unesp UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Decomposição de Grupos de Dualidade de Poincaré, Obstruções *sing* e Invariantes Cohomológicos

Maria Paula dos Santos Cavalcanti

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

Rua Cristóvão Colombo, 2265
15054-000 - São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (17) 3221-2444
Fax: (17) 3221-2445

Decomposição de Grupos de Dualidade de Poincaré, Obstruções *sing* e Invariantes Cohomológicos

Maria Paula dos Santos Cavalcanti

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti

São José do Rio Preto
2010

Maria Paula dos Santos Cavalcanti

Decomposição de Grupos de Dualidade de Poincaré, Obstruções *sing* e Invariantes Cohomológicos

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

COMISSÃO EXAMINADORA

TITULARES

Orientadora
Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
UNESP - São José do Rio Preto

Primeiro Examinador
Profa. Dra. Denise de Mattos
USP - São Carlos

Segundo Examinador
Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade
UNESP - São José do Rio Preto

SUPLENTES

Prof.Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
UFSCar - São Carlos

Profa.Dra. Luciana de Fátima Martins
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 26 de Fevereiro de 2010.

“Tudo que é reto mente.
Toda verdade é sinuosa.
O próprio tempo é um círculo.”
Friedrich Nietzsche

Aos meus pais,
José Naide e Eleonora,
ofereço.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por tudo que passei, pelo que aprendi ao longo desses anos, por ter me dado força quando pensei em desistir e por todas as pessoas especiais que colocou em minha vida, dentre elas em especial agradeço:

- À minha orientadora Profa. Ermínia, com muito carinho, pela dedicação, carinho e paciência com que me orientou desde a graduação, e sem a qual esse trabalho não teria se realizado.
- À meus amados pais, José Naide e Eleonora, meu querido irmão Genaildo e minhas queridas irmãs Edjane e Vivianne, pelo apoio, presença e alegria em minha vida.
- Aos professores do departamento pela formação.
- À todas as pessoas especiais que passaram pela minha minha ao longo desse período, às que passaram só de passagem e as muitas que ficaram.
- À CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estudar as obstruções "*sing* "que desempenham papel importante nas demonstrações de certos resultados sobre decomposição de grupos que satisfazem certas hipóteses de dualidade apresentados em [16] e [17], em particular, sobre decomposição de um grupo G adaptada a uma família $\mathcal{S}$ de subgrupos de G, com $(G, \mathcal{S})$ um par de dualidade de Poincaré. Alguns invariantes cohomológicos e certos resultados envolvendo tais invariantes, decomposição de grupos e/ou grupos e pares de dualidade são também apresentados.

Palavras-chave: Decomposição de grupos, cohomologia relativa de grupos, obstruções *sing*, grupos e pares de dualidade de Poincaré.

Abstract

The main objective of this work is to study the obstructions "*sing* "which play an important role in demonstrating certain results on the splitting of groups that satisfy certain hypotheses of duality presented in [16] and [17], in particular, the decomposition of a group G adapted to a family $\mathcal{S}$ of subgroups of G with $(G, \mathcal{S})$ a Poincaré duality pair. Some cohomological invariants and certain results involving such invariants, a splitting of groups and/or groups and pairs of duality are also presented.

Keywords: Splitting of groups, relative cohomology of groups, obstructions *sing*, Poincaré duality groups and pairs.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Um grupo G se decompõe sobre um subgrupo S se $G = H *_S K$ (produto livre com subgrupo amalgamado S) com $H \neq S \neq K$ ou $G = H*_{S,\sigma}$, (HNN-grupo). São exemplos de grupos que se decompõem $\mathbb{Z} = \{1\}*_{\{1\},\, id}$, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \mathbb{Z} *_{\{1\}} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}*_{\mathbb{Z},\, id}$.

Uma pergunta interessante é: Quando um grupo se decompõe sobre um subgrupo? Em geral é muito difícil decidir se um grupo G se decompõe sobre um subgrupo S dado, ou mesmo se se decompõem sobre qualquer outro subgrupo. Grupos que se decompõem surgem naturalmente, por exemplo, quando calculamos o grupo fundamental de superfícies compactas, e mais geralmente, de certos CW-complexos ([11]). Vários resultados e pesquisas no sentido de obter classes de grupos que se decompõem sobre um subgrupo tem sido obtidos/desenvolvidas. Há uma forte relação entre decomposição de grupos, teoria de grafos e teoria de ends de grupos e pares de grupos (invariantes cohomológicos). O primeiro resultado de decomposição de grupos envolvendo a teoria clássica de ends de um grupo foi dado por Stallings ([26]). É um resultado sobre decomposição de um grupo sobre um subgrupo finito. Um grupo G é um grupo de dualidade de Poincaré n-dimensional sobre $\mathbb{Z}_2$ ou, simplesmente, um PD^n- grupo se $H^i(G; M) \simeq H_{n-i}(G; M)$, para todo inteiro i, e todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo M. Mais geralmente, um par grupo $(G, \mathcal{S})$, isto é, um par onde G é um grupo e $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in I}$ é uma família de subgrupos de G, é um par de dualidade de Poincaré n-dimensional ou um PD^n-par (sobre $\mathbb{Z}_2$) se $H^i(G; M) \simeq H_{n-i}(G, \mathcal{S}; M)$ e $H^i(G, \mathcal{S}; M) \simeq H_{n-i}(G; M)$ para todo inteiro $i \geq 1$, e todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo M. Considerando G um PD^n-grupo e S um $PD^{(n-1)}$- subgrupo de G, Kropholler e Roller em [16] analisaram quando G se decompõe sobre um subgrupo L que é comensurável com S. Para tanto um $\mathbb{Z}_2G$-módulo foi bastante importante, o $\mathbb{Z}_2G$-módulo $\mathcal{F}_S(G)$ dos subconjuntos S-finitos de G, mais precisamente, $\mathcal{F}_S(G) = \{B \subseteq G;$ existe um subconjunto finito F de G com $B \subseteq F.S\}$. De fato, supondo G e S finitamente gerados e que o grupo de cohomologia $H^1(G; \mathcal{F}_S(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$, os autores provaram que a existência de uma decomposição de G, nas hipóteses mencionadas, depende do anulamento de um elemento (obstrução) denotado por $sing_G(S)$, ou seja, que uma condição necessária e (sob algumas hipóteses) suficiente, para que G admita uma decomposição sobre um subgrupo comensurável com S é que a imagem do único elemento não nulo de $H^1(G;\mathcal{F}_S G)$ pela aplicação restrição $res_S^G : H^1(G;\mathcal{F}_S(G)) \to H^1(S;\mathcal{F}_S(G))$ (denotada por $sing_G(S)$) seja nula.

Baseados nos resultados de Kropholler e Roller [16], particularmente relacionados à obstrução $sing_G(S)$ definida pelos autores, Andrade e Fanti obtiveram alguns resultados sobre decomposição de grupos e o invariante $\tilde{E}(G,S)$, quando G e S satisfazem certas condições de dualidade ([1]). De fato, sob as mesmas hipóteses de dualidade em [16], a existência de decomposição é equivalente a $\tilde{E}(G,S) = 2$. Trabalhando com par grupo $(G,\mathcal{S})$, onde $\mathcal{S} = (S_i)_{i\in I}$ é uma família de subgrupos de G, e hipóteses de dualidade, Kropholler e Roller em [17] apresentaram alguns resultados sobre decomposição de grupos para pares de grupos $(G,\mathcal{S})$, dentre eles, um que estende o resultado anteriormente citado. Para tanto usaram uma obstrução "$sing_{(G,\mathcal{S})}(T)$", que é uma extensão da obstrução $sing_G(S)$ (se consideramos a família vazia $\mathcal{S} = \emptyset$, de subgrupos de G). Mais precisamente, provaram o seguinte resultado:

([17] Teorema A) Sejam $(G,\mathcal{S})$ um PD^n-par , T um subgrupo de G que é um $PD^{(n-1)}$-grupo, e T um subgrupo de G que não é comensurável com nenhum conjugado de S, para todo S em $\mathcal{S}$. Então G admite uma decomposição "adaptada" a $\mathcal{S}$, sobre um subgrupo comensurável com T se, e somente se, $sing_{(G,\mathcal{S})}(T) = 0$.

O objetivo de nosso trabalho é estudar alguns dos resultados de Kropholler-Roller, relativos a decomposição de grupos de dualidade de Poincaré. Em especial definir a obstrução "*sing generalizada*" para pares (uma das principais ferramentas utilizadas nos resultados de Kropholler-Roller), e apresentar alguns resultados de [17] relacionados a tais obstruções. Finalizamos com um resultado para o invariante $E(G,\mathcal{S},\mathcal{F}_T(G))$, definido de uma forma mais geral em [2].

Vale destacar que no estudo da *sing* é importante estudar melhor o homomorfismo "restrição" $res_G^{(G,\mathcal{S})} : H^1(G,\mathcal{S},\mathcal{F}_T(G)) \to H^1(G,\mathcal{F}_T(G))$ e consequentemente a sequência exata longa em cohomologia para o par $(G,\mathcal{S})$ e o homomorfismo conexão.

Descrevemos a seguir, de maneira breve, os tópicos principais de cada capítulo.

No capítulo 1, apresentamos alguns conceitos e resultados básicos de Álgebra Homológica. Para maiores detalhes vide [15] e [22].

No capítulo 2 definimos (co)homologia absoluta e relativa. Para (co)homologia absoluta utilizamos [11]. Enquanto que para (co)homologia relativa, a principal referência é [10]. Um importante resultado demonstrado nesse capítulo, e que foi utilizado na prova de resultados apresentados posteriormente, é o da sequência exata longa em cohomologia (Teorema 2.3.1).

No capítulo 3 definimos grupos e pares de dualidade (n-dimensional), em especial grupos e pares de dualidade de Poincaré, também referidos como PD^n-grupos e PD^n-pares, respectivamente. Pares de dualidade de Poincaré de dimensão 2 podem ser obtidos, por exemplo, se consideramos $G = \pi_1(X)$, onde X é uma superfície fechada orientada de genus ≥ 1 das quais um número finito m de discos abertos são removidos e $S = \pi_1(\partial X)$.

Como já observamos, no estudo das obstruções sing o $\mathbb{Z}_2G$-módulo $\mathcal{F}_T(G)$ desempenha um papel fundamental assim, no capítulo 4, várias propriedades envolvendo tal módulo são apresentadas, dentre elas, que $\mathcal{F}_T(G)$ é um módulo induzido (Lema 4.1.1), que independe da classe de comensurabilidade de S, mais precisamente, que para dois subgrupos S e T de G, $\mathcal{F}_T(G) = \mathcal{F}_S(G)$ se, e somente se S e T são subgrupos comensuráveis (Proposição 4.1.3). Finalizamos o capítulo com uma interessante caracterização de PD^n-pares (Teorema 4.2.2).

No capítulo seguinte apresentamos o conceito de decomposição de grupos, alguns exemplos, e resultados envolvendo os invariantes $e(G)$ e $e(G, S)$ estudados em [25] e [24].

Finalmente, no capítulo 6, definimos as obstruções *sing* utilizadas em [16] e [17] no estudo de decomposição de grupos e/ou pares de dualidade de Poincaré. Um dos principais resultados demonstrados é a Proposição 6.2.3 que é utilizada pelos autores na prova do Teorema A sobre decomposição de um grupo G adaptada a uma família $\mathcal{S}$. Além disso, os invariantes $\widetilde{E}(G, S)$ e $E(G, \mathcal{S}, \mathcal{F}_S(G))$ bem como alguns resultados envolvendo tais invariantes, decomposição de grupos e/ou dualidade são apresentados ([1], [6]).

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Apresentamos aqui alguns tópicos de Álgebra Homológica que são úteis na definição de (co)homologia de grupos e verificação de certas propriedades/resultados. Em particular, apresentamos o anel grupo RG e o $\mathbb{Z}_2G$-módulo $\mathcal{P}(G)$ do conjunto das partes de G, com G um grupo qualquer. Para maiores detalhes sugerimos [15] e [22]. Observamos que em [15], o tratamento apresentado é sobre R-módulo com R anel "comutativo", e o anel $R = RG$ não é comutativo se G não é um grupo abeliano (comutativo). No entanto, em geral resultado similares também são válidos quando R é não comutativo. Já [22] trabalha com R-módulo para R anel não necessariamente comutativo.

1.1 Complexos de Cadeias e Cocadeias

Definição 1.1.1. *Seja R um anel com unidade (não necessariamente comutativo). Uma sequência finita ou infinita*

$$\cdots \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to \cdots$$

de homomorfismos de R-módulos é dita ***semi-exata*** *se, e somente se, em cada módulo (exceto nos extremos), a imagem do homomorfismo de entrada está contida no kernel do homomorfismo de saída, e é dita* ***exata*** *se, e somente se, em cada módulo (exceto nos extremos), a imagem do homomorfismo de entrada for igual a o kernel do homomorfismo de saída.*

Observação 1.1.1. *1. Uma tal sequência é semi-exata se, e somente se, a composição $g \circ f$ de quaisquer dois homomorfismos f e g na sequência é o homomorfismo trivial, isto é, $g \circ f = 0$.*

2. Todo sequência exata de homomorfismos de R-módulos é semi-exata, mas nem toda sequência semi-exata é exata.

Os módulos de uma sequência semi-exata C são usualmente indexados por inteiros na ordem decrescente ou por inteiros na ordem crescente.

Se são usados inteiros na ordem decrescente como índices, a sequência semi-exata C é chamada **complexo de cadeias** (ou *sequências baixas*) e os homomorfismos em C são todos denotados pelo mesmo símbolo ∂. Deste modo, um complexo de cadeias C é da seguinte forma:

$$C : \cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

com $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.

Neste caso, os elementos C_n são chamados cadeias n-dimensionais de C e os homomorfismos ∂ são chamados operadores bordo.

O kernel de ∂_n é denotado por $Z_n(C)$ e é chamado módulo n-dimensional dos ciclos de C. A imagem de ∂_{n+1} é denotada por $B_n(C)$ e é chamada módulo n-dimensional dos bordos de C.

O módulo quociente $\dfrac{Z_n(C)}{B_n(C)} = \dfrac{Ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})}$, denotado por $H_n(C)$, é chamado **módulo de homologia** n-dimensional de C e a coleção $H_*(C) = \{H_n(C)\}$ é chamada **homologia** do complexo de cadeias C.

Quando inteiros na ordem crescente são usados como índices, a sequência semi-exata é chamada **complexo de cocadeias** (ou sequência superior) e os homomorfismos em C são usualmente denotados pelo símbolo δ. Deste modo, um complexo de cocadeias C é da seguinte forma:

$$C : \cdots \xrightarrow{\delta^{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots$$

com $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$.

Neste caso, os termos cocadeia, cociclo e cobordo são usados no lugar de cadeia, ciclo e bordo dos complexos de cadeias. E também, sobrescritos são usados ao invés de subscritos. Finalmente, o módulo quociente $\dfrac{Z^n(C)}{B^n(C)} = \dfrac{Ker(\delta^n)}{Im(\delta^{n-1})}$, denotado por $H^n(C)$, é chamado **módulo de cohomologia** n-dimensional de C e a coleção $H^*(C) = \{H^n(C)\}$ é chamada **cohomologia** do complexo de cocadeias C.

Nos dedicaremos aqui aos complexos de cocadeias pois esses são objetos de maior interesse em nossos estudos.

Observação 1.1.2. *Chamamos de complexo de cocadeias trivial o complexo de cocadeias 0 tal que, para todo* $n \in \mathbb{Z}$, $0^n = \{0\} \equiv 0$ (*módulo trivial*). *Todo complexo de cocadeias trivial é exato e temos que* $H^n(0) = \{0\}$, *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

Consideremos quaisquer dois complexos de cocadeias de R-módulos:

$$C : \cdots \xrightarrow{\delta^{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots$$

$$D : \cdots \xrightarrow{\tilde{\delta}^{n-2}} D^{n-1} \xrightarrow{\tilde{\delta}^{n-1}} D^n \xrightarrow{\tilde{\delta}^n} D^{n+1} \xrightarrow{\tilde{\delta}^{n+1}} \cdots$$

Por simplicidade denotaremos, em geral, tanto as aplicações de C^k em C^{k+1}, bem como as aplicações de D^k em D^{k+1}, simplesmente por δ^k.

Definição 1.1.2. *Uma **aplicação de cocadeias** (ou homomorfismos entre complexos de cocadeias)* $f : C \to D$ *é uma família de homomorfismos* $f = \{f^n : C^n \to D^n; n \in \mathbb{Z}\}$ *de* R*-módulos, indexada por inteiros* $n \in \mathbb{Z}$, *tais que a relação de comutatividade* $\delta^n \circ f^n = f^{n+1} \circ \delta^n$ *(que às vezes referimos simplesmente por dizer que* $\delta \circ f^n = f^{n+1} \circ \delta$*) é verdadeira no retângulo I abaixo:*

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & C^n & \xrightarrow{\delta^n} & C^{n+1} & \xrightarrow{\delta^{n+1}} & \cdots \\
 & & \downarrow_{f^n} & I & \downarrow_{f^{n+1}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & D^n & \xrightarrow{\delta^n} & D^{n+1} & \xrightarrow{\delta^{n+1}} & \cdots
\end{array}$$

para todo inteiro $n \in \mathbb{Z}$.

Proposição 1.1.1. *Seja uma aplicação de cocadeias arbitrária* $f : C \to D$. *O homomorfismo* $f^n : C^n \to D^n$ *leva* $Z^n(C)$ *em* $Z^n(D)$ *e* $B^n(C)$ *em* $B^n(D)$.

Demonstração: Provemos que $f^n(Z^n(C)) \subset Z^n(D)$ e $f^n(B^n(C)) \subset B^n(D)$.

Seja $f^n(x) \in f^n(Z^n(C))$ com $x \in Z^n(C) = Ker(\delta^n)$, ou seja, $\delta^n(x) = 0$. Daí, $\delta^n(f^n(x)) = f^{n+1}(\delta^n(x)) = f^{n+1}(0) = 0$. Portanto, $f^n(x) \in Ker(\delta^n) = Z^n(D)$.

Agora, sejam $B^n(D) = \{\delta^{n-1}(a); a \in D^{n-1}\}$, $B^n(C) = \{\delta^{n-1}(b); b \in C^{n-1}\}$ e $u \in f^n(B^n(C))$, Então, $u = f^n(v)$ tal que $v \in B^n(C)$, isto é $v = \delta^{n-1}(b)$, com $b \in C^{n-1}$. Logo, $u = f^n(v) = f^n(\delta^{n-1}(b)) = (f^n \circ \delta^{n-1})(b) = (\delta^{n-1} \circ f^{n-1})(b) = \delta^{n-1}(f^{n-1}(b)) \in Im(\delta^{n-1})$. Portanto, $u \in B^n(D)$. ■

Definição 1.1.3. (***Homomorfismo induzido em cohomologia***) *Seja* $f : C \to D$ *uma aplicação de cocadeias. Segue da proposição anterior que, para cada* $n \in \mathbb{Z}$, f^n *induz uma aplicação bem definida* $H^n(f) : H^n(C) \to H^n(D)$ *tal que a cada* $\bar{x} = x + B^n(C)$

associa $H^n(f)(\bar{x}) := f^n(x)+B^n(D)$ *que é um homomorfismo. Este homomorfismo* $H^n(f)$ *será referido como homomorfismo induzido n-dimensional de f e é também denotado, às vezes, por* $f^{*,n}$ *ou simplesmente* f^* *sem especificar o nível n.*

Observação 1.1.3. *Um elemento* $x + B^n(C) \in H^n(D)$ *poderá também ser denotado por* $[x]$.

Definição 1.1.4. *O* ***homomorfismo identidade*** $id : C \to C$ *de um complexo de cocadeias* C,

$$C : \cdots \xrightarrow{\delta^{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots$$

é a família $id = \{id^n : C^n \to C^n, n \in \mathbb{Z}\}$ *de homomorfismos identidade* id^n *dos módulos* C^n, *isto é,* $id^n(x) = x$. *Observe que id é uma aplicação de cocadeias, pois* $\delta \circ id^n = id^{n+1} \circ \delta$.

Definição 1.1.5. *Um* ***homomorfismo trivial*** *de um complexo de cocadeias C em um complexo de cocadeias D é o homomorfismo* $h : C \to D$ *tal que* $h^n = 0$ *é o homomorfismo trivial do módulo* C^n *no módulo* D^n *para todo* $n \in \mathbb{Z}$. *(Note que claramente h é aplicação de cocadeias pois* $\delta \circ 0^n = 0^{n+1} \circ \delta$*). Denotaremos* $h = 0$ *o homomorfismo trivial.*

Com isso temos que são válidos os seguintes fatos:

1. Se $id : C \to C$ então $H^n(id) = id_{H^n(C)} : H^n(C) \to H^n(C)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.
2. Se $f : C \to D$ e $g : D \to E$ são homomorfismos de complexos de cocadeias, então $H^n(g \circ f) = H^n(g) \circ H^n(f) : H^n(C) \to H^n(E)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.
3. Se $h = 0 : C \to D$ é o homomorfismo trivial de um complexo de cocadeias C em um complexo de cocadeias D, então $0 = H^n(h) : H^n(C) \to H^n(D)$ é o homomorfismo trivial para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Consideremos agora uma sequência exata curta S de complexos de cocadeias

$$0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$$

isto é, $f : C \to D$ e $g : D \to E$ são homomorfismos tais que, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$0 \to C^n \xrightarrow{f^n} D^n \xrightarrow{g^n} E^n \to 0 \qquad \text{(S)}$$

é uma sequência exata curta de R-módulos.

A partir de (S) queremos construir uma sequência exata longa envolvendo os módulos de cohomologia $H^k(C)$, $H^k(D)$ e $H^k(E)$:

$$\cdots \to H^n(C) \overset{H^n(f)}{\to} H^n(D) \overset{H^n(g)}{\to} H^n(E) \overset{\rho^n}{\to} H^{n+1}(C) \overset{H^{n+1}(f)}{\to} \cdots \qquad (1)$$

Os homomorfismos $H^n(f)$ e $H^n(g)$ já estão definidos, falta exibir os homomorfismos ρ^n, o que será feito mais adiante, e consequentemente provar que (1) é exata quando (S) é exata. Para este fim, temos o seguinte resultado:

Lema 1.1.1. *Se a sequência de complexos (e aplicações) de cocadeias*

$$0 \to C \overset{f}{\to} D \overset{g}{\to} E \to 0 \qquad (S)$$

é exata, então para todo inteiro n, a sequência

$$H^n(C) \overset{H^n(f)}{\to} H^n(D) \overset{H^n(g)}{\to} H^n(E)$$

de R-módulos é exata.

Demonstração: Como $g \circ f = 0$ segue que $H^n(g) \circ H^n(f) = H^n(g \circ f) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e portanto $Im(H^n(f)) \subset Ker(H^n(g))$.

Resta mostrarmos que $Ker(H^n(g)) \subset Im(H^n(f))$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Seja $\alpha \in Ker(H^n(g)) \subset H^n(D)$. Escolha um cociclo z tal que $\alpha = z + B^n(D)$. Como $0 = [H^n(g)](\alpha) = g^n(z) + B^n(E)$, temos que $g^n(z) \in B^n(E) = Im(\delta^{n-1})$. Daí, existe $y \in E^{n-1}$ tal que $\delta^{n-1}(y) = g^n(z)$, onde δ^{n-1} denota o operador cobordo $\delta^{n-1} : E^{n-1} \to E^n$. Sabemos que $g^{n-1} : D^{n-1} \to E^{n-1}$ é um epimorfismo, logo existe $x \in D^{n-1}$ tal que $g^{n-1}(x) = y$. Então $g^n(z - \delta^{n-1}(x)) = g^n(z) - g^n(\delta^{n-1}(x)) = g^n(z) - \delta^{n-1}(g^{n-1}(x)) = g^n(z) - \delta^{n-1}(y) = 0$. Isto implica que $z - \delta^{n-1}(x) \in Ker(g^n) = Im(f^n)$. Daí, existe $w \in C^n$ com $f^n(w) = z - \delta^{n-1}(x)$. Então, $f^{n+1}(\delta^n(w)) = \delta^n(f^n(w)) = \delta^n(z - \delta^{n-1}(x)) = \delta^n(z) - (\delta^n \circ \delta^{n-1})(x) = 0$, pois z é um cociclo e $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$.

Como f^{n+1} é um monomorfismo, segue que $\delta^n(w) = 0$ e assim, $w \in Z^n(C)$. Seja $\beta = w + B^n(C) \in H^n(C)$. Desde que $z \in Z^n(D)$ e $\delta^{n-1}(x) \in B^n(D)$, temos que $f^n(w) + B^n(D) = (z - \delta^{n-1}(x)) + B^n(D) = z + B^n(D)$. Logo, $(H^n(f))(\beta) = f^n(w) + B^n(D) = z + B^n(D) = \alpha$ e assim, $Ker(H^n(g)) \subset Im(H^n(f))$.

Portanto, a sequência é exata. ■

Agora, vamos construir o homomorfismo conexão ρ^n já citado anteriormente.

Construção de $\rho^n : H^n(E) \to H^{n+1}(C)$ (homomorfismo conexão):

Seja $\bar{z} \in H^n(E),\ z \in Z^n(E) \subset E^n$ e considere a seguinte representação:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots \longrightarrow & & C^{n-1} & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & C^n & \xrightarrow{\delta^n} & \exists v \in C^{n+1} & & \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow_{f^{n-1}} & & \downarrow_{f^n} & & \downarrow_{f^{n+1}} & & \\
\cdots \longrightarrow & & D^{n-1} & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & \exists u \in D^n & \xrightarrow{\delta^n} & \delta^n(u) \in D^{n+1} & & \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow_{g^{n-1}} & & \downarrow_{g^n} & & \downarrow_{g^{n+1}} & & \\
\cdots \longrightarrow & & E^{n-1} & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & z \in E^n & \xrightarrow{\delta^n} & E^{n+1} & & \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Passos:

1. Define-se uma aplicação $\phi : Z^n(E) \to H^{n+1}(C)$.

   Dado $[z] \in H^n(E)$, $\underline{z \in Z^n(E)} \subset E^n$, como g^n é sobrejetora, existe $\underline{u \in D^n}$ tal que $\underline{g^n(u) = z}$.

   - Temos que $\delta^n(u) \in Ker(g^{n+1}) = Im(f^{n+1})$, pois $g^{n+1}[\delta^n(u)] = \delta^n[g^n(u)] = \delta^n(z) = 0$.
   - Agora, como $\delta^n(u) \in Im(f^{n+1})$ e f^{n+1} é injetora, então existe um único $\underline{v \in C^{n+1}}$ tal que $\underline{f^{n+1}(v) = \delta^n(u)}$.
   - Afirmação: se $g^n(u) = z$ e $g^n(u') = z$, $f^{n+1}(v) = \delta^n(u)$ e $f^{n+1}(v') = \delta^n(u')$, então $v - v' \in B^{n+1}(C)$, e portanto $v + B^{n+1}(C) = v' + B^{n+1}(C)$.

     De fato, consideremos u, u' e v, v' como acima. Como $g^n(u - u') = g^n(u) - g^n(u') = z - z = 0$, temos que $u - u' \in Ker(g^n) = Im(f^n)$. Daí, existe $y \in C^n$ com $f^n(y) = u - u'$. Então, $f^{n+1}(v - v' - \delta^n(y)) = f^{n+1}(v) - f^{n+1}(v') - f^{n+1}(\delta^n(y)) = \delta^n(u) - \delta^n(u') - \delta^n(f^n(y)) = \delta^n(u) - \delta^n(u') - \delta^n(u - u') = 0$. Visto que f^{n+1} é um monomorfismo, segue que $v - v' = \delta^n(y) \in B^{n+1}(C)$. Logo, $v + B^{n+1}(C) = v' + B^{n+1}(C)$.
   - Assim, fica bem definida uma aplicação $\phi : Z^n(E) \to H^{n+1}(C)$, que associa $z \in Z^n(E)$ a $v + B^{n+1}(C) = \bar{v}$ e ϕ independe do u inicialmente escolhido.

2. Mostra-se que ϕ é homomorfismo.

   Sejam $z, z' \in Z^n(E)$ e $\alpha, \alpha' \in A$. Escolha $u, u' \in D^n$ e $v, v' \in C^{n+1}$ satisfazendo $g^n(u) = z$, $g^n(u') = z'$ e $f^{n+1}(v) = \delta^n(u)$, $f^{n+1}(v') = \delta^n(u')$. Então, $g^n(\alpha u + \alpha' u') = \alpha z + \alpha' z'$, $f^{n+1}(\alpha v + \alpha' v') = \delta^n(\alpha u + \alpha' u')$. Isto implica que $\phi(\alpha z + \alpha' z') = (\alpha v + \alpha' v') + B^{n+1}(C) = \alpha v + B^{n+1}(C) + \alpha' v' + B^{n+1}(C) = \alpha \bar{v} + \alpha' \bar{v'} = \alpha \phi(z) + \alpha' \phi(z')$. Portanto, ϕ é um homomorfismo de módulos.

3. Mostra-se que $B^n(E) \subset Ker(\phi)$.

   Seja $z \in B^n(E)$. Por definição de $B^n(E)$, existe $y \in E^{n-1}$ com $\delta^{n-1}(y) = z$. Como g^{n-1} é epimorfismo, existe $w \in D^{n-1}$ satisfazendo $g^{n-1}(w) = y$.

   Seja $u = \delta^{n-1}(w)$. Então, $g^n(u) = g^n(\delta^{n-1}(w)) = \delta^{n-1}(g^{n-1}(w)) = \delta^{n-1}(y) = z$.

   Por outro lado, $\delta^n(u) = (\delta^n \circ \delta^{n-1})(w) = 0$. Assim, podemos escolher $v = 0 \in C^{n+1}$ de modo que satisfaça $f^{n+1}(v) = f^{n+1}(0) = 0 = \delta^n(u)$.

   Pela definição de ϕ, obtemos $\phi(z) = v + B^{n+1}(C) = 0 + B^{n+1}(C) = \bar{0}$.

   Portanto, $z \in Ker(\phi)$.

4. Finalmente, de 1., 2. e 3., fica bem definido $\rho^n : H^n(E) \to H^{n+1}(C)$, que associa a cada $[z] \in H^n(E)$ a $\phi([z]) = [v] \in H^{n+1}(C)$.

   Pois, se $[z] = [z']$ então $z - z' \in B^n(E)$. Assim, $\phi(z-z') = 0$ e portanto, $\phi(z) = \phi(z')$.

Definição 1.1.6. *O homomorfismo ρ^n acima construído, isto é, $\rho^n : H^n(E) \to H^{n+1}(C)$; $[z] = z + B^n(E) \mapsto \rho^n([z]) = [v] = v + B^{n+1}(C)$ (onde v é um elemento determinado de modo que $f^{n+1}(v) = \delta^n(u)$ e $g^n(u) = z$), é denominado* ***homomorfismo conexão*** *ou* ***homomorfismo conectante****.*

Agora, de posse desses resultados, estamos aptos a demonstrar o seguinte Teorema.

Teorema 1.1.1. *Se a sequência*

$$0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$$

é uma sequência exata curta de complexos de cocadeias, então a sequência longa em cohomologia

$$\cdots \to H^n(C) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(D) \xrightarrow{H^n(g)} H^n(E) \xrightarrow{\rho^n} H^{n+1}(C) \xrightarrow{H^{n+1}(f)} \cdots \qquad (1)$$

é exata.

Demonstração: Pelo Lema 1.1.1, temos que $Im(H^n(f)) = Ker(H^n(g))$, logo, resta provar as seguintes igualdades:

1. $Im(H^n(g)) = Ker(\rho^n)$.

2. $Im(\rho^n) = Ker(H^{n+1}(f))$.

Verifiquemos 1. Estamos interessados na seguinte parte da sequência longa de cohomologia:

$$H^n(D) \overset{H^n(g)}{\to} H^n(E) \overset{\rho^n}{\to} H^{n+1}(C)$$

Seja $\alpha \in Im(H^n(g)) \subset H^n(E)$. Então existe $y \in Z^n(D)$ tal que $\alpha = g^n(y) + B^n(E)$. Seja $z = g^n(y)$ com $y \in Z^n(D)$, isto é, $\delta^n(y) = 0$.

Na definição de ρ^n, podemos escolher $u = y$ e $v = 0 \in C^{n+1}$ satisfazendo $f^{n+1}(v) = 0 = \delta^n(u)$. Segue da definição de $\rho^n : H^n(E) \to H^{n+1}(C)$ que $\rho^n(\alpha) = 0 + B^{n+1}(C) = [0]$ e daí, $\alpha \in Ker(\rho^n)$. Logo, $Im(H^n(g)) \subset Ker(\rho^n)$.

Agora, seja $\alpha = z + B^n(E) \in Ker(\rho^n) \subset H^n(E)$. Pela definição de $\rho^n(\alpha)$, existem $u \in D^n$ e $v \in C^{n+1}$ satisfazendo $g^n(u) = z$ e $f^{n+1}(v) = \delta^n(u)$ tais que $\rho^n(\alpha) = v + B^{n+1}(C)$. Como $\rho^n(\alpha) = 0 \in H^{n+1}(C)$, segue que $v \in B^{n+1}(C)$. Daí, existe $w \in C^n$ com $\delta^n(w) = v$.

Seja $y = u - f^n(w) \in D^n$. Então, $\delta^n(y) = \delta^n(u - f^n(w)) = \delta^n(u) - \delta^n(f^n(w)) = \delta^n(u) - f^{n+1}(\delta^n(w)) = \delta^n(u) - f^{n+1}(v) = 0$. Isto implica que $y \in Z^n(D)$.

Considere $\beta = y + B^n(D)$. Como $g^n(y) = g^n(u - f^n(w)) = g^n(u) - g^n(f^n(w)) = z - 0 = z$, temos que $(H^n(g))(\beta) = g^n(y + B^n(D)) = g^n(y) + B^n(E) = z + B^n(E) = \alpha$ e daí, $\alpha \in Im(H^n(g))$. Logo, $Ker(\rho^n) \subset Im(H^n(g))$.

Portanto, $Im(H^n(g)) = Ker(\rho^n)$.

Verifiquemos agora a segunda igualdade. Nesse caso estamos interessados na seguinte parte da sequência longa de cohomologia

$$H^n(E) \overset{\rho^n}{\to} H^{n+1}(C) \overset{H^{n+1}(f)}{\to} H^{n+1}(D).$$

Seja $\alpha \in Im(\rho^n) \subset H^{n+1}(C)$. Então

existe $\beta \in H^n(E)$ com $\rho^n(\beta) = \alpha$. Escolha um cociclo $z \in Z^n(E)$ tal que $\beta = z + B^n(E)$. Por definição de ρ^n segue que existem $u \in D^n$ e $v \in C^{n+1}$ satisfazendo $g^n(u) = z$ e $f^{n+1}(v) = \delta^n(u) \in B^{n+1}(D)$ e $\alpha = \rho^n(\beta) = \rho^n(z + B^n(E)) = v + B^{n+1}(C)$. Daí, $(H^{n+1}(f))(\alpha) = f^{n+1}(v) + B^{n+1}(D) = [0]$, pois $f^{n+1}(v) \in B^{n+1}(D)$ e assim, $\alpha \in Ker(H^{n+1}(f))$. Logo, $Im(\rho^n) \subset Ker(H^{n+1}(f))$.

Seja agora $\alpha \in Ker(H^{n+1}(f)) \subset H^{n+1}(C)$. Escolha um cociclo $z \in Z^{n+1}(C)$ tal que $\alpha = z + B^{n+1}(C)$. Como $0 = (H^{n+1}(f))(\alpha) = f^{n+1}(z) + B^{n+1}(D)$ segue que $f^{n+1}(z) \in B^{n+1}(D)$ e daí existe $u \in D^n$ satisfazendo $\delta^n(u) = f^{n+1}(z)$.

Seja $y = g^n(u) \in E^n$. Então temos que $\delta^n(y) = \delta^n(g^n(u)) = g^{n+1}(\delta^n(u)) = g^{n+1}(f^{n+1}(z)) = 0$, pois $g^{n+1} \circ f^{n+1} = 0$, visto que a sequência de complexos é exata. Isto implica que $y \in Z^n(E)$.

Seja $\beta = y + B^n(E) \in H^n(E)$. Como $g^n(u) = y$ e $f^{n+1}(z) = \delta^n(u)$, segue da definição de ρ^n que $\rho^n(\beta) = \rho^n(y + B^n(E)) = z + B^{n+1}(C) = \alpha$ e daí, $\alpha \in Im(\rho^n)$. Logo, $Ker(H^{n+1}(f)) \subset Im(\rho^n)$.

Portanto, $Im(\rho^n) = Ker(H^{n+1}(f))$. ■

Corolário 1.1.1. *Se dois dos três complexos de cocadeias C, D e E na sequência exata curta*

$$0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0 \qquad (S)$$

são exatos, então o complexo de cocadeias remanescente também o é.

Corolário 1.1.2. *Se no seguinte diagrama comutativo de homomorfismos de R-módulos todas as três linhas são exatas e todas as três colunas são semi-exatas, então a exatidão de quaisquer duas colunas implica a exatidão da coluna restante.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A_1 & \to & B_1 & \to & C_1 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A_2 & \to & B_2 & \to & C_2 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A_3 & \to & B_3 & \to & C_3 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Observação 1.1.4. *Similarmente define-se aplicação de cadeias e prova-se a existência de uma sequência exata longa em homologia associada a uma sequência exata curta*

$$0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$$

de complexos de cadeias.

Definição 1.1.7. *Dois homomorfismos (ou aplicações de cocadeias) $f, g : C \to D$ são ditos **homotópicos** se, e somente se, existe uma família de homomorfismos ("de grau (-1)") $h = \{h^n : C^n \to D^{n-1}, \forall n \in \mathbb{Z}\}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\delta^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ \delta^n = f^n - g^n : C^n \to D^n$ conforme indica o seguinte diagrama:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\delta^{n-2}} & C^{n-1} & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & C^n & \xrightarrow{\delta^n} & C^{n+1} & \xrightarrow{\delta^{n+1}} & \cdots \\
 & & {\scriptstyle f^{n-1}}\downarrow & {\scriptstyle h^n}\swarrow & {\scriptstyle f^n}\downarrow\downarrow{\scriptstyle g^n} & \swarrow{\scriptstyle h^{n+1}} & \downarrow{\scriptstyle f^{n+1}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\delta^{n-2}} & D^{n-1} & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & D^n & \xrightarrow{\delta^n} & D^{n+1} & \xrightarrow{\delta^{n+1}} & \cdots
\end{array}$$

Definição 1.1.8. *A família h, descrita acima, é chamada uma **homotopia** (ou uma homotopia de cocadeias) entre a aplicação de cocadeias f e a aplicação g. Em símbolos, $h : f \simeq g : C \to D$. Dizemos também que a aplicação de cocadeias f é homotópica a g (ou f e g são homotópicas) e escrevemos simplesmente $f \simeq g$ se existe um homotopia de f para g.*

Proposição 1.1.2. *Se dois homomorfismos $f, g : C \to D$ de complexos de cocadeias são homotópicos, então $H^n(f) = H^n(g) : H^n(C) \to H^n(D)$, para todo inteiro $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Por hipótese, existe $h : f \simeq g : C \to D$, isto é, uma família de homomorfismos $h = \{h^i : C^{i+1} \to D^i\}_i$ tal que $\delta^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ \delta^n = f^n - g^n$.

Provemos que $H^n(f) = H^n(g)$.

Seja $u \in H^n(C)$. Escolha $z \in Z^n(C) \subset C^n$ tal que $u = [z] = z + B^n(C)$. Então $f^n(z) - g^n(z) = \delta^{n-1}(h^n(z)) + h^{n+1}(\delta^n(z)) = \delta^{n-1}(h^n(z))$, uma vez que $\delta^n(z) = 0$. Como $\delta^{n-1}(h^n(z)) \in B^n(D)$, temos que $f^n(z) + B^n(D) = g^n(z) + B^n(D)$, assim $(H^n(f))([z]) = f^n(z) + B^n(D) = g^n(z) + B^n(D) = (H^n(g))([z])$ e portanto, $H^n(f) = H^n(g)$. ■

Definição 1.1.9. (*Equivalência de homotopia e equivalência fraca*)

(i) *Uma aplicação de cocadeias $f : C \to D$ é chamada uma* ***equivalência de homotopia*** *se existe um aplicação de cocadeias $g : D \to C$ tal que $g \circ f \simeq id_C$ e $f \circ g \simeq id_D$. Dizemos que dois complexos de cocadeias C e D são* ***homotopicamente equivalentes*** *se existe uma equivalência de homotopia $f : C \to D$.*

(ii) *Uma aplicação de cocadeias $f : C \to D$ é chamada uma* ***equivalência fraca*** *se $H(f) : H(C) \to H(D)$ é um isomorfismo, isto é, $H^n(f) : H^n(C) \to H^n(D)$ é um isomorfismo, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Proposição 1.1.3. *Toda equivalência de homotopia é uma equivalência fraca. Em outras palavras, se C e D são complexos de cocadeias homotopicamente equivalentes então $H^n(C) \simeq H^n(D)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Se $f : C \to D$ é uma equivalência de homotopia e $g : D \to C$ é tal que $g \circ f \simeq id_C$ e $f \circ g \simeq id_D$ então dos resultados anteriores, obtemos que $H^n(g) \circ H^n(f) = H^n(g \circ f) = H^n(id_C) = id_{H^n(C)}$ e $H^n(f) \circ H^n(g) = H^n(f \circ g) = H^n(id_D) = id_{H^n(D)}$. Assim, $H^n(f)$ é um isomorfismo, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $(H^n(f))^{-1} = H^n(g)$. ■

Observação 1.1.5. *De maneira similar define-se homotopia entre aplicação de cadeias, equivalência de homotopia, equivalência fraca (para aplicações de cadeia) e complexos de cadeia homotopicamente equivalentes.*

1.2 Anel grupo e $\mathcal{R}G$-módulos

Definição 1.2.1. *Sejam $\mathcal{R}$ um anel comutativo com unidade 1, G um grupo, denotado multiplicativamente, com elemento neutro 1_G. Seja $\mathcal{R}G$ o $\mathcal{R}$-módulo livre gerado pelos* *elementos de G. Deste modo um elemento de $\mathcal{R}G$ é expresso por somas* $\sum_{g\in G} r_g g$, *onde* $r_g \in \mathcal{R}$ *e* $r_g = 0$ *para quase todo* $g \in G$, *exceto num número finito.*

Definindo em $\mathcal{R}G$ a multiplicação

$$(\sum_{g\in G} r_g g).(\sum_{h\in G} s_h h) = (\sum_{g,h\in G} r_g s_h gh)$$

e a soma

$$(\sum_{g\in G} r_g g) + (\sum_{h\in G} s_g g) = \sum_{g\in G}(r_g + s_g)g.$$

teremos uma estrutura de anel, o qual tem unidade $1_{\mathcal{R}G} = 1.1_G$ *e é chamado* ***anel grupo*** *de G sobre $\mathcal{R}$.*

Observação 1.2.1. 1. *Se* $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_2$ *então um elemento* $x \in \mathbb{Z}_2G$ *é da seguinte forma*

$$x = \overline{1}g_1 + \cdots + \overline{1}g_k,$$

onde $\overline{1} \in \mathbb{Z}_2$ *e* $g_i \in G, i = 1, \ldots, k$.

Às vezes tal elemento é denotado simplesmente por

$$x = 1g_1 + \cdots + 1g_k, \text{ ou ainda, } x = g_1 + \cdots + g_k.$$

2. *O anel $\mathcal{R}G$ pode não ser comutativo. Isso acontece sempre que G é um grupo não comutativo.*

Definição 1.2.2. *Para qualquer grupo G o homomorfismo* $\epsilon : \mathcal{R}G \to \mathcal{R}$ *tal que* $\epsilon(g) = 1$, *para todo $g \in G$ e estendido por linearidade, ou seja,* $\epsilon(\sum_{g\in G} r_g g) = \sum_{g\in G} r_g \epsilon(g) = \sum_{g\in G} r_g$, *é denominado* ***aplicação aumentação***. *O Kernel de ϵ é chamado de* ***ideal aumentação*** *de $\mathcal{R}G$. Quando* $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_2$ *e* $\epsilon : \mathbb{Z}_2G \to \mathcal{R}$, *denotaremos $Ker(\epsilon)$ por $\mathcal{G}$ (é também comum denotar $Ker(\epsilon)$ por Δ, porém aqui usaremos Δ para indicar o núcleo de uma outra "aplicação aumentação"que definiremos posteriormente).*

Definição 1.2.3. *Sejam G um grupo denotado multiplicativamente e M um conjunto não vazio. Uma ação (à esquerda) de G sobre M (ou uma G-**ação** sobre M) é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \mu : G \times M &\to M \\ (g, m) &\mapsto \mu(g, m) \overset{not.}{=} g.m \end{aligned}$$

satisfazendo:

(*a*) $1.m = m$, *para todo* $m \in M$,

(*b*) $(g_1g_2)m = g_1(g_2m)$, *para todos* $g_1, g_2 \in G$ *e* $m \in M$.

Se na definição acima M tiver uma estrutura de grupo aditivo, para que esta estrutura seja preservada pela G-ação, além das condições (a) e (b) exige-se ainda a seguinte condição:

(c) $g(m_1 + m_2) = gm_1 + gm_2$, para $g \in G$ e $m_1, m_2 \in M$.

Definição 1.2.4. *Quando um grupo G está atuando em um conjunto M dizemos que o conjunto M é um G-**conjunto**.*

Observação 1.2.2. 1. *Podemos definir, de forma equivalente, uma G-ação (à esquerda) sobre M como sendo um homomorfismo*

$$\mu : G \to B_{ij}(M)$$
$$g \mapsto \mu(g) = \mu_g;\ \mu_g(m) = g.m,$$

onde $B_{ij}(M) = \{f : M \to M\ ;\ f$ é uma bijeção $\}$ é o grupo das bijeções, com relação a operação composição.

2. *Analogamente, define-se G-ação à direita sobre M.*

3. *Dada uma G-ação à esquerda sobre M, sempre podemos definir uma G-ação à direita sobre M por $m * g := g^{-1}m$. Assim, todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo à esquerda M é também um $\mathbb{Z}_2G$-módulo à direita. Similarmente, todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo à direita é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo à esquerda.*

Definição 1.2.5. *Dizemos que uma ação de G em M é **livre** se a seguinte condição for verdadeira:*

$$gm = m, \text{ para algum } m \in M \text{ se, e somente se, } g = 1.$$

Definição 1.2.6. *Dizemos que uma G-ação sobre M é **trivial** se:*

$$g.m = m, \text{ para todo } m \in M \text{ e todo } g \in G.$$

Proposição 1.2.1. *Seja G um grupo e M um conjunto não vazio. Então, M é um $\mathcal{R}G$-módulo (à esquerda) se, e somente se, M é um $\mathcal{R}$-módulo (à esquerda) munido de uma ação sobre M (à esquerda) de G sobre o grupo aditivo $(M, +)$.*

Demonstração: Se M é um $\mathcal{R}G$-módulo então M é um $\mathcal{R}$-módulo considerando $rm := (r1_G)m$, e pode-se definir uma G-ação por $g.m := (1_{\mathcal{R}}.g)m$.

Reciprocamente, se M é um $\mathcal{R}$-módulo e existe uma ação de G sobre M então podemos dar a M uma estrutura de $\mathcal{R}G$-módulo da seguinte maneira $(\sum\limits_{g\in G} r_g.g)m := \sum\limits_{g\in G} r_g.(g.m)$.■

Corolário 1.2.1. *M é um $\mathbb{Z}G$-módulo se, e somente se, M é um grupo abeliano munido de uma G-ação.*

Corolário 1.2.2. *M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo se, e somente se, M é um $\mathbb{Z}_2$-módulo (equivalentemente, M é um grupo abeliano em que todo elemento tem ordem 2) munido de uma G-ação.*

Segue dos Corolários anteriores que todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo é um $\mathbb{Z}G$-módulo, mas a recíproca claramente não é verdadeira.

Exemplo 1.2.1. *Seja G um grupo. Então $\mathcal{P}(G)$, o conjunto das partes de G, é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, onde consideraremos $\mathcal{P}(G)$ um grupo abeliano com a operação* ***diferença simétrica****, $A+B := A \triangle B = (A-B)\cup(B-A) = (A\cup B)-(A\cap B)$, e a G-ação natural é dada por*

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{P}(G) &\to \mathcal{P}(G) \\ (g, H) &\mapsto g.H = \{g.x \ ; \ x \in H\}. \end{aligned}$$

Note que todo elemento de $\mathcal{P}(G)$ tem ordem 2 pois $A + A = \emptyset$.

Observação 1.2.3. *Todo $\mathcal{R}$-módulo M pode ser visto como um $\mathcal{R}G$-módulo com a G-ação trivial. Neste caso, dizemos que M é um $\mathcal{R}G$-módulo trivial. Para nós, $M = \mathcal{R}$ será, em geral, considerado um $\mathcal{R}G$-módulo trivial e assim,*

$$(\sum_{g\in G} r_g.g)r := \sum_{g\in G} r_g(g.r) = \sum_{g\in G} r_g.r = \epsilon(\sum_{g\in G} r_g.g)r.$$

Quando $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_2$ esta é a única estrutura de $\mathbb{Z}_2G$-módulo possível, pois $Aut(\mathbb{Z}_2) = \{id\}$.

Definição 1.2.7. *Sejam M um G-conjunto e $m \in M$.*

(*i*) *A G-**órbita** de m, denotada por $G(m)$, é o subconjunto de M dado por:*

$$G(m) := \{g.m; g \in G\}.$$

(*ii*) *O* ***estabilizador*** *de* m *(ou subgrupo de isotropia de* G *em* m*) denotado por* G_m*, é o seguinte subgrupo de* G*:*

$$G_m = \{g \in G \ ; \ gm = m\}.$$

Pode-se verificar o seguinte resultado:

Proposição 1.2.2. *Se* M *é um* G*-conjunto, então as órbitas de* M *formam uma partição de* M*. Assim,* $M = \dot{\bigcup\limits_{m_i \in E}} G(m_i)$*, onde* E *é um conjunto de representantes para as órbitas distintas.*

Considerando X um G-conjunto e $\mathcal{R}X$ o $\mathcal{R}$-módulo livre gerado pelos elementos de X, podemos estender a G-ação sobre X a uma G-ação sobre $\mathcal{R}X$ da seguinte maneira: $g.(\sum r_x x) := \sum r_x(g.x)$, com $g \in G,\ r_x \in \mathcal{R}$ e $x \in X$. Assim, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.2.3. *Sejam* X *um* G*-conjunto livre e* E *um conjunto de representantes para as* G*-órbitas em* X*. Então* $\mathcal{R}X$ *é um* $\mathcal{R}G$*-módulo livre com base* E*.*

Demonstração: Seja $E = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ um conjunto de representantes para as G-órbitas em X. Então $X = \dot{\bigcup\limits_{x_\lambda \in E}} G(x_\lambda)$ e assim, $\mathcal{R}X = \mathcal{R}(\dot{\bigcup\limits_{x_\lambda \in E}} G(x_\lambda)) = \bigoplus\limits_{x_\lambda \in E} \mathcal{R}(G(x_\lambda))$ (vide [11], p.13).

Agora, como a G-ação é livre temos, para cada x_λ , que a aplicação

$$\begin{aligned} f_\lambda : G &\to G(x_\lambda) \\ g &\mapsto f_\lambda(g) = g.x_\lambda \end{aligned}$$

é uma bijeção. De fato, f_λ é claramente sobrejetora, e se tivermos $g_1, g_2 \in G$ tais que $f_\lambda(g_1) = f_\lambda(g_2)$ então, $g_1 x_\lambda = g_2 x_\lambda$, ou seja, $x_\lambda = {g_1}^{-1} g_2 x_\lambda$ e como a G-ação é livre, ${g_1}^{-1} g_2 = 1$ o que leva a $g_1 = g_2$. Logo, f_λ é injetora.

Daí, $\mathcal{R}(G(x_\lambda)) \simeq \mathcal{R}G$. Portanto, $\mathcal{R}X = \bigoplus\limits_{x_\lambda \in E} (\mathcal{R}G)_{x_\lambda}$. ■

Corolário 1.2.3. *Se* H *é um subgrupo de* G *então* $\mathcal{R}G$ *é um* $\mathcal{R}H$*-módulo livre com base num conjunto* E *de representantes para as* H*-órbitas em* G *(que são as classes laterais à esquerda de* H *em* G*), isto é,* $\mathcal{R}G = \bigoplus\limits_{g \in E} (\mathcal{R}H)_g$*.*

Demonstração: Temos que G é um H-conjunto com a ação dada pela multiplicação dos elementos de H por elementos de G (isto é, $h.g := hg$), esta ação é livre (pois $h.g = g \Leftrightarrow h = 1$), e as H-órbitas em G são $\{h.g\ ;\ h \in H\} = H.g$, para todo $g \in G$. Portanto, o resultado segue da proposição anterior. ■

Corolário 1.2.4. (a) *Sejam X um G-conjunto livre e E um conjunto de representantes para as G-órbitas em X. Então $\mathcal{R}X$ é um $\mathcal{R}G$-módulo projetivo com base E.*

(b) *Se H é um subgrupo de G então $\mathcal{R}G$ é um $\mathcal{R}H$-módulo projetivo com base num conjunto E de representantes para as H-órbitas em G.*

1.3 Resoluções Livres e Projetivas

Definição 1.3.1. *Seja M um R-módulo arbitrário (R anel com unidade). Uma **resolução** de M sobre R, ou uma R-resolução de M é uma sequência exata de R-módulos*

$$F : \cdots \to F_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

a qual satisfaz as seguintes condições:

(i) $F_{-1} = M$

(ii) $F_n = 0, \forall n < -1.$

Equivalentemente, uma resolução de M sobre R ou uma R-resolução de M é uma sequência exata de R-módulos

$$F : \cdots \to F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0.$$

Definição 1.3.2. *A aplicação $\epsilon : F_0 \to M$ é chamada de aplicação aumentação. Se cada F_i é livre, dizemos que a resolução é uma **resolução livre**. Se cada C_i é projetivo, dizemos que a resolução é uma **resolução projetiva.***

Notação: $\epsilon : F \to M$ denotará uma resolução de M.

Observação 1.3.1. *1. Se considerarmos o complexos de cadeias*

$$F : \cdots \to F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

podemos ver $\epsilon : F \to M$ *como uma aplicação de cadeias, onde* M *é identificado com o complexo de cadeias*

$$C : \cdots \to 0 \to C_0 = M \to 0 \to \cdots$$

2. *Toda resolução livre é projetiva, pois todo módulo livre é projetivo* (*[11], Lema 7.2, p.22*).

3. *Se existir um inteiro* n *tal que* $F_i = 0$*, para* $i > n$*, dizemos que a resolução tem comprimento no máximo* n*. Neste caso, escrevemos simplesmente*

$$0 \to F_n \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$$

4. *Todo* R*-módulo* M *possui uma resolução livre* (*projetiva*) (*ver [11], I, § 1 e 5, p.10 e 18*).

Exemplo 1.3.1. *Sejam* $\mathcal{R}$ *um anel comutativo com unidade e* G *é cíclico infinito,* $G =< t >\simeq \mathbb{Z}$*. Considere* $M = \mathcal{R}$ *visto como* $\mathcal{R}G$*-módulo trivial. Então a sequência*

$$0 \to \mathcal{R}G \xrightarrow{\partial} \mathcal{R}G \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{R} \to 0$$

tal que ∂ *é a multiplicação por* $(t-1)$ *e* ϵ *é a aplicação aumentação, ou seja,*
$\partial(\sum_i r_i t^i) = (t-1)(\sum_i r_i t^i) = \sum_i (r_i t^{i+1} - r_i t^i) = \sum_i (r_{i-1} - r_i) t^i$
$\epsilon(\sum_i r_i t^i) = \sum_i r_i,$
com $r_i \in R$ *e* $r_i = 0$*, exceto para um número finito de índices* $i \in \mathbb{Z}$*, é uma resolução livre de* $M = \mathcal{R}$ *sobre* $R = \mathcal{R}G$*.*

De fato, sabemos que $\mathcal{R}G$ *é* $\mathcal{R}G$*-módulo livre e temos que*

(I) ∂ *é monomorfismo, pois:*

$\sum_i r_i t^i \in Ker(\partial) \Rightarrow \partial(\sum_i r_i t^i) = 0 \Rightarrow \sum_i (r_{i-1} - r_i) t^i = 0 \Rightarrow r_{i-1} = r_i \Rightarrow r_j = r_i, \forall i, j.$

Como $r_i = 0$*, exceto para um número finito de índices, então* $r_i = 0$*, para todo* i *e daí,* $\sum_i r_i t^i = 0$*.*

(II) $Im(\partial) = Ker(\epsilon)$:

Temos que $(\epsilon \circ \partial)(\sum_i r_i t^i) = \epsilon(\sum_i (r_{i-1} - r_i)t^i) = \sum_i r_{i-1} - r_i = \sum_i r_{i-1} - \sum_i r_i = 0$ *e daí*, $Im(\partial) \subset Ker(\epsilon)$.

Agora, seja $y \in Ker(\epsilon)$. *Então* $y = r_0 t^k + r_1 t^{k+1} + \cdots + r_n t^{k+n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $r_0 \neq 0$ *e* $r_n \neq 0$ (*aqui podemos ter* $r_i = 0$ *se* $1 \leq i \leq n-1$) *e* $\epsilon(y) = 0$. *Assim*, $r_0 + r_1 + \cdots + r_n = 0$, *o que nos leva a* $r_n = -r_0 - r_1 - \cdots - r_{n-1}$. *Daí, existe* $x = (-r_0)t^k + (-r_0 - r_1)t^{k+1} + \cdots + (-r_0 - r_1 - \cdots - r_{n-1})t^{k+(n-1)} \in \mathcal{R}G$ *com* $\partial x = (t-1)x = tx - x = (-r_0)t^{k+1} + (-r_0 - r_1)t^{k+2} + \cdots + (-r_0 - r_1 - \cdots - r_{n-1})t^{k+n} + r_0 t^k + (r_0 + r_1)t^{k+1} + \cdots + (r_0 + r_1 + \cdots + r_{n-1})t^{k+(n-1)} = r_0 t^k + r_1 t^{k+1} + \cdots + r_n t^{k+n} = y$. *Logo*, $Ker(\epsilon) \subset Im(\partial)$.

(III) ϵ *é claramente um epimorfismo, pois* ϵ *é a aplicação aumentação.*

De (I), (II) *e* (III)

concluímos que a sequência dada inicialmente é exata.

Logo,

$$0 \to \mathcal{R}G \xrightarrow{\partial} \mathcal{R}G \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{R} \to 0$$

é uma resolução livre de $\mathcal{R}$ *sobre* $\mathcal{R}G$.

Nosso objetivo agora é mostrar a unicidade de resoluções projetivas (para um módulo M) a menos de equivalência de homotopia.

Lema 1.3.1. *Consideremos o seguinte diagrama de homomorfismos de R-módulos*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{d} & Y & \xrightarrow{c} & Z \\ {\scriptstyle \exists h}\downarrow & & \downarrow_j & & \downarrow_k \\ B & \xrightarrow{f} & C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

onde X é projetivo, o quadrado YZCD é comutativo, a sequência de cima é semi-exata e a sequência de baixo é exata. Então existe um homomorfismo $h : X \to B$ *satisfazendo* $f \circ h = j \circ d$.

Demonstração: Primeiramente, mostremos que $Im(j \circ d) \subset Im(f)$. Para isto, seja $x \in Im(j \circ d)$. Deste modo, temos que existe $y \in X$ tal que $(j \circ d)(y) = x$. Como a sequência de cima é semi-exata, temos que $Im(d) \subset Ker(c)$. Assim, $d(y) \in Ker(c)$ e daí, $c(d(y)) = 0$. Logo, $[k \circ c](d(y)) = k[c(d(y))] = 0$. Pela comutatividade do quadrado YZCD, temos que $k \circ c = g \circ j$. Logo, $(g \circ j)(d(y)) = 0$ e então $g[(j \circ d)(y)] = 0$. Como $x = (j \circ d)(y)$, temos que $g(x) = 0$ e portanto, $x \in Ker(g) = Im(f)$, pois a sequência de baixo é exata, o que implica que $x \in Im(f)$.

Portanto, $Im(j \circ d) \subset Im(f)$.

Considerando então o diagrama abaixo e usando que X é projetivo existira $h : X \to B$ tal que $j \circ d = f \circ h$ e assim obtém-se o resultado.

$$
\begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \exists h \swarrow & \downarrow_{j \circ d} \\
B & \xrightarrow{f} & Im(f).
\end{array}
$$

■

Proposição 1.3.1. *Consideremos X e Y R-módulos, $h : X \to Y$ um R-homomorfismo,*

$C : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow C_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ *e*

$D : \cdots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} D_n \xrightarrow{\partial'_n} D_{n-1} \xrightarrow{\partial'_{n-1}} \cdots \longrightarrow D_0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0,$

resoluções projetivas de X e Y, respectivamente.

Então existe um homomorfismo (aplicação de cadeias) $f = \{f_n : C_n \to D_n; n \in \mathbb{Z}\}$, da sequência C na sequência D tal que $f_{-1} = h$.

Demonstração: Primeiro define-se $f_{-1} = h$. Como, para $n < -1$, $C_n = 0$, tem-se que f_n é unicamente definido, ou seja, $f_n = 0$.

Para o caso $n = 0$, considera-se o seguinte diagrama:

$$
\begin{array}{rcl}
C_0 & \xrightarrow{\partial_0} & X \to 0 \\
\exists f_0 \downarrow & & \downarrow_{h=f_{-1}} \\
D_0 & \xrightarrow{\partial'_0} & Y \to 0
\end{array}
$$

Como C_0 é projetivo e $\partial'_0 : D_0 \to Y$ é um epimorfismo, segue diretamente da definição de módulo projetivo que existe um homomorfismo $f_0 : C_0 \to D_0$ satisfazendo a seguinte relação de comutatividade $\partial'_0 \circ f_0 = h \circ \partial_0 = f_{-1} \circ \partial_0$.

Considere agora $n > 0$ e suponha que $f_m : C_m \to D_m$ já tenha sido construído, para qualquer $m < n$, de tal maneira que o seguinte retângulo

$$
\begin{array}{rcl}
C_m & \xrightarrow{\partial_m} & C_{m-1} \\
f_m \downarrow & & \downarrow_{f_{m-1}} \\
D_m & \xrightarrow{\partial'_m} & D_{m-1}
\end{array}
$$

seja comutativo, para todo inteiro $m < n$. Considere o diagrama de homomorfismos:

$$\begin{array}{ccccc} & C_n \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & C_{n-2} \\ \exists f_n \downarrow & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_{n-2} \\ & D_n \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} & \xrightarrow{\partial'_{n-1}} & D_{n-2} \end{array}$$

De acordo com o lema anterior, existe um homomorfismo $f_n : C_n \to D_n$ satisfazendo $\partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$. Isto completa a construção indutiva da aplicação de cadeia $f : C \to D$, o que conclui a demonstração. ■

Lema 1.3.2. *Consideremos o seguinte diagrama de homomorfismos de R-módulos.*

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \exists k \swarrow & \downarrow h & \\ B \xrightarrow{f} & C & \xrightarrow{g} D \end{array}$$

onde X é projetivo, $g \circ h = 0$ e a sequência $B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D$ é exata. Então existe um homomorfismo $k : X \to B$ satisfazendo $f \circ k = h$.

Demonstração: Tem-se por hipótese, que a sequência $B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D$ é exata. Logo, $Im(f) = Ker(g)$. Como $g \circ h = 0$, temos que $Im(h) \subset Ker(g) = Im(f)$.

Portanto, $Im(h) \subset Im(f)$, e podemos considerar o diagrama

$$\begin{array}{cc} & X \\ & \downarrow h \\ B \xrightarrow{f} & Im(f). \end{array}$$

A existência do homomorfismo $k : X \to B$ é garantida pelo fato do módulo X ser projetivo. Além disso, $f \circ k = h$. ■

Proposição 1.3.2. *Sejam X, Y, h, C e D como na proposição anterior. Então quaisquer dois homomorfismos (aplicações de cadeias)*

$$f = \{f_n : C_n \to D_n; n \in \mathbb{Z}\},$$
$$g = \{g_n : C_n \to D_n; n \in \mathbb{Z}\},$$

da sequência C na sequência D, satisfazendo $f_{-1} = h = g_{-1}$, são homotópicos.

Demonstração: Devemos construir uma homotopia (homotopia de cadeias) $k : f \simeq g : C \to D$. Desta forma, temos que construir, para todo n, um homomorfismo $k = \{k_n : C_n \to D_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{Z}\}$ tal que a relação $\partial'_{n+1} \circ k_n + k_{n-1} \circ \partial_n = f_n - g_n$ é verdadeira no seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "k_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & C_{n-1} \arrow[dl, "k_{n-1}"] \\
D_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & D_n &
\end{tikzcd}$$

para qualquer $n \in \mathbb{Z}$.

Para todo $n < -1$, $k_n = 0$ é o único homomorfismo de C_n em D_{n+1}, já que $C_n = 0$.

Para $n = -1$, temos $k_{-2} = 0$ e $f_n - g_n = f_{-1} - g_{-1} = h - h = 0$. Logo, neste caso, devemos construir um homomorfismo $k_{-1} : C_{-1} = X \to D_0$ satisfazendo $\partial'_0 \circ k_{-1} = 0$. A existência de k_{-1} é imediata, de fato, podemos tomar $k_{-1} = 0$.

Agora, consideremos $n \geq 0$ e suponhamos já termos construído $k_m : C_m \to D_{m+1}$, para todo inteiro $m < n$, e que a relação $\partial'_{m+1} \circ k_m + k_{m-1} \circ \partial_m = f_m - g_m$ é válida para todo inteiro $m < n$.

Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, shift right=2, "f_n"'] \arrow[d, "g_n"] \arrow[d, shift left=2, "j"] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[dl, "k_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "g_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "f_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[dl, "k_{n-2}"] \\
D_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\partial'_n"] & D_{n-1} \arrow[r, "\partial'_{n-1}"] & D_{n-2}
\end{tikzcd}$$

onde j é o homomorfismo $j = f_n - g_n - k_{n-1} \circ \partial_n$.

Compondo j com $\partial'_n : D_n \to D_{n-1}$, obtemos $\partial'_n \circ j : C_n \to D_{n-1}$ e $\partial'_n \circ j = \partial'_n \circ f_n - \partial'_n \circ g_n - \partial'_n \circ k_{n-1} \circ \partial_n = f_{n-1} \circ \partial_n - g_{n-1} \circ \partial_n - (f_{n-1} - g_{n-1} - k_{n-2} \circ \partial_{n-1}) \circ \partial_n = k_{n-2} \circ \partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Como C_n é projetivo e a sequência é exata, segue do lema anterior que existe um homomorfismo $k_n : C_n \to D_{n+1}$ satisfazendo a relação $\partial'_{n+1} \circ k_n = j = f_n - g_n - k_{n-1} \circ \partial_n$. Isto implica que $\partial'_{n+1} \circ k_n + k_{n-1} \circ \partial_n = f_n - g_n$, o que completa a construção indutiva da homotopia $k : f \simeq g : C \to D$.

Portanto, os homomorfismos (aplicações de cadeias) f e g são homotópicos. ∎

Para o próximo resultado, vamos aplicar a Proposição 1.3.1 ao caso especial em que $X = Y = M$ e $h = id_M$ é o homomorfismo idêntico. Neste caso, C e D são duas resoluções projetivas do mesmo módulo M.

Teorema 1.3.1. *Duas resoluções projetivas do mesmo módulo M são homotopicamente equivalentes.*

Demonstração: Considere agora C e D duas resoluções projetivas do mesmo módulo M. Pela Proposição 1.3.1, existe um homomorfismo $f = \{f_n : C_n \to D_n; n \in \mathbb{Z}\}$, da sequência C em D, tal que $f_{-1} = h = id_M$.

Similarmente, existe um homomorfismo $g = \{g_n : D_n \to C_n; n \in \mathbb{Z}\}$ da sequência D em C, tal que $g_{-1} = h = id_M$ e podemos construir o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
C: \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \cdots & \longrightarrow & C_0 & \xrightarrow{\epsilon} & M \longrightarrow 0 \\
& & {\scriptstyle f_{n+1}}\downarrow\uparrow{\scriptstyle g_{n+1}} & & {\scriptstyle f_n}\downarrow\uparrow{\scriptstyle g_n} & & {\scriptstyle f_{n-1}}\downarrow\uparrow{\scriptstyle g_{n-1}} & & & & {\scriptstyle f_0}\downarrow\uparrow{\scriptstyle g_0} & & {\scriptstyle id_M}\downarrow\uparrow{\scriptstyle id_M} \\
D: \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} & \xrightarrow{\partial'_{n-1}} & \cdots & \longrightarrow & D_0 & \xrightarrow{\epsilon'} & M \longrightarrow 0
\end{array}$$

Considere os homomorfismos de C em C dados pela composição $\tilde{g} = g \circ f = \{g_n \circ f_n : C_n \to C_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ e $id_C = \{id_{C_n} : C_n \to C_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Como $\tilde{g}_{-1} = g_{-1} \circ f_{-1} = id_M = id_{C_{-1}}$, segue da Proposição 1.3.2 (caso particular em que as resoluções são iguais) que $g \circ f \simeq id_C$. Analogamente, considerando os homomorfismos de D em D, $f \circ g$ e id_D, concluímos que $f \circ g \simeq id_D$. Assim, f e g são equivalências de homotopia. Portanto, C e D são homotopicamente equivalentes. ∎

Observação 1.3.2. *O teorema anterior nos diz que: "Duas resoluções projetivas de um mesmo módulo M são 'iguais', a menos de uma equivalência de homotopia". Note que a equivalência de homotopia $f : C \to D$, dada na demonstração do teorema, é uma aplicação que preserva aumentação, isto é, satisfaz $\epsilon' \circ f_0 = \epsilon$.*

1.4 Módulo de Homomorfismos

Definição 1.4.1. *Sejam R um anel comutativo com unidade, M e N R-módulos arbitrários e considere o conjunto $Hom_R(M,N) := \{f : M \to N\ ;\ f$ é homomorfismo$\}$. Definindo em $Hom_R(M,N)$ uma adição, $+$, que a cada $f, g \in Hom_R(M,N)$ associa o elemento $f+g$, com $(f+g)(m) = f(m)+g(m)$, para todo $m \in M$ e uma multiplicação, $\cdot$, tal que $\cdot : R \times Hom_R(M,N) \to Hom_R(M,N)$ e associa a cada elemento $(r,f) \in R \times Hom_R(M,N)$ ao elemento $rf \in Hom_R(M,N)$, com $(rf)(m) = rf(m)$ para todo $m \in M$, temos em $Hom_R(M,N)$ uma estrutura de R-módulo, o qual é chamado* ***módulo de homomorfismos*** *do módulo M no módulo N.*

Observação 1.4.1. *Quando R não é comutativo, rf não necessariamente pertence a $Hom_R(M,N)$ para $r \in R$. Nesse caso $Hom_R(M,N)$ é visto apenas como um grupo abeliano, ou $\mathbb{Z}$-módulo, e resultados similares aos dados a $Hom_R(M,N)$ quando $Hom_R(M,N)$ for um R-módulo (R comutativo) são válidos para $Hom_R(M,N)$ visto apenas como $\mathbb{Z}$-módulo.*

Proposição 1.4.1. *Para qualquer R-módulo M, temos $Hom_R(R,M) \overset{\varrho}{\simeq} M$.*

Demonstração: Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \varrho : Hom_R(R, M) &\rightarrow M \\ f &\mapsto \varphi(f) = f(1). \end{aligned}$$

Usando as operações definidas em $Hom_R(R, M)$ verifica-se que ϱ é um homomorfismo (de R-módulos ou simplesmente de $\mathbb{Z}$-módulo se R é não comutativo). Verifiquemos que ϱ é bijetor. De fato, tomando $m \in M$, do fato de R ser um módulo livre gerado por $\{1\}$, segue que existe um único homomorfismo $f \in Hom_R(R, M)$, tal que $\varrho(f) = f(1) = m$. Logo, ϱ é um epimorfismo, da unicidade de f segue que ϱ é um monomorfismo e portanto ϱ é isomorfismo. ∎

Observação 1.4.2. *Observemos que*

$$\begin{aligned} \varphi : M &\rightarrow Hom_R(R, M) \\ m &\mapsto \varphi_m \ ; \ \varphi_m(1) = m \end{aligned}$$

é o homomorfismo inverso de ϱ.

Definição 1.4.2. *Sejam $f : M' \rightarrow M$ e $g : N \rightarrow N'$ homomorfismos de R-módulos e consideremos os módulos (ou grupos abelianos) $Hom_R(M, N)$ e $Hom_R(M', N')$.*

Defina uma aplicação $\upsilon : Hom_R(M, N) \rightarrow Hom_R(M', N')$ tal que $\upsilon(h) := g \circ h \circ f$, para todo $h \in Hom_R(M, N)$.

Essa aplicação é um homomorfismo de $Hom_R(M, N)$ em $Hom_R(M', N')$, o qual será denotado por $Hom(f, g)$.

Observação 1.4.3.

1. *Se f e g, forem os homomorfismos idênticos de M e N, respectivamente, isto é, $f = id_M : M \rightarrow M$ e $g = id_N : N \rightarrow N$, então $Hom(f, g) = id_{Hom_R(M,N)} : Hom_R(M, N) \rightarrow Hom_R(M, N)$.*

2. *Se $f : M' \rightarrow M$, $f' : M'' \rightarrow M'$, $g : N \rightarrow N'$ e $g' : N' \rightarrow N''$ são homomorfismos então $Hom(f \circ f', g' \circ g) = Hom(f', g') \circ Hom(f, g)$.*

3. *Como uma consequência de 1. e 2. temos que se $f : M' \rightarrow M$ e $g : N \rightarrow N'$ são isomorfismos então $Hom(f, g)$ é um isomorfismo.*

Teorema 1.4.1. *([15], Teorema 8.4, p.70) Se* $M = \sum_{\mu \in I} M_\mu$ *e* $N = \prod_{\nu \in J} N_\nu$ *são* R*-módulos para todos* $\mu \in I$ *e* $\nu \in J$*, então* $Hom_R(M, N) \simeq \prod_{(\mu,\nu) \in I \times J} Hom_R(M_\mu, N_\nu)$. ■

Observação 1.4.4. *Em particular temos*

1. *Se* $M = \bigoplus_{\mu \in I} M_\mu$ *e* N *são* R*-módulos para todo* $\mu \in I$*, então*

$$Hom_R(M, N) \simeq \prod_{\mu \in I} Hom_R(M_\mu, N).$$

2. *Se* $N = \prod_{\nu \in I} M_\mu$ *e* M *são* R*-módulos para todo* $\nu \in J$*, então*

$$Hom_R(M, N) \simeq \prod_{\nu \in I} Hom_R(M, N_\nu).$$

Teorema 1.4.2. *([15], Teorema 8.7, p.72, ou [22] Teorema 2.9, p.35) Seja* M *um* R*-módulo arbitrário e*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de R*-módulos, então a sequência*

$$0 \longrightarrow Hom_R(Z, M) \xrightarrow{g^*} Hom_R(Y, M) \xrightarrow{f^*} Hom_R(X, M),$$

onde $f^* = Hom(f, i)$ *e* $g^* = Hom(g, i)$*, com* $i = id_M$*, é também exata.* ■

Definição 1.4.3. *Dizemos que uma sequência exata curta de* R*-módulos*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

cinde se existir uma aplicação $h : Z \to Y$ *tal que* $g \circ h = id_Z$*, ou equivalentemente* $A = Im(f) = Ker(g)$ *é um somando direto de* Y *([22], p.33).*

Teorema 1.4.3. *([15], Teorema 8.8, p.74) Seja* M *um* R*-módulo arbitrário e*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta de R*-módulos que cinde, então a sequência*

$$0 \longrightarrow Hom_R(Z, M) \xrightarrow{g^*} Hom_R(Y, M) \xrightarrow{f^*} Hom_R(X, M) \longrightarrow 0,$$

onde $f^* = Hom(f, i)$ *e* $g^* = Hom(g, i)$*, com* $i = id_M : M \to M$ *o automorfismo idêntico de* M*, é também uma sequência exata curta que cinde.* ■

Teorema 1.4.4. *([15], Teorema 8.9, p.74, ou [22], Teorema 2.9, p.35) Seja* M *um* R*-módulo arbitrário e*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

uma sequência exata de R-módulos, então a sequência

$$0 \longrightarrow Hom_R(M,X) \xrightarrow{g^*} Hom_R(M,Y) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M,Z),$$

onde $f_* = Hom(i,f)$ *e* $g_* = Hom(i,g)$*, com* $i = id_M$*, é também exata.* ■

Teorema 1.4.5. *([15], Teorema 8.10, p.75) Seja M um R-módulo arbitrário e*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta de R-módulos que cinde, então a sequência

$$0 \longrightarrow Hom_R(M,X) \xrightarrow{f_*} Hom_R(M,Y) \xrightarrow{g_*} Hom_R(M,Z) \longrightarrow 0,$$

onde $f_* = Hom(i,f)$ *e* $g_* = Hom(i,g)$*, com* $i = id_M : M \to M$*, é também uma sequência exata curta que cinde.* ■

Teorema 1.4.6. *([15], Teorema 9.4, p.79) Para um R-módulo arbitrário X e seu endomorfismo identidade* $i : X \to X$*, as seguintes afirmações são equivalententes:*

(a) *X é projetivo.*

(b) *Toda sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$$

de R-módulos cinde.

(c) *X é isomorfo a um somando direto de um R-módulo livre.*

(d) *Para todo epimorfismo* $g : A \to B$*,*

$$g_* = Hom(i,g) : Hom(X,A) \to Hom(X,B)$$

é também um epimorfismo.

(e) *Para toda sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0,$$

de R-módulos, a sequência

$$0 \longrightarrow Hom_R(X,A) \xrightarrow{f_*} Hom_R(X,B) \xrightarrow{g_*} Hom_R(X,C) \longrightarrow 0,$$

com $f_* = Hom(i,f)$ *e* $g_* = Hom(i,g)$ *é também uma sequência exata curta.* ■

1.5 Produto Tensorial

Definição 1.5.1. *Sejam R um anel, M um R-módulo à direita, N um R-módulo à esquerda e G um grupo abeliano. Uma **aplicação biaditiva** do produto cartesiano $M \times N$ em G é uma aplicação $\varphi : M \times N \longrightarrow G$, tal que para quaisquer, $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $r \in R$ satisfaz*

1. $\varphi(m + m', n) = \varphi(m, n) + \varphi(m', n)$.
2. $\varphi(m, n + n') = \varphi(m, n) + \varphi(m, n')$.
3. $\varphi(mr, n) = \varphi(m, rn)$.

Definição 1.5.2. *Sejam M, N e R como na definição anterior. O **produto tensorial** de M e N sobre R, o qual é denotado por $M \otimes_R N$, é um grupo abeliano junto com uma aplicação biaditiva, $\otimes : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$, que possui a seguinte propriedade universal: Para qualquer grupo abeliano G e toda aplicação bilinear, $f : M \times N \longrightarrow G$, existe um único homomorfismo de grupos, $\widetilde{f} : M \otimes_R N \longrightarrow G$, tal que $\widetilde{f} \circ \otimes = f$.*

Para cada $m \in M$ e $n \in N$, o elemento $\otimes(m, n)$ será denotado por $m \otimes n$, e devido a linearidade de $\otimes$ temos, para $m_1, m_2 \in M$, $n_1, n_2 \in N$ e $r \in R$:

1. $(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$.
2. $m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$.
3. $mr \otimes n = m \otimes rn$.

Em particular, são válidas as seguintes propriedades:

1. $0 \otimes n = 0 = m \otimes 0$.
2. $(-m) \otimes n = -(m \otimes n) = m \otimes (-n)$.

Para todo $m \in M$ e $n \in N$.

Observação 1.5.1.

1. *Seja $f : R \to S$ um homomorfismo de anéis e M um R-módulo à esquerda. Então identificando $sr := sf(r)$ temos que S é um R-módulo à direita. Portanto podemos produzir o produto tensorial $S \otimes_R M$, o qual é um S-módulo, quando identificamos $a(b \otimes m) := (ab) \otimes m$, para $a, b \in S$.*
2. *Se R é um anel comutativo e M, N R-módulos arbitrários então $M \otimes_R N$ é um R-módulo.*

3. *A estrutura de módulos sobre* $S \otimes_R M$ *e* $M \otimes_R N$ *em 1. e 2. respectivamente, são casos especiais do seguinte: Sejam* M *um* $S-R-$*bimódulo, ou seja, um módulo que tem estrutura de* S*-módulo e* R*-módulo, com* $(sm)r = s(mr)$. *Então* $M \otimes_R N$ *é um* S*-módulo identificando* $s(m \otimes n) := (sm) \otimes n$.

CAPÍTULO 2

GRUPOS DE (CO)HOMOLOGIA ABSOLUTA E RELATIVA

Neste capítulo veremos os conceitos de (co)homologia absoluta e relativa e alguns outros conceitos e resultados importantes para o desenvolvimento desse trabalho, dentre eles a aplicação restrição, o Lema de Shapiro, par grupo $(G, \mathcal{S})$ e sequência exata longa em cohomologia para um par grupo. A referência principal para o estudo de (co)homologia absoluta de grupos é [11]. Para (co)homologia relativa a referência é [10]. Embora a (co)homologia de grupos possa ser definida considerando $\mathcal{R}G$-módulos, com $\mathcal{R}$ um anel qualquer comutativo com unidade, trabalharemos apenas com o anel $\mathcal{R}G$ para $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$ (o anel dos inteiros), ou $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_2$ (o corpo com dois elementos), que denotaremos simplesmente por RG. Assim, sempre que aparecer RG, R estará indicando $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$ (observe no entanto, que R também foi usado no capítulo anterior para indicar um anel qualquer com unidade).

2.1 Grupos de (Co)homologia Absoluta

Sejam G um grupo, M um RG-módulo à esquerda e

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n-1}} F_n \xrightarrow{\partial n} \cdots \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0,$$

uma resolução projetiva de R sobre RG, que denotaremos simplesmente por $\epsilon : F \to R$.

Definição 2.1.1. *O n-ésimo* ***grupo de homologia*** *de G com coeficientes em M, $H_n(G; M)$, é definido por $H_n(F \otimes_{RG} M)$, onde $F \otimes_{RG} M$ é a sequência (complexo de cadeias)*

$$\cdots \xrightarrow{\bar{\partial}_{n+1}} F_n \otimes_{RG} M \xrightarrow{\bar{\partial}_n} F_{n-1} \otimes_{RG} M \xrightarrow{\bar{\partial}_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}_1} F_0 \otimes_{RG} M \longrightarrow 0$$

com $\bar{\partial}_n = \partial_n \otimes id_M$, $n \geq 1$ e $\bar{\partial}_0 = 0$.

O n-ésimo ***grupo de cohomologia*** *de G com coeficientes em M, $H^n(G;M)$, é definido por $H^n(Hom_{RG}(F,M))$, onde $Hom_{RG}(F,M)$ é a sequência (complexo de cocadeias)*

$$0 \longrightarrow Hom_{RG}(F_0,M) \xrightarrow{\delta^0} Hom_{RG}(F_1,M) \xrightarrow{\delta^1} \cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} Hom_{RG}(F_n,M) \xrightarrow{\delta^n} \cdots$$

com $\delta^n(f) = f \circ \partial_{n+1}$ para todo $f \in Hom_{RG}(F_n,M)$.

Observação 2.1.1. *Sabemos que todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo é um $\mathbb{Z}G$-módulo, e pode-se mostrar que se M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo então os grupos de (co)homologia de G (sobre $\mathbb{Z}_2$) com M visto como um $\mathbb{Z}_2G$-módulo e os grupos de (co)homologia de G (sobre $\mathbb{Z}$) com M visto como $\mathbb{Z}G$-módulo são isomorfos. Isto segue do fato que, se $\epsilon : F \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ então $\epsilon' = \epsilon \otimes id : F' = F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2G$, $\gamma : Hom_{\mathbb{Z}G}(F,M) \to Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F',M)$; $f \mapsto \gamma(f)$ tal que $\gamma(f)(x \otimes 1) := f(x)$, e $\chi : F \otimes_{\mathbb{Z}_2G} M \to F' \otimes_{\mathbb{Z}_2G} M$; $x \otimes m \mapsto (x \otimes 1) \otimes m$, são isomorfismos.*

Observação 2.1.2. *Como $T_1 = Hom_{RG}(-,M)$ e $T_2 = (- \otimes_{RG} M)$ são funtores aditivos (contravariante e covariante, respectivamente), eles preservam aplicação de cadeias e segue do Teorema 1.3.1 e da Proposição 1.1.3 que os grupos de cohomologia e homologia independem da resolução projetiva escolhida. Mais precisamente, se $\epsilon : F \to R$ e $\epsilon' : F' \to R$ são resoluções projetivas de R sobre RG, então os complexos de (co)cadeias $T_i(F)$ e $T_i(F')$, $i \in \{1,2\}$ são homotopicamente equivalentes e assim, $H^n(T_1(F)) \simeq H^n(T_1(F'))$ e $H_n(T_2(F)) \simeq H_n(T_2(F'))$, donde segue o resultado.*

Observação 2.1.3. *$H^n(G;M) = 0$ e $H_n(G;M) = 0$, se $n < 0$.*

Definição 2.1.2. *Sejam G um grupo e M um RG-módulo (à esquerda). O* ***grupo de invariantes*** *de M, denotado por M^G, é definido por:*

$$M^G = \{m \in M \ ; \ g.m = m, \ \forall \ g \in G\}.$$

Observação 2.1.4.

1. *Se a ação de G em M é trivial, isto é, $g.m = m$, para qualquer $m \in M$, então $M^G = M$.*

2. *É claro que para todo RG-módulo M, a G-ação sobre M induz a G-ação trivial sobre M^G e assim, M^G é um RG-módulo trivial, e ainda M^G é o maior submódulo de M no qual G atua trivialmente.*

Definição 2.1.3. *O* ***grupo de coinvariantes*** *de M, denotado por M_G, é definido por:*

$$M_G = \frac{M}{\langle g.m - m;\ g \in G \ e \ m \in M \rangle},$$

onde $\langle g.m - m;\ g \in G \ e \ m \in M\rangle$ *é o submódulo de* M *gerado pelos elementos* $g.m - m$, *com* $g \in G$ *e* $m \in M$.

Observação 2.1.5. *Se a ação de* G *em* M *é trivial, então* $M_G = \dfrac{M}{\{0\}} = M$.

Observação 2.1.6. *Claramente se* M *é um* RG*-módulo à esquerda então podemos ver* M *como um* RG*-módulo à direita por considerar* $m.g := g^{-1}.m$.

Definição 2.1.4. (**Ação Diagonal**) *Sejam* M *e* N RG*-módulos (á esquerda). Considerando* M *e* N *como* R*-módulos podemos definir sobre* $Hom_R(M,N)$ *e sobre* $M \otimes_R N$ G*-ações (á esquerda), denominadas ações diagonais, de modo a torná-los* RG*-módulos (á esquerda). Essas ações, as quais são induzidas da ação de* G *sobre* M *e* N, *são definidas da seguinte forma:*

$$\begin{array}{rcl} G \times Hom_R(M,N) & \to & Hom_R(M,N) \\ (g,f) & \mapsto & g.f \ ; \ (g.f)(m) = g.f(g^{-1}.m), \forall m \in M, \\ G \times (M \otimes_R N) & \to & M \otimes_R N \\ (g, m \otimes n) & \mapsto & g.(m \otimes n) := g.m \otimes g.n. \end{array}$$

Proposição 2.1.1. $(Hom_R(M,N))^G = Hom_{RG}(M,N)$.

Demonstração: Sejam $g \in G$ e $f \in Hom_R(M,N)$. Temos que

$$\begin{array}{rcl} g.f = f & \Leftrightarrow & (g.f)(m) = f(m),\ \forall\ m \in M \\ & \Leftrightarrow & g.f(g^{-1}.m) = f(m),\ \forall\ m \in M \\ & \Leftrightarrow & g.f(m') = f(g.m'),\ \forall\ m' \in M\ (m' = g^{-1}.m). \end{array}$$

Logo, $(Hom_R(M,N))^G = \{f \in Hom_R(M,N)\ ;\ g.f(m) = f(g.m)\} = Hom_{RG}(M,N)$. ∎

Corolário 2.1.1. *Se* R *é visto como* RG*-módulo trivial (à esquerda) então* $Hom_{RG}(R,M) = (Hom_R(R,M))^G \simeq M^G$ *como grupos (e como* RG*-módulos triviais).* ∎

Proposição 2.1.2. *Se* M *é um* RG*-módulo então* $H^0(G;M) \simeq M^G$ *e* $H_0(G;M) \simeq M_G$.

Demonstração: Seja

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n-1}} F_n \xrightarrow{\partial n} \cdots \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de R sobre RG.

Pelo Teorema 1.4.2 o funtor $Hom_{RG}(-, M)$ é exato à esquerda, e deste modo segue que a sequência

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow Hom_{RG}(R, M) & \xrightarrow{\epsilon^*} & Hom_{RG}(F_0, M) & \xrightarrow{\delta^0} & Hom_{RG}(F_1, M) & \xrightarrow{\delta^1} & \cdots \\ & & \uparrow_{\delta^{-1}} & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

é exata à esquerda, logo ϵ^* é monomorfismo e $Im(\epsilon^*) = Ker(\delta^0)$.

Usando que $M \overset{\varphi}{\simeq} Hom_R(R, M)$ (ver Proposição 1.4.1) e que ϵ^* é injetora, obtemos $M^G \simeq (Hom_R(R, M))^G = Hom_{RG}(R, M) \overset{\epsilon^*}{\simeq} Im(\epsilon^*) = Ker(\delta^0) = \dfrac{Ker(\delta^0)}{Im(\delta^{-1})} = H^0(G; M)$.

O isomorfismo $M^G \overset{\alpha}{\simeq} H^0(G; M)$ é dado explicitamente por

$$\begin{aligned} \alpha : M^G &\rightarrow H^0(G; M) \\ m &\mapsto \epsilon(\varphi_m) = \varphi_m \circ \epsilon \end{aligned}$$

onde $\varphi_m : R \rightarrow M$ é tal que $\varphi_m(1) = m$, sendo 1 a unidade do anel R.

Seu inverso β é dado por

$$\begin{aligned} \beta : H^0(G; M) = Im(\epsilon^*) &\rightarrow M^G \\ \epsilon^*(f) &\mapsto f(1). \end{aligned}$$

O resultado para homologia é obtido de forma similar usando o fato de o funtor $- \otimes_{RG} M$ ser exato à direita (ver [11], III, Proposição 6.1, p.71). ∎

Corolário 2.1.2. *Se M é um RG-módulo trivial então $H^0(G; M) \simeq M$ e $H_0(G; M) \simeq M$.*

∎

Exemplo 2.1.1. *Apresentamos a seguir os grupos de (co)homologia de $G =< t >\simeq \mathbb{Z}$ para alguns módulos particulares.*

(i) Se M é um RG-módulo então $H^0(G; M) = M^G = H_1(G; M)$, $H_0(G; M) = M_G = H^1(G; M)$ e $H^i(G; M) = 0 = H_i(G; M)$, para $i \geq 2$. Em particular, se M é um

RG-módulo trivial, $H^0(G;M) = H^1(G;M) = H_0(G;M) = H_1(G;M) = M$*. Isto é facilmente obtido usando a definição de (co)homologia e a resolução projetiva*

$$0 \to RG \stackrel{\partial = t-1}{\to} RG \stackrel{\epsilon}{\to} R \to 0$$

de $G \simeq \mathbb{Z}$ *sobre RG (vide Exemplo 1.3.1).*

(*ii*) *Seja* $M = \mathbb{Z}G$ *visto como* $\mathbb{Z}G$*-módulo com a G-ação natural:* $t^k.(rt^{k'}) := rt^{k+k'}$, *para todos* $t^k,\ t^{k'} \in G$ *e* $r \in R$.

Então $H^0(G;\mathbb{Z}G) \simeq (\mathbb{Z}G)^G \simeq 0$ *(pois* $t^k.t^{k'} \neq t^k$ *se* $t^k \neq 1$*).*

Sabemos por (i) que $H^1(G;\mathbb{Z}G) \simeq (\mathbb{Z}G)_G$. *Denotemos por* $I = \langle t^k.z - z;\ t^k \in G,\ z \in \mathbb{Z}G\rangle$ *e* $\overline{x} = x + I \in \dfrac{\mathbb{Z}G}{I} = (\mathbb{Z}G)_G$.

Consideremos $y = t^k \in \mathbb{Z}G$ *com* $k > 0$. *Como* $t^k - 1 = (t-1)(t^{k-1} + \cdots + 1) \in I$, *segue que* $\overline{t^k - 1} = \overline{0}$, *e assim* $\overline{y} = \overline{t^k} = \overline{1}$ *em* $(\mathbb{Z}G)_G$.

Agora, se $y = t^{-k} \in \mathbb{Z}G$, *com* $k > 0$, *também* $\overline{t^{-k}} = \overline{1}$, *pois* $t^{-k} = (1-t^k)t^{-k} + 1 \in I$ *e* $\overline{1 - t^k} = \overline{0}$.

Assim, para todo $x \in \mathbb{Z}G$, $x = r_0t^k + r_1t^{k+1} + \cdots + r_nt^{k+n}$, *com* $k \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ *e* $r_i \in \mathbb{Z}$, *temos* $\overline{x} = \overline{(r_0 + r_1 + \cdots + r_n)} = r.\overline{1}$, *onde* $r = r_0 + r_1 + \cdots + r_n \in \mathbb{Z}$. *Daí,* $H^1(G;\mathbb{Z}G) \simeq \mathbb{Z}$.

Logo, $H^i(G;\mathbb{Z}G) \simeq \begin{cases} 0, & i = 0 \\ \mathbb{Z}, & i = 1 \\ 0, & i \geq 2 \end{cases}.$

2.1.1 Restrição e (Co)extensão de Escalares

Consideremos A, B anéis e $k : A \to B$ um homomorfismo de anéis.

Se M é um B-módulo (à esquerda) sempre podemos ver M como um A-módulo (à esquerda) definindo em M a A-multiplicação:

$$\begin{aligned} &A \times M \to M \\ &(a, m) \mapsto a.m := k(a).m \end{aligned}$$

Neste caso, M é dito ser um A-módulo por **restrição de escalares** (via k) e é denotado por $Res_A^B M$.

Considere agora M um A-módulo (à esquerda), através de um homomorfismo $k : A \to B$. Iremos obter, a partir de M, os B-módulos (à esquerda) $B \otimes_A M$ e $Hom_A(B, M)$.

1. No primeiro caso, podemos ver B como um A-módulo (à direita), por restrição de escalares, através da ação:

$$\begin{array}{rcl} \tau : B \times A & \rightarrow & B \\ (b,a) & \mapsto & b.a = bk(a) \end{array}$$

onde $bk(a)$ é a multiplicação do anel.

Assim podemos considerar o produto tensorial $B \otimes_A M$.

Nosso objetivo é definir em $B \otimes_A M$ uma B-ação (à esquerda) para que este se torne um B-módulo.

Definimos, para isso

$$\begin{array}{rcl} \psi : B \times (B \otimes_A M) & \rightarrow & B \otimes_A M \\ (b, b' \otimes m) & \mapsto & b.(b' \otimes m) := bb' \otimes m. \end{array}$$

Pode-se provar que ψ está bem definida e é uma B-ação.

O B-módulo (à esquerda) $B \otimes_A M$ é dito ser obtido de M por **extensão de escalares** de A para B (via k).

2. Agora, se M é um A-módulo (à esquerda), podemos obter um B-módulo (à esquerda), $Hom_A(B, M)$, bastante relacionado com M, da seguinte maneira:

Por restrição, podemos ver B como um A-módulo (à esquerda)

$$\begin{array}{rcl} A \times B & \rightarrow & B \\ (a,b) & \mapsto & a.b := k(a).b \end{array}$$

e assim, faz sentido considerar $Hom_A(B, M)$.

Pode-se mostrar que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} A \times Hom_A(B, M) & \rightarrow & Hom_A(B, M) \\ (b, f) & \mapsto & bf;\ (bf)(b') := f(b'b) \end{array}$$

está bem definida e é uma B-multiplicação.

O B-módulo $Hom_A(B, M)$ é dito ser obtido de M por **coextensão de escalares** de A para B (via k).

Proposição 2.1.3. *([11], III, §3, p.64) Sejam $k : A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis,*

N um B-módulo (à esquerda) e M um A-módulo (à esquerda) então $Hom_A(N,M) \simeq Hom_B(N, Hom_A(B,M))$ e $Hom_A(M,N) \simeq Hom_B(B \otimes_A M, N)$, como grupos. ■

2.1.2 Módulos Induzidos e Módulos Coinduzidos

Considere agora um caso particular da construção anterior, tomando $A = RH$ e $B = RG$, com G um grupo, H um subgrupo de G, e o homomorfismo de anéis $\tilde{\alpha} : RH \to RG$ induzido da inclusão $\alpha : H \to G$.

Se M é um RG-módulo, podemos ver M como um RH-módulo por restrição de escalares (via $\tilde{\alpha}$). O RH-módulo M assim obtido é usualmente denotado por $Res_H^G M$, ou simplesmente, por M caso não haja confusão.

Seja M um RH-módulo. O RG-módulo obtido de M por extensão de escalares, $RG \otimes_{RH} M$, será denotado por $Ind_H^G M$, e neste caso, a extensão de escalares é chamada **indução**, e a ação é dada por:

$$\begin{array}{rcl} G \times Ind_H^G M & \to & Ind_H^G M \\ (g, g' \otimes m) & \mapsto & (gg') \otimes m. \end{array}$$

Da mesma forma, considerando M um RH-módulo, o RG-módulo obtido de M por coextensão de escalares, $Hom_{RH}(RG, M)$, será denotado por $Coind_H^G M$.

A coextensão de escalares, nesse caso, é chamada **coindução**.

Aqui a G-ação é dada por:

$$\begin{array}{rcl} G \times Coind_H^G M & \to & Coind_H^G M \\ (g, f) & \mapsto & g.f \ ; \ (g.f)(g') = f(g'.g). \end{array}$$

Observação 2.1.7. *Se $H = \{1\}$, temos que $RH \simeq R$. Deste modo $Ind_{\{1\}}^G M = RG \otimes_R M$ e $Coind_{\{1\}}^G M = Hom_R(RG, M)$. Estes RG-módulos são chamados **módulo induzido** e **módulo coinduzido**, respectivamente.*

Proposição 2.1.4. ([11], p. 70) *Sejam G um grupo, H um subgrupo de G, M um RH-módulo e E um conjunto de representantes para as classes laterais à esquerda de H em G. Então:*

1. *O RG-módulo $Ind_H^G M$ contém M como RH-submódulo e é a soma direta de transformadas gM, onde g varia em E, ou seja,*
$$Ind_H^G M = \bigoplus_{g \in E} gM.$$

2. *O RG-módulo $Coind_H^G M$ admite uma decomposição em produto direto, ou seja, existe uma família de sobrejeções $\pi_g : Coind_H^G M \to gM$, $g \in E$, tal que a aplicação correspondente $u : Coind_H^G M \to \prod_{g \in E} gM$ é um isomorfismo.* ■

Proposição 2.1.5. *Seja M um RG-módulo. Então temos os seguintes isomorfismos de RG-módulos:*

1. *$Ind_H^G M \simeq R(G/H) \otimes_R M$.*
2. *$Coind_H^G M \simeq Hom_R(R(G/H), M)$,*

onde ação de G no produto tensorial e no Hom é a diagonal, e no primeiro membro M é visto como um RH-módulo por restrição de escalares.

Demonstração:

1. Definimos os seguintes homomorfismos de grupos:

$$\begin{aligned} \varphi : RG \otimes_{RH} M &\to R(G/H) \otimes_R M \\ g \otimes m &\mapsto \bar{g} \otimes gm \\ \psi : R(G/H) \otimes_R M &\to RG \otimes_{RH} M \\ \bar{g} \otimes m &\mapsto g \otimes g^{-1}m, \end{aligned}$$

onde $\bar{g}$ indica a classe gH.

A partir disso, mostra-se que φ é o inverso de ψ, e além disso, que $g.\psi(\bar{g} \otimes m) = \psi(g.(\bar{g} \otimes m))$.

2. Nesse caso, são definidos os homomorfismos:

$$\begin{aligned} \phi : Hom_{RH}(RG, M) &\to Hom_R(R(G/H), M) \\ f &\mapsto \phi(f) \ ; \ \phi(f)(gH) := gf(g^{-1}), \\ \gamma : Hom_R(R(G/H), M) &\to Hom_{RH}(RG, M) \\ f &\mapsto \gamma(f) \ ; \ \gamma(f)(g) = gf(g^{-1}H). \end{aligned}$$

Mostra-se que ϕ é um homomorfismo de RG-módulos e γ seu inverso. ■

Corolário 2.1.3. *$Ind_H^G R \simeq R(G/H)$ como RG-módulos.* ■

Proposição 2.1.6. *([11], III.5, Proposição 5.9, p.70) Se $[G:H]<\infty$ então $Ind_H^G M \simeq Coind_H^G M$, como RG-módulos.* ■

Proposição 2.1.7. *([11], Exercício 4, p.71) Se $[G:H]=\infty$ então $(Ind_H^G)^G = 0$, para qualquer RH-módulo M.* ■

2.2 H^* como funtor de duas variáveis

Os tópicos desenvolvidos aqui são válidos também para $\mathbb{Z}G$-módulos. De fato, poderíamos considerar RG-módulos, onde R é um anel comutativo com unidade. No entanto, nos restringiremos apenas ao caso de maior interesse, a saber, $\mathbb{Z}_2G$-módulos.

Vamos considerar pares (G,M) e (G',M') com G, G' grupos, M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo e M' um $\mathbb{Z}_2G'$-módulo.

Uma *aplicação* de (G,M) em (G',M') é um par (α,φ) satisfazendo:

(i) $\alpha : G \to G'$ um homomorfismo de grupos.

(ii) $\varphi : M' \to M$ um homomorfismo de grupos abelianos tal que $\varphi(\alpha(g).m') = g.\varphi(m'), \forall\, g \in G$ e $\forall\, m' \in M'$, isto é, φ é uma aplicação de $\mathbb{Z}_2G$-módulos considerando M' como $\mathbb{Z}_2G$-módulo por restrição de escalares via α : $g * m' = \alpha(g).m'$, $\forall\, m' \in M'$.

Se α e φ são isomorfismos, dizemos que (G,M) e (G',M') são isomorfos e denotamos $(G,M) \simeq (G',M')$.

Aplicação Induzida em Cohomologia e $H^*(-;-)$ como funtor

Seja C a categoria cujos os objetos são pares (G,M), com G um grupo e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, e os morfismos são aplicações (α,φ) de (G,M) em (G',M') como acima. Dada uma aplicação $(\alpha,\varphi) : (G,M) \to (G',M')$, consideremos $\epsilon : F \to \mathbb{Z}_2$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2G$ e $\epsilon' : F' \to \mathbb{Z}_2$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2G'$.

Temos que $\epsilon' : F' \to \mathbb{Z}_2$ também é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2G$ (via α), pois cada F'_n pode ser considerado um $\mathbb{Z}_2G$-módulo com a G-ação

$$\begin{array}{rcl} * : G \times F'_n & \to & F'_n \\ (g,y) & \mapsto & g * y := \alpha(g).y. \end{array}$$

Isto é, F'_n é visto como $\mathbb{Z}_2G$-módulo por restrição de escalares considerando o homomorfismo (que também denotaremos por α) $\alpha : \mathbb{Z}_2G \to \mathbb{Z}_2G'$ tal que associa a cada $g \in \mathbb{Z}_2G$

o elemento $\alpha(g)$ e estendido linearmente. Daí, pela Proposição 1.3.1 existe uma aplicação $\tau : F \to F'$, única a menos de homotopia. Temos que, $\tau(g.x) = g.\tau(x)$, $\forall\, g \in G$ e $\forall\, x \in F$ (pois τ é uma aplicação de $\mathbb{Z}_2G$-módulos).

Assim, podemos considerar a aplicação

$$\begin{array}{rcl} Hom(\tau,\varphi) : Hom_{\mathbb{Z}_2G'}(F',M') & \to & Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F,M) \\ f & \mapsto & \varphi \circ f \circ \tau \end{array}$$

a qual é uma aplicação de cadeias que induz uma aplicação bem definida, que vamos denotar por $(\alpha,\varphi)^*$,

$$\begin{array}{rcl} (\alpha,\varphi)^* = (Hom(\tau,\varphi))^* : H^*(G';M') & \to & H^*(G;M) \\ [f] & \mapsto & [\varphi \circ f \circ \tau]. \end{array}$$

Em particular, considerando $G = G'$, $\alpha = id_G : G \to G$ e $\varphi : M' \to M$ obtemos

$$\begin{array}{rcl} (id_G,\varphi)^* : H^*(G;M') & \to & H^*(G;M) \\ [f] & \mapsto & [\varphi \circ f]. \end{array}$$

Ainda se considerarmos $\alpha : G \to G'$ e $\varphi = id_M : M \to M$, temos

$$\begin{array}{rcl} (\alpha,id_M)^* : H^*(G';M) & \to & H^*(G;M) \\ [f] & \mapsto & [f \circ \tau]. \end{array}$$

Por simplicidade de notação, estamos usando o mesmo símbolo [ ] para representar classes em grupos diferentes.

A aplicação induzida em cohomologia $(\alpha,\varphi)^*$ satisfaz as seguintes propriedades:

(a) Se $\alpha = id_G : G \to G$ e $\varphi = id_M : M \to M$ então $(\alpha,\varphi)^* : id_{H^*(G,M)}$

(b) Dadas duas aplicações de pares
$(\alpha,\varphi) : (G,M) \to (G',M')$ e $(\alpha',\varphi') : (G',M') \to (G'',M'')$, com $G \xrightarrow{\alpha} G' \xrightarrow{\alpha'} G''$ e $M'' \xrightarrow{\varphi'} M' \xrightarrow{\varphi} M$, tem-se:
$(\alpha,\varphi)^* \circ (\alpha',\varphi')^* = (\alpha' \circ \alpha, \varphi \circ \varphi')^* \overset{not.}{=} ((\alpha',\varphi') \circ (\alpha,\varphi))^*$.

Deste modo $H^*(-;-)$ é um funtor contravariante na categoria C, $H^*(G;-)$ é um funtor covariante do módulo coeficiente e $H^*(-;M)$ é um funtor contravariante.

Notações especiais:

1. $\alpha^* = (\alpha, id_M)^*$.

2. $(id_G, \varphi)^* \overset{not.}{=} H^*(G; \varphi)$ ou simplesmente φ^* (quando não houver confusão).

Proposição 2.2.1. *Se os pares (G, M) e (G', M') são isomorfos, isto é, $(G, M) \simeq (G', M')$ então $H^*(G; M) \simeq H^*(G'; M')$.*

Demonstração: Por hipótese, $(G, M) \simeq (G', M')$, ou seja, existem isomorfismos $\alpha : G \to G'$ e $\varphi : M' \to M$. Sejam $\alpha^{-1} : G' \to G$ e $\varphi^{-1} : M \to M'$ os homomorfismos inversos de α e φ, respectivamente.

Consideremos $(\alpha, \varphi)^* : H^*(G'; M') \to H^*(G; M)$. Como $(\alpha, \varphi)^* \circ (\alpha^{-1}, \varphi^{-1})^* = (\alpha^{-1} \circ \alpha, \varphi \circ \varphi^{-1})^* = (id_G, id_M)^* = id_{H^*(G;M)}$ e $(\alpha^{-1}, \varphi^{-1})^* \circ (\alpha, \varphi)^* = (\alpha \circ \beta^{-1}, \varphi^{-1} \circ \varphi)^* = (id_{G'}, id_{M'})^* = id_{H^*(G';M')}$ segue que $(\alpha^{-1}, \varphi^{-1})^*$ é a aplicação inversa de $(\alpha, \varphi)^*$.

Logo, $H^*(G; M) \simeq H^*(G'; M')$. ∎

Corolário 2.2.1. *Se M e M' são isomorfos como $\mathbb{Z}_2G$-módulos então $H^*(G; M) \simeq H^*(G; M')$.*

Demonstração: Segue da proposição anterior, usando o fato de que $id_G : G \to G$ é um isomorfismo. ∎

Uma sequência exata curta de $\mathbb{Z}_2G$-módulos sempre induz uma sequência exata longa em homologia e cohomologia. Enunciaremos aqui apenas o resultado de interesse para nós, que é para cohomologia (ver [11], p.71).

Proposição 2.2.2. *([11], III, Proposição 6.1 (ii) p.71) Seja $0 \to M' \xrightarrow{\varphi'} M \xrightarrow{\varphi''} M'' \to 0$ uma seqüência exata de $\mathbb{Z}_2G$-módulos. Então, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ existe uma aplicação natural $\delta^n : H^n(G, M'') \to H^{n+1}(G, M')$ tal que a seqüência*

$$0 \longrightarrow H^0(G, M') \xrightarrow{(\varphi')^0} H^0(G, M) \xrightarrow{(\varphi'')^0} H^0(G, M'') \xrightarrow{\delta^0} H^1(G, M') \xrightarrow{(\varphi')^1} H^1(G, M) \longrightarrow \cdots$$

é exata com as aplicações $(\varphi')^n$ e $(\varphi'')^n$ as induzidas em cohomologia, ou seja, $(\varphi')^n = H^n(G, \varphi')$ e $(\varphi'')^n = H^n(G, \varphi'')$. A naturalidade do homomorfismo conexão significa que para qualquer diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

com linhas exatas, o quadrado

$$\begin{array}{ccc} H^n(G; M'') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(G; M') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(G; N'') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(G; N') \end{array}$$

é comutativo. ∎

2.2.1 Aplicação Restrição

Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Vimos que podemos ver M como um $\mathbb{Z}_2H$-módulo por restrição de escalares que denotamos por $res^G_H M$.

Sejam $\epsilon : F \to R$ e $\epsilon' : F' \to R$ resoluções projetivas de $\mathbb{Z}_2H$ e $\mathbb{Z}G$, respectivamente. Considerando os pares $(H, res^G_H M)$ e (G, M), e a aplicação (α, id_M), onde $\alpha : H \to G$ e $id_M : M \to res^G_H M = M$ (como conjunto) é a aplicação identidade, obtemos a seguinte aplicação induzida em cohomologia:

$$\begin{array}{rcl} res^G_{H,M} \overset{not.}{=} (\alpha, id_M)^* : H^*(G; M) & \to & H^*(H; M) = H^*(H, Res^G_H M) \\ [f] & \mapsto & [id \circ f \circ \tau] \end{array}$$

Obviamente, $\epsilon' : F' \to R$ também é uma resolução projetiva de R sobre RH e como os grupos de cohomologia independem da resolução, podemos tomar $F = F'$ e consequentemente, $\tau : F \mapsto F'$ como sendo a identidade. Logo teremos que

$$res^G_{H,M}([f]) = [id \circ f \circ \tau] = [f],$$

com f visto no primeiro membro como uma aplicação de $\mathbb{Z}_2G$-módulos e no segundo membro como uma aplicação de $\mathbb{Z}_2H$-módulos. Tal aplicação é denominada **aplicação restrição** em geral e a denotaremos simplesmente por res^G_H (sem mencionar o módulo M).

Observação 2.2.1. *Similarmente, define-se "aplicação induzida em homologia" e resultados análogos aos apresentados para cohomologia são obtido para homologia.*

Proposição 2.2.3. (***Lema de Shapiro***, *[11], Proposição 6.2, p.73*) *Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e M um $\mathbb{Z}_2H$-módulo. Temos os seguintes isomorfismos:*

1. $H_*(H; M) \simeq H_*(G; Ind^G_H M)$.
2. $H^*(H; M) \simeq H^*(G; Coind^G_H M)$. ∎

Corolário 2.2.2. *Se $[G : H] < \infty$ então $H^*(H; \mathbb{Z}_2H) \simeq H^*(G; \mathbb{Z}_2G)$.*

Demonstração: $H^*(H; \mathbb{Z}_2H) \overset{Shapiro}{\simeq} H^*(G; Coind^G_H \mathbb{Z}_2H) \overset{[G:H]<\infty}{\simeq} H^*(G; Ind^G_H \mathbb{Z}_2H) \simeq H^*(G; \mathbb{Z}_2G \otimes_{\mathbb{Z}_2H} \mathbb{Z}_2H) \simeq H^*(G; \mathbb{Z}_2G)$. ∎

2.3 Grupos de (Co)homologia Relativa

Nesta seção apresentamos o conceito de (co)homologia relativa para um grupo G e uma família $\mathcal{S}$ de subgrupos de G. Tal conceito foi introduzido por Bieri e Eckmann em [10], considerando o anel $\mathbb{Z}$ com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$-módulo M, mas aqui definiremos sobre o corpo $\mathbb{Z}_2$ com coeficientes em um $\mathbb{Z}_2G$-módulo M (como Kropholler e Roller em [17]). O principal resultado desta seção é o Teorema da Sequência Exata Longa em cohomologia (para par), e cuja a prova apresentamos em detalhes.

Considere um **par grupo** $(G, \mathcal{S})$ consistindo de um grupo G e uma família $\mathcal{S} = (S_i)_{i\in I}$ de subgrupos de G (não necessariamente distintos). Seja $\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S})$ o $\mathbb{Z}_2$-módulo livre gerado pelas classes gS_i, sobre o qual G atua por multiplicação à esquerda e considere a aplicação aumentação usual ε, a que leva cada gerador gS_i em $1 \in \mathbb{Z}_2$, e denote por Δ seu núcleo.

Observação 2.3.1.

1. *Note que* $\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_2(G/S_i) = \bigoplus_{i\in I} Ind_{S_i}^G \mathbb{Z}_2 = \bigoplus_{i\in I} (\mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 S_i} \mathbb{Z}_2)$.

2. *Observe que* ε *e* ϵ *indicam homomorfismos distintos (aplicações aumentação), mais precisamente* $\varepsilon : \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) \to \mathbb{Z}_2$ *e* $\epsilon : \mathbb{Z}_2G \to \mathbb{Z}_2$ *são homomorfismos com domínios diferentes.*

Com isso temos a seguinte definição:

Definição 2.3.1. *Os* ***grupos de (co)homologia relativa*** *para o par grupo* $(G, \mathcal{S})$ *com coeficientes em um* $\mathbb{Z}_2G$*-módulo à esquerda* M *são definidos, para todo inteiro* $i \geq 1$*, por:*

$$\begin{aligned} H^i(G, \mathcal{S}; M) &= H^{i-1}(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M)) \text{ e} \\ H_i(G, \mathcal{S}; M) &= H_{i-1}(G; \Delta \otimes_{\mathbb{Z}_2} M). \end{aligned}$$

Observação 2.3.2.

1. *Segue da definição que* $H^i(G, \mathcal{S}; M) = H_i(G, \mathcal{S}; M) = 0$*, para* $i \leq 0$.

2. *Por convenção, para* $\mathcal{S} = \emptyset$*, considera-se* $H^i(G, \emptyset; M) := H^i(G; M)$ *e* $H_i(G, \emptyset; M) := H_i(G; M)$.

3. *Se a família* $\mathcal{S}$ *tem apenas um subgrupo, ou seja* $\mathcal{S} = \{S\}$*, denota-se* $H^n(G, \mathcal{S}; M) = H^n(G, S; M)$ *e* $H_n(G, \mathcal{S}; M) = H_n(G, S; M)$.

4. *Também é usual denotar, para cada família* $\mathcal{S} = (S_j)_{j\in J}$ *de subgrupos de* G*,*
$$H_i(\mathcal{S}; M) := \bigoplus_{j\in J} H_i(S_j; M) \text{ e } H^i(\mathcal{S}; M) := \prod_{j\in J} H^i(S_j; M).$$

5. *Como para (co)homologia absoluta pode-se verificar que* $H^*(G, \mathcal{S}; M)$ *é um funtor das duas variáveis* $((G, \mathcal{S}), M)$. *Mais precisamente, se* $\mathcal{C}$ *é a categoria cujos objetos são pares* $((G, \mathcal{S}), M)$, *onde* $(G, \mathcal{S})$ *é um par grupo* ($\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$, *uma família de subgrupos de* G) *e* M *é um* $\mathbb{Z}_2G$*-módulo, e cujos morfismos são as aplicações* $\psi : ((G, \mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}), M) \to ((L, \mathcal{R} = \{R_j, j \in J\}), N)$ *consistindo de*

   (*a*) *um homomorfismo* $\alpha : G \to L$,

   (*b*) *uma aplicação* $\pi : I \to J$ *tal que* $\alpha(S_i) \subset R_{\pi(i)}$,

   (*c*) *uma aplicação* $\phi : N \to M$ *tal que* $\phi(\alpha(g).n) = g.\phi(n)$, *i.e.,* ϕ *é um homomorfismo de* $\mathbb{Z}_2G$*-módulos via* α.

   então existe (vide [4] Teorema 2.1), um homomorfismo $\psi^* : H^*(L, \mathcal{R}; N) \to H^*(G, \mathcal{S}; M)$ (*induzido por* ψ), *satisfazendo as seguintes condições:*

   - *se* $\psi : ((G, \mathcal{S}), M) \to ((G, \mathcal{S}), M)$ *é a aplicação identidade, então* $\psi^* : H^*(G, \mathcal{S}; M) \to H^*(G, \mathcal{S}; M)$ *é o homomorfismo identidade.*

   - *Se* $\psi : ((G, \mathcal{S}), M) \to ((L, \mathcal{R}), N)$ *e* $\gamma : ((L, \mathcal{R}), N) \to ((K, \mathcal{O}), P)$ *são homomorfismos, então* $(\gamma \circ \psi)^* = \psi^* \circ \gamma^*$, *de modo que* $H^*((-,-); -)$ *é um funtor contravariante em* $\mathcal{C}$.

   Um resultado similar vale para homologia relativa.

Teorema 2.3.1. (*[10], Proposição 1.1, p.281 ou [12], Proposição 2.5.6*) *Sejam* $(G, \mathcal{S})$ *um par grupo com* $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in I}$ *e* M *um* $\mathbb{Z}_2G$*-módulo. Então temos a seguinte sequência exata longa*

$$0 \to H^0(G; M) \to \prod_{i \in I} H^0(S_i; M)) \xrightarrow{\delta} H^1(G, \mathcal{S}; M) \xrightarrow{J} H^1(G; M) \xrightarrow{res_{\mathcal{S}}^G}$$
$$\xrightarrow{res_{\mathcal{S}}^G} \prod_{i \in I} H^1(S_i; M) \to \cdots,$$

que é natural no $\mathbb{Z}_2G$*-módulo* M *e no par grupo* $(G, \mathcal{S})$.

Demonstração: Considere a seguinte sequência exata curta de $\mathbb{Z}_2G$-módulos

$$0 \longrightarrow \Delta \xrightarrow{i} \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \qquad (2.1)$$

onde i é a aplicação inclusão, ε a aplicação aumentação usual já definida.

Note que $\mathbb{Z}_2$ é $\mathbb{Z}_2$-livre, logo a sequência (6.3) cinde ([22], Exercício 3.7), e como uma consequência desse fato temos que a seguinte sequência,

$$0 \to Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M) \xrightarrow{\varepsilon^{\#}} Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M) \xrightarrow{i^{\#}} Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M) \to 0, \qquad (2.2)$$

sendo $\varepsilon^{\#}(f) = f \circ \varepsilon$, para todo $f \in Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M)$, e $i^{\#}(g) = g \circ i$, para todo $g \in Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M)$, é também exata e cinde. Notemos que $i^{\#}(g) = g|_{\Delta} : \Delta \to M$ (a aplicação restrição).

Considere agora uma resolução livre de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2G$

$$F: \quad \cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 = \mathbb{Z}_2G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

Como cada $\mathbb{Z}_2G$-módulo F_n é livre, logo projetivo, pelo Teorema 1.4.6, temos que a sequência

$$0 \to Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F_n, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M)) \xrightarrow{\widetilde{\varepsilon_n}^{\#}} Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F_n, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M)) \xrightarrow{\widetilde{i_n}^{\#}}$$
$$\xrightarrow{\widetilde{i_n}^{\#}} Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F_n, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M)) \to 0,$$

é uma sequência exata curta de $\mathbb{Z}_2G$-módulos, para todo n, onde os homomorfismos induzidos $\widetilde{\epsilon_n}^{\#}$ e $\widetilde{i_n}^{\#}$ são tais que,

$$\widetilde{\varepsilon_n}^{\#}(f) = \varepsilon^{\#} \circ f, \ \forall f \in Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F_n, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M)),$$
$$\widetilde{i_n}^{\#}(g) = i^{\#} \circ g, \ \forall g \in Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F_n, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M).$$

Obtemos então a sequência exata curta de complexos de cocadeias,

$$0 \to Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M)) \xrightarrow{\widetilde{\varepsilon_n}^{\#}} Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M)) \xrightarrow{\widetilde{i_n}^{\#}}$$
$$\xrightarrow{\widetilde{i_n}^{\#}} Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M)) \to 0,$$

mais precisamente, denotando, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$,
$C^n = Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F_n, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M))$,
$D^n = Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F_n, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M))$ e
$E^n = Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F_n, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M))$,

obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C^0 \arrow[r, "\delta_1^0"] \arrow[d, "\widetilde{\varepsilon}_0^{\#}"] & C^1 \arrow[r, "\delta_1^1"] \arrow[d, "\widetilde{\varepsilon}_1^{\#}"] & C^2 \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\varepsilon}_2^{\#}"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & D^0 \arrow[r, "\delta_1^0"] \arrow[d, "\widetilde{i}_0^{\#}"] & D^1 \arrow[r, "\delta_2^1"] \arrow[d, "\widetilde{i}_1^{\#}"] & D^2 \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{i}_2^{\#}"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & E^0 \arrow[r, "\delta_3^0"] \arrow[d] & E^1 \arrow[r, "\delta_3^1"] \arrow[d] & E^2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Assim a sequência exata curta de complexos de cocadeias

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\widetilde{\varepsilon}^{\#}} D \xrightarrow{\widetilde{i}^{\#}} E \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

onde $C = (C^n) = (Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F_n, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M)))$,
$D = (D^n) = (Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F_n, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M)))$ e
$E = (E^n) = (Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F_n, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M)))$
induz, pelo Teorema 1.1.1, a seguinte sequência exata longa em cohomologia :

$$\begin{gathered}
0 \to H^0(Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M))) \xrightarrow{\varepsilon_0^*} H^0(Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M))) \xrightarrow{i_0^*} \\
\xrightarrow{i_0^*} H^0(Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M))) \xrightarrow{\rho^0} H^1(Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M))) \to \cdots ,
\end{gathered} \tag{2.4}$$

onde $\varepsilon_n^*([f]) = [\widetilde{\varepsilon}_n^{\#}(f)] = [\varepsilon^{\#} \circ f]$, $f \in H^n(Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F, Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\mathbb{Z}_2, M)))$, $i_n^*([g]) =$

$[\widetilde{i}_n^{\#}(g)] = [i^{\#} \circ g]$, $g \in H^n(Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M)))$ e ρ^n é o homomorfismo conectante.

Observemos agora que

- $H^n(Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M))) := H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M))$,
- $H^n(Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M))) := H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M))$ e
- $H^n(Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M))) := H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M))$.

Deste modo, a sequência (2.4) equivale a seguinte sequência exata (*de fato essa é a menos de isomorfismo a sequência desejada*):

$$0 \to H^0(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M)) \xrightarrow{\varepsilon_0^*} H^0(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M)) \xrightarrow{i_0^*} H^0(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M)) \xrightarrow{\rho^0}$$

$$\xrightarrow{\rho^0} H^1(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M)) \to \cdots \quad (2.5)$$

Temos ainda que

1. $H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M)) \overset{\varphi^*}{\simeq} H^n(G; M)$, onde $M \overset{\varphi}{\simeq} Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M)$ (vide 1.4.1 e Corolário 2.2.1), sendo φ^* o homomorfismo induzido de φ.

2. $H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M)) := H^{n+1}(G, \mathcal{S}; M)$

3. $H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M)) \overset{\eta}{\simeq} \prod_{i \in I} H^n(S_i; M)$. Vamos exibir esse isomorfismo η. Temos
$Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M) = Hom_{\mathbb{Z}_2}(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_2(G/S_i), M) \overset{\phi}{\simeq} \prod_{i \in I} Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S_i), M)$,
com

$$\begin{aligned} \phi : Hom_{\mathbb{Z}_2}(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_2(G/S_i), M) &\to \prod_{k \in I} Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S_k), M) \\ f &\mapsto (f \circ j_k)_{k \in I} \end{aligned}$$

sendo $j_k : \mathbb{Z}_2(G/S_k) \to \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_2(G/S_i)$ a inclusão. Assim temos:

- $H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S), M)) \overset{\phi^*}{\simeq} H^n(G; \prod_{i \in I} Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S_i), M))$
  onde ϕ^* é o homomorfismo induzido de ϕ, isto é,

$$\begin{aligned} \phi^* : H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S), M)) &\to H^n(G; \prod_{i \in I} Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S_i), M)) \\ [h] &\mapsto \phi^*([h]) = [\phi \circ h]. \end{aligned}$$

- $H^n(G; \prod_{i \in I} Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S_i), M)) \overset{\gamma}{\simeq} \prod_{i \in I} H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S_i), M))$, com

$$\begin{aligned} \gamma : H^n(G; \prod_{i \in I} Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S_i), M)) &\to \prod_{i \in I} H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S_i), M)), \\ [f] &\mapsto ([p_i \circ f])_{i \in I} \end{aligned}$$

  onde $p_i : \prod_{k \in I} Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S_k), M), \to Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S_i), M)$ é a projeção.

Considere agora as aplicações

- $\psi* = (\psi_i*)_{i\in I}$, onde

$$
\begin{aligned}
(\psi_i*)_{i\in I} : \prod_{i\in I} H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S_i), M)) &\rightarrow \prod_{i\in I} H^n(G; Coind_{S_i}^G M)\\
([f_i])_{i\in I} &\mapsto (\psi_i^*[f_i])_{i\in I}
\end{aligned}
$$

com ψ_i* a induzida do isomorfismo

$$
\begin{aligned}
\psi_i : Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S_i), M) &\rightarrow Coind_{S_i}^G M\\
f_i &\mapsto \psi_i(f_i),
\end{aligned}
$$

sendo

$$
\begin{aligned}
\psi_i(f_i) : \mathbb{Z}_2 G &\rightarrow M\\
g &\mapsto g f_i(g^{-1}S_i).
\end{aligned}
$$

- $\pi^* = (\pi_i^*)_{i\in I} : \prod_{i\in I} H^n(G; Coind_{S_i}^G M) \rightarrow \prod_{i\in I} H^n(G; M)$, onde π_i^* é a induzida em cohomologia de

$$
\begin{aligned}
\pi_i : Coind_{S_i}^G M &\rightarrow M\\
f_i &\mapsto \pi_i(f_i) = f_i(1)
\end{aligned}
$$

sendo $1 \in \mathbb{Z}_2 G$

- $(res_i)_{i\in I}$, tal que

$$
\begin{aligned}
(res_i)_{i\in I} : \prod_{i\in I} H^n(G; M) &\rightarrow \prod_{i\in I} H^n(S_i; M)\\
([f_i])_{i\in I} &\mapsto (res_{S_i}^G([f_i]))_{i\in I}
\end{aligned}
$$

Note que ϕ^*, γ, ψ^* e $(res_i)_{i\in I} \circ (\pi_i^*)_{i\in I} = (res_i \circ \pi_i^*)_{i\in I}$ são isomorfismos (de fato tem-se que $res_i \circ \pi_i^*$ é o isomorfismo de Shapiro) e portanto a composta

$$H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S_i), M)) \xrightarrow{\phi^*} H^n(G; \prod_{i\in I} Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S_i), M)) \xrightarrow{\gamma}$$

$$\xrightarrow{\gamma} \prod_{i\in I} H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S_i), M)) \xrightarrow{\psi^*} \prod_{i\in I} H^n(G; Coind_{S_i}^G M) \xrightarrow{\pi^*} \prod_{i\in I} H^n(G; M) \xrightarrow{(res_i)_{i\in I}}$$

$$\xrightarrow{(res_i)_{i\in I}} \prod_{i\in I} H^n(S_i; M),$$

é um isomorfismo, o qual denotaremos por simplesmente por η *(*ao invés de η^n ou η^**)*, ou seja, $\eta = (res_i)_{i\in I} \circ (\pi_i^*)_{i\in I} \circ \psi^* \circ \gamma \circ \phi^*$. Assim, $H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M)) \overset{\eta}{\simeq}$

$\prod_{i\in I} H^n(S_i; M)$.

De 1., 2., 3. e, considerando as aplicações dadas pelas composições (vide diagramas) abaixo: $(res_{\mathcal{S}}^G)^n := \eta \circ \varepsilon_n^* \circ \varphi^*$, $\delta^n := i_n^* \circ \eta^{-1}$ e $J^{n+1} := \varphi^* \circ \rho^n$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\mathbb{Z}_2, M)) \arrow[r, "\varepsilon_n^*"] & H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M)) \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & \cdots \\
& H^n(G; M) \arrow[u, "\varphi^*"] \arrow[r, dotted, "(res_{\mathcal{S}}^G)^n"] & \prod_{i\in I} H^n(S_i; M) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M)) \arrow[r, "i_n^*"] \arrow[d, "\eta"] & H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta, M)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
& \prod_{i\in I} H^n(S_i; M) \arrow[r, dotted, "\delta^n"] & H^{n+1}(G; M) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta, M)) \arrow[r, "\rho^n"] \arrow[d, equal] & H^n(G; Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\mathbb{Z}_2, M)) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^*"] & \cdots \\
& H^{n+1}(G, \mathcal{S}; M)) \arrow[r, dotted, "J^{n+1}"] & H^{n+1}(G; M)) &
\end{tikzcd}$$

obtemos a sequência exata longa com os grupos de cohomologia desejados.

Verifiquemos que $(\eta \circ \varepsilon_n^* \circ \varphi^*) = (res_{\mathcal{S}}^G)^n$, que denotaremos apenas por $res_{\mathcal{S}}^G$ é de fato uma aplicação "restrição", mais precisamente, coincide com a aplicação abaixo:

$H^n(G; M) \to \prod_{i\in I} H^n(S_i; M)$; $([f]) \mapsto (res_i([f]))_{i\in I} \overset{abuso-not.}{=} ([f])_{i\in I}$,

para todo $[f] \in H^n(G; M)$, onde res_i indica $res_{S_i}^G$.

De fato, seja $[f] \in H^n(G; M)$. Temos que:
$(\eta\circ\varepsilon_n^*\circ\varphi^*)([f]) = (\eta\circ\varepsilon_n^*)([\varphi\circ f]) = \eta([\varepsilon^\#\circ\varphi\circ f]) = ((res_i)_{i\in I}\circ(\pi_i^*)_{i\in I}\circ\psi^*\circ\gamma\circ\phi^*)(([\varepsilon^\#\circ\varphi\circ f])) = ((res_i)_{i\in I}\circ(\pi_i^*)_{i\in I}\circ\psi^*\circ\gamma)([\phi\circ\varepsilon^\#\circ\varphi\circ f]) = ((res_i)_{i\in I}\circ(\pi_i^*)_{i\in I}\circ\psi^*)(([p_i\circ\phi\circ\varepsilon^\#\circ\varphi\circ f])_{i\in I}) = ((res_i)_{i\in I}\circ\pi^*)(([\psi_i\circ p_i\circ\phi\circ\varepsilon^\#\circ\varphi\circ f])_{i\in I}) = (res_i)_{i\in I}(([\pi_i\circ\psi_i\circ p_i\circ\phi\circ\varepsilon^\#\circ\varphi\circ f])_{i\in I}) = (res_i([\pi_i \circ \psi_i \circ p_i \circ \phi \circ \varepsilon^\# \circ \varphi \circ f]))_{i\in I}$.
Agora, para todo $x \in F_n$ e $i \in I$, tem-se:

$(\pi_i\circ\psi_i\circ p_i\circ\phi\circ\varepsilon^\#\circ\varphi\circ f)(x) = (\pi_i\circ\psi_i\circ p_i\circ\phi\circ\varepsilon^\#\circ\varphi)(f(x)) = (\pi_i\circ\psi_i\circ p_i\circ\phi)(\varepsilon^\#(\varphi(f(x)))) = (\pi_i \circ \psi_i \circ p_i \circ \phi)(\varphi(f(x)) \circ \varepsilon) = (\pi_i \circ \psi_i \circ p_i)(\varphi(f(x) \circ \varepsilon \circ j_k)_{k\in I}) = \pi_i(\circ\psi_i(\varphi(f(x)) \circ \varepsilon \circ j_i)) = (\psi_i(\varphi(f(x)) \circ \varepsilon \circ j_i))(1) = 1.(\varphi(f(x)) \circ \varepsilon \circ j_i)(1.S_i) = \varphi(f(x))(1) = f(x)$. Com isso teremos $[\pi_i \circ \psi_i \circ p_i \circ \phi \circ \varepsilon^\# \circ \varphi \circ f] = [f]$ e assim $res_i([\pi_i \circ \psi_i \circ p_i \circ \phi \circ \varepsilon^\# \circ \varphi \circ f]) = [f]$. Daí, segue que
$(\eta \circ \varepsilon_n^* \circ \varphi^*)[f] = ((res_i)_{i\in I} \circ (\pi_i^*)_{i\in I} \circ \psi^* \circ \gamma \circ \phi^*) \circ \varepsilon_n^* \circ \varphi^*)([f]) = (res_i([\pi_i \circ \psi_i \circ p_i \circ \phi \circ$

$\varepsilon^{\#} \circ \varphi \circ f])_{i\in I} = ([f])_{i\in I} = res^G_{\mathcal{S}}([f])$, como afirmado. ∎

Observação 2.3.3. *A aplicação $J : H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \to H^1(G; \mathcal{F}_T(G))$ dada na sequência exata longa (teorema anterior) será denotada posteriormente, seguindo [17], por $res^{(G,\mathcal{S})}_G : H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \to H^1(G; \mathcal{F}_T(G))$, e desempenhará papel importante no estudo da obstrução sing. É interessante observar que embora as notações $res^G_{\mathcal{S}}$ (utilizada na sequência exata longa) e $res^{(G,\mathcal{S})}_G$ sejam parecidas, elas não indicam as mesmas aplicações, uma vez que $res^G_{\mathcal{S}} : H^1(G; M) \to \prod_{i\in I} H^1(S_i; M)$.*

O resultado seguinte nos mostra que o homomorfismo $(i_0)^*$ da sequência exata longa do par $(G, \mathcal{S})$ é (a menos de isomorfismo) o homomorfismo restrição

$$\begin{array}{rcl} h : Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M) & \to & Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta, M) \\ f & \mapsto & f|_\Delta \end{array}$$

Mais precisamente, temos:

Proposição 2.3.1. *O homomorfismo Φ dada pela composição dos homomorfismos abaixo $Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M) = (Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M))^G \overset{\alpha}{\underset{\sim}{\to}} H^0(G, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M)) \xrightarrow{i_0{}^*}$ $\xrightarrow{i_0^*} H^1(G, \mathcal{S}; M) = H^0(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M)) \overset{\beta}{\underset{\sim}{\to}} (Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M))^G = Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta, M)$ é a aplicação restrição, isto é $\Phi(f) = f|_\Delta$, onde α e β são os isomorfismos como na demonstração da Proposição 2.1.2 e i_0^* é o homomorfismo da sequência exata longa (2.5) do par $(G, \mathcal{S})$.*

Demonstração: Seja $f \in Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M)$. Usando a "cara" dos homomorfismos α, β e i_0^* (dados em Proposição 2.1.2; Teorema 2.3.1), e o fato que $i : \Delta \to \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S})$ é a inclusão, obtemos
$f \overset{\alpha}{\mapsto} \epsilon^*(\varphi_f) = \varphi_f \circ \epsilon \overset{i_0^*}{\mapsto} i_0^*(\varphi_f \circ \epsilon) = i^{\#} \circ \varphi_f \circ \epsilon = \epsilon^*(i_0^{\#} \circ \varphi_f) \overset{\beta}{\mapsto} (i^{\#} \circ \varphi_f)(1) = \varphi_f(1) \circ i =$ $f \circ i = f|_\Delta$. ∎

CAPÍTULO 3

DUALIDADE DE POINCARÉ

Neste capítulo introduzimos o conceito de grupos e pares de dualidade. Um grupo de dualidade de Poincaré é um grupo cuja homologia e cohomologia satisfazem relações de dualidade análogas àquelas válidas para variedades compactas. Esses grupos foram investigados, em vista de seus aspectos algébricos e topológicos, por Bieri [7] e Johnson e Wall [14]. Posteriormente Bieri e Eckmann em [9] definiram um tipo mais geral de dualidade (sobre $\mathbb{Z}$) que inclui o anterior e em [8] Bieri estendeu esse conceito considerando grupos de dualidade sobre um anel R qualquer, comutativo com unidade . Aqui consideraremos apenas os casos em que $R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$.

3.1 Grupos e Pares de Dualidade

Definição 3.1.1. *Um grupo G é um* ***grupo de dualidade*** *de dimensão n ou um* ***D^n-grupo*** *sobre R, se existir um RG-módulo C tal que para todo RG-módulo M tivermos isomorfismos*

$$H^i(G; M) \simeq H_{n-i}(G; C \otimes_R M)$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Nesse caso C é denominado ***módulo dualizante****.*

Definição 3.1.2. ***A dimensão cohomológica*** *de G sobre R, denotada por $cd_R G$, é definida por*

$$\begin{aligned} cd_R G &= inf\{n \mid H^k(G; -) = 0 \ \ para\ k > n, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= sup\{n \mid H^n(G; M) \neq 0 \ para\ algum\ RG\text{-}módulo\ M\}. \end{aligned}$$

Se não existir tal inteiro, nós consideramos $cd_R G = \infty$.

Observação 3.1.1. *1. Note que $cd_R G \geq 0$, pois existe $M = R$ (R visto como RG-módulo trivial) tal que $H^0(G; R) \simeq R \neq 0$.*

2. Se existe uma resolução projetiva de R sobre RG de comprimento finito então $cd_R G \leq n$.

Proposição 3.1.1. *([9], Proposição 1.2, p.106) Se G é um grupo de dualidade de dimensão n sobre R com módulo dualizante C então:*

(i) $C \neq 0$;

(ii) $C \simeq H^n(G; RG)$;

(iii) $n = cd_R G$. ■

Definição 3.1.3. *Se G for um D^n-grupo com módulo dualizante isomorfo C a R então G é chamado **grupo de dualidade de Poincaré** de dimensão n ou um PD^n**-grupo** (sobre R). Quando $G \simeq \mathbb{Z}$ sabemos que há duas ações possíveis de G sobre C a trivial e a dada por $g.x = -x$. Se a ação é trivial dizemos que G é um PD^n-grupo **orientável**, caso contrário o PD^n-grupo é dito **não orientável**.*

Observação 3.1.2. *1. Se $C \simeq \mathbb{Z}_2$, a única G-ação sobre C é a trivial e assim, sobre $\mathbb{Z}_2$, G é um PD^n-grupo orientável.*

2. G é um PD^n-grupo sobre $\mathbb{Z}_2$ se $H^i(G; M) \simeq H_{n-i}(G; M)$, para todo inteiro i, e todo $\mathbb{Z}_2 G$-módulo M.

3. Se G é grupo de dualidade sobre $\mathbb{Z}$ de dimensão n com módulo dualizante C então G é um grupo de dualidade de dimensão n sobre $\mathbb{Z}_2$ com módulo dualizante $C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$.

O resultado seguinte nos dá exemplos de grupos de dualidade sobre $\mathbb{Z}$ e consequentemente sobre $\mathbb{Z}_2$.

Teorema 3.1.1. *([13], Teorema V.1.1, p.135) Seja G um grupo. Se existe uma variedade asférica X fechada (compacta e sem bordo) de dimensão n com $\pi_1(X) = G$ então G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n sobre $\mathbb{Z}$ e consequentemente sobre $\mathbb{Z}_2$.* ■

Exemplo 3.1.1. *$G = \pi_1(T^n) \simeq \mathbb{Z}^n$, onde $T^n = S^1 \times S^1 \times ... \times S^1$ é o toro n dimensional, $n \geq 1$, são exemplos de PD^n-grupos sobre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_2$.*

Definição 3.1.4. *Um par grupo $(G, \mathcal{S})$ é chamado* ***par de dualidade*** *de dimensão n ou D^n**-par*** *(sobre $R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$) se existirem um RG-módulo C e isomorfismos,*

$$H^i(G; M) \simeq H_{n-i}(G, \mathcal{S}; C \otimes_R M) \quad e$$
$$H^i(G, \mathcal{S}; M) \simeq H_{n-i}(G; C \otimes_R M),$$

para todo inteiro $i \geq 1$, e todo RG-módulo M.

Definição 3.1.5. *Se $C \simeq R$, como grupo abeliano, o par grupo $(G, \mathcal{S})$ é chamado* ***par de dualidade de Poincaré*** *de dimensão n ou PD^n**-par**.*

Observação 3.1.3.

1. *Como para grupos de dualidade, se $C \simeq \mathbb{Z}$ diz-se quem um PD^n-par é orientável (sobre $\mathbb{Z}$), se a G-ação sobre $C \simeq \mathbb{Z}$ é trivial, e é PD^n-par não orientável, caso contrário.*

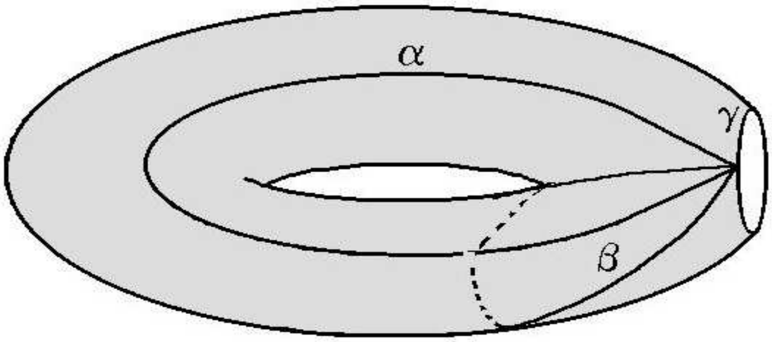
2. *Se $C \simeq \mathbb{Z}_2$, $(G, \mathcal{S})$ é um PD^n-par sobre $\mathbb{Z}_2$ (orientável) se existir isomorfismos naturais, $H^i(G; M) \simeq H_{n-i}(G, \mathcal{S}; M)$ e $H^i(G, \mathcal{S}; M) \simeq H_{n-i}(G; M)$.*

Exemplo 3.1.2. *Considere $G = \langle t \rangle \bigoplus \langle s \rangle \simeq \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}$ e $S = \langle t^2 \rangle \bigoplus \langle s \rangle \simeq 2\mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}$. Então $(G, \{S\})$ é um PD^3-par sobre $\mathbb{Z}_2$. De fato, temos que $G/S = \{\overline{(1,1)}, \overline{(t,1)}\} \overset{not.}{=} \{\bar{1}, \bar{T}\} \simeq \mathbb{Z}_2$. Considerando a aplicação aumentação, $\varepsilon : \mathbb{Z}_2(G/S) \to \mathbb{Z}_2$, temos que $\mathbb{Z}_2(G/S) \simeq \mathbb{Z}_2(\{\bar{1}, \bar{T}\}) = \{x\bar{1} + y\bar{T}; x, y \in \mathbb{Z}_2\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{T}, \bar{1} + \bar{T}\}$. Por outro lado, $\varepsilon(\bar{0}) = \bar{0}, \varepsilon(\bar{1}) = \bar{1}, \varepsilon(\bar{T}) = \bar{1}$ e $\varepsilon(\bar{1} + \bar{T}) = \varepsilon(\bar{1}) + \varepsilon(\bar{T}) = \bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$, de modo que $\Delta = ker(\varepsilon) = \{\bar{0}, \bar{1} + \bar{T}\} \simeq \mathbb{Z}_2$. Com isso temos que $Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M) \simeq M$ e $\Delta \otimes_{\mathbb{Z}_2} M \simeq M$. Como G é PD^2-grupo, visto que $G \simeq \pi_1(T^2)$, obtemos $H_{3-k}(G, \mathcal{S}, M) := H_{3-k-1}(G; \Delta \otimes_{\mathbb{Z}_2} M) = H_{2-k}(G; M) \simeq H^k(G; M)$ e $H^k(G, \mathcal{S}, M) := H^{k-1}(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M)) = H^{k-1}(G; M) \simeq H_{3-k}(G; M)$, donde segue que $(G, \mathcal{S})$ é um $PD^3 - par$.*

Definição 3.1.6. *Um par grupo $(G, \mathcal{S})$, $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in I}$, é* ***realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane*** *$(X, Y) \overset{not.}{=} K(G, \mathcal{S}, 1)$, se X é um $K(G, 1)$ complexo celular (isto é, um complexo celular, com X conexo, $\pi_1(X) = G$ e $\pi_j(X) = 0$, $\forall j \geq 2$) e Y é um subcomplexo cujas componentes conexas $Y_i, i \in I$, são $K(S_i, 1)$ complexos, de tal modo que as aplicações $i^* : \pi_1(Y_i) \to \pi_1(X)$, induzidas da inclusão $i : Y_i \to X$, são injetivas e levam cada $\pi_1(Y_i)$ em S_i, depois de uma conveniente escolha de caminhos conectados por pontos bases.*

Teorema 3.1.2. *([10],Teorema 6.3) Se $(G, \mathcal{S})$, $\mathcal{S} = (S_i)$, $i = 1, ..., r$, é realizado topologicamente por um par Eleinberg-MacLane (X, Y), onde X é uma variedade orientável, compacta, de dimensão n e $Y = \partial X$ ($Y = \bigcup_{i=1}^{r} Y_i$, Y_i componentes conexas e $Y_i = K(S_i, 1)$) então $(G, \mathcal{S})$ é um PD^n-par orientável sobre $\mathbb{Z}$ (e portanto sobre $\mathbb{Z}_2$).* ■

Exemplo 3.1.3. *Seja $X = T^2 - D$ (o toro menos um disco aberto), $Y = \partial X$, $G = \pi_1(X) \simeq \langle a \rangle * \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e $\mathcal{S} = \{S\}$, onde $S = \pi_1(Y) \simeq \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Temos que (X, Y) é um par de Eleinberg-MacLane realizando $(G, \mathcal{S})$ e, como X é uma variedade de dimensão 2, com bordo, compacta, orientável e $Y = \partial X$, segue que $(G, \mathcal{S})$ é um PD^2-par sobre $R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$.*



Observação 3.1.4. *Se $(G, \mathcal{S})$ é um D^n-par então a família $\mathcal{S}$ é finita como mostra o resultado seguinte.*

Teorema 3.1.3. *([10], Teorema 4.2) Seja $(G, \mathcal{S})$, $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in I} \neq \emptyset$, um D^n-par com módulo dualizante C. Então*

(i) G é um D^{n-1}-grupo com módulo dualizante $\Delta \otimes_{\mathbb{Z}_2} C$ (com a G-ação diagonal).

(ii) $\mathcal{S}$ é uma família finita de subgrupos.

(iii) Cada S_i é um D^{n-1}-grupo com módulo dualizante C (considerado como $\mathbb{Z}_2 S_i$-módulo por restrição). ■

Observação 3.1.5. *Note que (i) é facilmente obtido para todo $\mathbb{Z}_2 G$-módulo M, pois: $(G, \mathcal{S})$ D^n-par com módulo dualizante $C \Rightarrow H^i(G; M) \simeq H_{n-i}(G, \mathcal{S}; C \otimes_{\mathbb{Z}_2} M) \overset{def.}{=} H_{n-1-i}(G; \Delta \otimes_{\mathbb{Z}_2} (C \otimes_{\mathbb{Z}_2} M)) = H_{n-1-i}(G; (\Delta \otimes_{\mathbb{Z}_2} C) \otimes_{\mathbb{Z}_2} M) \Rightarrow G$ é um D^{n-1}-grupo com módulo dualizante $\Delta \otimes_{\mathbb{Z}_2} C$.*

Corolário 3.1.1. *Se $(G, \mathcal{S})$ é um PD^n-par então cada $S_i \in \mathcal{S}$ é um PD^{n-1}-grupo.* ■

CAPÍTULO 4

O $\mathbb{Z}_2G$-MÓDULO $\mathcal{F}_T(G)$ E PARES DE DUALIDADE DE POINCARÉ

Como vimos no Exemplo 1.2.1, dado um grupo G, podemos dar a $\mathcal{P}(G)$ uma estrutura de $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Denotemos por $\mathcal{F}(G)$ o $\mathbb{Z}_2G$-submódulo de $\mathcal{P}(G)$ formando por todos os subconjuntos finitos de G, ou seja, $\mathcal{F}(G) = \{A \in \mathcal{P}(G) \ ; \ A \text{ é finito } \}$. Neste capítulo apresentamos algumas propriedades do $\mathbb{Z}_2G$-módulo $\mathcal{P}(G)$ e do $\mathbb{Z}_2G$-submódulo $\mathcal{F}_T(G) := \{A \in \mathcal{P}(G) \ ; \ A \subseteq F.T, \text{ para algum } F \in \mathcal{F}(G)\}$ de $\mathcal{P}(G)$, onde T um subgrupo de G. Dentre elas, destacaremos que $\mathcal{F}_T(G) \simeq Ind_T^G(\mathcal{P}(T))$, e que $\mathcal{F}_T(G) = \mathcal{F}_S(G)$, sendo S um outro subgrupo de G se, e somente se S e T são comensuráveis. Finalizamos o capítulo com uma importante caracterização dos PD^n-pares $(G, \mathcal{S})$, cuja demonstração usa o $\mathbb{Z}_2G$-módulo $\mathcal{F}_T(G)$. As referências principais para os resultados apresentados aqui são [16] e [17]. Sendo que os resultados para pares $(G, \mathcal{S})$ estão em [17]. Observamos que em [16] e [17], os autores trabalham com $\mathbb{Z}_2G$-módulos à direita, no entanto, em nosso tratamento, consideramos $\mathbb{Z}_2G$-módulos à esquerda, uma vez que as referências utilizadas para cohomologia de grupos ([11] e [10]) e para grupos e pares de dualidade ([8] e [10]) consideram $\mathbb{Z}_2G$-módulos à esquerda. Conforme já observamos, todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo à esquerda é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo à direita (e reciprocamente), e portanto é indiferente trabalharmos com $\mathbb{Z}_2G$-módulos à esquerda ou à direita (desde que sejamos coerente).

4.1 $\mathcal{F}_T(G)$ e Comensurabilidade

Iniciamos essa seção mostrando que $\mathcal{P}(G) \simeq Coind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2$ (o $\mathbb{Z}_2G$-módulo coinduzido, ver Capítulo 2 § 2.1.2).

Proposição 4.1.1. *Sejam G um grupo. Então $\overline{\mathbb{Z}_2G} := Coind_{\{1\}}^{G}\mathbb{Z}_2 = Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2G, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathcal{P}(G)$ como $\mathbb{Z}_2G$-módulos. Além disso, o $\mathbb{Z}_2G$-submódulo $\mathbb{Z}_2G$ de $\overline{\mathbb{Z}_2G}$ é levado por este isomorfismo em $\mathcal{F}(G)$.*

Demonstração: Seja

$$\begin{array}{rcl} \rho : \overline{\mathbb{Z}_2G} = Coind_{\{1\}}^{G}\mathbb{Z}_2 & \rightarrow & \mathcal{P}(G) \\ f & \mapsto & \rho(f) := A_f \ ; \ A_f = \{g \in G; f(g^{-1}) = 1 \in \mathbb{Z}_2\} \end{array}$$

Temos que:

1. ρ está bem definida, pois:

   $\forall\ f, h \in \overline{\mathbb{Z}_2G}$, $f = h \Rightarrow f(g^{-1}) = h(g^{-1})$, $\forall\ g \in \mathbb{Z}_2G$. Assim, para todo $g \in \mathbb{Z}_2G$, $f(g^{-1}) = 1 \Leftrightarrow h(g^{-1}) = 1$. Logo, $A_f = A_h$.

2. ρ é um homomorfismo de grupos.

   De fato, mostremos que $\rho(f + h) = \rho(f) + \rho(h)$ e $\rho(g'.f) = g'.\rho(f)$.

   - $g \in \rho(f + h) \Leftrightarrow g \in A_{f+h} \Leftrightarrow (f + h)(g^{-1}) = 1 \in \mathbb{Z}_2 \Leftrightarrow f(g^{-1}) + h(g^{-1}) = 1 \Leftrightarrow f(g^{-1}) = 1$ e $h(g^{-1}) = 0$ ou $f(g^{-1}) = 0$ e $h(g^{-1}) = 1 \Leftrightarrow g \in A_f \cap (A_h)^c$ ou $g \in (A_f)^c \cap A_h \Leftrightarrow g \in A_f + A_h \Leftrightarrow g \in \rho(f) + \rho(h)$.
   - $g \in g'.\rho(f) \Rightarrow g \in g'.A_f \Rightarrow g = g'.a$, com $a \in A_f \Rightarrow g.a^{-1} = g' \Rightarrow a^{-1} = g^{-1}.g' \Rightarrow f(a^{-1}) = f(g^{-1}.g') \overset{a \in A_f}{\Rightarrow} 1 = f(g^{-1}.g') \overset{f \in \overline{\mathbb{Z}_2G}}{\Rightarrow} (g'.f)(g^{-1}) = 1 \Rightarrow g \in A_{g'.f} \Rightarrow g \in \rho(g'.f)$. Agora $g \in \rho(g'.f) \Rightarrow g \in A_{g'.f} \Rightarrow (g'.f)(g^{-1}) = 1 \Rightarrow f(g^{-1}.g') = 1 \Rightarrow g'^{-1}.g = a \in A_f \Rightarrow g = g'a$, com $a \in A_f \Rightarrow g \in g'.A_f \Rightarrow g \in g'.\rho(f)$.

3. Considere

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathcal{P}(G) & \rightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2G, \mathbb{Z}_2) \\ A & \mapsto & \psi(A) := f_A \ ; \ f_A(g) = \begin{cases} 1, & \text{se } g^{-1} \in A, \\ 0, & \text{se } g^{-1} \notin A. \end{cases} \end{array}$$

   Temos que ψ está bem definida e é uma inversa para ρ, pois

   - $\forall\ f \in \overline{\mathbb{Z}_2G}$, $(\psi \circ \rho)(f) = \psi(\rho(f)) = \psi(A_f) = f_{A_f}$. Sendo que, para todo $g \in \mathbb{Z}_2G$, $f_{A_f}(g) = \begin{cases} 1, & \text{se } g^{-1} \in A_f, \\ 0, & \text{se } g^{-1} \notin A_f. \end{cases} \Leftrightarrow f_{A_f}(g) = \begin{cases} 1, & \text{se } f(g) = 1 \\ 0, & \text{se } f(g) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f_{A_f}(g) = f(g)$.
     Logo, $(\psi \circ \rho)(f) = f$.

- $\forall\ A \in \mathcal{P}(G),\ (\rho \circ \psi)(A) = \rho(\psi(A)) = \rho(f_A) = A_{f_A} = \{g \in G\ ;\ f_A(g^{-1}) = 1\} = \{g^{-1} \in G\ ;\ f_A(g) = 1\} = A$ (pois $f_A(g) = 1 \Leftrightarrow g^{-1} \in A$).

Assim, ρ é um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo e portanto $\overline{\mathbb{Z}_2G} \simeq \mathcal{P}(G)$.

Agora, definamos

$$\varphi : \mathbb{Z}_2G \to \overline{\mathbb{Z}_2G}$$
$$g' \mapsto \varphi(g')\ ;\ \varphi(g')(g) = \begin{cases} 1, & \text{se } g = g'^{-1}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e teremos que:

(i) φ é aplicação de $\mathbb{Z}_2G$-módulos, pois

$$\varphi(g_0.g')(g) = \begin{cases} 1, & \text{se } g = (g_0g')^{-1} = g'^{-1}{g_0}^{-1}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e

$$(g_0.\varphi(g'))(g) = \begin{cases} 1, & \text{se } g.g_0 = g'^{-1} \Leftrightarrow g = g'^{-1}{g_0}^{-1}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, $\varphi(g_0g') = g_0.\varphi(g')$.

(ii) φ é um $\mathbb{Z}_2G$-monomorfismo.

De fato, sejam $u = 1.g_1 + \cdots + 1.g_t,\ u' = 1.h_1 + \cdots + 1.h_r \in \mathbb{Z}_2G$ tais que $u \neq u'$. Então existe pelo menos um índice i tal que $g_i \neq h_j$ para todo j (ou $h_i \neq g_j,\ \forall\ j$). Daí,

$\varphi(u)({g_i}^{-1}) = (1.\varphi(g_1)+\cdots+1.\varphi(g_t))({g_i}^{-1}) = 1.\varphi(g_1)({g_i}^{-1})+\cdots+1.\varphi(g_i)({g_i}^{-1})+\cdots+1.\varphi(g_t)({g_i}^{-1}) = 1$ e $\varphi(u')({g_i}^{-1}) = (1.\varphi(h_1) + \cdots + 1.\varphi(h_r))({g_i}^{-1}) = 1.\varphi(h_1)({g_i}^{-1}) + \cdots + 1.\varphi(h_r)({g_i}^{-1}) = 0$.

Portanto, $\varphi(u) \neq \varphi(u')$.

Analogamente, se $h_i \neq g_j,\ \forall\ j$, obtém-se $\varphi(u) \neq \varphi(u')$.

(iii) $\rho(\varphi(\mathbb{Z}_2G)) = \mathcal{F}(G)$.

Com efeito, seja $A \in \rho(\varphi(\mathbb{Z}_2G))$. Então, $A = \rho(\varphi(x)),\ x \in \mathbb{Z}_2G$. Agora, $x \in \mathbb{Z}_2G$ implica que $x = 1.g_1 + \cdots + 1.g_t$, com $1 \in \mathbb{Z}_2$, $g_i \in G$ e $g_i \neq g_j$. Daí, $\varphi(x) = 1.\varphi(g_1) + \cdots + 1.\varphi(g_t)$ sendo que $\begin{cases} \varphi(g_i)(g) = 1, & \text{se } g = {g_i}^{-1}, \\ \varphi(g_i)(g) = 0, & \text{se } g \neq {g_i}^{-1}. \end{cases}$

Logo, $A = \rho(\varphi(x)) = \{g \in G; \varphi(x)(g^{-1}) = 1\} = \{g_1, \cdots, g_t\}$, ou seja, $A \in \mathcal{F}(G)$.

Reciprocamente, seja $A = \{g_1, \cdots, g_t\} \in \mathcal{F}(G)$. Podemos tomar $x = 1.g_1 + \cdots + 1.g_t,\ x \in \mathbb{Z}_2G$ e daí, $\varphi(x) \in \varphi(\mathbb{Z}_2G)$. Como $\rho(\varphi(x)) = \{g \in G; \varphi(x)(g^{-1}) = 1\} = \{g_1, \cdots, g_t\} = A$, temos que $A \in \rho(\varphi(\mathbb{Z}_2G))$.

De (i), (ii) segue que podemos identificar $\mathbb{Z}_2G$ com $\varphi(\mathbb{Z}_2G) \subset \overline{\mathbb{Z}_2G}$ e assim, $\mathbb{Z}_2G$ pode ser considerado um $\mathbb{Z}_2G$-submódulo de $\overline{\mathbb{Z}_2G}$. Agora de (iii) segue que esse submódulo é levado pelo isomorfismo ρ em $\mathcal{F}(G)$. ∎

Exemplo 4.1.1. (*Aplicação do Lema de Shapiro*) *Sejam G um grupo e $\mathcal{P}(G)$ o conjunto das partes de G. Vimos, na Proposição anterior que $\mathcal{P}(G) \simeq Coind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2$. Logo,*

$$H^i(G;\mathcal{P}(G)) \simeq H^i(G; Coind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2) \overset{Shapiro}{\simeq} H^i(\{1\};\mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & se\ i=0, \\ 0, & se\ i \geq 1. \end{cases}$$

Definição 4.1.1. (*[16], p.425*) *Um elemento $A \in \mathcal{P}(G)$ é chamado de T-**finito** se existe um subconjunto finito F de G tal que $A \subseteq F.T$. O conjunto de todos os subconjuntos T-finitos de G é um $\mathbb{Z}_2G$-submódulo de $\mathcal{P}(G)$ denotado por $\mathcal{F}_T(G)$. Um subconjunto de G cujo complementar é T-finito é chamado de T-**cofinito**.*

Observação 4.1.1. *Sejam G um grupo e T um subgrupo de G*

(a) Se T é finito então $\mathcal{F}_T(G) = \mathcal{F}(G)$.

(b) Se T=G então $\mathcal{F}_T(G) = \mathcal{P}(G)$.

Vamos mostrar que $\mathcal{F}_T(G)$ é um módulo induzido.

Lema 4.1.1. *Se T é um subgrupo de G então $\mathcal{F}_T(G) \simeq Ind_T^G \overline{\mathbb{Z}_2T} \simeq \mathbb{Z}_2G \otimes_{\mathbb{Z}_2T} \mathcal{P}(T)$ como $\mathbb{Z}_2G$-módulo, sendo $\overline{\mathbb{Z}_2T} = Coind_{\{1\}}^T \mathbb{Z}_2$.*

Demonstração: Considere as seguintes aplicações:

$$Ind_T^G \overline{\mathbb{Z}_2T} \xrightarrow{\vartheta} Coind_T^G \overline{\mathbb{Z}_2T} \xrightarrow{\nu} \overline{\mathbb{Z}_2G} \xrightarrow{\rho} \mathcal{P}(G)$$

com ϑ e ν as $\mathbb{Z}_2G$-aplicações dadas, respectivamente, por:

$\vartheta(g' \otimes \widetilde{f})(g) = \begin{cases} (gg') \cdot \widetilde{f}, & se\ gg' \in T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$, $\forall\ g' \otimes \widetilde{f} \in Ind_T^G \overline{\mathbb{Z}_2T}$, $\forall\ g \in G$, e $\nu(f')(g) = f'(g)(1)$, $\forall\ g \in G$, $\forall\ f' \in Coind_T^G \overline{\mathbb{Z}_2T}$, sendo $1 \in \mathbb{Z}_2T$.

Visto que ϑ é um monomorfismo e ν é um isomorfismo ([11], Proposição III.5.9), podemos ver $Ind_T^G \overline{\mathbb{Z}_2T}$ como um $\mathbb{Z}_2G$-submódulo de $\overline{\mathbb{Z}_2G}$ o qual é $\mathbb{Z}_2G$-isomorfo (via ρ) ao $\mathbb{Z}_2G$-submódulo $(\rho \circ \nu \circ \vartheta)(Ind_T^G \overline{\mathbb{Z}_2T})$ de $\mathcal{P}(G)$. Para concluir a demonstração é suficiente verificar que $(\rho \circ \nu \circ \vartheta)(Ind_T^G \overline{\mathbb{Z}_2T}) = \mathcal{F}_T(G)$. Essa igualdade segue dos seguintes fatos:

(1) $B \in \mathcal{F}_T(G) \Longleftrightarrow B = g_0T_0 \cup \ldots \cup g_kT_k$, com $g_i \in G$, $T_i \subset T$ e $k \in \mathbb{N}$.

(2) Considere o $\mathbb{Z}_2T$-isomorfismo $\overline{\rho} : \overline{\mathbb{Z}_2T} \to \mathcal{P}(T)$ e a aplicação injetiva $j : \overline{\mathbb{Z}_2T} \to \overline{\mathbb{Z}_2G}$ tal que $j(\widetilde{f}) = f$ com $f(g) = \begin{cases} \widetilde{f}(g), & \text{se } g \in T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$. Temos o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathbb{Z}_2T} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\overline{\rho}"'] & \overline{\mathbb{Z}_2G} \arrow[d, "\rho"] \\
\mathcal{P}(T) \arrow[r, hook] & \mathcal{P}(G)
\end{tikzcd}$$

(3) Se $g_0 \otimes \widetilde{f_0}$ é um gerador de $Ind_T^G\overline{\mathbb{Z}_2T}$, e $g \in G$,

$$(\nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \widetilde{f_0})(g^{-1}) = \begin{cases} [(g^{-1}g_0) \cdot \widetilde{f_0}](1) = \widetilde{f_0}(g^{-1}g_0), & \text{se } g^{-1}g_0 \in T, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, $(\rho \circ \nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \widetilde{f_0}) = \{g \in G \ ; \ (\nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \widetilde{f_0})(g^{-1}) = 1\} = \{g \in G \ ; \ g^{-1}g_0 \in T \text{ e } \widetilde{f_0}((g_0^{-1}g)^{-1}) = 1\} = \{g \in G \ ; \ g_0^{-1}g \in \overline{\rho}(\widetilde{f_0})\} = \{g \in G \ ; \ g_0^{-1}g = t \in \overline{\rho}(\widetilde{f_0})\} = \{g_0t \ ; \ t \in \overline{\rho}(\widetilde{f_0})\}$, ou seja, $(\rho \circ \nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \widetilde{f_0})) = g_0T_0 \in \mathcal{F}_TG$ com $T_0 = \overline{\rho}(\widetilde{f_0}) \subset T$. Mais geralmente, se $x = g_0 \otimes \widetilde{f_0} + g_1 \otimes \widetilde{f_1} + \ldots + g_k \otimes \widetilde{f_k} \in Ind_T^G\overline{\mathbb{Z}_2T}$ então $(\rho \circ \nu \circ \vartheta)(x) = g_0T_0 \cup \ldots \cup g_kT_k \in \mathcal{F}_T(G)$ com $T_i = \overline{\rho}(\widetilde{f_i}) \subset T$ para $i = 0, \ldots, k$.

(4) Dado $B = g_0T_0 \cup \ldots \cup g_kT_k \in \mathcal{F}_T(G)$, $B = (\rho \circ \nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes (\bar{\rho})^{-1}(T_0) + \ldots + g_k \otimes (\bar{\rho})^{-1}(T_k)) \in (\rho \circ \nu \circ \vartheta)(Ind_T^G\overline{\mathbb{Z}_2T})$. ■

Observação 4.1.2. *(i) Para um subconjunto B de G, seja $[B] = \{H \subset G \ ; \ B + H \in \mathcal{F}_T(G)\}$ o conjunto de todos os subconjuntos de G cuja diferença simétrica com B é um conjunto T-finito. O conjunto $\{[B] \ ; \ B \subseteq G\}$ pode ser identificado com $\dfrac{\overline{\mathbb{Z}_2G}}{\mathbb{Z}_2G \otimes_{\mathbb{Z}_2T} \overline{\mathbb{Z}_2T}} \simeq \dfrac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_T(G)}$ e para cada $B \in \mathcal{P}(G)$, a classe $[B] = B + \mathcal{F}_T(G)$ é um elemento do espaço quociente. Este espaço é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, com a G-ação dada por $g[B] = [gB]$.*

(ii) Obviamente $[\emptyset]$ é o elemento neutro de $\dfrac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_T(G)}$ e $[G] = [\emptyset] \Leftrightarrow G \in \mathcal{F}_T(G) \Leftrightarrow [G : T] < \infty$. Assim, quando $[G : T] = \infty$, $[\emptyset]$ e $[G]$ são dois elementos distintos do espaço quociente $\dfrac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_T(G)}$.

Definição 4.1.2. *Sejam G um grupo e T um subgrupo de G. Um subconjunto B de G é T-**quase invariante** se $B + gB \in \mathcal{F}_T(G)$ para todo $g \in G$. É usual denotar (vide [18] e [6])*

$$\mathcal{A}_T(G) := \{B \subset G \ ; \ B + gB \in \mathcal{F}_T(G), \ \forall \ g \in G\}.$$

Observação 4.1.3. *(i) $\mathcal{F}_T(G) \subset \mathcal{A}_T(G)$. De fato, se $B \in \mathcal{F}_T(G)$, então existe $F \subseteq G$, F finito, tal que $B \subseteq FT$. Deste modo, supondo $F = \{g_1, \cdots, g_k\}$ temos $FT = \{g_1, \cdots, g_k\}T$ e $gB \subseteq gFT = \{gg_1, \cdots, gg_k\}T \in \mathcal{F}_T(G)$ assim $gB + B \in \mathcal{F}_T(G), \forall g \in G$, e portanto $B \in \mathcal{A}_T(G)$.*

(*ii*) $(\frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_T(G)})^G = \frac{\mathcal{A}_T(G)}{\mathcal{F}_T(G)}$. *De fato,*

$$\begin{aligned}
(\frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_T(G)})^G &= \{[B] \in \frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_T(G)} \ ; \ g[B] = [B], \forall g \in G\} \\
&= \{[B] \in \frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_T(G)} \ ; \ [gB] = [B], \forall g \in G\} \\
&= \{[B] \in \frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_T(G)} \ ; \ gB + \mathcal{F}_T(G) = B + \mathcal{F}_T(G), \forall g \in G\} \\
&= \{[B] \in \frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_T(G)} \ ; \ gB + B \in \mathcal{F}_T(G), \forall g \in G\} = \frac{\mathcal{A}_T(G)}{\mathcal{F}_T(G)}.
\end{aligned}$$

Definição 4.1.3. *Dizemos que dois subgrupos S e T de G são* ***comensuráveis*** *se $[S : S \cap T] < \infty$ e $[T : T \cap S] < \infty$.*

Exemplo 4.1.2. (*i*) *Obviamente, todo subgrupo é comensurável a ele mesmo.*

(*ii*) *Se S e T são subgrupos de G com $T \subset S$ e $[S : T] < \infty$ então S e T são comensuráveis.*

Observação 4.1.4. *1. O conjunto de todos os $g \in G$ tal que T é comensurável a $T^g = gTg^{-1}$ será denotado por $Com_G(T)$.*

2. Usaremos a ***notação*** *$S \sim T$ para dizer que um conjugado $S^g = gSg^{-1}$ de S é comensurável a T, ou seja, $[S^g : S^g \cap T] < \infty$ e $[T : S^g \cap T] < \infty$, para algum $g \in G$. Assim $S \nsim T$ se, para todo $g \in G$, T e S^g não são comensuráveis, isto é, $[S^g : S^g \cap T] = \infty$ ou $[T : S^g \cap T] = \infty$*

Um fato interessante é que o módulo $\mathbb{Z}_2G \otimes_{\mathbb{Z}_2T} \overline{\mathbb{Z}_2T} \simeq \mathcal{F}_T(G)$ permanece inalterado se T é substituído por qualquer subgrupo comensurável com T, conforme veremos na Proposição 4.1.3.

Proposição 4.1.2. *Se T é um subgrupo de S com $[S : T] < \infty$ então $\mathcal{F}_T(G) = \mathcal{F}_S(G)$.*

Demonstração: Temos que $\mathcal{F}_T(G) = \{X \subset G \ ; \ X \subseteq F.T, \text{ com } F \text{ finito } \} = \{X \subset G \ ; \ X \subseteq g_1T \cup \ldots \cup g_mT\}$ (para certos elementos $g_1, ..., g_m$ de G). Mas obviamente $X \subseteq g_1T \cup \ldots \cup g_mT \subset g_1S \cup \ldots \cup g_mS$, se $T \subset S$. Portanto, $\mathcal{F}_T(G) \subset \mathcal{F}_S(G)$.

Para provar a outra inclusão, suponhamos que $[S : T] = k$, com isso teremos $S = s_1T \cup \ldots \cup s_kT$, com $\{s_1T, \ldots, s_kT\}$ classes laterais distintas. Deste modo $X \in \mathcal{F}_S(G) \Rightarrow X \subset F.S = F.(s_1T \cup \ldots \cup s_kT) = F.s_1T \cup \ldots \cup F.s_kT = (F.s_1 \cup \ldots \cup F.s_k).T = \widetilde{F}.T$, onde

$\widetilde{F} = F.s_1 \cup \ldots \cup F.s_k$ é finito, pois é a união finita de conjuntos finitos. Logo, $X \in \mathcal{F}_T(G)$ e com isso podemos concluir que $\mathcal{F}_T(G) = \mathcal{F}_S(G)$. ■

Proposição 4.1.3. *Sejam S e T dois subgrupos comensuráveis de G. Então S e T são comensuráveis se, e somente se $\mathcal{F}_S(G) = \mathcal{F}_T(G)$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Como S e T são comensuráveis temos que $[S : S \cap T] < \infty$ e $[T : S \cap T] < \infty$. Pela proposição anterior segue que $\mathcal{F}_S(G) = \mathcal{F}_{S\cap T}(G) = \mathcal{F}_T(G)$.

($\Leftarrow$) Suponhamos $\mathcal{F}_S(G) = \mathcal{F}_T(G)$. Se S não é comensurável com T então $[S : T \cap S] = \infty$ ou $[T : T \cap S] = \infty$. Suponhamos, por exemplo, que $[S : T \cap S] = \infty$ e seja $\{s_\alpha \ ; \ \alpha \in J\}$, com J infinito, um conjunto de representantes para as classes laterais à esquerda de $S \cap T$ em S. Assim $S = \bigcup_{\alpha \in J} s_\alpha(S \cap T)$. Seja $S_1 = \{s_\alpha \ ; \ \alpha \in I\} \subset S$. Obviamente S_1 é S-finito em G, isto é, $S_1 \in \mathcal{F}_S(G)$, pois $S_1 \subset S \subset \{1\}S$. Afirmamos, entretanto, que $S_1 \notin \mathcal{F}_T(G)$ e portanto $\mathcal{F}_S(G) \neq \mathcal{F}_T(G)$, o que contradiz a hipótese. De fato, se $S_1 \subset g_1T \cup \ldots \cup g_kT$, $g_i \in G$, como S_1 é finito, existem $s_\alpha, s_\beta \in S_1$ com $s_\alpha \neq s_\beta$ e $s_\alpha, s_\beta \in g_iT$ (ao mesmo g_iT). Assim $s_\alpha = g_it_\alpha$ e $s_\beta = g_it_\beta$, com $t_\alpha, t_\beta \in T$. Daí $s_\alpha t_\alpha^{-1} = s_\beta t_\beta^{-1}$ e $s_\beta s_\alpha^{-1} = t_\beta t_\alpha^{-1} \in T \cap S$. Consequentemente $s_\alpha(T \cap S) = s_\beta(S \cap T)$, o que contradiz a escolha dos s_α's. ■

4.2 $\mathcal{F}_T(G)$ e PD^n-pares $(G, \mathcal{S})$

Nesta seção veremos quais são os tipos de PD^n-pares sobre $\mathbb{Z}_2$ e mais alguns resultados envolvendo o $\mathbb{Z}_2G$-módulo $\mathcal{F}_T(G)$.

Proposição 4.2.1. *([17], Lema 2.1) Seja $(G, \mathcal{S})$ um par grupo. Se $(G, \mathcal{S})$ é um PD^n-par e T é um PD^{n-1}-subgrupo de G então $H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$.*

Demonstração: Do fato de G ser um PD^n-par segue que $H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \simeq H_{n-1}(G; \mathcal{F}_T(G))$. Por outro lado temos, pelo Lema 4.1.1, que $\mathcal{F}_T(G) \simeq \mathbb{Z}_2G \otimes_{\mathbb{Z}_2T} \mathcal{P}(T) = Ind_T^G \mathcal{P}(T)$. Daí, $H_{n-1}(G; \mathcal{F}_T(G)) \simeq H_{n-1}(G; Ind_T^G \mathcal{P}(T)) \overset{Shapiro}{\simeq} H_{n-1}(T; \mathcal{P}(T)) \overset{T:PD^{n-1}-subg.}{\simeq} H^0(T; \mathcal{P}(T)) \simeq H^0(T; Coind_{\{1\}}^T \mathbb{Z}_2) \overset{Shapiro}{\simeq} H^0(\{1\}; \mathbb{Z}_2) = (\mathbb{Z}_2)^{\{1\}} = \mathbb{Z}_2$. ■

Exemplo 4.2.1. *Se $(G, \mathcal{S})$ é o PD^3-par do Exemplo 3.1.2 e T é um PD^2-subgrupo de G, ou $(G, \mathcal{S})$ é o PD^2-par do Exemplo 3.1.3 e T é um PD^1-subgrupo de G, então $H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$.*

Vejamos agora mais detalhadamente quais são os tipos de PD^n-pares sobre $\mathbb{Z}_2$.

Proposição 4.2.2. *([17], Lema 2.2) Seja $(G,\mathcal{S})$ um PD^n-par com $\mathcal{S} = (S_i)_{i\in I} \neq \emptyset$ e $I = \{1,\ldots,k\}$, então uma das seguintes afirmações é verdadeira.*

(i) G é um PD^{n-1}-grupo e $\mathcal{S}$ consiste de apenas um grupo S com $[G:S]=2$.

(ii) G é um PD^{n-1}-grupo e $\mathcal{S}$ consiste de duas cópias de G.

(iii) $[G:S]=\infty$, $Com_G(S)=S$ e $S \nsim T$, para todo $S\neq T\in\mathcal{S}$.

Demonstração: Como $(G,\mathcal{S})$ é um PD^n-par, segue do Teorema 3.1.3 e do Corolário 3.1.1 que G é um D^{n-1}-grupo com módulo dualizante Δ e todo $S\in\mathcal{S}$ é um PD^{n-1}-grupo. Logo, se $T\in\mathcal{S}$, da Proposição 4.2.1 tem-se que $H^1(G,\mathcal{S};\mathcal{F}_T(G))\simeq\mathbb{Z}_2$.

Para (i) e (ii) suponhamos que exista $T\in\mathcal{S}$ tal que $[G:T]<\infty$ e considere a sequência exata longa para o par $(G,\mathcal{S})$ com coeficientes em $\mathcal{F}_T(G)$,

$0\to H^0(G;\mathcal{F}_T(G))\to H^0(\mathcal{S};\mathcal{F}_T(G))\to H^1(G,\mathcal{S};\mathcal{F}_T(G))\to H^1(G;\mathcal{F}_T(G))\to\cdots$

Sabemos que, $\mathcal{F}_T(G)\simeq\mathbb{Z}_2G\otimes_{\mathbb{Z}_2T}\mathcal{P}(T)=Ind_T^G\mathcal{P}(T)=Coind_T^G\mathcal{P}(T)$, pois $[G:T]<\infty$. Daí

$H^0(G;\mathcal{F}_T(G))\simeq H^0(G;Coind_T^G\mathcal{P}(T))\overset{Shapiro}{\simeq}H^0(T;\mathcal{P}(T))\overset{4.1.1}{=}\mathbb{Z}_2$,

$H^1(G;\mathcal{F}_T(G))\simeq H^1(G;Coind_T^G\mathcal{P}(T))\overset{Shapiro}{\simeq}H^1(T;\mathcal{P}(T))\overset{4.1.1}{=}0$.

Com isso temos a seguinte sequência exata curta:

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}_2\longrightarrow H^0(\mathcal{S};\mathcal{F}_T(G))\longrightarrow\mathbb{Z}_2\longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

Como $\mathbb{Z}_2$ é $\mathbb{Z}_2$-livre, temos que (4.1) cinde e consequentemente teremos

$$H^0(\mathcal{S};\mathcal{F}_T(G))\simeq\mathbb{Z}_2\bigoplus\mathbb{Z}_2. \tag{4.2}$$

Agora $H^0(\mathcal{S},\mathcal{F}_T(G))=\prod_{i\in I}H^0(S_i,\mathcal{F}_T(G))\overset{I\,finito}{\simeq}\bigoplus_{i\in I}H^0(S_i,\mathcal{F}_T(G))$, e ainda $H^0(S_i,\mathcal{F}_T(G))=(\mathcal{F}_T(G))^{S_i}=(Coind_{\{1\}}^G\mathbb{Z}_2)^{S_i}=(Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2G,\mathbb{Z}_2))^{S_i}=Hom_{\mathbb{Z}_2S_i}(\mathbb{Z}_2G,\mathbb{Z}_2)$, e $Hom_{\mathbb{Z}_2S_i}(\mathbb{Z}_2G,\mathbb{Z}_2)\simeq Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S_i),\mathbb{Z}_2)$, com $\mathbb{Z}_2(G/S_i)$ o $\mathbb{Z}_2$-módulo livre gerado pelas classes gS_i, ou seja, $\mathbb{Z}_2(G/S_i)\simeq\bigoplus_{j=1}^{[G:S_i]}(\mathbb{Z}_2)_j$, onde $(\mathbb{Z}_2)_j=\mathbb{Z}_2$, para todo j.

Logo,

$H^0(S_i;\mathcal{F}_T(G))\simeq Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/S_i),\mathbb{Z}_2)\simeq Hom_{\mathbb{Z}_2}(\bigoplus_{j=1}^{[G:S_i]}(\mathbb{Z}_2)_j,\mathbb{Z}_2)\simeq\prod_{j=1}^{[G:S_i]}Hom_{\mathbb{Z}_2}((\mathbb{Z}_2)_j,\mathbb{Z}_2)\simeq\prod_{j=1}^{[G:S_i]}(\mathbb{Z}_2)_j$. Deste modo, $H^0(S_i;\mathcal{F}_T(G))$ contém pelo menos uma cópia de $\mathbb{Z}_2$, visto que $[G:S_i]\geq 1$, e de (4.2) concluímos que a família $\mathcal{S}$ tem no máximo dois elementos, isto é, $k=|I|=|\mathcal{S}|\leq 2$.

Se $k = 1$, teremos $\mathcal{S} = \{S\}$. Logo, $\mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2 = H^0(\mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) = H^0(S; \mathcal{F}_T(G)) \simeq \bigoplus_{j=1}^{[G:S_i]} (\mathbb{Z}_2)_j$ e isso implica em $[G : S] = 2$ (e necessariamente $S = T$, o subgrupo inicial).

Se $k = 2$, temos $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ (um deles obviamente igual a T). Daí temos $\mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2 \overset{4.2}{\simeq} H^0(\mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \simeq \bigoplus_{i=1}^{2} H^0(S_i; \mathcal{F}_T(G))$, donde segue que, para cada $i \in \{1, 2\}$, $\mathbb{Z}_2 \simeq H^0(S_i; \mathcal{F}_T(G)) \simeq \bigoplus_{j=1}^{[G:S_i]} H^0(S_i; \mathcal{F}_T(G)) \simeq \bigoplus_{j=1}^{[G:S_i]} \mathbb{Z}_2$, e portanto $[G : S_i] = 1$, e assim $S_i = G$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Com isso temos (i) e (ii) (Notemos que nesses dois casos G é um PD^{n-1}-grupo, isso segue de [8], Teorema 9.9, p.157, usando que G é um D^{n-1}-grupo (logo não tem $\mathbb{Z}_2$- torção), T é um PD^{n-1}-grupo e $[G : T] < \infty$).

Observemos que da demonstração de (i) e (ii) apresentada, segue que "se $\mathcal{S}$ tem subgrupo de índice finito em G então $\mathcal{S}$ não terá nenhum subgrupo de índice infinito".

(iii) Suponha agora que todo $T \in \mathcal{S}$ tem índice infinito em G, então $H^0(G; \mathcal{F}_T(G)) = (\mathcal{F}_T(G))^G = (Ind_T^G \mathcal{P}(T))^G \overset{Prop.2.1.7}{=} 0$. Logo a sequência exata longa para o par $(G, \mathcal{S})$ com coeficientes em $\mathcal{F}_T(G)$ tem a forma

$$0 \to H^0(\mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \to H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \to H^1(\mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \to \dots$$

de modo que podemos ver $H^0(\mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) = \bigoplus_{i \in I} (\mathcal{F}_T(G))^{S_i}$ como um submódulo de $H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$. Seja $S \in \mathcal{S}$.

- Afirmamos que um elemento $Sg \in (\mathcal{F}_T(G))^S$ se, e somente se $g^{-1}Sg$ é T-finito, isto é, existe $F \subseteq G$, finito tal que $g^{-1}Sg \subseteq F.T$.

  Com efeito, suponhamos que $Sg \in (\mathcal{F}_T(G))^S$. Então $Sg \in \mathcal{F}_T(G)$ e $sSg = Sg$, para todo $s \in S$. Daí $g^{-1}Sg \subseteq g^{-1}F_1.T = F_2.T$, com F_1 e $F_2 = g_{-1}F_1$ subconjuntos finitos de G. Reciprocamente, se $g^{-1}Sg \subseteq F_3T$, com F_3 finito, então $Sg \subseteq gF_3.T = F_4.T \in \mathcal{F}_T(G)$ e claramente $sSg = Sg$, para todo $s \in S$, de modo que $Sg \in (\mathcal{F}_T(G))^S$.

- Afirmamos ainda que $H^0(S; \mathcal{F}_T(G)) = (\mathcal{F}_T(G))^S$ só tem elementos deste tipo, isto é, $(\mathcal{F}_T(G))^S$ é gerado pelos elementos Sg, $g \in G$ que são T-finitos.

  De fato, dado $A \in (\mathcal{F}_T(G))^S$ tem-se $A \subseteq F.T$, com F finito e $sA = A$, para todo $s \in S$. Consequentemente $SA = A$, assim $A = \bigcup_{g \in A} Sg$.

  Sejam $g_j \in A$, $j \in J$, elementos tais que $Sg_i \neq Sg_j$ se $g_i \neq g_j$ (representantes para as classes laterais). Então $A = \dot{\bigcup_{j \in J}} Sg_j$ e a soma (dado pela diferença simétrica) $Sg_i + Sg_j = (Sg_i \cup Sg_j) - (Sg_i \cap Sg_j) = Sg_i \cup Sg_j$.

- Agora, claramente $Sg \in (\mathcal{F}_T(G))^S$ para $S = T$ e $g \in T$, ou seja, $T \in (\mathcal{F}_T(G))^T = \{\emptyset, T\} \simeq \mathbb{Z}_2$ e $(\mathcal{F}_T(G))^S = \{\emptyset\}$ se $S \neq T$, pois supondo por exemplo $S_1 = T \in \mathcal{S}$ temos

$$H^0(\mathcal{S};\mathcal{P}(G)) \simeq \bigoplus_{i\in I} H^0(S_i;\mathcal{F}_T(G)) = (\mathcal{F}_T(G))^T \bigoplus \Big(\bigoplus_{i\in I, i\geq 2} (\mathcal{F}_T(G))^{S_i}\Big)$$

que é um submódulo de $H^1(G,\mathcal{S};\mathcal{F}_T(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$.

- Verifiquemos que $Com_G(S) = S$, para todo $S \in \mathcal{S}$. Claramente $S \subset Com_G(S)$ e, se $g \in Com_G(S)$, então $[S^g : S \cap S^g] < \infty$ e $[S : S \cap S^g] < \infty$, onde $S^g = gSg^{-1}$. Daí, $S^g = gSg^{-1} = u_1(S\cap S^g) \cup \ldots \cup u_k(S \cap S^g) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} u_iS = F.S$, com $F = \{u_1, \ldots, u_k\}$ finito um conjunto de representantes das classes laterais à esquerda de $S \cap S^g$ em S. Assim gSg^{-1} é S-finito e $Sg^{-1} \in (\mathcal{F}_S(G))^S = \{\emptyset, S\}$. Daí $Sg^{-1} = S$, de modo que $g \in S$ e portanto $Com_G(S) = S$.

- Finalmente mostremos que $S \nsim T$ se $S \neq T$.
  Suponhamos por absurdo que $S \sim T$ e $S \neq T$. Então existe $g \in G$ tal que S^g é comensurável com T, ou seja, $[T : S^g \cap T] < \infty$ e $[S^g : S^g \cap T] < \infty$. De modo similar ao raciocínio anterior, obtemos $S^g = v_1(S^g \cap T) \cup \ldots \cup v_r(S^g \cap T) = F.T$, onde $v_i \in S^g$, $i = 1, \ldots, r$ são representantes para as classes laterais de $S^g \cap T$ em S^g. Daí $Sg \in (\mathcal{F}_T(G))^S = \{\emptyset\}$, se $S \neq T$, o que é uma contradição. ■

Observação 4.2.1. *O resultado anterior também foi demonstrado em [5] para D^n-pares usando uma outra técnica.*

CAPÍTULO 5

DECOMPOSIÇÃO DE GRUPOS E INVARIANTES

Neste capítulo apresentamos o conceito de decomposição de grupos, alguns exemplos, e resultados envolvendo os invariantes $e(G)$ e $e(G, S)$ estudados em [25] e [24].

5.1 Decomposição de Grupos

Definição 5.1.1. *Dizemos que um grupo G é definido por geradores $X = \{x_i\}_i$ e relações $R = \{r_j = 1\}_j$ se $G \simeq \dfrac{F}{H}$ onde F é um grupo livre gerado por X e H é o menor subgrupo normal de F gerado por $\{r_j\}$. Neste caso dizemos que $\langle X; R\rangle$ é uma* ***apresentação*** *de G.*

Definição 5.1.2. *Sejam H e K grupos, com apresentações $H = \langle X_1; R_1\rangle$ e $K = \langle X_2; R_2\rangle$. Considere S um subgrupo de H e T um subgrupo de K, e suponhamos que S e T são isomorfos via $\theta : S \xrightarrow{\sim} T$. Então o* ***produto livre amalgamado de*** *H* ***e*** *K* ***em*** *$S \simeq T$, ou o* ***produto livre*** *de H e K* ***amalgamado em*** *S, é definido por $G = H *_S K :=< X_1, X_2; R_1, R_2,\ s = \theta(s), \forall s \in S >$. Se $S = \{1\}$ então $H *_S K$ é chamado de* ***produto livre*** *de H e K e é denotado simplesmente por $H * K$.*

Exemplo 5.1.1. *Consideremos $H = \langle a\rangle \simeq \mathbb{Z}$ e $K = \langle b\rangle \simeq \mathbb{Z}$. Então o produto livre de H*

e K é o grupo livre com dois geradores:

$$H * K = \langle a \rangle * \langle b \rangle = \langle a, b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Exemplo 5.1.2. *Sejam $H = \langle x \ ; \ x^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ e $K = \langle y \ ; \ y^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$. Então $G = H * K = \langle x, y \ ; \ x^2 = y^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. G é chamado grupo diedral infinito.*

Exemplo 5.1.3. *Sejam $H = \langle a_1 \rangle * \langle b_1 \rangle = \langle a_1, b_1 \ ; \ \emptyset \rangle$, $K = \langle a_2 \rangle * \langle b_2 \rangle = \langle a_2, b_2 \ ; \ \emptyset \rangle$, $S_1 = \left\langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \right\rangle$ e $S_2 = \left\langle b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} \right\rangle$. Então, considerando o isomorfismo $\sigma : S_1 \to S_2$ definido por $\sigma\left(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}\right) = b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1}$, temos que*

$$\begin{aligned} H *_S K &= \left\langle a_1, b_1, a_2, b_2 \ ; \ a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} = b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} \right\rangle \\ &= \left\langle a_1, b_1, a_2, b_2 \ ; \ a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = 1 \right\rangle . \end{aligned}$$

Definição 5.1.3. *Seja H um grupo com apresentação $H = \langle X_1 \ ; \ R_1 \rangle$. Se S, T são subgrupos de H com um dado isomorfismo $\theta : S \to T$ então o HNN-**grupo** ou HNN-**extensão** $H *_{S,\theta}$ sobre o grupo base H (subgrupo associado a S), com respeito a θ e letra estável p, é definido por: $H *_{S,\theta} = \langle X_1, p \ ; \ R_1, p^{-1} s p = \theta(s), \ \forall s \in S \rangle$.*

Exemplo 5.1.4. *Se $H = \{1\}$, $S = T = \{1\}$ e $\theta = id_{\{1\}}$ então $\{1\} *_{\{1\},\theta} = H *_{S,\theta} = \langle 1, p \ ; \ p^{-1} 1 \ p = 1 \rangle = \langle 1, p \rangle = \langle p \rangle \simeq \mathbb{Z}$.*

Exemplo 5.1.5. *Seja $H = \langle x, y \ ; \ xy = yx^2 \rangle$. Se $H = S = \langle x \rangle$ e $T = \langle x^2 \rangle$ então $G = S *_{S,\theta}$, com y como letra estável e o isomorfismo $\theta : S \to T$ dado por $\theta(x) = x^2$.*

De fato, $$\begin{aligned} S *_{S,\theta} &= \langle x, y \ ; \ y^{-1} s \ y = \theta(s), \ \forall s \in S \rangle \\ &= \langle x, y \ ; \ sy = ys^2, \forall s \in S \rangle = \langle x, y \ ; \ xy = yx^2 \rangle = G \end{aligned}$$

Exemplo 5.1.6. *Seja $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle = \langle a, b \ ; \ ab = ba \rangle$. Sejam $G_1 = S = S' = \langle a \rangle$, $\theta = id : S \to S$ e considere b como letra estável. Então $G = S *_{S,\theta}$.*

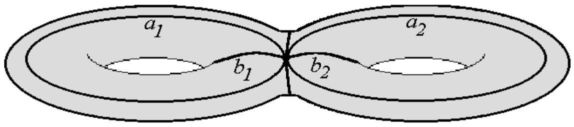
De fato, $$\begin{aligned} S *_{S,\theta} &= \langle a, b \ ; \ b^{-1} s \ b = \theta(s), \ \forall s \in S \rangle \\ &= \langle a, b \ ; \ b^{-1} a \ b = \theta(a) = a \rangle \\ &= \langle a, b \ ; \ ab = ba \rangle = G \end{aligned}$$

Em outras palavras, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z} *_{\mathbb{Z},id}$.

Observação 5.1.1. *Podemos dar uma interpretação geométrica para os grupos dos Exemplos 5.1.3 e 5.1.6*

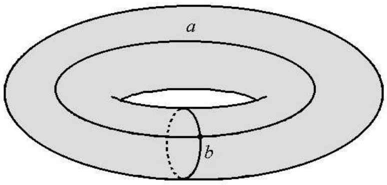
(i) O grupo $H *_S K$ dado no Exemplo 5.1.3 é o grupo fundamental da soma conexa de 2 toros. Isto segue do Teorema de Van-Kampen ([11], Teorema II.7.2 ou [19], IV,

5.3), considerando X_1, X_2 *e* $Y = X_1 \cap X_2$ *como na figura abaixo, e* $H = \pi_1(X_1)$, $K = \pi_1(X_2)$, $S = \pi_1(\partial X_1)$ *e* $T = \pi_1(\partial X_2)$.



X_1 $\quad Y \quad$ X_2

(ii) *Para o Exemplo 5.1.6, considere* X *o Toro, e* X_1 *e* X_2 *como sendo os subespaços de* X *representados na figura pelos caminhos fechados* a *e* b*, respectivamente. Sejam* $\alpha = [a]$ *e* $\beta = [b]$ *(classes de homotopia). Temos que* $S = \pi_1(X_1) =< \alpha >$, $\pi_1(X_2) =< \beta >$ *e* $\pi_1(X) = S*_{S,\theta} = G \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.



Definição 5.1.4. (*[16], p.42 ou [24], p.179) Dizemos que um grupo* G *se decompõe sobre um subgrupo* S*, se* G *é:*

(i) *um produto livre amalgamado, não trivial, de* H *e* K *em* S*, isto é,* $G = H *_S K$*, com* $H \neq S \neq K$*, ou*

(ii) *uma* HNN*-extensão com subgrupo associado* S*, isto é,* $G = H*_{S,\theta}$.

5.2 Invariantes $e(G)$ e $e(G, S)$

Decomposição de grupos sobre *subgrupos finitos* foi estudada por Stallings [26] e completamente caracterizada quando G é finitamente gerado via o invariante end $e(G)$.

Definição 5.2.1. *Sejam* G *um grupo e* $\mathcal{P}(G)$ *o* $\mathbb{Z}_2G$*-módulo dado pelo conjunto das partes de* G *com a operação adição sendo a operação diferença simétrica. Sejam* $\mathcal{F}(G)$ *o conjunto formado por todos os subconjuntos finitos de* G *e* $\mathcal{Q}(G) := \{A \in \mathcal{P}(G)$; *para todo* $g \in G$, $A + gA \in \mathcal{F}(G)\}$ $\mathbb{Z}_2G$*-submódulos de* $\mathcal{P}(G)$*. O* ***número de ends*** *do grupo* G*, que denotamos por* $e(G)$*, é definido por:*

$$e(G) := dim_{\mathbb{Z}_2}(\frac{\mathcal{Q}(G)}{\mathcal{F}(G)}) = dim_{\mathbb{Z}_2}(\frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}(G)})^G = dim_{\mathbb{Z}_2} H^0(G; \frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}(G)})$$

Observação 5.2.1. *Para maiores detalhes sobre $e(G)$ vide [25], § 5, p.171 ou [23]. Pode-se mostrar*

que:

(1) $e(G)$ assume apenas os valores $0, 1, 2$ e ∞.

(2) $e(G) = 0$ se, e somente se, G é finito.

(3) $e(\mathbb{Z}) = 2$.

(4) $e(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = 1$.

(5) $e(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) = 2$.

(6) $e(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) = \infty$.

O resultado de Stallings sobre decomposição de grupos, conhecido como Teorema de Estrutura é o seguinte:

Teorema 5.2.1. *([26], Teorema 5.A.9 ou [21], Teorema 4.1.5, p.75) Se G é um grupo finitamente gerado, então G se decompõe sobre um subgrupo finito se, e somente se, $e(G) \geq 2$.* ■

Exemplo 5.2.1. *1. $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \mathbb{Z} *_{\{1\}} \mathbb{Z}$, e $e(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) = \infty$.*

2. $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 *_{\{1\}} \mathbb{Z}_2$, e $e(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) = 2$.

3. $\mathbb{Z} = \{1\} *_{\{1\},\, id} =< \{1\}, p, psp^{-1} = s, \forall s \in \{1\} >=< p >$ e $e(\mathbb{Z}) = 2$.

Observação 5.2.2. *1. A implicação : "G se decompõe sobre um subgrupo finito $\Longrightarrow e(G) \geq 2$", é válida para G não necessariamente finitamente gerado ([25], Lema 6.3).*

2. De fato prova-se que $e(G) = 2 \Longleftrightarrow G = S *_{S,\theta}$, com S finito ou $G = H *_S K$, com S finito e $[H : S] = [K : S] = 2$ ([25], Teorema 5.12). E, $e(G) = \infty \Longleftrightarrow G = H *_S K$ com S finito contido propriamente em ambos os fatores e de índice > 2 em ao menos um deles, ou $G = H *_S$, onde S é finito, mergulhado propriamente em H ([26], 5.A.10).

O número de ends de um grupo infinito G pode ser expressado em termos de cohomologia de grupos (no nível 1), mais precisamente, temos:

Proposição 5.2.1. *Se G é um grupo infinito, então $e(G) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G; \mathbb{Z}_2 G)$.* ■

Notemos que, como $e(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = 1$, segue do resultado de Stallings que $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ não se decompõe sobre um subgrupo finito, entretanto $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ se decompõe sobre um subgrupo infinito, pois como vimos, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ é o HNN-grupo $\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z},\, id}$.

Observação 5.2.3. *Scott em [24] (1977), tentou generalizar o resultado de Stallings para grupos que se decompõem sobre subgrupos infinitos usando um invariante para par grupo (G, S).*

Definição 5.2.2. *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G. Define-se o invariante* **end** *$e(G, S)$,* ***para o par*** *(G, S), como*

$$e(G, S) = dim_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{P}(G/S)/\mathcal{F}(G/S))^G.$$

Usando tal invariante Scott ([24], Lema 1.8 ou [25], Lema 8.3) mostrou o resultado seguinte:

Proposição 5.2.2. *Se G se decompõe sobre S então $e(G, S) \geq 2$.*

Observação 5.2.4.

1. *Pode-se verificar que $e(Z \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = e(Z \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}) = e(\mathbb{Z}) = 2$, e como observamos, tem-se a decomposição $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z} *_{\mathbb{Z},\, id}$.*

2. *A recíproca da proposição anterior não é verdadeira (vide [25], Teorema 8.4, p.200).*

CAPÍTULO 6

OBSTRUÇÕES E INVARIANTES COHOMOLÓGICOS

Como já mencionado na introdução, em [16], Kropholler e Roller, apresentaram um interessante resultado sobre *decomposição de grupo de dualidade de Poincaré* n-dimensional sobre um *subgrupo comensurável com um subgrupo* de dualidade de Poincaré $(n-1)$-dimensional S dado. De fato, mostraram que nessas hipóteses a existência de uma tal decomposição depende de uma "obstrução", na forma de uma certa classe de cohomologia, denotada por $sing_G(S)$ definida por eles. Posteriormente, tais autores em [17], generalizaram tal resultado em duas direções apresentando um resultado sobre "decomposição adaptada"de um grupo G a uma família $\mathcal{S}$ de subgrupos de G e sobre "decomposição simultânea". Para tanto usaram uma obstrução "$sing_{(G,\mathcal{S})}(T)$", que é uma extensão da obstrução $sing_G(S)$. Neste capítulo faremos um estudo dessas obstruções, apresentando alguns resultados cuja demonstração em alguns casos iremos omitir. As obstruções são definidas a partir de aplicações *restrições*, assim, no estudo da decomposição de grupos via $sing_G(S)$, onde G é um grupo e S e T são subgrupos de G, é importante explorar a relação entre o elemento não nulo de $H^1(G;\mathcal{F}_S(G))$ (domínio da aplicação $res^G_{S,\mathcal{F}_S(G)}$) e $\mathcal{F}_S(G)$-classes de equivalências de elementos de $\mathcal{A}_S(G)=\{B\subset G\ ;\ B+gB\in\mathcal{F}_S(G),\ \forall\ g\in G\}$ (vide Lema 6.1.1) e no estudo da $sing_{(G,\mathcal{S})}(T,S)$, $\mathcal{S}=(S_i)_{i\in I}$, I finito, é importante explorar uma relação desse tipo para elementos de $H^1(G,\mathcal{S};\mathcal{F}_T(G))$ (domínio de $res^{(G,\mathcal{S})}_G$) e certas I-uplas de subconjuntos de G, mais explicitamente, de elementos de certo subconjunto $\mathcal{H}$ de $(\mathcal{A}_T(G))^I$ (vide Proposição 6.2.2). Um outro resultado interessante provado é a Proposição 6.2.3. Os invariantes $\widetilde{E}(G,S)$ e $E(G,\mathcal{S},\mathcal{F}_S(G))$ bem como alguns resultados envolvendo tais invariantes, decomposição de grupos e/ou dualidade são também apresentados ([1], [6]).

6.1 Obstrução *sing*

No que segue vamos supor que

G é um grupo finitamente gerado, S é um subgrupo de G finitamente gerado, e $H^1(G;\mathcal{F}_S(G))$ tem dimensão 1, isto é, $H^1(G;\mathcal{F}_S(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Definição 6.1.1. *Considere* $res^G_S : H^1(G;\mathcal{F}_S(G)) \to H^1(S;\mathcal{F}_S(G))$ *a aplicação restrição e* ξ *o gerador de* $H^1(G;\mathcal{F}_S(G))$. *Definimos*

$$sing_G(S) := res^G_S(\xi).$$

Veremos inicialmente uma relação entre a obstrução $sing_G(S)$ e subconjuntos S-quase invariantes.

Lema 6.1.1. (*[16], Lema 2.2 ou [21], Lema 4.3.2, p.81*) *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *A obstrução* $sing_G(S)$ *é zero (isto é,* $\xi \in Ker(res^G_S)$*);*

(ii) *Existe um subconjunto* S*-quase invariante* B*, que não é* S*-finito nem* S*-cofinito (assim,* $[B] \neq [\emptyset]$ *e* $[B] \neq [G]$*) em* $\mathcal{A}_S(G)/\mathcal{F}_S(G)$ *tal que* $SB = B$*.*

Demonstração: Seja $\epsilon : F \to \mathbb{Z}_2$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2G$. Então ϵ é também uma resolução de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2S$.
Da sequência exata

$$0 \to \mathcal{F}_S(G) \overset{k}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(G) \to \frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_S(G)} \to 0$$

obtemos o diagrama comutativo de complexos de cocadeias com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F;\mathcal{F}_S(G)) & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F;\mathcal{P}(G)) & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2G}(F;\frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_S(G)}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2S}(F;\mathcal{F}_S(G)) & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2S}(F;\mathcal{P}(G)) & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2S}(F;\frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_S(G)}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Daí, aplicando $H^*(-)$, obtemos o diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(G;\mathcal{F}_S(G)) & \longrightarrow & H^0(G;\mathcal{P}(G)) & \longrightarrow & H^0(G;\frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_S(G)}) & \longrightarrow & H^1(G;\mathcal{F}_S(G)) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle res^G_S} & & \\
0 & \longrightarrow & H^0(S;\mathcal{F}_S(G)) & \longrightarrow & H^0(S;\mathcal{P}(G)) & \longrightarrow & H^0(S;\frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_S(G)}) & \longrightarrow & H^0(S;\mathcal{F}_S(G)) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Tanto em (i) como em (ii) temos $[G:S]=\infty$ e daí, $H^0(G;\mathcal{F}_S(G))=(\mathcal{F}_S(G))^G=(Ind_S^G\mathcal{P}(S))^G=0$. Também temos $H^1(G;\mathcal{P}(G))=0$, pelo Lema de Shapiro. Assim,

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0\to\mathcal{P}(G)^G\simeq\mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\beta} & (\dfrac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_S(G)})^G & \xrightarrow{\delta} & H^1(G;\mathcal{F}_S(G))\to 0\ (*) \\
 & & \downarrow_i & & \downarrow_j & & \downarrow_{res_S^G} \\
0\to(\mathcal{F}_S(G))^S & \hookrightarrow & \mathcal{P}(G)^S & \xrightarrow{\alpha} & (\dfrac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_S(G)})^S & \xrightarrow{\rho} & H^1(S;\mathcal{F}_S(G))\to\cdots
\end{array}$$

Da hipótese de que $H^1(G;\mathcal{F}_S(G))\simeq\mathbb{Z}_2$ e da sequência $(*)$ ser exata, segue que $(\dfrac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_S(G)})^G=\dfrac{\mathcal{A}_S(G)}{\mathcal{F}_S(G)}$ tem dimensão dois, e portanto tem quatro elementos. Assim existe um elemento $[B_0]$ em tal espaço que é diferente de $[\emptyset]=\emptyset+\mathcal{F}_S(G)$ e de $[G]=G+\mathcal{F}_S(G)$, o que equivale a B_0 não ser S-finito e nem S-cofinito (de modo que $(\dfrac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_S(G)})^G=\{[\emptyset],\,[B_0],\,[B_0^c],\,[G]\}$).

Logo, se tivermos B_1 e B_2 subconjuntos S-quase invariantes de G, que não são nem S-finitos nem S-cofinitos, então $[B_1]=[B_2]$ ou $[B_1]=[B_2^c]$. Assim, mostramos que existe um subconjunto S-quase invariante B_0 de G que não é S-finito e nem S-cofinito, e então $\delta([B_0])$ é o elemento não trivial de $H^1(G;\mathcal{F}_S(G))\simeq\mathbb{Z}_2$, pois se $\delta([B_0])=0$ então da exatidão da sequência segue que $[B_0]\in Im\beta=\{[\emptyset],[G]\}$, visto que $(\mathcal{P}(G))^G=\{\emptyset,G\}\simeq\mathbb{Z}_2$, o que é uma contradição.

Suponhamos que $sing_G(S)$ é zero. Segue do diagrama que $\rho(j([B_0]))=0$, assim $j([B_0])\in Ker(\rho)=Im(\alpha)$. Agora, $(\mathcal{P}(G))^S$ é o conjunto de todos os subconjuntos B de G que satisfazem $SB=B$. Daí, um tal subconjunto B pode ser escolhido de modo que $[B]=\alpha(B)=[B_0]=j([B_0])$ e então B tem as propriedades requeridas.

Suponhamos agora que exista $[B]\in(\dfrac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_S(G)})^G$ tal que $[B]\neq[\emptyset],\ [B]\neq[G]$ e $SB=B$. Como $(\mathcal{P}(G))^G=\{\emptyset,G\}\simeq\mathbb{Z}_2$ e $Im\beta=\{[\emptyset],\ [G]\}$, então $[B]\notin Im\beta=Ker(\delta)$ e portanto $u:=\delta([B])\neq 0$, com $B\in(\mathcal{P}(G))^S$. Daí, pela comutatividade do diagrama e exatidão da segunda sequência, temos $res_S^G(u)=res_S^G(\delta([B]))=(\rho\circ j)([B])=\rho([B])=(\rho\circ\alpha)([B])=0$, como desejado. Logo, $sing_G(S)=0$. ∎

Sabemos que se T é comensurável a S, $\mathcal{F}_S(G)=\mathcal{F}_T(G)$, assim $H^1(G;\mathcal{F}_S(G))=H^1(G;\mathcal{F}_T(G))$, deste modo, $sing_G(S)=res_S^G(\xi)$, com

$$res_S^G:H^1(G;\mathcal{F}_S(G))\to H^1(S;\mathcal{F}_S(G)),$$

ou podemos ver, substituindo $H^1(G;\mathcal{F}_S(G))$ por $H^1(G;\mathcal{F}_TG)$,
$sing_G(S)=res_S^G(\xi)$, com

$$res_S^G:H^1(G;\mathcal{F}_T(G))\to H^1(S;\mathcal{F}_T(G)).$$

Nesse caso as duas obstruções $sing_G(S)$ e $sing_G(T)$ estão fortemente relacionadas como mostra o lema seguinte:

Lema 6.1.2. ([16], *Lema 2.3 ou* [21], *Lema 4.3.3*) *Se T é comensurável a S então $sing_G(T) = 0$ se, e somente se, $sing_G(S) = 0$.* ■

Proposição 6.1.1. ([16], *Lema 2.4*) *Se G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S então $sing_G(S) = 0$.* ■

Lema 6.1.3. *Sejam G um PD^n-grupo e S um PD^{n-1}-subgrupo de G. Então o grupo de cohomologia $H^1(G; \mathcal{F}_S(G))$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ e assim a obstrução $sing_G(S)$ está bem definida.*

Demonstração: Temos que $H^1(G; \mathcal{F}_S(G)) \simeq H_{n-1}(G; \mathcal{F}_S(G))$, pois G é um PD^n-grupo. Pelo Lema de Shapiro, $H_{n-1}(G; \mathcal{F}_S(G)) \simeq H_{n-1}(S; \overline{\mathbb{Z}_2 S})$, uma vez que $\mathcal{F}_S(G) \simeq \overline{\mathbb{Z}_2 S} \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} \mathbb{Z}_2 G = Ind_S^G \overline{\mathbb{Z}_2 S}$. Como S é um PD^{n-1}-subgrupo, $H_{n-1}(S; \overline{\mathbb{Z}_2 S}) \simeq H^0(S; \overline{\mathbb{Z}_2 S})$. Deste modo, $H^1(G; \mathcal{F}_S(G)) \simeq H^0(S; \overline{\mathbb{Z}_2 S}) = H^0(S; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 S, \mathbb{Z}_2)) = (Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 S; \mathbb{Z}_2))^S \simeq Hom_{\mathbb{Z}_2 S}(\mathbb{Z}_2 S; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$. ■

Finalmente apresentamos (sem demonstração) o resultado de Kropholler e Roller sobre decomposição para grupos de dualidade de Poincaré.

Teorema 6.1.1. ([16], *Teorema A*) *Sejam G um PD^n-grupo e S um PD^{n-1}-subgrupo. G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S se, e somente se, $sing_G(S) = 0$.* ■

6.1.1 A Obstrução *sing* e os Invariantes $\tilde{e}(G, S)$ e $\tilde{E}(G, S)$

O invariante $\tilde{e}(G, S)$, para G um grupo e S um subgrupo de G foi definido por Kropholler e Roller indiretamente em [16] e estudado mais detalhadamente em [18]. O invariante $\tilde{E}(G, S)$ foi definido por Andrade-Fanti ([2], [1] e [6]).

Apresentaremos aqui a definição destes invariantes e algumas de suas propriedades relacionadas com a obstrução *sing* e decomposição de grupos. Para maiores detalhes e resultados adicionais ver as referências mencionadas acima.

Como veremos no que segue, a condição $H^1(G; \mathcal{F}_S(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$ é equivalente a $\tilde{e}(G, S) = 2$.

Definição 6.1.2. *Seja (G, S) um par grupo com índice $[G : S]$ não necessariamente* *infinito. Define-se:*

$$\tilde{e}(G,S) = dim_{\mathbb{Z}_2} H^0(G; \frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_S(G)}) = dim_{\mathbb{Z}_2}(\frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_S(G)})^G.$$

Proposição 6.1.2. *([18], Lema 1.2) Se* $[G:S]=\infty$ *então* $\tilde{e}(G,S) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G;\mathcal{F}_S(G))$.

■

Corolário 6.1.1. *Seja* (G,S) *um par grupo com índice* $[G:S]=\infty$*. Então* $H^1(G;\mathcal{F}_S(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$ *(*$sing_G(S)$ *está bem definida) se, e somente se,* $\tilde{e}(G,S)=2$*. Em particular se G é um* PD^n*-grupo e S um* PD^{n-1}*-subgrupo então* $\tilde{e}(G,S)=2$. ■

Apresentamos a seguir a definição de $\widetilde{E}(G,S)$ e alguns resultados em termos desse invariante.

Definição 6.1.3. *Dado um par* (G,S)*, com* $[G:S]=\infty$*, define-se (vide [6])*

$$\widetilde{E}(G,S) := 1 + dim_{\mathbb{Z}_2}\ Ker(res^G_{S,\mathcal{F}_S(G)}) \qquad ,$$

onde $res^G_{S,\mathcal{F}_S(G)} : H^1(G;\mathcal{F}_S(G)) \to H^1(S;\mathcal{F}_S(G))$*, é a aplicação restrição.*

Pode-se verificar que, nas hipóteses acima, as condições $sing_G(S)=0$ e $Ker(res^G_S) \neq 0$ são equivalentes, mais precisamente temos:

Lema 6.1.4. *Se* (G,S) *é um par grupo com* $H^1(G;\mathcal{F}_S(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$*, então*

1. $sing_G(S) = 0 \Leftrightarrow \tilde{E}(G,S) = 2$,
2. $sing_G(S) \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{E}(G,S) = 1$.

Demonstração: Temos que $[G:S]=\infty$ visto que $H^1(G;\mathcal{F}_S G) \simeq \mathbb{Z}_2$, e $\tilde{E}(G,S) = 1 + \dim \text{Ker}\ res^G_S$. Logo
(i) $sing_G(S) = 0 \Leftrightarrow \text{Ker}\ res^G_S = H^1(G,\mathcal{F}_S G) \simeq \mathbb{Z}_2 \Leftrightarrow \tilde{E}(G,S)=2$.
(ii) $sing_G(S) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker}\ res^G_S = 0 \Leftrightarrow \tilde{E}(G,S) = 1$. ■

Como consequência da Proposição 6.1.1 e Teorema 6.1.1 obtem-se:

Proposição 6.1.3. *Seja* (G,S) *um par grupo satisfazendo* $H^1(G;\mathcal{F}_S(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$*, com G e S finitamente gerados. Se G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S então* $\tilde{E}(G,S)=2$*. Se G um* PD^n*-grupo e S um* PD^{n-1}*-subgrupo, G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S se, e somente se,* $\tilde{E}(G,S)=2$. ■

Exemplo 6.1.1. *Se (G, S) é um par grupo como nos dois casos (1) e (2) abaixo, então G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S:*

(1) $G = \mathbb{Z}^k$ e $S = \mathbb{Z}^{k-1}$, $k \geq 2$;

(2) $G = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$, onde $\theta : \mathbb{Z} \to Aut(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ é dada por $\theta(c)(a, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^c \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (a, 2ca + b)$ *com a operação em G definida por*

$$((a, b), c) + ((a_1, b_1), c_1) = ((a, b) + \theta(c)(a_1, b_1), c + c_1) = (a + a_1, b + b_1 + 2ca_1, c + c_1)$$

e $S = \{((a, b), 0); a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Isto segue do exemplo anterior, uma vez que em (1) G é um PD^k-grupo e S um PD^{k-1}-subgrupo e, em (2), G é um PD^3-grupo e S é um PD^2-subgrupo ([3], Exemplos (iii) e (vi)).

Motivados nesse fato e considerando que que $\tilde{E}(G, S)$ foi definido sem a restrição de que $H^1(G; \mathcal{F}_S(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$ os autores (em [1]) acreditavam que fosse possível, pensando em termos de $\tilde{E}(G, S)$ e não em termos de $sing_G(S)$, estender a primeira parte do resultado apresentado na proposição anterior. De fato isso é possível (ver teorema seguinte) que pode ser provado de maneira similar à dada em [16], pois usa dois resultados, cujas provas podem ser adaptadas ao invariante $\tilde{E}(G, S)$, retirando a hipótese de que $H^1(G; \mathcal{F}_S(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$ ([1]).

Teorema 6.1.2. *Seja (G, S) um par grupo com G e S finitamente gerados e $[G : S] = \infty$. Se G se decompõe sobre um subgrupo comensurável com S então $\tilde{E}(G, S) \geq 2$. Ou equivalentemente, $\tilde{E}(G, S) = 1$ implica que G não se decompõe sobre nenhum subgrupo comensurável com S.* ■

6.2 A Obstrução *sing* Generalizada

Dado um par grupo $(G, \mathcal{S})$ consistindo de um grupo G e uma família finita não vazia $\mathcal{S}$ de subgrupos de G, Müller em [20], p. 223, apresentou a seguinte definição de decomposição adaptada (de um grupo G sobre um subgrupo finito T).

Definição 6.2.1. *Uma decomposição $G = G_1 *_T G_2$ ou $G_1 *_{T,t}$ de G sobre T é chamada **adaptada** ao par $(G, \mathcal{S})$ (ou família $\mathcal{S}$) se T é finito e todo subgrupo S pertencente a*

$\mathcal{S}$ é conjugado a um subgrupo de G_1 ou G_2. Se uma tal decomposição existe, diz-se simplesmente que o ***par*** *$(G, \mathcal{S})$* ***é adaptado****.*

Exemplo 6.2.1. *O produto livre $G = G_1 * G_2$ é uma decomposição de G adaptada ao par $(G, \{G_1,\ G_2\})$ (tomando T o subgrupo trivial).*

Em [17], p. 411, Kropholler e Roller estenderam esta definição por considerar T n*ão necessariamente finito*, $(G, \mathcal{S})$ um PD^n-par, com $\mathcal{S}$ uma família (finita) de subgrupos de G, e T um PD^{n-1}- subgrupo e, apresentaram sob certas hipóteses de dualidade, alguns resultados sobre decomposição de grupos para pares grupo $(G, \mathcal{S})$. Para tanto usaram uma obstrução "$\text{sing}_{(G,\mathcal{S})}(T, S)$", que estende a obstrução $\text{sing}_G(S)$ referida anteriormente (se consideramos $\mathcal{S} = \emptyset$ e $T = S$). Um dos principais resultados apresentados foi:

Teorema 6.2.1. *([17] Teorema A, p.401) Seja $(G, \mathcal{S})$ um PD^n-par e T um PD^{n-1}-subgrupo de G, tal que T não é comensurável com nenhum conjugado de S_i, para todo S_i em $\mathcal{S}$. Então G admite uma decomposição adaptada a $\mathcal{S}$, sobre um subgrupo comensurável com T se, e somente se, $sing_{(G,\mathcal{S})}(T, T) \overset{not.}{=} sing_{(G,\mathcal{S})}(T) = 0$.* ∎

Nosso objetivo é apresentar a definição da obstrução "*sing generalizada*" para pares grupo, e apresentar alguns dos resultados de [17] relacionados a tal obstrução e que são úteis para a prova do resultado acima.

Vejamos primeiramente a definição de uma *sing* "mista".

Definição 6.2.2. *Sejam G um grupo, S e T subgrupos de G e $res^G_S : H^1(G; \mathcal{F}_T(G)) \to H^1(S; \mathcal{F}_T(G))$, a aplicação restrição. Se $H^1(G; \mathcal{F}_T(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$, com gerador ξ, então definimos a sing* ***mista*** *$sing_G(S, T) := res^G_{S,\mathcal{F}_T(G)}(\xi)$.*

Lema 6.2.1. *(a) $sing_G(S) = sing_G(S, S)$.*

(b) Se S e T são subgrupos comensuráveis de G então $sing_G(S, T) = sing_G(S)$, $sing_G(T, S) = sing_G(T)$, e $sing_G(S, T) = 0$ se, e somente se, $sing_G(T, S) = 0$.

Demonstração A parte (a) é óbvia e a parte (b) segue do fato que para S e T comensuráveis tem-se $\mathcal{F}_T(G) = \mathcal{F}_S(G)$ e $sing_G(S) = 0$ se, e somente se, $sing_G(T) = 0$. ∎

Definição 6.2.3. (***sing generalizada***) *Sejam $(G, \mathcal{S})$ um par grupo, e S e T subgrupos de G com $H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$. Seja ζ o único elemento não nulo de $H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G))$, então definimos*

$$sing_{(G,\mathcal{S})}(T,S) = res^G_S(res^{(G,\mathcal{S})}_G(\zeta)),$$

a imagem de ζ pela composta das aplicações restrições

$$H^1(G,\mathcal{S};\mathcal{F}_T(G)) \xrightarrow{res^{(G,\mathcal{S})}_G} H^1(G;\mathcal{F}_T(G)) \xrightarrow{res^G_S} H^1(S;\mathcal{F}_T(G)).$$

Observação 6.2.1. *1. Se $S = T$, denotamos $sing_{(G,\mathcal{S})}(T,T)$ simplesmente por $sing_{(G,\mathcal{S})}(T)$.*

2. Uma vez que $H^1(G,\emptyset;\mathcal{F}_T(G)) = H^1(G;\mathcal{F}_T(G))$ (por convenção), segue que $sing_{(G,\emptyset)}(S,T) = sing_G(S,T)$.

3. $sing_G(S) = sing_{(G,\emptyset)}(S,S) \overset{not.}{=} sing_{(G,\emptyset)}(S)$.

Lema 6.2.2. *Sejam $(G,\mathcal{S})$ um par grupo, S, T subgrupos de G, e suponhamos $H^1(G,\mathcal{S};\mathcal{F}_T(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$.*

1. Se T^* é um subgrupo comensurável com T então $sing_{(G,\mathcal{S})}(T^*,S) = sing_{(G,\mathcal{S})}(T,S)$.

2. Se S_1 é um subgrupo de S com $[S : S_1] < \infty$ então $sing_{(G,\mathcal{S})}(T,S) = 0 \Rightarrow sing_{(G,\mathcal{S})}(T,S_1) = 0$.

Demonstração:

1. Sabemos que se T^* é comensurável com T então $\mathcal{F}_T(G) = \mathcal{F}_{T^*}(G)$. Deste modo, como $sing_{(G,\mathcal{S})}(T^*,S) = (res^G_S \circ res^{(G,\mathcal{S})}_G)(\zeta)$, onde $res^G_S \circ res^{(G,\mathcal{S})}_G : H^1(G,\mathcal{S};\mathcal{F}_{T^*}(G)) \to H^1(S;\mathcal{F}_{T^*}(G))$, segue claramente que $sing_{(G,\mathcal{S})}(T^*,S) = sing_{(G,\mathcal{S})}(T,S)$.

2. Segue do fato que $res^G_{S_1} = res^S_{S_1} \circ res^G_S$
$$H^1(G;\mathcal{F}_T(G)) \overset{res^G_S}{\to} H^1(S;\mathcal{F}_T(G)) \overset{res^S_{S_1}}{\to} H^1(S_1;\mathcal{F}_T(G)),$$
e assim $sing_{(G,\mathcal{S})}(T,S_1) = res^G_{S_1}(res^{(G,\mathcal{S})}_G(\zeta)) = (res^S_{S_1} \circ res^G_S)(res^{(G,\mathcal{S})}_G)(\zeta) = res^S_{S_1}(res^G_S(res^{(G,\mathcal{S})}_G(\zeta))) = res^S_{S_1}(sing_{(G,\mathcal{S})}(T,S)) = res^S_{S_1}(0) = 0.$ ■

Vamos fixar G um grupo e S e T subgrupos de G. No estudo da decomposição de grupos via $sing_G(S) = sing_{(G,\emptyset)}(S)$ foi importante explorar a relação entre o elemento não nulo de $H^1(G;\mathcal{F}_S(G))$ (domínio da aplicação $res^G_{S,\mathcal{F}_S(G)}$) e $\mathcal{F}_S(G)$ - classes de equivalências de elementos de $\mathcal{A}_S(G)$ (vide Lema 6.1.1). No estudo da $sing_{(G,\mathcal{S})}(T,S)$ $\mathcal{S} = (S_i)_{i\in I}$, I finito, também é importante explorar uma relação desse tipo para elementos de $H^1(G,\mathcal{S};\mathcal{F}_T(G))$ (domínio de $res^{(G,\mathcal{S})}_G$) e certas I-uplas de subconjuntos de G, mais explicitamente, de elementos de certo subconjunto $\mathcal{H}$ de $(\mathcal{A}_T(G))^I$. Vejamos inicialmente uma relação entre elementos de $H^1(G;\mathcal{F}_T(G))$ (domínio da aplicação $res^G_{S,\mathcal{F}_T(G)}$) e $\mathcal{F}_T(G)$-classes de equivalências de elementos $\mathcal{A}_T(G)$, que é, de certo modo, uma extensão do Lema 6.1.1, envolvendo agora dois subgrupos S e T de G.

Lema 6.2.3. *([17], Lema 3.1) Sejam T, S subgrupos de G tal que $[G : T] = \infty$, e $[B] \in \mathcal{A}_T(G)/\mathcal{F}_T(G)$. Então existe uma sequência exata curta,*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathcal{A}_T(G)/\mathcal{F}_T(G) \xrightarrow{\delta} H^1(G; \mathcal{F}_T(G)) \longrightarrow 0,$$

e $\delta([B])$ pertence ao kernel da aplicação restrição $res_S^G : H^1(G; \mathcal{F}_T(G)) \to H^1(S; \mathcal{F}_T(G))$ se, e somente se existe $B_0 \in \mathcal{A}_T(G)$ tal que $B_0 + B$ é T-finito e $SB_0 = B_0$.

Demonstração: Considere a seguinte sequência exata de $\mathbb{Z}_2G$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_T(G) \longrightarrow \mathcal{P}(G) \longrightarrow \mathcal{P}(G)/\mathcal{F}_T(G) \longrightarrow 0. \tag{6.1}$$

Aplicando o funtor $H^*(G; -)$ a essa sequência obteremos a sequência exata longa em cohomologia

$0 \to H^0(G; \mathcal{F}_T(G)) \to H^0(G; \mathcal{P}(G)) \to H^0(G; \mathcal{P}(G)/\mathcal{F}_T(G)) \xrightarrow{\delta} H^1(G; \mathcal{F}_T(G)) \to H^1(G; \mathcal{P}(G)) \to \cdots$

Agora observando que

$H^0(G; \mathcal{F}_T(G)) = (\mathcal{F}_T(G))^G = (Ind_T^G \mathcal{P}(T))^G = 0$, pois $[G : T] = \infty$;

$H^0(G; \mathcal{P}(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$, e

$H^1(G; \mathcal{P}(G)) = 0$ (ver Exemplo 4.1.1 (aplicação do Lema de Shapiro)), e substituindo na sequência anterior obteremos a sequência desejada.

Para a segunda parte do Lema considere o seguinte diagrama comutativo, onde as linhas exatas são obtidas da sequência (6.1) aplicando os funtores $H^*(G; -)$ e $H^*(S; -)$ respectivamente,

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{P}(G))^G \arrow[r] \arrow[d, "res_S^G"] & (\mathcal{P}(G)/\mathcal{F}_T(G))^G \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "res_S^G"] & H^1(G; \mathcal{F}_T(G)) \arrow[d, "res_S^G"] \\
(\mathcal{P}(G))^S \arrow[r, "\alpha"] & (\mathcal{P}(G)/\mathcal{F}_T(G))^S \arrow[r, "\delta"] & H^1(S; \mathcal{F}_T(G)).
\end{tikzcd}$$

Suponha por hipótese que $\delta([B]) \in Ker(res_S^G)$, isto é, $res_S^G(\delta([B])) = 0$. Da comutatividade do diagrama temos $\delta(res_S^G([B])) = 0$, ou seja, $res_S^G([B]) \in Ker(\delta)$.

Como as sequências do diagrama são exatas segue que $[B] = res_S^G([B]) \in Im(\alpha) = Ker(\delta)$. Sendo assim, existe $B_0 \in (\mathcal{P}(G))^S$ tal que $\alpha(B_0) = [B]$.

Agora observe que

1. $\alpha(B_0) = B_0 + \mathcal{F}_T(G) = [B] = B + \mathcal{F}_T(G) \Rightarrow B_0 + B \in \mathcal{F}_T(G)$,
2. $B_0 \in (\mathcal{P}(G))^S = \{A \in \mathcal{P}(G); sA = A, \forall s \in S\} \Rightarrow SB_0 = B_0$,
3. $B_0 \in \mathcal{A}_T(G)$, pois $B_0 + B \in \mathcal{F}_T(G) \Rightarrow B_0 + B = X \in \mathcal{F}_T(G) \subset \mathcal{A}_T(G) \Rightarrow B_0 = B + X \in \mathcal{A}_T(G)$, visto que $B \in \mathcal{A}_T(G)$.

Portanto existe $B_0 \in \mathcal{A}_T(G)$ satisfazendo todas as propriedades desejadas.

Reciprocamente, supondo que existe $B_0 \in \mathcal{A}_T(G)$ tal que $B_0+B \in \mathcal{F}_T(G)$ e $SB_0 = B_0$, temos que

$B_0 + B \in \mathcal{F}_T(G) \Rightarrow [B_0] = [B]$ e $SB_0 = B_0 \Rightarrow B_0 \in (\mathcal{P}(G))^S$,

$B_0 \in (\mathcal{P}(G))^S \Rightarrow \alpha(B_0) = B_0 + \mathcal{F}_T(G) = B + \mathcal{F}_T(G) = [B] = res_S^G([B])$.

Como as sequências do diagrama são exatas temos $\delta \circ \alpha = 0$, e deste modo
$0 = \delta(\alpha(B_0)) = 0 \Rightarrow \delta(res_S^G([B])) \overset{d.\,comut.}{=} res_S^G(\delta([B])) = 0 \Rightarrow \delta([B]) \in ker(res_S^G)$. ■

Fixemos uma família finita e não vazia, $\mathcal{S} = (S_i)_{i\in I}$, de subgrupos de G. Como já mencionado queremos encontrar uma interpretação para os elementos de $H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G))$, mas agora em termos de certas I-uplas de subconjuntos de G. Para tanto precisamos entender melhor o comportamento da aplicação

$$res_G^{(G,\mathcal{S})} : H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \to H^1(G; \mathcal{F}_T(G)).$$

De fato, mostraremos que $res_G^{(G,\mathcal{S})}$ é a composta de duas aplicações. Isto será uma consequência (corolário) da proposição seguinte:

Proposição 6.2.1. *Seja $\tau : \mathbb{Z}_2G \to \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S})$ uma $\mathbb{Z}_2G$-aplicação preservando aumentação e considere as aplicações aumentação $\varepsilon : \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) \to \mathbb{Z}_2$ e $\epsilon : \mathbb{Z}_2G \to \mathbb{Z}_2$, tais que $\Delta = Ker(\varepsilon)$ e $\mathcal{G} = Ker(\epsilon)$. Então τ induz uma aplicação $\tau^* : Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta, M) \to Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\mathcal{G}, M)$, tal que $\tau^*(h) = h \circ \tau|_{\mathcal{G}}$ e a composição*

$$Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta, M) \xrightarrow{\tau^*} Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\mathcal{G}, M) \xrightarrow{\rho} H^i(G; M),$$

(ρ sendo o homomorfismo conexão) é a aplicação $res_G^{(G,\mathcal{S})} : H^1(G, \mathcal{S}; M) \to H^1(G; M)$, para todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo M.

Demonstração: Primeiro observamos que se τ preserva aumentação então $\varepsilon \circ \tau = \epsilon$. Logo, $u \in Ker(\epsilon) \Leftrightarrow \tau(u) \in Ker(\varepsilon)$. Assim temos bem definida a aplicação $\tau|_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \to \Delta$ e consequentemente está bem definida a aplicação

$$\tau^* : Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta, M) \to Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\mathcal{G}, M) \; ; \; \tau^*(h) = h \circ \tau|_{\mathcal{G}}.$$

Mostremos a segunda afirmação.

Seja M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Como vimos podemos identificar, a menos de isomorfismo, $H^1(G, \mathcal{S}; M)$ com $Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta, M)$, e seja

$$res_G^{(G,\mathcal{S})} : H^1(G, \mathcal{S}; M) \equiv Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta, M) \to H^1(G; M)$$

o homomorfismo da sequência exata longa (vide Teorema 2.3.1)

$$0 \to H^0(G; M) \to H^0(\mathcal{S}; M) \to H^0(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M)) \xrightarrow{res_G^{(G,\mathcal{S})}} H^1(G; M) \to \cdots$$

obtida a menos de isomorfismos por aplicar $H^*(G; -)$ a sequência exata curta

$$0 \to Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M) \equiv M \xrightarrow{\varepsilon^\#} Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M) \xrightarrow{i^\#} Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M) \to 0$$

(que foi obtida a partir da sequência $0 \to \Delta \xrightarrow{i} \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \to 0$).

Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \equiv Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M) \arrow[r, "\varepsilon^{\#}"] \arrow[d, "i_d"] & Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), M) \arrow[r, "i^{\#}"] \arrow[d, "\tau_1"] & Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_2"] & 0 \quad (1) \\
0 \arrow[r] & M \equiv Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M) \arrow[r, "\epsilon^{\#}"] & Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 G, M) \arrow[r, "j^{\#}"] & Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{G}, M) \arrow[r] & 0 \quad (2).
\end{tikzcd}$$

onde a sequência de baixo é obtida a partir da sequência exata curta:

$$0 \to \mathcal{G} \xrightarrow{j} \mathbb{Z}_2 G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_2 \to 0,$$

com j é a inclusão, e as aplicações verticais são dadas por id, $\tau_1(h) := h \circ \tau$ e $\tau_2(f) := f \circ \tau|_{\mathcal{G}}$.

É fácil verificar que o diagrama acima é comutativo, ou seja, $\tau_1 \circ \varepsilon^{\#} = \epsilon^{\#}$ e $\tau_2 \circ i^{\#} = j^{\#} \circ \tau_1$.

Daí, pela naturalidade do homomorfismo conexão ("$\rho^n : H^n(G; M_1) \to H^{n+1}(G; M_1')$", vide Proposição 2.2.2) segue que o quadrado seguinte é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbb{Z}_2 G}(\Delta, M) \equiv H^0(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M)) \arrow[r, "res_G^{(G,\mathcal{S})}"] \arrow[d, "\tau^*"] & H^1(G; M) \arrow[d, "id"] \\
Hom_{\mathbb{Z}_2 G}(\mathcal{G}, M) \equiv H^0(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{G}, M)) \arrow[r, "\rho"] & H^1(G; M).
\end{tikzcd}$$

e assim $res_G^{(G,\mathcal{S})}$ é a composição desejada, onde ρ é o homomorfismo conexão para a sequência exata longa induzida da sequência (2) acima por aplicar $H^*(G; -)$:

$0 \to H^0(G; M) \to H^0(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 G, M)) \to H^0(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{G}, M)) \xrightarrow{\rho} H^1(G; M) \to \cdots,$

e $\tau^*(h) = h \circ \tau|_{\mathcal{G}}$. ■

Corolário 6.2.1. *Suponhamos $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in I}$ uma família finita de subgrupos de G. Escolha um elemento $i \in I$, por exemplo $i = 1$, e seja $\tau : \mathbb{Z}_2 G \to \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S})$ definida nos geradores por $\tau(g) = gS_1$ e estendida por linearidade. Considere T um subgrupo de G. Então τ é uma $\mathbb{Z}_2 G$-aplicação preservando aumentação, e $res_G^{(G,\mathcal{S})} : H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \to H^1(G; \mathcal{F}_T(G))$ é a composição $Hom_{\mathbb{Z}_2 G}(\Delta, \mathcal{F}_T(G)) \xrightarrow{\tau^*} Hom_{\mathbb{Z}_2 G}(\mathcal{G}, \mathcal{F}_T(G)) \xrightarrow{\rho} H^1(G; \mathcal{F}_T(G))$, sendo $\tau^*(h) = h \circ \tau|_{\mathcal{G}}$*

Demonstração: É fácil verificar que τ é um $\mathbb{Z}_2 G$-aplicação.

Agora, dado um elemento gerador $1.g \in \mathbb{Z}_2 G$, tem-se: $(\varepsilon \circ \tau)(1.g) = \varepsilon(gS_1) = 1 = \epsilon(1.g)$, donde segue que τ preserva aumentação. Assim basta aplicar o resultado anterior para τ e $M = \mathcal{F}_T(G)$. ■

Seja $(G, \mathcal{S})$ um par grupo, com $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in I}$, I finito, e considere

$$(\mathcal{P}(G))^I = \underbrace{\mathcal{P}(G) \times \cdots \times \mathcal{P}(G)}_{I \text{ vezes}},$$

sendo um elemento $\mathbf{A} \in (\mathcal{P}(G))^I$ da forma $(A_i)_{i \in I}$, com $A_i \in \mathcal{P}(G)$, para todo $i \in I$. Agora estamos em condições de estabelecer uma relação entre elementos de $H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G))$ e certos elementos de $(\mathcal{A}_T(G))^I$.

Para $\mathbf{A} = (A_i)_{i\in I}$ e $\mathbf{B} = (B_i)_{i\in I}$ pertencentes a $(\mathcal{P}(G))^I$ definimos as operações usuais,

$g\mathbf{B} = g(B_i)_{i\in I} = (gB_i)_{i\in I}$,

$\mathbf{B}^c = (B_i^c)_{i\in I}$,

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_i)_{i\in I} + (B_i)_{i\in I} = (A_i + B_i)_{i\in I}$,

$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = (A_i)_{i\in I} \cap (B_i)_{i\in} = (A_i \cap B_i)_{i\in I}$,

$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ se, e somente se $A_i \subseteq B_i, \forall i \in I$.

Escolha um elemento $i \in I$, por exemplo $i = 1$.

Proposição 6.2.2. *([17], Lema 3.2) Seja* $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{B} \in (\mathcal{A}_T(G))^I \ ; \ B_i + B_j \in \mathcal{F}_T(G)$ *e* $S_iB_i = B_i$ *para todo* $i, j \in I\}$*. Então:*

(1) Existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\delta} H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \longrightarrow 0.$$

(2) Se $\boldsymbol{B} = (B_i)_{i\in I} \in \mathcal{H}$ *representa um elemento* ζ *de* $H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G))$*, mais precisamente, se* $\delta(\boldsymbol{B}) = \zeta$ *então* $res_G^{(G,\mathcal{S})}(\zeta) \in H^1(G; \mathcal{F}_T(G))$ *é representado por* B_1*, ou seja,* $\delta([B_1]) = res_G^{(G,\mathcal{S})}(\zeta)$*, onde* δ *é a aplicação dada na sequência do Lema 6.2.3, e* $res_G^{(G,\mathcal{S})} : H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \longrightarrow H^1(G; \mathcal{F}_T(G))$*.*

Demonstração:

(1) Considere a sequência exata longa para o par $(G, \mathcal{S})$ com coeficientes em $\mathcal{P}(G)$,

$$0 \to H^0(G; \mathcal{P}(G)) \to H^0(\mathcal{S}; \mathcal{P}(G)) \xrightarrow{\delta} H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{P}(G)) \to H^1(G; \mathcal{P}(G)) \to \cdots \tag{6.2}$$

Sabemos que $H^0(G; \mathcal{P}(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$ e $H^1(G; \mathcal{P}(G)) = 0$, donde obtem-se a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow H^0(\mathcal{S}; \mathcal{P}(G)) \xrightarrow{\delta} H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{P}(G)) \longrightarrow 0 \tag{6.3}$$

Ainda

• $H^0(\mathcal{S}; \mathcal{P}(G)) \overset{not.}{=} \prod_{i\in I} H^0(S_i; \mathcal{P}(G)) = \prod_{i\in I} (\mathcal{P}(G))^{S_i} \simeq Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), \mathcal{P}(G))$ (pois $\phi : Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), \mathcal{P}(G)) \longrightarrow \prod_{i\in I} (\mathcal{P}(G))^{S_i}$; $f \mapsto (f(S_i))_{i\in I}$ é um isomorfismo, com inversa $\phi^{-1} : \prod_{i\in I} (\mathcal{P}(G))^{S_i} \to Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}), \mathcal{P}(G))$; $\phi^{-1}(B_1, \ldots, B_n) = f$, com $f(S_i) := B_i$, $i \in I$).

• $H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{P}(G)) := H^0(G, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M)) = (Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M))^G \simeq Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta, \mathcal{P}(G))$, onde Δ é o Kernel da aplicação aumentação $\varepsilon : \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) \to \mathbb{Z}_2$.

• Podemos considerar $H^1(G,\mathcal{S};\mathcal{F}_T(G))$ como um submódulo de $H^1(G,\mathcal{S};\mathcal{P}(G))$, pois $H^1(G,\mathcal{S};\mathcal{F}_T(G)) \simeq Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta,\mathcal{F}_T(G)) \subset Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta,\mathcal{P}(G)) \simeq H^1(G,\mathcal{S};\mathcal{P}(G))$. A inclusão segue do fato que $\mathcal{F}_T(G) \subset \mathcal{P}(G)$.

• A menos de isomorfismo, podemos ver o homomorfismo δ da sequência (6.2) como a aplicação $\varphi : Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}),\mathcal{P}(G)) \to Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta,\mathcal{P}(G))$; $h \mapsto h|_\Delta$. Notemos que, como nesse caso δ é sobrejetora (pois a sequência (6.3) é exata), então φ também será sobrejetora.

Tome $\mathcal{K} = \phi(\varphi^{-1}(Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta,\mathcal{F}_T(G)))) \subset H^0(\mathcal{S};\mathcal{P}(G)) = \prod_{i\in I}(\mathcal{P}(G))^{S_i} \subset (\mathcal{P}(G))^I$. Essas condições estão indicadas no diagrama abaixo:

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & H^0(\mathcal{S};\mathcal{P}(G)) & \xrightarrow{\delta} & H^1(G,\mathcal{S};\mathcal{P}(G)) \longrightarrow 0 \\
 & & & \simeq\uparrow \phi & & \downarrow\simeq \\
 & & & Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}),\mathcal{P}(G)) & \xrightarrow{\varphi} & Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta,\mathcal{P}(G)) \\
 & & & & & \cup \\
 & & & & \mathcal{K} \to & Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta,\mathcal{F}_T(G)) \simeq H^1(G,\mathcal{S};\mathcal{F}_T(G))
\end{array}
$$

Afirmamos que $\mathcal{K} = \mathcal{H}$. De fato:

. Se $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ então $\mathbf{B} = \phi(f) = (f(S_i))_{i\in I}$, para algum $f \in Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}),\mathcal{P}(G))$ com $\varphi(f) = f|_\Delta \in Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta,\mathcal{F}_T(G))$, e além disso temos

1. $B_i+gB_i = f(S_i)+gf(S_i) = f(S_i)+f(gS_i) = f(S_i+gS_i) = f(1S_i+gS_i)$. Do fato de $1S_i+gS_i \in \Delta$ para todo $i \in I$, pois $\varepsilon(1S_i+gS_i) = \varepsilon(1S_i)+\varepsilon(gS_i) = \overline{1}+\overline{1} = \overline{0}$, e $\varphi(f) = f|_\Delta : \Delta \to \mathcal{F}_T(G)$, segue que $B_i + gB_i \in \mathcal{F}_T(G)$, para todo $i \in I$, ou seja, $B \in (\mathcal{A}_T(G))^I$.
2. $B_i + B_j = f(S_i) + f(S_j) = f(S_i + S_j) = f(1S_i + 1S_j)$, com $1S_i + 1S_j \in \Delta$ para todo $i, j \in I$, e deste modo $B_i + B_j \in \mathcal{F}_T(G)$, para todo $i, j \in I$.
3. $\mathbf{B} \in \prod_{i\in I}(\mathcal{P}(G))^{S_i} \Rightarrow B_i \in (\mathcal{P}(G))^{S_i}, \forall i \in I \Rightarrow S_iB_i = B_i, \forall i \in I$.

De 1., 2. e 3. concluímos que $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$.

. Por outro lado, tomando $\mathbf{B} \in \mathcal{H}$, temos que $\mathbf{B} = (B_i)_{i\in I}$ é tal que $S_iB_i = B_i$ para todo $i \in I$, logo $\boldsymbol{B} \in \prod_{i\in I}(\mathcal{P}(G))^{S_i}$. Como ϕ é um isomorfismo existe $f \in Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}),\mathcal{P}(G))$ tal que $\phi(f) = (B_i)_{i\in I}$. Logo, $B_i = f(S_i)$, para todo $i \in I$. Além disso, para qualquer $x \in \Delta$, x é a soma de um número par de elementos da forma $\sum_{j\in J\subset I}\overline{1}g_jS_j$. Suponha (sem perda de generalidade) que $J = \{1,\ldots,k\}$ e $x = \overline{1}g_1S_1 + \ldots + \overline{1}g_kS_k$, com k um número par, desta forma segue que $\varphi(f)(x) = f|_\Delta(x) = f(x) = f(\sum_{j\in J}\overline{1}g_jS_j) = \sum_{j\in J} f(\overline{1}g_jS_j) = \sum_{j\in J}\overline{1}g_jf(S_j) = \sum_{j\in J} g_jf(S_j) = \sum_{j\in J} g_jB_j = \sum_{j\in J}(g_jB_j+B_j+B_j) = [\sum_{j\in J}(g_jB_j+B_j)+\sum_{j\in J} B_j] \in \mathcal{F}_T(G)$, pois $(g_jB_j + B_j) \in \mathcal{F}_T(G)$, para todo $j \in J$; $(B_j + B_i) \in \mathcal{F}_T(G)$, para todo $i, j \in J$, e J têm um número par de elementos. Logo $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$, e portanto temos que $\mathcal{K} = \mathcal{H}$. Assim, temos bem definida uma aplicação sobrejetora (visto que φ é sobrejetora)

$$\delta_1 := \varphi\circ\phi^{-1} : \mathcal{H} = \mathcal{K} = \phi(\varphi^{-1}(Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta, \mathcal{F}_T(G)))) \to Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta, \mathcal{F}_T(G)) \quad .$$

Mostremos que $Ker(\varphi\circ\phi^{-1}) \simeq \mathbb{Z}_2$. Sabemos que $Ker(\varphi) \simeq \mathbb{Z}_2$. Suponhamos $Ker(\delta) = \{f_0, f_1\}$. Então obviamente $\{f_0, f_1\} \subset \delta^{-1}(Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta, \mathcal{F}_T(G)))$ e portanto $\{\phi(f_0), \phi(f_1)\} \subset \phi(\varphi^{-1}(Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta, \mathcal{F}_T(G)))) = \mathcal{H}$ e além disso $\{\phi(f_0), \phi(f_1)\} \subset Ker(\delta_1)$. Suponhamos que existe $\mathbf{B} \in \mathcal{H}$ tal que $\mathbf{B} \in Ker(\delta_1)$ mas $\mathbf{B} \notin \{\phi(f_0), \phi(f_1)\}$, então $\mathbf{B} = \phi(f_3)$, com $f_3 \notin \{f_0, f_1\}$ e $0 = \delta_1(\mathbf{B}) = \varphi(\phi^{-1}(\mathbf{B})) = \varphi(\phi^{-1}(\phi(f_3))) = \varphi(f_3)$, ou seja, $f_3 \in Ker(\varphi) = \{f_0, f_1\}$, o que é uma contradição, e portanto temos que $Ker(\delta_1) = \{\phi(f_0), \phi(f_1)\} \simeq \mathbb{Z}_2$.

Obtemos então a sequência exata desejada (onde por abuso estamos denotando $\varphi\circ\phi^{-1}$ simplesmente por δ)

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\delta} H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \longrightarrow 0.$$

(2) Provemos agora a segunda afirmação, isto é, que se $\mathbf{B} = (B_i)_{i\in I}$ é tal que $\delta(\mathbf{B}) = \zeta \in H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G))$ então $\xi = res_G^{(G,\mathcal{S})}(\zeta) \in H^1(G; \mathcal{F}_T(G))$ é representado por B_1, mais precisamente $\delta([B_1]) = \xi = res_G^{(G,\mathcal{S})}(\zeta)$.

Lembremos que $\delta(\mathbf{B}) = \zeta$, com $\mathbf{B} \in \mathcal{H}$ implica que $\mathbf{B} = \phi(h)$, com $h \in \varphi^{-1}(Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta, \mathcal{F}_T(G)))$, ou seja, $h|_\Delta = \varphi(h) \in Hom_{\mathbb{Z}_2G}(\Delta, \mathcal{F}_T(G))$, e temos $\mathbf{B} = \phi(h) = (h(S_i))_{i\in I}$.

Ainda, $\zeta = \delta(\mathbf{B}) = (\varphi\circ\phi^{-1})(\mathbf{B}) = \varphi\circ\phi^{-1}(\phi(h)) = h|_\Delta$. Daí pelo Corolário 6.2.1, $\xi = res_G^{(G,\mathcal{S})}(\zeta) = res_G^{(G,\mathcal{S})}(h|_\Delta) = (\rho\circ\tau^*)(h|_\Delta) = \rho(h|_\Delta\circ\tau|_\mathcal{G}) = \rho((h\circ\tau)|_\mathcal{G})$. Mas dado $1.g \in \mathbb{Z}_2G$, $(h\circ\tau)(1.g) = h(gS_1) = gh(S_1) = gB_1$ e $[gB_1] = [B_1]$, pois $gB_1 + B_1 \in \mathcal{F}_T(G)$, visto que $B_1 \in \mathcal{A}_T(G)$. ■

Proposição 6.2.3. *Sejam $(G, \mathcal{S})$ um par grupo, $\mathcal{S} = (S_i)_{i\in I}$, I finito, S e T subgrupos de G, e suponhamos $H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$. Se $\mathcal{S}^* = (S_i^*)_{i\in I}$ é uma outra família de subgrupos de G, onde $S_i^* = S^{g_i} = g_iS_ig_i^{-1}$, T^* é comensurável com T e $S^* \sim S$, então $sing_{(G,\mathcal{S}^*)}(T^*, S^*) = 0$ se, e somente se $sing_{(G,\mathcal{S})}(T, S) = 0$.*

Demonstração: Consideraremos apenas o caso em que $\mathcal{S} \neq \emptyset$, o outro caso é similar.

Vimos que $\mathcal{F}_T(G)$ depende apenas da classe de comensurabilidade de T, de modo que $\mathcal{F}_T(G) = \mathcal{F}_{T^*}(G)$ e $sing_{(G,\mathcal{S})}(T, S) = sing_{(G,\mathcal{S})}(T^*, \mathcal{S})$ (vide Lema 6.2.2).

(i) Mostremos que $H^1(G, \mathcal{S}^*; \mathcal{F}_T(G)) \simeq H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Seja $\sigma : \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}^*) \to \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S})$ definida nos geradores por $\sigma(1.S_i^*) = g_i S_i$ e estendida por linearidade. Claramente σ é um $\mathbb{Z}_2 G$-homomorfismo. Além disso, σ é um isomorfismo pois

$$\begin{array}{rcl} \sigma^{-1} : \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) & \to & \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}^*) \\ 1.S_i & \mapsto & g_i^{-1} S_i^* \end{array}$$

é o inverso de σ.

Temos também que σ preserva aumentação, ou seja, $\varepsilon \circ \sigma = \varepsilon_*$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}^*) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\varepsilon_*"'] & \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ \mathbb{Z}_2 & \end{tikzcd}$$

onde ε e ε_* são os homomorfismos aumentação. Basta ver isso nos geradores : $(\varepsilon \circ \sigma)(1.S_i^*) = 1 = \varepsilon_*(1.S_i^*)$. Daí, $u \in Ker(\varepsilon_*) \overset{not.}{=} \Delta_* \Leftrightarrow \sigma(u) \in Ker(\varepsilon) = \Delta$, e temos bem definido o $\mathbb{Z}_2 G$-homomorfismo

$$\sigma|_{\Delta_*} : Ker(\varepsilon_*) = \Delta_* \mapsto Ker(\varepsilon) = \Delta.$$

Sabemos que, a menos de isomorfismo, tem-se $H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) = Hom_{\mathbb{Z}_2 G}(\Delta, \mathcal{F}_T(G))$ e $H^1(G, \mathcal{S}^*; \mathcal{F}_T(G)) = Hom_{\mathbb{Z}_2 G}(\Delta_*, \mathcal{F}_T(G))$.

Agora

$$\begin{array}{rcl} \bar{\sigma} : Hom_{\mathbb{Z}_2 G}(\Delta, \mathcal{F}_T(G)) & \to & Hom_{\mathbb{Z}_2 G}(\Delta_*, \mathcal{F}_T(G)) \\ h & \mapsto & \bar{\sigma}(h) := h \circ \sigma|_{\Delta_*} \end{array}$$

nos dá o isomorfismo desejado.

Em particular, se $\zeta \in Hom_{\mathbb{Z}_2 G}(\Delta, \mathcal{F}_T(G)) \equiv H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$ é o gerador então $\zeta_* := \bar{\sigma}(\zeta) = \zeta \circ \sigma|_{\Delta_*}$ é o gerador de $H^1(G, \mathcal{S}^*; \mathcal{F}_T(G))$.

(ii) Seja $\mathbf{B} = (B_i)_{i \in I}$ um representante de ζ em $H^1(G, \mathcal{S}; \mathcal{F}_T(G))$, isto é, $\mathbf{B} \in \mathcal{H} = \{(B_i)_{i \in I} \; ; \; B_i + B_j \in \mathcal{F}_T(G)$ e $S_i B_i = B_i, \forall\, i, j \in I\}$ e $\delta(\mathbf{B}) = \zeta$. Afirmamos que $B^* = (g_i B_i)_{i \in I}$ representa o elemento não nulo ζ_* de $H^1(G, \mathcal{S}^*; \mathcal{F}_T(G))$. Para isso lembremos que, conforme visto na demonstração da Proposição 6.2.2, parte (*1*), $\zeta = \delta(\mathbf{B}) \overset{def.\delta}{=} (\varphi \circ \phi^{-1})(\mathbf{B}) = \varphi(f) = f|_\Delta$, onde $f(S_i) = B_i$.

Também devemos ter, pela Proposição 6.2.2, $\zeta_* = \delta(\mathbf{B}^*) = f_*|_{\Delta_*}$ para algum $f_* \in Hom_{\mathbb{Z}_2 G}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}^*), \mathcal{P}(G))$, com $f_*(1.S_i^*) = B_i^*$ e $\mathcal{H}^* = \{(B_i^*)_{i \in I} \; ; \; B_i^* + B_j^* \in \mathcal{F}_T(G)$ e $S_i^* B_i^* = B_i^*\}$. Considere $f_* := f \circ \sigma : \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}^*) \to \mathcal{P}(G)$. Então $f_* \in Hom_{\mathbb{Z}_2 G}(\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}^*), \mathcal{P}(G))$ e $f_*|_{\Delta_*} = (f \circ \sigma)|_{\Delta_*} = f|_\Delta \circ \sigma|_{\Delta_*} = \zeta \circ \sigma|_{\Delta_*} = \zeta_*$.

Assim devemos ter $B_i^* = f_*(S_i^*) = f_*(1.S_i^*) = (f \circ \sigma)(1.S_i^*) = f(g_i S_i) = g_i f(S_i) = g_i B_i$, isto é, $\mathbf{B}^* = (g_i B_i)_{i \in I}$.

(I) Vamos provar agora a proposição para $S^* \sim S$, em dois casos particulares :

1° caso: $S^* = gSg^{-1}$, para algum $g \in G$.

2° caso: S^* e S são tais que $[S^* : S] < \infty$,

ou seja, vamos provar que se $S^* = gSg^{-1}$ ou $[S^* : S] < \infty$, então:

$$sing_{(G,\mathcal{S})}(T,S) = 0 \Leftrightarrow sing_{(G,\mathcal{S}^*)}(T,\mathcal{S}^*) = sing_{(G,\mathcal{S}^*)}(T^*,\mathcal{S}^*) = 0.$$

- Suponhamos inicialmente que $sing_{(G,\mathcal{S})}(T,S) = res_S^G(res_G^{(G,\mathcal{S})}(\zeta)) = 0$.

  Como $\mathbf{B} = (B_i)_{i \in I} \in \mathcal{H}$ representa o elemento ζ de $H^1(G,\mathcal{S};\mathcal{F}_T(G))$, sabemos da Proposição 6.2.2, parte (*2*), que $\xi = res_G^{(G,\mathcal{S})}(\zeta)$ é representado por B_1. Mais precisamente, $\delta([B_1]) = \xi = res_G^{(G,\mathcal{S})}(\zeta)$.

  Da suposição de que $res_S^G(res_G^{(G,\mathcal{S})}(\zeta)) = sing_{(G,\mathcal{S})}(T,S) = 0$, segue que $res_S^G(\delta([B_1])) = 0$. Deste modo, pelo Lema 6.2.3 existe $B_0 \in A_T(G)$ tal que $B_1 + B_0 \in \mathcal{F}_T(G)$ e $B_0 = SB_0$.

  Queremos concluir que $sing_{(G,\mathcal{S}^*)}(T,\mathcal{S}^*) = 0$, ou seja, $res_{S^*}^G(res_G^{(G,\mathcal{S}^*)}(\zeta)) = 0$. Por (*ii*), ζ_* corresponde a $\mathbf{B}^* = (g_i B_i)_{i \in I}$ e consequentemente, pela Proposição 6.2.2, $\xi = res_G^{(G,\mathcal{S}^*)}(\zeta)$ corresponde a $g_1 B_1 = B_1^*$. Novamente pelo Lema 6.2.3 é suficiente provar que, nos dois casos já citados, existe ${B_0}^* \in A_T(G)$ tal que $B_0^* + B_1^* \in \mathcal{F}_T(G)$ e $S^* B_0^* = B_0^*$. Provemos que isso realmente ocorre:

  1° caso: $(S^* = gSg^{-1})$ Nesse caso tomando $B_0^* = gB_0$ segue que

  1. $B_0^* + B_1^* \in \mathcal{F}_{T^*}(G)$, pois $B_0^* + B_1^* = gB_0 + g_1 B_1 = gB_0 + g_1 B_1 + g_1 B_0 + g_1 B_0 = gB_0 + g_1 B_0 + g_1(B_1 + B_0) = gB_0 + B_0 + B_0 + g_1 B_0 + g_1(B_1 + B_0) \in \mathcal{F}_T(G)$, uma vez que $gB_0 + B_0 \in \mathcal{F}_T(G)$, $B_0 + g_1 B_0 \in \mathcal{F}_T(G)$ e $g_1(B_1 + B_0) \in \mathcal{F}_T(G)$.
  2. $S^* B_0^* = gSg^{-1} g B_0 = gSB_0 = gB_0 = B_0^*$.

  2° caso: $([S^* : S] < \infty)$

  $[S^* : S] = k < \infty \Rightarrow S^* = h_1 S \cup \ldots \cup h_k S$, ($h_i, i = 1, \ldots, k$, representantes das classes laterais).

  Seja $S_0 = \{h_1, \ldots, h_k\} \subset S^*$ e tome $B_0^* = S_0 B_0$. Deste modo temos

  1. $B_1^* + B_0^* = g_1 B_1 + S_0 B_0 = g_1 B_1 + (h_1 B_0 \cup \ldots \cup h_k B_0) = (g_1 B_1 + h_1 B_0) \cup \ldots \cup (g_1 B_1 + h_k B_0) \subseteq F_1 T \cup \ldots \cup F_k T = (F_1 \cup \ldots \cup F_k)T$, com $F_1, \ldots, F_k$ finitos, ou seja, $B_1^* + B_0^* \in \mathcal{F}_T(G) = \mathcal{F}_{T^*}(G)$.
  2. A inclusão $B_0^* \subset S^* B_0^*$ é clara.

     Note que $S_0 \subset S^* \Rightarrow S^* S_0 \subset S^*$; $S^* = h_1 S \cup \ldots \cup h_k S = S_0 S$, e $SB_0 = B_0$. Deste modo teremos $S^* B_0^* = S^*(S_0 B_0) = (S^* S_0) B_0 \subset S^* B_0 = S_0 S B_0 = S_0 B_0 = B_0^*$. E com isso temos a igualdade $B_0^* = S^* B_0^*$.

Logo, pelo Lema 6.2.3, tem-se $sing_{(G,\mathcal{S}^*)}(T^*, S^*) = 0$, nos dois casos afirmados. Em particular, provamos que

$$sing_{(G,\mathcal{S})}(T, S) = 0 \Rightarrow sing_{(G,\mathcal{S}^*)}(T, S) \tag{6.4}$$

(pois basta tomar $S^* = S$ no 2° caso, visto que obviamente $[S^* : S] = 1$)

- Para a recíproca, suponhamos $sing_{(G,\mathcal{S}^*)}(T^*, S^*) = 0$.
  Observemos que $\mathcal{S} = (\mathcal{S}^*)^*$, usando agora g_i^{-1}, visto que $g_i^{-1} S_i^* g_i = S_i$. Assim, a recíproca para o caso $S^* = S^g \Leftrightarrow S = (S^*)^{g^{-1}}$, segue da implicação anterior, usando o par $(G, \mathcal{S}') = (G, \mathcal{S}^*)$, e $S' = S^*$, pois $sing_{(G,\mathcal{S}^*)}(T, S^*) = 0 \Rightarrow sing_{(G,(\mathcal{S}^*)^*)}(T, (S^*)^*) = 0$, isto é, $sing_{(G,\mathcal{S})}(T, S) = 0$. Vejamos a recíproca para o 2° caso, isto é, $[S^* : S] < \infty$. Usando (6.4) e o Lema 6.2.2, temos: $sing_{(G,\mathcal{S}^*)}(T, S^*) = 0 \overset{6.4}{\Rightarrow} sing_{(G,(\mathcal{S}^*)^*)}(T, S^*) = 0 \Rightarrow sing_{(G,\mathcal{S})}(T, S^*) = 0 \overset{Lema\,6.2.2}{\Rightarrow} sing_{(G,\mathcal{S})}(T, S) = 0$.

(II) Provemos então a proposição para o caso geral.

Sejam S^* e S subgrupos quaisquer de G com $S^* \sim S$. Então existe $g \in G$ tal que S^* e S^g são comensuráveis. Assim $[S^* : S^g \cap S^*] < \infty$ e $[S^g : S^g \cap S^*] < \infty$. Daí, usando (I), e o fato que $\mathcal{S} = (\mathcal{S}^*)^*$, conforme o observado, obtemos $sing_{(G,\mathcal{S})}(T, S) = 0 \overset{1°caso}{\Leftrightarrow} sing_{(G,\mathcal{S}^*)}(T, S^g) = 0 \overset{2°caso}{\Leftrightarrow} sing_{(G,\mathcal{S})}(T, S^g \cap S^*) = 0 \overset{2°caso}{\Leftrightarrow} sing_{(G,\mathcal{S}^*)}(T, S^*) = 0$. ■

6.3 O Invariante $E(G, \mathcal{S}, \mathcal{F}_T(G))$

O invariante cohomológico $E(G, \mathcal{S}, M)$, M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo qualquer, foi definido em [2]. Se T é um subgrupo de G podemos considerar $M = \mathcal{F}_T(G)$ e o invariante $E(G, \mathcal{S}, \mathcal{F}_T(G))$. Esse invariante é uma extensão de $\tilde{E}(G, S)$, uma vez que:

$$\tilde{E}(G, S) = E(G, \{S\}, \mathcal{F}_S(G)).$$

Como vimos, alguns resultados sobre decomposição de grupos foram obtidos envolvendo $\tilde{E}(G, S)$. Assim pode ser interessante estudar $E(G, \mathcal{S}, \mathcal{F}_T(G))$ para ver se esse invariante nos fornece algum resultado sobre decomposição de grupos envolvendo a família $\mathcal{S}$ (por exemplo, sobre decomposição adaptada).

Nesse sentido, nós finalizamos esse trabalho apresentando uma cota superior para $E(G, \mathcal{S}, \mathcal{F}_T(G))$ (quando $(G, \mathcal{S})$ é um PD^n-par e T é um PD^{n-1}-subgrupo de G).

Definição 6.3.1. *Sejam $(G, \mathcal{S})$ um par grupo, onde $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in I}$ é uma família não vazia de subgrupos de G, não necessariamente distintos com $[G : S_i] = \infty$, para todo $i \in I$, e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Define-se*

$$E(G, \mathcal{S}, M) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} ker(res_{\mathcal{S}}^G),$$

sendo $res^G_{\mathcal{S}} : H^1(G;M) \to \prod_{i\in I} H^1(S_i;M)$; $[f] \mapsto res^G_{\mathcal{S}}([f]) = (res_i[f])_{i\in I}$, $res_i : H^1(G;M) \to H^1(S_i;M)$ *a aplicação restrição induzida (no nível* 1 *de cohomologia) da inclusão* $S_i \hookrightarrow G$.

Proposição 6.3.1. *Dado um par grupo* $(G,\mathcal{S})$, *se* $(G,\mathcal{S})$ *é um* PD^n*-par com* $\mathcal{S} \neq \emptyset$ $([G : S_i] = \infty$, *para todo* $i \in I)$ *e* T *é um* PD^{n-1}*-subgrupo de* G *então* $E(G,\mathcal{S},\mathcal{F}_T(G)) \leq 2$.

Demonstração: Considere a sequência exata longa para o par $(G,\mathcal{S})$ com coeficientes em $\mathcal{F}_T(G)$

$$0 \to H^0(G;\mathcal{F}_T(G)) \to \prod_{i\in I} H^0(S_i;\mathcal{F}_T(G)) \xrightarrow{\delta} H^1(G,\mathcal{S};\mathcal{F}_T(G)) \xrightarrow{J} H^1(G;\mathcal{F}_T(G)) \xrightarrow{res^G_{\mathcal{S}}} \prod_{i\in I} H^1(S_i;\mathcal{F}_T(G)) \to \cdots$$

Da Proposição 4.2.1 temos que $H^1(G,\mathcal{S};\mathcal{F}_T(G)) \simeq \mathbb{Z}_2$. Como a sequência é exata, $ker(res^G_{\mathcal{S}}) \simeq Im(J)$. Assim temos que $dim(ker(res^G_{\mathcal{S}})) = 0$ ou $dim(ker(res^G_{\mathcal{S}})) = 1$ e portanto $E(G,\mathcal{S},\mathcal{F}_T(G)) \leq 2$. ■

Exemplo 6.3.1. *Seja* (G,S) *o* PD^2*-par dado no Exemplo 3.1.3. Se* T *é um* PD^1*- subgrupo de* G *então* $E(G,\mathcal{S},\mathcal{F}_T(G)) \leq 2$.

Mais geralmente

Exemplo 6.3.2. *Se* X *é uma superfície compacta da qual retiramos* r *discos abertos* D_i *com* $\partial D_i = S^1_i$, $i = 1,\ldots,r$, *então o par* $(G,\mathcal{S})$, *onde* $G = \pi_1(X)$ *e* $\mathcal{S} = (\pi_1(S^1_i))_{I\in I}$, *é um* PD^2*-par. Logo, se* T *é um* PD^1*-subgrupo de* G, *temos* $(G,\mathcal{S},\mathcal{F}_T(G)) \leq 2$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ANDRADE, M.G.C.; FANTI, E.L.C. A note about splittings of groups and commensurability under a cohomological point of view. **preprint**.

[2] ANDRADE, M.G.C.; FANTI E.L.C. A relative cohomological invariant for group pairs. **Manuscripta Mathematica**. 83, 1-18, 1994.

[3] ANDRADE, M.G.C.; DACCACH, J. A.; FANTI, E.L.C. On certain relative cohomological invariants. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**. 21, 335-352, 2005.

[4] ANDRADE, M.G.C.; DACCACH, J. A.; FANTI, E.L.C. On relative cohomology of groups. **Revista de Matemática e Estatística**. 17, 275-288,1999.

[5] ANDRADE, M.G.C.; FANTI, E.L.C.; PAPANI, F.M.G. A relative invariant, duality and splittings of groups. **Revista de Matemática e Estatística**. 21, 131-141, 2003.

[6] ANDRADE, M.G.C; FANTI, E.L.C.; SILVA, F. S. M. S. Another characterization for a certain invariant for a group pair. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**. v.35, p.349- 356, 2007.

[7] BIERI, R. Gruppen Mit Poincarè Dualität. **Comm. Math. Helv**. v.47, p.373-396, 1972.

[8] BIERI, R. Homological Dimension of Discrete Groups. **Queen Mary College Notes**. London, 1976.

[9] BIERI, R., ECKMANN, B. Groups with Homological Duality Generalizing Poincaré Duality.. **Inventiones Math** v.20, p.103-124, 1973.

[10] BIERI, R., ECKMANN, B. Relative Homology and Poincaré duality for group pairs. **Journal of Pure and Applied Algebra** v.13, p.277-319, 1978.

[11] BROWN, K.S. **Cohomology of Groups**. 87. New York: Springer-Verlag, 1982.(Graduate Texts in Mathematics)

[12] CIOCA, D.M. **Cohomologia e Ends de Grupos**. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Instituto de Biociencias Letras e Ciencias Exatas, Universidades Estadual Paulista, São José do Rio Preto. 1997.

[13] DICKS, W.; DUNWOODY, M.J. **Groups acting on graphs**. Cambridge University Press, Poincaré Duality, 1989.

[14] JOHNSON, F.E.A.; WALL, C.T.C. On Groups Satisfing Poincaré Duality. **Annals of Math**. v.96, p.592-598, 1972.

[15] HU, S.T. **Introduction to Homological Algebra**. San Francisco: Holden-Day Series in Mathematics, 1968.

[16] KROPHOLLER, P.H.; ROLLER, M.A. Splittings of Poincaré duality groups. **Math. Z**. 97, 421-438, 1988.

[17] KROPHOLLER, P.H.; ROLLER, M.A. Splittings of Poincaré duality groups II. **J. London Math Soc**. (2) 38, 420-420, 1988.

[18] KROPHOLLER, P. H.; ROLLER, M. A. Relative ends and duality groups. **Journal of Pure and Applied Algebra** 61, p.197 - 210, 1989.

[19] MASSEY, W.S. **Algebraic Topology: An Introduction**. New York: Springer-Verlag, 1967.

[20] MÜLLER, H. Decomposition theorems for group pairs. **Math. Z**. 176, 223 - 246, 1981.

[21] RICIERI, M. M. **Decomposição de grupos e Invariantes ends**. 2007. 90 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Instituto de Biociencias Letras e Ciencias Exatas, Universidades Estadual Paulista, São José do Rio Preto. 2007.

[22] ROTMAN, J.J.; **An Introduction to Homological Algebra**, Academic Press, Inc., 1979.

[23] SANTOS, A. P. **Cohomologia de Grupos e Invariantes Algébricos**.2006 . Dissertação (Mestrado em Matemática)- Instituto de Biociencias Letras e Ciencias Exatas, Universidades Estadual Paulista, São José do Rio Preto. 2006.

[24] SCOTT, G. P. Ends of Pairs of Groups, **J. Pure Appl**. Algebra 11, 179-198, 1977.

[25] SCOTT, G. P.; WALL, C. T. C. Topological Methods in Group Theory. **London Math. Soc. Lect. Notes Series** 36, Homological Group Theory, 137 - 203, 1979.

[26] STALLINGS, J. R. Groups Theory and 3- dimensional manifolds. Yale Univ. Press, 61 pp, 1971.

[27] STREBEL, R. A remark on subgroups of infinite index in Poincaré duality groups, **Comment. Math. Helv** 52, 317-324, 1977.

ÍNDICE REMISSIVO

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, ____ /____ /____

____

Assinatura