



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**

**Faculdade de Ciências - Câmpus de Bauru**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA**

**MATEUS EDUARDO BOCCARDO**

**UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE INTEGRAIS  
APOIADA NA ENGENHARIA DIDÁTICA E NA RESOLUÇÃO DE  
PROBLEMAS**

**BAURU/SP  
2025**

**MATEUS EDUARDO BOCCARDO**

**UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE  
INTEGRAIS APOIADA NA ENGENHARIA DIDÁTICA E NA RESOLUÇÃO DE  
PROBLEMAS**

Tese apresentada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, câmpus Bauru, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação para a Ciência e Matemática.


**Orientadora:** Profa. Dra. Renata Cristina Geromel Meneghetti.

Bauru  
2025

B664p      Boccardo, Mateus Eduardo  
              UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE  
INTEGRAIS APOIADA NA ENGENHARIA DIDÁTICA E NA  
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS / Mateus Eduardo Boccardo. --  
Bauru, 2025  
              349 p.  
  
              Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP),  
Faculdade de Ciências, Bauru  
              Orientadora: Renata Cristina Geromel Meneghetti  
  
              1. Resolução de Problemas. 2. Engenharia Didática. 3. Cálculo  
Diferencial e Integral. 4. Licenciatura. 5. Educação Matemática. I.  
              Título.

**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE MATEUS EDUARDO BOCCARDO, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA, DA FACULDADE DE CIÊNCIAS - CÂMPUS DE BAURU.**

Aos 14 dias do mês de agosto do ano de 2025, às 14h, por meio de Videoconferência, realizou-se a defesa de TESE DE DOUTORADO de MATEUS EDUARDO BOCCARDO, intitulada **UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE INTEGRAIS APOIADA NA ENGENHARIA DIDÁTICA E NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**, sob orientação da Profa. Dra. Renata Cristina Geromel Meneghetti. A Comissão Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Profa. Dra. RENATA CRISTINA GEROMEL MENEGHETTI (Orientador(a) - Participação Virtual) do(a) Departamento de Matemática / Universidade de São Paulo, Profa. Dra. MARILENA BITTAR (Participação Virtual) do(a) Instituto de Matemática / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS, Prof. Dr. INOCENCIO FERNANDES BALIEIRO FILHO (Participação Virtual) do(a) Departamento de Matemática / UNESP/Câmpus de Ilha Solteira, Profa. Dra. ABIGAIL FREGNI LINS (Participação Virtual) do(a) Departamento de Matemática / Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Prof. Assoc. NELSON ANTONIO PIROLA (Participação Virtual) do(a) Departamento de Educação / Unesp / Câmpus de Bauru. Após a exposição pelo doutorando e arguição pelos membros da Comissão Examinadora que participaram do ato, de forma presencial e/ou virtual, o discente recebeu o conceito final:  \_ \_ Aprovado \_ \_ \_ . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelo(a) Presidente(a) da Comissão Examinadora.

 Documento assinado digitalmente  
RENATA CRISTINA GEROMEL MENEGHETTI  
Data: 14/08/2025 18:04:33-0300  
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Profa. Dra. RENATA CRISTINA GEROMEL MENEGHETTI

### **Impacto potencial desta pesquisa**

Esta pesquisa traz ricas contribuições tanto para área da Educação Matemática, quanto para a prática docente de Matemática, como um todo. Utilizou-se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas associada aos pressupostos teórico-metodológicos da Engenharia Didática, almejando potencializar os processos de ensino e aprendizagem de conceitos de Integral, conteúdo de suma importância para os alunos de graduação dos cursos de Ciências Exatas no país. A pesquisa apresenta um caráter inédito, ao compor essa fundamentação teórica e metodológica, e tal composição apresenta-se promissora para ser explorada e utilizada em sala de aula em contextos similares, no âmbito de processos de ensino e aprendizagem de Matemática.

### **Potential impact of this research**

This research offers valuable contributions both to the field of Mathematics Education and to mathematics teaching practices as a whole. It employed the Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving, combined with the theoretical-methodological foundations of Didactic Engineering, aiming to enhance the teaching and learning processes of integral calculus concepts — a subject of great importance for undergraduate students in the Exact Sciences programs in Brazil. The study presents an original approach by integrating these theoretical and methodological frameworks, and this combination shows promising potential for further exploration and application in the classroom, particularly in similar contexts within the teaching and learning of Mathematics.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, a Deus. À minha família pela compreensão.

Agradeço à minha esposa Adriana pelo apoio, companheirismo, palavras de incentivo e tranquilidade em todos os momentos em que eu mais precisei. Ao meu filho Rafael, agradeço pelos momentos de alegria e abraços apertados. Espero que um dia ele possa ler este trabalho e compreender a minha ausência.

Agradeço a todos os meus amigos que fizeram parte desta longa jornada, especialmente ao Prof. Dr. Eduardo C. Catanozi, pela revisão gramatical deste trabalho.

Agradeço à minha orientadora, Profa. Dra. Renata Cristina Geromel Meneghetti, pelas orientações, empenho e confiança depositada em mim para realização desta tese.

A todos os professores e técnico-administrativos do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da UNESP de Bauru. Aos alunos do programa, especialmente, os amigos do grupo de pesquisa que encontrei durante esta jornada: Cilene, Ricardo e Priscila.

Agradeço à Profa. Dra. Marilena Bittar e ao Prof. Dr. Inocêncio Fernandes Balieiro Filho, membros titulares da banca de Qualificação e da banca de Defesa, que contribuíram para a consolidação deste trabalho. Somados a eles, estendo meus agradecimentos aos demais membros titulares da banca de Defesa, Profa. Dra. Abigail Fregni Lins e Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola, bem como aos membros suplentes da banca de Defesa, Profa. Dra. Marli Regina dos Santos, Profa. Dra. Maria Ednéia Martins e Profa. Dra. Rosilda dos Santos Moraes.

Por fim, agradeço ao IFSP pelo afastamento das minhas atividades profissionais para que eu pudesse me dedicar, integralmente, ao Doutorado.

A todos vocês ficam os meus sinceros agradecimentos.

**Dedico este trabalho a todos que acreditam no poder transformador da Educação.**

## RESUMO

Buscou-se, com esta pesquisa de Doutorado, investigar as potencialidades e limitações da utilização de uma metodologia ativa de ensino e aprendizagem relacionadas aos conceitos de Integral, conteúdo presente na ementa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) II. Optou-se pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), na qual os problemas são geradores de conhecimento e os alunos tornam-se protagonistas na construção de conceitos matemáticos. Escolheu-se a Engenharia Didática (ED) como metodologia de pesquisa estruturante do trabalho, pois sua origem remete à sala de aula, contemplando a concepção, elaboração, aplicação e validação de sequências de ensino. Além disso, esta pesquisa possui característica qualitativa, configurando-se um estudo de caso, realizada com a participação de duas alunas do curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), no campus localizado na cidade de Votuporanga, instituição onde está lotado o autor desta tese. Foram desenvolvidos e aplicados os seguintes instrumentos de coleta de dados e produção de registros: Avaliação Diagnóstica Inicial (ADI), uma sequência didática (composta por cinco fichas de atividades), um questionário de pesquisa e uma Avaliação Diagnóstica Final (ADF). Abordaram-se conceitos de Integral como antiderivada ou Primitiva de uma função, definição e aplicações de Integral definida, cálculo de áreas de regiões e mudança de variáveis na Integral, utilizando a MEAAMaRP, com o suporte metodológico de pesquisa da ED. Após as análises dos dados coletados com a produção de registros das alunas, foi possível identificar contribuições que enriqueceram os processos de ensino e aprendizagem de conceitos de Integral mediante a composição dos pressupostos teórico-metodológicos da MEAAMaRP e da ED. Percebe-se que, ao resolver problemas, as alunas participaram da construção de conceitos matemáticos, resgataram conhecimentos prévios, tornaram sua aprendizagem mais significativa e desenvolveram habilidades matemáticas para aplicar conceitos em outras áreas do conhecimento. Além disso, apontamos como contribuição teórica trazida por este trabalho, a composição promissora entre a ED e a MEAAMaRP na elaboração de sequências didáticas para o ensino de conceitos de CDI. Esta pesquisa contribui com outras possibilidades de abordagem do ensino de disciplinas de CDI nos cursos de graduação, ao capacitar futuros professores por meio da adoção de metodologias de ensino alternativas à tradicional e visando a uma aprendizagem mais significativa para os alunos no que se refere a conceitos fundamentais do CDI II.

**Palavras-chave:** Resolução de Problemas. Cálculo Diferencial e Integral. Engenharia Didática. Educação Matemática. Licenciatura.

## ABSTRACT

This doctorate research sought to investigate the benefits and limitations of using an activated teaching and learning methodology related to the concepts of Integral, content inserted in the syllabus of the subject Differential and Integral Calculus II. The Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving was elected, in which problems generate knowledge and students become protagonists in constructing mathematical concepts. Didactic Engineering was selected as the structuring research methodology of the study since its origin refers to the classroom, contemplating the conception, elaboration, application, and validation of teaching sequences. In addition, this research has a qualitative characteristic of the case study type, carried out with the participation of two students of the Physics Degree course of the Federal Institute of Education, Science, and Technology of São Paulo (IFSP) on the *campus* located in the city of Votuporanga, Scholar Institution where the author of this thesis is based. The Data collection and the record production instruments were developed and applied according to an Initial Diagnostic Assessment, a didactic sequence (composed of five activity sheets), a research questionnaire, and a Final Diagnostic Assessment. Integral concepts such as antiderivative or primitive of a function, definition and applications of definite Integral, calculation of areas of regions, and change of variables in Integral were consigned using the methodological research support of Didactic Engineering. After analyzing the data collected through the students' written records, it was possible to identify contributions that enriched the teaching and learning processes of Integral Calculus concepts through the integration of the theoretical-methodological assumptions of Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving and Didactic Engineering. It was observed that, by solving problems, the students engaged in the construction of mathematical concepts, recalled prior knowledge, made their learning more meaningful, and developed mathematical skills to apply concepts in other areas of knowledge. Furthermore, as a theoretical contribution of this work, we highlight the promising integration between Didactic Engineering and Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving in the development of didactic sequences for teaching Differential and Integral Calculus concepts. This research contributes to other possible approaches to teaching DIC subjects in undergraduate programs, by training future teachers through the adoption of teaching methodologies that are alternatives to the traditional approach, aiming at more meaningful learning for students regarding fundamental Differential and Integral Calculus concepts.

**Keywords:** Problem Solving. Differential and Integral Calculus. Didactic Engineering. Mathematical Education. Teacher Education.

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADI	Avaliação Diagnóstica Inicial
ADF	Avaliação Diagnóstica Final
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Curricular Comum
CNE	Conselho Nacional de Educação
CDI	Cálculo Diferencial e Integral
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEFET-MG	Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
CEFET-RJ	Centros Federais de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
CEFET-SP	Centro Federal de Educação Tecnológica de São Paulo
CEP	Conselho de Ética em Pesquisa
CRA	Coordenação de Registros Acadêmicos
EAA	Escola de Aprendizes e Artífices
ED	Engenharia Didática
ENADE	Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes
ETEF-SP	Escola Técnica Federal de São Paulo
FFCL	Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
GTERP	Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas
IBILCE	Instituto de Biologia, Letras e Ciências Exatas
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IFSP	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
IREM	Institutos de Pesquisa sobre Educação Matemática
MEAAMaRP	Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas
MEC	Ministério da Educação
MMM	Movimento da Matemática Moderna
<i>NCTM</i>	<i>National Council of Teachers of Mathematics</i>
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PDI	Plano de Desenvolvimento Institucional
PPC	Projeto Pedagógico de Curso
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
RP	Resolução de Problemas

SciELO	<i>Scientific Electronic Library Online</i>
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TDM	Teoria da Disciplina Mental
TRRS	Teoria do Registro das Representações Semióticas
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UAB	Universidade Aberta do Brasil
UFSJ	Universidade Federal de São João del-Rei
UNESP	Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
UNINTER	Centro Universitário Internacional
USP	Universidade de São Paulo
UFPR	Universidade Federal do Paraná
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> - Síntese das etapas do roteiro de Onuchic e Allevato (2011). .....	56
<b>Figura 2</b> - As quatro etapas da Engenharia Didática. ....	69
<b>Figura 3</b> - Exemplo de exercícios de repetição. ....	93
<b>Figura 4</b> - Discussão sobre o conceito de Integral Definida.....	94
<b>Figura 5</b> - Exemplo de uma seção de Exercícios.....	96
<b>Figura 6</b> - Formato de apresentação dos conteúdos.....	98
<b>Figura 7</b> - Capítulo 6 do Sumário, com destaque para os Problemas Quentes.....	99
<b>Figura 8</b> - Seção Problemas.....	100
<b>Figura 9</b> - Linha do tempo do Ensino Superior no Brasil, de 1810 até 2008. ....	108
<b>Figura 10</b> - Breve linha do tempo com as mudanças de CDI e Análise. ....	118
<b>Figura 11</b> - Problema 1 da ADI- Aluna 1. ....	207
<b>Figura 12</b> - Problema 1 da ADI- Aluna 2. ....	207
<b>Figura 13</b> - Problema 2 da ADI- Aluna 1. ....	208
<b>Figura 14</b> - Problema 2 da ADI- Aluna 2. ....	209
<b>Figura 15</b> - Problema 3 da ADI- Aluna 1. ....	210
<b>Figura 16</b> - Problema 3 da ADI- Aluna 2. ....	211
<b>Figura 17</b> - Problema 4 da ADI- Aluna 2. ....	212
<b>Figura 18</b> - Problema 1.1 da Ficha de Atividades 1 - Aluna 1. ....	216
<b>Figura 19</b> - Problema 1.1 da Ficha de Atividades 1 - Aluna 2. ....	217
<b>Figura 20</b> - Problema 1.2 da Ficha de Atividades 1 - Aluna 1. ....	218
<b>Figura 21</b> - Problema 1.3 da Ficha de Atividades 1 - Aluna 1. ....	220
<b>Figura 22</b> - Problema 1.3 da Ficha de Atividades 1 - Aluna 2. ....	221
<b>Figura 23</b> - Problema Complementar da Ficha de Atividades 1 - Aluna 2. ....	223
<b>Figura 24</b> - Item c) do problema 1.1 feito pela Aluna 1.....	225
<b>Figura 25</b> - Item c) do problema 1.1 feito pela Aluna 2.....	226
<b>Figura 26</b> - Problema 1.2 feito pela Aluna 2. ....	226
<b>Figura 27</b> - Problema 1.4 feito pela Aluna 1. ....	227
<b>Figura 28</b> - Problema 1.4 feito pela Aluna 2. ....	228
<b>Figura 29</b> - Problema 2.1 da Ficha de Atividades 2- Aluna 1. ....	231
<b>Figura 30</b> - Problema 2.1 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2. ....	232
<b>Figura 31</b> - Item a) do problema 2.1 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2. ....	233
<b>Figura 32</b> - Item a2) do problema 2.1 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2. ....	233

<b>Figura 33</b> - Item a3) do problema 2.1 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.....	234
<b>Figura 34</b> - Item b) do problema 2.1 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.....	234
<b>Figura 35</b> - Problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 1.....	236
<b>Figura 36</b> - Problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.....	237
<b>Figura 37</b> - Item a) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 1.....	237
<b>Figura 38</b> - Item a) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.....	238
<b>Figura 39</b> - Item b) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 1.....	238
<b>Figura 40</b> - Item b) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.....	239
<b>Figura 41</b> - Item c) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 1.....	239
<b>Figura 42</b> - Item c) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.....	240
<b>Figura 43</b> - Item d) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 1.....	240
<b>Figura 44</b> - Item d) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.....	241
<b>Figura 45</b> - Item e) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 1.....	242
<b>Figura 46</b> - Item e) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.....	242
<b>Figura 47</b> - Problema 3.1 da Ficha de Atividades 3- Aluna 1.....	245
<b>Figura 48</b> - Problema 3.1 da Ficha de Atividades 3- Aluna 2.....	246
<b>Figura 49</b> - Problema 3.2 da Ficha de Atividades 3- Aluna 1.....	247
<b>Figura 50</b> - Problema 3.2 da Ficha de Atividades 3- Aluna 2.....	247
<b>Figura 51</b> - Item a) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3- Aluna 1.....	249
<b>Figura 52</b> - Item a) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3- Aluna 2.....	249
<b>Figura 53</b> - Item b) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3- Aluna 1.....	250
<b>Figura 54</b> - Item b) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3- Aluna 2.....	250
<b>Figura 55</b> - Item c) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3- Aluna 1.....	251
<b>Figura 56</b> - Item c) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3- Aluna 2.....	251
<b>Figura 57</b> - Item d) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3- Aluna 1.....	252
<b>Figura 58</b> - Item d) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3- Aluna 2.....	252
<b>Figura 59</b> - Problema 3.4 da Ficha de Atividades 3- Aluna 2.....	253
<b>Figura 60</b> - Item b) do problema 3.3 feito pela Aluna 2.....	255
<b>Figura 61</b> - Item d) do problema 3.3 feito pela Aluna 1.....	256
<b>Figura 62</b> - Item d) do problema 3.3 feito pela Aluna 2.....	257
<b>Figura 63</b> - Problema 3.4 feito pela Aluna 1.....	257
<b>Figura 64</b> - Problema 4.1 da Ficha de Atividades 4- Aluna 1.....	261
<b>Figura 65</b> - Problema 4.1 da Ficha de Atividades 4- Aluna 2.....	262
<b>Figura 66</b> - Problema 4.2 da Ficha de Atividades 4- Aluna 1.....	263

<b>Figura 67</b> - Problema 4.2 da Ficha de Atividades 4- Aluna 2.....	264
<b>Figura 68</b> - Problema 4.3 da Ficha de Atividades 4- Aluna 1.....	265
<b>Figura 69</b> - Problema 4.3 da Ficha de Atividades 4- Aluna 2.....	266
<b>Figura 70</b> - Problema 4.3 feito pela Aluna 1.....	268
<b>Figura 71</b> - Problema 4.3 feito pela Aluna 2.....	269
<b>Figura 72</b> - Item a) do problema 5.1 da Ficha de Atividades 5- Aluna 1.....	273
<b>Figura 73</b> - Item a) do problema 5.1 da Ficha de Atividades 5- Aluna 2.....	273
<b>Figura 74</b> - Item b) do problema 5.1 da Ficha de Atividades 5- Aluna 1.....	274
<b>Figura 75</b> - Item b) do problema 5.1 da Ficha de Atividades 5- Aluna 2.....	274
<b>Figura 76</b> - Problema 5.2 da Ficha de Atividades 5- Aluna 1.....	275
<b>Figura 77</b> - Problema 5.2 da Ficha de Atividades 5- Aluna 2.....	276
<b>Figura 78</b> - Problema 5.3 da Ficha de Atividades 5- Aluna 1.....	277
<b>Figura 79</b> - Problema 5.3 da Ficha de Atividades 5- Aluna 2.....	278
<b>Figura 80</b> - Problema 5.3 feito pela Aluna 1.....	281
<b>Figura 81</b> - Problema 5.3 feito pela Aluna 2.....	282
<b>Figura 82</b> - Problema 1 da ADF - Aluna 1.....	285
<b>Figura 83</b> - Problema 1 da ADF - Aluna 2.....	286
<b>Figura 84</b> - Problema 2 da ADF - Aluna 1.....	287
<b>Figura 85</b> - Problema 2 da ADF - Aluna 2.....	288
<b>Figura 86</b> - Problema 3 da ADF - Aluna 1.....	289
<b>Figura 87</b> - Problema 3 da ADF - Aluna 2.....	289
<b>Figura 88</b> - Problema 4 da ADF - Aluna 1.....	291
<b>Figura 89</b> - Problema 4 da ADF - Aluna 2.....	291
<b>Figura 90</b> - Resposta à questão 2- Aluna 1.....	294
<b>Figura 91</b> - Resposta à questão 2- Aluna 2.....	294
<b>Figura 92</b> - Resposta à questão 3- Aluna 1.....	295
<b>Figura 93</b> - Resposta à questão 3 - Aluna 2.....	295
<b>Figura 94</b> - Resposta à questão 4 - Aluna 2.....	296
<b>Figura 95</b> - Resposta às questões 5 e 6 - Aluna 1.....	297
<b>Figura 96</b> - Resposta às questões 5 e 6 - Aluna 2.....	297
<b>Figura 97</b> - Resposta à questão 7 - Aluna 2.....	298
<b>Figura 98</b> - Resposta à questão 8- Aluna 1.....	299
<b>Figura 99</b> - Resposta à questão 9 - Aluna 1.....	300
<b>Figura 100</b> - Resposta à questão 9 - Aluna 2.....	301

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1</b> - Mediação do professor durante a resolução de problemas. ....	44
<b>Quadro 2</b> - Trabalhos selecionados após a segunda etapa de seleção. ....	76
<b>Quadro 3</b> - Breve histórico da criação do IF. ....	120
<b>Quadro 4</b> - ADI. ....	132
<b>Quadro 5</b> - Problema 1.1 da Ficha de Atividades 1. ....	136
<b>Quadro 6</b> - Problema 1.2 da Ficha de Atividades 1. ....	137
<b>Quadro 7</b> - Problema 1.3 da Ficha de Atividades 1. ....	138
<b>Quadro 8</b> - Problema 1.4 da Ficha de Atividades 1. ....	139
<b>Quadro 9</b> - Problema Complementar da Ficha de Atividades 1.....	140
<b>Quadro 10</b> - Problema 2.1 da Ficha de Atividades 2. ....	141
<b>Quadro 11</b> - Problema 2.1, itens de a) até c), da Ficha de Atividades 2. ....	141
<b>Quadro 12</b> - Problema 2.1, itens de (d) até (f), da Ficha de Atividades 2.....	142
<b>Quadro 13</b> - Problema 2.2 da Ficha de Atividades 2. ....	143
<b>Quadro 14</b> - Problema 2.2, itens de (a) até (d), da Ficha de Atividades 2. ....	144
<b>Quadro 15</b> - Problema 2.1, item (e), da Ficha de Atividades 2.....	145
<b>Quadro 16</b> - Problema Complementar da Ficha de Atividades 2.....	145
<b>Quadro 17</b> - Problema 3.1 da Ficha de Atividades 3. ....	147
<b>Quadro 18</b> - Problema 3.2 da Ficha de Atividades 3. ....	147
<b>Quadro 19</b> - Problema 3.3 da Ficha de Atividades 3. ....	148
<b>Quadro 20</b> - Problema 3.4 da Ficha de Atividades 3. ....	149
<b>Quadro 21</b> - Problema Complementar da Ficha de Atividades 3.....	150
<b>Quadro 22</b> - Problema 4.1 da Ficha de Atividades 4. ....	151
<b>Quadro 23</b> - Problema 4.2 da Ficha de Atividades 4. ....	152
<b>Quadro 24</b> - Problema 4.3 da Ficha de Atividades 4. ....	152
<b>Quadro 25</b> - Problema 4.4 da Ficha de Atividades 4. ....	153
<b>Quadro 26</b> - Problema Complementar da Ficha de Atividades 4.....	153
<b>Quadro 27</b> - Problema 5.1, item a), da Ficha de Atividades 5. ....	155
<b>Quadro 28</b> - Problema 5.1, item b), da Ficha de Atividades 5.....	155
<b>Quadro 29</b> - Problema 5.2 da Ficha de Atividades 5. ....	156
<b>Quadro 30</b> - Problema 5.3 da Ficha de Atividades 5. ....	157
<b>Quadro 31</b> - Problema 5.4 da Ficha de Atividades 5. ....	157
<b>Quadro 32</b> - Problema 5.5 da Ficha de Atividades 5. ....	158

<b>Quadro 33</b> - Problema Complementar da Ficha de Atividades 5.....	158
<b>Quadro 34</b> - ADF. ....	160
<b>Quadro 35</b> - Questionário de pesquisa- questões 1 e 2. ....	162
<b>Quadro 36</b> - Questionário de pesquisa- questões 3 e 4. ....	163
<b>Quadro 37</b> - Questionário de pesquisa- questões 5, 6 e 7. ....	164
<b>Quadro 38</b> - Questionário de pesquisa- questões 8 e 9 ....	165
<b>Quadro 39</b> - Cronograma de aplicação da sequência didática. ....	172
<b>Quadro 40</b> - Discussão do item (e) da questão 2.2.....	185
<b>Quadro 41</b> - Problema 1 da ADI. ....	206
<b>Quadro 42</b> - Problema 2 da ADI. ....	208
<b>Quadro 43</b> - Problema 3 da ADI. ....	209
<b>Quadro 44</b> - Problema 4 da ADI. ....	211
<b>Quadro 45</b> - Problema 5 da ADI. ....	213
<b>Quadro 46</b> - Problema 1.1 da Ficha de Atividades 1- análises a posteriori. ....	215
<b>Quadro 47</b> - Problema 1.2 da Ficha de Atividades 1- análises a posteriori. ....	218
<b>Quadro 48</b> - Problema 1.3 da Ficha de Atividades 1- análises a posteriori. ....	219
<b>Quadro 49</b> - Problema 1.4 da Ficha de Atividades 1- análises a posteriori. ....	222
<b>Quadro 50</b> - Problema Complementar da Ficha de Atividades 1- análises a posteriori. .....	223
<b>Quadro 51</b> - Problema 2.1 da Ficha de Atividades 2- análises a posteriori. ....	231
<b>Quadro 52</b> - Item a) do problema 2.1- análises a posteriori.....	232
<b>Quadro 53</b> - Problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- análises a posteriori. ....	236
<b>Quadro 54</b> - Problema 3.2 da Ficha de Atividades 3 - análises a posteriori. ....	246
<b>Quadro 55</b> - Item a) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3 - análises a posteriori. .....	248
<b>Quadro 56</b> - Item b) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3 - análises a posteriori. .....	249
<b>Quadro 57</b> - Problema Complementar da Ficha de Atividades 3 - análises a posteriori. .....	254
<b>Quadro 58</b> - Problema 4.3 da Ficha de Atividades 4 - análises a posteriori. ....	265
<b>Quadro 59</b> - Problema Complementar da Ficha de Atividades 4 - análises a posteriori. .....	267
<b>Quadro 60</b> - Problema 5.3 da Ficha de Atividades 5 - análises a posteriori. ....	277

**Quadro 61** - Problema Complementar da Ficha de Atividades 5 - análises a posteriori.

..... 279

## **LISTA DE TABELAS**

<b>Tabela 1</b> - Quantidade de trabalhos em cada base de dados de acordo com as buscas.	76
<b>Tabela 2</b> - Conceitos finais dos alunos CDI e CDI II.....	125

## SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO .....	22
1 INTRODUÇÃO .....	27
2 ASPECTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS ESTRUTURANTES DA PESQUISA .....	37
2.1 O Movimento da Matemática Moderna .....	38
2.2 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas (MEAAMaRP).....	41
2.3 A Engenharia Didática (ED) como metodologia de pesquisa .....	58
2.3.1 Análises Preliminares .....	63
2.3.2 Concepções e Análises a <i>Priori</i> .....	64
2.3.3 Experimentação.....	66
2.3.4 Análises a <i>Posteriori</i> e Validação .....	67
3. ANÁLISES PRELIMINARES .....	73
3.1 Revisão de Literatura .....	74
3.1.1 Trabalhos relacionando “Resolução de Problemas” e “Cálculo Diferencial e Integral” .....	78
3.1.2 Trabalhos relacionando “Resolução de Problemas” e “Engenharia Didática”.....	84
3.1.3 Trabalhos relacionando “Cálculo Diferencial e Integral” e “Engenharia Didática” ..	85
3.1.4 Discussões sobre a revisão de literatura.....	88
3.2 Análise de livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral .....	90
3.2.1 Discussão sobre a análise dos livros de CDI.....	100
3.3 Contextualização histórica do ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil .....	101
3.3.1 Um contexto histórico da Implantação do Ensino Superior no Brasil .....	102
3.3.2 História do ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil e as heranças que carregamos .....	109
3.4 Apresentando o ambiente de coleta e a produção de dados da pesquisa.....	119
3.4.1 O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do estado de São Paulo (IFSP) .....	120
3.4.2 O câmpus Votuporanga.....	122
3.4.3 O curso de Licenciatura em Física .....	123
3.4.4 Análise dos conceitos finais de alunos do IFSP-Votuporanga em disciplinas de CDI I e CDI II .....	124
4. CONCEPÇÕES E ANÁLISES A <i>PRIORI</i> .....	129
4.1 Avaliação Diagnóstica Inicial (ADI).....	132
4.2 A Sequência Didática.....	134
4.2.1 Ficha de Atividades 1: Antiderivação ou Primitivas de uma Função.....	135
4.2.2 Ficha de Atividades 2: Integral definida (Integral de Riemann) .....	140
4.2.3 Ficha de Atividades 3: Aplicações iniciais da Integral definida .....	146
4.2.4 Ficha de Atividades 4: Cálculo de Áreas usando Integral definida.....	151
4.2.5 Ficha de Atividades 5: Mudanças de variáveis na Integral .....	154

4.3 Avaliação Diagnóstica Final (ADF).....	160
4.4 Questionário de pesquisa.....	161
5. EXPERIMENTAÇÃO .....	168
5.1 As participantes da pesquisa .....	169
5.2 A coleta de dados desta pesquisa .....	173
5.2.1 Primeiro Encontro .....	174
5.2.1.1 Primeira parte .....	175
5.2.1.2 Segunda parte .....	176
5.2.2 Segundo Encontro .....	176
5.2.2.1 Primeira parte .....	177
5.2.2.2 Segunda parte .....	178
5.2.3 Terceiro Encontro.....	181
5.2.3.1 Primeira parte .....	182
5.2.3.2 Segunda parte .....	184
5.2.4 Quarto Encontro .....	187
5.2.4.1 Primeira parte .....	187
5.2.4.2 Segunda Parte.....	188
5.2.5 Quinto Encontro .....	190
5.2.5.1 Primeira parte .....	191
5.2.5.2 Segunda Parte.....	192
5.2.6 Sexto Encontro .....	194
5.2.6.1 Primeira parte .....	195
5.2.6.2 Segunda parte .....	196
5.2.7 Sétimo Encontro.....	197
5.3 Discussões sobre a coleta de dados desta pesquisa .....	199
6. ANÁLISES A <i>POSTERIORI</i> E VALIDAÇÃO.....	204
6.1 Análise da Avaliação Diagnóstica Inicial (ADI).....	206
6.1.1 Considerações sobre a ADI.....	213
6.2 Análise da sequência didática .....	214
6.2.1 Análises a <i>posteriori</i> da Ficha de Atividades 1 .....	214
6.2.1.1 Primeira parte .....	215
6.2.1.2 Segunda parte .....	224
6.2.2 Análises a <i>posteriori</i> da Ficha de Atividades 2.....	230
6.2.2.1 Primeira parte .....	230
6.2.2.2 Segunda parte .....	236
6.2.3 Análises a <i>posteriori</i> da Ficha de Atividades 3.....	245
6.2.3.1 Primeira parte .....	245
6.2.3.2 Segunda parte .....	255
6.2.4 Análises a <i>posteriori</i> da Ficha de Atividades 4.....	260

6.2.4.1 Primeira parte .....	261
6.2.4.2 Segunda parte .....	268
6.2.5 Análises a <i>posteriori</i> da Ficha de Atividades 5 .....	272
6.2.5.1 Primeira parte .....	272
6.2.5.2 Segunda parte .....	280
6.3 Análises a <i>posteriori</i> da Avaliação Diagnóstica Final (ADF).....	284
6.4 Análise das respostas do Questionário de pesquisa.....	293
6.5 Considerações sobre as análises dos dados .....	302
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	305
REFERÊNCIAS .....	312
APÊNDICES .....	320
APÊNDICE 01- TERMO DE CONCORDÂNCIA E AUTORIZAÇÃO DE INSTITUIÇÃO COPARTICIPANTE EM PROJETO DE PESQUISA .....	320
APÊNDICE 02 - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE) .....	322
APÊNDICE 03 - AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL (ADI) .....	325
APÊNDICE 04 - SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA CÁLCULO DE INTEGRAIS .....	326
APÊNDICE 05 - AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL (ADF) .....	342
APÊNDICE 06 - QUESTIONÁRIO DE PESQUISA.....	343
APÊNDICE 07 – RELATÓRIO DE PESQUISA PARA AS PARTICIPANTES .....	346
ANEXOS.....	348
ANEXO A- PARECER Nº 6.598.409 DE APROVAÇÃO DO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA (CEP).....	348
ANEXO B - PORTARIA DE AFASTAMENTO DO SERVIDOR MATEUS EDUARDO BOCCARDO.....	349

*Ninguém começa a ser educador numa certa terça-feira às quatro da tarde. Ninguém nasce educador ou marcado para ser educador. A gente se faz educador, a gente se forma, como educador, permanentemente, na prática e na reflexão sobre a prática (Paulo Freire (1921-1997), 1991, p. 58).*

## APRESENTAÇÃO

O início de um trabalho de pesquisa envolve vários sentimentos: a ansiedade pela busca de respostas, o cansaço acumulado após inúmeras leituras (prazerosas ou nem tanto assim), as horas em frente ao computador, a sensação de estar perdido ao entrar em lugares inóspitos e becos sem saída, a (quase) infindável pressão diária e a procura por resultados. Não obstante, a sensação de descoberta e o fascínio de desatar alguns nós que vão surgindo representam um sentimento prazeroso e gratificante, motivando o pesquisador a seguir em frente.

Para começar, escrevo em primeira pessoa, pois acredito ser importante fazer minha breve apresentação como autor deste trabalho a fim de que se conheça um pouco das experiências pessoais, profissionais e acadêmicas que construí ao longo do tempo, bem como para que, como pesquisador, sejam compreendidas algumas deliberações efetuadas para a elaboração desta pesquisa de doutorado. Entendo que essas escolhas ajudam no processo de construção do professor.

Desde os anos iniciais de alfabetização, passando pelo Ensino Fundamental e Ensino Médio, fui aluno da escola pública estadual. Gostava de ir à escola, mas tinha mais afeição às disciplinas da área de Ciências Exatas, principalmente Matemática, a qual considero incrível e pouco explorada na escola.

Sou formado em Matemática (Bacharelado em Matemática Pura e Licenciatura em Matemática) pelo Instituto de Biologia, Letras e Ciências Exatas (IBILCE) da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), câmpus localizado na cidade de São José do Rio Preto, no ano de 2009.

Comecei minha carreira como professor trabalhando em algumas escolas particulares, atuando no Ensino Fundamental, Ensino Médio, cursinhos pré-vestibulares e cursos preparatórios para concursos públicos e Ensino Superior. Durante minha atuação profissional, procurei melhorar minha prática docente e buscava maneiras de incrementar meu currículo, pois somente as experiências vividas na sala de aula não eram suficientes para lidar com a complexidade da profissão docente.

Dessa forma, cursei a Especialização em Metodologia do Ensino de Matemática e Física pelo Centro Universitário Internacional (UNINTER), a Especialização em Matemática pela Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ) e concluí o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), também pela UNESP/IBILCE. Foi um período caracterizado por experiências significativas no âmbito pessoal e profissional, conciliando trabalho e estudos, viajando para dar aulas em cidades da região de São José do Rio Preto, interior do estado de São Paulo.

Essa rotina teve uma positiva e relevante mudança em 2016, quando ingressei no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP). Em junho daquele ano, fui convocado a assumir um cargo como professor efetivo do IFSP, na cidade de Votuporanga, o qual permanece, ainda, meu câmpus de lotação. Desde então, tenho atuado no Ensino Superior, ministrando disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Vetores, Fundamentos da Matemática, entre outras nos cursos de Licenciatura em Física, Análise e Desenvolvimento de Sistemas, Engenharia Elétrica e Engenharia Civil, nos quais, em vários sentidos, é evidente a diferença de perfil que os graduandos possuem.

A concepção inicial desta tese de doutorado surgiu há alguns anos a partir de reflexões e questionamentos naqueles momentos desafiadores que todo professor já enfrentou ao longo da carreira. Salas de aula lotadas, alunos desmotivados, queixas sobre a falta de aplicação prática de conceitos, notas baixas, necessidade de cumprir ementas de disciplinas e evasão nos cursos de graduação.

Especificamente, em relação às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), sempre me perguntava: por que os alunos possuem tantas dificuldades em Cálculo Diferencial e Integral? Embora fosse uma pergunta fácil de ser formulada, a resposta exigia longas reflexões, próprias da complexidade que o tema envolve. Era preciso, pois, aprofundar minhas competências, buscar novas fontes de conhecimento e discutir alguns aspectos da sala de aula e da prática docente com outros profissionais, mais experientes ou não, que enfrentavam angústias e dificuldades similares.

A disciplina de CDI, conforme minhas experiências profissionais como professor durante esses oito anos no IFSP, representa uma das primeiras disciplinas do Ensino Superior com as quais os alunos se deparam nos cursos de graduação. Também é uma das primeiras a causar dificuldade de adaptação nos alunos, seja pela mudança de linguagem, excesso de rigor, os livros didáticos carregados de formalismo e, somado a isso, a diferença entre hábitos de estudo praticados no Ensino Médio e no Ensino Superior.

Além disso, após observações cotidianas realizadas ao longo dos anos como professor de disciplinas de CDI, percebi que os alunos apresentavam dificuldades em operações básicas de Matemática, como solução de equações, desenvolvimento de expressões algébricas, traçar gráficos de função e operações com números racionais na forma de frações, apenas para citar algumas. Percebi, ademais, alunos que não possuem hábitos de estudo e apresentavam dificuldades com leituras e interpretação de definições e teoremas.

Em observações acerca de questões mais exteriores à sala de aula, em relação ao perfil dos alunos matriculados nos cursos superiores, notei que alguns deles ingressavam nos cursos de graduação apenas para selar sua saída do Ensino Médio; outros matriculavam-se em cursos de graduação ignorando algumas características básicas da área de conhecimento escolhida. Era comum a falta de informação que os alunos possuíam em relação aos cursos de graduação e suas respectivas áreas de atuação.

Acredito que essa apresentação é relevante porque esse contexto retratado é semelhante em diversas instituições de ensino no país, públicas ou privadas, e meus questionamentos como docente já devem ter sido elaborados por inúmeros outros professores. Assim, da mesma forma que muitos professores de CDI, estava diante de um dilema: seguir com o conteúdo da disciplina de Cálculo, ou dar um passo atrás, revendo conceitos do Ensino Médio, conhecimentos tão necessários para ancorar conceitos mais elaborados.

Na ausência de uma resposta assertiva, ministrava o conteúdo de Cálculo, inserindo conceitos do Ensino Médio para serem lembrados pelos alunos. Considerando minha experiência profissional, essa opção surtia efeito com alguns alunos, mas com outros não. Continuava com a mesma pergunta: Por que os alunos possuem tantas dificuldades em Cálculo Diferencial e Integral? Quais as origens dessas dificuldades? O que posso fazer como docente para melhorar este cenário? De que forma poderia contribuir para que aqueles alunos apreendessem os conceitos, propriedades e aplicações do Cálculo Diferencial e Integral?

Cheguei à conclusão de que era necessário aprofundar minhas investigações e, em 2021, ingressei no Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência, da Faculdade de Ciências (FC) da UNESP, no campus situado na cidade de Bauru. Matriculado no programa de Pós-Graduação, participei e fui contemplado com uma vaga no Edital de Afastamento *Stricto Sensu*, realizado pelo IFSP, conforme Portaria

Nº 4560/IFSP, de 11 de agosto de 2021, o que me permitiu dedicação exclusiva e foco total ao Doutorado.

Destaco que, no período compreendido entre os anos 2019 a 2022, o mundo enfrentava a pandemia do COVID-19<sup>1</sup>, infecção global que mudou diversos hábitos econômicos, sociais, educacionais e interferiu nos rumos de diversas pesquisas acadêmicas. Foram momentos de reclusão, distanciamento social e restrições jamais imaginadas, que impactaram na vida de toda população a mundial.

Com a Educação não foi diferente, pois as aulas presenciais foram suspensas em virtude dessa crise sanitária mundial, e teve início o período em que os atores envolvidos com a educação tiveram de aprender a lidar com plataformas virtuais e reuniões por aplicativos. Termos com *síncronos* e *assíncronos* tornaram-se constantes em nosso vocabulário. A coleta de dados de inúmeras pesquisas precisou ser repensada, pois a população estava em casa, protegendo-se do vírus naquele período de enormes dificuldades e repleto de incertezas. Contudo, algumas práticas do período pandêmico ainda permanecem, como o formato de aulas, reuniões e congressos realizados de maneira virtual, encurtando distâncias e agilizando as trocas de conhecimento entre alunos, professores, palestrantes e pesquisadores.

Após três anos de doutoramento, com as disciplinas cursadas virtualmente durante a pandemia, a superação de questões burocráticas do programa de pós-graduação, a participação em reuniões do grupo de pesquisa, algumas publicações e muitas leituras – as quais apresento ao longo desta tese –, desenvolvi investigações que podem contribuir para a melhoria dos processos de ensino e aprendizagem de CDI, com foco nos conceitos de Integral, conteúdos fundamentais para os cursos de Ciências Exatas.

Uma vez que atuo também na Licenciatura em Física, compreendo a importância de apresentar aos futuros professores metodologias de ensino alternativas à tradicional, a fim de que elas passem a fazer parte do cotidiano das salas de aula e que sejam compartilhadas com os licenciandos. Apesar de não ser o foco deste trabalho de pesquisa, conhecimentos sobre a formação inicial de professores devem ocupar um espaço durante suas análises e reflexões, preferencialmente para quem ministra aulas nas licenciaturas. Busco novos caminhos, ou caminhos alternativos, para desenvolver o processo de ensino

---

<sup>1</sup> A Covid-19 é uma infecção respiratória aguda causada pelo coronavírus SARS-CoV-2, potencialmente grave, de elevada transmissibilidade e de distribuição global. Esse vírus foi descoberto em amostras obtidas de pacientes com pneumonia de causa desconhecida na cidade de Wuhan, província de Hubei, China, em dezembro de 2019. Disponível em: <https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/covid-19>. Acesso em: 17 ago. de 2024.

e aprendizagem dos conceitos de Integral e, assim, descritos nas páginas que virão, terá início esta longa jornada de pesquisa, que contribuirá para o aprimoramento e construção de um professor em evolução.

Pretendo, com este trabalho de pesquisa desenvolvido para o doutorado, utilizar uma metodologia de ensino ativa, diferente da tradicional – passiva e mecanizada – e contribuir para mudança desse cenário exibido anteriormente em relação às aulas de CDI e auxiliar com a melhora dos processos de ensino e aprendizagem dos alunos nesses componentes curriculares.

Creio na capacidade que o professor possui em plantar sementes ao longo da carreira, mesmo nos lugares mais hostis, e ainda colher frutos e mudar realidades à sua volta. Dessa forma, **acredito que o professor consegue salvar vidas**, no sentido de trazer um propósito aos seus alunos e impactar, positivamente, suas realidades, ainda que muitos não saibam que são capazes de fazer isso.

*O processo de construção da pergunta diretriz é, na maioria das vezes, um longo caminho, cheio de idas e vindas, mudanças de rumos, retrocessos, até que após um certo período de amadurecimento, surge a pergunta. Um grande problema que percebemos em diversas pesquisas é que, muitas vezes, esse caminho não é apresentado pelo autor. Talvez ele pense que aquele caminho percorrido até o estabelecimento da pergunta tenha sido cheio de enganos, não merecendo ser divulgado, e não perceba que a pergunta é a síntese desse caminho, ou seja, todo o processo de construção da pergunta faz parte da própria pergunta (Borba; Araújo, 2019, p. 27).*

## **1 INTRODUÇÃO**

Inicialmente, dedicaremos nossos esforços a apresentar, de forma ampla, uma perspectiva do que será exposto ao longo deste trabalho de pesquisa de doutorado. De acordo com Bicudo (1993), o pesquisador deve ter uma inquietação, um problema, que se expressa por meio de uma pergunta, de uma interrogação. De nossa parte, havia essa inquietação, representada por uma pergunta que foi se modificando, como indicaremos ao longo deste capítulo; contudo, a necessidade de respondê-la sempre foi o fio condutor desta pesquisa.

A pesquisa é desenvolvida mediante o concurso dos conhecimentos disponíveis e a utilização cuidadosa de métodos, técnicas e outros procedimentos científicos. Na realidade, a pesquisa desenvolve-se ao longo de um processo que envolve inúmeras fases, desde a adequada formulação do problema até a satisfatória apresentação dos resultados (Gil, 2002, p. 17).

Nosso problema de pesquisa foi concebido dentro das salas de aula de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), fruto de observações, reflexões, questionamentos, experiências pessoais e profissionais do professor-autor desta tese de doutoramento. Optamos por ilustrar as mudanças ocorridas para a construção de nossa questão de pesquisa a fim de destacar o longo processo de maturação que esta tese de doutorado sofreu no decorrer de sua construção. E essa maturação ocorre também com o pesquisador, ao longo do caminhar da pesquisa.

Para situar o leitor a respeito desta investigação, apresentamos um panorama referente às ementas abordadas em disciplinas de CDI, componente curricular que contribuiu para nossos questionamentos. Todos os cursos de Ciências Exatas possuem

disciplinas de CDI em sua matriz curricular<sup>2</sup>. Seguindo o Projeto Político Pedagógico (PPC) do curso de Licenciatura em Física do IFSP, câmpus Votuporanga (IFSP, 2023), são oferecidas quatro disciplinas semestrais de CDI, com carga horária de 66,7 horas (ou 80 aulas semestrais). Ainda de acordo com o PPC (IFSP, 2023), a disciplina de CDI I, ou Cálculo 1, foca no estudo de Funções, Limites e Derivadas de uma variável; CDI II, ou Cálculo 2, desenvolve os conceitos de Integral de uma variável; CDI III, chamado de Cálculo 3, faz um tratamento de Funções de duas ou mais variáveis, parametrização de curvas e Derivadas Parciais; e por fim, Cálculo 4, CDI IV, desenvolve e realiza uma preparação de Integral Dupla, Integral Tripla, Integrais de Linhas, visando à abordagem dos mais importantes teoremas do Cálculo, tais como o Teorema de Green, o Teorema de Stokes e o Teorema de Gauss.

Esses teoremas são importantes para a Matemática e possuem aplicações em diversas áreas, como Física e Engenharias e, inclusive, a própria Matemática. Nosso trabalho não fará exploração desses teoremas; assim, apresentamos somente um panorama das grades curriculares das disciplinas de CDI. Por motivos específicos de cada instituição de ensino no país, existem variações presentes nessas ementas, como ofertas anuais ou semestrais dessas disciplinas, carga horária complementar (no formato virtual) ou inserção de conteúdos relacionados a Sequências e Séries, Geometria Analítica e Vetores, Cálculo Numérico ou Equações Diferenciais Ordinárias.

As disciplinas de CDI possuem altos índices de não-aprovação nas instituições de ensino do Brasil. O termo *não-aprovação*, utilizado pelos autores indicados a seguir, corresponde à situação dos alunos reprovados por nota, ou reprovados por falta, ou que trancaram a matrícula na disciplina ou evadiram o curso de graduação. Baruffi (1999), Rezende (2003), Nascimento (2003), Olímpio Junior (2006) e Menoncini (2018) mostraram, em seus trabalhos, os altos índices de não-aprovação dos alunos de suas respectivas instituições de ensino, culminando em valores alarmantes de evasão no Ensino Superior.

---

<sup>2</sup> As matrizes curriculares dos cursos de graduação no Brasil são definidas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais. Buscando informações de cursos de Ciências Exatas é possível verificar que todos esses cursos possuem CDI em suas matrizes curriculares. Mais informações em: <https://portal.mec.gov.br/escola-de-gestores-da-educacao-basica/323-secretarias-112877938/orgaos-vinculados-82187207/12991-diretrizes-curriculares-cursos-de-graduacao> Acesso em: 09 abr. 2025.

Esse cenário corresponde a diversas instituições de Ensino Superior do país, incluindo a que leciono e consistiu no ambiente para coleta de dados desta pesquisa, na tentativa de responder nossa pergunta: **Por que os alunos possuem dificuldades em Cálculo Diferencial e Integral?**

Depois de algumas leituras, percebemos que muitos autores externavam indagações semelhantes a essa, buscando entender os fatores que dificultam a aprendizagem de disciplinas de Cálculo. Por exemplo, Nascimento (2003), Cabral e Baldino (2006), Olímpio Junior (2006), Masola (2020) e Fontes (2021) apontam que a defasagem de conteúdos da Educação Básica e a ausência de capacidades de abstração representam barreiras para a aprendizagem de conceitos de CDI.

Pesquisadores como Baruffi (1999), Nascimento (2003), Cabral e Baldino (2006), Salinas e Alanís (2009) e Lima (2013) indicam que o formalismo, notações e vocabulário exageradamente técnico (por parte dos professores e livros didáticos) prejudicam os alunos durante os cursos de CDI. Ademais, Santos e Borges Neto (2005) apontam que a metodologia de ensino e aprendizagem em uso nas disciplinas de CDI é inadequada; além disso, Santos e Borges Neto (2005), Olímpio Junior (2006) e Cabral e Baldino (2006) sugerem que o excesso de alunos na sala de aula e a formação de turmas mistas, compostas com alunos de diversos cursos, dificultam a aprendizagem; e há, ainda, outros fatores que comprometem o processo de aprendizagem de CDI, como falta de motivação dos alunos (Santos; Borges Neto, 2005) e dificuldades na transição da Educação Básica para o Ensino Superior (Denardi, 2019).

Isso posto, observa-se que o ensino e a aprendizagem de CDI é tema central de pesquisas há mais de duas décadas e, aparentemente, o cenário que compreende as disciplinas de CDI nas instituições de ensino permanece o mesmo. Altos índices de reprovação, alunos abandonando os cursos de graduação, os professores de CDI vivenciando dilemas na sala de aula e as instituições de ensino continuando a registrar altos índices de evasão no Ensino Superior. Revisar os conteúdos do Ensino Médio, diminuir o nível de exigência das disciplinas de CDI ou cumprir o currículo de forma inflexível são algumas das questões que emergem.

Após algumas leituras e reflexões, era preciso melhorar nossa pergunta, pois estava muito ampla. Era preciso saber, então, o que perguntar. Estávamos decididos a buscar outras metodologias de ensino para as disciplinas de CDI, diferentes da tradicional, a qual compreendemos ser passiva e mecanizada. Utilizar a mesma metodologia de ensino

não surtiria efeito e nem mesmo traria as mudanças desejadas para o cenário das aulas de CDI descrito anteriormente.

Escolhemos a Resolução de Problemas como metodologia de ensino de Matemática em virtude de sua característica de aprendizagem ativa, focada no protagonismo do aluno. Feito isso, selecionamos alguns temas pertinentes ao conteúdo sobre Integrais, na disciplina de CDI II, para serem contemplados neste trabalho, conforme a experiência profissional do professor pesquisador e as dificuldades apresentadas pelos alunos.

Nesse contexto, constatamos que nossa pesquisa propõe um direcionamento para o processo de ensino-aprendizagem dos conceitos de Integral com base em uma metodologia ativa de ensino, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), desenvolvida pela professora Lourdes de La Rosa Onuchic e seu grupo de pesquisa, os quais serão detalhados posteriormente, em momento oportuno.

Agora, escolhida uma metodologia de ensino diferente da tradicional, um conteúdo a ser ensinado (alguns conceitos de Integral) e mais leituras e reflexões, nossa pergunta de pesquisa alterou-se para: **A metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática por meio da Resolução de Problemas pode potencializar o aprendizado dos conceitos de Integral?**

Embora aprimorada, a pergunta ainda carecia de neutralidade, porquanto apresentava indícios de direcionamento para uma resposta positiva antes mesmo da realização das investigações e análises necessárias. Àquela altura, não tínhamos clareza sobre a origem nem sobre a natureza das dificuldades dos alunos, e a pergunta proposta já sugeria, de antemão, a possibilidade de uma melhora na aprendizagem.

A primeira consideração que um pesquisador deveria ter em mente quando ele planeja um estudo é: O que eu estou tentando descobrir fazendo este estudo? Qualquer um que conduza uma pesquisa sobre resolução de problemas em Matemática precisa ser especialmente claro sobre o propósito de um estudo, uma vez que há tantos territórios inexplorados nos quais se pode ficar perdido (Kilpatrick, 2017, p. 85).

Era necessário saber o que se buscava com esta pesquisa de doutorado e como encontrar o rumo adequado, nesta jornada, para a obtenção de respostas. Como o foco da pesquisa estava na sala de aula, no processo de ensino e aprendizagem de CDI, diferente do tradicional, buscamos metodologias de pesquisa que atendiam a essa necessidade.

Dessa forma, adotamos como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática (ED), por meio das concepções de Artigue (1995), oriunda da Didática da Matemática Francesa. Tal abordagem contribui para o desenvolvimento, a aplicação e a análise de sequências de ensino, cujos pressupostos teóricos serão detalhados no capítulo a seguir.

Diante do exposto, acreditamos que a composição desses referenciais teóricos pode contribuir, positivamente, para o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de Integral.

E quando um professor (de Matemática) se dispõe a realizar uma pesquisa na área de Educação (Matemática), talvez seja porque ele vem problematizando sua prática, o que poderá levá-lo a se dedicar com afinco ao desenvolvimento de uma pesquisa originada dessa problematização, e, para isso, é preciso que ele sintetize suas inquietações iniciais em uma (primeira) pergunta diretriz (Borba; Araújo, 2019).

Nossa pergunta diretriz pertencia, inicialmente, às situações ocorridas na sala de aula, mas foi complementada por reflexões sobre a prática docente. Portanto, munidos de uma metodologia de ensino, um conteúdo a ser explorado, uma metodologia de pesquisa, mais leituras e mais reflexões, reformulamos nossa pergunta e nos deparamos com a seguinte questão de pesquisa:

**De que forma a utilização de sequências didáticas, desenvolvidas com base nos pressupostos metodológicos da ED e da MEAAMaRP, pode contribuir para o enriquecimento de processos de ensino e aprendizagem de conceitos de Integral? Quais potencialidades e limitações podem ser verificadas?**

Após um longo percurso, encontramos nossa pergunta norteadora e, para apoiar a busca pela sua resposta, traçamos alguns objetivos:

### **Objetivo Geral**

Compreender as potencialidades e as limitações que a Resolução de Problemas, na qualidade de metodologia de ensino, associada à ED como metodologia de pesquisa, possui nos processos de ensino e aprendizagem referentes aos conceitos de Integral, na disciplina de CDI II.

### **Objetivos Específicos**

- investigar a utilização da MEAAMaRP em disciplinas de CDI;
- verificar quais os resultados obtidos mediante as etapas de discussões sobre as soluções dos problemas para a aprendizagem de conceitos de Integral durante a resolução de problemas;
- analisar potencialidades e limitações sobre a utilização de sequências didáticas, elaboradas conforme os pressupostos metodológicos da ED e da MEAAMaRP, contemplando conceitos de Integral;
- identificar as contribuições que a ED trouxe para o desenvolvimento desta pesquisa.

Para alcançar o objetivo geral proposto neste trabalho, elencamos os objetivos específicos pertinentes, os quais se assemelham aos degraus de uma escada: a cada degrau vencido, aumentamos nossa capacidade de atingir o topo, aproximando-nos em responder a questão norteadora.

Dessa forma, pretendemos verificar a utilização de uma metodologia ativa de ensino em aulas de CDI II, a MEAAMaRP associada à ED, diferente da tradicional, passiva e mecanizada. Dentro dessa concepção de ensino, verificaremos os efeitos que o momento de discussões entre professores e alunos surtiram nos processos de aprendizagem dos conceitos de Integral. Além disso, desejamos examinar quais as potencialidades e limitações que a elaboração de sequência didáticas, mediante a composição dos pressupostos metodológicos da ED e da MEAAMaRP, podem trazer para o ensino e aprendizagem de conceitos de Integral. Por fim, analisaremos as contribuições que a Engenharia Didática (ED), como metodologia de pesquisa, trouxe para o desenvolvimento desta investigação, cujo ambiente de coleta de dados será a sala de aula.

Apresentados os objetivos e pergunta diretriz, compartilhamos que esta pesquisa de doutorado foi desenvolvida por meio de leituras, reflexões, observação de campo, da elaboração, aplicação e análise de uma sequência de ensino, questionário de pesquisa, discussões com o grupo de pesquisa e, por fim, considerando também algumas concepções do próprio pesquisador, a partir de suas experiências profissionais e observações de eventos no ambiente da sala de aula, na qualidade de professor pesquisador.

Consideramos que a sala de aula representa um ambiente promissor para pesquisas relacionadas ao ensino, um terreno fértil para realizar pesquisas no âmbito educacional,

em todos os níveis de ensino, abarcando uma heterogeneidade de personagens, situações e temas, todos com condições de auxiliar o professor a refletir e a aprimorar sua prática profissional, qualquer que seja a investigação que se pretenda realizar.

Ponte (2002) sugere que os professores realizem pesquisas sobre a sua própria prática, como um processo de construção de conhecimento. “A investigação sobre a sua prática é, por consequência, um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma actividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem activamente” (Ponte, 2002, p. 3). O autor afirma ainda que não apenas os professores, mas também alunos, instituições de ensino e comunidade, de modo geral, se beneficiam com as pesquisas realizadas em sala de aula. Nessa perspectiva, professores e alunos experimentam novas formas de desenvolver o processo de ensino e aprendizagem; as instituições passam a contar com profissionais mais engajados na melhoria de seus planos de trabalho e na abordagem do currículo; além disso, o conhecimento produzido pode contribuir de forma mais ampla com a comunidade escolar e acadêmica, ao ser aplicado e testado por outros professores em diferentes instituições.

Pesquisas desenvolvidas por professores com objetivos de atender suas necessidades como educadores e que almejam favorecer os processos de ensino e aprendizagem, na perspectiva de Lankshear e Knobel (2008 *apud* Onuchic; Noguti, 2014), são denominadas de pesquisas pedagógicas. Considerando esse enfoque, são pesquisas que surgem da demanda do professor em investigar situações ocorridas no cotidiano da sala de aula. O envolvimento do professor é fundamental para esse tipo de pesquisa e pode contribuir com observações e registros de experiências.

A pesquisa pedagógica busca, em sua essência, melhorar os processos de ensino e aprendizagem em sala de aula, utilizando para isso o ponto de vista do professor. Através dele, se espera compartilhar conhecimentos e experiências que possam desenvolver competências e autonomia nele e nos seus alunos (Onuchic; Noguti, 2014, p. 67).

Além do mais, ressalta-se que pesquisas pedagógicas também necessitam de elementos presentes em pesquisas científicas para a efetiva validade, ou seja, é preciso definir e justificar um tema de estudo, levantar hipóteses, coletar e analisar os dados, apresentar um relatório de pesquisa, enfim, garantir a possibilidade de que outros pesquisadores as reproduzam em diferentes ambientes de ensino.

Portanto, podemos indicar o presente estudo como uma pesquisa pedagógica, desenvolvida por meio de uma abordagem qualitativa, do tipo estudo de caso, que foi realizada a partir da análise de documentos, análise de livros didáticos, avaliações diagnósticas, análise dos registros das alunas participantes, respostas do questionário de pesquisa e das anotações do diário de campo. De acordo com Bogdan e Biklen (1994, p. 47 - 51), a investigação qualitativa apresenta cinco características:

1. Na investigação qualitativa, a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador como o seu instrumento principal.
2. A investigação qualitativa é descritiva.
3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.
4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.
5. O(s) significado(s) é(são) de grande importância na abordagem qualitativa.

Outrossim, esta pesquisa de doutorado foi desenvolvida a partir dos princípios de um estudo de caso, que, na concepção dos autores mencionados anteriormente, “consiste na observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma fonte de documentos ou de um acontecimento específico” (Bogdan; Biklen, 1994, p. 89).

Analisamos, em nosso estudo de caso, de que forma a utilização de sequências didáticas, desenvolvidas com base nos pressupostos metodológicos da ED e da MEAAMaRP, pode contribuir para o enriquecimento de processos de ensino e aprendizagem de conceitos de Integral, na disciplina de CDI II, para alunos do curso de Licenciatura em Física do IFSP, no câmpus localizado na cidade de Votuporanga. Acreditamos que este estudo de caso poderá contribuir para a reflexão acerca de situações semelhantes que possivelmente acontecem nas instituições de Ensino Superior do país, especialmente no que diz respeito aos elevados índices de não-aprovação de alunos nas disciplinas de CDI.

Como suporte metodológico para esta pesquisa, optamos pela utilização dos pressupostos da Engenharia Didática, oriunda da Didática da Matemática Francesa e desenvolvida na década de 1980, a qual será descrita minuciosamente no próximo capítulo.

Desenvolvemos esta tese de doutorado em 7 capítulos, a qual iniciamos com uma apresentação das intenções do pesquisador em relação a este trabalho e trazendo um

panorama sobre os elementos da pesquisa que serão abordados durante seu desenvolvimento.

O Capítulo 2, intitulado “Aspectos Teóricos e Metodológicos Estruturantes da Pesquisa”, contempla o referencial teórico que estabelece um suporte para esta pesquisa. Nele, apresentamos uma breve contextualização histórica do Movimento da Matemática Moderna, que contribuiu para o desenvolvimento de abordagens alternativas para o ensino e aprendizagem de Matemática. Dentre elas, destacamos a Resolução de Problemas como metodologia de ensino de Matemática e a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, ambas exploradas com detalhes para esta investigação.

Por se tratar de um trabalho cuja estrutura difere um pouco da tradicional e com objetivos de situar o leitor, os próximos capítulos foram concebidos, desenvolvidos e intitulados seguindo as quatro etapas da Engenharia Didática.

O Capítulo 3, denominado “Análises Preliminares”, apresenta como suporte alguns fatos históricos sobre o ensino superior no Brasil; uma revisão da História do ensino de Cálculo Diferencial e Integral no país e a crise de identidade que o assola. Traz também o levantamento bibliográfico para confecção desta tese de doutorado; uma breve análise de livros didáticos de CDI; a apresentação da Rede Federal de Ensino, especificamente o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), câmpus localizado na cidade de Votuporanga, onde o pesquisador está lotado, e o curso de Licenciatura em Física. Por fim, debruça-se sobre uma análise dos conceitos finais de CDI dos alunos desse curso, apresentando o nosso ambiente da coleta de dados e trazendo mais um elemento para justificar a necessidade deste trabalho de pesquisa.

O Capítulo 4 consiste nas “Concepções e Análise a *Priori*” e é dedicado à elaboração e ao desenvolvimento dos instrumentos da coleta de dados e produção de registros desta pesquisa, como as Avaliações Diagnósticas, a sequência didática aplicada com o devido apontamento das variáveis didáticas a serem verificadas e o Questionário de pesquisa respondido pelos alunos participantes ao término da coleta de dados.

Em relação ao Capítulo 5, intitulado “Experimentação”, descrevemos como ocorreram cada um dos encontros efetuados para a coleta de dados, fundamentado nas observações e anotações no diário de campo do pesquisador, juntamente com a produção de registros dos alunos participantes. Inicialmente, mostramos como foi feito o convite aos alunos participantes; após, detalhamos a realização dos encontros presenciais para a aplicação dos instrumentos da coleta de dados; e finalizamos com discussões a respeito do Questionário de pesquisa.

Na sequência, o Capítulo 6, intitulado “Análise a *Posteriori* e Validação”, corresponde à validação ou refutação das hipóteses levantadas ao longo da pesquisa. Condiz à etapa na qual o pesquisador fará o confronto das análises *a priori* juntamente com suas observações, registros coletados durante a etapa de Experimentação e as demais informações obtidas pelo pesquisador ao longo das Análises Preliminares efetuadas para este trabalho.

No que se refere às nossas “Considerações Finais”, no Capítulo 7, retomamos nossa questão de pesquisa e apresentamos uma síntese do nosso trabalho, destacando potencialidades, limitações, dificuldades encontradas, possibilidades de pesquisas vindouras e, por conseguinte, contribuições desta investigação no âmbito da Educação Matemática.

Finaliza-se esta tese de doutorado com os “Apêndices” e “Anexos”, que disponibilizam todos os materiais elaborados para fins desta pesquisa.

*Uma percepção da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e seu ensino. [...] Não é sem razão que a história vem aparecendo como um elemento motivador de grande importância (Ubiratan D'Ambrosio (1932-2021), 2010, p. 29).*

## **2 ASPECTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS ESTRUTURANTES DA PESQUISA**

Este capítulo apresenta os referenciais teóricos e metodológicos estruturantes desta pesquisa de doutorado, no qual serão focalizadas a Resolução de Problemas, como metodologia de ensino de Matemática, e a Engenharia Didática, como metodologia de pesquisa adotada para nosso trabalho de coleta, produção e análise de dados. Descrevemos tais referenciais, que serão abordados e explorados detalhadamente no decorrer deste texto, por se tratarem de elementos fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa.

A fim de situar a origem da Resolução de Problemas na qualidade de metodologia de ensino, e da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, faremos um breve recorte histórico contendo um movimento educacional que visava a modernizar o ensino de Matemática no mundo: o Movimento da Matemática Moderna, que teve impactos, inclusive, no Brasil, contribuindo para o desenvolvimento de metodologias de ensino alternativas, dentre elas, os referenciais teóricos e metodológicos trazidos nesta tese.

Embora o foco deste trabalho não esteja voltado à História da Matemática, aproximamo-nos da parte histórica com o objetivo de contextualizar nossa pesquisa. Por conta disso, concordamos com D'Ambrosio (2010) ser necessário trazer elementos pertencentes à História da Matemática ao nosso texto para apontar mudanças e movimentos ocorridos durante o desenvolvimento de teorias educacionais. Sobre a presença da História da Matemática, o referido autor pondera que

A história da matemática é um elemento fundamental para perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época. Essa visão crítica da matemática através de sua história não implica necessariamente o domínio das teorias e práticas que estamos analisando historicamente. Historiadores da matemática poderão conhecer essas teorias e técnicas e inclusive levá-las adiante e aprofundá-las (D'Ambrosio, 2010, p. 29-30).

Dessa forma, com o objetivo de apontar o desenvolvimento e as principais influências sofridas pelos referenciais teóricos selecionados nesta tese de doutorado - a

Resolução de Problemas como metodologia de ensino, e a Engenharia Didática como suporte metodológico de pesquisa - e ilustrar que as teorias não estão acabadas e estagnadas no tempo, mas que passam por alterações desde quando foram concebidas, estruturamos este capítulo em três tópicos. Primeiramente, será apresentado o Movimento da Matemática Moderna, marco na História da Matemática com influências mundiais no ensino dessa disciplina. Na sequência, apresentamos a Resolução de Problemas na qualidade de metodologia de ensino de Matemática, trazendo alguns aspectos principais e influenciadores relevantes. Por fim, a metodologia de pesquisa escolhida para desenvolver este trabalho, a Engenharia Didática, com origem na Didática da Matemática Francesa.

## **2.1 O Movimento da Matemática Moderna**

Dentre diversas mudanças pelas quais o ensino de Matemática passou ao longo dos anos, destaca-se o Movimento da Matemática Moderna (MMM), ocorrido por volta dos anos de 1950. Tão importante quanto apresentar o referencial teórico desta pesquisa de doutorado é apresentar e refletir sobre o MMM, pois, em virtude dos impactos causados a partir desse movimento, surgiram pesquisas que deram início à Educação Matemática e algumas de suas tendências de ensino, como a Resolução de Problemas. O impacto também ocorreu no desenvolvimento da Didática da Matemática, especialmente na França, como abordaremos ao longo deste texto.

Nosso propósito é apresentar, sucintamente, alguns fatos históricos para situar o leitor; assim, não serão feitas análises críticas sobre o MMM, apesar de ter sido, reconhecidamente, um marco global para a Educação Matemática. Queremos indicar que o movimento impulsionou o surgimento de novas abordagens para o ensino de Matemática, dentre eles os referenciais teóricos e metodológicos desta pesquisa. Nossa abordagem sobre o MMM pode ser vista como um elemento motivador ao desenvolvimento de novas tendências para o ensino de Matemática.

O ensino, em cada país, sofre influências conforme as mudanças econômicas, políticas, sociais e tecnológicas e, com o ensino de Matemática, isso não é diferente. No final da década de 1950 e início dos anos 1960, surgiram debates sobre uma nova maneira de ensinar Matemática em todos os níveis educacionais. Como fruto dessas discussões, iniciou-se o período denominado *Movimento da Matemática Moderna*.

Esse movimento internacional, na verdade, surgiu como resposta à constatação, após a Segunda Guerra Mundial, de uma considerável defasagem entre o progresso científico-tecnológico da nova sociedade industrial e o currículo escolar vigente, sobretudo nas áreas de ciências e matemática. O lançamento do Sputnik” pelos soviéticos, em 1957, foi decisivo para que esse movimento adquirisse força política, tanto que o governo norte-americano passou a injetar vultosos recursos financeiros em projetos de inovação/modernização dos currículos escolares (Fiorentini, 1995, p. 13).

De maneira geral, como afirmam Valente (2012a), Schirlo, Silva e Pilatti (2014) e Alves e Silveira (2016), o MMM tinha por objetivo aproximar a Matemática produzida nas Universidades e Centros de Pesquisa à Matemática escolar, considerada desatualizada para um mundo com a presença de tecnologias e foguetes. Era preciso *modernizar* o ensino de Matemática, dita ultrapassada, sendo que esse foi o tema central de inúmeros encontros, congressos e debates durante o período do MMM. Silveira e Miola (2008) destacam que “o peso dado ao desenvolvimento científico e tecnológico naquele momento, pressionado por um perigo imaginado - a guerra tecnológica travada na Guerra Fria -, exerceu enorme pressão para que as mudanças chegassem o mais rápido possível (e impossível) para serem aplicadas em sala de aula” (Silveira; Miola, 2008, p. 37).

Esse movimento educacional alterou o currículo de Matemática em diversos países do mundo, incluindo o Brasil. Em relação às mudanças apresentadas, segundo Onuchic e Allevato (2011, p. 78) “o mundo foi influenciado por recomendações de ensinar Matemática apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, enfatizando a teoria dos conjuntos”.

A teoria dos conjuntos possuía forte presença no ensino de Matemática durante o MMM. Para Valente (2012b), um programa moderno para o ensino nas escolas primárias considerava quatro caminhos abordados de forma paralela e progressiva: o caminho algébrico, o aritmético, o lógico e o geométrico. Esse autor exemplifica como era a abordagem efetuada para ensinar o sistema de numeração para alunos da escola primária: algebricamente, iniciava-se com noções de conjuntos e diagramas de Venn; aritmeticamente, trabalhava-se a aprendizagem de número natural a partir das noções de conjunto; logicamente, consideravam-se as propriedades e atributos dos objetos; e geometricamente, consideravam-se algumas noções de Topologia.

Durante, aproximadamente, os 20 anos pelos quais perdurou o MMM (entre 1960 e 1980), diversos congressos e encontros de Matemática foram realizados, muitos livros didáticos foram publicados seguindo as recomendações propostas pelo movimento e

pesquisadores favoráveis e contrários ao MMM surgiram, trazendo suas críticas e elogios a essas mudanças. É necessário destacar que o MMM teve duração e efeitos distintos pelos países do mundo, contribuindo de maneiras diferentes para a *modernização* dos processos de ensino e aprendizagem de Matemática.

Na década de 1970, esse movimento vai perdendo força e um marco para seu final, como afirmam Alves e Silveira (2016), foi a publicação, em 1973, do livro *Why Johnny can't add: The Failure of the New Math* (traduzido no Brasil como *O fracasso da Matemática Moderna*, em 1976) lançado pelo professor de Matemática norte-americano Morris Kline (1908-1992).

Sobre o MMM, como sintetizam Onuchic e Allevato (2011, p. 78), “O tratamento excessivamente abstrato, o despreparo dos professores para este trabalho, assim como a falta de participação dos pais de alunos, nesse movimento, fadou-o ao fracasso.” No Brasil, pode-se afirmar que a Matemática Moderna foi inserida aos poucos nas salas de aula, atingindo as instituições de ensino em diferentes momentos, devido às dimensões continentais do país, e por conta da participação dos professores em congressos e encontros relacionados ao movimento (Alves; Silveira, 2016).

Existem opiniões divergentes quanto ao sucesso ou fracasso do MMM ou, em outras palavras, há o questionamento sobre o alcance ou não dos seus objetivos educacionais. Como indicado anteriormente, estamos apenas trazendo uma perspectiva dos fatos ocorridos nesse período da História da Educação Matemática, e não serão levantadas discussões aprofundadas sobre o movimento, pois não representa o foco do nosso trabalho. Trata-se de um período importante para o ensino de Matemática, com vasto material de pesquisa, contemplando desde a sua origem, perpassando por órgãos financiadores, motivação para criação e desenvolvimento do MMM, bem como os personagens envolvidos desde sua idealização, execução e término.

Na década de 1980, ocorreu um aumento no número de pesquisas em Educação e inicia-se o movimento da Educação Matemática que, segundo D’Ambrosio (1986, *apud* Schirlo; Silva; Pilatti, 2014, p. 123) “aponta para uma educação matemática caracterizada como uma atividade multidisciplinar, que se pratica com o objetivo específico de transmitir conhecimentos e habilidades matemáticas por meio dos sistemas educativos: formal, não formal e informal”.

O ensino de Matemática passa a ser visto de maneira ampliada e, dessa forma, surgem novas propostas metodológicas para ensinar Matemática e tornar o aprendizado mais significativo para os alunos. Silveira e Miola (2008) indicam que muitas reformas

curriculares foram efetuadas de maneira isolada em diversos países, como Estados Unidos, França, Japão, entre outros. Esse cenário contribuiu para o surgimento e o desenvolvimento de algumas tendências na Educação Matemática que impactaram o ensino de Matemática no mundo.

Conforme apontamos no início dessa seção, não faremos nenhum tipo de análise crítica em relação ao MMM, visto que não realizamos nossos estudos com tamanha profundidade que nos permita classificar tal movimento como positivo ou negativo para a Educação. Nossa abordagem sobre o MMM pode ser vista como um elemento motivador ao desenvolvimento de novas tendências para o ensino de Matemática, apresentando esse movimento como um marco histórico.

O MMM de maneira geral – seus desdobramentos e consequências ao ensino de Matemática na atualidade – corresponde a um terreno fértil para muitas pesquisas; entretanto, o objetivo de nossa tese caminha em outra direção. Portanto, concordamos com D’Ambrosio (2010, p. 29) na reflexão de que a “percepção da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e seu ensino”. Terminada essa breve (e necessária) contextualização histórica sobre o MMM, veremos algumas contribuições do movimento, como novas maneiras de ensinar Matemática, sendo uma delas, por meio da Resolução de Problemas, como metodologia de ensino, apresentada na sequência do nosso trabalho.

## **2.2 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas (MEAAMaRP)**

Resolver problemas sempre fez parte da vida do ser humano desde sua necessária busca por alimentos: sair de sua caverna e fugir de predadores; fazer a escolha do melhor trajeto para o trabalho quando uma rua está em obras; e até mesmo encontrar o momento ideal para lançar um foguete à órbita da Terra. Resolver problemas expressa a capacidade humana de pensar e agir em determinadas situações, inesperadas ou não, e, diariamente, deparamo-nos com situações que exigem soluções rápidas e instantâneas ou mais elaboradas.

Existem registros da utilização de problemas matemáticos em antigos papiros egípcios, gregos e chineses. Apesar de fazer parte da vida da humanidade desde os primórdios, é difícil precisar quando a Resolução de Problemas passou a contribuir para o processo de ensino de Matemática. Sabe-se, no entanto, que existe um longo processo para o desenvolvimento dessa área no cerne da Educação Matemática, motivo pelo qual

dedicaremos as próximas páginas para ilustrar as principais mudanças ocorridas ao longo dos anos.

Nesta seção, apresentaremos a Resolução de Problemas como metodologia de ensino de Matemática, descrevendo alguns movimentos educacionais ocorridos no decorrer dos séculos XIX e XX, que compreendem fatores que influenciaram no desenvolvimento dessa metodologia de ensino. Essa percepção histórica faz-se necessária, uma vez que nenhuma teoria surge de forma espontânea ou isolada de seu contexto histórico. O desenvolvimento de uma teoria requer esforço contínuo por parte dos pesquisadores, além de ser influenciado pelo meio em que está inserida. Ademais, reforçamos que uma teoria não representa um conhecimento que está pronto e acabado, estagnado desde que foi concebido, ocorrendo, assim, mudanças com o passar do tempo, que repercutem em avanços dessas teorias.

Esta jornada tem início com uma síntese do período compreendido entre a mudança do século XIX para o século XX, com resgate de personagens e fatos relevantes. De acordo com Morais e Onuchic (2014, p. 18), “Teorias pedagógicas se desenvolvem ancoradas em teorias psicológicas e as razões se justificam pela complexidade que é inerente à aprendizagem [...]”. Assim, naquela época, o currículo escolar era orientado pela Teoria da Disciplina Mental (TDM), desenvolvida pelo psicólogo alemão Christian Wolff (1679 – 1754), que entendia a mente humana como um conjunto de capacidades ou faculdades classificadas em percepção, memória, intuição ou razão, imaginação e compreensão. Ao treinar uma dessas capacidades, acreditava-se que ocorria uma transferência geral da mente para todas as outras, no sentido de desenvolver as capacidades mentais, e a escola seria a responsável por efetuar o desenvolvimento dessas faculdades mentais (Morais; Onuchic, 2014).

No ano de 1902, os psicólogos norte-americanos Edward Lee Thorndike (1874-1949) e Robert Sessions Woodworth (1869-1962) publicaram o trabalho intitulado *The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of the other function* (*A influência da melhoria em uma função mental sobre a eficiência de outra função*), que apresentava diversos elementos capazes de contestar a TDM, provocando um grande alvoroço no meio educacional dos Estados Unidos, com pesquisadores ora aceitando, ora questionando os resultados desse trabalho (Morais; Onuchic, 2014).

Após alguns anos, Thorndike desenvolve uma teoria psicológica chamada Conexionismo, para a qual toda aprendizagem consiste de adição, eliminação e de organização de conexões cerebrais. Conforme os estímulos, essas conexões podem ser

formadas, quebradas ou organizadas na mente (Brownell, 1944 *apud* Morais; Onuchic, 2014). Nessa teoria, o processo de ensino era apoiado em algumas etapas, sendo uma delas baseada na lei do exercício ou repetição.

Fundamentado no Conexionismo, Thorndike, em 1921, escreveu a obra *The New Methods in Arithmetic* (publicada no Brasil, em português, em 1936, intitulado *A nova metodologia da Aritmética*), na qual o autor defendia o uso de Aritmética para o cotidiano, descartando problemas com respostas sem sentido para vida real. Nesse livro, o capítulo 7 é intitulado “Resolução de Problemas” e, nele, o autor apresenta técnicas de como resolver problema:

1) Se você sabe ao certo como resolver o problema, então siga em frente e resolva; 2) se você não enxerga uma forma de resolver o problema, considere a questão, os dados e sua utilização e faça as seguintes perguntas a você mesmo: Qual pergunta é feita? O que eu faço para descobri-la? Como devo usar esses dados? O que eu devo fazer com esses números, e com o que eu conheço sobre eles?; 3) Planejar o que você irá fazer, e porquê, e organizar seu trabalho de modo que você saiba o que você fez; 4) Cheque as respostas obtidas para ver se valem e se o raciocínio feito está de acordo com o que solicitou o [enunciado do] problema (Thorndike, 1921, p. 138-139 *apud* Morais e Onuchic, 2014, p. 21).

Mesmo com essa preocupação em fornecer estratégias para a resolução de problemas da vida real, a teoria do Conexionismo recebeu diversas críticas em relação à lei do exercício ou repetição, que deveria ser modificada, pois se atribuía maior importância aos resultados obtidos pelos alunos e desprezavam-se os processos de ensino e aprendizagem. Esse cenário foi sendo alterado aos poucos até meados da década de 1940.

Pode-se afirmar que a Resolução de Problemas obteve destaque a partir do trabalho pioneiro do matemático húngaro George Polya (1887-1985) que, em seu famoso livro *A Arte de Resolver Problemas* (tradução de *How to solve it*, escrito em 1945), apresenta elementos importantes para o desenvolvimento da resolução de problemas específicos da Matemática. Essa obra, que possui inúmeras edições e tiragens pelo mundo, ainda é muito atual e configura-se como ponto de partida para aqueles pesquisadores que se interessam pela Resolução de Problemas. Em síntese, Polya (2006) considera o processo de resolução de um problema em quatro etapas:

1. *Compreensão do problema*: etapa em que o aluno precisa entender as informações e a pergunta do problema;
2. *Estabelecimento de um plano (construção de uma estratégia de resolução)*: o aluno elabora um plano de resolução para o problema;
3. *Execução do plano*: é colocado em prática o plano elaborado na etapa anterior, com o objetivo de encontrar a(s) solução(ões) do problema; e
4. *Retrospecto (verificação do resultado)*: etapa que é/são verificada(s) a(s) solução(ões) encontrada(s) para discutir possíveis erros efetuados durante a resolução.

Essa obra não se resume, simplesmente, à apresentação dessas quatro etapas, porquanto seu autor sugere diversas formas de mediação que um professor deve desenvolver para cultivar em seus alunos o gosto e as habilidades necessárias para resolver problemas. O professor deve fazer questionamentos, sugerir que os alunos anotem as informações contidas nos problemas, que se lembrem de situações vivenciadas anteriormente e façam figuras ou esquemas para compreendê-los e solucioná-los. O quadro 01, a seguir, sintetiza as etapas de Polya (2006), bem como alguns questionamentos a serem feitos para os alunos durante a resolução dos problemas.

**Quadro 1** - Mediação do professor durante a resolução de problemas.

<b>Como resolver um problema segundo Polya (2006)</b>
<b>COMPREENSÃO DO PROBLEMA</b>
Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? Trace uma figura. Adote uma notação adequada.
<b>ESTABELECIMENTO DE UM PLANO</b>
Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Já o viu antes? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível sua utilização?
<b>EXECUÇÃO DO PLANO</b>
É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?
<b>RETROSPECTO</b>
É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Percebe-se uma influência da publicação de Thorndike em 1921, com *A nova metodologia da Aritmética*, no trabalho desenvolvido por Polya, em virtude do formato dialógico (e prático) com que os quatro passos e o conteúdo desses diálogos são apresentados. Uma possível investigação poderia ser realizada em relação às influências que Polya teve para desenvolver seu trabalho: não obstante, essa busca não faz parte do nosso objetivo neste momento.

Ao longo de sua carreira, especialmente na década de 1940, Polya consolidou a crença de que a curiosidade e o prazer pela descoberta eram fundamentais para ensinar Matemática. Acreditava também que era preciso que os professores incentivassem os alunos a resolverem problemas de Matemática para que desenvolvessem o interesse por essa área. Contudo, o ensino utilizando Resolução de Problemas passará por um hiato de algumas décadas em decorrência da forte influência do MMM (descrito na seção anterior), sendo colocado em evidência somente nos anos 1980.

O MMM não obteve o efeito desejado de melhorar o ensino de Matemática e, para pesquisadores, como Onuchic (2011), o ensino de Matemática ficou pior e extremamente abstrato, pois os alunos memorizavam propriedades sem saber onde aplicá-las e não resolviam problemas, apenas extensas listas de repetitivos exercícios.

Na década de 1970, houve, nos Estados Unidos, um período denominado *retorno aos fundamentos* ou *volta às bases*, como apontam, respectivamente, Van de Walle (2009) e Onuchic (2011), um movimento no qual foram retomadas práticas pedagógicas anteriores ao MMM, sendo uma delas o Conexionismo de Thorndike; entretanto, poucos pesquisadores obtiveram sucesso com essa retomada.

Onuchic (2011) afirma que, durante a década de 1980, educadores matemáticos que acreditavam no potencial da Resolução de Problemas como metodologia de ensino de Matemática seguiram trabalhando nessa tendência. Para Van de Walle (2009, p. 20), “o impulso para a reforma em educação matemática começou no início da década de 1980.” Esse pesquisador complementa que “como resultado, a resolução de problemas se tornou uma tendência importante no currículo de matemática” (2009, p. 20).

Nos Estados Unidos, no ano de 1980, com o declínio do MMM, o NCTM<sup>3</sup> (*National Council of Teachers of Mathematics*) publica um documento denominado *An*

---

<sup>3</sup> O NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics, Conselho Nacional de Professores de Matemática*, traduzido em português) foi fundado em 1920 e define-se como a maior organização de Educação Matemática do mundo. Defende-se um ensino e aprendizagem de Matemática de alta qualidade para cada aluno (tradução nossa). Mais informações sobre o NCTM: <https://www.nctm.org/>. Acesso em: 20 jan. 2024.

*Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980's (Uma Agenda para Ação: Recomendações para Matemática Escolar na década de 1980)*, apresentando como primeira recomendação que “a resolução de problemas deve ser o foco da matemática escolar na década de 1980” (NCTM, 1980, p. 1).

Nesse documento eram propostas orientações e recomendações para melhorar a qualidade do ensino de Matemática. Destacam-se algumas orientações: os educadores matemáticos deveriam concentrar seus esforços no desenvolvimento das habilidades dos estudantes em resolução de problemas; a eficácia das competências em Matemática (de maneira pessoal e nacional) deveria ser medida conforme a performance na resolução de problemas; resolver problemas envolvendo a utilização e aplicação da Matemática *no mundo real*, servindo para o desenvolvimento das ciências explorando fronteiras além da própria Matemática (NCTM, 1980).

Algumas recomendações expostas no documento fazem referência ao modo de organizar o currículo de Matemática em torno da resolução de problemas; desenvolver um ambiente propício para a resolução de problemas em sala de aula e professores dispostos a trabalhar com essa metodologia de ensino (o que inclui desenvolver diversas estratégias de resolução de problemas, materiais didáticos para todas as séries e apresentar a metodologia em todos os níveis de ensino); sugerir aos pesquisadores e agências de fomento que coloquem suas atenções em pesquisas para o desenvolvimento da resolução de problemas (NCTM, 1980).

Inicia-se, então, a fase da Resolução de Problemas, cujas ideias apoiavam-se, especialmente, nos fundamentos do construtivismo e na teoria sociocultural, que tem Vygotsky como principal teórico. O foco, nessa fase, foi colocado sobre os processos de pensamento matemático e de aprendizagem por descoberta, no contexto da resolução de problemas. Nessa fase, muitos recursos foram desenvolvidos na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividade e orientações para avaliar o desempenho dos alunos nessa área, sempre visando ao trabalho em sala de aula. Muito desse material contribuiu para que os professores fizessem da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho (Onuchic; Allevato, 2011, p. 78).

Contudo, os objetivos para a melhoria do nível de ensino de Matemática ainda não tinham sido atingidos, pois faltava clareza ao documento e havia diversas concepções sobre qual o rumo que o ensino de Matemática, com foco na resolução de problemas, deveria seguir. Por conta disso, Schroeder e Lester (1989 *apud* Onuchic; Allevato, 2011, p. 79) apresentaram três modos de abordar a Resolução de Problemas, que poderiam

ajudar a compreender e a refletir sobre essas diferenças de entendimento ou de abordagem que se faziam presentes, com maior ou menor intensidade, no contexto do ensino: (1) ensinar *sobre* resolução de problemas; (2) ensinar matemática *para* resolução de problemas; e (3) ensinar matemática *através* da resolução de problemas. As preposições simples *sobre*, *para* e a locução prepositiva *através de*, por nós destacadas, revelam abordagens diferentes a serem adotadas.

Em relação ao item (1), ensinar *sobre* resolução de problemas, entende-se a Resolução de Problemas como uma disciplina específica na qual se faz necessário ensinar estratégias e técnicas de resolução de problemas. Pode-se ilustrar esse modo de abordagem com George Polya e sua heurística para resolver problemas.

Quanto ao item (2), ensinar matemática *para* resolução de problemas, a finalidade do ensino de Matemática é resolver os problemas ao final da aula (ou final do capítulo do livro didático). Segue-se o modelo habitual de trabalho docente, presente em todas as escolas, ao apresentar um conceito, depois exemplos e exercícios e, finalmente, aparecem os problemas (ou questões contextualizadas) para os alunos solucionarem.

Por último, no item (3), referente a ensinar matemática *através* da resolução de problemas, compreende-se que o processo de ensino e aprendizagem de Matemática se concretiza durante o percurso de resolução dos problemas, conectando ideias, relacionando conhecimentos prévios e construindo conceitos matemáticos. Cabe destacar que a locução prepositiva *através de* também pode ser substituída por alguns sinônimos, dentre os quais: durante, ao longo de, no decurso de, por intervenção de, e ainda, obtém-se o mesmo sentido em relação à maneira de ensinar Matemática, em virtude de o aluno aprender e construir conceitos matemáticos durante a ação de resolver os problemas propostos.

O trabalho desenvolvido pelo NCTM nas décadas de 1980 e 1990 é reconhecido pela preocupação com a melhoria do ensino de Matemática; pela busca constante em auxiliar os professores a alcançar esse objetivo; e pela publicação de uma série de documentos orientadores considerados fundamentais para o desenvolvimento da Educação Matemática.

Esse esforço culminou com a publicação dos *Standards 2000*, oficialmente chamados *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), no qual são enunciados seis Princípios (Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia); cinco Padrões de Conteúdo (Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida e Análise de Dados e Probabilidade); e Cinco

Padrões de Procedimento, entre os quais o primeiro é Resolução de Problemas, seguido por Prova e Raciocínio; Comunicação; Conexões; e Representação (Onuchic; Allevato, 2011, p. 79).

Dessa forma, para as autoras, “a partir dos *Standards 2000* que os educadores matemáticos passaram a pensar numa metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas” (Onuchic; Allevato, 2011, p. 79-80). Segundo Van de Walle (2009, p. 20), os *Standards 2000* “foram desenvolvidos para fornecer uma orientação e direção aos professores e outros líderes em educação matemática da educação infantil (EI) ao ensino médio (EM)”. Esse documento norteador pode ser considerado um marco para o desenvolvimento de trabalhos que envolvam o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas. No Brasil, como afirma Onuchic (2012), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) foram influenciados pelas ideias contempladas nos documentos orientadores do NCTM, assim como os *Standards*.

Assim, por meio da influência de Polya e concomitantemente às publicações do NCTM, o desenvolvimento da Resolução de Problemas como metodologia de ensino destaca-se, no Brasil, em razão do trabalho de excelência promovido pela professora Lourdes de La Rosa Onuchic, pesquisadora e fundadora do GTERP (Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas), em 1992, na Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), no câmpus de Rio Claro. O GTERP representa um centro de referência em produção de conhecimento sobre a metodologia de ensino e aprendizagem através da Resolução de Problemas, contando com publicações de dissertações de mestrado, teses de doutorado e inúmeros artigos científicos.

Foi desenvolvida, pelo GTERP, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), na qual o problema é tratado como elemento fundamental para a construção de novos conceitos por parte dos alunos. Nesse sentido, segundo Onuchic e Allevato (2011, p. 81), “[...] o problema é ponto de partida e, na sala de aula, por meio da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos”.

Nessa metodologia, ensino e aprendizagem ocorrem conjuntamente, sendo a avaliação parte integrante do processo de construção de conhecimentos. A avaliação, formativa e contínua, é encarada de forma ampla, não condizente apenas com as notas dos alunos. Avalia-se o processo e o progresso dos alunos durante a resolução dos problemas e é analisada também a atuação docente como organizador e mediador dos

trabalhos em sala de aula. Ensino, aprendizagem e avaliação encontram-se bem estabelecidos e relacionados, sendo, por isso, escritos numa palavra composta.

A palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação tem o objetivo de expressar uma concepção em que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno, com o professor atuando como guia e mediador (Onuchic; Allevato, 2014, p. 43).

Isso posto, por tratar-se da metodologia de ensino adotada em nossa pesquisa de doutorado, alguns aspectos devem ser abordados, sendo o primeiro deles a definição de *problema*.

Autores como Boavida (1992) abordam as dificuldades em definir, de maneira coerente, o conceito de *problema*, cuja caracterização envolve aspectos como a subjetividade, a temporalidade e o contexto em que está inserido. O próprio George Polya também não traz definição alguma sobre *problema* em sua obra *A Arte de Resolver Problemas*, ficando, no entanto, implícito o que esse autor definiria como problema: supõe-se que seja algo desafiador, sem utilização de fórmulas prontas e capaz de despertar a curiosidade do aluno.

Chi e Glaser (1992) argumentam que um problema pode ser obtido na tentativa de solucionar um quebra-cabeça, em economizar dinheiro ou controlar a inflação. Complementamos essa afirmação exemplificando com a busca de soluções para uma atividade de CDI ou Geometria Analítica, além de situações do cotidiano, como encontrar o melhor caminho para ir ao trabalho ou dobrar uma receita de bolo, não se restringindo somente a problemas matemáticos. Dante (1999) define um problema matemático como qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar, ou seja, utilizar conhecimentos matemáticos para solucioná-la (sem aplicar fórmulas diretamente).

Van de Walle (2009) afirma que um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes ou pesquisadores não tenham algum método ou regra específicos para encontrar sua solução. As autoras Onuchic e Allevato (2011, p. 81) definem que um problema “é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer”. Essa definição carrega aspectos importantes que merecem nossa atenção. O primeiro ponto a ser considerado é o *saber-fazer*, indicando que aquilo que representa um problema para um aluno pode não ser denominado como tal para outro, em virtude de seus conhecimentos prévios adquiridos, suas diferenças culturais, regionais, socioeconômicas, entre outros fatores. O segundo ponto a destacar, o *querer-fazer*, indica

que a motivação do aluno em participar do momento de resolução dos problemas e atuar como protagonista na sua construção de conhecimentos é um fator essencial para colher bons frutos com o desenvolvimento dessa metodologia de ensino.

No entanto, essa definição parece mais fundamentada nos conhecimentos matemáticos que o estudante possui e menos na essência da própria atividade Matemática proposta ao aluno. Sendo assim, percebemos que o *não saber fazer* e o *querer fazer* são projetados no aluno e no seu arcabouço matemático não na atividade Matemática a ser solucionada.

Entre tantas definições possíveis para o que seria um problema, utilizamos, nesta tese de doutoramento, aquela apresentada por Ponte (1992, p. 95), a saber: “Um problema consiste numa tarefa para a qual o aluno não dispõe de um método imediato de resolução, mas em cuja solução se empenha activamente. Distingue-se de um simples exercício na medida em que este exige apenas a aplicação de um método de resolução já bem conhecido”. Não se trata somente de mera definição estática e formal; a ela atribuem-se características presentes no complexo processo de ensino e aprendizagem no ambiente da sala de aula, como a motivação e o repertório de conhecimentos dos discentes.

Diante do exposto, podemos apontar que Ponte (1992) considera como exercício qualquer tarefa em que o aluno tenha noções da resposta ou encontre a solução mediante a utilização direta de fórmulas, rapidamente, quase de maneira automática; nesse sentido, segundo esse autor, trata-se de tarefa fechada e fácil. Por conseguinte, para esse autor, problemas são tarefas mais elaboradas e que exigem maiores capacidades cognitivas, empenho e dedicação do estudante; caracterizando como tarefa fechada e difícil. O termo *tarefa fechada* refere-se a levar a uma única solução.

Sobre essa definição, quando o autor afirma que o aluno “não dispõe de um método imediato de resolução”, ilustra que o estudante precisa elaborar estratégias de resolução para o problema, utilizando seus conhecimentos prévios, em detrimento da aplicação (rápida) de fórmulas. Percebemos, também, nessa definição, que a motivação do estudante para resolver o problema é um fator imprescindível, uma vez que o autor sugere, em relação ao processo de resolução, que este ocorre “em cuja solução se empenha activamente”, evidenciando, assim, a importância da vontade do aluno em atuar de forma efetiva na busca pela solução. Face à situação, é possível encontrar aproximações entre as definições de problema trazidas por Ponte (1992) e Onuchic e Allevato (2011), tais como o fato de o problema exigir um esforço cognitivo dos estudantes e a presença da motivação dos alunos em resolver os problemas selecionados

pelo professor. Em suma, nesta tese de doutorado, consideramos como *problemas* aquelas tarefas ou atividades matemáticas às quais o aluno não tem soluções imediatas e exigem desses, esforço cognitivo e motivação em busca de estratégias de solução.

Além da definição de problema, há autores, como Polya (2006) e Dante (1999), que apresentam *sobrenomes* ou adjetivos para diversos tipos de problemas, como problemas rotineiros, problemas de determinação, problemas de demonstração, problemas práticos, problemas sobre situações reais, problemas de quebra-cabeças e tantos mais, numa vasta coleção de sobrenomes que são chamados por Onuchic (2011, p. 81) de “problemas adjetivados”, os quais, segundo a autora, “são todos problemas, e os adjetivos expressam diferentes tipos de problema que admitem, para sua resolução, diferentes estratégias.” Não serão aprofundados os detalhes que diferenciam cada um desses tipos de problemas e não é preciso utilizar todos os tipos de problemas adjetivados: apenas listamos as inúmeras possibilidades existentes para professores começarem a trabalhar e se aventurarem com essa metodologia de ensino nas salas de aula.

Apresentada a definição de problema, abordaremos os motivos que nos levaram a utilizar essa metodologia de ensino – a Resolução de Problemas – nesta pesquisa. Abordamos esses motivos seguindo duas possíveis vertentes: a primeira considera a prática docente; a segunda, a presença dessa metodologia de ensino em documentos oficiais da área de Educação no Brasil. Como prática pedagógica, D’Ambrosio (1989) enfatiza que, após algumas alterações, a Resolução de Problemas é uma metodologia de ensino que o professor propõe aos alunos situações-problema para serem exploradas e investigadas, obtendo novos conceitos.

Segundo Boavida (1992), a metodologia de Resolução de Problemas vai além da aplicação direta de fórmulas ou algoritmos e deve ser desafiadora para os alunos, contribuindo para que possam construir seu conhecimento. De acordo com Pirola (2000, p. 32), “É de fundamental importância, para o ensino da Matemática escolar, que os alunos compreendam os conceitos e princípios, envolvidos nos problemas, bem como os algoritmos utilizados na solução dos mesmos.”.

Onuchic e Allevato (2011) afirmam que a resolução de problemas, cujas ideias amparam-se nos fundamentos do construtivismo e na teoria sociocultural de Vygotsky, é considerada metodologia de ensino quando traz o problema como gerador de novos conteúdos e conceitos matemáticos, contribuindo para construção do conhecimento matemático. Em síntese, na perspectiva acadêmica, a Resolução de Problemas, como

metodologia de ensino, posiciona o aluno como personagem principal na construção de seus conhecimentos, atuando como protagonista e responsável pela sua aprendizagem.

No que se refere a alguns documentos oficiais da área educacional no Brasil, como os PCNs (Brasil, 1997), a Base Nacional Curricular Comum (Brasil, 2018) e os Pareceres do Conselho Nacional de Educação (Brasil, 2001) do curso de Matemática, verifica-se a presença da Resolução de Problemas como metodologia de ensino em todos esses documentos norteadores.

Inicialmente, os PCNs trazem um capítulo denominado “Alguns caminhos para “fazer Matemática” na sala de aula” e o primeiro caminho apresentado está descrito como “Recursos à Resolução de Problemas” (Brasil, 1997, p. 32-33), no qual justifica-se a utilização dessa metodologia de ensino em sala de aula, destacando-a como foco do trabalho dos professores. Nesse sentido, são elencados cinco princípios que resumem a proposta da utilização da Resolução de Problemas, dentre os quais, em síntese, situa o problema como ponto de partida, diferencia-se um problema de um exercício, faz menção à utilização e ao refinamento de conhecimentos prévios, construção (e reconstrução) de conceitos matemáticos e a prática de resolução de problemas como atividade de ensino de Matemática.

Citando outro documento norteador da educação nacional, a BNCC, em diversos pontos desse documento, apresenta indicações da utilização da resolução de problemas, de maneira geral, para aplicação de conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental e Ensino Médio em vários contextos, especificamente em Matemática, situações cotidianas dos alunos e outras áreas do conhecimento. Dentre as cinco competências específicas de Matemática para o Ensino Médio, três possuem o termo *resolução de problemas* presente em sua descrição.

Destacando documentos oficiais sobre o Ensino Superior, foram obtidos os Pareceres do Conselho Nacional de Educação (CNE), que regulamentam os cursos de Matemática (Bacharelado e Licenciatura), no *site* do Ministério da Educação (MEC). Esses pareceres trazem as Diretrizes Curriculares para nortear o Projeto Pedagógico de Curso (PPC) e contemplam o perfil dos formandos, atividades complementares, estrutura do curso, formas de avaliação, conteúdos de formação geral e específica e competências e habilidades de caráter geral e específico.

As Diretrizes Curriculares apresentadas para os cursos de Matemática indicam o desenvolvimento de habilidades e competências para compreender, criticar e utilizar novas tecnologias para resolver problemas, assim como identificar, formular e resolver

problemas correspondentes à área específica de atuação. Orienta-se, inclusive, que os cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática possuam conteúdos de áreas afins à Matemática, incorporando seus problemas como fontes originadoras para aplicação da Matemática (Brasil, 2001).

Dessa maneira, os documentos oficiais que regem a Educação Básica e Superior em Matemática, no Brasil, contemplam a Resolução de Problemas como metodologia de ensino de Matemática, bem como uma competência a ser desenvolvida pelos estudantes. Destaca-se, também, a orientação do parecer do CNE para cursos superiores de Matemática a fim de utilizar problemas de outras áreas do conhecimento durante o desenvolvimento das disciplinas do curso. Portanto, a Resolução de Problemas representa uma metodologia de ensino que se encontra presente em documentos oficiais da área educacional no país. Cabe destacar que os pareceres datam de 2001 e não passaram por nenhum processo de atualização. Seria importante que as instituições competentes modernizassem os pareceres, haja vista todas as mudanças ocorridas na sociedade no decorrer dessas duas décadas.

Nesse aspecto, após trazermos a definição de problema e justificar sua utilização em termos acadêmicos e institucionais para a atuação do trabalho docente pergunta-se: como trabalhar com a Resolução de Problemas na sala de aula?

Segundo Onuchic e Allevato (2011, p. 82), “Não há formas rígidas de se trabalhar através da resolução de problemas em sala de aula de Matemática.”. Após anos de pesquisa e desenvolvimento nessa área, com objetivos de auxiliar professores que desejam trabalhar com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), essas autoras apresentam um roteiro contendo nove passos para a resolução de problemas:

1. *Preparação do problema*: etapa na qual o professor escolhe um problema gerador de novos conhecimentos para sua turma e o conteúdo para resolvê-lo ainda não foi tratado em sala de aula;

2. *Leitura individual*: cada aluno receberá uma cópia do problema e fará uma leitura própria;

3. *Leitura em conjunto*: formar grupos e pedir que façam a leitura entre os membros do grupo;

4. *Resolução do problema*: após as fases anteriores e conscientes sobre o que devem fazer, os alunos, de maneira conjunta e colaborativa, partem para a resolução do problema;

5. *Observar e incentivar*: cabe ao professor questionar e motivar os alunos, em busca da solução do problema;

6. *Registro das resoluções na lousa*: os grupos são incentivados a anotar na lousa suas resoluções, para os alunos discutirem e analisarem;

7. *Plenária*: guiados coletivamente pelo professor, os alunos são incentivados a discutir e a tirar suas dúvidas em relação às resoluções apresentadas;

8. *Busca do consenso*: efetuadas as discussões e sanadas as dúvidas, o professor e os alunos buscam chegar um consenso sobre o resultado correto;

9. *Formalização do conteúdo*: é o momento que o professor formaliza os conceitos pertinentes ao conteúdo abordado durante a resolução do problema.

Esse roteiro elaborado pelas pesquisadoras pode ser adaptado conforme as necessidades de cada professor com sua respectiva sala de aula, de acordo com aquilo que o docente julgar necessário e mais eficaz, potencializando a aprendizagem dos seus alunos. As pesquisadoras fizeram alterações nas etapas do roteiro (que possuía, inicialmente, seis etapas) ao longo do desenvolvimento de suas pesquisas e, atualmente, foi inserida a décima etapa, descrita por 10. *Proposição e resolução de novos problemas* (Allevato; Onuchic, 2014). Nessa etapa, os alunos são convidados a elaborar novos problemas relacionados aos conteúdos propostos e formalizados durante a aula, ao mesmo tempo que o professor coordena a dinâmica da resolução desses novos problemas, reiniciando desde o primeiro passo, quando os problemas formulados pelos próprios estudantes são trocados entre outros grupos de colegas.

Diante do exposto, como não trabalharemos com a proposição de problemas durante a aplicação da sequência didática, neste trabalho sempre vamos nos referir ao roteiro de nove passos elaborado pelas autoras, sugerido em Onuchic e Allevalo (2011). Apesar de ter sido elaborado como uma sequência de sucessivas etapas, ao colocar em prática este roteiro, é possível notar que algumas dessas etapas podem ocorrer, de fato, em sequência, outras simultaneamente e, também, fora da sala de aula. As etapas 2 e 3, que se referem à leitura individual e leitura em conjunto, ocorrem em sequência, isto é, após a leitura individual, passa-se para a leitura em conjunto (pode ser feita pelo professor ou algum aluno, em voz alta).

As etapas 4, da resolução do problema, e 5, de observar e incentivar, ocorrem simultaneamente, pois, no tempo em que os alunos estão resolvendo os problemas, o professor percorre a sala de aula, auxiliando os grupos com questionamentos e sugestões em busca de desenvolver e potencializar a aprendizagem dos conceitos explorados durante o processo de resolução dos problemas. Pode-se afirmar que a etapa 1, da preparação do problema, deve ser realizada fora da sala de aula, momento em que o professor reflete sobre o conteúdo a ser ensinado e separa bons problemas que serão utilizados para atingir esse objetivo. É comum encontrar trabalhos que utilizaram a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, apresentando roteiros adaptados às realidades locais durante sua elaboração, como pode ser verificado em Azevedo *et al* (2017), Biazutti, Vaz e Andrade (2020) e Azevedo, Palhares e Figueiredo (2020).

Ao analisar as etapas desse roteiro, identificam-se aquelas cuja responsabilidade cabe ao docente, outras que são atribuídas aos alunos e algumas que demandam um trabalho conjunto entre ambos.

A etapa 1, da *preparação do problema* é de responsabilidade do professor e faz-se fundamental selecionar bons problemas condizentes com os conhecimentos prévios dos alunos para iniciar o processo de ensino-aprendizagem e obter resultados prósperos.

A etapa 5, de *observar e incentivar*, sugere uma ação participativa do professor, verificando como os alunos atuam durante a resolução dos problemas, sua maneira de trabalhar em grupos (de dois ou mais alunos) e, além disso, incentivando os alunos a buscarem a solução dos problemas, fazendo questionamentos e sugestões no decorrer do processo, sem fornecer respostas prontas.

A etapa 9, da *formalização do conteúdo*, é de responsabilidade do professor e, nesse momento, são apresentados, de maneira formalizada, os conceitos matemáticos abordados durante a resolução dos problemas. Embora essa etapa seja de responsabilidade do professor, o ideal é que seja desenvolvida com o auxílio e a participação dos alunos.

Não se trata de mais uma aula normal, tradicional e mecanizada; ao contrário, deve ser uma aula com a participação dos alunos e relacionando elementos dos conteúdos com os problemas propostos pelo professor.

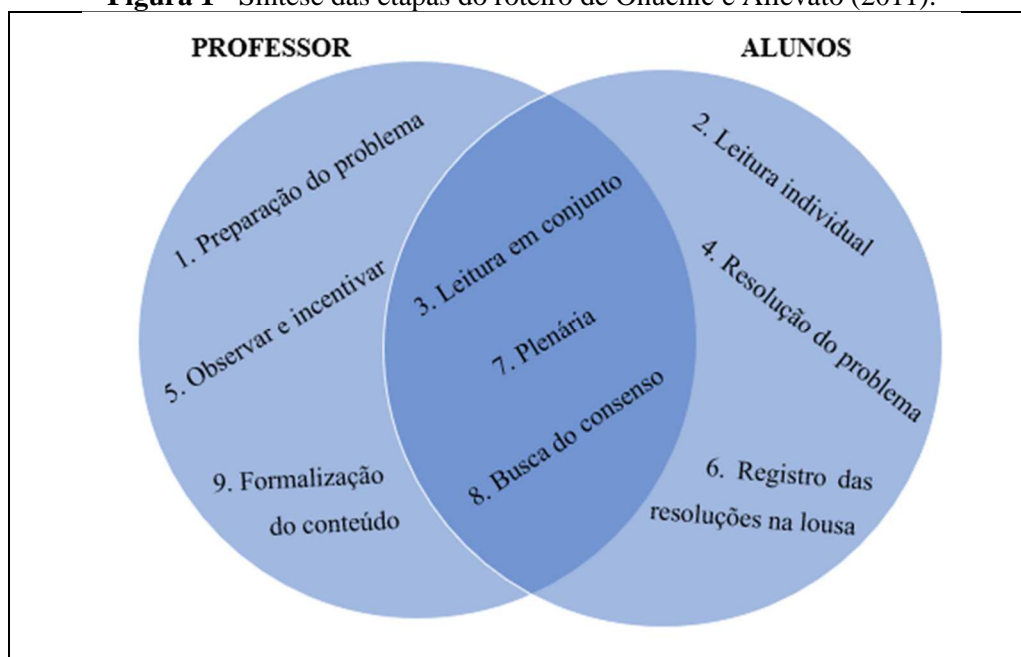
Os alunos são os personagens principais das etapas 2, leitura individual, da etapa 4, resolução do problema – à qual, de fato, utilizam seus conhecimentos prévios e estratégias para encontrar soluções – e da etapa 6, registro das resoluções na lousa, momento de compartilhar suas soluções de maneira geral para que sejam discutidas.

A etapa 6 pode ser protagonizada pelo docente, a depender da dinâmica planejada da sua aula ou da quantidade de alunos na sala, a partir dos registros de resolução do problema entregues pelos estudantes.

De forma simultânea, a ambos os agentes da sala de aula – professor e alunos – compete a responsabilidade pela Etapa 3, relativa à leitura coletiva dos problemas. Nessa fase, os enunciados devem ser lidos em voz alta, seja pelo docente ou por algum discente, sendo possível, ainda, a realização dessa leitura em grupos menores. Ambos compartilham o protagonismo também na Etapa 7, correspondente à plenária, momento em que as soluções elaboradas pelos alunos são apresentadas e discutidas, sob a mediação do professor. Por fim, na Etapa 8, destinada à busca do consenso, alcança-se uma compreensão coletiva acerca das soluções mais adequadas ao problema proposto.

Dessa forma, professor e estudantes atuam de maneira colaborativa em sala de aula, com os alunos assumindo uma participação ativa no processo de construção do conhecimento, enquanto o professor exerce o papel de mediador e orientador dos processos de ensino e aprendizagem. A Figura 01, a seguir, sintetiza nossa explanação.

**Figura 1** - Síntese das etapas do roteiro de Onuchic e Allevato (2011).



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Podem ocorrer algumas exceções, de acordo com as necessárias adaptações que foram efetuadas no roteiro, por conta de fatores como a quantidade de alunos na sala de aula ou algum equívoco do professor para estimar o tempo de realização da atividade

previsto, ou, até mesmo, desconhecer a turma em que começará a lecionar. Entretanto, percebe-se que, durante o percurso de resolução dos problemas, professor e alunos atuam juntos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática de forma ativa, atribuindo-se aos alunos o protagonismo na construção de conhecimento.

Compete ao professor a responsabilidade de selecionar problemas que sejam potencialmente geradores de novos conhecimentos e alinhados aos objetivos de aprendizagem estabelecidos, de modo a assegurar resultados significativos com a implementação da MEAAMaRP. Concordamos com Van de Walle (2009) ao afirmar que é necessário começar o trabalho onde estão os alunos, isto é, considerando os conhecimentos matemáticos prévios que trazem consigo. A pedra fundamental dessa metodologia está amparada na escolha de bons problemas, motivadores e desafiadores, condizentes à realidade dos alunos. Essa metodologia de ensino, todavia, exige uma mudança de postura do professor e dos alunos, como sugerem Onuchic e Allevato (2011), pois o professor deixa de ser o detentor do conhecimento e transmissor dos conteúdos e passa a atuar como organizador, mediador, facilitador do processo de ensino e aprendizagem, com os alunos atuando de maneira ativa e assumindo o protagonismo na construção de conhecimentos.

É possível enfrentar certa resistência inicial a essa metodologia, por parte dos alunos, no começo do processo de implementação em sala de aula, como apontado por Denardi (2019) e Kucinkas (2024), pois a MEAAMaRP distingue-se da forma tradicional, passiva e mecanizada de ensino de Matemática, comumente adotada pelas escolas no país, ao promover uma abordagem mais ativa, reflexiva e centrada na construção significativa do conhecimento pelos alunos. Leal Junior e Onuchic (2015, p. 975) compreendem a MEAAMaRP não apenas como uma atividade de ensino, mas como uma prática de ensino ampla que

[...] pode ser realizada através de atividades educacionais, nos âmbitos da formação de professores, ensino, aprendizagem, avaliação, história da Educação Matemática, filosofia da Educação Matemática, psicologia da Educação Matemática, trabalho cooperativo e colaborativo e etc, o que vem confirmar as dimensões desse campo, como propomos no início do artigo, sendo elas: metodológica, epistemológica, cognitiva, ontológica, política, educacional, social, histórica e cultural (Leal Junior e Onuchic, 2015, p. 975).

Com esse olhar mais amplo trazido pelos autores, é possível pensar na inserção da Resolução de Problemas, como metodologia de ensino, em diversas áreas do

conhecimento, como Física, Química, Engenharias, Computação, e, quiçá, em disciplinas da área de Ciências Humanas ou Biológicas, de maneira interdisciplinar, elaborada e desenvolvida numa perspectiva de ensino e aprendizagem mais generalizada, expandindo-se, assim, a Resolução de Problema como metodologia de ensino para as demais áreas do conhecimento. Seriam necessárias adequações nos processos de ensino e aprendizagem para que fossem atendidas as especificidades de cada área do conhecimento. Existem múltiplas possibilidades, bem como novas descobertas, para a aplicação dessa metodologia de ensino nas salas de aula. Cabe aos docentes explorá-la e adaptá-la conforme a realidade em que atuam e os objetivos pedagógicos pretendidos.

Como nossa pesquisa direciona seu foco para o Ensino Superior, especificamente o curso de Licenciatura em Física do IFSP-Votuporanga, optamos pela MEAAMaRP por ser uma metodologia ativa de ensino, capaz de potencializar a aprendizagem dos alunos. Além disso, oferece a possibilidade de proporcionar novas perspectivas para futuros professores de Física. Em nossa investigação, selecionamos alguns conceitos que fazem parte do conteúdo de CDI para serem discutidos e explorados na perspectiva da MEAAMaRP durante a etapa de coleta de dados e produção de registros pelos alunos da licenciatura em Física que participaram desta pesquisa.

De acordo com o Projeto Pedagógico de Curso da Licenciatura em Física (IFSP, 2023), o CDI II representa um dos componentes curriculares da área da Matemática pertencente ao curso de Física; e alguns conteúdos que fazem parte do Cálculo Integral abordados nessa disciplina possuem inúmeras aplicações nas diversas disciplinas do curso, sendo de extrema importância aos alunos compreender esses conceitos.

Acreditamos que a MEAAMaRP pode contribuir para tornar a aprendizagem dos conceitos e propriedades de Integral mais significativa para os alunos e desenvolver suas capacidades de construção de conhecimentos na disciplina de CDI II. Por se tratar de uma metodologia de ensino centrada nas práticas de sala de aula, buscamos um referencial metodológico de pesquisa que fosse condizente com essa abordagem. Nesse sentido, identificamos aspectos relevantes na Engenharia Didática, oriunda da Didática da Matemática Francesa, a qual será abordada na sequência deste trabalho.

### **2.3 A Engenharia Didática (ED) como metodologia de pesquisa**

Os processos de ensino e aprendizagem de Matemática são temas de debates recorrentes há muito tempo, e as mudanças da sociedade refletem na elaboração dos currículos que chegam às salas de aula no Brasil e no mundo. Para compreender os

motivos que levaram ao desenvolvimento da Engenharia Didática (ED), na França, na década de 1980, é importante resgatar alguns fatos ocorridos após a passagem do MMM, embora por pouco tempo, e que de certa maneira contribuíram para o aprimoramento da Didática da Matemática Francesa.

Na França, durante a década de 1960, sob as influências do ensinar e aprender Matemática orientadas, à época, pelo MMM, era necessária a criação de locais para discussões sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática, auxiliar os professores para atuarem sob um currículo mais *moderno* e elaborar materiais didáticos para serem utilizados nas salas de aula.

Sentiu-se a necessidade de elaborar projetos de pesquisa de tipo experimental, nos quais seriam formuladas as hipóteses; esses projetos foram colocados em prática; foram construídas ferramentas para o tratamento dos dados coletados ou foram adaptadas ferramentas existentes em disciplinas afins, como estatística e psicologia cognitiva; e métodos foram cruzados para refinar os resultados. (Douady, 1995, p. 2, tradução nossa).

Como resposta a essas demandas, possuindo o apoio de pesquisadores e com financiamento do Ministério Nacional da Educação (da França), surgem os chamados IREM (Institutos de Pesquisa sobre Educação Matemática) por todo aquele país. Esse cenário, após o MMM e com o trabalho desenvolvido nos IREM, auxiliou no desenvolvimento da Didática da Matemática, com destaque para pesquisadores como Guy Brousseau, Gérard Vergnaud, Yves Chevallard, Michèle Artigue, Régine Douady, entre outros.

Douady (1985 *apud* Pommer, 2013, p. 10) define a Didática da Matemática como “a área da ciência que estuda o processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos no ensino básico e universitário, propondo-se a descrever e explicar os fenômenos relativos ao ensino e à aprendizagem específica da Matemática”.

Dessa forma, não havia somente a preocupação em produzir material didático e oferecer cursos de formação e capacitação para professores. Gálvez (2009, p. 33) afirma que foram desenvolvidas outras atividades nos IREM, “[...] não só destinadas à produção de meios para atuar sobre o ensino, como também para controlar e produzir tais ações sobre o ensino. Pode-se, em outros termos, trazer a pesquisa científica para os processos que têm lugar no domínio do ensino escolar da matemática”. Além de melhorar os processos de ensino e aprendizagem, era necessário desenvolver metodologias que permitissem analisar e reproduzir tais processos. As pesquisas sobre o ensino e

aprendizagem de Matemática se aproximam da sala de aula. Nesse contexto, além da preocupação com o "o quê" ensinar, intensificou-se a busca pelo desenvolvimento de estratégias voltadas ao "como ensinar".

A sala de aula passa a ser reconhecida como um ambiente privilegiado para a coleta de dados em pesquisas sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Tais investigações devem adotar métodos científicos que assegurem a possibilidade de replicação em diferentes contextos educacionais, permitindo que outros pesquisadores apliquem e validem seus resultados. Douady (1995) afirma que é necessário trazer uma abordagem científica para a sala de aula e, por conseguinte, observar a sala de aula como um todo, compreendê-la como um objeto de estudo, considerando as relações existentes entre professor, aluno e saber.

Um dos pesquisadores com mais destaque no desenvolvimento desse projeto é Guy Brousseau, do IREM de Bordeaux, idealizador da Teoria das Situações Didáticas (TSD). Para Freitas (2012, p. 77), a TSD é um modelo teórico “que trata de formas de apresentação, a alunos, do conteúdo matemático, possibilitando melhor compreender o fenômeno da aprendizagem da Matemática”. Gálvez (2009, p. 33) aponta que Brousseau, com a TSD, “propõe o estudo das condições nas quais são constituídos os conhecimentos; o controle destas condições permitiria reproduzir e otimizar os processos de aquisição escolar de conhecimentos.”.

Dessa forma, o objetivo da Teoria das Situações é caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis, conduzindo frequentemente a modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos. Essa modificação é característica de um determinado conjunto de conhecimentos, da ocorrência de uma aprendizagem significativa. O objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber. (Almouloud, 2010, p. 31-32).

Nota-se uma preocupação em formalizar o desenvolvimento e a aplicação de sequências didáticas no ensino de Matemática, com possibilidades de reproduzi-las e de analisá-las, objetivando a construção do conhecimento matemático pelo estudante. Douady (1995, p. 5, tradução nossa) afirma que, dada a forma como os trabalhos de pesquisa eram conduzidos nos IREM – com a colaboração entre professores e pesquisadores na elaboração e implementação de sequências de ensino, bem como na realização de observações em sala de aula – a Didática, como campo de estudo, alcançou seu auge. Surgem e disseminam-se metodologias de pesquisa “próprias da tradição

francesa”, dentre elas a Engenharia Didática (ED), encontrada nas obras de Artigue, Brousseau, Douady e demais pesquisadores.

Desenvolvida na década de 1980, Artigue (1995, p. 36, tradução nossa) afirma que a ED se apresenta como um “esquema experimental fundamentado em “realizações didáticas” na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino”. A sala de aula torna-se um terreno fértil para o desenvolvimento de pesquisas relacionadas ao ensino. Segundo Bittar (2017), a elaboração de uma Engenharia Didática tem início com a escolha de um conteúdo cuja aprendizagem, segundo a avaliação do professor-pesquisador, não atinge os níveis desejados.

Para dar início à ED como metodologia de pesquisa deste trabalho e sem tratar minuciosamente os méritos desta discussão, compreendemos como semelhantes os termos em destaque: *sequências didáticas*, *sequências de ensino* e *sequências de atividades*. Zabala (1998, p. 18) utiliza o termo “sequência de atividades ou sequência didática” como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”. A seguir, destaca-se, com maior riqueza de detalhes, a definição de sequências didáticas apresentada por Pais (2019, p. 100), cuja concepção adotamos e com a qual dialogamos ao longo deste trabalho.

Uma sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Essas aulas são também denominadas sessões, tendo em vista o seu caráter específico para a pesquisa. Em outros termos, não são aulas comuns no sentido da rotina de sala de aula. Tal como acontece na execução de todo projeto, é preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigado (Pais, 2019, p. 100).

Como apresentado, as sequências de ensino referem-se a sessões (aulas, encontros, oficinas de aprendizagem) elaboradas sobre temas escolhidos pelo professor pesquisador com objetivos bem determinados, levando-se em consideração os conhecimentos prévios dos alunos. Portanto, ao concordarmos com Pais (2019), assumimos a concepção de sequências didáticas como um conjunto de aulas planejadas, cada uma com objetivos próprios e voltadas ao desenvolvimento de aprendizagens específicas. Além disso, compreendemos que cada aula, por sua vez, é composta por um conjunto de atividades cuidadosamente estruturadas e organizadas para alcançar os

objetivos definidos, conforme destacado por Zabala (1998). Desse modo, compreende-se que, dentro do conjunto de aulas que compõem uma sequência didática, cada aula apresenta uma estrutura interna organizada em forma de uma sequência de atividades, planejadas para atingir os objetivos específicos daquela aula.

Artigue (1995) estabelece uma comparação do “trabalho didático” com o “trabalho do engenheiro”, no sentido de sua concepção, planejamento e execução. Entretanto, somente o conhecimento teórico não basta para trabalhar no ambiente complexo de uma sala de aula, sendo necessária a realização de atividades de ensino, na prática, no dia a dia. Da mesma forma, apenas a experiência prática não se faz suficiente para melhorar a qualidade do ensino e da aprendizagem, pois é preciso refletir e recorrer a elementos teóricos.

Pais (2019, p. 97) caracteriza a ED como “uma forma particular de organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa em Didática da Matemática”, contemplando o caráter teórico e experimental da sala de aula. Como metodologia de pesquisa, a ED é desenvolvida ao longo de quatro etapas, a saber: 1. Análises Preliminares; 2. Concepções e Análise *a Priori*; 3. Experimentação; e, 4. Análise *a Posteriori* e Validação.

A metodologia da engenharia didática também é caracterizada, em comparação com outros tipos de pesquisa baseados na experimentação em sala de aula, pelo registro em que se encontra e pelas formas de validação à qual está associada. De fato, as pesquisas que fazem uso da experimentação em sala de aula geralmente estão situadas em uma abordagem comparativa com validação externa, fundamentada na comparação estatística do desempenho de grupos experimentais e grupos de controle. Esse não é o caso da engenharia didática, que, por outro lado, baseia-se no registro dos estudos de caso e cuja validação é essencialmente interna, por meio do confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori*. (Artigue 1995, p. 37, tradução nossa).

Essa validação interna de pesquisas que se utilizam da ED como procedimento metodológico pode parecer simples, mas requer um trabalho complexo do pesquisador. Como afirma Pais (2019, p. 101) “a validação é uma etapa onde a vigilância deve ser ampliada, pois se trata de garantir a essência do caráter científico”. A validação ocorre a partir do confronto entre os dados coletados e aqueles produzidos nas etapas de análises *a priori* e *a posteriori*. Na sequência, detalharemos as quatro fases que caracterizam o desenvolvimento de trabalhos que utilizam a Sequência Didática (ED) como metodologia de pesquisa. Por considerarmos necessário, apresentaremos, também, os elementos

específicos que serão abordados nesta tese em cada uma das etapas da ED, com o objetivo de situar o leitor quanto à estrutura e ao percurso de nossa investigação.

### **2.3.1 Análises Preliminares**

Na primeira etapa da ED, denominada Análises Preliminares, são levados em consideração o quadro teórico geral e os conhecimentos didáticos que serão desenvolvidos e, além disso, são efetuadas análises preliminares sob vários aspectos, como aponta Artigue (1995, p. 38, tradução nossa):

- análise epistemológica dos conteúdos contemplados;
- análise do ensino tradicional e seus efeitos;
- análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução;
- análise do campo de restrições em que se vai se situar a efetiva implementação didática eficaz.

É possível, também, realizar um levantamento bibliográfico sobre o tema da pesquisa, o contexto escolar onde os dados serão coletados e o perfil dos participantes envolvidos. Nessa etapa, o pesquisador busca apropriar-se de todas as informações que possam contribuir para a realização das análises preliminares. Cabe destacar, a seguir, alguns aspectos relevantes sobre essa etapa, com ênfase nos objetivos que a orientam e na forma como o pesquisador a compreende no âmbito desta investigação.

Para Almouloud (2010, p. 172), “Um dos objetivos das análises prévias é identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e delinear de modo fundamentado a(s) questão(ões), as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa”. Ainda, segundo Machado (2012, p.238), “As análises preliminares são feitas principalmente para embasar a concepção da engenharia”, ou seja, são análises importantes para situar o pesquisador em relação aos elementos relacionados a sua investigação. Esta última autora complementa que os objetivos da pesquisa determinarão quais pontos devem ser verificados e qual deverá ser o grau de profundidade dessas análises.

Em síntese, na etapa de Análises Preliminares, é responsabilidade do pesquisador reunir o máximo de informações possível, de modo a subsidiar a concepção, a elaboração e o desenvolvimento dos instrumentos de coleta e produção de dados.

Com o intuito de situar o leitor, em nossa tese de doutorado, essa etapa da ED será explorada, detalhadamente, no Capítulo 3. Tal etapa compreende: investigações acerca dos aspectos históricos do desenvolvimento do Ensino Superior no Brasil e do ensino de CDI no país; um levantamento bibliográfico de artigos, dissertações e teses relacionados à MEAAMaRP, ao CDI e à ED; uma apresentação do curso de Licenciatura em Física do IFSP; e um panorama dos conceitos finais obtidos por alunos desse curso nas disciplinas de CDI I e CDI II, no período de 2016 a 2019.

### **2.3.2 Concepções e Análises a *Priori***

A segunda etapa da ED é denominada Concepções e Análises a *Priori*, na qual são consideradas as análises levantadas na etapa anterior (Análises Preliminares) e, conforme os objetivos de cada pesquisa, é elaborada a sequência didática e demais instrumentos da coleta de dados e produção de registros relativos à investigação planejada. O pesquisador identifica certo número de variáveis didáticas a serem estudadas, chamadas de variáveis de comando e, como as distingue Artigue (1995), variáveis macro didáticas ou globais (referentes à organização global da engenharia), e as chamadas variáveis micro didáticas ou locais (referentes à organização de uma sessão ou uma fase da engenharia). Com a finalidade de situar o leitor, apontaremos e descreveremos essas variáveis, especificamente no capítulo 4 desta tese de doutoramento.

Almouloud (2010) afirma que essas variáveis podem ser de ordem geral ou dependentes do conteúdo matemático a ser estudado, sendo as análises realizadas em três dimensões: a dimensão epistemológica (associada às características do saber); a dimensão cognitiva (associada ao processo de construção dos conhecimentos dos alunos, sujeitos da aprendizagem); e dimensão didática (associada às características do sistema de ensino no qual os sujeitos estão inseridos).

Assim, em relação à escolha dessas variáveis didáticas, concordamos com Gálvez (2009, p. 36), quando essa autora afirma que “Uma parte importante da análise de uma situação didática consiste na identificação das variáveis didáticas e no estudo, tanto teórico como experimental, de seus efeitos”. Devem ser escolhidas variáveis didáticas que, na perspectiva do professor pesquisador, possam contribuir para a verificação de possíveis mudanças no processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

O objetivo de uma análise *a priori* é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos admitir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido. Dessa forma, em uma análise *a priori* devemos:

- Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática a ser desenvolvida;
- Analisar a importância da situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações, escolhas para a construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento, quase isolado, do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem.
- Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlá-los, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultem do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem (Almouloud, 2010, p. 175-176).

Artigue (1995) e Machado (2012) indicam que a fase de Concepções e Análises *a Priori* é composta por uma parte descritiva e outra parte de previsão, pois cabe ao professor o trabalho de descrever os comportamentos dos alunos e prevê-los durante a realização das sessões de ensino, conforme o quadro teórico, almejando o desenvolvimento cognitivo dos conhecimentos propostos nas sessões de ensino.

Em síntese, na etapa de Concepções e Análises *a Priori*, compete ao professor-pesquisador, com base nas informações compiladas na fase anterior (Análises Preliminares), refletir sobre a forma como será realizada a coleta de dados da pesquisa. Isso envolve a elaboração da sequência didática, das avaliações a serem aplicadas, dos demais instrumentos de coleta — como entrevistas ou questionários — e, por fim, a definição das variáveis didáticas que serão analisadas e confrontadas.

Em nossa pesquisa, essa etapa foi dedicada à apresentação das variáveis didáticas analisadas, à elaboração e à confecção da sequência didática, aplicada e desenvolvida sob a perspectiva da MEAAMaRP, após a escolha dos conceitos de Integral a serem explorados à luz dessa metodologia de ensino. Incluem-se, ainda, os demais instrumentos utilizados, como a Avaliação Diagnóstica Inicial (ADI), a Avaliação Diagnóstica Final (ADF) e o questionário de pesquisa.

Embora esses instrumentos avaliativos não façam, comumente, parte do desenvolvimento de uma ED, sentimos a necessidade de incluí-los em nossa investigação. A ADI possui um aspecto de trazer uma informação inicial sobre os conhecimentos prévios que os alunos possuem. Nesse sentido, incluímos a ADF para coletar informações após o término da aplicação da sequência didática, com objetivo de ter um elemento a

mais na direção de verificar a evolução dos alunos participantes, ou seja, como um elemento adicional e complementar às observações e anotações feitas no dia a dia da aplicação efetuada. Em relação ao questionário de pesquisa, buscamos por informações adicionais às avaliações anteriores, a fim de verificar quais percepções os alunos participantes tiveram ao vivenciarem as aulas de CDI fundamentadas na MEAAMaRP.

Para situar o leitor, todos esses instrumentos da coleta de dados e produção de registros desta pesquisa foram descritos e justificados ao longo do capítulo 4 deste trabalho e estão disponíveis na seção *Apêndices* desta tese.

### 2.3.3 Experimentação

A terceira etapa da ED, denominada *Experimentação*, corresponde ao momento em que o pesquisador aplica a sequência didática — elaborada com base nos pressupostos desenvolvidos nas etapas anteriores — e estabelece contato direto com os participantes da pesquisa. Em situações que exigem mais de uma sessão de ensino, Almouloud (2010) e Machado (2012) sugerem que o pesquisador faça “correções de rota” ao final de cada encontro, realizando análises *a posteriori* locais, confrontando-as com análises *a priori* já estruturadas. As chamadas *correções de rota*, mencionadas anteriormente, e realizadas durante a ED, referem-se a alterações feitas pelo professor nas atividades da sequência didática, com o objetivo de aprimorar os processos de ensino do objeto matemático, quando necessário. Isso não implica que os alunos devam seguir, exclusivamente, as estratégias de solução ou o raciocínio proposto pelo docente. Ao contrário, ao longo do processo, há abertura para que os estudantes desenvolvam e sigam suas próprias estratégias e formas de raciocínio, ainda que estas se distanciem daquelas previstas pelo professor ao elaborar os problemas.

Machado (2012) destaca, ainda, que o pesquisador deve ter comprometimento durante a execução das sessões para não prejudicar a coleta e a produção de material de pesquisa. Ainda, Pais (2019) corrobora com essa informação afirmando que, se por acaso o pesquisador não for o responsável pela aplicação da sequência didática, os sujeitos que forem executar a aplicação devem estar conscientes quanto aos objetivos da pesquisa para não prejudicar os resultados.

De maneira geral, a Experimentação configura-se como a etapa de aplicação da sequência didática e demais instrumentos de pesquisa, elaborados e confeccionados na etapa anterior, conforme as reflexões do professor pesquisador. Destaca-se a relevância das observações que o pesquisador poderá efetuar na sala de aula durante as sessões de

ensino. É importante salientar que o pesquisador, autor desta tese de doutoramento, foi o responsável pela confecção e aplicação dos instrumentos da coleta de dados desta pesquisa.

Com o intuito de situar o leitor, os detalhes acerca da aplicação dos instrumentos da coleta de dados e produção de registros da pesquisa foram descritos no capítulo 5 desta tese. Destaca-se que o momento de Experimentação desta pesquisa foi realizado somente após sua aprovação pelo Conselho de Ética em Pesquisa (CEP), conforme o parecer consubstanciado nº 6.598.409. Tal aprovação possibilitou o convite aos alunos do curso de Licenciatura em Física para colaborarem com a pesquisa, viabilizando, assim, a aplicação dos instrumentos de coleta e produção de dados.

### **2.3.4 Análises a *Posteriori* e Validação**

A quarta fase da ED, Análise a *Posteriori* e Validação, é a etapa de confrontar as hipóteses formuladas na segunda etapa, Concepções e Análises a *Priori*, com os dados coletados durante a realização das sequências de ensino, em que se incluem, também, durante a fase da Experimentação, as avaliações diagnósticas e o questionário de pesquisa. Como afirma Machado (2012, p. 246), “Finalmente, é da confrontação das análises a *priori* e a *posteriori* que se validam ou se refutam as hipóteses levantadas no início da engenharia”. A etapa de Análises a *Posteriori* e Validação representa o momento que o professor pesquisador reflete e analisa todas as informações para validar ou rejeitar as hipóteses da sua engenharia, conforme as variáveis de comando investigadas.

Entra então, em cena, a quarta fase da engenharia didática: a análise a posteriori e validação. A análise dos comportamentos cognitivos dos alunos diante das situações propostas deve ser feita sempre em confronto com o previsto na análise a priori e com os objetivos a serem alcançados. Esse confronto deve ser realizado em vários momentos da engenharia didática e esta característica da ED que a define como tendo validação interna. A preocupação deve ser sempre analisar a evolução do sujeito ao longo da realização da sequência didática. Não se trata de confrontar dois grupos que passaram por experiências diferentes e nem de comparar conhecimentos de um aluno antes da realização da sequência didática e ao final dessa. (Bittar, 2017, p. 107 - 108).

Artigue (1995) indica que os dados coletados podem ser complementados, a cargo do pesquisador, com a realização de entrevistas individuais ou em grupos e questionários, durante a fase 3 (Experimentação) ou após seu término. No que se refere a essa etapa em nossa pesquisa, foram confrontados os dados das análises a *priori* e a *posteriori* para que

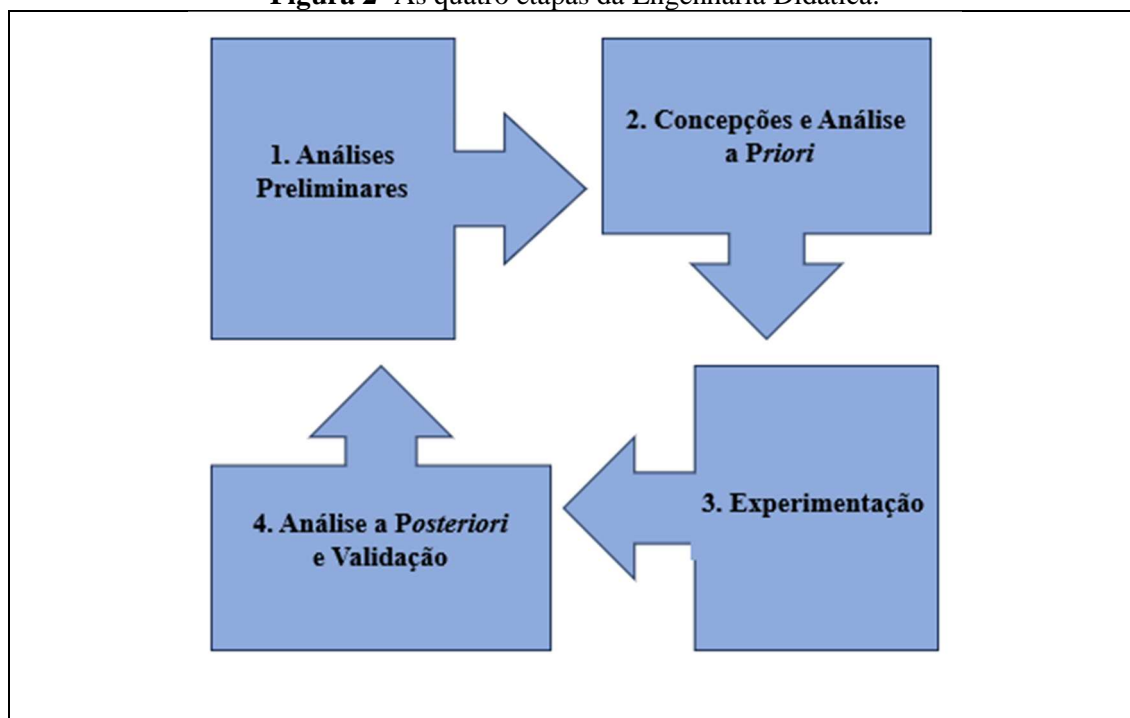
fossem devidamente verificadas a validação ou refutação das variáveis didáticas elencadas. Como forma de situar o leitor, dedicamos o capítulo 6 deste trabalho à apresentação dos registros dos alunos participantes da pesquisa e confrontação das análises *a priori* e *a posteriori*, com o objetivo de validar ou recusar as hipóteses levantadas nesta pesquisa.

Após a apresentação detalhada da ED, surge a seguinte indagação: por que utilizar a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa? Uma justificativa plausível para a adoção dessa abordagem é apresentada por Pais (2019, p. 105):

A justificativa de escolha pelo uso de uma engenharia didática se deve ao fato de que as técnicas tradicionais, tais como questionários, observações diretas, entrevistas, análises de livros, análise documental, são insuficientes para abranger a complexidade do fenômeno didático, sobretudo, em nível de sala de aula. Mesmo que esses sejam instrumentos válidos, no universo de suas próprias limitações, não têm a especificidade necessária para interpretar a dimensão do aspecto cognitivo em nível da aprendizagem escolar. A adoção exclusiva de um desses instrumentos na pesquisa didática não é recomendável, sobretudo, tendo em vista a diversidade de relações envolvidas na atividade pedagógica. Assim, a utilização de uma engenharia didática reforça a confiabilidade da pesquisa e sua potencialidade se deve à defesa do vínculo com a realidade da sala de aula (Pais, 2019, p. 105).

O mesmo autor destaca ainda que projetos que adotam a ED como metodologia de pesquisa devem ser compreendidos em sentido pleno, desde os desafios de criatividade inicial, com a “gestação de suas primeiras ideias”, até sua realização na prática na sala de aula. Portanto, a ED auxilia o pesquisador no processo de elaboração, execução e análise das sequências didáticas e possibilita mudanças de rota, conforme julgar necessário. Após o término de cada sessão didática, o pesquisador poderá confrontar suas análises *a priori* e *a posteriori*, efetuando as possíveis alterações para a próxima sessão, visando melhorias no processo de ensino e aprendizagem. A figura 02 ilustra as quatro etapas que devem ser desenvolvidas na ED.

**Figura 2-** As quatro etapas da Engenharia Didática.



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Compreendemos que cada etapa da ED impacta nas seguintes, partindo da primeira etapa e finalizando na última, encerrando com a confrontação e validação da pesquisa. Trata-se de um processo cíclico e cuidadosamente concebido e desenvolvido pelo professor pesquisador. Bittar (2017) aponta que é possível transitar entre as quatro etapas da ED conforme as necessidades identificadas individualmente pelos pesquisadores, não havendo obrigatoriedade de seguir um caminho linear.

Dessa forma, esperamos utilizar o suporte da ED como um dos pilares para concepção, coleta e produção de dados e validação (ou refutação) das hipóteses elencadas ao longo desta pesquisa de doutorado. Apresentados, assim, os elementos principais da fundamentação teórica, os próximos capítulos serão intitulados e explorados, propositalmente, com os nomes das etapas que compõem uma pesquisa que utiliza ED como metodologia de investigação. Ao longo deste capítulo, nas seções 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 e 2.3.4 constam cada uma das etapas da ED que foram realizadas.

Embora a Engenharia Didática permita transições entre suas etapas, optamos por apresentá-las de forma linear e sequencial nos capítulos seguintes, com o intuito de garantir maior clareza e evitar possíveis confusões ao leitor. Avanços e retrocessos entre as etapas são comuns na prática durante o desenvolvimento de uma engenharia didática, fato que não ocorreu no desenvolvimento do nosso trabalho. O pesquisador pode estar

elaborando sua sequência didática, na segunda etapa da sua ED, e pode haver a necessidade de levantar mais algumas informações relevantes, retornando, assim, à etapa de Análises Preliminares para depois seguir adiante. Reforçamos, novamente, que optou-se por seguir o desenvolvimento desta ED de maneira linear, sequencial, para facilitar a compreensão do leitor.

Vale chamar atenção a um fato importante: no Brasil, é comum encontrar diversos trabalhos se referindo à “Engenharia Didática de Michèle Artigue”, dando uma (errônea) noção de que essa pesquisadora desenvolveu essa metodologia de pesquisa. O que de fato ocorreu é que, com a publicação de seu trabalho (Artigue, 1995), essa abordagem se popularizou. Dessa forma, ela acabou recebendo a fama como criadora desse referencial. Ademais, embora não detalharemos tais classificações, estamos trabalhando nesta tese com a Engenharia Didática Clássica ou Engenharia Didática de Primeira Geração, como denominam Almouloud e Silva (2012, p. 26).

Lembramos que a noção de Engenharia Didática (clássica ou de primeira geração) emergiu na didática da matemática no início dos anos 1980. Primeiramente em 1982 por Yves Chevallard e Guy Brousseau, depois, em 1989, por Michèle Artigue. Ela foi apresentada como uma metodologia de pesquisa suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula clássica. (Almouloud; Silva, 2012, p. 26).

Estamos prestes a encerrar este capítulo, cujo foco esteve na apresentação dos referenciais teóricos e metodológicos que fundamentam esta pesquisa. No estudo de caso que se segue, buscamos responder à seguinte pergunta norteadora: De que forma a utilização de sequências didáticas, desenvolvidas com base nos pressupostos metodológicos da ED e da MEAAMaRP, pode contribuir para o enriquecimento de processos de ensino e aprendizagem de conceitos de Integral? Quais potencialidades e limitações podem ser verificadas?

Dessa forma, optamos por adotar uma metodologia de ensino distinta daquela tradicional, de caráter passivo e mecanizado, ainda amplamente presente nas salas de aula do país. Compreendemos que MEAAMaRP possui características capazes de potencializar a aprendizagem dos alunos, desde o Ensino Básico até o Ensino Superior, foco deste trabalho. A MEAAMaRP representa uma metodologia ativa de ensino que desenvolve o protagonismo do aluno e o auxilia na construção de conceitos matemáticos ao longo das aulas.

Associada à MEAAMaRP, necessitávamos de uma metodologia de pesquisa cujo foco fosse o ambiente da sala de aula, desde a concepção até a análise das situações de aprendizagem desenvolvidas e aplicadas com alunos. Encontramos na ED uma metodologia de pesquisa que nos permite investigar, formalizar, analisar e reproduzir tais situações, com a vantagem de efetuar *correções de rota*, caso necessário. Elaboramos e aplicamos instrumentos de coleta de dados e produção de registros junto a alunos do curso de Licenciatura em Física do IFSP, câmpus Votuporanga, onde o autor desta tese está lotado desde 2016.

Escolhemos esse curso para desenvolver esta pesquisa como forma de contribuir com a formação dos licenciandos e futuros professores, que poderão experimentar, na prática, uma metodologia de ensino e aprendizagem diferente da tradicional, passiva e mecanizada. Apesar de o foco desta tese não ser a formação de professores, é possível fazer alguns apontamentos importantes ao longo do texto, pois é difícil nos distanciarmos da formação de professores quando atuamos nos cursos de Licenciatura.

Com propósito de esclarecer ao leitor alguns aspectos a respeito dos pressupostos metodológicos adotados neste trabalho, utilizamos a ED como metodologia de pesquisa para o desenvolvimento da nossa investigação, referencial que deu suporte a esta pesquisa. Os próximos capítulos serão intitulados e estruturados conforme as quatro etapas de uma Engenharia Didática, a saber: 3. Análises Preliminares; 4. Concepções e Análises *a priori*; 5. Experimentação; e 6. Análises *a posteriori* e validação.

No que se refere à MEAAMaRP, sua presença é fortemente marcada nos capítulos 4 e 5 desta tese. No capítulo 4, apresenta-se todo o processo de construção dos instrumentos de coleta de dados, entre os quais se destaca a sequência didática, concebida com base nessa metodologia. Foram selecionados e elaborados, pelo autor, bons problemas que estimulam a curiosidade e podem atuar como geradores de novos conceitos matemáticos.

No capítulo 5 deste trabalho, descreve-se o período de aplicação dos instrumentos de coleta de dados, realizada pelo próprio autor desta tese, em consonância com o roteiro de nove passos elaborado por Onuchic e Allevato (2011).

Portanto, fizemos uma aproximação entre os referenciais teóricos e metodológicos, a ED e a MEAAMaRP, almejando a elaboração, aplicação, desenvolvimento, análise e validação dos nossos instrumentos da coleta de dados desta pesquisa e, com isso, caminhamos em direção de responder nossa pergunta diretriz.

Finalizamos este capítulo com uma breve contextualização sobre o Movimento Matemática Moderna (MMM) e os impactos que esse movimento ocasionou no ensino de Matemática. Tais impactos foram responsáveis, ou contribuíram, para o desenvolvimento de processos alternativos de ensino e aprendizagem da Matemática, entre os quais se destacam a MEAAMaRP e a Didática da Matemática Francesa, ressaltando a ED como um de seus elementos. Diante disso, descrevemos, detalhadamente, a MEAAMaRP e a ED, fundamentação teórico-metodológica imprescindível para a elaboração e o desenvolvimento desta tese de doutorado. No capítulo seguinte, apresentaremos, com profundidade e detalhes, a etapa de Análises Preliminares realizadas para este trabalho.

*A primeira etapa da Engenharia, a etapa das análises prévias, é estruturada com objetivos de analisar o funcionamento do ensino habitual do conteúdo, para propor uma intervenção que modifique para melhor a sala de aula usual. A análise é feita para esclarecer os efeitos do ensino tradicional, as concepções dos alunos e as dificuldades e obstáculos que marcam a evolução das concepções (Carneiro, 2005, p. 93).*

### **3. ANÁLISES PRELIMINARES**

Este capítulo concentra esforços na elaboração da primeira etapa desta ED, a qual tem por característica, conforme indicam Almouloud (2010), Machado (2012) e Bittar (2017), a escolha de um objeto matemático e seu estudo de forma ampla, contemplando o ponto de vista de seu ensino.

A partir disso, torna-se possível a análise de livros didáticos, da metodologia de ensino utilizada, das orientações curriculares, de pesquisas relacionadas ao objeto de estudo e das dificuldades dos alunos em relação ao conceito matemático a ser investigado. Trata-se, portanto, de reunir a maior quantidade de informações possível para subsidiar e orientar o professor-pesquisador na elaboração de sua sequência didática. Cabe ao pesquisador buscar o máximo de elementos que possam contribuir para o desenvolvimento de sua investigação. É o que pretende-se realizar ao longo desse capítulo, buscar informações relevantes para o desenvolvimento da nossa pesquisa.

Dessa forma, organizamos o presente capítulo em alguns tópicos, a começar por uma revisão de literatura de artigos, dissertações e teses que podem estar relacionados com nossa investigação, os quais indicarão aquilo que já foi publicado e possíveis lacunas de pesquisa. Em seguida, serão analisados livros didáticos de CDI, com foco na maneira como os autores abordam alguns conteúdos sobre Integrais e, mais ainda, qual o espaço que os autores destinam à Resolução de Problemas. Na sequência, faremos uma breve contextualização histórica acerca do ensino do CDI no Brasil, de 1500 até os tempos atuais, para compreendermos as mudanças ocorridas com essa disciplina ao longo dos anos.

Posteriormente, aproximando-nos do ambiente de coleta e produção de dados desta pesquisa, apresentamos o IFSP, o câmpus localizado na cidade de Votuporanga e o curso de Licenciatura em Física, cujos estudantes foram convidados para participar da aplicação da sequência didática desenvolvida, bem como dos demais instrumentos de avaliação desta investigação. Por fim, ao final deste capítulo, será efetuado um

levantamento com os conceitos finais (aprovações e reprovações) nas disciplinas de CDI I e CDI II, dos estudantes do referido curso, para discutir alguns aspectos relacionados aos altos índices de não-aprovação nesses componentes curriculares.

Embora extensa, as análises realizadas no decorrer deste capítulo são necessárias para o pesquisador identificar eventuais lacunas de pesquisa, a situação do ensino de CDI e aspectos relativos a esse componente curricular no ambiente de pesquisa onde será realizada a coleta de dados. Por conta disso, iniciaremos estas análises preliminares com a revisão de literatura, desenvolvida a seguir.

### 3.1 Revisão de Literatura

Definidos alguns elementos importantes da nossa pesquisa, a saber, Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), o ensino de Cálculo Diferencial Integral (CDI) e a Engenharia Didática (ED), faremos uma revisão de literatura para encontrar artigos, dissertações e teses que possuam maior proximidade com nossa pesquisa.

Segundo Flick (2009), a revisão de literatura contribui para que o pesquisador identifique o que já foi investigado, as teorias empregadas, as contestações existentes, as questões ainda em aberto, entre outros aspectos relevantes. Essa revisão é importante, pois buscamos encontrar o que já foi pesquisado e que, de alguma forma, se relaciona com nosso projeto para, enfim, encontrar lacunas de pesquisa, definir nosso foco, aprofundar nossos estudos e nos guiar para o desenvolvimento de um bom trabalho. Portanto, o objetivo desta revisão de literatura será mapear estudos divulgados em artigos, dissertações e teses que relacionam a disciplina de CDI, a MEAAMaRP e a ED como metodologia de pesquisa.

Para essa finalidade, foram utilizadas as seguintes bases de dados para a realização da revisão de literatura deste trabalho:

1. Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) – <<http://bdtb.ibict.br>>;
2. Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – <<http://bancodeteses.capes.gov.br>>;
3. Portal de Periódicos da CAPES – <<http://periodicos.capes.gov.br>>;
4. *Scientific Electronic Library Online* (SciELO) – <<http://scielo.org>>;

Essas buscas foram realizadas nas bases de dados indicadas em 24 de fevereiro de 2023, com o objetivo de identificar a produção de trabalhos relacionados com o nosso foco de pesquisa. Foram escolhidas essas bases em virtude da sua reconhecida importância nacional, visto que seus trabalhos passam por averiguação criteriosa de bancas examinadoras e avaliação de pareceristas.

Estipulamos como intervalo temporal o período entre 2015 e 2022 para que obtivéssemos uma quantidade exequível de trabalhos, analisando, assim, o que foi produzido mais recentemente. Para as buscas, aplicamos os termos “Resolução de Problemas”, “Cálculo Diferencial e Integral” e “Engenharia Didática”, escritos dessa forma, entre aspas, nos buscadores de cada plataforma utilizada.

O uso dos termos entre aspas foi necessário para evitarmos algumas divergências trazidas pelos buscadores das bases de dados, posto que poderiam causar algumas inconsistências. A fim de ilustrar essas inconsistências, ao procurar o termo *Engenharia Didática*, sem aspas, os buscadores retornavam inúmeros resultados, contendo trabalhos da Didática e trabalhos das Engenharias que não representavam o foco de nossa pesquisa.

As buscas foram feitas aos pares, ou seja, combinamos os termos “Resolução de Problemas” e “Cálculo Diferencial e Integral”; na sequência, combinamos “Resolução de Problemas” e “Engenharia Didática”; por fim, “Cálculo Diferencial e Integral” e “Engenharia Didática”. Destaca-se que não foi encontrado nenhum trabalho que apresentasse esses três termos concomitantemente, identificando uma provável lacuna de pesquisa para explorarmos.

Posto isso, a primeira etapa de seleção consistia em fazer a leitura dos títulos, resumos e palavras-chave em busca de trabalhos relacionados à nossa região de pesquisa. Ao todo foram encontrados **87 trabalhos**, descartando-se as repetições que surgiram nas plataformas. Conforme surgiam dúvidas acerca do conteúdo desses trabalhos, era realizada a leitura do corpo do texto, a fim de verificar sua proximidade com nosso tema de pesquisa.

Nesse momento, foram encontrados vários trabalhos cujas palavras-chave não eram coerentes com o assunto abordado ao longo do texto, dificultando, em parte, esse processo de seleção. Diante disso, deixamos como sugestão para os autores de diferentes produções acadêmicas que selecionem cuidadosamente palavras-chave condizentes aos seus devidos trabalhos, prezando pela coerência.

Após essa primeira etapa de seleção, foram encontrados **24 trabalhos**, entre artigos, dissertações e teses, aproximadamente **27, 5%** do total encontrado inicialmente.

Detalhando um pouco mais a busca efetuada, a Tabela 01, a seguir, ilustra o quantitativo de trabalhos oriundos de cada uma das bases de dados, conforme a combinação, aos pares, dos termos utilizados ao longo das buscas: “Resolução de Problemas”, “Cálculo Diferencial e Integral” e “Engenharia Didática”.

**Tabela 1** - Quantidade de trabalhos em cada base de dados de acordo com as buscas.

Bases de Dados	Termos de Busca			TOTAL
	“Resolução de Problemas” e “Cálculo Diferencial e Integral”	“Resolução de Problemas” e “Engenharia Didática”	“Cálculo Diferencial e Integral” e “Engenharia Didática”	
<b>BDTD</b>	1	2	7	<b>10</b>
<b>Banco de Teses e Dissertações CAPES</b>	2	0	0	<b>2</b>
<b>Periódicos da CAPES</b>	7	1	1	<b>9</b>
<b>SciELO</b>	2	0	1	<b>3</b>
<b>TOTAL</b>	<b>12</b>	<b>3</b>	<b>9</b>	<b>24</b>

Fonte: Elaborado pelo autor.

A próxima etapa de seleção consistiu na leitura desses 24 trabalhos na íntegra, com o objetivo de identificar os mais relevantes e inerentes à nossa pesquisa. Ao final dessa etapa, destacaram-se 11 trabalhos, apresentados em ordem cronológica no Quadro 2, que indica título seguido do ano de publicação e a respectiva autoria.

**Quadro 2** - Trabalhos selecionados após a segunda etapa de seleção.

TÍTULO	TRABALHO	AUTORIA
Proposta de abordagem para as Técnicas de Integração usando o <i>software</i> GeoGebra (2015)	Dissertação	Cristina Alves Bezerra

Problem Solving in the teaching of single variable Differential and Integral Calculus: perspective of Mathematics teachers (2018)	Artigo	Cristian Alfaro-Carvajal e Jennifer Fonseca-Castro
Conceito de Limite sob a perspectiva da Resolução de Problemas mediada pelo software GeoGebra (2018)	Dissertação	Jessica Meyer Sabatke
O jogo das Operações Semióticas na aprendizagem da Integral Definida no Cálculo de área (2018)	Tese	Lucia Menoncini
Análise da variação de funções ensinada através da Resolução de Problemas (2019)	Artigo	Eliane Bihuna de Azevedo, Elisandra Bär de Figueiredo e Pedro Manuel Baptista Palhares
O Cálculo Diferencial e Integral na Universidade de Brasília: estratégia metodológica em estudo (2019)	Artigo	Luciana Avila Rodrigues e Regina Silva Pina Neves
Contribuições das Representações Semióticas para Compreensão de Conceitos Fundamentais para o Cálculo Diferencial e Integral por Alunos de um Curso de Licenciatura em Matemática (2019)	Tese	Vânia Bolzan Dernardi
A Formação Continuada de professores que ensinam Matemática, centrada na Resolução de Problemas e em processos do Pensamento Matemático (2019)	Tese	Rogério Osvaldo Chaparin
Discutindo o Método de Ensino por meio da Resolução de Problemas (MERP) (2020)	Artigo	Angela Biazutti, Rafael Filipe Vaz e Luciano Roberto Andrade

A construção do conceito de Limite através da Resolução de Problemas (2020)	Dissertação	Matheus Marques de Araújo
Abordagem do conceito de Limite apresentado por James Stewart e suas contribuições para a aprendizagem e formação de professores de Matemática (2021)	Artigo	João Nunes de Araújo Neto, Francisco José de Lima Damião e Evandro Barbosa De Sousa

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Após a exibição dos trabalhos no Quadro 02, todos serão comentados sucintamente, separados em 3 categorias, que são as mesmas utilizadas durante as buscas nas bases de dados: **1. Trabalhos relacionados à “Resolução de Problemas” e “Cálculo Diferencial e Integral”;** **2. Trabalhos relacionados à “Resolução de Problemas” e “Engenharia Didática”;** **3. Trabalhos relacionados ao “Cálculo Diferencial e Integral” e “Engenharia Didática”.**

Buscamos, com a criação de categorias, melhor compreender o material obtido, situar o leitor em nosso escopo de investigação, encontrar possíveis lacunas de pesquisa e, por fim, identificar elementos que possam auxiliar no desenvolvimento desta tese de doutorado.

Ressalta-se que não foi encontrado nenhum trabalho que relacionasse o ensino de CDI à utilização da MEAAMaRP, com o suporte da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, o que configura esse tema como um componente de ineditismo em nossa investigação.

### **3.1.1 Trabalhos relacionando “Resolução de Problemas” e “Cálculo Diferencial e Integral”**

Nessa categoria, enquadram-se os trabalhos que utilizam a Resolução de Problemas (RP), como metodologia de ensino, em disciplinas de CDI. Foram listados sete trabalhos e tem-se uma breve síntese de cada um deles.

1) Iniciando pela dissertação “*Conceito de limite sob a perspectiva da Resolução de Problemas mediada pelo software GeoGebra*”, na qual Sabatke (2018) apresenta uma

proposta de ensino do conceito de limites, por meio da RP, no Ensino Médio (Progressões Geométricas Infinitas) e no Ensino Superior, com auxílio do GeoGebra<sup>4</sup>. O trabalho mostra alguns aspectos históricos do ensino de CDI no Brasil, o conceito de limites, a RP, o uso de tecnologias em sala de aula, o *software* GeoGebra e suas várias possibilidades de utilização.

Sabatke (2018) apresenta, também, explicações acerca do produto educacional desenvolvido ao final de sua dissertação: um caderno didático intitulado “*Resolução de Problemas e GeoGebraBook: atividades para o ensino do conceito de limite*”, disponibilizado na própria plataforma online do GeoGebra. Foram coletados registros escritos, bem como áudios dos alunos durante a realização das atividades, o que possibilitou à autora verificar e analisar as dificuldades por eles apresentadas.

Consideramos que as aplicações tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior foram bem interessantes, pois com elas foi possível observar as concepções dos alunos, suas dificuldades e principais dúvidas com relação aos problemas, assim como, analisar as estratégias e procedimentos utilizados nas resoluções (Sabatke, 2018, p. 184).

A dissertação apresenta uma ampla variedade de registros dos alunos, acompanhados de análises detalhadas realizadas pela autora, o que contribui significativamente para a qualidade e o enriquecimento do trabalho. Destacam-se, também, várias instruções de manuseio sobre o *software* GeoGebra e a plataforma *GeoGebraBook*.

2) No artigo intitulado “*Problem Solving in the teaching of single variable Differential and Integral Calculus: perspective of Mathematics teachers*”, Alfaro-Carvajal e Fonseca-Castro (2018) investigaram as perspectivas de 58 professores universitários (atuantes em 4 universidades públicas da Costa Rica) sobre a RP no ensino de CDI. Assim, por meio de um questionário, os pesquisadores coletaram dados com o objetivo de obter um panorama das percepções docentes em relação à utilização dessa metodologia de ensino. Os resultados revelaram inúmeras contradições e distorções quanto à compreensão, por parte dos professores, acerca do que constitui um problema, do que entendem por resolução de problemas e de como aplicam essa abordagem na disciplina de CDI. De acordo com os autores da pesquisa

---

<sup>4</sup> GeoGebra: *software* livre de matemática dinâmica, disponível em: <https://www.geogebra.org/?lang=pt> .

É necessário, portanto, compreender e definir os componentes fundamentais que distinguem esta teoria, ou seja, deve estar claro o que é um problema matemático; o que significa fazer matemática, o que se entende por resolução de problemas e que condições são necessárias para atingir os objetivos da resolução de problemas no ensino da matemática (Alfaro-Carvajal; Fonseca-Castro, 2018, p. 45, tradução nossa).

Em seguida, os autores apontam alguns fatores para potencializar a aprendizagem por meio da RP, como apresentar problemas cujo nível seja adequado à compreensão dos alunos, levar em consideração as habilidades matemáticas anteriores e favorecer algumas estratégias de resolução. Os autores fazem uma crítica à maneira tradicional (na grande maioria dos casos) de ensinar CDI, com uma abordagem de repetição e memorização de resultados e teoremas, propondo a RP ou aplicações em situações reais para serem exploradas no final da disciplina. Alfaro-Carvajal e Fonseca-Castro (2018) depositam na RP uma forma motivadora de ensinar Matemática e adquirir habilidades.

3) No artigo denominado “*Análise da variação de funções ensinada através da Resolução de Problemas*”, Azevedo, Figueiredo e Palhares (2019) apresentam uma sequência didática abordando a variação de funções de uma variável (máximos e mínimos, intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade etc.) na perspectiva da RP. Tal sequência foi aplicada na disciplina de CDI de dois cursos de Licenciatura.

Cabe mencionar que esse artigo está vinculado à tese de doutorado da primeira autora, sob orientação dos outros autores. Os autores exibem a sequência didática aplicada e, além disso, fazem sugestões bastante relevantes para outros professores utilizarem ao adotarem essa metodologia de ensino. Em seguida, são apresentados os resultados da pesquisa com comentários interessantes a respeito das respostas dos alunos e se foram contemplados os objetivos de cada item proposto (mesmo que parcialmente). Conforme Azevedo, Figueiredo e Palhares (2019, p. 49), os resultados obtidos com a aplicação da sequência didática foram positivos por conta de que “70% das conjecturas elaboradas [...] pelos estudantes correspondem às conclusões almejadas pelos pesquisadores e foram intuídas de forma natural”.

4) O artigo “*O Cálculo Diferencial e Integral na Universidade de Brasília: estratégia metodológica em estudo*” indica que as autoras Rodrigues e Neves (2019) mostram-se preocupadas com os índices de reprovação e evasão em turmas de CDI na

Universidade de Brasília (UnB). Ao iniciar seu texto, são desveladas algumas pesquisas sobre dificuldades de aprendizagem em CDI (no Brasil e no exterior), questões emocionais trazidas pelos estudantes após uma reprovação, o custo que as instituições de ensino podem ter em virtude das reprovações e, além disso, ilustram a importância da disciplina de CDI nos cursos de Ciências Exatas.

Utilizando a RP, Rodrigues e Neves (2019) aplicaram dois problemas relacionados ao tema *funções* em turmas de Licenciatura em Matemática. Tais problemas poderiam ser solucionados utilizando-se conceitos do Ensino Médio e/ou conceitos de CDI. Após a coleta e a análise dos dados, identificaram-se, de forma mais abrangente, dificuldades relacionadas à compreensão dos enunciados, falhas conceituais envolvendo objetos de conhecimento do Ensino Médio, erros na manipulação de expressões algébricas e dificuldades na resolução de equações. Segundo Rodrigues e Neves (2019, p. 49) “Esses fatores podem estar contribuindo para a manutenção dos altos índices de reprovação e evasão da disciplina de CDI na referida universidade”. Além disso, acrescenta-se a esses fatores a percepção, por parte das autoras, de que os alunos apresentam dificuldades na compreensão de enunciados.

5) Na dissertação intitulada “*A construção do conceito de Limite através da Resolução de Problemas*”, Araújo (2020) apresenta contribuições relevantes acerca do ensino de limites na disciplina de CDI, por meio da RP. Utilizando-se do Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic<sup>5</sup> para delinear sua pesquisa, o autor apresenta uma breve exposição da história do Cálculo, analisa o ensino de CDI no Brasil, abordando o período inicial das escolas militares (a partir de 1810) até os modelos atuais, que são conhecidos e utilizados atualmente. O autor analisa os dados coletados na pesquisa com base nos referenciais teóricos de Imagem Conceitual, Definição Conceitual<sup>6</sup> e Análise dos Erros<sup>7</sup>. Sobre a análise dos dados registrados durante a pesquisa, o autor afirma:

Salientamos que a partir da investigação desses registros, fica claro o fato da metodologia de ensino tradicional, nas aulas de CDI, não estar sendo capaz de suprir essas lacunas advindas da Educação Básica, nos levando a crer que esses percalços acompanharão os estudantes até o

---

<sup>5</sup> Dividido em 3 blocos, o Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic propõe onze atividades que contribuem para o cumprimento do trabalho de pesquisa (Araújo, 2020, p. 19-20).

<sup>6</sup> Imagem Conceitual e Definição Conceitual de Tall e Vinner são termos que podem ser compreendidos, respectivamente, como a imagem que nosso cérebro faz de determinado conceito e as palavras que nosso cérebro usa para determinados conceitos (Araújo, 2020, p. 90-91).

<sup>7</sup> A Análise dos Erros de Cury constitui-se da análise das respostas dos alunos em questões de Matemática. Araújo (2020, p. 91) apresenta mais detalhes.

fim da graduação, comprometendo diretamente sua formação (Araújo, 2020, p. 103).

Esse autor destaca ainda que, a partir da análise dos erros dos alunos, é possível elaborar sequências didáticas mais significativas, validadas na RP, contribuindo para um melhor desempenho destes.

6) No artigo “Discutindo o Método de Ensino por meio da Resolução de Problemas (MERP)”, Biazutti, Vaz e Andrade (2020) discutem aspectos significativos sobre o ensino de CDI, como as dificuldades enfrentadas pelos alunos, os índices de evasão e reprovação, críticas ao método tradicional de ensino dessa disciplina e a necessidade de adoção de novas metodologias. Apoiando sua pesquisa na Teoria do Registro das Representações Semióticas (TRRS<sup>8</sup>) de Duval, e utilizando o GeoGebra como ferramenta tecnológica, os autores apresentam o Método de Ensino por meio da Resolução de Problemas (MERP) e afirmam que “Este método consiste na utilização de resolução de problemas como ponto de partida para o ensino de determinados conceitos, com apoio de diferentes representações semióticas e do software GeoGebra[...]” (Biazutti; Vaz; Andrade, 2020, p. 10).

Ao longo do texto são apresentados quatro problemas relacionados ao tema *funções*, podendo ser discutidos em disciplinas de pré-cálculo, cujas soluções são encontradas utilizando conceitos do Ensino Médio. Da mesma forma, esses problemas poderiam ser aplicados em CDI para promover discussões e introduzir conteúdos como derivadas, reta tangente ao gráfico da função, e máximos e mínimos de funções. Foram identificados alguns aspectos relacionados às dificuldades dos alunos ao trabalharem com a sequência didática, como o traçado de gráficos de funções, representações geométricas, além da leitura e interpretação de enunciados.

Em geral, a dificuldade dos alunos nesses problemas não é na aplicação dos conceitos de CDI, mas na dificuldade dos discentes em fazer uma representação geométrica que permita a identificação da relação entre os elementos da figura e os conceitos e na identificação da função envolvida, a partir das informações do enunciado. Os problemas [usados na sequência didática] foram escolhidos de modo a explorar estes aspectos de Matemática em que os alunos mostraram dificuldades, utilizando o MERP como ferramenta pedagógica (Biazutti; Vaz; Andrade, 2020, p. 12).

---

<sup>8</sup> Teoria do Registro das Representações Semióticas (TRRS) de Duval: em linhas gerais, é necessário, no mínimo, utilizar duas formas de registro de um objeto para que este possa ser compreendido. A Matemática utiliza vários registros, como o algébrico, o gráfico, etc. (Menoncini, 2018, p.19).

Por fim, os autores sugerem a implantação de novas metodologias de ensino em sala de aula, amparadas por pesquisas teóricas e experimentais consolidadas.

7) No artigo intitulado “*Abordagem do conceito de Limite apresentado por James Stewart e suas contribuições para a aprendizagem e formação de professores de Matemática*”, Araújo Neto, Lima e Souza (2021) analisam como o conceito de limites é desenvolvido no livro *Cálculo Volume 1*, 7ª edição, de James Stewart (2013). Os autores discutem a importância da utilização da RP na abordagem trazida por Stewart ao inserir o conceito de limites por meio do problema da reta tangente ao gráfico de uma função e do problema da velocidade (instantânea) de um objeto ou veículo, exemplos clássicos no ensino de CDI.

Com isso, propõe-se neste trabalho um estudo qualitativo sobre a importância de uma abordagem aplicada e reflexiva para o ensino de limites, considerando o referencial teórico produzido por James Stewart em seu livro *Cálculo Volume I*, 7ª edição, a partir do contexto da resolução de problemas (Araújo Neto; Lima; Souza, 2021, p. 1141).

Os autores destacam que essa abordagem é importante para ilustrar o comportamento de uma função, na vizinhança de um ponto, trazendo consigo um embrião da definição de limites, utilizando  $\varepsilon$  (*épsilon*) e  $\delta$  (*delta*), que é apresentada mais adiante no livro analisado. Ainda, segundo Araújo Neto, Lima e Souza (2021), o trabalho trouxe à tona reflexões sobre o uso do livro didático na formação, por conta da preocupação de James Stewart com aspectos pedagógicos e metodológicos no ensino de CDI.

De maneira geral, nessa categoria, foram apresentados os trabalhos que relacionam o ensino da disciplina de CDI por meio da RP. Em relação aos conteúdos abordados, três deles tratavam sobre limites, dois sobre funções e um sobre derivadas de funções de uma variável. O artigo de Biazutti, Vaz e Andrade (2020) propõe uma sequência didática sobre conceitos de função que podem ser utilizadas em disciplinas de Pré-Cálculo, auxiliando os alunos na sua construção de conhecimento.

O GeoGebra é utilizado como tecnologia educacional para o desenvolvimento dos conteúdos nos trabalhos de Sabatke (2018) e Biazutti, Vaz e Andrade (2020). Alguns trabalhos fazem menção à história do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) e ao seu ensino no Brasil, adotando metodologias ativas de ensino e aprendizagem em contraposição ao modelo tradicional, caracterizado por uma abordagem passiva e mecanizada. Alfaro-

Carvajal e Fonseca-Castro (2018) apresentam um artigo específico sobre as concepções dos professores na Costa Rica, relacionadas ao ensino de CDI mediante a Resolução de Problemas. Observamos que é possível potencializar o aprendizado dos alunos nas disciplinas de CDI por meio da RP, uma metodologia ativa de ensino e aprendizagem.

### 3.1.2 Trabalhos relacionando “Resolução de Problemas” e “Engenharia Didática”

Nessa categoria, obtivemos apenas um trabalho que utiliza a RP como metodologia de ensino e a ED como metodologia de pesquisa, o qual será brevemente apresentado.

8) Na tese intitulada “*A formação continuada de professores que ensinam Matemática, centrada na Resolução de Problemas e em processos do Pensamento Matemático*”, Chaparin (2019) discorre sobre um curso de formação continuada para professores de Matemática, que utiliza a ED como metodologia de pesquisa e a RP como metodologia de ensino. Formação continuada de professores, pensamento matemático, Resolução de Problemas e Engenharia Didática são alguns dos referenciais teóricos que o autor apresenta em sua tese.

O professor tem um papel muito importante na implementação de atividades que visem criar em sua sala de aula um ambiente escolar centralizado na resolução de problemas e nos processos do pensamento matemático (Chaparin, 2019, p. 14).

Os encontros do curso ministrado são detalhados com riqueza de elementos, incluindo a dinâmica executada pelo pesquisador e as “falas e opiniões” dos participantes, ilustrando a maneira como o curso foi assimilado pelos professores-participantes, incluindo relatos daqueles que começaram a utilizar a RP, como metodologia de ensino, em suas próprias aulas de Matemática. Cada encontro, efetuado e registrado pelo pesquisador, baseia-se nas quatro fases da ED, seguindo os protocolos necessários, validando seu trabalho. O autor elaborava as sequências didáticas dos encontros seguintes de acordo com o desenvolvimento do encontro anterior, tornando sua experiência mais próxima do ambiente da sua sala de aula.

Embora os objetivos desta tese de doutorado não contemplem, diretamente, a formação inicial ou continuada de professores, é importante atentar para trabalhos que apresentem aderência à proposta da pesquisa. Essa categoria possui apenas um trabalho,

tendo como público-alvo os professores em exercício. Observamos que a composição entre a RP e a ED, como metodologia de pesquisa, foi capaz de propiciar sequências didáticas mais significativas aos participantes, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento matemático e do ensino para a resolução de problemas.

Pela análise deste trabalho, percebemos que a RP, como metodologia de ensino, desempenhou papel importante como elemento motivador para alguns professores que participaram da pesquisa, pois começaram a utilizar essa abordagem metodológica em suas práticas pedagógicas com mais frequência, como aponta Chaparin (2019).

Dessa forma, a participação na pesquisa possibilitou que os professores em exercício se apropriassem de uma metodologia ativa de ensino, tornando suas aulas mais significativas para os alunos.

### **3.1.3 Trabalhos relacionando “Cálculo Diferencial e Integral” e “Engenharia Didática”**

Nessa categoria, enquadram-se 3 trabalhos que utilizam a ED como metodologia de pesquisa em disciplinas de CDI, os quais serão apresentados na sequência.

9) Em sua dissertação “*Proposta de abordagem para as Técnicas de Integração usando o software GeoGebra*”, Bezerra (2015) propõe a utilização do GeoGebra como tecnologia digital no ensino de CDI, especificamente no ensino de técnicas de Integração, incluindo substituição de variáveis, Integração por partes, frações parciais e substituição trigonométrica, conteúdos que fazem parte da ementa da disciplina de CDI.

Bezerra (2015) pretendeu inserir uma abordagem gráfico-geométrica no ensino daqueles conteúdos e analisar a maneira como eles são apresentados em alguns livros de CDI mais utilizados no país. Apoiada nas duas primeiras fases da ED, Análises Preliminares e Análises a *Priori*, e utilizando-se da Sequência Fedathi<sup>9</sup> como metodologia de ensino, a autora elaborou uma sequência didática com a utilização do GeoGebra para enfatizar o aspecto gráfico-geométrico das Técnicas de Integração. Por se tratar de um mestrado profissional, foi desenvolvido um *site* como produto educacional para divulgação de conteúdos, sequências didáticas e videoaulas desenvolvidas pela autora, que utiliza a metodologia de ensino detalhada na dissertação.

---

<sup>9</sup> Sequência Fedathi é uma metodologia de ensino organizada em quatro etapas: Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova (Bezerra, 2015, p. 46).

Partindo da problemática, em busca de caminhos que nos fizessem refletir sobre como poderíamos agir diante do assunto, estruturamos nossa pesquisa com base na metodologia de pesquisa da Engenharia Didática, metodologia de ensino da Sequência Fedathi e ferramenta facilitadora, o software Geogebra (Bezerra, 2015, p. 82).

Ao longo deste trabalho, propõem-se algumas discussões que serviram para estruturar o *site*<sup>10</sup> (produto educacional) desenvolvido pela autora, bem como alguns dados contendo número de acessos pelo país e visualizações do material disponibilizado.

10) Menoncini (2018) apresenta a tese intitulada “*O jogo das Operações Semióticas na aprendizagem da Integral definida no Cálculo de área*”, na qual é delineada uma sequência didática sobre o cálculo de área usando integrais. Nesse trabalho, com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), de Duval, a autora faz apontamentos relevantes sobre a teoria, o ensino de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) — com ênfase nos conceitos de integral —, o uso do computador em sala de aula, a análise de livros didáticos de CDI e a abordagem do tema “cálculo de áreas com o uso de integrais”. Além disso, apresenta investigações que utilizam mapas conceituais com foco na aprendizagem.

Durante sua revisão de literatura, Menoncini (2018) elenca pesquisas que discutem as dificuldades inerentes ao ensino de CDI, dentre elas a carência de conhecimentos matemáticos provenientes do Ensino Médio, a falta de hábitos de estudos dos alunos no Ensino Superior e a metodologia de ensino tradicional adotada pelos professores. Há também um breve histórico sobre evasão e reprovações em CDI no campo de atuação da pesquisadora, justificando e realçando os motivos de seu trabalho. A sequência didática foi elaborada e analisada com base nas quatro fases da ED e possui riqueza de detalhes sobre sua concepção e validação.

Com base nas observações planejou-se uma sequência didática para oferecer aos alunos uma visão em que a integral no cálculo de área não é apenas resultado da aplicação de fórmulas, mas um processo que articula os vários registros de representação semiótica e explora operações semióticas, especialmente os tratamentos e as conversões. Desta forma, a sequência didática contempla a diversidade de representações semióticas, possibilita a aplicação de tratamentos e conversões e usa o software GeoGebra para proporcionar dinamismo

---

<sup>10</sup> Embora a autora da dissertação tenha apresentado o endereço eletrônico do *site* (produto educacional) desenvolvido, testamos e ele não está funcionando. Disponível em: [www.calculocomvisualizacao.com.br](http://www.calculocomvisualizacao.com.br). Acesso em: 30 ago. 2024.

gráfico e também para permitir a articulação entre os registros algébrico e gráfico (Menoncini, 2018, p. 91).

A autora destaca o comprometimento e a maturidade dos alunos participantes da pesquisa, a importância de se “trabalhar em duplas” e a variedade de soluções apresentadas para os problemas abordados durante a realização da pesquisa.

11) Denardi (2019), em sua tese “*Contribuições das Representações Semióticas para compreensão de conceitos fundamentais para o Cálculo Diferencial e Integral por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática*”, investigou a aprendizagem em CDI I por estudantes de Licenciatura em Matemática, buscando identificar dificuldades relacionadas ao conceito de função, oriundas de conteúdos da Matemática Elementar. Utilizou o GeoGebra como recurso tecnológico e a ED forneceu aporte necessário para a pesquisa e apoiou-se no TRRS de Duval como forma de analisar os registros produzidos pelos alunos após a aplicação de uma sequência didática desenvolvida. Assim, segundo essa autora, a defasagem de conteúdos da Educação Básica que os estudantes apresentam no Ensino Superior corresponde à principal causa do alto índice de fracassos na disciplina de CDI I, contribuindo para abertura excessiva de turmas dessa disciplina. Isso acarreta muitos alunos por sala, atraso no tempo mínimo de formação dos alunos e elevado número de desistência nos cursos de graduação.

Esses aspectos têm instigado pesquisadores da Educação Matemática a evidenciar em suas pesquisas as dificuldades na transição do Ensino Médio para o Superior, bem como as estratégias que possibilitam melhorar o desempenho dos estudantes na disciplina de Cálculo (Denardi, 2019, p. 63).

A autora aponta que a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior pode ser um dos fatores dificultadores da aprendizagem de CDI nos cursos de Licenciatura em Matemática.

De maneira geral, essa categoria trata do ensino de CDI com o suporte da ED como metodologia de pesquisa. As autoras elaboraram sequências didáticas sobre o conteúdo de Cálculo Integral. Bezerra (2015) abordou mudanças de variáveis na Integral, e Menoncini (2018), o cálculo de áreas. Denardi (2019) buscou identificar dificuldades em uma disciplina de pré-Cálculo, mais precisamente, sobre o conceito de função para realizar seu trabalho. O GeoGebra foi utilizado, novamente, como ferramenta tecnológica

aplicada ao ensino, como mostram Bezerra (2015) e Denardi (2019). Destaca-se que Bezerra (2015) cumpriu apenas as duas primeiras etapas da ED e desenvolveu um *site* como produto educacional.

As pesquisas comentadas nesta seção reforçam nossa crença de que a ED se apresenta como ferramenta promissora para o desenvolvimento de sequências didáticas para potencializar o ensino de CDI, pois se trata de uma metodologia de pesquisa desenvolvida para a sala de aula, elaborada em ambientes controlados pelo pesquisador e com a possibilidade de *correções de rota*, caso julgue necessário.

Concluída a apresentação dos trabalhos selecionados para esta revisão de literatura, na seção seguinte teceremos algumas discussões sobre essa importante etapa para a confecção desta tese de doutorado.

### **3.1.4 Discussões sobre a revisão de literatura**

Sobre os trabalhos obtidos nesta revisão de literatura, no que se refere às tecnologias digitais, o GeoGebra apresentou-se como aliado no processo de ensino e aprendizagem de CDI. Acreditamos que o motivo pode ser atribuído à facilidade de acesso ao *software*, sua gratuidade para instalação e utilização, bem como a disponibilidade de versões para celular, facilitando o manuseio desse *software*. Além disso, vale destacar que as pesquisas apontam para a importância do uso de tecnologias digitais no ensino de CDI, permitindo acesso ao objeto matemático.

Os conteúdos de CDI investigados nos trabalhos elencados nesta revisão de literatura foram: Funções, Limites e Derivadas e Integral, com objetivos de construção de conhecimento e maior atribuição de significado aos conceitos que foram desenvolvidos durante as pesquisas. Comentando, brevemente, sobre esses conteúdos, em relação ao conteúdo de Funções, os autores e autoras optaram por itens que poderiam ser trabalhados no Ensino Médio e/ou Ensino Superior, com destaque para Denardi (2019), que optou por abordar Funções em disciplina de pré-Cálculo e, depois, acompanhar o desenvolvimento desse grupo de alunos na disciplina de CDI I.

Os conceitos sobre Limites foram abordados algébrica e graficamente, fazendo os alunos perceberem o devido comportamento de uma função na vizinhança de um ponto. Para Derivadas, os problemas de máximos e mínimos de uma função foram os mais explorados, talvez pelas características que esses problemas carregam, podendo ser relacionados a situações do cotidiano dos alunos. Em relação às Integrais, foram

utilizadas as Técnicas de Integração e o cálculo de áreas como conceitos escolhidos para serem abordados nas sequências didáticas.

Embora a formação de professores não seja o foco principal da nossa tese de doutorado, destacamos dois trabalhos envolvendo, diretamente, professores. São eles, Chaparin (2019) e sua investigação com professores do Ensino Básico (em forma de oficinas), e Alfaro-Carvajal e Fonseca-Castro (2018), verificando as concepções de professores de CDI em relação à Resolução de Problemas como metodologia de ensino nessa disciplina.

No que se refere às dificuldades em CDI indicadas pelos alunos nos estudos analisados, apresentamos os apontamentos de alguns autores, evidenciando a necessidade de compreender a origem dessas dificuldades para que seja possível propor ações que as corrijam ou, ao menos, as atenuem. Menoncini (2018), Denardi (2019), Rodrigues e Neves (2019), Araújo (2020), Biazutti, Vaz e Andrade (2020) concluíram que lacunas em conceitos da Matemática básica, abordados durante o Ensino Médio, repercutem, negativamente, no aprendizado de CDI.

Esses entraves manifestam-se na realização de representações geométricas, na resolução de equações e na manipulação de expressões algébricas. Além disso, foram identificados outros fatores limitadores, como a ausência de hábito de estudo (Menoncini, 2018), as dificuldades decorrentes da transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior (Denardi, 2019) e a incompreensão dos enunciados, conforme apontado por Rodrigues e Neves (2019) e por Biazutti, Vaz e Andrade (2020).

Ademais, Araújo (2020) destaca que a metodologia de ensino tradicional, frequentemente adotada, e o descompasso entre os conhecimentos adquiridos no Ensino Médio e as exigências do Ensino Superior, conforme indicado por Denardi (2019), configuram-se como outros fatores que dificultam os processos de ensino e aprendizagem de CDI.

Com essa revisão de literatura de artigos, dissertações e teses, publicados no período compreendido entre 2015 e 2022, buscamos pesquisas recentes sobre a utilização da RP como metodologia de ensino para disciplinas de CDI, com o suporte metodológico da ED. Inicialmente, observou-se que nenhum trabalho contemplou a articulação entre esses referenciais, como pretendemos efetuar nesta tese de doutoramento. Encontramos poucos trabalhos que concentram discussões e análises acerca de conceitos relacionados à Integral como objeto matemático de estudo.

Observa-se que alguns elementos das sequências didáticas foram pouco explorados pelos autores. Nesse sentido, destaca-se a ausência de explicitação dos objetivos pretendidos com os problemas selecionados e utilizados em sala de aula, assim como da descrição das discussões realizadas e da formalização dos conteúdos abordados durante a resolução das atividades. Esse detalhamento enriqueceria os trabalhos que utilizam a RP como metodologia de ensino e, por conseguinte, auxiliaria no desenvolvimento do trabalho de outros pesquisadores.

A ED foi apresentada como metodologia de pesquisa; entretanto, os autores poderiam enfatizar os elementos que foram construídos e explorados ao longo de cada uma das suas etapas, por se caracterizar como uma abordagem investigativa mais recente, aliada a um consistente rigor metodológico.

As disciplinas de CDI são essenciais para os cursos de Ciências Exatas; entretanto, os alunos têm muitas dificuldades de aprendizado, o que motiva pesquisadores a dedicarem aos fatores que originam essa situação. Depositar essas dificuldades somente na ausência de conteúdos de Matemática básica não fornece elementos de resposta suficientes para uma questão bastante complexa e que impacta os cursos de graduação na área de Ciências Exatas no Brasil há décadas.

Por conta disso, nesta pesquisa, pretendemos explorar o ensino de CDI, especificamente, alguns conceitos de Integral, apoiados na MEAAMaRP, com o suporte metodológico de investigação por meio da ED. Dessa forma, por não ter sido encontrado trabalho algum que faça essa composição, justifica-se o caráter de ineditismo desta tese.

Finalizada a revisão bibliográfica e seguindo com as Análises Preliminares que fazem parte da nossa pesquisa, apresentamos uma breve análise de livros didáticos de CDI, com foco na abordagem de conteúdos referentes às Integrais, como exposto na próxima seção.

### **3.2 Análise de livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral**

Dando continuidade à etapa de Análise Preliminares, faremos, nesta seção, uma breve análise dos livros didáticos de CDI. Consideramos, para isto, aquelas obras que estão disponíveis na biblioteca do IFSP, no Câmpus Votuporanga, acessíveis aos alunos do curso de Licenciatura em Física e que constam como bibliografia indicada na disciplina de CDI II, conforme o PPC (IFSP, 2023, p. 189 - 190).

Buscamos, com essa análise, verificar como são apresentados conceitos referentes aos conteúdos de Integral e, principalmente, como (e se) os autores abordam a resolução de problemas como elemento motivador para os processos de ensino e aprendizagem de CDI. Embora o foco deste trabalho não esteja centrado na análise de livros didáticos de CDI, como realizado por Baruffi (1999), Reis (2001) e Desanti (2017), consideramos relevante incluir esse estudo na etapa de Análises Preliminares, com o intuito de subsidiar a investigação com informações adicionais que contribuam para a continuidade da pesquisa. Com isso, pretendemos inserir, em nossa sequência didática, problemas coerentes com aqueles abordados nos livros de CDI, a qual será desenvolvida e aprofundada no capítulo seguinte desta tese.

Para iniciar, concordamos com Martins (2006) no que se refere à importância e à utilização do livro didático.

A indiscutível importância do livro didático no cenário da educação pode ser compreendida em termos históricos, através da relação entre este material educativo e as práticas constitutivas da escola e do ensino escolar. Esta importância é atestada, entre outros fatores, pelo debate em torno da sua função na democratização de saberes socialmente legitimados e relacionados a diferentes campos de conhecimento, pela polêmica acerca do seu papel como estruturador da atividade docente, pelos interesses econômicos em torno da sua produção e comercialização, e pelos investimentos de governos em programas de avaliação. (Martins, 2006, p. 118).

Em relação às disciplinas de CDI e livros didáticos utilizados nessa disciplina, Baruffi (1999, p. 48) afirma que “O livro didático se revela um suporte para o curso, seja para leitura prévia por parte dos alunos, seja para complemento das aulas ministradas pelo professor, ou para pesquisa dos alunos, mais ou menos aprofundada, ou mesmo como coleção de exercícios propostos”. A autora complementa, ainda, que o livro didático é um “porto seguro” para o professor ancorar seu curso e os estudantes buscarem referências para estudos.

Ainda sobre os livros de CDI, concordamos com os apontamentos de Reis (2001) no que se refere ao perfil dos professores em relação à utilização de livros didáticos nas disciplinas de CDI. Enquanto alguns professores adotam apenas um livro, do início ao fim do curso, outros utilizam duas ou três obras e escrevem suas notas de aula, conforme julgar necessário. Cabe ao professor eleger as melhores estratégias, de acordo com a

realidade e a necessidade de seus alunos, almejando contribuir para melhorar os processos de ensino e aprendizagem de CDI.

Ressaltamos que nossa análise não pretende apontar o melhor livro de CDI, tampouco comparar concepções dos autores sobre os conceitos de Integral, presentes na disciplina de CDI. Nosso objetivo é, unicamente, analisar de que maneira os autores desses livros didáticos apresentam os conceitos e as propriedades de integrais, com ênfase na forma como a resolução de problemas é abordada como elemento motivador para a melhoria dos processos de ensino e aprendizagem de CDI. Verificaremos o tratamento conferido aos conteúdos referentes à Primitiva de uma função, Integral Definida, Aplicações da Integral, Cálculo de Áreas e Mudança de variáveis na Integral. Esses conteúdos foram escolhidos considerando a experiência profissional do professor pesquisador e as dificuldades apresentadas pelos alunos.

Consultando o PPC do curso de Licenciatura em Física (IFSP, 2023) e verificando os livros indicados na bibliografia da disciplina de CDI II, decidimos fazer uma análise das seguintes obras, listadas conforme o respectivo ano de publicação:

1. LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra, c 1994. v. 1.
2. GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1.
3. FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A: funções, limite, derivação e integração*. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2006.
4. STEWART, J. *Cálculo*. 2. ed. São Paulo: Cengage, c 2010. v. 1.

Para efetuar esta análise e termos um fio condutor durante este processo, definimos algumas questões balizadoras, as quais compreendemos necessárias nesta etapa:

- A apresentação dos conceitos e propriedades referentes aos conteúdos que abordam Integral é clara e compreensível?
- Há excesso de rigor e formalismo, por parte do autor, ao abordar os conteúdos sobre Integral?
- Os conceitos são definidos e apresentados de maneira direta (*pronta e acabada*) ou o autor faz a construção dos conceitos?
- Como o autor utiliza problemas para abordar os conceitos de Integral? Em que momento os problemas são abordados e com quais propósitos?

1. LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra, c1994, v. 1.

Iniciamos esta análise com Leithold (1994), sobre a qual é possível observar que, desde o prefácio do livro, e mesmo durante o desenvolvimento dos capítulos, o autor dialoga com o leitor e apresenta textos introdutórios, contextualizando e motivando aquilo que está por vir. Escrita com a preocupação de ser acessível aos estudantes, Leithold (1994, p. ix) afirma que “O Cálculo com Geometria Analítica foi planejado para futuros matemáticos e para estudantes cujo interesse primário seja Engenharia, Ciências Exatas e Humanas, ou áreas não-técnicas.” Os conteúdos relacionados com Integrais de funções de uma variável real, foco da nossa pesquisa, são apresentados, especificamente ao longo de três capítulos, sem levar em consideração capítulos em que o autor trabalha com algumas funções, suas derivadas e integrais. Como exemplos, podemos apontar o capítulo sobre funções exponenciais e logarítmicas e o capítulo sobre funções trigonométricas e as funções trigonométricas inversas.

Em relação à apresentação dos conteúdos, o autor faz um (breve) texto introdutório, apresenta definições, teoremas, exemplos e exercícios. Percebe-se, nesta obra, a presença da tendência tecnicista de ensino de Matemática, segundo Fiorentini (1995), visto que essa manifesta-se no desenvolvimento de habilidades estritamente técnicas, evidenciado pela exaustiva quantidade de exercícios repetitivos para resolver integrais, conforme ilustrado na Figura 03.

**Figura 3** - Exemplo de exercícios de repetição.

7. $\int_0^1 \frac{z}{(z^2 + 1)^3} dz$	8. $\int_1^4 \sqrt{x}(2 + x) dx$	39. $\frac{d}{dx} \int_x^3 \sqrt{\sin t} dt$	40. $\frac{d}{dx} \int_x^3 \sqrt{1 + t^4} dt$
9. $\int_1^{10} \sqrt{5x - 1} dx$	10. $\int_0^{\sqrt{5}} t\sqrt{t^2 + 1} dt$	41. $\frac{d}{dx} \int_{-x}^x \frac{1}{3 + t^2} dt$	42. $\frac{d}{dx} \int_{-x}^x \cos(t^2 + 1) dt$
11. $\int_{-2}^0 3w\sqrt{4 - w^2} dw$	12. $\int_{-1}^3 \frac{dy}{(y + 2)^3}$	43. $\frac{d}{dx} \int_1^{x^2} \sqrt{t^2 + 1} dt$	44. $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$
13. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx$	14. $\int_0^{\pi} \cos \frac{1}{2}x dx$	45. $\frac{d}{dx} \int_2^{18x} \frac{1}{1 + t^2} dt$	46. $\frac{d}{dx} \int_3^{\sin x} \frac{1}{1 - t^2} dt$
15. $\int_1^2 t^2 \sqrt{t^3 + 1} dx$	16. $\int_1^3 \frac{x dx}{(3x^2 - 1)^3}$	<p><i>Nos Exercícios de 47 a 50, ache o valor médio da função no intervalo <math>[a, b]</math>. Nos Exercícios 47 e 48, ache o valor médio de <math>f</math> e faça um esboço.</i></p>	
17. $\int_0^1 \frac{(y^2 + 2y) dy}{\sqrt[3]{y^3 + 3y^2 + 4}}$	18. $\int_2^4 \frac{w^4 - w}{w^3} dw$	47. $f(x) = 9 - x^2; [a, b] = [0, 3]$	
19. $\int_0^{15} \frac{w dw}{(1 + w)^{3/4}}$	20. $\int_4^5 x^2 \sqrt{x - 4} dx$	48. $f(x) = 8x - x^2; [a, b] = [0, 4]$	
21. $\int_{-2}^3  x - 3  dx$	22. $\int_{-4}^4  x - 2  dx$	49. $f(x) = 3x\sqrt{x^2 - 16}; [a, b] = [4, 5]$	
23. $\int_{-1}^1 \sqrt{ x  - x} dx$	24. $\int_{-3}^3 \sqrt{3 +  x } dx$	50. $f(x) = x^2 \sqrt{x - 3}; [a, b] = [7, 12]$	

**Fonte:** Leithold, 1994, p. 352.

Ainda sobre a obra de Leithold (1994), é possível verificar uma abordagem clássica ao realizar a construção das etapas para obtenção da integral definida, como apontado na figura 04 a seguir.

**Figura 4** - Discussão sobre o conceito de Integral Definida.

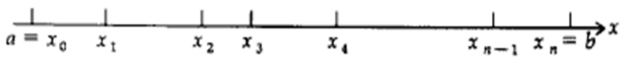
<b>A INTEGRAL DEFINIDA</b>	<p>Na Secção 5.4, a medida da área de uma região foi definida como sendo o seguinte limite:</p> $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x \quad (1)$ <p>Para chegarmos a essa definição, dividimos o intervalo fechado <math>[a, b]</math> em subintervalos de igual comprimento e então tomamos <math>c_i</math> como sendo o ponto do <math>i</math>-ésimo subintervalo no qual <math>f</math> tem um valor mínimo absoluto. Também restringimos os valores funcionais a serem não-negativos em <math>[a, b]</math> e além disso exigimos que <math>f</math> fosse contínua em <math>[a, b]</math>.</p> <p>O limite em (1) é um caso particular de um novo tipo de processo de limite que nos leva à definição de <i>integral definida</i>. Vamos discutir agora esse “novo tipo de limite”.</p> <p>Seja <math>f</math> a função definida no intervalo fechado <math>[a, b]</math>. Vamos dividir esse intervalo em <math>n</math> subintervalos, escolhendo qualquer dos <math>(n - 1)</math> pontos intermediários entre <math>a</math> e <math>b</math>. Sejam <math>x_0 = a</math> e <math>x_n = b</math> e <math>x_1, x_2, \dots, x_{n-1}</math> os pontos intermediários, de tal forma que</p> $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$ <p>Os pontos <math>x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n</math> não são necessariamente equidistantes. Seja <math>\Delta_1 x</math> o comprimento do primeiro subintervalo, de tal forma que <math>\Delta_1 x = x_1 - x_0</math>; seja <math>\Delta_2 x</math> o comprimento do segundo subintervalo tal que <math>\Delta_2 x = x_2 - x_1</math>; e assim por diante, de forma que o comprimento do <math>i</math>-ésimo subintervalo seja <math>\Delta_i x</math>, e</p> $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ <p>Um conjunto de todos esses subintervalos do intervalo <math>[a, b]</math> é chamado uma <b>partição</b> do intervalo <math>[a, b]</math>. Seja <math>\Delta</math> tal partição. A Figura 1 ilustra essa partição <math>\Delta</math> de <math>[a, b]</math>.</p> 
----------------------------	---

FIGURA 1

Fonte: Leithold, p. 1994, p. 324.

Ao longo das páginas por nós analisadas, nota-se que o autor omite diversas demonstrações, deixando-as como exercícios. Ao final dos capítulos, apresenta-se uma seção contendo exercícios de revisão, os quais são, de maneira geral, bastante diversificados, contemplando aqueles para utilização direta dos conceitos abordados e outros com situações contextualizadas a fim de que o aluno explore tais situações. As seções de exercícios, geralmente, são dispostas após a apresentação dos conceitos.

Não há uma seção específica voltada à resolução de problemas. Não obstante, nas seções destinadas aos exercícios, observa-se a presença de atividades contextualizadas que poderiam ser classificadas como problemas, conforme a definição de Ponte (1992), uma vez que apresentam caráter fechado (com apenas uma resposta possível) e não permitem aos estudantes encontrar soluções imediatas.

O autor utiliza bastantes gráficos e figuras para fazer a explanação dos conteúdos de CDI e sempre demonstra preocupação de se comunicar com o estudante, seu leitor.

## 2. GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1.

No prefácio, o autor informa que o livro foi elaborado após o aprimoramento de apostilas desenvolvidas por ele, com base nos cursos de Cálculo lecionados na Escola Politécnica da USP, do Instituto de Matemática e Estatística da USP e do Instituto de Ensino de Engenharia Paulista. Nesse primeiro volume de “Um curso de Cálculo”, são abordados os conteúdos referentes a Funções, Limites, Derivadas e Integrais de funções com uma variável real.

Os conteúdos relacionados com Integrais de uma variável real são apresentados ao longo de quatro capítulos, sem levar em consideração o capítulo que aborda Equações Diferenciais Ordinárias.

De maneira geral, o autor segue uma tendência ao longo do livro, apresentando os conteúdos percorrendo a sequência: definições, teoremas, exemplos e exercícios. O livro é bastante técnico e rigoroso em sua apresentação, com o autor demonstrando todos os resultados apresentados na obra, exceto algumas demonstrações que são propostas como exercícios. “As demonstrações de alguns teoremas ou foram deixadas para o final da seção ou colocadas em apêndice, o que significa que o leitor poderá, numa primeira leitura, omiti-las, se assim o desejar” (Guidorizzi, 2001, pref.).

Não há seções específicas com problemas ou situações do cotidiano para o aluno explorar: existem seções denominadas “Exercícios”, nas quais se aumenta o grau de dificuldade, já que algumas atividades são focadas na aplicação direta de resultados, enquanto outras são contextualizadas, compelindo o estudante a interpretar uma situação apresentada no enunciado. Esses exercícios contextualizados exigem mais dedicação e conhecimentos prévios dos alunos, podendo, inclusive, serem classificados como problemas de acordo com a definição de Ponte (1992), a qual adotamos nesta tese. Além

disso, tais exercícios também podem ser vistos como problemas, dependendo da maneira como o professor os utiliza em sala de aula.

No entanto, vale ressaltar que os *exercícios* são apresentados após as seções que abordam os conteúdos matemáticos, com propósito diferente do uso de problemas de acordo com a MEAAMaRP. Por conseguinte, não há indicações sobre utilizar problemas como motivação para desenvolver conceitos sobre Integrais.

O autor não faz contextualizações iniciais sobre os conteúdos que serão apresentados e utiliza gráficos somente quando necessário. É possível observar que alguns exercícios mais complexos podem ser solucionados utilizando algumas noções apresentadas em exemplos trazidos pelo autor. Exibimos, na Figura 05 a seguir, como exemplo, um trecho de uma seção de Exercícios.

**Figura 5** - Exemplo de uma seção de Exercícios.

*Exercícios 12.2*

---

1. Calcule.

a) $\int (3x - 2)^3 dx$	b) $\int \sqrt{3x - 2} dx$
c) $\int \frac{1}{3x - 2} dx$	d) $\int \frac{1}{(3x - 2)^2} dx$
e) $\int x \operatorname{sen} x^2 dx$	f) $\int x e^{x^2} dx$
g) $\int x^2 e^{x^3} dx$	h) $\int \operatorname{sen} 5x dx$
i) $\int x^3 \cos x^4 dx$	j) $\int \cos 6x dx$
l) $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x dx$	m) $\int \operatorname{sen}^5 x \cos x dx$
n) $\int \frac{2}{x + 3} dx$	o) $\int \frac{5}{4x + 3} dx$
p) $\int \frac{x}{1 + 4x^2} dx$	q) $\int \frac{3x}{5 + 6x^2} dx$
r) $\int \frac{x}{(1 + 4x^2)^2} dx$	s) $\int x \sqrt{1 + 3x^2} dx$
t) $\int e^x \sqrt{1 + e^x} dx$	u) $\int \frac{1}{(x - 1)^3} dx$
v) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx$	x) $\int x e^{-x^2} dx$

Fonte: Guidorizzi, 2001, p. 351.

Segundo a linguagem e o estilo adotados nessa obra, fica evidente a forte presença da tendência tecnicista formalista, segundo Fiorentini (1995), visto que há demasiada preocupação com rigor e simbolismo, demonstrações e justificativas. Além disso, a vastidão de exercícios em sequência, muitos deles bem parecidos, apontam para a promoção do treinamento de habilidades estritamente técnicas.

3. FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A: funções, limite, derivação e integração*. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2006.

Após a leitura do prefácio desse livro, observa-se a utilização da tecnologia como auxiliar nos processos de aprendizagem, visto que as autoras indicam um *site* de apoio a professores e alunos, com material exclusivo para os docentes e fornecendo respostas dos exercícios para os alunos. Para obter acesso a esse material, é necessário entrar em contato com a editora. Pela data de publicação da obra, é possível que a tendência da utilização da tecnologia tenha influenciado as autoras ao desenvolvê-la.

A linguagem é simples e acessível ao aluno de graduação, o que não significa ausência de rigor e formalismo por parte das autoras. Os conteúdos relacionados com Integrais de uma variável real são apresentados nos três últimos capítulos do livro e as autoras seguem a apresentação dos conteúdos com a sequência: definição, teoremas, exemplos e exercícios. Nessa obra, também é possível identificar elementos de uma tendência tecnicista formalista de ensino de Matemática, de acordo com Fiorentini (1995), como apontado na Figura 06 – na qual se observam os conteúdos apresentados na sequência: definição, exemplos, proposição.

São realizadas diversas demonstrações ao longo do tratamento dos conceitos e propriedades sobre Integrais e são utilizados muitos gráficos para ilustrar alguns exemplos.

**Figura 6** - Formato de apresentação dos conteúdos.

**6.1 Integral Indefinida**

---

**6.1.1 Definição** Uma função  $F(x)$  é chamada uma primitiva da função  $f(x)$  em um intervalo  $I$  (ou simplesmente uma primitiva de  $f(x)$ ), se, para todo  $x \in I$ , temos  $F'(x) = f(x)$ .

Observamos que, de acordo com nossa definição, as primitivas de uma função  $f(x)$  estão sempre definidas sobre algum intervalo. Quando não explicitamos o intervalo e nos referimos a duas primitivas da mesma função  $f$ , entendemos que essas funções são primitivas de  $f$  no mesmo intervalo  $I$ .

**6.1.2 Exemplos**

(i)  $F(x) = \frac{x^3}{3}$  é uma primitiva da função  $f(x) = x^2$ , pois

$$F'(x) = 1/3 \cdot 3x^2 = x^2 = f(x).$$

(ii) As funções  $G(x) = x^3/3 + 4$ ,  $H(x) = 1/3(x^3 + 3)$  também são primitivas da função  $f(x) = x^2$ , pois  $G'(x) = H'(x) = f(x)$ .

(iii) A função  $F(x) = 1/2 \sin 2x + c$ , onde  $c$  é uma constante, é primitiva da função  $f(x) = \cos 2x$ .

(iv) A função  $F(x) = 1/2x^2$  é uma primitiva da função  $f(x) = -1/x^3$  em qualquer intervalo que não contém a origem, pois, para todo  $x \neq 0$ , temos  $F'(x) = f(x)$ .

Os exemplos anteriores nos mostram que uma mesma função  $f(x)$  admite mais de uma primitiva. Temos as seguintes proposições.

**6.1.3 Proposição** Seja  $F(x)$  uma primitiva da função  $f(x)$ . Então, se  $c$  é uma constante qualquer, a função  $G(x) = F(x) + c$  também é primitiva de  $f(x)$ .

**Fonte:** Flemming e Gonçalves, 2006, p. 241.

Não há uma seção específica cujo foco seja a resolução de problemas: apenas exercícios contextualizados. Muitos deles podem ser resolvidos diretamente com a utilização de propriedades e Teoremas desenvolvidos no decorrer do texto. As seções de exercícios são dispostas numa segunda etapa, após a apresentação de conceitos matemáticos. Dessa forma, não percebemos a utilização de problemas como elemento gerador de conceitos, ou cumprindo um papel de motivador para potencializar o ensino de conceitos de Integral.

4. STEWART, J. *Cálculo*. 2. ed. São Paulo: Cengage, c 2010. v. 1.

A última obra analisada nesta pesquisa apresenta diferenças em relação às anteriores, as quais já ficam evidentes a partir do prefácio. O autor traz diversas informações sobre o próprio livro, como a ênfase em conceitos matemáticos, os tipos de exercícios que serão abordados, as seções temáticas a serem trabalhadas com os estudantes e os recursos de aprendizagem que serão utilizados, como referências históricas, projetos, uso de tecnologia e, especialmente, Resolução de Problemas.

“Tendo sido aluno de George Polya, James Stewart teve contato, em primeira mão, com as cativantes e penetrantes descobertas de Polya sobre o processo de resolução

de problemas.” (Stewart, 2010, p. xii).

Diante do exposto, fica evidente a maneira como o autor apresenta, ao longo de quatro capítulos, conceito e propriedades de Integral, dialogando com o seu leitor, construindo e apresentando conceitos matemáticos. Percebe-se, fortemente, nesta obra, a tendência construtivista de ensino de Matemática, segundo Fiorentini (1995), diante da abordagem do autor em relação aos processos de construção de conceitos matemáticos.

Embora Stewart (2010) apresente definições, teoremas, exemplos e exercícios, sua abordagem difere das obras listadas anteriormente. Há certa preocupação com a construção dos conceitos e a contextualização dos conteúdos referentes ao CDI. O autor utiliza bastantes gráficos e figuras para exemplificar e apresentar os conceitos referentes à Integral.

Coincidentemente aos demais livros didáticos analisados, os exercícios são dispostos em seções finais, após a apresentação dos conteúdos matemáticos. Entretanto, ao final de cada capítulo, há duas seções que podemos destacar. A primeira delas é chamada de *Projeto Aplicado*, na qual o autor motiva discussões sobre aplicações do CDI, inserindo uma situação do *cotidiano* para os alunos utilizarem seus conhecimentos para obter respostas, por exemplo o lançamento de um foguete. A segunda que chamou nossa atenção é intitulada *Problemas Quentes*, na qual o autor traz problemas desafiadores de CDI para os alunos solucionarem. A Figura 07, na sequência, apresenta um trecho do sumário dessa obra, exibindo essas seções.

**Figura 7** - Capítulo 6 do Sumário, com destaque para os Problemas Quentes.

<b>6</b>	<b>Aplicações de Integração</b>	<b>401</b>
6.1	Áreas entre Curvas	402
	PROJETO APLICADO • O Índice de Gini	410
6.2	Volumes	412
6.3	Volumes por Cascas Cilíndricas	424
6.4	Trabalho	431
6.5	Valor Médio de uma Função	436
	PROJETO APLICADO • Cálculos e Beisebol	440
	PROJETO APLICADO • Onde se Sentar no Cinema	441
	Revisão	441
	<b>Problemas Quentes</b>	<b>444</b>

Fonte: Stewart, 2010, p. vii.

Conforme nossa análise, esse foi o único livro que possui uma seção dedicada à Resolução de Problemas. Todavia, alguns desses problemas se assemelham a exercícios contextualizados que constam nas outras obras analisadas. A Figura 08 exibe um exemplo da seção de Problemas dessa obra.

**Figura 8 - Seção Problemas.**

**PROBLEMAS**

1. Se  $x \sin \pi x = \int_0^{x^2} f(t) dt$ , onde  $f$  é uma função contínua, encontre  $f(4)$ .
2. Suponha que  $f$  seja contínua,  $f(0) = (0)$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f'(x) > 0$  e  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$ . Determine o da integral  $\int_0^1 f^{-1}(y) dy$ .
3. Se  $\int_0^4 e^{(x-2)^2} dx = k$ , encontre o valor de  $\int_0^4 x e^{(x-2)^2} dx$ .
4. (a) Faça os gráficos de vários membros da família de funções  $f(x) = (2cx - x^2)/c^3$  para e analise as regiões entre essas curvas e o eixo  $x$ . Como estão relacionadas as áreas das regiões?  
 (b) Demonstre sua conjectura em (a).  
 (c) Examine novamente os gráficos da parte (a) e use-os para esboçar a curva traçada vértices (pontos mais altos) da família de funções. Você pode imaginar que tipo de ela é?  
 (d) Ache a equação da curva que você esboçou na parte (c).
5. Se  $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt$ , em que  $g(x) = \int_0^{\cos x} [1 + \sin(t^2)] dt$ , encontre  $f'(\pi/2)$ .
6. Se  $f(x) = \int_0^x x^2 \sin(t^2) dt$ , encontre  $f'(x)$ .

**Fonte:** Stewart, 2010, p. 398.

Embora exista uma seção dedicada à resolução de problemas, intitulada, inclusive, como *Problemas*, salientamos que esta está disposta ao final dos capítulos, após apresentação e discussões dos conteúdos matemáticos, um pouco divergente dos pressupostos metodológicos da MEAAMaRP.

### 3.2.1 Discussão sobre a análise dos livros de CDI

Com essa análise de livros didáticos de CDI, buscou-se verificar como são apresentados conceitos referentes aos conteúdos de Integral e de que maneira os autores desses livros utilizam problemas no desenvolvimento do conteúdo. Embora o foco do nosso trabalho não seja voltado para a análise de livros didáticos, acreditamos ser importante acrescentar esta etapa em nossa pesquisa.

Desta forma, observamos algumas diferenças em relação à linguagem utilizada pelos autores ao longo de suas obras. Guidorizzi (2001) apresenta um texto mais elaborado, carregado de rigor e demonstrações. Da mesma maneira que Fleming e

Gonçalves (2006), embora essas autoras utilizem uma linguagem mais acessível e direta para os estudantes. Leithold (1994) e Stewart (2010) dialogam bastante com o leitor e tendem a fornecer informações aos leitores, indicando o que está por vir no livro.

No que se refere à utilização de problemas como elemento motivador dos processos de aprendizagem dos conceitos de Integral, apenas na obra de Stewart (2010) há uma seção específica com essa finalidade. Entretanto, ela está disponibilizada no final dos capítulos, contemplando conceitos de Integral. É notório que existe uma intenção de utilizar problemas como um recurso para aprendizagem, porém ela não ocorre durante, ou para, a construção dos conceitos matemáticos, como preconizado pela MEAAMaRP. Os demais livros analisados não diferem *problemas de exercícios*, fornecendo diversas atividades para os estudantes praticarem e testarem seus conhecimentos.

Diante do exposto, é evidente que os livros didáticos de CDI não utilizam como recurso didático-pedagógico os pressupostos metodológicos da MEAAMaRP em sua confecção. Apesar de Stewart (2010) explorar a resolução de problemas em sua obra, existem diferenças entre as intenções propostas por esse autor e a Resolução de Problemas como metodologia ativa de ensino. Enquanto a MEAAMaRP utiliza os problemas como meio para a aprendizagem de Matemática (através), Stewart (2010) os utiliza para a aplicação de conceitos (ou desenvolvimento de técnicas operacionais) como etapa final do processo de aprendizagem.

Dessa forma, afirmamos que há uma lacuna a ser explorada pelos autores de livros didáticos de CDI em termos de se utilizar a Resolução de Problemas como metodologia de ensino para potencializar os processos de ensino e aprendizagem dos conceitos de Integral. Corroborando com a MEAAMaRP, seria mais efetivo que autores trouxessem problemas que contribuam para a construção de conceitos de Integral e, mais ainda, que essa construção fosse realizada no decorrer dos capítulos de sua obra.

Para dar continuidade a esta etapa de Análises Preliminares, dedicamo-nos a investigar mais profundamente o ensino de CDI no Brasil, desde seus primórdios, conforme será apresentado na sequência deste trabalho.

### **3.3 Contextualização histórica do ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil**

Efetuada a revisão de literatura e a análise de livros didáticos de CDI, buscamos informações relacionadas ao Ensino Superior no Brasil, especialmente ao ensino de CDI. Portanto, nesta seção, apresentamos uma contextualização histórica do ensino de CDI no

Brasil. Inicialmente, faremos uma breve retrospectiva da implantação do Ensino Superior no país, desde o ano 1500 até os dias atuais. A intenção é descrever, de maneira geral, o surgimento de instituições de ensino no país que contribuíram para o desenvolvimento da Matemática em nível superior e depois do CDI. Embora o foco desta tese de doutorado não seja a História da Educação no Brasil, pretende-se utilizá-la como referência inicial, um sucinto panorama histórico, objetivando situar o leitor sobre o surgimento das instituições de Ensino Superior no país para, depois, apresentar as mudanças ocorridas com as disciplinas de CDI ao longo do tempo.

### **3.3.1 Um contexto histórico da Implantação do Ensino Superior no Brasil**

Para iniciar este breve panorama histórico sobre o Ensino Superior no Brasil, seremos sucintos em relação ao período compreendido entre os anos de 1500 até 1808, marcado pela descoberta do Brasil e pela chegada da Família Real Portuguesa em terras brasileiras.

De acordo com Silva (2003), a criação de escolas no Brasil fazia parte do processo de colonização portuguesa e, dessa forma, as duas primeiras escolas fundadas na então colônia estavam localizadas na cidade de Salvador (no ano de 1549), na Bahia, e na cidade de São Vicente (em 1550), em São Paulo. Essas escolas não possuíam o ensino de Matemática e, consoante Santos (2009), os primeiros professores que chegaram aqui eram padres jesuítas responsáveis por abrir e por cuidar das “escolas de ler e escrever”, pois havia uma preocupação muito grande da Metrópole em ensinar a língua portuguesa aos nativos habitantes destas terras brasileiras. Vale destacar que, além dos jesuítas, outras ordens religiosas, como inacianos e carmelitas, também participaram da fundação de escolas no Brasil.

O ensino de Matemática no país teve início com a criação do primeiro curso de Artes, no colégio de Salvador em 1572, mantido pela ordem dos inacianos. Nesse curso, estudava-se Matemática, Lógica, Física, Metafísica e Ética durante três anos. No ano de 1573, na cidade do Rio de Janeiro, os jesuítas fundaram um curso de Artes, no qual Matemática fazia parte das disciplinas da matriz curricular, como apontado por Silva (2003). Esse autor complementa, ainda, que, dos dezessete colégios mantidos pelos jesuítas na Colônia, apenas em oito se lecionava Matemática.

Com o passar do tempo, lentamente, a colônia esboçava um desenvolvimento de cidades pelo litoral e, mais timidamente, em locais no interior do país. Era necessário construir pontes, estradas, prédios públicos e igrejas. Inicia-se um processo de

desenvolvimento comercial e, por consequência, havia uma grande preocupação com a defesa militar da colônia.

A partir de 1808, ano marcado pela chegada da Família Real Portuguesa com a corte de D. João VI à cidade do Rio de Janeiro, houve mudanças significativas no contexto social, político, militar e educacional do país. O Brasil colonizado não possuía o conforto com o qual a Família Real estava acostumada em Portugal; nem dispunha da mesma estrutura e qualidade de vida para manter os luxos e prazeres da realeza. Para atender às demandas da coroa portuguesa no Brasil, foram criadas algumas escolas, o Banco do Brasil, a Biblioteca, o Museu Real e o Jardim Botânico, sendo a cidade do Rio de Janeiro tomada como capital do Reino de Portugal, Brasil e Algarves.

Dentre as escolas, vale destacar a criação do Colégio Pedro II, em 1837, também na cidade de Rio de Janeiro, importante por disseminar os programas das disciplinas e grade curricular para todas as escolas do Brasil. No que se refere às escolas superiores instaladas no Brasil, sua criação teve como propósito a formação de profissionais aptos a atender às demandas da corte portuguesa.

Necessitando de quem cuidasse da saúde dos membros da Corte, foram instituídas cadeiras de Medicina, tais como Anatomia, Técnica Operatória, Obstetrícia e Clínica Geral. No que se refere à parte administrativa foram criadas as cadeiras de Aula Pública e Ciência Econômica. Anteriormente, o ensino limitava-se à formação de clérigos, artilheiros e construtores de fortificações, com o objetivo de suprir as necessidades da época (Ziccardi, 2009, p. 37).

O ensino de Matemática em nível superior<sup>11</sup> foi possível após a criação da Academia Real Militar, em 1810, por D. João VI. Frequentada apenas por militares, a academia formava profissionais para os cargos de Oficiais de Artilharia, Oficiais Engenheiros e Oficiais da Classe de Engenheiros, Geógrafos e Topógrafos. Destaca-se que essa instituição foi a primeira no país a oferecer um curso de *Sciencias Mathematicas*, também chamado *Curso Mathematico*. A título de curiosidade, o *material didático* adotado era constituído pela tradução, para o português, de algumas obras de Euler, Monge, Lacroix, Legendre, Laplace, entre outros, impressas no Brasil, oficialmente, pela

---

<sup>11</sup> Segundo Silva (2003), a Ordem dos Inacianos criou, no Colégio de Salvador, em 1575, a Faculdade de Matemática. Entretanto, por vários anos, Portugal não reconhecia os graus acadêmicos obtidos em instituições de ensino no Brasil. Esse autor afirma, ainda, que, durante o período imperial no Brasil, foram efetuadas mais de quarenta tentativas para a criação de universidades em solo brasileiro; todas rejeitadas por Portugal.

Imprensa Régia<sup>12</sup>. “Como é sabido, da descoberta do Brasil até o ano de 1808, a metrópole proibiu, em nosso país, a criação de escolas superiores e impressão de livros, panfletos e jornais, bem como a existência de tipografias” (Silva, 2003, p.13).

Desde a sua fundação, a Academia Real Militar passou por mudanças estruturais e mudanças no perfil dos seus frequentadores.

Inicialmente, apenas militares podiam frequentá-las, até que, em 1833 foi concedida permissão para que paisanos também assistissem aos seus cursos juntamente com os militares. Em 1839 a Academia Real Militar passa a se chamar Escola Militar; em 1855 foi criada, no interior da Escola Militar, a Escola de Aplicação, mas o ensino básico de Matemática e Física continuou sob responsabilidade da Escola Militar. No ano de 1858, uma nova alteração de nomes: a Escola Militar passa a se chamar Escola Central e a Escola de Aplicação passa a ser denominada Escola Militar e de Aplicação. Nesta época, a Escola Central, não tinha mais caráter de formação militar, tinha como disciplinas básicas Matemática e Física (Lima, 2012, p. 75).

Entre 1810 e 1875, o ensino superior de Matemática no país estava restrito à cidade do Rio de Janeiro, como afirmam Santos (2009) e Ziccardi (2009). Esse cenário foi alterado após a criação da Escola de Minas de Ouro Preto (1876), Escola Politécnica de São Paulo (1893) e a Escola de Engenharia de Pernambuco (1895).

Com o passar do tempo, foram criadas outras escolas de ensino superior no Brasil, como a Escola de Engenharia Mackenzie, em São Paulo (1896), a Escola de Engenharia de Porto Alegre (1896), a Escola Livre de Farmácia, em São Paulo (1898), a Escola Superior de Agricultura e Medicina Veterinária, no Rio de Janeiro (1898), a Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, em Piracicaba (1901), entre outras.

Ziccardi (2009) aponta que, no período compreendido entre 1889 e 1918, foram criadas cinquenta e seis instituições de ensino superior no Brasil, em sua maioria, instituições privadas. Segundo a autora, o ensino superior ainda não possuía uma estrutura de universidade, pois era constituído por escolas ou faculdades isoladas, focadas na formação técnica de profissionais que exerceriam suas atribuições na sociedade. O ensino superior era oferecido com objetivos de fornecer um diploma para os graduados exercerem uma profissão. A pesquisa nesses centros de ensino era quase inexistente e havia pouquíssimo investimento para essa atividade.

---

<sup>12</sup> Imprensa Régia era a imprensa oficial do Reino, responsável pela impressão de livros e documentos oficiais, bem como da Gazeta do Rio de Janeiro, o primeiro jornal da colônia. Para mais informações: <https://www.multirio.rj.gov.br/index.php/historia-do-brasil/rio-de-janeiro/2483-a-imprensa-regia>. Acesso em: 10 jan. 2024.

Foi a partir da década de 1910 que se percebeu um trabalho em prol da elevação do nível da cultura científica brasileira e a partir de 1920 que se fortaleceu a proposta de criar as verdadeiras universidades de ensino e de pesquisa em substituição às escolas superiores isoladas. Não se tratava mais de apenas transmitir um saber constituído, mas de, simultaneamente, fornecer o domínio dos instrumentos de produção de novos conhecimentos. Desta forma, a pesquisa deveria permear o ensino, renovando-o constantemente (Ziccardi, 2009, p. 44).

Lima (2012, p. 83) destaca como fatores importantes para essa mudança de cenário a criação da *Sociedade Brasileira de Ciências*, em 1916, no Rio de Janeiro (que passou a ser chamada Academia Brasileira de Ciências, em 1921) e da Associação Brasileira de Educação, em 1924, como associações que “deram início a um movimento defendendo a modernização do sistema educacional brasileiro, inclusive no nível superior e, desde então, iniciou-se uma luta com o objetivo de criar verdadeiras universidades no país, isto é, instituições de ensino e pesquisa que substituiriam as escolas isoladas já existentes”.

Em 1931, entra em vigor o projeto de reformas no ensino secundário e superior no Brasil, chamada de *Reforma Francisco Campos*<sup>13</sup>, que carregava o nome do ministro da Educação e Saúde Pública do país, rompendo com o modelo de escolas de cursos superiores e instituições isoladas para uma modelo, de fato, de Universidade.

A Universidade deveria ser estruturada de maneira a que se integrassem num sistema único, mas sob direção autônoma, as Faculdades Profissionais (Medicina, Engenharia, Direito), Institutos Técnicos Especializados (Farmácia, Odontologia) e Institutos de Altos Estudos (Faculdades de Filosofia e Letras, de Ciências Matemáticas, Físicas e Naturais, de Ciências Econômicas e Sociais, de Educação, etc.). E, ainda, sem perder seu caráter de universalidade, como uma instituição orgânica e viva, posta pelo seu espírito científico, pelo nível dos estudos e pela natureza e eficácia de sua ação, a serviço da formação e desenvolvimento da cultura nacional (Ziccardi, 2009, p. 46).

A pesquisa e o ensino de ciências começam a ocupar um lugar de destaque em virtude dessa Reforma. De acordo com Ziccardi (2009, p. 49), o ministro acreditava que a universidade possuía duas competências: “equiparar tecnicamente as elites profissionais do país” e “proporcionar ambiente propício às vocações especulativas e desinteressadas,

---

<sup>13</sup> Francisco Luis da Silva Campos (1891-1968) foi ministro do Ministério da Educação e Saúde Pública entre 1930 e 1932, durante o período denominado Governo Provisório (1930-1934), comandado pelo presidente Getúlio Vargas (1882- 1954).

cujo destino, imprescindível à formação da cultura nacional, é o da investigação e da ciência pura.”.

Em decorrência da Reforma Francisco de Campos, surge, em 1934, a Universidade de São Paulo (USP) e a primeira Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Brasil.

A Universidade de São Paulo foi organizada, administrativamente, nos moldes da ainda moderna Universidade de Berlim. Concordou-se que a nova Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras teria responsabilidade de desenvolver pesquisa pura e ao mesmo tempo formar quadros para o ensino secundário. Concordou-se que as cátedras da nova Faculdade não seriam distribuídas entre docentes de cátedras afins das escolas existentes, mas seriam providas por professores especialmente contratados para essas cátedras, preferivelmente recrutados em universidades européias. A esses professores seria solicitada colaboração junto às disciplinas básicas das três escolas tradicionais. Propunha-se uma efetiva modernização do panorama intelectual e profissional do Estado de São Paulo (D'Ambrosio, 1999, p. 15).

Após o surgimento da USP, foram criadas a Escola de Ciências da Universidade do Distrito Federal do Rio de Janeiro (1935), a Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil (1939) e a Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil (1939).

Sem nos aprofundarmos nos méritos dessa discussão, observa-se que algumas instituições de Ensino Superior no país reivindicam o título de “primeira universidade do Brasil”, entre elas a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) e a Universidade Federal do Paraná (UFPR). Segundo Silva (2003), em 1912 foi criada, em Curitiba, a Universidade do Paraná, instituição particular de ensino, extinta no ano de 1918. Após um hiato de quase três décadas, em 1946, foi criada a Universidade do Paraná (outra instituição, porém com o mesmo nome), que, futuramente, se tornaria a Universidade Federal do Paraná (UFPR).

No que se refere à UFRJ, o autor aponta que, em 1920, foram reunidas a Escola Politécnica do Rio de Janeiro, a Faculdade de Medicina do Rio de Janeiro e a Faculdade de Direito do Rio de Janeiro sob a alcunha de Universidade do Rio de Janeiro. Essa instituição foi reorganizada como Universidade do Brasil, em 1937, e, posteriormente, no ano de 1965, passou a ser denominada como Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

Ao final da década de 1950, surgem os Institutos Isolados do Estado de São Paulo, em sua maioria em cidades do interior paulista. Eram Faculdades de Filosofia, Ciências e Letras com o objetivo de formar mão-de-obra especializada no interior do estado para desenvolver regiões afastadas dos grandes centros.

De acordo com Zanardi (2012), entre 1975 e 1976, houve uma reforma administrativa na Secretaria de Educação do Estado de São Paulo e a melhor proposta encontrada para os Institutos Isolados foi transformá-los numa faculdade *multicampi*, atualmente a Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). É comum encontrar diversas unidades da UNESP<sup>14</sup> pelo estado que tiveram origem por meio de movimentos de incorporação de Faculdades de Filosofia, Ciências e Letras com Centros Educacionais ou Faculdades Municipais.

Para exemplificar a situação apontada no parágrafo anterior, o câmpus da UNESP de Bauru teve sua origem como Fundação Educacional de Bauru (FEB), em 1966, em virtude da Lei Municipal nº 127, de 26/12/1966. Em 1968, foi instalada a Faculdade de Ciências da Fundação Educacional de Bauru, autorizada a funcionar a partir de 1969. A FEB foi transformada em Universidade de Bauru no ano de 1986 e, no ano de 1988, mediante o decreto nº 28.682 do Governo do Estado de São Paulo, a Universidade de Bauru é incorporada à Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” estruturada como Faculdade de Arquitetura, Artes e Comunicação, Faculdade de Ciências e Faculdade de Engenharia e Tecnologia<sup>15</sup>.

Concomitantemente aos movimentos educacionais ocorridos no estado de São Paulo, no final da década de 1960 e início da década de 1970, ocorreu a chamada Reforma Universitária no Brasil. Traçando um panorama sobre o momento, Celeste Filho (2006 *apud* Lima, 2012) aponta que as Universidades recebiam críticas por serem centros formadores de profissionais especializados; entretanto, não se destacavam como centros produtores de ciência.

Durante esse período, entraram em vigor algumas leis, das quais podemos destacar a substituição (mesmo que facultativa) das cátedras pelos departamentos, a obrigatoriedade de um ciclo básico para alunos de determinada área, dentro da própria

---

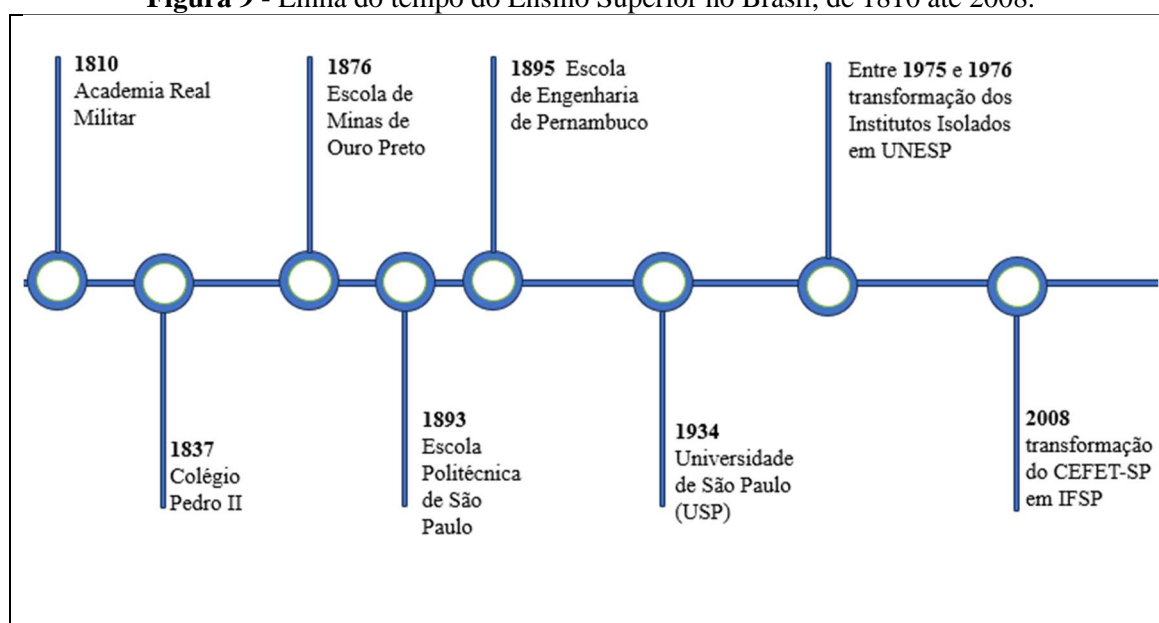
<sup>14</sup> Atualmente, a UNESP possui 34 unidades distribuídas em 24 cidades do estado de São Paulo, sendo 22 campi localizados no interior. Mais informações: <https://www2.unesp.br/portal#!/sobre-a-unesp/perfil/>. Acesso em: 05 set. 2024.

<sup>15</sup> Mais informações sobre a constituição do câmpus da UNESP localizado na cidade de Bauru, podem ser encontradas em: <https://www.fc.unesp.br/#!/instituicao/historico/>. Acesso em: 15 mar. 2024.

instituição, substituição de disciplinas anuais por disciplinas semestrais e a denominação de algumas instituições no país como institutos de pesquisa.

Muitas instituições de Ensino Superior surgiram no país, aumentando o número de cursos disponibilizados e vagas públicas para a população brasileira. Apresentando uma nova concepção administrativa e educacional, foi criado o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), após um longo processo de transformações e adequações, iniciado com a Escola de Aprendizes e Artífices (EAA), em 1909, passando pela Escola Técnica Federal de São Paulo (ETEF-SP), em 1942, pelo Centro Federal de Educação Tecnológica de São Paulo (CEFET-SP), em 1999 e culminando na criação do IFSP, em 2008. A figura 09, a seguir, sintetiza, com uma linha do tempo, alguns marcos do Ensino Superior no Brasil.

**Figura 9** - Linha do tempo do Ensino Superior no Brasil, de 1810 até 2008.



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Em tópico posterior, serão apresentados mais detalhes sobre o IFSP quando nos aproximarmos do ambiente de coleta de dados da pesquisa. Contudo, nos adiantamos apresentando-o como uma autarquia federal vinculada ao Ministério da Educação (MEC) e especializada na oferta de cursos de Ensino Médio Integrado, Ensino Técnico Concomitante/Subsequente, Licenciatura, Bacharelado, Tecnólogo e pós-graduação *lato sensu* e *stricto sensu*, contando com 37 unidades distribuídas pelo Estado de São Paulo.

Com esse breve panorama do surgimento do Ensino Superior no Brasil, é possível verificar que essa modalidade de ensino é recente, ao se comparar com instituições da

Europa. A seguir, será abordada a história do ensino de CDI no Brasil, a partir de 1500, na qual apontaremos algumas heranças que carregamos e fazem parte das salas de aula de CDI no país.

### **3.3.2 História do ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil e as heranças que carregamos**

Tendo como referencial o contexto apresentado anteriormente, apresentaremos uma perspectiva histórica do ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil. Nosso objetivo é destacar momentos significativos relacionados ao ensino dessa disciplina, considerada fundamental nos cursos de Ciências Exatas, mas que, por diversos motivos, ainda provoca receios tanto em professores quanto em alunos.

Entre o período do Descobrimento do Brasil, ano de 1500, e a chegada da Família Real Portuguesa, em 1808, observa-se um período de inexistência do ensino superior no país. As escolas eram, em sua maioria, “escolas de ler e escrever”, administradas pelos padres jesuítas, com ensino inspirado no catecismo, sendo difícil precisar o nível da Matemática ensinada, assim como a formação dos professores que atuavam nessas instituições de ensino.

Nessa época, os brasileiros que tinham condições financeiras e almejavam fazer um curso superior estudavam na Europa, em cidades como Paris ou Lisboa. Qualquer tentativa de abertura de cursos ou escolas de nível superior no Brasil eram proibidas pela Coroa Portuguesa. De acordo com Silva (2003), foram realizadas quarenta e duas tentativas de abertura de universidades somente no período do Brasil Império. Como apontado por Mormello (2010), com o passar do tempo e em razão da importância militar exigida para defesa da colônia brasileira, foram criadas algumas instituições de ensino militar no país, com a incumbência de formar profissionais para atuarem no Brasil.

Essas instituições de ensino militar seguiam estatutos, normas disciplinares e currículos semelhantes às Academias Militares de Portugal. Fazia parte de suas disciplinas o Curso Matemático, que tratava de Princípios de Álgebra, Aritmética, Trigonometria “Reta” e Esférica, Geometria, entre outras. Apesar de fazer parte de nossa história, não nos aprofundaremos nessa discussão.

O ensino de Matemática, em nível superior, teve início no Brasil com a criação da Academia Real Militar, em 1810, sendo, como afirma Ziccardi (2009, p. 39), a “primeira instituição destinada a um curso de *Scientias Mathematicas*”. Como o Rio de Janeiro tornou-se a capital do governo português em terras brasileiras, existia uma preocupação

militar muito grande com a defesa do país e era necessário capacitar e instruir oficiais para defender o território colonizado.

Regido pela Carta de Lei de 4 de dezembro de 1810, os Estatutos da Academia Real Militar do Rio de Janeiro<sup>16</sup> representavam um documento norteador desta instituição e abordavam elementos específicos sobre o comportamento dos professores, disciplinas a serem lecionadas e livros adotados, folgas e feriados, período de exames etc.

Os estatutos da Academia Real Militar estabelecem um “curso completo de ciências matemáticas” que deveria ser ministrado nos quatro primeiros anos, um “curso de ciências de observação (física, química, mineralogia, metalurgia e história natural, compreendendo o reino vegetal e animal)” e um “curso das ciências militares em toda a sua extensão, tanto de tática como de fortificação e artilharia (Mormêllo, 2010, p. 5).

Esse autor complementa, ainda, que o *Curso Matemático* da Academia Real Militar possuía um currículo semelhante às instituições de ensino de Portugal, como a Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra (criada em 1772) e a Academia Real da Marinha de Lisboa (criada em 1779). Santos (2009) afirma que esse *Curso Mathematico* representava a introdução “das matemáticas superiores” no Brasil.

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral era ministrada no segundo ano do *Curso Mathematico* e seguia-se à risca uma tradução em português do livro *Traité Élémentaire du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, do matemático francês Sylvestre François Lacroix (1765-1843), professor na Escola Politécnica de Paris. Essa obra é considerada o primeiro livro-texto de Cálculo adotado em Matemática superior no Brasil, sendo dividida em duas partes: Cálculo Diferencial e Cálculo Integral. Representava um manual completo para a disciplina de Cálculo, contemplando todos os resultados do Cálculo Diferencial e Integral do século XVIII.

Após analisar essa obra, Lima (2012) afirma que o rigor prevalecia e as notações eram utilizadas sem muitas explicações, sem apresentar aplicações do CDI em outras áreas do conhecimento. Para Sad (2010, p. 60), a obra de Lacroix tratava o “Cálculo Integral como o inverso do Cálculo Diferencial” e abordava a integração de funções, integração por séries, integração de funções de duas variáveis, cálculo de áreas e volumes, superfícies e comprimentos de arco.

---

<sup>16</sup> Uma versão, na íntegra, dos Estatutos da Academia Real Militar do Rio de Janeiro pode ser consultada em Mormêllo (2010, p. 177-191).

Consoante Lima (2012), houve a tentativa de adotar outras obras como livro-texto principal da disciplina. Não obstante, os autores escreviam trabalhos muito semelhantes ao de Lacroix. Como exemplo desse fato, tem-se a obra *Elementos do Cálculo Diferencial e de Cálculo Integral segundo o Sistema de Lacroix para uso da Escola Militar*, do ano de 1842, escrita por José Saturnino da Costa Pereira (1771-1852).

Conforme apontado anteriormente no tópico 3.2.1, a Academia Real Militar, no ano de 1839, transformou-se em Escola Militar. Posteriormente, em 1858, alterou o nome da instituição para Escola Central. Em 1874, após um Decreto Imperial, a Escola Central foi transformada em Escola Politécnica do Rio de Janeiro e, nesse período, o *Curso Mathematico* é convertido em outros dois cursos: o *Curso de Sciencias Physicas e Mathematicas* e o *Curso de Scientias Physicas e Naturaes*. Apesar de todas essas mudanças, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral manteve-se presente nessa nova configuração.

As aulas na Academia Real Militar (até a mudança para Politécnica do Rio de Janeiro), em linhas gerais, como descreve Sad (2010, p. 49, destaque nosso), eram baseadas em instrução oral dos conteúdos científicos, “com exposição do lente [*docente*] aos estudantes em cerca de três quartos da aula (cada aula com duração de uma hora e meia), sendo designado o final das aulas para exercícios e revisões” além da cobrança de “boa anotação” dos alunos.

Mormêllo (2010) complementa, ainda, que as aulas da semana eram repetidas aos sábados para o aprimoramento dos conteúdos, pois a repetição, a memorização e a “boa anotação” dos conteúdos dispostos na lousa faziam parte da metodologia de ensino adotada à época, e o professor era o responsável pela transmissão de conhecimento. Havia muita dificuldade em relação aos materiais didáticos adotados, baixos salários dos professores e atrasos em recebê-los, elevados índices de reprovação e poucos alunos matriculados nos anos finais dos cursos. Apesar da distância temporal, é notório observar a presença de alguns traços semelhantes com a atual situação do ensino superior no Brasil.

No ano de 1893, é criada a Escola Politécnica de São Paulo (nos moldes da Escola Politécnica de Paris) e o ensino de Cálculo seguia como livro-texto a obra “*Premiers Éléments du Calcul Infinitésimal*”, publicada em 1869, do matemático francês Hyppolyte Sonnet (1802-1879). De acordo com Lima (2012, p. 78), a obra “trata o conteúdo em questão de acordo com a concepção de Leibniz (1646-1716) e Newton (1642-1727), dando ênfase aos infinitésimos e à noção intuitiva de limite.”

Entre 1901 e 1918, a disciplina de CDI foi ministrada junto com Geometria Analítica, como descreve Lima (2012, p. 78-79), e contemplava a seguinte ementa: 1. Funções; 2. Método da exaustão; 3. Método de Leibniz; 4. Método de Newton; 5. Método de Lagrange; 6. Cálculo Diferencial (como consequência dos três métodos anteriores); 7. Aplicações analíticas e geométricas do Cálculo Diferencial; 8. Cálculo Integral; 9. Métodos de integração; 10. Integrais definidas e 11. Aplicações geométricas do Cálculo Integral. Sem verificar profundamente as especificidades de cada tópico elencado, essa ementa se assemelha ao currículo de CDI lecionado, atualmente, em muitos dos cursos de Ensino Superior no Brasil.

Lima (2012) complementa que os cursos de CDI ministrado na Politécnica de São Paulo possuíam algumas preocupações, como utilizar elementos da História da Matemática para apresentar novos conceitos, utilização de linguagem natural contrapondo-se ao excesso de rigor e simbolismo e diversas explicações sobre as notações utilizadas.

De maneira geral, o ensino de CDI na Academia Real Militar (incluindo suas outras denominações) e na Escola Politécnica de São Paulo possuía um perfil prático para a formação de militares e engenheiros, razão pela qual essa disciplina possuía objetivos muito claros de fornecer ferramentas para a utilização do CDI em situações reais e questões cotidianas desses profissionais. Como afirma Lima (2012), não havia grande preocupação com demonstrações, rigor ou formalismo, uma vez que eram apresentados aos alunos apenas os teoremas e definições considerados úteis para a realização de suas atividades.

Ziccardi (2009, p. 48) afirma que a responsabilidade pelo ensino de Matemática superior no Brasil coube às Escolas Militares e às Escolas de Engenharia por volta de 120 anos e complementa, ainda, que essas instituições de ensino, até 1934, “foram os principais núcleos difusores de Matemática superior onde quase todos os professores de álgebra superior, cálculo, geometria analítica e descritiva foram engenheiros, oficiais do Exército, da Marinha ou os alunos dos últimos anos das Escolas de Engenharia”. Esse cenário seria alterado após a criação da Universidade de São Paulo (USP).

A USP foi criada, em 1934, por meio do decreto Nº 6283 de 25 de janeiro de 1934, reunindo escolas de nível universitário ou de formação profissional já existentes, como a Faculdade de Direito (1827)<sup>17</sup>, a Escola Politécnica (1893), a Escola de Farmácia e

---

<sup>17</sup> Destaque para o ano de criação dessas instituições de Ensino Superior no Brasil.

Odontologia (1899), a Escola Superior de Agronomia Luiz de Queiroz (1901) e a Faculdade de Medicina (1914). Além dessas instituições, foram acrescentados alguns institutos de pesquisa, como o Instituto Butantã e o Instituto Biológico, bem como a criação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL), inspirada na Escola Normal Superior de Paris.

Vinculada à FFCL, entra em funcionamento, no ano de 1935, a Seção de Matemática, responsável pelo Bacharelado em Matemática, curso ministrado em três anos<sup>18</sup>, com uma matriz curricular formada por Análise Matemática, Geometria Analítica, Descritiva e Projetiva, Física Geral e Experimental, Cálculo Vetorial, Complementos de Geometria, Mecânica Racional, Crítica dos Princípios da Matemática, Análise Superior, Complementos de Geometria e Geometria Superior, Crítica dos Princípios e Álgebra (Topologia Plana), Física Matemática e Mecânica Celeste (Lima, 2012).

O corpo docente do curso de Matemática era formado por professores brasileiros e estrangeiros. Segundo Lima (2012, p. 90), o primeiro docente contratado para lecionar no curso de Matemática da FFCL da USP foi o matemático italiano Luigi Fantappiè (1901-1956), que nos anos de 1934 e 1935 esteve à frente das cadeiras de Análise Matemática e de Geometria. Juntamente com Fantappiè, foi contratado outro italiano, Gleb Wataghin (1899-1986), que ficou responsável pela cátedra de Física, que também era uma disciplina pertencente ao currículo do curso de Matemática.

Em 1936, o geômetra italiano Giacomo Albanese (1890-1948), responsável pela cátedra de Geometria Analítica, Projetiva e Descritiva da Real Academia de Pisa, chega à FFCL e assume a cadeira de Geometria para que Fantappiè pudesse se dedicar exclusivamente ao cargo catedrático em Análise Matemática.

Para D'Ambrosio (1999, p. 16), Fantappiè “teve a missão de organizar os estudos matemáticos em São Paulo e sua primeira preocupação foi modernizar os cursos de Cálculo Diferencial e Integral, transformando-os efetivamente num curso de Análise Matemática.” Não havia a disciplina de CDI no programa, pois essa foi repaginada, modernizada e apresentada como Análise Matemática. Dessa forma, podemos dizer que ocorre uma *alteração de identidade* na disciplina de CDI, mudando seu caráter aplicado e intuitivo para um perfil mais carregado de rigor e simbolismo matemático.

---

<sup>18</sup> O Bacharelado era um curso com duração de 3 anos e aqueles que desejassem fazer Licenciatura teriam mais um ano de curso após o término do bacharelado. Esse foi o formato 3 + 1, que vigorou nas Licenciaturas do Brasil por muitos anos.

O curso de Análise Matemática trazido ao Brasil por Fantappiè introduziu no país o rigor simbólico-formal no ensino do Cálculo. A partir de então, na maioria das universidades brasileiras, tal conteúdo passou a ser abordado por meio de uma organização weierstrassiana, na qual a noção topológica de limite, que a maioria das pessoas conhece como definição de limite via épsilons e deltas, embasa os conceitos de continuidade, derivada e integral (Lima, 2013, p. 5).

Reis (2001) denomina esse processo como a “tradição dos limites” no ensino de Cálculo, o que ainda perdura, pois iniciava-se o curso com a definição de limites; a continuidade é definida mediante limites; a derivada é um limite e a Integral aparece na sequência, definida como limite da Soma de Riemann. Tudo é apresentado como limites! Ainda carregamos esta herança e falta espaço para trazer noções mais intuitivas e geométricas aos alunos, pois a obrigatoriedade de cumprir a ementa da disciplina de CDI e a grade curricular engessada dos cursos de graduação pode ser um dos fatores que têm impedido os docentes de efetuarem um trabalho mais detalhado com os alunos.

O curso de Análise Matemática da USP tornou-se referência no país, mudando a maneira de outras instituições abordarem o CDI. Algumas instituições mudaram o nome de suas disciplinas de CDI para Análise Matemática, e outras, que não mudaram o nome, mudaram os objetivos da disciplina, transformando-as em disciplinas de Análise Matemática.

A ênfase dada por Fantappiè à essa disciplina estava voltada para formalização dos conteúdos, sempre com muito rigor matemático e acompanhado das demonstrações de todos os teoremas e resultados abordados no curso. Nesse contexto, “As técnicas de cálculo perderam quase que completamente seu espaço e o objetivo da disciplina passou a ser fornecer aos estudantes uma sólida conceitualização dos elementos matemáticos estudados” (Lima, 2013, p. 5).

Segundo Ziccardi (2009), o curso de Análise Matemática da FFCL da USP tinha muita influência no país e tornou-se padrão no Brasil e, além disso, as notas de aula do curso de Fantappiè resultaram na primeira obra de Análise Matemática escrita no Brasil, com autoria de Omar Catunda (1906-1986) que foi aluno de Fantappiè e trabalhou como professor no curso de Matemática da FFCL/USP. Por conta da Segunda Guerra Mundial (1939-1945) e o retorno de alguns professores estrangeiros aos seus países na Europa, alguns ex-alunos foram contratados pelo Departamento de Matemática da USP para ministrarem aulas.

Raad (2012) aponta que o Curso de Análise Matemática possuía conteúdos

bastante densos e contava com uma preocupação muito grande em fornecer atributos matemáticos para os alunos, um arcabouço de definições e teoremas sobre a construção dos Números Reais, Derivação e Integração.

Lima (2012) aponta algumas mudanças ocorridas com o curso de Análise Matemática na década de 1960 que impactaram a disciplina de CDI. A disciplina de Análise Matemática era ministrada em quatro cursos anuais. Nos primeiros dois anos eram contemplados os conteúdos referentes ao CDI para funções de variáveis reais (parecido com as ementas atuais). O terceiro ano era composto pela Teoria das Funções Analíticas e o quarto ano trazia Complementos de Geometria Elementar como eixo central dos estudos.

Em 1965, a cátedra de Análise Matemática desmembrou-se em Cálculo Infinitesimal e Equações Diferenciais, entretanto, os conteúdos abordados ainda eram os mesmos. Em 1966, o Cálculo Infinitesimal tem sua grade curricular reformulada e se ramificou em Cálculo Diferencial e Integral I e Cálculo Diferencial e Integral II.

A disciplina de Cálculo I contemplava o estudo de Números Reais e Funções, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, aplicações geométricas do Cálculo, Funções de mais de uma variável, Integrais de funções de mais de uma variável e Equações Diferenciais.

O Cálculo II apresentava Topologia do  $R^n$ , Estrutura Euclidiana do  $R^n$ , Compacidade, Teorema do Intervalos Encaixantes e Conexidade como tópicos principais a serem lecionados. Mesmo com essa separação entre Cálculo I e Cálculo II, as aulas continuavam com excesso de rigor e formalismo.

Em relação a essas mudanças referentes à disciplina de CDI durante a década de 1960, Raad (2012, p. 75-77) afirma que ocorreram de maneira lenta e não linear. Houve uma preocupação em ofertar a disciplina de CDI antes da disciplina de Análise Matemática como pré-requisito. Dessa forma, na disciplina de CDI, os alunos teriam um primeiro contato com conceitos de Limites, Derivadas e Integral de uma maneira mais superficial, concebendo uma abordagem diferente dada na disciplina de Análise Matemática. Esse autor complementa que outro fator para mudança de concepções no ensino de Cálculo foi a adoção do modelo americano de ensino de Cálculo, iniciado com o aumento da utilização de livros didáticos de autores com esta concepção.

Lima (2015) comenta que nesse modelo, primeiramente, o aluno fazia um curso denominado Cálculo e trabalhava de maneira mais aplicada com os conceitos e seus significados, manipulando os objetos matemáticos relacionados a tais conceitos e

desenvolvendo articulações entre conceitos na resolução de problemas matemáticos. Num momento posterior, no curso de Cálculo Avançado, retomavam-se os conceitos da disciplina de Cálculo, abordados com um nível mais elevado de rigor simbólico-formal, semelhante à disciplina de Análise Matemática do modelo europeu.

Entretanto, permaneciam com um caráter de rigor e formalismo, infundáveis listas de exercícios calcadas na repetição de técnicas de derivação e integração, e uma preocupação excessiva em manipulações algébricas para o cálculo de limites. Este cenário, que parece distante da atualidade, ainda pode ser presenciado nas salas de CDI pelo país.

Ao final da década de 1960 e início da década 1970, foi instituída no Brasil a chamada Reforma Universitária<sup>19</sup> e a obrigatoriedade de um ciclo básico a alunos de uma mesma área dentro da mesma instituição, as disciplinas de CDI eram oferecidas apenas pelos Departamentos de Matemática e chama-nos a atenção o fato de que esses componentes curriculares eram lecionados da mesma maneira e com a mesma ementa para todos os cursos da universidade, ou seja, o CDI era ofertado e lecionado da mesma forma para Engenharias, Física, Química, Matemática e os demais cursos que possuíssem este componente curricular em seu currículo.

Sem generalizações, ainda é possível observar essa herança nas instituições de Ensino Superior, aspecto que resultou, também, na demora em separar Bacharelado e Licenciatura, pois possuíam uma formação básica comum, em que o aluno fazia sua opção de acordo com a modalidade em algum momento do curso (ao final do primeiro ou segundo ano, de acordo com a instituição de ensino). Diante do exposto, apontamos para esse período, a existência de um movimento da Licenciatura mudando do formato 3 + 1 (três anos de Bacharelado somado a mais um ano de disciplinas pedagógicas) para o 2 + 2 (dois anos de disciplinas do Bacharelado e mais dois anos com disciplinas pedagógicas).

Contudo, como aponta Raad (2012, p. 77), a disciplina de CDI sofreu diversas mudanças ao longo das décadas de 1970 e 1980, pois aproximava-se de um curso de Análise Matemática em alguns momentos, ou afastava-se desse curso, aspecto justificado por conta da interferência dos docentes que lecionavam CDI e dos livros didáticos

---

<sup>19</sup>Aprovada de acordo com a Lei Nº 5.540 de 28 de novembro de 1968 que traçava as diretrizes de organização e funcionamento das instituições de Ensino Superior no Brasil. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1960-1969/lei-5540-28-novembro-1968-359201-publicacaooriginal-1-pl.html>. Acesso em: 16 ago. 2024.

adotados naquela época. A partir da década de 1990, os cursos de CDI passaram a contemplar ementas semelhantes às atuais, seguindo uma abordagem de funções, limites, derivadas e integral.

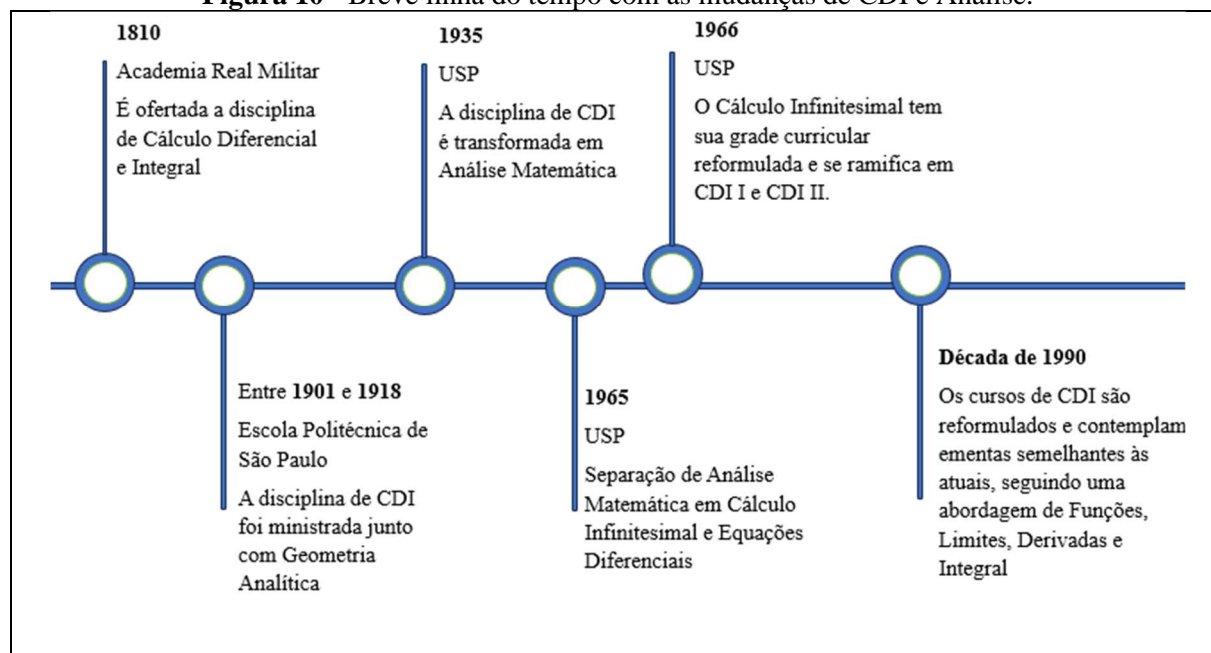
Em síntese, concordamos com Rezende (2003) sobre a existência de uma “crise de identidade” no ensino de CDI em diversas instituições de Ensino Superior no país. Em suas palavras,

[...] ficou evidenciada a existência de uma **crise de identidade** no ensino superior de Cálculo, caracterizada basicamente pela subordinação do ensino de Cálculo a uma espécie de preparação para Análise e pela excessiva caracterização algébrica de duas ideias fundamentais. A primeira é a principal responsável pelo uso de demonstrações evasivas e desnecessárias, que monopolizam os processos de significações das ideias e resultados do ensino de Cálculo. A última, por outro lado, constitui-se pelo exagero da técnica que desvirtua, sem dúvida, os significados das ideias básicas do Cálculo (Rezende, 2003, p. 440- 441, grifo nosso).

Esse autor complementa ainda que é necessário repensar o ensino de CDI nos cursos superiores. Essa *crise de identidade* permanece atual e causa impactos, apesar dos esforços de docentes e instituições de ensino.

É comum que alunos de vários cursos no mesmo câmpus façam a disciplina de CDI com o mesmo docente e a mesma abordagem. Entretanto, o aluno da Licenciatura em Física e o aluno da Engenharia precisam saber Cálculo da mesma maneira, com o mesmo nível de compreensão? Com a mesma ênfase? E qual seria este curso de CDI? Seria mais aplicado a situações cotidianas e voltado à compreensão dos conceitos ou mais rigoroso e formal, com destaque para demonstrações e repetições de técnicas de derivação? Estamos lecionando, de fato, CDI ou Análise? E a quem cabe tomar essas decisões?

A Figura 10 ilustra, com uma linha do tempo, algumas mudanças ocorridas com o ensino de CDI no Brasil.

**Figura 10** - Breve linha do tempo com as mudanças de CDI e Análise.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

O ensino de CDI ainda carrega heranças presentes desde 1810, da Academia Real Militar, como a memorização e repetição de conceitos (e exigência de *boa anotação* dos alunos); o excesso de rigor simbólico-formal do curso de Análise Matemática implementado por Fantappiè e a *tradição dos limites*; além dos impactos causados pela *crise de identidade* do ensino de CDI no país. Compreendemos que essas heranças, imperceptíveis num primeiro momento, colaboram e potencializam os fatores dificultadores do ensino e aprendizagem de CDI, refletindo nos elevados índices atuais de não-aprovação e desistência dos cursos superiores de Ciências Exatas.

Boccardo e Meneghetti (2023, p. 3), apontam algumas das possíveis consequências que altos índices de não aprovação em CDI podem acarretar, na perspectiva do aluno, da instituição de ensino e dos entes públicos, ponderando que

[...] é notória a dificuldade dos alunos na disciplina de CDI, qualquer que seja a instituição de ensino, e conforme a nossa experiência profissional, tais dificuldades culminam em reprovação, evasão, atraso na formação dos alunos e demora para sua inserção no mundo do trabalho. Em termos institucionais, compreende-se que a universidade precisa alocar mais docentes para ministrar a disciplina de CDI, em turmas com excesso de alunos (dificultando o processo de ensino e aprendizagem), criar “turmas especiais” em horários alternativos, e tantas outras medidas. Por outro lado, na perspectiva dos entes públicos (que fazem o aporte financeiro para manutenção das instituições), os cursos “ficam mais caros”, no sentido que possuem alta evasão, conseqüentemente, poucos alunos formados no tempo mínimo previsto

causam elevação do custo por aluno (Boccardo; Meneghetti, 2023, p. 3).

Por esses motivos, a busca por melhorias no processo de ensino e aprendizagem de CDI mostra-se necessária. As heranças que carregamos na disciplina de CDI permanecem atuais e precisam ser revistas, pois alguns fatores dificultadores da aprendizagem dessas disciplinas residem nessas heranças, como o excesso de rigor e formalismo, metodologia de ensino passiva e mecanizada (com foco na memorização e repetição de padrões), e *cultura dos limites*, não havendo espaço para desenvolver o raciocínio e criatividade dos alunos.

Não seria exagero afirmar que a primeira aula de CDI ministrada no Brasil, em 1810, assemelha-se a uma aula desse componente curricular lecionada nas instituições de Ensino Superior no país nos dias atuais, pouco mais de dois séculos depois. O professor fica de pé na frente da sala, escrevendo no quadro e explicando o conteúdo, ao passo que os alunos permanecem sentados, copiando e escutando, passivamente, aguardando a transmissão de conhecimento ser finalizada. Depois começa a etapa de exemplos e exercícios para os alunos reproduzirem os algoritmos que o professor utilizou em sua resolução. Observa-se um processo de repetição de comportamentos, tanto de alunos quanto de professores, perpetuando-se com o passar das décadas.

Esta revisão histórica sobre o ensino de CDI no Brasil, embora espantosa, nos trouxe à luz que ainda copiamos modelos de aulas do século XIX. Prosseguindo com estas análises preliminares, apresentaremos o local onde foram coletados os dados desta pesquisa, o IFSP, localizado na cidade de Votuporanga.

### **3.4 Apresentando o ambiente de coleta e a produção de dados da pesquisa**

Seguindo com as investigações que a etapa de Análises Preliminares exige, nos aproximamos do ambiente da coleta de dados e produção de registros desta pesquisa. Para identificar nossa realidade acadêmica e profissional, apresentamos o IFSP com uma breve descrição desde sua fundação até os tempos atuais, e sua consolidação como instituição de ensino no cenário nacional. Além disso, serão desveladas, também, informações importantes acerca do câmpus de lotação do autor desta tese de doutorado, localizado na cidade de Votuporanga, e do curso de Licenciatura em Física, que teve fundamental importância na realização das sessões didáticas e da coleta de dados desta pesquisa.

### 3.4.1 O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do estado de São Paulo (IFSP)

A Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, vinculada ao Ministério da Educação (MEC), criada por meio da Lei nº 11.892, de 29 de dezembro de 2008, é constituída pelas seguintes instituições: Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia (Institutos Federais/IF), Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Centros Federais de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET-RJ) e de Minas Gerais (CEFET-MG), Escolas Técnicas Vinculadas às Universidades Federais e o Colégio Pedro II.

A criação dos IF no Brasil possibilitou a interiorização da educação, ciência e tecnologia a locais afastados das grandes cidades, permitindo mudar a realidade de muitas pessoas pelo país. Articulando com os arranjos produtivos locais, prefeituras e escolas públicas, os IF representam uma proposta original de relacionar ensino, pesquisa, extensão e gestão.

Os Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia são uma proposta inovadora no campo da educação no Brasil. Sua essência está na integração dos diferentes níveis de formação profissional e tecnológica em um único projeto pedagógico, o que tem como objetivo democratizar o acesso e elevar a qualidade da educação pública em todo o país. O diferencial dos Institutos Federais é a oferta de uma variedade de cursos que vão desde o ensino médio integrado até a pós-graduação, incluindo cursos técnicos, graduação e extensão. Todos esses cursos são desenvolvidos com uma abordagem pedagógica que valoriza a formação integral do estudante, preparando-o para gerar soluções técnicas e tecnológicas de forma ética e sustentável (Pacheco, 2023, p. 9).

A criação e a concepção dos Institutos Federais foram realizadas ao longo de muitos anos. O Quadro 3, a seguir, sintetiza alguns fatos históricos desse processo desenvolvido ao longo de mais de cem anos, juntamente com os decretos oficiais que os constituíram.

**Quadro 3** - Breve histórico da criação do IF.

<b>1909:</b> São criadas as Escolas de Aprendizes Artífices (EAA) nas capitais dos estados, por meio do Decreto 7.566, de 23 de setembro de 1909.
<b>1937:</b> As EAA são transformadas em Liceus Industriais, por meio do Art. 37 da Lei n. 378, de 13 de janeiro de 1937.

<b>1942:</b> É instituída a Escola Técnica Federal de São Paulo (ETEF-SP), por meio do art. 8 <sup>a</sup> , inc. VII, do Decreto-Lei n. 4.127, de 25 de fevereiro de 1942.
<b>1959:</b> As ETEF ganham personalidade jurídica própria, com autonomia didática, administrativa, técnica e financeira, conforme disposto no art. 16 da Lei n. 3.552, de 16 de fevereiro de 1959.
<b>1978:</b> as ETEF de Minas Gerais, Paraná e Rio de Janeiro se tornam Centros Federais de Educação Tecnológica (CEFET), conforme disposto na Lei nº 6.545, de 30 de junho de 1978.
<b>1999:</b> é criado o Centro Federal de Educação Tecnológica de São Paulo (CEFET-SP), mediante transformação da ETEF-SP, conforme disposto no Decreto de 18 de janeiro de 1999.
<b>2008:</b> O Instituto Federal de São Paulo é criado a partir da transformação do CEFET-SP, conforme disposto no art. 5 <sup>o</sup> , inc. XXXVI, da Lei n. 11.892, de 29 de dezembro de 2008.

**Fonte:** IFSP. Disponível em: <https://www.ifsp.edu.br/institucional>. Acesso em: 29 mar. 2023.

Presente também no estado de São Paulo, o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP) é uma autarquia federal vinculada ao MEC, especializada na oferta de Educação Profissional e Tecnológica. O IFSP possui autonomia administrativa, patrimonial, financeira, didático-pedagógica e disciplinar, nos termos da Lei 11.892/2008.

O IFSP destina 50% de suas vagas aos cursos técnicos integrados ao Ensino Médio e 20% das vagas para cursos de Licenciaturas e formação pedagógica. O restante das vagas destina-se aos cursos de graduação em tecnologias, bacharelados, além dos cursos de pós-graduação *lato sensu* e *stricto sensu*, conforme a Lei Nº 11.892<sup>20</sup>. Ademais, são destinadas vagas esporádicas para cursos de extensão e na modalidade de Educação a Distância (técnicos e graduação).

Atualmente, o IFSP possui 40 unidades distribuídas no estado de São Paulo, oferecendo mais de 40.000<sup>21</sup> vagas de ensino público e gratuito. A seguir, apresentamos uma dessas unidades, localizada na cidade de Votuporanga, câmpus de lotação do autor desta tese de doutorado e local onde foram coletados e produzidos os dados da pesquisa.

<sup>20</sup> A Lei Nº 11.892 de 29 de dezembro de 2008 institui a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, sua estrutura organizacional, objetivos institucionais e demais disposições. Disponível em: [https://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_ato2007-2010/2008/lei/11892.htm](https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2008/lei/11892.htm): Acesso em: 18 ago. 2024.

<sup>21</sup> Dados obtidos através da Plataforma Nilo Peçanha, conforme Ano-Base 2023. Disponível em: <https://app.powerbi.com/view?r=eyJrIjoiaZDhkNGNiYzgtMjQ0My00OGVILWJjNzYtZWQwYjI0ThhYWWM1IiwidCI6IjllNjgyMzU5LWQxMjgtNGVkYi1iYjU4LTgyYjJhMTUzNDBmZiJ9> Acesso em: 19 de ago. de 2024.

### 3.4.2 O câmpus Votuporanga

A cidade de Votuporanga fica localizada na região noroeste do estado de São Paulo, distante 533 km da capital do estado, com uma população aproximada de 95 mil habitantes, segundo o censo do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2020.

O câmpus do IFSP, na cidade de Votuporanga, possui autorização para funcionamento conforme a Portaria MEC n.º 1.170, de 21 de setembro de 2010, e iniciou suas atividades em janeiro de 2011, provisoriamente, no prédio da Universidade Aberta do Brasil (UAB), enquanto ocorria a construção do câmpus. Em junho do mesmo ano, com a finalização das obras, as instalações foram transferidas para a Avenida Jerônimo Figueira da Costa, 3014, local onde está situado o IFSP-câmpus Votuporanga, até hoje. Conforme o Plano de Desenvolvimento Institucional (PDI), o câmpus segue os eixos tecnológicos de “Infraestrutura”, “Informação e Comunicação” e “Controle e Processos”. Orientado por esses eixos, foram criados os cursos técnicos concomitantes/subsequentes, técnicos integrados ao Ensino Médio, cursos de graduação e pós-graduações.

No ano de 2012, o câmpus iniciou a oferta de mais 160 vagas em cada semestre, distribuídas pelos cursos de Edificações, Eletrotécnica, Manutenção e Suporte em Informática e Mecânica, todas no período noturno. Houve uma parceria com a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo com a implementação de cursos de Manutenção e Suporte em Informática de Edificações, integrados ao Ensino Médio, com 45 vagas em cada curso.

Em 2015, por meio da mesma parceria, foram abertas 45 vagas no curso técnico em Mecatrônica integrado ao Ensino Médio. Os alunos cursavam os componentes curriculares do Ensino Médio na escola pública e as disciplinas da área técnica, teóricas e práticas eram cursadas no IFSP. Atualmente, essas parcerias se encerraram e os alunos dos cursos técnicos integrados ao Ensino Médio cursam todas as disciplinas no câmpus do IFSP e fazem processo seletivo para ingressarem nessa instituição de ensino.

Em relação aos cursos voltados ao Ensino Superior, no primeiro semestre de 2011 tiveram início os cursos de graduação em Análise e Desenvolvimento de Sistemas e Engenharia Civil. No primeiro semestre de 2016, tiveram início as atividades do curso superior de Licenciatura em Física, importante para formação de professores que atuam nas escolas de Votuporanga e região. No ano de 2017, começam as atividades do curso de Engenharia Elétrica. Em 2021, teve início o curso de graduação em Sistemas de

Informação e, em 2022, foi aprovado o curso de pós-graduação *lato sensu* (Especialização) em Gestão em Tecnologia da Informação e Comunicação.

Atualmente, o IFSP-Votuporanga<sup>22</sup> oferece 340 vagas anuais, sendo 160 de cursos técnicos integrados ao Ensino Médio e concomitante/subsequente, 160 vagas de cursos de graduação, entre elas, 40 de Licenciatura em Física e 20 vagas de pós-graduação *lato sensu*. Ao longo desses anos, o IFSP realizou inúmeras ações, contabilizando parcerias, cursos de extensão, eventos científicos e congressos. Enfim, o câmpus tem cumprido seus objetivos de fornecer educação gratuita e de boa qualidade para população e desenvolvimento social, cultural e econômico da região, auxiliando o arranjo produtivo local. A seguir, apresentaremos o curso de licenciatura em Física do câmpus do IFSP na cidade de Votuporanga, importante para coleta de dados desta pesquisa de doutorado.

### **3.4.3 O curso de Licenciatura em Física**

O curso de Licenciatura em Física do IFSP, câmpus Votuporanga, teve seu Projeto Pedagógico de Curso (PPC) aprovado para a devida implementação conforme a Resolução nº 100/2015, de 04 de novembro de 2015. No primeiro semestre de 2016, no mês de fevereiro, tiveram início as atividades do curso superior de Licenciatura em Física, importante para a formação de professores que atuam nas escolas públicas e privadas de Votuporanga e região.

Oferecido no período noturno, dispõe de 40 vagas anuais, com entrada no primeiro semestre. Esse curso possui carga horária total de 3460 horas, distribuídas em 4 anos (8 períodos). Além de Votuporanga, os campi do IFSP localizados em São Paulo, Itapetininga, Birigui, Piracicaba, Caraguatatuba e Registro possuem cursos de Licenciatura em Física.

Apesar de recente, o curso de Licenciatura ocupa lugar de destaque na região, prezando pela qualidade e ampla formação de professores de Física com capacidade para ingressar no mundo do trabalho ou se qualificarem em programas de pós-graduação no país. Esse curso apoia-se em disciplinas da área de Física, Matemática e da Educação, com currículo elaborado de modo a articular a formação cultural, teórica e prática dos futuros professores em diversas áreas de conhecimento.

---

<sup>22</sup> Mais informações disponíveis em: <https://vtp.ifsp.edu.br/index.php/câmpus-votuporanga.html>. Acesso em: 20 abr. 2024.

Dentre as disciplinas da área de Matemática que compõem a grade curricular da Licenciatura em Física, estão presentes quatro disciplinas de CDI (CDI I, II, III e IV), conforme o PPC (IFSP, 2023), que inclui o CDI II, foco desta pesquisa de doutorado. A disciplina de CDI II é ofertada no terceiro período do curso, e a ementa contempla os conteúdos de Integral e princípios de Equações Diferenciais Ordinárias. Escolhemos essa disciplina para o desenvolvimento desta pesquisa de doutorado em virtude da sua importância ao longo da vida acadêmica dos alunos e nossas percepções de uma aprendizagem insuficiente no que se refere aos conteúdos pertinentes, principalmente às aplicações de Integral, técnicas de integração e cálculo de áreas utilizando Integral.

Buscamos os participantes para a coleta de dados e produção de registros de nossa pesquisa na turma de CDI II da Licenciatura em Física, cujas aulas se deram no primeiro semestre do ano de 2024; contudo, faremos uma melhor descrição dos participantes e da coleta de dados em momento oportuno, no capítulo denominado Experimentação, que se refere à aplicação da sequência didática e demais instrumentos de coleta desta pesquisa.

A seguir, apresentamos um levantamento dos conceitos finais dos alunos da Licenciatura em Física, nas disciplinas de CDI I e CDI II, no período compreendido entre 2016 e 2019, anterior à pandemia de COVID-19, a fim de fazer uma breve análise.

#### **3.4.4 Análise dos conceitos finais de alunos do IFSP-Votuporanga em disciplinas de CDI I e CDI II**

Dedicamos esta seção para mostrar um levantamento dos conceitos finais dos alunos do curso de Licenciatura em Física do IFSP, matriculados no câmpus de Votuporanga. Os conceitos foram obtidos na Coordenação de Registros Acadêmicos (CRA) do câmpus, setor responsável pelas matrículas e inscrições dos alunos em disciplinas, emissão de diplomas e demais questões relacionadas aos trâmites internos referentes aos estudantes do câmpus. Foi permitida a divulgação desses dados, entretanto, sem a exposição de alunos ou docentes das referidas turmas.

Analisamos os dados de alunos da Licenciatura em Física que cursaram as disciplinas de CDI I e CDI II entre os anos de 2016 e 2019, período em que essas disciplinas foram ministradas presencialmente anterior à pandemia de COVID-19. Não foram considerados os conceitos dos alunos durante as aulas no período da pandemia, pois essas foram prejudicadas por conta da falta de condições ideais de aprendizagem que os alunos sofreram naquele momento conturbado.

Não foram considerados os dados sobre os conceitos finais de CDI III e CDI IV, pois não os obtivemos e, conforme a experiência profissional do pesquisador, referem-se a disciplinas com baixíssimos índices de reprovação e evasão e, além disso, os alunos que cursam esses componentes curriculares habitualmente estão próximos do final do curso de Licenciatura. Acrescenta-se, também, que o foco do trabalho não corresponde a essas disciplinas.

Cabe destacar que o curso disponibiliza 40 vagas de entrada anual, no primeiro semestre, e a disciplina de CDI I é pré-requisito para disciplina de CDI II, com algumas exceções previstas no PPC (IFSP, 2023), como adequação de carga horária para possíveis formandos. Além disso, consta na Organização dos cursos Superiores de Graduação do IFSP (IFSP, 2016) a permissão de estudantes cursarem disciplinas em outros turnos e cursos, em regime de dependência. Por conta disso, para facilitar o fluxo dos alunos entre os cursos, é possível que os alunos cursem as disciplinas de CDI na Licenciatura em Física, bem como na Engenharia Civil ou Engenharia Elétrica. No entanto, esses alunos que cursaram as disciplinas na Licenciatura em Física, em regime de dependência, não foram contabilizados neste levantamento.

Através da CRA, foram obtidos e inseridos na Tabela 2 somente os conceitos finais dos alunos matriculados na Licenciatura em Física que cursaram as disciplinas de CDI I e CDI II, entre 2016 e 2019.

**Tabela 2** - Conceitos finais dos alunos CDI e CDI II.

<b>LICENCIATURA EM FÍSICA</b>									
<b>COMPONENTE CURRICULAR</b>	<b>CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I</b>				<b>CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II</b>				
<b>ANO</b>	<b>2016</b>	<b>2017</b>	<b>2018</b>	<b>2019</b>	<b>2016</b>	<b>2017</b>	<b>2018</b>	<b>2019</b>	
APROVADO	10	13	16	13	-	7	18	36	
REPROVADO	4	15	12	10	-	1	9	13	
REP. FALTA	8	11	19	14	-	0	6	0	
CANCELADO	4	4	2	2	-	2	0	1	
TRANCADO	0	2	0	2	-	1	0	1	
<b>TOTAL</b>	<b>26</b>	<b>45</b>	<b>49</b>	<b>41</b>	<b>-</b>	<b>11</b>	<b>33</b>	<b>51</b>	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Inicialmente, analisando a Tabela 02, destaca-se a quantidade de alunos que cursaram as disciplinas de CDI I e CDI II na Licenciatura em Física. Em 2016 foram 26 alunos que cursaram CDI I, o que mostra uma quantidade de alunos que evadiram o curso

ao longo do ao longo do primeiro período. Em relação aos anos seguintes, 2017, 2018 e 2019, reforço que foram contabilizados na Tabela 02 somente alunos do curso de Licenciatura em Física e, pela quantidade de estudantes indicados, é provável que há alunos que cursaram a disciplina de CDI I novamente, em regime de dependência.

Seguindo nessa análise dos dados da Tabela 02, observa-se que a disciplina de CDI I possui altos índices de não-aprovação<sup>23</sup>, sendo 61,5% em 2016, 71% em 2017, 67% em 2018 e 68% em 2019, ou seja, acima de 60% dos alunos não foram aprovados e a quantidade de alunos matriculados no período, com exceção de 2016, foi maior do que 40, pois alguns estudantes cursaram a disciplina mais de uma vez para obter sua aprovação.

Em relação à disciplina de CDI II, em 2016 não houve oferta dessa disciplina, pois o curso estava em seu primeiro ano de funcionamento e, neste caso, foram ministrados apenas os componentes curriculares do primeiro e segundo períodos. Os índices de não-aprovação foram 36% em 2017, 46,5% em 2018 e 30% em 2019. Embora sejam índices menores que os encontrados na disciplina de CDI I, ainda se configuram como valores alarmantes.

Em relação aos reprovados (por nota), estes alunos frequentaram a disciplina até as avaliações finais e não obtiveram a média para aprovação, significando que não compreenderam os conteúdos abordados. Para isso, seria necessária uma análise mais aprofundada com as notas finais e média da sala para tirar conclusões mais precisas, porém não as possuímos. Não temos informações sobre os fatores que causaram reprovações por falta, trancamento e cancelamento de matrículas.

Uma segunda observação a ser feita indica um aumento no total de matrículas em CDI II, entretanto, esse aumento acarreta em salas lotadas, causando transtornos para os docentes e dificultando a aprendizagem dos alunos. Outro ponto importante a ser considerado nesse levantamento refere-se às observações e percepções do docente, em sala de aula, verificando que a aprendizagem dos alunos se encontra abaixo daquela que seria a desejada.

É possível perceber que as dificuldades apresentadas em CDI I e que não foram sanadas acompanham os alunos em CDI II, causando mais adversidades ao aprendizado dos mesmos. A disciplina de CDI II é muito importante na Licenciatura em Física,

---

<sup>23</sup> O termo não-aprovação corresponde à situação dos alunos reprovados por nota, ou reprovados por falta, ou que efetuaram o trancamento de sua matrícula na disciplina ou evadiram o curso de graduação, ocasionando o cancelamento de matrícula.

especificamente os conceitos de Integral, pois, ao longo do curso, os alunos aprendem diversos conteúdos específicos da Física, e a integração se comporta como uma ferramenta muito útil.

Por fim, as reprovações causam um atraso no tempo natural de formação dos alunos dentro da instituição de ensino, podendo atrapalhar sua inserção no mundo do trabalho ou na área acadêmica.

Em síntese, percebemos a necessidade de realizar esta pesquisa de doutorado com alunos que cursam a disciplina de CDI II, na Licenciatura em Física, para participarem da coleta de dados e demais instrumentos de avaliação, com objetivos de buscar outras maneiras de potencializar a aprendizagem dos conceitos de Integral, tão relevantes para esses alunos no decorrer do curso.

Chegamos ao final deste capítulo de Análises Preliminares, onde foram desveladas constatações que contribuirão para as próximas etapas desta pesquisa. A revisão de literatura apontou a inexistência de artigos, dissertações ou teses envolvendo, concomitantemente, a MEAAMaRP, o ensino de CDI e a ED, indicando uma lacuna de pesquisa. Além disso, essa revisão indicou a falta de publicações explorando conceitos de Integral, foco desta pesquisa.

Como fatores dificultadores para aprendizagem de CDI, encontramos, conforme relatado anteriormente, defasagem em conceitos relacionados à Matemática básica, abordados durante o Ensino Médio, tais como encontrar raízes de equações, traçar o gráfico de funções e efetuar manipulações algébricas durante o cálculo de limites. Acrescentam-se a estas, a falta de hábito de estudo, dificuldades durante a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior e dificuldades de compreensão dos enunciados. Este contexto deverá ser considerado para elaboração da sequência didática a ser desenvolvida.

A análise dos livros didáticos de CDI nos trouxe informações importantes sobre a maneira que os autores abordam os conceitos sobre Integral, a linguagem que utilizam em seus textos e a presença de elementos como rigor e formalismo. Percebemos nas obras analisadas, exceto em Stewart (2010,) que os autores não fazem distinção entre exercícios, exercícios contextualizados e problemas. Dessa forma podemos selecionar ou elaborar questões interessantes para utilizar durante essa investigação. Diante do exposto, obtivemos noções que contribuirão para a construção da sequência didática a ser explorada no capítulo seguinte desta tese.

Os aspectos históricos sobre o ensino de CDI no Brasil apontaram, como afirmam Reis (2001), Rezende (2003) e Lima (2015), uma *crise de identidade* vivenciada por essa disciplina, ora sendo Análise Matemática, ora sendo CDI, até adquirir as características presentes nas instituições de ensino no país, contemplando Funções, Limites, Derivadas e Integrais. Entretanto, encontram-se heranças que são mantidas nas salas de aula de CDI até os dias atuais, como aulas tradicionais, passivas e mecanizadas, excesso de rigor e simbolismo adotado pelos docentes e livros didáticos, foco na *cultura dos limites*, trazida por Reis (2001), além das demasiadas manipulações algébricas, omitindo o estímulo à criatividade e intuição dos alunos.

Aproximando-nos do ambiente da coleta de dados da pesquisa, com a análise dos conceitos finais dos alunos da Licenciatura em Física, nas disciplinas de CDI I e CDI II, do câmpus Votuporanga do IFSP, foi possível identificar altos índices de não-aprovação e os transtornos que isso causa aos alunos, professores e à instituição de ensino. Algumas percepções do professor autor desta tese de doutorado foram consideradas na análise dos conceitos finais da disciplina de CDI II, não somente os valores absolutos obtidos com a CRA do câmpus, dentre eles, a defasagem de aprendizagem dos alunos matriculados em CDI II, que passaram por dificuldades em CDI I e ainda as carregam consigo.

Dessa forma, encerramos esse capítulo de Análises Preliminares com várias informações relevantes e significativas que contribuíram para a continuação desta pesquisa, na qual desenvolvemos uma sequência didática e outros instrumentos de coleta de dados e produção de registros dos alunos do curso de Licenciatura em Física, apresentados no capítulo a seguir, intitulado Concepções e Análises *a priori*.

*O papel do professor é justamente buscar situações problemáticas que tenham o potencial de adicionar novas perspectivas ao conhecimento do aluno, conduzindo-o a um novo estado de viabilidade. Uma situação será problemática quando tiver o potencial de desequilibrar os saberes viáveis, aos quais o sujeito recorre ao resolver situações problemáticas (Beatriz D'Ambrosio (1960- 2015), 2017, p. 111).*

#### **4. CONCEPÇÕES E ANÁLISES A PRIORI**

No capítulo anterior, denominado Análises Preliminares, foram apresentadas a revisão de literatura, análise de livros didáticos de CDI, aspectos históricos do Ensino Superior e do ensino de CDI no Brasil, uma descrição sobre o IFSP e o curso de Licenciatura em Física do câmpus Votuporanga e, por fim, uma análise dos conceitos finais dos alunos desse curso entre os anos de 2016 a 2020. Esses elementos são importantes para a sequência desta pesquisa e foram considerados para a elaboração da etapa seguinte.

Isso posto, concentramos nossos esforços para desenvolver a segunda etapa desta ED, denominada Concepções e Análises a *Priori*. Nela, o pesquisador, em posse de todas as informações obtidas anteriormente, descreve as variáveis globais e locais (ou variáveis macro-didáticas e micro-didáticas) de sua pesquisa e faz a construção da sequência didática a ser aplicada e analisada, bem como, os demais instrumentos que julgar necessário para auxiliar na validação (ou refutação) das hipóteses da pesquisa. O processo de elaboração envolvendo as variáveis globais e locais é bastante complexo e exige experiência do pesquisador. Por conta disso, no decorrer deste capítulo serão apresentadas algumas questões gerais e específicas, sobre as quais buscamos analisar e refletir a passo que caminhamos com o desenvolvimento desta pesquisa de doutorado.

De acordo com Bittar (2017), esta etapa da ED contempla a elaboração da sequência didática a ser aplicada e possui uma parte de descrição e outra de antecipação. A descrição está relacionada às atividades a serem propostas, fundamentando sua inserção na sequência didática, juntamente com seus objetivos e justificativas. A antecipação apresenta-se como as possíveis respostas e estratégias de resolução que serão efetuadas pelos alunos.

Dessa forma, este capítulo será dedicado à construção da sequência didática a ser aplicada nesta pesquisa, com base na MEAAMaRP, bem como os instrumentos de avaliação, os quais denominamos de Avaliação Diagnóstica Inicial (ADI) e Avaliação

Diagnóstica Final (ADF). Além desses instrumentos, foi elaborado um questionário de pesquisa para coletar mais algumas informações dos alunos participantes, especialmente suas percepções e experiências acerca da MEAAMaRP durante a coleta de dados desta pesquisa. Acrescenta-se a isso algumas questões gerais e específicas, as quais temos interesse para que sejam investigadas ao longo desse trabalho de pesquisa.

Entende-se que todos esses itens serão importantes para a coleta de dados e produção de registros desta pesquisa de doutorado, os quais serão apresentados detalhadamente no decorrer deste capítulo. Vale destacar que todos os instrumentos da coleta de dados desta pesquisa estão disponibilizados nos Apêndices deste trabalho, sendo cada um deles devidamente indicado pelo autor, para auxiliar o leitor.

Primeiramente, para ilustrar uma perspectiva mais ampla da nossa pesquisa, definimos algumas questões gerais, que serão analisadas e pautaram o desenvolvimento dos instrumentos de coleta e produção de dados, listadas abaixo:

1. Utilização da MEAAMaRP como recurso didático (metodologia de ensino).
2. Realização de atividades em dupla para estimular a comunicação entre os alunos, entretanto, sem impedimentos para a comunicação total entre os alunos participantes da pesquisa.
3. Verificar se as etapas de discussão, como propostas pela MEAAMaRP, potencializam a habilidade de resolução de problemas dos alunos.
4. Durante a formalização dos conteúdos, proporcionar momentos de discussão com os alunos, estimulando sua participação em busca do seu desenvolvimento.
5. Partindo dos conhecimentos prévios apresentados pelos participantes, verificar se a capacidade de generalização de algumas propriedades ou resultados é feita de maneira natural pelos alunos.

Justificamos os motivos que nos levam para a escolha de cada questão geral elencadas. A primeira questão refere-se à metodologia de ensino adotada e, em razão dessa escolha, queremos verificar possíveis potencialidades e limitações do uso da MEAAMaRP no ensino dos conceitos de Integral, conteúdo referente à disciplina de CDI II. Queremos colocar os alunos como protagonistas em sala de aula, na construção de conceitos abordados em CDI II, como primitivas de uma função, integral definida, cálculo

de áreas, algumas aplicações de integral e mudança de variáveis na integral, conteúdos essenciais para os licenciandos em Física.

A segunda condiz com os processos sociointeracionistas presentes na MEAAMaRP, de acordo com Leal Junior e Onuchic (2015), na qual os alunos compartilham informações e estratégias de resolução, utilizam conhecimentos prévios e desenvolvem outros aspectos, tais como fazer argumentos matemáticos pertinentes, falar em público, melhorar sua autoconfiança, desenvolver uma linha de raciocínio para obter soluções, além daqueles que serão percebidos pelo professor pesquisador ao longo da aplicação da sequência didática.

A terceira questão geral a ser analisada refere-se à busca de uma forma de verificar a aprendizagem ou processos de aprendizagem dos alunos após serem efetuadas as devidas discussões, antes da formalização dos conteúdos. Quais os efeitos das etapas 6, 7 e 8 do roteiro de Onuchic e Allevato (2011) na construção de conhecimentos? Quais efeitos podem ser verificados após o compartilhamento e discussões das soluções dos alunos, antes da etapa de formalização dos conteúdos?

A quarta diz respeito, ainda, ao protagonismo do aluno em sala de aula, contribuindo ativamente com o professor durante as discussões na etapa de formalização do conteúdo do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), resgatando conhecimentos prévios, construindo novos conhecimentos e tornando sua aprendizagem mais significativa.

Por fim, inserimos uma questão correspondente à capacidade de generalização de resultados pelos alunos. Os alunos conseguiram chegar de maneira natural às generalizações? Ou foi necessária alguma intervenção do pesquisador para que as mesmas ocorressem? Entende-se que a generalização natural ocorre quando dados alguns problemas com valores numéricos, os alunos possuem a capacidade de fazer generalizações para situações quaisquer.

Definidas algumas questões gerais a serem analisadas durante esta pesquisa, ficam as questões específicas a serem estipuladas ao longo de cada ficha de atividades proposta aos alunos participantes. As discussões sobre essas questões serão feitas no momento de detalhar cada um dos encontros da sequência didática. A seguir, será apresentada a Avaliação Diagnóstica Inicial (ADI), primeiro instrumento de coleta de dados desta pesquisa de doutorado.

#### 4.1 Avaliação Diagnóstica Inicial (ADI)

O foco da nossa coleta de dados será voltado a alguns conceitos de Integral, conteúdo referente ao CDI II. Essa disciplina possui como elemento central o tema Integral e é ofertada no terceiro período do curso de Licenciatura em Física do IFSP, tendo CDI I como pré-requisito, depois de os alunos já terem cursado disciplinas de Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria Analítica e Vetores, disciplinas da área de Educação e disciplinas específicas da área de Física, como indicado no PPC do curso de Física (IFSP, 2023).

Inicialmente a ADI é importante para verificar quais conhecimentos prévios possuem os participantes da pesquisa. Ela faz-se necessária como ponto de partida, um instrumento balizador para o professor pesquisador e, somado a isso, fornece informações importantes para o prosseguimento de sua investigação. Em virtude do histórico de disciplinas cursadas pelos participantes, anteriormente ao CDI II, espera-se que tenham noções sobre Funções (de modo geral) e Derivadas (definição, propriedades e regras de derivação), podendo haver alguma ideia superficial sobre Integral, pois esse conceito aparece em algumas disciplinas específicas da área de Física, lecionadas no terceiro período do curso.

Além disso, um segundo aspecto a ser considerado relativo à ADI, é a possibilidade de fornecer ao pesquisador mais um elemento para realizar a verificação dos processos de aprendizagem dos participantes da pesquisa, ao confrontar suas informações ao final da coleta de dados desta investigação, embora essa análise não seja pertinente a pesquisas envolvendo a ED. A ADI está contida no Quadro 04 a seguir e se encontra disponibilizada no APÊNDICE 03 desta tese de doutorado.

#### Quadro 4 - ADI.

##### AValiação Diagnóstica Inicial

- 1- Dado  $x \in \mathbb{R}_+$  encontre uma primitiva da função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ .
- 2- Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = \cos x$ , com  $x \in \mathbb{R}$ . Qual a área da região formada no primeiro quadrante, abaixo do gráfico de  $f(x)$ , limitada pelas retas  $x = 0$  e  $x = \frac{\pi}{2}$ ?
- 3- Pode-se representar uma região do plano utilizando notação de conjuntos. Qual é a área da região descrita por  $A = \{x \in \frac{\mathbb{R}}{-1} \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq x^3\}$ ?
- 4- Na disciplina de Cálculo 1 você aprendeu a derivada da função composta, geralmente chamada de Regra da Cadeia. Existe um resultado semelhante à regra da cadeia para derivadas,

que auxilia no cálculo de integrais. Com base nessas informações, encontre o valor de

$$\int_0^1 2(1+x^2)^9 x dx.$$

5- Dado  $r \in \mathbb{R}, r > 0$ , encontre a área do círculo de raio  $r$ , usando resultados de Cálculo Diferencial Integral. Você sabe outra maneira de obter a área do círculo?

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre a ADI: Os problemas que compõem essa ADI nos trazem a possibilidade de indicar alguns conhecimentos prévios sobre Funções, Derivadas e Integrais, que possuem os alunos participantes da pesquisa. Esta avaliação será utilizada, também, como instrumento de validação (ou refutação) das hipóteses levantadas na segunda etapa desta ED. Ressaltamos que os problemas que compõem esta avaliação serão retomados durante as sessões didáticas, para os participantes terem a chance de trabalhá-los novamente. O pesquisador tem a intenção de fazer breves comentários sobre as respostas dos participantes, após o término da aplicação ADI, com o objetivo de tranquilizá-los sobre o seu desempenho e esclarecer a importância dessa etapa para dar início a este trabalho de pesquisa.

Como ponto de partida, a ADI contribuirá para o pesquisador diagnosticar um pouco mais sobre os conhecimentos prévios que os participantes da pesquisa possuem e, assim, fazer possíveis *correções de rota* durante o desenvolvimento e aplicação da sequência didática. Essas correções de rota não serão informadas aos participantes e referem-se a conceitos que o pesquisador identificar que os alunos possuem erros conceituais ou maiores dificuldades, abordando-os ao longo da sequência didática e da etapa de formalização dos conteúdos. Os detalhes da aplicação da sequência didática e os demais instrumentos de coleta de dados serão detalhados em momento oportuno, quando descreveremos o primeiro encontro com os alunos participantes da pesquisa, no próximo capítulo desta tese, denominado de *Experimentação*.

A seguir será apresentada detalhadamente a construção da sequência didática a ser aplicada, indicando as estratégias de solução esperadas pelo professor pesquisador, os objetivos pretendidos com cada problema escolhido e as questões específicas a serem analisadas em cada ficha de atividades.

## 4.2 A Sequência Didática

Com base nos dados levantados na etapa de Análises Preliminares e juntamente com ajustes identificados mediante a ADI, foi aplicada a sequência didática desenvolvida para esta investigação, cujo foco abordou conceitos sobre Integral.

Como afirma Pais (2019, p. 100), “As sessões didáticas não são aulas comuns no sentido da sala de aula”, pois condizem com aulas (ou encontros, oficinas, minicursos etc.) desenvolvidas especificamente para a pesquisa e o professor pesquisador deve “ficar atento ao maior número possível de informações que devem contribuir no desvelamento do fenômeno investigado.”

Nesse sentido, desenvolveu-se uma sequência didática, ancorada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), aplicada ao longo de sete encontros, sendo o primeiro encontro voltado à aplicação da ADI e o último encontro voltado à ADF e o Questionário de pesquisa. Esta sequência foi desenvolvida a partir de cinco fichas de atividades, elaboradas pelo professor pesquisador, com os seguintes temas: 1. *Primitiva de uma função*, 2. *Integral definida*, 3. *Aplicações da integral*, 4. *Cálculo de áreas* e 5. *Mudança de variáveis na integral*.

Cada uma dessas fichas de atividades será exposta detalhadamente, contemplando as questões específicas que serão avaliadas, as estratégias de solução para cada problema, tais como esperadas pelo professor pesquisador, bem como as motivações que nos levaram a inserir cada questão na sequência didática. Em cada ficha de atividades foi inserido um texto inicial para situar os alunos a respeito das atividades que seriam realizadas, com mediação do pesquisador durante todo processo de ensino e aprendizagem. Ao final de cada ficha de atividades, foi proposto um problema complementar, facultativo, para os alunos que finalizassem suas atividades e tivessem interesse em solucionar mais um problema, um pouco mais elaborado, entretanto, condizente com o assunto abordado na ficha de atividades.

Os problemas das fichas de atividades foram planejados visando o desenvolvimento da autonomia dos alunos, criação de espaços de diálogo e reflexão dos alunos entre si e dos alunos com o professor pesquisador, levando em consideração a experiência profissional do docente, a ementa da disciplina de CDI II, conforme o PPC do curso de Licenciatura em Física (IFSP, 2023), e a busca de problemas que tornem o aprendizado mais significativo para os alunos participantes da pesquisa.

Além disso, os problemas selecionados para compor as fichas de atividades são coerentes com a definição de problema de Ponte (1992, p. 5), adotada neste trabalho, e corroboram com as discussões presentes na análise de livros didáticos de CDI, apresentada na seção 3.2 desta tese. Um problema, recordando a definição deste autor, “consiste numa tarefa para a qual o aluno não dispõe de um método imediato de resolução, mas em cuja solução se empenha activamente”. Ademais, nossa análise de livros didáticos de CDI mostrou a carência de materiais que utilizam a MEAAMaRP como metodologia de ensino para disciplinas de CDI, especialmente conteúdos sobre integral, foco desta tese.

Diante do exposto, escolhemos, nos livros didáticos de CDI e conforme a experiência profissional do autor dessa tese, tarefas para compor nossas fichas de atividades de maneira que fossem capazes de contribuir para o desenvolvimento dos processos de ensino e aprendizagem de conceitos de Integral. Apoiados na definição de problema trazido por Ponte (1992), selecionou-se tarefas as quais os alunos **não** tenham uma solução rápida, imediata, com mera aplicação de fórmulas, que exijam esforços cognitivos e elaboração de estratégias de resolução. Buscamos, portanto, inserir nas fichas de atividades que compõem a sequência didática, tarefas que podemos classificar como *problemas*, conforme a definição do autor supracitado. Ademais, as fichas de atividades foram trabalhadas durante a aplicação desta pesquisa com seus participantes, seguindo os pressupostos teórico-metodológicos da MEAAMaRP, como será apresentado em momento oportuno, ao longo do capítulo 5 desta tese de doutorado.

No que se refere à aplicação da pesquisa, vale destacar que o convite aos participantes e a coleta de dados da pesquisa foi efetuada, somente, após a aprovação da mesma pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) e a sequência didática está disponibilizada, na íntegra, no APÊNDICE 04 desta tese.

#### **4.2.1 Ficha de Atividades 1: Antiderivação ou Primitivas de uma Função**

Os problemas elencados na Ficha de Atividades 1 resgatam conhecimentos prévios da disciplina de CDI I, abarcando conteúdos como derivadas de funções polinomiais, a equação da reta tangente ao gráfico de uma função e taxas de variação, além de introduzir a ideia de Primitiva de uma função, conceito inicial na disciplina de CDI II.

No decorrer de cada problema inserimos algumas respostas esperadas pelo professor pesquisador, identificadas pela letra E, acompanhada por um índice, que serão confrontadas com os registros produzidos pelos participantes da pesquisa, na quarta fase da ED. Para essa primeira ficha de atividades, as questões específicas que determinamos para análise são:

1. os participantes da pesquisa reconhecem a operação de integração?
2. os conhecimentos prévios sobre derivação de funções polinomiais são suficientes para construção do conceito de primitiva dessas funções?

Os problemas relacionados à Ficha de Atividades 1 estão distribuídos entre o quadro 5 e o quadro 9, a seguir. Ao final de cada quadro, encontram-se os comentários do professor pesquisador sobre cada problema.

**Quadro 5 - Problema 1.1 da Ficha de Atividades 1.**

**Ficha de Atividades 1**

1.1. Considere uma partícula cuja velocidade  $v$ , no instante  $t$  segundos é dada pela função  $v$  definida por  $v(t) = 2t + 5$ , com  $v(t)$  em m/s.

a) Qual é a aceleração dessa partícula?

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Derivando  $v(t)$ , em relação à  $t$ , encontra-se  $a(t) = 2 \text{ m/s}^2$ .

E<sub>2</sub>: Pela função de  $v(t)$  o movimento é uniformemente variado, pois  $v(t) = v_0 + at$ , com  $a(t)$  constante, assim aceleração = aceleração média, logo,  $a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ .

E<sub>3</sub>: Esboçar o gráfico de  $v(t)$  e encontrar  $a(t)$  via coeficiente angular da reta (tangente ou semelhança de triângulos).

b) O que podemos afirmar sobre a posição  $s(t)$  dessa partícula?

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Podemos obter informações usando a função horário do espaço  $s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ , pois temos  $v(t)$  e o movimento da partícula é uniformemente variado.

E<sub>2</sub>: É possível fazer a operação inversa da derivada para encontrar uma função de grau 2, isto é,  $\int v(t)dt = \int 2t + 5 dt$ , pois  $v(t)$  é de grau 1.

E<sub>3</sub>: Poderia utilizar um gráfico de velocidade  $\times$  tempo.

c) Podemos afirmar que  $s(t)$  é única? Justifique sua resposta.

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Após fazer  $\int v(t)dt$ , espera-se que os alunos percebam a ausência de um termo na equação de  $s(t)$ , chamando esse termo de  $s_0$  ou  $k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , justificando que  $s(t)$  não é única para situação apresentada.

E<sub>2</sub>: Não será usado o *GeoGebra* ou qualquer software de geometria, entretanto, caso algum aluno o tenha disponível em seu celular, pode ocorrer de apresentar uma família de funções quadráticas, alterando o ponto de interseção com o eixo vertical.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o problema 1.1: O objetivo desse problema é fazer o aluno observar a relação existente entre derivada e antiderivada de uma função. Em (a) o aluno pode associar a aceleração da partícula como a derivada da velocidade, em função do tempo. No item (b) o aluno precisa encontrar a equação de  $s(t)$ , fazendo uma operação inversa à derivação. Em (c), o aluno precisa notar que existem infinitas soluções, devido ao acréscimo da constante real  $k$  (ou o termo  $s_0$ ).

**Quadro 6 - Problema 1.2 da Ficha de Atividades 1.**

1.2- Considere uma função polinomial, sabendo que a inclinação da reta tangente no ponto  $x_0$  é dada por  $\frac{df}{dx}(x_0) = 3(x_0)^2 - 2$  e  $f(0) = 1$ . A partir dessas informações, encontre a  $f(x)$ .

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que o aluno busque uma função (ou família de funções) cuja derivada seja  $\frac{df}{dx}$ , fazendo  $\int \frac{df}{dx} = \int 3(x_0)^2 - 2 dx$ . Completaria sua resposta com informações dadas no enunciado do problema.

E<sub>2</sub>: Por tentativas, o aluno pode escrever um polinômio genérico de grau 3, com coeficientes reais  $a, b, c$  e  $d$ , do tipo  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , utilizar as informações dadas no problema e atribuir valores para obter os coeficientes da função desejada.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o problema 1.2: Este problema, geralmente, é motivador para desenvolver a ideia da derivada de uma função, assunto abordado em CDI I. É dada uma

função e um ponto pertencente a ela e pede-se a equação da reta tangente à função, passando por esse ponto. Aqui o problema é proposto de forma diferente, pois é dada a inclinação da reta tangente a uma função, passando por um determinado ponto e é pedido que se apresente a função. Assim, novamente, o aluno observará a necessidade de realizar uma operação inversa à derivação.

**Quadro 7 - Problema 1.3 da Ficha de Atividades 1.**

1.3. De acordo com sua percepção em relação às questões anteriores, dada  $f(x)$ , é possível encontrar a  $F(x)$ , tal que  $F'(x) = f(x) + k$ , com  $k$  real. A função  $F$  é chamada de antiderivada de  $f$ . Também podemos denominar  $F$  de primitiva de  $f$ . Essas nomenclaturas são equivalentes, pois, dada  $f(x)$ , buscamos  $F(x)$ , tal que  $F'(x) = f(x) + k$ , com  $k$  real.

a) Qual é a derivada de  $f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ , com  $n$  real não nulo?

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que o aluno efetue a derivada deste polinômio sem dificuldades, pois é um conteúdo elementar de CDI I, disciplina cursada no semestre anterior (2º período do curso).

Assim,  $\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = x^n$ .

E<sub>2</sub>: O aluno pode fazer tentativas, atribuindo valores para o expoente e o denominador, ou seja, definir um valor para  $n$ , a fim de perceber um padrão e refletir sobre sua resposta. Como exemplo, poderia pensar  $x^3$  e sua derivada  $3x^2$ .

b) Qual é a antiderivada (ou primitiva) de  $f(x) = x^n$ , com  $n$  real?

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que o aluno encontre uma função, cuja derivada seja  $f(x) = x^n$ , por tentativas.

E<sub>2</sub>: O aluno poderá encontrar a solução utilizando o resultado obtido no item (a), visto que realizou a operação,  $\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = x^n$ .

c) Você saberia encontrar uma forma de generalizar esse resultado, ou seja, a integral de uma função polinomial?

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que o aluno tenha conhecimentos prévios sobre funções polinomiais e suas derivadas para conseguir concretizar o raciocínio exigido nesta questão. Sendo assim, dada uma função polinomial qualquer, de grau  $n \in \mathbb{N}$ , da forma  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , com coeficientes reais, ao efetuar  $\int f(x) dx$  obterá a função almejada.

E<sub>2</sub>: Pode ocorrer do aluno exibir algum polinômio em particular e apresentar sua derivada, concluindo que isto representa a generalização pedida no problema. Será necessário verificar as respostas dos estudantes e discutir suas soluções.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o problema 1.3: Inicia-se um processo um pouco mais formal sobre a relação entre derivada e primitiva, com uma função polinomial de grau  $n$ . Com esse resultado, é possível encontrar a Primitiva de várias funções do tipo polinomial. Prevemos que os alunos tenham dificuldades com o item c) deste problema, que contempla o desenvolvimento da capacidade de generalização.

**Quadro 8** - Problema 1.4 da Ficha de Atividades 1.

1.4 O volume de água em um tanque é  $V \text{ m}^3$  quando a profundidade é  $h$  metros. Se a taxa de variação de  $V$  em relação à  $h$  for dada por  $\frac{dV}{dh} = \pi(2h + 3)^2$ , encontre o volume de água no tanque no instante que a profundidade for 3 metros. (Leithold, v.1, p. 303, ex. 68- adaptado).

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: É possível que o aluno substitua  $h = 3$  na expressão da taxa de variação e afirme (erroneamente) que o valor obtido seja o volume desejado.

E<sub>2</sub>: Ao desenvolver o termo  $\frac{dV}{dh} = \pi(2h + 3)^2 = 4\pi h^2 + 12\pi h + 9\pi$ , o aluno encontrará um polinômio de grau 2 e, utilizando a questão anterior, 1.3, como auxiliar, poderá obter uma solução para o problema.

E<sub>3</sub>: O aluno poderá buscar, por tentativas, uma função de grau 3 cuja derivada seja dada por  $\frac{dV}{dh}$ , encontrando o volume desejado. Poderia, por exemplo, iniciar por uma função com coeficientes reais  $a, b, c$  e  $d$ , do tipo  $f(x) = \pi(ax^3 + bx^2 + cx + d)$ .

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o problema 1.4: Este é um problema frequente sobre o conteúdo de taxas de variação, mas a abordagem foi feita de modo diferente do que ocorre na disciplina de CDI I, pois busca-se a relação entre a derivada e a antiderivada da função. Apresentou-se a taxa de variação e pediu o volume do tanque a uma determinada altura.

Pode ser também uma situação para iniciar discussões sobre mudança de variáveis na integral, mas é possível solucionar com os conhecimentos de derivada e regra da cadeia para derivadas.

**Quadro 9 - Problema Complementar da Ficha de Atividades 1.**

**Problema Complementar**

Dado  $x \in \mathbb{R}$  com  $x > \frac{-1}{2}$ , encontre uma primitiva da função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{2}{2x+1}$ .

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que o aluno reconheça derivadas do tipo  $\ln(x)$  para encontrar sua resposta, visto que,  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ . Fazendo as adaptações necessárias, obteria sua solução.

E<sub>2</sub>: O aluno pode resolver a questão por tentativas, estimando possíveis soluções para uma primitiva de  $f(x)$ . Para isso seria importante reconhecer quais funções possuem derivadas da forma  $f(x) = \frac{a}{bx+c}$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  reais.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o Problema Complementar: Caso algum grupo tenha terminado a resolução dos problemas anteriores, será sugerido que solucione o problema complementar. A questão resgata a noção de Primitivas de uma função e possui elementos sobre mudança de variáveis na integral, próximo tema a ser trabalhado.

Com a Ficha de Atividades 1, pretende-se verificar alguns conhecimentos prévios específicos dos participantes da pesquisa, como derivadas de funções e suas propriedades, taxas de variação e o traçado da reta tangente ao gráfico de uma função. Além disso, relacionar as Primitivas e derivadas de uma função, adentrando um conteúdo inicial da disciplina de CDI II.

#### **4.2.2 Ficha de Atividades 2: Integral definida (Integral de Riemann)**

Nesta ficha de atividades foram apresentados dois problemas, adaptados de Menoncini (2018, p. 188-190), para os participantes da pesquisa efetuarem a construção do conceito de integral definida, mediante alguns passos indicados ao longo das questões. Encontram-se presentes os conceitos de gráfico de funções, intervalo real, partição de um intervalo, traçado de retas e retângulos, cálculo de áreas, somatórios e limites. A escolha desses problemas é em razão à diversidade de conceitos e discussões que eles poderão

nos proporcionar, no momento de sua solução e durante etapas propícias. Pretende-se que seja analisada esta questão específica:

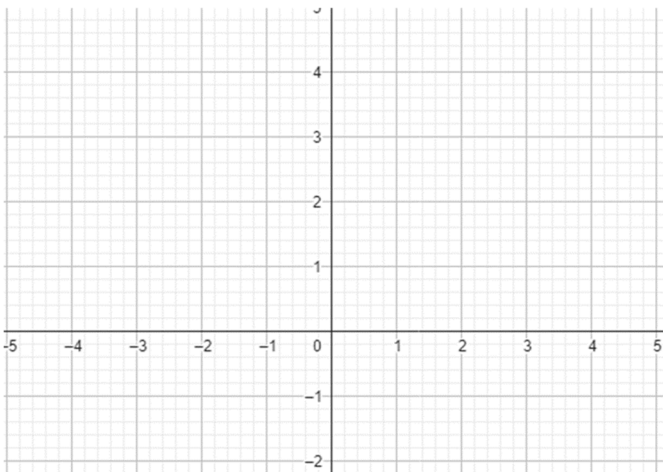
1. efetuar a construção do conceito da Integral definida, mediante a utilização de um roteiro para sua obtenção, contribui para sua aprendizagem?

Os problemas relacionados à Ficha de Atividades 2 encontram-se entre o Quadro 10 até o Quadro 16, a seguir. Ao final de cada quadro, encontram-se os comentários do professor pesquisador sobre o respectivo problema.

**Quadro 10** - Problema 2.1 da Ficha de Atividades 2.

**Ficha de Atividades 2**

2.1 Considere a função  $f(x) = x^2 - 1$ , definida em  $[-2,2]$ . Esboce a curva de  $f(x)$  no intervalo dado e responda às demais perguntas com base neste esboço. (Adaptado de Menoncini, 2018, p. 188 - 190).



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Disponibilizamos um plano cartesiano (quadriculado) elaborado no GeoGebra para os alunos participantes fazerem um esboço do gráfico da função  $f$  definida por  $f(x) = x^2 - 1$  e efetuarem os passos sugeridos no problema.

**Quadro 11** - Problema 2.1, itens de a) até c), da Ficha de Atividades 2.

a) Observe a curva no intervalo  $[1,2]$ . Divida esse intervalo em 4 subintervalos de mesma amplitude  $\Delta x$  (mesmo tamanho) e identifique as abscissas e  $x_4 = 2$ . Responda:

a<sub>1</sub>) Qual é a amplitude  $\Delta x$  de cada subintervalo? Qual o valor de  $x_1, x_2$  e  $x_3$ ?

- a<sub>2</sub>) Se o intervalo  $[1,2]$  fosse dividido em 10 subintervalos, qual a amplitude de cada subintervalo? E se fossem 50 subintervalos?
- a<sub>3</sub>) Seja um intervalo qualquer  $[a, b]$  fosse dividido em  $n$  subintervalos. Escreva uma fórmula para encontrar a amplitude  $\Delta x$  dos subintervalos, levando em consideração o comprimento do intervalo e o número de subintervalos  $n$ .
- b) Trace retas verticais nas abscissas  $x_0, x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  até a intersecção com a curva de  $f(x)$  e forme 4 retângulos  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  cujas extremidades direitas coincidam com as retas verticais em  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  e apresente uma resposta para as questões abaixo:
- b<sub>1</sub>) A altura dos retângulos é um valor positivo ou negativo?
- b<sub>2</sub>) Escreva algebricamente a expressão que fornece as alturas dos retângulos. Calcule o valor de cada altura.
- b<sub>3</sub>) Qual é o valor da base de cada retângulo?
- c) Escreva uma expressão algébrica (fórmula) para encontrar a área de cada retângulo  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  em função da amplitude  $\Delta x$  e das alturas  $f(x_1), \dots, f(x_4)$  e em seguida calcule suas áreas.

#### Estratégias esperadas de solução.

E<sub>1</sub>: Espera-se que os alunos consigam desenvolver todas as etapas elencadas nos itens desse problema, pois referem-se a conhecimentos prévios de Geometria plana e linguagem presente na disciplina de CDI I.

E<sub>2</sub>: Temos a expectativa que os participantes obtenham uma amplitude  $\Delta x = 1$ , para o intervalo  $[1,2]$ , e além disso, representem a  $n$ -ésima parte do intervalo  $[a, b]$  por  $\frac{b-a}{n}$ .

Esperamos que os alunos encontrem as alturas dos retângulos indicados no enunciado como o valor da função, ou seja, o retângulo  $R_1$  possui altura  $f(x_1)$ . Ao final das etapas descritas, os alunos encontrarão que a área de cada retângulo será obtinha por meio do produto entre a amplitude do intervalo (sua base) pelo valor da função (sua altura).

E<sub>3</sub>: Os participantes poderão apresentar, diretamente, o valor da Integral, sem efetuar os passos da construção pedidos ao longo do problema, entretanto, o objetivo da questão é que o participante desenvolva cada uma das etapas e faça a construção geométrica.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

#### Quadro 12 - Problema 2.1, itens de (d) até (f), da Ficha de Atividades 2.

- d) Seja  $A$  a área abaixo da curva de  $f(x)$  e acima do eixo  $x$ , definida no intervalo  $[1,2]$ . Estime o valor da área  $A$  a partir da soma das áreas dos retângulos  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  (arredonde o valor para duas casas decimais). Reescreva essa soma usando o símbolo do somatório  $\Sigma$ , em relação à amplitude  $\Delta x$  e as alturas  $f(x_1), \dots, f(x_4)$ .

**Estratégias esperadas de solução.**

$E_1$ : Espera-se que o aluno encontre a área desejada seguindo as instruções apresentadas no enunciado. De maneira geral, a área almejada será obtida pela soma das áreas de todos os retângulos formados, sendo assim, representa-se a soma das áreas por  $\sum_{i=1}^n \Delta x_i \cdot f(x_i)$ .

$E_2$ : O aluno poderá ter algumas dificuldades em utilizar o símbolo de somatório para concluir a questão.

e) Observe o valor da estimativa da área  $A$  feita a partir da soma das áreas dos 4 retângulos e responda: O valor da área  $A$  é um valor maior, menor ou igual ao valor estimado que você encontrou? Justifique.

f) O que acontecerá se aumentar o número de retângulos? E quando  $\Delta x$  tender a zero? Justifique sua resposta.

**Estratégias esperadas de solução.**

$E_1$ : Espera-se que o aluno identifique o que ocorrerá com o valor da área da região ao fazer a amplitude dos intervalos ficarem cada vez menores.

$E_2$ : O aluno poderá observar que ao aumentar o número de retângulos, a área da região *retangular* terá um valor mais próximo da área da região.

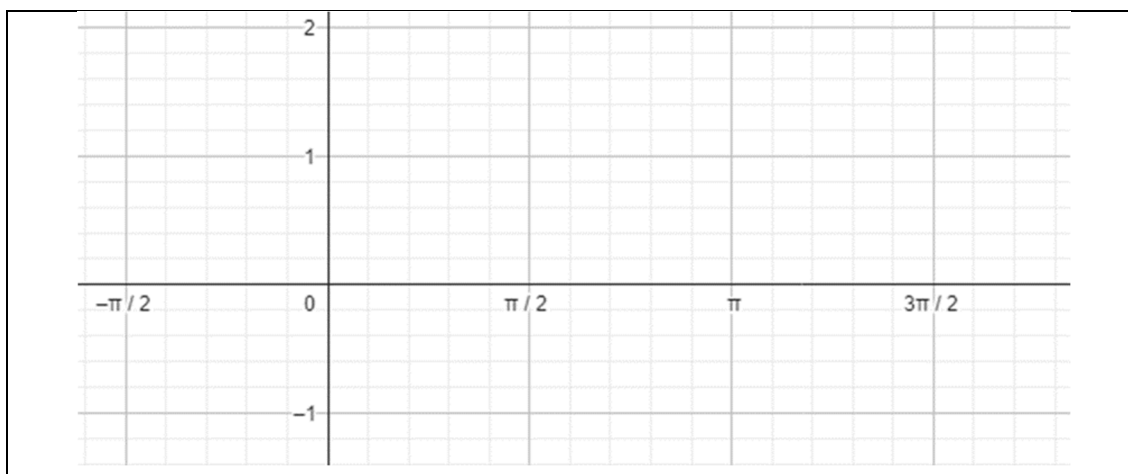
$E_3$ : Ao fazer  $\Delta x$  tender a zero, esperamos que o aluno perceba que o número de retângulos fique cada vez maior e a área obtida se aproxima do valor real da área da região especificada no enunciado do problema.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o problema 2.1: De maneira geral, este problema tem objetivo de definir a soma de Riemann e, como consequência, a Integral de Riemann, com instruções apresentadas sequencialmente, com os alunos desenvolvendo e analisando os passos que estão sendo sugeridos. O item (f) é uma situação para iniciar as discussões sobre integral definida e cálculo de áreas, resultado que surge imediatamente após essa construção da integral definida.

**Quadro 13** - Problema 2.2 da Ficha de Atividades 2.

2.2 Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = \text{sen}(x)$  definida no intervalo  $[0, \pi]$ . Esboce a curva de  $f(x)$  no intervalo dado e responda as demais perguntas com base neste esboço, seguindo o roteiro da questão anterior.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Disponibilizamos um plano cartesiano (quadriculado) e com marcações em radianos, elaborado no GeoGebra, para os alunos participantes fazerem um esboço do gráfico da função  $f$  definida por  $f(x) = \text{sen}(x)$  e efetuarem os passos sugeridos no problema.

**Quadro 14** - Problema 2.2, itens de (a) até (d), da Ficha de Atividades 2.

- a) Divida o intervalo  $[0, \pi]$  em  $n$  subintervalos de mesma amplitude. Escreva uma fórmula para encontrar a amplitude  $\Delta x$  de cada subintervalo, levando em consideração o comprimento do intervalo e o número de subintervalos.
- b) Trace retas verticais nas abscissas  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  até a intersecção com a curva  $f(x)$  e forme  $n$  retângulos  $R_1, R_2, \dots, R_n$  cujas extremidades direitas coincidam com as retas verticais em  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ . Escreva algebricamente a expressão que fornece as alturas dos retângulos.
- c) Escreva uma expressão algébrica (fórmula) para encontrar a área de cada retângulo, em função da amplitude e da altura.
- d) Qual é a área da região compreendida entre o intervalo  $[0, \pi]$  e abaixo da função  $f$  definida por  $f(x) = \text{sen}(x)$  ?

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Os passos indicados nos itens são parecidos com o problema anterior e, por conta disto, espera-se que o aluno desenvolva a amplitude dos intervalos, os retângulos e suas áreas, bem como a área total da região.

E<sub>2</sub>: É possível o aluno expressar a área utilizando a soma de Riemann, como previsto no problema anterior.

E<sub>3</sub>: Espera-se que os alunos encontrem  $\Delta x = \frac{\pi}{n}$  para amplitude de cada subintervalo e cada retângulo tenha sua área formada pelo produto da amplitude do intervalo por um valor da função, com domínio naquele intervalo.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

**Quadro 15** - Problema 2.1, item (e), da Ficha de Atividades 2.

e) O que acontece, em termos de área, caso se considerasse a função  $f$  definida por  $f(x) = \text{sen}(x)$  definida no intervalo  $[0, 2\pi]$ ? Qual é o valor de  $\int_0^{2\pi} \text{sen}(x) dx$ ? Justifique suas respostas.

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: O aluno poderá encontrar incorretamente a medida zero para a região do problema, pois uma parte do gráfico apresenta-se abaixo do eixo horizontal (com altura *negativa*).

E<sub>2</sub>: Espera-se que o aluno identifique duas regiões simétricas e dobre o valor da área encontrada no item (d), ou seja,  $\text{área} = \int_0^{2\pi} \text{sen}(x) dx = 2 \int_0^{\pi} \text{sen}(x) dx$ .

E<sub>3</sub>: É possível o aluno utilizar o valor da área em módulo para *tornar a altura positiva* na região onde a função assume valores negativos e depois somar os resultados obtidos. Assim,  $\text{área} = \int_0^{2\pi} \text{sen}(x) dx = \int_0^{\pi} \text{sen}(x) dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}(x) dx \right|$ .

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o problema 2.2: Refere-se a uma situação parecida com a anterior, utilizando uma função trigonométrica e generalizando alguns passos da construção da integral definida. O item (e) aponta algumas diferenças em relação ao cálculo de áreas e o cálculo de integrais fora desse contexto, inserido propositalmente para causar discussões com os alunos. É possível apresentar um resultado sobre paridade<sup>24</sup> de funções e integração.

**Quadro 16** - Problema Complementar da Ficha de Atividades 2.

**Problema Complementar**

Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = \cos x$ , com  $x \in \mathbb{R}$ . Qual a área da região formada no primeiro quadrante, abaixo do gráfico de  $f(x)$ , limitada pelas retas  $x = 0$  e  $x = \frac{\pi}{2}$ ?

**Estratégias esperadas de solução.**

<sup>24</sup> A integral de uma função ímpar, num intervalo simétrico é igual a zero (Guidorizzi, 2001, p. 322).

E<sub>1</sub>: O aluno poderá traçar o gráfico da função trigonométrica, dentro do intervalo definido e fazer a integral para obter sua resposta, ou seja, encontrar a área através da  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$ .

E<sub>2</sub>: É possível seguir os passos dos problemas anteriores, escrever a Soma de Riemann e calcular o valor da área da região.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o Problema Complementar: Caso algum grupo tenha terminado a resolução dos problemas anteriores, será sugerido que solucione o problema complementar, no qual é pedido para o aluno encontrar a área de uma região limitada, colocando em prática os passos sugeridos anteriormente. Essa questão estava presente na ADI e foi incluída neste encontro para os alunos terem mais uma oportunidade de resolvê-la, agora munidos de mais ferramentas matemáticas.

Ao final da Ficha de Atividades 2, pretendemos formalizar e trazer significado, para os alunos participantes da pesquisa, sobre o conceito de Integral de uma função definida em um intervalo real. As etapas de construção desse conceito utilizam diversos conteúdos conhecidos pelos alunos e podem auxiliar na assimilação do conceito de Integral. Ademais, busca-se uma percepção, por parte dos alunos, de que a Integral definida corresponde à área de uma região definida abaixo do gráfico da função.

#### **4.2.3 Ficha de Atividades 3: Aplicações iniciais da Integral definida**

Nesta ficha de atividades, foram apresentados problemas voltados a algumas aplicações de Integral definida, dentre elas, as relações entre as grandezas físicas espaço, velocidade e aceleração, conceitos comuns para licenciandos em Física. Resgatou-se também a ideia de Primitiva de uma função e a escolha desses problemas justifica-se pelas possibilidades de discussões que eles poderão nos proporcionar nos momentos oportunos. As questões específicas a serem analisadas são:

1. Após a formalização dos conceitos de Primitiva de uma função e Integral definida, os participantes conseguem aplicá-los em outros problemas do próprio CDI?
2. Depois da formalização dos conceitos de primitiva de uma função e integral definida, os participantes conseguem aplicá-los em problemas da Física, com uma abordagem interdisciplinar?

Os problemas relacionados à Ficha de Atividades 3 encontram-se distribuídos entre o Quadro 17 até o Quadro 21, a seguir. Ao final de cada quadro, foram dispostos os comentários do professor pesquisador sobre o respectivo problema.

**Quadro 17** - Problema 3.1 da Ficha de Atividades 3.

**Ficha de Atividades 3**

3.1- Após calcular  $\int_1^2 x^2 - 1 dx$  você obterá como resultado um número real. Explique o significado desse resultado numérico, justificando sua resposta.

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que o aluno resolva a integral diretamente e interprete o resultado com argumentos sobre a área de uma região ou, além disso, relacione com algum outro conceito da Física, como o trabalho de uma força.

E<sub>2</sub>: É possível o aluno refazer os passos da construção da área da região limitada pela função definida por  $f(x) = x^2 - 1$  e indicar que o resultado obtido representa o valor da área dessa região em relação ao intervalo de integração.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o problema 3.1: Este problema pede para o aluno calcular a integral definida, diretamente, mas fazendo uma relação entre este e a primeira atividade do encontro anterior, dando a oportunidade ao aluno interpretar e compreender o significado do resultado encontrado. Estendendo um pouco mais a discussão, pode-se obter outras interpretações para o problema, conforme a função do integrando for apresentada no enunciado. Se a função corresponder à velocidade de uma partícula, o valor da integral será o espaço percorrido. Se a função for correspondente à uma força, a integral corresponde ao trabalho dessa força. O problema foi inserido para levantar estas discussões com os alunos, mesmo que não tenha sido explicitado no enunciado. Com isso, esperava-se que os alunos fizessem essas relações, visto que se tratam de conceitos abordados em disciplinas no início do curso de Licenciatura em Física.

**Quadro 18** - Problema 3.2 da Ficha de Atividades 3.

3.2 - Dada uma função  $f$ , com primitiva  $F$  e um intervalo real  $[a, b]$ , justifique a afirmação: Podemos omitir a constante real  $k$  ao calcular  $\int_a^b f(x) dx$ . (Leithold, v.1, p. 303, ex. 68-adaptado).

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que o aluno relacione a primitiva  $F(x)$  com a função  $f(x)$  e conclua corretamente que a constante  $k$  pode ser omitida, utilizando argumentos algébricos. Como  $[F(x)]' = f(x)$  e considerando  $k \in R$ , ao efetuar  $[F(x) + k]'$  obtém-se  $[F(x)]' + [k]'$  resultando em  $[F(x)]' + 0 = f(x)$ .

E<sub>2</sub>: O aluno poderá utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo para justificar a omissão da constante real, fazendo  $\int_a^b f(x)dx = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$ .

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o problema 3.2: A questão ilustra um resultado importante sobre integrais definidas, justificando o motivo de omitir a constante real após a integração. Muitos alunos se confundem em relação à constante de integração.

**Quadro 19** - Problema 3.3 da Ficha de Atividades 3.

3.3- Quando tratamos sobre o movimento de um corpo (ou uma partícula), podemos falar em deslocamento e espaço percorrido. Responda as questões a seguir:

a) Como você explicaria a diferença entre esses conceitos físicos?

**Estratégias esperadas de solução**

E<sub>1</sub>: Espera-se que os participantes apresentem argumentos sobre as definições físicas de deslocamento e espaço percorrido. Os estudantes poderão utilizar seus materiais para pesquisar.

b) Considere uma partícula deslocando-se sobre o eixo  $x$  com velocidade  $v(t) = 2t - 3$ , com  $t \geq 0$ . Esboce seu gráfico.

**Estratégias esperadas de solução**

E<sub>1</sub>: Espera-se que os alunos façam o gráfico de  $v(t) = 2t - 3$  encontrando, por exemplo, valores  $v(0) = -3$  e  $v(t) = 0$ , para orientarem o esboço do gráfico.

E<sub>2</sub>: Não será usado o *GeoGebra* ou qualquer software de geometria, entretanto, caso algum aluno o tenha disponível em seu celular, pode fazer o gráfico de  $v(t) = 2t - 3$ .

c) Qual é o deslocamento entre os instantes  $t_1 = 1s$  e  $t_2 = 3s$ ?

**Estratégias esperadas de solução**

E<sub>1</sub>: Espera-se que os alunos utilizem conceitos físicos e matemáticos para apresentar suas soluções, pois os participantes são alunos da Licenciatura em Física.

E<sub>2</sub>: Os alunos podem utilizar a integração como ferramenta para solucionar o problema, visto que o deslocamento é dado por  $\int_1^3 v(t)dt$ .

E<sub>3</sub>: Alguns alunos poderão utilizar argumentos geométricos, construindo o gráfico de velocidade por tempo para apresentar suas respostas a partir da diferença entre as áreas da região de integração.

d) Qual é o espaço percorrido pela partícula entre os instantes  $t_1 = 1s$  e  $t_2 = 3s$ ?

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que os alunos utilizem conceitos relacionados, abordados em disciplinas da Licenciatura em Física, para apresentar suas soluções.

E<sub>2</sub>: Espera-se que os alunos utilizem a integral como ferramenta para solucionar o problema, pois o espaço percorrido será  $\int_1^3 |v(t)|dt = \left| \int_1^{\frac{3}{2}} v(t)dt \right| + \int_{\frac{3}{2}}^3 v(t)dt$ .

E<sub>3</sub>: É possível construir o gráfico de velocidade por tempo e utilizar a soma das áreas como recurso para apresentar as respostas.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o problema 3.3: Discutir, numa perspectiva multidisciplinar, os conceitos de espaço percorrido e deslocamento e utilizar integração como ferramenta para abordar grandezas físicas como velocidade e espaço. É possível, também, calcular a integral utilizando área abaixo do gráfico de velocidade por tempo.

**Quadro 20** - Problema 3.4 da Ficha de Atividades 3.

3.4- Encontre o espaço percorrido, entre os instantes  $t = 0$  e  $t = \pi$  s, por uma partícula que se desloca sobre o eixo x com velocidade  $v(t) = \text{sen}(2t)$ , em m/s,  $t \geq 0$ .

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: os alunos poderão construir o gráfico de velocidade por tempo e calcular a área da região, para apresentar suas respostas.

E<sub>2</sub>: é possível integrar  $v(t)$  para obter  $s(t)$ , dado que  $s(t) = \int v(t)dt$ , e obter informações de acordo com os instantes  $t = 0$  e  $t = \pi$  s.

E<sub>3</sub>: alguns alunos poderão buscar os instantes que a partícula para e muda seu sentido de movimento, fazendo  $v(t) = 0 \Rightarrow \text{sen}(2t) = 0$ , com  $0 \leq t \leq \pi$ .

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o problema 3.4: O problema fornece uma função de velocidade de uma partícula e pede o espaço percorrido em um intervalo de tempo determinado. Entretanto, a velocidade é dada por meio de uma função trigonométrica, cujo gráfico representa uma das dificuldades levantadas na revisão de literatura. Além disso, é possível motivar discussões sobre mudança de variáveis na Integral, importante ferramenta para calcular integrais um pouco mais elaboradas, assunto de uma próxima sessão didática.

**Quadro 21** - Problema Complementar da Ficha de Atividades 3.

**Problema Complementar**

3.5- Dada uma partícula a qual sabemos sua equação horária dos espaços,  $s(t)$ , podemos obter informações sobre velocidade, aceleração e o tipo de movimento da partícula. Agora, considere uma partícula e suponha que você conhece  $a(t)$ . O que podemos afirmar em relação à  $s(t)$  e  $v(t)$ ? Como obter essas informações?

**Estratégias esperadas de solução.**

$E_1$ : Espera-se que os alunos argumentem, de acordo com seus conhecimentos prévios, a relação entre a derivada e a integral conforme com os conceitos físicos de espaço, velocidade e aceleração.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o Problema Complementar: Caso algum grupo tenha terminado a resolução dos problemas anteriores, será sugerido que solucione o problema complementar, o qual permitirá discutir os conceitos de derivação e integração como operações inversas, trazendo algumas ideias presentes em Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) para ilustrar problemas com condições iniciais (ideias bem superficiais, neste caso).

Ao final da Ficha de Atividades 3, objetivamos que os alunos participantes pudessem compreender algumas aplicações de Integral, dentre eles, aqueles atrelados com as grandezas espaço, velocidade e aceleração e a relação Matemática que possuem. Espera-se que durante a etapa de formalização dos conteúdos, os alunos contribuam com as discussões levantadas e façam conexões entre conteúdos de disciplinas específicas da área da Física com algumas aplicações de Integral.

#### 4.2.4 Ficha de Atividades 4: Cálculo de Áreas usando Integral definida

Os problemas escolhidos para composição da Ficha de Atividades 4 abordam o cálculo de áreas de regiões no plano. Utilizando a Integral como instrumento, é possível encontrar o valor da área de *regiões estranhas* ou regiões originárias da interseção do gráfico de funções. A escolha dos problemas possui decisão direta com as dificuldades dos estudantes encontradas durante a etapa anterior desta ED, durante as Análises Preliminares, tais como traçar gráficos de funções e obter as raízes de equações polinomiais. Os alunos devem, ainda, resgatar o conceito de área mediante o Cálculo Integral.

Para esta ficha de atividades, as questões específicas que determinamos para análise são:

1. a dificuldade dos alunos em esboçar gráficos de função atrapalha calcular a área de uma região usando integral?
2. a ausência de conhecimentos prévios, como solução de equações é um fator dificultador para o cálculo de áreas usando Integral?

Os problemas relacionados à Ficha de Atividades 4 encontram-se ilustrados entre o Quadro 22 e o Quadro 26. Ao final de cada quadro, foram dispostos os comentários do professor pesquisador sobre o respectivo problema.

**Quadro 22** - Problema 4.1 da Ficha de Atividades 4.

**Ficha de Atividades 4**

4.1- Calcule a área da região do plano limitada pelas retas  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$  e pelo gráfico da função  $f$  definida por  $f(x) = x^2$ .

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: O aluno traçará o gráfico da função e utilizando a integral definida,  $\int_0^2 x^2 dx$ , encontrará sua área.

E<sub>2</sub>: É provável que o aluno possa encontrar a área da região determinada por meio de aproximações por retângulos, como visto em aula anterior.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o problema 4.1: O aluno deverá colocar em prática conhecimentos prévios sobre função quadrática e Geometria Analítica para obter (visualmente) a região de integração, antes de efetuar seus cálculos. Como verificado na etapa de Análises Preliminares desta pesquisa e conforme a experiência profissional do professor pesquisador, geralmente os alunos têm muitas dificuldades em traçar gráficos de funções e encontrar a região de integração para calcular a área.

**Quadro 23** - Problema 4.2 da Ficha de Atividades 4.

4.2- Pode-se representar uma região do plano utilizando notação de conjuntos. Qual é a área da região descrita por  $A = \{x \in \frac{R}{-1} \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq x^3\}$  ?

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que o aluno trace o gráfico correspondente à região de integração para calcular sua área.

E<sub>2</sub>: Como existe simetria nas regiões acima e abaixo do eixo horizontal, os participantes poderiam usar essa condição para calcular a área através da integral, ou seja,  $\text{Área} = \int_{-1}^1 x^3 dx = 2 \int_0^1 x^3 dx$ .

E<sub>3</sub>: É possível o aluno utilizar outros recursos para resolução do problema (seremos surpreendidos?).

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o problema 4.2: O aluno precisará compreender a região de integração descrita em notação de conjuntos. É um problema para ampla discussão sobre as propriedades de integral e o traçado de gráfico de função.

**Quadro 24** - Problema 4.3 da Ficha de Atividades 4.

4.3- Considere o conjunto de pares de pontos  $(x,y)$  tais que  $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$ . Com essas informações, é possível encontrar a região do plano que satisfaz essa condição? Justifique sua resposta. É possível encontrar a área dessa região? (adaptado de Guidorizzi (2001, p. 314)).

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que o aluno encontre, primeiramente, o intervalo de integração na variável  $x$ , fazendo  $x^2 = \sqrt{x}$ . Depois, esboce os gráficos das funções  $x^2$  e  $\sqrt{x}$  para obter a região que se pretende calcular a área usando integrais, com  $\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx$ .

$E_2$ : o aluno poderá encontrar, separadamente, as áreas das regiões limitadas por  $x^2$  e  $\sqrt{x}$  e, depois, fazer a subtração dos seus valores, encontrando a área desejada.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o problema 4.3: Inicialmente, o estudante precisará compreender qual é a região de integração descrita pela desigualdade apresentada no enunciado e deve encontrar os limites de integração. Este é um problema que abordará resolução das raízes de equação de grau 4, fatoração, esboço de gráficos de função e nos permitirá boas discussões com os participantes da pesquisa.

**Quadro 25** - Problema 4.4 da Ficha de Atividades 4.

4.4- Encontre a área da região limitada por  $y^2 = 2x - 2$  e  $y = x - 5$ .

**Estratégias esperadas de solução.**

$E_1$ : Espera-se que o aluno trace os gráficos, encontre suas interseções (para obter o intervalo de integração) e conclua a resolução do problema ao encontrar a área da região, usando integral.

$E_2$ : é possível que o aluno reescreva a expressão  $y^2 = 2x - 2$  (por conta do hábito), como  $y = \pm \sqrt{2x - 2}$ , trace os gráficos das funções, encontre os pontos de interseção através da igualdade  $x - 5 = \pm \sqrt{2x - 2}$  e conclua sua resposta utilizando integral.

$E_3$ : Por  $y^2 = 2x - 2$  se tratar de uma parábola não convencional, espero que apareça alguma solução criativa para este problema, visto que o estudo da parábola consta na disciplina de Geometria Analítica e Vetores, pré-requisito para cursar CDI II.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o problema 4.4: A atividade apresenta uma parábola *deitada*, não convencional. Neste caso, o aluno poderá reescrevê-la como uma função e além disso, encontrar os limites de integração. Na disciplina de Geometria Analítica e Vetores, são abordadas as equações da reta e as cônicas, incluindo as posições da parábola. Selecionamos esse problema para resgatar alguns desses conceitos relacionados a outras disciplinas de Matemática, na grade curricular do curso de Licenciatura em Física

**Quadro 26** - Problema Complementar da Ficha de Atividades 4.

**Problema Complementar**

4.5- Qual é a área da região limitada por  $1 \leq y \leq \sqrt[4]{x}$  ?

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que o aluno questione a ausência de uma região limitada para calcular a área. Inserimos este problema para levantar discussões com os alunos e pedir que proponham condições para que fosse possível obter uma região limitada para encontrarem sua área usando integral.

E<sub>2</sub>: é possível o aluno esboçar o gráfico da função indicada por  $\sqrt[4]{x}$  e da função constante e depois, equivocadamente, fazer uma subtração.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o Problema Complementar: O aluno deverá encontrar as interseções entre as curvas para obter os limites de integração. Traçar as curvas irá auxiliá-los a analisar melhor a região em destaque. Propositamente, faltam algumas informações no enunciado da questão e a região não ficará bem definida. Selecionamos esse problema para discutir com os alunos quais condições deveriam ser inseridas no enunciado para que fosse possível resolver o problema.

Ao final da Ficha de Atividades 4, espera-se que os alunos participantes da pesquisa possam realizar a solução dos problemas propostos, contribuindo com a diminuição de suas dificuldades em traçar o gráfico de funções. Pretende-se, ainda, consolidar o conceito do cálculo de área utilizando Integral definida. Esperamos levantar boas discussões durante a plenária e as estratégias de resolução adotadas pelos participantes

#### **4.2.5 Ficha de Atividades 5: Mudanças de variáveis na Integral**

Os problemas selecionados para Ficha de Atividades 5 abordam a mudança de variáveis na Integral, conceito fundamental para o cálculo de integrais um pouco mais elaboradas, com um nível de dificuldade maior. Essa mudança de variáveis possui relação direta com a Derivada da Função Composta (ou Regra da Cadeia para derivadas), abordado na disciplina de CDI I. Foram listados alguns problemas que possibilitem que o aluno compreenda quando poderá utilizar a mudança de variáveis na Integral. Determinamos as seguintes questões específicas a serem verificadas:

1. os participantes conseguem fazer as relações necessárias entre derivadas e integrais, no sentido das mudanças de variáveis, usando funções polinomiais?

2. a ausência de conhecimentos prévios relacionados a funções trigonométricas prejudica os alunos a realizar troca de variáveis desse tipo de função?

Os problemas relacionados à Ficha de Atividades 5 encontram-se exibidos entre o Quadro 27 e o Quadro 33. Ao final de cada quadro, foram dispostos os comentários do professor pesquisador sobre o respectivo problema.

**Quadro 27** - Problema 5.1, item a), da Ficha de Atividades 5.

**Ficha de Atividades 5**

5.1- Observe a integral a seguir e responda:

a) Como você poderia calcular  $\int_0^1 (x + 1)^3 dx$  ?

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que o aluno desenvolva o polinômio de grau 3, obtendo  $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ , e faça o cálculo dessa integral.

E<sub>2</sub>: É possível que o aluno faça uma mudança de variável na integral para encontrar seu valor, sendo  $u = x + 1$  e, por conseguinte,  $dx = du$ , com  $1 \leq u \leq 2$ .

E<sub>3</sub>: Algum aluno poderá esboçar o gráfico da função e tentar obter o valor aproximado da integral.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o item a) do problema 5.1: No item (a), como o expoente possui grau 3, o aluno poderá se encorajar a desenvolver o cubo da soma e integrar o polinômio de terceiro grau, mas pode observar que é possível fazer de outra maneira, efetuando uma mudança de variável na integral.

**Quadro 28** - Problema 5.1, item b), da Ficha de Atividades 5.

b) E caso o expoente fosse maior? Como encontrar o valor de  $\int_0^1 (x + 1)^{10} dx$ ?

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que o aluno faça uma mudança de variáveis e calcule o valor da integral, visto que, sendo  $u = x + 1$  e, por conta disso,  $dx = du$  e  $1 \leq u \leq 2$ .

E<sub>2</sub>: Apesar de trabalhoso, é possível desenvolver a expressão do integrando e encontrar um polinômio de grau 10 e resolver a integral. Poderia utilizar Binômio de Newton nessa empreitada, ao resolver  $(x + 1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^{10-k} \cdot 1^k$ .

E<sub>3</sub>: É possível algum aluno buscar uma primitiva para esta função, pois trata-se de um polinômio de grau 11.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o item b) do problema 5.1: No item b) o expoente é maior, indicando o caminho de mudança de variável como mais eficiente. Ele poderia usar Binômio de Newton para expandir o expoente 10, mas é muito mais trabalhoso adotar esse caminho. Esse problema foi proposto para verificar se os alunos utilizarão a mesma estratégia de resolução.

**Quadro 29** - Problema 5.2 da Ficha de Atividades 5.

5.2- A mudança de variáveis na integral pode ser compreendida como uma ferramenta para auxiliar no cálculo de integrais. Deve-se fazer substituições que facilitem a resolução. Um ponto de partida, ou uma dica, é lembrar de derivadas conhecidas, já vistas em Cálculo 1. Encontre o valor de  $\int \sin\theta \sqrt{1 - \cos\theta} d\theta$ .

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que o aluno utilize as relações trigonométricas para efetuar uma troca de variáveis para resolver o problema. Fazendo  $u = 1 - \cos\theta$  e, assim,  $du = \sin\theta d\theta$ , logo obtém-se a solução do problema.

E<sub>2</sub>: Algum aluno pode, por tentativas (o que seria trabalhoso), buscar uma primitiva dessa função para solucionar a questão.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o problema 5.2: No enunciado há uma indicação sutil para lembrar derivadas conhecidas, como as trigonométricas, por exemplo. Destaca-se, também, a possibilidade de resgatar algumas relações trigonométricas importantes para os alunos utilizarem no cálculo de integrais, como a Relação Fundamental e demais identidades trigonométricas.

**Quadro 30** - Problema 5.3 da Ficha de Atividades 5.

5.3- Durante a aula de Cálculo II, sobre mudanças de variáveis na integral, o professor propôs que os alunos resolvessem as integrais indefinidas  $\int x\sqrt{x^2 + 2}dx$  e  $\int x^3\sqrt{x^2 + 2}dx$  pelos métodos já vistos em aulas anteriores. Rapidamente um dos alunos comentou: “*Eu resolvo as duas do mesmo jeito e dá o mesmo resultado*”. O que podemos afirmar em relação à fala desse aluno? Como você resolveria as integrais?

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que o aluno identifique uma mudança de variáveis simples na primeira integral, com  $u = x^2 + 2$ , e outra mudança com manipulação algébrica para resolver a segunda integral, sendo  $v = x^2 + 2$ ,  $x^3 = x^2 \cdot x$  e, conseqüentemente,  $x^2 = v - 2$ .

E<sub>2</sub>: É esperado que o aluno possa contestar a afirmação dada no enunciado do problema, apresentando argumentos matemáticos.

E<sub>3</sub>: Algum aluno poderá utilizar outras mudanças de variáveis, como substituições trigonométricas ou algum método que tenha sido abordado nas demais disciplinas do curso.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o problema 5.3: Esse problema mostra que a mudança de variável pode ser mais direta (primeira integral) ou será preciso fazer alguma manipulação na expressão para resolvê-la (segunda integral). O problema chama a atenção, pois uma simples alteração no integrando, com alteração no grau de um de seus termos, resulta em estratégias diferentes de resolução.

**Quadro 31** - Problema 5.4 da Ficha de Atividades 5.

5.4- Um professor, durante a aula de Cálculo II, pediu que os alunos encontrassem o resultado de  $\int tgx \cdot sec^2x dx$ . Para isso, ele dividiu a sala em dois grupos e sugeriu duas possíveis mudanças de variáveis a serem utilizadas e propôs que cada grupo solucionasse a integral usando uma dessas maneiras. Ao final, os alunos argumentaram que os resultados são diferentes. De acordo com a situação apresentada, responda:

a) Quais as sugestões de mudança de variáveis que o professor propôs aos alunos?

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que os alunos identifiquem as 2 possíveis mudanças de variáveis, sendo uma delas  $u = tg(x)$  e a outra  $v = sec(x)$ , e depois concluam com o cálculo da integral.

E<sub>2</sub>: Algum aluno poderá fazer substituições e reescrever a expressão utilizando seno e cosseno para facilitar a aparência da expressão do integrando e, assim, resolver o problema.

b) Como você explica os “resultados diferentes” para mesma integral?

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que o aluno obtenha duas respostas diferentes, porém equivalentes (isso fica comprovado, pois, ao manipular uma expressão obtém-se a outra).

E<sub>2</sub>: O aluno pode argumentar sobre a existência de uma família de primitivas, justificando as respostas distintas que foram encontradas no problema.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o problema 5.4: Esse problema mostra que a resolução não é única, pois o aluno deverá encontrar essas duas *sugestões do professor* e obterá resultados diferentes, porém equivalentes, como forma de retomar o resultado sobre primitivas de uma função, visto na primeira ficha de atividades.

**Quadro 32** - Problema 5.5 da Ficha de Atividades 5.

5.5- Dado  $r \in \mathbb{R}, r > 0$ , encontre a área do círculo de raio  $r$ , via integral.

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que o aluno escreva a equação geral da circunferência de centro  $(a, b)$  e raio  $r$ ,  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  e utilize mudanças de variáveis para encontrar a área do círculo usando integral. Como o resultado é conhecido, o aluno poderá, por conta própria, verificar sua resposta.

E<sub>2</sub>: Algum aluno poderá utilizar coordenadas polares para resolver o problema (procedimento que também corresponde a uma mudança de variáveis na integral).

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o problema 5.5: Esse problema traz uma aplicação direta do cálculo de área usando integrais e além disso, por ser um resultado conhecido, o aluno poderá ter a chance de demonstrá-lo utilizando integral.

**Quadro 33** - Problema Complementar da Ficha de Atividades 5.

**Problema Complementar**

5.6- Em Cálculo I você aprendeu que a derivada de funções do definidas por  $e^{f(x)}$  é dada por  $e^{f(x)} \cdot f'(x)$ . Dessa forma, responda:

- a) Qual é a área da região do primeiro quadrante limitada pelo gráfico de  $f(x) = e^{2x}$ , com  $0 \leq x \leq 1$ .
- b) Como encontrar a  $\int 2^x dx$ ? Podemos generalizar esse resultado, ou seja, dado  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a > 0$  e  $a \neq 1$  encontre  $\int a^x dx$ .

**Estratégias esperadas de solução.**

E<sub>1</sub>: Espera-se que o aluno lembre (ou consulte) algumas propriedades sobre logaritmos e exponencial para solucionar os itens deste problema.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre o Problema Complementar: Caso algum tenha terminado a resolução dos problemas anteriores, será sugerido que solucione o Problema Complementar, que inclui algumas noções, como i) derivada de função exponencial; ii) retomar o cálculo de área e traçar gráfico de função exponencial; iii) propriedades de logaritmo, bem como derivada e integral de logaritmo.

Ao final da Ficha de Atividades 5, pretendemos que os alunos participantes compreendam em quais tipos de Integral poderão utilizar essa estratégia de mudança de variáveis. Foram disponibilizados problemas que, em primeiro momento, puderam contribuir para a construção de conhecimento dos participantes e, posteriormente, permitiram discussões um pouco mais detalhadas, durante a etapa de formalização dos conteúdos, sobre outras trocas de variáveis na Integral.

Finalizamos a apresentação detalhada das fichas de atividades que compõem a sequência didática elaborada para esta pesquisa. A partir dos problemas comentados, buscamos potencializar a aprendizagem dos conceitos de Integral, tão importantes para os licenciandos. O objetivo da aplicação das fichas foi tornar a aprendizagem desses conceitos mais significativas, de forma que os alunos desenvolvessem seu protagonismo na construção desses conhecimentos matemáticos. Além disso, os alunos participantes puderam experimentar como metodologia de ensino, a MEAAMaRP, como forma de contribuir para sua formação como futuros professores, embora o foco do nosso trabalho não seja pertinente à formação de professores.

No tópico seguinte, apresentamos outro instrumento da coleta de dados, o qual denominamos de Avaliação Diagnóstica Final (ADF).

### 4.3 Avaliação Diagnóstica Final (ADF)

Seguindo para o final da coleta de dados e produção de registros desta pesquisa, aplicamos uma Avaliação Diagnóstica Final (ADF) e um Questionário de pesquisa aos alunos participantes, para levantar mais informações sobre o desenvolvimento desta ED.

Referente à ADF, esta possui objetivos de verificar o desenvolvimento dos processos de aprendizagem dos participantes, diante da construção de conceitos relacionados à Integral, conteúdo fundamental para a disciplina de CDI II e demais componentes curriculares específicos do curso de Licenciatura em Física. Utilizaremos também os dados obtidos com essa avaliação na quarta etapa da ED, quando confrontamos as análises *a priori* com as análises *a posteriori*. Cabe destacar que a ADF não faz parte de uma investigação por meio dos pressupostos metodológicos da ED, no entanto, inserimos esta avaliação em nossa pesquisa para coletar dados após a aplicação da sequência didática, marcando o encerramento da coleta de dados dessa pesquisa. No Quadro 34 apresentamos a ADF, instrumento disponibilizado, na íntegra, no APÊNDICE 05 desta tese de doutorado.

**Quadro 34 - ADF.**

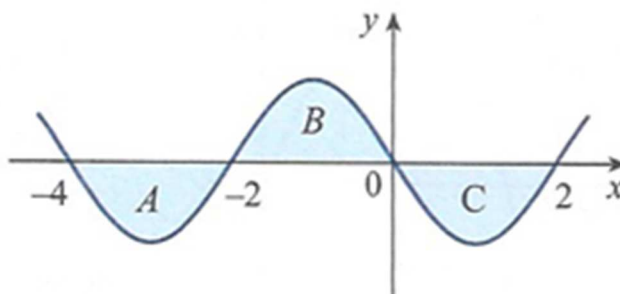
#### AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL

##### Atividades

1- Dado  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , é correto afirmar que  $\frac{-1}{\alpha} \cos(\alpha x) + k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , é uma primitiva da função  $f$  definida por  $f(x) = \text{sen}(\alpha x)$  ?

2- Cada uma das regiões A, B e C delimitadas pelo gráfico de  $f(x)$  e pelo eixo x tem área 3.

Encontre o valor de  $\int_{-4}^2 [f(x) + 2x + 5] dx$ . (Adaptado de Stewart, 2022, p. 365).



**Fonte:** Stewart (2022, p. 365).

3- Qual a área da região obtida entre as curvas  $y = x^2$  e  $y = -x^2 + 4x$  ?

4- Na disciplina de Cálculo 1 você aprendeu a derivada da função composta, geralmente chamada de Regra da Cadeia. Existe um resultado semelhante à regra da cadeia para derivadas, que auxilia no cálculo de integrais. Com base nessas informações, encontre o valor de  $\int_0^1 2(1+x^2)^9 x dx$ .

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Comentário sobre a ADF: Esta avaliação diagnóstica foi elaborada com três problemas inéditos, e um problema idêntico selecionado na ADI (quarta questão). Entretanto, os conteúdos contemplados foram discutidos e formalizados ao longo dos encontros previstos. A repetição do problema 4 contemplará análises específicas de evolução e construção de conhecimento dos alunos, que teceremos posteriormente, no capítulo 6 desta tese.

Esta avaliação auxiliou o pesquisador a confrontar as hipóteses levantadas na segunda etapa da ED, de Concepções e Análises *a priori*, validando-as ou refutando-as. A ADF foi aplicada individualmente, todavia, permitindo que os participantes discutissem suas estratégias de resolução; o professor pesquisador apenas observou esse momento da coleta de dados, discutindo algumas soluções ao término da avaliação.

Pretendeu-se verificar as estratégias de solução utilizadas pelos alunos e comparar seu desempenho em relação à ADI e demais comportamentos ao longo das sessões didáticas apresentadas nas fichas de atividades. Nosso foco esteve voltado aos processos de ensino e aprendizagem e não aos resultados (notas) dessa avaliação diagnóstica. Ao finalizarem a avaliação, o professor pesquisador conversou com os participantes, para discutir sobre os problemas propostos, tranquilizá-los sobre o seu desempenho e esclarecer a importância desta etapa para a produção de registros dessa pesquisa.

Após a aplicação da ADF, os participantes responderam a um questionário de pesquisa, elaborado pelo professor pesquisador, descrito na próxima seção.

#### 4.4 Questionário de pesquisa

Para encerrar a fase de coleta de dados e produção de registros desta pesquisa de doutorado, foi aplicado um questionário, respondido manualmente pelos alunos, para estes apresentarem mais informações, que contribuirão para as análises do pesquisador.

Motivado por trabalhos obtidos durante nossa revisão de literatura, tais como Alfaro-Carvajal e Fonseca-Castro (2018) e Chaparin (2019), os quais atuaram com a formação de professores e suas concepções sobre a RP, como metodologia de ensino, desenvolvemos este questionário de pesquisa para coletar informações dos licenciandos em Física, participantes desta investigação e professores em formação inicial, que poderão utilizar esta metodologia de ensino quando exercerem suas práticas em sala de aula. Embora os objetivos do nosso trabalho não contemplem a formação de professores, é importante fazer discussões a respeito, especialmente quando ministramos aulas nos cursos de licenciatura e podemos orientar, auxiliar e trocar experiências profissionais com os futuros professores.

A partir desse instrumento, tivemos como objetivos coletar as impressões que os participantes tiveram durante a aplicação da sequência didática, suas percepções em relação à metodologia de ensino adotada e outros aspectos que os respondentes quisessem apontar. Esse questionário foi composto por nove itens, sendo sete questões objetivas (algumas com mais de uma resposta possível de ser assinalada) e duas questões dissertativas, disponibilizado - na íntegra - no APÊNDICE 06. Os quadros a seguir apresentam cada uma das questões do questionário.

**Quadro 35** - Questionário de pesquisa- questões 1 e 2.

1- Você está matriculado no curso de Licenciatura em Física do IFSP?	
<input type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não      Outro: _____
2- Assinale todas as disciplinas de Ciências Exatas que você já cursou/ está cursando:	
<input type="checkbox"/> Fundamentos de Matemática	<input type="checkbox"/> Termodinâmica
<input type="checkbox"/> Fundamentos da Física	<input type="checkbox"/> Cálculo Dif. e Integral II
<input type="checkbox"/> Cálculo Dif. e Integral I	<input type="checkbox"/> Mec. dos Sólidos e Flúidos
<input type="checkbox"/> Vetores e Geometria Analítica	<input type="checkbox"/> Cálculo Dif. e Integral III
<input type="checkbox"/> Mecânica Geral	<input type="checkbox"/> Oscilações e Ondas

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Os itens 1 e 2 do Questionário de pesquisa solicitam que os alunos respondam sobre o curso de graduação que estão matriculados e as disciplinas cursadas ou em andamento, que indicam ao pesquisador alguns conteúdos aos quais os alunos já tiveram acesso conforme as disciplinas assinaladas.

**Quadro 36** - Questionário de pesquisa- questões 3 e 4.

3- Como você classifica a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II? (Você pode assinalar mais de uma resposta):

- A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II é fácil.
- O grau de dificuldade da disciplina de Cálculo II é mediano.
- A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II é difícil.
- Os conteúdos abordados são chatos e não possuem aplicação.
- Gosto dos conteúdos abordados na disciplina de Cálculo II.
- Os conteúdos abordados estão presentes em outras disciplinas do curso.
- O rigor e o excesso de símbolos dificultam a compreensão de conceitos.
- Tem muitas regras, fórmulas e Teoremas para decorar.
- Precisa lembrar muitos conteúdos de disciplinas cursadas anteriormente.
- É uma disciplina muito importante para o curso.
- Tenho facilidade com os conteúdos desta disciplina.
- Tenho dificuldades com os conteúdos desta disciplina.

4- Faltou algo a dizer? Gostaria de fazer mais alguns comentários sobre a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II? Utilize o espaço abaixo para apresentar seus comentários. *A questão era dissertativa e foi disponibilizado um espaço para os alunos escreverem suas respostas, como pode ser conferido no APÊNDICE 06 desta tese.*

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Em relação às questões 3 e 4 exibidas no Quadro 36, estas referem-se à disciplina de CDI II, a qual os alunos estavam cursando durante o período da coleta de dados desta pesquisa. A questão 3 apresenta respostas para o aluno assinalar e a questão 4, dissertativa, pede que o participante escreva sobre essa disciplina, caso queira acrescentar mais informações que não foram contempladas na questão anterior. Nossa intenção com essas questões é verificar a compreensão que os alunos possuem sobre o componente curricular de CDI II, se a reconhecem como importante para sua formação acadêmica, como a classificam em termos de dificuldade e aplicabilidade dos conteúdos abordados.

**Quadro 37** - Questionário de pesquisa- questões 5, 6 e 7.

<p>5- Você conhecia a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas? ( ) Sim ( ) Não</p> <p>6- Já tinha trabalhado com esta metodologia de ensino em alguma disciplina do curso?</p> <p>( ) Sim      ( ) Não      Qual(is): _____</p> <p>7- Após as sessões didáticas, quais suas impressões sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas? (Você pode assinalar mais de uma resposta):</p> <p>( ) Proporcionou uma experiência diferente em sala de aula.</p> <p>( ) Permitiu mais discussões entre os alunos e o professor.</p> <p>( ) Auxiliou no processo de construção de conhecimento.</p> <p>( ) Pode ser utilizada em diferentes níveis de ensino.</p> <p>( ) Permitiu aos alunos serem personagens ativos durante as aulas.</p> <p>( ) Contribui para desenvolver um trabalho colaborativo.</p> <p>( ) Gostei desta metodologia de ensino.</p>
---

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

As questões 5, 6 e 7, exibidas no quadro anterior abordam especificamente a MEAAMaRP. O item 5 questiona sobre o conhecimento desta metodologia de ensino. A

questão 6 verifica se o aluno já havia trabalhado com essa metodologia e qual(is) disciplina(s) isso ocorreu. Na questão 7, pede-se para o participante assinalar quais afirmações correspondem à MEAAMaRP.

Sobre o item 7, embora as respostas possíveis possam indicar apenas aspectos positivos relacionados à MEAAMaRP, entendemos que os itens não assinalados pelos alunos indicariam rejeição àquela afirmação.

O objetivo destas questões é coletar informações dos participantes em relação à metodologia de ensino adotada durante a aplicação das sequências didáticas e quais suas percepções sobre a MEAAMaRP. O Quadro 38, a seguir, apresenta as últimas perguntas do questionário.

**Quadro 38** - Questionário de pesquisa- questões 8 e 9

8- Na sua opinião, o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas contribui para a melhora do processo de ensino e aprendizagem? ( ) Sim ( ) Não

9- Faltou algo a dizer? Gostaria de fazer mais alguns comentários sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas? Utilize o espaço abaixo para apresentar seus comentários.

*A questão era dissertativa e foi disponibilizado um espaço para os alunos escreverem suas respostas, como pode ser conferido no APÊNDICE 06 desta tese.*

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A questão 8 pede a opinião direta dos alunos acerca da MEAAMaRP, sendo complementada por meio da questão 9, dissertativa, para o aluno escrever seu ponto de vista sobre esta metodologia de ensino adotada durante as sessões didáticas. A intenção foi coletar as concepções que os alunos participantes puderam elaborar sobre a MEAAMaRP durante o desenvolvimento da aplicação da sequência didática elaborada para esta pesquisa de doutorado. Como se tratam de futuros professores, é importante verificar se perceberam diferenças entre a metodologia de ensino adotada e a metodologia de ensino tradicional, que compreendemos como passiva e mecanizada.

Comentário sobre o Questionário de pesquisa: A intenção do pesquisador com este questionário aplicado ao final da coleta de dados, após aplicação da ADI, sequência didática e ADF, é referente à análise das concepções dos alunos participantes sobre a

importância da disciplina de CDI II, presente na grade curricular do curso de Licenciatura em Física, e a MEAAMaRP, adotada durante para elaboração das sessões didáticas. Procurou-se compreender qual a relação dos alunos com a disciplina de CDI II e se a viam da mesma forma que o professor pesquisador, como um componente curricular essencial para formação acadêmica dos estudantes.

Como a coleta de dados se deu com licenciandos do curso de Física, teve-se a intenção de analisar como estes futuros professores compreendem a MEAAMaRP e quais as impressões que tiveram desta metodologia de ensino. O questionário está disponibilizado, na íntegra, no APÊNDICE 06 desta tese de doutorado.

Encerra-se este capítulo intitulado Concepções e Análises *a priori*, segunda etapa desta ED, dedicado à construção de todos os instrumentos da coleta de dados e produção de registros que foram aplicados nos alunos participantes da pesquisa. Considerando-se as informações levantadas na etapa de *Análises Preliminares* desta ED, foram elaborados e confeccionados a ADI, a sequência didática, a ADF e o questionário de pesquisa. Em cada ficha de atividades desenvolvidas para sequência didática foram apresentadas as estratégias de solução esperadas pelo professor pesquisador e as justificativas e objetivos dos problemas selecionados. Quanto ao desenvolvimento de alguns problemas, havia a expectativa do pesquisador de que os alunos nos surpreendessem com soluções criativas e inovadoras.

Esperávamos que os problemas selecionados e as discussões levantadas pelo professor pesquisador pudessem auxiliar os alunos a sanarem suas dificuldades e potencializar sua aprendizagem de conceitos de Integral, instrumento de enorme importância para graduandos de cursos de Ciências Exatas. Ou, pelo menos, contribuir para reduzir algumas dificuldades em CDI II que os participantes possuíam.

Embora o foco desta tese de doutorado não seja a formação de professores, a escolha por aplicar os instrumentos de pesquisa nos alunos do curso de Licenciatura em Física, do câmpus Votuporanga do IFSP, se deve ao fato de proporcionar aos alunos uma experiência acadêmica por intermédio de uma atividade de pesquisa na área educacional, no ambiente da sala de aula. Além disso, visamos contribuir com a formação profissional desses alunos, ao apresentar outra metodologia de ensino para futuros professores, diferente da tradicional, que é passiva e mecanizada. Em breve esses licenciandos estarão vivenciando as próprias práticas, na sala de aula, mudando a realidade dos seus alunos.

Os instrumentos elaborados e explorados ao longo deste capítulo serão utilizados na próxima etapa, chamada de *Experimentação*, momento em que o professor pesquisador entra em contato com os participantes da pesquisa para aplicação dos instrumentos de coleta de dados.

O próximo capítulo será dedicado à coleta de dados, produção de registros desta pesquisa e descrição das observações do professor pesquisador.

*O aluno deve estar sempre sendo estimulado a tentar superar, por seu próprio esforço, certas passagens que conduzem o raciocínio na direção de sua aprendizagem (Freitas, 2012, p. 90).*

## **5. EXPERIMENTAÇÃO**

No capítulo anterior foram apresentadas, detalhadamente, a elaboração e a construção de todos os instrumentos da coleta de dados e produção de registros a serem utilizados nesta pesquisa de doutoramento, amparadas pelas informações levantadas nas etapas de Análises Preliminares e Concepções e Análises *a priori* da ED. Foram concebidos a sequência didática, as avaliações diagnósticas e o Questionário de pesquisa, incluindo a indicação das questões específicas que serão analisadas ao final de cada sessão didática; que se caracterizam como elementos fundamentais para validação (ou negação) das hipóteses levantadas nesta investigação.

Isto posto, este capítulo será dedicado à aplicação desses instrumentos da coleta de dados. De acordo com Machado (2012), a etapa de Experimentação é a fase de realização da ED com um grupo de alunos, sendo iniciada a partir do primeiro contato entre o professor pesquisador e os participantes. Esta etapa contempla a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos, a aplicação dos instrumentos de pesquisa elaborados e o registro cuidadoso das observações feitas durante seu percurso.

No entanto, antes de iniciar a descrição dos procedimentos da coleta de dados, foco deste capítulo, serão destacados, brevemente, os documentos necessários para a etapa de submissão e aprovação desta pesquisa envolvendo seres humanos, cumprindo as exigências efetuadas pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP).

A aplicação da pesquisa com os licenciandos do curso de Física ocorreu somente após aprovação da mesma no CEP, conforme Parecer Consubstanciado nº 6.598.409, com data de 21 de dezembro de 2023, apresentado no ANEXO A desta tese.

Dentre os documentos necessários para aprovação da coleta de dados, pelo CEP, constam uma descrição do projeto da pesquisa a ser realizada e os devidos termos de concordância e autorização assinados pelo Diretor Geral e Diretor Educacional do câmpus do IFSP-Votuporanga, juntamente com a permissão do Coordenador do curso de Licenciatura em Física. O modelo dessas autorizações foi disponibilizado no APÊNDICE 01, ao final desta tese.

Ainda de acordo com as normas do CEP, no que se refere à participação dos alunos em nossa pesquisa, elaboramos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), cujo propósito esclarece ao participante os aspectos gerais da pesquisa, os possíveis riscos causados durante sua realização, a permissão de divulgação dos resultados e a garantia de sigilo do participante.

O modelo do TCLE encontra-se disponível no APÊNDICE 02 deste trabalho. O pesquisador, por excesso de zelo e desconhecimento dos alunos participantes, no sentido de possuírem maioria civil, elaborou um Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE), com aspectos idênticos ao TCLE, entretanto, nesse termo era exigida a permissão dos pais ou responsáveis legais dos alunos para que pudessem participar da coleta de dados da pesquisa. Previamente, indicamos que não houve a necessidade de utilizar o TALE, pois não havia participantes menores de idade durante a realização desta pesquisa.

Compreendemos que todas as questões burocráticas envolvendo o CEP são importantes, visto que, de maneira geral, protegem pesquisadores, participantes e as instituições de ensino que estão envolvidas. Nesse sentido, informamos que o encontro com os alunos da disciplina de CDI II da Licenciatura em Física do IFSP-Votuporanga, e todas as demais etapas que serão descritas ao longo deste capítulo de Experimentação, foram realizadas após aprovação do projeto pelo CEP.

Esclarecidos os aspectos relacionados ao CEP, faremos a apresentação dos participantes da pesquisa, o cronograma de aplicação que foi elaborado pelo professor pesquisador, e serão descritos cada um dos encontros efetuados ao longo do período voltado à aplicação dos instrumentos elaborados, trazendo os diálogos e observações realizadas pelo professor pesquisador, que contribuem para esta investigação. Na seção seguinte são apresentadas as participantes da pesquisa.

### **5.1 As participantes da pesquisa**

Após a elaboração dos instrumentos de coleta de dados da pesquisa, a saber: as avaliações diagnósticas, a sequência didática e o Questionário de pesquisa, e a devida aprovação do CEP para a realização da coleta de dados referente a esta investigação, o professor pesquisador, entrou em contato com o professor de CDI II da turma de Licenciatura em Física do IFSP no câmpus Votuporanga, no primeiro semestre do ano de 2024.

Esse contato foi estabelecido para explicar sobre a pesquisa de doutorado e verificar a possibilidade de agendar um encontro com alunos dessa disciplina em uma noite de aula de CDI II. Atualmente afastado de suas atribuições profissionais, conforme Portaria N° 4560/IFSP, de 06 de agosto de 2021 (conforme ANEXO B), para participar do Programa de Pós-Graduação (Doutorado), foi preciso esse contato entre o professor pesquisador, autor desta tese, com o professor da disciplina de CDI II para agendar o encontro com a turma e realizar o convite para a participação dos alunos no projeto de pesquisa.

Na noite de 22/02/2024 o professor pesquisador foi até o câmpus do IFSP em Votuporanga, na sala onde estava ocorrendo as aulas de CDI II do curso de Licenciatura em Física, apresentou-se como professor do câmpus, afastado de suas atribuições por estar cursando o Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da Faculdade de Educação da UNESP localizada na cidade de Bauru, e fez um convite aos alunos que tivessem interesse em participar da pesquisa referente ao ensino de conceitos de Integral com base na MEAAMaRP.

Entregou uma lista para coletar os nomes e telefones dos alunos que gostariam de participar da pesquisa e sanou algumas dúvidas que foram levantadas, como o tempo de duração da coleta de dados, dia e horário dos encontros, se valeria nota para disciplina de CDI II, as quais foram respondidas pelo professor pesquisador.

De maneira geral, a turma CDI II da Licenciatura em Física possuía 17 alunos matriculados, porém 13 frequentavam as aulas regularmente, segundo afirmação do docente responsável. Eram 7 alunos da Licenciatura em Física e os demais da Engenharia Civil e Engenharia Elétrica (cursando em regime de dependência, situação comum e permitida nesta instituição de ensino). Nenhum aluno das engenharias teve interesse em participar da pesquisa (acredita-se que muitos não possuem interesse em pesquisas na área educacional). Entretanto, 3 alunos da Licenciatura, sendo duas alunas e um aluno, se prontificaram a vivenciar esta experiência e auxiliar o pesquisador em sua coleta de dados, pois tinham disponibilidade de horário fora do período de aulas e moravam na cidade de Votuporanga.

Os demais alunos dessa turma trabalhavam durante o dia ou moravam em outra cidade, sendo dependentes do transporte público municipal para se deslocarem ao câmpus, e fazerem o curso de Física à noite, não tendo, portanto, disponibilidade de horário para participar da pesquisa.

Naquela mesma noite o professor pesquisador conversou durante o período de intervalo com os três discentes interessados em participar da pesquisa, para combinar a data do primeiro encontro e agradecer, de antemão, a colaboração dos mesmos. Prezando pelo sigilo das identidades desses alunos participantes da pesquisa, nos referimos a eles por *Aluna 1*, *Aluna 2* e *Aluno 3*. Essa distinção dos alunos será feita a partir deste trecho até o término deste trabalho.

O pesquisador criou um grupo de troca de mensagens com esses alunos no aplicativo *Whatsapp* para facilitar a comunicação com os participantes, e ficou combinado de se encontrarem no câmpus na quinta-feira posterior, dia 29/02/2024, às 14 horas, em uma sala de aula ou laboratório que seria reservado e disponibilizado pela coordenação do curso de Licenciatura em Física.

Foi desenvolvido um cronograma de aplicação da coleta de dados da pesquisa para orientar o professor pesquisador. Todavia, o cronograma foi alterado algumas vezes, a pedido das participantes, por motivos diversos relacionados ao curso de Licenciatura em Física. O pesquisador manteve-se compreensível com as questões relacionadas a provas, seminários e demais trabalhos do curso, conforme solicitado pelos participantes.

Houve a necessidade de alteração das datas finais dos encontros, por conta da iminente greve das Universidades e Institutos Federais no país. As mudanças referentes ao cronograma não acarretaram em prejuízo para alunos e pesquisador.

Os encontros foram programados para serem realizados uma vez por semana, durante 7 semanas, no período da tarde, das 14 horas até as 17 horas, de acordo com sugestão das participantes. Cada encontro teve duração de 3 horas, dividido em duas etapas, com 1 hora e 30 minutos cada, as quais foram denominadas pelo pesquisador como *Primeira parte* e *Segunda parte*. Entre as duas etapas foi proposto um intervalo de 20 minutos, sugestão aceita pelos alunos.

Na *Primeira parte* dos encontros os participantes se dedicaram à resolução dos problemas dispostos nas fichas de atividades entregues pelo pesquisador, enquanto a *Segunda parte* dos encontros foi ocupada com as discussões efetuadas e a formalização dos conteúdos.

O Quadro 39 a seguir mostra quais ações foram realizadas durante esses encontros (especificando a *Primeira parte* e a *Segunda parte*) e suas prováveis datas de ocorrência, conforme cronograma previsto e desenvolvido pelo professor pesquisador.

**Quadro 39** - Cronograma de aplicação da sequência didática.

<b>Data</b>	<b>Ações pedagógicas realizadas</b>
<b>1º ENCONTRO</b> 29/02/2024	1ª PARTE: Apresentação do pesquisador, apresentação do projeto de pesquisa, entrega e assinatura do TCLE e dúvidas em geral.
	2ª PARTE: Aplicação da ADI.
<b>2º ENCONTRO</b> 07/03/2024	1ª PARTE: Ficha 1- Antiderivação ou Primitivas de uma Função.
	2ª PARTE: Plenária e Formalização dos conceitos da Aula 2.
<b>3º ENCONTRO</b> 14/03/2024	1ª PARTE: Ficha 2- Integral Definida (Integral De Riemann).
	2ª PARTE: Plenária e Formalização dos conceitos da Aula 3.
<b>4º ENCONTRO</b> 21/03/2024	1ª PARTE: Ficha 3- Aplicações iniciais da Integral definida.
	2ª PARTE: Plenária e Formalização dos conceitos da Aula 4.
<b>5º ENCONTRO</b> 28/03/2024	1ª PARTE: Ficha 4- Cálculo de áreas usando Integral definida.
	2ª PARTE: Plenária e Formalização dos conceitos da Aula 5.
<b>6º ENCONTRO</b> 04/04/2024	1ª PARTE: Ficha 5- Mudanças de variáveis na Integral.
	2ª PARTE: Plenária e Formalização dos conceitos da Aula 6.
<b>7º ENCONTRO</b> 11/04/2024	1ª PARTE: ADF e Questionário de pesquisa.
	2ª PARTE: Encerramento da coleta de dados e agradecimentos.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Vale ressaltar que as datas de realização dos encontros dispostas no cronograma servem apenas de orientação para o pesquisador, podendo ser alteradas conforme as necessidades dos participantes. O professor pesquisador compreende a importância de manter uma relação de confiança e harmonia com os participantes para o bom andamento da pesquisa e não atrapalhar as atividades acadêmicas desses alunos.

Entretanto, houve uma mudança na configuração do grupo de participantes ao longo da aplicação da pesquisa, que previamente apontamos. Por conta de uma questão médica (uma cirurgia realizada com urgência), o *Aluno 3* precisou encerrar sua participação após o segundo encontro (realizado em 07 de março de 2024), não sendo possível aguardar seu retorno para seguir com a coleta de dados da pesquisa. Dessa forma, seus registros foram descartados pelo pesquisador e não serão contabilizados nesta pesquisa, e, assim, a coleta de dados será descrita e analisada com base nos registros e diálogos efetuados por duas participantes. Daqui por diante, nos referimos às participantes da pesquisa usando o gênero feminino e no plural, como as alunas ou as participantes da pesquisa. Em virtude à preservação do sigilo de suas identidades, seguimos denominando-as como *Aluna 1* e *Aluna 2*, quando nos referimos a cada uma delas individualmente.

Compreendemos ser importante apresentar essa mudança ocorrido ao longo da coleta de dados da pesquisa para mostrar que mesmo tendo um planejamento para pesquisa, existem situações que não estão sob o controle do pesquisador.

A seguir serão descritos, com detalhes, a terceira etapa desta ED, chamada de Experimentação e que contempla cada um dos encontros realizados, apresentando as observações efetuadas pelo professor pesquisador e alguns diálogos relevantes efetuados com as participantes.

## **5.2 A coleta de dados desta pesquisa**

Para realizar a coleta de dados desta pesquisa de doutorado, a Coordenação do curso de Licenciatura em Física reservou e disponibilizou o Laboratório de Mecânica e Pneumática, sala G003, localizada no bloco G do câmpus do IFSP na cidade de Votuporanga. Trata-se de uma sala grande que possui 2 quadros brancos à frente, ar condicionado e carteiras universitárias para os alunos se acomodarem.

No fundo da sala estão montadas algumas bancadas com equipamentos utilizados pelo curso Técnico em Mecânica, ofertado pelo câmpus do IFSP, mas não os utilizamos e não nos atrapalhou em momento algum quando ocupamos esta sala. Os técnicos de laboratório do câmpus se disponibilizaram a auxiliar com essas bancadas, caso necessário. Cabe destacar que os técnicos de laboratório não nos acompanharam durante a coleta de dados e não foi necessária sua ajuda com as bancadas.

Para coleta de dados e produção de registros das alunas foram previstos sete encontros, com 3 horas de duração, realizados no período da tarde, das 14 horas até as 17

horas, horário sugerido pelas próprias participantes. Cada encontro foi dividido em duas etapas, com 1 hora e 30 minutos cada, as quais foram denominadas, pelo pesquisador, de *Primeira parte* e *Segunda parte*, para melhor descrever a dinâmica das atividades e observações realizadas.

Na *Primeira parte* dos encontros as participantes se dedicaram à resolução dos problemas dispostos nas fichas de atividades impressas e entregues pelo pesquisador. Nessa parte, o professor pesquisador fazia suas observações e anotações no diário de campo, bem como a mediação das atividades e interação com as participantes, fazendo questionamentos e sugestões.

A *Segunda parte* dos encontros foi ocupada com as etapas de discussões, propostas no roteiro de Onuchic e Allevato (2011), e a formalização dos conteúdos com a colaboração das alunas. Foi estabelecido com as participantes um intervalo de 20 minutos entre cada uma das duas etapas.

Vale ressaltar que para a etapa de formalização dos conteúdos, o professor pesquisador preparava uma aula contemplando os conteúdos abordados nas fichas de atividades, mas não se tratava de uma aula finalizada, roteirizada, engessada e pronta. Havia um rumo a seguir e conforme suas observações enquanto as alunas resolviam os problemas, e de acordo com as discussões realizadas na plenária, eram inseridos mais alguns conteúdos pertinentes para serem abordados durante a formalização, objetivando sanar dúvidas e auxiliar as participantes na construção de conceitos.

Destaca-se que o professor pesquisador foi o responsável pela coleta dos dados da pesquisa, pelas observações durante sua realização, o desenvolvimento das etapas de discussões relativas às fichas de atividades e a formalização dos conteúdos. Optou-se pelo registro das observações do pesquisador em seu diário de campo e a coleta dos protocolos das participantes ao invés de gravações de áudio e/ou vídeo, para, assim, evitar constranger as alunas. Iniciaremos a descrição da coleta de dados da pesquisa na seção seguinte.

### **5.2.1 Primeiro Encontro**

O primeiro encontro ficou marcado pelo início da coleta de dados e atendimento das questões burocráticas pertinentes à pesquisa de doutorado. Este foi realizado no dia 29/02/2024, com início às 14 horas, conforme combinado previamente com as alunas, na sala G003, no bloco G do IFSP-Votuporanga. Nesta ocasião o pesquisador fez uma apresentação pessoal, descreveu a pesquisa, de maneira geral, e foi destinado um tempo

para leitura e assinatura do TCLE (APÊNDICE 02) e aplicação da ADI (APÊNDICE 03), para dar início à etapa da coleta de dados e produção de registros das alunas participantes. Segue a seguir os detalhes pertinentes às atividades realizadas neste dia.

#### **5.2.1.1 Primeira parte**

Na primeira parte deste encontro, o professor pesquisador fez uma breve apresentação pessoal contendo sua formação acadêmica, atuação profissional, tempo de exercício no IFSP, e seu afastamento das atividades profissionais por conta do Doutorado. Este fato foi importante de se mencionar porque as alunas participantes não conheciam, pessoalmente, o professor pesquisador.

Comentou-se, também, aspectos gerais do projeto de pesquisa do professor pesquisador e a MEAAMaRP, que deu suporte para elaboração e aplicação da sequência didática, e demais instrumentos de produção de registros da pesquisa. Este momento de explanação foi importante, pois os alunos licenciandos em Física indicaram que pretendiam participar de projetos de Iniciação Científica e ingressar, futuramente, em programas de pós-graduação, e, dessa maneira, puderam acompanhar uma das etapas do desenvolvimento de uma pesquisa na área educacional.

Uma cópia do TCLE devidamente datado e assinado pelo professor pesquisador foi entregue às participantes, lido em conjunto com o professor pesquisador e, em seguida, assinado pelas mesmas. Numa conversa informal com as alunas, elas disseram que cursaram o ensino básico em escolas públicas e escolheram a licenciatura em Física por “gostarem da matéria na escola” e “acharem muito legal”. As alunas comentaram também que se identificam com o curso e pretendem seguir adiante até a sua conclusão. Esperam dar aulas de Física e ingressar em programas de pós-graduação, após concluírem o curso de Licenciatura. Essa primeira parte teve aproximadamente 1 hora e meia de duração, conforme previsto no cronograma do pesquisador, e depois foi feito um intervalo de 20 minutos.

As primeiras impressões que o pesquisador teve das participantes foram positivas, pois mostraram-se interessadas em participar da pesquisa e auxiliar na coleta de dados e produção de registros, tendo a possibilidade de vivenciarem uma experiência na sala de aula com outra metodologia de ensino, diferente da tradicional, o que as motivou bastante e despertou sua curiosidade.

### **5.2.1.2 Segunda parte**

Após o intervalo, o pesquisador entregou-lhes uma cópia da Avaliação Diagnóstica Inicial (ADI) para resolverem com duração aproximada de 1 hora para sua conclusão. O pesquisador tranquilizou-as, novamente, com relação à ADI, pois a avaliação era importante para verificar conhecimentos prévios que as participantes possuem. A avaliação, individual e sem consulta, ficou sob a supervisão do professor pesquisador, que apenas as observou, sem tirar dúvidas conceituais neste momento, permitindo que as alunas conversassem entre si, mas não o fizeram em nenhum instante. Foi perceptível certa preocupação das alunas durante a realização da ADI, no sentido de acertar as questões e saberem suas notas (apesar de não haver notas para as atividades desenvolvidas na coleta de dados).

Ao término deste primeiro encontro, o professor pesquisador fez breves comentários para as alunas acerca dos conceitos contemplados na ADI e falou, novamente, em relação à necessidade desta avaliação para o desenvolvimento da pesquisa. Ao final, ficou marcado o próximo encontro para o dia 07/03/2024, às 14 horas, na mesma sala e encerram-se as atividades poucos minutos após as 17 horas.

De maneira geral, este primeiro encontro ocorreu conforme esperado pelo pesquisador, em diversos sentidos. O tempo estipulado para realização da apresentação do pesquisador, panorama da pesquisa, leitura e assinatura do TCLE, conversas com as alunas e finalização da ADI foi adequado. As participantes mostraram-se animadas em participar da pesquisa e vivenciarem uma “nova” metodologia de ensino, diferente da tradicional, a qual estão habituadas. Percebeu-se, também, certa curiosidade das alunas em relação à MEAAMaRP, o que se seguiu durante o andamento das aulas. No próximo encontro deu-se início à aplicação da sequência didática elaborada para fins desta pesquisa e o descrevemos a seguir.

### **5.2.2 Segundo Encontro**

O Segundo encontro foi realizado no dia 07/03/24, conforme combinado com as participantes, com início às 14 horas, na sala G003. Nesta tarde teve início a aplicação da sequência didática com a Ficha de Atividades 1 (disponibilizada no APÊNDICE 04 desta tese), elaborada pelo autor desta tese e com base nos princípios da MEAAMaRP, seguindo o roteiro de nove passos desenvolvido por Onuchic e Allevato (2011). O professor pesquisador levou o material impresso para as participantes e conduziu as dinâmicas de aplicação da sequência didática, como será exposto a seguir.

### 5.2.2.1 Primeira parte

Para iniciar o segundo encontro, o pesquisador comentou com as alunas, novamente, aspectos sobre a MEAAMaRP que seria utilizada durante realização da sequência didática. Ressaltamos que falar *sobre* a Resolução de Problemas, no sentido apresentado por Schroeder e Lester (1989 *apud* Onuchic; Allevato, 2011, p. 79), com as participantes da pesquisa, também fez parte do processo de aplicação dessa sequência didática.

Em virtude da quantidade de participantes, duas alunas, foi formado somente um grupo de trabalho; o professor entregou-lhes a Ficha de Atividades 1 (APÊNDICE 04) contendo os problemas propostos e fez alguns comentários. A seguir, em posse das fichas, fizeram a leitura em conjunto e depois a leitura individual, etapas 2 e 3 do roteiro trazido por Onuchic e Allevato (2011). Não havendo dúvidas neste momento, e ansiosas para começar, o professor pesquisador pediu que fizessem com calma e concentração e respondessem cada problema em seu espaço demarcado nas folhas que receberam.

As alunas fizeram as atividades individualmente, mas o professor sugeriu que conversassem no decorrer do processo de resolução dos problemas propostos e compartilhassem suas estratégias de solução. Destaca-se que a etapa 1. *Preparação do problema* do roteiro proposto pelas autoras supracitadas foi contemplada durante a construção da sequência didática com a escolha de bons problemas, motivadores e capazes de construir conceitos.

As alunas foram informadas que poderiam (e deveriam) conversar entre si e com o pesquisador, que atuou como mediador e observador durante essa etapa. Foi sugerida 1 hora para resolução dos problemas (como estipulado no cronograma do pesquisador), começando às 14:15 h. Durante a etapa de Resolução dos Problemas, o professor Observava e Incentivava, correspondente às etapas 4 e 5 do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), respectivamente, e respondia às dúvidas das participantes, sem fornecer respostas prontas, diretas, mas simplesmente recordando alguns conceitos ou problemas semelhantes, sem aprofundá-los.

Este foi o primeiro momento das participantes resolvendo problemas de CDI II, com base na MEAAMaRP, o que as trouxe certo desconforto. As alunas tentaram fazer suas atividades individualmente, buscando a resposta correta a cada momento, focando apenas no resultado final, em oposição ao desenvolvimento do processo de resolução. Constantemente as alunas chamavam o pesquisador para perguntar se tinham acertado a questão: “*Esse aqui tá certo?*” ou “*É assim que faz?*”. Nestas situações, o pesquisador

pedia para a aluna explicar o que tinha feito, qual estratégia de resolução tinha adotado e quais conceitos foram utilizados durante a resolução do problema.

As alunas pediram para esperar mais alguns minutos antes de dar início à 2ª parte deste encontro e finalizou-se essa etapa às 15:40h, dentro do tempo estimado pelo pesquisador, que havia sido de 1h30 minutos para este momento. Foram recolhidas as fichas das alunas e foi realizado um intervalo de 10 minutos.

Neste segundo encontro pode-se perceber que as alunas estavam trabalhando individualmente na resolução dos problemas propostos na Ficha de Atividades 1, com foco no resultado correto, e não no desenvolvimento das suas soluções. Foi possível notar que as alunas estavam aguardando o momento que o professor pesquisador daria aula, explicasse o conteúdo no quadro, como habitualmente ocorre numa aula apoiada na metodologia tradicional de ensino. Apresentavam-se, também, mais reservadas e falando pouco entre si e com pesquisador.

#### **5.2.2.2 Segunda parte**

Ao retornar do intervalo, o professor pesquisador pretendia pôr em prática as etapas 6. *Registro das resoluções na lousa*, 7. *Plenária* e 8. *Busca do consenso* do roteiro de Onuchic e Allevato (2011) para depois, concluir esse encontro com a etapa 9. *Formalização do conteúdo*. Cabe destacar que não ocorrem mudanças bruscas entre as etapas estabelecidas no roteiro proposto pelas autoras supracitadas. Como havia duas alunas e o professor pesquisador na sala de aula, as etapas foram desenvolvidas de maneira natural, contínua, com o professor estimulando a participação das alunas.

Para realização das etapas as etapas 6. *Registro das resoluções na lousa*; 7. *Plenária*; e 8. *Busca do consenso*, do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), as alunas se mantiveram sentadas em seus lugares, compartilharam suas fichas de atividades e falaram sobre suas estratégias de solução para os problemas, ao passo que o professor pesquisador estava ouvindo e fazendo anotações no quadro, conforme orientações das alunas. Neste momento as participantes não quiseram escrever no quadro, apenas comentar suas soluções, atitude que foi compreendida e respeitada pelo pesquisador.

Para motivar as discussões, o professor pesquisador começou fazendo algumas perguntas às participantes, cujos trechos dos diálogos<sup>25</sup> são descritos a seguir:

---

<sup>25</sup> O professor pesquisador fez anotações para registrar as respostas das alunas e comportamentos

*Pesquisador: Vocês já tinham trabalhado com Resolução de Problemas em outros momentos? Quais as suas impressões?*

*Alunas: A Resolução de Problemas é diferente daquilo que estamos acostumadas. Força a gente a pensar e lembrar das coisas, sem ter a aula daquela matéria.*

O diálogo acima ilustra que as alunas não estão habituadas com RP como metodologia ativa de ensino.

*Pesquisador: Vocês já tinham visto o conceito de Primitiva de uma função?*

*Aluna 1: Já vi em Cálculo 2, mas eu confundo as coisas de Cálculo 1 e Cálculo 2.*

*Pesquisador: Confunde (...) como assim?*

*Aluna 1: Sei lá, tem horas que não sei quando é pra derivar ou quando é pra integrar.*

É perceptível que os conceitos abordados na disciplina de CDI I, como Derivadas, não se encontram consolidados, de acordo com a fala da Aluna 1. As dificuldades oriundas dessa disciplina prejudicam o desenvolvimento dos conceitos de CDI II.

*Pesquisador: O que podemos concluir sobre a primitiva de uma função? Como vou saber o valor da constante  $k$ ?*

*Aluna 2: Se eu derivar uma função e der aquela do enunciado, é a primitiva. O  $k$  (a constante  $k$ ) é real.*

Num primeiro momento, de acordo com a resposta da Aluna 2, ela possui uma noção sobre a primitiva de uma função, pois a primitiva também é conhecida como antiderivada.

Durante a realização dessas etapas, o pesquisador observou que alguns conceitos pertencentes ao CDI I foram expostos de maneira confusa pelas alunas. No decorrer das discussões, o professor pesquisador realizou alguns comentários e utilizou o quadro

---

observados durante a aplicação da pesquisa.

branco para dar maiores detalhes sobre esses conceitos, lembrando alguns tipos de derivadas e problemas correlatos aos da Ficha de Atividades 1, como taxas de variação e equação de reta tangente ao gráfico de uma função. Essas discussões foram realizadas em aproximadamente 45 minutos.

*Pesquisador: Em Cálculo 1 vocês devem ter visto, várias vezes, aquele problema de encontrar uma equação da reta tangente ao gráfico de uma função, passando por um ponto (...)*

*Alunas: Sim.*

*Pesquisador: E qual operação vocês utilizavam para obter o coeficiente angular da reta?*

*Alunas: Derivando a função.*

*Pesquisador: Reparem que estamos com uma situação um pouco diferente (...) invertida (...) temos um coeficiente angular, um ponto da reta e buscamos a função que originou isso tudo. Como podemos pensar?*

*Alunas: Acho que vamos fazer integral (...)*

É perceptível que as alunas possuem noções que relacionam a integração como operação inversa da derivação. Após as discussões realizadas na plenária e busca pelo consenso, foi dado mais um tempo para as alunas refazerem os problemas, numa outra folha, para comparar os resultados antes e depois da plenária e verificar como as alunas foram afetadas após as discussões realizadas, mediante as etapas 6, 7 e 8. As alunas utilizaram 25 minutos para refazer os problemas, conforme desejaram.

Por fim, o professor pesquisador iniciou a nona etapa do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), denominada de *Formalização do conteúdo*, na qual expôs no quadro branco os conceitos de Primitiva de uma função (com alguns exemplos) e, levando-se em consideração os dados coletados na ADI, foram abordados conceitos relevantes ao CDI I, como Derivada (definição por meio do problema da reta tangente ao gráfico de uma função, definição usando limite e algumas propriedades) e Regra da Cadeia (ou Derivada da Função composta), sempre pedindo a participação e a colaboração das alunas, visando um momento significativo para aprendizagem. Durante esta etapa percebeu-se que as alunas estavam um pouco mais participativas. Encerramos este encontro e combinamos a data do próximo.

Fazendo uma análise do Segundo Encontro, a aplicação da Ficha de Atividades 1 ocorreu tranquilamente com as alunas participando com entusiasmo, entretanto, estavam um pouco mais tímidas para realizar as discussões. Durante a realização dos problemas, as alunas trabalhavam individualmente, sem compartilhar suas ideias e estratégias de solução, e perguntavam várias vezes ao pesquisador se estava correto aquilo que tinham feito, “*Tá certo isso?*”.

O pesquisador fazia comentários pertinentes, mas sem dar respostas diretas. Sugeria, por exemplo, às alunas, se havia alguma maneira de verificar suas respostas. Enquanto as participantes estavam focadas em erros e acertos, o pesquisador estava atento aos processos de resolução dos problemas, as estratégias utilizadas e a maneira que as alunas estavam raciocinando em suas soluções.

Foi percebido, pelo pesquisador, certa expectativa das alunas pelo *momento da aula* com as explicações do conteúdo no quadro, provavelmente, pelo hábito enraizado por conta do ensino tradicional.

Nas etapas de discussão em grupo, como as etapas 6. *Registro das resoluções na lousa*, 7. *Plenária* e 8. *Busca do consenso*, do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), era necessário fazer perguntas diretamente para cada uma delas a fim de obter suas respostas e comentários para motivar tais discussões. Esse cenário pode ter ocorrido por consequência aos anos de ensino tradicional, sem contar com momentos de discussões com os professores ou por falta de confiança e *medo de errar* ao apresentar seus argumentos. É um comportamento a ser observado nas demais sessões didáticas.

### **5.2.3 Terceiro Encontro**

Inicialmente, é preciso fazer algumas ponderações sobre este *Terceiro encontro*, realizado em 21/03/2024. Pelo cronograma elaborado pelo professor pesquisador, este encontro deveria ocorrer em 14/03/2024, entretanto, decidimos alterar a data de aplicação pois as participantes teriam provas e seminários a serem realizados, e como não pretendíamos atrapalhar a agenda das alunas em seu curso de graduação, fez-se uma mudança de data, sem prejuízos para as alunas ou o pesquisador. As conversas para alteração de data foram feitas no grupo de *Whatsapp* criado pelo pesquisador.

Nesta data nos reunimos na sala de aula D06, localizada no bloco D do câmpus, pois o Laboratório de Mecânica e Pneumática, sala G003, utilizado anteriormente, estava ocupado neste dia, fato que também não nos trouxe prejuízos. A sala D06 possui lousa e giz, aproximadamente 40 mesas e cadeiras, ar-condicionado, e a utilizamos neste terceiro

encontro, o qual trabalhamos a Ficha de Atividades 2 (disponibilizada no APÊNDICE 04 desta tese), que contempla a construção da Integral definida utilizando a Soma de Riemann.

### 5.2.3.1 Primeira parte

Para iniciar nossa tarde, conversamos um pouco sobre diversos assuntos. As participantes comentaram algumas dificuldades relacionadas à disciplina de CDI I e CDI II, entretanto, numa primeira impressão, essas dificuldades são oriundas do Ensino Médio, pois referem-se ao traçado de gráficos de funções, solução de equações e desenvolvimento algébrico de expressões. Contudo, existem lacunas pertencentes ao próprio CDI, como defasagens de compreensão de algumas definições e incertezas, como elas mesmas disseram sobre “*o que vale fazer*” e “*o que posso fazer*”, no sentido de desconhecimento de propriedades e definições pertinentes aos conceitos de CDI.

Essas conversas auxiliaram o pesquisador a identificar alguns aspectos importantes sobre os fatores dificultadores da aprendizagem das alunas. É interessante para o pesquisador ter esse retorno das alunas em relação ao trabalho docente, como as informações são recebidas, processadas e compreendidas pelas alunas.

Alunos de cursos de Ciências Exatas, em geral, possuem lacunas de formação do Ensino Médio e que ficam evidentes durante a graduação. No entanto, na Licenciatura em Física, cursam a disciplina de Fundamentos de Matemática Elementar, cujo caráter se aproxima de uma revisão e/ou aprimoramento de conteúdos do Ensino Médio, e trata sobre diversos tipos de Funções em sua grade curricular, conforme consta no PPC do curso de Física (IFSP, 2023). Assim, seria interessante analisar os impactos que a disciplina de Fundamentos de Matemática causa, tanto positiva quanto negativamente, em relação ao desempenho dos alunas em disciplinas de CDI.

A fim de iniciar as atividades do dia, o professor pesquisador entregou a Ficha de Atividades 2 (APÊNDICE 04) com os problemas propostos para cada participante e fez a leitura em voz alta. Não havendo dúvidas iniciais, pediu que as alunas lessem, individualmente, os problemas, os fizessem com calma e concentração e respondessem a cada problema em seu espaço determinado na ficha. As alunas poderiam conversar entre si e com o professor, que atuou como mediador do processo de aprendizagem e fez suas observações. Foi sugerido 1 hora para resolução dos problemas.

Nota-se que foram contemplados os passos 1. *Preparação do problema*; 2. *Leitura individual*; e 3. *Leitura em conjunto* do roteiro proposto por Onuchic e Allevato (2011),

e passamos a estar envolvidos com os passos 4. *Resolução do problema* e 5. *Observar e incentivar*, desse roteiro. Destaca-se que não existem indicativos de separação entre a passagem de uma etapa à outra, é um percurso efetuado naturalmente dentro da proposta da MEAAMaRP.

Durante a resolução dos problemas, as participantes permaneceram discutindo pouco entre si; todavia, faziam mais perguntas ao professor, que não fornecia respostas de maneira direta, somente orientava, sugeria, recordava e apontava elementos que auxiliam na solução das questões. É provável que a falta de hábito em trabalhar com metodologias ativas de ensino-aprendizagem tenha moldado o comportamento destas alunas no sentido de obter respostas prontas aos seus questionamentos, mas esse comportamento deverá ser avaliado, se repetido constantemente. O diálogo a seguir ilustra essa afirmação.

*Aluna 2: Pra calcular a área eu preciso fazer base x altura. A base eu tenho, que é a amplitude do intervalo. Como acho a altura? Uso o valor da amplitude também?*

*Pesquisador: Por que a amplitude? Ela não tem o mesmo valor em todos os intervalos?*

*Aluna 2: Sim, (...) e daí a área seria igual pra todos, mas na minha figura são diferentes (...) eu uso “f de alguma coisa” pra servir de altura?*

*Pesquisador: Sim, mas o que seria esse “alguma coisa” ?*

*Aluna 2: Vou pensar (...)*

Pelo trecho, percebe-se que a *Aluna 2* esperava uma resposta direta do professor em relação à altura a ser utilizada para o cálculo da área do retângulo. O professor chamou a atenção da aluna para ponderar melhor sobre seu raciocínio, e ela percebeu que é preciso utilizar a função, dada no enunciado do problema, como valor para altura.

As participantes apresentaram bastantes dificuldades em relação ao primeiro problema (que orientava as etapas para construção do conceito de integral definida) e, dessa forma, o pesquisador fez alguns comentários na lousa. Ficou claro ao pesquisador que eram confusas as noções que as participantes possuíam, tais como amplitude de intervalo real, partição de intervalo e relacionar um valor da função dada com a altura de um retângulo, como ilustrado pelo diálogo exibido a seguir.

*Aluna 1: O que é essa amplitude delta x?*

*Pesquisador: A amplitude do intervalo representa o tamanho do intervalo.*

*Aluna 1: Como encontro isso? É no x?*

Durante a sucinta explicação, o pesquisador solicitou a ajuda das participantes para envolvê-las nessa apresentação e, durante a explanação, verificar possíveis fatores que estavam gerando tais erros conceituais.

A metodologia de pesquisa que estamos utilizando nesta tese de doutorado, a ED, permite *correções de rota* ao longo da elaboração, desenvolvimento e aplicação das sequências de ensino e, dessa forma, considerou-se necessário, por conta de todas as dificuldades apresentadas pelas alunas, realizar esse momento de explicação de alguns pontos relevantes sobre a Integral definida.

É perceptível a falta de hábito das participantes em relação à metodologia de ensino adotada, a MEAAMaRP, por se tratar de uma metodologia ativa de ensino e aprendizagem, na qual as alunas precisam atuar como protagonistas na construção de conhecimentos relacionados aos conceitos de Integral. A coleta de dados da pesquisa é uma etapa crucial para o desenvolvimento desta tese, entretanto, a formação das futuras professoras de Física configura-se como um aspecto relevante a ser ponderado pelo pesquisador.

Após a breve exposição do professor pesquisador e continuando com a resolução dos problemas da Ficha de Atividades 2, o professor fez a leitura do problema 2.2 e pediu para as participantes o resolverem com calma e atenção. Elas apresentaram dificuldades em traçar o gráfico da função trigonométrica (função seno), bem como, a relação entre graus e radianos e valores tabelados do seno (arcos notáveis).

Foi perceptível que as alunas apresentavam certa confusão com alguns conceitos de Derivadas e suas propriedades, conteúdos abordados na disciplina de CDI I. Essas observações foram úteis para o pesquisador abordar durante a formalização dos conteúdos, etapa nove do roteiro de Onuchic e Allevato (2011). Finalizada a resolução das atividades, fez-se um intervalo de 20 minutos.

### **5.2.3.2 Segunda parte**

Após o término da solução dos problemas e retornando do intervalo, encaminhou-se para as etapas 6. *Registro das resoluções na lousa*; 7. *Plenária*; e 8. *Busca do consenso*, do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), contando com o auxílio das participantes. Para

motivar as discussões, o professor pesquisador fez algumas perguntas para as participantes, indicados no diálogo a seguir:

***Pesquisador:** Vocês já conheciam a Integral definida? Viram essa construção em Cálculo 2? Tinham visto a área usando Integral?*

***Aluna 1:** Já usamos Integral no Cálculo e nas matérias de Física (...) mas parece que está diferente, não lembro desses retângulos (...)*

***Aluna 2:** Lembro de calcular área usando Integral, mas não precisava fazer tudo isso que a gente fez hoje.*

Pelo trecho destacado, percebe-se que as alunas já tinham visto em aula o processo de construção da Integral definida, mas não se lembravam e, além disso, utilizavam a Integral como ferramenta em disciplinas específicas da área de Física. No entanto, consta este conteúdo no PPC do curso de Física (IFSP, 2023). O item (e) da questão 2.2, ilustrada no Quadro 40, permitiu muitas discussões com as participantes.

**Quadro 40** - Discussão do item (e) da questão 2.2.

e) O que acontece, em termos de área, caso se considerasse a função  $f$  definida por  $f(x) = \text{sen}(x)$  definida no intervalo  $[0, 2\pi]$ ? Qual é o valor de  $\int_0^{2\pi} \text{sen}(x) dx$  ? Justifique suas respostas.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

As alunas encontraram valor zero para integral disposta no quadro anterior, o que concluíram representar área zero para essa região. Ficaram pensando na questão e tentando justificar o motivo, sabendo que não fazia sentido área zero para uma região que era possível “desenhar”. Foi um momento interessante para promover discussões, como apontado pelo trecho a seguir.

***Alunas:** Como pode alguma coisa ter área igual a zero?*

***Pesquisador:** Vocês conseguiram encontrar a região de integração? Conseguiram desenhar? Por que área igual a zero?*

***Aluna 1:** Eu desenhei a região (...) e fiz a integral, mas deu zero.*

***Aluna 2:** E não pode dar zero! Dá pra desenhar a figura (...)*

Depois de um tempo perceberam que era necessário *corrigir o sinal* da altura, no intervalo em que a função era negativa e, dessa forma, a área da região procurada era obtida somando seus valores absolutos.

Da mesma maneira que o encontro anterior, após a plenária e a busca pelo consenso as alunas pediram para refazer os problemas, para encará-los munidas de mais ferramentas e informações sobre o conceito de Integral. O pesquisador entregou novas fichas de atividades para que elas refizessem as atividades antes de iniciar a etapa de formalização dos conceitos. Após 30 minutos, as participantes entregaram suas fichas e seguiu-se para última etapa do encontro.

Para encerrar este encontro, o pesquisador efetuou a formalização dos conteúdos na lousa, em posse de informações coletadas durante as observações e discussões realizadas ao longo desta sessão didática. Foi abordada a construção do conceito de integral, definida da mesma forma que proposto nos problemas desse encontro, utilizando-se partições de um intervalo, amplitude de um intervalo, área de retângulos, Soma de Riemann e finalizando-se com o limite desta soma.

Como consequência dessa definição de integral, foi apresentado o conceito de área de uma região limitada. Foram trazidos exemplos com funções trigonométricas e polinomiais, com regiões acima e abaixo do eixo horizontal, para reforçar aspectos abordados durante a resolução das atividades, o que o pesquisador observou serem deficitários por parte das alunas.

Ao final da etapa de formalização, o pesquisador pergunta para as alunas “O que é a Integral e para que serve?”. Conforme a experiência profissional do pesquisador, esse tipo de pergunta geralmente é feito pelos alunos, que necessitam saber da utilidade e aplicabilidade dos conceitos aprendidos em sala de aula. O trecho a seguir ilustra este diálogo.

***Pesquisador:** Já temos condições de responder o que é a Integral? E para que ela serve?*

***Aluna 1:** A Integral serve pra calcular a área de uma figura e achar aquela função [Primitiva] da aula anterior (...)*

***Aluna 2:** Pode falar que serve pra calcular espaço na Física.*

Pelo trecho percebe-se que a Aluna 1 lembrou da relação entre Integral e a Primitiva de uma função, abordado no encontro anterior, e o cálculo de áreas utilizando integrais,

conteúdo presente neste terceiro dia, cujo foco eram as atividades da Ficha de Atividades 2. E ainda, a Aluna 2 recordou-se de utilizar a Integral como um recurso em disciplinas específicas de Física.

Estendemos este encontro até as 18 horas, com a permissão e colaboração das participantes, que auxiliaram o professor pesquisador durante a formalização dos conteúdos.

Este terceiro encontro demonstrou que as alunas carregavam dificuldades desde o Ensino Médio que não foram corrigidas em momentos anteriores nas disciplinas de Fundamentos de Matemática Elementar ou mesmo CDI I, e estas somam-se às dificuldades pertencentes ao próprio CDI II, causando enormes transtornos às alunas ao cursarem esse componente curricular, onde ficam mais expostas essas dificuldades que podem convergir em desistência e evasão.

Ao professor pesquisador também cabe um alerta, pois esse deverá refletir sobre a disciplina de Fundamentos de Matemática Elementar (pois a ministrou em diversos momentos), em relação ao tratamento dado aos tipos de funções que constam na ementa desse componente curricular. Desse modo, seria possível dedicar uma carga horária maior dessa disciplina para o tópico de funções? Esse foco dado às funções acarretaria em benefícios aos alunos? Ainda não temos condições de responder estas questões.

#### **5.2.4 Quarto Encontro**

Atendendo a um pedido das alunas, marcou-se o Quarto encontro para a data de 03/04/2024 por conta das provas e demais atividades do curso de Física, com as quais estavam envolvidas, e a alteração foi feita no cronograma e não causou prejuízos para pesquisador e alunas. Retornamos às nossas atividades no Laboratório de Mecânica e Pneumática, sala G003, localizada no bloco G do câmpus do IFSP na cidade de Votuporanga.

Neste encontro foram abordadas algumas aplicações da Integral e problemas relacionados com conceitos comuns às alunas da Física, como espaço, velocidade e aceleração, dispostos na Ficha de Atividades 3 (localizada no APÊNDICE 04).

##### **5.2.4.1 Primeira parte**

Para começar as atividades, foi feita uma breve conversa informal com as alunas para perceber suas impressões em relação à MEAAMaRP, a qual pauta a sequência

didática elaborada. Responderam que apesar de cansativa e “*estranho*” num primeiro momento, se deparar com os problemas, discutir soluções e depois formalizar os conceitos “*parece que faz mais sentido*” se comparado ao ensino tradicional. Complementaram que estavam gostando do formato das aulas e da “*nova*” metodologia de ensino.

Conversamos um pouco sobre outras metodologias de ensino, PCN, BNCC, estágio supervisionado, utilização da RP como metodologia de ensino nos cursos de graduação, não apenas em Matemática ou cursos da área das Ciências Exatas. Disseram que seria bom que durante sua passagem pelo Ensino Básico ou pelo menos o Ensino Médio, tivesse utilizado essa abordagem. Uma das alunas comentou que pensa em utilizar a Resolução de Problemas como metodologia de ensino no momento de regência de aulas durante o Estágio Supervisionado (obrigatório para Licenciatura), informação que foi recebida com entusiasmo pelo professor pesquisador.

Após essa conversa, o pesquisador entregou a Fichas de Atividades 3 para as alunas, fez a leitura em conjunto e pediu que resolvessem os problemas indicados, ficando à disposição para maiores esclarecimentos. É notório que as alunas estão se habituando a essa dinâmica de aulas apoiadas na MEAAMaRP.

Ao receberem a ficha de atividades, efetuam a leitura individual e começam a refletir em busca de resolver os problemas propostos, não havendo aquela espera pela aula do professor, como apontamos no segundo encontro. As alunas ficaram por volta de 1 hora resolvendo os problemas, sob a mediação do professor. Faziam algumas perguntas relacionadas aos problemas, as quais o professor respondia fazendo comentários ou resgatando conceitos que já possuíam, tais como Primitiva de uma função, Integral definida ou equação horária do espaço.

Neste encontro foi possível observar uma leve mudança de comportamento das participantes, pois, estavam compartilhando mais informações entre si, especialmente sobre suas estratégias de resolução. Após o período combinado, as alunas entregaram suas fichas para o pesquisador e foi feito um intervalo de 20 minutos, antes de iniciar a Segunda parte deste encontro.

#### **5.2.4.2 Segunda Parte**

Na sequência à solução das atividades, deu-se continuidade nas etapas 6. *Registro das resoluções na lousa*; 7. *Plenária*; e 8. *Busca do consenso* do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), realizando-se uma discussão sobre as soluções efetuadas pelas

participantes para identificar suas dificuldades e encontrar a melhor solução para os problemas. O pesquisador levantou algumas questões e comentou sobre as resoluções e conceitos envolvidos nesta ficha.

***Pesquisador:** Vocês já conheciam estes problemas relacionados à equação horária da velocidade?*

***Aluna 1-** Já tinha visto um pouco dessas equações (...)*

***Aluna 2-** A gente já viu trabalho, força e energia com integral*

As alunas já haviam se deparado com algumas aplicações da Integral em disciplinas de Física, envolvendo conceitos como Trabalho de uma força, Energia e as equações de movimento. Além de situações apresentadas na disciplina de CDI II, cujo tema principal refere-se à Integral.

***Pesquisador:** O que podemos afirmar sobre as aplicações da integral? Vocês já viram outras? O que vocês acham?*

***Aluna 2:** A integral é usada pra várias coisas (...) igual essas que a gente disse.*

***Aluna 1:** A integral não serve só pra área e primitiva da função.*

Dessa forma, ficou evidente ao pesquisador que as alunas reconhecem que a Integral vai além de ser apenas um símbolo ou somente uma ferramenta para o cálculo de áreas de regiões do plano cartesiano. Elas percebem que a Integral pode ser usada em diversas situações, como apontaram no diálogo anterior.

***Pesquisador:** De maneira geral, quais as conclusões que podem ser feitas em relação aos conceitos abordados nesses problemas? Algum chamou mais a sua atenção?*

***Alunas:** Aquele [problema] do deslocamento e espaço percorrido foi bom pra lembrar a diferença da definição.*

Esse problema pedia para as alunas apontarem a diferença que há entre os conceitos físicos de espaço percorrido e deslocamento, depois era solicitado que encontrasse o deslocamento e o espaço percorrido por um corpo (ou partícula), contribuindo para uma perspectiva multidisciplinar de ensino.

Após essa etapa, as alunas pediram para refazer os problemas e foi acordado um tempo de 30 minutos para essa finalidade. Na sequência, o pesquisador, com auxílio e participação das alunas, realizou a formalização dos conteúdos na lousa. Foram abordados os conceitos de espaço percorrido e deslocamento, equação horária do espaço, equação horária da velocidade, Primitiva de uma função e algumas propriedades de integral. Foram discutidas, também, outras aplicações para a Integral, lembradas pelas participantes, em disciplinas específicas do curso de Física. Neste dia, a Aluna 2 foi à lousa para traçar o gráfico da função  $v(t) = \text{sen}(2t)$ , presente no problema 3.4 da Ficha de Atividades 3, o que ilustra, para nós, uma mudança de comportamento desta estudante.

Este quarto encontro apresentou algumas aplicações de Integral com objetivos de desenvolver habilidades de relacionar conceitos de Integral com outras áreas do conhecimento, além do CDI. Embora deve-se considerar o tempo de convivência entre o pesquisador e as alunas participantes, foi possível observar mudanças de comportamento entre as alunas participantes, o que pode ter ocorrido por elas já estarem se habituando melhor com a MEAAMaRP, discutindo mais sobre suas estratégias de resolução e relembrando conhecimentos prévios, a fim de solucionar os problemas dispostos na ficha de atividades.

Por outro lado, essas mudanças de comportamento das participantes descritas no parágrafo anterior podem ser referentes às potencialidades desenvolvidas pela própria MEAAMaRP, descritas por Onuchic e Allevato (2011), dentre as quais citamos a mudança de postura das alunas, o aumento de confiança e melhora da sua autoestima.

Apesar das alunas apresentarem dificuldades com conceitos de CDI, percebe-se, também, pelas observações do pesquisador, que estão se dedicando bastante durante a realização das atividades. A motivação das alunas consiste num elemento importante ao utilizar a MEAAMaRP em sala de aula.

### **5.2.5 Quinto Encontro**

O Quinto encontro destinado à aplicação da sequência didática elaborada para esta pesquisa ocorreu em 11/04/2024, na sala G003, no bloco G do câmpus. A Ficha de Atividades 4 (disponibilizada no APÊNDICE 04 desta tese de doutorado), cujo tema principal era o cálculo da área de *regiões estranhas* que utilizam integral como um instrumento para resolução, contemplou os problemas propostos pelo pesquisador.

Regiões estranhas, entre aspas, pois tratam-se de áreas não convencionais, resultado de interseções de funções e, devido a experiência profissional do pesquisador, normalmente causam espanto nos alunos.

Os problemas escolhidos para esta sessão didática contemplaram conceitos presentes em disciplinas como Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria Analítica e Vetores e CDI I, tais como funções e o traçado de seus gráficos, equações da reta, encontrar as raízes de equações e técnicas de Integração. A proposta foi de enriquecer as discussões com as participantes mediante a variedade de conceitos a serem explorados com a resolução desses problemas.

### 5.2.5.1 Primeira parte

Para dar início às atividades, o professor entregou a Ficha de Atividades 4 (APÊNDICE 04) às alunas participantes e fez a leitura em conjunto. Não havendo dúvidas quanto aos enunciados, passou para leitura individual e seguiu-se para a resolução dos problemas com tempo estimado de 1 hora. Foram contemplados os passos 2. *Leitura individual* e 3. *Leitura em conjunto* do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), e encaminhou-se para os passos 4. *Resolução do problema* e 5. *Observar e incentivar*, desse mesmo roteiro.

As alunas apresentaram algumas dúvidas para obter as regiões de integração, como a notação nos enunciados, a solução de equações para encontrar os limites de integração e o traçado dos gráficos de algumas funções, como apontado no diálogo a seguir:

*Aluna 2: Não consigo calcular a área do 4.2.*

*Pesquisador: Por que?*

*Aluna 2: Não sei qual é a região (...)*

*Pesquisador: O que significa  $-1 < x < 1$ ?*

*Aluna 2: Que  $x$  está entre  $-1$  e  $1$ .*

*Pesquisador: Certo. E  $-1 < y < x^3$ ?*

*Aluna 2: Que  $o y$  é menor [do] que  $-1$ , mas esse  $x^3$  eu não sei desenhar (...)*

*Pesquisador: Como você fazia gráficos no Ensino Fundamental e Médio? Qual era a estratégia que você usava?*

*Aluna 2: Eu fazia uma tabelinha com valores de  $x$  (...)*

*Pesquisador: Isso. Pode começar por esse caminho: faça a tabela, esboce o gráfico de  $x^3$  e você vai obtendo sua região de integração. Quer tentar?*

*Aluna 2: Sim, vou tentar assim.*

Percebeu-se a dificuldade em relação ao traçado do gráfico da função  $f(x) = x^3$  apresentada no enunciado do problema. A Aluna 2 lembrou que utilizava como estratégia para fazer gráficos, uma tabela simples, atribuindo valores para variável e encontrando os valores de sua imagem. Geralmente, na disciplina de CDI são utilizadas ferramentas como cálculo de limites, assíntotas verticais e horizontais, pontos de inflexão, intervalos de crescimento e decrescimento, entre outros, para esboçar o gráfico de funções.

Durante as observações do professor pesquisador, as participantes haviam apresentado dificuldades em traçar o gráfico de funções, da mesma forma que em encontros anteriores. Essa competência é fundamental para resolver problemas voltados ao cálculo de áreas, pois é necessário analisar a região para obter a função a ser integrada, bem como os limites de integração. As participantes finalizaram suas atividades e entregaram suas fichas ao pesquisador. Foi estipulado um intervalo de 20 minutos antes do início da Segunda parte das atividades programadas para este encontro.

### **5.2.5.2 Segunda Parte**

Após o retorno do intervalo, e dando sequência às atividades programadas, o professor pesquisador realizou o desenvolvimento das etapas 6. *Registro das resoluções na lousa*, 7. *Plenária*, e 8. *Busca do consenso* do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), com a colaboração das participantes, levantando algumas questões para iniciar as discussões com as alunas.

*Pesquisador: Vocês já tinham visto este conteúdo antes? [área de uma região]*

*Aluna 1: Um pouco, em Cálculo 2, mas parece que está diferente.*

*Pesquisador: Diferente (...) como assim? Conseguem me dizer?*

*Aluna 1: Parece que tem mais coisas pra fazer, não é só fazer a integral (...)*

*Aluna 2: A gente não fazia essas contas, era só integrar a função (...)*

Embora elas já tivessem visto o conteúdo do cálculo de área usando integral na disciplina de CDI II, as participantes não se atentaram aos elementos essenciais que

deveriam ser encontrados nos problemas para encontrar a área da região. É preciso esboçar o gráfico das funções e verificar a região de integração, os limites de integração e demais ajustes de sinais ou variáveis que devem ser feitos. O professor fez essa explicação no quadro para as participantes.

***Pesquisador:** Quais as dificuldades que vocês encontraram com esses problemas?*

***Aluna 1:** Eu me perco com o gráfico e encontrar os valores de  $x$ , mas eu sei que vou fazer uma integral no fim, porque eu encontro a área calculando a integral.*

***Pesquisador:** Correto. E o que precisamos para calcular a área de uma região?*

***Aluna 1:** Precisa da figura e os valores de  $x$  e fazer uma integral.*

Nota-se que o conceito de integral para o cálculo da área de uma região está bem definido, de acordo com as falas da aluna. Entretanto, nas etapas anteriores, ao se resolver a Integral definida, como encontrar a região e obter os limites de integração são percebidas dificuldades na solução dos problemas.

Novamente, a dificuldade em traçar gráfico de funções aparece destacada na fala de uma das alunas, corroborando a necessidade de dar atenção especial às Funções nos momentos oportunos, como nas disciplinas de Fundamentos de Matemática Elementar e CDI I, pois, esse tema consta na ementa das disciplinas, conforme o PPC do curso de Física (IFSP, 2023). Ficou claro que o conceito de Integral para calcular área de regiões está consolidado pelas alunas, posto que responderam ao pesquisador que para calcularem a área de uma região precisavam calcular uma integral.

Ao final destas etapas, as alunas pediram para refazer os problemas que tiveram mais dificuldades e o professor concedeu 30 minutos para essa finalidade. Para encerrar este encontro, foi realizada a formalização do conteúdo, contemplando uma explicação do professor com o auxílio e participação das alunas. Foram abordados o cálculo de algumas regiões limitadas para discutir o traçado do gráfico de funções e a resolução dos problemas com as alunas participantes. O professor também realizou o esboço de alguns gráficos de funções trigonométricas e polinomiais, importantes para buscar a região de integração e, com isso, ajudar as participantes a superarem algumas destas dificuldades apresentadas. É notório que a ausência de conhecimentos prévios sobre funções e seus gráficos e resolução de equações são fatores dificultadores da aprendizagem de conteúdos de CDI.

O Quinto encontro confirmou a dificuldade das participantes em traçar o gráfico de funções, elemento essencial para o cálculo de áreas usando integral. É preciso adotar medidas para reduzir essa dificuldade e, possivelmente, a disciplina de Fundamentos de Matemática Elementar possa auxiliar a amenizar tais dificuldades, realizando um tratamento mais amplo e profundo sobre as funções.

As alunas mostram-se mais habituadas com a metodologia de ensino adotada e mais propensas às discussões - entre si e com o pesquisador - e participaram durante a aula expondo suas estratégias e lembrando parcialmente alguns conceitos.

É possível observar uma mudança de postura das alunas ao longo das sessões de ensino, o que pode indicar uma evolução advinda do uso da MEAAMaRP, pois essa metodologia colabora com o desenvolvimento do protagonismo do aluno na sua construção de conceitos e significados.

Como a MEAAMaRP possui viés construtivista, espera-se, como indicado por Fiorentini (1995), que o papel do aluno nesta tendência pedagógica de ensino de Matemática seja apoiado na construção ativa do conhecimento pelo próprio sujeito mediante ações interativas e reflexivas com o ambiente ou atividades. Complementa-se essa afirmação com observações efetuadas no decorrer da sessão didática, na qual as alunas, ao receberem a ficha de atividades, primeiramente tentam resolver os problemas e depois chamam o professor para auxiliá-las.

Outro ponto a ser destacado é referente ao ganho de confiança das alunas em expor seus argumentos matemáticos nos momentos da plenária.

### **5.2.6 Sexto Encontro**

Antes de comentar sobre o Sexto encontro, é preciso comentar sobre uma adequação efetuada no cronograma, em consenso entre as alunas participantes e o professor pesquisador. Havia indicativos de greve nas Universidades e Institutos Federais, com informações de alguns campi tendo suas atividades paralisadas. Em conversas no grupo de *WhatsApp*, e por faltar apenas dois encontros para o término da coleta de dados desta pesquisa, ficou combinado realizá-los em dois dias consecutivos, sem prejuízos para as participantes, tampouco para o pesquisador. Dessa forma, o Sexto encontro ficou marcado para 17/04/2024 e o Sétimo encontro ocorreu dia 18/04/2024. Apontamos essa situação inesperada para mostrar que, apesar de todos os esforços e planejamentos do pesquisador, há mudanças que podem ocorrer no desenvolvimento de uma pesquisa.

Isso posto, o Sexto encontro, ocorrido em 17/04/2024, na sala G003 do bloco G do câmpus, contemplava a Ficha de Atividades 5 (disponibilizada no APÊNDICE 04 ao final desta tese de doutorado). O conteúdo abordado relacionava-se com mudanças de variáveis na Integral, conceito frequente também em outras disciplinas do curso de Física, o qual é preciso ter noções bem consolidadas.

### 5.2.6.1 Primeira parte

O professor entregou a Ficha de Atividades 5 para as participantes, fez a leitura em voz alta e perguntou se havia, inicialmente, alguma dúvida. Recebendo uma resposta negativa das participantes, o professor pesquisador pediu que as alunas resolvessem os problemas e ficou à disposição para auxiliá-las, conforme os passos 2. *Leitura individual* e 3. *Leitura em conjunto*, do roteiro de Onuchic e Allevato (2011).

Ao longo das sessões didáticas, as alunas vão se mostrando mais flexíveis em relação à mudança de postura, necessária para a MEAAMaRP, atuando como agentes ativos em sua construção de conhecimentos. É notório, também, que as alunas adquirem o hábito de resolverem problemas ou, pelo menos, tentam resolver os problemas propostos. Comportamento diferente do anseio pela *aula*, como relatamos nos primeiros encontros.

As participantes têm interagido mais uma com a outra, fazendo perguntas, argumentando sobre etapas das soluções, analisando suas estratégias e explicando suas soluções. As alunas têm aproveitado o momento de resolver os problemas para fazer boas discussões. Dessa forma, a aula se torna mais atrativa e dinâmica para as participantes e o processo de solução dos problemas fica mais elaborado. O trecho a seguir expressa um diálogo entre as alunas ao solucionarem o primeiro item do problema 5.1 da Ficha de Atividades 5.

*Aluna 1: Você fez o primeiro? [questionando a Aluna 2, sobre o problema 5.1] Vou fazer essa conta e chegar na função (...) [se referindo a desenvolver o expoente de grau 3 obter um polinômio para integrar].*

*Aluna 2: Pra mim é mais fácil fazer  $u=x+1$  e fazer as contas.*

É evidente que a troca de informações e o compartilhamento de estratégias de solução contribuem para melhorias nos processos de aprendizagem de CDI. Enquanto as alunas resolvem os problemas, o professor continua a fazer observações, sugestões e

questionamentos durante a etapa de resolução dos problemas, com o objetivo de auxiliar e incentivar as participantes, como estabelecido nos passos 4. *Resolução do problema* e 5. *Observar e incentivar*, do roteiro das autoras supracitadas. Foi estipulado 1 hora para que solucionassem os problemas propostos na Ficha de Atividades 5 e ao término desse tempo, entregaram suas fichas de atividades para o professor e foi realizado um intervalo de 20 minutos.

### 5.2.6.2 Segunda parte

Após o retorno do intervalo, foram realizados os passos 6. *Registro das resoluções na lousa*, 7. *Plenária*, e 8. *Busca do consenso*, do roteiro de Onuchic e Allevato (2011). O professor pesquisador motivou as discussões com algumas questões, as quais podem ser vistas nos trechos a seguir:

*Pesquisador: Já viram mudanças de variáveis em Cálculo 2?*

*Alunas: Sim.*

*Pesquisador: Quais as dificuldades que vocês tiveram neste tipo de problema?*

*Aluna 1: Encontrar o  $u$  [a nova variável] e um pouco de Matemática Básica. A gente precisa lembrar bastante coisa de Cálculo 1 também, às vezes me confundo.*

A mudança de variáveis na Integral é um assunto conhecido pelas alunas, visto que existe um conteúdo correspondente no CDI I, ao realizar mudanças de variáveis para derivar funções compostas e a mudança de variáveis na Integral, que corresponde ao CDI II.

*Pesquisador: Quais observações vocês podem fazer sobre estes tipos de problemas?*

*Aluna 1: Nunca sei quem chamar de  $u$  (...) como faço isso?*

*Pesquisador: Você precisa ter em mente que o  $du$  deve estar no integrando. Se chamar alguém de  $u$ , a derivada dele precisa estar no integrando, pra ser o  $du$ .*

*Aluna 1: Vou pensar nisso (...)*

Essa dificuldade em mudar as variáveis, “quem chamar de  $u$ ”, corresponde a identificar o termo presente no integrando que deverá ser renomeado com a variável auxiliar  $u$ . Pelas experiências do professor pesquisador, essa dúvida é recorrente também no CDI I, ao tratar de mudanças de variáveis com Derivadas.

*Pesquisador: Quais as conclusões que podem ser feitas em relação aos conceitos abordados nesses problemas, relacionados ao Cálculo 2?*

*Aluna 2: Sei que vou chamar alguém de u e encontrar o du, mas eu fico testando u até dar certo.*

É possível que a *Aluna 2* possua a noção da necessidade de mudar a variável na Integral e esse conceito esteja consolidado, entretanto, há uma dificuldade operacional em executar essa troca de variável para conclusão de seus cálculos.

Após esta etapa, as participantes pediram para refazer os problemas e levaram 30 minutos para isso. Finalizada esta etapa, o professor formalizou os conceitos pertinentes aos conteúdos da Ficha de Atividades 5, revendo a Regra da Cadeia para Derivadas e abordando a mudança de variáveis na Integral, com o auxílio das alunas, e deu mais alguns exemplos. Essa abordagem, relacionando os conceitos de Derivadas e Integrais foi realizado objetivando que as alunas percebessem que existe certa semelhança entre esses conteúdos.

O sexto encontro trouxe à tona dificuldades relatadas pelas alunas em Matemática Básica, além da conhecida dificuldade de traçar gráficos de função. As observações do professor pesquisador reforçam suas crenças de que as dificuldades do CDI II estão relacionadas com deficiências nos conhecimentos prévios oriundos do Ensino Médio e somadas às defasagens de aprendizado em CDI I. O próximo encontro será destinado ao encerramento da etapa de coleta e produção de dados desta pesquisa de doutorado.

### **5.2.7 Sétimo Encontro**

O Sétimo encontro ocorreu em 18/04/2024, na sala G003, bloco G do câmpus do IFSP, em Votuporanga. Este será o último encontro para coleta dos dados da pesquisa, e as alunas participantes fizeram a Avaliação Diagnóstica Final (ADF) com objetivos de encerrarem o ciclo destas sessões didáticas elaboradas para pesquisa e trazer mais um elemento para o pesquisador analisar o processo de construção de conhecimentos das participantes ao longo das aulas.

Após a ADF, as participantes responderam um Questionário de pesquisa com questões sobre a disciplina de CDI II e a respeito da MEAAMaRP, com o objetivo de se

registrar algumas impressões diretas sobre a metodologia de ensino adotada. Era previsto, conforme o cronograma elaborado pelo pesquisador, 1h30 para responder a ADF e 40 minutos para o Questionário de pesquisa.

O professor entregou a ADF (APÊNDICE 05) para as participantes, fez a leitura em voz alta e perguntou se tinham dúvidas em relação aos enunciados. Sem perguntas neste momento, foi pedido que resolvessem a ADF individualmente, mas as alunas poderiam conversar entre si, caso quisessem (como ocorria durante as aulas). Em alguns momentos as participantes faziam perguntas ao pesquisador, que manteve sua forma de mediação, auxiliando-as sem fornecer respostas prontas, ajudando-as a se lembrar de situações que foram abordadas durante as sessões didáticas ou conceitos pertinentes ao CDI.

Finalizada a ADF, as participantes quiseram responder ao Questionário de pesquisa (APÊNDICE 06) na sequência, sem fazer um intervalo. Com a concordância do professor pesquisador, as alunas responderam algumas perguntas sobre a disciplina de CDI II, a metodologia de ensino adotada durante a coleta de dados da pesquisa e as impressões, das participantes, sobre essa metodologia, a MEAAMaRP. Tanto a ADF quanto o Questionário de pesquisa encontram-se no APÊNDICE 05 e no APÊNDICE 06, respectivamente, ao final deste trabalho.

Ao encerrar, o professor recolheu o Questionário, agradeceu as alunas pelo compromisso, dedicação e demais contribuições durante este período de participação na pesquisa. O professor pesquisador comprometeu-se a entregar uma cópia do relatório de pesquisa (em linguagem acessível) às participantes, cumprindo, assim, uma das exigências do CEP. O relatório foi confeccionado e enviado para as alunas participantes alguns dias após a sessão pública de defesa desta tese de Doutorado. O relatório de pesquisa pode ser visto no APÊNDICE 07.

O Sétimo encontro desta sequência didática teve como objetivo principal a aplicação da ADF (APÊNDICE 05) e o preenchimento do Questionário de pesquisa (APÊNDICE 06) para coletar algumas informações importantes das participantes.

Com a ADF, buscou-se analisar a compreensão das alunas referentes aos conceitos pertinentes à disciplina de CDI II, como Primitivas de uma função, Integral definida, cálculo da área de uma região do plano, mudança de variáveis na Integral. Destacamos que os problemas apresentados na ADF foram inéditos para as participantes,

no sentido de não terem sido abordados durante as sessões didáticas. Em termo de conteúdo, a ADF possuía conceitos pertinentes à sequência didática elaborada.

O Questionário de pesquisa fez-se necessário para obtenção de informações adicionais sobre as impressões que as alunas participantes possuem da disciplina de CDI II e sua relevância durante sua formação acadêmica e, especialmente, quais análises puderam realizar acerca da MEAAMaRP, utilizada durante as sessões didáticas para coleta de dados e produção de registros. Como licenciandas em Física e futuras professoras, destaca-se a importância de vivenciar experiências com metodologias de ensino diferentes da tradicional, em que o sujeito tem um papel passivo e é mecanizada.

### **5.3 Discussões sobre a coleta de dados desta pesquisa**

Finalizamos a aplicação dos instrumentos de coleta de dados desta pesquisa de doutorado, a saber: a ADI, a sequência didática, a ADF e o Questionário de pesquisa. Consideramos necessário levantar algumas discussões e apontamentos sobre essa etapa da nossa ED, visando contribuir com as análises dos dados coletados - o que faremos no capítulo seguinte, intitulado como *Análises a posteriori* e validação - e, especialmente, em auxiliar o professor pesquisador a responder sua questão diretriz: De que forma a utilização de sequências didáticas, desenvolvidas com base nos pressupostos metodológicos da ED e da MEAAMaRP, pode contribuir para o enriquecimento de processos de ensino e aprendizagem de conceitos de Integral? Quais potencialidades e limitações podem ser verificadas?

Foram realizados sete encontros com as duas participantes da Licenciatura em Física para efetuar a coleta de dados para fins desta pesquisa. No primeiro encontro foram contempladas as questões burocráticas pertinentes à pesquisa e a aplicação da ADI. Os cinco encontros seguintes foram planejados para aplicação da sequência didática, elaborada segundo os pressupostos teórico-metodológicos da MEAAMaRP e com o suporte da ED e, por fim, o último encontro contemplou a aplicação da ADF e do Questionário de pesquisa.

No decorrer deste capítulo foram descritas as observações efetuadas pelo professor pesquisador durante a coleta de dados e produção de registros das participantes. O pesquisador foi o responsável pela elaboração, planejamento, aplicação, mediação e observações de todas as etapas da coleta de dados durante os encontros realizados nesta pesquisa. Por conta disso, as observações do pesquisador, relatadas ao longo deste

capítulo, juntamente com os registros produzidos pelas alunas, constituem-se elementos importantes para análise dos dados coletados, a ser apresentado no capítulo seguinte.

Em relação à ADI, o pesquisador notou que as participantes ficaram um pouco tensas durante a realização desta atividade e, por conta disso, fez comentários sobre a importância deste instrumento da coleta de dados, objetivando a pesquisa. Não era necessário que as alunas se preocupassem com notas, pois o pesquisador estava interessado em verificar conhecimentos prévios e noções conceituais que as alunas possuíam, para dar seguimento à aplicação da sequência didática.

No que se refere à aplicação da sequência didática, primeiramente, foi necessário fazer adequações no cronograma estabelecido pelo pesquisador, considerando os ajustes solicitados pelas participantes em virtude às questões acadêmicas, como provas e seminários exigidos durante o curso de graduação. Houve uma alteração devido a possibilidade de greve (que de fato aconteceu no ano de 2024) nas Universidades e Institutos Federais. Essas mudanças no cronograma foram realizadas em consenso entre as participantes e o professor pesquisador, sem prejuízos a nenhum dos envolvidos.

Durante a aplicação da sequência didática, o pesquisador deixou apontado os momentos correspondentes aos passos do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), conforme os pressupostos da MEAAMaRP. Fizemos esses apontamentos repetidamente (talvez de maneira exacerbada) com o objetivo de orientar o leitor sobre as etapas da MEAAMaRP que estavam sendo contempladas no decorrer da aula.

Vale destacar que a mudança de uma etapa para outra do roteiro é feita de maneira natural, sem avisos prévios ou rupturas que sinalizam o final de uma etapa e o início de outra. É possível perceber que algumas etapas ocorrem sequencialmente, sem interrupções e outras ocorrem ao mesmo tempo.

Para ilustrar o que foi apontado no parágrafo anterior, ao iniciar um dos encontros, o pesquisador entregava a ficha de atividades para as alunas, fazia a leitura em voz alta, pedia que elas lessem individualmente e resolvessem os problemas, ao passo que o professor fazia suas observações e as auxiliava quando solicitado. Em poucos minutos foram cumpridos os passos 1. *Preparação do problema*, 2. *Leitura individual*, e 3. *Leitura em conjunto*, do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), e estávamos vivenciando, concomitantemente, os passos 4. *Resolução do problema* e 5. *Observar e incentivar*, do roteiro elaborado por essas autoras. Da mesma forma que podemos apontar as etapas 7. *Plenária* e 8. *Busca do consenso* desse roteiro, visto que foram realizadas discussões entre o pesquisador e as alunas, de maneira fluida e natural.

Outro aspecto a ser destacado em relação à descrição da aplicação da sequência didática condiz com apontamentos efetuados em nossa Revisão de Literatura, na seção 3.1 desta tese. Os trabalhos que analisamos trataram os passos 6. *Registro das resoluções na lousa*, 7. *Plenária*, 8. *Busca do consenso*, e 9. *Formalização do conteúdo*, do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), de maneira superficial e dando a entender, especialmente, que a Formalização do conteúdo corresponde a uma aula normal, tradicional e passiva.

Optamos por descrever as atividades que foram realizadas em cada uma dessas etapas indicadas reforçando que a etapa de Formalização do conteúdo corresponde ao momento de apresentar, matematicamente, os conceitos abordados por meio da resolução dos problemas propostos. Cabe ao professor ficar atento, em suas observações, e verificar algumas dúvidas apresentadas pelos seus alunos e inserir os conceitos pertinentes neste momento de Formalização do conteúdo, contribuindo para enriquecer a formação destes alunos.

Em nossa coleta de dados, durante a aplicação da sequência didática, foi feita essa inserção de conteúdos conforme as alunas apresentavam erros conceituais, mediante observações do professor pesquisador.

Com efeito, sobre as participantes, foi possível perceber a mudança de postura ocorrida ao longo desse período da coleta de dados. Inicialmente, elas estavam curiosas e motivadas em participar desta pesquisa e experienciar outra metodologia de ensino, mas adotavam uma postura passiva, aguardando orientações ou explicações do professor pesquisador, como habitualmente ocorre na aula tradicional.

Nos encontros iniciais, elas aguardavam pelo momento que o professor faria uma explicação dos conteúdos a serem utilizados na resolução dos problemas propostos e pouco compartilhavam estratégias e soluções. Elas trabalhavam individualmente na maior parte do tempo e era perceptível uma resistência em relação à mudança causada por conta da MEAAMaRP adotada durante as aulas. Ao longo dos encontros, as alunas foram modificando seu comportamento, pois, agora tentavam resolver os problemas, faziam algumas perguntas ao professor pesquisador e depois, durante as discussões, argumentavam e tiravam outras dúvidas e auxiliavam no momento de formalizar o conteúdo.

Nesse sentido, pode-se afirmar que houve um aumento da confiança dessas alunas em relação à sua capacidade em aprender Matemática. Para finalizar essas discussões, a aplicação da ADF e do Questionário de pesquisa ocorreu de maneira tranquila, com as

alunas percebendo a importância desses instrumentos de coleta de dados para esta pesquisa. Assim, finalizaram sua participação, a qual o professor pesquisador é muito grato.

Para encerrar este capítulo de Experimentação, que contempla a terceira etapa da nossa ED, tecemos alguns comentários pertinentes. Escolhemos aplicar esta sequência didática em um horário fora do período de aula das participantes, de forma que não prejudicasse seus compromissos acadêmicos e pessoais. Por outro lado, não quisemos causar transtornos ao andamento da disciplina de CDI II do curso de Licenciatura em Física.

Em relação ao roteiro de nove passos estabelecido por Onuchic e Allevato (2011), foram necessárias algumas adaptações. As etapas 6. *Registro das resoluções na lousa*, 7. *Plenária*, e 8. *Busca do consenso* foram realizadas de uma maneira diferente, pois havia na sala somente o professor pesquisador e as duas alunas participantes. Compartilhamos as soluções olhando as Fichas de Atividades das alunas e discutimos o que havia sido feito e quais motivos as levaram a usar daquelas estratégias. Seguindo nossas discussões e comentando sobre quais conceitos eram abordados, as alunas compreendiam como poderiam resolver os problemas propostos. Para uma sala com mais alunos, a abordagem deve ser diferente e cabe ao professor compreender a melhor dinâmica que pode encaminhar para sua realidade. Como sugestão, o professor poderia formar e trabalhar em grupos, cronometrar um tempo de exposição para cada um deles pedir a participação dos membros dos grupos durante a etapa de formalização dos conceitos.

Após a etapa de discussões, as alunas pediam para refazer os problemas com a concordância do professor pesquisador, que lhes entregava outra ficha de atividades. Isso ocorreu anteriormente à etapa de Formalização do conteúdo. Em momento oportuno, durante a análise dos dados, faremos a verificação dos efeitos que as etapas de discussões, como a plenária, causaram às alunas durante essas sessões didáticas.

Não foi possível verificar alguns aspectos que nos interessam com o desenvolvimento das atividades dessa sequência didática, como avaliar o trabalho em duplas ou grupos em decorrência da quantidade de participantes. Outro aspecto a ser comentado refere-se à quantidade de aulas (ou encontros) planejados para aplicação de uma sequência didática. Quais os impactos para aprendizagem de conceitos de Integral podem ser verificados se fossem planejada uma quantidade maior de sessões didáticas? Por não ter uma resposta, fica uma sugestão para pesquisas futuras.

A análise dos dados desta pesquisa será realizada no capítulo a seguir, entretanto, podemos apontar de forma superficial, considerando as observações efetuadas durante a aplicação da sequência didática e relatos das próprias participantes, que algumas das suas dificuldades correspondem a conteúdos do Ensino Médio, como traçar gráficos de funções, operações com frações e encontrar as raízes de equações.

Encerramos este capítulo após a aplicação dos instrumentos de coleta de dados e produção de registros desta pesquisa de doutorado. Acrescentam-se a esses instrumentos da coleta de dados e produção de registros as observações, anotações, relatos das participantes e reflexões do professor pesquisador. No capítulo seguinte, intitulado como *Análises a posteriori* e validação, será efetuada a análise dos dados coletados para realização desta pesquisa de doutoramento.

*No caso da engenharia didática, a validação dos resultados é obtida pela confrontação entre os dados obtidos na análise a priori e a posteriori, verificando as hipóteses feitas no início da pesquisa. [...] Dessa maneira, enquanto procedimento metodológico, a engenharia didática se fundamenta em registros de estudos de caso, cuja validade é interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada (País, 2019, p. 101).*

## **6. ANÁLISES A POSTERIORI E VALIDAÇÃO**

Estamos caminhando em direção ao final desta jornada, contudo, ainda há muito a ser feito. No capítulo anterior, cumprimos a terceira etapa desta ED, chamada de Experimentação, cuja característica principal compete à aplicação dos instrumentos de coleta de dados da pesquisa e a descrição dos fatos que mais chamaram a atenção do professor pesquisador no decorrer de suas observações. Configura-se como o momento em que pesquisador e participantes da pesquisa se encontram para efetuar a coleta de dados e produção de registros, etapa fundamental para a investigação.

Retomando, de maneira sucinta, os passos anteriores desta ED que propusemos realizar até a chegada neste capítulo, iniciamos na etapa de Análises preliminares (apresentada no capítulo 3) e elaboramos a revisão de literatura, a análise de livros didáticos de CDI, a contextualização histórica do ensino de CDI no Brasil e as heranças que carregamos, e a apresentação do ambiente de coleta de dados da pesquisa contemplando o curso de Licenciatura em Física do IFSP, câmpus localizado na cidade de Votuporanga.

Na segunda etapa, Concepções e análises *a priori* (explorada durante o capítulo 4), concentramos nossos esforços na concepção e elaboração dos instrumentos da coleta de dados desta pesquisa, como a ADI, a sequência didática, a ADF e o Questionário de pesquisa. Foram apresentados os objetivos de cada problema proposto e as estratégias de solução esperadas pelo professor pesquisador.

Em relação à etapa seguinte desta ED, chamada de Experimentação (disposta no capítulo 5), foram descritos detalhadamente todos os encontros realizados entre o professor pesquisador e as participantes da pesquisa durante a aplicação dos instrumentos da coleta de dados e produção de registros para fins desta investigação.

Dessa forma, este capítulo é dedicado às Análises *a posteriori* e validação da pesquisa, quarta e última etapa da ED, na qual cabe ao pesquisador analisar os dados coletados com objetivos de validar sua pesquisa, aceitando as hipóteses efetuadas. De acordo com Pais (2019, p. 101)

A fase da análise *a posteriori* refere-se ao tratamento das informações obtidas por ocasião da aplicação da sequência didática, que é a parte efetivamente experimental da pesquisa. Esses dados podem ser obtidos pela experimentação direta do pesquisador ou equipe de aplicação da experiência, desde que sejam devidamente registrados, de forma objetiva, nos protocolos da experiência. O importante é que essa análise atinja a realidade da produção dos alunos, quando possível, desvelando seus procedimentos de raciocínio. A análise *a posteriori* tende a enriquecer, quando possível, complementar os dados obtidos por meio de outras técnicas, tais como, questionários, entrevistas, gravações, diálogos, entre outras (Pais, 2019, p. 101).

Concordamos com esse autor e, por conta disso, em nossa ED, coletamos os registros produzidos pelas alunas participantes conforme foram aplicadas as fichas de atividades que compõem a sequência didática desenvolvida para pesquisa. Complementamos a coleta de dados com as respostas do Questionário de pesquisa e demais observações e diálogos descritos pelo pesquisador ao longo da etapa de Experimentação, constituindo um arcabouço robusto de material a ser analisado pelo professor pesquisador, objetivo a ser realizado no decurso deste sexto capítulo.

Para orientar o leitor, apresentaremos a maneira que serão levantadas as análises e validação da sequência didática desta ED. Inicialmente, será apresentado o problema proposto, seu objetivo pedagógico e na sequência retomamos sucintamente as estratégias de solução esperadas pelo professor pesquisador (os detalhes foram apresentados no capítulo 4 desta tese). Feito isso, são descritas e exibidas as respostas das participantes, coletadas por meio dos registros produzidos pelas alunas. Por fim, serão confrontadas as análises *a priori* com as análises *a posteriori* verificando as hipóteses da pesquisa, ou seja, comparam-se as estratégias de solução dos problemas esperadas pelo professor pesquisador com as respostas produzidas pelas participantes, buscando traços de enriquecimento nos processos de aprendizagem das alunas.

Segundo Bittar (2017), as preocupações do pesquisador nesta etapa da ED, ao confrontar as análises *a priori* com *a posteriori*, devem estar voltadas para evolução do sujeito no percurso da realização da sequência didática. Ademais, a referida autora complementa que esse confronto deve ser efetuado ao longo de todo o processo da ED e,

é por esse fato que a ED se caracteriza como um processo de validação interna. Ao comparar as estratégias de solução esperadas pelo pesquisador com os registros produzidos pelas alunas é possível levantar informações com objetivos de buscar melhorias nos processos de ensino e aprendizagem. Iniciaremos nossas análises verificando os conhecimentos prévios e noções básicas de CDI que as alunas possuem, obtidos conforme investigação apontada pela ADI.

### 6.1 Análise da Avaliação Diagnóstica Inicial (ADI)

A ADI foi elaborada com objetivos de verificar conhecimentos prévios que as participantes possuem sobre conteúdos relacionados às Funções e Derivadas, bem como, possíveis noções sobre conceitos referentes à Integral, como Primitivas, algumas técnicas de integração ou cálculo de áreas por meio de integrais. Embora a ADI não se configure como elemento imprescindível da ED, o pesquisador entendeu que a mesma seria importante para se ter um ponto de partida para iniciar sua investigação, ou seja, para se ter conhecimento dos conhecimentos prévios das alunas.

A primeira questão que compõe a ADI pedia para encontrar a primitiva da função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ , conforme disposto no Quadro 41 a seguir.

**Quadro 41** - Problema 1 da ADI.

1- Dado  $x \in \mathbb{R}_+$  encontre uma primitiva da função  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ .

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Para situar o leitor, para cada problema apresentado, serão indicadas as estratégias de solução esperadas conforme as concepções do professor pesquisador, depois tecemos comentários individualizados em relação ao registro de cada aluna participante e depois far-se-á uma análise em conjunto desses registros, culminando com o confronto das análises *a priori* e *a posteriori*. Nesse confronto, quando necessário, serão consideradas também as observações descritas pelo professor pesquisador na etapa de Experimentação desta ED por nós desenvolvida.

Para o problema 1 da ADI, esperava-se que as participantes integrassem a função dada para obter sua primitiva ou, de outra forma, por tentativas, seria possível encontrar uma função cuja derivada fosse  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ , dada no enunciado do problema. A partir da análise da ADI, foi possível perceber que a Aluna 1 conhece o conceito de derivada, pois

ela reconheceu que  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  representa uma função composta, realizou uma troca de variáveis, fazendo  $u = x + 2$ , mas equivocou-se ao efetuar a integral, não utilizando os procedimentos corretos. A Figura 11, apresentada no que segue, ilustra a resposta da Aluna 1.

**Figura 11** - Problema 1 da ADI- Aluna 1.

1- Dado  $x \in \mathbb{R}_+$  encontre uma primitiva da função  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ .

função composta  
anti-derivada

$F(x) = \text{primitiva}$   
 $F'(x) = f(x)$

$u = \frac{1}{u}$

$\int \frac{1}{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du$

Substituindo

$\int \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2x+4} + K$

$u = x+2$   
 $\frac{du}{dx} = 2$   
 $du = 2 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

Fonte: Dados da pesquisa.

A Aluna 2, cujo registro está apresentado na Figura 12, apresentou um resultado para integração, porém esse não é condizente com o método adequado. É possível que a participante tenha se confundido em relação à técnica de integração a ser utilizada.

**Figura 12** - Problema 1 da ADI- Aluna 2.

1- Dado  $x \in \mathbb{R}_+$  encontre uma primitiva da função  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ .

$F(x) = f(x)$  •  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  •  $F'(x) = ?$  •  $\int f(x) dx$

Tentei usar o método da integração para a resolução do exercício, mais o resultado final é  $(1-2x+k)$ , o que me fez pensar que não é a opção certa para resolver o exercício, não lembro outro método.

*“Tentei usar o método da integração para a resolução do exercício, mais o resultado final é  $(1-2x+k)$ , o que me fez pensar que não é a opção certa para resolver o exercício, não lembro outro método”.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Portanto, no que se refere aos registros produzidos pelas alunas participantes na primeira questão da ADI, percebeu-se que essas possuem noções sobre derivadas, mudanças de variáveis e composição de funções, primitivas e integral. Entretanto, é visível que esses conceitos não estão bem definidos para as participantes.

A segunda questão da ADI abordou o cálculo da área de uma região, utilizando integral, como ilustrado no Quadro 42 a seguir.

**Quadro 42** - Problema 2 da ADI.

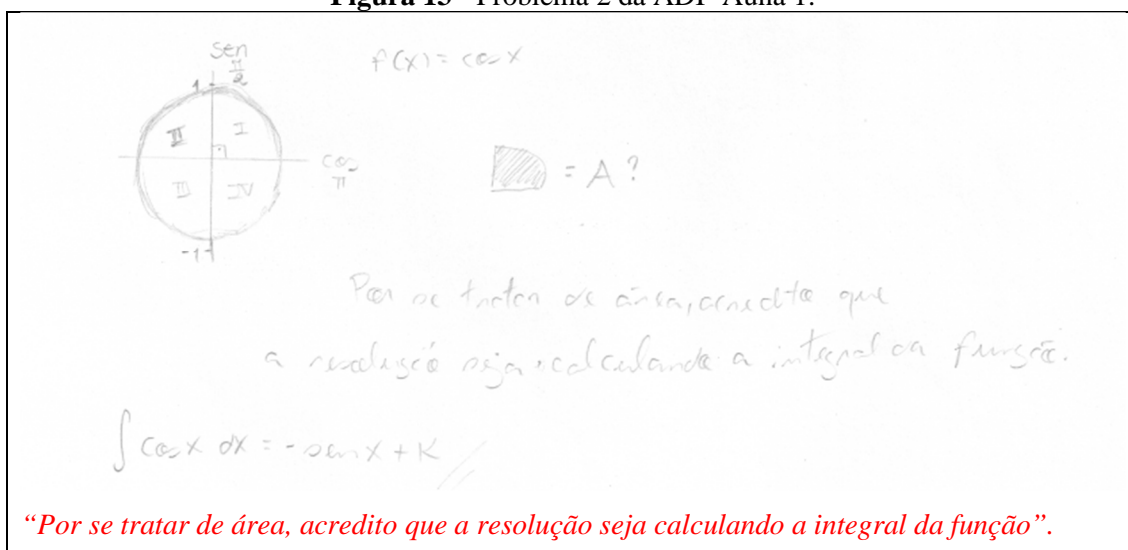
2- Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = \cos x$ , com  $x \in \mathbb{R}$ . Qual a área da região formada no primeiro quadrante, abaixo do gráfico de  $f(x)$ , limitada pelas retas  $x = 0$  e  $x = \frac{\pi}{2}$  ?

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Para resolver este problema, as participantes poderiam ter esboçado o gráfico da região descrita em notação de conjuntos de pontos, encontrado o intervalo de integração e a função que deveria ser utilizada para resolver a questão.

Na análise das estratégias de solução para essa questão, percebeu-se que a Aluna 1 esboçou o ciclo trigonométrico para obtenção de valores, mas não incluiu o intervalo de integração em seus cálculos. A Figura 13 apresenta o registro coletado da Aluna 1.

**Figura 13** - Problema 2 da ADI- Aluna 1.



**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 não esboçou o gráfico da função corretamente e o enunciado pode tê-la induzido a traçar a reta  $x = \frac{\pi}{2}$ , apesar dessa linguagem ser comum em livros de Cálculo (de autores como Guidorizzi e Leithold, utilizados nos cursos de CDI). Além disso, a aluna não estava com sua calculadora científica configurada adequadamente em radianos. Na sequência, a Figura 14 exibe o registro da Aluna 2.

**Figura 14** - Problema 2 da ADI- Aluna 2.

Com sinceridade, não lembro o jeito certo para resolver, mais o seguinte é o que vem na minha cabeça.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = -\operatorname{sen} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[ -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}(0) \right] = -0,0270 \text{ ou}$$

*“Com sinceridade, não lembro o jeito certo para resolver, mais o seguinte é o que vem na minha cabeça”.*

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Com efeito, sobre as respostas das alunas em relação à segunda questão da ADI, ambas obtiveram respostas por meio da integração da função dada, fato que aponta que o uso da Integral para calcular área corresponde a um conceito conhecido pelas participantes. Entretanto, elas não se atentaram ao sinal da primitiva obtida e muito menos ao intervalo de integração.

A terceira questão da ADI relacionava o cálculo de área com uma região apresentada em forma de um conjunto de pontos, linguagem normalmente utilizada nas disciplinas de CDI. A questão foi disposta no Quadro 43 a seguir.

**Quadro 43** - Problema 3 da ADI.

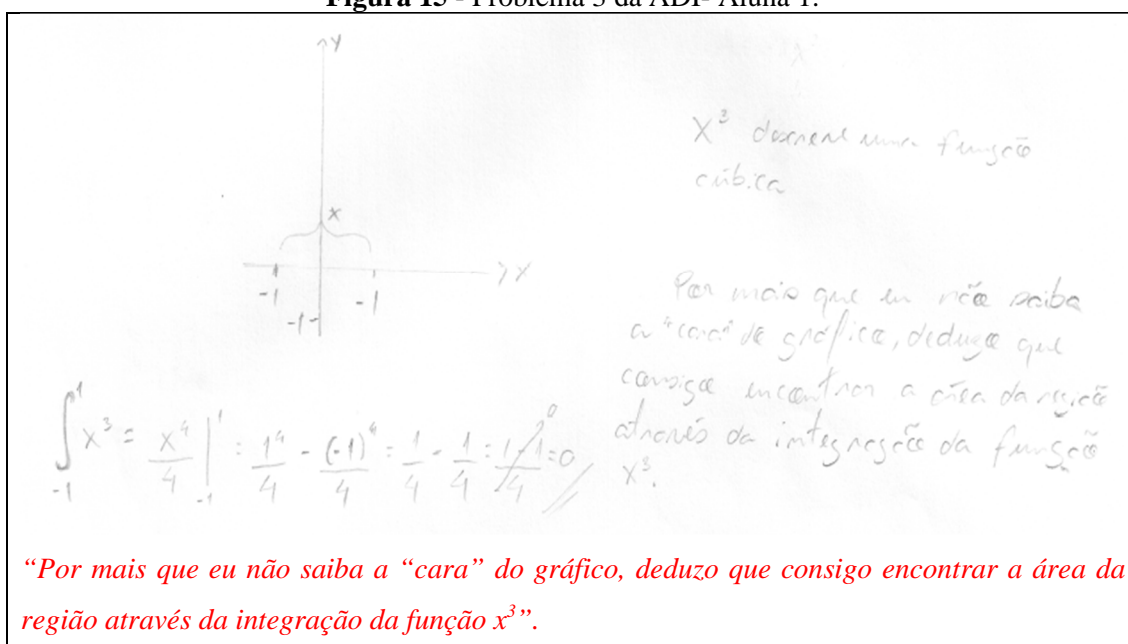
3- Pode-se representar uma região do plano utilizando notação de conjuntos. Qual é a área da região descrita por  $A = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq x^3\}$  ?

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Era esperado que as alunas esboçassem a região referente ao conjunto de pontos, encontrassem os limites de integração e calculassem a Integral correspondente para obter o valor da área da região descrita pelo conjunto A.

Na análise das resoluções desta questão, percebeu-se que a participante 1 utilizou integral para calcular a área da região pedida, porém a ausência do gráfico a impediu de visualizar a região de integração para resolver o problema corretamente. A Figura 15 na sequência ilustra o protocolo da Aluna 1.

**Figura 15** - Problema 3 da ADI- Aluna 1.



**Fonte:** Dados da pesquisa.

A aluna 2 descreveu um caminho para iniciar o desenvolvimento da sua solução para essa questão, no entanto, não conseguiu a elaborar algebricamente. Não foi possível identificar por quais motivos ela não concluiu matematicamente sua resposta.

Nossa suposição é que a expressão da região a ser encontrada, denotada como um conjunto de pontos, pode ter contribuído para Aluna 2 não ter solucionado o problema, dificultando sua compreensão e, conseqüentemente, a conclusão de sua resposta. A Figura 16 a seguir ilustra a resposta da Aluna 2, para o mesmo problema.

**Figura 16** - Problema 3 da ADI- Aluna 2.

Sei que tenho que fazer um gráfico e representar a região nele, mais não sei como posso fazer essa construção e depois o cálculo.

*“Sei que tenho que fazer um gráfico e representar a região nele, mais não sei como posso fazer essa construção e depois o cálculo”.*

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A terceira questão da ADI nos mostrou que as participantes possuem a noção do cálculo da área da região utilizando a integral, como visto na questão 2 desta ADI. Contudo, a notação da região descrita como conjunto de pontos somada à dificuldade em traçar gráficos de funções contribuiu para que as alunas não solucionassem corretamente esse problema.

A quarta questão da ADI relacionava a Regra da Cadeia para derivadas com a mudança de variáveis na integral, indicando o assunto a ser cobrado na questão e trazendo uma possível linha de raciocínio para o desenvolvimento da solução. O problema está disposto no Quadro 44 a seguir.

**Quadro 44** - Problema 4 da ADI.

4- Na disciplina de Cálculo 1 você aprendeu a derivada da função composta, geralmente chamada de Regra da Cadeia. Existe um resultado semelhante à regra da cadeia para derivadas, que auxilia no cálculo de integrais. Com base nessas informações, encontre o valor de  $\int_0^1 2(1+x^2)^9 x dx$ .

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

O pesquisador esperava que as alunas realizassem uma troca de variáveis e encontrassem o valor da Integral, podendo deixar a resposta expressa em frações, não sendo necessário obter um valor real como solução. A Aluna 1 deixou esta questão em branco.

Na resolução da questão, a Aluna 2 fez a mudança de variável  $u = 1 + x^2$ , o que mostrou o conhecimento deste conceito. Entretanto, ela não efetuou as devidas alterações no intervalo de integração para nova variável, mantendo os extremos da variável  $x$ .

Neste caso, fica difícil afirmar se houve desconhecimento ou falta de atenção da aluna. Além disso, no final dos seus cálculos, a aluna esqueceu de manter o expoente 10 na resposta. O registro da Aluna 2 para este problema encontra-se na Figura 17, na sequência.

**Figura 17** - Problema 4 da ADI- Aluna 2.

$$\int_0^1 2(1+x^2)^9 x \, dx = 2 \int_0^1 (1+x^2)^9 x \, dx$$

$$u = 1+x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x \, dx$$

$$\frac{du}{2} = x \, dx$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^1 u^9 \frac{du}{2} = \frac{2}{2} \int_0^1 u^9 \, du = \frac{u^{10}}{10} \Big|_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{(1+x^2)^{10}}{10} \Big|_0^1 = \left[ \frac{(1+(1)^2)^{10}}{10} - \frac{(1+(0)^2)^{10}}{10} \right]$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{2}{10} - \frac{1}{10} \right] = \frac{10}{10} = 0$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Podemos afirmar, em relação às estratégias de solução utilizadas na quarta questão, que a Aluna 2 possui noções sobre mudanças de variável, pois a questão 1 nos apontou tal fato. Todavia, o enunciado, mencionando a Regra da Cadeia para Derivadas, foi elaborado com a intenção das participantes relacionarem esse conceito com um resultado semelhante no cálculo de integrais.

A última questão da ADI abordava o cálculo da área de um círculo, usando integral, como mostra o Quadro 45. Além disso, era pedido outra forma de obter a área de um círculo, para verificar se as alunas tinham se deparado com esse tipo de demonstração na Educação Básica ou qualquer disciplina do curso de Licenciatura em Física.

**Quadro 45** - Problema 5 da ADI.

5- Dado  $r \in \mathbb{R}, r > 0$ , encontre a área do círculo de raio  $r$ , usando resultados de Cálculo Diferencial Integral. Você sabe outra maneira de obter a área do círculo?

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

As alunas entregaram a questão em branco, apesar de argumentarem que sabiam que  $\pi r^2$  correspondia à área de um círculo de raio  $r$ , mas não se recordavam de maneira alguma como demonstrar este resultado, e por conseguinte, não há registros para serem analisados.

### 6.1.1 Considerações sobre a ADI

A análise da ADI trouxe informações importantes para esta pesquisa de doutorado, a saber: as alunas possuíam noções sobre conceitos abordados em disciplinas de Fundamentos de Matemática, Vetores e Geometria Analítica e CDI I, cursadas anteriormente ao CDI II.

É perceptível que estes conceitos não estavam bem estabelecidos para as participantes da pesquisa, acarretando em dificuldades para utilizá-los completamente na resolução da ADI, visto que elas utilizavam os conceitos de maneira parcialmente correta ao trabalharem com os problemas propostos.

Elas possuíam conhecimentos gerais sobre funções (polinomiais, trigonométricas e racionais) mas tinham dificuldades em esboçar seus gráficos e resolver equações, como observado pelo professor pesquisador no decorrer da aplicação da sequência didática. As participantes apresentaram noções sobre derivadas de uma função, regras de derivação, mudança de variáveis, entretanto tiveram dificuldades ao efetuar estas operações ao longo da ADI, bem como relacionar esses conceitos com a primitiva de uma função e a mudança de variáveis na integral. Percebeu-se uma relação positiva entre o uso de Integral para o cálculo de área.

Ao final deste capítulo, será feita uma comparação entre a ADI com a ADF, com foco no enriquecimento dos processos de aprendizagem demonstrados por meio dos registros coletados, nesses dois momentos e também como elemento complementar ao material coletado no dia a dia da aplicação realizada. No entanto, salientamos que essa comparação não é necessária, segundo os pressupostos metodológicos da ED. Dessa forma, a comparação por nós efetuada caminha no sentido de complementar a

identificação de aspectos individuais de cada aluna, buscando indícios de melhora, além dos já apontados na análise dos dados coletados durante a aplicação, comparando seus registros da ADI e ADF. Isto posto, teremos uma situação inicial e uma situação final ao término desta pesquisa de doutorado.

Destaca-se que a coleta de dados desta pesquisa ocorreu paralelamente às aulas de CDI II da graduação em Licenciatura em Física e, dessa maneira, alguns conceitos abordados durante as aulas regulares podem ter sido abordados novamente no decorrer da etapa da coleta de dados.

Cabe mencionar também que esta é a primeira vez que as alunas participavam de uma pesquisa na área educacional e elas desconheciam os pressupostos metodológicos da MEAAMaRP, que pautou a elaboração e desenvolvimento durante a realização das sessões didáticas.

## **6.2 Análise da sequência didática**

Continuando em nossa etapa de Análises *a posteriori* e validação da pesquisa, daremos ênfase à análise dos dados obtidos ao longo dos encontros realizados com as participantes da pesquisa, mediante dos registros produzidos pelas alunas, durante a aplicação da sequência didática.

Para cada problema proposto, serão confrontadas as estratégias de solução esperadas do professor pesquisador com os protocolos de pesquisa produzidos pelas alunas participantes e somam-se, ainda, as observações pertinentes do pesquisador em relação a esse contexto (detalhadas no capítulo de Experimentação).

Ao final de cada encontro buscamos avaliar as questões específicas que foram escolhidas, as quais recordaremos ao leitor no decorrer das seções seguintes, em momento oportuno.

Daremos início às análises *a posteriori* e demais discussões contemplando os problemas propostos na Ficha de Atividades 1, na próxima seção.

### **6.2.1 Análises *a posteriori* da Ficha de Atividades 1**

Neste encontro foram explorados os problemas selecionados que compõem a Ficha de Atividades 1, que abordou o conceito de Primitiva de uma função e a relação entre derivada e antiderivada. As alunas resolveram individualmente os problemas propostos, entretanto, podiam conversar entre si para compartilhar informações e

estratégias de solução, cabendo ao professor pesquisador, observar e mediar o processo de resolução dos problemas.

A *Primeira parte* do encontro foi marcada pelo desenvolvimento das etapas de 1 a 5 do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), momento anterior às etapas das discussões efetuadas com o professor pesquisador.

Posteriormente serão analisados os registros referentes à *Segunda parte* do encontro, após as discussões e a plenária, momento que as participantes pediram para refazer os problemas. A *Segunda etapa* de resolução dos problemas será comparada com a *Primeira etapa* de resolução, buscando indícios de melhorias na aprendizagem, provavelmente causadas pelas discussões em grupo.

### 6.2.1.1 Primeira parte

O primeiro problema da Ficha de Atividades 1 está disponibilizado no Quadro 46, e trouxe a função horária da velocidade de uma partícula, pedindo que fossem encontrados sua aceleração e demais informações a respeito de sua posição.

**Quadro 46** - Problema 1.1 da Ficha de Atividades 1- análises a posteriori.

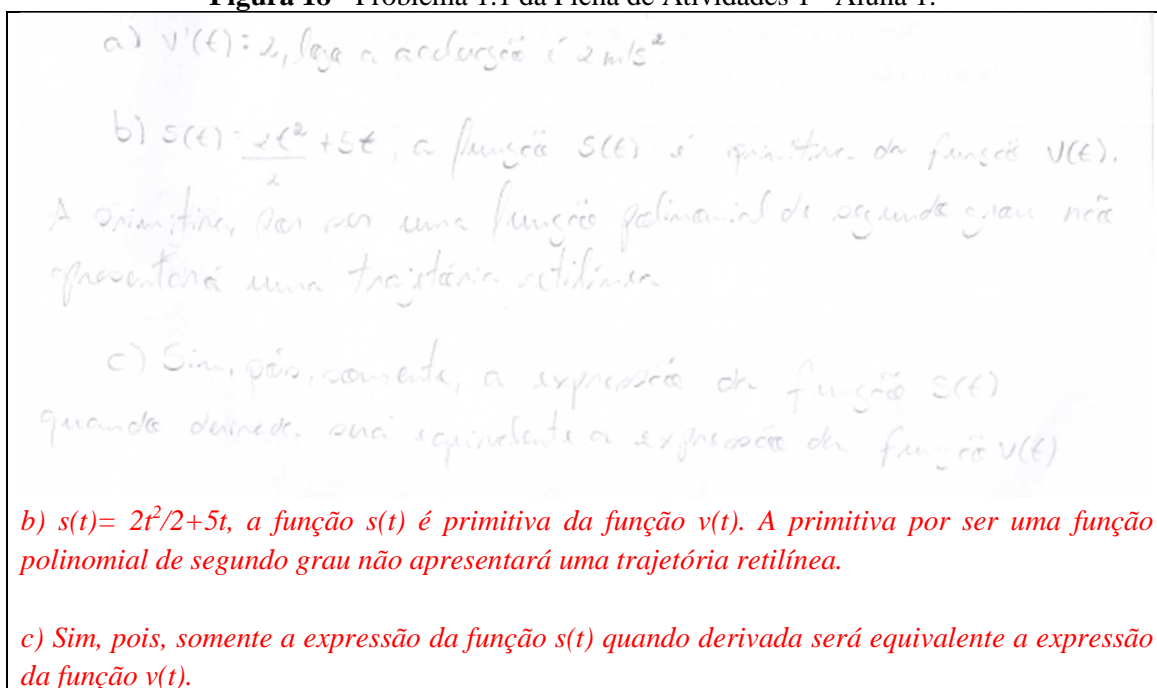
- 1.1. Considere uma partícula cuja velocidade  $v$ , no instante  $t$  segundos é dada pela função  $v(t) = 2t + 5$ , com  $v(t)$  em m/s.
- a) Qual é a aceleração dessa partícula?
  - b) O que podemos afirmar sobre a posição  $s(t)$  dessa partícula?
  - c) Podemos afirmar que  $s(t)$  é única? Justifique sua resposta.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Sucintamente, as estratégias de solução esperadas pelo professor pesquisador, em relação a cada item do problema proposto, como exibido no capítulo 4 desta tese, foram: a) derivar  $v(t)$  e encontrar a aceleração ou utilizar dois instantes diferentes para fazer  $a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$  ou, ainda, esboçar um gráfico de  $v(t)$  e encontrar a aceleração; b) pode-se obter informações para  $s(t)$  por meio da equação de  $v(t)$ , pois o movimento é uniformemente acelerado ou integrando  $v(t)$ , encontra-se uma família de primitivas para  $s(t)$ ; c) espera-se que as participantes identifiquem a ausência do termo constante em  $s(t)$ , que corresponde à constante de integração ou, embora não tenha sido proibido pelo professor pesquisador, é possível utilizar o GeoGebra para integrar  $v(t)$  e verificar a presença de uma família de primitivas para esta função, concluindo que  $s(t)$  não é única.

A Aluna 1 respondeu corretamente o item (a), mostrando familiaridade com esses conceitos (matemáticos e físicos), pois a derivada da função de velocidade resulta na aceleração da partícula. No item (b) a aluna fez a integral da função velocidade, obtendo a função horária dos espaços  $s(t)$ , entretanto, esqueceu da constante de integração ao final, pois trata-se de uma integral indefinida. No item (c) a Aluna 1 afirmou, equivocadamente, que a função horária dos espaços, que obteve, é única. Esse fato pode ser justificado pela ausência da constante de integração em sua resposta no item anterior, ocasionando esse erro conceitual. A Figura 18 na sequência ilustra os registros produzidos pela Aluna 1.

**Figura 18** - Problema 1.1 da Ficha de Atividades 1 - Aluna 1.



a)  $v'(t) = 2$ , Logo a aceleração é  $2 \text{ m/s}^2$

b)  $s(t) = \frac{2t^2}{2} + 5t$ , a função  $s(t)$  é primitiva da função  $v(t)$ .  
A primitiva, por ser uma função polinomial de segundo grau não apresentará uma trajetória retilínea.

c) Sim, pois, somente, a expressão da função  $s(t)$  quando derivada será equivalente a expressão da função  $v(t)$ .

*b)  $s(t) = 2t^2/2 + 5t$ , a função  $s(t)$  é primitiva da função  $v(t)$ . A primitiva por ser uma função polinomial de segundo grau não apresentará uma trajetória retilínea.*

*c) Sim, pois, somente a expressão da função  $s(t)$  quando derivada será equivalente a expressão da função  $v(t)$ .*

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 fez o item a) corretamente, derivando a função horária da velocidade,  $v(t)$ , encontrando o valor da aceleração, porém faltou apenas inserir a unidade de medida corretamente. No item b), ela obteve a função horária dos espaços,  $s(t)$ , integrando  $v(t)$  e inserindo ao final a constante de integração, obtendo uma família de primitivas para função horária do espaço. O item (c) foi entregue em branco, entretanto, pela execução do item anterior, ela não fez uma relação entre a sua resposta e a existência de uma família de primitivas para esta função horária dos espaços,  $s(t)$ . A Figura 19 contém os registros produzidos pela Aluna 2 referentes a este problema.

**Figura 19** - Problema 1.1 da Ficha de Atividades 1 - Aluna 2.

(a)  $v(t) = 2t + 5 \Rightarrow v'(t) = 2 \text{ m/s}$

(b)  $\int 2t + 5 dt = 2 \int t dt + 5 \int dt = \frac{2t^2}{2} + 5t + K = t^2 + 5t + K; K \in \mathbb{R}$

(c)

**Fonte:** Dados da pesquisa.

O objetivo desse problema consistia em identificar a relação existente entre a derivada e a antiderivada de uma função. Além disso, a antiderivada ou Primitiva de uma função corresponde a uma família de funções que diferem umas das outras por uma constante real, chamada de constante de integração.

Ao confrontar as estratégias de solução esperadas pelo professor pesquisador com os registros das alunas, podemos verificar que o item a) foi solucionado corretamente por ambas as participantes. Em relação ao item b), as alunas encontraram a função horária dos espaços da forma esperada, integrando a função dada no enunciado, entretanto, a Aluna 1 esqueceu de incluir a constante de integração em sua resposta final.

Sobre o item c) deste problema, a Aluna 1 afirmou que a função obtida era única, provavelmente pela ausência da constante de integração em sua resposta final no item b), causando esse erro conceitual. A Aluna 2 deixou sua resposta deste item em branco, pois não relacionou a antiderivada com uma família de funções que se diferem por conta da constante de integração.

Dessa forma, concluímos que as participantes atingiram de maneira satisfatória o objetivo proposto pelo problema.

O segundo problema desta ficha de atividades, disposto no Quadro 47, abordou uma ideia semelhante ao clássico problema da reta tangente ao gráfico de uma função passando por um ponto, visto geralmente em CDI I, como elemento motivador ao conteúdo de Derivadas.

Neste problema clássico era dada uma função, um ponto específico da função e era pedida a equação da reta tangente ao gráfico, passando pelo ponto que foi fornecido. Feitas algumas alterações, em nosso problema proposto foi dada a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função, passando por um ponto  $x_0$ , e buscava-se encontrar a expressão dessa função.

**Quadro 47** - Problema 1.2 da Ficha de Atividades 1- análises a posteriori.

1.2- Considere uma função polinomial, sabendo que a inclinação da reta tangente no ponto  $x_0$  é dada por  $\frac{df}{dx}(x_0) = 3(x_0)^2 - 2$  e  $f(0) = 1$ . A partir dessas informações, encontre a função  $f(x)$ .

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Era esperado pelo professor pesquisador, como estratégias de solução, que as participantes integrassem a expressão referente ao coeficiente angular da reta, obtendo uma função genérica de terceiro grau e com os devidos ajustes (considerando dados do enunciado) seria encontrada a função pedida ou, por outro lado, seria possível obter uma função de grau três, por tentativas, pois  $\frac{df}{dx}$  trata-se de uma função polinomial de grau dois.

A Aluna 1 reconheceu a notação  $\frac{df}{dx}$  como  $f'(x)$  e calculou uma integral, obtendo uma expressão inicial. Faltou inserir a constante de integração ao final da integral, entretanto, não relacionou que a informação que havia obtido pertencia à função a ser encontrada, pois já possuía boa parte da solução do problema. A Figura 20 ilustra esta observação.

**Figura 20** - Problema 1.2 da Ficha de Atividades 1 - Aluna 1.

$$f'(x_0) = 3(x_0)^2 - 2$$

$$\int f(x_0) dx = \int 3x_0^2 - \int 2x = \frac{3 \cdot x_0^{2+1}}{3} - 2x = \frac{3x_0^3}{3} - 2x = x_0^3 - 2x$$

$$f(x_0) = x_0^3 - 2x$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 deixou a questão em branco, não havendo rascunhos ou esboço de seu raciocínio para que pudéssemos analisar.

O objetivo deste problema era relacionar a derivada e sua antiderivada, contemplando uma situação clássica já conhecida, sob outro ponto de vista, como o problema da reta tangente ao gráfico de uma função. Além disso, era preciso utilizar informações contidas no enunciado (o valor da função num ponto) para obter uma função. Em nossa concepção, como esse problema é semelhante a uma situação vista em CDI I,

ele poderia ter sido melhor explorado pelas alunas. Podemos conjecturar que a falta de hábito em trabalhar com a resolução de problemas ou “pensar de trás pra frente” como estratégia de solução de problemas pode ter prejudicado o desempenho das alunas?

A Aluna 2 deixou a questão em branco, embora seja difícil apontar o(s) motivo(s), isso pode indicar que ela não soube resolver o problema apresentado, o que não implica que ela não soubesse o conceito, mas ao menos deduz-se que ela não soube utilizá-lo dentro do contexto apresentado.

A Aluna 1 reconheceu a notação  $\frac{df}{dx}$  como  $f'(x)$ , calculou a integral e obteve boa parte da função procurada, entretanto, não finalizou corretamente sua execução do problema.

Entende-se neste último caso, que o problema foi parcialmente resolvido, portanto, o objetivo foi parcialmente alcançado.

O terceiro problema da Ficha de Atividades 1 retomou a noção de Primitiva de uma função, apresentando uma definição. Nos itens a) e b), era pedido que fossem encontradas a derivada e a integral de funções polinomiais. O item c) abordou a ideia de generalização do resultado. O problema está disposto no Quadro 48 a seguir.

**Quadro 48** - Problema 1.3 da Ficha de Atividades 1- análises a posteriori.

1.3. De acordo com sua percepção em relação às questões anteriores, dada uma função  $f(x)$ , é possível encontrar a função  $F(x)$ , tal que  $F'(x) = f(x) + k$ , com  $k$  real. A função  $F$  é chamada de antiderivada de  $f$ . Também podemos denominar  $F$  de primitiva de  $f$ . Essas nomenclaturas são equivalentes, pois, dada  $f(x)$ , buscamos  $F$ , tal que  $F'(x) = f(x) + k$ , com  $k$  real.

- a) Qual é a derivada de  $f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ , com  $n$  real?
- b) Qual é a antiderivada (ou primitiva) de  $f(x) = x^n$ , com  $n$  real?
- c) Você saberia encontrar uma forma de generalizar esse resultado, ou seja, a integral de uma função polinomial?

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

O professor pesquisador previa que as participantes derivassem a expressão no item a) ou utilizassem exemplos numéricos para perceber um padrão de formação. No item b) era possível integrar diretamente ou utilizar o resultado do item anterior ou ainda,

utilizar exemplos numéricos. Em relação ao item c), buscava-se que as alunas descrevam um polinômio genérico de grau  $n$  e apresentassem sua integral, visto que os itens anteriores do problema auxiliam nessa construção, trazendo a relação entre coeficientes e expoentes de cada termo.

No item a), a Aluna 1, num primeiro momento, tentou efetuar uma troca de variáveis da forma  $u = n + 1$ , mas não a concluiu corretamente. A seguir, esboçou uma solução efetuando a derivada da função, entretanto, não incluiu o expoente na resposta final, e assim, não obteve sucesso com esta estratégia. Logo abaixo, realizou um teste com exemplo numérico. Os itens (b) e (c) foram deixados em branco por ela. A Figura 21 ilustra os comentários efetuados.

**Figura 21** - Problema 1.3 da Ficha de Atividades 1 - Aluna 1.

a)  $f'(x) = \frac{u x^{u-1}}{u}$

$u = n+1$

Substituindo:

$f'(x) = \frac{\overset{\textcircled{1}}{n+1} x^{(n+1)-1}}{n+1} = x$

$\overset{\textcircled{2}}{\begin{array}{l} (3+1) 4^{3+1} \\ (3+1) \end{array}} = 4^4$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2, no item (a), derivou corretamente a expressão de  $f(x)$ , obtendo  $f'(x) = x^n$ . Da mesma forma, no item (b), a aluna integrou corretamente e obteve uma primitiva para função  $f(x)x^n$ . As respostas indicaram que esta aluna reconheceu a diferença entre

as operações de derivação e integração, abordadas no problema proposto. O item (c) foi deixado em branco e as respostas da Aluna 2 são exibidas na Figura 22.

**Figura 22** - Problema 1.3 da Ficha de Atividades 1 - Aluna 2.

(a)  $f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = f'(x) = x^n$   
 (b)  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k ; k \in \mathbb{R}$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A terceira questão buscou relacionar a derivada e a antiderivada de uma função. Além disso, pretendia-se verificar como as participantes compreendiam a ideia de generalização para integral de uma função exponencial. Com base nas experiências do professor pesquisador, o termo generalização causa desconforto à maior parte dos alunos e por isso o inserimos neste problema, para motivar discussões e fazer as alunas refletirem sobre a generalização de alguns resultados. Mesmo entendendo que apenas uma atividade contemplando este tema não seja suficiente para garantir o aprendizado, consideramos a mesma necessária para iniciar discussões a respeito do tema generalizações.

A Aluna 1 não completou o item a) corretamente por conta da ausência do expoente  $n$  em sua resposta; talvez isso tenha ocorrido por esquecimento ou falta de atenção. Os itens b) e c) foram deixados em branco, sem esboços de registros que nos deixaram alguma pista de algum raciocínio realizado.

A Aluna 2 efetuou corretamente os itens a) e b) do problema, entretanto deixou o último item em branco, embora fosse possível relacionar suas respostas dos itens anteriores para chegar a uma conclusão. Como havíamos previsto, as alunas apresentaram dificuldades na generalização de resultados e uma das causas pode estar na ausência do desenvolvimento deste raciocínio durante as aulas da graduação.

Dessa forma, pudemos concluir que o objetivo do problema não foi alcançado, visto que a etapa de generalização era o foco principal da questão, sendo necessária aplicação de outro problema, fato que não ocorreu neste momento pois as alunas teriam

a oportunidade de solucionar outros problemas que abordam a ideia de generalização.

Dando sequência às nossas análises *a posteriori*, o problema 1.4 da Ficha de Atividades 1 é frequentemente abordado na disciplina de CDI I, e foi trazida uma questão semelhante, com algumas modificações. Dada a taxa de variação do volume, em relação à altura, foi pedido o volume em determinado instante, no qual a altura também era fornecida. O problema 1.4 está ilustrado no Quadro 49 a seguir.

**Quadro 49** - Problema 1.4 da Ficha de Atividades 1- análises a posteriori.

1.4. O volume de água em um tanque é  $V \text{ m}^3$  quando a profundidade é  $h$  metros. Se a taxa de variação de  $V$  em relação à  $h$  for dada por  $\frac{dV}{dh} = \pi(2h + 3)^2$ , encontre o volume de água no tanque no instante que a profundidade for 3 metros. (Leithold, v.1, p. 303, ex 68- adaptado)

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Como possíveis estratégias de solução para este problema, o pesquisador esperava que as alunas fizessem a integral de  $\frac{dV}{dh}$  e com as informações do enunciado poderiam obter a resposta correta ou poderiam proceder por tentativas, buscando uma primitiva para  $\frac{dV}{dh}$  e fazendo os ajustes necessários, encontrariam o que se pede no problema.

O objetivo do problema consistia em relacionar a derivada com a antiderivada da função, contextualizada por uma situação comumente explorada na disciplina de CDI I, ao tratar de taxas de variação usando derivadas. As duas alunas deixaram a questão em branco, sem esboços de solução. Assim, entendemos que o problema não teve seu objetivo alcançado, conforme a expectativa do pesquisador. No entanto, as alunas tiveram oportunidade de refazê-lo na *Segunda parte* deste encontro, após as etapas de discussão previstas no roteiro de Onuchic e Allevato (2011), conforme será apresentado mais adiante.

Para encerrar esta Ficha de Atividades 1, abordamos o Problema Complementar, cuja ideia baseia-se na inserção de mais um problema, facultativo, nas fichas de atividades para aqueles grupos que tivessem terminado e discutido todos os demais problemas propostos. Neste caso, foi retomado um dos problemas abordados na ADI, como visto no Quadro 50 na sequência, para as alunas terem outra chance de solucioná-lo.

**Quadro 50** - Problema Complementar da Ficha de Atividades 1- análises a posteriori.**Problema Complementar**

Dado  $x \in \mathbb{R}$  com  $x > \frac{-1}{2}$ , encontre uma primitiva da  $f$  função definida por

$$f(x) = \frac{2}{2x+1}.$$

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Nossa expectativa, para este problema, era que as alunas fizessem uma troca de variáveis e reconhecessem derivadas do tipo  $\ln x$  para encontrar sua solução ou, por tentativas, poderiam encontrar uma primitiva para função dada no enunciado. A Aluna 1 deixou em branco, sem rascunhos de solução em seu protocolo.

A Aluna 2 fez uma troca de variáveis e integrou a função, erroneamente, pois inseriu a *nova variável* no numerador, fazendo a integral de uma função polinomial, em que, na verdade, apresentava-se uma função racional no integrando. Esse equívoco ocasionou a falha na execução da estratégia de resolução do problema. A Figura 23 contém o registro da Aluna 2 para este problema.

**Figura 23** - Problema Complementar da Ficha de Atividades 1 - Aluna 2.

$$\int \frac{2}{2x+1} dx$$

$$u = 2x+1$$

$$du = 2dx$$

$$-\frac{du}{2} = dx$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \int u du \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{2} + K = -\frac{1}{4} \left( \frac{2x+1}{2} \right) + K$$

$$= -\frac{1}{2} (x+1) + K = -\frac{x+1}{2} + K; K \in \mathbb{R}$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

O objetivo do Problema Complementar era abordar, novamente, a ideia de Primitiva de uma função e levantar discussões sobre troca de variáveis - conceito a ser explorado em encontros futuros. A Aluna 1 deixou a questão em branco, ao passo que a Aluna 2 efetuou uma troca de variáveis, contudo, confundiu-se ao inserir a variável auxiliar no integrando para obter sua resposta. Dessa forma, o objetivo do problema foi parcialmente alcançado.

Nesta Primeira parte as alunas participantes refletiram sobre os cinco problemas propostos que compõem a Ficha de Atividades 1. Conforme as expectativas do professor

pesquisador, os problemas 1.2 e o Problema Complementar tiveram seus objetivos alcançados parcialmente, os problemas 1.3 e 1.4 não tiveram seus objetivos alcançados e o problema 1.1 foi executado de maneira satisfatória.

Vale salientar que a Ficha de Atividades 1 representou o primeiro contato das alunas participantes com a MEAAMaRP, e como relatado no capítulo de Experimentação, as alunas foram um pouco resistentes à utilização desta metodologia de ensino e sentiram um pouco de dificuldades.

### **6.2.1.2 Segunda parte**

A dinâmica dos encontros efetuados com as participantes para coleta de dados e produção de registros desta pesquisa foram apresentados no capítulo 5 deste trabalho, denominado Experimentação.

No entanto, para relembrar ao leitor, durante a *Primeira parte* da sessão didática, para resolução dos problemas dispostos na Ficha de Atividades 1, as alunas resolveram os problemas individualmente e entregaram seus registros para o professor pesquisador, responsável pela coleta de dados da pesquisa. Na *Segunda parte* do encontro, foram realizadas as discussões pertinentes aos problemas e, anteriormente à formalização dos conteúdos, as alunas refizeram os problemas da mesma ficha de atividades confeccionada para o determinado encontro.

Isso posto, na *Segunda parte* desse encontro, foram realizadas as etapas 6. *Registro das resoluções na lousa*; 7. *Plenária*; e 8. *Busca do consenso* do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), contando com a colaboração das alunas, que pediram para refazer os problemas após o término das discussões.

Concordamos com Bittar (2017) ao afirmar que as atenções do pesquisador, ao confrontar as análises *a priori* com *a posteriori*, devem estar voltadas para evolução do sujeito durante a realização da sequência didática. Com isso, optamos por apresentar as respostas das participantes que possuem diferenças entre aquilo que foi registrado na *Primeira e Segunda parte* dos encontros.

Desse modo, serão apresentadas apenas discussões relevantes, que mostram os (possíveis) efeitos causados mediante as etapas de discussões e compartilhamento de informações. Assim, apontaremos os processos aos quais reconhecemos evolução das participantes, conforme a melhora do seu desempenho ou tenha havido mudanças significativas em comparação à *Primeira parte* deste encontro.

Seguimos a apresentação da mesma forma, apresentando o problema, as estratégias de solução esperadas pelo professor pesquisador, as análises individuais e análises *a posteriori*.

No problema 1.1 não houve mudanças significativas nos registros das alunas, apenas o item c) que versa sobre a unicidade da função  $s$  definida por  $s(t)$ , teve uma alteração. O problema foi deixado em branco pela Aluna 2 e respondido equivocadamente pela Aluna 1 na *Primeira parte* deste encontro.

Agora ambas as alunas relacionaram que a função  $s$  definida por  $s(t)$  corresponde a uma família de primitivas e por isso não é única. Na Figura 24, a seguir, apresenta-se a resposta da Aluna 1.

**Figura 24** - Item c) do problema 1.1 feito pela Aluna 1.

c) Podemos afirmar que  $s(t)$  é única? Justifique sua resposta.

a)  $v'(t) = 2$ , logo a aceleração é  $2 \text{ m/s}^2$

b)  $s(t) = \frac{2t^2}{2}$ , a função é primitiva da função  $v(t)$

c) Não, pois a função  $s(t)$  é indefinida, ou seja, para cada  $K$  real, existe uma expressão diferente. Denominamos como família de primitivas.

*c) Não, pois a função  $s(t)$  é indefinida, ou seja, para cada  $K$  real, existe uma expressão diferente. Denominamos como família de primitivas.*

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 manteve suas respostas dos itens (a) e (b). Anteriormente, ela havia deixado o item (c) em branco, agora identificou que  $s(t)$  não é única por conta de ser resultado de uma integral indefinida que possui constante de integração real  $k$  e, para cada valor de  $k$ , existirá uma função horário do espaço,  $s(t)$ , diferente. A Figura 25 ilustra as respostas da Aluna 2.

**Figura 25** - Item c) do problema 1.1 feito pela Aluna 2.

c) Podemos afirmar que  $s(t)$  é única? Justifique sua resposta.

$\textcircled{a} v(t) = 2t + 5 \Rightarrow v(t) = 2 \text{ m/s}$   
 $\textcircled{b} \int (2t + 5) dt \Rightarrow 2 \int t dt + 5 \int dt \Rightarrow 2 \frac{t^2}{2} + 5t + k \Rightarrow t^2 + 5t + k; k \in \mathbb{R}$   
 $\textcircled{c}$  Podemos afirmar que  $s(t)$  não é única, dado que  $k \in \mathbb{R}$ .

*c) Podemos afirmar que  $s(t)$  não é única, dado que  $k \in \mathbb{R}$ .*

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Conforme os registros das alunas indicados na figura anterior, a Aluna 1 identificou que a função  $s$  definida por  $s(t)$  não é única e isso decorre que essa função representa uma família de primitivas. Da mesma forma, a Aluna 2, que havia deixado a questão em branco na Primeira parte deste encontro, agora identificou que  $s(t)$  não é única por conta de ser resultado de uma integral indefinida que possui constante real de integração  $k$  e para cada valor de  $k$ , existirá uma  $s(t)$  diferente.

Entende-se que as mudanças ocorridas se deram em função das discussões efetuadas entre as alunas e o professor pesquisador nas etapas 6, 7 e 8 do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), contribuindo para os processos de construção de significados dessas alunas.

O segundo problema da ficha de atividades teve uma alteração, visto que a Aluna 2 havia entregado a questão em branco na *Primeira parte* deste encontro, anteriormente às discussões realizadas, agora integrou  $\frac{df}{dx}$  e obteve uma expressão, qual concluiu ser a função procurada, como indicado na Figura 26. A Aluna 1 não realizou mudança alguma que chamou nossa atenção para este problema.

**Figura 26** - Problema 1.2 feito pela Aluna 2.

$\int 3(x_0)^2 - 2 dx \Rightarrow \frac{3x_0^3}{3} - 2x + k \Rightarrow x_0^3 - 2x + k$   
 $f(x) = x_0^3 - 2x + k; k \in \mathbb{R}$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

No entanto, faltou a Aluna 2 realizar mais alguns passos para obter, de fato, a função pedida no enunciado do problema. Contudo, é possível verificar que as etapas de discussão que foram realizadas surtiram algum efeito positivo nesta aluna, pois ela conseguiu iniciar a resolução do problema, desenvolvendo alguma estratégia para solucioná-lo.

Para o terceiro problema não tivemos mudanças nos protocolos das alunas que precisa ser mencionada. O problema 1.4, que se refere à taxa de variação do volume de um tanque cilíndrico, havia sido entregue em branco pelas duas participantes. Após as discussões, as alunas conseguiram, pelo menos, iniciar o processo de resolução do problema, desenvolvendo algum caminho a fim de obter uma solução.

A Aluna 1 esboçou uma boa estratégia de resolução ao fazer uma mudança de variáveis na integral, porém, não deu prosseguimento e ficou com a resposta incompleta, entretanto, vale ressaltar um avanço na execução deste problema, após as discussões efetuadas durante a plenária, pois, anteriormente, a aluna deixou a questão em branco. A Figura 27 traz o registro da Aluna 1.

**Figura 27** - Problema 1.4 feito pela Aluna 1.

$$V(t)$$

antiderivada  $\left( \frac{dV}{dh} \right)$  derivada

$$\int \frac{dV}{dh} dh = \pi \int (2h+3)^2 dh$$

Considerando:

$$u = 2h + 3$$

$$\int (u)^2 dh \quad ; \quad \frac{du}{dh} = 2 dh ;$$

Substituindo:

$$\pi \int$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 teve uma boa ideia ao tentar desenvolver o termo ao quadrado no integrando, contudo, cometeu um erro durante sua execução (erro, este, comum a muitos alunos de graduação).

Analisando a estratégia de resolução da aluna, estavam presentes algumas propriedades de integral, mas ainda não se configuraram bem consolidadas.

Contudo, vale ressaltar um avanço na resolução deste problema após as discussões efetuadas, visto que a aluna deixou a questão em branco na *Primeira parte* deste encontro. A Figura 28 a seguir ilustra nosso comentário.

**Figura 28** - Problema 1.4 refeito pela Aluna 2.

$$\frac{dv}{dh} = \pi(2h+3)^2$$

$$\therefore \int_0^3 \pi(2h+3)^2 dh \Rightarrow \pi \int_0^3 (2h+3)^2 dh$$

$$\Rightarrow \pi \int_0^3 (4h^2 + 12h + 9) dh \Rightarrow 2\pi \int_0^3 h^2 dh + 9 \int_0^3 dh = 2\pi \left. \frac{h^3}{3} \right|_0^3 + 9h \Big|_0^3$$

$$\Rightarrow \pi h^3 \Big|_0^3 + 9h \Big|_0^3 \Rightarrow \left[ \pi(0)^3 - \pi(3)^3 \right] + \left[ 9(0) - 9(3) \right]$$

$$\Rightarrow -9\pi - 27 \Rightarrow -18\pi.$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Como os objetivos do problema consistiam em relacionar a derivada com sua antiderivada através de uma situação conhecida pelas alunas (explorada na disciplina de CDI), e considerando as mudanças ocorridas no desenvolvimento de estratégias de solução antes e depois das discussões, concluímos que os objetivos do problema foram parcialmente alcançados.

Assim, sobre o Problema Complementar, afirmamos que não houve alterações em relação ao que já foi apresentado anteriormente, pois ambas as alunas o entregaram da mesma forma que na *Primeira parte*, sendo que a Aluna 1 entregou em branco e a Aluna 2 efetuou a mesma solução já apresentada anteriormente.

De maneira geral, a *Segunda parte* deste encontro, contribuiu com aspectos positivos, tanto para as alunas quanto para o professor pesquisador. Após as etapas de discussão, propostas no roteiro de Onuchic e Allevato (2011), as alunas conseguiram desenvolver estratégias para resolução dos problemas, especialmente aqueles que haviam sido entregues em branco, apontando uma perceptível melhora conforme os registros produzidos.

Para o professor pesquisador, esta melhora foi ocasionada pelas discussões efetuadas, enriquecendo a construção de conceitos e dando significados a estes conceitos.

Este segundo encontro, cujo foco contemplou a resolução dos problemas selecionados na Ficha de Atividades 1, apontou que as alunas participantes possuem conhecimentos prévios acerca de funções, derivadas, primitivas e integrais, todavia, esses conceitos não se apresentam bem consolidados e em alguns momentos são utilizados equivocadamente.

Embora esta tenha sido a primeira experiência das alunas com a MEAAMaRP e tenha ocorrido uma (natural) resistência inicial das participantes com essa metodologia de ensino, as etapas de discussão foram proveitosas e enriquecedoras, no sentido de auxiliar a construção de conceitos pelas participantes e auxiliar no desenvolvimento das relações existentes entre derivadas e antiderivadas.

Finalizados os confrontos entre as análises *a priori* e as análises *a posteriori* dos problemas da Ficha de Atividades 1, contemplando a *Primeira parte* e a *Segunda parte* do encontro, é necessário retomar as questões específicas que determinamos para serem analisadas. Essas questões foram apresentadas no capítulo 4 desta tese de doutorado, momento de elaboração e construção dos instrumentos da coleta de dados da pesquisa.

Para situar o leitor, as questões específicas que determinamos para análise nesta Ficha de Atividades 1 são:

1. os participantes da pesquisa reconhecem a operação de integração?
2. os conhecimentos prévios sobre derivação de funções polinomiais são suficientes para construção do conceito de primitiva dessas funções?

No que se refere à primeira questão específica a ser analisada, afirmamos que as participantes foram capazes de distinguir as operações de derivação e integração durante a solução dos problemas dispostos naquela ficha de atividades. No entanto, a relação entre alguns conceitos não se apresentava bem definida pelas participantes, ou seja, durante a

resolução de um problema, ocorreram dúvidas com os termos integral, antiderivada e primitiva. Pode-se considerar que, por se tratar da primeira experiência com a MEAAMaRP, as participantes estavam um pouco mais tensas e ansiosas para iniciar suas atividades, justificando, em parte, alguns equívocos ocorridos. É possível perceber o nervosismo das alunas pois, em alguns momentos, elas escreviam de maneira mais leve nas suas folhas de resposta. Portanto, podemos concluir que as participantes reconhecem a operação de integração.

Em relação à segunda questão específica, pertinente à construção do conceito de Primitiva de uma função utilizando apenas os conhecimentos prévios de derivada, podemos afirmar que o conceito de derivada é fundamental para o desenvolvimento e construção do conceito de Primitiva de uma função. Entretanto, é preciso explorar com mais detalhes tais conceitos, para as alunas amadurecerem a relação existente entre derivadas, antiderivadas, primitivas e integrais, visto que o excesso de notação causa confusões, se mal exploradas, prejudicando a aprendizagem. Além disso, é preciso ter bons conhecimentos prévios sobre funções, em geral, o que contribuirá para melhor compreensão do conceito de Primitiva.

Dessa forma, podemos afirmar que conhecimentos prévios sobre funções e derivadas são necessários para a construção do conceito de Primitiva de uma função.

Em suma, os problemas propostos na Ficha de Atividades 1 contribuíram para construção e compreensão dos conceitos de Primitiva de uma função, considerando os conhecimentos prévios das alunas participantes sobre derivadas e **funções**, juntamente com noções iniciais sobre Integral.

## **6.2.2 Análises a posteriori da Ficha de Atividades 2**

Em continuidade, serão analisados os registros das alunas participantes referentes ao terceiro encontro para coleta de dados desta pesquisa, no qual foram explorados os problemas selecionados que compõem a Ficha de Atividades 2, que contemplou as etapas de construção da Integral de Riemann (ou Integral definida).

Apresentam-se os registros produzidos pelas alunas e as devidas discussões relativas a cada problema proposto, conforme a Primeira parte deste encontro.

### **6.2.2.1 Primeira parte**

O primeiro problema proposto na Ficha de Atividades 2 forneceu uma quantidade de etapas a serem cumpridas com o objetivo de construir a Integral de Riemann de uma

função. Inicialmente, foi pedido o gráfico da função  $f$  definida por  $f(x) = x^2 - 1$ . Na folha de respostas foi disponibilizado o plano cartesiano, em malha quadriculada (feito no GeoGebra), para as participantes utilizarem, como mostrado no Quadro 51.

Esse problema iniciou o processo de construção da integral definida. Por se tratarem de etapas que contemplavam conceitos básicos sobre funções, divisão de intervalos e encontrar o gráfico de retângulos, esperava-se que as alunas fizessem a construção da Integral de Riemann e que este conceito tenha significado para as participantes.

**Quadro 51** - Problema 2.1 da Ficha de Atividades 2- análises a posteriori.

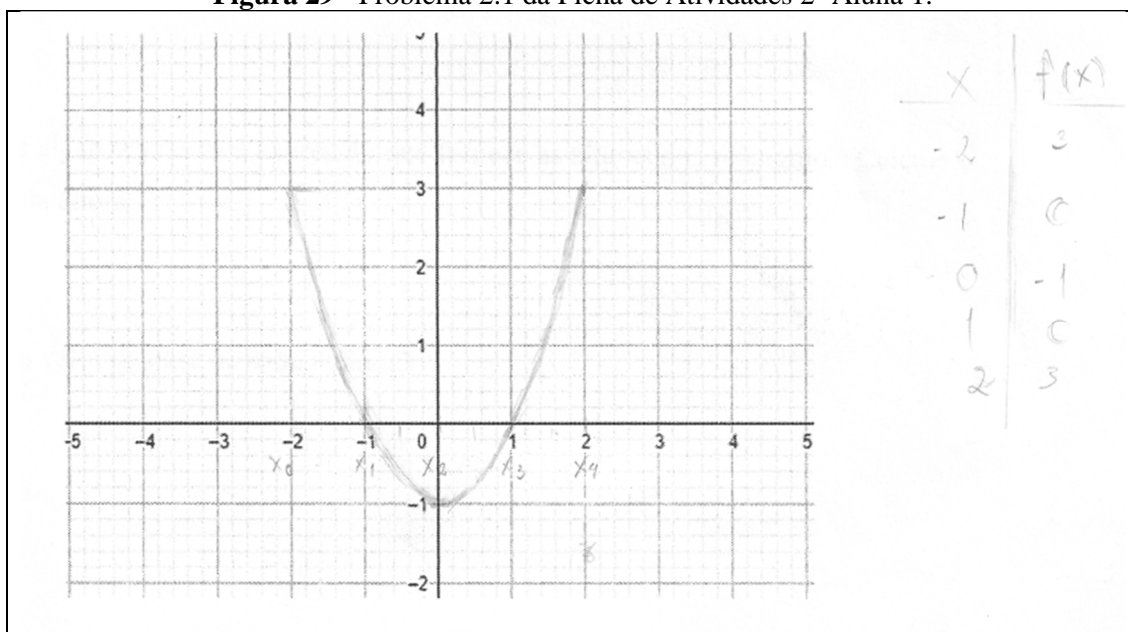
**Ficha de Atividades 2**

2.1 Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = x^2 - 1$ , definida em  $[-2, 2]$ . Esboce a curva de  $f(x)$  no intervalo dado e responda às demais perguntas com base neste esboço. (Adaptado de Menoncini (2018, p.188-190))

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

As duas alunas esboçaram o gráfico da função atribuindo valores para a variável e utilizaram uma tabela para marcar os pontos do gráfico da função. Essa estratégia de completar uma tabela de valores para esboçar o gráfico de uma função é muito comum no Ensino Fundamental e Médio. A Figura 29 a seguir contém o gráfico da Aluna 1.

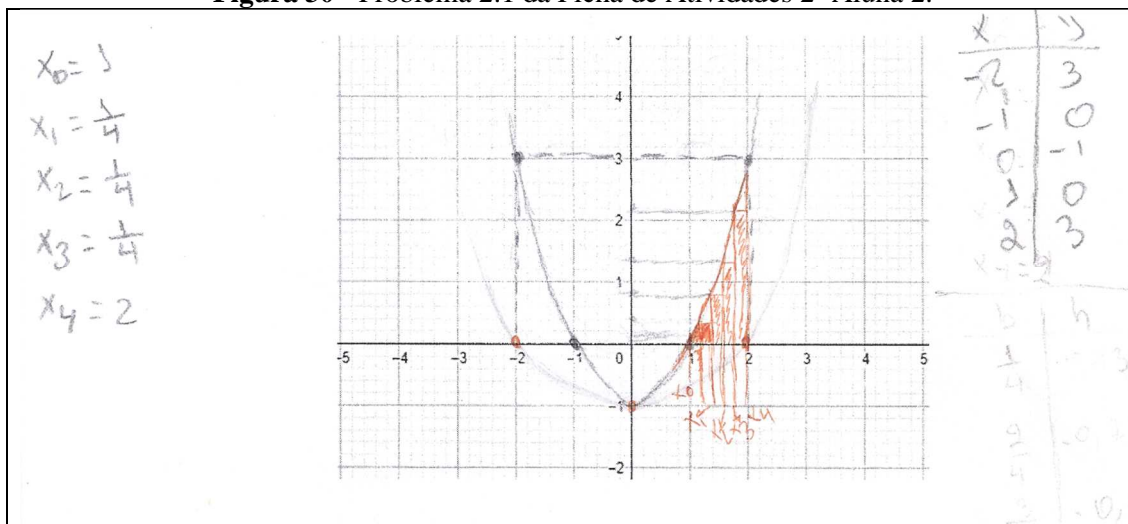
**Figura 29** - Problema 2.1 da Ficha de Atividades 2- Aluna 1.



**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 também utilizou da mesma estratégia de atribuir valores para variável  $x$ , obter os valores referentes à imagem da função e preencher uma tabela para formar pares de pontos, objetivando traçar o gráfico, como indicado na Figura 30.

**Figura 30** - Problema 2.1 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.



**Fonte:** Dados da pesquisa.

O item a) deste primeiro problema possui três subitens que trazem a ideia de partição de um intervalo e a generalização desse conceito, para um valor  $n$ , como pode ser observado no Quadro 52 a seguir.

**Quadro 52** - Item a) do problema 2.1- análises a posteriori.

a) Observe a curva no intervalo  $[1,2]$ . Divida este intervalo em 4 subintervalos de mesma amplitude  $\Delta x$  (mesmo tamanho) e identifique as abscissas  $x_0 = 1, x_1, x_2, x_3$  e  $x_4 = 2$ .

Responda:

a1) Qual é a amplitude  $\Delta x$  de cada subintervalo? Qual o valor de  $x_1, x_2$  e  $x_3$  ?

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A Aluna 1, que apresentou muitas dificuldades para iniciar a resolução dos problemas propostos, deixou suas questões em branco.

A Aluna 2 percebeu que cada subintervalo teria amplitude  $\frac{1}{4}$ , entretanto, o intervalo a ser particionado era  $[1,2]$ , e por conta disso obteve erroneamente os valores dos pontos  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , conforme denotados por ela, como ilustrado na Figura 31 logo na sequência.

**Figura 31** - Item a) do problema 2.1 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.

$$x_1 = \frac{1}{4} \quad x_2 = \frac{2}{4} \quad x_3 = \frac{3}{4}$$

$$\Delta x = \frac{1}{4} \quad x_1 = 0,25 \quad x_2 = 0,50 \quad x_3 = 0,75$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Era esperado que as alunas dividissem o intervalo em quatro partes iguais e encontrassem a amplitude do intervalo. Entretanto, as alunas apresentaram dificuldades acima de nossas expectativas. Compreendemos que são insuficientes os conhecimentos básicos necessários para desenvolver as estratégias de solução do problema.

O item a2 deste problema aumentava o número de divisões para o intervalo fornecido no enunciado, seguindo um processo de generalização para esse conceito. Pode-se verificar o enunciado e a resposta da Aluna 2 na Figura 32 a seguir.

**Figura 32** - Item a2) do problema 2.1 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.

a2) Se o intervalo  $[1,2]$  fosse dividido em 10 subintervalos, qual a amplitude de cada subintervalo? E se fossem 50 subintervalos?

$$\frac{1}{10} = 0,1 \quad \Delta x = 0,1$$

$$\frac{1}{50} = 0,02 \quad \Delta x = 0,02$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Aluna 2 reconheceu a amplitude do intervalo  $[1,2]$  e, por conta disso, conseguiu obter a amplitude dos subintervalos, divididos em 10 partes e 50 partes, conforme pedido no enunciado do problema.

Em relação ao item a3 do problema proposto, a Aluna 2 percebeu a amplitude que cada subintervalo possuiria, conforme a partição pretendida, como mostra a Figura 33 na sequência. Embora contenha alguns erros de notação, a resposta da aluna trouxe indícios de sua compreensão ao processo de generalização que ocorreu ao particionar um intervalo real em  $n$  partes iguais.

**Figura 33** - Item a3) do problema 2.1 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.

a3) Seja um intervalo qualquer  $[a, b]$  fosse dividido em  $n$  subintervalos. Escreva uma fórmula para encontrar a amplitude  $\Delta x$  dos subintervalos, levando em consideração o comprimento do intervalo e o número de subintervalos  $n$ .

$$\Delta x = \frac{I}{n}$$

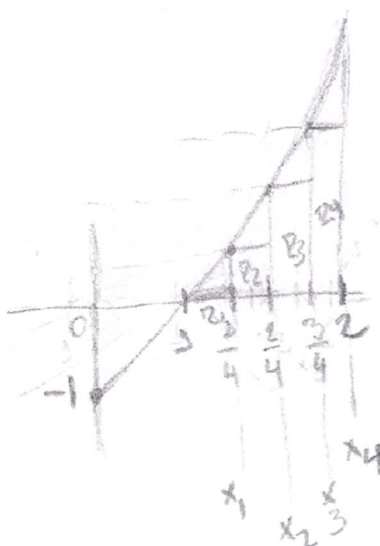
Fonte: Dados da pesquisa.

A Aluna 2 reconheceu que a amplitude  $\Delta x$  seria o tamanho do intervalo dividido por  $n$ , o número de subintervalos pedido conforme o enunciado do problema, entretanto, faltou indicar que o intervalo  $[a, b]$  possui amplitude  $\Delta x = b - a$ , para concluir sua resposta.

No item b) era pedido que fossem traçadas retas verticais para obtenção de retângulos que auxiliarão no desenvolvimento da Integral de Riemann. Como ilustrado pela Figura 34, a Aluna 2 traçou os retângulos seguindo a indicação do enunciado, contudo, observa-se que a aluna inseriu os valores obtidos para  $x_1, x_2$  e  $x_3$  em seus “respectivos lugares” no subintervalo.

**Figura 34** - Item b) do problema 2.1 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.

b) Trace retas verticais nas abscissas  $x_0, x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  até a intersecção com a curva de  $f(x)$  e forme 4 retângulos  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  cujas extremidades direitas coincidam com as retas verticais em  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  e apresente uma resposta para as questões abaixo:



Fonte: Dados da pesquisa.

A Aluna 2 equivocou-se ao distribuir os pontos  $x_1, x_2$  e  $x_3$  como indicado na Figura 28, todavia, ela compreendeu a ideia de formar retângulos para fazer uma aproximação da área da região.

Deste ponto em diante, as duas alunas deixaram suas questões em branco. O professor pesquisador observou enormes dificuldades das alunas em seguir as orientações dadas no enunciado do problema e executar essas instruções corretamente. Nessa aula foi realizada uma intervenção diferente das demais, como apontado no capítulo anterior, de Experimentação, pois a formação das alunas também é um aspecto importante da pesquisa.

O pesquisador fez algumas explicações no quadro para auxiliar as alunas durante a resolução das etapas de construção do conceito da Integral de Riemann (ou Integral definida), principal objetivo deste problema.

Diante do exposto, o objetivo deste problema, que era construir e atribuir significado ao conceito de Integral de Riemann, não foi alcançado.

As alunas apresentaram enormes dificuldades para cumprir as etapas descritas ao longo do problema 2.1 da Ficha de Atividades 2 durante esta Primeira parte deste encontro. O professor pesquisador havia previsto dificuldades no desenvolvimento do somatório e com o limite da Soma de Riemann, contudo, as dificuldades apresentaram-se desde o início dessa sessão didática. Como a ED possibilita *correções de rota*, o pesquisador optou por fazê-la neste momento, pois contribuir positivamente com a formação das participantes, futuras professoras de Física, é fundamental. Uma possível mudança seria a proposição de outro problema (semelhante em relação ao conteúdo abordado) ou parar por um momento a aplicação da sequência didática e fazer algumas explicações às alunas. Decidiu-se pela segunda opção.

Como exposto na seção 5.2.3.1 do capítulo 5 desta tese de doutorado, o professor pesquisador considerou necessário fazer explicações no quadro, objetivando sanar dúvidas das alunas participantes, sem fornecer respostas dos problemas desta ficha de atividades.

Na seção seguinte serão efetuadas as análises do problema 2.2 desta ficha de atividades e do Problema Complementar.

### 6.2.2.2 Segunda parte

O segundo problema da Ficha de Atividades 2 estava relacionado com a construção da Integral de Riemann, desenvolvendo as etapas dessa construção, mas agora tendo como referência uma função trigonométrica, como mostrado no Quadro 53.

Na folha de respostas foi disponibilizado o plano cartesiano (e uma malha quadriculada, marcada com alguns pontos em radianos, feito no GeoGebra) para as participantes utilizarem.

Após a intervenção feita pelo professor pesquisador ao final da Primeira parte deste encontro, era esperado que algumas dúvidas das participantes tenham sido sanadas ou, pelo menos, amenizadas, para que possam evoluir em seu processo de aprendizagem e construção de conceitos.

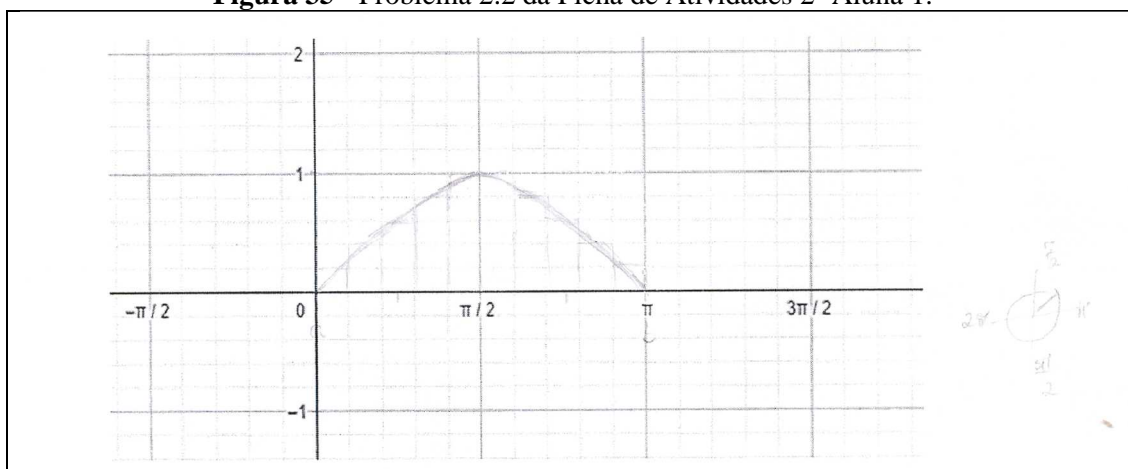
**Quadro 53** - Problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- análises a posteriori.

2.2 Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = \text{sen}(x)$  definida no intervalo  $[0, \pi]$ . Esboce a curva de  $f(x)$  no intervalo dado e responda as demais perguntas com base neste esboço, seguindo o roteiro da questão anterior.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A Aluna 1 esboçou o gráfico da função seno, no intervalo  $[0, \pi]$ , usando valores do círculo trigonométrico, à direita na Figura 35. Apesar do esboço do gráfico dela possuir uma ponta (onde deveria ser uma curva suave, a senoide), é perceptível que a aluna possui noções básicas sobre esse tipo de função trigonométrica.

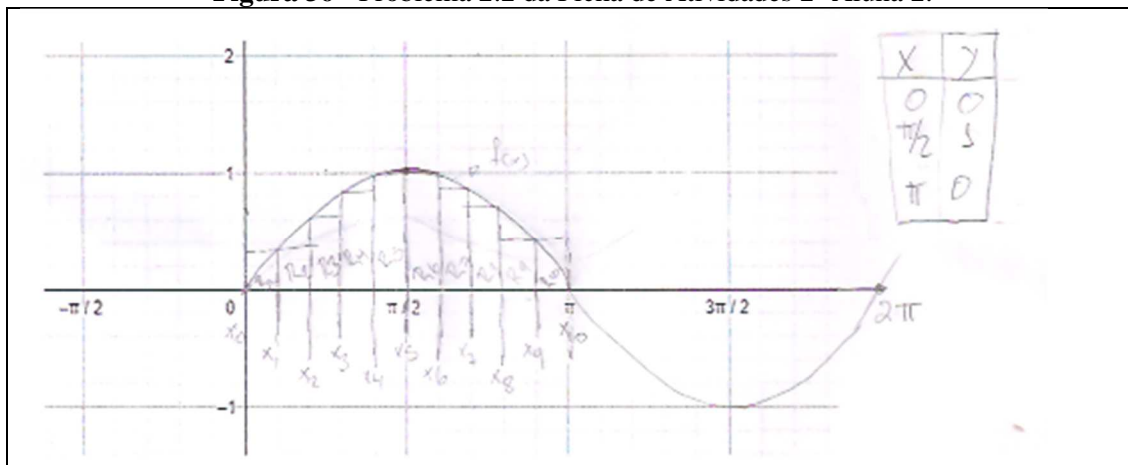
**Figura 35** - Problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 1.



**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 esboçou corretamente o gráfico da função seno, no intervalo  $[0, 2\pi]$ , atribuindo valores em uma tabela, disposta à direita na Figura 36, além de apresentar conhecimentos básicos sobre o comportamento dessa função.

**Figura 36** - Problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.

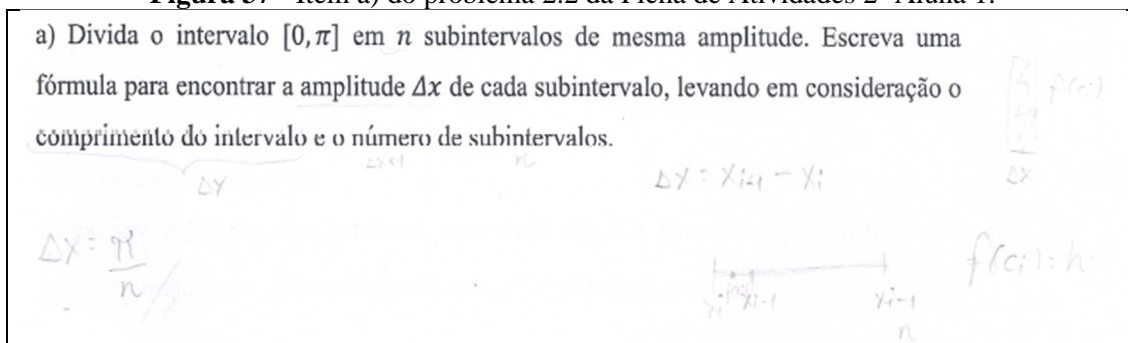


Fonte: Dados da pesquisa.

Embora possuam dificuldades já levantadas (e observadas) com o traçado do gráfico de funções, as alunas demonstraram noções quanto ao comportamento do gráfico da função  $f$  definida por  $f(x) = \text{sen}(x)$ .

O item a) do problema 2.1 tratava sobre a partição do intervalo em  $n$  partes iguais. Percebeu-se que a Aluna 1 compreendeu a ideia de subintervalo, visto que havia deixado questões semelhantes em branco durante a *Primeira parte* desse encontro. Além disso, ela obteve a amplitude dos subintervalos dividindo o comprimento do intervalo por  $n$  partes, como indicado na Figura 37.

**Figura 37** - Item a) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

A Aluna 2, que havia percebido os padrões de formação da amplitude de um subintervalo, como verificado anteriormente, seguiu com a mesma estratégia, como pode ser visto na Figura 38.

**Figura 38** - Item a) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.

$$\Delta x = \frac{I}{n} \quad \therefore \Delta x = \frac{II}{10}$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

É possível notar uma pequena mudança em relação à Aluna 1, visto que ela conseguiu obter a amplitude do intervalo, sendo que anteriormente havia deixado suas respostas em branco.

O item b) deste problema articula a partição do intervalo com a formação de retângulos, visando calcular uma aproximação para área da região. A Aluna 1, como já notado anteriormente, possui dificuldades com o traçado de gráficos de função, e pode ter sido um dos fatores dificultadores para sua resposta neste item. Além disso, a relação obtida para altura dos retângulos não estava correta, como apontado na Figura 39, pois a aluna afirmou que a altura de cada retângulo é dada pelo produto entre a amplitude do intervalo com o número de intervalos da partição.

**Figura 39** - Item b) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 1.

b) Trace retas verticais nas abscissas  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  até a intersecção com a curva  $f(x)$  e forme  $n$  retângulos  $R_1, R_2, \dots, R_n$  cujas extremidades direitas coincidam com as retas verticais em  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ . Escreva algebricamente a expressão que fornece as alturas dos retângulos.

$h = \Delta x \cdot n$  /  $f(c_i)$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 obteve a altura dos retângulos como base  $\times$  altura, confundindo-se sobre a altura dos retângulos, escrevendo  $c_i$  ou  $f(c_i)$  para esse valor, como ilustrado na Figura 40. O valor  $c_i$  representa um ponto qualquer de um subintervalo da partição e  $f(c_i)$  seria a imagem desse ponto, correspondente à altura de um retângulo qualquer, onde  $c_i$  seja um ponto de sua base. Nota-se que a ideia geométrica não se encontra bem consolidada por essa aluna.

**Figura 40** - Item b) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.

b) Trace retas verticais nas abscissas  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  até a interseção com a curva  $f(x)$  e forme  $n$  retângulos  $R_1, R_2, \dots, R_n$  cujas extremidades direitas coincidam com as retas verticais em  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ . Escreva algebricamente a expressão que fornece as alturas dos retângulos.

$$A_R = b \cdot h$$

$$b = \Delta x$$

$$\Rightarrow c_i = ? \quad \Rightarrow \nabla$$

$$c_i = f(x)$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Esperava-se que as participantes conseguissem associar a altura dos retângulos com valores da imagem da função em pontos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (extremidades direitas dos retângulos, como indica o enunciado).

No item c) era pedida uma expressão para representar a área de cada triângulo, após cumpridas as etapas anteriores do problema. Aluna 1 identificou a área do retângulo como o produto da amplitude do intervalo pela altura do retângulo,  $f(c_i)$ , mas não ficou evidente qual caminho utilizou para obter sua conclusão, como pode ser visto na Figura 41 a seguir.

**Figura 41** - Item c) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 1.

c) Escreva uma expressão algébrica (fórmula) para encontrar a área de cada retângulo, em função da amplitude e da altura.

$$A = \Delta x \cdot f(c_i)$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 relacionou a área do retângulo como o produto da amplitude do intervalo ( $\Delta x$ ) por um ponto  $c_i$ , (notação usada para representar um valor qualquer dentro de um subintervalo), entretanto, a altura é dada por  $f(c_i)$ . Havíamos destacado esse equívoco da Aluna 2 em relação às notações de  $c_i$  e  $f(c_i)$  no item anterior. A Figura 42 ilustra a resposta da Aluna 2.

**Figura 42** - Item c) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.

c) Escreva uma expressão algébrica (fórmula) para encontrar a área de cada retângulo, em função da amplitude e da altura.

$$A = \Delta x \cdot C_i$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Era esperado que as participantes encontrassem a área dos retângulos utilizando o produto da base pela altura, ou seja, fazendo o produto entre a amplitude do intervalo pelo valor da função em algum dos pontos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (extremidades direitas dos retângulos, como indica o enunciado).

O item d) deste problema solicitava que fosse calculada a área da região identificada, conforme o enunciado, com base nas etapas construídas anteriormente. A Aluna 1 calculou corretamente a integral da função seno, no intervalo  $[0, \pi]$ , e obteve a área sob a região abaixo do gráfico. Percebe-se que o conceito do cálculo da área de uma região por intermédio da integral definida encontra-se bem estabelecido para essa participante, como aponta a Figura 43.

**Figura 43** - Item d) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 1.

d) Qual é a área da região compreendida entre o intervalo  $[0, \pi]$  e abaixo da função  $f(x) = \text{sen}(x)$  ?

$$\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx = -\text{cos } x \Big|_0^{\pi} = [-\text{cos}(\pi)] - [-\text{cos}(0)] = [-\text{cos}(\pi) + \text{cos}(0)]$$

$$= [-(-1) + 1] = 1 + 1 = 2 //$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 calculou a integral da função seno, no intervalo  $[0, \pi]$  e encontrou a área da região, exceto pela confusão com os sinais negativos, como mostrado na Figura 44. Assim como a Aluna 1, é notável que o conceito do cálculo da área de uma região por meio da integral definida encontra-se bem estabelecido para a Aluna 2.

**Figura 44** - Item d) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.

d) Qual é a área da região compreendida entre o intervalo  $[0, \pi]$  e abaixo da função  $f(x) = \text{sen}(x)$ ?

$$A = \int_0^{\pi} \text{sen}(x) dx = -\text{Cos}(x) \Big|_0^{\pi} = (-\text{Cos}(\pi) + \text{Cos}(0))$$

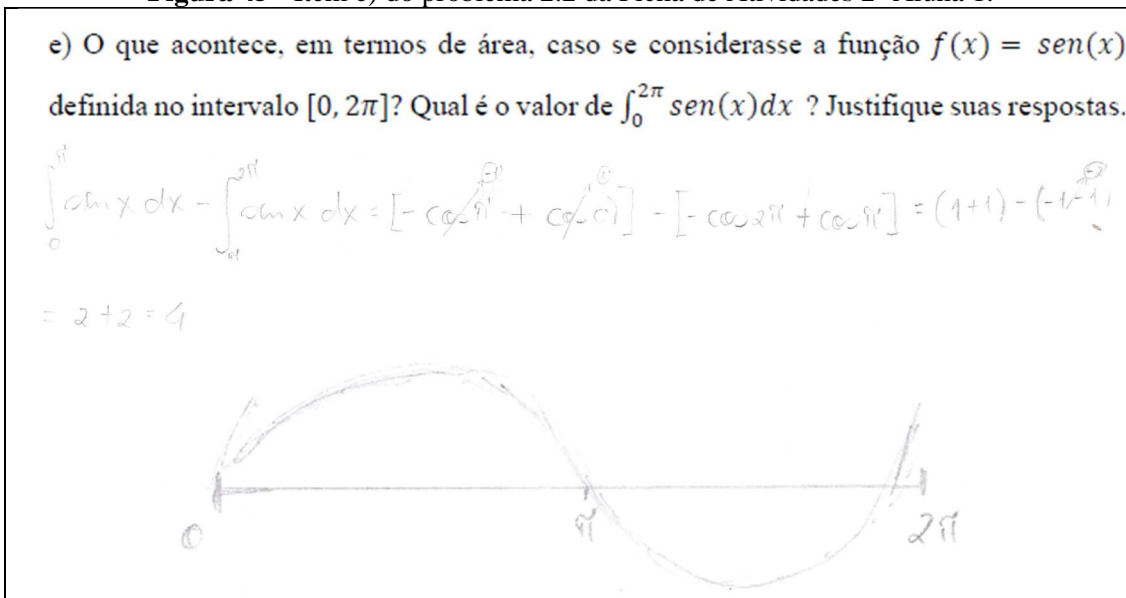
$$\Rightarrow (-1 - 1) = 2 \text{ u.a.}$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Vale destacar que é possível calcular a integral da função, com os limites de integração dados no enunciado ou, de outra forma, poderia utilizar como estratégia de solução os passos indicados nos itens anteriores deste problema, obtendo a área da região mediante a Soma de Riemann. As alunas optaram pelo cálculo da integral, uma das nossas previsões de solução. O conceito do cálculo de áreas usando a Integral está consolidado pelas alunas.

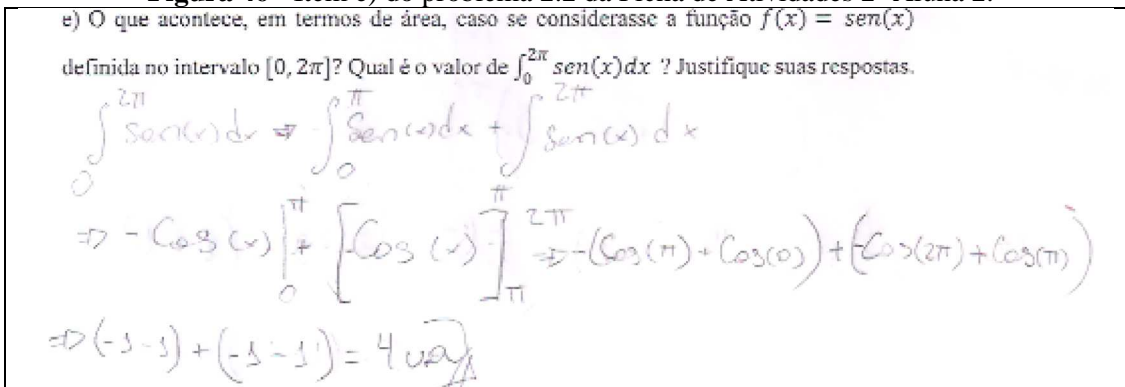
Este problema apresentado no item e) foi inserido na ficha de atividades para causar um desequilíbrio cognitivo nas participantes, pois, ao calcular a integral da função seno, no intervalo  $[0, 2\pi]$  seu resultado é zero, contudo, é possível verificar que existe um valor, não nulo, relacionado à área da região. Pretendemos discutir os motivos da divergência de respostas, com a seguinte pergunta: É possível desenhar uma região com área zero? Como apontado na seção 5.2.3.2, no capítulo de Experimentação, esse problema gerou muitas discussões proveitosas para as alunas e o professor pesquisador.

A Aluna 1 traçou o gráfico da função no intervalo  $[0, 2\pi]$  e separou a integral em duas partes, como apontado na Figura 45, sendo a primeira parte pertencente ao intervalo  $[0, \pi]$  e a segunda pertencente ao intervalo  $[\pi, 2\pi]$ . A aluna colocou um sinal negativo para calcular a segunda integral, corrigindo o sinal negativo de  $f(x)$ , para  $x \in [\pi, 2\pi]$ .

**Figura 45** - Item e) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 1.

Fonte: Dados da pesquisa.

A Aluna 2 também esboçou o gráfico da função seno no intervalo  $[0, 2\pi]$  e calculou a integral, separando em duas partes, com limites de integração nos intervalos  $[0, \pi]$  e  $[\pi, 2\pi]$ , respectivamente. Entretanto, cometeu alguns erros operacionais com os sinais ao longo da sua execução, conforme a Figura 46 ilustra.

**Figura 46** - Item e) do problema 2.2 da Ficha de Atividades 2- Aluna 2.

Fonte: Dados da pesquisa.

Durante as discussões as participantes perceberam que a região do gráfico abaixo do eixo horizontal possui *altura negativa*, ou seja, a função admite valores negativos para sua imagem naquela região e, dessa forma, é preciso *corrigir o sinal*, acrescentando um sinal negativo na Integral ou calculando o valor da área da região em módulo. Como esperado, as alunas perceberam a necessidade de correção do sinal da integral que possui parte do seu gráfico abaixo do eixo horizontal.

O objetivo deste problema 2.2 era definir a Integral de Riemann, com instruções apresentadas sequencialmente, para as alunas refletirem sobre essas instruções e construïrem a Soma de Riemann, conforme as orientações dadas no enunciado. Ao final do problema esperava-se que as alunas encontrassem a área da região.

Conforme as análises efetuadas mediante os registros das alunas participantes, o objetivo deste problema foi parcialmente alcançado.

Esta *Segunda parte* relativa ao terceiro encontro, cujo foco foram os problemas propostos na Ficha de Atividades 2, desenvolveu-se da maneira que o pesquisador idealizou, pois, as alunas conseguiram trabalhar melhor as instruções apresentadas no enunciado do problema e não deixaram questões em branco, apenas o Problema Complementar. O objetivo principal com a escolha desses problemas foi auxiliar as alunas a construïrem, de fato, a Integral de Riemann seguindo as orientações apresentadas no enunciado dos problemas, motivando análises e reflexões das participantes.

Afirmamos que houve uma melhora significativa nos registros das alunas coletados na *Segunda parte* ao serem comparados com os registros coletados na *Primeira parte* das atividades realizadas neste dia. Talvez a explicação do professor pesquisador, recordando termos e conceitos com a participação das alunas tenha contribuído para este fato.

Este terceiro encontro efetuado para resolução dos problemas da Ficha de Atividades 2 indica que as alunas possuíam bem estabelecido o conceito do cálculo de área usando Integral. Por outro lado, percebem-se dificuldades em traçar gráficos de funções e as relações entre pontos do domínio e pontos da imagem da função, acrescentando-se a isso, as complicações em seguir as instruções do enunciado do problema e executá-las corretamente.

Da mesma forma como apontado no encontro anterior, as etapas de discussão foram proveitosas e enriquecedoras, sempre contando com a participação das alunas, visando sua construção de conceitos e melhora nos processos de ensino e aprendizagem.

Encerrados os confrontos entre as análises *a priori* e as análises *a posteriori* dos problemas da Ficha de Atividades 2, contemplando a *Primeira parte* e a *Segunda parte* do terceiro encontro, é necessário retomar as questões específicas, apresentadas no capítulo 4 desta tese de doutorado, que determinamos para serem analisadas. A questão específica local a ser analisada será:

1. efetuar a construção do conceito da Integral definida, mediante a utilização de um roteiro para sua obtenção, contribui para sua aprendizagem?

Em relação à questão específica estipulada, sobre a construção do conceito de integral ser apresentada mediante a utilização de um roteiro, é preciso destacar que as etapas de construção indicadas nos problemas propostos abordam esse conceito da mesma forma que os livros de CDI utilizados no Ensino Superior, entretanto, optamos por uma metodologia de ensino ativa, na qual são considerados o protagonismo e a autonomia dos estudantes, diferente das aulas tradicionais, que são passivas e mecanizadas.

Isso posto, percebe-se que as alunas tiveram dificuldades iniciais ao realizar as etapas propostas no problema 2.1, contudo, essas dificuldades foram amenizadas quando trabalharam no problema 2.2, de acordo com os registros produzidos pelas alunas. A construção do conceito da Integral definida efetuada com base nos roteiros apresentados nos problemas desta ficha de atividades contribuiu para que a Integral fosse vista além do que um mero símbolo matemático, e sim como a representação de uma soma, a Soma de Riemann, trazendo mais significado para esta operação Matemática.

Vale destacar que há dificuldades que precisam ser superadas para a construção do conceito de Integral definida, as quais podem ser listadas, de acordo com as análises dos registros das alunas. Inicialmente, é preciso ter conhecimentos bem estabelecidos acerca de Funções e seus gráficos, ou seja, é preciso saber a definição de função, Domínio e Imagem, reconhecer pontos da imagem pertencentes ao gráfico da função e encontrar pontos de interseção entre funções ou a interseção da função com retas verticais. Além disso, é preciso ter conhecimentos prévios sobre equações de reta (principalmente retas verticais), área do retângulo e comprimento (ou amplitude) de um intervalo real.

Diante do exposto, justificando nossa ideia de trabalhar a construção do conceito de Integral definida (ou Integral de Riemann) e a intenção de abordar esses conceitos listados anteriormente, seguindo os pressupostos teórico-metodológicos da MEAAMaRP, e trazendo uma abordagem diferente da tradicional, podemos afirmar que a construção do conceito de integral pode contribuir para a aprendizagem das alunas.

Em síntese, os problemas abordados na Ficha de Atividades 2 durante esta sessão didática consistiam na construção do conceito de Integral definida, visando superar obstáculos didáticos relacionados às funções, de maneira geral, e contribuíram, tal como pode ser observado no caso das duas alunas em questão, para tornar o conceito de Integral mais significativo para as alunas participantes.

### 6.2.3 Análises a posteriori da Ficha de Atividades 3

O quarto encontro para coleta de dados e produção de registros, determinado no cronograma elaborado pelo professor pesquisador, refere-se à resolução dos problemas selecionados que compõem a Ficha de Atividades 3, concernentes a algumas aplicações da Integral definida.

Na *Primeira parte* desta sessão didática, as alunas resolveram os problemas sob a mediação do pesquisador e na *Segunda etapa*, após a realização das discussões, as alunas pediram para refazer os mesmos problemas, antes da Formalização dos conteúdos.

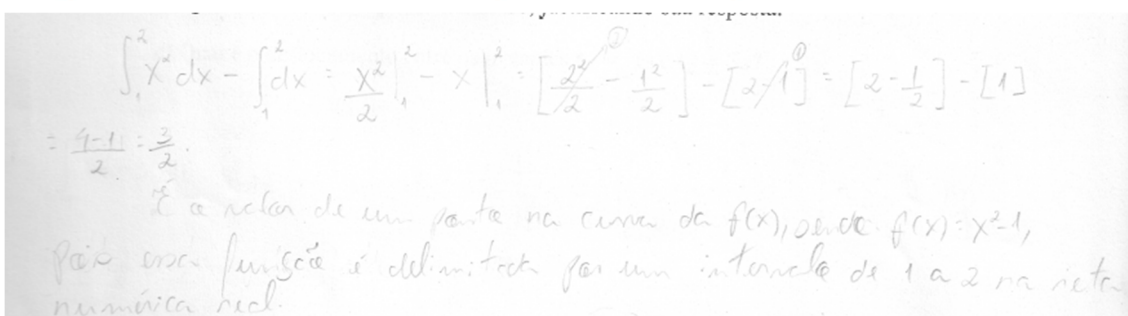
#### 6.2.3.1 Primeira parte

O problema 3.1 desta Ficha de Atividades 3 pedia para que fosse encontrado e interpretado o resultado numérico da integral. Era esperado pelo professor pesquisador que as participantes calculassem o valor da integral diretamente ou efetuando a construção da Soma de Riemann e depois interpretassem o resultado como a área de uma região, o trabalho de uma força, entre outras aplicações possíveis que as alunas conheçam, a depender do contexto.

Foi observado que Aluna 1 confundiu-se ao efetuar o cálculo da integral definida e sua justificativa foi apresentada de forma confusa, como pode ser visto na Figura 47.

**Figura 47** - Problema 3.1 da Ficha de Atividades 3- Aluna 1.

3.1- Após calcular  $\int_1^2 x^2 - 1 dx$  você obterá como resultado um número real. Explique o significado desse resultado numérico, justificando sua resposta.



“É um valor de um ponto na curva de  $f(x)$ , sendo  $f(x) = x^2 - 1$ , pois essa função é delimitada de 1 a 2, na reta numérica real. “

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 efetuou os cálculos corretamente e indicou que o valor correspondia a uma área, entretanto poderia apresentar sua resposta com mais argumentos

contextualizando-a, indicando outras possibilidades para este resultado. A Figura 48 apresenta a solução da Aluna 2 para este problema.

**Figura 48** - Problema 3.1 da Ficha de Atividades 3- Aluna 2.

Handwritten solution showing the calculation of a definite integral:

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \left[ \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right] = \left[ \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right] = \frac{7}{3}$$

The student then incorrectly simplifies  $\frac{7}{3}$  to  $2.33$  and states: "O ponto 1,33 representa um ponto específico de uma área."

**Fonte:** Dados da pesquisa.

O objetivo do problema 3.1 consiste em levantar discussões sobre a interpretação que possui o resultado de uma integral definida, pois a depender do contexto, a resposta pode ser a área de uma região, o trabalho de uma força ou o espaço percorrido por um móvel.

Percebe-se que as alunas estão associando a Integral, apenas, como o valor da área de uma região, esquecendo das demais possibilidades de interpretação para a Integral definida.

Com base no confronto entre as respostas esperadas e os registros produzidos pelas alunas, afirmamos que o objetivo do problema foi parcialmente alcançado.

O problema 3.2 resgatou a noção de Primitiva de uma função, contudo, auxilia também na construção de sua definição, justificando a ausência da constante de integração na integral definida, como indicado no Quadro 54.

**Quadro 54** - Problema 3.2 da Ficha de Atividades 3 - análises a posteriori.

3.2 - Dada uma função  $f$  definida por  $f(x)$ , com primitiva  $F(x)$  e um intervalo real  $[a, b]$ , justifique a afirmação: Podemos omitir a constante real  $k$  ao calcular  $\int_a^b f(x) dx$ .  
(Leithold, v.1, p. 303, ex. 68- adaptado).

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A Aluna 1 inseriu vários elementos em sua resposta, como apontado na Figura 49, mas não justificou porque a constante real  $k$  poderia ser omitida. É provável que já tenha se deparado com esse problema anteriormente durante as aulas regulares da disciplina de CDI II, e visto algumas dessas justificativas, o que contribuiu para seus argumentos.

**Figura 49** - Problema 3.2 da Ficha de Atividades 3- Aluna 1.

Handwritten notes on a piece of paper:

- Top left:  $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$  (with 'TFC' written above it)
- Top right:  $f(x) = \text{função} + k$
- Middle right:  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
- Bottom left:  $F(x) = f'(x)$
- Bottom right: "Quando delimitamos a função  $f(x)$  em um intervalo de  $[a, b]$ , colocamos a função primitiva  $F(x)$  para atuar nos extremos, chegando ao Teorema Fundamental de cálculo."

A horizontal grey bar redacts the bottom portion of the handwritten text.

*“Quando delimitamos a função  $f(x)$  em um intervalo de  $[a, b]$ , colocamos a função primitiva  $F(x)$  para atuar nos extremos, chegando ao Teorema Fundamental do Cálculo.”*

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 tentou fazer uma correspondência entre a integral e a área, de uma maneira equivocada, desviando-se do foco da questão, como mostra a Figura 50.

**Figura 50** - Problema 3.2 da Ficha de Atividades 3- Aluna 2.

Handwritten text:

Podemos dizer que ao calcular uma Integral definida em um espaço, procuramos o valor da área delimitada pelo intervalo  $[a, b]$ , o que nos dá um ponto exato dentro de uma família de Integrais.

*“Podemos dizer que ao calcular uma Integral definida em um espaço, procuramos o valor da área delimitada pelo intervalo  $[a, b]$ , o que nos dá um ponto exato dentro de uma família de Integrais.”*

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Apesar de confusa e não responder sobre a constante de integração em relação à Integral definida, a explicação da *Aluna 2* indica que ela já se deparou com alguns conceitos relacionados à Integral de uma função. Reforço que tais conceitos estão equivocados. O professor pesquisador esperava que as participantes utilizassem argumentos matemáticos, como o Teorema Fundamental do Cálculo ou a própria definição de Primitiva de uma função, para justificar esse fato.

Por se tratar de um resultado importante que provoca indecisões nos alunos, conforme a experiência profissional do autor deste trabalho, esse problema foi proposto com o objetivo de auxiliar as alunas na compreensão desse conceito, com a finalidade de superar essa dificuldade conceitual.

Comparando as respostas esperadas pelo professor pesquisador com os registros das alunas é possível verificar que houve uma breve indicação do Teorema Fundamental do Cálculo, pela Aluna 1, na tentativa de justificar sua resposta. A Aluna 2 equivocou-se ao expor seus argumentos.

Dessa forma, afirmamos que o objetivo deste problema foi atingido de maneira insatisfatória.

O problema 3.3 aborda conceitos físicos como deslocamento e espaço percorrido, e foi inserido nesta ficha de atividades com a intenção de levantar discussões multidisciplinares, exemplificando aplicações do CDI. No item a) era pedido que fosse explicado a diferença entre esses conceitos, com a possibilidade das alunas pesquisarem em seus materiais ou utilizando seus celulares. O Quadro 55 traz o enunciado do problema e item a).

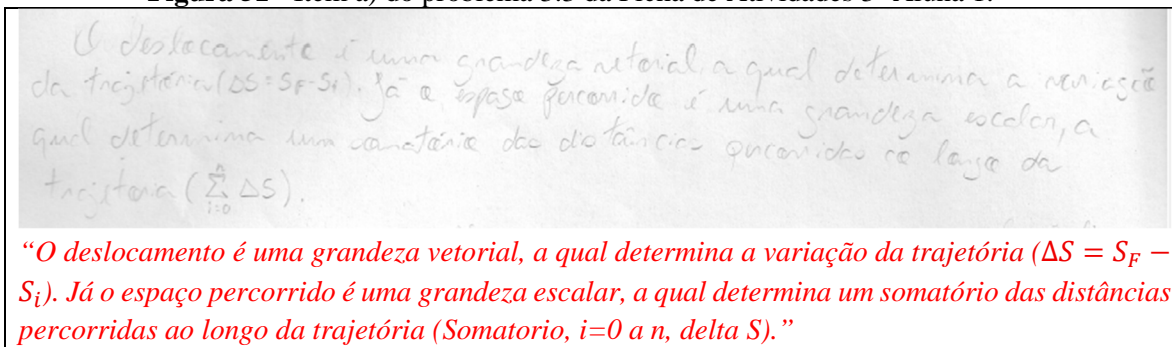
**Quadro 55** - Item a) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3 - análises a posteriori.

3.3- Quando tratamos sobre o movimento de um corpo (ou uma partícula), podemos falar em deslocamento e espaço percorrido. Responda as questões a seguir:

a) Como você explicaria a diferença entre esses conceitos físicos?

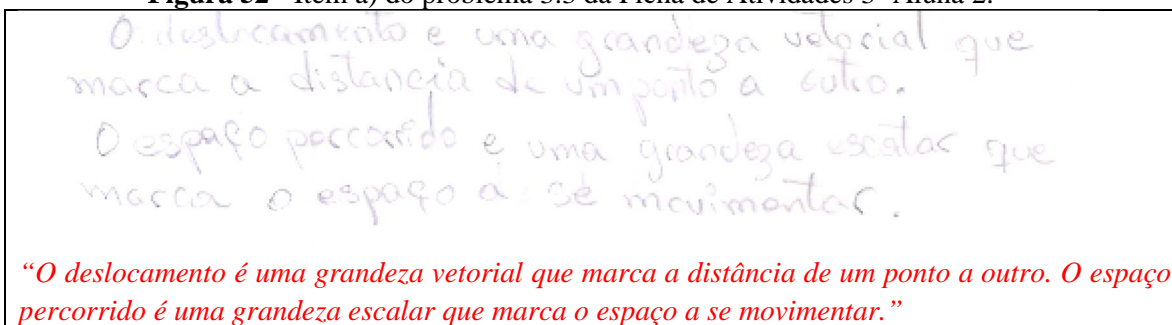
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A Aluna 1 respondeu corretamente sobre as grandezas vetoriais e escalares envolvidas nessa questão, como indicado na Figura 51.

**Figura 51** - Item a) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3- Aluna 1.

**Fonte:** Dados da pesquisa.

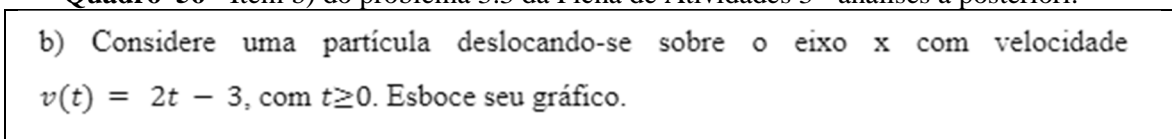
Da mesma forma, a Aluna 2 respondeu corretamente sobre as grandezas físicas envolvidas na questão, como apontado na Figura 52 a seguir.

**Figura 52** - Item a) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3- Aluna 2.

**Fonte:** Dados da pesquisa.

O item a) deste problema permitiu discussões sobre grandezas vetoriais e grandezas escalares, temas relevantes para as licenciandas em Física. Mesmo efetuando pesquisas com seus celulares, as alunas argumentaram corretamente sobre as diferenças entre espaço percorrido e deslocamento.

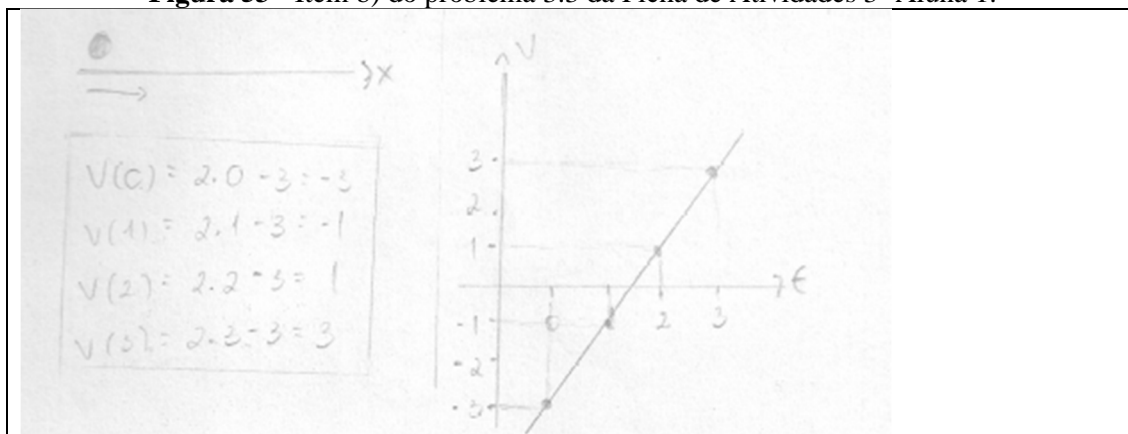
O item b) deste problema apresentou a função horária da velocidade de um corpo (ou partícula) e pedia para que fosse esboçado o gráfico da função, conforme o enunciado exibido no Quadro 56 a seguir.

**Quadro 56** - Item b) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3 - análises a posteriori.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A Aluna 1, utilizando a estratégia de atribuir valores para variável  $t$  e preencher uma tabela, esboçou o gráfico da função velocidade da partícula, todavia, este gráfico tocou o eixo vertical, na ordenada  $-3$ , isto é,  $v(0) = -3$ , constituindo um erro no esboço do gráfico, como indicado na Figura 53.

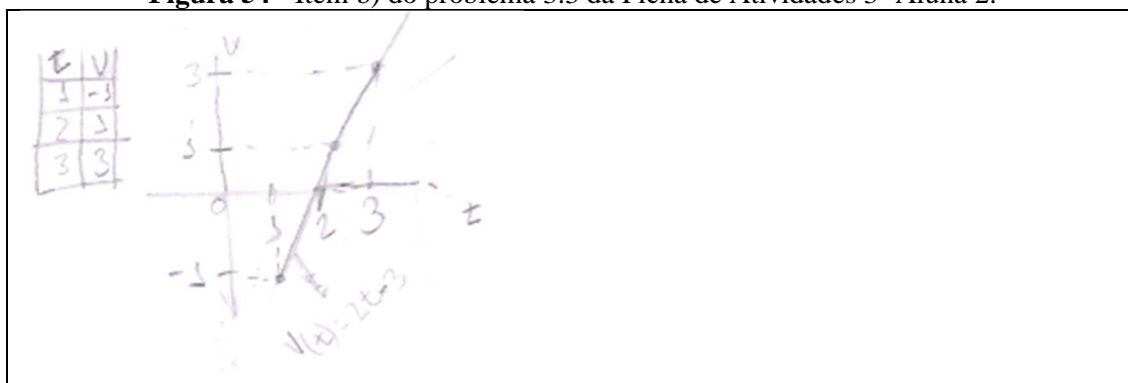
**Figura 53** - Item b) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3- Aluna 1.



**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 utilizou-se da mesma estratégia, completando uma tabela para esboçar o gráfico de  $v(t)$ , entretanto possui alguns erros na realização do gráfico da função pois, aparentemente,  $v(2) = 1$  no esboço da aluna (o que não está correto), como ilustra a Figura 54.

**Figura 54** - Item b) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3- Aluna 2.



**Fonte:** Dados da pesquisa.

Embora contenha alguns erros e por conta das dificuldades (observadas pelo pesquisador) com o traçado de gráficos de funções, percebe-se que as alunas reconheceram o tipo de função que estavam analisando.

Para o item c) desse problema, era pedido no enunciado que fosse encontrado o deslocamento do móvel durante um intervalo de tempo conhecido.

A Aluna 1, corretamente, calculou a integral definida para obter o deslocamento da partícula, como mostrado na Figura 55.

**Figura 55** - Item c) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3- Aluna 1.

c) Qual é o deslocamento entre os instantes  $t_1 = 1s$  e  $t_2 = 3s$ ?

$$\int_1^3 v(t) dt$$

$$\int_1^3 (2t - 3) dt = \int_1^3 2t dt - \int_1^3 3 dt = \left. \frac{2t^2}{2} \right|_1^3 - \left. 3t \right|_1^3 = \left[ \frac{2 \cdot 3^2}{2} - \frac{2 \cdot 1^2}{2} \right] - \left[ \frac{3 \cdot 3}{1} - \frac{3 \cdot 1}{1} \right]$$

$$= 6 - 6 = 2.$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2, acertadamente, calculou a integral para obter o deslocamento da partícula, mas esqueceu de corrigir o sinal negativo no final de sua resposta, como indica a Figura 56.

**Figura 56** - Item c) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3- Aluna 2.

c) Qual é o deslocamento entre os instantes  $t_1 = 1s$  e  $t_2 = 3s$ ?

$$\int_1^3 (2t - 3) dt = 2 \int_1^3 t dt - 3 \int_1^3 dt = \left. \frac{2t^2}{2} \right|_1^3 - \left. 3t \right|_1^3 = \left[ \frac{2 \cdot 3^2}{2} - \frac{2 \cdot 1^2}{2} \right] - \left[ \frac{3 \cdot 3}{1} - \frac{3 \cdot 1}{1} \right] = -2$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

O professor pesquisador esperava que as alunas utilizassem a integral como recurso para resolver o problema. Outra estratégia de solução consiste em utilizar o gráfico do item anterior e encontrar a área da região.

Em relação ao item d) do problema, pedia-se, desta vez, que fosse obtido o espaço percorrido pelo móvel em um intervalo de tempo conhecido. Esperava-se, novamente,

que as alunas utilizassem seus conhecimentos prévios sobre integral definida ou calculassem a área por meio do gráfico da função horária da velocidade.

Aluna 1, conforme Figura 57, obteve uma primitiva para função horária da velocidade e tentou obter o espaço da partícula nos instantes 1 s e 3 s, confundindo-se durante sua execução.

**Figura 57** - Item d) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3- Aluna 1.

d) Qual é o espaço percorrido pela partícula entre os instantes  $t_1 = 1\text{ s}$  e  $t_2 = 3\text{ s}$ ?

$$\int (2t - 3) dt = \int 2t dt - \int 3 dt = \frac{2t^2}{2} - 3t + K; K \in \mathbb{R}$$

$$S(1) = \frac{2 \cdot 1^2}{2} - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2 \text{ m}$$

$$S(3) = \frac{2 \cdot 3^2}{2} - 3 \cdot 3 = 9 - 9 = 0$$

Espaço percorrido entre 1 e 3 s:  

$$S(1) + S(3) = 0\text{ s}$$

$$-2 + 0 = -2$$

Fonte: Dados da pesquisa.

A Aluna 2 calculou, erroneamente, da mesma forma que no item (c), a integral da função  $v(t)$ , no mesmo intervalo, obtendo o mesmo valor do deslocamento, não se atentando em relação à diferença entre esses conceitos físicos, pesquisados anteriormente no item a). A Figura 58 ilustra a resposta da aluna.

**Figura 58** - Item d) do problema 3.3 da Ficha de Atividades 3- Aluna 2.

d) Qual é o espaço percorrido pela partícula entre os instantes  $t_1 = 1\text{ s}$  e  $t_2 = 3\text{ s}$ ?

$$\int_1^3 (2t - 3) dt = 2 \int_1^3 t dt - 3 \int_1^3 dt = 2 \left[ \frac{t^2}{2} \right]_1^3 - 3 \left[ t \right]_1^3$$

$$\Rightarrow [t^2 - 3t]_1^3 \Rightarrow [9 - 9] - [1 - 3] = 0 - (-2) = 2$$

Fonte - Dados da pesquisa.

O objetivo do problema 3.3 consistia em discutir os conceitos de espaço percorrido e deslocamento (numa perspectiva multidisciplinar) e utilizar integração como ferramenta para abordar grandezas físicas como velocidade e espaço. As alunas conseguiram elaborar estratégias de solução utilizando Integral para resolver os itens desse problema.

Apesar de alguns equívocos cometidos pelas participantes, como erros de sinais, afirmamos que o objetivo proposto por este problema foi alcançado.

O problema 3.4 da ficha de atividades contemplava o espaço percorrido por uma partícula na qual sua velocidade é fornecida por intermédio de uma função trigonométrica. Era esperado que as participantes construíssem o gráfico da função e calculassem a área da região via integral ou utilizassem argumentos desenvolvidos em disciplinas específicas da Licenciatura em Física, como encontrar a posição e o instante que a partícula para seu movimento para obter seu espaço percorrido.

A Aluna 1 deixou sua resposta em branco, provavelmente por conta de sua dificuldade em esboçar gráficos de função. A Aluna 2 calculou a integral diretamente, não se atentando a alguns detalhes importantes para solução do problema, como exibido na Figura 59. Ela poderia esboçar o gráfico da função para verificar o instante que a partícula para e muda de sentido e separar em duas integrais, somando em módulo seus valores.

Além disso, era preciso fazer uma mudança de variável no integrando da função. Isso posto, a aluna obteve, erroneamente, que o deslocamento (escalar) da partícula é nulo.

**Figura 59** - Problema 3.4 da Ficha de Atividades 3- Aluna 2.

3.4- Encontre o espaço percorrido, entre os instantes  $t = 0$  e  $t = \pi$  s, por uma partícula que desloca-se sobre o eixo x com velocidade  $v(t) = \text{sen}(2t)$ , em m/s,  $t \geq 0$ .

$$\int_0^{\pi} \text{Sen}(2t) dt = -\text{Cos}(2t) \Big|_0^{\pi} = \left[ -\text{Cos}(2\pi) \right] - \left[ -\text{Cos}(2 \cdot 0) \right]$$

$$\Rightarrow -1 + 1 = 0 \text{ m/s}$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

O problema 3.4 possuía como objetivos o traçado do gráfico da função trigonométrica e o cálculo da integral para obtenção do espaço percorrido. Como a Aluna 1 deixou a questão em branco e a Aluna 2 solucionou apenas a integral, sem considerar alguns elementos importantes, tais como os intervalos de integração e a mudança de variáveis, afirmamos que os objetivos do problema foram alcançados de maneira insatisfatória.

Finalizando esta Ficha de Atividades 3, o Problema Complementar foi inserido para levantar discussões sobre a relação existente entre as grandezas físicas de espaço, velocidade e aceleração, bem como, entre suas derivadas e integrais, como apontado no Quadro 57 a seguir. Ambas as participantes deixaram a questão em branco, não havendo indicativos que possam ser considerados.

**Quadro 57** - Problema Complementar da Ficha de Atividades 3 - análises a posteriori.

**Problema Complementar**

3.5- Dada uma partícula a qual sabemos sua equação horária dos espaços,  $s(t)$ , podemos obter informações sobre velocidade, aceleração e o tipo de movimento da partícula. Agora, considere uma partícula e suponha que você conhece  $a(t)$ . O que podemos afirmar em relação à  $s(t)$  e  $v(t)$ ? Como obter essas informações?

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Ao término desta *Primeira parte* do quarto encontro da aplicação da sequência didática desenvolvida com fins desta pesquisa de doutorado, foram contemplados os problemas propostos na Ficha de Atividades 3, relacionados a algumas aplicações de Integral.

Conforme as expectativas do professor pesquisador, o problema 3.1 teve seu objetivo parcialmente alcançado, os problemas 3.2 e 3.4 tiveram seus objetivos alcançados de maneira insatisfatória e o problema 3.3 teve seus objetivos alcançados. O Problema Complementar foi entregue em branco pelas duas alunas.

Após a descrição dos registros coletados durante alguns encontros, foi perceptível que as alunas possuem dificuldades em traçar gráficos de funções e têm muitas dúvidas em conceitos de integral, pois não estão bem estabelecidos, como observado e indicado pelo pesquisador durante a etapa de Experimentação (capítulo 5 deste trabalho).

Na seção seguinte prosseguimos com as discussões, focalizando os problemas referentes a Ficha de Atividades 3.

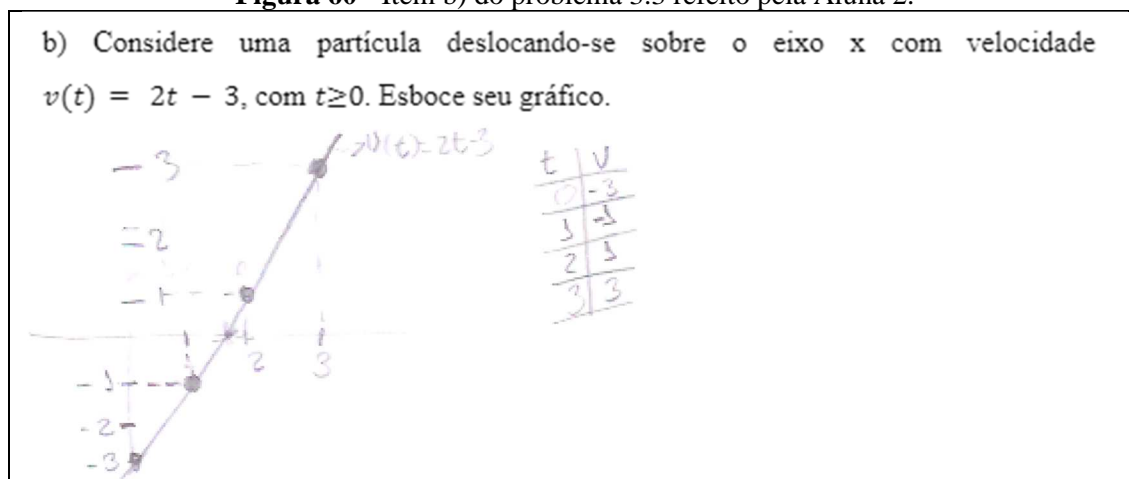
### 6.2.3.2 Segunda parte

Após a realização das discussões conforme as etapas 6. *Registro das resoluções na lousa*; 7. *Plenária*; e 8. *Busca do consenso*, do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), as alunas refizeram os problemas que apresentaram maiores dificuldades.

Nos problemas 3.1 e 3.2 as alunas não fizeram alterações em relação ao que foi feito por elas durante a Primeira parte deste encontro, sendo assim, nada a ser feito em termos de análises comparativas.

Dando sequência, no problema 3.3, o item a) foi deixado em branco porque as participantes haviam pesquisado sobre as diferenças entre os conceitos de deslocamento e espaço percorrido. O item b) deste problema foi deixado em branco pela Aluna 1, porém a Aluna 2 refez seu gráfico da função horária da velocidade, utilizando a estratégia de preencher uma tabela com valores para variável tempo, como ilustrado na Figura 60 a seguir.

**Figura 60** - Item b) do problema 3.3 refeito pela Aluna 2.



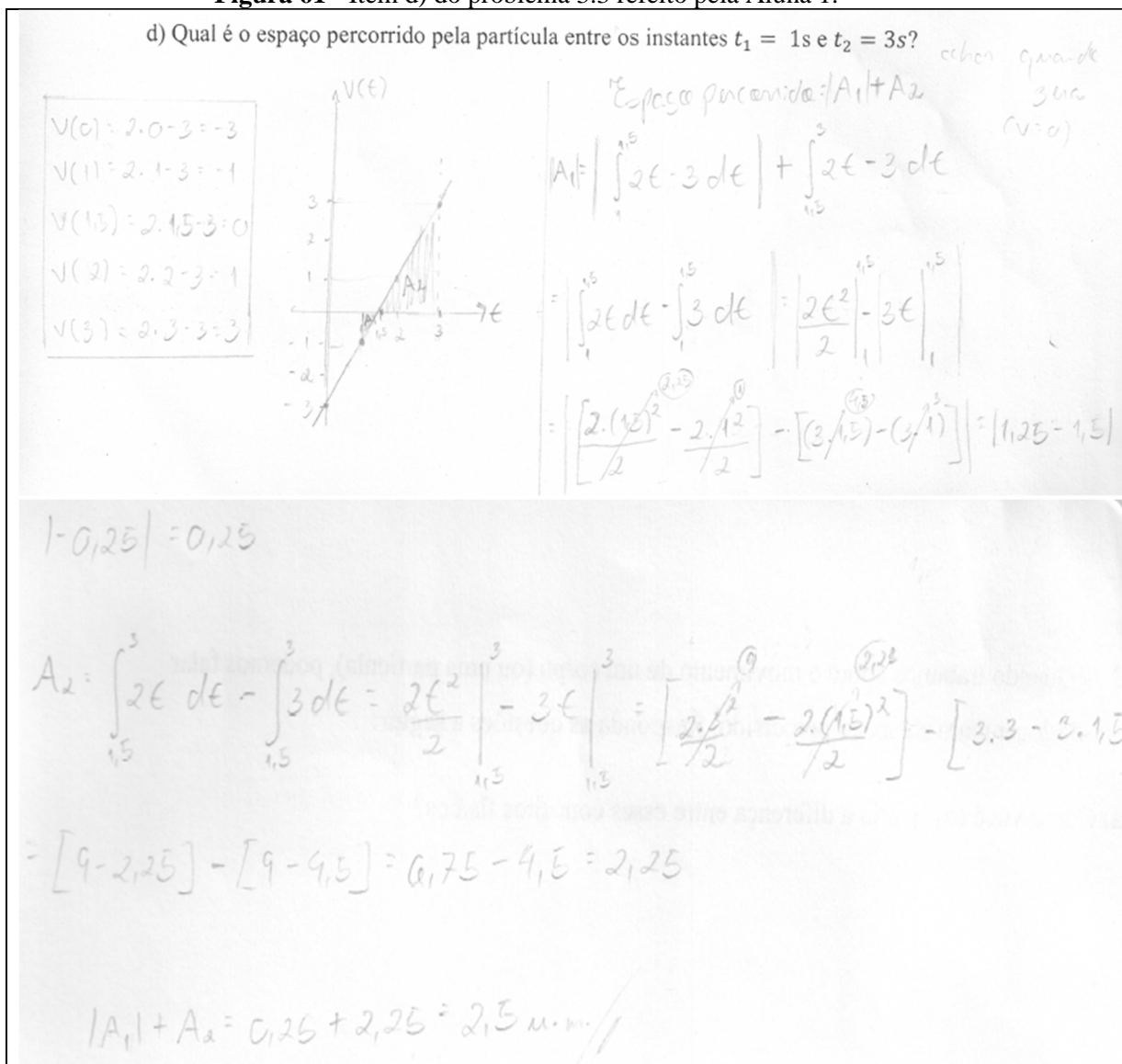
Fonte: Dados da pesquisa.

O item c) desse problema foi deixado em branco por ambas as alunas, contudo, refizeram o item d) do problema 3.3, que perguntava qual era o espaço percorrido entre os instantes 1 s e 3 s.

A Aluna 1 fez o gráfico do item anterior no local destinado para essa questão, como ilustrado na Figura 61. Para o espaço percorrido, as discussões foram proveitosas,

pois a parte do gráfico cujos valores da velocidade são negativos, foram corrigidos durante a integração ao utilizar seus valores em módulo.

**Figura 61** - Item d) do problema 3.3 refeito pela Aluna 1.



Fonte: Dados da pesquisa.

A Aluna 2 separou a integral em duas partes, dividindo o intervalo de integração no ponto referente à velocidade igual a zero no gráfico, e somou os valores obtidos, como mostrado na Figura 62. Por algum descuido, confundiu-se com esse valor e o utilizou erroneamente nos cálculos, obtendo um valor diferente do correto. Entretanto, é possível verificar uma mudança na maneira de resolver o problema, possivelmente por conta das discussões efetuadas durante a busca do consenso e a plenária.

**Figura 62** - Item d) do problema 3.3 feito pela Aluna 2.

d) Qual é o espaço percorrido pela partícula entre os instantes  $t_1 = 1s$  e  $t_2 = 3s$ ?

$$\int_1^3 2t - 3 dt = \int_1^{\frac{3}{2}} 2t - 3 dt + \int_{\frac{3}{2}}^3 2t - 3 dt = \frac{t^2}{2} - 3t \Big|_1^{\frac{3}{2}} + \frac{t^2}{2} - 3t \Big|_{\frac{3}{2}}^3$$

$$= \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^2 - 3 \cdot \frac{2}{3} \right] - \left[ 1^2 - 3 \cdot 1 \right] + \left[ 3^2 - 3 \cdot 3 \right] - \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^2 - 3 \cdot \frac{2}{3} \right]$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{4}{9} - \frac{6}{9} + 2 \right] + \left[ \frac{4}{9} - \frac{6}{9} \right] = 2$$

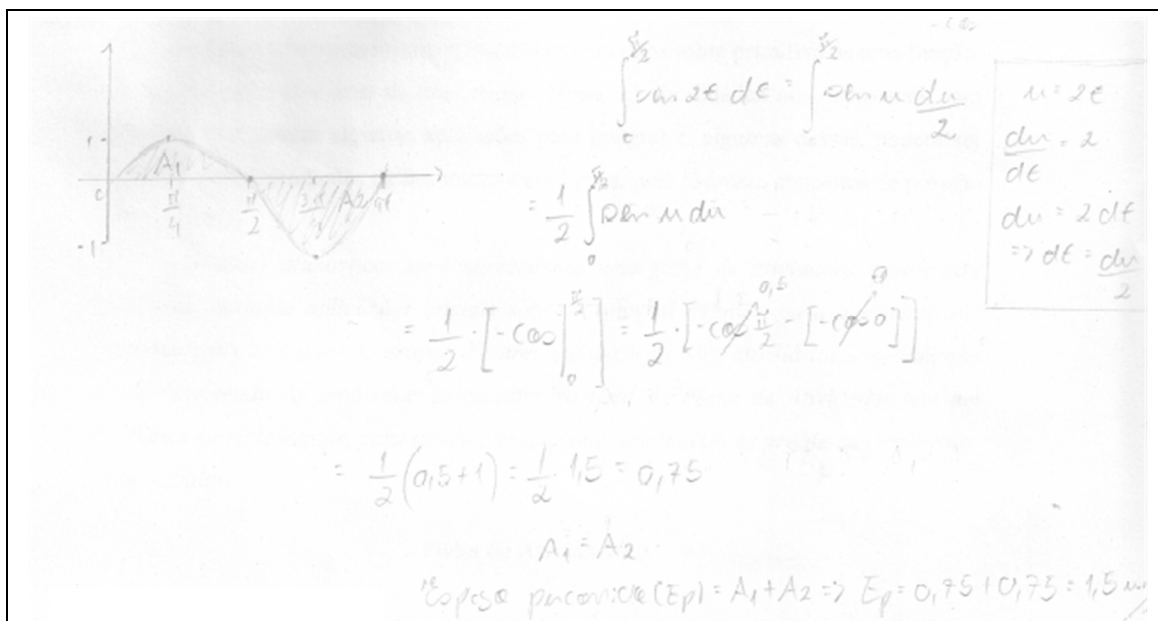
**Fonte:** Dados da pesquisa.

Para o problema 3.4, houve uma mudança significativa, visto que a Aluna 1, que havia deixado sua resposta em branco na Primeira parte deste encontro, conseguiu iniciar e desenvolver uma estratégia de solução para o problema, como apontado na Figura 63 a seguir.

Esta aluna esboçou o gráfico da função e percebeu, pelos seus cálculos, que as áreas denominadas por ela como  $A_1$  e  $A_2$  são iguais. Dessa forma, calculou a área  $A_1$ , acima do eixo horizontal, e somou com a área  $A_2$ , sabendo-se que  $A_1 = A_2$ , e assim, obteve o valor correto do espaço percorrido pela partícula. As discussões e comentários realizados entre as alunas e o professor pesquisador durante a plenária podem ter impactado no desenvolvimento da sua solução.

**Figura 63** - Problema 3.4 feito pela Aluna 1.

3.4- Encontre o espaço percorrido, entre os instantes  $t = 0$  e  $t = \pi$  s, por uma partícula que desloca-se sobre o eixo x com velocidade  $v(t) = \text{sen}(2t)$ , em m/s,  $t \geq 0$ .



Fonte: Dados da pesquisa.

Em relação ao problema 3.4, a Aluna 2 refez os cálculos da mesma maneira como exibidos na Primeira parte desse encontro, obtendo os mesmos resultados, não indicando mudanças significativas que necessitem ser mencionadas. O Problema Complementar foi novamente deixado em branco.

Ao final desta *Segunda parte* relativa ao quarto encontro voltado à aplicação dos instrumentos da coleta de dados e produção de registros, cujo foco foram os problemas propostos na Ficha de Atividades 3, percebeu-se uma leve melhora em relação ao desempenho das alunas participantes. As alunas pediram para refazer os problemas que tiveram mais dificuldades, tais como alguns itens do problema 3.3, e conseguiram desenvolver estratégias de solução que as possibilitou iniciar a resolução desses problemas.

Podemos afirmar que houve melhora nos registros das alunas coletados na *Segunda parte* ao serem comparados com os registros coletados na *Primeira parte* e atribuímos esta melhora às discussões efetuadas no decorrer das etapas 6. *Registro das resoluções na lousa*; 7. *Plenária*; e 8. *Busca do consenso*, do roteiro desenvolvido por Onuchic e Allevalo (2011) e utilizado na coleta de dados desta pesquisa de doutorado.

Esta melhora nos registros das alunas pode ser observada em relação aos problemas 3.3 e 3.4, que foram refeitos pelas alunas após as etapas de discussões com o professor pesquisador. No problema 3.3, percebe-se que a Aluna 1 fez o gráfico da função horária da velocidade corretamente e utilizou propriedades de integral para encontrar sua

resposta. A Aluna 2, neste problema 3.3, também utilizou propriedades de integral para concluir sua estratégia de resolução.

Em relação ao problema 3.4, a Aluna 1 havia deixado a questão em branco na *Primeira parte* deste encontro e na *Segunda parte* conseguiu elaborar uma estratégia de resolução para o problema proposto.

O quarto encontro realizado entre pesquisador e participantes, cujo foco esteve voltado para a resolução dos problemas propostos na Ficha de Atividades 3, indicou que as alunas desenvolveram a capacidade de utilizar os conhecimentos referentes à Integral em problemas. Esta ficha de atividades consistia em apresentar algumas aplicações da Integral relacionadas a conceitos físicos, como espaço e velocidade, para gerar discussões numa perspectiva interdisciplinar.

As participantes já estavam mais habituadas com a MEAAMaRP e, por conseguinte, empenharam-se em resolver os problemas sem a expectativa do *momento da aula*, na qual aguardam o professor explicar o conteúdo a ser estudado.

As etapas de discussão, como descrito no capítulo 5 desta tese, ocorreram de forma proveitosa, sendo perceptível traços de melhora, no sentido de contribuir para o enriquecimento da construção de conceitos pelas alunas.

Após o término dos confrontos entre as análises *a priori* e as análises *a posteriori* dos problemas da Ficha de Atividades 3, contemplando a *Primeira parte* e a *Segunda parte* deste quarto encontro, relembramos ao leitor as questões específicas, apresentadas no capítulo 4 desta tese de doutorado, que determinamos para serem analisadas.

As questões específicas a serem analisadas são:

1. após a formalização dos conceitos de Primitiva de uma função e Integral definida, os participantes conseguem aplicá-los em outros problemas do próprio CDI?
2. depois da formalização dos conceitos de primitiva de uma função e integral definida, os participantes conseguem aplicá-los em problemas da Física, com uma abordagem interdisciplinar?

Referente à questão específica, sobre a capacidade das participantes em aplicar os conceitos de Primitiva e Integral após a formalização destes conceitos, podemos afirmar que os registros das alunas indicam melhora nesse sentido. É possível observar alguns traços de evolução das participantes na direção de elaborar estratégias de resolução dos

problemas propostos, embora a execução de alguns apresentem equívocos e erros operacionais (talvez por nervosismo ou falta de atenção).

Em relação à segunda questão específica a ser avaliada com base nos problemas propostos nesta ficha de atividades, sobre a capacidade em aplicar os conceitos de Primitiva e Integral, após sua formalização, em problemas da Física, também afirmamos que esta capacidade está em desenvolvimento.

Os problemas foram selecionados de forma que abordassem situações, notações e possíveis estratégias de solução num sentido amplo, com a possibilidade de serem resolvidos utilizando os artifícios das disciplinas de Física, como as funções horárias do espaço e da velocidade. Nossa intenção era levantar discussões enriquecedoras para as participantes e o pesquisador.

De maneira geral é possível observar que, após formalizar os conceitos de Primitiva e Integral, as participantes puderam adquirir novos atributos para resolver os problemas exclusivos do CDI ou relacionados a diversas áreas do conhecimento, dentre elas, a Física. Como o foco das nossas análises está nos processos de construção de conhecimento e não somente nos resultados finais de cada problema, reforçamos nossa crença que as participantes estão desenvolvendo e ampliando sua habilidade em resolver problemas. Diante do exposto, afirmamos que após a formalização dos conceitos de Primitiva e Integral, as alunas conseguiram aplicá-los na resolução de problemas.

Em resumo, os problemas abordados na Ficha de Atividades 3 durante esta sessão didática consistiu em algumas aplicações da Integral, visando contribuir para o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas e auxiliar na compreensão de conteúdos pertinentes ao CDI e à Física.

#### **6.2.4 Análises a posteriori da Ficha de Atividades 4**

Os problemas selecionados que compõem a Ficha de Atividades 4 contemplam o cálculo da área de regiões formadas a partir da interseção do gráfico de funções, usando Integral como recurso. Como observado na ADI e ao longo da aplicação da sequência didática, as participantes possuem dificuldades ao traçar o gráfico de funções.

Na sequência serão apresentadas as análises e os registros produzidos pelas alunas durante a Primeira parte deste quinto encontro.

### 6.2.4.1 Primeira parte

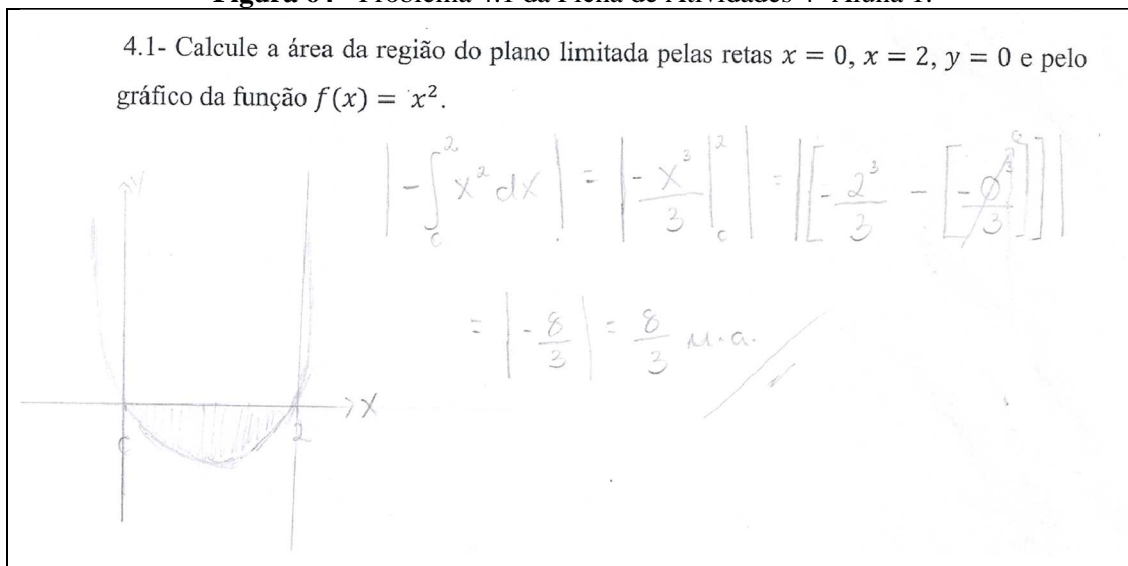
Os problemas propostos nesta Ficha de Atividades 4 contemplavam o cálculo de áreas por meio da Integral e o desenvolvimento do traçado de gráficos de funções.

O problema 4.1 desta ficha de atividades pedia para que fosse calculada a área de uma região limitada, composta pela função  $f$  definida por  $f(x) = x^2$ . Como estratégias de solução esperadas pelo professor pesquisador, era possível que as alunas esboçassem o gráfico da função e calculassem a integral definida para obter a área da região.

Outra solução que esperávamos era utilizar uma aproximação da região usando retângulos e utilizar a Soma de Riemann, como visto anteriormente, na definição da Integral de Riemann.

É notória a dificuldade da Aluna 1 em traçar gráficos de função, como apresentado na Figura 64 na sequência. E acrescentamos que esses erros prejudicam o desenvolvimento de soluções para os problemas. Entretanto, para calcular a área da região usando integral, a Aluna 1 percebeu que a região de integração estava abaixo do eixo horizontal e utilizou sua resposta em módulo, para corrigir o sinal negativo. Apesar do gráfico traçado pela aluna, é notável que a aluna utilizou boas estratégias para resolver o problema.

**Figura 64** - Problema 4.1 da Ficha de Atividades 4- Aluna 1.

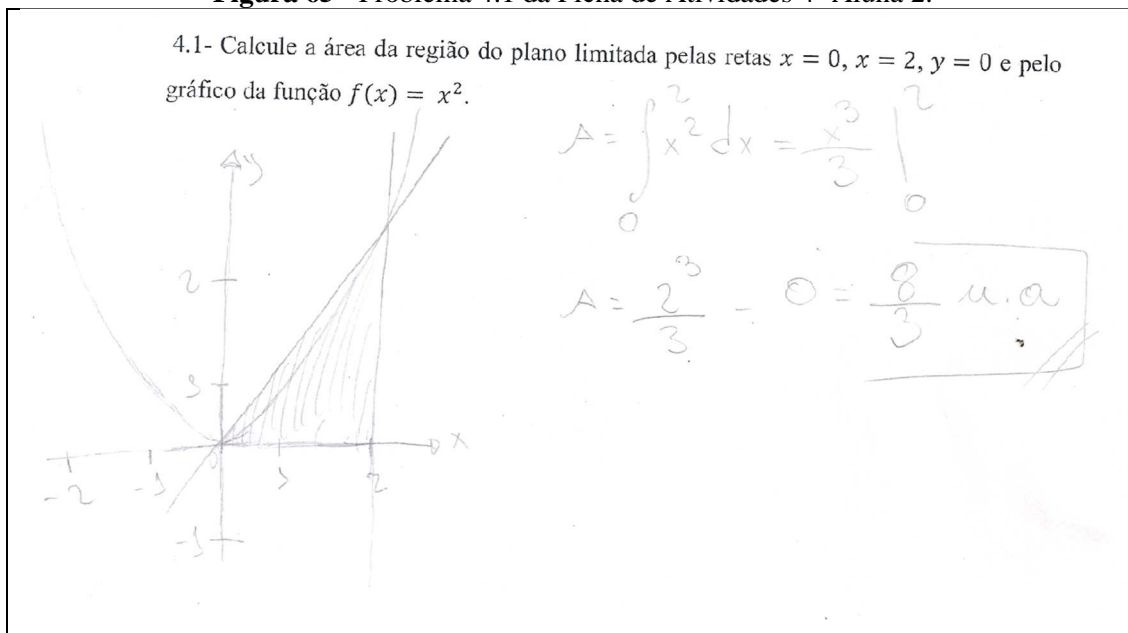


**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2, traçou o gráfico da função  $f$  definida por  $f(x) = x^2$  corretamente, no intervalo estipulado e calculou a integral, sem a necessidade de utilizar o módulo da integral para acertar o sinal do valor da área, como pode ser visto na Figura 65. A reta,

passando pelos pontos (0,0) e (2,4), foi traçada pela aluna por conta de uma confusão, pois o enunciado apresenta as retas  $x = 0$ ,  $x = 2$  e  $y = 0$  como elementos limitantes da região em destaque. Essa nomenclatura é comum nas disciplinas de CDI e Geometria Analítica e Vetores.

**Figura 65** - Problema 4.1 da Ficha de Atividades 4- Aluna 2.



**Fonte:** Dados da pesquisa.

O objetivo deste problema era contribuir para o desenvolvimento de habilidades de calcular a área de regiões limitadas usando integrais. Além disso, trabalhar o traçado do gráfico da função para visualizar a região e os limites de integração.

Apesar de algumas distorções apresentadas nos registros produzidos pela Aluna 1, e considerando que efetuaram o cálculo da integral para obtenção da área da região limitada do enunciado do problema, concluímos que os objetivos deste problema foram alcançados.

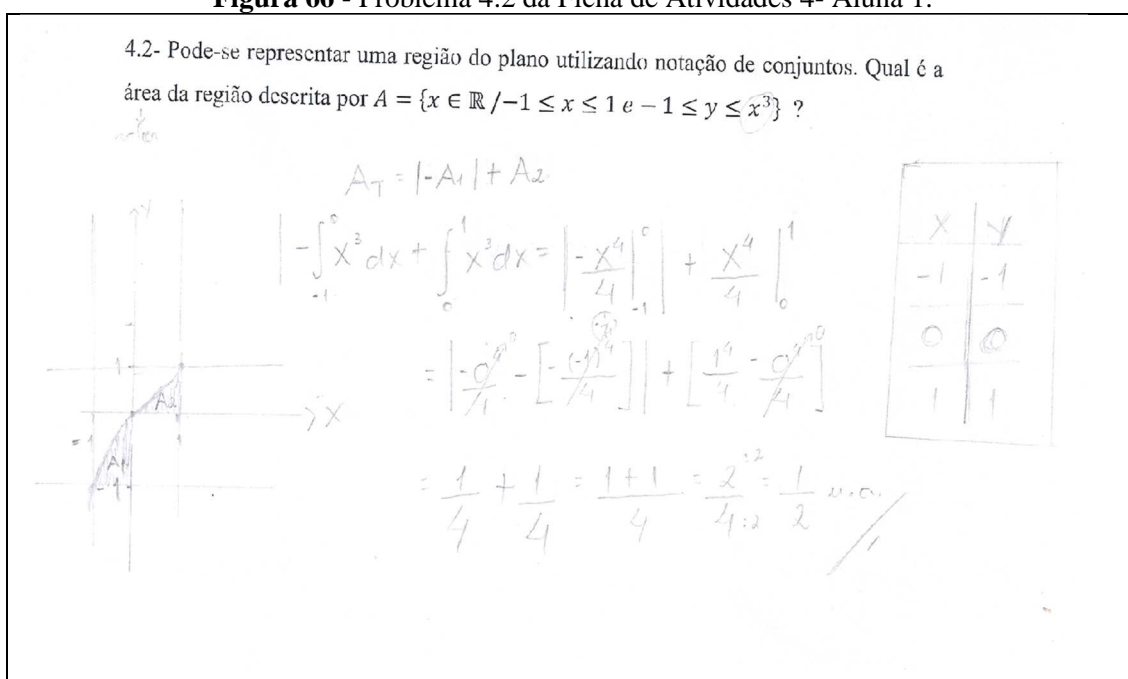
O problema 4.2 apresentou uma região do plano descrita por intermédio da notação de conjuntos, o que geralmente causa dificuldades de compreensão dos estudantes, conforme a experiência profissional do professor pesquisador.

Havia uma expectativa de que as alunas participantes interpretassem corretamente a região descrita pelo conjunto dado no enunciado, traçassem seu gráfico e calculassem a integral para obter sua área.

Existia, também, como estratégia de solução para esse problema, a possibilidade de as alunas traçarem o gráfico da função  $f$  definida por  $f(x) = x^3$ , limitada no intervalo  $-1 \leq x \leq 1$  e então, perceberem a simetria existente entre as regiões acima e abaixo do eixo horizontal, calculando apenas a integral da parte positiva e depois duplicando seu valor, para concluir corretamente a questão.

Dessa forma, a Aluna 1 esboçou o gráfico da região descrita pelo conjunto  $A$  e calculou a área utilizando duas integrais, sendo o módulo do valor da primeira, por se tratar de uma região abaixo do eixo horizontal. Efetuou corretamente as operações durante a integração e encontrou o valor da área procurada, como ilustrado na Figura 66.

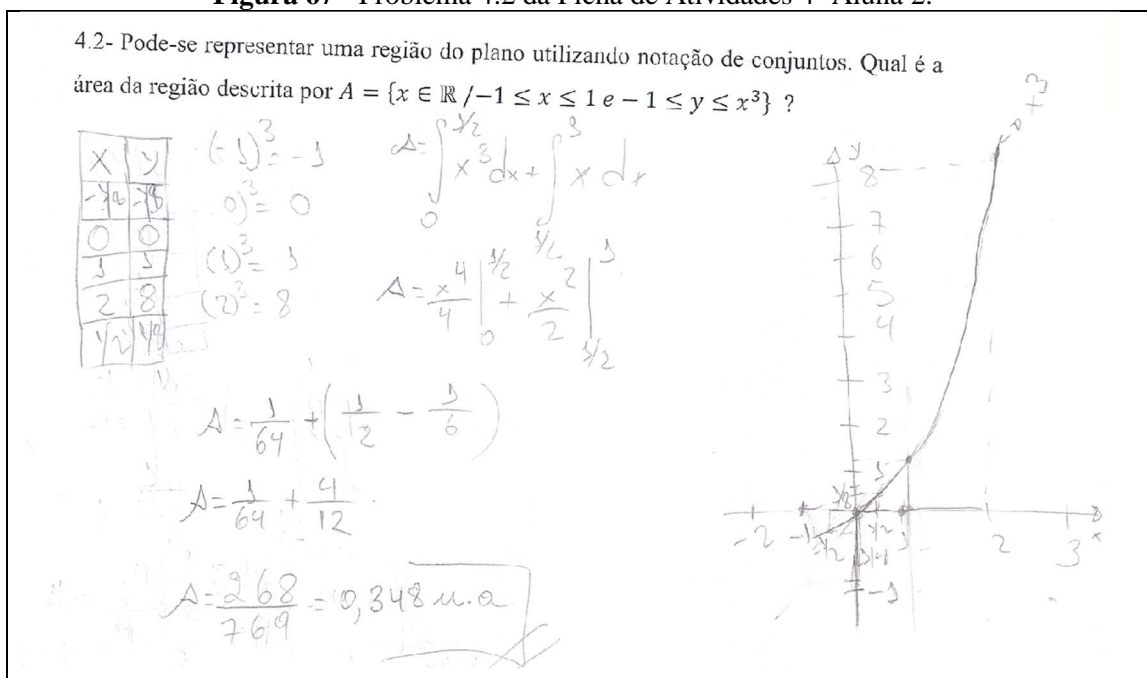
**Figura 66** - Problema 4.2 da Ficha de Atividades 4- Aluna 1.



**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 tentou esboçar o gráfico atribuindo valores para variável e obtendo pares ordenados, preenchendo uma tabela, entretanto, não conseguiu completar corretamente sua estratégia de resolução. Essa estratégia de preencher uma tabela com valores para traçar gráficos de funções geralmente é utilizada no Ensino Fundamental e Médio. Não houve justificativa da aluna sobre os limites de integração por ela adotados.

Como pode ser visto na Figura 67, a aluna também cometeu alguns equívocos com a função inserida no integrando e os limites de integração.

**Figura 67** - Problema 4.2 da Ficha de Atividades 4- Aluna 2.

Fonte: Dados da pesquisa.

O objetivo deste problema era desenvolver nas alunas a compreensão da região de integração apresentada com a notação de conjunto de pontos do plano. Essa notação costuma trazer dificuldades para os alunos, conforme a experiência profissional do pesquisador. Por conta disso escolhemos propor este problema nesta ficha de atividades.

Analisando os registros das alunas, nota-se que elas compreenderam, parcialmente, os limitantes da região de integração, isto é, a região estava limitada pela função de grau 3, e as retas  $x = -1$ ,  $x = 1$  e  $y = -1$ . Depois é perceptível que o conceito do cálculo de área por meio da integral está bem estabelecido pelas alunas, apesar de alguns erros operacionais.

Dessa forma, diante do exposto, afirmamos que o objetivo do problema foi atingido de maneira satisfatória.

O problema 4.3, indicado no Quadro 58 a seguir, solicitava que fosse encontrada a área de uma região limitada, formada por um conjunto de pares de pontos, todavia, questionava-se a possibilidade de encontrar esta região.

Esperava-se que fossem traçados os gráficos das funções  $f$  e  $g$ , definidas por  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = \sqrt{x}$ , que fossem obtidas as interseções entre eles e, por conseguinte, os limites de integração e por fim, encontra-se a área da região. É possível encontrar a interseção entre as funções  $f$  e  $g$ , definidas por  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = \sqrt{x}$ , traçar

separadamente seus gráficos e calcular suas áreas e, finalmente, subtrair uma da outra, encontrando a área da região procurada.

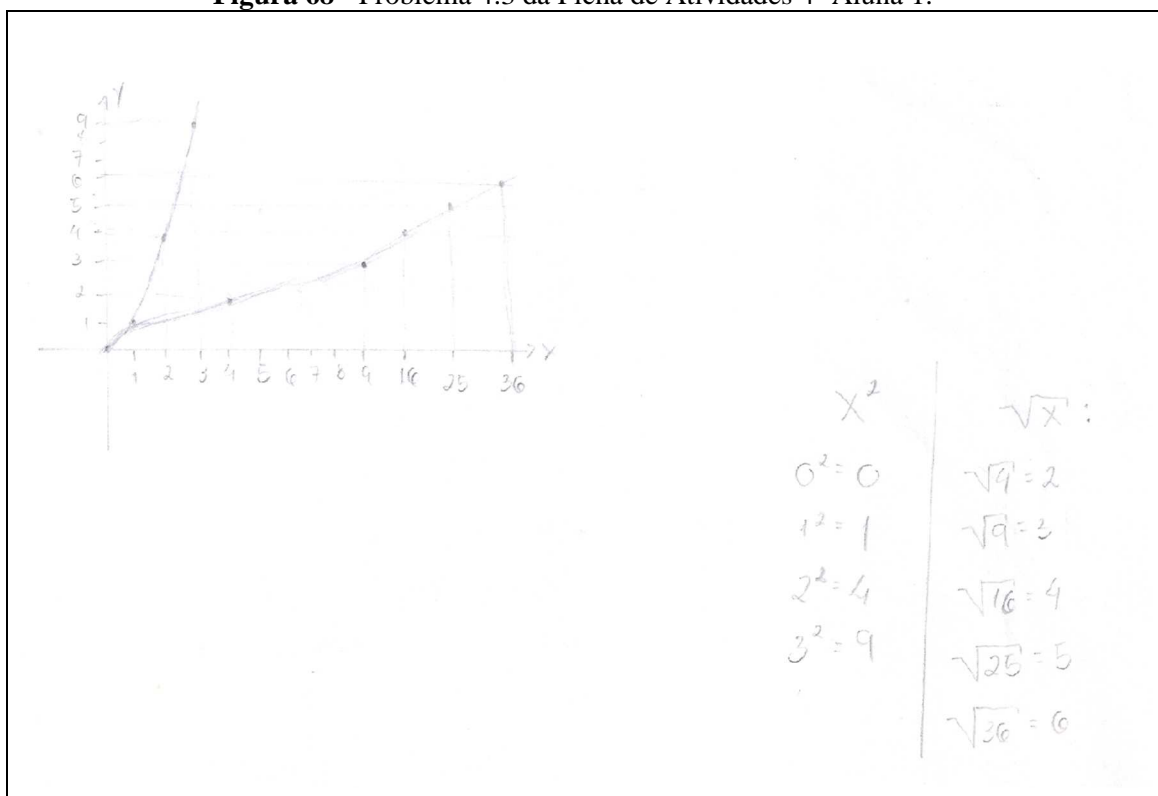
**Quadro 58** - Problema 4.3 da Ficha de Atividades 4 - análises a posteriori.

4.3- Considere o conjunto de pares de pontos  $(x, y)$  tais que  $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$ . Com essas informações, é possível encontrar a região do plano que satisfaz essa condição? Justifique sua resposta. É possível encontrar a área dessa região? (adaptado de Guidorizzi (2001, p. 314)).

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A Aluna 1, mesmo atribuindo valores para as funções na tentativa de esboçar seu gráfico, não conseguiu obter a região de integração e calcular sua área. Dessa forma, a aluna não obteve uma região limitada, tampouco os limites de integração para solucionar este problema. A questão exigia, como possível estratégia de solução, encontrar as raízes da equação  $x^2 = \sqrt{x}$  para obter seus pontos de interseção. Os registros da Aluna 1 estão indicados na Figura 68.

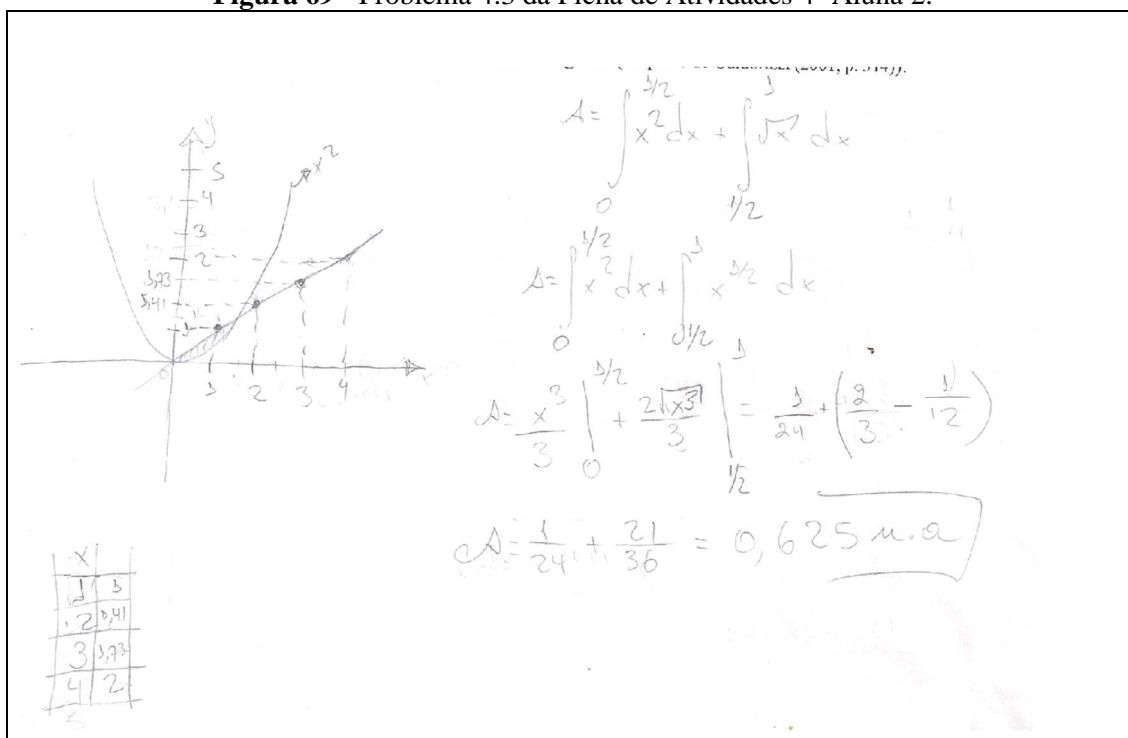
**Figura 68** - Problema 4.3 da Ficha de Atividades 4- Aluna 1.



**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 conseguiu encontrar uma região parecida com a região de integração, atribuindo valores para a variável  $x$  preenchendo uma tabela para obter pares de pontos, entretanto, equivocou-se com o esboço do gráfico de  $\sqrt{x}$ . Calculou, erroneamente, a integral que representava o valor da área da região, pois não encontrou os limites de integração, conforme registrado na sequência, na Figura 69.

**Figura 69** - Problema 4.3 da Ficha de Atividades 4- Aluna 2.



Fonte: Dados da pesquisa.

O problema 4.3 desta ficha de atividades abordava diversos elementos, como a resolução de equação de grau 4, fatoração, esboço de gráficos de função e nos permitiria boas discussões com as participantes da pesquisa. O objetivo era compreender a região de integração descrita pela desigualdade apresentada no enunciado para depois obter a área dessa região. É um problema complexo e que contém uma variedade de conteúdos a serem explorados e, por conta disso, foi escolhido pelo pesquisador para fazer parte desta ficha de atividades.

As alunas não se atentaram devidamente para as interseções entre as funções, para obter os limites de integração. Apesar de algumas distorções, as alunas esboçaram o gráfico da região a ser encontrada e a Aluna 2 efetuou alguns cálculos para área da região usando integral.

Dessa forma, comparando as respostas esperadas com os registros das alunas, afirmamos que os objetivos do problema foram alcançados de maneira insatisfatória.

O Problema Complementar contido nesta ficha de atividades, disponibilizado na Figura 59 a seguir, foi inserido com ausência de informações que limitassem uma região para calcular sua área. Um dos objetivos desse problema era fazer as participantes contribuírem com informações adicionais para que o mesmo pudesse ter solução, apesar dessa prática não ser comum. Nossa intenção com isso, foi, ao menos, motivar discussões que caminhassem nesta direção. As alunas deixaram o problema complementar em branco. Nessa questão, foram omitidas algumas restrições para que as participantes discutissem sobre os limites da região e quais condições poderiam ser inseridas, com objetivo de solucionar o problema.

**Quadro 59** - Problema Complementar da Ficha de Atividades 4 - análises a posteriori.

**Problema Complementar**

4.4- Qual é a área da região limitada por  $1 \leq y \leq \sqrt[4]{x}$  ?

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Encerrada esta *Primeira parte* do quinto encontro para a aplicação da sequência didática desenvolvida para nossa pesquisa, no qual foram contemplados os problemas propostos na Ficha de Atividades 4, referentes ao cálculo de áreas de regiões usando Integral, serão feitas breves observações.

Considerando as respostas esperadas pelo professor pesquisador, o problema 4.1. teve seu objetivo alcançado, o problema 4.2 teve seu objetivo alcançado de maneira satisfatória e o problema 4.3 teve seus objetivos alcançados de forma insatisfatória. Além disso, o Problema Complementar foi entregue em branco por ambas as alunas.

Após as análises dos registros produzidos pelas participantes no decorrer deste encontro, é notório que as dificuldades em traçar o gráfico de funções configuram-se como fatores dificultadores para encontrar e calcular a área de regiões, utilizando Integral como recurso. Ademais, é preciso desenvolver habilidades de resolução de equações para serem utilizadas em situações como a apresentada no problema 4.3 desta ficha de atividades.

### 6.2.4.2 Segunda parte

Nesta *Segunda parte* do quinto encontro as alunas optaram por refletir novamente sobre o problema 4.3, deixando os problemas 4.1, 4.2 e o Problema Complementar em branco. Em relação ao problema 4.3, indicado na Figura 70 a seguir, a Aluna 1, embora não tenha calculado a área da região apontada no problema, descreveu em sua resposta como proceder para obter a área da região usando integral. Esses pontos foram abordados durante as etapas de discussões, como descritos no capítulo anterior, surtindo efeito desejado, construindo conhecimentos acerca do cálculo de áreas através de integrais.

**Figura 70** - Problema 4.3 feito pela Aluna 1.

4.3- Considere o conjunto de pares de pontos  $(x, y)$  tais que  $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$ . Com essas informações, é possível encontrar a região do plano que satisfaz essa condição? Justifique sua resposta. É possível encontrar a área dessa região? (adaptado de Guidorizzi (2001, p. 314)).

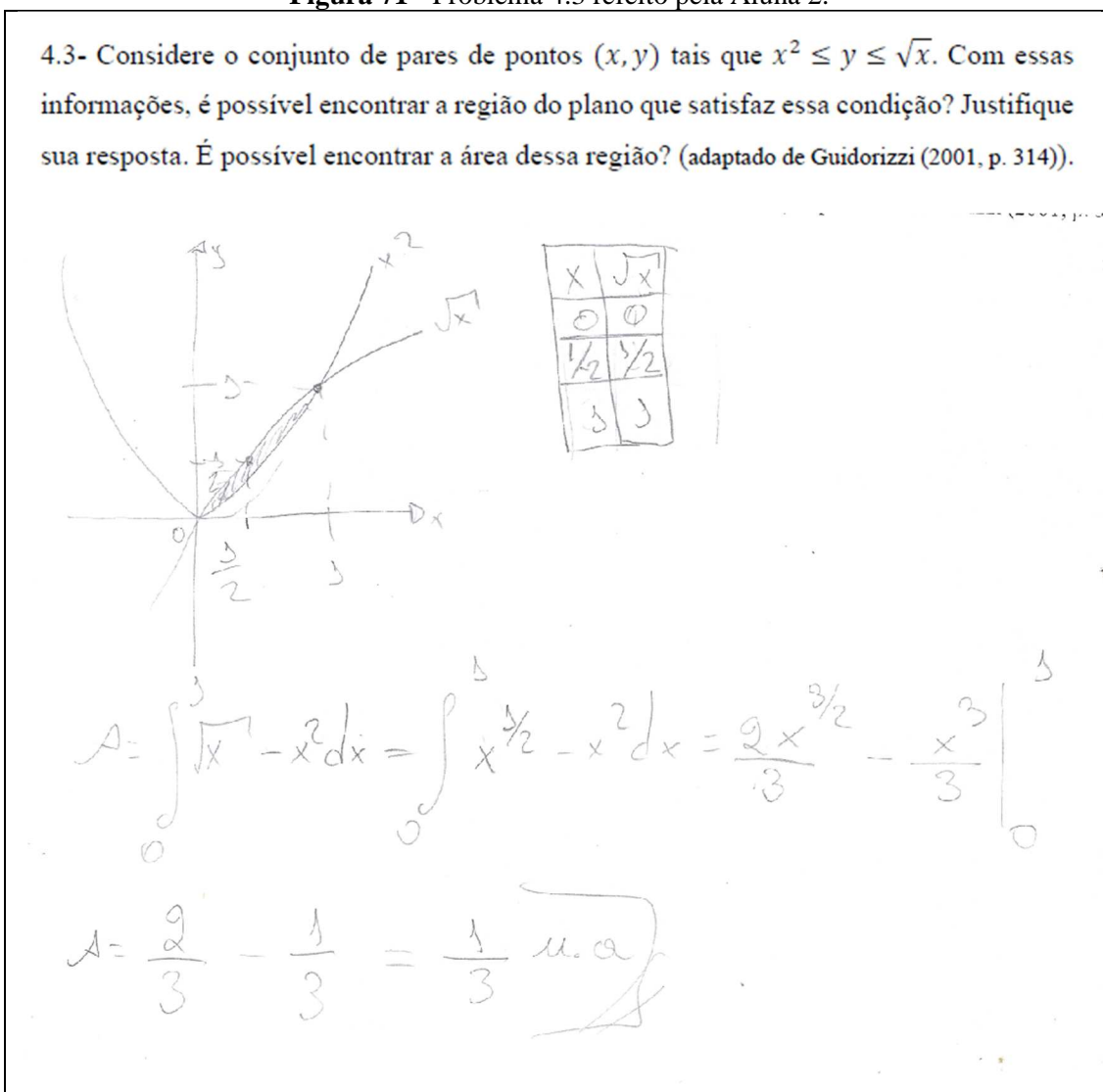
Sim, pois com as funções conseguimos traçar as curvas dos gráficos e a partir das delimitações somos capazes de identificar tanto a região que satisfaz a condição como sua área.

*“Sim, pois com as funções conseguimos traçar as curvas dos gráficos e a partir das delimitações somos capazes de identificar tanto a região que satisfaz a condição como sua área.”*

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 esboçou corretamente o gráfico da região dada no enunciado do problema, como exibido na Figura 71 a seguir, e realizou as etapas necessárias para fazer o cálculo usando integral, pois a função racional está acima da função quadrática neste intervalo de integração. Esses pontos de análise do comportamento das funções que formam a região foram abordados durante as etapas de discussões, com comentários e exemplos apresentados pelo professor pesquisador, utilizando funções genéricas, não sendo abordadas as funções contidas neste problema.

**Figura 71** - Problema 4.3 refeito pela Aluna 2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Esta última aluna não especificou por quais motivos utilizou somente os valores  $0, \frac{1}{2}$  e  $1$  para variável  $x$ , como ilustrado na tabela que preencheu para fazer o gráfico das funções. Assim, sua resposta ficaria mais completa se encontrasse as raízes reais da equação  $x^2 = \sqrt{x}$ , obtendo seus pontos de interseção.

Por outro lado, é possível reconhecer que ela compreendeu sua região de integração e calculou corretamente a área, havendo melhora em desempenho se comparado com seu registro para o mesmo problema, efetuado na *Primeira parte* deste encontro.

Encerrada esta *Segunda parte* relativa ao quinto encontro voltado à aplicação dos instrumentos da coleta de dados e produção de registros, cujo foco foram os problemas

propostos na Ficha de Atividades 4, nota-se que a utilização da Integral como recurso para o cálculo da área de regiões do plano está bem estabelecida pelas alunas, podendo haver falhas durante a realização dos cálculos. Podemos afirmar que este conteúdo se tornou significativo para estas participantes, visto que compreendem a relação entre o valor da área de uma região com o cálculo da integral definida.

Ademais, foi possível notar que houve melhora nos registros das alunas coletados na *Segunda parte* ao serem comparados com os registros coletados na *Primeira parte* e atribuímos esta melhora às discussões efetuadas no decorrer das etapas 6. *Registro das resoluções na lousa*; 7. *Plenária*; e 8. *Busca do consenso*, do roteiro desenvolvido Onuchic e Allevato (2011) e utilizado na coleta de dados desta pesquisa de doutorado.

No entanto, as dificuldades com o traçado do gráfico das funções configuraram-se, no caso das alunas participantes desta pesquisa, como uma dificuldade para efetuar corretamente a solução para esses problemas.

Como apontado anteriormente nesta tese, é preciso refletir sobre o ensino de Funções nas disciplinas da Licenciatura em Física, como Fundamentos de Matemática Elementar e CDI I, contribuindo para o enriquecimento da formação dos licenciandos, futuros professores que carregarão estas dificuldades no exercício de sua profissão.

Finalizado este quinto encontro realizado entre o professor pesquisador e as participantes, com objetivo de trabalhar os problemas propostos na Ficha de Atividades 4, que explorava o cálculo da área de regiões limitadas do plano por intermédio da Integral, teceremos alguns comentários pertinentes. Primeiramente, essas regiões são formadas pela interseção entre gráficos de funções ou limitadas por gráficos de funções, retas e os eixos cartesianos. É comum os próprios alunos classificarem tais regiões do plano como *regiões estranhas* por conta do formato incomum que algumas podem apresentar.

Por conta disso, há uma exigência grande sobre os conhecimentos prévios das participantes para resolver estes problemas, pois é preciso reconhecer os tipos de funções e seus gráficos, resolver equações para obter suas raízes, traçar equações de reta e, por fim, utilizar as técnicas de integração para calcular a área das regiões. Abordamos apenas um problema desta complexidade (problema 4.3) mas é notório que o grau de dificuldade e exigência nesta ficha de atividades foi aumentando a cada problema proposto.

Vale destacar que as participantes têm se dedicado durante os encontros, contribuindo positivamente com a coleta de dados desta pesquisa. A MEAMaRP

permite uma mudança de postura das alunas no decorrer dos encontros e durante as etapas de discussão e formalização do conteúdo percebeu-se uma participação maior das alunas, como indicado também na etapa de Experimentação desta ED, no capítulo 5 desta tese de doutorado.

Com o encerramento do quinto encontro e efetuados os confrontos entre as análises *a priori* e as análises *a posteriori* dos problemas da Ficha de Atividades 4, contemplando a *Primeira parte* e a *Segunda parte* deste encontro, recordamos ao leitor as questões específicas, apresentadas no capítulo 4 desta tese de doutorado, que determinamos para serem analisadas. As questões específicas elencadas para este encontro são:

1. a dificuldade dos alunos em esboçar gráficos de função atrapalha calcular a área de uma região usando integral?
2. a ausência de conhecimentos prévios, como solução de equações, é um fator dificultador para o cálculo de áreas usando Integral?

Para a primeira questão específica a ser analisada, em relação à assimilação do uso da integral para o cálculo da área, afirmamos que as participantes têm esse conceito assimilado e bem estabelecido. De acordo com os registros produzidos pelas alunas e considerando as observações efetuadas pelo professor pesquisador é possível afirmar que a utilização da Integral como artifício para o cálculo da área de regiões do plano foi compreendida pelas alunas.

No entanto, ocorreram alguns equívocos durante a execução das estratégias de solução das participantes, como visto nos registros das alunas e apontado ao longo das análises referentes à Ficha de Atividades 4. São alguns erros conceituais, falhas operacionais ao efetuar alguns cálculos e dificuldades em esboçar os gráficos de funções.

No que se refere à segunda questão, sobre ausência de conhecimentos prévios, como esboço de gráficos, solução de equações, operações com integral, ser um obstáculo para as alunas, pode-se afirmar que esses conhecimentos prévios são fundamentais para o desenvolvimento das participantes, principalmente no cálculo de áreas usando Integral.

O cálculo de áreas corresponde a um tema complexo e exige que o estudante faça muitas conexões sobre as informações do enunciado do problema para resolvê-lo. O cálculo da integral é a última etapa da resolução de problemas relacionados à área de

regiões. Previamente é preciso traçar os gráficos das funções envolvidas, encontrar raízes de equações para obter interseções e limites de integração, deve-se conhecer a notação de conjuntos e inequações como representação de pares de pontos no plano, para exemplificar. Dessa forma, é preciso desenvolver e aprimorar esses conhecimentos fundamentais para obter sucesso no cálculo da área de regiões planas usando Integral.

Em suma, os problemas abordados na Ficha de Atividades 4 durante essa sessão didática consistiram no cálculo da área de regiões do plano usando Integral, tema bastante complexo devido ao arcabouço de conhecimentos prévios bem estabelecidos, que as participantes necessitam possuir para que sejam amplamente utilizados durante a resolução desses problemas.

Na próxima seção serão analisados os registros produzidos pelas alunas ao realizarem a resolução dos problemas dispostos na Ficha de Atividades 5.

### **6.2.5 Análises a *posteriori* da Ficha de Atividades 5**

Neste sexto encontro, foram explorados os problemas selecionados que compõem a Ficha de Atividades 5, que aborda como tema principal a mudança de variáveis na Integral, conceito muito utilizado como artifício para calcular integrais.

Iniciaremos nossas análises com a apresentação dos registros produzidos pelas alunas ao longo da *Primeira* parte deste encontro.

#### **6.2.5.1 Primeira parte**

O problema 5.1 desta Ficha de Atividades 5 iniciou-se com uma abordagem sobre a mudança de variáveis na Integral. No item a) deste problema foi dada uma expressão de grau 3 no integrando e pede-se para calcular o valor da Integral.

Era esperado pelo professor pesquisador que as alunas desenvolvessem a expressão de grau três e integrassem o polinômio ou que as alunas fizessem uma troca de variáveis para simplificar a expressão no integrando e assim, calculassem a integral. Embora mais trabalhoso, ainda é possível fazer o esboço do gráfico da função e calcular sua área.

Para resolver esse problema, a Aluna 1 fez uma troca de variáveis na integral, sendo  $u = x + 1$  e efetuou a integração corretamente, como indicado na Figura 72. Podemos levar em consideração que a aluna não obteve os limites de integração para variável  $u$ , entretanto, finalizou seus cálculos na variável  $x$  utilizando os limites de integração desta. Podemos levar em consideração que a aluna não obteve os limites de

integração para variável  $u$ , entretanto, finalizou seus cálculos na variável  $x$  utilizando os limites de integração desta.

**Figura 72** - Item a) do problema 5.1 da Ficha de Atividades 5- Aluna 1.

5.1- Observe as integrais a seguir e responda:

a) Como você poderia calcular  $\int_0^1 (x+1)^3 dx$  ?

$u = x+1$   
 $\frac{du}{dx} = 1$   
 $du = 1 dx \Rightarrow dx = du$

$$\int_0^1 u^3 du = \frac{u^4}{4} = \frac{(x+1)^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{(1+1)^4}{4} - \frac{(0+1)^4}{4} = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4}$$

$$= \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{16-1}{4} = \frac{15}{4}$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Ao resolver esse problema, a Aluna 2 efetuou a mesma troca de variáveis que a Aluna 1, sendo  $u = x + 1$ , e dessa forma, encontrou o valor correto da integral, como ilustrado na Figura 73.

**Figura 73** - Item a) do problema 5.1 da Ficha de Atividades 5- Aluna 2.

a) Como você poderia calcular  $\int_0^1 (x+1)^3 dx$  ?

$u = x+1$   
 $du = dx$

$$\int_0^1 u^3 du = \frac{u^4}{4} + k \Rightarrow \frac{(x+1)^4}{4} \Big|_0^1 \Rightarrow \left( \frac{(1+1)^4}{4} - \frac{(0+1)^4}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{16-1}{4} = \frac{15}{4} \quad k \in \mathbb{R}$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

O item b) do problema 5.1 explorou a troca de variáveis com um expoente maior na função do integrando. Esperava-se que as alunas fizessem, novamente, uma troca de variáveis para calcular o valor da integral ou, apesar de trabalhoso, as alunas poderiam expandir algebricamente esse termo de grau 10, via Binômio de Newton ou efetuando sucessivas multiplicações. De qualquer forma, será obtida uma função polinomial de grau 10 no integrando.

A Aluna 1 realizou a mesma troca de variáveis usada no item anterior, fazendo  $u = x + 1$ . Feito isso, calculou acertadamente o valor da integral, ilustrado na Figura 74.

**Figura 74** - Item b) do problema 5.1 da Ficha de Atividades 5- Aluna 1.

b) E caso o expoente fosse maior? Como encontrar o valor de  $\int_0^1 (x+1)^{10} dx$  ?

$$\begin{aligned}
 u &= x+1 \\
 \frac{du}{dx} &= 1 \\
 du &= 1 dx \\
 \Rightarrow du &= dx
 \end{aligned}
 \quad \left| \quad
 \int_0^1 u^{10} du = \frac{u^{11}}{11} = \frac{(x+1)^{11}}{11} \right|_0^1 = \frac{(1+1)^{11}}{11} - \frac{(0+1)^{11}}{11} = \frac{2^{11}}{11} - \frac{1}{11}$$

$$= \frac{2048}{11} - \frac{1}{11} = \frac{2048-1}{11} = \frac{2047}{11}$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 fez a mesma troca de variáveis na integral usada anteriormente, com  $u = x + 1$ , e preferiu trabalhar com números decimais ao invés de frações, como ilustrado na Figura 75, para finalizar sua resposta.

**Figura 75** - Item b) do problema 5.1 da Ficha de Atividades 5- Aluna 2.

b) E caso o expoente fosse maior? Como encontrar o valor de  $\int_0^1 (x+1)^{10} dx$  ?

$$\begin{aligned}
 u &= x+1 \\
 du &= dx
 \end{aligned}
 \quad \int u^{10} dx = \frac{u^{11}}{11} + k \Rightarrow \frac{(x+1)^{11}}{11} \Big|_0^1 \Rightarrow \left( \frac{(1+1)^{11}}{11} - \frac{(0+1)^{11}}{11} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{2048}{11} - \frac{1}{11} = 186,18 - \frac{1}{11} = \frac{2047,98}{11}$$

$$\Rightarrow \frac{2046,98}{11} = 186,08$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

O objetivo principal do problema 5.1 era inserir situações que possibilitassem estratégias para mudança de variáveis na Integral. No item a) foi dada uma função no integrando que permitisse expandi-la e depois integrar facilmente o polinômio de terceiro

grau. Como no item b) foi dado um expoente maior no integrando, era necessário que as participantes utilizassem outra estratégia de resolução, como a mudança de variável.

Contudo, as participantes utilizaram a mudança de variáveis na Integral nos dois itens do problema, encontrando acertadamente a sua solução.

Diante do exposto, afirmamos que os objetivos do problema 5.1 foram alcançados.

O problema 5.2 abordava estratégias para a realização de mudanças de variáveis, contemplando funções trigonométricas e no enunciado do problema é dada uma pequena orientação para as participantes se lembrarem de algumas *derivadas conhecidas vistas no Cálculo 1*, ou seja, algumas derivadas de funções trigonométricas e demais relações.

Como possibilidades de solução para esse problema, o professor pesquisador esperava que as participantes fizessem uma troca de variáveis a fim de simplificar seus cálculos ou, ainda, tentassem encontrar uma Primitiva para função do integrando.

A Aluna 1 fez a troca de variáveis  $u = 1 - \cos\theta$ , com  $du = \text{sen}\theta d\theta$  e calculou a integral corretamente. No fim acrescentou a constante de integração, por se tratar de uma integral indefinida, como mostra a Figura 76 a seguir.

**Figura 76** - Problema 5.2 da Ficha de Atividades 5- Aluna 1.

5.2- A mudança de variáveis na integral pode ser compreendida como uma ferramenta para auxiliar no cálculo de integrais. Deve-se fazer substituições que facilitem a resolução. Um ponto de partida, ou uma dica, é lembrar de derivadas conhecidas, já vistas em Cálculo 1. Encontre o valor de  $\int \text{sen}\theta \sqrt{1 - \cos\theta} d\theta$ .

$$\begin{aligned}
 u &= 1 - \cos\theta \\
 \frac{du}{d\theta} &= \text{sen}\theta \\
 d\theta &= \frac{du}{\text{sen}\theta}
 \end{aligned}
 \quad \left| \quad
 \begin{aligned}
 \int \text{sen}\theta \sqrt{u} \frac{du}{\text{sen}\theta} &= \int \frac{1}{\text{sen}\theta} \cdot \text{sen}\theta \sqrt{u} du \\
 &= \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = u^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{u^3}}{3} \\
 &= \frac{2\sqrt{u^2 \cdot u}}{3} = \frac{2u\sqrt{u}}{3} = \frac{2(1 - \cos\theta)\sqrt{1 - \cos\theta}}{3} \\
 &= \frac{2 \cdot 2 \cos\theta \sqrt{1 + \cos\theta}}{3} + K; K \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 efetuou a mesma troca de variáveis que fez a Aluna 1, fazendo a mudança  $u = 1 - \cos\theta$ , como mostra a Figura 77 na sequência, entretanto não descreveu detalhadamente os passos de sua solução.

**Figura 77** - Problema 5.2 da Ficha de Atividades 5- Aluna 2.

5.2- A mudança de variáveis na integral pode ser compreendida como uma ferramenta para auxiliar no cálculo de integrais. Deve-se fazer substituições que facilitem a resolução. Um ponto de partida, ou uma dica, é lembrar de derivadas conhecidas, já vistas em Cálculo 1. Encontre o valor de  $\int \sin\theta\sqrt{1-\cos\theta}d\theta$ .

$$u = 1 - \cos\theta \quad \int \sqrt{u} du \Rightarrow \int u^{1/2} du$$

$$du = \sin\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{u^{3/2}}{3/2} + K = \frac{2u^{3/2}}{3} + K = \frac{2\sqrt{(1-\cos\theta)^3}}{3} + K; K \in \mathbb{R}$$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Este problema foi proposto com objetivos de abordar outras possibilidades para mudança de variáveis na Integral além de funções polinomiais, mediante funções trigonométricas. Ao trabalhar e discutir soluções para este tipo de problema, é possível revisar algumas relações trigonométricas, suas derivadas, gráficos, enfim, permite-se resgatar ampla variedade de conceitos.

As alunas participantes efetuaram corretamente a troca de variáveis ao lidar com esse problema e encontraram sua resposta. Destaco a presença da constante de integração nas respostas finais de ambas as participantes, pois significa que compreenderam que a integral indefinida possui como resposta uma família de primitivas, ou seja, funções que se diferenciam por uma constante.

Isso posto, afirmamos que aquele problema teve seus objetivos plenamente alcançados.

O problema 5.3, exibido no Quadro 60 a seguir, contextualiza uma situação na qual um aluno admite resolver duas integrais diferentes da mesma maneira, obtendo os

mesmos resultados. Foi pedido no enunciado que as participantes justifiquem a afirmação do estudante e resolvam as integrais.

Era esperado pelo pesquisador que as alunas fizessem trocas de variáveis simples para obter suas respostas e argumentarem a afirmação do aluno, proposta no enunciado. Outra possibilidade seria utilizar funções trigonométricas como artifício para mudar as variáveis e calcular suas integrais.

**Quadro 60** - Problema 5.3 da Ficha de Atividades 5 - análises a posteriori.

5.3- Durante a aula de Cálculo II, sobre mudanças de variáveis na integral, o professor propôs que os alunos resolvessem as integrais indefinidas  $\int x\sqrt{x^2+2} dx$  e  $\int x^3\sqrt{x^2+2} dx$  pelos métodos já vistos em aulas anteriores. Rapidamente um dos alunos comentou: “Eu resolvo as duas do mesmo jeito e dá o mesmo resultado”. O que podemos afirmar em relação à fala desse aluno? Como você resolveria as integrais?

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A Aluna 1, na primeira integral (lado esquerdo da Figura 78) fez a troca de variáveis  $u = x^2 + 2$ , calculou corretamente a integral, contudo, ao final, não retornou à variável de origem, deixando sua resposta em função da variável auxiliar  $u$ . Em relação à segunda integral desse problema (lado direito da Figura 78), a aluna não conseguiu efetuar uma troca de variáveis que auxiliaria no cálculo da integral. A aluna não fez comentário algum em relação à pergunta do enunciado.

**Figura 78** - Problema 5.3 da Ficha de Atividades 5- Aluna 1.

①  $\int x\sqrt{x^2+2} dx = \int x\sqrt{u} \frac{du}{2x} = \int \frac{x\sqrt{u}}{2x} du$   
 $u = x^2 + 2$   
 $\frac{du}{dx} = 2x$   
 $du = 2x dx$   
 $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$   
 $= \int \frac{\sqrt{u}}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du$   
 $= \frac{1}{2} \left( \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{2\sqrt{u^3}}{3} \right)$   
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2u\sqrt{u}}{3} = \frac{2u\sqrt{u}}{6} + K; K \in \mathbb{R}$

②  $\int x^3\sqrt{x^2+2} dx = \int x^2 \cdot x \cdot (x^2+2)^{\frac{1}{2}}$   
 $u = x^2$   
 $\frac{du}{dx} = 2x$   
 $du = 2x dx$   
 $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Quanto ao registro da Aluna 2, para esse problema, na primeira integral (lado esquerdo da Figura 79) a participante fez a troca de variável  $u = x^2 + 2$ , calculou corretamente a integral, apresentou sua resposta em relação à variável de origem e acrescentou a constante de integração na sua resposta final.

Para solucionar a segunda integral (lado direito da Figura 79), a aluna fez a troca de variáveis  $u = x^2 + 2$  e, obteve  $x^2 = u - 2$ , manipulação necessária para o desenvolvimento daquela integral, ao seguir esta estratégia. Efetuando os cálculos corretamente, na variável auxiliar, e depois retornando para variável de origem, ao final cometeu um pequeno equívoco ao operar com as frações. Ao terminar, ela justificou sua resposta argumentando sobre a questão feita no enunciado.

**Figura 79** - Problema 5.3 da Ficha de Atividades 5- Aluna 2.

$$\int x\sqrt{x^2+2} dx$$

$$u = x^2 + 2$$

$$du = 2x dx$$

$$\frac{du}{2} = x dx$$

$$\int \frac{\sqrt{u}}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{1/2} du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + k = \frac{1}{2} \cdot \frac{2u^{3/2}}{3} + k$$

$$\Rightarrow \frac{2}{6} u^{3/2} + k = \frac{2\sqrt{(x^2+2)^3}}{6} + k; k \in \mathbb{R}$$

$$\int x^3 \sqrt{x^2+2} dx$$

$$\int x^3 (x^2+2)^{1/2} dx$$

$$\int x^2 \cdot x (x^2+2)^{1/2} dx$$

$$u = x^2 + 2; \quad u - 2 = x^2$$

$$du = 2x dx$$

$$\frac{du}{2} = x dx$$

$$\int (u-2)(u)^{1/2} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{3/2} - 2u^{1/2} du$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{2u^{5/2}}{5} - \frac{4u^{3/2}}{3} \right] + k$$

$$= \frac{3\sqrt{(x^2+2)^4}}{8} - \frac{4\sqrt{(x^2+2)^3}}{3} + k; k \in \mathbb{R}$$

Não pode dar o mesmo resultado porque as funções são diferentes,

*“Não pode dar o mesmo resultado porque as funções são diferentes”.*

Fonte: Dados da pesquisa.

O problema 5.3 foi proposto para chamar a atenção das alunas, pois uma pequena alteração na função do integrando (como o grau de um polinômio), acarreta em estratégias diferentes de resolução.

O objetivo desse problema consistia, principalmente, em mostrar situações distintas sobre a mudança de variável, podendo ser esta mais direta como em  $\int x\sqrt{x^2+2}dx$ , ou seria preciso fazer algumas manipulações algébricas no integrando para resolvê-la, assim como a  $\int x^3\sqrt{x^2+2}dx$ .

Ambas as participantes efetuaram corretamente a mudança de variável na primeira integral e obtiveram seu resultado final. Em relação à segunda integral, a Aluna 1 teve dificuldades em realizar manipulações algébricas que lhe auxiliassem na resolução, como fez acertadamente a Aluna 2. Comparando as respostas esperadas pelo professor pesquisador com os registros das alunas, foi possível perceber que as participantes compreendem a necessidade em realizar trocas de variáveis para calcular integrais, apesar de cometer alguns equívocos operacionais ao efetuar alguns cálculos.

Diante do exposto, afirmamos que os objetivos deste problema foram alcançados de maneira satisfatória.

Para finalizar este primeiro encontro, foi pedido no Problema Complementar que as alunas encontrem a área do círculo de raio  $r$ , usando integral, como mostra o Quadro 61. Contudo, ambas as alunas deixaram suas respostas em branco, não havendo registros para analisar.

**Quadro 61** - Problema Complementar da Ficha de Atividades 5 - análises a posteriori.

**Problema Complementar**

5.4- Dado  $r \in \mathbb{R}, r > 0$ , encontre a área do círculo de raio  $r$ , via integral.

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Ao término desta *Primeira parte* do sexto encontro para coleta de dados e produção de registros das alunas, foram contemplados os problemas propostos na Ficha de Atividades 5, relacionados com a mudança de variável na Integral.

De acordo com as expectativas do professor pesquisador e após o confronto das análises *a priori* e análises *a posteriori*, os problemas 5.1 e 5.2 tiveram seus objetivos

alcançados e o problema 5.3 teve seus objetivos alcançados de maneira satisfatória. O Problema Complementar foi entregue em branco pelas alunas.

Nota-se, conforme os registros produzidos pelas alunas neste encontro voltado para a compreensão do conceito de mudança de variáveis na Integral, que o desempenho das alunas com esta ficha de atividades foi muito proveitoso e sobre isso, o pesquisador tem alguns pontos a destacar.

Primeiramente, o conteúdo relacionado à mudança de variáveis é abordado em CDI I, ao tratar de mudança de variáveis nas derivadas e, por conta disso, é possível que as alunas estejam mais confortáveis (mais habituadas) com este conteúdo. Outro ponto a ressaltar, compete à MEAAMaRP, pois as alunas habituaram a compartilhar e discutir suas estratégias de solução, como apontado no capítulo 5 desta tese, colaborando entre si e sendo protagonistas no seu processo de construção de conhecimento.

É possível que neste momento a metodologia de ensino esteja surtindo os efeitos desejados pelo pesquisador e, nesse sentido, estamos vendo evolução dos processos de aprendizagem das alunas.

Na seção seguinte prosseguimos com as discussões referentes à Ficha de Atividades 5.

### 6.2.5.2 Segunda parte

Os problemas 5.1 e 5.2 não tiveram mudanças significativas que precisam ser apontadas, visto que as alunas os refizeram da mesma forma que na *Primeira parte*. O Problema Complementar foi deixado em branco.

O problema 5.3, exibido anteriormente no Quadro 60, foi feito pelas alunas e vale destacar mudanças nos registros das participantes, pois a Aluna 1 havia deixado parte de sua resposta em branco e a Aluna 2 cometeu alguns equívocos ao operar com frações ao final de sua resposta.

A Aluna 1, referente à integral  $\int x\sqrt{x^2 + 2}dx$  (lado esquerdo da Figura 80) fez a mesma troca de variáveis, sendo  $u = x^2 + 2$ , igualmente como a realizada por ela na *Primeira parte* deste encontro e calculou corretamente a integral. Contudo, ela manteve sua resposta em função da variável auxiliar, não retornando para variável  $x$ . Conforme a experiência profissional do professor pesquisador, esse erro é comum entre alunos de graduação.

Para a integral  $\int x^3\sqrt{x^2+2}dx$  (lado direito da Figura 80), a aluna fez a troca de variáveis  $u = x^2 + 2$  e obteve  $x^2 = u - 2$ , manipulação necessária para o desenvolvimento desta integral.

Efetuada os cálculos, esqueceu-se de alguns elementos, como acrescentar o diferencial  $du$  ao longo do desenvolvimento da integral. Ao final, apresentou, também, a resposta em função da variável auxiliar.

**Figura 80** - Problema 5.3 refeito pela Aluna 1.

①  $\int x\sqrt{x^2+2} dx = \int \sqrt{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du$

$u = x^2 + 2$   
 $du = 2x dx$   
 $x^2 = u - 2$   
 $x dx = \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2} \left( \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{u^3} \cdot \frac{2}{3} \right)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{u^3}}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2u\sqrt{u}}{3}$

$= \frac{2u\sqrt{u}}{3} + K; K \in \mathbb{R}$

②  $\int x^3\sqrt{x^2+2} dx = \int x^2 \cdot x\sqrt{x^2+2}$

$u = x^2 + 2$   
 $du = 2x dx$   
 $x^2 = u - 2$   
 $x dx = \frac{du}{2}$

$\int (u-2) \cdot u^{\frac{1}{2}} = \int u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}$

$= \int u^{\frac{3}{2}} - \int 2u^{\frac{1}{2}} = \frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{2u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$

$= \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$

$= \sqrt{u^5} \cdot \frac{2}{5} - \sqrt{2u^3} \cdot \frac{2}{3}$

$= \frac{2u^2\sqrt{u}}{5} - \frac{2u\sqrt{2u}}{3} + K; K \in \mathbb{R}$

Resolvendo as duas integrais que possuem funções distintas, chegamos em dois resultados também diferentes, portanto a fala do aluno está totalmente errada.

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 efetuou os mesmos cálculos que havia feito na *Primeira parte* deste encontro, ressaltando que, desta vez, operou corretamente com as frações ao final da sua resolução na segunda integral (lado direito da Figura 81).

**Figura 81** - Problema 5.3 feito pela Aluna 2.

Como você resolveria as integrais?

$$\int x\sqrt{x^2+2} dx$$

$$u = x^2 + 2$$

$$du = 2x dx$$

$$\frac{du}{2} = x dx$$

$$\int u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{1}{2} \cdot \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$= \frac{3u^{\frac{3}{2}}}{6} + k = \frac{3\sqrt{(x^2+2)^3}}{6} + k$$

$$k \in \mathbb{R}$$

$$\int x^3 \sqrt{x^2+2} dx$$

$$\int x^2 \cdot x (x^2+2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$u = x^2 + 2 \Rightarrow u - 2 = x^2$$

$$du = 2x dx$$

$$\frac{du}{2} = x dx$$

$$\int (u-2) u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) + k$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{4u^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + k$$

$$= \frac{2u^{\frac{5}{2}}}{10} - \frac{4u^{\frac{3}{2}}}{6} + k$$

$$= \frac{2\sqrt{(x^2+2)^5}}{10} - \frac{4\sqrt{(x^2+2)^3}}{6} + k; k \in \mathbb{R}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao refazer o problema 5.3, as participantes puderam verificar suas estratégias de resolução e corrigir equívocos apresentados anteriormente, conforme os registros coletados na Primeira parte desse encontro. Percebe-se que, desta vez, a Aluna 2 manipulou corretamente as frações ao final de sua resposta e a Aluna 1 conseguiu calcular a segunda integral indicada no enunciado do problema.

Encerrada esta *Segunda parte* relativa ao sexto encontro voltado à aplicação dos conceitos anteriormente abordados e produção de registros, cujo foco foram os problemas propostos na Ficha de Atividades 5, percebe-se que o conceito de mudança de variáveis para calcular integrais foi compreendido pelas participantes.

As análises dos registros produzidos pelas alunas na *Primeira parte* deste encontro mostram que as alunas possuem familiaridade com este conteúdo e os objetivos dos problemas propostos foram alcançados. Como a mudança de variáveis corresponde a

um tema abordado no CDI I, ao tratar mudanças de variáveis em derivadas, e utilizado como artifício matemático em disciplinas específicas da Física, é possível que esse conceito ao ser utilizado no cálculo de integrais, não tenha causado tantas dificuldades às alunas, devido sua habitual utilização.

Por outro lado, confrontando os registros das alunas coletados na *Primeira* e na *Segunda parte* desse encontro, é possível verificar que o bom desempenho das alunas foi constante durante a resolução dos problemas propostos. Este desempenho pode ser compreendido como um avanço causado pela metodologia de ensino adotada para realização das sessões didáticas, a MEAAMaRP, visto que ela desenvolve o protagonismo do aluno e contribui para a construção de conceitos matemáticos.

Como apontado anteriormente, no capítulo 5 deste trabalho, ao realizar a etapa de formalização dos conteúdos, com a colaboração das participantes da pesquisa, o professor pesquisador fazia relações entre conteúdos do CDI I com conteúdos abordados nos problemas das fichas de atividades, como a Regra da Cadeia para Derivadas e a mudança de variáveis na Integral.

Ao término deste sexto encontro e efetuados os confrontos entre as análises *a priori* e as análises *a posteriori* dos problemas da Ficha de Atividades 5, contemplando a Primeira parte e a Segunda parte desta sessão didática, recordamos ao leitor as questões específicas apresentadas no capítulo 4 desta tese de doutorado, que determinamos para serem analisadas. As questões específicas estipuladas para este encontro são:

1. os participantes conseguem fazer as relações necessárias entre derivadas e integrais, no sentido das mudanças de variáveis, usando funções polinomiais?
2. a ausência de conhecimentos prévios relacionados a Funções prejudica os alunos a realizar troca de variáveis?

Para analisar a primeira questão, sobre a capacidade das participantes em fazer as relações necessárias entre derivadas e integrais durante a mudança de variáveis, afirmamos que as alunas compreendem essas relações.

Os conceitos relacionando derivadas e integrais foram abordados e explorados ao longo das sessões didáticas realizadas, com a presença de conteúdos sobre Primitivas de uma função, técnicas de integração para o cálculo de áreas e aplicações da integral e, por fim, a mudança de variáveis na integral. É imprescindível relacionar e diferenciar as operações de derivação e integração para efetuar as mudanças de variáveis na integral.

Diante do exposto, afirmamos que as participantes conseguiram fazer relações entre derivadas e integral para executar mudanças de variáveis na integral.

Em relação à segunda questão específica a ser analisada, sobre os fatores dificultadores para resolver os problemas propostos na Ficha de Atividades 5, podemos apontar alguns, sendo a ausência de conhecimentos prévios sobre funções e suas derivadas e noções básicas de integração.

Com o conhecimento de funções, as alunas podem se atentar para suas condições de existência, como fazer composição entre funções e, para casos específicos, como as funções trigonométricas, é possível explorar suas relações fundamentais e auxiliares existentes, úteis como artifícios para lidar com essas funções.

Ao saber as derivadas das funções, as alunas adquirem um arcabouço de recursos que as permite manipular algebricamente a função do integrando apresentado, contribuindo com a mudança de variáveis ao saber reconhecer o diferencial da variável auxiliar. Por fim, é preciso ter noções básicas sobre integral, pois essa é uma operação inversa à derivada, possui propriedades bem definidas que facilitam e auxiliam no cálculo de uma integral através da mudança de variáveis.

Então, a falta de conhecimentos prévios sobre funções (em geral), derivadas e noções básicas sobre integral constituem-se como fatores dificultadores para resolver problemas como os propostos nesta Ficha de Atividades 5.

Este sexto encontro realizado para a aplicação dos instrumentos da coleta de dados e produção de registros desta pesquisa de doutoramento, após a exploração dos problemas propostos na Ficha de Atividades 5, marca a última sessão didática planejada de acordo com o cronograma desenvolvido pelo professor pesquisador.

Na seção seguinte serão analisadas a ADF e o questionário de pesquisa, demais instrumentos elaborados e aplicados com fins de coletar mais informações para esta pesquisa.

### **6.3 Análises *a posteriori* da Avaliação Diagnóstica Final (ADF)**

Após a aplicação da sequência didática desenvolvida para esta pesquisa, foram utilizados os demais instrumentos para coleta de dados, a saber, a ADF e o Questionário de pesquisa que será abordado na seção seguinte.

No que se refere à ADF, esta foi elaborada com novos problemas, ou seja, que não foram propostos nas fichas de atividades, todavia, contemplam os conteúdos que foram abordados na intervenção realizada, discutidos e formalizados no decorrer das

sessões didáticas realizadas com as alunas. Mas temos uma ressalva a fazer. Inserimos um problema da ADI na ADF para confrontar (possíveis) melhorias significativas nos protocolos das aulas. Chamaremos atenção para este problema em momento oportuno.

Esta avaliação teve como propósito fornecer mais informações ao pesquisador em sua busca de responder à questão de pesquisa e verificar as contribuições que a MEAAMaRP associada à ED possibilitam durante os processos de ensino e aprendizagem de Integral.

A ADF foi aplicada individualmente, entretanto, as participantes puderam discutir suas estratégias de resolução; o professor pesquisador apenas observou este momento da coleta de dados, fazendo comentários sobre algumas soluções ao término da avaliação.

Esta ADF possui como objetivos verificar o desenvolvimento dos processos de aprendizagem das participantes ao longo das sessões didáticas, a construção de conceitos relacionados à Integral, e possíveis obstáculos de aprendizagem que apresentam mudanças significativas, em comparação com a ADI.

Dessa forma, nosso foco voltou-se às possíveis melhoras apresentadas pelas alunas, durante os processos de ensino e aprendizagem.

O primeiro problema da ADF relaciona-se com o conceito de Primitiva de função. A Aluna 1 calculou a integral da função seno (usando troca de variáveis) e obteve como resposta  $\frac{-1}{\alpha} \cos(\alpha x) + k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , confirmando ser uma Primitiva da função dada no enunciado, como pode ser visto na Figura 82.

**Figura 82** - Problema 1 da ADF - Aluna 1.

1- Dado  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , é correto afirmar que  $-\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x) + k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , é uma primitiva da função  $f(x) = \text{sen}(\alpha x)$ ?

$$\int \text{sen}(\alpha x) dx = \int \text{sen} u \frac{du}{\alpha} = \int \frac{\text{sen} u}{\alpha} du = \frac{1}{\alpha} \int \text{sen} u du = \frac{1}{\alpha} \cdot (-\cos u)$$

$u = \alpha x$   
 $\frac{du}{dx} = \alpha$   
 $du = \alpha dx$   
 $\Rightarrow dx = \frac{du}{\alpha}$

$$= -\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x) + K; K \in \mathbb{R}$$

Sim, pois integrando a função obtemos uma primitiva, a qual corresponde com a afirmação.

**“Sim, pois integrando a função obtemos a qual primitiva, a qual corresponde com a afirmação”**

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Ao solucionar esse problema, a Aluna 2 usou a mesma estratégia da Aluna 1, como apontado na Figura 83, integrando a função seno e obteve a função  $-\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x) + k$ , com  $k \in \mathbb{R}$  como resposta. Porém, foram omitidos alguns passos de sua resolução, como a (provável) troca de variáveis que a aluna efetuou.

**Figura 83** - Problema 1 da ADF - Aluna 2.

1- Dado  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , é correto afirmar que  $-\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x) + k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , é uma primitiva da função  $f(x) = \text{sen}(\alpha x)$  ?

$$\int \text{sen}(\alpha x) dx = -\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha} + k \Rightarrow -\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x) + k,$$

$k \in \mathbb{R}$

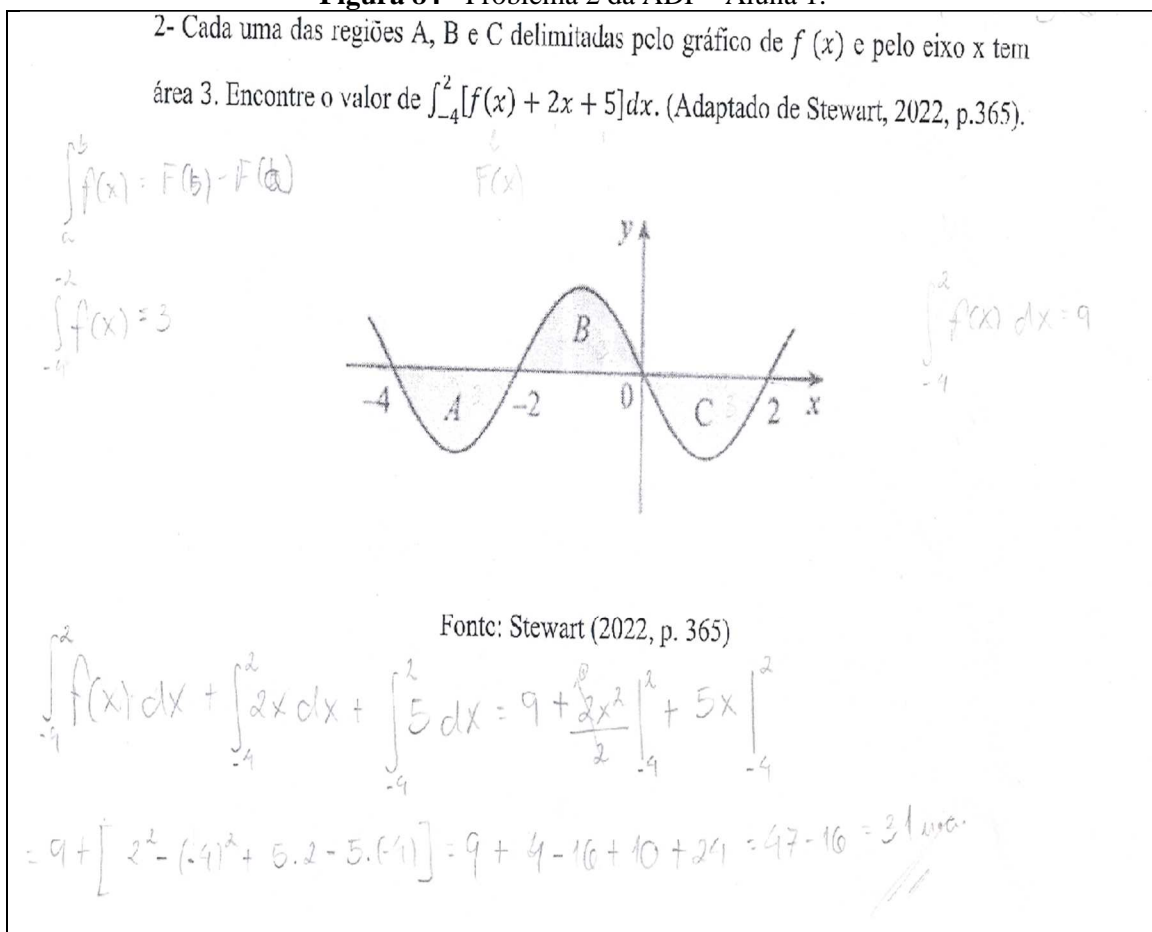
**Fonte:** Dados da pesquisa.

Diante dos registros das alunas, observa-se que as mesmas compreenderam o conceito de Primitiva de uma função e conseguiram utilizá-lo na resolução desse problema.

Confrontando os registros coletados durante a ADI com a ADF, observa-se uma melhora significativa em relação à construção deste conceito, visto que no primeiro problema da ADI as alunas tiveram muitas dificuldades em obter a Primitiva daquele problema e apresentaram suas respostas de maneira confusa.

O segundo problema apresenta um gráfico, informações sobre o valor das áreas de algumas regiões e pede-se para encontrar o valor de uma integral. O professor pesquisador escolheu este problema porque existem muitos conceitos abordados durante sua resolução e acrescenta-se a isso, em razão de sua semelhança com questões de avaliações da qualidade do Ensino Superior no Brasil, como a prova do ENADE (Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes).

A Aluna 1, utilizando propriedades da integral, auxiliada pelo gráfico apresentado e demais informações pertinentes ao enunciado da questão, calculou corretamente o valor da integral pedida, conforme ilustrado na Figura 84.

**Figura 84 - Problema 2 da ADF - Aluna 1.**

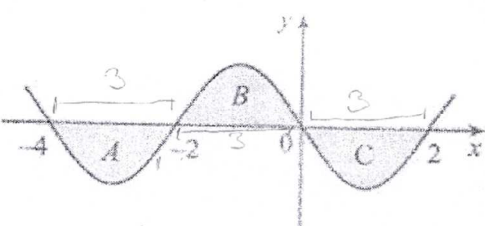
Fonte: Dados da pesquisa.

Neste problema, a Aluna 2 fez algumas separações nos intervalos de integração e confundiu-se ao utilizar as informações contidas no enunciado e no gráfico da questão, apresentando muitas dificuldades em sua resolução, como mostra a Figura 85.

**Figura 85 - Problema 2 da ADF - Aluna 2.**

2- Cada uma das regiões A, B e C delimitadas pelo gráfico de  $f(x)$  e pelo eixo  $x$  tem área 3. Encontre o valor de  $\int_{-4}^2 [f(x) + 2x + 5] dx$ . (Adaptado de Stewart, 2022, p.365).

$f(x) = c$   
 $\int c = 3$



Fonte: Stewart (2022, p. 365)

$$\Rightarrow \int_{-4}^0 [6 + 2x + 5] dx + \int_0^2 [3 + 2x + 5] dx = \left[ 6x + \frac{2x^2}{2} + 5x \right]_{-4}^0 + \left[ 3x + \frac{2x^2}{2} + 5x \right]_0^2$$

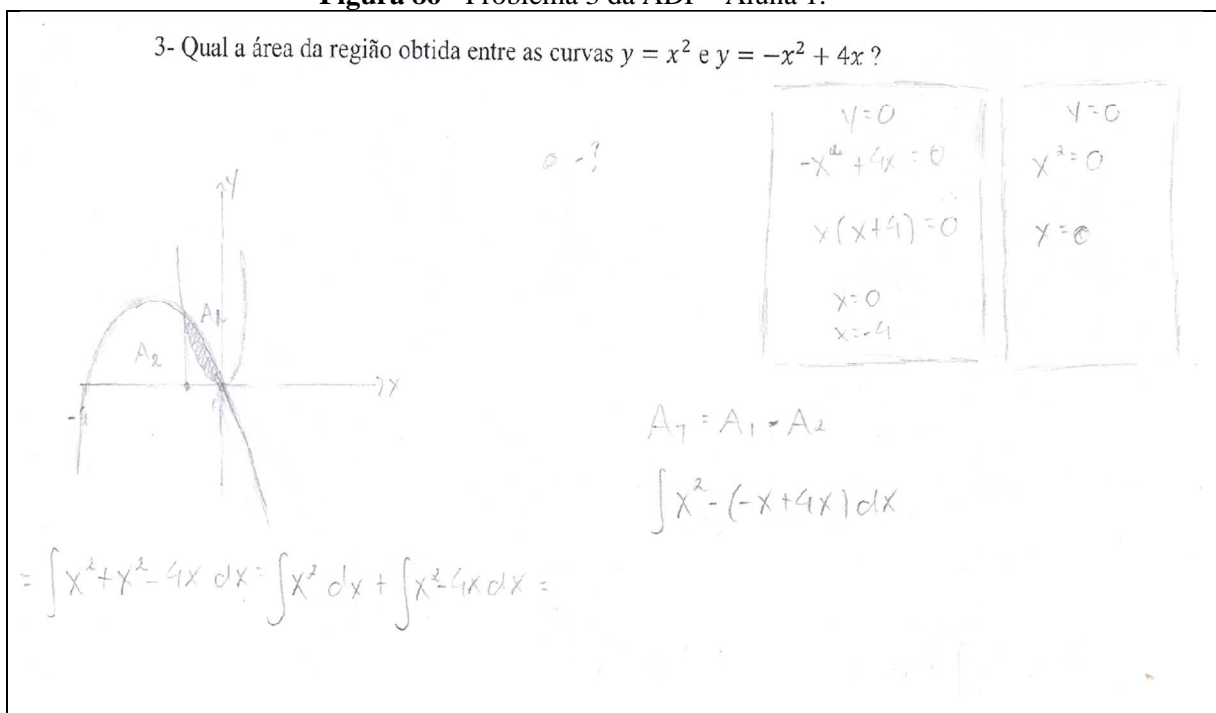
$$\Rightarrow [0 + 24 + 16 - 20] + [6 + 4 + 10 - 0] = 16 + 20 = 36 \text{ ua}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Em tal problema, foi possível observar que as participantes fizeram a utilização de conceitos e propriedades sobre Integral aplicados com a finalidade de resolver o problema proposto, indicando que compreenderam tais conceitos, mesmo a Aluna 2, que cometeu muitos equívocos ao final de sua resposta. Não foi inserido problema algum desse tipo na ADI, não trazendo prejuízo nestas análises.

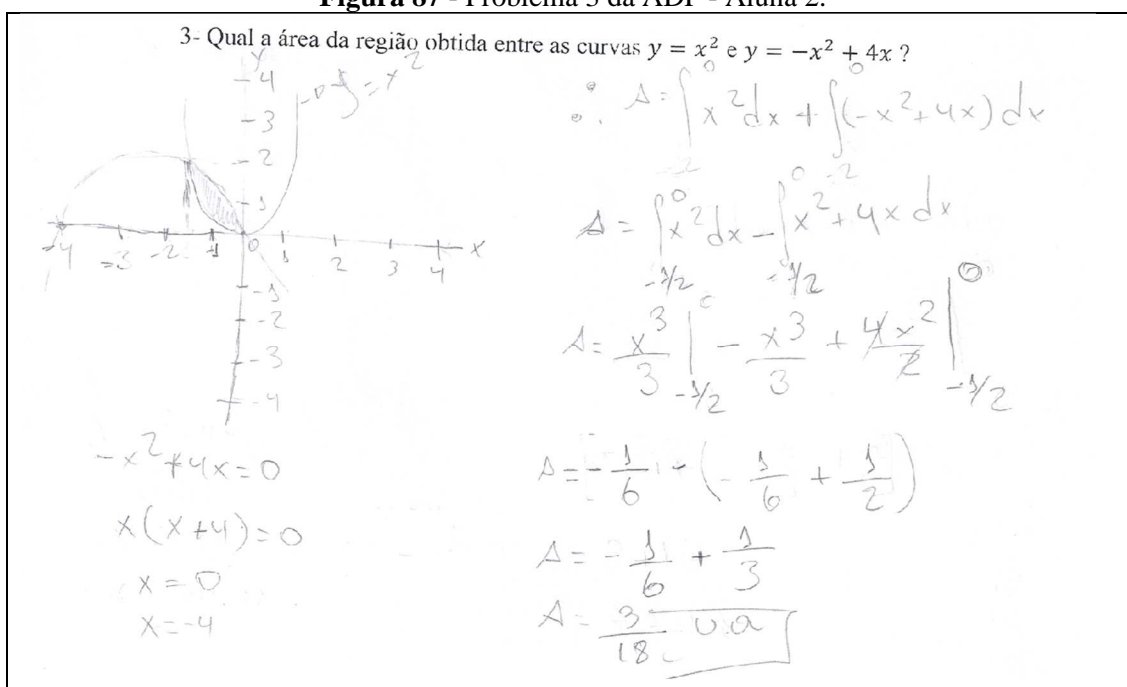
Na sequência, o terceiro problema pedia para que fosse calculada a área de uma região limitada entre duas parábolas.

A Aluna 1 esboçou os gráficos das funções, calculando suas raízes (tabelas à direita na Figura 86 a seguir) e obteve a região de integração. Entretanto, a aluna confundiu-se ao inserir o integrando e efetuar os cálculos da área da região.

**Figura 86** - Problema 3 da ADF - Aluna 1.

Fonte: Dados da pesquisa.

A Aluna 2 traçou os gráficos das funções e obteve sua região de integração. Contudo, a aluna somou os valores das integrais, ao invés de calcular a diferença entre a maior e a menor função, dentro do intervalo de integração, obtendo uma resposta equivocada, como indicado na Figura 87.

**Figura 87** - Problema 3 da ADF - Aluna 2.

Fonte: Dados da pesquisa.

Analisando as respostas das alunas, e como apontado em momentos anteriores, elas compreendem o conceito do cálculo da área de regiões usando integral como recurso e o problema indica, novamente, essa observação. Embora ocorram erros operacionais, percebe-se que as alunas desenvolveram uma estratégia de solução para aquele problema.

Confrontando os registros deste problema da ADF com os registros coletados da ADI, em relação aos problemas 2, 3 e 5, os quais tinham o cálculo da área de regiões do plano como objetivo principal, é notória a melhora de desempenho das alunas na ADF, visto que na ADI houve problemas deixados em branco (problema 5) e uma incerteza de utilizar a integral para calcular a área (problemas 2 e 3).

O quarto e último problema proposto nesta ADF foi igual ao problema 4 da ADI e contemplou o conceito de mudança de variáveis na Integral. Deixamos o mesmo problema nas duas avaliações para comparar mudanças significativas no desempenho das participantes ao resolverem um problema já conhecido. Além disso, pretendemos verificar se as alunas solucionariam, de fato, o problema ou somente se recordariam de alguma solução memorizada anteriormente. Cabe mencionar que as alunas participantes não fizeram indicação alguma nesse sentido, de que se lembravam deste problema também apresentado na ADI.

A Aluna 1 efetuou a troca de variáveis  $u = 1 + x^2$ , calculou a integral indefinida e realizou corretamente seus cálculos, contudo, vale ressaltar que sua resposta foi dada em função da variável original, ao contrário do que ocorreu na última aula, conforme exibido na Figura 88.

**Figura 88 - Problema 4 da ADF - Aluna 1.**

4- Na disciplina de Cálculo 1 você aprendeu a derivada da função composta, geralmente chamada de Regra da Cadeia. Existe um resultado semelhante à regra da cadeia para derivadas, que auxilia no cálculo de integrais. Com base nessas informações, encontre o valor de  $\int_0^1 2(1+x^2)^9 x dx$ .

$u = 1 + x^2$   
 $\frac{du}{dx} = 2x$   
 $du = 2x dx$   
 $\frac{du}{2} = x dx$   
 $\int 2(u)^9 \frac{du}{2} = \int \frac{2u^9}{2} du$   
 $= \int u^9 du = \frac{u^{10}}{10} = \frac{(1+x^2)^{10}}{10} + K; K \in \mathbb{R}$   
 $\int_0^1 \frac{2(1+x^2)^9}{10} = \frac{(1+x^2)^{10}}{10} - \frac{(1+0)^{10}}{10} = \frac{2^{10}}{10} - \frac{1}{10} = \frac{1024}{10} - \frac{1}{10} = 1023,9$

Fonte: Dados da pesquisa.

A Aluna 2 utilizou a mudança de variáveis  $u = 1 + x^2$  e, além disso, complementou sua resposta alterando também os limites de integração para variável auxiliar. Efetuou corretamente seus cálculos e manteve a resposta na forma fracionária, como mostra a Figura 89.

**Figura 89 - Problema 4 da ADF - Aluna 2.**

4- Na disciplina de Cálculo 1 você aprendeu a derivada da função composta, geralmente chamada de Regra da Cadeia. Existe um resultado semelhante à regra da cadeia para derivadas, que auxilia no cálculo de integrais. Com base nessas informações, encontre o valor de  $\int_0^1 2(1+x^2)^9 x dx$ .

$u = 1 + x^2$   
 $du = 2x dx$   
 $\frac{du}{2} = x dx$   
 $x=1 \Rightarrow u=2$   
 $x=0 \Rightarrow u=1$   
 $\int_1^2 u^9 du = \frac{u^{10}}{10} \Big|_1^2 = \left( \frac{2^{10}}{10} - \frac{1^{10}}{10} \right) = \frac{1024}{10} - \frac{1}{10}$   
 $\Rightarrow 102,4 - \frac{1}{10} \Rightarrow \boxed{102,3}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Como observado anteriormente, no sexto encontro dessa coleta de dados, a mudança de variáveis é um conceito abordado em CDI I, como facilitador para a Regra da Cadeia (ou Derivada da Função Composta), e na disciplina de CDI II, é abordado para realização de mudanças de variáveis na Integral. Pode ser observado que as alunas compreenderam o conceito de mudança de variáveis e o utilizaram durante a solução deste problema 4 da ADF.

Comparando os registros produzidos pelas alunas durante a ADI com esse problema da ADF, a Aluna 1 havia deixado esse problema em branco enquanto a Aluna 2 cometeu alguns equívocos em relação aos limites de integração da variável auxiliar.

De forma geral, podemos considerar uma melhora significativa no desempenho das alunas, principalmente da Aluna 1.

Após a aplicação e análise dos registros produzidos pelas alunas no decurso da ADF, pode-se afirmar que foram obtidas informações importantes a respeito dos processos de ensino e aprendizagem durante esta coleta de dados.

A ADF nos mostrou que as alunas compreenderam conceitos referentes à Integral, tais como, Primitivas de uma função, Integral de Riemann, cálculo da área usando integral e mudança de variáveis na Integral.

Podemos afirmar que houve compreensão desses conceitos pautados por alguns motivos. Embora a ADI e a ADF sejam avaliações distintas, porém que abordam os mesmos conteúdos, comparando os registros produzidos pelas alunas, pode-se verificar que houve melhora significativa no desempenho das alunas. Na ADI alguns problemas foram deixados em branco e as alunas apresentaram respostas confusas em algumas questões daquela avaliação. Contudo, na ADF as alunas conseguiram elaborar estratégias de resolução e encontraram respostas coerentes para os problemas. Vale ressaltar que na ADF não houve nenhuma questão entregue em branco, sem resposta.

É conveniente destacar que essas mudanças nos protocolos das alunas - inicialmente questões em branco e posteriormente respostas melhor elaboradas, em momentos distintos - foram observadas no decorrer da aplicação das fichas de atividades, conforme explorado no item 6.2, ao longo desse capítulo.

De acordo com as observações do professor pesquisador durante as sessões didáticas, relatados no capítulo 5, e por meio das análises dos dados coletados, apontados anteriormente neste capítulo 6, verifica-se que esta compreensão das alunas é fruto de sua

construção de conceitos durante a resolução dos problemas propostos nas fichas de atividades.

Ademais, é preciso pontuar a mudança de postura das alunas participantes durante a realização das sessões didáticas, visto que inicialmente havia certa resistência com a MEAAMaRP, entretanto, no decorrer dos encontros para fins desta pesquisa, as alunas foram habituando-se às etapas dessa metodologia ativa de ensino, mediada pelo pesquisador, trazendo protagonismo para as alunas na sua construção de conhecimentos e tornando-se cada vez mais autônomas nesse processo.

Na seção seguinte serão analisadas as respostas das alunas no Questionário de pesquisa, último instrumento da coleta de dados aplicado para esta investigação.

#### **6.4 Análise das respostas do Questionário de pesquisa**

Como último instrumento para coleta de dados desta pesquisa de doutorado, foi elaborado um Questionário para as participantes responderem sobre a disciplina de CDI II, sua importância na ótica das alunas e quais as impressões das alunas acerca da MEAAMaRP que pautou a elaboração e aplicação da sequência didática. O Questionário de pesquisa é composto por nove itens, sendo sete questões objetivas e duas questões dissertativas. Tínhamos como objetivos coletar as impressões que os participantes tiveram durante a aplicação da sequência didática, suas percepções em relação à metodologia de ensino adotada e outros aspectos que as respondentes desejassem apontar.

Para começar a nossa exposição das respostas das alunas, a primeira questão pedia para as alunas confirmarem se eram licenciandas em Física, informação confirmada por ambas as alunas.

A segunda questão pedia que assinalassem todas as disciplinas disponibilizadas no primeiro e segundo período do curso de Licenciatura em Física, pertencentes à Matemática e à Física já cursadas (ou em curso) pelas alunas.

As respostas da Aluna 1 estão dispostas na Figura 90 e verifica-se que a estudante não cursou Vetores e Geometria Analítica.

**Figura 90** - Resposta à questão 2- Aluna 1.

2- Assinale todas as disciplinas de Ciências Exatas que você já cursou/ está cursando:	
<input checked="" type="checkbox"/> Fundamentos de Matemática	<input checked="" type="checkbox"/> Termodinâmica
<input checked="" type="checkbox"/> Fundamentos da Física	<input checked="" type="checkbox"/> Cálculo Dif. e Integral II
<input checked="" type="checkbox"/> Cálculo Dif. e Integral I	<input checked="" type="checkbox"/> Mec. dos Sólidos e Fluídos
<input type="checkbox"/> Vetores e Geometria Analítica	<input type="checkbox"/> Cálculo Dif. e Integral III
<input checked="" type="checkbox"/> Mecânica Geral	<input type="checkbox"/> Oscilações e Ondas

**Fonte:** Dados da pesquisa.

As respostas assinaladas pela Aluna 2 encontram-se na Figura 91 e nota-se que a estudante não cursou Termodinâmica e Mecânica dos Sólidos e Fluídos, disciplinas específicas da área da Física.

**Figura 91** - Resposta à questão 2- Aluna 2.

2- Assinale todas as disciplinas de Ciências Exatas que você já cursou/ está cursando:	
<input checked="" type="checkbox"/> Fundamentos de Matemática	<input type="checkbox"/> Termodinâmica
<input checked="" type="checkbox"/> Fundamentos da Física	<input checked="" type="checkbox"/> Cálculo Dif. e Integral II
<input checked="" type="checkbox"/> Cálculo Dif. e Integral I	<input type="checkbox"/> Mec. dos Sólidos e Fluídos
<input checked="" type="checkbox"/> Vetores e Geometria Analítica	<input type="checkbox"/> Cálculo Dif. e Integral III
<input checked="" type="checkbox"/> Mecânica Geral	<input type="checkbox"/> Oscilações e Ondas

**Fonte:** Dados da pesquisa.

De modo geral, as alunas cursaram as disciplinas de Matemática e Física disponibilizadas no primeiro e segundo período do curso de Licenciatura em Física, com algumas exceções, pois a Aluna 1 não cursou Vetores e Geometria Analítica e a Aluna 2 não cursou Termodinâmica e Mecânica dos Sólidos e Fluídos. Entretanto, as duas participantes cursaram as disciplinas de Fundamentos de Matemática e CDI I, sendo esta pré-requisito para a disciplina de CDI II, foco desta pesquisa de doutorado, a qual as alunas estavam matriculadas durante a coleta de dados.

A terceira questão tratava especificamente sobre as impressões das alunas em relação à disciplina de CDI II. A Aluna 1 apontou que a disciplina possui excesso de rigor e a necessidade de relembrar conhecimentos de conteúdos anteriores e suas respostas estão dispostas na Figura 92.

**Figura 92** - Resposta à questão 3- Aluna 1.

- 3- Como você classifica a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II ? (Você pode assinalar mais de uma resposta):
- A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II é fácil.
  - O grau de dificuldade da disciplina de Cálculo II é mediano.
  - A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II é difícil.
  - Os conteúdos abordados são chatos e não possuem aplicação.
  - Gosto dos conteúdos abordados na disciplina de Cálculo II.
  - Os conteúdos abordados estão presentes em outras disciplinas do curso.
  - O rigor e o excesso de símbolos dificultam a compreensão de conceitos.
- 
- Tem muitas regras, fórmulas e Teoremas para decorar.
  - Precisa lembrar muitos conteúdos de disciplinas cursadas anteriormente.
  - É uma disciplina muito importante para o curso.
  - Tenho facilidade com os conteúdos desta disciplina.
  - Tenho dificuldades com os conteúdos desta disciplina.

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 apontou que a dificuldade da disciplina de CDI II é mediana, gosta dos conteúdos e que estes estão presentes nas demais disciplinas do curso. As respostas assinaladas pela Aluna 2 encontram-se na Figura 93.

**Figura 93** - Resposta à questão 3 - Aluna 2.

- 3- Como você classifica a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II ? (Você pode assinalar mais de uma resposta):
- A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II é fácil.
  - O grau de dificuldade da disciplina de Cálculo II é mediano.
  - A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II é difícil.
  - Os conteúdos abordados são chatos e não possuem aplicação.
  - Gosto dos conteúdos abordados na disciplina de Cálculo II.
  - Os conteúdos abordados estão presentes em outras disciplinas do curso.
  - O rigor e o excesso de símbolos dificultam a compreensão de conceitos.

- ( ) Tem muitas regras, fórmulas e Teoremas para decorar.
- ( ) Precisa lembrar muitos conteúdos de disciplinas cursadas anteriormente
- (X) É uma disciplina muito importante para o curso.
- ( ) Tenho facilidade com os conteúdos desta disciplina.
- (X) Tenho dificuldades com os conteúdos desta disciplina.

**Fonte:** Dados da pesquisa.

As respostas coletadas na terceira questão nos mostrou que ambas as alunas assinalaram que gostam dessa disciplina, possuem algumas dificuldades e a julgam importante para o seu percurso durante a graduação, contribuindo para perceber a relevância que as licenciandas depositam o componente curricular de CDI II.

A quarta pergunta do Questionário era dissertativa e tinha o intuito de coletar mais informações sobre a disciplina de CDI II que não foram abordadas na questão anterior. A Aluna 1 deixou em branco e a Aluna 2 respondeu conforme apontado na Figura 94 (reproduzimos, na íntegra, a resposta da aluna, para facilitar a leitura).

**Figura 94** - Resposta à questão 4 - Aluna 2.

- 4- Faltou algo a dizer? Gostaria de fazer mais alguns comentários sobre a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II? Utilize o espaço abaixo para apresentar seus comentários.

Ainda que eu gosto da disciplina, tenho algumas dificuldades com os conteúdos, posso dizer que minha dificuldade está muito ligada com minha base matemática, mais com a prática constante estou conseguindo melhorar.

*“Ainda que eu gosto da disciplina, tenho algumas dificuldades com os conteúdos, posso dizer que minha dificuldade está muito ligada com minha base matemática, mais com a prática constante estou conseguindo melhorar.”*

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 apontou suas dificuldades em CDI II ao próprio Cálculo, a conteúdos da Educação Básica, mas com uma rotina de estudos percebeu que tem melhorado seu desempenho acadêmico neste componente curricular.

Dando continuidade à nossa apresentação, as questões 5 e 6 do Questionário referem-se à MEAAMaRP, adotada na elaboração da sequência didática, coleta e produção de dados desta pesquisa. A Aluna 1 conhece esta metodologia de ensino, mas não deixou mais informações em relação a este fato, tais como, em qual disciplina foi apresentada à metodologia, se estava no Ensino Médio ou superior, entre outros. Na Figura 95 estão assinaladas as respostas desta aluna.

**Figura 95** - Resposta às questões 5 e 6 - Aluna 1.

Agora, estamos interessados na metodologia de ensino abordada durante as sessões didáticas desenvolvidas durante a pesquisa.

5- Você conhecia a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?  Sim       Não

6- Já tinha trabalhado com esta metodologia de ensino em alguma disciplina do curso?  Sim       Não

Qual(is): \_\_\_\_\_

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 indicou que não conhecia a MEAAMaRP, como pode ser verificado na Figura 96.

**Figura 96** - Resposta às questões 5 e 6 - Aluna 2.

Agora, estamos interessados na metodologia de ensino abordada durante as sessões didáticas desenvolvidas durante a pesquisa.

5- Você conhecia a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?  Sim       Não

6- Já tinha trabalhado com esta metodologia de ensino em alguma disciplina do curso?  Sim       Não

Qual(is): \_\_\_\_\_

**Fonte:** Dados da pesquisa.

As alunas responderam que não trabalharam com essa metodologia de ensino em disciplina alguma do curso, contudo, divergiram sobre o conhecimento da MEAAMaRP.

A sétima questão, na sequência, contemplava os encontros efetuados para aplicação da sequência didática e coleta de dados, com foco na MEAAMaRP. Ambas as alunas assinalaram todas as respostas sugeridas neste item, ou seja, gostaram dessa metodologia de ensino, possuem a impressão que a metodologia proporciona uma experiência diferente em sala de aula, permite mais discussões entre alunos e professor, auxilia no processo de construção de conhecimentos, foca no protagonismo do aluno, pode ser aplicado em diferentes níveis de ensino e contribui no desenvolvimento do trabalho colaborativo. Apresentamos apenas as respostas da Aluna 2, como mostra a Figura 97, para ilustrar essa questão.

**Figura 97** - Resposta à questão 7 - Aluna 2.

<p>7- Após as sessões didáticas, quais suas impressões sobre a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas? (Você pode assinalar mais de uma resposta):</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Proporcionou uma experiência diferente em sala de aula.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Permite mais discussões entre os alunos e o professor.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Auxilia no processo de construção de conhecimento.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Pode ser utilizada em diferentes níveis de ensino.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Permite aos alunos serem personagens ativos durante as aulas.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Contribui para desenvolver um trabalho colaborativo.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Gostei desta metodologia de ensino.</p>
---

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Dessa forma, percebe-se que as alunas compreenderam as potencialidades que a MEAAMaRP pode desenvolver em sala de aula.

A questão 8 pergunta, de forma direta, se a MEAAMaRP promove melhorias no processo de ensino e aprendizagem. As duas alunas assinalaram de maneira positiva para essa, como apontado na Figura 98, a qual apresenta a resposta da Aluna 1.

**Figura 98 - Resposta à questão 8- Aluna 1.**

8- Na sua opinião, o uso da Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas contribui para a melhora do processo de ensino e aprendizagem? (x) Sim ( ) Não

**Fonte:** Dados da pesquisa.

Na visão das alunas participantes, a utilização da MEAAMaRP promove melhorias nos processos de ensino e aprendizagem. As respostas das questões 7 e 8 indicam que as participantes percebem diferenças metodológicas entre o ensino tradicional, que é passivo e mecanizado e a utilização dessa metodologia ativa de ensino e aprendizagem, apoiada na MEAAMaRP.

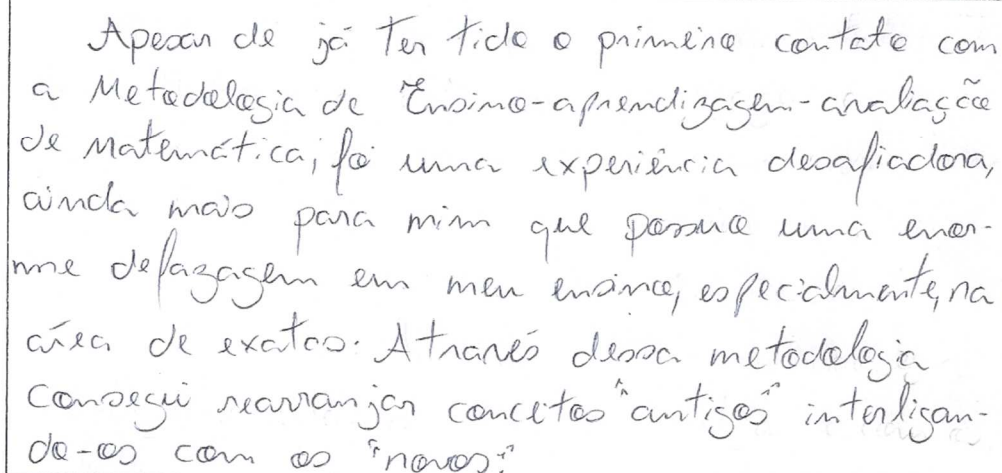
A última questão a ser respondida no Questionário de pesquisa era no formato dissertativa e pedia que as alunas fizessem comentários pertinentes à MEAAMaRP que ainda não haviam sido contemplados no item anterior.

Com essa questão, queríamos analisar as concepções que as participantes, licenciandas em Física e futuras professoras, desenvolveram sobre essa metodologia de ensino que estruturou a elaboração e desenvolvimento das sessões didáticas para fins desta pesquisa de doutorado.

A resposta da Aluna 1 para esta questão está disponível na Figura 93 e cabe destacar que logo abaixo da imagem, reproduzimos, na íntegra, a resposta da aluna para facilitar a leitura.

**Figura 99** - Resposta à questão 9 - Aluna 1.

9- Faltou algo a dizer? Gostaria de fazer mais alguns comentários sobre a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas? Utilize o espaço abaixo para apresentar seus comentários.



Apesar de já ter tido o primeiro contato com a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática, foi uma experiência desafiadora, ainda mais para mim que possuo uma enorme defasagem em meu ensino, especialmente na área de exatas. Através dessa metodologia consegui rearranjar conceitos "antigos" interligando-os com os "novos".

*“Apesar de já ter tido o primeiro contato com a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática, foi uma experiência desafiadora, ainda mais para mim que possuo uma enorme defasagem em meu ensino, especialmente na área de exatas. Através dessa metodologia consegui rearranjar conceitos “antigos” interligando-os com os “novos” “.*

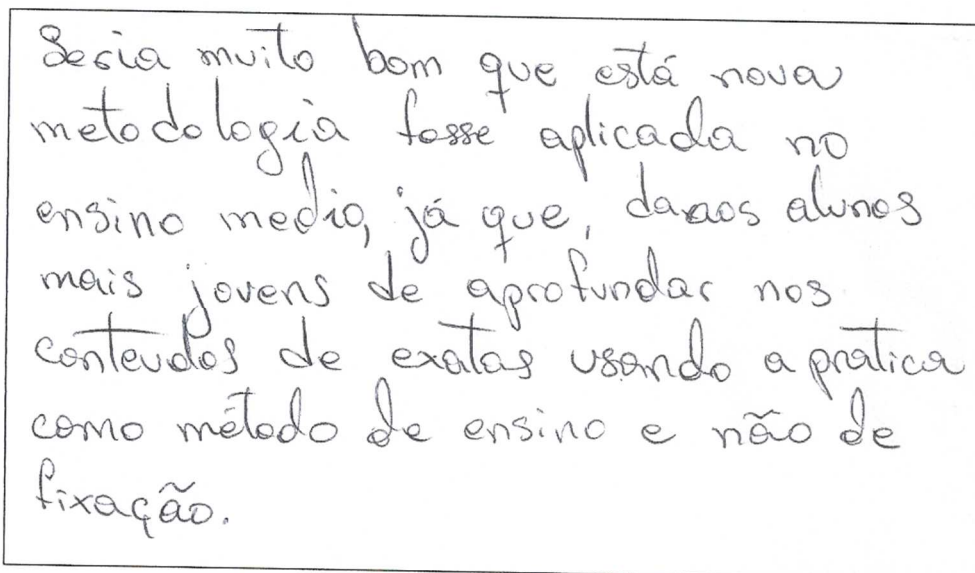
**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 1 classificou a experiência como “desafiadora” por carregar dificuldades em disciplinas “da área de exatas”. Nota-se que ao relatar, que conseguiu “rearranjar conceitos “antigos interligando-os com os “novos” [conceitos]” a aluna indica que se utilizou de conhecimentos prévios para solucionar problemas e realizar momentos de construção de conhecimentos, como a MEAAMaRP propõe.

A Figura 100 na sequência indica a resposta da Aluna 2 para esta questão, a qual também reproduzimos na íntegra o discurso da estudante, logo abaixo da imagem, para facilitar a leitura.

**Figura 100** - Resposta à questão 9 - Aluna 2.

9- Faltou algo a dizer? Gostaria de fazer mais alguns comentários sobre a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas? Utilize o espaço abaixo para apresentar seus comentários.



Seria muito bom que esta nova metodologia fosse aplicada no ensino medio, já que, daos alunos mais jovens de aprofundar nos conteúdos de exatas usando a pratica como método de ensino e não de fixação.

*“Seria muito bom que esta nova metodologia fosse aplicada no ensino médio, já que, da aos alunos mais jovens de aprofundar nos conteúdos de exatas usando a pratica como método de ensino e não de fixação.”*

**Fonte:** Dados da pesquisa.

A Aluna 2 sugeriu utilizar a MEAAMaRP também com alunos do Ensino Médio, pois, ao iniciarem nos cursos de graduação, estariam habituados a essa metodologia de ensino e aprendizagem. Além disso, a aluna indica “a prática como método de ensino e não de fixação”, apontando que a construção de conhecimentos, contrapondo-se à memorização, seria uma forma mais eficiente dos alunos aprenderem os conceitos abordados.

As respostas coletadas no Questionário de pesquisa foram importantes para verificar elementos que as ADI e ADF não forneceram e muito menos foram observadas durante os encontros para aplicação da sequência didática desenvolvida para pesquisa. Tal Questionário contribuiu para obter as impressões que as alunas tiveram sobre a MEAAMaRP, pois esta difere da metodologia de ensino tradicional.

Queríamos obter as impressões que as alunas participantes tiveram ao vivenciar essa experiência de utilizar a MEAAMaRP no decorrer das sessões didáticas, quais sentimentos fizeram-se presentes, quais as perspectivas que esta metodologia trouxe para as futuras professoras e se, de fato, na óptica das participantes, a MEAAMaRP potencializa a aprendizagem de conceitos de Integral, foco desta pesquisa de doutorado.

Diante do exposto, é notório que as alunas compreendem a importância que a disciplina de CDI II possui em sua formação acadêmica, apesar das dificuldades que possui esse componente curricular. No que se refere à MEAAMaRP, elas gostaram de conhecer um pouco mais a respeito dessa metodologia de ensino e vivenciar esta experiência de participar da pesquisa.

As participantes acreditam que essa metodologia contribui para a melhora dos processos de aprendizagem e permite a construção de conhecimentos. Além disso, elas sugeriram em suas respostas dissertativas, utilizar a MEAAMaRP em salas de aula do Ensino Médio como motivador da aprendizagem.

Essas informações coletadas com o Questionário de pesquisa contribuíram para o pesquisador compreender a percepção das alunas sobre a MEAAMaRP e, por outro lado, auxiliou na avaliação do trabalho de mediação e condução das sessões didáticas desenvolvidos pelo pesquisador ao longo da coleta de dados para esta pesquisa.

## **6.5 Considerações sobre as análises dos dados**

Encerramos este longo capítulo sobre Análises *a posteriori* e validação da pesquisa, quarta e última etapa da ED por nós desenvolvida, o qual discutimos criteriosamente os registros produzidos pelas participantes após a aplicação dos instrumentos da coleta de dados elaborados para esta investigação.

Foram sete sessões didáticas, as quais chamamos de encontros, destinados à produção dos registros analisados e confrontados, sendo o primeiro encontro destinado à ADI, cinco encontros para aplicação da sequência didática desenvolvida e ficou reservado ao último encontro a aplicação da ADF e o Questionário de pesquisa.

Os dados coletados foram analisados e confrontados, de acordo com os pressupostos teórico-metodológicos da ED, que deu suporte à esta pesquisa. Foram confrontadas as análises *a priori* e as análises *a posteriori* com objetivos de validação das hipóteses levantadas.

Conforme abordado nestas análises, configura-se promissora a possibilidade da utilização de uma metodologia ativa de ensino no curso de Licenciatura em Física. Apesar

de certa resistência inicial, verificam-se contribuições positivas ao utilizar a MEAAMaRP ao tratar de conceitos de Integral. Ademais, o suporte fornecido pela ED, estruturando a sequência didática aplicada e as análises dos registros produzidos pelas alunas, retrata uma poderosa ferramenta a ser inserida, e melhor explorada, nas salas de aulas dos cursos de graduação.

Durante a aplicação da sequência didática, ao mesmo tempo que as alunas resolviam os problemas propostos, o professor pesquisador, em seu trabalho de mediação e observação, coletava informações relevantes a serem utilizadas, principalmente, no momento da formalização dos conteúdos. Tais informações compreenderam alguns comentários feitos pelas alunas, as dificuldades apresentadas pelas alunas e demais observações realizadas pelo pesquisador, como esboços de solução que as alunas faziam.

Diante do exposto, a utilização conjunta entre a MEAAMaRP e a ED, realizada neste trabalho de investigação, apresentou-se como promissora para enriquecer os processos de ensino e aprendizagem de conceitos de Integral em cursos de graduação. Faz-se importante, então, realizar mais pesquisas nessa direção, no sentido de aprimorar o método utilizado a fim de instrumentalizar docentes em busca de melhorias.

Ao longo deste capítulo, resgatamos as questões específicas que foram elaboradas na etapa de Concepções e análises *a priori* (capítulo 4 desta tese) e analisadas a partir dos registros produzidos pelas alunas. As discussões efetuadas acerca dessas variáveis forneceram ao pesquisador informações sobre possíveis mudanças nos processos de ensino e aprendizagem.

Em relação às questões gerais elaboradas para esta pesquisa, detalhadas no capítulo 4 desta tese de doutoramento, e de acordo com as análises efetuados ao longo deste sexto capítulo, podemos verificar que a utilização da MEAAMaRP como recurso didático para o ensino de conceitos de Integral apresentou-se de maneira promissora. As etapas de discussões, segundo o roteiro de Onuchic e Allevato (2011) contribuíram para o enriquecimento de processos de ensino e aprendizagem das alunas, assim como a participação dessas a etapa de formalização dos conteúdos, na qual as duas alunas auxiliaram o professor pesquisador durante a apresentação formal dos conceitos matemáticos.

No entanto, a capacidade de generalização de algumas propriedades não ocorre de maneira natural para as alunas, configurando-se como elemento a ser melhor explorado durante as aulas de CDI.

Por fim, pela quantidade da amostra, não foi possível investigar a realização de atividades em duplas (ou grupos), a fim de analisar comportamentos, compartilhamento de ideias e a capacidade de argumentação das alunas. Ressalta-se que elas responderam suas fichas e avaliações individualmente, entretanto, foi sugerido pelo pesquisador para que elas compartilhassem informações, estratégias de solução e dialogassem entre si.

Não foi sugerido explicitamente que trabalhassem em dupla, como alternativa para desenvolver nas alunas a capacidade de comunicação e argumentação de conceitos matemáticos entre si e com o professor pesquisador.

Em síntese, tais questões, gerais e específicas, contribuíram com esta pesquisa ao fornecer argumentos pertinentes na busca de respostas à questão de investigação.

Encerrada esta etapa de Análises *a posteriori* e validação da pesquisa, no próximo capítulo tecemos nossas considerações finais condizentes a esta tese de doutorado.

*Pesquisar configura-se como buscar compreensões e interpretações significativas do ponto de vista da interrogação formulada. [...] Entretanto, não há uma última resposta, uma solução definitiva, não há compreensão e interpretações plenamente desenvolvidas e que dão conta de todas as dimensões do fenômeno interrogado. Mas há sempre o “andar em torno... outra vez e outra ainda...”. Há sempre o andar cuidadoso, que solicita rigor e sistematicidade (Bicudo, 1993, p. 18).*

## 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos sentimentos estiveram envolvidos no decorrer da elaboração desta pesquisa de doutorado, e realizar este trabalho contribuiu para o desenvolvimento do professor pesquisador em seu processo de amadurecimento pessoal, profissional e acadêmico no percurso de sua jornada de construção de conhecimento e perfil cientista. Todavia, as contribuições buscaram ser além da experiência pessoal.

Ao longo desta tese, no início de cada capítulo, foi inserida propositalmente uma frase condizente com a temática a ser desenvolvida, preparando e situando o leitor em relação aos assuntos abordados, trazendo uma noção daquilo que estava por vir.

Desenvolvemos uma pesquisa qualitativa, do tipo estudo de caso, com duas licenciandas em Física, em que foi proposta uma sequência didática que possui como cerne alguns conceitos de Integral, tema presente na disciplina de CDI II. Foram realizados sete encontros presenciais para coleta de dados e produção de registros que foram utilizados para reflexões e análises do professor pesquisador, com base nos seus referenciais teóricos estruturantes de sua investigação.

Escolhemos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) para elaborar e desenvolver as sessões didáticas que abordam conceitos de Integral, e utilizamos os pressupostos metodológicos da Engenharia Didática (ED), como metodologia de pesquisa, para realizar a análise dos dados coletados e produzidos para este estudo.

Como esta pesquisa foi ambientada no interior da sala de aula, escolhemos referenciais teórico-metodológicos condizentes com o estudo proposto, desenvolvidos para contribuir positivamente com nossas investigações nos processos de ensino e aprendizagem.

Compreendemos que a associação entre os pressupostos teórico-metodológicos da MEAAMaRP e da ED para o desenvolvimento dos processos de ensino e aprendizagem de CDI, especificamente os conceitos de Integral abordados neste trabalho, apresentou-se como um recurso promissor durante nossa investigação.

A composição entre a MEAAMaRP e a ED, como proposto neste trabalho, buscou potencializar os processos de ensino e aprendizagem. As sequências didáticas foram elaboradas com a escolha de bons problemas, ou seja, problemas geradores de novos conceitos, devidamente justificados e contendo as estratégias de solução esperadas pelo professor pesquisador para confrontá-las com as soluções obtidas pelas alunas participantes do estudo. Cabe destacar, novamente, que as fichas de atividades que compõem a sequência didática foram fundamentadas em *problemas*, visto que as alunas não possuíam soluções imediatas, exigem cognitivamente delas e foi necessária sua motivação para traçar estratégias de solução.

Diante do exposto, o ensino de CDI realizado mediante a composição dessas metodologias de ensino justifica-se como um aspecto inovador, visto que tende a ser um processo ativo, construtivo e significativo para os estudantes, almejando melhorar o cenário atual do ensino de CDI no país.

Na trajetória de construção desta tese foram percorridas algumas etapas que auxiliaram o professor pesquisador no percurso de sua investigação. Ao efetuar a revisão de literatura abarcando artigos, dissertações e teses relacionando-se o ensino de CDI, a MEAAMaRP e a ED, não foram encontrados trabalhos conectando esses elementos. Nesse sentido, a composição dos pressupostos teórico-metodológicos da MEAAMaRP e da ED voltadas ao ensino de CDI configuraram-se como um aspecto de ineditismo nesta tese de doutorado.

Durante as investigações sobre o ensino de CDI, poucos trabalhos apontaram a utilização da MEAAMaRP como recurso didático. Ademais, a breve história do ensino de CDI realizada apontou as heranças que ainda carregamos ao ministrar essa disciplina no Ensino Superior no país, com foco na repetição, memorização e metodologia de ensino passiva e mecanizada.

No decorrer da realização das sessões didáticas, foram observados os efeitos das etapas de discussões, como propostas no roteiro de Onuchic e Allevato (2011), para a aprendizagem de conceitos de Integral. Estamos nos referindo às etapas 6. *Registro das resoluções na lousa*; 7. *Plenária*; e 8. *Busca do consenso*, do roteiro das autoras supracitadas. Percebeu-se que as discussões mediadas pelo professor pesquisador

contribuíram para a melhora da compreensão dos conceitos de Integral por parte das alunas. As análises e comparações entre os registros produzidos pelas alunas durante as sessões didáticas, realizadas no capítulo anterior, ilustram essa percepção do professor pesquisador. Deve se considerar, também, o período de tempo para coleta de dados e somente a presença das alunas e do pesquisador em sala de aula. Diante do exposto, acreditamos que as etapas de discussão auxiliam de maneira promissora para compreensão de conceitos de Integral.

Outro aspecto importante consistiu em verificar as potencialidades da utilização de uma sequência didática aplicada para fins desta pesquisa. Podemos listar algumas potencialidades identificadas conforme as observações do professor pesquisador, tais como o desenvolvimento do protagonismo das alunas ao resolver problemas e experienciar uma metodologia ativa de ensino; contribuir em tornar a aprendizagem de conceitos de Integral mais significativa para as alunas, aplicando conceitos em outras áreas do conhecimento, como a Física; e possibilidades de potencialização da aprendizagem dessas alunas. Mesmo que ocorridos sutilmente, tais potencialidades apontam para um caminho promissor em busca de melhorias nos processos de ensino e aprendizagem de CDI.

Todavia, surgiram também algumas limitações durante a aplicação da sequência didática desta pesquisa, das quais apontamos a resistência inicial das alunas ao se deparar com a MEAAMaRP, a necessária motivação das participantes ao se dedicar a resolver problemas e o tempo disponível para aplicação da sequência didática.

Nossa escolha da ED como metodologia de pesquisa e elemento estruturante desta tese justifica-se por esta ter sido desenvolvida para utilização em sala de aula, influenciando nas etapas de idealização, concepção, elaboração, aplicação e validação de sequências de ensino. Diante do exposto, a composição entre a ED com a MEAAMaRP para o ensino de conceitos de Integral apresenta-se de maneira promissora como alternativa para os processos de ensino e aprendizagem de disciplinas de CDI no Ensino Superior.

Com esta pesquisa de doutorado, tivemos a intenção de responder à questão norteadora: **De que forma a utilização de sequências didáticas, desenvolvidas com base nos pressupostos metodológicos da ED e da MEAAMaRP, pode contribuir para o enriquecimento de processos de ensino e aprendizagem de conceitos de Integral? Quais potencialidades e limitações podem ser verificadas?**

Nesta pesquisa, a associação entre a ED e a MEAAMaRP para a elaboração de sequências didáticas com foco no ensino de CDI contribuiu para o enriquecimento dos processos de ensino e aprendizagem em alguns aspectos, conforme segue.

Primeiramente, a utilização de uma metodologia de ensino ativa, diferente da tradicional, a qual compreendemos como passiva e mecanizada, contribui para mudança de postura das alunas na direção do protagonismo discente, desenvolvendo sua autonomia. Ao resolver problemas, as alunas participaram da construção de conceitos matemáticos, resgataram conhecimentos prévios, tornaram sua aprendizagem mais significativa e desenvolveram habilidades matemáticas para aplicar conceitos em outras áreas do conhecimento.

As etapas de discussão e formalização dos conteúdos, como propõe a MEAAMaRP, e considerando a pequena quantidade de pessoas na sala de aula, auxiliaram as participantes a falarem em público, formularem argumentos matemáticos e explicarem suas estratégias de solução em voz alta, valências fundamentais para futuras professoras.

A ED, como metodologia de pesquisa, permitiu desenvolver sequências didáticas a serem utilizadas dentro da sala de aula, elaboradas e aplicadas após um longo trabalho de criação e construção do professor pesquisador. Ademais, a ED possibilitou eventuais (ou necessárias) correções de rota ao longo da aplicação da sequência de ensino, em virtude aos confrontos constantes realizados pelo pesquisador entre as análises *a priori* e a *posteriori*, que contribuíram para um melhor aproveitamento das alunas durante as sessões didáticas.

Sendo assim, compreendemos que a utilização de sequências didáticas elaboradas, desenvolvidas, aplicadas e validadas com base nos pressupostos teórico-metodológicos da MEAAMaRP e da ED contribuíram para o enriquecimento dos processos de ensino e aprendizagem de conceitos de Integral.

A MEAAMaRP fundamentou os problemas propostos nas sequências didáticas e o roteiro de nove passos que orientou o professor pesquisador no desenvolvimento das dinâmicas estabelecidas durante as aulas. Em relação à ED, ela forneceu aspectos estruturantes para o pesquisador no planejamento, aplicação e validação das sequências didáticas. A percepção do progresso da aprendizagem das alunas ocorreu ao se confrontar as análises *a priori* com as análises *a posteriori*, e também ao longo da utilização das sequências didáticas no decorrer da intervenção.

Podemos apontar como contribuição teórica trazida por este trabalho, a

composição entre a ED e a MEAAMaRP na elaboração de sequências didáticas para o ensino de CDI, visto que se apresenta como ferramenta promissora para o desenvolvimento de conteúdos no Ensino Superior. Vale destacar a possibilidade de novas investigações contemplando a utilização da MEAAMaRP juntamente com a ED em outras disciplinas de cursos de graduação, mas, para isso, devem ser realizadas algumas adaptações. Um exemplo para ilustrar a frase anterior seria a elaboração de uma sequência didática contemplando os conceitos de Funções, que são parte da ementa de disciplinas de Fundamentos de Matemática Elementar, e os graduandos possuem muitas dificuldades. Seria possível realizar uma abordagem mais significativa aos estudantes, em detrimento ao ensino tradicional.

Embora o foco deste trabalho não seja a formação de professores, as contribuições práticas caminharão na direção da sala de aula. Para que os resultados de pesquisas resultantes das dissertações e teses cheguem às salas de aula, é preciso instrumentalizar os professores. Nesse sentido, apresentar metodologias de ensino e metodologias de pesquisa diferentes das tradicionais aos licenciandos, para que eles vivenciem novas experiências, enriquecerá a formação dos futuros professores.

Em geral, os licenciandos participam e realizam discussões sobre metodologias de ensino nas disciplinas pedagógicas do curso de graduação, todavia, essas discussões não ocorrem frequentemente em disciplinas cujo foco seja o desenvolvimento de conteúdos matemáticos, tal como o CDI. Diante do exposto, apresentamos neste estudo uma abordagem diferente para o ensino de CDI, o que corresponde a uma perspectiva inovadora para os processos de ensino e aprendizagem desta disciplina.

Como *possíveis limitações* deste trabalho podemos apontar a quantidade de participantes na amostra e o tempo disponível para coleta de dados. Possíveis limitações, considerando as expectativas do pesquisador e não limitações acerca das metodologias de ensino e pesquisa utilizadas ao longo desta pesquisa de doutorado. Em relação à quantidade de participantes na amostra, o professor pesquisador esperava uma quantidade maior de participantes para realizar mais discussões, analisar o desenvolvimento da sequência didática ao ser trabalhada em grupos de alunos e observar comportamentos de compartilhamento de ideias e trocas de informações.

Apreensivo em relação ao tempo para aplicação da pesquisa, o professor pesquisador propôs uma sequência didática mais curta, com sete encontros, para concluir sua realização e não comprometer o andamento desta investigação. Além disso, como

apontado nos capítulos pertinentes, houve a necessidade de adequações e mudanças no cronograma de pesquisa elaborado pelo autor desta tese.

Por fim, reforçamos nossa crença de que a ED se mostrou promissora enquanto metodologia de pesquisa, dando suporte para desenvolver sequências didáticas. Decidimos utilizá-la como elemento fundamental para efetuar as análises dos dados coletados nesta investigação. Entretanto, poderíamos estudar uma associação da ED com outro referencial metodológico de pesquisa objetivando analisar os registros produzidos pelas alunas. No entanto, seria inviável, neste momento, realizar este estudo, visto que foi feita uma composição entre a ED e a MEAAMaRP para o desenvolvimento desta pesquisa.

Como indicações para pesquisas futuras, sugerimos o planejamento e aplicação de uma sequência didática com um número maior de sessões de ensino, até mesmo, a elaboração de um curso semestral completo com um componente curricular de CDI elaborado e ministrado mediante a utilização de sequências didáticas concebidos pela MEAAMaRP e da ED. Conforme apontado na análise de livros didáticos de CDI, há uma carência de obras que utilizam a MEAAMaRP para este conteúdo de ensino, indicando a necessidade do desenvolvimento de materiais didáticos com este enfoque, dado o potencial que entendemos que tal abordagem tem para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática em seus diversos níveis. Além disso, é possível explorar com maior profundidade aspectos históricos relativos ao MMM, implementação e manutenção do Ensino Superior no país, e o ensino de CDI no Brasil e no mundo, pois se tratam de terrenos férteis para investigações futuras.

Durante esta pesquisa, verificou-se dificuldades das participantes em relação aos conteúdos específicos sobre Funções e especialmente ao esboço de seus gráficos. Nesse sentido, apontamos possíveis investigações em disciplinas de Pré-Cálculo, como Fundamentos de Matemática ou Matemática Elementar, para se buscar compreender as concepções que os estudantes possuem sobre Funções e descobrir as origens das dificuldades ao traçar seus gráficos.

Embora tais conceitos sejam contemplados ao longo do Ensino Médio, durante sua prática docente o professor pode identificar dificuldades e distorções em relação aos conhecimentos prévios dos alunos. Dessa forma, é possível ao professor retomar esses conceitos na tentativa de auxiliar os alunos a superarem aquelas dificuldades.

Por desconhecimento da quantidade inicial de participantes em nossa pesquisa, o que afetou as dinâmicas realizadas durante a coleta de dados, optamos por não colocar

em prática a etapa de proposição de problemas para analisar seus impactos na construção de conceitos matemáticos. Pesquisas nesse sentido, desenvolvendo dinâmicas de realização desta etapa da MEAAMaRP podem trazer bons frutos para o ensino de Matemática.

Destacamos que este trabalho não encerra todas as possibilidades de investigação relacionadas a essa temática. Ainda há muito a ser pesquisado, e almejamos que este trabalho possa contribuir para a produção de conhecimento e para o desenvolvimento de ações voltadas às transformações do ensino de CDI. Existe, também, a expectativa deste trabalho ser motivador para as aspirações de futuros pesquisadores. A finalização desta tese de Doutorado representa o encerramento de uma etapa e o início de novos ciclos.

## REFERÊNCIAS

- ALFARO-CARVAJAL, C.; FONSECA-CASTRO, J. Problem solving in the teaching of single variable differential and integral calculus: Perspective of mathematics teachers. **Uniciencia**, v. 32, n. 2, p. 42-56, 25 jul. 2018. Disponível em: [https://www.scielo.sa.cr/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S2215-34702018000200042&lang=pt](https://www.scielo.sa.cr/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2215-34702018000200042&lang=pt). Acesso em: 24 abr. 2023.
- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Paraná: UFPR, 2010.
- ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem.** eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p22> Acesso em: 10 de mar. 2025.
- ALVES, A. M. M. SILVEIRA, D. N. Uma leitura sobre as origens do Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil. **Tópicos Educacionais**, Recife, n.2, p. 6 - 22, jul/dez. 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/index.php/topicoseducacionais/article/view/22667> Acesso em: 10 abr. 2024.
- ARAÚJO, M. M. de. **A construção do conceito de limite através da resolução de problemas**. 2020. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2020.
- ARAÚJO NETO, J. N. de.; LIMA, F. J. de; SOUSA, D. E. B. de. Abordagem do conceito de limite apresentado por James Stewart e suas contribuições para a aprendizagem e formação de professores de matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 8, n. 23, p. 1139–1154, 2021. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/4977> Acesso em: 20 mar. 2023.
- ARTIGUE, M. Ingeniería didáctica. In: GÓMEZ, P. (Ed.). **Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas** (p. 33-59). Bogotá: Iberoamérica, 1995.
- AZEVEDO, E. B. de; FIGUEIREDO, E. B.; PALHARES, P. M. B. Análise da variação de funções ensinada através da Resolução de Problemas. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [S. l.], v. 10, n. 5, p. 32–52, 2019. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1621> Acesso em: 04 jun. 2023.
- AZEVEDO, E. B. de; FIGUEIREDO, E. B. de; ZUCHI SIPLE, I.; PALHARES, P. M. B. Imposto de Renda: função contínua? Uma questão de Cálculo tanto para o Ensino Básico quanto para o Ensino Superior. **Revista BOEM**, Florianópolis, v. 5, n. 8, p. 1–20, 2017. Disponível em:

<https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/9032>. Acesso em: 4 ago. 2024.

AZEVEDO, E. B. de; PALHARES, P. M. B.; FIGUEIREDO, E. B.de. Adaptação no roteiro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática do GTERP para ensinar Cálculo Diferencial e Integral através da Resolução de Problemas. **Revista de Educação Matemática**, [s. l.], v. 17, p. e020012, 2020. Disponível em: <https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/187>. Acesso em: 4 ago. 2024.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. Tese (Doutorado em Didática) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BEZERRA, C. A. **Proposta de abordagem para as técnicas de integração usando o software GeoGebra**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015-

BLAZUTTI, A.; VAZ, R. F.; ANDRADE, L. R. Discutindo o Método de Ensino por meio da Resolução de Problemas (MERP). **Revista Baiana de Educação Matemática**, [S. l.], v. 1, p. 1- 23. 2020. Disponível em: <https://www.revistas.uneb.br/index.php/baeducmatematica/article/view/10316>. Acesso em: 24 fev. 2023.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em educação matemática. **Pro-Posições**, v. 4, n. 1(10), p. 18 - 23, 1993. Disponível em: <http://mail.fae.unicamp.br/~proposicoes/textos/10-artigos-bicudomav.pdf>. Acesso em: 19 jan. 2022.

BITTAR, M. Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de matemática. *In*: TELES, R. A. de M.; BORBA, R.E. de S.; MONTEIRO, C. E. F. (Orgs.). **Investigações em Didática da Matemática**. Vol. 2. (p. 101-132). Recife: Ed. UFPE, 2017.

BOAVIDA, A. M. Resolução de problemas: que rumos para a Educação Matemática? *In*: Brown, M., FERNANDES, D., MATOS, J. F. E PONTE, J. P. (Eds.), **Educação Matemática**. (p. 105-114). Coleção temas de Investigação. Lisboa. 1992.

BOCCARDO, Mateus Eduardo. MENEGHETTI, Renata Cristina Geromel. **Sobre o emprego da Resolução de Problemas e da Engenharia Didática no ensino de Cálculo Diferencial e Integral: uma revisão bibliográfica**. II Simpósio de Resolução de Problemas na Educação Matemática (II SIRPEM). Maringá, 2023. Disponível em: <https://sirpem2.webnode.page/anais/> Acesso em: 10 out. 2023.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S.K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Trad. ALVAREZ, M. J.; SANTOS, S. B.; BAPTISTA, T. M. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. de C.; ARAÚJO, J. de L. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. *In*: BORBA, M. de C.; ARAÚJO, J. de L.(Orgs.). **Pesquisa**

**qualitativa em educação matemática** 6.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. *E-book*. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br>. Acesso em: 07 ago. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parecer Conselho Nacional de Educação Câmara de Superior nº 1302/2001**. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf> Acesso em: 09 abr. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf). Acesso em: 16 maio. 2024

CABRAL, T. C. B. BALDINO, R. R. Cálculo Infinitesimal para um curso de Engenharia. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 25, n. 1, p. 3-16, 2006. Disponível em: <http://revista.educacao.ws/revista/index.php/abenge/article/view/31/13> Acesso em: 15 maio. 2023.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp – v.13 – n. 2 – jan./jun. 2005**. p. 87- 120. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646981> Acesso em: 12 jan. 2024.

CHAPARIN, R. O. **A formação continuada de professores que ensinam matemática, centrada na resolução de problemas e em processos do pensamento matemático**. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

CHI, M. T. H.; GLASER, R. A capacidade para a solução de problemas. *In*: STERNBERG, R. **As capacidades intelectuais humanas. Uma abordagem em processamento de informação** (Tradução de BATISTA, D.). p. 250- 275. Porto Alegre: Artes Médicas. 1992.

D'AMBROSIO, B.S. Como ensinar matemática Hoje? **Temas e Debates** v.2 (2), 1989. p. 15-19. Disponível em: <http://sbemrevista.kinghost.net/revista/index.php/td/article/view/2651> Acesso em: 10 jun. 2022.

D'AMBROSIO, B. S. O professor pesquisador diante da produção escrita dos alunos. *In*: **Perspectivas para Resolução de Problemas**. ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C. PIRONEL, M. (Orgs.). São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 109 - 130.

D'AMBROSIO, U. História da Matemática no Brasil: uma visão panorâmica até 1950. **Saber y Tiempo**, v. 2, n. 8, p.7-37. Julio/Diciembre. 1999. Disponível em: [chrome-extension://efaidnbmninnibpcapjpcgclefindmkaj/http://www.ifba.edu.br/dca/Corpo\\_Docente/MAT/EJS/HISTORIA\\_DA\\_MATEMATICA\\_NO\\_BRASIL\\_ATE\\_1950.pdf](chrome-extension://efaidnbmninnibpcapjpcgclefindmkaj/http://www.ifba.edu.br/dca/Corpo_Docente/MAT/EJS/HISTORIA_DA_MATEMATICA_NO_BRASIL_ATE_1950.pdf) . Acesso em: 10 jan. 2023

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 21. ed. Campinas: Papyrus, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 12 ed. São Paulo: Ática, 1999.

DENARDI, V. B. **Contribuições das representações semióticas para compreensão de Conceitos fundamentais para o Cálculo Diferencial e Integral por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática**. 2019. Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Universidade Franciscana (UFN), Santa Maria, 2019.

DOUADY, R. Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas em Francia: rol de los IREM. *In*: P. Gómez (Ed.). **Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas** (p. 1-6). Bogotá: Iberoamérica, 1995.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **ZETETIKÉ**, Campinas, SP, v. 3, n. 1, p. 1–38, 1995. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646877>. Acesso em: 30 jul. 2024.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração**. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2006.

FLICK, U. **Introdução à pesquisa qualitativa**. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

FONTES, L. S. **As metodologias ativas de aprendizagem e sua contribuição para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral**. 2021. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Brasília, Brasília, 2021.

FREIRE, P. **A Educação na cidade**. São Paulo: Cortez, 1991.

FREITAS, J. L. M. de. Teoria das Situações Didáticas. *In*: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3.ed. São Paulo: Editora da PUC, 2012. p. 77- 112.

GÁLVEZ, G. A. Didática da Matemática. *In*: PARRA, C.; SAIZ, I. (Orgs.). **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas**. Tradução de: Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed, 1996. Reimpressão 2009. Cap. 2. p. 26-35.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

IFSP. INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO. **Organização Didática dos Cursos superiores de Graduação do IFSP**. São Paulo, 2016. 76 p.

IFSP. INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO. **Projeto Pedagógico de Curso- Licenciatura em Física**. Reformulação. Votuporanga, 2023. 340 p.

KILPATRICK, J. Variáveis e metodologias de pesquisa sobre resolução de problemas. *In: Perspectivas para Resolução de Problemas*. ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C. PIRONEL, M. (Orgs.). São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 85- 108.

KUCINSKAS, R. **Uma proposta de abordagem metodológica para o ensino de Álgebra**. 2024. 202 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Bauru, 2024.

LEAL JUNIOR, L. C.; ONUCHIC, L. De La R. Ensino e Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas Como Prática Sociointeracionista. **Bolema - Mathematics Education Bulletin**, v. 29, n. 53, p. 955-978, 2015. Disponível em:  
<https://www.scielo.br/j/bolema/a/nLsFMY58vc7767N6RV9rGcb/?lang=pt&format=pdf>  
Acesso em: 15 de jun. de 2022

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: HARBRA, 1994. v. 1

LIMA, G. L. de. **A disciplina de Cálculo I do curso de Matemática da Universidade de São Paulo: um estudo de seu desenvolvimento, de 1934 a 1994**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

LIMA, G. L. de. O ensino do Cálculo no Brasil: breve retrospectiva e perspectivas atuais. *In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)*. 2013. Educação Matemática: retrospectivas e perspectivas. Curitiba, 2013. Disponível em:  
<https://www.sbemrasil.org.br/files/XIENEM/> Acesso em: 20 nov. 2023.

LIMA, G. L. de. Abordagem contextualizada e compreensão relacional: em busca de uma identidade para o curso inicial de Cálculo. *In: XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM)*. Comunicação. México, 2015. Disponível em:  
[https://xiv.ciaem-edumate.org/index.php/xiv\\_ciaem/xiv\\_ciaem/paper/viewFile/137/45](https://xiv.ciaem-edumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/137/45)  
Acesso em: 20 nov. 2023.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. *In: MACHADO, S. D. A. (Org.) Educação Matemática: uma (nova) introdução*. 3.ed. São Paulo: Editora da PUC, 2012. p. 233-247.

MARTINS, I. Analisando Livros Didáticos na Perspectiva dos Estudos do Discurso: compartilhando reflexões e sugerindo uma agenda para a pesquisa. *Pro-Posições* v. 17, n. 1 (49) - jan./abr. UFRJ, 2006.

MASOLA, W. de J. **Ações das IES quanto às dificuldades matemáticas dos alunos ingressantes: um retrato**. 2020. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2020.

MENONCINI, L. **O jogo das Operações Semióticas na aprendizagem da Integral definida no Cálculo de área**. 2018. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, 2018.

MORAIS, R. dos S.; ONUCHIC, L. de la R. Uma abordagem histórica da Resolução de Problemas. *In*: ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de problemas: teoria e prática**. Jundiaí, Paco Editorial; 2014. Cap 1. p. 17- 34.

MORMÊLLO, B. H. **O Ensino de Matemática na Academia Real Militar do Rio de Janeiro, de 1811 a 1874**. Dissertação de mestrado. UNICAMP. Campinas, 2010.

NASCIMENTO, J. C. do. **O conceito de limite em cálculo: obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática**. 2003. Tese (Doutorado)- Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2003

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. **An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980's**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1980. Disponível em: [https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/More-NCTM-Standards/An-Agenda-for-Action-\(1980s\)/](https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/More-NCTM-Standards/An-Agenda-for-Action-(1980s)/) Acesso em: 20 maio. 2024.

OLIMPIO JUNIOR, Antonio. **Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática**. 2006. 263 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2006. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/102077> Acesso em:

ONUCHIC, L.de la R. ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5739> Acesso em: 20 jun. 2022.

ONUCHIC, L. de la R.; NOGUTI, F. C. H. A pesquisa Científica e a Pesquisa Pedagógica. *In*: ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de problemas: teoria e prática**. Jundiaí, Paco Editorial; 2014. Cap. 3. p. 53-68.

PACHECO, E. M. *In*: SILVA, J. G. da. (Org.). **Institutos Federais dos brasileiros: a história contada por quem fez**. São Paulo: Artliber. 2023.

Pais, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 4.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

PCN- BRASIL, Secretaria e Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental/ Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**: Um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares**. 2013. 72 p. ils.: Tabs. ISBN 978-85-914891-1-4

Ponte, J. P. (1992). Problemas de Matemática e situações da vida real. **Revista de Educação**, 2(2), 95-108. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/4224> Acesso em: 09 de jan. 2025.

PONTE, J. P. Investigar a nossa própria prática. *In*: GTI (Ed.), **Refletir e investigar sobre a prática profissional**. p. 5 - 28. Lisboa: APM, 2002.

RAAD, M. R. **História do ensino de cálculo diferencial e integral**: a existência de uma cultura. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). Juiz de Fora, 2012.

REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. 2001. Tese (Doutorado em Educação), UNICAMP, Campinas, 2001.

REZENDE, W. M. **O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003-

RODRIGUES, L. A.; NEVES, R. S. P. O Cálculo Diferencial e Integral na Universidade de Brasília: estratégia metodológica em estudo. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [S. l.], v. 10, n. 2, p. 97–111, 2019. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2341>. Acesso em: 05 abr. 2023.

SABATKE, J. M. **Conceito de limite sob a perspectiva da Resolução de Problemas mediada pelo software GeoGebra**. 2018. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias) - Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), Joinville, 2018.

SAD, L. A. Rastros do ensino de Cálculo Diferencial e Integral nas décadas iniciais da Academia Militar do Rio de Janeiro. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [s. l.], v. 11, n. 21, p. 45–67, 2020. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/135>. Acesso em: 29 jul. 2024.

SALINAS, P.; ALANIS, J. A. Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. **Relime**, Ciudad de México, v. 12, n. 3, p. 355 -382, nov. 2009. Disponível em: [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1665-24362009000300004&lng=es&nrm=iso](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362009000300004&lng=es&nrm=iso). Acesso em: 27 jul. 2024.

SANTOS, L. M. dos. **Tópicos de História da Física e da Matemática**. Curitiba: Editora IBPEX, 2009.

SANTOS, R. M. BORGES NETO, H. Avaliação do desempenho no processo de ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral I (o caso da UFC). **Laboratório de pesquisa Multimeios**. 2005. Disponível em: <https://blogs.multimeios.ufc.br/sitemmproducaocientifica/artigos/> Acesso em: 10 abr. 2023.

SCHIRLO, A. C.; SILVA, S. de C. R. da ; PILATTI, L. A. Matemática escolar no Brasil: reflexões de seus movimentos. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [s. l.], v. 14, n. 29, p. 117–128, 2020. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/58>. Acesso em: 30 jul. 2024.

SILVA, C. P. da. **A Matemática no Brasil: história de seu desenvolvimento**. 3. ed. rev. São Paulo: Blucher, 2003.

SILVEIRA, E. MIOLA, R. J. **professor pesquisador em Educação Matemática**. Curitiba: Editora IBPEX, 2008. 160 p.

STEWART, J. CLEGG, D. WATSON, S. **Cálculo I**. 9.ed. São Paulo: CENGAGE Learning, 2022.

VALENTE, W. R. Por uma história comparativa da educação matemática. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, v. 42, n. 145, p. 162–178, 2012a. Disponível em: <https://publicacoes.fcc.org.br/cp/article/view/52>. Acesso em: 30 jul. 2024.

VALENTE, W. R. O que é número? Produção, circulação e apropriação da Matemática Moderna para crianças. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, p. 1417-1441, dez. 2012b. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5337> Acesso em: 30 juç. 2024.

VAN de WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6. ed. Porto Alegre: Penso, 2009.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

ZANARDI, L. S. de O. **O trânsito de professores durante o processo de criação da Universidade Estadual paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP): a questão dos ressentimentos**. Tese de Doutorado. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP). Rio Claro, 2012.

ZICCARDI, L. R. N. **O curso de Matemática da PUC/SP: uma história de sua construção/desenvolvimento/legitimação**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

## APÊNDICES

### APÊNDICE 01- TERMO DE CONCORDÂNCIA E AUTORIZAÇÃO DE INSTITUIÇÃO COPARTICIPANTE EM PROJETO DE PESQUISA

O **Diretor Geral** do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), Câmpus Votuporanga, situado na Avenida Jerônimo Figueira da Costa, 3014, Pozzobon, Votuporanga-SP, CEP: 15503-110, endereço eletrônico <https://vtp.ifsp.edu.br/>, está ciente de suas corresponsabilidades como instituição coparticipante no cumprimento das Resoluções 466/2012 e 510/16 do Conselho Nacional de Saúde, na realização do projeto de pesquisa intitulado **“PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS”**, de responsabilidade do pesquisador Mateus Eduardo Boccardo, docente lotado nessa instituição de ensino, para realizar um estudo de doutorado a partir da aprovação pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Bauru, como instituição proponente do projeto de pesquisa, e também da aprovação pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), regulamentado pela Comissão Nacional de Ética em Pesquisa, nos termos da Resolução nº 466/12, de 12/12/12, e complementada pela Resolução nº 510/16, de 07/04/16, e instituído pela Faculdade de Ciências do Câmpus de Bauru, em 03 de abril de 2000.

Este estudo envolve a gravação em áudio ou vídeo das seguintes atividades: oficina pedagógica com uma sequência didática voltada para o ensino e aprendizagem de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II (Cálculo 2), por meio da metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, com o suporte da Engenharia Didática (como metodologia de pesquisa) e de coleta de dados de todos os registros dos(as) alunos(as) participantes destas atividades. Tem a duração prevista de dois meses, com previsão de início para fevereiro de 2024.

Esta instituição está ciente de suas corresponsabilidades como instituição coparticipante do presente projeto de pesquisa e assegura que dispõe de infraestrutura necessária para a garantia da execução do projeto.

Votuporanga, \_\_\_\_\_, de \_\_\_\_\_ de 2023.

*Diretor(a) responsável:* \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Nome/Assinatura/Carimbo

## **APÊNDICE 02 - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)**

Você está sendo convidado(a) para participar como voluntário(a) da pesquisa **“PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS”**. Esta é uma pesquisa desenvolvida junto com a **Unesp/Faculdade de Ciências** (Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”), localizada na cidade de Bauru, através do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência.

A responsabilidade científica cabe ao pós-graduando **Mateus Eduardo Boccardo**, professor efetivo de Matemática, lotado nesta instituição e atualmente afastado de suas atribuições, conforme Portaria Nº 4560/IFSP, de 11 de agosto de 2021, para participar de programa de pós-graduação (Doutorado).

A orientação deste trabalho é da **Doutora Renata Cristina Geromel Meneghetti**, professora do Instituto de Ciências Matemática e de Computação da USP e professora colaboradora no Programa de Pós-Graduação mencionado.

A assinatura deste documento acontece após uma conversa informal, onde o(a) convidado(a) é aluno(a) da instituição em que se realiza a pesquisa. Abaixo seguem todas as explicações que serão esclarecidas oralmente:

### **OS OBJETIVOS E OS PROCEDIMENTOS:**

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral apresenta elevados índices de reprovação e desistência, por parte dos alunos. A proposta dessa pesquisa de doutorado será aplicar uma sequência didática utilizando a metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Essa metodologia ativa de ensino faz o aluno ser protagonista em sua construção do conhecimento.

As informações serão coletadas através de: registros dos pesquisadores e dos aprendizes participantes (por meio de fotografias, filmagens e/ou gravações de falas), relatório de aplicação do orientando-pesquisador e relatos/anotações dos alunos (colhidos durante e após a aplicação das situações de aprendizagem).

Para realização da parte experimental, com duração prevista de dois meses, será aplicada uma oficina pedagógica com um grupo de estudantes de uma escola pública federal, IFSP, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II (Cálculo 2), com a participação do

pesquisador em todas as fases da aplicação, efetuando os ajustes necessários às atividades a serem executadas. O pesquisador também ficará à disposição para quaisquer esclarecimentos questionados pelos participantes e se compromete a apresentar uma devolutiva dos resultados da pesquisa.

### **RISCOS, DESCONFORTOS E BENEFÍCIOS:**

Esta pesquisa tem como principal benefício a aprendizagem de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral.

Apesar disso, a pesquisa oferece riscos como os desconfortos causados por irritação ou estresse.

Para evitar ou reduzir esses desconfortos, algumas providências serão tomadas:

- Conversa inicial, antes do início das práticas, tirando suas dúvidas;
- Local da atividade escolhido num espaço conhecido da escola;
- Participação voluntária e previamente autorizada, por você ou seus responsáveis (em caso de menoridade penal), mas não obrigatória;
- Possibilitada sua saída a qualquer momento, sem qualquer constrangimento, podendo retornar ou não caso você se sinta seguro e concorde com isso.

### **VOLUNTARIEDADE DE PARTICIPAÇÃO**

Fica garantido ao participante desta pesquisa:

- A plena liberdade para decidir sobre sua participação sem nenhuma penalização;
- A plena liberdade em mudar de ideia e desistir, em qualquer fase da pesquisa, sem problema futuro.
- O acompanhamento e a assistência gratuita, mesmo depois do encerramento ou interrupção da pesquisa;
- O acesso aos resultados da pesquisa;
- A indenização diante de eventuais danos causados pela pesquisa;
- A garantia de manutenção do sigilo, da privacidade e confidencialidade dos dados do participante;
- Uma cópia integral deste termo, com assinaturas e/ou rubricadas em todas as páginas.

Para eventuais esclarecimentos, **a comunicação pode ser feita diretamente com o pesquisador: pessoalmente na instituição de ensino, pelo e-mail: mateuseboccardo@ifsp.edu.br ou pelo telefone/whatsapp (17) XXXXX-XXXX.**

Em caso de reclamação ou denúncia de descumprimento de qualquer aspecto ético, você e seus responsáveis poderão recorrer ao Comitê de Ética em Pesquisa da Unesp, vinculado à Comissão Nacional de Ética em Pesquisa, que têm a atribuição legal de defender os direitos e interesses dos participantes de pesquisa em sua integridade e dignidade.

Você poderá acessar a página <<https://www.fc.unesp.br/#!/pesquisa/comite-de-etica/>> ou enviar reclamações por e-mail: [cepesquisa.fc@unesp.br](mailto:cepesquisa.fc@unesp.br), telefone: (14) 3103-9400 ou presencialmente no prédio administrativo da Faculdade de Ciências, anexa à Seção Técnica Acadêmica, localizado na Avenida Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01 - Vargem Limpa - Bauru/SP - CEP 17033-360, no horário de atendimento ao público: 8h às 12h e 13h30 às 17h30, de segunda a sexta-feira.

Nome completo do(a) aluno(a):

---

Nome completo do(a) responsável:

---

Assinatura do(a) responsável:

---

Nome e assinatura do pesquisador responsável:

---

Mateus Eduardo Boccardo

E-mail: [mateuseboccardo@ifsp.edu.br](mailto:mateuseboccardo@ifsp.edu.br)

Celular: (17) XXXXX-XXXX

Votuporanga, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2024.

Declaro que concordo em participar deste estudo.

Uma via deste documento foi deixada comigo, devidamente assinada e rubricada por mim e pelo pesquisador responsável.

**APÊNDICE 03 - AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL (ADI)**

- 1- Dado  $x \in \mathbb{R}_+$  encontre uma primitiva da função  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ .
- 2- Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = \cos x$ , com  $x \in \mathbb{R}$ . Qual a área da região formada no primeiro quadrante, abaixo do gráfico de  $f(x)$ , limitada pelas retas  $x = 0$  e  $x = \frac{\pi}{2}$ ?
- 3- Pode-se representar uma região do plano utilizando notação de conjuntos. Qual é a área da região descrita por  $A = \{x \in \frac{\mathbb{R}}{-1} \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq x^3\}$ ?
- 4- Na disciplina de Cálculo 1 você aprendeu a derivada da função composta, geralmente chamada de Regra da Cadeia. Existe um resultado semelhante à regra da cadeia para derivadas, que auxilia no cálculo de integrais. Com base nessas informações, encontre o valor de  $\int_0^1 2(1+x^2)^9 x dx$ .
- 5- Dado  $r \in \mathbb{R}, r > 0$ , encontre a área do círculo de raio  $r$ , usando resultados de Cálculo Diferencial Integral. Você sabe outra maneira de obter a área do círculo?

## APÊNDICE 04 - SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA CÁLCULO DE INTEGRAIS

Prof. Mateus Boccardo

### Introdução

As disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral são classificadas como “muito difíceis”, “sem sentido” e “com pouca utilidade” por grande parte dos alunos de graduação em cursos de Ciências Exatas. A proposta desta sequência didática é compreender alguns fatores causadores destas dificuldades de aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral. Foi elaborada uma sequência didática com oito encontros presenciais com alunos da licenciatura em Física do segundo ano de graduação (3º período), cursando a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II (Cálculo 2), que possui o tema Integral como elemento principal a ser desenvolvido durante as aulas. O pesquisador fará uma visita à turma de Cálculo 2 e convidará os alunos para participar da pesquisa, esclarecendo que a participação será voluntária. Mesmo sendo professor efetivo do IFSP, não existe vínculo hierárquico entre o pesquisador e os alunos participantes, visto que o pesquisador se encontra afastado de suas funções junto ao IFSP durante o período de realização de seu doutorado.

Buscamos uma metodologia de ensino diferente da tradicional que caracteriza por ser passiva, mecanizada e que promove a memorização de algoritmos e fórmulas. Adotamos nesta sequência didática a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, proposta por Onuchic e Allevato (2011), por tratar-se de uma metodologia ativa de ensino de Matemática, na qual o aluno é protagonista na busca e na construção de seus conhecimentos. Pretendemos identificar as possibilidades desta metodologia em potencializar a aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral, tornando seu aprendizado mais significativo para os alunos e auxiliando no combate dos altos índices de reprovações e evasão no ensino superior.

Para condução das aulas, seguiremos o roteiro desenvolvido por Onuchic e Allevato (2011) para trabalhar com a resolução de problemas, o qual indica os seguintes passos: 1. *Preparação do problema*; 2. *Leitura individual*; 3. *Leitura em conjunto*; 4. *Resolução do problema*; 5. *Observar e incentivar*; 6. *Registro das resoluções na lousa*; 7. *Plenária*; 8. *Busca de consenso*; 9. *Formalização do conteúdo*. Essa autora classifica seu roteiro como uma proposta (ou sugestão), sendo possível ao professor adaptá-lo à sua realidade, de acordo com seus objetivos e conceitos a serem abordados durante as aulas.

Faremos algumas adaptações no roteiro apresentado, incluindo o item “formação de duplas ou grupos” entre os itens 1 e 2. E a etapa 6, registro das resoluções na lousa, precisará de ajustes, entretanto, dependerá da quantidade de participantes na pesquisa. Enfatizo que esta etapa será mantida, apenas haverá uma adaptação, registrada em momento oportuno, caso necessário.

O tempo estimado para a realização da sequência didática e coleta de dados para pesquisa foi estipulado em sete encontros, de 3 horas de duração cada. O primeiro encontro foi estipulado para as apresentações do pesquisador e da pesquisa, assinatura do TCLE e aplicação da Avaliação Diagnóstica Inicial (ADI). O último encontro destina-se à aplicação da Avaliação Diagnóstica Final (ADF) e do Questionário de pesquisa. Os demais encontros correspondem à aplicação da sequência didática desenvolvida de acordo com os pressupostos teórico-metodológicos da MEAAMaRP. Estes encontros serão realizados em dias e horários previamente combinados com os alunos participantes (em horário diferente aos de aula), para que estes sintam-se mais confortáveis em participar da pesquisa. Cada encontro será dividido em duas partes, sendo a primeira utilizada para os alunos resolverem os problemas propostos e a segunda para o pesquisador conduzir as discussões e formalizar os conteúdos abordados. Entretanto, no primeiro e no último encontros serão aplicadas as avaliações diagnósticas descritas neste plano. Os materiais utilizados serão as fichas de atividades elaboradas pelo autor da pesquisa, lousa e giz.

A seguir apresenta-se o desenvolvimento dos oito encontros para coleta de dados desta pesquisa de doutorado (conforme cronograma ao final da sequência didática). Em cada um destes encontros foi discriminado o tempo previsto para realização de cada atividade e algumas observações relevantes do pesquisador sobre os problemas a serem trabalhados pelos alunos participantes.

### **Desenvolvimento e aplicação da sequência didática.**

#### **2º Encontro: ANTIDERIVAÇÃO OU PRIMITIVAS DE UMA FUNÇÃO**

1ª Parte: (Tempo estimado 1h30 minutos)

## ANTIDERIVAÇÃO OU PRIMITIVAS DE UMA FUNÇÃO

Em Cálculo 1, você aprendeu vários conceitos importantes, dentre os quais, *Limites e Derivadas*. De maneira geral, dada uma função, era possível obter sua derivada através de algumas técnicas formalizadas através de definições e teoremas. Agora, imagine a seguinte situação:

*Você se depara com uma equação horária referente à velocidade  $v$  de uma partícula em função do tempo  $t$  (podemos indicar como  $v(t)$ , por exemplo) e necessita encontrar uma expressão para obter mais detalhes sobre sua posição  $s$  em função do tempo  $t$ , a qual denominamos  $s(t)$ . É possível obter essas informações de  $s(t)$  olhando para  $v(t)$ ? Ou dada uma taxa de variação em relação ao tempo e precisamos de informações sobre a situação original, é possível obter essas informações? (será dado um tempo para os alunos pensarem, espera-se que eles possam perceber que existe uma operação inversa à derivação. Depois disso o professor concluirá com o abaixo).*

*Existem inúmeras situações nas quais é preciso pensar em operações inversas, da mesma forma que são adição e subtração, multiplicação e divisão, assim como, potenciação e radiciação. Procuramos uma operação inversa à derivada de uma função. Tal operação existe e denomina-se antiderivação!*

As atividades que serão apresentadas a seguir buscam, primeiramente, a retomada de conceitos de Derivadas de uma função, desenvolvidas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1, tais como derivadas de função polinomial, notação de Leibniz e taxas de variação. Além disso, espera-se a construção dos conceitos de Primitiva de uma função (e a utilização do símbolo de integral) e a relação entre derivada e integral (ou antiderivada como denominado nesta aula) vistas como operações inversas.

*Prezados(as) alunos(as), será apresentada uma ficha de atividades envolvendo problemas sobre derivadas e antiderivadas para que possa ser resolvida entre as duplas ou grupos formados anteriormente. Ficarei à disposição para auxiliá-los à medida que forem resolvendo os problemas propostos. No final da Ficha de Atividades tem um Problema Complementar, para aqueles grupos que terminarem os problemas propostos. Bom trabalho!*

Resolução do problema (1 hora): Para o desenvolvimento da quarta etapa do roteiro proposto, será destinada 1 hora para os alunos resolverem os problemas elencados nesta sessão didática, para que possam aproveitar o momento com tranquilidade e concentração. Durante este período o pesquisador estará percorrendo os grupos da sala de

aula, auxiliando no que for necessário (sem dar respostas prontas), levantando questões pertinentes ao assunto e analisando a maneira como cada grupo resolve seus problemas. Esta corresponde à etapa 5 do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), *Observar e incentivar*.

### Ficha de Atividades 1

1.1. Considere uma partícula cuja velocidade  $v$ , no instante  $t$  segundos é dada pela função  $v(t) = 2t + 5$ , com  $v(t)$  em m/s.

- Qual é a aceleração dessa partícula?
- O que podemos afirmar sobre a posição  $s(t)$  dessa partícula?
- Podemos afirmar que  $s(t)$  é única? Justifique sua resposta.

1.2- Considere uma função polinomial, sabendo que a inclinação da reta tangente no ponto  $x_0$  é dada por  $\frac{df}{dx}(x_0) = 3(x_0)^2 - 2$  e  $f(0) = 1$ . A partir dessas informações, encontre a função  $f(x)$ .

1.3. De acordo com sua percepção em relação às questões anteriores, dada uma função  $f(x)$ , é possível encontrar a função  $F(x)$ , tal que  $F'(x) = f(x) + k$ , com  $k$  real. A função  $F$  é chamada de antiderivada de  $f$ . Também podemos denominar  $F$  de primitiva de  $f$ . Essas nomenclaturas são equivalentes, pois, dada  $f(x)$ , buscamos  $F$ , tal que  $F'(x) = f(x) + k$ , com  $k$  real.

- Qual é a derivada de  $f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ , com  $n$  real?
- Qual é a antiderivada (ou primitiva) de  $f(x) = x^n$ , com  $n$  real?
- Você saberia encontrar uma forma de generalizar esse resultado, ou seja, a integral de uma função polinomial?

1.4. O volume de água em um tanque é  $V$  m<sup>3</sup> quando a profundidade é  $h$  metros. Se a taxa de variação de  $V$  em relação à  $h$  for dada por  $\frac{dV}{dh} = \pi(2h + 3)^2$ , encontre o volume de água no tanque no instante que a profundidade for 3 metros. (Leithold, v.1, p. 303, ex. 68-adaptado)

### Problema Complementar

Dado  $x \in \mathbb{R}$  com  $x > \frac{-1}{2}$ , encontre uma primitiva da  $f$  função definida por  $f(x) = \frac{2}{2x+1}$ .

#### 2ª Parte: (Tempo estimado 1h30 minutos)

O professor fará a mediação das discussões, levantando algumas questões, como:

- “Vocês já tinham trabalhado com Resolução de Problemas em outros momentos? Quais as suas impressões?”
- “Que tipo de observações podem ser feitas com esse grupo de problemas que foram resolvidos?”
- “O que podemos concluir sobre a primitiva de uma função? Como vou saber o valor da constante  $k$ ?”
- “Quais as conclusões que podem ser feitas em relação aos conceitos abordados nesses problemas, relacionados ao Cálculo 2?”

Na sequência, será realizada a etapa de *Formalização do conteúdo*, nona etapa do roteiro. O professor pesquisador será responsável pela apresentação dos conceitos trazidos nesta primeira sessão didática, fazendo uma aula expositiva e dialogada, sempre incentivando a participação e a colaboração dos alunos participantes da pesquisa, com o objetivo destes assumirem um papel de protagonismo na construção de seus conhecimentos. Pretende-se utilizar por volta de 1 hora para formalização do conteúdo.

### 3º Encontro: INTEGRAL DEFINIDA (INTEGRAL DE RIEMANN)

1ª Parte: (Tempo estimado 1h30 minutos)

#### INTEGRAL DEFINIDA (INTEGRAL DE RIEMANN)

Você notou que a antiderivação é uma operação inversa à derivação. E também, podemos chamar a antiderivada como primitiva (ou família de primitivas) de uma função. Nesta seção, vamos abordar o conceito de Integral definida de uma função, expressa por  $\int_a^b f(x)dx$ , e você tem um papel de destaque na construção desta definição. Além disso,

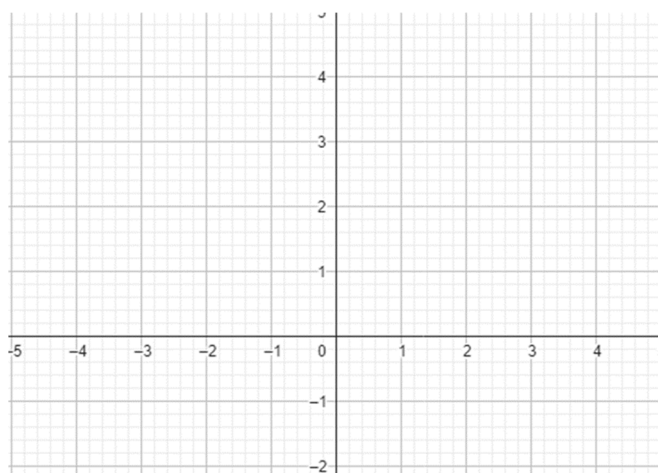
você vai perceber que a própria definição traz como consequência imediata o cálculo de áreas.

*Prezados(as) alunos(as), será apresentada uma ficha de atividades envolvendo problemas sobre a integral definida (ou Integral de Riemann) para que possa ser resolvida entre as duplas ou grupos. Ficarei à disposição para auxiliá-los à medida que forem resolvendo os problemas propostos. No final da Ficha de Atividades tem um Problema Complementar, para aqueles grupos que terminarem os problemas propostos. Bom trabalho!*

Resolução do problema (1h10 minutos): Para o desenvolvimento da quarta etapa do roteiro proposto, será destinada 1 hora para os alunos resolverem os problemas elencados nesta sessão didática, para que possam aproveitar o momento com tranquilidade e concentração. Durante este período o pesquisador estará percorrendo os grupos da sala de aula, auxiliando no que for necessário (sem dar respostas prontas), levantando questões pertinentes ao assunto e analisando a maneira como cada grupo resolve seus problemas. Esta corresponde à etapa 5 do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), Observar e incentivar.

### Ficha de Atividades 2

2.1 Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = x^2 - 1$ , definida em  $[-2,2]$ . Esboce a curva de  $f(x)$  no intervalo dado e responda às demais perguntas com base neste esboço. (Adaptado de Menoncini (2018, p.188-190))



**Fonte:** Elaborado pelo autor

a) Observe a curva no intervalo  $[1,2]$ . Divida este intervalo em 4 subintervalos de mesma amplitude  $\Delta x$  (mesmo tamanho) e identifique as abscissas  $x_0 = 1, x_1, x_2, x_3$  e  $x_4 = 2$ .

Responda:

a<sub>1</sub>) Qual é a amplitude  $\Delta x$  de cada subintervalo? Qual o valor de  $x_1, x_2$  e  $x_3$ ?

a<sub>2</sub>) Se o intervalo  $[1,2]$  fosse dividido em 10 subintervalos, qual a amplitude de cada subintervalo? E se fossem 50 subintervalos?

a<sub>3</sub>) Seja um intervalo qualquer  $[a, b]$  fosse dividido em  $n$  subintervalos. Escreva uma fórmula para encontrar a amplitude  $\Delta x$  dos subintervalos, levando em consideração o comprimento do intervalo e o número de subintervalos  $n$ .

b) Trace retas verticais nas abscissas  $x_0, x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  até a intersecção com a curva de  $f(x)$  e forme 4 retângulos  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  cujas extremidades direitas coincidam com as retas verticais em  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  e apresente uma resposta para as questões abaixo:

b<sub>1</sub>) A altura dos retângulos é um valor positivo ou negativo?

b<sub>2</sub>) Escreva algebricamente a expressão que fornece as alturas dos retângulos. Calcule o valor de cada altura.

b<sub>3</sub>) Qual é o valor da base de cada retângulo?

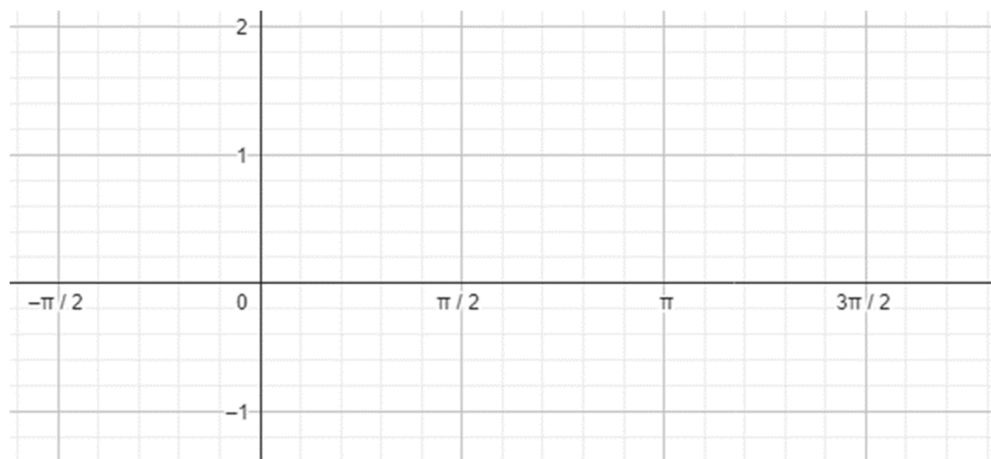
c) Escreva uma expressão algébrica (fórmula) para encontrar a área de cada retângulo  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  em função da amplitude  $\Delta x$  e das alturas  $f(x_1), \dots, f(x_4)$  e em seguida calcule suas áreas.

d) Seja  $A$  a área abaixo da curva de  $f(x)$  e acima do eixo  $x$ , definida no intervalo  $[1,2]$ . Estime o valor da área  $A$  a partir da soma das áreas dos retângulos  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  (arredonde o valor para duas casas decimais). Reescreva esta soma usando o símbolo do somatório  $\Sigma$ , em relação à amplitude  $\Delta x$  e as alturas  $f(x_1), \dots, f(x_4)$ .

e) Observe o valor da estimativa da área  $A$  feita a partir da soma das áreas dos 4 retângulos e responda: O valor da área  $A$  é um valor maior, menor ou igual ao valor estimado que você encontrou? Justifique.

f) O que acontecerá se aumentar o número de retângulos? E quando  $n$  tender a zero? Justifique sua resposta.

2.2 Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = \text{sen}(x)$  definida no intervalo  $[0, \pi]$ . Esboce a curva de  $f(x)$  no intervalo dado e responda as demais perguntas com base neste esboço, seguindo o roteiro da questão anterior.



**Fonte:** Elaborado pelo autor

- a) Divida o intervalo  $[0, \pi]$  em  $n$  subintervalos de mesma amplitude. Escreva uma fórmula para encontrar a amplitude  $\Delta x$  de cada subintervalo, levando em consideração o comprimento do intervalo e o número de subintervalos.
- b) Trace retas verticais nas abscissas  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  até a intersecção com a curva  $f(x)$  e forme  $n$  retângulos  $R_1, R_2, \dots, R_n$  cujas extremidades direitas coincidam com as retas verticais em  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ . Escreva algebricamente a expressão que fornece as alturas dos retângulos.
- c) Escreva uma expressão algébrica (fórmula) para encontrar a área de cada retângulo, em função da amplitude e da altura.
- d) Qual é a área da região compreendida entre o intervalo  $[0, \pi]$  e abaixo da função  $f(x) = \text{sen}(x)$  ?
- e) O que acontece, em termos de área, caso se considerasse a função  $f(x) = \text{sen}(x)$  definida no intervalo  $[0, 2\pi]$ ? Qual é o valor de  $\int_0^{2\pi} \text{sen}(x) dx$ ? Justifique suas respostas.

### Problema Complementar

Considere a função  $f(x) = \cos x$ , com  $x \in \mathbb{R}$ . Qual a área da região formada no primeiro quadrante, abaixo do gráfico de  $f(x)$ , limitada pelas retas  $x = 0$  e  $x = \frac{\pi}{2}$ ?

**2ª Parte:** (Tempo estimado 1h30 minutos)

O professor fará a mediação das discussões, levantando algumas questões, como:

- “Vocês já tinham trabalhado com Integral em outros momentos (ou outras disciplinas do curso)? Já tinham visto essa noção de área?”
- “Que tipo de observações podem ser feitas com esses problemas que foram resolvidos?”
- “O que podemos concluir, nos dois casos, quando o número de retângulos aumenta? Quer dizer, o que acontece quando  $n$  tender ao infinito?”
- “Já temos condições de responder o que é a Integral? E para que serve?”

### 4º Encontro: APLICAÇÕES INICIAIS DA INTEGRAL DEFINIDA

1ª Parte: (Tempo estimado 1h30 minutos)

Com o passar das aulas, os alunos participantes ficaram mais acostumados com a dinâmica da sala de aula. Dessa forma, as etapas 1, 2 e 3 são executadas de maneira mais rápida e, por este motivo, estima-se 15 minutos para superá-las. Segue-se abaixo a introdução ao tema deste encontro e a ficha de atividades que será trabalhada com os participantes da pesquisa.

#### APLICAÇÕES INICIAIS DA INTEGRAL DEFINIDA

Nos encontros anteriores foram abordados os conceitos sobre primitiva de uma função, e a integral definida e área de uma região. Nesta sessão didática nos deparamos com problemas que trazem algumas aplicações para integral e, algumas dessas, podem ser conhecidas para estudantes da licenciatura em Física, pois abordam conceitos de posição e movimento.

*Caros(as) alunos(as), será apresentada uma ficha de atividades envolvendo problemas contendo aplicações iniciais sobre a integral definida para que possa ser resolvida entre as duplas ou grupos. Ficarei à disposição para auxiliá-los à medida que forem resolvendo os problemas propostos. No final da Ficha de Atividades tem um*

*Problema Complementar, para aqueles grupos que terminarem os problemas propostos.  
Bom trabalho!*

Estima-se um período de 1h10 minutos para os alunos resolverem os problemas propostos. O professor pesquisador auxiliará os grupos conforme as necessidades e dúvidas apresentadas. Assim, desenvolvem-se as etapas 4 e 5 do roteiro de resolução de problemas de Onuchic e Allevato (2011).

### Ficha de Atividades 3

3.1- Após calcular  $\int_1^2 x^2 - 1 dx$  você obterá como resultado um número real. Explique o significado desse resultado numérico, justificando sua resposta.

3.2 - Dada uma função  $f$  definida por  $f(x)$ , com primitiva  $F(x)$  e um intervalo real  $[a, b]$ , justifique a afirmação: Podemos omitir a constante real  $k$  ao calcular  $\int_a^b f(x) dx$ . (Leithold, v.1, p. 303, ex. 68- adaptado).

3.3- Quando tratamos sobre o movimento de um corpo (ou uma partícula), podemos falar em deslocamento e espaço percorrido. Responda as questões a seguir:

- a) Como você explicaria a diferença entre esses conceitos físicos?
- b) Considere uma partícula deslocando-se sobre o eixo  $x$  com velocidade  $v(t) = 2t - 3$ , com  $t \geq 0$ . Esboce seu gráfico.
- c) Qual é o deslocamento entre os instantes  $t_1 = 1s$  e  $t_2 = 3s$ ?
- d) Qual é o espaço percorrido pela partícula entre os instantes  $t_1 = 1s$  e  $t_2 = 3s$ ?

3.4- Encontre o espaço percorrido, entre os instantes  $t = 0$  e  $t = \pi$  s, por uma partícula que se desloca sobre o eixo  $x$  com velocidade  $v(t) = \text{sen}(2t)$ , em m/s,  $t \geq 0$ .

### Problema Complementar

3.5- Dada uma partícula a qual sabemos sua equação horária dos espaços,  $s(t)$ , podemos obter informações sobre velocidade, aceleração e o tipo de movimento da partícula. Agora, considere uma partícula e suponha que você conhece  $a(t)$ . O que podemos afirmar em relação à  $s(t)$  e  $v(t)$ ? Como obter essas informações?

**2ª Parte:** (Tempo estimado 1h30 minutos)

Após os participantes terem finalizado a resolução da Ficha de Atividades 1, entraremos nos itens 6. *Registro das resoluções na lousa*; 7. *Plenária* e 8. *Busca de consenso* do roteiro de Onuchic e Allevato (2011). Estima-se um tempo de 30 minutos para completar estas etapas. O professor fará a mediação das discussões, levantando algumas questões, como:

- *“Vocês já conheciam estes problemas relacionados à equação horária da velocidade?”*
- *“Que tipo de observações podem ser feitas com esse grupo de problemas que foram resolvidos?”*
- *“O que podemos afirmar sobre as aplicações da integral? Vocês já viram outras? O que vocês acham?”*
- *“De maneira geral, quais as conclusões que podem ser feitas em relação aos conceitos abordados nesses problemas? Algum chamou mais a sua atenção?”*

## **5º Encontro: CÁLCULO DE ÁREAS USANDO INTEGRAL DEFINIDA**

1ª Parte: (Tempo estimado 1h30 minutos)

Como estamos no quinto encontro, os alunos participantes ficaram mais acostumados com a dinâmica da sala de aula. Dessa forma, as etapas 1, 2 e 3 são executadas de maneira mais rápida e, por este motivo, estima-se 15 minutos para superá-las. Segue-se abaixo a introdução ao tema deste encontro e a ficha de atividades que será trabalhada com os participantes da pesquisa.

### **CÁLCULO DE ÁREAS USANDO INTEGRAL DEFINIDA**

Caros(as) alunos (as), vocês provavelmente puderam observar com as atividades anteriores que o cálculo de áreas fica “mais interessante” ao passo que podemos utilizar a integração como ferramenta. É possível encontrar o valor de áreas de “regiões estranhas” ou regiões originárias da interseção do gráfico de funções. Nesta seção, abordaremos o cálculo de áreas de regiões no plano. O conjunto de atividades que seguem abaixo deverão ser resolvidas em grupo e as soluções serão na sequência compartilhadas e discutidas. Vocês poderão me chamar se tiverem dúvidas, bem como usar materiais de consulta e eu estarei também passando pelos grupos para acompanhar o trabalho de vocês.

*Caros(as) alunos(as), será apresentada uma ficha de atividades envolvendo problemas acerca de cálculo de áreas de regiões planas usando integral, para que sejam*

*solucionados pelas duplas ou grupos. Ficarei à disposição para auxiliá-los à medida que forem resolvendo os problemas propostos. No final da Ficha de Atividades tem um Problema Complementar, para aqueles grupos que terminarem os problemas propostos. Bom trabalho!*

Estima-se um período de 1h10 minutos para os alunos resolverem os problemas propostos. O professor pesquisador auxiliará os grupos conforme as necessidades e dúvidas apresentadas. Assim, desenvolvem-se as etapas 4 e 5 do roteiro de resolução de problemas de Onuchic e Allevato (2011).

#### **Ficha de Atividades 4**

4.1- Calcule a área da região do plano limitada pelas retas  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$  e pelo gráfico da função  $f(x) = x^2$ .

4.2- Pode-se representar uma região do plano utilizando notação de conjuntos. Qual é a área da região descrita por  $A = \{x \in \frac{R}{-1} \leq x \leq 1 e -1 \leq y \leq x^3\}$  ?

4.3- Considere o conjunto de pares de pontos  $(x, y)$  tais que  $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$ . Com essas informações, é possível encontrar a região do plano que satisfaz essa condição? Justifique sua resposta. É possível encontrar a área dessa região? (adaptado de Guidorizzi (2001, p. 314)).

4.4- Encontre a área da região limitada por  $y^2 = 2x - 2$  e  $y = x - 5$ .

#### **Problema Complementar**

4.5- Qual é a área da região limitada por  $1 \leq y \leq \sqrt[4]{x}$  ?

#### **2ª Parte:** (Tempo estimado 1h30 minutos)

Após os participantes terem finalizado a resolução da Ficha de Atividades 1, entraremos nos itens 6. *Registro das resoluções na lousa*; 7. *Plenária* e 8. *Busca de consenso* do roteiro de Onuchic e Allevato (2011). Estima-se um tempo de 30 minutos para completar estas etapas. O professor fará a mediação das discussões, levantando algumas questões, como:

- “Vocês já conheciam algum problema destes, usando integral para calcular área de regiões planas?”
- “Que tipo de observações podem ser feitas com esse grupo de problemas que foram resolvidos? Qual a parte mais difícil durante a resolução? Por que?”
- “O que podemos perceber com esse grupo de problemas que foram resolvidos?”
- “Vou repetir uma pergunta feita em encontros anteriores. Já podemos responder o que é integral e para que ela serve?” Temos algumas possibilidades de resposta a essa pergunta?”

Por se tratarem de questões motivadoras para uma discussão, poderá haver outras questões levantadas pelos alunos e que serão apresentadas em momento oportuno, para contribuir com o desenvolvimento desta pesquisa.

Na sequência, será realizada a etapa de *Formalização do conteúdo*, nona etapa do roteiro. O professor pesquisador será responsável pela apresentação dos conceitos trazidos nesta primeira sessão didática, fazendo uma aula expositiva e dialogada, sempre incentivando a participação e a colaboração dos alunos participantes da pesquisa, com o objetivo destes assumirem um papel de protagonismo na construção de seus conhecimentos. Pretende-se utilizar por volta de 1 hora para formalização do conteúdo.

## **6º Encontro: MUDANÇAS DE VARIÁVEIS NA INTEGRAL**

1ª Parte: (Tempo estimado 1h30 minutos)

Mesmo que os alunos participantes apresentem-se habituados com a dinâmica da sala de aula utilizando a Metodologia de Resolução de Problemas e os passos estipulados no roteiro de Onuchic e Allevato (2011), o pesquisador segue pontuando que as etapas 1, 2 e 3 já foram contempladas (estima-se 15 minutos para suprir estes itens). Segue-se abaixo a introdução ao tema deste encontro e a ficha de atividades que será trabalhada com os participantes da pesquisa.

### **MUDANÇAS DE VARIÁVEIS NA INTEGRAL**

Ao longo desses encontros, aprendemos a efetuar o cálculo utilizando algumas técnicas de integração. O último problema da seção anterior mostrou que precisamos de

mais alguns recursos para calcular integrais, os quais chamamos de mudanças de variáveis na integral. Ao observar uma integral pensaremos em realizar uma mudança de variáveis, isto é, “parte” do integrando receberá outro “nome”, numa tentativa de concluir os cálculos. Essa mudança de variáveis possui relação direta com a Derivada da Função Composta (ou Regra da Cadeia para derivadas). No que segue serão apresentadas um conjunto de situações-problemas pertinentes ao tema mudança de variáveis na integral.

*Caros(as) alunos(as), será apresentada uma ficha de atividades envolvendo problemas relacionados a mudança de variáveis na integral, para que possa ser resolvida entre as duplas ou grupos. Ficarei à disposição para auxiliá-los à medida que forem resolvendo os problemas propostos. No final da Ficha de Atividades tem um Problema Complementar, para aqueles grupos que terminarem os problemas propostos. Bom trabalho!*

Estima-se um período de 1h10 minutos para os alunos resolverem os problemas propostos. O professor pesquisador auxiliará os grupos conforme as necessidades e dúvidas apresentadas. Assim, desenvolvem-se as etapas 4 e 5 do roteiro de resolução de problemas de Onuchic e Allevato (2011).

### **Ficha de Atividades 5**

5.1- Observe as integrais a seguir e responda:

a) Como você poderia calcular  $\int_0^1 (x + 1)^3 dx$ ?

b) E caso o expoente fosse maior? Como encontrar o valor de  $\int_0^1 (x + 1)^{10} dx$  ?

5.2- A mudança de variáveis na integral pode ser compreendida como uma ferramenta para auxiliar no cálculo de integrais. Deve-se fazer substituições que facilitem a resolução. Um ponto de partida, ou uma dica, é lembrar de derivadas conhecidas, já vistas em Cálculo 1. Encontre o valor de  $\int \sin\theta\sqrt{1 - \cos\theta}d\theta$ .

5.3- Durante a aula de Cálculo II, sobre mudanças de variáveis na integral, o professor propôs que os alunos resolvessem as integrais indefinidas  $\int x\sqrt{x^2 + 2}dx$  e  $\int x^3\sqrt{x^2 + 2}dx$  pelos métodos já vistos em aulas anteriores. Rapidamente um dos alunos comentou: “*Eu resolvo as duas do mesmo jeito e dá o mesmo resultado*”. O que podemos afirmar em relação à fala desse aluno? Como você resolveria as integrais?

5.4- Um professor, durante a aula de Cálculo II, pediu que os alunos encontrassem o resultado de  $\int \operatorname{tg}x \cdot \sec^2 x dx$ . Para isso, ele dividiu a sala em dois grupos e sugeriu duas possíveis mudanças de variáveis a serem utilizadas e propôs que cada grupo solucionasse a integral usando uma dessas maneiras. Ao final, os alunos argumentaram que os resultados são diferentes.

De acordo com a situação apresentada, responda:

- a) Quais as sugestões de mudança de variáveis que o professor propôs aos alunos?
- b) Como você explica os “resultados diferentes” para mesma integral?

5.5- Dado  $r \in \mathbb{R}, r > 0$ , encontre a área do círculo de raio  $r$ , via integral.

### Problema Complementar

5.6- Em Cálculo I você aprendeu que a derivada de funções do tipo  $e^{f(x)}$  é dada por  $e^{f(x)} \cdot f'(x)$ . Dessa forma, responda:

- a) Qual é a área da região do primeiro quadrante limitada pelo gráfico de  $f(x) = e^{2x}$ , com  $0 \leq x \leq 1$ .
- b) Como encontrar a  $\int 2^x dx$ ? Podemos generalizar esse resultado, ou seja, dado  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a > 0$  e  $a \neq 1$  encontre  $\int a^x dx$ .

**2ª Parte:** (Tempo estimado 1h30 minutos)

Após os participantes terem finalizado a resolução da Ficha de Atividades 1, entraremos nos itens 6. *Registro das resoluções na lousa*; 7. *Plenária* e 8. *Busca de consenso* do roteiro de Onuchic e Allevato (2011). Estima-se um tempo de 30 minutos para completar estas etapas. O professor fará a mediação das discussões, levantando algumas questões, como:

- “Vocês já tinham trabalhado com essas mudanças de variáveis em outras situações? Lembram de algo parecido em Cálculo 1?”
- “Quais as dificuldades que podemos elencar nesta etapa? O que acharam mais difícil?”
- “Que tipo de observações podem ser feitas com esse grupo de problemas que foram resolvidos?”

- “*Alguma dessas mudanças merece seu destaque? Algumas destas chamou mais a sua atenção? Por qual motivo?*”
- “*Lembra de utilizar essas mudanças em outras situações (outras disciplinas do curso)?*”
- “*E no problema da área do círculo, vocês querem fazer algum comentário? Lembra-se de ver alguma demonstração deste resultado no Ensino Fundamental ou Médio?*”
- “*Quais as conclusões que podem ser feitas em relação aos conceitos abordados nesses problemas, relacionados ao Cálculo 2?*”

Por se tratarem de questões motivadoras para uma discussão, poderá haver outras questões levantadas pelos alunos e que serão apresentadas em momento oportuno, para contribuir com o desenvolvimento desta pesquisa.

Na sequência, será realizada a etapa de *Formalização do conteúdo*, nona etapa do roteiro. O professor pesquisador será responsável pela apresentação dos conceitos trazidos nesta primeira sessão didática, fazendo uma aula expositiva e dialogada, sempre incentivando a participação e a colaboração dos alunos participantes da pesquisa, com o objetivo destes assumirem um papel de protagonismo na construção de seus conhecimentos. Pretende-se utilizar por volta de 1 hora para formalização do conteúdo.

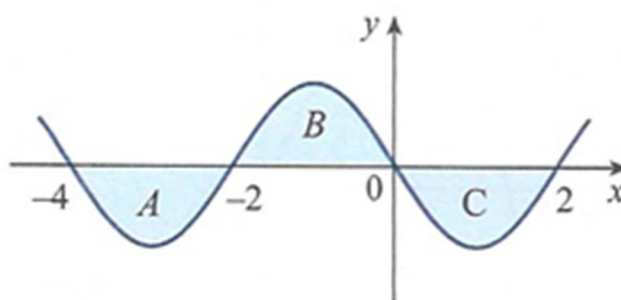
## APÊNDICE 05 - AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL (ADF)

### Atividades

1- Dado  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , é correto afirmar que  $\frac{-1}{\alpha} \cos(\alpha x) + k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , é uma primitiva da função  $f(x) = \sin(\alpha x)$  ?

2- Cada uma das regiões A, B e C delimitadas pelo gráfico de  $f(x)$  e pelo eixo x tem área

3. Encontre o valor de  $\int_{-4}^2 [f(x) + 2x + 5] dx$ . (Adaptado de Stewart, 2022, p.365).



Fonte: Stewart (2022, p. 365)

3- Qual a área da região obtida entre as curvas  $y = x^2$  e  $y = -x^2 + 4x$  ?

4- Na disciplina de Cálculo 1 você aprendeu a derivada da função composta, geralmente chamada de Regra da Cadeia. Existe um resultado semelhante à regra da cadeia para derivadas, que auxilia no cálculo de integrais. Com base nessas informações, encontre o valor de  $\int_0^1 2(1 + x^2)^9 x dx$ .

5- Durante as aulas de Cálculo 2, o professor fez uma pergunta aos seus alunos: “Qual substituição de variáveis seria mais eficaz para resolver  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ”? Você poderia ajudar os alunos a responderem essa questão?

## APÊNDICE 06 - QUESTIONÁRIO DE PESQUISA

Este questionário é parte de uma pesquisa desenvolvida junto com a **Unesp/Faculdade de Ciências** (Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”), localizada na cidade de Bauru, através do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência.

A responsabilidade científica cabe ao pós-graduando **Mateus Eduardo Boccardo**, professor efetivo de Matemática, lotado no IFSP na cidade de Votuporanga, e atualmente afastado de suas atribuições, conforme Portaria N° 4560/IFSP, de 11 de agosto de 2021, para participar de programa de pós-graduação (Doutorado).

A orientação deste trabalho é da **Doutora Renata Cristina Geromel Meneghetti**, professora do Instituto de Ciências Matemática e de Computação da USP e professora colaboradora no Programa de Pós-Graduação mencionado. Peço que responda às questões a seguir, sabendo que Não é necessário se identificar, desta forma garantindo o anonimato e o sigilo de suas respostas.

1- Você está matriculado no curso de Licenciatura em Física do IFSP?

( ) Sim                      ( ) Não

Outro: \_\_\_\_\_

2- Assinale todas as disciplinas de Ciências Exatas que você já cursou/ está cursando:

( ) Fundamentos de Matemática

( ) Fundamentos da Física

( ) Cálculo Dif. e Integral I

( ) Vetores e Geometria Analítica

( ) Mecânica Geral

( ) Termodinâmica

( ) Cálculo Dif. e Integral II

( ) Mec. dos Sólidos e Flúidos

( ) Cálculo Dif. e Integral III

( ) Oscilações e Ondas

3- Como você classifica a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II ? (Você pode assinalar mais de uma resposta):

( ) A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II é fácil.

- O grau de dificuldade da disciplina de Cálculo II é mediano.
- A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II é difícil.
- Os conteúdos abordados são chatos e não possuem aplicação.
- Gosto dos conteúdos abordados na disciplina de Cálculo II.
- Os conteúdos abordados estão presentes em outras disciplinas do curso.
- O rigor e o excesso de símbolos dificultam a compreensão de conceitos.
- Tem muitas regras, fórmulas e Teoremas para decorar.
- Precisa lembrar muitos conteúdos de disciplinas cursadas anteriormente.
- É uma disciplina muito importante para o curso.
- Tenho facilidade com os conteúdos desta disciplina.
- Tenho dificuldades com os conteúdos desta disciplina.

- 4- Faltou algo a dizer? Gostaria de fazer mais alguns comentários sobre a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II? Utilize o espaço abaixo para apresentar seus comentários.

Agora, estamos interessados na metodologia de ensino abordada durante as sessões didáticas desenvolvidas durante a pesquisa.

- 5- Você conhecia a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?  Sim  Não
- 6- Já tinha trabalhado com esta metodologia de ensino em alguma disciplina do curso?  Sim  Não
- Qual(is): \_\_\_\_\_

- 7- Após as sessões didáticas, quais suas impressões sobre a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas? (Você pode assinalar mais de uma resposta):
- ( ) Proporcionou uma experiência diferente em sala de aula.
  - ( ) Permitiu mais discussões entre os alunos e o professor.
  - ( ) Auxiliou no processo de construção de conhecimento.
  - ( ) Pode ser utilizada em diferentes níveis de ensino.
  - ( ) Permitiu aos alunos serem personagens ativos durante as aulas.
  - ( ) Contribui para desenvolver um trabalho colaborativo.
  - ( ) Gostei desta metodologia de ensino.
- 8- Na sua opinião, o uso da Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas contribui para a melhora do processo de ensino e aprendizagem? ( ) Sim ( ) Não
- 9- Faltou algo a dizer? Gostaria de fazer mais alguns comentários sobre a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas? Utilize o espaço abaixo para apresentar seus comentários.

A sua participação nesta pesquisa de doutorado é muito importante. Obrigado!

## APÊNDICE 07 – RELATÓRIO DE PESQUISA PARA AS PARTICIPANTES

### Relatório de pesquisa para as participantes

Entre os meses de março e abril do ano de 2024 vocês, alunas, foram convidadas a participar como voluntárias da pesquisa **“PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS”**. Esta é uma pesquisa desenvolvida junto com a **Unesp/Faculdade de Ciências** (Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”), localizada na cidade de Bauru, através do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência.

A responsabilidade científica coube ao pós-graduando **Mateus Eduardo Boccardo**, professor efetivo de Matemática, lotado nesta instituição e, à época, afastado de suas atribuições, conforme Portaria N° 4560/IFSP, de 11 de agosto de 2021, para participar de programa de pós-graduação (Doutorado). Este trabalho teve a orientação da **Doutora Renata Cristina Geromel Meneghetti**, professora do Instituto de Ciências Matemática e de Computação da USP e professora colaboradora no Programa de Pós-Graduação mencionado.

Este trabalho investigativo, que contou com a participação de vocês, contribuiu com dados importantes para elaboração da tese de Doutorado do professor Mateus Eduardo Boccardo intitulada **“UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE INTEGRAIS APOIADA NA ENGENHARIA DIDÁTICA E NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS”**, cuja banca de defesa pública foi realizada em 14 de agosto de 2025, de maneira virtual.

Conforme orientação do Conselho de Ética em Pesquisa (CEP) e de acordo com as normas estabelecidas no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) assinado pelas

participantes no dia 29 de fevereiro de 2024, início da etapa de coleta de dados desta pesquisa de Doutorado, ficou assegurado às alunas a garantia de manutenção do sigilo, da privacidade e confidencialidade dos seus dados pessoais, bem como o acesso aos resultados da pesquisa.

Quanto ao sigilo e privacidade das alunas participantes, todo o texto elaborado para tese e demais apresentações realizadas pelo pesquisador fazem referências às participantes como *Aluna 1* e *Aluna 2*, omitindo quaisquer informações pessoais que pudessem, de alguma forma, identificá-las ou expô-las a situações de constrangimento.

Em relação aos resultados desta pesquisa de Doutorado, objetivo principal deste relatório, pode-se afirmar que a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, através da Resolução de Problemas, associada à Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, contribuiu para potencializar o aprendizado de conceitos de Integral, conteúdo presente em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. A Resolução de Problemas, enquanto metodologia ativa de ensino, promove o protagonismo do aluno e auxilia para criação de conceitos matemáticos, contribuindo para melhorar o desempenho escolar dos alunos.

Dessa forma, essa pesquisa trouxe resultados bastante promissores que podem ser utilizados em salas de aula de Cálculo Diferencial e Integral, foco deste trabalho, aulas de Matemática em todos os níveis de escolaridade e, porventura, formação de professores (inicial ou em serviço).

Pode-se afirmar que a colaboração de vocês trouxe informações muito importantes para a realização desta pesquisa de Doutorado. Agradeço, novamente, pela sua participação.

Cordialmente,

Prof. Dr. Mateus Eduardo Boccardo.

## ANEXOS

### ANEXO A- PARECER Nº 6.598.409 DE APROVAÇÃO DO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA (CEP).

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BASICAS_DO_PROJETO_2235471.pdf	06/11/2023 17:36:49		Aceito
Outros	Documento_Mateus_Eduardo_Boccardo_742.pdf	06/11/2023 17:35:59	MATEUS EDUARDO BOCCARDO	Aceito
Folha de Rosto	folhaDeRosto_assinado_MEB.pdf	06/11/2023 17:34:20	MATEUS EDUARDO BOCCARDO	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TALE_MateusBoccardo.pdf	24/10/2023 12:31:56	MATEUS EDUARDO BOCCARDO	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_MateusBoccardo.pdf	24/10/2023 12:31:46	MATEUS EDUARDO BOCCARDO	Aceito
Declaração de concordância	Autorizacao_Coordenador.pdf	24/10/2023 12:26:34	MATEUS EDUARDO BOCCARDO	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Projeto_Pesquisa_Doutorado_MEB.pdf	24/10/2023 12:24:55	MATEUS EDUARDO BOCCARDO	Aceito

**Situação do Parecer:**

Aprovado

**Necessita Apreciação da CONEP:**

Não

BAURU, 21 de Dezembro de 2023

## ANEXO B - PORTARIA DE AFASTAMENTO DO SERVIDOR MATEUS EDUARDO BOCCARDO



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo  
REITORIA

### PORTARIA Nº 4515/IFSP, DE 6 DE AGOSTO DE 2021

O **REITOR** DO INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO, no uso de suas atribuições legais, conferidas pelo Decreto de 5 de abril de 2021, publicado no Diário Oficial da União de 6 de abril de 2021, seção 2, página 1 e o que consta no Processo nº **23441.000385/2021-54**,

RESOLVE

Autorizar o **Afastamento Stricto Sensu**, ao servidor **MATEUS EDUARDO BOCCARDO**, ocupante do cargo de Professor de Ensino Básico Técnico e Tecnológico, SIAPE nº [REDAZIDO] SIAPECAD nº [REDAZIDO], lotado(a) no(a) *Campus Votuporanga*, para participação em programa de pós-graduação, DOUTORADO, com fundamento no artigo 96-A da Lei nº 8.112, de 11 de dezembro de 1990, combinado com o artigo 30 da Lei nº 12.772, de 28 de dezembro de 2012, pelo período de **02 de setembro de 2021 a 02 de agosto de 2025**.

Documento assinado eletronicamente por:

- **Silmario Batista Dos Santos, Reitor**, em 06 de agosto de 2021 as 18:40.

Com fundamentação baseada no art. 6º, do [Decreto nº 8.539](#), de 8 de outubro de 2015, com Redação dada pelo art. 12 do [Decreto nº 10.543](#), de 2020.



Este documento foi gerado pelo SIPPAG em 06 de agosto de 2021 as 16:54. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou [Clique Aqui](#) ou acesse <http://sippag.ifsp.edu.br/valida.php> e forneça os dados abaixo:

**Tipo de Documento:** Portaria

**Código de Validação:** 3F53B1F06F3FB131B9AD114FF1A75CAE