) e sua influência na atitude do satélite, são apresentados aqui aqueles que se relacionam com a abordagem a ser adotada neste trabalho.

Georgeovic (1973) apresenta um modelo do torque de pressão de radiação solar direta, admitindo que as características de reflexão da superfície do satélite e o valor da constante solar são conhecidos. Um sistema de referência fixo no satélite é escolhido, admitindo-se uma orientação arbitrária para o eixo de rotação do satélite. Encontra-se as componentes da força de radiação solar tanto para uma antena refletora parabólica como para um satélite cilíndrico. No entanto, não computa as componentes do torque, mas apenas apresenta uma expressão geral para a modelagem deste torque. Este modelo é utilizado neste trabalho, introduzindo as componentes do torque de radiação solar, desenvolvido por Zanardi (1989, 1993) para satélites com simetria cilíndrica, nas equações do movimento do satélite, juntamente com a função sombra.

Zanardi (1989) apresenta uma expressão geral para o torque de pressão de radiação solar direta para um satélite cilíndrico circular. O sistema inercial considerado é o sistema da Eclíptica e a relação entre os sistema inercial e o de eixos principais de inércia é dado em função da longitude do Sol e das variáveis de Andoyer. No caso, não é levado em conta os efeitos da sombra da Terra.

Em Zanardi (1991) o movimento de um satélite artificial sobre seu centro de massa é estudado considerando torques devido ao gradiente de



gravidade e à pressão de radiação solar direta. Um modelo para o torque de radiação solar é derivado para um satélite cilíndrico circular. Uma solução analítica é obtida pelo método de variação de parâmetros.

Zanardi (1994) desenvolve uma solução analítica para o sistema de equações descrevendo o movimento rotacional de um satélite artificial sobre a influência da pressão de radiação solar direta. É considerado um satélite de forma cilíndrica e o método para se obter a solução analítica é o método de Lagrange. As variáveis de Andoyer são utilizadas na descrição do movimento rotacional.

Lala & Sehnal (1969) desenvolvem uma teoria de movimento translacional de um satélite artificial afetado pela pressão de radiação solar, incluindo o efeito da sombra da Terra. São investigadas as perturbações de curto período na órbita de um satélite artificial, durante uma revolução do satélite em torno da Terra, considerando a posição da órbita do satélite constante em relação ao Sol. Um especial interesse é dado ao estudo da influência da sombra da Terra, a qual é considerada como um comutador e uma certa função Kappa é utilizada no modelamento da função sombra. Portanto, no modelo de Sehnal e Lala, a força de perturbação não é contínua. Uma teoria semi-analítica e uma aproximação para a função sombra são apresentadas para análise do semi-eixo maior e excentricidade.

Ferraz Mello (1972) propõem um modelo matemático para o estudo dos efeitos da pressão de radiação solar direta na órbita de um satélite artificial. As equações do movimento orbital são integrados utilizando-se o método de von Zeipel para eliminar os termos periódicos. A função sombra é definida como sendo igual a um quando o satélite está iluminado pelo Sol e igual a zero para o satélite na sombra da Terra. Esta função é definida pelo ângulo  $\lambda$ , formado entre direção geocêntrica do satélite e o pólo escuro da Terra. A função

sombra é desenvolvida em série de Fourier trigonométrica e, usando formulação Hamiltoniana, uma aproximação é apresentada para esta função.

Cornetti (1974) explorando o modelo matemático para a função sombra introduzida por Ferraz Mello (1972) calculou para o satélite Vanguard I, perturbações seculares e de longo período devido a pressão de radiação solar. É utilizado uma aproximação canônica obtida desconsiderando na função sombra termos de 2ª ordem.

Vilhena de Moraes (1975) utiliza o modelo analítico proposto por Ferraz Mello (1972) para estudar os efeitos da pressão de radiação solar direta e computar a ordem dos termos da perturbação de longo período em satélites do tipo balão (VANGUARD, PAGEOS). Nesta análise a função sombra é incluída e implementada numericamente. Os resultados concordam com aqueles obtidos por integração numérica das equações do movimento.

Vilhena de Moraes (1978) apresenta uma teoria semi-analítica para estudar os efeitos da pressão de radiação solar direta e do arrasto atmosférico sobre o movimento de um satélite artificial. A sombra da Terra é considerada utilizando-se a função sombra introduzida por Ferraz Mello (1972). Para construção e utilização desta teoria é elaborada uma biblioteca de subrotinas para computador que efetuam semi-analiticamente operações com séries de Poisson. Um programa que utilize estas subrotinas é construído para estudar as perturbações da órbita do satélite VANGUARD I.

Vilhena de Moraes (1981) desenvolve uma teoria semi-analítica para estudar o efeito da pressão de radiação solar direta e o arrasto atmosférico na órbita de satélites artificiais dando ênfase especial aos termos de acoplamento. Desprezando a força de pressão de radiação solar a solução obtida é comparada com a solução já conhecida de Brouwer e Hori (1959).



Kabelac (1988) fornece uma nova teoria para a função sombra. Nesta teoria são levados em conta os fatores geométricos, como posição mútua do Sol-Terra-satélite, a forma da superfície cônica da sombra e o efeito de refração, e ainda os fatores físicos, como a difusão da luz devido à refração, à absorção atmosférica, à difusão da luz e ao efeito do ozônio. Os resultados são comparados com medidas fotométricas do pôr-do-sol, como sendo observada do satélite. O estudo é feito incluindo a passagem do satélite pela luz do Sol, sombra e penumbra. Este é o modelo utilizado neste trabalho.

Numa primeira abordagem Vokrouhlicky *et al.* (1993) estudam o efeito perturbativo da força devido à pressão de radiação solar direta num satélite artificial, definindo um modelo físico para a função sombra, computando a intensidade do fluxo solar como função de um conjunto de raios refratados e atenuados incidentes na superfície do satélite. No segundo modelo de Vokrouhlicky *et al.* (1994), o vetor de fluxo radiativo é computado como um produto da magnitude do fluxo pela direção do fluxo. Ambos modelos exigem um esforço computacional maior que os demais modelos existentes para a análise da função sombra.

Hujsak (1994), em seu artigo faz uma abordagem geral ao modelo de força de radiação solar, enfatizando os diversos modelos exibidos para a função sombra da Terra.

Vilhena de Moraes & Zanardi (1997) propõem uma aproximação semi-analítica para o estudo do movimento rotacional de um satélite artificial sobre a influência do torque de radiação solar, levando em conta a influência da sombra da Terra. A sombra da Terra é introduzida nas equações do movimento rotacional como uma função dependente da longitude do Sol, da obliquidade da Eclíptica e parâmetros orbitais do satélite. Para mapearem e computarem essa função, quando o satélite não está iluminado, o torque de



radiação solar vale zero. A solução analítica é expressada em termos das variáveis de Andoyer e depende de propriedades físicas e geométricas do satélite.

Zanardi & Vilhena de Moraes (1999) apresentam o estudo do movimento rotacional de um satélite artificial considerando torques produzidos pelo gradiente de gravidade e pela pressão de radiação solar direta. Um satélite circular cilíndrico foi considerado e as variáveis de Andoyer foram utilizadas para descrever o movimento rotacional. Uma solução analítica foi obtida para o satélite iluminado e uma solução semi-analítica foi proposta para o satélite sob a influência da sombra da Terra.

### 3.1 - Equações de Movimento Rotacional

As equações de movimento rotacional perturbado de um satélite artificial podem ser obtidas se tomarmos condições iniciais dadas de forma como Lagrange (Fitzpatrick, 1970; Zanardi & Vilhena de Moraes, 1999).

Utilizando coordenadas generalizadas  $q_j$ , as equações de Lagrange associadas ao movimento rotacional são dadas por (Fitzpatrick, 1970):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \quad j=1,2,3. \quad (3)$$

## CAPÍTULO 3

### EQUAÇÕES DO MOVIMENTO ROTACIONAL E O MODELO DO TORQUE DE PRESSÃO DE RADIAÇÃO

Neste capítulo são introduzidas as equações do movimento de um satélite artificial utilizando o formalismo Hamiltoniano e apresenta-se um modelo para o torque de pressão de radiação solar direta, considerando uma forma cilíndrica para o satélite. A função sombra é introduzida nas equações que descrevem o movimento rotacional, uma vez que o torque só ocorre quando o satélite está iluminado. Neste caso a função sombra utilizada considera também a passagem do satélite pela penumbra.

#### 3.1 - Equações do Movimento Rotacional

As equações do movimento rotacional perturbado de um satélite artificial podem ser obtidas em forma canônica estendida através do formalismo lagrangeano (Fitzpatrick, 1970; Zanardi & Vilhena de Moraes, 1999).

Utilizando coordenadas generalizadas  $q_j$ , as equações de Lagrange associadas ao movimento rotacional são dadas por (Fitzpatrick, 1970):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, 2, 3, \quad (1)$$



em que a função Lagrangeana  $L$  é dada por:

$$L = T - V, \quad (2)$$

sendo:  $T$  a energia cinética de rotação;

$V$  a energia potencial;

$Q_j$  a parcela referente a perturbações que não derivam de um potencial.

Considerando o momento generalizado  $p_j$  associado à coordenada generalizada  $q_j$ :

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (3)$$

a equação (1) pode ser representada por:

$$\frac{d}{dt}(p_j) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \quad (4)$$

Introduzindo a Hamiltoniana associada ao movimento rotacional, a partir da transformação dual de Legendre:

$$H = \sum_{j=1}^3 p_j \dot{q}_j - L, \quad (5)$$

as equações do movimento rotacional podem ser colocadas na forma canônica estendida:

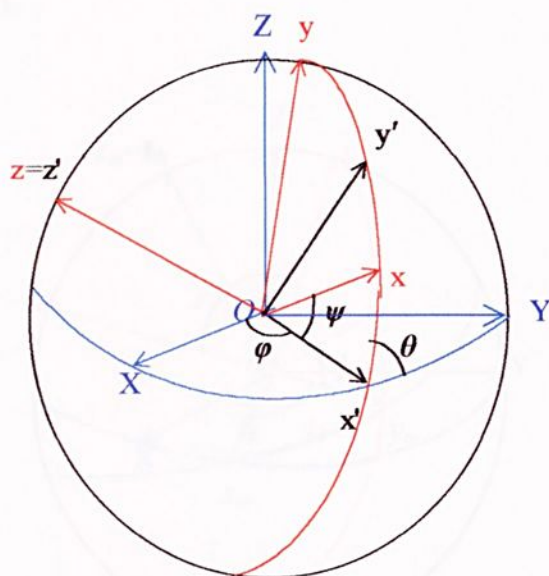
$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} + Q_j \quad (6a)$$



$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (6b)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (6c)$$

Para se estudar este movimento é necessário se introduzir sistemas de coordenadas apropriados. Assim, escolhe-se aqui o sistema de eixos fixos no satélite, que são os eixos principais de inércia do satélite (aqui denominado de sistema principal), o sistema inercial (denominado de sistema do satélite) e ainda o sistema do momento angular. O sistema do satélite tem direções paralelas ao sistema equatorial terrestre, o sistema principal tem direções coincidentes com as direções dos momento principais de inércia do satélite e o sistema do momento angular tem seu eixo  $Oz_m$  coincidente com a direção do vetor momento angular de rotação  $L_2$ . Os sistemas do satélite e o principal se relacionam através dos ângulos de Euler ( $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ) e estão representados na Figura 1, juntamente com um sistema intermediário  $Ox'y'z'$ .



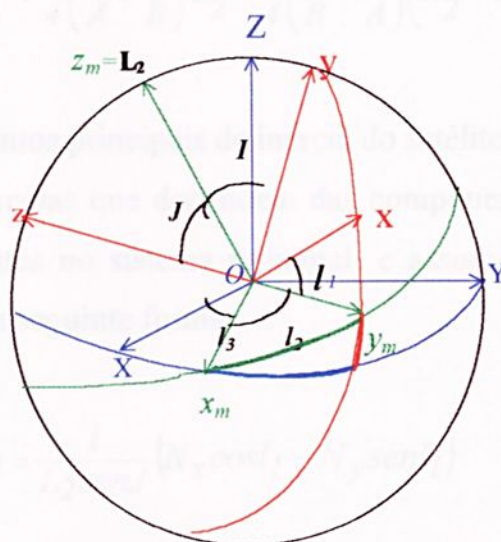
**FIGURA 1:** Sistema principal (Oxyz), Sistema do satélite (OXYZ) e os Ângulos de Euler ( $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ )

As coordenadas generalizadas que descrevem o movimento rotacional devem ser escolhidas adequadamente. Em geral se utiliza os ângulos de Euler ( $\varphi, \theta, \psi$ ) e seus momentos generalizados para descrever a atitude de um satélite artificial. No entanto, neste trabalho é interessante utilizar as variáveis de Andoyer para descrever o movimento rotacional do satélite. A utilização destas variáveis facilita a aplicação de métodos de teoria de perturbação quando se deseja fazer uma abordagem analítica ao movimento rotacional, além do fato de possuírem um significado físico. As variáveis de Andoyer ( $L_i, l_i, i = 1, 2, 3$ ) surgem quando relaciona-se o sistema do momento angular com sistema do satélite e com o sistema principal. As variáveis angulares  $l_i$  são ângulos e estão representadas na Figura 2. As variáveis métricas  $L_i$  são definidas como:

- $L_1$  é a componente de  $L_2$  no eixo principal  $Oz$  dada por:  

$$L_1 = L_2 \cos J;$$
- $L_2$  é o vetor do movimento angular de rotação;
- $L_3$  é a componente de  $L_2$  no eixo do satélite  $OZ$  dada por:  

$$L_3 = L_2 \cos I.$$



**FIGURA 2:** Sistema principal (Oxyz), Sistema do satélite (OXYZ), Sistema do momento angular ( $Ox_my_mz_m$ ) e Variáveis de Andoyer.

As equações do movimento em termos das variáveis de Andoyer ( $L_i$   $l_i$ ) são obtidas a partir da equação (6) através de uma transformação canônica entre os ângulos de Euler e as variáveis de Andoyer, sendo dadas por Zanardi (1993, 1999):

$$\begin{aligned}\frac{dl_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial L_i} + P_i \\ \frac{dL_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial l_i} + S_i \\ i &= 1, 2, 3\end{aligned}\tag{7}$$

onde: a)  $H$  é a Hamiltoniana associada ao problema conservativo, sendo que para o movimento rotacional livre de torques externos a Hamiltoniana assume a forma :

$$H = \frac{I}{2} \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{2A} - \frac{1}{2B} \right) L_1^2 + \frac{I}{4} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) L_2^2 + \frac{I}{4} \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) (L_2^2 - L_1^2) \cos l_1 \tag{8}$$

sendo  $A, B, C$  os momentos principais de inércia do satélite.

b)  $P_i$  e  $S_i$  são parcelas que dependem das componentes  $N_x, N_y, N_z$  dos torques externos atuantes no sistema principal e assumem em termos das variáveis de Andoyer a seguinte forma:

$$P_1 = \frac{I}{L_2 \sin l_1} (N_x \cos l_1 - N_y \sin l_1) \tag{9a}$$



$$P_2 = \frac{I}{L_2} \left\{ -N_x [\cos l_1 \cot J + \cot l (\cos l_1 \cos l_2 - \sin l_1 \sin l_2 \cos J)] + \right. \\ \left. N_y [\sin l_1 \cot J + \cot l (\sin l_1 \cos l_2 + \cos l_1 \sin l_2 \cos J)] + \right. \\ \left. - N_z \sin l_2 \sin J \cot l \right\} \quad (9b)$$

$$P_3 = \frac{I}{L_2 \sin l} \left\{ N_x (\cos l_1 \cos l_2 - \sin l_1 \sin l_2 \cos J) + \right. \\ \left. - N_y (\sin l_1 \cos l_2 + \cos l_1 \sin l_2 \cos J) + N_z \sin l_2 \sin J \right\} \quad (9c)$$

$$S_1 = N_z \quad (10a)$$

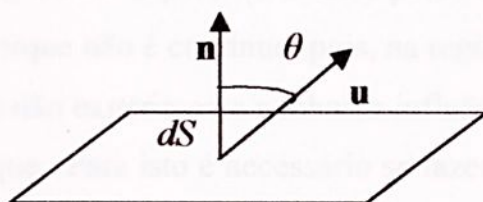
$$S_2 = N_x \sin J \sin l_1 + N_y \sin J \cos l_1 + N_z \cos J \quad (10b)$$

$$S_3 = N_x \{ \sin l \cos l_1 \sin l_2 + \sin l_1 [\cos l \sin J + \sin l \cos J \cos l_2] \} + \\ + N_y \{ -\sin l_1 \sin l_2 \sin l + \cos l_1 [\cos l \sin J + \sin l \cos J \cos l_2] \} + \\ + N_z \{ \sin l \sin J \cos l_2 - \cos J \cos l \} \quad (10c)$$

Neste trabalho é considerado apenas o torque devido à pressão de radiação solar sobre o movimento rotacional de um satélite cilíndrico, para o qual os momentos principais de inércia em torno do eixo  $Ox$  e  $Oy$  são iguais ( $A=B$ ).

### 3.2 - Modelo do Torque de Pressão de Radiação Solar

Um satélite iluminado pelo Sol experimenta uma pressão exercida pela luz, que é o resultado do fluxo de fótons que incidem na superfície do satélite. Esses fótons contêm energia, e a taxa de variação da quantidade de movimento destes fótons ao se chocarem com a superfície é denominada força de radiação solar. O ponto de aplicação desta força em geral não coincide com o centro de massa do satélite, podendo assim produzir um torque, que é denominado torque de radiação solar.



**FIGURA 3:** Incidência da luz sobre o elemento de superfície  $dS$ .

A força de pressão de radiação solar total sobre satélite é dada por:

$$\mathbf{F} = -\int_S K(R) [B(\theta) \mathbf{n} + \bar{b} \cos \theta \mathbf{u}] dS \quad (11)$$

em que:

- $K(R) = k/R^2$  é a pressão de radiação por  $m^2$  a uma distância  $R$  entre o elemento de superfície  $dS$  e o Sol. De acordo com Georgeovic (1973) é assumido para  $k$  o valor de  $1,01 \times 10^{17} \text{ kgm/s}$ ;
- $B(\theta)$  e  $\bar{b} \cos \theta$  levam em conta propriedades de reflexão;
- $\mathbf{n}$  é o vetor unitário na direção normal;
- $\mathbf{u}$  é o vetor unitário na direção de incidência;
- $\theta$  é o ângulo entre a direção normal e a direção de incidência.

A integral acima deve ser desenvolvida por toda a superfície do satélite. E utilizando a expressão (11) obtém-se o torque total sobre o satélite devido à força de pressão de radiação solar direta que é dada por:

$$\mathbf{N} = -\int_S K(R) [B(\theta) \mathbf{r}' \times \mathbf{n} + \bar{b} \cos \theta \mathbf{r}' \times \mathbf{u}] dS \quad (12)$$

onde  $\mathbf{r}'$  é o vetor posição de um elemento de área  $dS$  do satélite com relação a origem de um sistema fixo no satélite, que se considera como centro de massa do satélite.



Sabe-se que durante o movimento orbital e rotacional do satélite são levadas em conta as passagens deste pela luz solar e pela região de sombra, assim fica claro que este torque não é contínuo, pois, na região iluminada ele atua e na sombra o satélite não experimenta nenhuma influência da luz solar, deixando de ocorrer o torque. Para isto é necessário se fazer uma análise do torque nestas circunstâncias, introduzindo a função sombra da Terra  $\psi$ . Neste caso são estudados os efeitos da sombra considerando-se também a transição pela penumbra, região na qual o torque é parcial.

A função sombra assume os valores:

- 1, para a região iluminada;
- 0, para a região de sombra;
- $0 < \psi < 1$ , para a região de penumbra.

Portanto, para considerar o efeito descontínuo do torque de radiação solar é introduzida a função sombra  $\psi$ , a ser descrita no Capítulo 4, nas equações do movimento rotacional (7), de modo que elas assumem a seguinte forma:

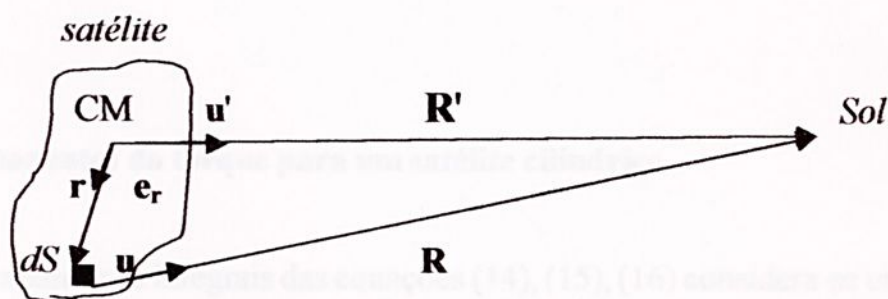
$$\begin{aligned}\frac{dL_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial l_i} + \psi S_i \\ \frac{dl_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial L_i} + \psi P_i\end{aligned}\tag{13}$$

### 3.2.1 - Componentes do Torque para um Satélite de Forma Arbitrária

As componentes do torque de pressão de radiação solar direta são dadas necessariamente no sistema de eixos principais do satélite. Inicialmente é estudado para um satélite de forma arbitrária e depois para um satélite



cilíndrico. Para se calcular as componentes do torque de pressão de radiação é necessário determinar a direção de incidência  $\mathbf{u}$  da luz solar, a direção normal à superfície  $\mathbf{n}$ , o vetor posição  $\mathbf{r}$  do elemento de área  $dS$ , o vetor  $\mathbf{R}$  do Sol com relação ao elemento de área  $dS$  e o ângulo de incidência  $\theta$ , representados no sistema principal.



**FIGURA 4:** Posicionamento do CM do satélite e do elemento de superfície com relação ao Sol

Estes desenvolvimentos estão apresentados em Zanardi (1991, 1993) e para um satélite de forma arbitrária assume a seguinte forma:

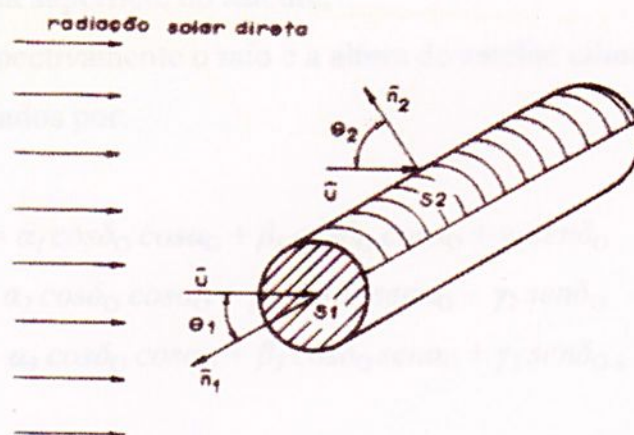
$$\begin{aligned}
 N_x = & -K(R) \left\{ u_x \int_S m_{Ix} dS + u_y \int_S m_{Iy} dS + u_z \int_S m_{Iz} dS + \right. \\
 & + u_x^2 \int_S m_{Ixx} dS + u_y^2 \int_S m_{Iyy} dS + u_z^2 \int_S m_{Izz} dS + \\
 & \left. + u_x u_y \int_S m_{Ixy} dS + u_x u_z \int_S m_{Ixz} dS + u_y u_z \int_S m_{Iyz} dS \right\} \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_y = & -K(R) \left\{ u_x \int_S m_{2x} dS + u_y \int_S m_{2y} dS + u_z \int_S m_{2z} dS + \right. \\
 & + u_x^2 \int_S m_{2xx} dS + u_y^2 \int_S m_{2yy} dS + u_z^2 \int_S m_{2zz} dS + \\
 & \left. + u_x u_y \int_S m_{2xy} dS + u_x u_z \int_S m_{2xz} dS + u_y u_z \int_S m_{2yz} dS \right\} \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_z = -K(R) \{ & u_x \int_S m_{3x} dS + u_y \int_S m_{3y} dS + u_z \int_S m_{3z} dS + \\
 & + u_x^2 \int_S m_{3xx} dS + u_y^2 \int_S m_{3yy} dS + u_z^2 \int_S m_{3zz} dS + \\
 & + u_x u_y \int_S m_{3xy} dS + u_x u_z \int_S m_{3xz} dS + u_y u_z \int_S m_{3yz} dS \} \quad (16)
 \end{aligned}$$

### 3.2.2 - Componentes do torque para um satélite cilíndrico

Para expandir as integrais das equações (14), (15), (16) considera-se um satélite artificial terrestre de forma cilíndrica circular, com órbita conhecida, altura  $h_s$ , raio  $\sigma$  e momentos principais de inércia tais que  $A=B$  e  $C < A$ , e ainda, o centro geométrico do satélite coincide com o seu centro de massa e levando em conta que as superfícies do satélite que são iluminadas tem-se que: a base do cilindro (superfície circular  $S_1$ ) e a lateral do cilindro (superfície cilíndrica  $S_2$ ).



**FIGURA 5 - Superfícies do satélite cilíndrico**

O torque de pressão de radiação solar total que atua sobre este satélite é dado pela soma dos torques atuantes sobre as duas superfícies. E após desenvolvimentos apresentam a forma abaixo (Zanardi, 1993/1994):

$$\begin{aligned} N_x &= -K(R) \frac{m}{R^2} \left\{ r_O^2 R_y R_z + r_O r' (R_y T_{31} + R_z T_{21}) + r'^2 T_{21} T_{31} \right\} \\ N_y &= -K(R) \frac{m}{R^2} \left\{ r_O^2 R_x R_z + r_O r' (R_x T_{31} + R_z T_{11}) + r'^2 T_{11} T_{31} \right\} \\ N_z &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

em que:

- $m = (\bar{b}_1 - \bar{b}_2) \pi \sigma^2 \frac{h_S}{2}$
- $r_O$  é a distância média do Sol a Terra;
- $r'$  é vetor posição do centro de massa do satélite em relação ao centro de massa da Terra;
- $\bar{b}_1$  e  $\bar{b}_2$  dependem dos coeficientes de reflexão especular e coeficiente de reflexão total da superfície do satélite;
- $\sigma$  e  $h_S$  são respectivamente o raio e a altura do satélite cilíndrico;
- $R_x, R_y, R_z$  são dados por:

$$R_x = \alpha_1 \cos \delta_O \cos \alpha_O + \beta_1 \cos \delta_O \cos \alpha_O + \gamma_1 \sin \delta_O \quad (17a)$$

$$R_y = \alpha_2 \cos \delta_O \cos \alpha_O + \beta_2 \cos \delta_O \sin \alpha_O + \gamma_2 \sin \delta_O \quad (17b)$$

$$R_z = \alpha_3 \cos \delta_O \cos \alpha_O + \beta_3 \cos \delta_O \sin \alpha_O + \gamma_3 \sin \delta_O, \quad (17c)$$

em que  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$   $i = 1, 2, 3$  são os elementos da matriz de transformação entre o sistema do satélite e o sistema principal, ou seja:



$$L_{PS} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & (\cos l_2 \cos l_3 - \sin l_3 \sin l_2 \cos I') \cos l_1 + \\ & + [-\cos J (\sin l_2 \cos l_3 + \cos l_2 \sin l_3 \cos I') + \sin l_3 \sin J \sin I'] \sin l_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 = & (\cos l_2 \sin l_3 + \sin l_2 \cos l_3 \cos I') \cos l_1 + \\ & + [\cos J (-\sin l_2 \sin l_3 + \cos l_2 \cos l_3 \cos I') - \cos l_3 \sin J \sin I'] \sin l_1 \end{aligned}$$

$$\gamma_1 = \sin I' \cos l_1 \sin l_2 + (\cos J \sin I' \cos l_2 + \sin J \cos I') \sin l_1$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & (-\cos l_2 \cos l_3 + \sin l_3 \sin l_2 \cos I') \sin l_1 + \\ & + [-\cos J (\sin l_2 \cos l_3 + \cos l_2 \sin l_3 \cos I') + \sin l_3 \sin J \sin I'] \cos l_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2 = & -(\cos l_2 \sin l_3 + \cos l_3 \sin l_2 \cos I') \sin l_1 + \\ & + [\cos J (-\sin l_2 \sin l_3 + \cos l_2 \cos l_3 \cos I') - \cos l_3 \sin J \sin I'] \cos l_1 \end{aligned}$$

$$\gamma_2 = -\sin I' \sin l_1 \sin l_2 + (\cos J \sin I' \cos l_2 + \sin J \cos I') \cos l_1$$

$$\alpha_3 = \sin J \cos l_3 \sin l_2 + (\cos I' \sin J \cos l_2 + \sin I' \cos J) \sin l_3$$

$$\beta_3 = \sin J \sin l_3 \sin l_2 - (\cos I' \sin J \cos l_2 + \sin I' \cos J) \cos l_3$$

$$\gamma_3 = \cos I' \cos J - \sin I' \sin J \cos l_2$$

- $T_{11}$ ,  $T_{21}$ ,  $T_{31}$  equivalem a 1ª coluna da matriz transformação entre o sistema orbital e o sistema principal dada por:

$$\begin{aligned}
 T_{11} = & \{ [\cos(l_3 - \Omega) \cos l_2 - \sin(l_3 - \Omega) \sin l_2 \cos I'] \cos l_1 \\
 & + [- (\cos(l_3 - \Omega) \sin l_2 + \sin(l_3 - \Omega) \cos l_2 \cos I') \cos J \\
 & + \sin(l_3 - \Omega) \sin I' \sin J] \sin l_1 \} \cos(v + w) \\
 & + \{ [\sin(l_3 - \Omega) \cos I \cos l_2 + (\cos(l_3 - \Omega) \cos I \cos I' + \sin I \sin I') \sin l_2] \cos l_1 \\
 & + [ [- \sin(l_3 - \Omega) \cos I \sin l_2 + (\cos(l_3 - \Omega) \cos I \cos I' + \sin I \sin I') \cos l_2] \cos J \\
 & + (- \cos(l_3 - \Omega) \cos I \sin I' + \sin I \cos I') \sin J] \sin l_1 \} \sin(v + w)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{21} = & - \{ [\cos(l_3 - \Omega) \cos l_2 - \sin(l_3 - \Omega) \sin l_2 \cos I'] \sin l_1 \\
 & + [\sin(l_3 - \Omega) \sin I' \sin J - (\cos(l_3 - \Omega) \sin l_2 \\
 & + \sin(l_3 - \Omega) \cos I' \cos l_2) \cos J] \cos l_1 \} \cos(v + w) \\
 & + \{ - [\sin(l_3 - \Omega) \cos I \cos l_2 + (\cos(l_3 - \Omega) \cos I \cos I' + \sin I \sin I') \sin l_2] \sin l_1 \\
 & + [ [- \sin(l_3 - \Omega) \cos I \sin l_2 + (\cos(l_3 - \Omega) \cos I \cos I' + \sin I \sin I') \cos l_2] \cos J \\
 & + (- \cos(l_3 - \Omega) \cos I \sin I' + \sin I \cos I') \sin J] \cos l_1 \} \sin(v + w)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{31} = & \{ [\cos(l_3 - \Omega) \sin l_2 + \sin(l_3 - \Omega) \cos l_2 \cos I'] \sin J \\
 & + [\sin(l_3 - \Omega) \sin I' \cos J] \cos(v + w) \\
 & + \{ [\sin(l_3 - \Omega) \cos I \sin l_2 - (\cos(l_3 - \Omega) \cos I \cos I' + \sin I \sin I') \cos l_2] \sin J \\
 & + [- \cos(l_3 - \Omega) \cos I \sin I' + \sin I \cos I'] \cos J \} \sin(v + w)
 \end{aligned}$$

Com a aplicação em um satélite cilíndrico observa-se que devido à simetria da forma do satélite, o torque de pressão de radiação solar não apresenta componente na direção do eixo principal de inércia **Oz**. E ainda, as componentes  $N_x$  e  $N_y$  atribuem ao satélite uma oscilação em torno do eixo **Oz**.

As componentes  $N_x$  e  $N_y$  do torque de radiação solar são substituídas nas equações do movimento rotacional (13) de modo a analisar sua influência sobre a atitude de um satélite artificial.



## CAPÍTULO 4

### FUNÇÃO SOMBRA DA TERRA

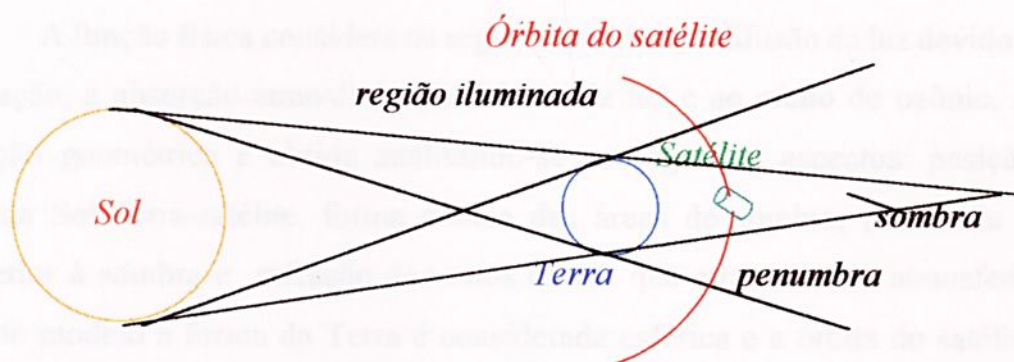
Neste capítulo é introduzido um modelo para a análise da função que descreve a influência da sombra da Terra sobre o movimento rotacional e translacional do satélite. O modelo apresenta um comportamento mais próximo do real. Alguns fatores físicos e geométricos são considerados no modelo matemático utilizado para descrever a função sombra, introduzida nas equações do movimento rotacional, permitindo analisar com detalhes a influência do torque de radiação solar na atitude do satélite. A análise é realizada durante toda órbita do satélite, considerando-se a passagem deste por três regiões: sombra, penumbra e totalmente iluminada.

#### 4.1 - Comentários Iniciais

Utilizamos aqui o modelo da função sombra apresentado por Kabelac (1988). Como foi visto no Capítulo 3, a força de pressão de radiação solar causa perturbações na órbita do satélite, podendo resultar em um torque dependendo das características físicas e geométricas do satélite. Nas equações do movimento rotacional, a influência deste torque aparece em função de suas componentes no sistema de eixos principais. No entanto, o torque de radiação solar só existe quando o satélite está parcial ou totalmente iluminado. Assim nas equações do movimento é introduzido um fator  $\psi$ , chamado de função sombra, como apresentado na equação (6), de modo a levar em conta três fases de transição, que estão representadas na Figura 6, e são compostas por:

- transição pela região escura (sombra);
- transição pela região parcialmente iluminada (penumbra);
- transição pela região totalmente iluminada.





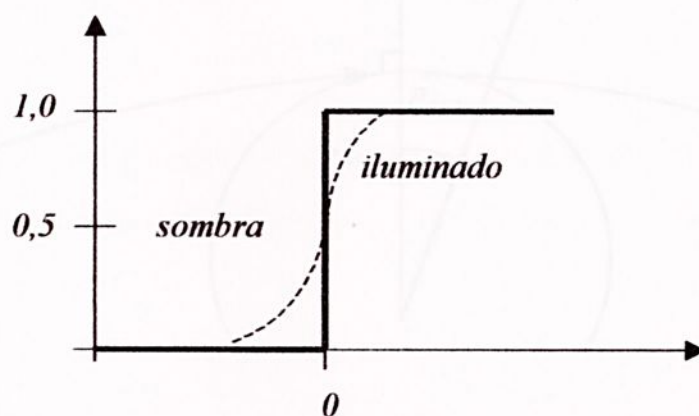
**FIGURA 6:** Fases de transição na trajetória do satélite ao redor da Terra

Para análise e obtenção da função sombra, Kabelac (1988) distingue dois efeitos: um devido à física do problema e outro devido à geometria envolvida. Assim a função sombra fica definida por uma função física  $\psi_f$  e uma função geométrica  $\psi_g$ :

$$\psi = \psi_f \cdot \psi_g \quad (18)$$

com  $0 \leq \psi \leq 1$ .

O esboço apresentado na Figura 7 mostra a comparação deste modelo com o modelo de Ferraz Mello (1972) que considera  $\psi$  como um comutador, valendo "0" quando o satélite está na sombra e "1" quando o satélite está iluminado (sem desenvolvimento em série).



**FIGURA 7:** Comparação de modelos para a Função Sombra

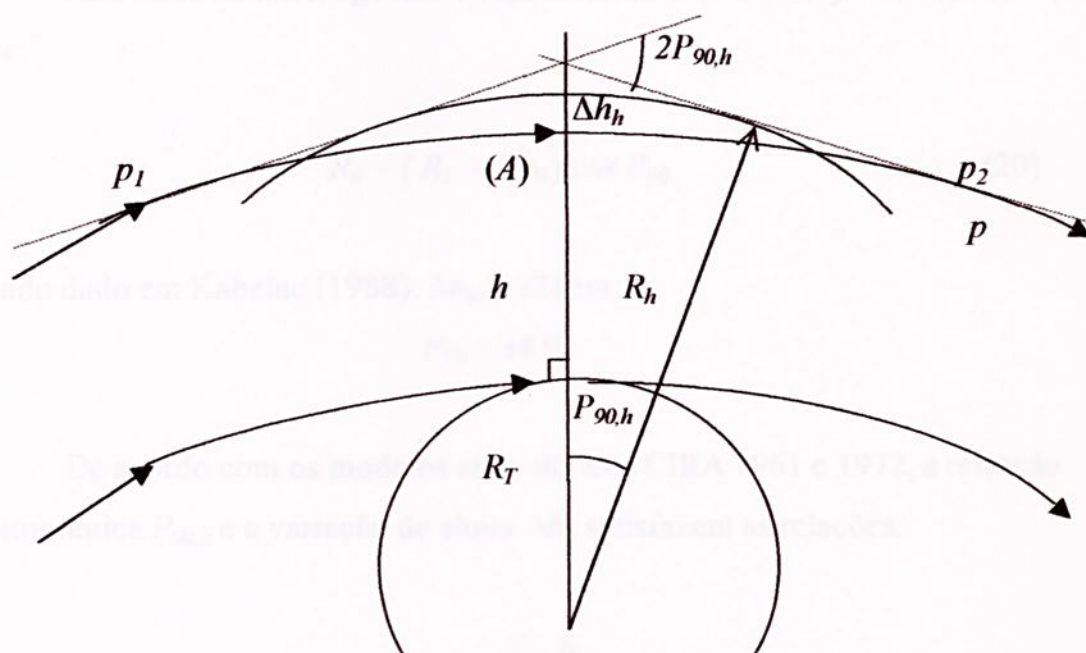
( — modelo Ferraz Mello e --- modelo de Kabelac)

A função física considera os seguintes efeitos: a difusão da luz devido à refração, à absorção atmosférica, à difusão da luz e ao efeito do ozônio. A função geométrica é obtida analisando-se os seguintes aspectos: posição mútua Sol-Terra-satélite, forma cônica das áreas de sombra, penumbra e exterior à sombra e refração dos raios de luz que atravessam a atmosfera. Neste modelo a forma da Terra é considerada esférica e a órbita do satélite como sendo circular para facilitar o desenvolvimento da função.

## 4.2 - Função Sombra Geométrica

### 4.2.1 - Trajetória do Raio de Luz e sua Geometria

Consideremos um raio de luz  $p$  se propagando de um ponto arbitrário do Sol atravessando a atmosfera da Terra e atingindo a superfície do satélite.



**FIGURA 8:** Trajetória do raio de luz e sua geometria

Inicialmente, como mostra a Figura 8, a trajetória do raio de luz é uma linha reta, mas ao atingir a atmosfera terrestre sofre uma refração. A maior refração ocorre no ponto (A), que se localiza mais próximo a superfície da Terra, onde a altitude em relação a superfície da Terra é  $h$ , interceptando a vertical local com um ângulo reto. O ângulo  $P_{90,h}$  representa a refração sofrida pelo raio de luz, devido à atmosfera da Terra. A trajetória é simétrica em relação ao ponto (A). Para se evitar trabalhar com trajetórias curvas do raio de luz, pode-se aproximar esta trajetória por duas retas  $p_1$  e  $p_2$ , tangentes à esfera de raio  $R_h$  expresso por:

$$R_h = (R_T + h + \Delta h_h) \cos P_{90,h} \quad (19)$$

em que:  $R_T$  - raio da Terra;

$\Delta h_h$  - variação de altura devido a refração;

$P_{90,h}$  - ângulo de refração à altura  $h$ .

Para raios de luz tangentes à superfície da Terra, ou seja  $h = 0$ , tem-se que:

$$R_0 = (R_T + \Delta h_0) \cos P_{90} \quad (20)$$

sendo dado em Kabelac (1988):  $\Delta h_0 = 2215\text{m}$

$$P_{90} = 34,9'$$

De acordo com os modelos atmosféricos CIRA 1961 e 1972, a refração astronômica  $P_{90,h}$  e a variação de altura  $\Delta h_h$  satisfazem as relações:

$$P_{90,h} = \frac{P_{90} b_h}{b_0} ['] \quad (21)$$

$$\Delta h = \frac{\Delta h_0 b_h}{b_0} [\text{m}] \quad (22)$$



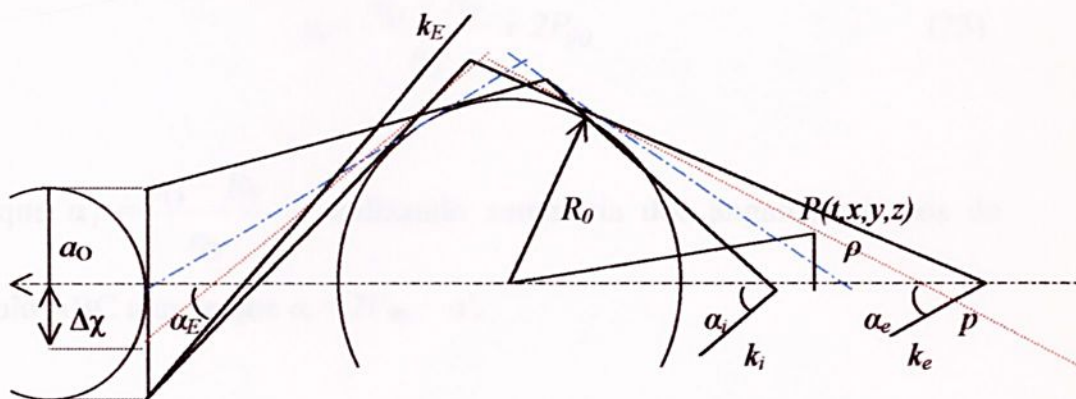
em que:  $b_h$  é a pressão na altitude  $h$ ;

$b_0$  é a pressão na superfície da Terra.

#### 4.2.2- Cones de Sombra

Durante o movimento translacional do satélite ao redor da Terra, nas regiões próximas ao alinhamento Sol-Terra-satélite, o satélite experimenta a transição pelas três regiões já descritas anteriormente. Essas regiões são denominadas cones de sombra, e assim chamados devido a forma cônica que apresentam no momento que a Terra encobre a luz do Sol, quando vistos do satélite, surgindo a necessidade do estudo da geometria do problema. Consideram-se três cones de sombra, apresentados na Figura 9:

- cone  $k_i$ , região de sombra;
- cone  $k_e$ , região de penumbra;
- cone  $k_E$ , região iluminada;



**FIGURA 9:** Cones de sombra

em que:  $\alpha_i$  é o ângulo relacionado com a região de sombra;

$\alpha_e$  é o ângulo relacionado com a região de penumbra;

$\alpha_E$  é o ângulo relacionado com a região iluminada;

$P(t, x, y, z)$  é o ponto da órbita em que se encontra o satélite;

$\Delta\chi$  representa o ângulo sobre o qual o centro do Sol é visto do ponto  $P$  acima do contorno da Terra;

$R_0$  é o raio da Terra na altura  $h = 0$ ;

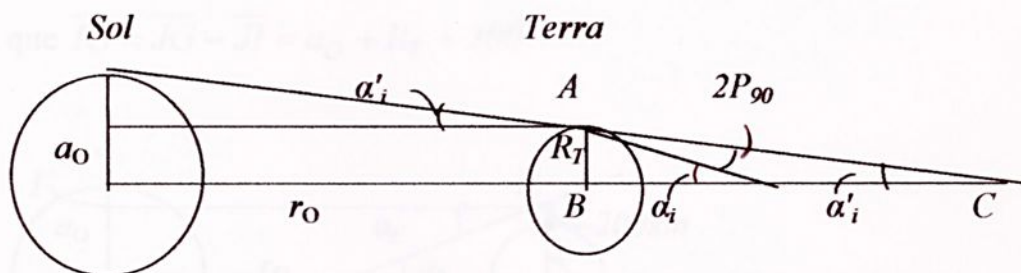
$a_0$  é o raio do Sol.

Na Figura 9, as linhas de superfície dos cones de sombra tangenciam a esfera numa altura de 200km acima da superfície da Terra, representando o limite considerado da atmosfera terrestre. Os ângulos  $\alpha_i$ ,  $\alpha_e$ ,  $\alpha_E$  formados pelas linhas de superfície e eixo que conecta o centro do Sol com o centro da Terra são apresentados em Kabelac (1988). A Figura 10 representa a geometria envolvida no cone de sombra  $k_i$ , com  $r_0$  sendo a distância média Terra-Sol.

O ângulo  $\alpha_i$  formado pela linha de superfície e o eixo que conecta o centro do Sol com o centro da Terra (ST) é dado por:

$$\alpha_i = \frac{a_0 - R_T}{r_0} + 2P_{90} \quad (23)$$

visto que  $\alpha'_i = \frac{a_0 - R_T}{r_0}$  e utilizando somatória dos ângulos internos do triângulo ABC tem-se que  $\alpha_i = 2P_{90} + \alpha'_i$ .



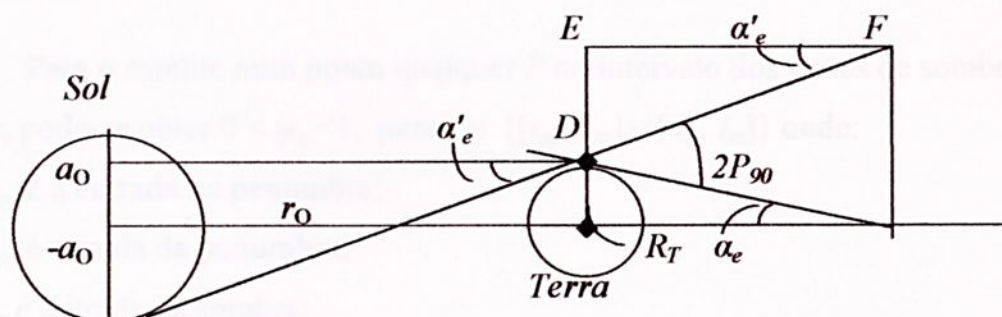
**FIGURA 10:** Cone de sombra  $k_i$  que representa a região de sombra.

A Figura 11 representa a geometria no cone de sombra  $k_e$ . O ângulo  $\alpha_e$  é formado por ST e é dado por:

$$\alpha_e = \frac{-a_O - R_T}{r_O} + 2P_{90} \quad (24)$$

pois,  $\alpha'_e = \frac{a_O + R_T}{r_O}$  e pela somatória dos ângulos internos do triângulo DEF

tem-se que  $\alpha_e = -\alpha'_e + 2P_{90}$ .

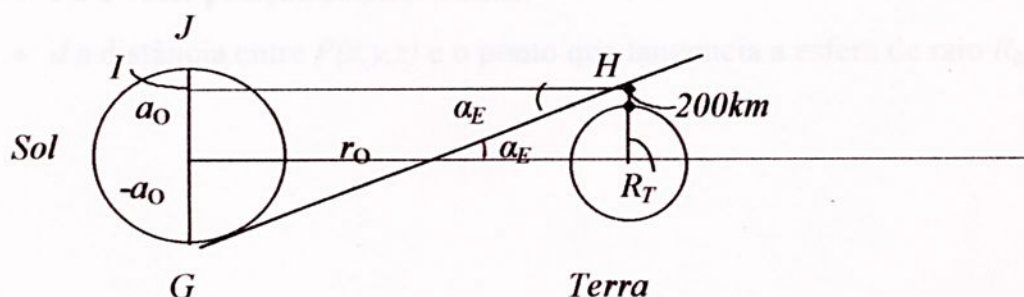


**FIGURA 11:** Cone de sombra  $k_e$  que representa a região de penumbra.

A Figura 12 está representando a geometria do cone da região totalmente iluminada, sendo portanto o ângulo  $\alpha_E$  dado por:

$$\alpha_E = \frac{a_O + R_T + 200\text{km}}{r_O} \quad (25)$$

visto que  $\overline{IG} = \overline{JG} - \overline{JI} = a_O + R_T + 200$ .



**FIGURA 12:** Cone de sombra  $k_E$  que representa a região iluminada.



Com relação aos cones de sombra, a função sombra geométrica assume os valores:

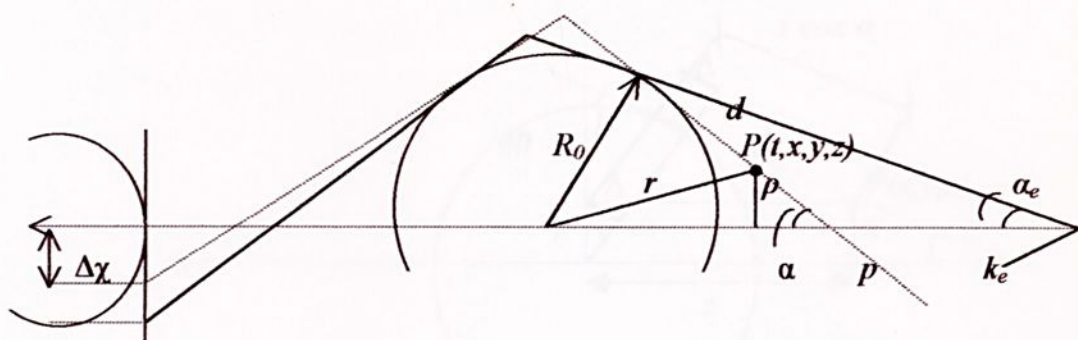
- $\psi_g = 0$ , dentro do cone  $k_i$  (sombra);
- $0 < \psi_g < 1$ , fora do cone  $k_i$  e dentro do cone  $k_e$  (penumbra);
- $\psi_g = 1$ , fora de  $k_e$  (todo iluminado).

Para o satélite num ponto qualquer  $P$  no intervalo dos cones de sombra  $k_i$  e  $k_e$  pode-se obter  $0 < \psi_g < 1$ , para  $t \in \{[t_{ep}, t_{sp}] \cup [t_{ss}, t_{es}]\}$  onde:

- $t_{ep}$  é a entrada na penumbra;
- $t_{sp}$  é a saída da penumbra;
- $t_{es}$  é entrada na sombra;
- $t_{ss}$  é a saída da sombra.

Para obter  $\psi_g$ , é considerado inicialmente um sistema de coordenadas  $Ox_S y_S z_S$ , que é chamado de sistema Terra-Sol, com origem no centro de gravidade da Terra, sendo que o eixo  $Oz_S$  aponta na direção do Sol, o eixo  $Oy_S$  é perpendicular ao plano da Eclíptica, com  $Ox_S$  formando o sistema dextrógiro. A Figura 13 mostra a geometria associada com o posicionamento do satélite em um ponto  $P(x, y, z)$  qualquer entre os cones de sombra  $k_i$  e penumbra  $k_e$ , sendo:

- $\mathbf{r}$  é o vetor posição satélite-Terra;
- $d$  a distância entre  $P(x, y, z)$  e o ponto que tangencia a esfera de raio  $R_0$ .



**FIGURA 13:** Posição do satélite  $P(t, x, y, z)$  entre o cone de sombra  $k_i$  e  $k_e$

O ângulo  $\alpha$ , ângulo formado pelo raio de luz  $p$  e o eixo que conecta Terra-Sol (eixo da sombra), representado nas Figuras 13 e 14, é dado por Kabelac (1988):

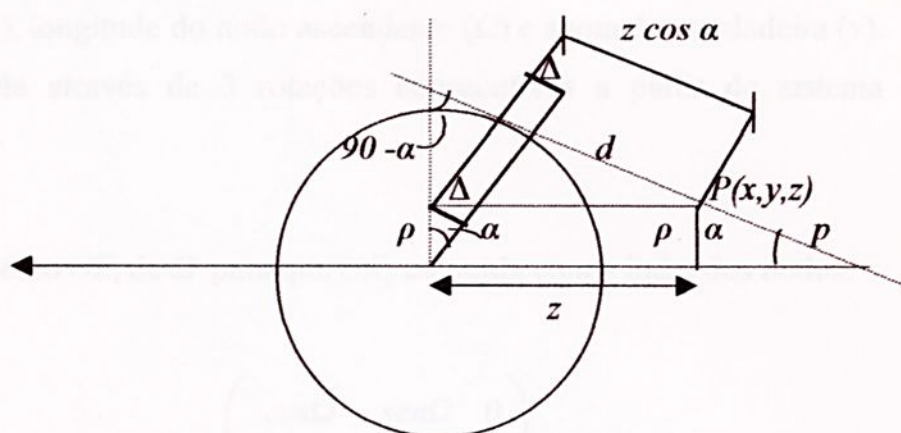
$$\text{sen } \alpha = \frac{\rho - R_0}{z} - \frac{2\rho}{z} \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \quad (26)$$

sendo que:

- $x, y, z$  são as componentes do vetor posição satélite-Terra  $\mathbf{r}$  no sistema Terra-Sol;
- $z < 0$ ;
- $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ .

A equação (26) pode ser solucionada pelo método de Newton-Rhapson, desde que a trajetória do satélite seja conhecida de modo que os parâmetros  $\rho$  e  $z$  possam ser determinados. A distância  $d$  é obtida através da geometria apresentada na Figura 14 e expressa por:

$$\begin{aligned} d &= -z \cos \alpha - \Delta \\ d &= -z \cos \alpha - \rho \text{sen } \alpha \end{aligned} \quad (27)$$



**FIGURA 14:** Geometria da órbita do satélite entre os cones  $k_i$  e  $k_e$

Se os elementos orbitais da trajetória do satélite ao redor da Terra são conhecidos e o vetor posição  $\mathbf{r}$  é expresso no sistema orbital ( $Ox_O, y_O, z_O$ ) como  $\mathbf{r} = r \mathbf{i}_O$ , sendo ( $\mathbf{i}_O, \mathbf{j}_O, \mathbf{k}_O$ ) os vetores unitários do sistema orbital, no qual o eixo  $Ox_O$  coincide com a direção e sentido do vetor  $\mathbf{r}$ , então as componentes de  $\mathbf{r}$  no sistema Terra-Sol podem ser obtidas utilizando a matriz de rotação que relaciona estes dois sistemas, ou seja:

$$\mathbf{r}_{Ox_S y_S z_S} = R \cdot \mathbf{r}_{Ox_O y_O z_O} \quad (28)$$

A matriz de rotação  $R$  é determinada por:

$$R = R_3 R_2 R_1^T \quad (29)$$

sendo que:

1.  $R_1^T$  é a transposta da matriz de rotação  $R_1$ , a qual relaciona o sistema orbital com o sistema Equatorial ( $Ox_e Y_e Z_e$ ), representados na Figura 15 juntamente com os elementos orbitais: inclinação ( $I'$ ), argumento do



perigeu ( $w$ ), longitude do nodo ascendente ( $\Omega$ ) e anomalia verdadeira ( $v$ ).  $R_I$  é obtida através de 3 rotações consecutivas a partir do sistema equatorial:

- rotação no eixo  $OZ_e$  de  $\Omega$  para que  $OX_e$  coincida com a linha dos nodos:

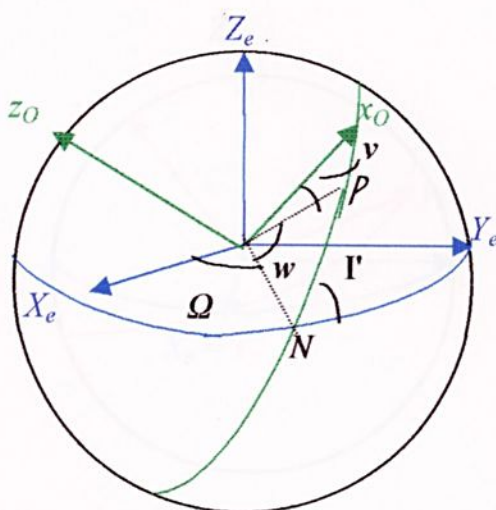
$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- rotação no eixo  $Ox'$  intermediário de um ângulo  $I'$ :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I' & \sin I' \\ 0 & -\sin I' & \cos I' \end{pmatrix}$$

- rotação no eixo  $Oz''$  de um ângulo ( $w + v$ ):

$$M_3 = \begin{pmatrix} \cos(w + v) & \sin(w + v) & 0 \\ -\sin(w + v) & \cos(w + v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



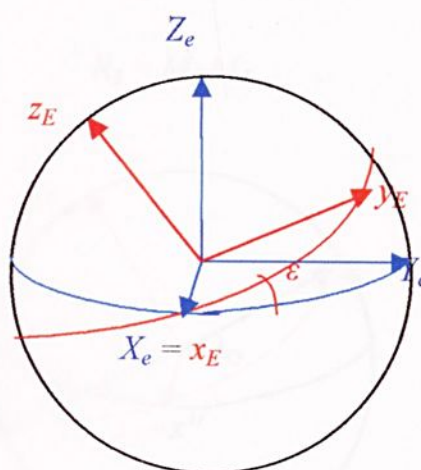
**FIGURA 15:** Sistema Orbital ( $Ox_0y_0z_0$ ), Sistema Equatorial ( $Ox_eY_eZ_e$ ) e elementos orbitais  $v$ ,  $\Omega$ ,  $w$  e  $I'$ .

Logo, a matriz  $R_I$  é dada por:

$$R_I = M_3 M_2 M_I \quad (30)$$

2.  $R_2$  é a matriz de rotação que relaciona o sistema Equatorial com o sistema Eclíptico, representados na Figura 16, sendo que estes dois sistemas se relacionam apenas através da rotação do ângulo  $\varepsilon$  (Obliquidade da Eclíptica) no eixo  $Ox_e$  e expressa por:

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix}$$



**FIGURA 16:** Sistema Inercial ( $Ox_e y_e z_e$ ), Sistema da Eclíptica ( $Ox_E y_E z_E$ ) e obliquidade da Eclíptica ( $\epsilon$ )

3.  $R_3$  é a matriz rotação entre o sistema Eclíptico e o sistema Terra-Sol, representados na Figura 17. Como o eixo  $Oz_s$  está direcionado na linha Terra-Sol, apontando para o Sol, utilizando a longitude do Sol ( $\lambda_0$ ), a matriz  $R_3$  é obtida a partir das rotações:

- rotação no eixo  $Ox_E$  de um ângulo de  $90^\circ$ ;

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

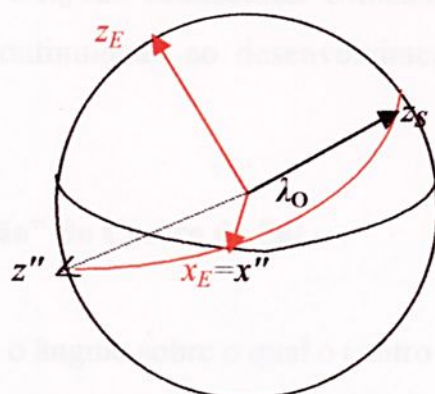
- rotação no eixo  $Oy''$  de um ângulo de  $(90^\circ + \lambda)$ ;

$$M_5 = \begin{pmatrix} -\text{sen}\lambda & \text{cos}\lambda & 0 \\ -\text{cos}\lambda & -\text{sen}\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



sendo:

$$R_3 = M_5 M_4 \quad (31)$$



**FIGURA 17:** Sistema Terra-Sol ( $Ox_S y_S z_S$ ), Sistema Eclíptico ( $Ox_E y_E z_E$ ) e a longitude do Sol ( $\lambda_0$ ).

Logo, as componentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  do vetor posição  $\mathbf{r}$  no sistema Terra-Sol são dados por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Sendo que substituindo a equação (29) na equação (32), obtemos:

$$x = -r [\sin \lambda (\cos \Omega \cos(w + v) - \sin \Omega \sin(w + v) \cos I') + \sin \epsilon \cos \lambda (\sin \Omega \cos(w + v) + \cos \Omega \sin(w + v) \cos I') - \cos \epsilon \cos \lambda \sin(w + v) \sin I'] \quad (33)$$

$$y = -r [\cos \lambda (\cos \Omega \cos(w + v) - \sin \Omega \sin(w + v) \cos I') + \sin \epsilon \sin \lambda (\sin \Omega \cos(w + v) + \cos \Omega \sin(w + v) \cos I') + \cos \epsilon \sin \lambda \sin(w + v) \sin I'] \quad (34)$$

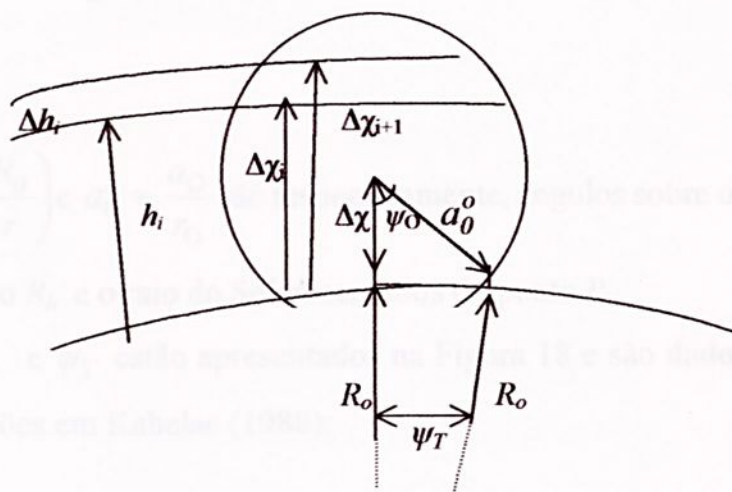
$$z = -r [\cos \epsilon (\sin \Omega \cos(w + v) + \cos \Omega \sin(w + v) \cos I') + \sin \epsilon \sin(w + v) \sin I'] \quad (35)$$

Portanto, o ângulo de cone  $\alpha$  poderá ser obtido pela equação (26), visto que os parâmetros  $\rho$ ,  $z$  e  $R_0$  são conhecidos. Utilizando o sistema Terra-Sol  $Ox_Sy_Sz_S$  pode-se dar continuidade ao desenvolvimento da função sombra geométrica.

#### 4.2.3 - Ângulo de "Visão" do Centro do Sol

Se  $\Delta\chi$  representa o ângulo sobre o qual o centro do Sol é visto do ponto  $P(x,y,z)$  acima do contorno da Terra como mostra a Figura 18, então utilizando o ângulo  $\alpha$  e as equações (23), (24) e (25) tem-se a seguinte expressão dada em Kabelac (1988):

$$\Delta\chi = 2P_{90} - \frac{R_0}{r_0} - \alpha \quad (36)$$



**FIGURA 18:** Pôr-do-sol visto do satélite (Ângulo  $\Delta\chi$ )

#### 4.2.4 - A Função Sombra Geométrica

A função sombra geométrica pode então ser determinada levando em conta a refração astronômica como:

$$\psi_g = 1 - \frac{\Delta D}{D} \quad (37)$$

onde  $D$  é a superfície inteira do disco solar e  $\Delta D$  é a superfície da parte do disco solar coberta pela Terra visto do satélite. Ainda com base na Figura 18 pode-se encontrar a seguinte relação para a função sombra geométrica em Kabelac (1988):

$$\psi_g = 1 - \frac{1}{\pi} \left[ \psi_O - \sin \psi_O \cos \psi_O + \frac{2}{3} \left( \frac{R_0^o}{a_0^o} \right)^2 \psi_T^3 \right] \quad (38)$$

em que:

- $R_0^o = \arcsen \left( \frac{R_0}{r} \right)$  e  $a_0^o = \frac{a_O}{r_O}$  são respectivamente, ângulos sobre os quais são vistos o raio  $R_h$  e o raio do Sol observados do ponto  $P$ .
- os ângulos  $\psi_O$  e  $\psi_T$  estão apresentados na Figura 18 e são dados pelas seguintes relações em Kabelac (1988):

$$\sin^2 \frac{1}{2} \psi_O = \sin \frac{1}{2} (a_0^o - \Delta \chi) \sin \left( R_0^o - \frac{1}{2} a_0^o + \frac{1}{2} \Delta \chi \right) \sin^{-1} a_0^o \sin^{-1} (R_0^o + \Delta \chi) \quad (39)$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} \psi_T = \sin \frac{1}{2} (a_0^o - \Delta \chi) \sin \frac{1}{2} (a_0^o + \Delta \chi) \sin^{-1} R_0^o \sin^{-1} (R_0^o + \Delta \chi) \quad (40)$$



As equações (37) e (38) são válidas no intervalo  $\Delta\chi \in [-a_0^o, a_0^o]$  para o qual  $\psi_g \in [0, 1]$ . Neste intervalo de variação da função sombra geométrica foram analisadas algumas condições extremas que são mostrados na Tabela 1, Kabelac (1988). A análise é feita com base na posição do Sol relativa à Terra como visualizado do satélite, onde os parâmetros  $\Delta\chi$ ,  $\alpha$ ,  $\psi_o$ ,  $\psi_g$  são correlacionados com os parâmetros  $a_0^o$ ,  $\alpha_i$ ,  $\alpha_e$ . Estas regiões analisadas podem ser vistas na Figura 18, sendo que:

- Quando o Sol se encontra totalmente abaixo do contorno da Terra, ou seja, satélite totalmente na sombra, tem-se  $\Delta\chi < -a_0^o$  e o ângulo  $\alpha > \alpha_i$ . Neste caso,  $\psi_g = 0$ ;
- Quando o Sol está precisamente com sua borda superior tangente ao contorno superior da Terra, o satélite ainda encontra-se na sombra, e como o Sol está encoberto pela Terra tem-se  $\psi_g = 0$ ;
- Quando o centro do Sol se posiciona no contorno da Terra, pode-se visualizar cerca de metade do Sol. Neste caso, encontra-se na região onde  $\psi_g = 1/2$ , ou seja, penumbra;
- Quando o contorno do Sol se posiciona na borda inferior tangente ao contorno superior da Terra, ele está totalmente visível pelo satélite. Assim,  $\psi_g = 1$ , que equivale ao satélite iluminado;
- E ainda, quando o Sol está totalmente acima do contorno da Terra, tem-se  $\Delta\chi > a_0^o$  e o ângulo  $\alpha < \alpha_e$ . Neste caso, o satélite está todo iluminado, e  $\psi_g = 1$ .

**TABELA 1:** Valores extremos da função sombra geométrica

**Fonte:** (Kabelac, 1988)

| Posição do Sol relativo a Terra observada do satélite. | Ângulo $\Delta\chi$ | Ângulo $\alpha$           | Ângulo $\psi_0$ | $\Psi_g$ |
|--------------------------------------------------------|---------------------|---------------------------|-----------------|----------|
| Totalmente abaixo do contorno da Terra                 | $<-a_0^o$           | $>\alpha_i$               | Não determinado | 0        |
| Tangente a borda superior                              | $-a_0^o$            | $\alpha_i$                | $180^o$         | 0        |
| Centro no contorno da Terra                            | 0                   | $(\alpha_i + \alpha_e)/2$ | $90^o$          | 1/2      |
| Tangente a borda inferior                              | $a_0^o$             | $\alpha_e$                | $0^o$           | 1        |
| Totalmente acima do contorno da Terra                  | $>a_0^o$            | $<\alpha_e$               | Não determinado | 1        |

**4.3 - Função Sombra Física**

**4.3.1 - Parâmetros Envolvidos no Conceito da Função Sombra Física**

Na determinação da função sombra física é analisado o efeito da iluminação de entrada e saída dos raios solares na atmosfera da Terra. Os parâmetros  $E$  e  $E^*$  que representam esta iluminação são mostrados na Figura 19, sendo que vários parâmetros auxiliares são similares a parâmetros introduzidos na análise da função geométrica.







$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^* \cdot \psi_f \quad (42)$$

Pode-se então assumir por Kabelac (1988), que  $\mathbf{F}/\mathbf{F}^* = \mathbf{E}/\mathbf{E}^*$ , onde  $\mathbf{E}/\mathbf{E}^* = \psi_f$  representa a função sombra física. Assim, comparando as equações (41) e (42) tem-se que a força de radiação solar torna-se:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^* \exp \left[ -2\beta M(90^\circ) \frac{b_h}{b_0} \right] \quad (43)$$

onde:

$$\psi_f = \exp \left[ -2\beta M(90^\circ) \frac{b_h}{b_0} \right] \quad (44)$$

Da mesma forma que a função sombra geométrica  $\psi_g$ , a função física  $\psi_f$  também assume valores no intervalo  $[0,1]$  como visto em Kabelac (1988), ou seja:

- Dentro do cone  $k_i$ ,  $\psi_f = 0$  (sombra);
- fora do cone  $k_i$  e dentro do cone  $k_e$ ,  $0 < \psi_f \leq 1$  (penumbra);
- fora do cone  $k_e$  e dentro do cone  $k_E$ ,  $0 < \psi_f < 1$ ;
- fora do cone  $k_E$ ,  $\psi_f = 1$  (totalmente iluminado).

#### 4.3.2 - Análise da Função Sombra Física

Baseado nos estudos de eclipses lunares realizados por Link (1956), pode-se assumir que:

$$\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{E}^*} = 10^{(-d_1 - d_2 - d_3 - d_4)} \quad (45)$$

de modo que:

$$\psi_f = \psi_{f1} \psi_{f2} \psi_{f3} \psi_{f4} \quad (46)$$

Na equação (45) o expoente  $d_1$  leva em conta a influência da refração, a qual causa a dispersão do raio nas extremidades dos cones de sombra. Desta forma, pode-se definir a seguinte relação dada em Kabelac (1988):

$$d_1 = -\log \frac{I}{I + 2d\Delta P_{90,h}} \quad (47)$$

Das equações (46) e (47) tem-se:

$$\psi_{f1} = (I + 2d\Delta P_{90,h})^{-1} \quad (48)$$

O expoente  $d_2$ , na equação (45) leva em conta a absorção atmosférica, podendo ser obtido através de Kabelac (1988) por:

$$d_2 = \frac{I}{\text{Mod } b_0} \cdot 6,825 \cdot 10^{-6} \cdot \lambda^{-4} \cdot b_h \quad (49)$$

em que  $\text{Mod } b_0 = 2,3036$  é o módulo do logaritmo natural de  $b_0$ . Portanto, pelas equações (45), (46) e (49) tem-se:

$$\psi_{f2} = \exp(6,825 \cdot 10^{-6} \cdot \lambda^{-4} \cdot b_h) \quad (50)$$

A expressão (50) mostra o decréscimo da intensidade da luz do raio solar, que passa através da atmosfera da Terra na altura  $h$ , devido à absorção atmosférica.

Os expoentes  $d_3$  e  $d_4$  na equação (45) consideram respectivamente a influência da difusão da luz e o efeito da camada de ozônio, sendo que pelas equações (45) e (46) tem-se:

$$\psi_{\beta} = 10^{-d_3} \quad (51)$$

$$\psi_{f4} = 10^{-d_4} \quad (52)$$

Para o comprimento de onda  $\lambda = 540$  nm, os valores dos expoentes  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $d_4$  estão tabelados em função da altura  $h$  na Tabela 2 (Kabelac, 1988). Esta tabela contém todos os valores necessários para o cálculo da função física  $\psi_f$ , através da equação (46), que implica na dependência da altura  $h$ . Esta dependência torna-se mais marcante se levar em conta os raios solares atingem as camadas da atmosfera terrestre de alturas que variam de zero até várias dezenas de quilômetros.

As órbitas de satélites artificiais possuem altitudes, em relação a superfície da Terra, em geral maiores que 400 km. Assim, para levar-se em conta a influência da atmosfera da Terra no raio de luz que atingirá a superfície do satélite, é assumido um fator variante na região que sofre a incidência destes raios atenuados.

Como ilustra a Tabela 2, para alturas de zero a 100 km acima da superfície da Terra, os raios solares que atravessam a atmosfera terrestre, fazem com que os raios incidentes na superfície do satélite sejam atenuados gradativamente devido a atmosfera da Terra, quando o satélite se posiciona na região de penumbra, ou seja:

- Quanto menor a altura  $h$ , ou seja, mais próximo da superfície da Terra mais densa é a atmosfera terrestre e mais atenuados serão os raios solares que atingem a superfície do satélite. Portanto, a função sombra física neste caso terá menor valor;



- Enquanto esta altura  $h$  aumenta, ou seja, mais distante da superfície da Terra, a atmosfera se torna menos densa, influenciando menos os raios solares que atingem a superfície do satélite em órbita. Assim, neste caso, a função sombra física terá maior valor.

Utilizando os valores fornecidos na Tabela 2 e a equação (46), a função física  $\psi_f$  está mapeada na Figura 20. Por esta figura verifica-se que:

- ♦  $\psi_f = 0$ , para  $h = 0$  km;
- ♦  $0 < \psi_f < 1$ , para  $0 < h < 100$  km;
- ♦  $\psi_f = 1$ , para  $h = 100$  km.

Pelos valores da Tabela 2, pode-se concluir que a partir de  $h = 80$  km, os expoentes  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  e  $d_4$  se anulam, de modo que  $\psi_f = 1$ .

Para incluir o efeito de função sombra física na trajetória do satélite, é considerado que:

- o efeito maior é na passagem da região de penumbra para a região de sombra (ou vice-versa), onde  $\psi_f = 0$ , pois o efeito da atmosfera é maior;
- o efeito menor é na passagem da região de penumbra para a região totalmente iluminada (ou vice-versa), onde  $\psi_f = 1$ , sendo o efeito da atmosfera menor;
- na região de penumbra, a função física assumirá valores entre 0 e 1.

Os instantes de entrada e saída da sombra e penumbra, podem ser considerados como aqueles em que a função geométrica  $\psi_g$  assume os valores 0 e 1. Durante a região de penumbra, se o satélite vai da região de sombra ( $\psi_f = 0$ ) para região totalmente iluminada ( $\psi_f = 1$ ), a função física assume um valor variante, que será nesta ordem, crescente ( $0 < \psi_f < 1$ ). Estes valores poderão ser obtidos na Tabela 3, desde que se considere o comprimento de onda  $\lambda = 540$  nm.

**TABELA 2:** Valores necessários para o cálculo da função sombra física,  
com  $R_T = 6400 \text{ km}$  e  $M(0^\circ) = 1$

**Fonte:** ( Kabelac, 1988)

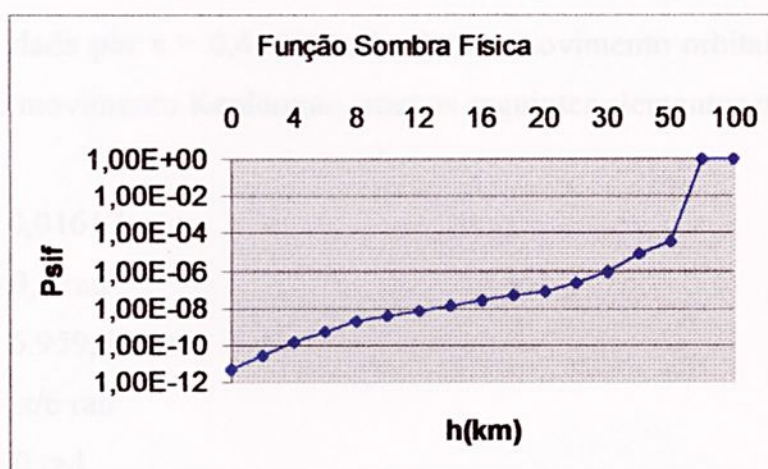
| <i>Altura h</i><br>[km] | $2P_{90,h}$<br>[''] | $2\Delta P_{90,h}R_T$<br>[''] | $2M(90^\circ)$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ |
|-------------------------|---------------------|-------------------------------|----------------|-------|-------|-------|
| 0                       | 69.80               | 55350                         | 76.84          | 3.50  | 0.31  | 0.14  |
| 2                       | 55.72               | 43350                         | 60.64          | 2.79  |       |       |
| 4                       | 45.08               | 33300                         | 47.51          | 2.18  | 0.33  | 0.14  |
| 6                       | 36.56               | 25120                         | 37.02          | 1.70  |       |       |
| 8                       | 30.42               | 19310                         | 28.44          | 1.31  |       |       |
| 10                      | 25.19               | 17600                         | 21.39          | 0.98  | 0.34  | 0.14  |
| 12                      | 19.66               | 18120                         | 15.60          | 0.75  |       |       |
| 14                      | 14.27               | 15700                         | 11.43          | 0.53  |       |       |
| 16                      | 10.37               | 10860                         | 8.40           | 0.39  | 0.34  | 0.14  |
| 18                      | 7.59                | 7760                          | 6.09           | 0.28  |       |       |
| 20                      | 5.58                | 5550                          | 4.45           | 0.20  | 0.32  | 0.13  |
| 25                      | 2.56                | 2536                          | 2.04           | 0.09  | 0.29  | 0.13  |
| 30                      | 1.14                | 1108                          | 0.94           | 0.04  | 0.18  | 0.12  |
| 40                      | 0.24                | 229                           | 0.22           | 0.01  | 0.01  | 0.10  |
| 50                      | 0.06                | 47                            | 0.06           | 0.00  | 0.00  | 0.10  |
| 70                      | 0.00                | 0                             | 0.00           | 0.00  | 0.00  | 0.01  |
| 100                     | 0.00                | 0                             | 0.00           | 0.00  | 0.00  | 0.00  |



**TABELA 3:** Valores obtidos através dos dados da Tabela 2.

| $h$ | $\psi_{f1}$ | $\psi_{f2}$ | $\psi_{f3}$ | $\psi_{f4}$ | $\psi_f$ |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|----------|
| 0   | 3,92E-08    | 3,16E-04    | 4,90E-01    | 7,24E-01    | 4,40E-12 |
| 2   | 5,01E-08    | 1,62E-03    | 4,90E-01    | 7,24E-01    | 2,88E-11 |
| 4   | 6,52E-08    | 6,61E-03    | 4,68E-01    | 7,24E-01    | 1,46E-10 |
| 6   | 8,65E-08    | 2,00E-02    | 4,68E-01    | 7,24E-01    | 5,84E-10 |
| 8   | 1,12E-07    | 4,90E-02    | 4,68E-01    | 7,24E-01    | 1,87E-09 |
| 10  | 1,23E-07    | 1,05E-01    | 4,57E-01    | 7,24E-01    | 4,28E-09 |
| 12  | 1,20E-07    | 1,78E-01    | 4,57E-01    | 7,24E-01    | 7,06E-09 |
| 14  | 1,38E-07    | 2,95E-01    | 4,57E-01    | 7,24E-01    | 1,35E-08 |
| 16  | 2,00E-07    | 4,07E-01    | 4,57E-01    | 7,24E-01    | 2,70E-08 |
| 18  | 2,80E-07    | 5,25E-01    | 4,57E-01    | 7,24E-01    | 4,86E-08 |
| 20  | 3,91E-07    | 6,31E-01    | 4,79E-01    | 7,41E-01    | 8,76E-08 |
| 25  | 8,56E-07    | 8,13E-01    | 5,13E-01    | 7,41E-01    | 2,65E-07 |
| 30  | 1,96E-06    | 9,12E-01    | 6,61E-01    | 7,59E-01    | 8,96E-07 |
| 40  | 9,48E-06    | 9,77E-01    | 9,77E-01    | 7,94E-01    | 7,19E-06 |
| 50  | 4,62E-05    | 1,00E+00    | 1,00E+00    | 7,94E-01    | 3,67E-05 |
| 70  | 1,00E+00    | 1,00E+00    | 1,00E+00    | 9,77E-01    | 9,77E-01 |
| 100 | 1,00E+00    | 1,00E+00    | 1,00E+00    | 1,00E+00    | 1,00E+00 |

Os valores obtidos na Tabela 3 foram implementados no software MATLAB e plotados por meio do Microsoft Excel, podendo ser comprovado o comportamento da função sombra física na Figura 20.

**FIGURA 20:** Gráfico da função sombra física obtido a partir dos valores da Tabela 3



## CAPÍTULO 5

### IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DA FUNÇÃO SOMBRA GEOMÉTRICA

Utilizando o software MATLAB, de acordo com parâmetros utilizados no modelo de Kabelac (1988) a função sombra geométrica é mapeada, de modo que se possa notar a passagem pela região de penumbra, para características do satélite artificial considerado.

#### 5.1 - Características do Satélite Artificial

No Capítulo 4, foram estudados todos os parâmetros envolvidos na análise da função sombra geométrica, podendo a partir daí calcular seu valor durante o movimento do satélite em sua órbita ao redor da Terra .

Considera-se o satélite em uma órbita conhecida, dada pelo Problema de Dois Corpos (P2C), sendo que as componentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  do vetor posição satélite-Terra ( $\mathbf{r}$ ) no sistema Terra-Sol são dadas pelas equações (33), (34) e (35), dependendo dos elementos orbitais ( $w$ ,  $v$ ,  $I'$ ,  $\Omega$ ), da obliquidade da Eclíptica  $\varepsilon$  e da longitude do Sol  $\lambda_O$ . É assumido a obliquidade da Eclíptica constante e dada por  $\varepsilon = 0,41015$  rad. Para o movimento orbital do satélite assume-se o movimento Kepleriano, com os seguintes elementos orbitais para o satélite:

- $e = 0,01617$
- $I' = 0,5$  rad
- $a = 6.959,64$  km
- $\Omega = \pi/6$  rad
- $w = 0$  rad
- $v = 0$  rad
- *período orbital* = 5.778 s
- *período de rotação* = 255 s

## 5.2 - Mapeamento da Função Sombra Geométrica

Considerando o modelo de Kabelac (1988), discutido no Capítulo 4, a função sombra geométrica  $\psi_g$  dada pela equação (38) foi implementada numericamente, utilizando o software MATLAB. Na determinação do parâmetro  $\alpha$  dado pela equação (26), necessário no cálculo de  $\psi_g$ , utiliza-se o método de Newton-Rhapson.

A Tabela 4 apresenta os valores de  $\psi_g$  obtidos para o intervalo de tempo em que ocorre a 1ª passagem pela região de penumbra, correspondendo a saída da sombra. Assim, o gráfico de seu comportamento obtido por meio do Microsoft Excel, é mostrado na Figura 21. Pela Figura 21 pode-se verificar que para o satélite utilizado, a passagem pela penumbra é da ordem de 8 segundos, correspondendo a 3% do período de rotação do satélite.

A Tabela 5 foi construída da mesma forma que a Tabela 4, mas levando em conta a saída da região toda iluminada e entrada na sombra, verificando assim a 2ª passagem pela penumbra. Esta passagem ocorre próxima ao término de um período orbital. Assim, pode-se conferir seu comportamento pela Figura 22, verificando que a duração da passagem pela penumbra foi também da ordem de 8 segundos.

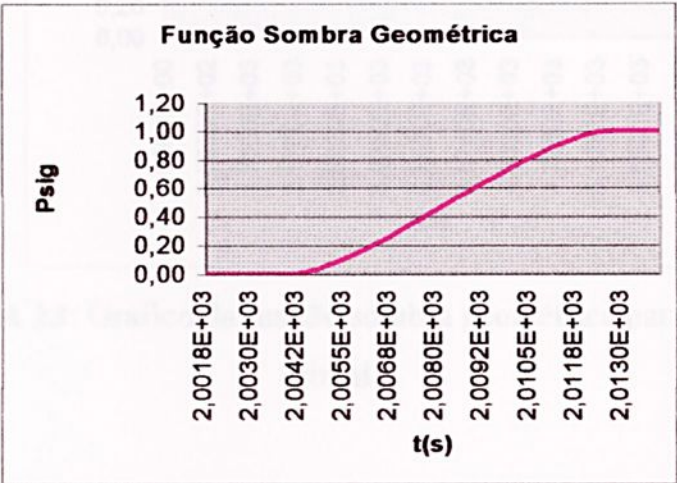


**TABELA 4:** Valores da Função Sombra Geométrica (Psig) obtidos para o primeiro intervalo de tempo da passagem pela penumbra.

| Tempo (s)  | Psig      |
|------------|-----------|
| 2,0035E+03 | 0,00      |
| 2,0040E+03 | 0,00      |
| 2,0045E+03 | 1,750E-02 |
| 2,0050E+03 | 5,702E-02 |
| 2,0055E+03 | 1,080E-01 |
| 2,0060E+03 | 1,670E-01 |
| 2,0065E+03 | 2,319E-01 |
| 2,0070E+03 | 3,010E-01 |
| 2,0075E+03 | 3,732E-01 |
| 2,0080E+03 | 4,471E-01 |
| 2,0085E+03 | 5,218E-01 |
| 2,0095E+03 | 6,694E-01 |
| 2,0100E+03 | 7,401E-01 |
| 2,0105E+03 | 8,070E-01 |
| 2,0110E+03 | 8,689E-01 |
| 2,0115E+03 | 9,236E-01 |
| 2,0120E+03 | 9,685E-01 |
| 2,0125E+03 | 9,977E-01 |
| 2,0130E+03 | 1,00      |
| 2,0135E+03 | 1,00      |

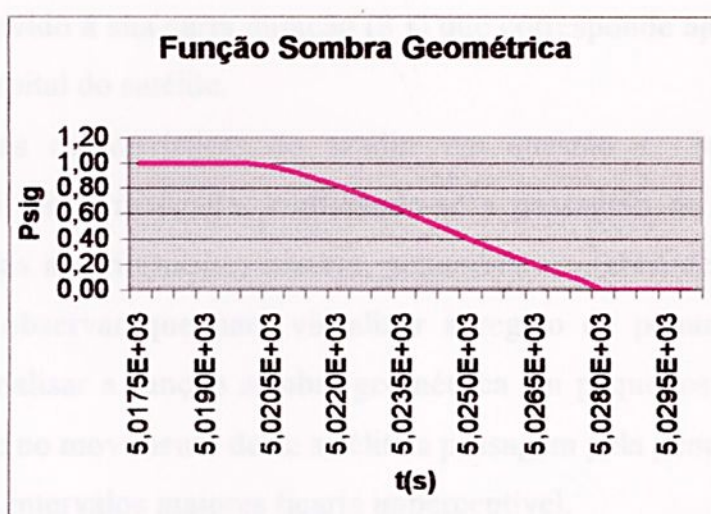
**TABELA 5:** Valores da Função Sombra Geométrica (Psig) obtidos para o segundo intervalo de tempo passagem pela penumbra

| Tempo (s)  | Psig      |
|------------|-----------|
| 5,0190E+03 | 1,00      |
| 5,0195E+03 | 1,00      |
| 5,0200E+03 | 9,986E-01 |
| 5,0205E+03 | 9,722E-01 |
| 5,0210E+03 | 9,302E-01 |
| 5,0215E+03 | 8,786E-01 |
| 5,0220E+03 | 8,199E-01 |
| 5,0225E+03 | 7,561E-01 |
| 5,0230E+03 | 6,883E-01 |
| 5,0235E+03 | 6,179E-01 |
| 5,0240E+03 | 5,459E-01 |
| 5,0245E+03 | 4,732E-01 |
| 5,0250E+03 | 4,008E-01 |
| 5,0255E+03 | 3,296E-01 |
| 5,0260E+03 | 2,607E-01 |
| 5,0265E+03 | 1,953E-01 |
| 5,0270E+03 | 1,347E-01 |
| 5,0280E+03 | 8,072E-02 |
| 5,0285E+03 | 0,00      |
| 5,0290E+03 | 0,00      |



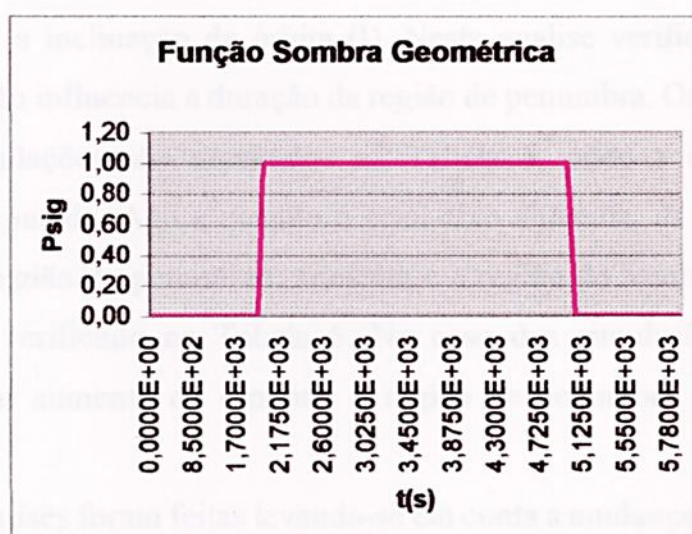
**FIGURA 21:** Gráfico da função sombra geométrica obtido através dos valores da Tabela 4





**FIGURA 22:** Gráfico da função sombra geométrica obtido através dos valores da Tabela 5

Sabe-se que entre os intervalos do instante do início e do término de um período orbital, mostrados nas Figuras 21 e 22, a função sombra geométrica assume valor "1".



**FIGURA 23:** Gráfico da função sombra geométrica para um período orbital

Na Figura 23 é apresentada a função sombra geométrica para um período orbital. Pelo gráfico desta figura não é observado a passagem pela

penumbra, devido a sua curta duração (8 s) que corresponde apenas a 0,14% do período orbital do satélite.

Com as características do satélite em questão a implementação numérica foi então realizada, verificando-se a passagem do satélite pelas regiões citadas anteriormente: sombra, penumbra e totalmente iluminada. É interessante observar que para visualizar a região de penumbra torna-se necessário analisar a função sombra geométrica em pequenos intervalos de tempo, já que no movimento deste satélite a passagem pela penumbra é muito rápida e para intervalos maiores ficaria imperceptível.

Como a passagem pela penumbra é muito rápida para o satélite considerado, outras simulações numéricas foram realizadas de modo a analisar a influência dos elementos orbitais sobre a duração de penumbra, assim como o posicionamento do Sol em outros pontos de sua órbita aparente em torno da Terra.

Os elementos orbitais manipulados são: a excentricidade ( $e$ ), o semi-eixo maior ( $a$ ) e a inclinação da órbita ( $I$ ). Nesta análise verifica-se que a excentricidade não influencia a duração da região de penumbra. Os resultados de algumas simulações são mostrados na Tabela 6, onde a duração da penumbra é computada. Agora quando o semi-eixo aumenta, as simulações mostram que a região de penumbra aumenta e a região de sombra diminui, como pode ser verificado na Tabela 6. No caso das simulações onde a inclinação orbital aumenta ou diminui, a região de penumbra também se altera.

Outras análises foram feitas levando-se em conta a mudança da posição do Sol na Eclíptica, para verificar a sua influência na região de penumbra. No entanto, verifica-se que esta influência é negligenciável nos casos analisados.



**TABELA 6:** Resultados de algumas simulações, para diferentes inclinações e semi-eixos.

| Semi-eixo (km) | Inclinação (rad) |      |        |
|----------------|------------------|------|--------|
|                | 0                | 0,5  | 1,2    |
| 7000           | 9 s              | 8 s  | 10,5 s |
| 8000           | 11,5 s           | 10 s | 15 s   |
| 9000           | 14,5 s           | 12 s | 22,5 s |
| 10000          | 18 s             | 14 s | 44,5 s |

Nos casos analisados pode-se também computar o tempo de duração das regiões de penumbra, de sombra e totalmente iluminada e comparar a duração dos mesmos em relação ao período orbital (PO). Sendo assim, é introduzido na Tabela 7, as características orbitais dos satélites considerados e nas Tabelas 8 a 11 apresenta-se os períodos de duração da penumbra, sombra e região iluminada para cada satélite, sendo  $\Delta T$  o intervalo de tempo de duração de cada passagem e % de PO a porcentagem de cada duração em relação ao período orbital

**TABELA 7:** Características orbitais do satélite

| Satélite | Semi-eixo maior (km) | Inclinação Orbital (rad) | Excentricidade | Período Orbital (s) |
|----------|----------------------|--------------------------|----------------|---------------------|
| A1       | 7000                 | 0                        | 0,01617        | 5829                |
| A2       | 7000                 | 0,5                      | 0,01617        | 5829                |
| A3       | 7000                 | 1,2                      | 0,01617        | 5829                |
| B1       | 8000                 | 0                        | 0,01617        | 7121                |
| B2       | 8000                 | 0,5                      | 0,01617        | 7121                |
| B3       | 8000                 | 1,2                      | 0,01617        | 7121                |
| C1       | 9000                 | 0                        | 0,01617        | 8498                |
| C2       | 9000                 | 0,5                      | 0,01617        | 8498                |
| C3       | 9000                 | 1,2                      | 0,01617        | 8498                |
| D1       | 10000                | 0                        | 0,01617        | 9953                |
| D2       | 10000                | 0,5                      | 0,01617        | 9953                |
| D3       | 10000                | 1,2                      | 0,01617        | 9953                |



**TABELA 8:** Intervalos de duração da penumbra, sombra e região iluminada para os satélites com semi-eixo igual a 7000 km (série A)

| Satélite A1 |                          |                    |                     |                    |                        |
|-------------|--------------------------|--------------------|---------------------|--------------------|------------------------|
|             | Intervalo Inicial Sombra | Intervalo Penumbra | Intervalo Iluminado | Intervalo Penumbra | Intervalo Final Sombra |
|             | 0 à 1927,5               | 1928 à 1937        | 1937,5 à 4974,5     | 4975 à 4974        | 4984,5 à 5829          |
| $\Delta T$  | 1927,5 s                 | 9 s                | 3037 s              | 9 s                | 844,5 s                |
| % de PO     | 33,07%                   | 0,15%              | 52,1%               | 0,15%              | 14,88%                 |
| Satélite A2 |                          |                    |                     |                    |                        |
|             | Intervalo Inicial Sombra | Intervalo Penumbra | Intervalo Iluminado | Intervalo Penumbra | Intervalo Final Sombra |
|             | 0 à 2009,5               | 2010 à 2018        | 2018,5 à 5050,5     | 5051 à 5059        | 5059,5 à 5829          |
| $\Delta T$  | 2009,5 s                 | 8 s                | 3032 s              | 8 s                | 769,5 s                |
| % de PO     | 34,47%                   | 0,14%              | 52,02%              | 0,14%              | 13,2%                  |
| Satélite A3 |                          |                    |                     |                    |                        |
|             | Intervalo Inicial Sombra | Intervalo Penumbra | Intervalo Iluminado | Intervalo Penumbra | Intervalo Final Sombra |
|             | 0 à 1776,5               | 1777 à 1787,5      | 1788 à 4831,5       | 4832 à 4843        | 4843,5 à 5829          |
| $\Delta T$  | 1776,5 s                 | 10,5 s             | 3043,5 s            | 10,5 s             | 985,5 s                |
| % de PO     | 30,48%                   | 0,18%              | 52,21%              | 0,18%              | 16,91%                 |

**TABELA 9:** Intervalos de duração da penumbra, sombra e região iluminada para os satélites com semi-eixo igual a 8000 km (série B).

| Satélite B1 |                             |                    |                  |                    |                           |
|-------------|-----------------------------|--------------------|------------------|--------------------|---------------------------|
|             | Intervalo Inicial Iluminado | Intervalo Penumbra | Intervalo Sombra | Intervalo Penumbra | Intervalo Final Iluminado |
|             | 0 à 205                     | 205,5 à 217        | 217,5 à 2078     | 2078,5 à 2090      | 2090,5 à 7121             |
| $\Delta T$  | 205 s                       | 11,5 s             | 1860,5 s         | 11,5 s             | 5030,5 s                  |
| % PO        | 2,88%                       | 0,16%              | 26,13%           | 0,16%              | 70,64%                    |
| Satélite B2 |                             |                    |                  |                    |                           |
|             | Intervalo Inicial Iluminado | Intervalo Penumbra | Intervalo Sombra | Intervalo Penumbra | Intervalo Final Iluminado |
|             | 0 à 181,5                   | 182 à 192          | 192,5 à 2210,5   | 2211 à 2221        | 2221,5 à 7121             |
| $\Delta T$  | 181,5 s                     | 10 s               | 2018 s           | 10 s               | 4899,5 s                  |
| % PO        | 2,55%                       | 0,14 %             | 28,34%           | 0,14%              | 68,80%                    |
| Satélite B3 |                             |                    |                  |                    |                           |
|             | Intervalo Inicial Iluminado | Intervalo Penumbra | Intervalo Sombra | Intervalo Penumbra | Intervalo Final Iluminado |
|             | 0 à 256                     | 256,5 à 271,5      | 272 à 1824,5     | 1825 à 1841        | 1841,5 à 7121             |
| $\Delta T$  | 256 s                       | 15 s               | 1552,5 s         | 15 s               | 5279,5 s                  |
| % PO        | 3,59%                       | 0,21%              | 21,80 %          | 0,21%              | 74,14%                    |



**TABELA 10:** Intervalos de duração da penumbra, sombra e região iluminada para os satélites com semi-eixo igual a 9000 km (série C) .

| Satélite C1 |                             |                    |                  |                    |                           |
|-------------|-----------------------------|--------------------|------------------|--------------------|---------------------------|
|             | Intervalo Inicial Iluminado | Intervalo Penumbra | Intervalo Sombra | Intervalo Penumbra | Intervalo Final Iluminado |
|             | 0 à 462,5                   | 463 à 477,5        | 478 à 2267       | 2267,5 à 2282      | 2282,5 à 8498             |
| $\Delta T$  | 462,5 s                     | 14,5 s             | 1789 s           | 14,5 s             | 6215,5 s                  |
| % PO        | 5,44%                       | 0,17%              | 21,05%           | 0,17%              | 73,14%                    |
| Satélite C2 |                             |                    |                  |                    |                           |
|             | Intervalo Inicial Iluminado | Intervalo Penumbra | Intervalo Sombra | Intervalo Penumbra | Intervalo Final Iluminado |
|             | 0 à 402,5                   | 403 à 415          | 415,5 à 2457     | 2457,5 à 2469,5    | 2470 à 8498               |
| $\Delta T$  | 402,5 s                     | 12 s               | 2041,5 s         | 12 s               | 6028 s                    |
| % PO        | 4,74%                       | 0,14 %             | 24,02%           | 0,14%              | 70,93%                    |
| Satélite C3 |                             |                    |                  |                    |                           |
|             | Intervalo Inicial Iluminado | Intervalo Penumbra | Intervalo Sombra | Intervalo Penumbra | Intervalo Final Iluminado |
|             | 0 à 611                     | 611,5 à 634        | 634,5 à 1874     | 1874,5 à 1897      | 1897,5 à 8498             |
| $\Delta T$  | 611 s                       | 22,5 s             | 1239,5 s         | 22,5 s             | 6600,5 s                  |
| % PO        | 7,19%                       | 0,27%              | 14,59%           | 0,27%              | 77,67%                    |



**TABELA 11:** Intervalos de duração da penumbra, sombra e região iluminada para os satélites com semi-eixo igual a 10000 km (série D).

| Satélite D1 |                             |                    |                  |                    |                           |
|-------------|-----------------------------|--------------------|------------------|--------------------|---------------------------|
|             | Intervalo Inicial Iluminado | Intervalo Penumbra | Intervalo Sombra | Intervalo Penumbra | Intervalo Final Iluminado |
|             | 0 à 732                     | 732,5 à 750,5      | 751 à 2467       | 2467,5 à 2485,5    | 2486 à 9953               |
| $\Delta T$  | 732 s                       | 18 s               | 1716 s           | 18 s               | 7467 s                    |
| % PO        | 7,35%                       | 0,18%              | 17,24%           | 0,18%              | 75,02%                    |
| Satélite D2 |                             |                    |                  |                    |                           |
|             | Intervalo Inicial Iluminado | Intervalo Penumbra | Intervalo Sombra | Intervalo Penumbra | Intervalo Final Iluminado |
|             | 0 à 625,5                   | 626 à 640          | 640,5 à 2726,5   | 2727 à 2741        | 2741,5 à 9953             |
| $\Delta T$  | 625,5 s                     | 14 s               | 2086 s           | 14 s               | 7211,5 s                  |
| % PO        | 6,28%                       | 0,14 %             | 20,96%           | 0,14%              | 72,46%                    |
| Satélite D3 |                             |                    |                  |                    |                           |
|             | Intervalo Inicial Iluminado | Intervalo Penumbra | Intervalo Sombra | Intervalo Penumbra | Intervalo Final Iluminado |
|             | 0 à 1061,5                  | 1062 à 1107,5      | 1108 à 1833,5    | 1834 à 1879,5      | 1880 à 9953               |
| $\Delta T$  | 1061,5 s                    | 45,5 s             | 725,5 s          | 45,5 s             | 8073 s                    |
| % PO        | 10,67%                      | 0,46%              | 7,29%            | 0,46%              | 81,11%                    |

Pelos valores apresentados nas Tabelas 8 a 11, é observado que quando a inclinação orbital é alterada, os períodos de duração da penumbra e região iluminada são afetados com o mesmo tipo de comportamento, ou seja, se a penumbra aumenta (diminui) a região iluminada aumenta (diminui). Com o aumento do semi-eixo do satélite a influência da inclinação é maior, ou seja, para satélites com semi-eixo maior de 7000 km (satélite série A) o aumento da inclinação de 0,5 rad para 1,2 rad aumenta a penumbra em 31,25%, enquanto para o satélite com semi-eixo de 10000 km (satélite série D) o aumento da penumbra é de 225%.



## CAPÍTULO 6

### ABORDAGEM SEMI-ANALÍTICA DO MOVIMENTO ROTACIONAL DE UM SATÉLITE ARTIFICIAL

Neste capítulo é apresentada uma solução analítica para o sistema de equações que descrevem o movimento de um satélite artificial sob a influência do torque de pressão de radiação solar direta. Uma abordagem semi-analítica também é apresentada para obter a atitude do satélite sob a influência do TPRS e da sombra da Terra. Um satélite de forma circular cilíndrica é considerado e as variáveis de Andoyer descrevem o movimento rotacional.

#### 6.1 - Comentários Iniciais

Utilizando o modelo da função sombra  $\psi$ , já anteriormente detalhada e mapeada, pode-se dar continuidade ao trabalho incluindo este efeito da sombra da Terra no movimento rotacional do satélite artificial. Para isso é feita a inclusão desta função sombra  $\psi$  nas equações do movimento, que foi apresentada na equação (13). A obtenção de uma solução para o sistema de equações do movimento é feita por um processo semi-analítico utilizando o mapeamento numérico da função sombra de Kabelac (1988) e a solução analítica de Zanardi (1994, 1999) para as regiões em que o satélite está parcialmente iluminado ou totalmente iluminado.

#### 6.2 - Movimento Rotacional Livre de Torques Externos

Para um satélite cilíndrico os momentos principais de inércia em torno dos eixos  $Ox$  e  $Oy$  são iguais ( $A=B$ ). Substituindo a Hamiltoniana associada a este movimento, dada por (8), nas equações do movimento rotacional (7), onde as parcelas  $S_i$  e  $P_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , não são consideradas, tem-se que:



$$\frac{dl_3}{dt} = 0 \quad (53a)$$

$$\frac{dl_1}{dt} = \left( \frac{I}{C} - \frac{I}{A} \right) L_1 \quad (53b)$$

$$\frac{dl_2}{dt} = \frac{L_2}{A} \quad (53c)$$

$$\frac{dl_1}{dt} = \frac{dl_2}{dt} = \frac{dl_3}{dt} = 0 \quad (53d)$$

Assim a solução para as equações do movimento quando não é considerada a atuação de torques externos é dada por:

$$L_1 = L_{10}, \quad L_2 = L_{20}, \quad L_3 = L_{30} \quad (54a)$$

$$l_3 = l_{30} \quad (54b)$$

$$l_1 = n_{10} \cdot t + l_{10} \quad (54c)$$

$$l_2 = n_{20} \cdot t + l_{20} \quad (54d)$$

em que:

$$n_{10} = \left( \frac{I}{C} - \frac{I}{A} \right) L_{10} \quad (54e)$$

$$n_{20} = \frac{L_{20}}{A} \quad (54f)$$

$l_{10}, l_{20}, l_{30}, L_{10}, L_{20}, L_{30}$  são condições iniciais para o instante  $t_0 = 0$ .

Pela solução apresentada (54) é observado que as variáveis  $l_1$  e  $l_2$  possuem variações lineares que estão associadas a rotação do satélite, enquanto o ângulo  $l_3$ , o módulo do momento angular de rotação  $L_2$ , e suas componentes  $L_1$  e  $L_3$  permanecem constantes. Esta solução representa a

conservação do momento angular de rotação na ausência de torques externos atuantes no satélite. A variação linear em  $l_2$  representa a precessão do eixo principal de inércia  $Oz$  em torno do vetor de momento angular  $L_2$  e a variação linear em  $l_1$  representa o deslocamento do eixo principal de inércia  $Ox$  no plano principal de inércia  $Oxy$  do satélite.

### 6.3 - Solução Analítica para o Satélite Iluminado

Uma solução analítica para o sistema de equações que descrevem o movimento rotacional de um satélite artificial sobre a influência da pressão de radiação solar direta será apresentada. O satélite é considerado de forma cilíndrico circular e o método utilizado para obter a solução analítica é o de Lagrange de variação de parâmetros.

Considerando o satélite sempre iluminado ( $\psi = 1$ ) e o efeito do torque de pressão de radiação solar direta sendo de ordem inferior ao movimento rotacional livre de torques externos, com a aplicação do método de Lagrange (Vilhena de Moraes, 1989) no sistema (7), usando a solução não perturbada (54), tem-se de Zanardi & Vilhena de Moraes (1999) que:

$$L_1 = \bar{L}_{10} \quad (55a)$$

$$L_k = \bar{L}_{k0} + \delta L_k, k = 2, 3 \quad (55b)$$

$$l_j = \bar{l}_{j0} + (\bar{n}_{j0} + \Delta \bar{n}_i) t + \delta l_j, j = 1, 2 \quad (55c)$$

$$l_3 = \bar{l}_{30} + \Delta \bar{n}_3 t + \delta l_3 \quad (55d)$$

em que:  $\bar{L}_{i0}$  e  $\bar{l}_{i0}$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) são constantes que dependem das condições

iniciais em  $t_0 = 0$ , sendo  $\bar{L}_{10} = L_{10}$ ;

$\delta L_k$  e  $\delta l_i$  são funções periódicas apresentadas no Apêndice 1;



$\bar{n}_j$  ( $j = 1, 2$ ) e  $\Delta \bar{n}_i$  são os coeficientes lineares associados com o problema livre de torques dados por (54e) e (54f) e com torque de pressão de radiação solar, respectivamente, com  $\Delta \bar{n}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) apresentado no Apêndice 1.

Esta solução mostra que:

- 1) a pressão de radiação solar não influencia a projeção do momento angular de rotação no eixo **Oz** do sistema principal de inércia do satélite cilíndrico;
- 2) o torque de pressão de radiação solar produz variações seculares e periódicas nas variáveis angulares  $l_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , mas produz somente variações periódicas no módulo do momento angular de rotação  $L_2$  e em sua projeção no eixo inercial **OZ**.

#### 6.4 - Abordagem Semi-Analítica

É apresentado aqui o processo semi-analítico onde é incluída a sombra da Terra na influência do torque de radiação solar. Este processo é similar ao apresentado em Vilhena de Moraes & Zanardi (1997), no qual a função sombra da Terra utilizada é um comutador que vale *um* quando o satélite se encontra na região totalmente iluminada e vale zero quando o satélite se posiciona na sombra da Terra. Esta função sombra depende dos parâmetros orbitais do satélite e da órbita aparente do Sol ao redor da Terra.

Este mesmo processo semi-analítico é aqui realizado considerando o mapeamento numérico da função sombra de Kabelac e a solução analítica de Zanardi (1999) para as regiões em que o satélite está fora da sombra da Terra.

No mapeamento da função sombra, realizado no Capítulo 5 e representado pela Figura 23, pode-se determinar os instantes de entrada e saída da sombra e da penumbra, de modo a se verificar os intervalos de tempo em



que o torque de radiação solar é atuante, ou seja nas regiões de penumbra e totalmente iluminado.

Sejam os seguintes instantes:

- $t_0$  é o instante inicial;
- $t_{ep1}$ ,  $t_{ep2}$  é a 1ª e 2ª entrada na penumbra;
- $t_{sp1}$ ,  $t_{sp2}$  é a 1ª e 2ª saída da penumbra;
- $t_{es}$  é entrada na sombra;
- $t_{ss}$  é a saída da sombra;
- $t_{el}$  é a entrada na região iluminada;
- $t_{sl}$  é saída da região iluminada;
- PO é o período orbital.

Para estes instantes, no intervalo de um período orbital (PO) e assumindo inicialmente que o satélite já se encontra na sombra em  $t_0$ , tem-se o seguinte algoritmo:

1. de  $t_0$  a  $t_{ss}$  o satélite se encontra na sombra da Terra e o TPRS se anula, não afetando as variáveis de Andoyer. Assim a função sombra assume o valor  $\psi = 0$ ;
2.  $t_{ep1}$  a  $t_{sp1}$  o satélite se encontra na região de penumbra e o TPRS é parcialmente atuante, afetando as variáveis de Andoyer. Portanto, a função sombra assume o valor  $0 < \psi < 1$ . Sendo a solução analítica apresentada no item 6.3 fatorada por  $\psi$  nas parcelas correspondentes do TPRS;
3.  $t_{el}$  a  $t_{sl}$  o satélite se encontra na região totalmente iluminada e o TPRS é totalmente atuante, também afetando as variáveis de Andoyer. Sendo que a função sombra assume o valor  $\psi = 1$ . Sendo a solução analítica dada por (55);

4.  $t_{ep2}$  a  $t_{sp2}$  o satélite se encontra novamente na região de penumbra, com o TPRS parcialmente atuante, utilizando novamente a solução analítica do item 6.3 com termos associados ao TPRS fatorado por  $\psi$ ;
5.  $t_{es}$  a  $T$  o satélite retorna a região de sombra e o TPRS é novamente nulo, com a solução dada por (54), terminando o período orbital e repetindo o processo.

No caso em que no instante inicial o satélite não se encontra na sombra, o algoritmo acima é facilmente adequado. Com a implementação numérica do processo semi-analítico espera-se suavizar o efeito que o TPRS causa nas variáveis de Andoyer nas passagens da sombra para a região iluminada (Vilhena de Moraes & Zanardi, 1997).

## 6.5 - Simulação Numérica da Abordagem Semi-Analítica

De modo a analisar a magnitude do torque de pressão de radiação solar é utilizado características de um satélite cilíndrico em órbita Kepleriana, com as características orbitais apresentadas no item 5.1. As características físicas e geométricas do satélite e as condições iniciais das variáveis de Andoyer que descrevem o movimento rotacional assumem os seguintes valores.

### ❖ Características físicas e geométricas

- $A = B = 3,9499 \times 10^5 \text{ kg.m}^2$
- $C = 1,0307 \times 10^5 \text{ kg.m}^2$
- $M = 11.550 \text{ kg}$

➤  $h_s = 18 \text{ m}$

➤  $\sigma = 4 \text{ m}$

❖ Variáveis de Andoyer no instante inicial

➤  $l_1 = l_2 = J_o = \pi/2 \text{ rad}$

➤  $l_3 = 5,87 \text{ rad}$

➤  $L_1 = 0$

➤  $L_2 = 9,7307 \times 10^3 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-1}$

➤  $L_3 = -2,9956 \times 10^3 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-1}$

➤  $I_o = 1,877 \text{ rad}$

➤ *período de rotação* = 255 s

Para ascensão reta  $\alpha_0$  e declinação  $\delta_0$  do Sol, devido ao intervalo de tempo considerado, adota-se uma variação linear dada por:

$$\alpha_0 = n_a t + \bar{\alpha}_0 \quad (56)$$

$$\delta_0 = n_\delta t + \bar{\delta}_0 \quad (57)$$

em que:

- $\bar{\delta}_0$  e  $\bar{\alpha}_0$  são os valores de  $\delta_0$  e  $\alpha_0$  no instante inicial;
- $n_a$  e  $n_\delta$  são estimados para o dia considerado, utilizando os dados fornecidos no Astronomical Almanac. Sendo aqui, arbitrariamente, dados por:

$$n_a = 2,1956 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$$

$$n_\delta = -2,6707 \times 10^{-8} \text{ rad/s}$$

$$\bar{\alpha}_0 = 4,369157 \text{ rad}$$

$$\bar{\delta}_0 = -0,387604 \text{ rad}$$

Com a implementação numérica do processo semi-analítico pode-se verificar a influência do TPRS nas variáveis de Andoyer nas passagens da



região de sombra para a totalmente iluminada levando-se em conta a região de penumbra.

Utilizando o software MATLAB são feitas implementações numéricas para verificar a variação das variáveis de Andoyer para os seguintes casos:

- Livre de torques externos ou seja sem incluir o TPRS;
- Com o TPRS atuante, mas não incluindo a função sombra de Kabelac (1988), assumindo o satélite sempre iluminado;
- Com o TPRS atuante e incluindo a função sombra de Kabelac.

Assim para os três casos citados foram construídos gráficos para comparação dos efeitos e suas magnitudes nas variáveis de Andoyer.

#### **6.5.1 - Movimento Rotacional Livre de Torques Externos e Movimento Rotacional com TPRS com Satélite Iluminado**

Inicialmente é realizada a comparação entre a solução analítica para o movimento livre de torques externos (MRLTE) e a solução analítica para o movimento rotacional incluindo o TPRS, sem a função sombra. Quando os torques externos não são incluídos, e para as características do satélite considerado, as variáveis angulares  $l_1$  e  $l_3$  permanecem constantes, assim como as variáveis métricas  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , enquanto a variável angular  $l_2$  possui uma variação linear. Deve-se observar que como o satélite é cilíndrico, o TPRS não afeta a variável  $L_1$ . Os gráficos da Figura 24 mostram o comportamento das variáveis de Andoyer  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  para o intervalo de 1000 s para o MRLTE e para o movimento rotacional com TPRS. A Figura 25 apresenta o comportamento de  $l_3$  para os intervalos de 0 a 1000 s e 0 a 30000 s, de modo a observar a variação linear devido ao TPRS.

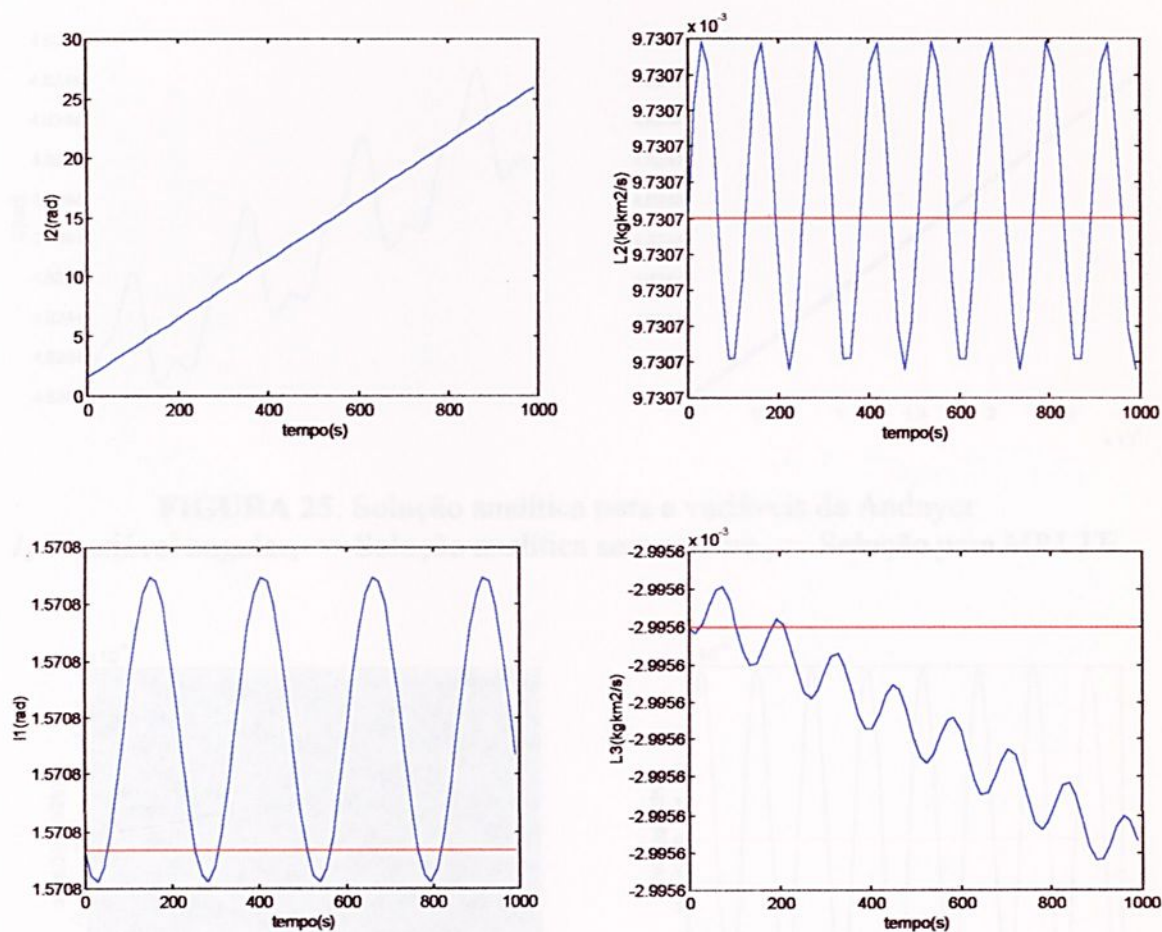
Na Figura 24, a variação linear na variável  $l_2$  no caso do MRTLE prevalece, sendo que a influência do TPRS pode ser melhor observada na Figura 27, que apresenta a diferença entre a solução analítica do MRLTE e a

solução analítica com TPRS para as variáveis de Andoyer  $l_1, l_2, l_3$ , para os intervalos de tempo de 0 a 1000 s e de 0 a 30000 s. Estas mesmas variações podem ser observadas para as variáveis métricas  $L_2, L_3$  na Figura 26. É importante observar que as variações periódicas podem ser melhor observadas ao intervalo de 0 a 1000 s. Deve-se salientar que apesar das Figuras 24 e 26 indicarem uma variação linear para  $L_3$ , esta variação faz parte de uma variação periódica de longo período, que pode ser observada na Figura 28, para o intervalo de tempo de 500000 s.

Pelos resultados apresentados tem-se que para o satélite considerando a influência do TPRS para o instante de 30000 s foi da ordem de  $10^{-8}$  rad para a variável  $l_1$ ,  $10^{-6}$  rad para  $l_2$  e  $l_3$ ,  $10^{-10}$  kgkm<sup>2</sup>/s para  $L_2$  e  $10^{-7}$  kgkm<sup>2</sup>/s para  $L_3$ . Estes resultados estão de acordo com Zanardi & Vilhena de Moraes (1999) e correspondem a magnitudes inferiores as influências do torque de gradiente de gravidade.

FIGURA 24: Solução Analítica para as variáveis de Andoyer  
 $l_1, l_2$  = variáveis angulares,  $L_2, L_3$  = variáveis métricas  
 -- Solução analítica com TPRS -- Solução para MRI TT



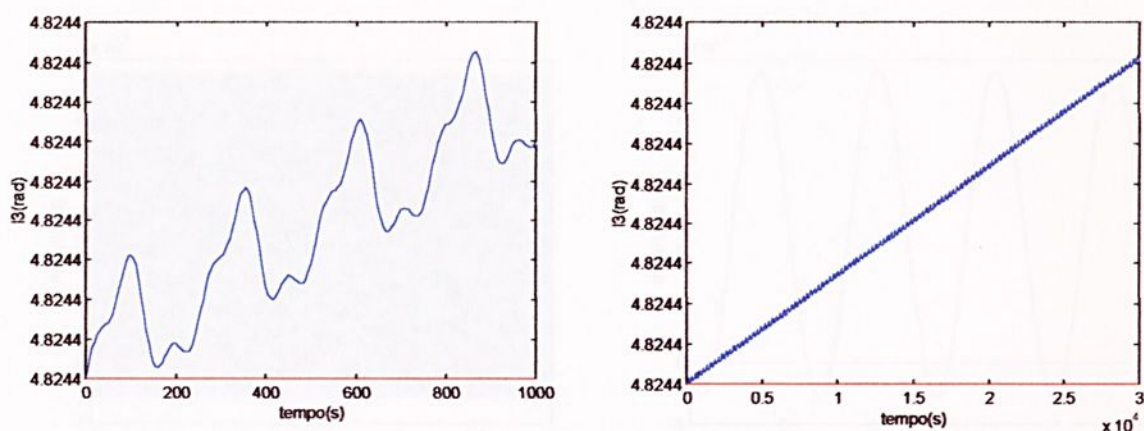


**FIGURA 24: Solução Analítica para as variáveis de Andoyer**

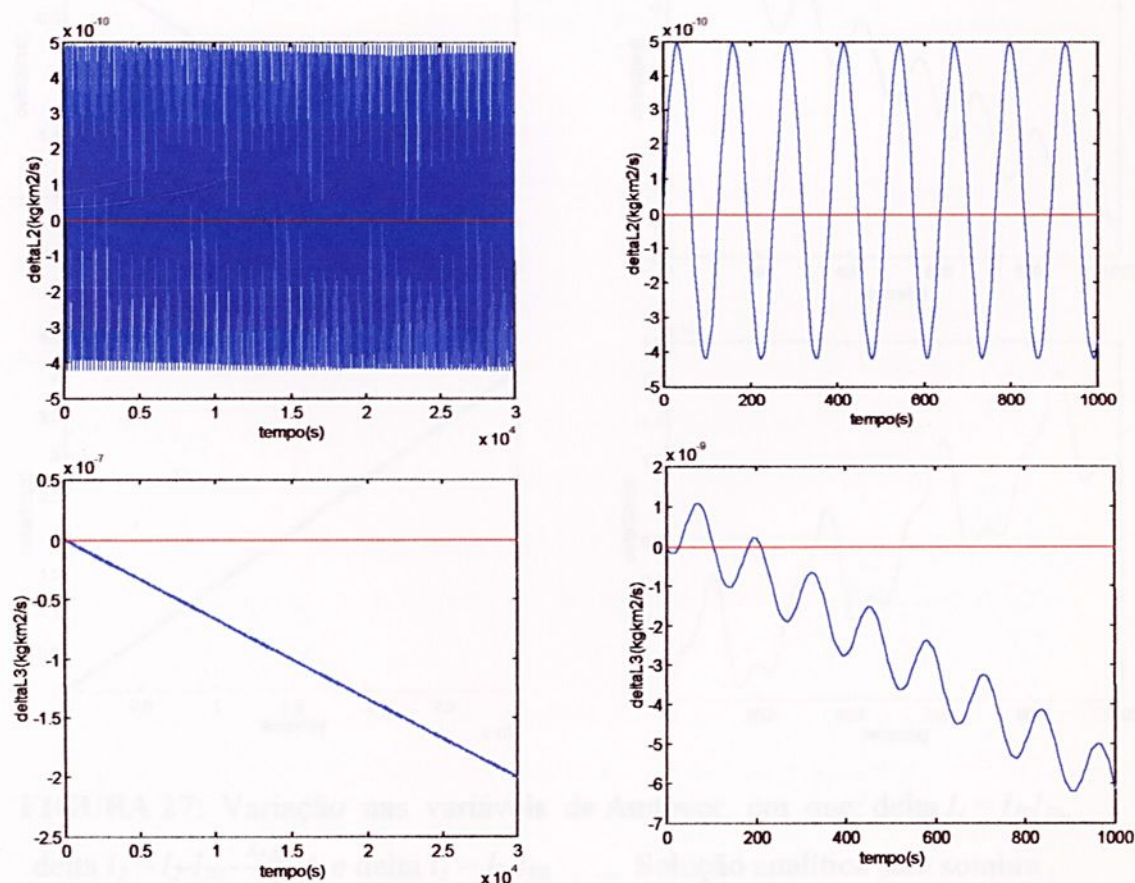
$l_1, l_2$  = variável angular,  $L_2, L_3$  = variável métrica

— Solução analítica sem sombra, — Solução para MRLTE

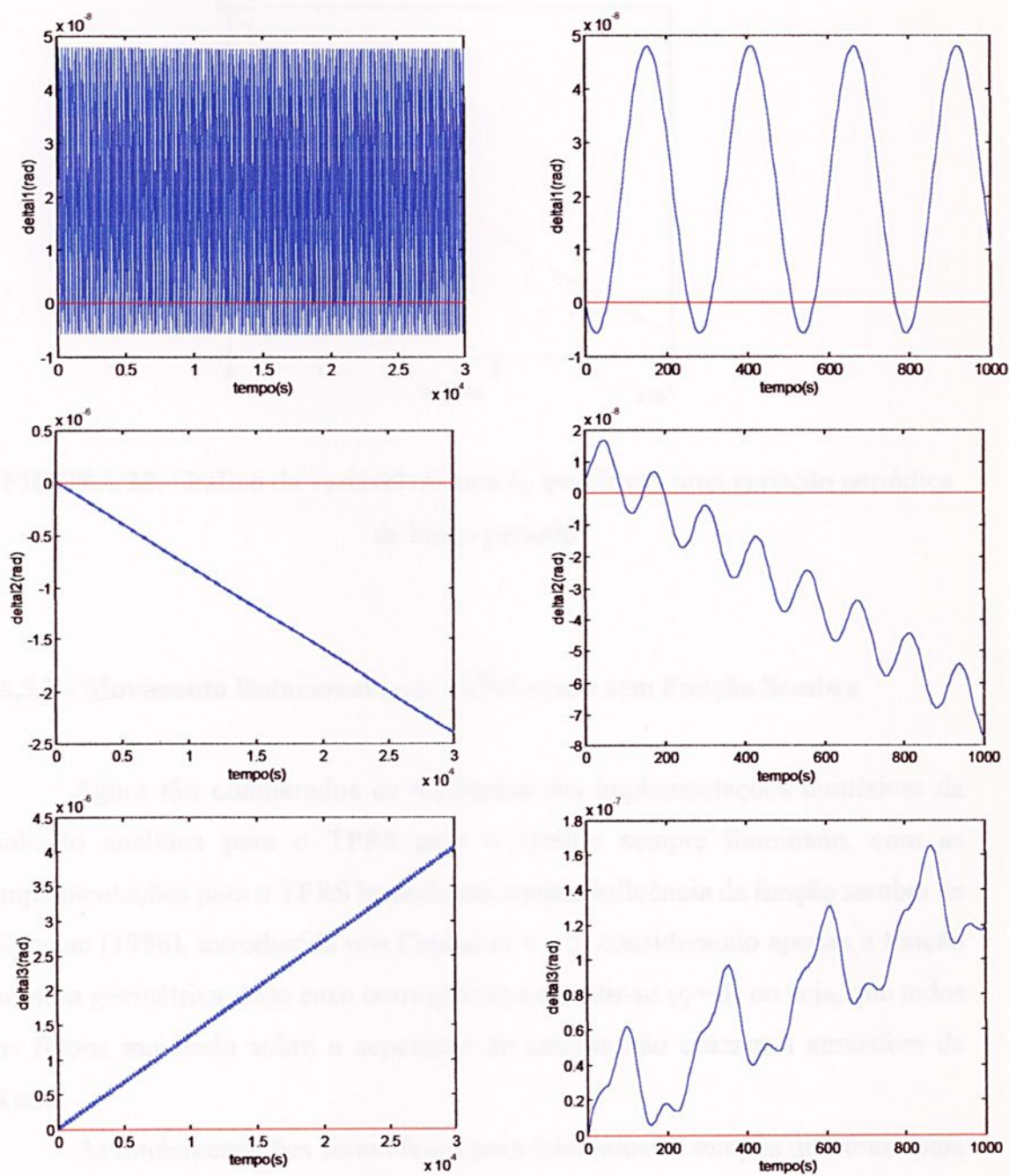




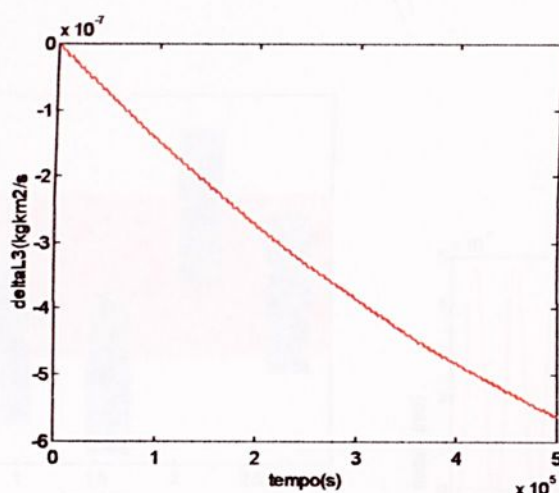
**FIGURA 25:** Solução analítica para a variáveis de Andoyer  
 $l_1$  = variável angular, — Solução analítica sem sombra, — Solução para MRLTE



**FIGURA 26:** Variação nas variáveis de Andoyer, em que:  $\delta L_2 = L_2 - L_{20}$ ,  
 $\delta L_3 = L_3 - L_{30}$ , — Solução analítica sem sombra, — Solução para MRLTE



**FIGURA 27:** Variação nas variáveis de Andoyer, em que:  $\delta l_1 = l_1 - l_{10}$ ,  $\delta l_2 = l_2 - l_{20} - \frac{L_{20}}{A} \cdot t$  e  $\delta l_3 = l_3 - l_{30}$ , — Solução analítica sem sombra, — Solução para MRLTE



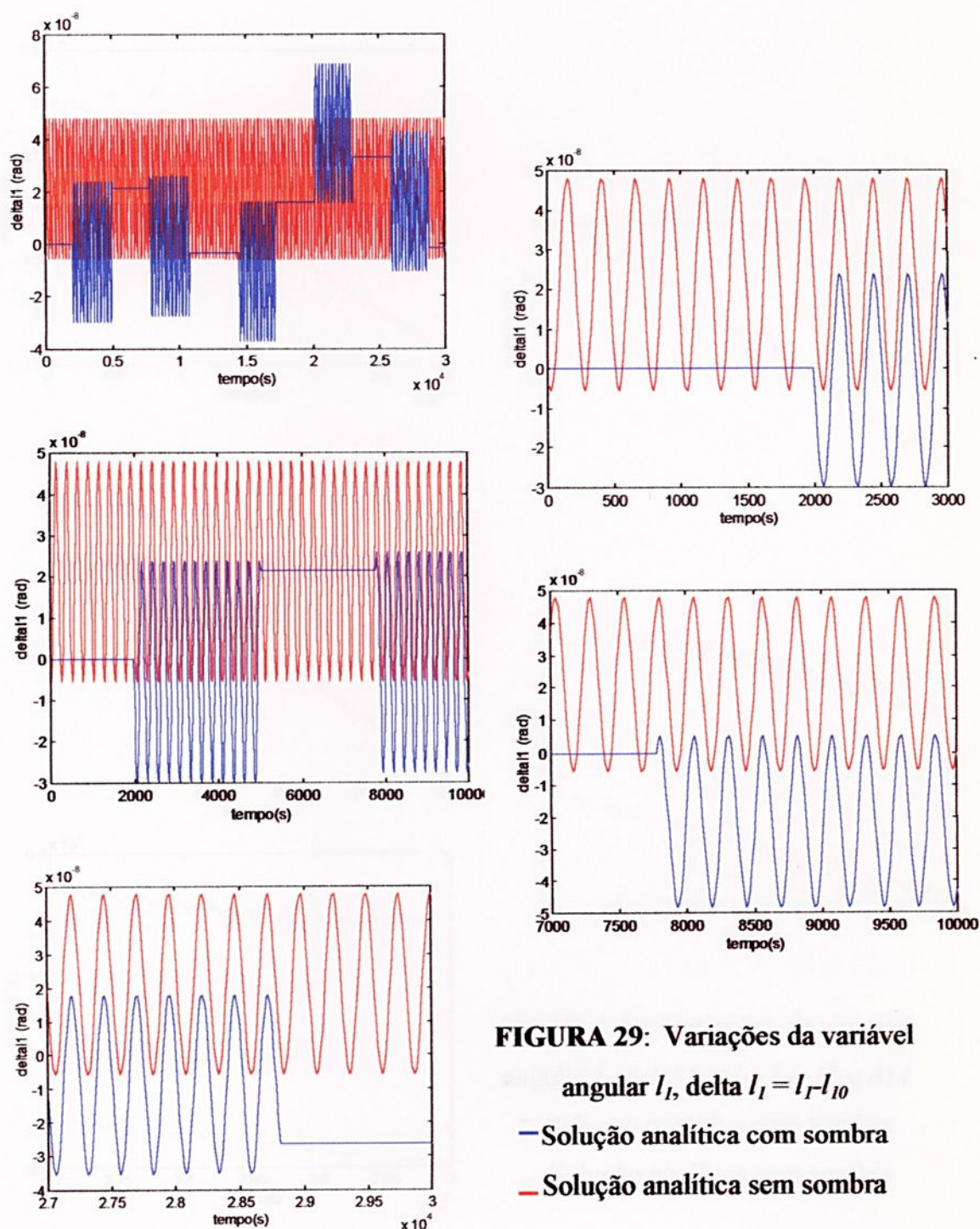
**FIGURA 28:** Gráfico da variável métrica  $L_3$  que ilustra uma variação periódica de longo período.

### 6.5.2 - Movimento Rotacional com TPRS com e sem Função Sombra

Agora são comparados os resultados das implementações numéricas da solução analítica para o TPRS para o satélite sempre iluminado, com as implementações para o TPRS levando em conta a influência da função sombra de Kabelac (1988), introduzida nos Capítulos 4 e 5, considerando apenas a função sombra geométrica. Este caso corresponde a admitir-se  $\psi_f = 1$ , ou seja, que todos os fótons incidindo sobre a superfície do satélite não cruzam a atmosfera da Terra.

As implementações foram feitas para intervalos de tempos diferentes para que se possa visualizar melhor o comportamento de cada uma das variáveis de Andoyer nos instantes de entrada e saída da sombra. Os intervalos considerados foram de 0 a 30000 s, 0 a 10000 s, 0 a 3000 s, 7000 a 10000 s e 27000 a 30000 s.

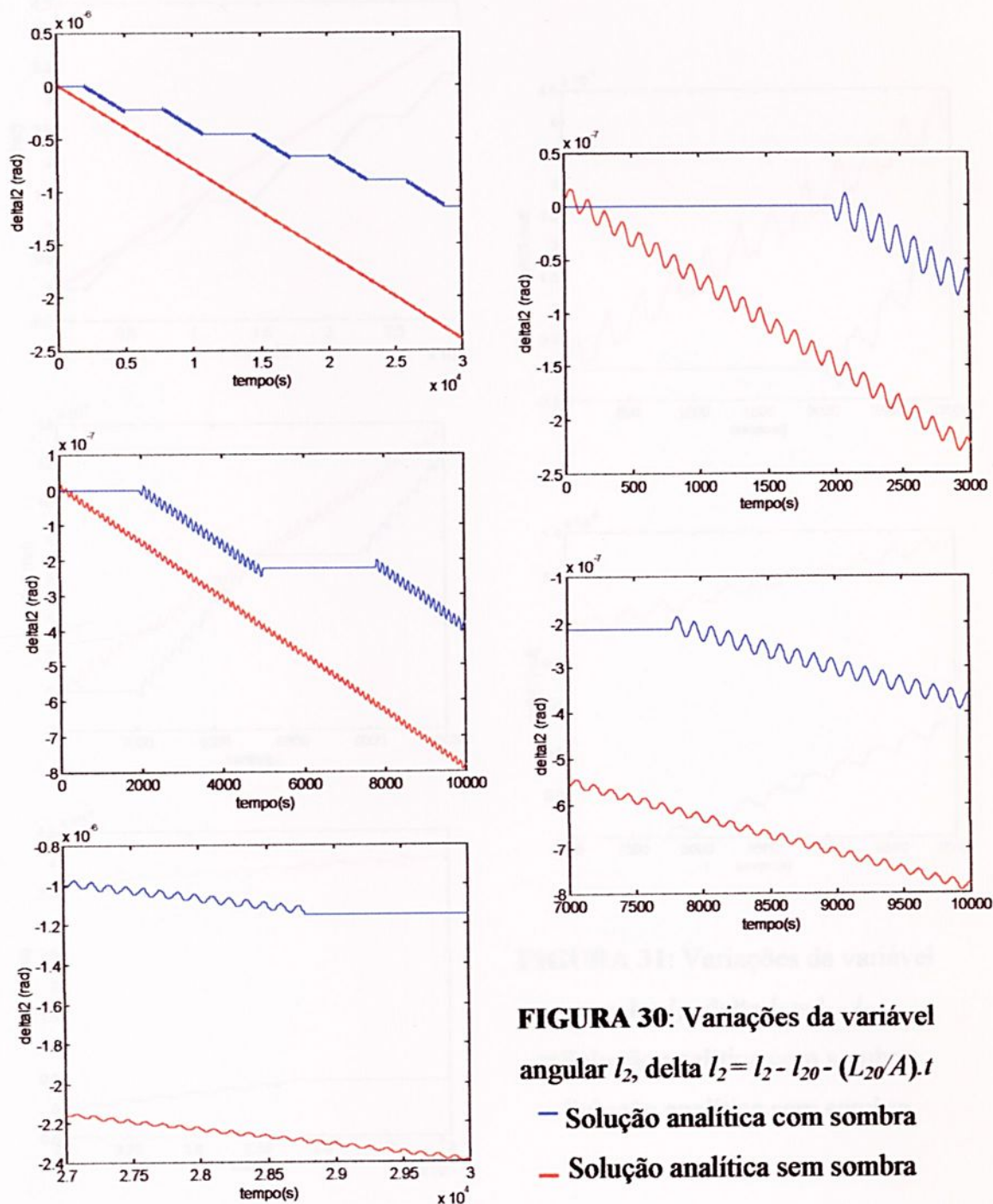




**FIGURA 29:** Variações da variável angular  $l_1$ ,  $\delta l_1 = l_1 - l_{10}$

— Solução analítica com sombra

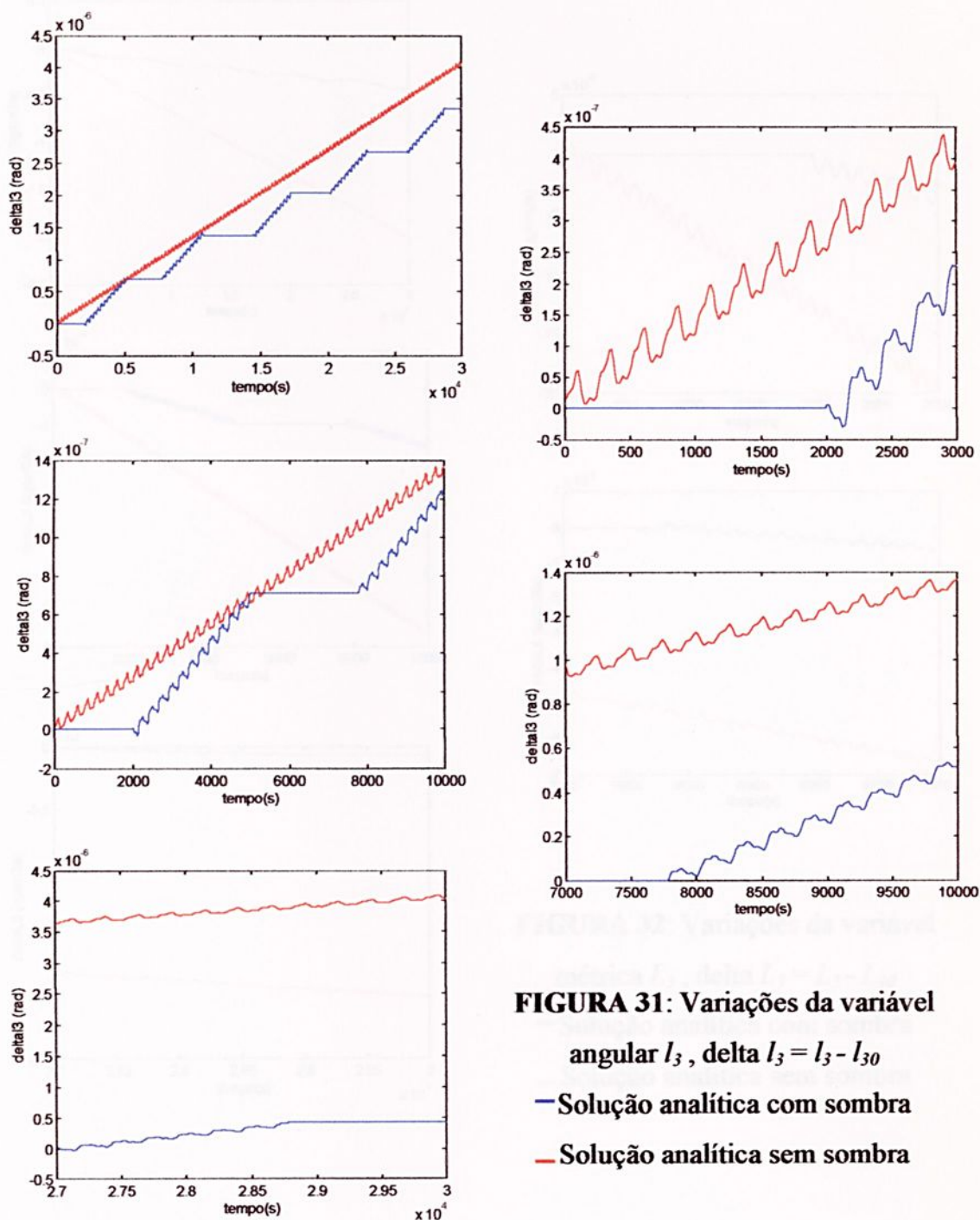
— Solução analítica sem sombra



**FIGURA 30:** Variações da variável angular  $l_2$ ,  $\text{delta } l_2 = l_2 - l_{20} - (L_{20}/A).t$

— Solução analítica com sombra

— Solução analítica sem sombra



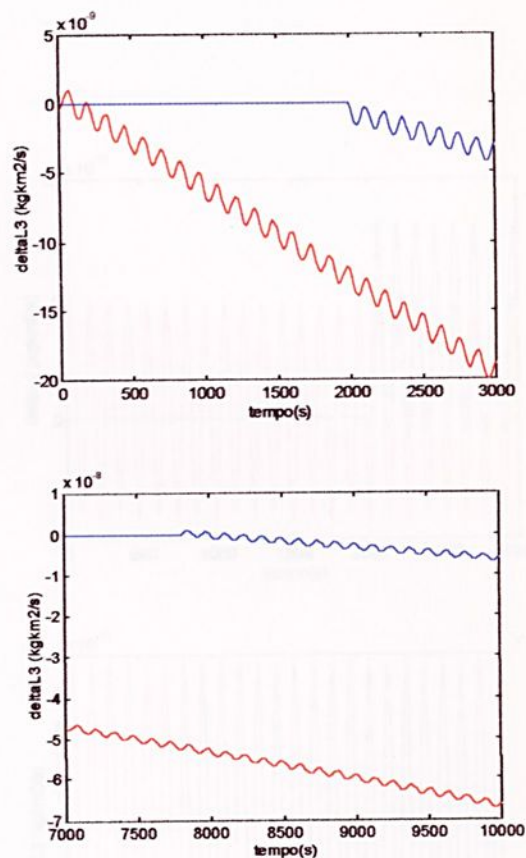
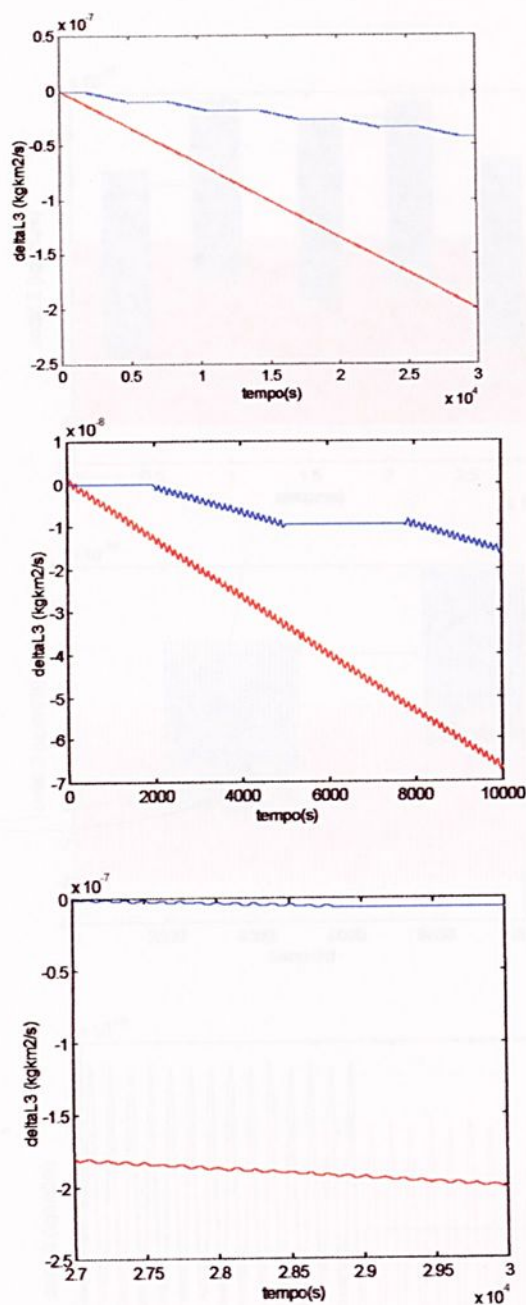
**FIGURA 31:** Variações da variável

angular  $l_3$ ,  $\delta l_3 = l_3 - l_{30}$

— Solução analítica com sombra

— Solução analítica sem sombra





**FIGURA 32:** Variações da variável

métrica  $L_3$ ,  $\delta L_3 = L_3 - L_{30}$

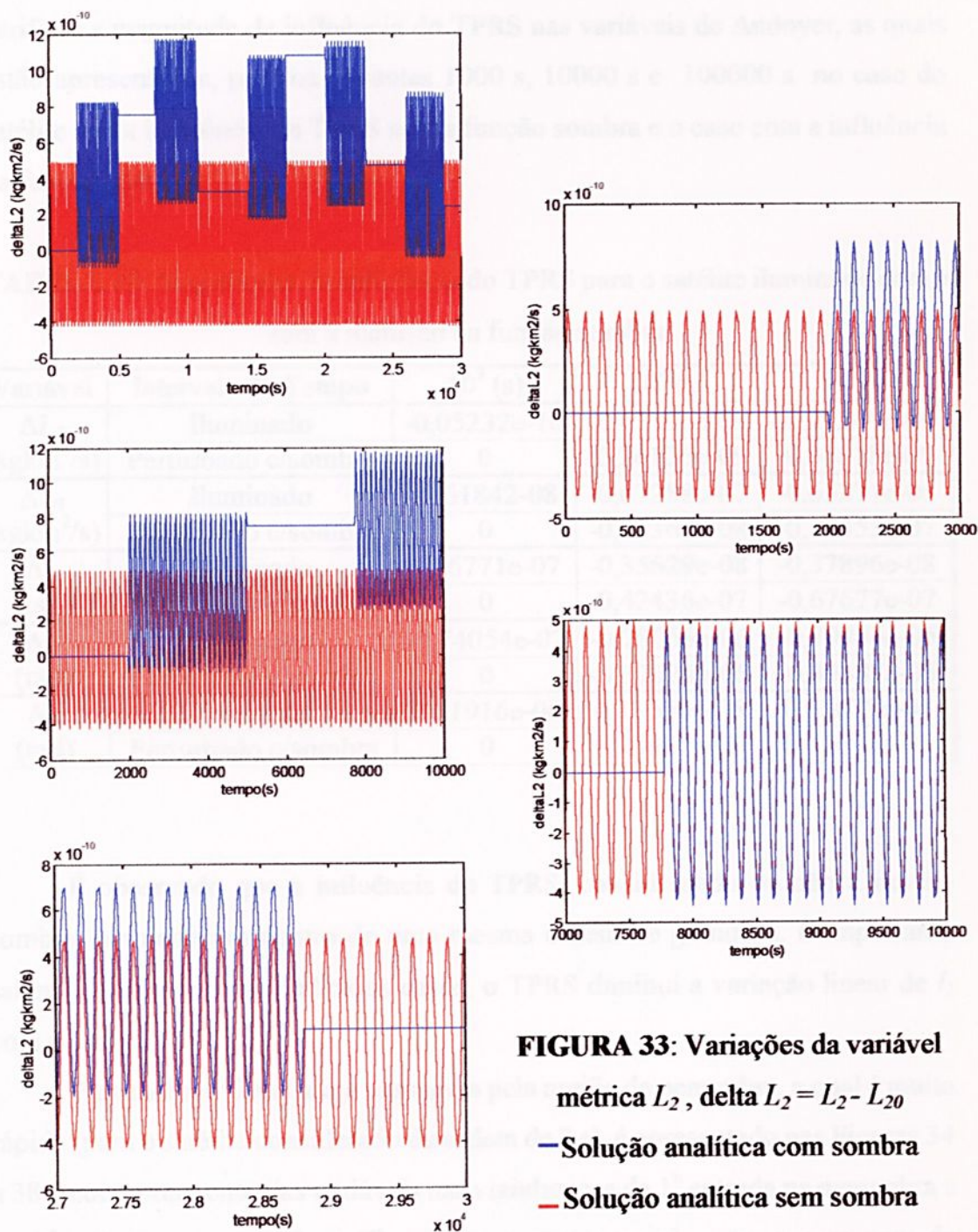
— Solução analítica com sombra

— Solução analítica sem sombra

FACULDADE DE ENGENHARIA  
DE GUARATINGUETÁ

BIBLIOTECA

00447



**FIGURA 33:** Variações da variável métrica  $L_2$ ,  $\text{delta } L_2 = L_2 - L_{20}$

- Solução analítica com sombra
- Solução analítica sem sombra



Com base nos resultados apresentados nas Figuras 29 a 33 pode-se verificar a magnitude da influência do TPRS nas variáveis de Andoyer, as quais estão apresentadas, para os instantes 1000 s, 10000 s e 100000 s no caso do satélite sob a influência do TPRS sem a função sombra e o caso com a influência da função sombra.

**TABELA 12:** Magnitudes da influência do TPRS para o satélite iluminado com e sem a inclusão da função sombra

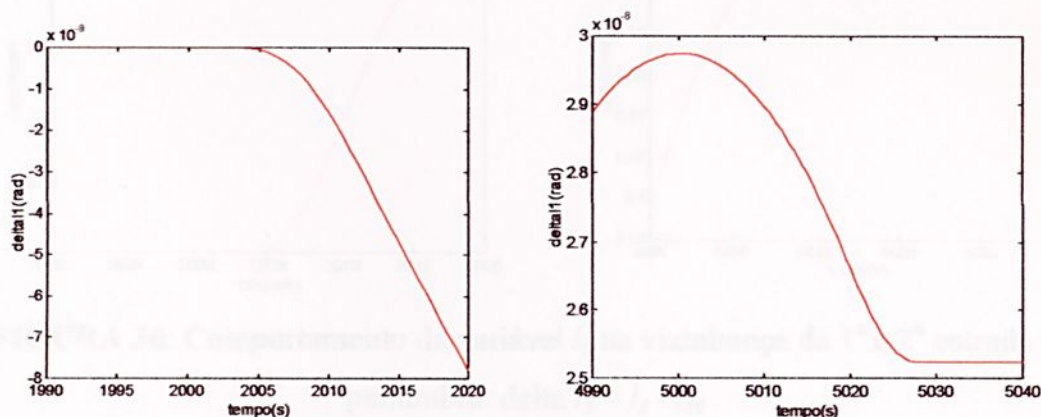
| Variável                               | Intervalo de Tempo  | $10^3$ (s)   | $10^4$ (s)   | $10^5$ (s)   |
|----------------------------------------|---------------------|--------------|--------------|--------------|
| $\Delta L_2$<br>(kgkm <sup>2</sup> /s) | Iluminado           | -0,05232e-10 | -0,42196e-09 | -0,27249e-09 |
|                                        | Perturbado c/sombra | 0            | 0,26126e-09  | 0,37818e-09  |
| $\Delta L_3$<br>(kgkm <sup>2</sup> /s) | Iluminado           | -0,61842e-08 | -0,67288e-07 | -0,65271e-06 |
|                                        | Perturbado c/sombra | 0            | -0,35367e-08 | -0,14353e-07 |
| $\Delta I_1$<br>(rad)                  | Iluminado           | 0,16771e-07  | -0,35629e-08 | -0,37896e-08 |
|                                        | Perturbado c/sombra | 0            | 0,42436e-07  | -0,67677e-07 |
| $\Delta I_2$<br>(rad)                  | Iluminado           | -0,74054e-07 | -0,78055e-06 | -0,79946e-05 |
|                                        | Perturbado c/sombra | 0            | -0,37624e-06 | -0,39487e-05 |
| $\Delta I_3$<br>(rad)                  | Iluminado           | 0,11916e-06  | 0,13650e-05  | 0,13679e-04  |
|                                        | Perturbado c/sombra | 0            | 0,23867e-06  | 0,11034e-05  |

É observado que a influência do TPRS, considerando ou não a função sombra, permanecem dentro de uma mesma ordem de grandeza. É importante salientar ainda que em ambos os casos, o TPRS diminui a variação linear de  $I_2$  com o tempo.

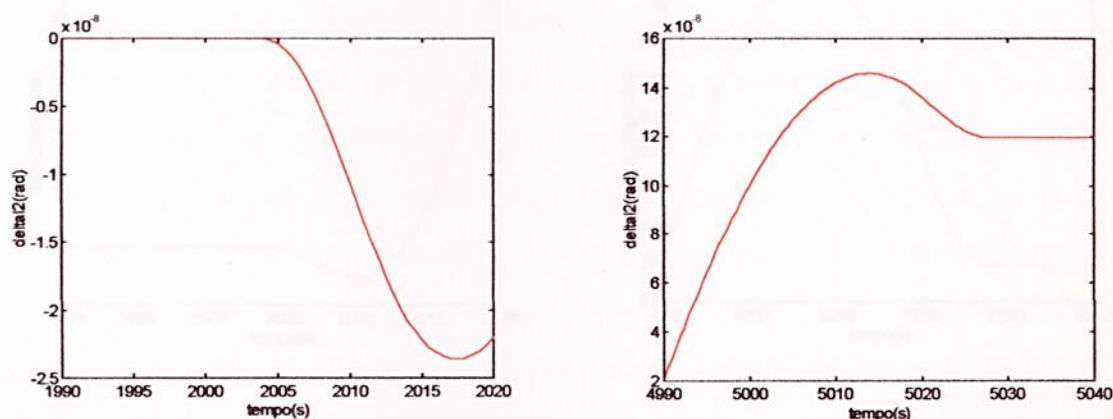
Para melhor visualizar a passagem pela região de penumbra, a qual é muito rápida (para o satélite considerado da ordem de 8 s), é apresentado nas Figuras 34 a 38 o comportamento das variáveis nas vizinhanças da 1ª entrada na penumbra e na 2ª entrada na penumbra. Observa-se, como esperado, que a passagem da sombra para a penumbra ( $t_{ep1} = 2004,5$  s), da penumbra para região iluminada



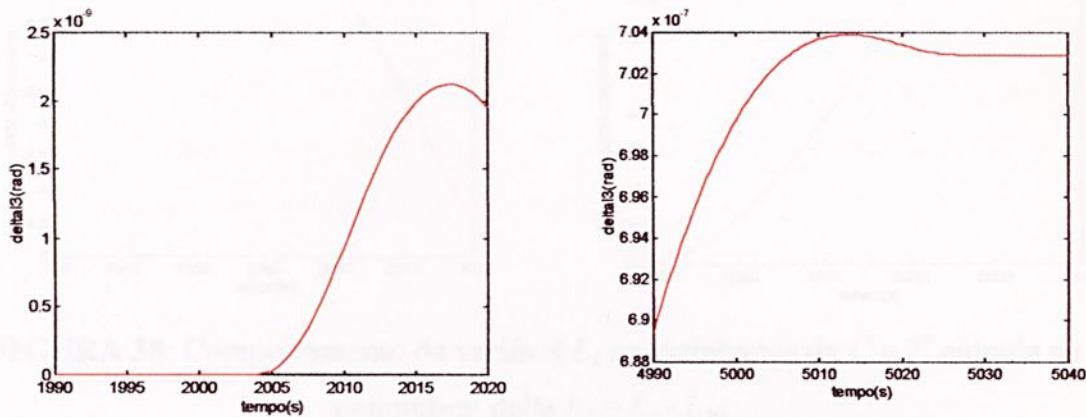
( $t_{sp1} = 2012,5$  s), da região iluminada para a penumbra ( $t_{ep2} = 5020$  s) e da região de penumbra para a sombra ( $t_{sp2} = 5028$  s) não tiveram variações bruscas.



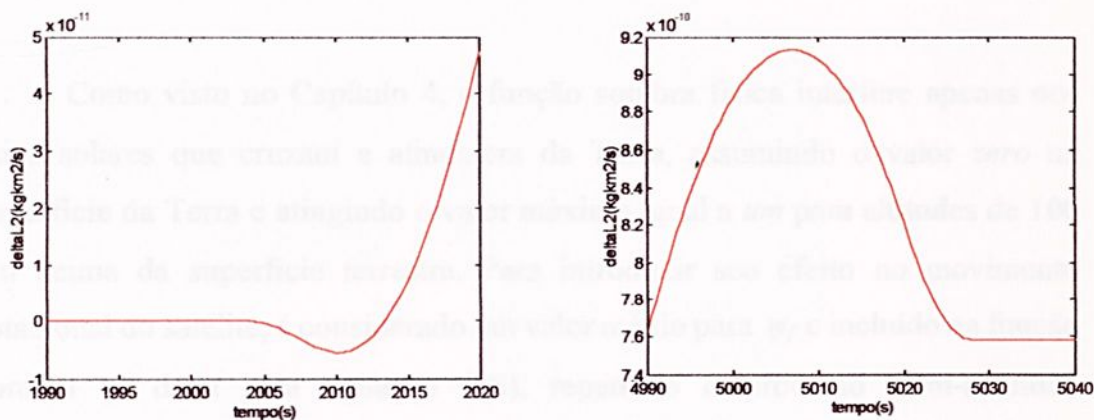
**FIGURA 34:** Comportamento da variável  $l_1$  na vizinhança da 1ª e 2ª entrada na penumbra:  $\delta l_1 = l_1 - l_{10}$ .



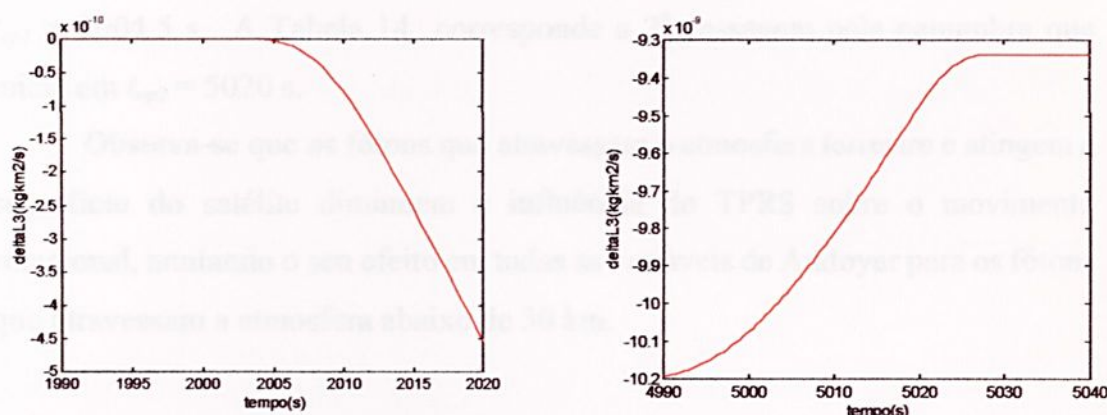
**FIGURA 35:** Comportamento da variável  $l_2$  na vizinhança da 1ª e 2ª entrada na penumbra:  $\delta l_2 = l_2 - l_{20} - (L_{20}/A) \cdot t$ .



**FIGURA 36:** Comportamento da variável  $l_3$  na vizinhança da 1ª e 2ª entrada na penumbra:  $\delta l_3 = l_3 - l_{30}$ .



**FIGURA 37:** Comportamento da variável  $L_2$  na vizinhança da 1ª e 2ª entrada na penumbra:  $\delta L_2 = L_2 - L_{20}$ .



**FIGURA 38:** Comportamento da variável  $L_3$  na vizinhança da 1ª e 2ª entrada na penumbra:  $\delta L_3 = L_3 - L_{30}$ .

## 6.6 - Movimento Rotacional com TPRS com Função Sombra Incluindo a Função Sombra Física

Como visto no Capítulo 4, a função sombra física interfere apenas nos raios solares que cruzam a atmosfera da Terra, assumindo o valor *zero* na superfície da Terra e atingindo o valor máximo igual a *um* para altitudes de 100 km acima da superfície terrestre. Para introduzir seu efeito no movimento rotacional do satélite, é considerado um valor médio para  $\psi_f$  e incluído na função sombra  $\psi$ , dada pela equação (18), repetindo o processo semi-analítico anteriormente descrito. Os valores médios assumidos para  $\psi_f$  foram de  $10^{-8}$  para altitudes de 14 a 20 km e  $10^{-5}$  para a altitude de 50 km. Os resultados obtidos estão apresentados nas Tabelas 13 e 14 para as duas primeiras passagens pela penumbra, em ambas são apresentados os valores assumidos pelas variações das variáveis nos instantes de entrada na penumbra, em um instante intermediário e no instante de saída. O tempo de duração da penumbra para o satélite considerado é de  $\Delta T = 8$  s. A Tabela 13 corresponde a 1ª passagem que inicia em



$t_{ep1} = 2004,5$  s. A Tabela 14 corresponde a 2ª passagem pela penumbra que inicia em  $t_{ep2} = 5020$  s.

Observa-se que os fótons que atravessam a atmosfera terrestre e atingem a superfície do satélite diminuem a influência do TPRS sobre o movimento rotacional, anulando o seu efeito em todas as variáveis de Andoyer para os fótons que atravessam a atmosfera abaixo de 30 km.

**TABELA 13:** Comparação da magnitude da influência do TPRS para  $\psi_f = 10^{-8}$ ,  $\psi_f = 10^{-5}$  e  $\psi_f = 1$  na 1ª passagem pela penumbra.

| Variável     | Intervalo de Tempo    | $t_{ep1}$ (s)            | $t_{ep1} + \Delta T/2$ (s) | $t_{ep1} + \Delta T$ (s) |
|--------------|-----------------------|--------------------------|----------------------------|--------------------------|
| $\Delta L_2$ | Com $\psi_f(10^{-8})$ | 0 ( $\approx 10^{-18}$ ) | 0 ( $\approx 10^{-18}$ )   | 0 ( $\approx 10^{-18}$ ) |
|              | Com $\psi_f(10^{-5})$ | 0 ( $\approx 10^{-17}$ ) | 0 ( $\approx 10^{-15}$ )   | -1.0729e-14              |
|              | $\psi_f = 1$          | -5.6932e-14              | -3.7763e-12                | -1.8540e-12              |
| $\Delta L_3$ | Com $\psi_f(10^{-8})$ | 0 ( $\approx 10^{-18}$ ) | 0 ( $\approx 10^{-18}$ )   | 0 ( $\approx 10^{-18}$ ) |
|              | Com $\psi_f(10^{-5})$ | 0 ( $\approx 10^{-17}$ ) | 0 ( $\approx 10^{-15}$ )   | -3.2385e-14              |
|              | $\psi_f = 1$          | -2.4066e-13              | -3.4875e-11                | -1.5091e-10              |
| $\Delta l_1$ | Com $\psi_f(10^{-8})$ | 0 ( $\approx 10^{-16}$ ) | 0 ( $\approx 10^{-16}$ )   | 0 ( $\approx 10^{-16}$ ) |
|              | Com $\psi_f(10^{-5})$ | 0 ( $\approx 10^{-15}$ ) | -2.1982e-13                | -8.7175e-13              |
|              | $\psi_f = 1$          | -5.7936e-12              | -7.3605e-10                | -2.8883e-9               |
| $\Delta l_2$ | Com $\psi_f(10^{-8})$ | 0 ( $\approx 10^{-15}$ ) | 0 ( $\approx 10^{-15}$ )   | 0 ( $\approx 10^{-15}$ ) |
|              | Com $\psi_f(10^{-5})$ | -3.1548e-12              | -3.2188e-12                | -3.3396e-12              |
|              | $\psi_f = 1$          | -0.5664e-10              | -0.54826e-8                | -0.1634e-8               |
| $\Delta l_3$ | Com $\psi_f(10^{-8})$ | 0 ( $\approx 10^{-15}$ ) | 0 ( $\approx 10^{-15}$ )   | 0 ( $\approx 10^{-15}$ ) |
|              | Com $\psi_f(10^{-5})$ | 0 ( $\approx 10^{-15}$ ) | 1.8741e-13                 | 6.8479e-13               |
|              | $\psi_f = 1$          | 4.4613e-12               | 4.7613e-10                 | 1.4571e-9                |

**TABELA 14:** Comparação da magnitude da influência do TPRS para  $\psi_f = 10^{-8}$ ,  $\psi_f = 10^{-5}$  e  $\psi_f = 1$  na 2ª passagem pela penumbra.

| Variável     | Intervalo de Tempo    | $t_{ep2}$ (s)          | $t_{ep2} + \Delta T/2$ (s) | $t_{ep2} + \Delta T$ (s) |
|--------------|-----------------------|------------------------|----------------------------|--------------------------|
| $\Delta L_2$ | Com $\psi_f(10^{-8})$ | $0 (\approx 10^{-18})$ | $0 (\approx 10^{-18})$     | $0 (\approx 10^{-18})$   |
|              | Com $\psi_f(10^{-5})$ | $0 (\approx 10^{-15})$ | $0 (\approx 10^{-15})$     | $0 (\approx 10^{-15})$   |
|              | $\psi_f = 1$          | 8.2190e-10             | 7.7100e-10                 | 7.5800e-10               |
| $\Delta L_3$ | Com $\psi_f(10^{-8})$ | $0 (\approx 10^{-17})$ | $0 (\approx 10^{-17})$     | $0 (\approx 10^{-17})$   |
|              | Com $\psi_f(10^{-5})$ | -9.4498e-14            | -9.3483e-14                | -9.3209e-14              |
|              | $\psi_f = 1$          | -9.4755e-09            | -9.3621e-09                | -9.3388e-09              |
| $\Delta l_1$ | Com $\psi_f(10^{-8})$ | $0 (\approx 10^{-16})$ | $0 (\approx 10^{-16})$     | $0 (\approx 10^{-16})$   |
|              | Com $\psi_f(10^{-5})$ | 2.6712e-13             | 2.5691e-13                 | 2.5335e-13               |
|              | $\psi_f = 1$          | 2.6612e-08             | 2.5595e-08                 | 2.5230e-08               |
| $\Delta l_2$ | Com $\psi_f(10^{-8})$ | 2.4883e-11             | 2.4926e-11                 | 2.4968e-11               |
|              | Com $\psi_f(10^{-5})$ | 2.4613e-11             | 2.4542e-11                 | 2.4556e-11               |
|              | $\psi_f = 1$          | 1.3678e-07             | 1.2489e-07                 | 1.1973e-07               |
| $\Delta l_3$ | Com $\psi_f(10^{-8})$ | $0 (\approx 10^{-15})$ | $0 (\approx 10^{-15})$     | $0 (\approx 10^{-15})$   |
|              | Com $\psi_f(10^{-5})$ | 7.0139e-12             | 7.0095e-12                 | 7.0095e-12               |
|              | $\psi_f = 1$          | 7.0340e-07             | 7.0300e-07                 | 7.0289e-07               |



## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÕES

Neste trabalho a função sombra geométrica e função sombra física propostas por Kabelac são implementadas numericamente. A obtenção da função sombra total  $\psi$  é dada pelo produto da função geométrica  $\psi_g$  e da função física  $\psi_f$ .

Os valores tabelados necessários para o cálculo da função física  $\psi_f$ , dependem da altura  $h$  em que o raio solar se encontra em relação à superfície da Terra, tornando-se mais marcante quando é levado em conta que os raios solares atingem as camadas da atmosfera terrestre de alturas que variam de zero até várias dezenas de quilômetros.

Como observado, para alturas de zero a 100 km acima da superfície da Terra, a atmosfera terrestre faz com que os raios incidentes na superfície do satélite sejam atenuados gradativamente devido à atmosfera da Terra, quando o satélite se posiciona na região de penumbra. Assim, para a função física  $\psi_f$  assume-se os valores:

- ♦  $\psi_f = 0$ , para  $h = 0$  km;
- ♦  $0 < \psi_f < 1$ , para  $0 < h < 100$  km;
- ♦  $\psi_f = 1$ , para  $h = 100$  km.

Para incluir o efeito de função sombra física na trajetória do satélite, é considerado que:

- o efeito maior é na passagem da região de penumbra para a região de sombra (ou vice-versa), onde  $\psi_f = 0$ , pois o efeito da atmosfera é maior;
- o efeito menor é na passagem da região de penumbra para a região totalmente iluminada (ou vice-versa), onde  $\psi_f = 1$ , sendo o efeito da atmosfera menor;



- na região de penumbra, a função física assumirá valores entre 0 e 1.

Durante a região de penumbra, se o satélite vai da região de sombra ( $\psi_f = 0$ ) para região totalmente iluminada ( $\psi_f = 1$ ), a função física assume um valor variante, que será nesta ordem, crescente ( $0 < \psi_f < 1$ ).

Pode-se observar que com a inclusão da função sombra física  $\psi_f$ , os raios solares que cruzam a atmosfera terrestre são atenuados, fazendo com que diminua a influência do torque de pressão de radiação solar sobre o movimento rotacional.

O efeito da sombra da Terra no movimento rotacional do satélite artificial é realizado, através da inclusão da função sombra  $\psi$  nas equações do movimento. A solução para o sistema de equações do movimento é obtida por um processo semi-analítico. E utilizando o mapeamento numérico da função sombra de Kabelac e a solução analítica de Zanardi (1994) para as regiões em que o satélite está fora da sombra da Terra, é obtida a magnitude da influência do TPRS em termos das variáveis de Andoyer.

Para o intervalo de um período orbital e para o satélite considerado, também é verificado que:

1. de  $t_0$  a  $t_{ss}$  o satélite se encontra na sombra da Terra  $\psi = 0$  e o torque de pressão de radiação solar se anula, não afetando o movimento rotacional do satélite;
2.  $t_{ep1}$  a  $t_{sp1}$  o satélite se encontra na região de penumbra ( $0 < \psi < 1$ ) e o torque de pressão de radiação solar é parcialmente atuante, causando variações periódicas em  $I_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , variações lineares e periódicas em  $I_2$  e  $I_3$ .
3.  $t_{el}$  a  $t_{sl}$  o satélite se encontra na região totalmente iluminada  $\psi = 1$  e o torque de pressão de radiação solar é totalmente atuante, causando também variações periódicas em  $I_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , variações lineares e periódicas em  $I_2$  e  $I_3$ .

4.  $t_{ep2}$  a  $t_{sp2}$  o satélite se encontra novamente na região de penumbra, com o torque de pressão de radiação solar é parcialmente atuante, com o movimento rotacional experimentando os mesmos efeitos do item 2;
5.  $t_{es}$  a PO o satélite retorna a região de sombra e o torque de pressão de radiação solar é novamente nulo, terminando o período orbital e repetindo o processo.

Nas implementações nota-se que para as características do satélite considerado a passagem pela penumbra é muito rápida, da ordem de 8 s. Assim, outras implementações são realizadas, variando-se os elementos orbitais do satélite artificial: inclinação da órbita, semi-eixo maior e excentricidade, assim como a posição do Sol em relação a Terra. Pode-se verificar que a inclinação e o semi-eixo maior modificam o período de duração da penumbra, enquanto a influência da excentricidade e da posição do Sol são negligenciáveis.

É observado que para os casos considerados:

- com a alteração da inclinação orbital, a duração das regiões de penumbra e iluminada são afetadas com o mesmo tipo de comportamento, ou seja, quando se aumenta (diminui) a penumbra, a região iluminada também aumenta (diminui);

- com o aumento do semi-eixo maior do satélite a influência da inclinação sobre a duração da penumbra fica maior, ou seja, para satélites com semi-eixo maior de 7000 km (satélite série A) o aumento da inclinação de 0,5 rad para 1,2 rad aumenta a penumbra em 31,25%, enquanto para o satélite com semi-eixo de 10000 km o aumento da penumbra é de 225%.

Pelos resultados apresentados verifica-se para o satélite considerado que influência do TPRS para o instante de 30000 s é da ordem de  $10^{-8}$  rad para a variável  $l_1$ ,  $10^{-6}$  rad para  $l_2$  e  $l_3$ ,  $10^{-10}$  kgkm<sup>2</sup>/s para  $L_2$  e  $10^{-7}$  kgkm<sup>2</sup>/s para  $L_3$ .





Estes valores correspondem a magnitudes inferiores às influências do torque de gradiente de gravidade (Zanardi & Vilhena de Moraes, 1999).

Deste modo, o modelo da função sombra de Kabelac (1988), o qual considera parâmetros geométricos associados a posição mútua do Sol-Terra-satélite e parâmetros físicos da atmosfera terrestre, é incluído na análise da influência do torque de pressão de radiação solar sob o movimento rotacional de satélites artificiais, apresentando resultados mais próximos à realidade. Pela análise realizada, o comportamento das variáveis de Andoyer, que descrevem o movimento rotacional do satélite, nos instantes de passagem da região de sombra para a região iluminada, ou vice-versa, foram suavizados devido à região de penumbra.

Devido a pequena magnitude ( $\approx 10^{-14}$ ) observada para a influência do torque de pressão de radiação solar com a função sombra física, a inclusão de outros torques desta mesma ordem de grandeza (Poynting-Robertson, reemissão térmica e Yarkovsky) é importante na análise do movimento rotacional de satélites artificiais até esta ordem de precisão.

A abordagem aqui realizada para o torque de pressão de radiação solar admitiu um satélite cilíndrico. No entanto, esta mesma abordagem poderia ser realizada para outros tipos de satélites, os quais podem conter antenas ou apêndices flexíveis.

A comparação do modelo da função sombra de Kabelac (1988) com outro de Vokrouhlicky (1993, 1994) é também interessante para validar os resultados aqui apresentados.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CORNETTI, R. A. S. *Estudos dos Efeitos da Pressão de Radiação Solar sob o Movimento de um Satélite Artificial da Terra*. São José dos Campos, 1974. 66p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica.

DEPRIT, A. Free Rotation of a Rigid Body Studied in the Phase Plane. *Am. J. Phys.*, v.55, p. 424, 1967.

FERRAZ MELLO, S. Analytical Study of the Earth's Shadowing Effects on Satellite Orbits. *Celestial Mechanics*, v. 5, p. 80-101, 1972.

FITZPATRICK, P. M. *Principles of Celestial Mechanics*. USA: Academic Press, 1970. 405p.

GEORGEVIC, R. M. The Solar Radiation Pressure Force and Torques Model. *The Journal of the Astronautical Sciences*, v. XX, n. 5, p.257-74, 1973.

HUJSAK, R. S. Solar Pressure. In: PROCEEDING OF THE ARTIFICIAL SATELLITE THEORY WORKSHOP, 1993. Washington: U. S. Naval Observatory, 1994. p. 54-72.

KINOSHITA, M. First-Order Perturbations of the Two Finite Body Problem. *Publ. Astron. Soc. Japan*, v. 24, p. 423-457, 1972.

KABELAC, J. Shadow Function - Contribution to the Theory of the Motion of Artificial Satellites. *Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, v. 39, n.4, p. 213-20, 1988.

LÁLA, P., SEHNAL, L. The Earth's Shadowing Effects in the short-periodic Perturbations of Satellite Orbits. *Astronomical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences*, v. 20, n.6, p. 327-30, 1969.

LANCZOS, C. *The Variational Principles of Mechanics*. New York: Dover Publications, 1986. 418p.

LUM, K. Y., BLOCH, A. M. Generalized Serret-Andoyer Transformation and Applications for the Controlled Rigid Body. *Dynamics and Control*, v. 9, p. 39 - 66, 1999.

SANTOS, R. M. K., DA SILVA FERNANDES, S., ZANARDI, M. C. A Linear Solution for the Artificial Satellite's Attitude Optimal Control. *RBCM - Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, v. XXI, Special Issue, p. 565-578, 1999.

VILHENA DE MORAES, R. *Ação da Pressão de Radiação e do Arrasto Atmosférico sobre Órbitas de Satélites Artificiais*. São José dos Campos, 1978. 219p. Tese (Doutor em Ciências) - Instituto Tecnológico da Aeronáutica.

VILHENA DE MORAES, R. Combined Solar Radiation Pressure and Drag Effects on the Orbits of Artificial Satellites. *Celestial Mechanics*, v. 25, p. 281-292, 1981.

VILHENA DE MORAES, R. Solar Radiation Pressure and Balloon Type Artificial Satellite. *Satellite Dynamics*, p. 331-341, 1975.

VILHENA DE MORAES, R., ZANARDI, M.C. Influence of Earth's Shadow on the Rotational Motion of Artificial Satellite Perturbed by Solar Radiation Torque. *Cospar*, v. 19, n.11, p. 1715-1718, 1997.



VOKROUHLICKY, D., FARINELLA, P., MIGNARD, F. Solar Radiation Pressure Perturbations for Earth Satellites - I- A complete theory including penumbra transitions. *Astron. Astrophys.*, p. 295-312, 1993.

VOKROUHLICKY, D., FARINELLA, P., MIGNARD, F., Solar Radiation Pressure Perturbations for Earth Satellites - II- Na approximate method to model penumbra transitions and their long-term orbital effects on LAGEOS. *Astron. Astrophys.*, p. 333-43, 1994.

ZANARDI, M. C. Solar Radiation Pressure Torque Model on a Circular Cylinder Satellite. *Orbital Dynamics of Natural and Artificial Objects*, p. 145, Observatório Nacional, 1989.

ZANARDI, M. C., SANTOS, R. K., DA SILVA FERNANDES, S. Optimal Attitude Control of an Artificial Satellite with Spherical Symmetry using Andoyer Variables. In: COLLOQUE INTERNATIONAL MECANIQUE SPATIALE & INTERNATIONAL SYMPOSIUM SPACE DYNAMICS, Biarritz, France, 2000.

ZANARDI, M. C., VILHENA, R. M. Effects of Solar Radiation Pressure Torque on the Rotational Motion of an Artificial Satellites. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL ISRAEL CONFERENCE ON AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS, 32, 1991, Haifa, Israel, 1992, p.279-86.

ZANARDI, M. C. *Influência do Torque de Radiação Solar na Atitude de um Satélite Artificial*. São José dos Campos, 1993. 136p. Tese (Doutorado em Ciência na Área de Mecânica de Voo e Dinâmica Orbital - Engenharia Aeronáutica e Mecânica) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica.



ZANARDI, M. C., VILHENA, R. M. Effects of Solar Radiation Torque on Satellite Spin and Attitude. *J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences*, v. XVI, p. 532, 1994.

ZANARDI, M. C., VILHENA DE MORAES, R. Analytical and Semi-Analytical Analysis of an Artificial Satellite's Rotational Motion. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, v. 75, p. 227-50, 1999.



## APÊNDICE 1

Variações Periódicas (4.2, 1.2.3)

### Variações Periódicas e Seculares nas Variáveis de Andoyer Devido ao Torque de Pressão de Radiação Solar

Variações Seculares ( $\Delta \bar{n}_i$ ),  $i = 1, 2, 3$ :

$$\Delta \bar{n}_1 = -\frac{mk}{4L_{20}r_O^2} (3\cos^2\delta - 2) \cos J_o (3\sin^2 I_o - 2)$$

$$\Delta \bar{n}_2 = \frac{mk}{4L_{20}r_O^2} (3\cos^2\delta - 2) \left[ \cos^2 I_o + \cos^2 J_o (1 - 6\cos^2 I_o) \right]$$

$$\Delta \bar{n}_3 = \frac{mk}{8L_{20}r_O^2} (3\cos^2\delta - 2) \cos I_o (1 + 3\cos 2J_o)$$

$$\bar{n}_{10} = \frac{mk}{8L_{20}r_O^2} \cos J_o (3\sin^2 I_o - 2) + n_{10}$$

$$\bar{n}_{20} = -\frac{mk}{8L_{20}r_O^2} \left[ \cos I_o + \cos^2 J_o (1 - 6\cos^2 I_o) \right] + n_{20}$$

$$\bar{n}_{30} = -\frac{mk}{16L_{20}r_O^2} \cos^2 I_o (1 + 3\cos 2J_o) + n_{30}$$

Variações Periódicas ( $\delta l_i$ ),  $i = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} \delta l_1 = & \frac{mk}{r_O^2} \left\{ (3\cos^2\delta - 2) \frac{e_2 \operatorname{sen}(2\bar{n}_{20}t + 2l_{20})}{\bar{n}_{20}} + \right. \\ & + \cos^2\delta \left[ -e_3 \frac{\operatorname{sen}(-2\bar{n}_{30}t - 2l_{30} + 2\alpha)}{2\bar{n}_{30}} + \right. \\ & + e_4 \frac{\operatorname{sen}[(\bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{30})t + l_{20} - 2l_{30} + 2\alpha]}{\bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{30}} + \\ & - e_5 \frac{\operatorname{sen}[-2(\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30})t - 2l_{20} - 2l_{30} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} + \\ & + e_6 \frac{\operatorname{sen}[2(\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30})t + 2l_{20} - 2l_{30} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{30}} + \\ & \left. \left. - e_7 \frac{\operatorname{sen}[-(2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20})t - l_{20} - 2l_{30} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20}} \right] + \right. \\ & - \frac{\operatorname{sen}2\delta}{2} \left[ e_8 \frac{\cos[\bar{n}_{30}t + l_{30} - \alpha]}{\bar{n}_{30}} + \right. \\ & + e_9 \frac{\cos[(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20})t + l_{20} + l_{30} - \alpha]}{\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20}} + \\ & + e_{10} \frac{\cos[(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20})t - l_{20} + l_{30} - \alpha]}{\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20}} + \\ & + e_{11} \frac{\cos[(2\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30})t + 2l_{20} + l_{30} - \alpha]}{2\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} + \\ & \left. \left. + e_{12} \frac{\cos[(2\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30})t + 2l_{20} - l_{30} + \alpha]}{2\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30}} \right] \right\} + \bar{l}_{10} \end{aligned}$$

em que:

$$e_1 = -\frac{\cos J}{8L_{20}} (3\operatorname{sen}^2 I - 2)$$



$$e_2 = -\frac{\cos J \operatorname{sen}^2 I}{8L_{20}}$$

$$e_3 = \frac{3 \cos J \operatorname{sen}^2 I}{4 L_{20}}$$

$$e_4 = -\frac{\cos 2J \operatorname{sen} I}{4L_{20} \operatorname{sen} J} (\cos I - 1)$$

$$e_5 = -\frac{\cos J}{8L_{20}} (1 + 2 \cos I + \cos^2 I)$$

$$e_6 = -\frac{\cos J}{8L_{20}} (1 - 2 \cos I + \cos^2 I)$$

$$e_7 = -\frac{\cos 2J \operatorname{sen} I}{4L_{20} \operatorname{sen} J} (\cos I + 1)$$

$$e_8 = -\frac{3 \cos J \operatorname{sen} 2I}{2 L_{20}}$$

$$e_9 = \frac{\cos 2J}{2L_{20} \operatorname{sen} J} (\cos 2I + \cos I)$$

$$e_{10} = \frac{\cos 2J}{2L_{20} \operatorname{sen} J} (\cos 2I - \cos I)$$

$$e_{11} = -\frac{\cos J \operatorname{sen} I (1 + \cos I)}{L_{20}}$$

$$e_{12} = -\frac{\cos J \operatorname{sen} I (1 - \cos I)}{L_{20}}$$

$$\begin{aligned}
\delta l_2 = & \frac{mk}{r_O^2} \left\{ (3 \cos^2 \delta - 2) \left[ \frac{f_2 \operatorname{sen}(2\bar{n}_{20}t + 2l_{20})}{\bar{n}_{20}} + \right. \right. \\
& + f_3 \frac{\operatorname{sen}(\bar{n}_{20}t + l_{20})}{\bar{n}_{20}} \left. \right] + \cos^2 \delta \left[ -f_4 \frac{\operatorname{sen}[-2\bar{n}_{30}t - 2l_{30} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{30}} + \right. \\
& + f_5 \frac{\operatorname{sen}[2(\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30})t + 2l_{20} - 2l_{30} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{30}} + \\
& - f_6 \frac{\operatorname{sen}[-2(\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30})t - 2l_{20} - 2l_{30} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} + \\
& + f_7 \frac{\operatorname{sen}[(-2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20})t + l_{20} - 2l_{30} + 2\alpha]}{-2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20}} + \\
& - f_8 \frac{\operatorname{sen}[-(\bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30})t + (-l_{20} - 2l_{30} + 2\alpha)]}{\bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} + \\
& + f_9 \left[ \frac{\operatorname{sen}[(3\bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{30})t + (3l_{20} - 2l_{30} + 2\alpha)]}{3\bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{30}} + \right. \\
& \left. \left. - \frac{\operatorname{sen}[(-3\bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30})t + (-3l_{20} + 2l_{30} + 2\alpha)]}{-3\bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} \right] \right\} + \\
& + \frac{\operatorname{sen} 2\delta}{2} \left[ f_{10} \frac{\cos[-\bar{n}_{30}t - l_{30} + \alpha]}{\bar{n}_{30}} + \right. \\
& + f_{11} \frac{\cos[(-\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20})t + l_{20} - l_{30} + \alpha]}{\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20}} + \\
& + f_{12} \frac{\cos[-(\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30})t - l_{20} - l_{30} + \alpha]}{\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} + \\
& + f_{13} \frac{\cos[(2\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30})t + 2l_{20} - l_{30} + \alpha]}{-2\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} + \\
& + f_{14} \left[ \frac{\cos[(-2\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30})t - 2l_{20} + l_{30} + \alpha]}{2\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30}} + \right. \\
& \left. - \frac{\cos[(2\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30})t + 2l_{20} + l_{30} + \alpha]}{2\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} \right] + \\
& + f_{15} \frac{\cos[-(2\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30})t - 2l_{20} - l_{30} + \alpha]}{2\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f_{16} \left[ -\frac{\cos [(\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30}) t + l_{20} + l_{30} + \alpha]}{\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} + \right. \\
& \quad + \frac{\cos [(-\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}) t - l_{20} + l_{30} + \alpha]}{\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30}} + \\
& \quad - \frac{\cos [(3\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}) t + 3l_{20} + l_{30} + \alpha]}{3\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} + \\
& \quad \left. + \frac{\cos [(-3\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}) t - 3l_{20} + l_{30} + \alpha]}{3\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30}} \right] + \\
& + f_{17} \left[ \frac{\cos [(3\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30}) t + 3l_{20} - l_{30} + \alpha]}{-3\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\cos [-(3\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}) t - 3l_{20} - l_{30} + \alpha]}{3\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} \right] \Bigg\} + \bar{l}_{20}
\end{aligned}$$

em que:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{l}{4L_{20}} \left[ \cos^2 J (1 - 6 \cos^2 I) + \cos^2 I \right] \\
f_2 &= \frac{l}{4L_{20}} \left[ \cos^2 J (1 - 2 \cos^2 I) - \cos^2 I \right] \\
f_3 &= \frac{l}{16L_{20}} \left\{ \sin 2I [\sin 2J - 4 \cot J \cos 2J] + 2 \cot I \sin 2J (3 \sin^2 I - 2) \right\} \\
f_4 &= \frac{l}{4L_{20}} \left[ \cos^2 J (\cos^2 I - 3 \sin^2 I) + \cos 2J \cos^2 I \right] \\
f_5 &= \frac{l}{8L_{20}} (1 - \cos I) \left[ \cos^2 J - \cos 2J \cos I \right] \\
f_6 &= \frac{l}{8L_{20}} (\cos I + 1) \left[ \cos^2 J + -\cos 2J \cos I \right] \\
f_7 &= \frac{l}{4L_{20}} \left\{ (\cos I - 1) \sin I \cot J \cos 2J + \frac{\cot I \sin 2J}{8} (-4 + 8 \cos^2 I - 3 \cos I) \right\}
\end{aligned}$$



$$f_8 = \frac{1}{4L_{20}} \left\{ (\cos I + 1) \operatorname{sen} I \cot J \cos 2J + \frac{\cot I \operatorname{sen} 2J}{8} (-4 + 8 \cos^2 I + 3 \cos I) \right\}$$

$$f_9 = -\frac{1}{32L_{20}} \cot I \operatorname{sen} 2J \cos I$$

$$f_{10} = \frac{1}{4L_{20}} \left\{ 6 \cos^2 J \operatorname{sen} 2I + \cos 2I \cot I (3 \cos 2J + 1) \right\}$$

$$f_{11} = \frac{1}{2L_{20}} \left\{ \cos I \left[ \frac{\operatorname{sen} 2J}{2} - \cos 2J \cot J \right] + \cos 2I \cot J \cos 2J - \frac{7}{4} \cos^2 I \operatorname{sen} 2J \right\}$$

$$f_{12} = \frac{1}{2L_{20}} \left\{ \cos I \left[ -\frac{\operatorname{sen} 2J}{2} + \cos 2J \cot J \right] + \cos 2I \cot J \cos 2J - \frac{7}{4} \cos^2 I \operatorname{sen} 2J \right\}$$

$$f_{13} = \frac{1}{L_{20}} \left\{ \cos^2 J \operatorname{sen} I + \frac{\cot I}{4} (\cos 2J - 1) (\cos 2I - \cos I) \right\}$$

$$f_{14} = \frac{1}{4L_{20}} \operatorname{sen} 2I \cos^2 J$$

$$f_{15} = \frac{1}{L_{20}} \left\{ -\cos^2 J \operatorname{sen} I + (\cos 2J - 1) \frac{\cot I}{4} (\cos I + \cos 2I) \right\}$$

$$f_{16} = \frac{1}{8L_{20}} \cos^2 I \operatorname{sen} J$$

$$f_{17} = \frac{1}{8L_{20}} \cos^2 I \operatorname{sen} 2J$$

$$\begin{aligned}
\delta l_3 = & \frac{mk}{r_O^2} \left\{ \left( 3\cos^2 \delta - 2 \right) \left[ \frac{g_2 \operatorname{sen} (2 \bar{n}_{20} t + l_{20})}{\bar{n}_{20}} + \right. \right. \\
& + g_3 \frac{\operatorname{sen} (2 \bar{n}_{20} t + 2l_{20})}{2\bar{n}_{20}} + g_4 \frac{\operatorname{sen} (3\bar{n}_{20} t + 3l_{20})}{3\bar{n}_{20}} \left. \right] + \\
& + \cos^2 \delta \left[ g_5 \left[ \frac{\operatorname{sen} [(\bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{30}) t + l_{20} - 2l_{30} + 2\alpha]}{\bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{30}} + \right. \right. \\
& - \frac{\operatorname{sen} [-(\bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}) t - l_{20} - 2l_{30} + 2\alpha]}{\bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} + \\
& - g_6 \frac{\operatorname{sen} [-3\bar{n}_{30} t - 3l_{30} + 2\alpha]}{3\bar{n}_{30}} + \\
& + g_7 \frac{\operatorname{sen} [(-2\bar{n}_{30} + 2\bar{n}_{20}) t + 2l_{20} - 2l_{30} + 2\alpha]}{-2\bar{n}_{30} + 2\bar{n}_{20}} + \\
& - g_8 \frac{\operatorname{sen} [-2(\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}) t + 2(-l_{20} - 2l_{30} + 2\alpha)]}{2\bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} + \\
& + \frac{\operatorname{sen} 2 \delta}{2} \left[ g_9 \frac{\cos [-\bar{n}_{30} t - l_{30} + \alpha]}{\bar{n}_{30}} + \right. \\
& + g_{10} \frac{\cos [(-\bar{n}_{30} + 2\bar{n}_{20}) t + 2l_{20} - l_{30} + \alpha]}{\bar{n}_{30} - 2\bar{n}_{20}} + \\
& + g_{11} \frac{\cos [-(2\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}) t - 2l_{20} - l_{30} + \alpha]}{2\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} + \\
& + g_{12} \frac{\cos [-(\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}) t - l_{20} - l_{30} + \alpha]}{\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} + \\
& + g_{13} \frac{\cos [(\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30}) t + l_{20} - l_{30} + \alpha]}{-\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} + \\
& + g_{14} \left[ - \frac{\cos [(\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}) t + l_{20} + l_{30} + \alpha]}{\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} + \right. \\
& + \frac{\cos [(-\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}) t - l_{20} + l_{30} + \alpha]}{\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30}} + \\
& + \frac{\cos [(3\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}) t + 3l_{20} + l_{30} + \alpha]}{3\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30}} + \\
& \left. \left. - \frac{\cos [(3\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}) t + 3l_{20} + l_{30} + \alpha]}{\bar{n}_{30} + 3\bar{n}_{30}} \right] \right\} +
\end{aligned}$$

$$+ g_{15} \frac{\cos [(3\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30}) t + 3l_{20} - l_{30} + \alpha]}{-3\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} + \\ + g_{16} \frac{\cos [-(3\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}) t - 3l_{20} - l_{30} + \alpha]}{\bar{n}_{30} + 3\bar{n}_{20}} \Big] \Big\} + \bar{l}_{30}$$

em que:

$$g_1 = \frac{\cos I}{8L_{20}} (1 + 3\cos 2J) \\ g_2 = -\frac{I}{16L_{20}\sin I} (\sin J \sin^2 I - 4\sin 2J \cos 2I) \\ g_3 = \frac{\cos I}{16L_{20}} (\cos 2J - 1) \\ g_4 = -\frac{\sin I \sin J}{16L_{20}} \\ g_5 = \frac{\sin 2J}{16L_{20}} (\cos^2 I - 5\sin^2 I) \\ g_6 = \frac{\sin 2I}{16L_{20}} (3\cos 2J + 1) \\ g_7 = \frac{\sin I}{16L_{20}} [2\sin^2 J + \cos I (1 + 3\cos 2J)] \\ g_8 = \frac{\sin I}{16L_{20}} [-2\sin^2 J + \cos I (1 + 3\cos 2J)] \\ g_9 = -\frac{\cos 2I}{2L_{20}\sin I} (\cos 2J + \cos J) \\ g_{10} = -\frac{I}{4L_{20}\sin I} [(\cos 2J - \cos J)(\cos 2I - \cos I) + \sin 2J \sin I] \\ g_{11} = -\frac{I}{4L_{20}\sin I} [(\cos 2J - \cos J)(\cos 2I + \cos I) - \sin 2J \sin I] \\ g_{12} = \frac{\sin J}{4L_{20}} [\cos I (6 \cos J + 1) + 1] \\ g_{13} = \frac{\sin J}{4L_{20}} [\cos I (6 \cos J + 1) - 1] \\ g_{14} = \frac{\sin 2J \sin I}{16}$$



$$g_{15} = \frac{\text{sen} J}{4L_{20}} (1 - \cos I)$$

$$g_{16} = -\frac{\text{sen} J}{4L_{20}} (\cos I + 1)$$

Variações Periódicas  $L_k$ , ( $k = 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} \delta L_2 = \frac{mk}{r_O^2} & \left\{ (2 - 3\cos^2 \delta) \left[ b_1 \frac{\cos(2\bar{n}_{20}t + l_{20})}{2\bar{n}_{20}} + b_2 \frac{\cos(\bar{n}_{20}t + l_{20})}{\bar{n}_{20}} \right] + \right. \\ & + \cos^2 \delta \left[ b_3 \frac{\cos[2(\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30})t + 2(l_{20} - l_{30} + \alpha)]}{2\bar{n}_{30} - 2\bar{n}_{20}} + \right. \\ & + b_4 \frac{\cos[-2(\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30})t + 2(-l_{20} - l_{30} + \alpha)]}{2\bar{n}_{30} + 2\bar{n}_{20}} + \\ & + b_5 \frac{\cos[(\bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{30})t + l_{20} - 2l_{30} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20}} + \\ & + e_6 \frac{\cos[-(\bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30})t - l_{20} - 2l_{30} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20}} + \\ & + \frac{\text{sen} 2\delta}{2} \left[ -b_7 \frac{\text{sen}[-(2\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30})t - 2l_{20} - l_{30} + 2\alpha]}{\bar{n}_{30} + 2\bar{n}_{20}} + \right. \\ & + b_8 \frac{\text{sen}[(2\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30})t + 2l_{20} - l_{30} + \alpha]}{-\bar{n}_{30} + 2\bar{n}_{20}} + \\ & - b_9 \frac{\text{sen}[-(\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30})t - l_{20} - l_{30} + \alpha]}{\bar{n}_{30} + 2\bar{n}_{20}} + \\ & \left. \left. + b_{10} \frac{\text{sen}[(\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30})t + l_{20} - l_{30} + \alpha]}{-\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20}} \right] \right\} + \bar{L}_{20} \end{aligned}$$

em que:

$$b_1 = \frac{\text{sen}^2 J \text{ sen}^2 I}{4}$$

$$b_2 = -\frac{\text{sen} 2J \text{ sen} 2I}{8}$$

$$b_3 = \frac{\text{sen}^2 J}{8} (2 - \text{sen}^2 I - 2 \cos I)$$

$$b_4 = \frac{\text{sen}^2 J}{8} (\text{sen}^2 I - 2 - 2 \cos I)$$

$$b_5 = \frac{\text{sen} 2J \text{ sen} I}{8} (-\text{sen} I + \cos I)$$

$$b_6 = -\frac{\text{sen} 2J \text{ sen} I}{8} (\text{sen} I + \cos I)$$

$$b_7 = -\frac{\text{sen}^2 J \text{ sen} I}{2} (\cos I + 1)$$

$$b_8 = \frac{\text{sen}^2 J \text{ sen} I}{2} (\cos I - 1)$$

$$b_9 = \frac{\text{sen} 2J}{4} (\cos 2I + \cos I)$$

$$b_{10} = \frac{\text{sen} 2J}{4} (-\cos 2I + \cos I)$$

$$\begin{aligned}
\delta L_3 = & -\frac{mk}{r_O^2} \cos^2 \delta \left\{ -d_1 \frac{\cos [(\bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30})t + l_{20} + 2l_{30} - 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} + 2\bar{n}_{20}} + \right. \\
& + d_2 \frac{\cos [(\bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{30})t + l_{20} - 2l_{30} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20}} + \\
& - b_3 \frac{\cos[2\bar{n}_{30}t + 2l_{30} - 2\alpha]}{2\bar{n}_{30}} - d_4 \frac{\cos[2\bar{n}_{30}t + 2l_{30} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{30}} + \\
& - d_5 \frac{\cos[2(\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30})t + 2l_{20} + 2l_{30} - 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} + 2\bar{n}_{20}} + \\
& + d_6 \frac{\cos[2(\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30})t + 2l_{20} - 2l_{30} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} - 2\bar{n}_{20}} + \\
& - d_7 \left[ \frac{\cos[2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20})t + 2l_{20} + 2l_{30} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} + 2\bar{n}_{20}} + \right. \\
& \left. + \frac{\cos[2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20})t + 2l_{20} - 2l_{30} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} - 2\bar{n}_{20}} \right] + \\
& + d_8 \left[ -\frac{\text{sen}[-2\bar{n}_{30}t - 2l_{30} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{30}} + \frac{\text{sen}[2\bar{n}_{30}t + 2l_{30} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{30}} + \right. \\
& + \frac{1}{2} \frac{\cos[2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{10})t + 2l_{30} - 2l_{10} - 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} - 2\bar{n}_{10}} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\cos[2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{10})t + 2l_{30} - 2l_{10} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} - 2\bar{n}_{10}} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\cos[2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{10})t + 2l_{30} + 2l_{10} - 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} + 2\bar{n}_{10}} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\cos[2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{10})t + 2l_{30} + 2l_{10} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} + 2\bar{n}_{10}} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}[2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{10})t + 2l_{30} + 2l_{10} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} + 2\bar{n}_{10}} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}[2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{10})t + 2l_{30} + 2l_{10} - 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} + 2\bar{n}_{10}} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}[2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{10})t + 2l_{30} - 2l_{10} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} - 2\bar{n}_{10}} + \\
& \left. + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}[2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{10})t + 2l_{30} - 2l_{10} - 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} - 2\bar{n}_{10}} \right\}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{\text{sen}[2(\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30})t + 2l_{30} + 2l_{20} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} - 2\bar{n}_{20}} + \\
& + \frac{\text{sen}[2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20})t - 2l_{30} + 2l_{20} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} + \\
& + \frac{\text{sen}[2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20})t + 2l_{30} + 2l_{20} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} + \\
& - \frac{\text{sen}[-2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20})t - 2l_{30} - 2l_{20} + 2\alpha]}{2\bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} + \\
& + d_9 \left[ \frac{\text{sen}[2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20})t + 2l_{30} - l_{20} + 2\alpha]}{-\bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} + \right. \\
& + \frac{\text{sen}[2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20})t + 2l_{30} - l_{20} - 2\alpha]}{2\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20}} + \\
& + \left. \frac{\text{sen}[2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20})t + 2l_{30} + l_{20} + 2\alpha]}{\bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} + \right. \\
& + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}[(2\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{10})t + 2l_{30} - l_{20} + 2l_{10} + 2\alpha]}{+ 2\bar{n}_{10} - \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}[(2\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{10})t + 2l_{30} - l_{20} + 2l_{10} - 2\alpha]}{+ 2\bar{n}_{10} - \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}[(2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{10})t + 2l_{30} + l_{20} + 2l_{10} + 2\alpha]}{+ 2\bar{n}_{10} + \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}[(2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{10})t + 2l_{30} + l_{20} + 2l_{10} - 2\alpha]}{+ 2\bar{n}_{10} + \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}[(2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{10})t + 2l_{30} + l_{20} - 2l_{10} + 2\alpha]}{- 2\bar{n}_{10} + \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}[(2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{10})t + 2l_{30} + l_{20} - 2l_{10} - 2\alpha]}{- 2\bar{n}_{10} + \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}[(2\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{10})t + 2l_{30} - l_{20} - 2l_{10} + 2\alpha]}{- 2\bar{n}_{10} - \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} + \\
& + \left. \frac{1}{2} \frac{\text{sen}[(2\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{10})t + 2l_{30} - l_{20} - 2l_{10} - 2\alpha]}{- 2\bar{n}_{10} - \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{30}} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\cos[(2\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20})t + 2l_{30} - l_{20} + 2\alpha]}{2(2\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20})} + \\
& + \frac{\cos[(2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20})t + 2l_{30} + l_{20} + 2\alpha]}{2(2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20})} + \\
& + \frac{\cos[(2\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{10})t + 2l_{30} - l_{20} - 2l_{10} + 2\alpha]}{2(2\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\cos[(2\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{10})t + 2l_{30} - l_{20} - 2l_{10} - 2\alpha]}{2(2\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\cos[(2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{10})t + 2l_{30} + l_{20} - 2l_{10} + 2\alpha]}{2(2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\cos[(2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{10})t + 2l_{30} + l_{20} - 2l_{10} - 2\alpha]}{2(2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} - 2\bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\cos[(2\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{10})t + 2l_{30} - l_{20} + 2l_{10} - 2\alpha]}{2(2\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\cos[(2\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{10})t + 2l_{30} - l_{20} + 2l_{10} + 2\alpha]}{2(2\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\cos[(2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{10})t + 2l_{30} + l_{20} + 2l_{10} + 2\alpha]}{2(2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\cos[(2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{10})t + 2l_{30} + l_{20} + 2l_{10} - 2\alpha]}{2(2\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} + 2\bar{n}_{10})} \Big] + \\
& - d_{10} \Bigg[ \frac{\cos[2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} - \bar{n}_{10})t + 2(l_{30} + l_{20} - l_{10} - \alpha)]}{2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} - \bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\cos[2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} + \bar{n}_{10})t + 2(l_{30} - l_{20} + l_{10} - \alpha)]}{2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} + \bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\cos[2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} - \bar{n}_{10})t + 2(l_{30} + l_{20} - l_{10} + \alpha)]}{2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} - \bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\cos[2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} + \bar{n}_{10})t + 2(l_{30} - l_{20} + l_{10} + \alpha)]}{2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} + \bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\sin[2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} + \bar{n}_{10})t + 2(l_{30} + l_{20} + l_{10} - \alpha)]}{2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} + \bar{n}_{10})} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\text{sen}[2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} - \bar{n}_{10})t + 2(l_{30} - l_{20} - l_{10} - \alpha)]}{2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} - \bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\text{sen}[2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} - \bar{n}_{10})t + 2(l_{30} - l_{20} - l_{10} + \alpha)]}{2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} - \bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\text{sen}[2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} + \bar{n}_{10})t + 2(l_{30} + l_{20} + l_{10} + \alpha)]}{2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} + \bar{n}_{10})} \Big] + \\
& - d_{11} \Big[ \frac{\cos[2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} + \bar{n}_{10})t + 2(l_{30} + l_{20} + l_{10} - \alpha)]}{2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} + \bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\cos[2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} + \bar{n}_{10})t + 2(l_{30} + l_{20} + l_{10} - \alpha)]}{2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} + \bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\cos[2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} + \bar{n}_{10})t + 2(l_{30} + l_{20} + l_{10} + \alpha)]}{2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} + \bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\cos[2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} - \bar{n}_{10})t + 2(l_{30} - l_{20} - l_{10} + \alpha)]}{2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} - \bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\text{sen}[2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} + \bar{n}_{10})t + 2(l_{30} - l_{20} + l_{10} - \alpha)]}{2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} + \bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\text{sen}[2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} - \bar{n}_{10})t + 2(l_{30} + l_{20} - l_{10} - \alpha)]}{2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} - \bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\text{sen}[2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} + \bar{n}_{10})t + 2(l_{30} - l_{20} + l_{10} + \alpha)]}{2(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20} + \bar{n}_{10})} + \\
& + \frac{\text{sen}[2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} - \bar{n}_{10})t + 2(l_{30} + l_{20} - l_{10} + \alpha)]}{2(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20} - \bar{n}_{10})} \Big] \Big\} + \\
& + \frac{mk}{r_O^2} \frac{\text{sen} 2\delta}{2} \Big\{ -d_{12} \frac{\text{sen}[-\bar{n}_{30}t - l_{30} + \alpha]}{\bar{n}_{30}} + \\
& + d_{13} \frac{\text{sen}[(-\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20})t - l_{30} + l_{20} + \alpha]}{\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30}} + \\
& - d_{14} \frac{\text{sen}[(-\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20})t - l_{30} - l_{20} + \alpha]}{\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} + \\
& - d_{15} \frac{\text{sen}[(-\bar{n}_{30} - 2\bar{n}_{20})t - l_{30} - 2l_{20} + \alpha]}{2\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} +
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + d_{16} \frac{\text{sen} [(-\bar{n}_{30} + 2\bar{n}_{20})t - l_{30} + 2l_{20} + \alpha]}{2\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30}} + \\
& + d_{17} \left[ \frac{\text{sen} [(\bar{n}_{30} - 3\bar{n}_{20})t + l_{30} - 3l_{20} + \alpha]}{-3\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} + \right. \\
& \quad - \frac{\text{sen} [(\bar{n}_{30} + 3\bar{n}_{20})t + l_{30} + 3l_{20} + \alpha]}{3\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} + \\
& \quad - \frac{\text{sen} [(\bar{n}_{30} - \bar{n}_{20})t + l_{30} - l_{20} + \alpha]}{-\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} + \\
& \quad \left. + \frac{\cos [(\bar{n}_{30} + \bar{n}_{20})t + l_{30} + l_{20} + \alpha]}{\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} \right] + \\
& - d_{18} \left[ \frac{\text{sen} [-(\bar{n}_{30} + 3\bar{n}_{20})t - l_{30} - 3l_{20} + \alpha]}{3\bar{n}_{20} + \bar{n}_{30}} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\text{sen} [(-\bar{n}_{30} + 3\bar{n}_{20})t - l_{30} + 3l_{20} + \alpha]}{3\bar{n}_{20} - \bar{n}_{30}} \right] \Bigg\} + \bar{L}_{30}
\end{aligned}$$

em que:

$$\begin{aligned}
d_1 &= -\frac{\text{sen} 2J}{4} \left( \text{sen} I + \frac{7}{16} \text{sen} 2I \right) \\
d_2 &= \frac{\text{sen} 2J}{4} \left( \frac{7}{16} \text{sen} 2I - \text{sen} I \right) \\
d_3 &= -\frac{\text{sen}^2 I}{32} (5 + 9 \cos 2J) \\
d_4 &= \frac{\text{sen}^2 I}{32} (3 + 7 \cos 2J) \\
d_5 &= -\frac{I}{64} \left\{ \text{sen}^2 J (16 \cos I + 9 + 7 \cos 2I) + 2 \text{sen}^2 I \right\} \\
d_6 &= \frac{I}{64} \left\{ \text{sen}^2 J (-16 \cos I + 9 + 7 \cos 2I) + 2 \text{sen}^2 I \right\} \\
d_7 &= \frac{I}{16} \left\{ 1 - \cos^2 I \text{sen}^2 J + \frac{\cos^2 J}{2} (\text{sen}^2 I - 2) \right\}
\end{aligned}$$

$$d_8 = -\frac{\cos^2 J \operatorname{sen}^2 I}{16}$$

$$d_9 = -\frac{\operatorname{sen} 2J \operatorname{sen} 2I}{64}$$

$$d_{10} = \frac{\operatorname{sen}^2 I}{64} (\cos^2 J - \cos J)$$

$$d_{11} = \frac{\operatorname{sen}^2 I}{64} (\cos J + \cos^2 J)$$

$$d_{12} = \frac{\operatorname{sen} 2I}{8} (3\cos 2J + 1)$$

$$d_{13} = \frac{\operatorname{sen} 2I \operatorname{sen} 2J}{16} (1 - 6\operatorname{sen} I)$$

$$d_{14} = \frac{\operatorname{sen} 2J}{4} \left[ 2\cos 2I + \frac{\operatorname{sen} 2I}{4} (6\operatorname{sen} I - 1) \right]$$

$$d_{15} = \frac{\operatorname{sen} I (\cos 2J - 1)}{8} (\cos I + 1)$$

$$d_{16} = \frac{\operatorname{sen} I}{8} (\cos 2J - 1) (\cos I - 1)$$

$$d_{17} = -\frac{1}{16} \operatorname{sen} 2J \operatorname{sen} 2I \operatorname{sen} I$$

$$d_{18} = -\frac{1}{16} \operatorname{sen} 2I \operatorname{sen} 2J$$

