UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

ARTUR REZZIERI GAMBERA

# HISTÓRIA DA INTEGRAL DE LEBESGUE

Rio Claro - SP
2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

ARTUR REZZIERI GAMBERA

# HISTÓRIA DA INTEGRAL DE LEBESGUE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Professor Doutor Henrique Lazari

Rio Claro - SP

2017

510.09 Gambera, Artur Rezzieri
G189h História da Integral de Lebesgue / Artur Rezzieri
Gambera. - Rio Claro, 2017
83 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Henrique Lazari

1. Matemática - História. 2. Integral de Lebesgue. 3.
Teoria da medida. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

ARTUR REZZIERI GAMBERA

# HISTÓRIA DA INTEGRAL DE LEBESGUE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em

Comissão Examinadora

Prof. Dr.Henrique Lazari – Orientador
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Irineu Bicudo
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Carlos Roberto de Moraes
UNIARARAS – Fundação Hermínio Ometto/Araras (SP)

Rio Claro, SP 23 de junho de 2017

Dedico a todo matemático que se sente um pouco historiador, e a todo historiador que se sente um pouco matemático.

# AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais Agostinho e Silma, e aos meus irmãos José Leonardo e Laura pela presença, amor e apoio durante todo o percurso do mestrado.

Agradeço também à Mariela Nathalea Tagliaferro de Queiroz por levantar meu ânimo nos momentos de dúvida, por todo o carinho e tolerância, pela paciência e companheirismo.

Aos meus professores, em particular Hermes Antônio Pedroso por ter me apresentado a História da Matemática, e Adriana de Bortoli por ter apresentado o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

Ao Prof. Dr. Irineu Bicudo por ter me acolhido e orientado no início do mestrado. Ao Prof. Dr. Henrique Lazari pelos conselhos e por ter dado continuidade na orientação.

Ao professor Carlos por ter aceito o convite para compor a banca examinadora.

# RESUMO

Esse trabalho consiste em um relato histórico do surgimento do conceito de integral proposto por Henri Léon Lebesgue (1875-1941). A pesquisa se insere no campo da História da Matemática e é focada na análise e discussão de duas publicações de Lebesgue: o artigo *Sur une généralisation de l'intègrale dèfinie* publicado em 1901 e sua tese de doutorado *Intégrale, Longueur, Aire* publicada em 1902. Na primeira publicação Lebesgue apresenta pela primeira vez sua ideia de integral e na segunda discute mais profundamente suas ideias acerca da noção de medida e integração.



**Palavras-chave:** História da Matemática. Integral de Lebesgue. Teoria da Medida.

# ABSTRACT

This work consists in a historical report of the appearance of the concept of integral proposed by Henri Léon Lebesgue (1875-1941). The research is inserted on the History of Mathematics field and is focused on the analysis and discussions of two publications of Lebesgue: the paper *Sur une généralisation de l'intègrale dèfinie* published in 1901 and his doctoral thesis *Intégrale, Longueur, Aire* published in 1902. In the first publication Lebesgue presents for the first time his idea about integrals and in the second discuss more deeply his ideas about the notion of measure theory and integration.

**Keywords:** History of Mathematics. Lebesgue's Integral. Measure Theory.

# SUMÁRIO

# CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

Muitos matemáticos e historiadores da matemática reconhecem em Henri Léon Lebesgue uma grande importância no desenvolvimento da Matemática, mais especificamente na Análise Matemática. Seus trabalhos sobre teoria da medida e integração são considerados revolucionários e hoje figuram entre os clássicos da Matemática. Carl Boyer se refere a Lebesgue como um dos mais originais e produtivos entre os principais matemáticos do início do século XX, que “revolucionou um importante aspecto da análise sem se submeter a nenhuma ortodoxia” (1968, p. 664)[1]. Para Hawkins (1995) o trabalho sofisticado de Lebesgue pode ter sido a primeira teoria genuína de integração. Segundo Hoare e Lord (2002, p. 3), “Lebesgue não criou Escola mas sua influência na matemática do século XX foi profunda”[2]. Para Bartle (1995) a coleção de funções para as quais a integral pode ser definida foi amplamente estendida com o trabalho de Lebesgue, e os teoremas de convergência associados à sua teoria permitem chegar a resultados mais gerais, mais completos e mais elegantes que os da teoria clássica de integração.

De fato, quando Lebesgue publicou sua tese de doutorado intitulada *Integrale, Longeur, Aire* em 1902, em que propunha uma nova teoria de integração, várias questões antigas na comunidade matemática puderam ser resolvidas. Nos dois primeiros capítulos de sua obra se encontram discussões até então inéditas sobre o que Lebesgue entendia por medida de conjuntos e como isso poderia ser aplicado na teoria de integração. Lebesgue já havia proposto uma forma diferente de definir integrais definidas de funções contínuas crescentes num artigo publicado um ano antes, mas em sua tese generaliza essas ideias mostrando aplicações e resultados relacionados a ela. Até então a concepção de integral considerada mais geral era a dada por Bernhard Riemann e aperfeiçoada por Gaston Darboux, e de fato, quando foi proposta parecia ter resolvido um problema antigo acerca das condições em que uma função poderia ser considerada integrável.

---

[1] (...) revolutionized an important aspect of analysis without subscribing to one of the chief orthodoxies.

[2] Lebesgue created no School but his influence on twentieth century mathematics was profound.

Dada a importância e a frequência com que Lebesgue é citado nos livros de análise, nos propomos nesse trabalho tecer um relato histórico do surgimento dessa teoria de integração proposta por ele. Nesse primeiro capítulo introdutório tentamos localizar esse relato nos campos pesquisados pela Educação Matemática, fazemos uma discussão sobre as fontes e documentos históricos utilizados, e apresentamos motivações para o estudo da integral de Lebesgue.

Antes de apreciarmos o que Lebesgue publicou é necessário compreender os significados de função, integral e medida, e como esses conceitos foram se modificando e se relacionando até Lebesgue. Segundo Hawkins (1928), para apreciar o que Lebesgue fez e porque fez, é necessário considerar seu trabalho no contexto histórico em que surgiram as discussões teóricas sobre medida e os problemas que surgiram com a definição de integral de Riemann. Dessa forma dedicamos o segundo capítulo a uma breve discussão a respeito desses desenvolvimentos.

O terceiro capítulo é uma análise breve do artigo Sur une généralisation de l'intégrale définie publicado em 1902 e onde Lebesgue pela primeira vez sugere uma forma alternativa de definir integral de uma função. Fazemos também uma aplicação desse método de Lebesgue em uma função afim.

A famosa tese de Lebesgue é analisada no quarto e quinto capítulos onde analisamos primeiro suas proposições e resultados sobre teoria da medida e depois suas aplicações dessa teoria na sua definição de integral. Mais precisamente o quarto capítulo é dedicado ao estudo de medidas que Lebesgue fez, e corresponde ao primeiro capítulo de sua tese; enquanto o quinto capítulo é sua discussão sobre integral e corresponde ao segundo capítulo de sua tese.

Assumimos a responsabilidade pelas traduções feitas aqui de todas as citações presentes nesse trabalho.

## HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

É necessário fazermos algumas considerações a respeito da inserção do presente trabalho no campo da pesquisa em Educação Matemática. Segundo Baroni e Nobre (2014) a Educação Matemática vem incorporando componentes que visam oferecer instrumentos metodológicos para as atividades pedagógicas dos professores, e um deles é a História da Matemática, que vem ganhando um certo destaque no meio acadêmico-educacional. Segundo os mesmos autores

> Há, no entanto, (...) que se ter cautelas quando se trata de "propor o trabalho em sala de aula, nas aulas de Matemática, com a utilização da História da Matemática". A História da Matemática, assim como a Análise, a Álgebra, a Topologia etc., é uma área do conhecimento matemático, um campo de investigação científica, por isso é ingênuo considerá-la como um simples instrumento metodológico. Dessa forma, é plausível dizer que tanto quanto o conteúdo matemático, há a necessidade de o professor de Matemática conhecer sua história, ou seja: A História do Conteúdo Matemático. Há, no entanto, que se considerar que a História da Matemática, como área de investigação científica, não possui muitos adeptos nos grandes centros acadêmicos brasileiros. Isso nos leva a constatar que parte significativa dos Matemáticos que desenvolvem pesquisas em Matemática e atuam em cursos de graduação nunca estudou História da Matemática. Muitas vezes estes docentes universitários dominam somente um pouco sobre a história dos conteúdos que são objetos de suas pesquisas. Como decorrência a isto há pouco empenho em se introduzir a disciplina História da Matemática nos cursos de graduação, e, naqueles cursos nos quais há esta disciplina, ela é, com raras e honrosas exceções, considerada de "segunda classe". Nesse sentido há o ciclo que se forma e a deficiência relativa à História da Matemática entre aqueles que desenvolvem suas atividades em torno da

> Matemática se generaliza. A necessidade de se pensar a História da Matemática como área de investigação científica nos leva a reflexões outras, que dizem respeito à História da Matemática e suas Relações com a Educação Matemática, pois somente a formação do pesquisador em História da Matemática não basta, pois este deve ter também o compromisso com a formação de novos pesquisadores, ou seja com a Educação. (BARONI e NOBRE, 1999, p. 130)

Ainda segundo os autores

> No Brasil, no entanto, não é plausível dizer, por exemplo, que se pode realizar, sem dificuldades, investigação pura em História da Matemática sobre temas que foram desenvolvidos originalmente na Europa ou em outras regiões como o mundo árabe, a Índia, a China etc. onde as fontes primárias se encontram. Há, no entanto, que se ter o bom-senso e dizer que alguns trabalhos investigativos na área da História da Matemática podem perfeitamente ser realizados a partir de textos publicados originalmente, ou então a partir de seus fac-símiles. A análise histórica, neste caso, pode possuir conotações diferenciadas àquelas realizadas nos grandes centros científicos e contribuir com novas interpretações históricas sobre os assuntos investigados. (BARONI e NOBRE, 1999).

Em conformidade com essas ideias, situamos nossa pesquisa no campo da História da Matemática, como área do conhecimento matemático, e não tanto como instrumento metodológico sem que, no entanto, não venha a colaborar nesse sentido. Destacamos também que o tema para o qual nos propomos realizar essa pesquisa teve sua origem e desenvolvimento na Europa, e nosso acesso às fontes se limitou ao que estava disponível em acervos virtuais. Fontes não bibliográficas e não digitalizadas não puderam ser levadas em consideração para esse trabalho. Com fontes não bibliográficas nos referimos a qualquer tipo de fonte histórica que não sejam textos, como fotos ou vídeos.

## ACERCA DAS FONTES HISTÓRICAS

Sem a mínima pretensão de tentar definir o que é passado, nos limitamos a dizer que este não nos permite nenhum acesso. Somos a prova de que existiu um passado, pois somos fruto do que foi feito e realizado pelos que vieram antes de nós. Entretanto é precisamente no presente onde encontramos fotos, textos, partituras, e muitas outras marcas de manifestação humana pretérita e pretendemos fazer uma breve discussão sobre elas.

Em resumo o trabalho do historiador é emitir um parecer sobre o passado. O historiador não é um ser mágico que tem acesso livre para avançar ou retroceder no tempo; ele está fadado a viver no presente, assim como todos nós. O parecer do historiador é feito através da busca, análise, crítica, discussão, comparação dessas marcas de manifestação humana citadas acima; que dessa forma recebem o nome de fontes ou documentos históricos. Para o historiador essas fontes são fundamentais pois,

> (...) o documento é a base para o julgamento histórico. Destruídos todos os documentos sobre um determinado período, nada poderia ser dito por um historiador. Uma civilização da qual não tivéssemos nenhum vestígio arqueológico, nenhum texto e nenhuma referência por meio de outros povos, seria como uma civilização inexistente para o profissional de História? (KARNAL e TATSCH, 2013, p. 9).

Dessa forma podemos concluir que não existe história sem documento. É importante ressaltar que um mesmo documento pode possibilitar variadas interpretações dependendo do foco que o historiador tem sobre ele. Dois historiadores diferentes podem ter reflexões e conclusões totalmente diferentes em seus pareceres, mesmo tendo acesso às mesmas fontes.

Ainda assim a leitura de um documento não é um trabalho simples. O historiador italiano Carlo Ginzburg compara o trabalho do historiador com o do detetive que soluciona o crime sem tê-lo presenciado e com o do médico que descobre a doença no paciente por meio dos sintomas que apresenta (GINZBURG, 1989). Comparação semelhante faz Irineu Bicudo na tradução que fez dos Elementos de Euclides:

> Cada historiador da Matemática – fixemo-nos no que nos diz respeito – age a partir de pequenas evidências, como o legista tenta, a partir de algum osso, reconstituir o verdadeiro rosto do morto, que não mais se mostra na polida superfície dos espelhos. (BICUDO, 2009).

A matemática, sendo um produto do intelecto humano, também deixa marcas que podem ser tornada documentos. Dizemos aqui que uma marca pode ser tornada documento pois, “um documento é tudo aquilo que um determinado momento decidir que é um documento” (KARNAL e TATSCH, p. 20), ou seja, o status de documento é dado de acordo com uma determinada mentalidade que se tem numa época. “O documento existe em relação ao meio social que o conserva” (KARNAL e TATSCH, p. 21). Com isso queremos dizer que o tema de nosso estudo foi escolhido devido a importância que a comunidade matemática dá a Lebesgue. Ao publicar sua inovadora tese de doutorado, em que apresenta uma teoria da medida que “mede” mais conjuntos e uma integral que “integra” mais funções, Lebesgue contribuiu para que a Matemática se desenvolvesse e, portanto, ganhou reconhecimento entre matemáticos tantos de sua época quanto posteriores. Assim, as publicações de Lebesgue adquiriram status de documento.

Um ano antes de publicar sua tese, Lebesgue publicou um artigo em que pela primeira vez expõe sua ideia de reformulação da teoria clássica de integração. Se sua tese é a certidão de nascimento de sua teoria, esse artigo é o atestado que confirma sua gestação. É por tal razão que escolhemos ambas as publicações como fontes principais para o presente trabalho. Por serem publicações com conteúdo matemático, a análise e crítica dessas fontes se resume à leitura e comparação com alguns livros atuais de teoria da medida e integração, como (BARTLE, 1995), (CHENG, 2008), (HÖNIG, 1977).

Não nos preocupamos tanto com a definição da metodologia de historiografia adotada, pois nossas intenções não passavam de avaliar as publicações de Lebesgue no sentido matemático em relação com o que havia sido discutido antes dele e relacionar suas descobertas com o presente.

## MOTIVAÇÕES PARA O ESTUDO DA INTEGRAL DE LEBESGUE

A ideia de integral é intimamente ligada à ideia de função. Atualmente concebemos uma função $f$ como uma correspondência entre dois conjuntos $A$ e $B$, em que a cada $x \in A$ associamos um único $f(x) \in B$. O gráfico de $f$ é definido como o conjunto de pontos $(x, f(x))$, que em inúmeros exemplos gera um desenho.

Já a ideia de integral definida de uma função $f: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ é, basicamente, associar um valor numérico ao conjunto de pontos compreendidos entre o gráfico de $f$, o eixo coordenado $Ox$ e as duas abcissas $a$ e $b$, que serão os limites do chamado intervalo de integração. Vamos, por hora, chamar esse conjunto de $E$ e nos limitarmos a funções reais bidimensionais, ou seja, funções cujo gráfico se localiza no plano[3]. Esse valor associado a $E$ geralmente era obtido através de um método, cuja invenção é atribuída a Eudoxo, que consiste em traçar um número de figuras geométricas cujas áreas fossem conhecidas (retângulos costumam funcionar bem) de modo que $E$ ficasse inteiramente inscrito na união dessas figuras, e tomar o valor mínimo da soma das áreas destas. O valor obtido dessa soma pode ser chamado de integral de $f$ no intervalo tomado. Devido a forma como esse valor foi obtido – através de somas de áreas

[3] De forma semelhante, Lebesgue em sua tese denota por $E$ o conjunto dos pontos limitados por uma função, o eixo coordenado horizontal e duas abscissas para construir sua definição geométrica de integral.

– comumente emprestamos a ele o nome de área, e associamos à ideia de integral de uma função ao cálculo da área de $E$. É claro que essa é uma ideia muito simples do que significa a integral de uma função e foi exposta dessa forma para fins didáticos.

O método citado acima já foi conhecido como método de exaustão e, como foi dito, sua criação é atribuída a Eudoxo, mas foi amplamente utilizado e desenvolvido por Arquimedes. Um método utilizado para “alcançar” um valor para área de figuras geométricas que não estavam ao “alcance” de formas mais diretas de obtenção. Os trabalhos de Newton e Leibniz permitiram que esse método se tornasse uma ferramenta sistemática para o cálculo desses valores (BARTLE, 1995).

A teoria da integração veio se formando através da preocupação dos matemáticos em descobrir em que condições uma função poderia ser dita integrável. No início a preocupação era mais voltada à aplicações mecânicas desses resultados, mas com o passar do tempo se tornou mais abrangente. Todos esses esforços levaram ao que costumamos chamar de teoria clássica da integração, que foi proposta por Riemann em 1854. Essas teorias geralmente eram definições e resultados que permitiam que a uma nova classe de função fosse permitida a integração.

Uma função cujo gráfico é um traço sem saltos, ou seja, quando foi desenhada o lápis não foi afastado do papel, é chamada hoje de função contínua. Veremos que nem sempre o que se entendeu por função contínua significou isso; houve um tempo em que para uma função ser considerada contínua ela deveria ser expressa algebricamente por apenas uma equação, o que na verdade não tem muita relação com a ideia de tirar o lápis do papel, pois há funções contínuas expressas por várias equações.

Para funções contínuas (no sentido moderno) não havia muito problema em se calcular a integral. A teoria clássica de Riemann permitia que uma função tivesse infinitos pontos de descontinuidade e ainda fosse integrável, e por um tempo foi considerada a teoria mais geral, isto é, que abrangia o maior número de funções possível. É a teoria geralmente ensinada nos cursos de cálculo diferencial e integral nos primeiros anos das graduações em ciências exatas.

Uma pergunta que pode surgir ao estudante de cálculo é: “para que queremos uma nova definição de integral se já existe uma que nos basta?”. Steve Cheng (2008) responde essa pergunta apresentando três motivações para a integral de Lebesgue. Vamos discutir essas três motivações a seguir. Ele inicia supondo que o leitor poderia questionar, após ter se deparado com as definições rigorosas de Riemann em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$, se há mesmo necessidade de outra integral, até porque alguém iria querer integrar funções como a de Dirichlet que, tomada no intervalo $(0,1)$, é igual a $1$ quando $x$ é racional e igual a $0$ quando $x$ é irracional.

A primeira motivação é a de que, talvez, ao se deparar pela primeira vez com conceitos de números negativos, irracionais e complexos, a primeira reação do leitor poderia ser a de questionar "para que servem". Ainda assim esses números se provam úteis por seus conjuntos serem fechados sob certas operações. Um conjunto é dito fechado para uma operação quando operando quaisquer dois de seus elementos, o resultado está nesse conjunto; como exemplo podemos citar o conjunto dos número naturais que não é fechado para a operação de subtração, mas o conjunto dos números inteiros é. Equações envolvendo quantidades quaisquer poderia ser resolvidas, sem a necessidade de restrições artificiais ou casos especiais. Dessa forma a integral de Lebesgue tem a mesma característica em relação a de Riemann, pois se a tomarmos como exemplo, a função de Dirichlet pode ser considerada como a soma infinita

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x),$$

em que

$$E_n(x) = \begin{cases} 1 \,; x = x_n \\ 0 \,; x \neq x_n \end{cases}.$$

$D$ é a função de Dirichlet e $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma listagem qualquer de números racionais. $D$ não é integrável segundo Riemann (ou integráveis (R), como chamaremos doravante), mas cada $E_n$ é. Dessa forma o limite de funções integráveis (R) não é necessariamente integrável (R). A classe de funções integrável (R) não é fechada em relação ao processo de tomar limites, que é uma operação.

Esse ponto fraco na definição de Riemann gera uma série de problemas, um deles é decidir quando a seguinte equação é válida:

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)dx = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Em cálculo elementar, essa equação pode ser válida num intervalo fechado $[a,b]$ quando a sequencia de função $\{f_n\}$ é uniformemente convergente, no entanto, essa condição é muito específica. Um teorema importante, e muito aplicado, é o da convergência dominada[4], que dá condições de quando essa equação é válida.

Cheng, com um certo bom humor, aponta que julgando pelo fato de livros elementares de cálculo quase nunca tentarem provar esse teorema e, pelo fato deste ter sido descoberto originalmente através de métodos da teoria da medida, seria quase impossível prová-lo com métodos elementares da integral de Riemann.

A segunda motivação dada por Cheng é a de que, por ser mais abstrata a integral de Lebesgue, manipulações e adaptações problemáticas da integral de Riemann podem ser substituídas por argumentos concisos envolvendo integrais de Lebesgue. Como exemplo, a integral Gaussiana de probabilidade

[4] Seja $(f_n)$ uma sequência de funções integráveis que converge em quase todo ponto para uma função mensurável $f$. Se existe uma função integrável $g$ tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n$, então $f$ é integrável e

$$\int f\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu.$$

Nesse teorema, a ideia de integrabilidade é no sentido de Lebesgue, e $\mu$ representa a medida em que estas funções estão sendo integradas.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

Ela pode ser resolvida, usando coordenadas polares, esquematicamente:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx\, dy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} r\, dr\, d\theta \\
&= 2\pi \left[-e^{-\frac{1}{2}r^2} r\right]_0^{\infty} = 2\pi.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Entretanto esse método é problemático, pois poderíamos questionar porque $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty}$ é o mesmo que $\int_{\mathbb{R}^2}$ ? Ou se a transformação em coordenadas polares é válida no domínio $\mathbb{R}^2$ ilimitado.

A integral de Riemann é construída em intervalos limitados, dessa forma integrar por Riemann em conjuntos ilimitados é comumente feito com objetivo ilustrativo, sem deixar claro em que situações os teoremas válidos para conjuntos limitados continuam valendo para ilimitados.

A terceira e última motivação é a de que com a maior abstração proporcionada por essa teoria surgem novas áreas onde ela pode ser aplicada. Em outras palavras, essa teoria não se restringe à integração em $\mathbb{R}^n$. Podemos especificar uma medida $\mu$ num conjunto $X$ com determinadas propriedades, e a teoria de Lebesgue permite definir e, possivelmente computar, a integral

$$\int_X f \, d\mu$$

que representa o limite da soma

$$\sum_i f(x_i)\, \mu(A_i),$$

em que $\{A_i\}$ é uma partição de $X$ e $x_i$ é um ponto de $A_i$.

Integrando em $\mathbb{R}^n$ com a medida de Lebesgue, a quantidade $\mu(A_i)$ é simplesmente a área ou volume de $A_i$, mas em geral, outras funções de medida $A \longmapsto \mu(A)$ podem ser definidas. Escolhendo medidas $\mu$ diferentes, pode-se definir integral de Lebesgue sobre curvas e superfícies em $\mathbb{R}^n$, assim unindo as discrepantes definições de integral de linha, área, volume em cálculo de várias variáveis.

Em análise funcional, integrais de Lebesgue são usadas para representar certos funcionais lineares. Por exemplo, o espaço dual contínuo de $C[a,b]$, o espaço de funções contínuas em $[a,b]$ é uma correspondência bijetora com uma certa família de medidas no espaço $[a,b]$.

Além disso, a integral de Lebesgue é indispensável no rigoroso estudo de teoria da probabilidade. Uma medida de probabilidade se comporta de forma análoga a da medida de uma área, e de fato uma medida de probabilidade é uma medida no sentido de Lebesgue.

Essas três motivações e o capítulo seguinte nos permitem apreciar um pouco da importância que a integral de Lebesgue para o desenvolvimento da matemática da Análise Matemática no início do século XX.

# CAPÍTULO 2 – A INTEGRAL ANTES DE LEBESGUE

A noção de integral é intimamente relacionada ao conceito de funções, e portanto tratamos, de forma breve, neste capítulo das mudanças que esse conceito sofreu. Também tratamos dos primeiros estudos em relação a uma teoria da medida, visto que a ideia de Integral de Lebesgue dependeu fortemente dessas noções. Por fim trazemos alguns aspectos da biografia de Henri Lebesgue.

## O CONCEITO DE FUNÇÃO E SUA RELAÇÃO HISTÓRICA COM A IDEIA DE INTEGRAL

É comum atribuir a Leibniz o primeiro uso da palavra "função" na matemática em 1692 para designar quantidades geométricas que dependem de um ponto de uma curva. Segundo Monna (1972) a noção de função não estava presente na matemática grega antiga e quando Arquimedes estudou a parábola, esta era definida em termos geométricos como seção cônica e não como uma equação. Isso mostra que a concepção atual de função veio evoluindo de noções vagas e inexatas.

Por volta de 1718, Johan Bernoulli (1667-1748) considerou como função uma expressão formada de uma variável e algumas constantes (EVES, 2011). Em 1748, Euler definiu função de uma quantidade variável como uma expressão analítica formada de qualquer maneira a partir dessa variável e constantes[5]. Por expressão analítica, Euler pretendia significar a característica comum a todas as funções conhecidas, que seria uma equação ou fórmula. Euler admitia como "funções arbitrárias" aquelas que não eram representadas por nenhuma lei, mas formadas por partes de outras curvas ou traçadas "a mão livre".

Para os matemáticos contemporâneos de Euler, funções formadas por mais de uma expressão eram chamadas descontínuas. Logo, a função

[5] "Functio quantitates variabilis est expressio analytica quomodocunque composite ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitabus constantibus" (EULER, 1748).

$$f(x) = \begin{cases} x \ ; \ x \geq 0 \\ x^2; \ x < 0 \end{cases},$$

que atualmente é considerada contínua, seria considerada descontínua por Euler e seus colegas. Assim, quando se falava em funções arbitrárias, não se pensava tanto na correspondência entre números reais: $x \mapsto f(x)$, e sim na expressão que essa função teria.

Segundo Hawkins (1928) a discussão sobre a natureza das funções estava presente em problemas como o da equação diferencial parcial da corda vibrante, e quais funções poderiam ser consideradas soluções deste problema. D'Alembert mostrou em 1747 que a solução desse problema teria a forma

$$F(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)],$$

e insistiu que $f$ deveria ser dada por uma única equação, ou seja, ser contínua no sentido da época. Euler, por outro lado, achava essa restrição desnecessária. Daniel Bernoulli (1700-1782), filho de Johan, contribui com essa controvérsia dizendo que $f$ deveria ser expressa pela série

$$f(x) = a_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + a_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} + a_3 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} + \cdots,$$

em que $L$ representa o comprimento da corda, e defendia que toda função arbitrária num intervalo podia ser representada por séries trigonométricas.

No início do século XIX, Joseph Fourier (1768-1830) retomou as ideias de Bernoulli apresentando uma proposição que dizia que qualquer função $f$ limitada definida num intervalo $(-a, a)$ podia ser expressa na forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{a} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\right],$$

em que

$$a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)a_n \cos\frac{n\pi x}{a}\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\,dx.$$

Para Fourier, uma função arbitrária significava “uma sucessão de valores dados, sujeitos ou não a uma lei comum, e respondendo a todos os valores de $x$ (...)[6]” (1822, p. 554-555). Entretanto ainda considerava arbitrária como aquela não expressa por apenas uma equação. Seus exemplos compreendiam funções onde, para um número finito de pontos em um intervalo finito, uma função representada por uma série trigonométrica podia se tornar descontínua (no sentido moderno da palavra). Ou seja, Fourier teria considerado funções com um número finito de pontos de descontinuidade.

Ele formulou dois argumentos para sua proposição, ambos baseados na ideia de que se para $f: (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, a equação

[6] Une suite de valeurs données, assujetties ou non à une loi commune, et qui répondent à toutes les valeurs de $x$ (...).

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

pode ser solucionada (isto é, ser possível determinar $a_i$ e $b_i$ para todo $i$ natural), então dada representação deve ser válida. Em uma de suas justificativas, considerou válida a integração termo a termo de uma série infinita de funções (HAWKINS, p. 7), cuja permissibilidade ainda seria discutida posteriormente.

Fourier reconheceu a necessidade de justificar a significância de integral definida de funções arbitrárias. Durante o século XVIII, integração era concebida mais como o inverso da diferenciação do que como limite de uma soma, apesar das duas visões serem reconhecidas. O processo de integrar uma função $f$ havia se tornado, até o momento, o de encontrar uma função primitiva $F$ tal que $F' = f$, e a integral definida $\int_a^b f$ era simplesmente $F(b) - F(a)$. A existência de $F$ era considerada óbvia mesmo para funções que não eram dadas por uma única equação. É possível que Fourier tivesse isso em mente quando se voltou para a visão de integral como área; a existência da integral definida de uma função arbitrária era baseada na existência da área do conjunto de ordenadas dessa função (HAWKINS, p. 8), uma visão geometricamente orientada. O esclarecimento e generalização da noção de área é de importância fundamental para o desenvolvimento histórico do conceito de integral.

O responsável pela introdução do conceito moderno de continuidade e por prover uma definição precisa de integral definida como limite de uma soma foi Augustin Cauchy (1789-1857). Em seu *Cours d'analyse* (1821), Cauchy estabeleceu:

> Seja $f(x)$ uma função da variável $x$, e suponha que, para cada valor de $x$ intermediário a dois limites dados, esta função admita constantemente um valor único e finito. Se, a partir de um valor $x$ entre os limites, atribuamos à variável $x$ um crescimento

infinitamente pequeno $\alpha$, a função receberá por acréscimo a diferença

$$f(x+\alpha)-f(x),$$

que dependerá ao mesmo tempo da nova variável $\alpha$ e do valor de $x$. Isto posto, a função $f(x)$ será, entre os dois limites assignados à variável $x$, função contínua desta variável, se, para cada valor de $x$ intermediário a estes limites, o valor numérico da diferença

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

decresça indefinidamente com o de $\alpha$. (1821, p. 34)[7].

Apesar da concepção atual de continuidade ser aplicada a pontos no domínio de uma função, Cauchy a definiu sobre um intervalo. Entretanto, para Cauchy, $f(x)$ seria descontínua em $x_0$ se $f$ não fosse contínua em em qualquer intervalo que contivesse $x_0$, ou seja, sua ideia de descontinuidade era pontual.

---

[7] Soit $f(x)$ une fonction de la variable $x$, et supposons que, pour chaque valeur de $x$ intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constanment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de $x$ comprise entre ces limites, on attribue à la variable $x$ un accroissement infiniment petit $\alpha$, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence

$$f(x+\alpha)-f(x),$$

Qui dépendra em méme temps de la nouvelle variable $\alpha$ et de la valeur de $x$. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable $x$, fonction continue de cette variable, si, pour caque valeur de $x$ intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

décroit indéfiniment avec celle de $\alpha$.

Posteriormente Cauchy definiu a integral definida de uma função contínua (mais precisamente uniformemente contínua, pois não havia essa diferença na época) da seguinte forma: seja $f(x)$ contínua para $x$ em $[a, b]$, seja uma partição desse intervalo

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

e seja também a soma

$$S = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}).$$

correspondente à partição dada. Cauchy mostrou que para duas partições diferentes, as somas correspondentes difeririam por uma quantidade arbitrariamente pequena, desde que a norma das partições fosse suficientemente pequena; implicando o valor de $S$ constante. Esse limite seria chamado de integral definida de $f$.

Uma das principais vantagens dessa definição de Cauchy foi permitir demonstrar em termos gerais a existência de integrais e funções primitivas. Para uma função $f$ contínua entre $a$ e $b$, Cauchy considerou a função $F(x) = \int_a^x f$. Como

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f = f(x + ch),$$

em que $|c| \leq 1$, além de ser contínua $F$ também é diferenciável. Baseado nisso, estabeleceu os seguintes resultados:

1) $F$ é uma função primitiva $f$, ou seja, $F' = f$;

2) Toda primitiva de $f$ tem a forma $\int_a^x f + C$, em que $C$ é uma constante, ou seja, se $G$ é uma função com derivada contínua $G'$ então $\int_a^x G' = G(x) - G(a)$.

3) Se $G$ é uma função tal que $G'(x) = 0$ para todo $x$ em $[a, b]$, então $G(x)$ é constante nesse intervalo.

Esses três teoremas, e generalizações deles, se tornaram o que hoje denominamos como Teorema Fundamental do Cálculo. As revisões e limitações insatisfatórias impostas ao Teorema Fundamental do Cálculo após a extensão de Riemann do conceito de integral para funções descontínuas são particularmente significantes para uma apreciação do trabalho de Lebesgue (HAWKINS, 1928).

A definição de função continua e de integral definida de Cauchy independia da discussão acerca da natureza das funções, no sentido de serem ou não expressões analíticas no sentido de Euler e, portanto, continua aplicável em funções entendidas como correspondências $x \longmapsto f(x)$ entre conjuntos.

Até o momento, para as noções de função descontínua existentes, a integral de Cauchy resolvia inteiramente o problema dos coeficientes de Fourier como integrais definidas. Essas discussões foram reabertas quando Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859) chamou atenção para a existência de funções que eram descontínuas em um número infinito de pontos de um intervalo finito, e para o problema que surgiu ao se tentar estender o conceito de integral para elas. Dirichlet publicou em 1829 uma prova rigorosa de que sob certas condições gerais a série de Fourier de uma função $f(x)$ converge. É no trabalho de Dirichlet também que se encontra o início da distinção entre a classe das funções contínuas e a classe das funções integráveis.

Ainda em 1829, Dirichlet introduziu uma função que não era expressa por nenhuma equação e não podia ser desenhada, a qual já mencionamos na introdução: a função que assume um valor quando $x$ é racional e assume outro valor distinto quando $x$ é irracional. Ele apresentou tal função como um exemplo que não satisfazia seu critério de integrabilidade e que talvez não satisfaria nenhum outro. Tanto é que até Lebesgue introduzir sua integral, essa função permaneceria não integrável. Esse exemplo reflete, talvez, a ideia de Dirichlet de função como sendo uma correspondência qualquer entre números reais.

Bernhard Riemann (1826-1866) foi aluno de Dirichlet, o qual teve grande influência em seus estudos posteriores. Riemann escreveu em 1854 que funções que não eram cobertas pela análise de Dirichlet não ocorriam na natureza e, no entanto, considerava promissor estudá-las por dois motivos. O primeiro deles era de que entendia, como Dirichlet também havia entendido, que esse assunto estava relacionado com os princípios do cálculo infinitesimal e poderia auxiliar esclarecendo e dando mais precisão a ele. O segundo era de que as aplicações das séries de Fourier não eram limitadas a investigações físicas, e estavam sendo aplicadas com sucesso no domínio da matemática pura e da teoria dos números.

Riemann interpretou o significado de integrabilidade baseando-se nas somas de Cauchy de uma função, buscando descobrir em que casos esta função seria integrável. O foco sendo estabelecido sobre a função, que condições esta deveria ter para que suas somas tivessem apenas um limite quando a norma da partição tomada tendesse a zero? Para Riemann, isso aconteceria se, e somente se

$$\lim_{\|P\|\to 0}(D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + \cdots + D_n\delta_n) = 0$$ [8];

em que $\delta_i$ representavam os comprimentos dos subintervalos do domínio $[a,b]$ particionados por $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, e os $D_i$ representavam as oscilações[9] de $f(x)$ nos intervalos correspondentes. O limite comum das somas de Cauchy seria por definição $\int_a^b f(x)\,dx$.

[8] $\|P\|$ significa a norma da partição $P$. Esse valor é igual ao máximo da diferença entre dois $x_i$ consecutivos.
[9] Dada uma função $f$ tomada num intervalo $(a,b)$, a oscilação de $f$ nesse intervalo será o valor $|f(b) - f(a)|$.

Riemann ainda provou que essa condição de integrabilidade é equivalente a esta: dados $\varepsilon$ e $\sigma$ positivos, existe $d > 0$ tal que se $P$ é qualquer partição com norma menor do que ou igual a $d$, então $s(P, \sigma)$ é menor do que $\varepsilon$.

Nesses dois resultados de Riemann se encontram as origens do que viriam a ser os conceitos de mensurabilidade e extensão exterior de Jordan. Dentre as contribuições de Riemann para o tema também há um exemplo de função que obedece seu critério de integrabilidade e possui infinitos pontos de descontinuidade. Esse exemplo, de acordo com Hawkins (1928, p. 18), pode ser posto da seguinte forma:

Para todo número real $x$, consideremos

$$f(x) = (x) + \frac{(2x)}{2^2} + \cdots + \frac{(nx)}{n^2} + \cdots$$

em que, para $n$ ímpar

$$(x) = \begin{cases} x - m(x) & ; \quad x \neq \frac{n}{2} \\ 0 & ; \quad x = \frac{n}{2} \end{cases}$$

e $m(x)$ denota o número inteiro que faz com que o valor de $|x - m(x)|$ seja o mínimo possível. Essa função é descontínua em todos os pontos da forma $\frac{m}{2n}$ em que $m$ e $2n$ são primos entre si. Tais pontos formam um conjunto denso[10] nos reais e, portanto, infinito; no entanto a função $f$ é integrável, pois obedece as condições de Riemann nos demais pontos de seu domínio.

[10] Um conjunto $A \subseteq B$ é chamado denso em $B$ se o fecho de $A$ é igual a $B$. O fecho de um conjunto é o conjunto de seus pontos de acumulação.

Riemann também deu exemplos de séries trigonométricas que não são séries de Riemann, mostrando que há uma distinção entre elas. Seus exemplos trouxeram mais problemas do que ele foi capaz de resolver e isso pode ter sido a causa de tantos de seus trabalhos não terem sido publicados em vida. Gaston Darboux (1842-1917) foi o principal responsável por divulgar as ideias de Riemann na França, ao estudar e traduzir assiduamente seus trabalhos. Darboux é reconhecido pela lucidez e rigor do seu trabalho, cujo grau de precisão era incomum para a época (HAWKINS, 1928). Ele mostrou a integrabilidade de uma serie uniformemente convergente de funções integráveis e a validade da integração termo a termo.

## TEORIA DOS CONJUNTOS

Para Fourier, integração termo a termo de uma série infinita de funções era permitida, mas durante a primeira metade do século XIX estudos mais rigorosos sobre séries foram surgindo. A ênfase desses estudos, no entanto, foi primariamente sobre questões de convergência. Karl Weierstrass (1815-1897), em particular, mostrou a validade da integração termo a termo para séries uniformemente convergentes no intervalo de integração, levantando dúvidas acerca da validade dessa propriedade para os demais tipos de série (HAWKINS, p. 22).

No desenvolvimento da teoria de integração, os trabalhos de Heinrich Heine (1821-1881) e Georg Cantor (1845-1918) foram importantes pois chamaram atenção para o problema da integração termo a termo e para a teoria dos conjuntos infinitos. Estudando esse tipo de conjunto, Cantor iniciou com algumas definições básicas. Um ponto $x$ é um ponto limite de um conjunto limitado $P \subset \mathbb{R}$ se toda vizinhança[11] de $x$ possui infinitos pontos de $P$. O conjunto derivado de $P$, denotado por $P'$, seria definido como o conjunto de todos os pontos limites de $P$. Se $P'$ não é finito, então possui um conjunto derivado $P''$ ou $P^{(2)}$, chamado de conjunto derivado segundo de $P$. O conjunto derivado $n$-ésimo de $P$, denotado por $P^{(n)}$, poderia ser definido como $\left(P^{(n-1)}\right)'$. O conjunto $P$ seria

[11] Por vizinhança de $x$ Cantor se referia a um intervalo contendo $x$.

chamado de tipo $n$ se $P^{(n)}$ for finito. Para ilustrar tais noções, Cantor considerou como $P$ o conjunto de todos os racionais entre $0$ e $1$ que, não obedecendo suas definições, não poderia ser de tipo $n$, qualquer que fosse o $n \in \mathbb{N}$ tomado. Num outro exemplo de Cantor, $P$ é formado por todos os pontos $\frac{1}{n}$, onde $n$ é inteiro positivo. Assim, $P' = \{0\}$ e $P$ é de tipo $1$. Esses únicos exemplos dados por Cantor refletem o pouco que se conhecia acerca dos conjuntos infinitos pelos matemáticos da época. Eventualmente Cantor mudaria sua definição de conjunto de tipo $n$ para conjuntos de primeira espécie.

Cantor também estabeleceu a classificação de conjuntos infinitos através das noções de contáveis (ou enumeráveis[12]) e incontáveis. Devido seus trabalhos nesse assunto, Cantor é muitas vezes referido como precursor da teoria dos conjuntos. Foi ele quem trouxe as noções de união e interseção de conjuntos, usando-as para estender seu conceito de conjuntos derivados (HAWKINS, p. 71): se $P$ não é um conjunto de primeira espécie, então definiu

$$P^{(\infty)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(n)}.$$

Consequentemente definiu $P^{(\infty+n)}$ como $\left(P^{(\infty)}\right)^{(n)}$, para $n \in \mathbb{N}^*$; $P^{(2\infty)}$ como ${P^{(\infty)}}^{(\infty)}$, e assim sucessivamente $P^{(n\infty)} = \left(P^{((n-1)\infty)}\right)^{(\infty)}$. Em seguida definiu

$$P^{(\infty^2)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(n\infty)}$$

e

[12] Um conjunto $A$ é dito enumerável quando existe uma bijeção $\mathbb{N} \to A$.

$$P^{(\infty^{\infty})} = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(\infty^{n})}.$$

Começava aqui a teoria dos transfinitos de Cantor. Um de seus maiores objetivos era demonstrar que todo conjunto de pontos era ou contável ou possuía potência do contínuo.

Até 1880, não era reconhecida a distinção entre os conceitos de conjuntos definidos por Cantor e conjuntos nunca densos[13]. Além disso, apesar de noção de função já ser a de qualquer correspondência $x \to f(x)$ entre conjuntos de números reais, os exemplos dados por Riemann podiam ser representados por uma expressão analítica. Hermann Hankel (1839-1973), um dos discípulos de Riemann, chamou atenção para sua classificação de funções com infinitos pontos de descontinuidade em intervalos finitos.

Em 1881, Vito Volterra (1860-1940) mostrou a existência de conjuntos nunca densos com extensão exterior positiva trouxe reconhecimento da importância da discussão sobre medida na teoria da integração. A noção de mensurabilidade, introduzida por Jordan e Giuseppe Peano (1858-1932), permitiu a reformulação das definições de integral de Riemann sob uma perspectiva teórica de medida. Além disso Émile Borel (1871-1956) postulou uma noção radicalmente diferente de mensurabilidade que levou à nova teoria de integração. Curiosamente, nos trabalhos de Borel dedicados a teoria da medida, não há conexões entre seu conceito de medida e a teoria de integração. Foi Lebesgue quem estabeleceu essa conexão em 1902.

## HENRI LÉON LEBESGUE

Henri Léon Lebesgue (1875-1941) nasceu em Beauvais, uma cidade cerca de 50 quilômetros ao norte de Paris na França, no dia 28 de junho. Seu pai foi um tipógrafo e

[13] Um conjunto $A$ é chamado nunca denso quando seu interior é vazio.

sua mãe uma professora elementar e, possivelmente por essa razão, possuíam uma biblioteca substancial (MONNA, 1972). No período entre 1894 e 1897, Lebesgue estudou em Paris na *École Normale Supérieure*, onde se graduou e permaneceu trabalhando como assistente na biblioteca até 1899. Durante esse período, entrou em contato com o trabalho de René Baire (1874-1932) sobre classificação de funções descontínuas e sobre medida. Em 1899 passa a lecionar no *Lycée Central* em Nancy, cerca de 300 quilômetros a leste de Paris, onde permaneceu até 1902. Nesse período publicou 5 artigos pela *Comptes Rendus* que formariam a base de sua tese (HAWKINS, 1928). Em particular, seu quinto artigo (LEBESGUE, 1901) é onde anuncia sua generalização da integral de Riemann.

Em 1902 publica sua tese de doutorado intitulada *Intégrale, Longueur, Aire* na Sorbonne. Sofreu grande resistência da comunidade matemática no início de sua carreira por conta de sua tese, considerada audaciosa naquela época (OTERO-GARCIA, 2015). No entanto sua trajetória acadêmica lhe concedeu várias honrarias, entre elas ser eleito para a Academia de Ciências de Paris e para as Sociedade Matemática e Sociedade Real de Londres. Lebesgue contribuiu em vários outros campos da matemática, como cálculo de variações, teoria dos conjuntos, teoria das superfícies e dimensões, ensino de matemática, história da matemática e geometria elementar (OTERO-GARCIA, 2015).

Trabalhou no Tennes et Poitiers e seus cursos ministrados no Collège de France resultaram nos famosos livros *Leçons sur la integration et la recherche des fonctions primitives* (1904) e *Leçons sur les séries trigonométriques* (1906) (BARONI e GARCIA, 2014). Em 1914, quando estourou a primeira guerra mundial, Lebesgue trabalhou em defesa da França; e em 1921 ingressou no Collège de France, onde permaneceu até sua morte em 26 de julho de 1941.

# CAPÍTULO 3 – A PRIMEIRA APARIÇÃO DA INTEGRAL DE LEBESGUE

Este capítulo é dedicado a uma análise do artigo *Sur une généralisation de l'intégrale dèfinie*, buscando encontrar como Lebesgue concebia suas ideias acerca do conceito de medida para que pudesse generalizar a concepção de integral. Buscamos também entender como essas ideias foram apresentadas para a comunidade matemática e conjecturamos que Lebesgue publicou esse artigo um tanto breve antes de sua tese mais profunda sobre o tema, pois receava perder a prioridade sobre sua generalização da integral. Em seguida mostramos um exemplo de cálculo de integral de uma função afim com esse método.

## UMA BREVE EXEGESE DO ARTIGO "SUR UNE GÉNÉRALISATION DE L'INTÉGRALE DÈFINIE"

Em 29 de abril de 1901, Henri Lebesgue publicou na Comptes Rendus um artigo intitulado "Sur une genéralization de l'integrale dèfinie", onde propõe pela primeira vez a ideia de sua generalização da integral definida. Inicia seu trabalho justificando que no caso de funções contínuas há uma identidade entre noções de integral e de função primitiva e que Riemann definiu integral para certas funções descontínuas. Entretanto afirma que nem todas as funções derivadas são integráveis no sentido de Riemann. É razoável supor que Lebesgue tivesse em mente o exemplo dado por Volterra de uma função cuja derivada não é integrável. Lebesgue conclui, então, que o problema da procura de funções primitivas não é resolvido pela integração e que se pode desejar uma nova definição de integral compreendendo a de Riemann como caso particular, e que permitisse resolver o problema das primitivas.

É desse modo que Lebesgue afirma a importância de seu artigo: aponta uma deficiência na definição até então mais geral e sugere uma nova. É possível que Lebesgue já tivesse em mente um trabalho mais detalhado sobre essa generalização e tenha publicado esse artigo mais simples antes para garantir para si a prioridade sobre o tema. Numa nota de rodapé a respeito do problema das funções primitivas, Lebesgue diz que as duas condições impostas a priori a qualquer generalização da integral (que compreenda a definição de Riemann como caso particular e permita estender o problema das funções primitivas) são evidentemente compatíveis, pois qualquer função derivada integrável, no sentido de Riemann, tem por integral uma de suas primitivas.

Lebesgue prossegue definindo a integral para uma função contínua crescente num intervalo $[a, b]$ (é curioso notar que ele usa a notação $y(x)$ $(a \leq x \leq b)$ para designar essa função, e $(a, b)$ o intervalo fechado em que ela está definida, pois o parentese é atualmente usado para denotar intervalos abertos. Ele prossegue dividindo o intervalo $(a, b)$ (usamos aqui a forma como Lebesgue fez) em subintervalos e faz a soma das quantidades obtidas ao multiplicar o comprimento de cada subintervalo por um dos valores de $y$ quando $x$ está dentro desse intervalo. Parece que para Lebesgue essa era uma forma mais ou menos genérica de se definir integral. Disso discorre: se $x$ está no intervalo $(a_i, a_{i+1})$, $y$ varia entre certos limites $m_i$, $m_{i+1}$ e, reciprocamente, se $y$ está entre $m_i$ e $m_{i+1}$, $x$ está entre $a_i$ e $a_{i+1}$. Assim, no lugar de se dar a divisão da variação de $x$ (de se dar os números $a_i$), pode-se dar a divisão da variação em $y$ (de se dar os $m_i$).

Até aqui Lebesgue preparou o campo para apresentar sua ideia para integral sem dar espaço à dúvidas, desde a escolha do tipo de função até a reciprocidade entre os tipos de partições que podem ser escolhidas. Além disso o modo escolhido para apresentá-la permite uma emancipação total da definição de Riemann, construindo um novo caminho com Lebesgue como precursor. Isso fica claro quando Lebesgue diz que da apresentação dada surgem duas maneiras de generalizar a noção de integral: a primeira dada por Riemann e Darboux e a segunda dada por ele na sequência do artigo.

E assim prossegue: seja $y$ uma função compreendida entre $m$ e $M$ e dados

$$m = m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{p-1}, M = m_p;$$

$y = m$ quando $x$ faz parte de um conjunto $E_0$; $m_{i-1} < y \leq m_i$, quando $x$ faz parte de um conjunto $E_i$.

Sendo$\lambda_0$, $\lambda_i$, as medidas (cujo conceito não são discutidas no artigo com a profundidade dada na tese) dos conjuntos $E_0$, $E_i$; considere uma das duas somas a seguir:

$$m_0\lambda_0 + \sum m_i\lambda_i \qquad ; \qquad m_0\lambda_0 + \sum m_{i-1}\lambda_i$$

fazendo a distância máxima entre dois $m_i$ consecutivos tender a zero, as somas acima tendem a um mesmo limite, independentemente da escolha dos $m_i$. Assim define a integral de $y$ que será dita integrável.

Na continuação, Lebesgue define o que considera uma medida: consideremos um conjunto $(a,b)$, pode-se de uma infinidade de maneiras cobrir esses pontos em uma infinidade enumerável de intervalos. A medida desse conjunto é o limite inferior da soma dos comprimentos dos intervalos que o cobrem. Essa definição comumente é dada como a de medida exterior de um conjunto atualmente. Como já foi dito, o conjunto $(a,b)$ não é necessariamente um intervalo aberto, mas parece-nos que a ideia principal de Lebesgue aqui (que vai se repetir no tratamento de medidas em sua tese) é a de que a medida exterior de um intervalo qualquer coincide com sua medida. Em outras palavras intervalos seriam conjuntos naturalmente mensuráveis e suas medidas seriam seus comprimentos.

Continuando, Lebesgue escreve que um conjunto $E \subseteq (a,b)$ é dito mensurável se sua medida, acrescida daquela do conjunto de pontos que não fazem parte de $E$, dá a medida $(a,b)$; e na nota de rodapé expõe que se forem considerados também conjuntos de medida nula escolhidos convenientemente, a definição coincidiria com a de Borel (Leçons sur la thèorie des fonctions, 1898), que basicamente trata de medidas de conjuntos construídos a partir uniões e interseções enumeráveis de intervalos. Obviamente o conjunto $E$ é subconjunto de $(a,b)$. Disso segue que para Lebesgue um conjunto poderia não ser mensurável e ainda assim possuir uma medida. Em outras palavras, a medida de um conjunto não era, ainda, vista como uma equivalência do tipo: um conjunto tem medida se, e somente se, esse conjunto é mensurável. É possível também provar que qualquer intervalo $(a,b)$ é mensurável nessa definição, bastando apenas notar que $(a, b)$ é subconjunto de um intervalo $(c, d)$, e que a medida de $(a, b)$ somada à medida do conjunto de pontos de $(c, d)$ que não pertencem a $(a, b)$ (que será um intervalo ou uma soma de dois intervalos) é igual à medida de $(c, d)$. Nessa definição podemos ainda ver o germe da ideia de medida exterior. Veremos que essa ideia ainda será amadurecida.

Duas propriedades que Lebesgue afirma decorrer desses conjuntos: 1) uma infinidade de conjuntos mensuráveis $E_i$ dados, o conjunto dos pontos que fazem parte de pelo menos um dentre eles é mensurável, e se os $E_i$ não tem dois a dois algum ponto em comum, a medida dele é a soma das medidas dos $E_i$; 2) O conjunto dos pontos comuns a todos os $E_i$ é mensurável. Podemos observar que as propriedades 1 e 2 podem ser reescritas (e nos livros atuais é como normalmente aparecem) como:

(i) $\bigcup E_i$ é mensurável e $m(\bigcup E_i)$ = $\sum mE_i$ se os $E_i$ forem dois a dois disjuntos;
(ii) $\bigcap E_i$ é mensurável.

Lebesgue só irá demonstrar essas propriedades posteriormente em sua tese. Para ele é natural considerar primeiramente as funções tais que os conjuntos que figuram na definição de integral sejam mensuráveis. Disso conclui que: se uma função

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$$

limitada superiormente em valor absoluto é tal que, quaisquer que sejam $A$ e $B \in \mathbb{R}$, o conjunto dos valores de $x$ para os quais se tem $A < f(x) \leq B$ é mensurável, então ela é integrável pelo procedimento indicado. Lebesgue chama essa tal função de somável e afirma que a integral desse tipo de função está compreendida entre a integral por falta e a integral por excesso (também não demonstra essa relação em seu artigo). Assim se uma função integrável (R) é somável, sua integral é a mesma com as duas definições. Conclui que toda função integrável (R) é somável, pois o conjunto de seus pontos de descontinuidade é de medida nula, e pode-se demonstrar que se fazendo abstração de um conjunto de medida nula de valores de $x$, resta um conjunto em cada ponto do qual uma função é contínua, essa função é somável. Lebesgue notou que essa propriedade permite construir imediatamente funções não integráveis (R) e ao mesmo tempo somáveis, e assim procedeu:

Sejam $f(x)$ e $\varphi(x)$ duas funções contínuas, $\varphi(x)$ não sempre nula. Uma função que difere de $f(x)$ não mais que nos pontos de um conjunto de medida nula sempre denso[14] e que nesses pontos é igual a $f(x) + \varphi(x)$ é somável sem ser integrável (R). E dá um exemplo: a função igual a $0$ se $x$ é irracional, igual a $1$ se $x$ é racional.

É interessante notar que Lebesgue já havia observado que sua definição de integral é mais geral que a de Riemann, pois indicou (apesar de não ter demonstrado) que toda função integrável (R) é somável, e que existe função somável não integrável (R).

Lebesgue apresenta duas propriedades desse conjunto de funções somáveis:

a) Se $f$, $\varphi$ são somáveis, $f + \varphi$ e $f\varphi$ também o são, e a integral de $f + \varphi$ é a soma das integrais de $f$ e $\varphi$.
b) Se a sequência de funções somáveis tem um limite, este é uma função somável.

Como o conjunto de funções somáveis contém $f(x) = x$ e $f(x) = k$, em que $k$ é uma constante, uma consequência evidente é a de que segue de (a) e (b) que esse conjunto tem como elementos todos os polinômios e seus limites, e portanto todas as funções contínuas e todos os limites de funções contínuas. Baire (1930) havia estudado esse tipo de função e feito a seguinte classificação:

- Funções de 1ª classe: funções que são limites de funções contínuas;
- Funções de 2ª classe: funções que são limites de funções de 1ª classe;
- Funções de $n$ª classe: funções que são limites de funções de $(n-1)$ª classe.

Lebesgue cita essas funções de Baire e conclui que todas elas são somáveis. Por fim anuncia que, em particular, toda função derivada, limitada superiormente em valor

[14] Dados os conjuntos $A$ e $B$ com $B \subset A$, diremos que $B$ é sempre denso em $A$ se o fecho de $B$ contém $A$.

absoluto, sendo de 1ª classe, é somável, e pode-se demonstrar que sua integral, considerada como função de seu limite superior, é uma de suas funções primitivas.

## UM EXEMPLO DE INTEGRAL DE FUNÇÃO CONTÍNUA CRESCENTE NUM INTERVALO PELO MÉTODO DE LEBESGUE

Aqui daremos um exemplo da integral de uma função calculada pelo método de Lebesgue.

Seja $y(x) = ax + b$ uma função afim definida no intervalo $[0,1]$, com $a > 0$. $y$ é contínua e crescente, e portanto integrável nesse método. $y$ está compreendida entre $m = b$ e $M = a + b$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ consideremos os pontos $m_0 = b$, $m_1 = b + \frac{a}{n}$, $m_2 = b + \frac{2a}{n}$, . . . , $m_{n-1} = b + \frac{(n-1)a}{n}$, $m_n = b + \frac{na}{n} = b + a$. Temos então

$$m < m_1 < m_2 < \cdots < m_{n-1} < M.$$

Definamos os conjuntos $E_i$, de modo que $y = m$ quando $x \in E_0$ e $m_{i-1} < y \leq m_i$, quando $x \in E_i$. Todos esses conjuntos são intervalos, com exceção de $E_0 = \{0\}$ que é um conjunto unitário. Para Lebesgue um conjunto de pontos $(a, b)$ pode ser coberto por uma infinidade enumerável de intervalos, e o limite inferior da soma desses intervalos é a medida desse conjunto. A partir daí, Lebesgue define medida para conjuntos $E$ contidos em $(a, b)$ que não são necessariamente intervalos. Não vamos nos preocupar com os últimos por enquanto. Talvez a escolha de Lebesgue para esse tipo de função (contínua crescente) tenha sido para que essa situação dos conjuntos intervalos ocorresse sempre e dessa forma teriam sempre uma medida igual a seu comprimento. Se Lebesgue, ao dizer “função crescente” quis com isso se referir ao que atualmente entendemos como “função não decrescente”, esse método continua funcionando.

Para Lebesgue, a medida de um intervalo é seu comprimento, então temos: $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_i = \frac{1}{n}$, em que cada $\lambda_i$ é a medida do intervalo $E_i$. Não há diferença em qual das duas somas

$$m_0\lambda_0 + \sum m_i\lambda_i \qquad ; \qquad m_0\lambda_0 + \sum m_{i-1}\lambda_i$$

tomarmos, pois se, para simplificar, chamarmos elas de $S_1$ e $S_2$ respectivamente, temos

$$|S_1 - S_2| = |m_0\lambda_0 + m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \cdots - m_0\lambda_0 - m_0\lambda_1 - m_1\lambda_2 - \cdots| =$$

$$= |\lambda_1(m_1 - m_0) + \lambda_2(m_2 - m_1) + \cdots| \to 0,$$

quando fazemos $n \to \infty$.

Assim, para todo $n$ natural,

$$m_0\lambda_0 + \sum m_i\lambda_i = b.0 + \sum_{p=1}^{n}(b + \frac{pa}{n})\frac{1}{n} = \sum_{p=1}^{n}\frac{b}{n} + \sum_{p=1}^{n}\frac{pa}{n^2} = b + a\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{n^2}.$$

Segue que a integral de $y(x) = ax + b$ no intervalo $[0,1]$, vai ser o número encontrado quando fizermos a distância máxima entre dois $m_i$ consecutivos, ou seja, quando fizermos $n \to \infty$. Logo, o número procurado é igual a

$$b + a\lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{n^2} = b + \frac{a}{2}.$$

Essa última igualdade é a soma da série, e omitimos sua resolução pois nosso intuito era apenas mostrar que é possível calcular integrais por esse método, apesar da complexidade desse exemplo ser muito grande em relação à simplicidade da função tomada. Podemos observar que, através do método de Riemann,

$$\int_0^1 (ax+b)dx = b + \frac{a}{2};$$

ou calculando geometricamente (somando a área do retângulo limitado pelos eixos $x$ e $y$, e pelas reta $y = b$ e $x = 1$ com a área do triângulo retângulo limitado pela função $ax + b$ e pelas retas $y = b$ e $x = 1$) obtemos exatamente o mesmo resultado.

# CAPÍTULO 4 – A MEDIDA DE LEBESGUE

Este capítulo é dedicado ao tratamento dado às concepções de medida e de integração de Lebesgue publicadas em sua tese *Integrale, Longueur, Aire* em 1902, isto é *Integral, comprimento e área*. Portanto, essa tese trata muito mais do que apenas os conceitos que nos propomos trabalhar, pois estes são apresentados como ferramentas para o estudo de comprimento de curvas, áreas de superfícies, superfícies aplicadas sobre o plano e o problema de Plateau.

Lebesgue aqui apresenta os seus axiomas de medida e constrói, primeiro para conjuntos na reta e depois para conjuntos de espaços com mais dimensões, o que seriam suas medidas. Além disso compara seu método com o de Borel e Jordan, mostrando ainda que suas definições coincidem a da daqueles, quando são ambas aplicáveis mas que a sua é mais abrangente.

## MEDIDA DE CONJUNTOS

O primeiro capítulo da tese de Lebesgue trata da medida de conjuntos e é dividido em quatro partes, sendo a primeira uma introdução em que estabelece as definições básicas de conjunto, a segunda um estudo sobre medidas de conjuntos na reta, a terceira sobre medida de conjuntos no plano e a última sobre o problema das áreas.

Lebesgue inicia seu trabalho definindo conjunto de pontos limitado como aquele cuja distância entre quaisquer dois de seus pontos for limitada superiormente. São os tipos de conjuntos com que pretende trabalhar. Para Lebesgue, dois conjuntos são iguais se, movendo um dos dois, é possível levá-los a coincidirem. Em outras palavras, ele estabeleceu uma classe de equivalência entre conjuntos. Na reta essa condição é equivalente a de que um conjunto $A$ é igual a um conjunto $A + x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, em que $A + x = \{a + x; \forall x \in \mathbb{R}\}$.

Na continuação Lebesgue define soma de conjuntos de forma semelhante com a definição atual de união enumerável: sejam $E_1$, $E_2$,...; a soma $E$ desses conjuntos é formada pelos pontos que pertencem a pelo menos um dos $E_i$, e isso é denotado por

$$E = E_1 + E_2 + \cdots;$$

mencionando que nesse trabalho serão considerados apenas um número finito ou uma quantidade enumerável de conjuntos $E_i$. Lebesgue também define a relação de pertinência entre conjuntos e por fim diferença de conjuntos.

Postas essas definições, Lebesgue enuncia o que chama de Problema da Medida:

> Propomo-nos a atribuir a cada conjunto limitado um número positivo ou nulo, que chamaremos de sua medida, e que satisfará as condições seguintes:
> 1.º Existem conjuntos cuja medida não é nula.
> 2.º Dois conjuntos iguais têm a mesma medida.
> 3.º A medida da soma de um número finito, ou de uma infinidade enumerável de conjuntos, sem pontos em comum, dois a dois, é a soma das medidas desses conjuntos.[15] (1902, p. 236)

Esses três axiomas são o que guiarão as demonstrações que Lebesgue fará nesse primeiro capítulo. Os conjuntos que solucionam esse "problema da medida" são os que Lebesgue chama de mensuráveis, e ainda admite que vão existir mais de uma solução, visto que podemos nos limitar a conjuntos cujos pontos estão numa reta ou num plano, e para os quais existirá uma "medida linear" ou uma "medida superficial" respectivamente. Estabelece também que, sendo possível uma solução para o "problema da medida",

---

[15] Nous nous proposons d'attacher à chaque ensemble borné um nombre positif ou nul que nous appellerons sa mesure et satisfaisant aux conditions suivantes:
1.º Il existe des ensembles dont la mesure n'est pas nulle.
2.º Deux ensembles égaux ont même mesure.
3.º La mesure de la somme d'um nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans points comuns, deux à deux, est la somme des mesures de ces ensembles.

multiplicando todas as medidas obtidas por um mesmo número teremos outro sistema de medidas, mas que este não será considerado diferente, pois é possível, sem perda de generalidade, atribuir a medida $1$ a um conjunto qualquer de medida não nula. Observamos que o que Lebesgue assume aqui como conjunto mensurável é aquele a que os axiomas se aplicam.

Para conjuntos cujos pontos são pontos de uma reta, supondo possível o "problema da medida", Lebesgue justifica que um conjunto formado por um só ponto deve ter medida nula, pois um conjunto limitado contendo uma infinidade de pontos deve ter uma medida finita. Um intervalo limitado sendo visto como união de infinitos pontos teria uma medida infinita caso as medidas de cada conjunto unitário dos pontos que o compõem fosse diferente de zero. Na sequência conclui que um segmento $MN$ qualquer tem a mesma medida que o mesmo segmento sem os pontos $M$ e $N$, e este segmento nunca terá medida nula sem que o mesmo ocorra com todo conjunto limitado. Com isso estabelece a propriedade de que todo conjunto unitário é mensurável e possui medida nula, e todo intervalo é mensurável e possui medida positiva.

Feito isso, Lebesgue escolhe um segmento $MN$ para ter medida $1$, e o fixa como unidade de comprimento. Disso decorre que a qualquer segmento $PQ$ pode-se atribuir um número que será o seu comprimento e também sua medida. Portanto, todo intervalo teria como medida seu próprio comprimento. Segue-se a isso a justificativa

> Para se convencer disso é suficiente recordar que se o comprimento $l$ de $PQ$ é comensurável e igual à $\frac{\alpha}{\beta}$ existe um segmento $RS$ contido $\alpha$ vezes em $PQ$ e $\beta$ vezes em $MN$ e que se $l$ é incomensurável, a todo número $\lambda$ inferior a $l$ corresponde um segmento contido em $PQ$, e de comprimento $\lambda$ e a todo número $\lambda$ superior a $l$ um segmento contendo $PQ$ e de comprimento $\lambda$ (1902, p. 237)[16].

[16] Pour s'e convaincre il suffit de se rappeler que si la longueur $l$ de $PQ$ est commensurable et égale à $\frac{\alpha}{\beta}$ il existe un segment $RS$ contenu $\alpha$ fois dans $PQ$ et $\beta$ fois dans $MN$ et que si $l$ est incommensurable, à tout nombre $\lambda$ inférieur

Para que a terceira das condições do "Problema da Medida" seja satisfeita, Lebesgue busca no trabalho de Borel (Leçons sur la Théorie des fonctions) as propriedades sobre somas de comprimentos de segmentos em número finito ou infinito. Essa comparação é apropriada, visto que Lebesgue ainda estava trabalhando com medidas de intervalos, as quais coincidem com seus comprimentos.

A partir desse momento, Lebesgue define o que é medida de um conjunto que não é um intervalo. Sendo $E$ um conjunto dado, pode-se de uma infinidade de maneiras, cobrir seus pontos com um número finito ou uma infinidade enumerável de intervalos. O conjunto $E_1$ dos pontos desses intervalos contém $E$, e portanto tem medida no máximo igual a $m(E_1)$, que por sua vez é no máximo igual à soma dos comprimentos dos intervalos considerados. O limite inferior dessa soma seria o que Lebesgue chamou de medida exterior de $E$, visto que esse limite seria intuitivamente um limite superior da medida do próprio $E$. Um raciocínio análogo ao usado para definir medida exterior não funciona muito bem para definir medida interior, visto que nem sempre um conjunto (mesmo tendo medida positiva) contém intervalos para podermos tomar o limite superior da soma de seus comprimentos. Um exemplo clássico é o conjunto dos irracionais contidos no intervalo $(0,1)$, pois conseguimos cobrir esse conjunto com intervalos, entretanto todo intervalo contém racionais e irracionais, impossibilitado uma aproximação interior do conjunto. Para contornar essa dificuldade, Lebesgue definiu o complementar de $E$ em relação a $AB$ o conjunto $AB - E$, denotado por $C_{AB}(E)$. Vendo que a medida de $C_{AB}(E)$ seria, no máximo, $m_e\big(C_{AB}(E)\big)$, Lebesgue concluiu que a medida de $E$ seria, no mínimo, $m(AB) - m_e\big(C_{AB}(E)\big)$. Como esse número não depende da escolha do segmento $AB$ contendo $E$ fixado inicialmente, esse número pode ser definido como medida interior de $E$, e denotado por $m_i(E)$. Obviamente, dois conjuntos iguais teriam medidas interiores e exteriores iguais.

Lebesgue ainda observa que

---

à $l$ correspond un segment contenu dans $PQ$, et de longueur $\lambda$ et à tout nombre $\lambda$ supérieur à $l$ um segment contenant $PQ$ et de longueur $\lambda$.

$$m_e(E) + m_e\big(C_{AB}(E)\big) \geq m(AB) \Longrightarrow m_e(E) \geq m_i(E).$$

Assim Lebesgue conclui que se o “problema da medida” é possível e a medida de um conjunto $E$ deve estar compreendida entre sua medida exterior e interior.

A partir do que foi feito, define como conjunto mensurável aquele cuja medida exterior e interior são iguais, sendo a medida deste o valor comum dessas. Da forma em que foi definida, a medida $m(E)$ de um conjunto dado $E$ obedece as propriedades do “problema da medida”.

Lebesgue observou que essa definição é equivalente a esta: um conjunto $E$ será mensurável se for possível encerrar seus pontos em intervalos $\alpha$ e seu complementar em intervalos $\beta$, de modo que a soma dos comprimentos das partes comuns a $\alpha$ e $\beta$ seja tão pequena quando se queira. Com isso, Lebesgue prova que a soma $E$ de uma infinidade de conjuntos mensuráveis $E_1$, $E_2$, ... é também mensurável.

Assim procedeu: considerando todos os $E_i$ formados por pontos de um segmento $AB$, os pontos de $E_1$ contidos em intervalos $\alpha_1$ não se estendendo uns sobre os outros, e os pontos de $C(E_1)$ contidos em intervalos $\beta_1$. As partes comuns a $\alpha_1$ e $\beta_1$ tendo comprimento total igual a $\varepsilon_1$. De forma análoga, $E_2$ e $C(E_2)$ encerrados em intervalos $\alpha_2$ e $\beta_2$, com comprimento comum igual a $\varepsilon_2$. Agora, sejam $\alpha'_2$ e $\beta'_2$ as partes de $\alpha_2$ e $\beta_2$ comuns a $\beta_1$. Novamente, de forma análoga, a $E_3$ e $C(E_3)$ correspondem $\alpha_3$ e $\beta_3$, com comprimento comum igual a $\varepsilon_3$, e sejam $\alpha'_3$ e $\beta'_3$ as partes de $\alpha_3$ e $\beta_3$ comuns a $\beta_2$. Fazendo isso sucessivamente os pontos de $E$ serão cobertos por $\alpha_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \ldots$ e os de $C(E)$ por $\beta'_i$, qualquer que seja o $i$.

Agora consideremos a sequência:

$$l_0 = m(\alpha'_1) + m(\alpha'_2) + \cdots + m(\alpha'_{i+1}) + \cdots$$

$$l_1 = \varepsilon_1 + m(\alpha'_2) + \cdots + m(\alpha'_{i+1}) + \cdots$$

$$l_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + m({\alpha'}_{i+1}) + \cdots$$

$$\vdots$$

$$l_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i + m({\alpha'}_{i+1}) + \cdots$$

$$\vdots$$

Para todo $i$, as coberturas $\alpha_1, {\alpha'}_2, {\alpha'}_3, \ldots$ e ${\beta'}_i$ tem partes comuns com comprimento menor ou igual a $l_i$. Lebesgue observou que se a escolha de $\varepsilon_i$ for tal que $\sum \varepsilon_i$ for convergente e tiver $\varepsilon$ como soma, a série $\sum m({\alpha'}_i)$ será convergente, e para $i$ suficientemente grande, $l_i$ será inferior a $2\varepsilon$.

Assim conclui que $E$ é mensurável. Ainda observa que, sendo os $E_i$ dois a dois disjuntos, cada $E_i$ será interior ao intervalo ${\alpha'}_i$, e $m({\alpha'}_i) - m(E_i)$ será menor ou igual a $\varepsilon_i$. Logo

$$m(E) - m(E_1) - m(E_2) - \cdots \leq m(\alpha) + m({\alpha'}_1) + m({\alpha'}_2) + \cdots - m(E_1) - m(E_2) - \cdots \leq \varepsilon$$

Portanto, $m(E) = m(E_1) + m(E_2) + \cdots$

E assim a 3ª condição do “problema da medida” é satisfeita.

Como foi apontado por Lebesgue, isso não provava que o “problema da medida” seria impossível para conjuntos cujas medidas interiores diferissem das medidas superiores, entretanto, assim como fez Borel, observa que os procedimentos para definir um conjunto podem se resumir a dois; e estes aplicados a conjuntos mensuráveis gerariam conjuntos mensuráveis. Estes procedimentos são:

1. Adicionar um número finito, ou uma infinidade enumerável de conjuntos definidos previamente.
2. Considerar o conjunto de pontos comuns a um número finito ou uma infinidade enumerável de conjuntos dados.

O 1º procedimento, como já foi dito, é equivalente à união enumerável, e o 2º é equivalente à interseção enumerável. Lebesgue havia provado que o 1º geraria conjuntos mensuráveis, se aplicados apenas a conjuntos mensuráveis. Faltava provar o 2º, e foi o que fez com o seguinte argumento:

> Sejam $E_1$, $E_2$, ... os conjuntos dados; o conjunto procurado $e_1$ pode ser definido tendo como complementar a soma dos complementares de $E_1$, $E_2$, ..., o que demonstra a proposição (1902, p. 240).[17]

Esses procedimentos tornaram possível provar, também, que $E_1$ contendo $E_2$, $E_1 - E_2$ é o conjuntos dos pontos comuns a $E_1$ e $C(E_2)$, ou seja, se $E_1$ e $E_2$ são mensuráveis, $E_1 - E_2$ também o é, além disso

$$E_1 = (E_1 - E_2) + E_2 \Rightarrow m(E_1 - E_2) = m(E_1) - m(E_2).$$

Com isso feito, apresenta um exemplo onde mostra que existem conjuntos mensuráveis sob sua definição que não o são na definição de Borel. Para isso explica que um intervalo mensurável pode ser definido em termos dos procedimentos enunciados acima um número finito de vezes, e que conjuntos obtidos por esse método e seus complementares são os que Borel (1898) chamou de mensuráveis. Segue o exemplo:

O conjunto $E$ formado pelos pontos

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots$$

[17] Soient $E_1$, $E_2$,… les ensembles donnés; l'ensemble cherché $e_1$ peut être défini comme ayant pour complémentaire la somme des complémentaires de $E_1$, $E_2$,…, ce qui démontre la proposition.

em que $a_i = 0$ ou $2$, conhecido como conjunto de Cantor. Esse conjunto é mensurável segundo Borel, pois seu complementar é formado por intervalos da seguinte forma: um intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ de comprimento $\frac{1}{3}$, dois intervalos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9}, \frac{2}{3} + \frac{2}{9}\right)$ de comprimento $\frac{1}{3^2}$, quatro inervalos e comprimento $\frac{1}{3^3}$, etc.

A soma desses comprimentos é

$$\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3^2} + 2^2\frac{1}{3^3} + \cdots = 1.$$

Consequentemente $E$ tem medida nula e pode ser escrito como:

$$E = \left\{0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{2}{3^3}, \dots, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^3}, \dots, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3}, \dots\right\}.$$

Portanto é possível formar com os pontos de $E$ uma infinidade de conjuntos cuja medida exterior é nula, e portanto são mensuráveis. Lebesgue afirma que a potência do conjunto desses conjuntos é a do conjunto dos conjuntos de pontos, e portanto existiriam conjuntos mensuráveis que não o são a Borel, e a potência do conjunto de conjuntos mensuráveis é a do conjunto dos conjuntos de pontos. Essa afirmação do Lebesgue queria dizer que qualquer subconjunto de $E$ pode ser obtido com os métodos que definiu e portanto são mensuráveis, enquanto que usando os métodos de Borel, isso não seria possível. Resumindo, o que Lebesgue fez foi selecionar um conjunto mensurável pelo método de Borel (que Lebesgue denotou por mensurável (B), e nós denotaremos assim também a partir daqui, assim como medida (B) será usado quando estivermos nos referindo à medida de um conjunto pelo método de Borel) e mostrar que com seus pontos é possível formar uma infinidade de conjuntos mensuráveis, sem que estes fossem necessariamente mensuráveis (B).

Em seguida, Lebesgue prova que dado um conjunto mensurável $E$, existirá conjuntos $E_1$ e $E_2$, mensuráveis (B) tais que $E_1$ contém $E$ e $E$ contém $E_2$, e as medidas (B) de $E_1, E_2$ coincidem e são iguais a $m(E)$.

A seguir prova que todo conjunto mensurável está contido num conjunto $E_1$ e contém um conjunto $E_2$, $E_1$ e $E_2$ mensuráveis (B) e de mesma medida (B):

Sejam $E$ mensurável, e $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, ... decrescendo até zero. $E$ pode ser encerrado em uma infinidade de intervalos $\alpha_i$ de medida $m(E) + \varepsilon_i$. O conjunto $E_1$ dos pontos que pertencem ao mesmo tempo a $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ... é mensurável (B), tem por medida $m(E)$ e contém $E$. O conjunto $E_1 - E$ é de medida nula e pode ser coberto por intervalos $\beta_i$, contidos em $\alpha_i$ de medida $\varepsilon_i$. O conjunto $e$ dos pontos comuns a todos os $\beta_i$ é mensurável (B) e tem por medida $m(E)$. Lebesgue, com isso, conclui que os conjuntos que chama de mensuráveis são os que os métodos de Borel permitem medir. Como observou no rodapé de sua tese, Borel havia considerado que se um conjunto $E$ contém todos os elementos de um conjunto mensurável (B) $E_1$ de medida $\alpha_1$, podemos dizer que a medida (B) de $E$ é superior a $\alpha_1$, sem nos preocupar se $E$ é mensurável (B) ou não.

De forma análoga à demonstração acima, argumenta que a medida exterior de um conjunto $E$ é o limite inferior das medidas dos conjuntos mensuráveis que contém $E$, existindo certamente um conjunto mensurável (B) contendo $E$ com medida (B) $m_e(E)$.

Então volta-se para analisar o que Jordan (1893) definiu em seu tratado de Análise: um ponto $M$ é ponto interior de um conjunto $E$ se é interior a um segmento cujos pontos todos são pontos de $E$. A fronteira de $E$ é o conjunto de pontos que não são interiores nem a $E$, nem a $C(E)$. Um segmento $AB$ contendo $E$ pode ser dividido em subintervalos. Dentre eles seja $l$ a soma dos comprimentos dos intervalos cujos pontos são todos interiores a $E$, e $L$ a soma dos comprimentos dos que contém pontos de $E$ ou da sua fronteira. Quando se varia a divisão de $AB$, de modo que o máximo do comprimento dos intervalos parciais tenda a zero, os dois número $l$ e $L$ tendem para limites determinados, que são chamados por *extensões interior* e *exterior* de $E$. Dessa definição segue que a extensão exterior é no mínimo igual à medida exterior e que a extensão interior é no máximo igual à medida interior. Para Jordan, os conjuntos mensuráveis são os quais as extensões exterior e interior coincidem. Lebesgue os chama de mensuráveis (J), e afirma que estes são mensuráveis na sua definição, e que coincidem quando ambas são aplicáveis.

Ainda aponta que a extensão interior de $E$ é a medida do conjunto dos seus pontos interiores, sendo tal conjunto aberto, ou seja, não contendo nenhum ponto de sua fronteira, tendo por complementar um conjunto fechado, e como tal, mensurável (B). Além disso a extensão exterior de $E$ é a medida do conjunto soma de $E$ e do conjunto soma da sua fronteira, o qual sendo fechado, é mensurável (B). Portanto um conjunto é mensurável (J) se, e somente se, sua fronteira for de medida nula.

Justifica que se um conjunto fechado é de medida nula, ele é mensurável (J). Da mesma forma, todos os conjuntos que podem ser formados com seus pontos também são mensuráveis (J), e como havia mostrado pouco antes, esse conjunto pode ter a potência dos conjuntos dos conjuntos de pontos, logo existem conjunto mensuráveis (J) que não são mensuráveis (B).

Perto do final da parte do capítulo onde considera pontos contidos na reta, afirma que o que foi feito foi atribuir a certos conjuntos uma medida; entretanto ainda faltava procurar meios de calcular esse número, e que isso evidentemente depende da maneira pela qual o conjunto é dado. Através de uma breve discussão sobre a obtenção de tais medidas, expõe para que tipos de conjuntos são mais fáceis ou mais difíceis de realizar esse cálculo. Aponta que para conjuntos mensuráveis (B), definidos com o auxílio das duas operações indicadas (união finita e interseção finita), será fácil calcular sua medida com a ajuda da 3ª condição do problema da medida (soma enumerável de conjuntos disjuntos dois a dois tem medida igual à soma das medidas desses conjuntos), e da seguinte propriedade: Se $E$ é o conjunto dos pontos comuns a todos os conjuntos $E_1$, $E_2$, ... tais que cada um contém o seu sucessor, então $E$ tem por medida o limite da sequência $m(E_1), m(E_2), \dots$

## MEDIDAS NO PLANO E O PROBLEMA DAS ÁREAS

Lebesgue, intuitivamente, prevê que as considerações que têm validade na reta seguem valendo em espaços que possuem várias dimensões (ainda que finitas). Entretanto, até porque definirá adiante integral como uma medida num espaço bidimensional, faz uma breve descrição de medidas de conjuntos no plano. De forma análoga à justificativa de porquê conjuntos unitários devem ter medida nula e qualquer intervalo não pode ter medida nula, Lebesgue mostra que um conjunto formado por pontos de uma linha no plano precisa ter medida superficial nula e um conjunto formado pelos pontos de um quadrado MNPQ não pode ter medida nula.

A ideia aqui era cobrir os conjuntos no plano por triângulos e fazer a medida de cada um coincidir com sua área, então Lebesgue empresta conceitos da geometria para concluir que, fazendo MN ser a unidade de comprimento, a medida do conjunto de pontos de um triangulo não pode diferir da metade do produto dos números que medem seu lado e sua altura. É assim que a medida de um triangulo é definida; triângulos farão o mesmo papel dos intervalos como sendo os conjuntos "naturalmente mensuráveis" do plano. A medida de um triângulo formado por vários triângulos que não se sobrepõem possui medida igual à soma das medidas destes, resultados que já haviam sido provados tanto para o caso de um número finito como para um número infinito de triângulos componentes. Brevemente define medida exterior e interior para conjuntos no plano de forma totalmente análoga ao trabalho feito para conjuntos na reta. Conjuntos cuja medida exterior coincidem com a medida interior são chamados de mensuráveis, e os procedimentos de união enumerável e interseção enumerável de conjuntos mensuráveis resultam em conjuntos mensuráveis.

Aqui faz-se necessária uma observação: esses triângulos satisfazem os critérios de mensurabilidade de Borel e de Jordan, e portanto são mensuráveis (B) e mensuráveis (J), obedecendo a notação empregada por Lebesgue. Dessa forma, empregando os procedimentos citados acima um número finito de vezes a triângulos, tem-se um conjunto mensurável (B). Com o intuito de comparar sua medida com as medidas de Borel e Jordan, Lebesgue faz algumas considerações sobre ambas. A respeito da primeira diz:

> Seja um conjunto aberto E, cada um de seus pontos M é interior à E. Nós podemos então a M fazer corresponder um quadrado com M por centro, de lados paralelos às direções retangulares dadas, e definir como sendo o maior cujos pontos interiores sejam interiores a E. E sendo soma daqueles destes quadrados que correspondem aos pontos cujas duas coordenadas são racionais, é mensurável (B) (1902, p. 244).[18]

Com isso conclui que um conjunto aberto no plano é mensurável (B), e como complementar de um conjunto mensurável (B) também é mensurável (B), segue que um conjunto fechado no plano também é mensurável (B).

A respeito da noção de mensurabilidade de Jordan, Lebesgue apenas afirma que o procedimento é completamente análogo ao feito na reta: extensões interiores e exteriores são definidas a partir de uma divisão em número finito de uma porção do plano em quadrados que contém o conjunto. Em outras palavras o plano é quadriculado e com isso podemos contar quantos quadrados cobrem o conjunto. Essa é a noção de mensurabilidade (J).

Como é de se esperar, Lebesgue faz a comparação entre essas medidas e a sua. Para tanto apresenta o conceito de curva, que já era, entretanto, bem conhecido da comunidade matemática: uma curva plana parametrizada é o conjunto dos pontos $(x, y)$ em que

$$x = f(t) \qquad \text{e} \qquad y = \varphi(t),$$

[18] Soit um ensemble ouvert E, chacun de ses points M est intérieur à E. Nous pouvons donc à M faire correspondre um carré ayant M pour centre, de côtés parallèles à des directions rectangulaires données, et défini comme étant le plus grand dont tous les points intérieurs sont intérieurs à E. E étant somme de céux de ces carrés qui correspondente aux points dont les deux coordonnées sont rationnelles, est mesurable (B).

ambas as funções contínuas em um intervalo $(a, b)$. Um ponto de uma curva é dito múltiplo se corresponde a vários valores de t, e uma curva sem pontos múltiplos pode ser definida apenas como o conjunto de pontos dessa curva. Uma curva fechada sem pontos múltiplos é aquela cujo único ponto múltiplo é o correspondente a $t = a$ e $t = b$, e esta também pode ser definida (e assim simplificada) como o conjunto de seus pontos. Jordan (1893) em seu *Cours d'analyse* mostrou que uma curva assim definida divide o plano em duas regiões: uma interior e outra exterior à curva. Lebesgue chama essa região interior à curva fechada e sem pontos múltiplos de domínio desta curva, e este será um conjunto aberto. Como o foco é tratar dos domínios, uma curva fechada sem pontos múltiplos será chamada aqui apenas de curva.

Uma curva $C$ é a fronteira de um domínio $D$, e Lebesgue define $D$ como soma de domínios $D_i$ se cada ponto de $D$ pertence apenas um $D_i$ ou ao menos uma das fronteiras do $D_i$. De maneira similar ao que fez no início de seu trabalho sobre medidas, Lebesgue um par de axiomas, o qual chama de "o problema das áreas":

> Propomo-nos a associar a cada domínio um número positivo que chamaremos sua área e que satisfaz às seguintes condições:
> 1.º Dois domínios iguais possuem mesma área.
> 2.º A área de um domínio soma de um número finito ou infinito de outros domínios é a soma das áreas destes domínios.
> Este é o problema das áreas (1902, p. 246).[19]

Com isso quis estabelecer a equivalência entre medida superficial e área, posta como acima. Qualquer domínio, sendo um conjunto aberto, é soma enumerável de retângulos, visto aqui como domínios componentes e, portanto, não possuindo pontos

[19] Nous nous proposons d'attacher à chaque domaine un nombre positif que nous appellerons son aire et satisfaisant aux conditions suivantes:
1.º Deux domaines égaux ont même aire.
2.º L'aire d'um domaine somme d'um nombre fini ou infini d'autres domaines est la somme des aires de ces domaines.
C'est le problême des aires.

em comum a não ser em suas fronteiras. A medida de cada retângulo é sua área e a soma dessas áreas é a medida do domínio. Lembrando que um retângulo é soma de dois triângulos, e portanto mensurável.

Nota também que dois domínios $D_1$ e $D_2$ tendo em comum apenas um arco $\alpha\beta$ em comum, se somados resultam num domínio $D$ que será mensurável. Para que a segunda condição do "problema das áreas" seja satisfeita, é necessário que a área de $\alpha\beta$ seja nula. Portanto conclui que o problema das áreas só é satisfeito para domínios cujas fronteiras sejam de medida nula. Domínios que obedecem essa condição, assim como as curvas cuja medida superficial seja nula, serão chamados por ele de domínios e curvas quadráveis.

Ciente da existência de curvas não quadráveis, ou assim chamadas as curvas de Peano que aparecem nos livros de topologia, atesta numa nota de rodapé:

> Existem curvas não quadráveis, pois que existem curvas passando por todos os pontos de um quadrado. Para formar uma curva não quadrável, sem pontos múltiplos é suficiente modificar ligeiramente o método que emprega o Sr Hilbert para definir uma curva passando por todos os pontos de um quadrado (Mathematische Annalen, Bd. 38 ou Picard, Traité d'Analyse, 2.º Edition, Tome I). Substituir-se-á cada um dos quadrados que figura na definição do Sr Hilbert por um polígono interior a esse quadrado, de área suficientemente grande, escolhido de modo que as fronteiras de dois desses polígonos não tenham em comum senão o vértice, se existir, pelo qual a curva passa de um no outro (1902, p. 247).[20]

[20] Il existe des courbes non quarrables puisqu'il existe des courbes passant par tous les points d'um carré. Pour former une courbe non quarrable, sans point multiple il suffit de modifier légèrement la méthode qu'emploie M.r Hilbert pour définir une courbe passant par tous les points d'un carré (Mathematische Annalen, Bd. 38 ou Picard, Traité d'Analyse, 2.º Edition, Tome I). On remplacera chacun des carrés qui figure dans la definition de M.r Hilbert par un polygone intérieur à ce carré, d'aire assez grande, choisi de façon que les fronteires de deux de ces polygones n'aient em commun que le sommet, s'il existe, par lequel la courbe passe de l'um dans l'autre.

Essa construção é um famoso fractal conhecido como curva de Hilbert. Essa constatação de Lebesgue mostra que não é qualquer curva que pode dividir um domínio de modo que se tenha domínio componentes quadráveis. Sendo $D$ um domínio quadrável, soma de domínios $D_1$, $D_2$, ... sem pontos em comum e nenhum deles com medida nula, segue que temos no máximo uma infinidade enumerável de $D_i$'s. Como as fronteiras têm medida superficial nula, podem ser desprezadas na soma das áreas. O problema das áreas é possível e admite uma única solução para domínios quadráveis. Ainda mostra que esse mesmo problema não é bem determinado para domínios não quadráveis e que, portanto, não falará de área a não ser para domínios quadráveis. Mostra que área de um domínio quadrado está compreendida entre sua extensão superior e interior, portanto a área de um domínio quadrável é bem determinada. Raciocínios análogos em espaços de dimensões superiores, Lebesgue atesta, levam a definições e resultados equivalentes.

# CAPÍTULO 5 – A INTEGRAL DE LEBESGUE

O objetivo deste capitulo é tratar da integral de Lebesgue como foi definida por ele em sua tese. Primeiramente Lebesgue dá uma definição geométrica de integral como medida de um conjunto limitado por uma curva. Baseado nisso, dá uma definição analítica de sua integral. Segundo ele,

> Não sendo possível demonstrar que a definição proposta era a única preenchendo as condições impostas, tentei mostrar que ela era natural e do ponto de vista geométrico ela parecia como necessária.
>
> Tentei além disso mostrar que ela era útil: ela permite, com efeito, de resolver o problema fundamental do cálculo diferencial e todos os casos onde a função derivada é limitada, e, como consequência, ela permite integrar equações diferenciais que se reduzem a quadraturas. Por exemplo, $f(x)$ sendo uma função limitada qualquer, nós saberemos reconhecer se a equação:
>
> $$y' + ay = f(x)$$
>
> admite soluções e, se ela admitir, as encontrar[21]. (1902, p. 282).

[21] Ne pouvant démontrer que la définition proposée était la seule remplissant les conditions imposées, j'ai essayé de montrer qu'elle était naturelle et qu'au point de vue géométrique ele apparaissait presque comme nécessaire.
J'ai essayé de plus de montrer qu'elle était utile: ele permet en effet de résoudre le problême fontamental du calcul différentiel dans tous les cas où la fonction dérivée est bornée, et, comme conséquence, ele permet d'intégrer des équations differentielles qui se ramênent à des quadratures. Par exemple, $f(x)$ étant une fonction bornée quelconque, nous saurons reconnaître si l'équation:

$$y' + ay = f(x)$$

admet des solutions et, si ele en admet, les trouver.

## INTEGRAL DE FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL

O intuito de Lebesgue em sua tese era dar uma definição analítica de sua integral, assim como o fez Riemann, a partir de uma concepção geométrica. Para ele, a definição geométrica de integral pode ser posta como o cálculo de área de um domínio quadrável, sendo este estabelecido como o conjunto dos pontos limitados por uma função contínua num intervalo $(a, b)$, as abscissas que passam pelos limites desse intervalo e o eixo coordenado $Ox$. Essa área sendo chamada de integral definida de f no intervalo $(a, b)$ e sendo denotada por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Em suma, Lebesgue apresenta o método clássico de se calcular uma integral dessa função como a avaliação das extensões interiores e exteriores de seu domínio por meio da divisão do plano em retângulos com lados paralelos aos eixos coordenados $Ox$ e $Oy$. As extensões são limites da soma das áreas desses retângulos cujas bases estão no eixo $Ox$. Sejam $\delta_1$, $\delta_2$, ... os comprimentos dessas bases, $m_1$, $m_2$, ... $M_1$, $M_2$, ..., os valores inferiores e superiores da função em cada intervalo $\delta_i$. As extensões inferiores e superiores pode ser posta como $s = \sum \delta_i m_i$, e $S = \sum \delta_i M_i$. Como Lebesgue faz notar, Darboux mostrou que, para funções limitadas quaisquer, fazendo os comprimentos $\delta_i$ tenderem a zero, os limites de $s$ e $S$ existem e são bem determinados, sendo chamadas de integrais por falta e por excesso de $f$. Quando esses valores tendem para um valor comum, essa função $f$ é chamada, desde Riemann, de integrável definida tomada entre $a$ e $b$.

Lebesgue, então, volta-se para a interpretação geométrica de função integrável com um foco diferente. Para simplificar, e sem perda de generalidade, para qualquer função $f$ positiva definida num intervalo $(a, b)$, seja o conjunto $E$ formado pelos pontos $(x, y)$ que satisfazem as desigualdades: $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq f(x)$. Os valores $s$ e $S$ são valores aproximados das extensões interiores e exteriores de E, para que esta função seja, portanto, integrável é necessário e suficiente que $E$ seja J-mensurável e $m(E)$ é o valor da integral de $f$. Se $f$ não é positiva, essa definição é facilmente estendida para os valores das ordenadas que são menores do que zero. O conjunto $E$ é visto como a soma dos conjuntos $E_1$ e $E_2$ (vistos aqui como sub-domínios do domínio $E$), onde $E_1$ é o conjunto dos pontos $(x, y)$ de $E$ onde $y$ é positivo e $E_2$ é o conjunto dos pontos de $E$ onde $y$ é negativo. A integral por excesso de $f$ é equivalente à extensão exterior de $E_1$ somada à extensão interior de $E_2$; enquanto a integral por falta de $f$ é equivalente à extensão interior de $E_1$ somada com a extensão exterior de $E_2$. Se $E$ é mensurável (J), então $E_1$ e $E_2$ também são e a função $f$ é integrável. O valor da integral de $f$ é $m(E) = m(E_1) - m(E_2)$.

Até aqui, em termos de definição de integral, não havia nada de novo. No entanto Lebesgue aproveita esses resultados para sugerir sua interpretação geométrica de integral baseado nas noções de medidas de domínios que acabara de apresentar:

> Estes resultados sugerem imediatamente a seguinte generalização: Se o conjunto $E$ é mensurável (em cujo caso $E_1$ e $E_2$ o são) chamaremos integral definida de $f$, tomada entre $a$ e $b$, a quantidade
>
> $$m(E_1) - m(E_2).$$
>
> As funções $f$ correspondentes serão ditas somáveis. (1902, p. 250).[22]

[22] Ces résultats suggèrent immédiatement la généralisation suivante: si l'ensemble $E$ est measurable, (auquel cas $E_1$ et $E_2$ le sont) nous appellerons intégrale définie de $f$, prise entre $a$ et $b$, la quantité

$$m(E_1) - m(E_2).$$

Les fonctions f correspondentes seront dites sommables.

Ao definir o que chama de funções somáveis, resta a Lebesgue mostrar que essa generalização abarca as funções integráveis, ou seja, toda função integrável na definição de Riemann é uma função somável. Lebesgue, antes disso, dá definições similares às de integral por falta e por excesso, nos termos de medida inferior e superior: são as integrais inferiores e superiores. A integral inferior fica então posta como $m_i(E_1) - m_i(E_2)$ e a integral superior como $m_e(E_1) - m_e(E_2)$, ambos os números estão entre as integrais por falta e por excesso. Uma função somável é aquela em que sua integral superior coincide com a integral inferior. É interessante notar que, como Lebesgue expressou que não conhecia conjuntos que não fossem mensuráveis, essa nova definição de integral já seria suficiente para mostrar que correspondia a um maior número de funções do que a definição clássica.

Uma de suas intenções era dar uma definição analítica de integral equivalente à definição geométrica, e para tanto era necessário mostrar a equivalência entre as duas definições. Os raciocínios a seguir são exatamente como figuram na tese:

Como $E$ é mensurável, existem $E'$ e $E''$ mensuráveis (B), tais que $E'' \subset E \subset E'$ e com medidas $m(E)$. Para Lebesgue, pode-se supor que $E'$ e $E''$ correspondem a duas funções $f_1$ e $f_2$, com $f_1 \geq f_2$. Dado um número $m > 0$, sejam $e$, $e'$, $e''$ subconjuntos de $E$, $E'$, $E''$ cujas ordenadas sejam maiores do que $m$. Para ele era óbvio que $e$, $e'$, $e''$ são mensuráveis e de mesma medida. Agora sejam $s$, $s'$, $s''$ as seções desses conjuntos pela reta $y = m + h$. Parece ser óbvio para ele também que $s'$ e $s''$ são mensuráveis (B) linearmente, e $m(s')$, $m(s'')$ não decrescendo quando $h$ tende a $0$. Sendo $S'$ e $S''$ os limites de $m(s')$ e $m(s'')$ quando $h$ tende a $0$, para mostrar que $S' = S''$, supõe que se forem diferentes então para $h$ suficientemente pequeno teríamos $m(s') \geq m(s'') + \varepsilon$. Logo existem $h_1 < h_2$ pequenos o suficiente tais que

$$m\big(s'(h_1)\big) \geq m\big(s''(h_2)\big) \geq m(s''(h_1)) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sejam $e'_1$ e $e''_1$ os conjuntos de pontos de $e'$ e $e''$ entremeados por $y = m + h_1$ e $y = m + h_2$. É intuitivo esperar que $e'_1$ e $e''_1$ tenham mesma medida, então Lebesgue tomou isso como certo. Disso segue:

$$m(e'_1) \geq (h_2 - h_1)m(s'(h_2))$$

$$m(e''_1) \leq (h_2 - h_1)m(s''(h_2))$$

Logo,

$$m(e'_1) \geq m(e''_1) + (h_2 - h_1)\frac{\varepsilon}{2}$$

o que seria absurdo, visto que $e'_1$ e $e''_1$ possuem mesma medida.

Portanto $S'$ e $S''$ são iguais, o que implica $s'$ e $s''$ terem a mesma medida linear e, portanto, $s$ é mensurável. Essa demonstração, nas palavras de Lebesgue, queria dizer que "l'ensemble des valeurs de $x$ pour lesquelles $f(x)$ est supérieure à $m > 0$ est mesurable"; ou seja, o conjunto de valores de $x$ tais que $f(x)$ é maior do que $m > 0$ é mensurável. De forma análoga os valores de $x$ tais que $f(x)$ é inferior a $m < 0$ também é mensurável.

Lebesgue aponta que com raciocínios semelhantes, para quaisquer $a$ e $b$ reais, uma função somável implica que o conjunto de valores de $x$ para os quais se tem

$$a \leq f(x) \leq b$$

é mensurável.

Reciprocamente, se temos uma função $f$ limitada a hipótese de que para todos $a$ e $b$ reais o conjunto dos valores de $x$ em que $a \leq f(x) \leq b$ é mensurável, então $f$ será somável. De fato: se o intervalo de variação de $f(x)$ for particionado por $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... , $a_n$, seja $e_i$ o conjunto de valores $x$ tais que $f(x) = a_i$. Agora, para $i = 0,1,2, \dots, n-1$ sejam $e'_i$ o conjunto de valores de $x$ para os quais $a_i < f(x) < a_{i+1}$. O conjunto dos pontos de $E$ de $f$ que correspondem aos valores de $x$ pertencentes a $e_i$ é mensurável e tem por medida $|a_i|m_l(e_i)$, e $m_l$ significa a medida linear. Já os pontos de $E$ correspondentes aos pontos de $e'_i$ é mensurável, contém um conjunto mensurável de medida $|a_i|m_l(e'_i)$ e está contido num conjunto mensurável de medida $|a_{i+1}|m_l(e'_i)$. A reunião desses conjuntos implica no seguinte: $E$ contém um conjunto de medida

$$\sum_{0}^{n} |a_i| m_l(e_i) + \sum_{1}^{n} |a_{i-1}| m_l(e'_i)$$

e está contido num conjunto de medida

$$\sum_{0}^{n} |a_i| m_l(e_i) + \sum_{1}^{n} |a_i| m_l(e'_i).$$

A diferença entre essas duas somas, quando o maior dos $|a_i - a_{i-1}|$ tende a $0$, também tende a $0$, resultando em $E$ mensurável.

Lebesgue usou desse raciocínio para mostrar a equivalência entre dizer que $f$ é somável e dizer que para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ tem-se que o conjunto dos pontos $x$ tais que $a < f(x) < b$ é mensurável. Essa definição analítica não sofreu muitas alterações até os dias de hoje. Ainda hoje nos livros sobre teoria da medida e integração de Lebesgue, como (HÖNIG, 1977) e (BARTLE, 1995) por exemplo, uma função $f: D \to \overline{\mathbb{R}}$ ($D$ é o domínio e $\overline{\mathbb{R}}$ representa o conceito de "reta estendida") é definida como mensurável (que é exatamente o mesmo que função somável) se $f$ satisfaz uma das seguintes propriedades (que são equivalentes, ou seja, se satisfizer uma delas, satisfaz todas):

1. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in D; f(x) > \alpha\}$ é mensurável;
2. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in D; f(x) < \alpha\}$ é mensurável;
3. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in D; f(x) \geq \alpha\}$ é mensurável;
4. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in D; f(x) \leq \alpha\}$ é mensurável.

É digno de nota o fato de que não estão presentes na maioria dos livros atuais o desenvolvimento geométrico que Lebesgue fez para chegar ao resultado acima; funções mensuráveis são definidas apenas analiticamente.

Lebesgue ainda justifica que é possível calcular a medida de $E$, ou seja, a integral de $f$; basta calcular o limite comum das duas somas:

$$\sigma = \sum_{0}^{n} |a_i| m_l(e_i) + \sum_{1}^{n} |a_{i-1}| m_l(e'_i),$$

$$\Sigma = \sum_{0}^{n} |a_i| m_l(e_i) + \sum_{1}^{n} |a_i| m_l(e'_i).$$

quando $|a_i - a_{i-1}| \longrightarrow 0$.

Se $f$ não é sempre positiva, o limite da soma dos termos de $\sigma$ e $\Sigma$ que são positivos resulta em $m(E_1)$ e o limite da soma dos termos de $\sigma$ e $\Sigma$ que são negativos resulta em $m(E_2)$.

Operando como em seu artigo, reafirma que para uma função $f$ contínua e crescente definida entre $\alpha$ e $\beta$, não há diferença entre particionar o intervalo de variação da imagem ou do domínio. Portanto funções contínuas crescentes num intervalo são somáveis. Para Lebesgue esse raciocínio é facilmente generalizado para funções contínuas quaisquer definidas num intervalo $(\alpha, \beta)$ e variando entre $(a, b)$:

Escolhendo arbitrariamente $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$, os conjuntos $e_i = \{x; f(x) = a_i\}$, $i = 0,1,2, \dots, n$, e $e'_i = \{x; a_i < f(x) < a_{i+1}\}$, $i = 0,1,2, \dots, n-1$, são mensuráveis e as quantidades

$$\sigma = \sum_0^n |a_i| m_l(e_i) + \sum_1^n |a_{i-1}| m_l(e'_i) \quad , \quad \Sigma = \sum_0^n |a_i| m_l(e_i) + \sum_1^n |a_i| m_l(e'_i)$$

tendem para o que ele denota por

$$\int_a^b f(x)dx$$

quando a distância máxima entre dois $a_i$ consecutivos tende para zero.

É curioso observar que o intervalo de integração tomado nessa notação é $(a, b)$ da imagem, e não $(\alpha, \beta)$ do domínio. Entretanto ainda restava mostrar que essa definição pode ser estendida para funções não contínuas. Para isso mostrou que $\alpha$ e $\beta$ possuem um mesmo limite independentemente da escolha dos $a_i$, ou seja, esses pontos não precisam necessariamente fazer parte de um intervalo de variação de $f(x)$. O argumento é o seguinte:

Quando, entre os $a_i$, introduzimos novos pontos de divisão, $\sigma$ não decresce, $\Sigma$ não cresce, fazendo $\sigma$ e $\Sigma$ ter limites. Eles são iguais, pois $\Sigma - \sigma$ é no máximo igual à $(\beta - \alpha)$ multiplicado pelo máximo de $a_i - a_{i-1}$.

> Seja agora um outro modo de divisão da variação de $f(x)$ com o auxílio pontos $b_i$ e sejam $\sigma'$ e $\Sigma'$ os valores correspondentes de $\sigma$ e $\Sigma$. Sejam $\sigma''$ e $\Sigma''$ os valores correspondenes ao modo de divisão no qual é empregado ao mesmo tempo $a_i$ e $b_i$. As duas séries de inequações
>
> $$\sigma \leq \sigma'' \leq \Sigma'' \leq \Sigma'$$
> $$\sigma' \leq \sigma'' \leq \Sigma'' \leq \Sigma$$
>
> Provam que as seis somas $\sigma$, $\sigma'$, $\sigma''$, $\Sigma$, $\Sigma'$, $\Sigma''$, têm o mesmo limite (1902, p. 254).[23]

A existência da nova integral para funções não necessariamente contínuas, então, estava, assim, provada.

Para mostrar que funções integráveis (R) são somáveis, Lebesgue usa da propriedade que, enunciada por Riemann como: "para que uma função seja integrável é necessário que a soma total dos intervalos para os quais as oscilações maiores que um dado $\sigma$ possa ser tomada infinitamente pequena", estabelece que os pontos de descontinuidade de uma função integrável (R) formam um conjunto de medida nula. E assim procede:

> Seja $f(x)$ uma função integrável e seja $E$ o conjunto dos pontos para os quais se tem
>
> $$a \leq f(x) \leq b$$

[23]Soit mainenant un autre mode de division de la variation de $f(x)$ à l'aide de points $b_i$ et soient $\sigma'$ et $\Sigma'$ les valeurs correpondantes de $\sigma$ et $\Sigma$. Soient $\sigma''$ et $\Sigma''$ les valeurs correspondant au mode de division dans lequel on emploie à la fois les $a_i$ et $b_i$. Les deux séries d'inégalités

$$\sigma \leq \sigma'' \leq \Sigma'' \leq \Sigma'$$
$$\sigma' \leq \sigma'' \leq \Sigma'' \leq \Sigma$$

Prouvent que les six sommes $\sigma$, $\sigma'$, $\sigma''$, $\Sigma$, $\Sigma'$, $\Sigma''$, ont la même limite.

> $a$ e $b$ sendo dois números quaisquer. Os pontos limites de $E$ que não fazem parte de $E$ são pontos de descontinuidade; eles formam então um conjunto $e$ de medida nula. $E + e$ sendo fechado é mensurável, $e$ é mensurável, logo $E$ o é. Isso basta para concluirmos que $f$ é somável (1902, p. 254)[24]

Usando agora o sentido que empregou para a palavra integral, justifica que se num intervalo $l$ o máximo de $f$ é $M$ e o mínimo de $f$ é $m$, a integral de $f$ está compreendida entre $lM$ e $lm$. E dados $a_1 < a_1 < \cdots < a_n$ segue

$$\int_{a_1}^{a_2} + \int_{a_2}^{a_3} + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} = \int_{a_1}^{a_n}.$$

Com isso, conclui que a integral de uma função somável está compreendida entre a integral superior e a integral inferior; e quando as duas definições de integral são aplicáveis, ambas coincidem. A partir daqui, quando menciona integral, é no sentido que deu à palavra. Para completar sua definição, estabelece a seguinte igualdade:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0.$$

o que resulta em

[24] Soit $f(x)$ une fonction intégrable et soit $E$ l'ensemble des points pour lesquels on a

$$a \leq f(x) \leq b$$

$a$ et $b$ étant deux nombres quelconques. Les points limites de $E$ qui ne font pas partie de $E$ sont des points de discontinuité; ils forment donc um ensemble $e$ de mesure nulee. $E + e$ étant fermé est mesurable, $e$ est mesurable, done $E$ l'est. Cella suffit pour qu'on en conclut que $f$ est sommable.

$$\int_{a_0}^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx = \int_{a_0}^{a_n} f(x)dx,$$

para quaisquer $a_i$ reais, $i = 0,1,2, \dots, n$. Ou seja, não é necessário que $a$ seja inferior a $b$ para que seja possível integrar uma função nessa definição. É curioso o fato de Lebesgue ter utilizado a notação $dx$ em sua integral, visto que os intervalos onde ela é tomada estão no eixo $Oy$. Em alguns livros mais atuais sobre o tema, como (BARTLE, 1995) por exemplo, como a integral depende muito mais da medida $\mu$ utilizada, tornando a notação de uma integral algo como

$$\int f d\mu$$

em que $E$ é um conjunto mensurável.

Possivelmente com o exemplo da função de Dirichlet em mente, Lebesgue percebe a necessidade de definir a integral de uma função definida apenas para os pontos de um conjunto $E$. Se $f$ está definida num intervalo $AB$ e $E$ é um subconjunto de $AB$, é possível definir uma função $\varphi$ que coincide com $f$ em todos os pontos de $E$ e igual a $0$ em todos os pontos de $E$ em relação a $AB$. A integral de $f$, então, tomada em $E$ é por definição a integral de $\varphi$ tomada em $E$. A integral de $f$, assim como foi definida, independeria da escolha do intervalo $AB$. Ideia muito semelhante à da construção dos conjuntos mensuráveis feita no capítulo anterior. Sendo $E$ mensurável e igual à soma (no sentido de união de conjuntos) de $E_1$, $E_2$, ... todos mensuráveis, então

$$\int_E f(x)dx = \sum \int_{E_i} f(x)dx.$$

Com essas ideias, foi possível para Lebesgue refazer a definição de integral inferior de uma função $f$ como o limite superior das integrais de funções $\varphi$ somáveis não superiores a $f$ pois, para ele, dentre todas as funções $\varphi$ existiria uma cuja integral fosse igual à integral inferior de $f$. Analogamente, encontrou uma propriedade análoga para integral superior.

Apesar de considerar importante a demonstração da validade de operações aritméticas elementares para funções somáveis, como a soma de funções somáveis ser somável e a soma de suas integrais resultar na integral de suas somas, dá mais importância ao que talvez seja um dos seus resultados mais úteis na Análise Matemática: "Se uma função $f$ limitada é o limite de uma sequência de funções $f_i$ somáveis, $f$ é somável" (Si une fonction $f$ bornée est la limite d'une suite de fonctions $f_i$ sommables, $f$ est sommable. (LEBESGUE, 1902)). Segue a demonstração que fez dessa propriedade:

> Com efeito, seja $e_i$ o conjunto dos valores para os quais $f_i$ está compreendida entre $a$ e $b$. O conjunto $e$ dos pontos comuns à todos os $e_i$, ao menos a partir de um certo valor de $i$, é o conjunto dos valores de $x$ para os quais $f$ está compreendida entre $a$ e $b$. Ora, sendo os $e_i$ mensuráveis, $e$ o é, logo $f$ é somável (1902, p. 257).[25]

Com esse resultado, várias funções que não podiam ser integradas dadas as limitações da teoria predecessora, mas que eram construídas a partir de uma série de funções integráveis (R), a partir de agora figurariam no conjunto das funções somáveis e, portanto, teriam integral de Lebesgue.

Dentre as propriedades aritméticas das funções somáveis, Lebesgue apenas demonstra que a soma de duas funções somáveis é somável, e que a integral da soma

[25] En effect soit $e_i$ l'ensemble des valeurs pour lesquelles $f_i$ est comprise entre $a$ et $b$. L'emsemble $e$ des points communs à tous les $e_i$, au moins à partir d'une certaine valeur de $i$, est l'ensemble des valeurs de $x$ pour lesquelles $f$ est comprise entre $a$ et $b$. Or les $e_i$ étant mesurables $e$ l'est, donc $f$ est sommable.

dessas funções é a soma de suas integrais; apontando que esse resultado é facilmente estendido para a soma de um número qualquer de funções. Entretanto afirma que outras propriedades possam ser demonstradas: 1) O produto de duas funções somáveis é somável; 2) O inverso de uma função somável que não se anula em nenhum ponto é somável; 3) A $m$-ésima raíz de uma função somável é somável; 4) Se duas funções são somáveis e a composição delas é possível, então está é somável.

Essas proposições permitiram a Lebesgue concluir que todo polinômio é somável, bastando considerar que $y = h$ e $y = x$ são somáveis e operando um número finito de vezes essas duas funções. Sendo toda função contínua um limite de uma sequência de polinômios, esse já seria uma resultado óbvio. Entretanto, Lebesgue sabia que Baire havia estudado classes de funções não necessariamente contínuas que são limites de sequências de polinômios. Para Baire, uma função que é limite de uma polinômios é chamada de função de primeira classe; uma função que é limite de uma sequência de funções de primeira classe é uma função de segunda classe; e assim sucessivamente uma função de $n$-ésima classe é uma função que é limite de uma sequência de funções de $(n-1)$-ésima classe. Todas essas classes de funções são compostas por funções somáveis, e Lebesgue observa que grande parte destas são exemplos de funções descontínuas e não-integráveis (R).

Raciocinando como na demonstração de que funções integráveis são somáveis, Lebesgue justifica que se $f$ e $\varphi$ são contínuas num mesmo intervalo, $\varphi$ não se anulando em nenhum ponto, e $E$ sendo um conjunto denso nesse intervalo, ao se definir uma função

$$F = \begin{cases} f & ; \quad se\ x \in C_E \\ f + \varphi & ; \quad se\ x \in E \end{cases};$$

todos os seus pontos seriam pontos de descontinuidade que, portanto, não poderia ser integrável (R). Entretanto, pela própria construção feita, sendo o conjunto $E$ de medida nula, $F$ é integrável no sentido de Lebesgue. Para Lebesgue, esse procedimento permitiria construir um conjunto de funções somáveis cuja potência seria igual à potência do conjunto de funções.

O método analítico de definir função somável de Lebesgue mostraria mais uma grande utilidade. Lebesgue enunciou toda a sua teoria da medida para conjunto limitados, apesar de ter declarado em uma nota de rodapé que não haveria dificuldade em tê-lo feito para todo tipo de conjuntos, limitados ou não (1902, p. 258). Disso segue, então, que seu método geométrico se aplicaria apenas a funções limitadas. O método analítico, no entanto, se aplicaria sem dificuldades a funções não limitadas. Bastaria considerar na definição de função somável os números

$$\dots < m_{-2} < m_{-1} < m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$$

variando de $-\infty$ a $+\infty$, e observar que as somas

$$\sigma = \sum_0^n |a_i| m_l(e_i) + \sum_1^n |a_{i-1}| m_l(e'_i) \qquad , \qquad \Sigma = \sum_0^n |a_i| m_l(e_i) + \sum_1^n |a_i| m_l(e'_i)$$

podem não ser convergentes. Entretanto, se uma for a outra será e vice versa, independente dos $m_i$ escolhidos. Além disso, fazendo com que a distância máxima entre dois $m_i$ consecutivos tenda a $0$, $\sigma$ e $\Sigma$ tenderá para um mesmo valor, que será a integral de $f$. Uma única observação é feita de que nem toda função somável (agora considerando funções não limitadas) possui necessariamente integral. Lebesgue ainda observa que no caso de funções que assumem valores infinitos apenas em um número finito de pontos, bastaria abstrair esses valores do cálculo da integral. Com essa ampliação das noções de função somável e integral, as propriedades enunciadas mantém-se precisas.

Lebesgue enuncia e demonstra mais um teorema importante na Análise: se uma sequência de funções somáveis $f_1$, $f_2$, ... possuem integral e um limite $f$, e se $|f - f_n|$ é menor do que um número dado $M$, qualquer que seja $n$, então $f$ possui integral e está é igual ao limite das integrais de $f_n$. Sua demonstração é como segue: seja $e_n$ o conjunto de pontos $x$ para os quais não vale a desigualdade

$$\left|f - f_{n+p}\right| < \varepsilon$$

para todo $p \geq 0$, sendo $\varepsilon > 0$ dado. Disso decorre que $e_n$ é mensurável e $e_{n+1}$ está contido em $e_n$, o que leva à conclusão de que quando $n \longrightarrow \infty$, a medida de $e_n$ tende a $0$. Portanto $f$ possui integral. Agora seja $E$ o conjunto mensurável no qual se tomam as integrais, tem-se:

$$\left|\int (f - f_n)\, dx\right| \leq M.m(e_n) + \varepsilon\big(m(E) - m(n_n)\big) \Longrightarrow \left|\int (f - f_n)\, dx\right| \longrightarrow 0.$$

## INTEGRAIS INDEFINIDAS E FUNÇÕES PRIMITIVAS DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL

Ainda em seu esforço para generalizar os resultados para sua nova noção de integral, Lebesgue trata da definição de Integral indefinida. Para Lebesgue, uma integral indefinida de uma função $f$, que possui integral definida em um intervalo $(\alpha, \beta)$, pode ser definida como uma função $F$ também definida em $(\alpha, \beta)$ e, para quaisquer $a$ e $b$ compreendidos em $(\alpha, \beta)$ tenha-se

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Como consequência, tem-se

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx - F(a),$$

logo, uma função que possui integral definida admite uma infinidade de integrais indefinidas que diferem apenas por uma constante $F(a)$. Em outras palavras, a integral definida é uma medida associada a uma função tomada em um intervalo, enquanto a integral indefinida é uma função associada a essa medida.

Todo o esforço precedente para mostrar que a sua integral e a de Riemann coincidem quando ambas são aplicáveis permitiram a Lebesgue abreviar algumas demonstrações de resultados. Um deles é o de que a integral indefinida é uma função contínua. Para uma função limitada isso já era conhecido, bastava a Lebesgue demonstrar esse resultado para funções não limitadas. Usando as mesmas notações que o permitiram mostrar que a definição de somável valia para funções não limitadas e tomando $a$ qualquer, Lebesgue intentava mostrar que se $h$ é menor do que uma certa quantidade em valor absoluto então vale a desigualdade

$$|F(a+h) - F(a)| = \left| \int_a^{a+h} f(x)\,dx \right| \le \varepsilon.$$

Na demonstração, supondo $h$ positivo, Lebesgue intuitivamente argumenta que existirá no máximo uma infinidade enumerável de $m_i$ tais que o conjunto $e_i$ correspondente tenha medida positiva e, portanto, particiona a imagem da função de modo que esses $m_i$ não sejam tomados[26]. Logo, $m(e_i) = 0$ nessa partição, o que simplificará as somas $\sigma$ e $\Sigma$. Assim, sendo $e'_i(h)$ o conjunto de pontos de $e'_i$ entremeados por $a$ e $a + h$, e sendo fixa a quantidade de $m_i$ tomados, Lebesgue escreve a igualdade

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \lim\left\{\sum_0^{\infty} m_{i+1}\, m[e'_i(h)] + \sum_{-1}^{-\infty} m_i\, m[e'_i(h)]\right\}.$$

Lebesgue argumenta que pode-se supor $h$ tão pequeno que as duas séries do segundo membro (uma de valores positivos e outra de valores negativos) sejam tão pequenas em valores absolutos quanto se queira, e considerando mais valores $m_i$ menor será o valor absoluto do segundo membro. Em outras palavras, quanto menor for o valor de $h$, menor será o valor da integral acima, e fazendo $h$ tender a $0$, também tenderá a $0$ essa integral. Podendo ser tomado o valor $\int_a^{a+h} f(x)\,dx$ tão pequeno quanto se queira, Lebesgue concluir que a integral indefinida é uma função contínua.

É interessante notar que Lebesgue determinava o intervalo de integração ora na imagem, ora no domínio da função. Isso justifica a observação que faz sobre a identidade das duas integrais quando ambas se aplicam à função. Sendo $M$ e $m$ o máximo e o mínimo da função $f$ no intervalo $(a, a + h)$ segue as seguintes desigualdades

$$mh \leq \int_a^{a+h} f(x)\,dx \leq Mh$$

e, portanto,

[26] No caso de uma função estritamente crescente ou decrescente, os conjuntos $e_i$ nunca teriam uma medida positiva, pois para dois valores distintos de $x$ existiriam dois $m_i$ diferentes.

$$m \leq \frac{F(a+h)-F(a)}{h} \leq M.$$

Como $F$ é contínua, então admite derivada. Nos pontos onde $f$ é contínua, a derivada de $F$ nesses pontos coincide com os valores de $f$ nesses pontos. Lebesgue usa dessa observação para mostrar que para funções $f$ contínuas em todo o domínio, as integrais indefinidas destas serão quaisquer funções que admitem $f$ como derivada, ou seja, $F$ é uma função primitiva de $f$. Mais uma vez, conclui que quando se trata de funções contínuas existe uma identidade entre a procura de funções primitivas e a procura de integrais indefinidas; esse resultado se estendendo para algumas derivadas integráveis (R).

A intenção de Lebesgue era mostrar que a sua integral superaria a deficiência da integral de Riemann, que permite a existência de derivadas que não são integráveis, mostrando que toda função derivada limitada admite integral indefinida, que é uma de suas primitivas, e que as funções derivadas não limitadas, quando admitem integrais, também estabelecem uma identidade entre suas funções primitivas e suas integrais indefinidas.

Argumenta que, sendo a derivada de uma função $f$ o limite de funções contínuas

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \varphi(x),$$

então é somável[27]. Supondo $f'$ inferior em valor absoluto a um valor $M$ e considerando o teorema do valor médio em que $\varphi(x) = f'(x+\theta h)$, e $f$ é limitada em todo seu domínio, Lebesgue conclui

[27] "La dérivée d'une function $f(x)$ est la limite quand $h$ tend vers zéro de l'expression:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \varphi(x)$$

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \lim \int_a^b \varphi(x)\,dx = \left[\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx\right]_a^b,$$

o que implicaria em

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Ou seja, toda função derivada limitada admite como integrais indefinidas suas funções primitivas; este resultado valendo também para derivadas laterais.

Aplica esse resultado no seguinte exemplo: considere o conjunto $E$ nunca denso em $(0,1)$ e com medida não-nula. Adotou a nomenclatura “contíguo”, usada por Baire, para significar um intervalo $(a, b)$ que não tivesse pontos em comum com $E$ a não ser suas extremidades. Seja $c$ o ponto médio de $(a, b)$. Agora seja a função

$$\varphi(x-a) = 2(x-a)\operatorname{sen}\frac{1}{x-a} - \cos\frac{1}{x-a},$$

que se anula uma infinidade de vezes entre $a$ e $c$. Seja $d$ tal que $\varphi(d) = 0$ e $a + d$ seja o ponto mais próximo possível de $c$ onde isso ocorra. Seja $f$ tal que para todo ponto $x$ de $E$ $f(x)$ seja nula, e em todo intervalo $(a, b)$ contíguo a $E$ tenha-se

---

Laquelle, $h$ étant fixe, represente une function continue; done la dérivée est limite de fonctions continues, elle est sommable.” (LEBESGUE, 1902, p. 263).

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x-a) & ; \quad a \leq x \leq a+d \\ 0 & ; \quad a+d < x < b-d \\ -\varphi(b-x) & ; \quad b-d \leq x \leq b \end{cases} .$$

Essa função é contínua em todo intervalo $(a, b)$ contíguo a $E$, e descontínua em todos os pontos de $E$, sendo estes pontos de descontinuidade de segunda espécie; $f$ também é limitada. A integral de $f$ tomada no intervalo $(0,1)$ é nula. Assim a função primitiva $F$ será nula em todos os pontos de de $E$, e nos intervalos $(a, b)$ contíguos a $E$ será

$$F(x) = \begin{cases} (x-a)^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x-a} & ; \quad a \leq x \leq a+d \\ d^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{d} & ; \quad a+d < x < b-d \\ (b-x)^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{b-x} & ; \quad b-d \leq x \leq b \end{cases} .$$

Como $f$ é contínua em todos os pontos do complementar de $E$ em relação a $(0,1)$, é imediato, então, que $F' = f$ nesses pontos. Lebesgue mostrou que para qualquer ponto de $E$, $F(x)$ possui derivada nula à direita e à esquerda e, consequentemente, $F' = f$ em todo o intervalo $(0,1)$. Seu argumento foi o de que se $a$ é um ponto de $E$, há duas possibilidades para $a$: a primeira é de que $a$ seja extremidade de um intervalo contíguo a $E$ pela direita, e assim é imediato que $F$ tenha derivada nula à direita; a segunda possibilidade é a de que à direita de $a$ exista uma infinidade de pontos $\alpha_i$ de $E$, e assim para $x$ superior a $\alpha_i$ temos

$$\frac{F(x) - F(a)}{x-a} < \frac{(x-\alpha_i)^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x-\alpha_i}}{x-a} \leq \frac{(x-\alpha_i)^2}{x-a} < x-a,$$

desde que $x - \alpha_i < x - a$. Assim

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = 0.$$

Esse exemplo mostra uma função $f$ derivada de uma função $F$, que não pode ser integrada pelo método de Riemann, pois seu conjunto de pontos de descontinuidade tem medida positiva ($E$ é um conjunto nunca denso em $(0,1)$). Esse exemplo não era inédito, e Lebesgue deu os devidos créditos a Volterra em sua tese.

Na sequência, prova que a condição necessária e suficiente para que uma função derivada (limitada ou não) seja integrável é que essa função tenha variação limitada, visto que as funções primitivas encontradas possuem essa característica. Como consequência de sua demonstração, encontrou uma forma de reconhecer se uma função é derivada de outra que tenha variação limitada, facilitando a procura de suas primitivas. Entretanto, reconhece que a integração tal como definiu não permite saber se uma função dada possui primitivas com variação não limitada, e dá o seguinte exemplo de função: $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$ quando $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Essa função admite derivada $f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ para $x \neq 0$ e $f'(0) = 0$. Assim, $f'$ é um exemplo de função não limitada, somável e que não possui integral, ou seja, os métodos precedentes não permitem encontrar $f$.

Ainda observa que na integral clássica de uma função que se torna infinita na vizinhança de um ponto é possível encontrar $f(x)$ quando se conhece $f'(x)$, e que sua integral no caso de funções limitadas não é uma generalização da clássica e sim um outro método que coincide quando ambas são aplicáveis e que, ocasionalmente, essas duas definições poderiam se tornar casos particulares de uma definição mais geral.

Aproveitando o resultado precedente de que toda integral indefinida é contínua, Lebesgue agora redefine esse conceito:

> Nós vimos que toda integral indefinida é contínua. Se agora considerarmos essa propriedade como uma das partes da definição de integrais indefinidas, somos conduzidos a dizer que:
>
> Uma função $f(x)$ definida em $(\alpha, \beta)$ tem nesse intervalo uma integral indefinida $F(x)$, se existe uma função contínua $F(x)$, e uma e somente uma constante aditiva, tal que se tem:
>
> $$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$
>
> para todos os sistemas de números $a$ e $b$ escolhidos, entre $\alpha$ e $\beta$, de maneira que o segundo membro tenha um sentido[28]. (1902, p. 36).

Ainda assim, pelo fato de ser possível dar exemplos de funções derivadas que não possuem integral indefinida (e Lebesgue apresenta um método genérico para isso), sua conclusão é de que o problema da procura de primitivas não está completamente resolvido. Ainda dedica mais duas páginas ao problema de encontrar uma função sendo conhecidos seus números derivados, o que considera como uma generalização do problema tratado.

Em sua tese, Lebesgue ainda trata de integrais de funções de várias variáveis, estendendo as definições e resultados para funções somáveis sem muita dificuldade. Nos

---

[28] Nous avons vu que toute intégrale indéfinie était continue. SI maintenat nous considérons cette propriété comme l'une des parties de la definition des integrals indéfinies, nous sommes conduits à dire que:
Une function $f(x)$ définie dans $(\alpha, \beta)$ a dans cet intervalle une intégrale indéfinie $F(x)$, s'il existe une function continue $F(x)$, et une seule à une constant additive près, telle que l on ait:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

pour tous les systems de nombres $a$ et $b$ choisis, entre $\alpha$ et $\beta$, de manière que le second member ait un sens.

capítulos seguintes Lebesgue aplica suas definições a problemas de comprimento de curvas e áreas de superfícies.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com o que expomos no primeiro capítulo, pretendíamos com esse trabalho contribuir com a visão de que a História da Matemática é um campo de pesquisa em Matemática e, por ser deixada em segundo plano em vários cursos, acaba se tornando uma preocupação da Educação Matemática na formação dos futuros pesquisadores. Defendemos a ideia de que um pesquisador em Matemática precisa conhecer a história do que pesquisa.

Sendo um trabalho de História, foi necessário definir que fontes utilizaríamos para escrevê-la, e essas fontes foram as duas publicações que consideramos as mais importantes para traçarmos a origem da Integral de Lebesgue. Isso não significa que não exista outras fontes e que o assunto tenha se esgotado aqui. Ao traçarmos o objetivo deste trabalho, foi necessário levantamento e escolha de material, e o resultado foi um fruto dessas escolhas.

Nosso objetivo aqui foi trazer os principais aspectos da história da integral de Lebesgue. O conceito de medida que ele introduziu e aplicou para definir sua integral é considerado um marco na história da análise. Nos anos seguintes ao da publicação de *Intègrale, Longueur, Aire*, surgiram vários trabalhos importantes com aplicações dessa nova teoria; alguns do próprio Lebesgue juntamente com os de Fatou, Riesz e Fischer (1928, p. 163). Tais trabalhos influenciaram vários campos da Matemática, dentre ele o que hoje é conhecido como Análise Funcional.

Por fim, consideramos que o presente trabalho possa se constituir uma ferramenta a mais no labor que se constitui o ensino de análise. Tanto docentes como estudantes que se sintam interessados em saber como surgiram tais assuntos, e que talvez encontrem dificuldades dado o idioma das fontes originais, podem encontrar aqui um auxílio nesse sentido.

# REFERÊNCIAS


BAIRE, R. **Leçons sur les fonctions discontinues**. Paris: Gauthier-Villars, 1930.

BARONI, R. L. S.; GARCIA, S. C. O. **Aspectos da História da Análise Matemática de Cauchy a Lebesgue**. Rio Claro: Cultura Acadêmica - Editora Unesp, 2014.

BARONI, R. L. S.; NOBRE, S. A pesquisa em história da matemática e suas relações com a educação matemática. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 129-136.

BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. New York: Wiley Classics Library, 1995.

BICUDO, I. Introdução. In: EUCLIDES **Os Elementos**. São Paulo: UNESP, 2009. p. 15-94.

BOREL, E. **Leçons sur la théorie des fonctions**. Paris: Gauthier-Villars, 1898.

BOYER, C. B. **A history of mathematics**. New York: John Wiley & Sons, INC, 1968.

CAUCHY, A. L. **Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique**. Paris: deBure Frères, 1821.

CHENG, S. **A Crash Course on the Lebesgue Integral and Measure Theory**. Disponível em: http://www.gold-saucer.org/math/lebesgue/lebesgue-new.pdf. Acesso em: 15 de setembro de 2016.

EULER, L. **Introductio in analysin infinitorum**. [Lausanne]: Academiae Imperialis Scientarum, 1748.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2011.

FOURIER, J. **Théorie analytique de la chaleur**. Paris: Didot, 1822.

GINZBURG, C. **Mitos, emblemas, sinais:** Morfologia e História. São Paulo: Companhia das Letras., 1989.

HAWKINS, T. **Lebesgue's Theory of Integration - Its Origins and Development**. New York: Chelsea Publishing Company, 1928.

HOARE, G. T. Q.; LORD, N. J. 'Intégrale, longueur, aire' the centenary of the lebesgue integral. **The Mathematical Gazette**, p. 3-27, 2002.

HÖNIG, C. S. **A Integral de Lebesgue e suas Aplicações**. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

JORDAN, M. C. **Cours d'analyse de l'École Polytechnique**. Paris: Gauthier-Villars, 1893.

KARNAL, L.; TATSCH, F. G. A Memória Evanescente. In: PINSKY, C. B.; LUCCA, T. R. D. **O Historiador e suas fontes**. São Paulo: Contexto, 2013. p. 9-27.

LEBESGUE, H. L. Sur une généralisation de l'intégrale définie. **Comptes Rendus**, Paris, 29 abril 1901.

LEBESGUE, H. L. **Intégrale, Longueur, Aire**. Paris: Sciences Mathématiques, Faculté des Sciences de Paris, 1902.

MONNA, A. F. The concept of function in the 19th and 20th centuries, in particular with regard to the discussion between Baire, Borel and Lebesgue. **Archive for History of Exact Sciences**, p. 57-84, 1972.

OTERO-GARCIA, S. C. **Integrale, Longueur, Aire de Henri Lebesgue**. Rio Claro: Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, 2015.