

TATIANA RAMOS CARDOSO

SOBRE INTERAÇÕES ESCALARES E VETORIAIS
NA TEORIA DE DUFFIN-KEMMER-PETIAU

Dissertação apresentada à
Faculdade de Engenharia do
Campus de Guaratinguetá,
Universidade Estadual Paulista,
para a obtenção do título
de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Soares de Castro

Guaratinguetá
2011

C268s	Cardoso, Tatiana Ramos Sobre interações escalares e vetoriais na teoria de Duffin-Kemmer-Petiau / Tatiana Ramos Cardoso – Guaratinguetá : [s.n], 2011. 71 f. : il. Bibliografia: f. 62-65 Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2011. Orientador: Prof. Dr. Antonio Soares de Castro 1. Teoria Quântica Relativista. I. Título CDU 530.145
-------	--

TATIANA RAMOS CARDOSO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”

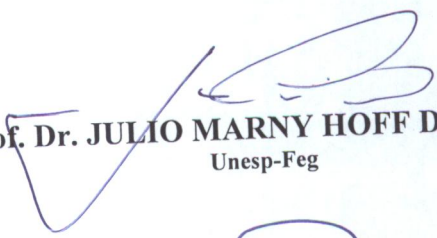
PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr.ª. Silvia Maria Giuliatti Winter
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. ANTONIO SOARES DE CASTRO
Orientador / Unesp-Feg


Prof. Dr. JULIO MARNY HOFF DA SILVA
Unesp-Feg


Prof. Dr. BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR
IFT/UNESP

Fevereiro de 2011

DADOS CURRICULARES

TATIANA RAMOS CARDOSO

NASCIMENTO	30.10.1983 – SÃO JOSÉ DOS CAMPOS/SP
FILIAÇÃO	José Aparecido Ramos Cardoso Cleunice de Lourdes da Silva Ramos Cardoso
GRADUAÇÃO	Curso de Graduação em Bacharelado em Física na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
REVISORA DE PERIÓDICO	Physics Letters A (2011 - Atual)
PREMIAÇÕES	Prêmio de Excelência Acadêmica (2009) UNESP - Campus de Guaratinguetá Reconhecimento Acadêmico relativo ao ano de 2008 UNESP - Campus de Guaratinguetá Reconhecimento Acadêmico relativo ao ano de 2007 UNESP - Campus de Guaratinguetá O trabalho intitulado <i>On the threshold for the pair production and localization of spinless particles</i> recebeu o segundo lugar entre os trabalhos apresentados no II Encontro de Verão de Física do ITA (2007) O trabalho intitulado <i>Espalhamento de partículas sem spin poços e barreiras quadradas com mistura arbitrária de acoplamentos escalar e vetorial</i> recebeu Menção Honrosa no XIX Congresso de Iniciação Científica da UNESP (2007)

PUBLICAÇÕES

- T. R. Cardoso e A. S. de Castro, *The blackbody radiation in d-dimensional universes*. Revista Brasileira de Ensino de Física **27**, 599 (2005)
- T. R. Cardoso e A. S. de Castro, *Sobre o limiar para a produção de pares e localização de partículas sem spin*. Revista Brasileira de Ensino de Física **29**, 203 (2007)
- T. R. Cardoso e A. S. de Castro, *Estados estacionários de partículas sem spin em potenciais quadrados*. Revista Brasileira de Ensino de Física **30**, 2306 (2008)
- T. R. Cardoso, L. B. Castro e A. S. de Castro, *Inconsistencies of a purported probability current in the Duffin-Kemmer-Petiau theory*. Physics Letters A **372**, 5964 (2008)
- T. R. Cardoso, L. B. Castro e A. S. de Castro, *Absence of Klein's paradox for massive bosons coupled by nonminimal vector interactions*. Canadian Journal of Physics **87**, 1185 (2009)
- T. R. Cardoso, L. B. Castro e A. S. de Castro, *Comment on Solutions of the Duffin-Kemmer-Petiau equation for a pseudoscalar potential step in (1+1) dimensions*. Canadian Journal of Physics **87**, 857 (2009)
- T. R. Cardoso, L. B. Castro e A. S. de Castro, *On the scattering of massive spinless bosons by a nonminimal vector smooth step potential*. Nuclear Physics B **199**, 207 (2010)
- T. R. Cardoso, L. B. Castro e A. S. de Castro, *Confining solutions of massive spin-0 bosons by a linear nonminimal vector coupling in the Duffin-Kemmer-Petiau theory*. Nuclear Physics B **199**, 203 (2010)
- T. R. Cardoso, L. B. Castro e A. S. de Castro, *Effects due to a scalar coupling on the particle-antiparticle production in the Duffin-Kemmer-Petiau theory*. International Journal of Theoretical Physics **49**, 10 (2010)
- T. R. Cardoso, L. B. Castro e A. S. de Castro, *On the nonminimal vector coupling in the Duffin-Kemmer-Petiau theory and the confinement of massive bosons by a linear potential*. Journal of Physics A, Mathematical and Theoretical **43**, 055306 (2010)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela coragem e serenidade e ao professor Antonio por sempre ter acreditado em mim e ter sido um luzido nos momentos de escuridão. Em especial a Luis Benito, por sua amizade, boa vontade, competência e prontidão.

Este trabalho contou com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Em memória de Yehuda Levanon

"Valeu a pena?
Tudo vale a pena
Se a alma não é pequena.
Quem quer passar além do Bojador
Tem que passar além da dor.
Deus ao mar o perigo e o abismo deu,
Mas nele é que espelhou o céu."

Fernando Pessoa

CARDOSO, T. R. **Sobre interações escalares e vetoriais na teoria de Duffin-Kemmer-Petiau**. 2010. 71 f. Dissertação de Mestrado – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2008.

RESUMO

O formalismo de primeira ordem de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) descreve partículas de spin 0 e spin 1 e tem sido utilizado na análise de interações relativísticas de hádrons com núcleos como uma alternativa para análise baseada nos formalismos de segunda ordem convencionais de Klein-Gordon e Proca. Apresentamos a equação geral de DKP, discutimos as condições sobre as interações que levam a uma corrente conservada e os efeitos das transformações de paridade, conjugação de carga e reversão temporal. Adotando uma representação específica para as matrizes de DKP, estabelecemos as equações de movimento para os componentes do espinor de DKP na presença das interações escalares e vetoriais. Salientamos que o componente espacial do potencial vetorial não-mínimo não pode ser absorvido no espinor. Mostramos que o componente espacial do potencial vetorial não-mínimo poderia ser irrelevante para a formação de estados ligados para potenciais que se anulam no infinito mas que a sua presença é uma condição *sine qua non* para o confinamento. Algumas aplicações em potenciais unidimensionais são usadas para mostrar que o paradoxo de Klein nunca aparece no caso do acoplamento vetorial não-mínimo, contrário ao que ocorre para um potencial vetorial minimamente acoplado. Um aparente paradoxo relacionado à localização de bósons na presença de potenciais fortes é resolvido através da introdução dos conceitos de massa efetiva e comprimento de onda Compton efetivo.

PALAVRAS-CHAVE: Equação de DKP, Paradoxo de Klein, Produção de pares, Localização, Estados ligados, Estados de espalhamento.

CARDOSO, T. R. **On the scalar and vector interactions in the Duffin-Kemmer-Petiau theory**. 2010. 71 f. Master (Physics) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2008.

ABSTRACT

The first-order Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) formalism describes spin-0 and spin-1 particles and has been used to analyze relativistic interactions of hadrons with nuclei as an alternative to their conventional second-order Klein-Gordon and Proca counterparts. We present the general DKP equation, discuss conditions on the interactions which lead to a conserved current and effects of parity, charge-conjugation and time-reversal transformations. Adopting a specific representation for the DKP matrices, we set up the equations for the components of the DKP spinor in the presence of scalar and vector interactions. We point out that the space component of the nonminimal vector potential can not be absorbed into the spinor. We show that the space component of the nonminimal vector potential could be irrelevant for the formation of bound states for potentials vanishing at infinity but its presence is a *sine qua non* condition for confinement. Some applications in unidimensional potentials are used to show that Klein's paradox never appears in the case of a nonminimal vector potential, contrary to what occurs for a minimally coupled vector potential. An apparent paradox related to the localization of bosons in the presence of strong potentials is solved by introducing the concepts of effective mass and effective Compton wavelength.

KEYWORDS: DKP equation, Klein's paradox, Pair production, Localization, Bound states, Scattering states.

Sumário

1	Introdução	8
2	A equação de Duffin-Kemmer-Petiau	10
2.1	Propriedades Gerais	10
2.1.1	A equação de DKP e a álgebra das matrizes β^μ	10
2.1.2	A equação de DKP conjugada	13
2.1.3	A equação da continuidade na teoria de DKP	14
2.1.4	Condição de normalização e os valores esperados	14
2.1.5	As representações irredutíveis da teoria de DKP	15
2.1.6	Uma representação para as matrizes β^μ	15
2.1.7	O operador projeção nos setores de spin 0 e spin 1 da teoria de DKP	16
2.1.8	O limite não-relativístico da teoria de DKP livre	20
2.1.9	As interações na teoria de DKP	21
2.1.10	A equivalência entre a teoria de DKP e as equações de Klein-Gordon e Proca para o acoplamento vetorial mínimo	22
2.1.11	A equação de DKP independente do tempo	23
2.1.12	Ortonormalidade na teoria de DKP	24
2.1.13	Simetria PCT na teoria de DKP	24
2.1.14	As equações para os componentes do espinor	31
2.1.15	A supressão do componente espacial do acoplamento vetorial mínimo	32
3	Aplicações em potenciais unidimensionais	34
3.1	As interações escalares e vetoriais na teoria de DKP	34
3.1.1	A ocorrência do paradoxo de Klein na teoria de DKP	34
3.1.2	A mistura dos acoplamentos escalar tipo 1 e vetorial mínimo na teoria de DKP em um potencial degrau	35
3.1.3	O acoplamento vetorial não-mínimo na teoria de DKP em um potencial degrau	38
3.1.4	O acoplamento vetorial não-mínimo na teoria de DKP para o espalhamento de bósons em um potencial degrau suave	42
3.1.5	O acoplamento vetorial não-mínimo na teoria de DKP e o confinamento de bósons por um potencial linear	44
4	Conclusões	61
	Referências bibliográficas	62

Lista de Figuras

3.1	Coeficiente de transmissão <i>versus</i> altura do degrau V para o caso em que $c_1 = 0.501$	49
3.2	Coeficiente de transmissão <i>versus</i> altura do degrau V para o caso em que $c_1 = 0.5001$	50
3.3	Coeficiente de transmissão <i>versus</i> altura do degrau V para o caso em que $c_1 = 0.5$	51
3.4	Coeficiente de transmissão <i>versus</i> altura do degrau V para o caso em que $c_1 = 0.4999$	52
3.5	Coeficiente de transmissão <i>versus</i> altura do degrau V para o caso em que $c_1 = 0.48$	53
3.6	Coeficiente de transmissão <i>versus</i> altura do degrau V para o caso em que $c_1 = 0$	54
3.7	Solução gráfica de (3.74) para $ \omega_0 = 1.5$ para os três primeiros números quânticos. Linhas fortes para $f_H(\omega_1)$ e linha suave para $f_S(\omega_1)$.	55
3.8	Espectro positivo para bósons de spin 0 para os três primeiros números quânticos como uma função de $\omega_0/ \omega_1 $, para $\omega_1 = -1$ ($m = 1$).	56
3.9	Espectro positivo para bósons de spin 0 para os três primeiros números quânticos como uma função de $\omega_0/ \omega_1 $, para $\omega_1 = 0.5$ ($m = 1$).	57
3.10	Espectro positivo para bósons de spin 0 para os três primeiros números quânticos como uma função de $\omega_0/ \omega_1 $, para $\omega_1 = 2.5$ ($m = 1$).	58
3.11	Espectro positivo de bósons de spin 0 para os três primeiros números quânticos como uma função de ω_1/ω_0 , para $\omega_0 = 0.5$ ($m = 1$).	59
3.12	Espectro positivo de bósons de spin 0 para os três primeiros números quânticos como uma função de ω_1/ω_0 , para $\omega_0 = 2$ ($m = 1$).	60

Capítulo 1

Introdução

O formalismo de primeira ordem de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) [1]-[2] descreve partículas de spin 0 e spin 1 e tem sido utilizado na análise de interações relativísticas de hádrons com núcleos como uma alternativa para análise baseada nos formalismos de segunda ordem convencionais de Klein-Gordon e Proca. O ônus da equivalência entre os formalismos representou uma objeção à teoria de DKP por um longo tempo e somente recentemente foi mostrado que elas levam ao mesmo resultado no caso das interações vetoriais minimamente acopladas, sob a condição da correta interpretação dos componentes do espinor de DKP [3]-[4]. No entanto, a equivalência entre os formalismos de DKP e Proca já tinham um precedente [5]. A equivalência não é mantida se considerarmos correntes parcialmente conservadas [6] e o formalismo de DKP mostra ser melhor do que o formalismo de Klein-Gordon na análise dos decaimentos K_{l3} , na razão $\Gamma(\eta \rightarrow \gamma\gamma)/\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$, e nos deslocamentos de níveis e larguras em átomos piônicos [7]. Além disso, o formalismo de DKP goza de uma riqueza de acoplamentos incapazes de serem expressos nas teorias de Klein-Gordon e Proca. Um número de diferentes acoplamentos no formalismo de DKP, com acoplamentos escalar e vetorial em analogia com a fenomenologia de Dirac para o espalhamento de próton-núcleo, tem sido empregado no tratamento fenomenológico de espalhamentos elásticos méson-núcleo em médias energias com uma melhor concordância com os dados experimentais quando comparado aos formalismos de Klein-Gordon e Proca [8]-[13]. Por outro lado, a teoria de DKP experimentou uma nova retomada devido à descoberta de uma nova corrente vetorial conservada [3], [14]-[20], cujo componente temporal positivo-definido poderia ser um candidato a uma corrente de probabilidade, e como bônus uma esperança para evitar o paradoxo de Klein para os bósons [20]. No entanto, foi mostrado que a nova corrente proposta é um fiasco como uma corrente de probabilidade [21]. Um esforço para aliviar a situação dessa nova corrente foi feito em [22] mas em [23] foi mostrado ser indefensável. Na referência [23] também foi mostrado que o paradoxo de Klein pode existir na teoria de DKP com interações vetoriais minimamente acopladas. A teoria de DKP também experimentou um novo fôlego no contexto de aplicações em cromodinâmica quântica [24], dinâmica hamiltoniana covariante [25], espaço de fase relativístico [26], espaço-tempo curvo [27], abordagem causal [4], [28], tunelamento superluminal [16], modelo de Bohm [15], [17], [21], tunelamento temporal [18], matriz-S [29], invariância de Galileu em cinco dimensões [30], mecânica pseudoclássica [31], condensado de Bose-Einstein [32], campos magnéticos homogêneos [33], fase de Aharonov-Casher [34], potencial de Aharonov-Bohm [35], massa dependente do tempo e o potencial de grau vetorial [36], massa dependente do tempo e campos vetoriais dependentes do tempo [37], oscilador tensorial de DKP (acoplamento tensorial com um potencial linear) [38]-[44] e suas propriedades termodinâmicas [45], oscilador vetorial de DKP (acoplamento vetorial não-mínimo com um potencial quadrático [39] e acoplamentos vetoriais mínimo e não-mínimo com um potencial linear [41]), oscilador de sexto grau (acoplamento tensorial com um potencial linear

mais um cúbico) [46], potencial degrau [20], [47], [23], potencial vetorial de Woods-Saxon [48], potencial vetorial de Hulthen deformado [49], poço quadrado vetorial [50], potenciais vetoriais coulombianos [42], [44],[50]-[52] e degraus vetoriais não-mínimos [53] e [54].

O propósito do presente trabalho foi a investigação das propriedades da teoria de DKP com interações escalares e vetoriais. Mostramos que acoplamentos vetoriais não-mínimos têm sido usados imprópriamente na fenomenologia dos espalhamentos elásticos méson-núcleo [8]-[9], [11], [13]. Particularizando para o caso da interação vetorial não-mínima, abordamos a solução exata para o espalhamento em um potencial degrau e o confinamento em um potencial linear, neste último caso obtemos uma espécie de oscilador de DKP vetorial [55] e [56].

Capítulo 2

A equação de Duffin-Kemmer-Petiau

2.1 Propriedades Gerais

2.1.1 A equação de DKP e a álgebra das matrizes β^μ

A equação de DKP para um bóson livre é dada por [2] (com unidades em que $\hbar = c = 1$)

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (2.1)$$

onde as matrizes β^μ satisfazem a álgebra

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\lambda\nu} \beta^\mu \quad (2.2)$$

em que o tensor métrico é dado por $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. $g^{\mu\nu}$ apresenta as seguintes propriedades

$$g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} \quad (2.3)$$

$$(g^{\mu\nu})^2 = 1 \quad (2.4)$$

uma relação útil é obtida fazendo $\lambda = \nu = \mu$ em (2.2)

$$(\beta^\mu)^3 = \beta^\mu g^{\mu\mu} \quad (2.5)$$

O conjunto de matrizes η^μ que complementa as matrizes β^μ são definidas por

$$\eta^\mu \equiv 2\beta^\mu \beta^\mu - g^{\mu\mu} \quad (2.6)$$

onde $(\eta^\mu)^2 = 1$,

$$\begin{aligned} (\eta^\mu)^2 &= (2\beta^\mu \beta^\mu - g^{\mu\mu})(2\beta^\mu \beta^\mu - g^{\mu\mu}) \\ &= 4(\beta^\mu)^4 - 4(\beta^\mu)^2 g^{\mu\mu} + (g^{\mu\mu})^2 \\ &= 4\beta^\mu (\beta^\mu)^3 - 4(\beta^\mu)^2 g^{\mu\mu} + 1 \\ &= 4\beta^\mu \beta^\mu g^{\mu\mu} - 4(\beta^\mu)^2 g^{\mu\mu} + 1 \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

A comutatividade entre as matrizes β^μ e as matrizes η^μ pode ser determinada multiplicando (2.6) por β^λ à direita

$$\eta^\mu \beta^\lambda = 2(\beta^\mu)^2 \beta^\lambda - g^{\mu\mu} \beta^\lambda \quad (2.8)$$

Fazendo $\nu = \mu$ em (2.2) temos

$$(\beta^\mu)^2 \beta^\lambda + \beta^\lambda (\beta^\mu)^2 = g^{\mu\mu} \beta^\lambda + g^{\lambda\mu} \beta^\mu \quad (2.9)$$

substituindo (2.9) em (2.8)

$$\begin{aligned} \eta^\mu \beta^\lambda &= 2 [g^{\mu\mu} \beta^\lambda + g^{\lambda\mu} \beta^\mu - \beta^\lambda (\beta^\mu)^2] - g^{\mu\mu} \beta^\lambda \\ &= 2g^{\lambda\mu} \beta^\lambda - 2\beta^\lambda (\beta^\mu)^2 + g^{\mu\mu} \beta^\lambda \\ &= 2g^{\lambda\mu} \beta^\lambda - \beta^\lambda [2(\beta^\mu)^2 + g^{\mu\mu}] \\ &= 2g^{\lambda\mu} \beta^\lambda - \beta^\lambda \eta^\mu \end{aligned} \quad (2.10)$$

de forma que

$$\eta^\mu \beta^\lambda + \beta^\lambda \eta^\mu = 2g^{\lambda\mu} \beta^\lambda \quad (2.11)$$

ou seja,

$$\{\eta^\mu, \beta^\lambda\} = 2g^{\lambda\mu} \beta^\lambda \quad (2.12)$$

portanto

$$\{\eta^\mu, \beta^\lambda\} = 0, \quad \mu \neq \lambda \quad (2.13)$$

$$\{\eta^\mu, \beta^\lambda\} = 2g^{\mu\mu} \beta^\mu, \quad \mu = \lambda$$

Para o caso em que $\mu = \lambda$ teremos, multiplicando (2.6) por β^μ à direita

$$\begin{aligned} \eta^\mu \beta^\mu &= 2(\beta^\mu)^2 \beta^\mu - g^{\mu\mu} \beta^\mu \\ &= 2(\beta^\mu)^3 - g^{\mu\mu} \beta^\mu \\ &= \beta^\mu g^{\mu\mu} \end{aligned} \quad (2.14)$$

analogamente, multiplicando (2.6) por β^μ à esquerda

$$\beta^\mu \eta^\mu = \beta^\mu g^{\mu\mu} \quad (2.15)$$

subtraindo (2.15) de (2.14) temos

$$\eta^\mu \beta^\mu - \beta^\mu \eta^\mu = 0 \quad (2.16)$$

ou seja,

$$[\eta^\mu, \beta^\mu] = 0 \quad (2.17)$$

A relação de comutação entre os η^μ pode ser obtida diretamente, multiplicando (2.6) por η^ν à direita

$$\begin{aligned} \eta^\mu \eta^\nu &= \eta^\mu [2(\beta^\nu)^2 - g^{\nu\nu}] \\ &= 2\eta^\mu (\beta^\nu)^2 - g^{\nu\nu} \eta^\mu \\ &= 2(\eta^\mu \beta^\nu) \beta^\nu - g^{\nu\nu} \eta^\mu \\ &= 2(2\beta^\mu g^{\mu\nu} - \beta^\nu \eta^\mu) \beta^\nu - g^{\nu\nu} \eta^\mu \\ &= 4\beta^\mu \beta^\nu g^{\mu\nu} - 2\beta^\nu (\eta^\mu \beta^\nu) - g^{\nu\nu} \eta^\mu \\ &= 4\beta^\mu \beta^\nu g^{\mu\nu} - 2\beta^\nu (2\beta^\mu g^{\mu\nu} - \beta^\nu \eta^\mu) - g^{\nu\nu} \eta^\mu \\ &= 4\beta^\mu \beta^\nu g^{\mu\nu} - 4\beta^\nu \beta^\mu g^{\mu\nu} + 2\beta^\nu \beta^\nu \eta^\mu - g^{\nu\nu} \eta^\mu \\ &= 4g^{\mu\nu} (\beta^\mu \beta^\nu - \beta^\nu \beta^\mu) + (2\beta^\nu \beta^\nu - g^{\nu\nu}) \eta^\mu \\ &= 4g^{\mu\nu} [\beta^\mu, \beta^\nu] + \eta^\nu \eta^\mu \end{aligned} \quad (2.18)$$

de forma que

$$\eta^\mu \eta^\nu - \eta^\nu \eta^\mu = 4g^{\mu\nu} [\beta^\mu, \beta^\nu] \quad (2.20)$$

para o caso em que $\mu = \nu$ temos

$$[\eta^\mu, \eta^\nu] = 0 \quad (2.21)$$

As matrizes η^μ também são hermitianas, ou seja, $\eta^{\mu\dagger} = \eta^\mu$:

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\dagger} &= 2(\beta^\mu)^{2\dagger} - g^{\mu\mu\dagger} \\ &= 2(\beta^{\mu\dagger})^2 - g^{\mu\mu} \\ &= 2(g^{\mu\mu}\beta^\mu)^2 - g^{\mu\mu} \\ &= 2(g^{\mu\mu})^2(\beta^\mu)^2 - g^{\mu\mu} \\ &= 2(\beta^\mu)^2 - g^{\mu\mu} \\ &= \eta^\mu \end{aligned} \quad (2.22)$$

É possível determinar uma matriz D que atue sobre as matrizes β^μ e forneça seu conjugado hermitiano

$$D\beta^\mu D = \beta^{\mu\dagger} \quad (2.23)$$

em que D é tal que $D^2 = 1$. Desta forma

$$\begin{aligned} D\beta^\mu D &= \beta^{\mu\dagger} \\ &= g^{\mu\mu}\beta^\mu \end{aligned} \quad (2.24)$$

multiplicando (2.24) por D à direita temos

$$D\beta^\mu = g^{\mu\mu}\beta^\mu D \quad (2.25)$$

multiplicando (2.24) por D à esquerda temos

$$\beta^\mu D = g^{\mu\mu} D\beta^\mu \quad (2.26)$$

de forma que

$$[\beta^\mu, D] = g^{\mu\mu} [D, \beta^\mu] \quad (2.27)$$

ou seja,

$$(g^{\mu\mu} + 1) [D, \beta^\mu] = 0 \quad (2.28)$$

(2.28) deve ser válida para todo μ . Portanto

$$[D, \beta^\mu] = 0 \quad (2.29)$$

mas, de (2.17) temos que

$$\begin{aligned} \eta^\mu \beta^\mu &= \beta^\mu \eta^\mu \\ \eta^\mu D (D\beta^\mu) &= (\beta^\mu D) D\eta^\mu \end{aligned} \quad (2.30)$$

uma vez que $D^2 = 1$. Como $D\beta^\mu = \beta^\mu D$, temos

$$\beta^\mu D (D\eta^\mu - \eta^\mu D) = 0 \quad (2.31)$$

e concluímos que

$$[D, \eta^\mu] = 0 \quad (2.32)$$

Como, de (2.21), $[\eta^\mu, \eta^\nu] = 0$, D pode ser escolhida como

$$D = \eta^\mu \quad (2.33)$$

onde se verifica que

$$D^2 = (\eta^\mu)^2 = 1 \quad (2.34)$$

Com (2.23) temos que

$$\beta^{\mu\dagger} = \eta^\mu \beta^\mu \eta^\mu = g^{\mu\mu} \beta^\mu \quad (2.35)$$

multiplicando (2.35) por η^μ à esquerda

$$\begin{aligned} \beta^\mu \eta^\mu &= g^{\mu\mu} \eta^\mu \beta^\mu \\ &= g^{\mu\mu} \beta^\mu \eta^\mu \end{aligned} \quad (2.36)$$

multiplicando (2.36) por η^μ à direita

$$\beta^\mu = g^{\mu\mu} \beta^\mu \quad (2.37)$$

ou seja,

$$(1 - g^{\mu\mu}) \beta^\mu = 0 \quad (2.38)$$

que é satisfeita somente para o caso em que $\mu = 0$. Desta forma

$$\beta^{\mu\dagger} = \eta^0 \beta^\mu \eta^0 = g^{\mu\mu} \beta^\mu \quad (2.39)$$

Portanto, a matriz responsável pela conjugação hermitiana das matrizes β^μ é a matriz η^0 , ou seja, as matrizes β^μ são hermitianas com respeito a η^0 .

2.1.2 A equação de DKP conjugada

Aplicando o conjugado hermitiano sobre a equação de DKP (2.1) temos

$$\begin{aligned} [(i\beta^\mu \partial_\mu - m) \psi]^\dagger &= 0 \\ -i\partial_\mu \psi^\dagger \beta^{\mu\dagger} - m\psi^\dagger &= 0 \\ i\partial_\mu \psi^\dagger \eta^0 \beta^\mu \eta^0 + m\psi^\dagger &= 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

multiplicando (2.40) por η^0 à direita

$$\begin{aligned} i\partial_\mu \psi^\dagger \eta^0 \beta^\mu \eta^0 \eta^0 + m\psi^\dagger \eta^0 &= 0 \\ i\partial_\mu \psi^\dagger \eta^0 \beta^\mu + m\psi^\dagger \eta^0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

definindo o espinor adjunto $\bar{\psi}$

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \eta^0 \quad (2.42)$$

obtemos a equação de DKP conjugada

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu + m\bar{\psi} = 0 \quad (2.43)$$

2.1.3 A equação da continuidade na teoria de DKP

A equação da continuidade na teoria de DKP é obtida através do seguinte processo: multiplicando a equação de DKP (2.1) por $\bar{\psi}$ à esquerda

$$i\bar{\psi}\beta^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = 0 \quad (2.44)$$

e multiplicando a equação de DKP conjugada (2.43) por ψ à direita

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\beta^\mu\psi + m\bar{\psi}\psi = 0 \quad (2.45)$$

somando (2.44) e (2.45)

$$\bar{\psi}\beta^\mu\partial_\mu\psi + \partial_\mu\bar{\psi}\beta^\mu\psi = 0 \quad (2.46)$$

ou seja,

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\beta^\mu\psi) = 0 \quad (2.47)$$

desta forma é possível definir a densidade de quadricorrente¹

$$J^\mu \equiv \frac{1}{2}\bar{\psi}\beta^\mu\psi \quad (2.48)$$

onde

$$\begin{aligned} J^0 &= \frac{1}{2}\bar{\psi}\beta^0\psi \equiv \rho \\ J^i &\equiv \frac{1}{2}\bar{\psi}\beta^i\psi \end{aligned} \quad (2.49)$$

e a equação (2.47) se torna

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (2.50)$$

que possui a forma da equação da continuidade. No entanto, o componente temporal de J^μ (ou seja, J^0) não é positivo-definido, o que impede que J^0 seja interpretado como uma densidade de probabilidade. Todavia J^0 pode ser interpretado como uma *densidade de carga*. A carga não deve ser pensada necessariamente como uma carga elétrica, mas como uma carga generalizada que satisfaz uma lei de conservação aditiva, por assim dizer que a carga de um sistema é a soma das cargas de suas partes constituintes.

2.1.4 Condição de normalização e os valores esperados

A condição de normalização $\int d\tau J^0 = \pm 1$ é expressa na teoria de DKP como

$$\int d\tau \bar{\psi}\beta^0\psi = \pm 2 \quad (2.51)$$

em que o sinal positivo (negativo) deve ser usado para uma carga positiva (negativa). O valor esperado de qualquer observável $\mathcal{O}$ é dado por

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int d\tau \bar{\psi}\beta^0\mathcal{O}\psi}{\int d\tau \bar{\psi}\beta^0\psi} \quad (2.52)$$

onde $\mathcal{O}$ deve ser hermitiano com respeito a β^0 , ou seja, $(\beta^0\mathcal{O})^\dagger = \beta^0\mathcal{O}$, para assegurar que $\langle \mathcal{O} \rangle$ seja uma quantidade real.

¹O fator $\frac{1}{2}$ (sem implicações na lei de conservação) é necessário para que se obtenha uma densidade de quadricorrente em conformidade com aquela usada na teoria de Klein-Gordon e seu limite não-relativístico (ver e.g. [57]).

2.1.5 As representações irredutíveis da teoria de DKP

As representações da teoria de DKP são redutíveis e podem ser decompostas em três representações irredutíveis: uma representação de primeira ordem (trivial) sem significado físico, uma representação de quinta ordem que descreve partículas de spin 0 (também chamado de setor escalar da teoria de DKP) e uma representação de décima ordem representando partículas de spin 1 (ou setor vetorial).

O espinor de DKP apresenta um excesso de componentes e a teoria deve ser suplementada por uma equação que permita a eliminação dos componentes redundantes. Esta equação é obtida multiplicando a equação de DKP (2.1) por $1 - \beta^0 \beta^0$

$$\begin{aligned} (i\beta^\mu \partial_\mu - m) \psi &= 0 \\ (1 - \beta^0 \beta^0) (i\beta^\mu \partial_\mu - m) \psi &= 0 \\ (1 - \beta^0 \beta^0) (i\beta^0 \partial_0 + i\beta^i \partial_i - m) \psi &= 0 \\ i\beta^0 \partial_0 \psi + i\beta^i \partial_i \psi - m\psi - i(\beta^0)^3 \partial_0 \psi - i(\beta^0)^2 \beta^i \partial_i \psi + m(\beta^0)^2 \psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

de (2.2) temos, para o caso em que $\mu = \nu = \lambda = 0$

$$(\beta^0)^3 = \beta^0 \quad (2.54)$$

analogamente, para $\mu = \nu = 0$ e $\lambda = i$

$$(\beta^0)^2 \beta^i = \beta^i - \beta^i (\beta^0)^2 \quad (2.55)$$

e reescrevemos (2.53) como

$$\begin{aligned} i\beta^0 \partial_0 \psi + i\beta^i \partial_i \psi - m\psi - i\beta^0 \partial_0 \psi - i[\beta^i - \beta^i (\beta^0)^2] \partial_i \psi + m(\beta^0)^2 \psi &= 0 \\ i\beta^i (\beta^0)^2 \partial_i \psi + m(\beta^0)^2 \psi - m\psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

ou seja,

$$i\beta^i \beta^0 \beta^0 \partial_i \psi = m(1 - \beta^0 \beta^0) \psi \quad (2.57)$$

A equação (2.57) expressa três (quatro) componentes do espinor pelos outros dois (seis) componentes e suas derivadas espaciais no setor escalar (vetorial) de forma que os componentes supérfluos desaparecem e restam somente os componentes físicos da teoria de DKP. As equações de Klein-Gordon e Proca são obtidas selecionando os setores de spin 0 e spin 1, respectivamente, da teoria de DKP para um bóson livre.

2.1.6 Uma representação para as matrizes β^μ

No estudo da teoria de DKP utilizaremos uma representação em que as matrizes β^μ são reais.

Uma representação para as matrizes β^μ do setor escalar pode ser escrita como [51]

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \theta & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \rho_i \\ -\rho_i^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.58a)$$

onde

$$\begin{aligned}\theta &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \rho_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \rho_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \rho_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.59}$$

em que $\bar{0}$, $\tilde{0}$ e $\mathbf{0}$ são 2×3 , 2×2 e 3×3 matrizes nulas, respectivamente, enquanto o sobrescrito T designa a matriz transposta.

Uma representação matricial para o setor vetorial é dada por [50]

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \tilde{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{0}^T & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -is_i \\ -e_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & -is_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\tag{2.60}$$

onde s_i são as matrizes 3×3 em que $(s_i)_{jk} = -i\varepsilon_{ijk}$, e_i são as matrizes 1×3 em que $(e_i)_{1j} = \delta_{ij}$ e $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, enquanto $\mathbf{I}$ e $\mathbf{0}$ designam as matrizes 3×3 identidade e nula, respectivamente.

2.1.7 O operador projeção nos setores de spin 0 e spin 1 da teoria de DKP

Do estudo *das representações irredutíveis da teoria de DKP*, foi observado que o espinor de DKP apresenta um excesso de componentes e que o uso da equação (2.57) exclui tais componentes supérfluos do espinor, restando apenas seus componentes físicos.

Para o setor de spin 0 da teoria de DKP, existe o operador projeção P que, além de selecionar o setor escalar da teoria de DKP, provê apenas o componente físico do espinor quando aplicado a ψ . De maneira análoga, para o setor de spin 1 há o operador R^μ que seleciona o setor vetorial da teoria e dispõe os componentes físicos do espinor quando aplicado a ψ .

Aplicando o operador P à equação de DKP (2.1) temos

$$iP\beta^\mu\partial_\mu\psi - mP\psi = 0\tag{2.61}$$

definindo

$$P\beta^\mu = P^\mu\tag{2.62}$$

reescrevemos (2.61) como

$$i\partial_\mu P^\mu\psi - mP\psi = 0\tag{2.63}$$

Aplicando P^ν à equação de DKP (2.1)

$$iP^\nu\beta^\mu\partial_\mu\psi - mP^\nu\psi = 0\tag{2.64}$$

como $P^\nu\beta^\mu = P\beta^\nu\beta^\mu$, temos, da álgebra de DKP (2.2) e fazendo $\lambda = \mu$

$$\begin{aligned}\beta^\mu\beta^\nu\beta^\mu &= g^{\mu\nu}\beta^\mu \\ (\beta^\mu\beta^\nu - g^{\mu\nu})\beta^\mu &= 0\end{aligned}\tag{2.65}$$

portanto

$$\beta^\mu \beta^\nu = g^{\mu\nu} \quad (2.66)$$

e (2.64) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} ig^{\mu\nu} \partial_\mu P\psi - mP^\nu\psi &= 0 \\ i\partial^\nu P\psi - mP^\nu\psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

ou ainda

$$P^\nu\psi = \frac{i}{m} \partial^\nu P\psi \quad (2.68)$$

substituindo (2.68) em (2.63)

$$i\partial_\mu \left(\frac{i}{m} \partial^\mu P\psi \right) - mP\psi = 0 \quad (2.69)$$

logo

$$\partial_\mu \partial^\mu (P\psi) + m^2 (P\psi) = 0 \quad (2.70)$$

denominando $P\psi \equiv \psi_{KG}$, podemos reescrever (2.70) como

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \psi_{KG} = 0 \quad (2.71)$$

que é a equação de Klein-Gordon para um bóson livre.

O operador projeção P deve obedecer a $P^2 = P$ e $P^\dagger = P$, de forma que, na representação das matrizes β^μ dadas por (2.58a), P é escrito como [64]

$$P = \frac{1}{3} (\beta^\mu \beta_\mu - 1) = \text{diag}(1, 0, 0, 0, 0) \quad (2.72)$$

assim, ao aplicarmos P ao espinor ψ obtemos

$$P\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

donde é possível inferir que o componente físico do espinor ψ para o setor escalar é dado por ψ_1 , de forma que os quatro componentes restantes do espinor (ψ_2, ψ_3, ψ_4 e ψ_5) podem ser escritos em termos de ψ_1 . Portanto, quando o operador projeção P é aplicado à equação de DKP livre, imediatamente o setor de spin 0 da teoria é selecionado, fornecendo apenas o componente físico do espinor, que na presente representação é dado por ψ_1 , que obedece à equação de Klein-Gordon livre.

Para o setor vetorial, R^μ é escrito como [63]

$$R^\mu = (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 (\beta^\mu \beta^0 - g^{\mu 0}) \quad (2.74)$$

definindo

$$R^{\mu\nu} = R^\mu \beta^\nu$$

temos as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} &= -R^{\nu\mu} \\ R^{\mu\nu} \beta^\alpha &= R^\mu g^{\nu\alpha} - R^\nu g^{\mu\alpha} \end{aligned} \quad (2.75)$$

obtidas através de

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} &= (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 (\beta^\mu \beta^0 - g^{\mu 0}) \beta^\nu \\ &= (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 (\beta^\mu \beta^0 \beta^\nu - g^{\mu 0} \beta^\nu) \end{aligned} \quad (2.76)$$

Da álgebra (2.2), temos

$$\beta^\mu \beta^0 \beta^\nu = -\beta^\nu \beta^0 \beta^\mu + g^{\mu 0} \beta^\nu + g^{\nu 0} \beta^\mu \quad (2.77)$$

e (2.76) se torna

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} &= (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 (-\beta^\nu \beta^0 \beta^\mu + g^{\mu 0} \beta^\nu + g^{\nu 0} \beta^\mu - g^{\mu 0} \beta^\nu) \\ &= (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 (-\beta^\nu \beta^0 \beta^\mu + g^{\mu 0} \beta^\nu + g^{\nu 0} \beta^\mu - g^{\mu 0} \beta^\nu) \\ &= -(\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 (\beta^\nu \beta^0 - g^{\nu 0}) \beta^\mu \\ &= -R^{\nu\mu} \end{aligned} \quad (2.78)$$

portanto, $R^{\mu\nu} = -R^{\nu\mu}$. A segunda propriedade é obtida através de

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} \beta^\alpha &= R^\mu \beta^\nu \beta^\alpha \\ &= (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 (\beta^\mu \beta^0 \beta^\nu \beta^\alpha - g^{\mu 0} \beta^\nu \beta^\alpha) \end{aligned} \quad (2.79)$$

Da álgebra (2.2), temos

$$\beta^0 \beta^\nu \beta^\alpha = -\beta^\alpha \beta^\nu \beta^0 + g^{0\nu} \beta^\alpha + g^{\alpha\nu} \beta^0 \quad (2.80)$$

logo

$$R^{\mu\nu} \beta^\alpha = (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 (-\beta^\alpha \beta^\nu \beta^0 + g^{0\nu} \beta^\alpha + g^{\alpha\nu} \beta^0 - g^{\mu 0} \beta^\nu \beta^\alpha) \quad (2.81)$$

como, de (2.66), $\beta^\mu \beta^0 = g^{\mu 0}$, analogamente temos que $\beta^\mu \beta^\alpha = g^{\mu\alpha}$. De (2.3), $g^{0\nu} = g^{\nu 0}$, temos

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} \beta^\alpha &= (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 (-g^{\mu\alpha} \beta^\nu \beta^0 + g^{\nu 0} g^{\mu\alpha} + g^{\nu\alpha} \beta^\mu \beta^0 - g^{\mu 0} g^{\nu\alpha}) \\ &= (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 (\beta^\mu \beta^0 - g^{\mu 0}) g^{\nu\alpha} - (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 (\beta^\nu \beta^0 - g^{\nu 0}) g^{\mu\alpha} \\ &= R^\mu g^{\nu\alpha} - R^\nu g^{\mu\alpha} \end{aligned} \quad (2.82)$$

portanto, $R^{\mu\nu} \beta^\alpha = R^\mu g^{\nu\alpha} - R^\nu g^{\mu\alpha}$.

Aplicando R^μ à equação de DKP (2.1)

$$\begin{aligned} iR^\mu \beta^\nu \partial_\nu \psi - mR^\mu \psi &= 0 \\ i\partial_\nu R^{\mu\nu} \psi - mR^\mu \psi &= 0 \\ \partial_\nu R^{\mu\nu} \psi &= -imR^\mu \psi \end{aligned} \quad (2.83)$$

aplicando $R^{\mu\nu}$ à equação de DKP (2.1) temos

$$\begin{aligned} iR^{\mu\nu} \beta^\alpha \partial_\alpha \psi - mR^{\mu\nu} \psi &= 0 \\ i\partial_\alpha (R^\mu g^{\nu\alpha} - R^\nu g^{\mu\alpha}) \psi - mR^{\mu\nu} \psi &= 0 \\ \partial_\alpha g^{\nu\alpha} R^\mu \psi - \partial_\alpha g^{\mu\alpha} R^\nu \psi &= -imR^{\mu\nu} \psi \\ \partial^\nu R^\mu \psi - \partial^\mu R^\nu \psi &= -imR^{\mu\nu} \psi \end{aligned} \quad (2.84)$$

definindo

$$U^{\mu\nu} = \partial^\mu R^\nu \psi - \partial^\nu R^\mu \psi \quad (2.85)$$

reescrevemos (2.84) como

$$\begin{aligned} U^{\nu\mu} &= -imR^{\mu\nu}\psi \\ R^{\mu\nu}\psi &= \frac{i}{m}U^{\nu\mu} \end{aligned} \quad (2.86)$$

substituindo (2.86) em (2.83)

$$\begin{aligned} \partial_\nu \left(\frac{i}{m}U^{\nu\mu} \right) &= -imR^\mu\psi \\ \partial_\nu U^{\nu\mu} &= -m^2 R^\mu\psi \end{aligned} \quad (2.87)$$

temos, portanto

$$\begin{cases} U^{\mu\nu} = \partial^\mu R^\nu\psi - \partial^\nu R^\mu\psi \\ \partial_\nu U^{\nu\mu} = -m^2 R^\mu\psi \end{cases} \quad (2.88)$$

que são as equações de Proca para um bóson livre. Combinando as equações de Proca temos que

$$\begin{aligned} \partial_\nu (\partial^\nu R^\mu\psi - \partial^\mu R^\nu\psi) &= -m^2 R^\mu\psi \\ \partial_\nu \partial^\nu R^\mu\psi - \partial_\nu \partial^\mu R^\nu\psi + m^2 R^\mu\psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.89)$$

aplicando ∂_μ à (2.89) obtemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\nu \partial^\nu R^\mu\psi - \partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu R^\nu\psi + m^2 \partial_\mu R^\mu\psi &= 0 \\ \partial_\nu \partial^\nu \partial_\mu R^\mu\psi - \partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu R^\nu\psi + m^2 \partial_\mu R^\mu\psi &= 0 \\ m^2 \partial_\mu R^\mu\psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.90)$$

portanto

$$\partial_\mu R^\mu\psi = 0 \quad (2.91)$$

aplicando (2.91) em (2.89)

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)(R^\mu\psi) = 0 \quad (2.92)$$

Portanto, (2.92) satisfaz uma equação do tipo Klein-Gordon para $R^\mu\psi$ com um vínculo dado por (2.91).

Aplicando R^μ ao espinor ψ , na representação das matrizes β^μ dadas por (2.60), temos

$$R^0\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R^1\psi = \begin{pmatrix} -\psi_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R^2\psi = \begin{pmatrix} -\psi_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R^3\psi = \begin{pmatrix} -\psi_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

Logo, os componentes ψ_1, ψ_2, ψ_3 e ψ_4 são os componentes físicos do espinor do setor de spin 1 da teoria de DKP. Desta forma, estes quatro primeiros componentes do espinor (que são os componentes físicos) obedecem a uma equação do tipo Klein-Gordon livre, ao passo que os outros seis componentes restantes ($\psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9$ e ψ_{10}) são escritos em termos dos quatro primeiros componentes do espinor.

2.1.8 O limite não-relativístico da teoria de DKP livre

O espinor físico da equação de DKP livre para o setor escalar obedece à equação de Klein-Gordon. Consequentemente, o limite não-relativístico da equação de Klein-Gordon resultará no limite não-relativístico da teoria de DKP para o setor escalar. Com o *Ansatz*

$$\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}) \exp(-imt) \quad (2.94)$$

e com o fato de que no limite não-relativístico a energia total da partícula E é muito próxima da energia de repouso m , é possível definir

$$\varepsilon = E - m \quad (2.95)$$

de forma que a energia ε é não-relativística, ou seja, $\varepsilon \ll m$. Portanto,

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} \approx \varepsilon \varphi \ll m \varphi \quad (2.96)$$

Substituindo o *Ansatz* (2.94) em (2.71)

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \psi + m^2 \psi &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi + m^2 \psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.97)$$

com as aproximações

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} e^{-imt} - im \varphi e^{-imt} \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - im \varphi \right) e^{-imt} \\ &\approx -im \varphi e^{-imt} \end{aligned} \quad (2.98)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} e^{-imt} - im \frac{\partial \varphi}{\partial t} e^{-imt} - im \frac{\partial \varphi}{\partial t} e^{-imt} - m^2 \varphi e^{-imt} \\ &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2im \frac{\partial \varphi}{\partial t} - m^2 \varphi \right) e^{-imt} \\ &\approx -2im \frac{\partial \varphi}{\partial t} e^{-imt} - m^2 \varphi e^{-imt} \end{aligned} \quad (2.99)$$

temos que (2.97) pode ser reescrita como

$$-2im \frac{\partial \varphi}{\partial t} e^{-imt} - m^2 \varphi e^{-imt} - \nabla^2 \varphi e^{-imt} + m^2 \varphi e^{-imt} = 0 \quad (2.100)$$

Portanto,

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 \varphi = 0 \quad (2.101)$$

que é a equação de Schrödinger livre.

Para o setor de spin 1 da teoria de DKP, o limite não-relativístico de (2.92) resulta em uma equação de Schrödinger semelhante a (2.101); todavia, os vínculos dados por (2.91) permanecem os mesmos e a equação de Proca se reduz à equação de Schrödinger livre mais os seus vínculos quando levada ao limite não-relativístico.

2.1.9 As interações na teoria de DKP

A equação de DKP com a interação mais geral possível é escrita como

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m - V)\psi = 0 \quad (2.102)$$

Tal como no caso da teoria de Dirac, a matriz V pode ser escrita em termos de estruturas que exibem um comportamento bem definido segundo as transformações de Lorentz. Por causa da maior dimensão das matrizes β^μ , comparada com as matrizes de Dirac, podemos esperar um número maior de estruturas de Lorentz possíveis. Para o setor escalar, os acoplamentos são constituídos de dois escalares, dois vetores e dois tensores [64], ao passo que para o setor vetorial V se apresenta como dois escalares, dois vetores, um pseudoescalar, dois pseudovetores e oito termos tensoriais [59]. Os termos tensoriais são evitados em aplicações porque fornecem efeitos não-causais [64]-[59]. Na presença de interações, a equação de DKP conjugada se torna

$$\begin{aligned} (i\beta^\mu \partial_\mu \psi - m\psi - V\psi)^\dagger &= 0 \\ -i\partial_\mu \psi^\dagger \beta^\mu - m\psi^\dagger - \psi^\dagger V^\dagger &= 0 \\ i\partial_\mu \psi^\dagger \eta^0 \beta^\mu \eta^0 + m\psi^\dagger + \psi^\dagger V^\dagger &= 0 \\ i\partial_\mu \psi^\dagger \eta^0 \beta^\mu \eta^0 \eta^0 + m\psi^\dagger \eta^0 + \psi^\dagger \eta^0 \eta^0 V^\dagger \eta^0 &= 0 \\ i\partial_\mu \psi^\dagger \eta^0 \beta^\mu + m\psi^\dagger \eta^0 + \psi^\dagger \eta^0 \eta^0 V^\dagger \eta^0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.103)$$

como $\psi^\dagger \eta^0 = \bar{\psi}$ temos que

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu + m\bar{\psi} + \bar{\psi} \eta^0 V^\dagger \eta^0 = 0 \quad (2.104)$$

A equação da continuidade na teoria de DKP com interações gerais é obtida de maneira análoga ao caso livre, multiplicando (2.102) por $\bar{\psi}$ à esquerda, (2.104) por ψ à direita e somando ambas as equações resultantes, obtendo

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu \psi + \bar{\psi} (\eta^0 V^\dagger \eta^0 - V) \psi = 0 \quad (2.105)$$

mas $J^\mu \equiv \frac{1}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \psi$; logo

$$2i\partial_\mu J^\mu + \bar{\psi} (\eta^0 V^\dagger \eta^0 - V) \psi = 0 \quad (2.106)$$

que pode ser reescrita como

$$\partial_\mu J^\mu + \frac{i}{2} \bar{\psi} (V - \eta^0 V^\dagger \eta^0) \psi = 0 \quad (2.107)$$

e a quadricorrente será conservada apenas quando V for hermitiano com respeito a η^0 .

Ressaltando que todas as funções potenciais a serem tratadas neste estudo são reais, consideraremos os acoplamentos escalar tipo 1 ($V_s^{(1)}$), escalar tipo 2 ($V_s^{(2)}$), vetorial mínimo ($A_\mu^{(1)}$) e vetorial não-mínimo ($A_\mu^{(2)}$) para os setores de spin 0 e spin 1 da teoria de DKP, de forma que a matriz V de (2.102) é escrita como

$$V = V_s^{(1)} + PV_s^{(2)} + \beta^\mu A_\mu^{(1)} + i[P, \beta^\mu] A_\mu^{(2)} \quad (2.108)$$

e a equação (2.102) se torna, portanto

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m - V_s^{(1)} - PV_s^{(2)} - \beta^\mu A_\mu^{(1)} - i[P, \beta^\mu] A_\mu^{(2)})\psi = 0 \quad (2.109)$$

onde P é tal que $\bar{\psi} P \psi$ é invariante de Lorentz e coincide com (2.72) para o setor escalar da teoria de DKP. Para o setor vetorial, contudo, P é dado por

$$P = (\beta^\mu \beta_\mu - 2) = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (2.110)$$

2.1.10 A equivalência entre a teoria de DKP e as equações de Klein-Gordon e Proca para o acoplamento vetorial mínimo

Do estudo do *operador projeção nos setores de spin 0 e spin 1 da teoria de DKP* foi observado que os espinores físicos da teoria de DKP livre obedecem à equação de Klein-Gordon no setor escalar e à equação de Proca no setor vetorial da teoria. Todavia, esta correspondência também ocorre para o caso do acoplamento vetorial mínimo [65] nos setores escalar e vetorial da teoria de DKP, e somente para este tipo de acoplamento.

A equação de DKP com acoplamento vetorial mínimo é escrita como

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m - \beta^\mu A_\mu^{(1)})\psi = 0 \quad (2.111)$$

ou ainda

$$i\beta^\mu (\partial_\mu + iA_\mu^{(1)})\psi - m\psi = 0 \quad (2.112)$$

reescrevendo o termo $\partial_\mu + iA_\mu^{(1)}$ como a derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu^{(1)} \quad (2.113)$$

obtemos

$$i\beta^\mu D_\mu \psi - m\psi = 0 \quad (2.114)$$

Aplicando o operador projeção P à equação (2.114)

$$iP\beta^\mu D_\mu \psi - mP\psi = 0 \quad (2.115)$$

como $P\beta^\mu = P^\mu$

$$iD_\mu P^\mu \psi - mP\psi = 0 \quad (2.116)$$

Aplicando P^ν à equação (2.114)

$$iP^\nu \beta^\mu D_\mu \psi - mP^\nu \psi = 0 \quad (2.117)$$

como $P^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} P$

$$\begin{aligned} ig^{\mu\nu} D_\mu P\psi - mP^\nu \psi &= 0 \\ iD^\nu P\psi - mP^\nu \psi &= 0 \end{aligned}$$

assim,

$$P^\nu \psi = \frac{i}{m} D^\nu P\psi \quad (2.118)$$

Substituindo (2.118) em (2.116) temos

$$iD_\mu \left(\frac{i}{m} D^\mu P\psi \right) - mP\psi = 0 \quad (2.119)$$

logo

$$(D_\mu D^\mu + m^2)(P\psi) = 0 \quad (2.120)$$

Portanto, temos que o componente físico do espinor obedece à equação de Klein-Gordon minimamente acoplada, em analogia ao caso do bóson escalar livre.

Para o setor vetorial, aplicamos R^ν à equação (2.114), obtendo

$$iR^\nu \beta^\mu D_\mu \psi - mR^\nu \psi = 0 \quad (2.121)$$

como $R^\nu \beta^\mu = R^{\nu\mu}$

$$\begin{aligned} iR^{\nu\mu}D_\mu\psi - mR^\nu\psi &= 0 \\ D_\mu(R^{\nu\mu}\psi) + imR^\nu\psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.122)$$

Aplicando $R^{\nu\mu}$ em (2.114)

$$iR^{\nu\mu}\beta^\alpha D_\alpha\psi - mR^{\nu\mu}\psi = 0 \quad (2.123)$$

como $R^{\nu\mu}\beta^\alpha = R^\nu g^{\mu\alpha} - R^\mu g^{\nu\alpha}$

$$\begin{aligned} iD_\alpha(R^\nu g^{\mu\alpha} - R^\mu g^{\nu\alpha})\psi - mR^{\nu\mu}\psi &= 0 \\ iD^\mu R^\nu\psi - iD^\nu R^\mu\psi - mR^{\nu\mu}\psi &= 0 \\ R^{\nu\mu}\psi &= -\frac{i}{m}(D^\nu R^\mu\psi - D^\mu R^\nu\psi) \end{aligned} \quad (2.124)$$

definindo $U^{\nu\mu} = D^\nu R^\mu\psi - D^\mu R^\nu\psi$

$$R^{\nu\mu}\psi = -\frac{i}{m}U^{\nu\mu} \quad (2.125)$$

substituindo (2.125) em (2.122) temos

$$D_\mu U^{\mu\nu} + m^2 R^\nu\psi = 0 \quad (2.126)$$

que é a equação de Proca minimamente acoplada.

2.1.11 A equação de DKP independente do tempo

Se o potencial geral V é independente do tempo, o *Ansatz* $\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) \exp(-iEt)$ pode ser aplicado à equação de DKP (2.102)

$$\begin{aligned} i\beta^0\partial_0\psi + i\beta^i\partial_i\psi - m\psi - V\psi &= 0 \\ i\beta^0\partial_0(\phi e^{-iEt}) + i\beta^i\partial_i(\phi e^{-iEt}) - m\phi e^{-iEt} - V\phi e^{-iEt} &= 0 \\ i\beta^0\phi\partial_0 e^{-iEt} + i\beta^i e^{-iEt}\partial_i\phi - m\phi e^{-iEt} - V\phi e^{-iEt} &= 0 \\ \beta^0 E e^{-iEt}\phi + i\beta^i e^{-iEt}\partial_i\phi - m\phi e^{-iEt} - V\phi e^{-iEt} &= 0 \end{aligned} \quad (2.127)$$

que pode ser reescrita como

$$\beta^0 E\phi + i\beta^i\partial_i\phi - m\phi - V\phi = 0 \quad (2.128)$$

com os acoplamentos escalar tipos 1 e 2 e acoplamentos vetoriais mínimo e não-mínimo (2.128) se torna

$$\beta^0 E\phi + i\beta^i\partial_i\phi - m\phi - \left(V_s^{(1)} + PV_s^{(2)} + \beta^0 A_0^{(1)} + \beta^i A_i^{(1)} + i[P, \beta^\mu]A_\mu^{(2)}\right)\phi = 0 \quad (2.129)$$

e a equação de DKP independente do tempo com as interações escalares e vetoriais é, portanto

$$\left\{\beta^0 \left(E - A_0^{(1)}\right) + i\beta^i \left(\partial_i + iA_i^{(1)}\right) - \left(m + V_s^{(1)} + PV_s^{(2)} + i[P, \beta^\mu]A_\mu^{(2)}\right)\right\}\phi = 0 \quad (2.130)$$

com a densidade de quadricorrente J^μ dada por

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{1}{2}\bar{\psi}\beta^\mu\psi \\ &= \frac{1}{2}\bar{\phi}e^{+iEt}\beta^\mu\phi e^{-iEt} \\ &= \frac{1}{2}\bar{\phi}\beta^\mu\phi \end{aligned} \quad (2.131)$$

Como (2.131) não depende do tempo, $\phi(\vec{r})$ descreve um estado estacionário.

2.1.12 Ortonormalidade na teoria de DKP

A equação (2.130) para o par característico (E_k, ϕ_k) pode ser escrita como

$$\left(E_k - A_0^{(1)}\right) \beta^0 \phi_k + i \left(\vec{\partial}_i + i A_i^{(1)}\right) \beta^i \phi_k - m \phi_k - i A_\mu^{(2)} [P, \beta^\mu] \phi_k = 0 \quad (2.132)$$

e sua forma adjunta, pela mudança de k por k' , como

$$\left(E_{k'} - A_0^{(1)}\right) \bar{\phi}_{k'} \beta^0 - i \bar{\phi}_{k'} \beta^i \eta^0 \left(\overleftarrow{\partial}_i - i A_i^{(1)}\right) - m \bar{\phi}_{k'} \eta^0 + i A_\mu^{(2)} \bar{\phi}_{k'} \eta^0 [P, \beta^\mu]^\dagger = 0 \quad (2.133)$$

Multiplicando (2.132) por $\bar{\phi}_{k'}$ à esquerda e (2.133) por $\eta^0 \phi_k$ à direita temos

$$\left(E_k - A_0^{(1)}\right) \bar{\phi}_{k'} \beta^0 \phi_k + i \bar{\phi}_{k'} \beta^i \left(\vec{\partial}_i + i A_i^{(1)}\right) \phi_k - m \bar{\phi}_{k'} \phi_k - i A_\mu^{(2)} \bar{\phi}_{k'} [P, \beta^\mu] \phi_k = 0 \quad (2.134)$$

e

$$\left(E_k - A_0^{(1)}\right) \bar{\phi}_{k'} \beta^0 \phi_k - i \bar{\phi}_{k'} \beta^i \left(\overleftarrow{\partial}_i - i A_i^{(1)}\right) \phi_k - m \bar{\phi}_{k'} \phi_k + i A_\mu^{(2)} \bar{\phi}_{k'} \eta^0 [P, \beta^\mu]^\dagger \eta^0 \phi_k = 0 \quad (2.135)$$

respectivamente. Subtraindo (2.135) de (2.134) e considerando que os espinores obedecem a condições de contorno em que

$$\int d\tau \partial_i (\bar{\phi}_k \beta^i \phi_{k'}) = 0 \quad (2.136)$$

temos

$$(E_k - E_{k'}) \int d\tau \bar{\phi}_k \beta^0 \phi_{k'} = 0 \quad (2.137)$$

A equação (2.137) é um argumento de ortogonalidade aplicado à equação de DKP. Quaisquer dois estados estacionários com energias distintas e sujeitas a condições de contorno adequadas são ortogonais se

$$\int d\tau \bar{\phi}_k \beta^0 \phi_{k'} = 0, \quad \text{para } E_k \neq E_{k'} \quad (2.138)$$

E assim, de acordo com (2.51), os espinores ϕ_k e $\phi_{k'}$ serão ditos ortonormais se

$$\int d\tau \bar{\phi}_k \beta^0 \phi_{k'} = \pm 2 \delta_{E_k E_{k'}} \quad (2.139)$$

for satisfeita.

É importante observar que a equação de DKP independente do tempo é invariante sob deslocamento simultâneo de E e $A_0^{(1)}$, ou seja, invariante para $E \rightarrow E + \text{const}$ e $A_0^{(1)} \rightarrow A_0^{(1)} + \text{const}$, como na equação de Schrödinger, mas esta invariância não é mantida para o caso com E e $A_0^{(2)}$. Como $A_0^{(1)}$ e $A_0^{(2)}$ são os componentes temporais dos acoplamentos vetoriais mínimo e não-mínimo, respectivamente, é notório o comportamento anômalo do acoplamento vetorial não-mínimo quando comparado ao acoplamento vetorial mínimo.

2.1.13 Simetria PCT na teoria de DKP

Neste estudo será estabelecida a simetria PCT da equação de DKP com os acoplamentos escalares e vetoriais, bem como serão definidos os operadores paridade, conjugação de carga e reversão temporal da presente teoria.

A paridade é determinada através da aplicação do operador paridade $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}P_0$, em que P_0 atua sobre as funções efetuando a transformação $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$, procedendo como um operador linear:

$$P_0 [\alpha f(\vec{r}, t) + \beta g(\vec{r}, t)] P_0^{-1} = \alpha f(-\vec{r}, t) + \beta g(-\vec{r}, t) \quad (2.140)$$

O operador paridade, quando aplicado sobre o espinor, fornece

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}\psi(\vec{r}, t) &= \mathcal{P}P_0\psi(\vec{r}, t) \\ &= \mathcal{P}\psi(-\vec{r}, t) \\ &\equiv \psi_P(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.141)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}} [\hat{\mathcal{P}}\psi(\vec{r}, t)] &= \hat{\mathcal{P}} [\mathcal{P}\psi(-\vec{r}, t)] \\ &= \mathcal{P} [\hat{\mathcal{P}}\psi(-\vec{r}, t)] \\ &= \mathcal{P}^2\psi(\vec{r}, t) \\ &= \psi(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.142)$$

portanto, a matriz $\mathcal{P}$ deve ser tal que $\mathcal{P}^2 = 1$.

Aplicando $\hat{\mathcal{P}}$ à equação de DKP (2.109)

$$\begin{aligned} &\left\{ i\hat{\mathcal{P}}\beta^0\hat{\mathcal{P}}^{-1}\partial_0 + i\hat{\mathcal{P}}\beta^i\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}\partial_i\hat{\mathcal{P}}^{-1} - m - \hat{\mathcal{P}}V_s^{(1)}\hat{\mathcal{P}}^{-1} \right. \\ &\quad - \hat{\mathcal{P}}P\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}V_s^{(2)}\hat{\mathcal{P}}^{-1} - \hat{\mathcal{P}}\beta^0\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}A_0^{(1)}\hat{\mathcal{P}}^{-1} - \hat{\mathcal{P}}\beta^i\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}A_i^{(1)}\hat{\mathcal{P}}^{-1} \\ &\quad \left. - i\hat{\mathcal{P}}[P, \beta^0]\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}A_0^{(2)}\hat{\mathcal{P}}^{-1} - i\hat{\mathcal{P}}[P, \beta^i]\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}A_i^{(2)}\hat{\mathcal{P}}^{-1} \right\} \hat{\mathcal{P}}\psi(\vec{r}, t) = 0 \end{aligned} \quad (2.143)$$

obtemos

$$\begin{aligned} &\left\{ i\mathcal{P}\beta^0\mathcal{P}^{-1}\partial_0 - i\mathcal{P}\beta^i\mathcal{P}^{-1}\partial_i - m - P_0V_s^{(1)}P_0^{-1} \right. \\ &\quad - \mathcal{P}P\mathcal{P}^{-1}P_0V_s^{(2)}P_0^{-1} - \mathcal{P}\beta^0\mathcal{P}^{-1}P_0A_0^{(1)}P_0^{-1} - \mathcal{P}\beta^i\mathcal{P}^{-1}P_0A_i^{(1)}P_0^{-1} \\ &\quad \left. - i\mathcal{P}[P, \beta^0]\mathcal{P}^{-1}P_0A_0^{(2)}P_0^{-1} - i\mathcal{P}[P, \beta^i]\mathcal{P}^{-1}P_0A_i^{(2)}P_0^{-1} \right\} \psi_P(\vec{r}, t) = 0 \end{aligned} \quad (2.144)$$

Comparando as equações (2.109) e (2.144), de maneira a tornar (2.144) covariante, devemos ter

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\beta^0\mathcal{P}^{-1} &= \beta^0 \\ \mathcal{P}\beta^i\mathcal{P}^{-1} &= -\beta^i \end{aligned} \quad (2.145)$$

que é satisfeita com $\mathcal{P} = \exp(i\delta_P)\eta^0$. Como $\mathcal{P}^2 = 1$, o fator de fase $\exp(i\delta_P)$ pode assumir os valores 0 ou $\frac{\pi}{2}$, donde podemos inferir que

$$\mathcal{P}^\dagger = \exp(-i\delta_P)\eta^{0\dagger} = \exp(-i\delta_P)\eta^0 \quad (2.146)$$

de forma que $\mathcal{P}$ é unitária, i.e.,

$$\mathcal{P}\mathcal{P}^\dagger = 1 \quad (2.147)$$

Como a matriz P comuta com η^μ , podemos assegurar que, sob paridade, as relações

$$\begin{aligned} \mathcal{P}P\mathcal{P}^{-1} &= P \\ \mathcal{P}[P, \beta^0]\mathcal{P}^{-1} &= [P, \beta^0] \\ \mathcal{P}[P, \beta^i]\mathcal{P}^{-1} &= -[P, \beta^i] \end{aligned} \quad (2.148)$$

são obedecidas. As funções potenciais devem se comportar sob paridade como

$$\begin{aligned}
P_0 V_s^{(1)}(\vec{r}, t) P_0^{-1} &= V_s^{(1)}(-\vec{r}, t) \\
P_0 V_s^{(2)}(\vec{r}, t) P_0^{-1} &= V_s^{(2)}(-\vec{r}, t) \\
P_0 A_0^{(1)}(\vec{r}, t) P_0^{-1} &= A_0^{(1)}(-\vec{r}, t) \\
P_0 A_i^{(1)}(\vec{r}, t) P_0^{-1} &= -A_i^{(1)}(-\vec{r}, t) \\
P_0 A_0^{(2)}(\vec{r}, t) P_0^{-1} &= A_0^{(2)}(-\vec{r}, t) \\
P_0 A_i^{(2)}(\vec{r}, t) P_0^{-1} &= -A_i^{(2)}(-\vec{r}, t)
\end{aligned} \tag{2.149}$$

A paridade da densidade de quadricorrente é obtida através de

$$J^\mu(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \psi = \frac{1}{2} \psi^\dagger \eta^0 \beta^\mu \psi \tag{2.150}$$

em que

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{P}}\psi &= \psi_P(\vec{r}, t) \\
\therefore \psi &= \hat{\mathcal{P}}^{-1} \psi_P(\vec{r}, t) \\
\psi^\dagger &= \left(\hat{\mathcal{P}}^{-1} \psi_P \right)^\dagger = \psi_P^\dagger \left(\hat{\mathcal{P}}^{-1} \right)^\dagger
\end{aligned} \tag{2.151}$$

como $\mathcal{P} = \exp(i\delta_P)\eta^0$, inferimos que

$$\psi^\dagger = \psi_P^\dagger \hat{\mathcal{P}} \tag{2.152}$$

logo

$$\begin{aligned}
J^\mu(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \psi_P^\dagger \hat{\mathcal{P}}^{-1} \eta^0 \beta^\mu \hat{\mathcal{P}} \psi_P \\
&= \frac{1}{2} \bar{\psi}_P \hat{\mathcal{P}}^{-1} \beta^\mu \hat{\mathcal{P}} \psi_P
\end{aligned} \tag{2.153}$$

E determinamos a paridade de J^0

$$\begin{aligned}
J^0(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \bar{\psi}_P \hat{\mathcal{P}}^{-1} \beta^0 \hat{\mathcal{P}} \psi_P \\
&= \frac{1}{2} \bar{\psi}_P \beta^0 \psi_P \\
&= J_P^0(\vec{r}, t) \\
&= J^0(-\vec{r}, t)
\end{aligned} \tag{2.154}$$

portanto, J^0 é invariante sob paridade. Analogamente, para J^i

$$\begin{aligned}
J^i(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \bar{\psi}_P \hat{\mathcal{P}}^{-1} \beta^i \hat{\mathcal{P}} \psi_P \\
&= -\frac{1}{2} \bar{\psi}_P \beta^i \psi_P \\
&= -J_P^i(\vec{r}, t) \\
&= -J^i(-\vec{r}, t)
\end{aligned} \tag{2.155}$$

e J^i muda de sinal sob paridade.

Para a determinação da paridade dos componentes do espinor faremos uso das representações para as matrizes beta dos setores escalar e vetorial (dadas por (2.58a) e (2.60), respectivamente). Aplicando o operador paridade sobre o espinor do setor escalar, temos

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{P}}\psi(\vec{r}, t) &= e^{i\delta_P}\eta^0\psi(-\vec{r}, t) \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\delta_P}\psi_1(-\vec{r}, t) \\ e^{i\delta_P}\psi_2(-\vec{r}, t) \\ -e^{i\delta_P}\psi_3(-\vec{r}, t) \\ -e^{i\delta_P}\psi_4(-\vec{r}, t) \\ -e^{i\delta_P}\psi_5(-\vec{r}, t) \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.156)$$

A paridade dos componentes do espinor não pode ser determinada; todavia podemos determinar a *paridade relativa* entre os componentes do espinor: os componentes ψ_1 e ψ_2 têm mesma paridade, oposta a ψ_3 , ψ_4 e ψ_5 . Analogamente, para o setor vetorial, temos que os componentes ψ_1 , ψ_8 , ψ_9 e ψ_{10} têm mesma paridade, oposta a ψ_2 , ψ_3 , ψ_4 , ψ_5 , ψ_6 e ψ_7 .

A conjugação de carga é definida através do operador conjugação de carga $\hat{C} = \mathcal{C}K$, em que K atua sobre as funções efetuando o complexo conjugado e a conjugação da carga, se portando como um operador antilinear

$$K[\alpha f(\vec{r}, t) + \beta g(\vec{r}, t)]K^{-1} = \alpha^* f_C^*(\vec{r}, t) + \beta^* g_C^*(\vec{r}, t) \quad (2.157)$$

em que o subscrito C indica a troca da carga. A atuação do operador conjugação de carga sobre o espinor fornece

$$\begin{aligned}\hat{C}\psi(\vec{r}, t) &= \mathcal{C}K\psi(\vec{r}, t) \\ &= \mathcal{C}\psi^*(\vec{r}, t) \\ &\equiv \psi_C(\vec{r}, t)\end{aligned}\quad (2.158)$$

de forma que

$$\begin{aligned}\hat{C}[\hat{C}\psi(\vec{r}, t)] &= \hat{C}[\mathcal{C}\psi^*(\vec{r}, t)] \\ &= \mathcal{C}[\hat{C}\psi^*(\vec{r}, t)] \\ &= \mathcal{C}^2\psi(\vec{r}, t) \\ &= \psi(\vec{r}, t)\end{aligned}\quad (2.159)$$

e a matriz $\mathcal{C}$ deve cumprir $\mathcal{C}^2 = 1$.

Aplicando $\hat{C}$ à equação de DKP (2.109) obtemos

$$\begin{aligned}&\{-i\mathcal{C}\beta^0\mathcal{C}^{-1}\partial_0 - i\mathcal{C}\beta^i\mathcal{C}^{-1}\partial_i - m - KV_s^{(1)}K^{-1} \\ &- \mathcal{C}^{-1}P\mathcal{C}^{-1}KV_s^{(2)}K^{-1} - \mathcal{C}\beta^0\mathcal{C}^{-1}KA_0^{(1)}K^{-1} - \mathcal{C}\beta^i\mathcal{C}^{-1}KA_i^{(1)}K^{-1} \\ &+ i\mathcal{C}[P, \beta^0]\mathcal{C}^{-1}KA_0^{(2)}K^{-1} + i\mathcal{C}[P, \beta^i]\mathcal{C}^{-1}KA_i^{(2)}K^{-1}\}\psi_C(\vec{r}, t) = 0\end{aligned}\quad (2.160)$$

Ao confrontarmos as equações (2.109) e (2.160), de maneira a tornar (2.160) covariante, encontramos

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\beta^0\mathcal{C}^{-1} &= -\beta^0 \\ \mathcal{C}\beta^i\mathcal{C}^{-1} &= -\beta^i\end{aligned}$$

que é satisfeita com $\mathcal{C} = \exp(i\delta_C)\eta^0\eta^1$. Como $\mathcal{C}^2 = 1$, o fator de fase $\exp(i\delta_C)$ pode tomar os valores 0 ou $\frac{\pi}{2}$, donde concluímos que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^\dagger &= \exp(-i\delta_C) (\eta^0\eta^1)^\dagger \\ &= \exp(-i\delta_C) \eta^{1\dagger} \eta^{0\dagger} \\ &= \exp(-i\delta_C) \eta^1 \eta^0 \\ &= \exp(-i\delta_C) \eta^0 \eta^1\end{aligned}\tag{2.161}$$

logo, $\mathcal{C}$ é unitária

$$\mathcal{C}\mathcal{C}^\dagger = 1\tag{2.162}$$

E podemos assegurar que, sob conjugação de carga, as relações

$$\begin{aligned}\mathcal{C}P\mathcal{C}^{-1} &= P \\ \mathcal{C}[P, \beta^0]\mathcal{C}^{-1} &= -[P, \beta^0] \\ \mathcal{C}[P, \beta^i]\mathcal{C}^{-1} &= -[P, \beta^i]\end{aligned}\tag{2.163}$$

são obedecidas. As funções potenciais, que são reais, devem se comportar sob conjugação de carga como

$$\begin{aligned}KV_s^{(1)}(\vec{r}, t) K^{-1} &= V_{sC}^{(1)}(\vec{r}, t) = V_s^{(1)}(\vec{r}, t) \\ KV_s^{(2)}(\vec{r}, t) K^{-1} &= V_{sC}^{(2)}(\vec{r}, t) = V_s^{(2)}(\vec{r}, t) \\ KA_0^{(1)}(\vec{r}, t) K^{-1} &= A_{0C}^{(1)}(\vec{r}, t) = -A_0^{(1)}(\vec{r}, t) \\ KA_i^{(1)}(\vec{r}, t) K^{-1} &= A_{iC}^{(1)}(\vec{r}, t) = -A_i^{(1)}(\vec{r}, t) \\ KA_0^{(2)}(\vec{r}, t) K^{-1} &= A_{0C}^{(2)}(\vec{r}, t) = A_0^{(2)}(\vec{r}, t) \\ KA_i^{(2)}(\vec{r}, t) K^{-1} &= A_{iC}^{(2)}(\vec{r}, t) = A_i^{(2)}(\vec{r}, t)\end{aligned}\tag{2.164}$$

A conjugação de carga da densidade de quadricorrente é obtida de maneira análoga ao caso da paridade

$$J^\mu(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\bar{\psi}\beta^\mu\psi = \frac{1}{2}\psi^\dagger\eta^0\beta^\mu\psi\tag{2.165}$$

em que

$$\begin{aligned}\hat{C}\psi &= \psi_C(\vec{r}, t) \\ \therefore \psi &= \hat{C}^{-1}\psi_C(\vec{r}, t) \\ \psi^\dagger &= \left(\hat{C}^{-1}\psi_C\right)^\dagger = \psi_C^\dagger \left(\hat{C}^{-1}\right)^\dagger = \psi_C^\dagger \hat{C}\end{aligned}\tag{2.166}$$

portanto

$$\begin{aligned}J^\mu(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2}\psi_C^\dagger \hat{C}\eta^0\beta^\mu\hat{C}^{-1}\psi_C \\ &= \frac{1}{2}\bar{\psi}_C \hat{C}\beta^\mu\hat{C}^{-1}\psi_C \\ &= -\frac{1}{2}\bar{\psi}_C\beta^\mu\psi_C \\ &= -J_C^\mu(\vec{r}, t)\end{aligned}\tag{2.167}$$

e J^μ muda de sinal sob conjugação de carga.

A conjugação de carga relativa entre os componentes do espinor mostra que os componentes ψ_2 e ψ_3 têm mesma conjugação de carga, oposta a ψ_1 , ψ_4 e ψ_5 , para o setor escalar. Analogamente, para o setor vetorial, temos que os componentes ψ_1 , ψ_2 , ψ_6 , ψ_7 , ψ_9 e ψ_{10} têm mesma conjugação de carga, oposta a ψ_3 , ψ_4 , ψ_5 e ψ_8 . É importante ressaltar que no caso independente do tempo teremos a mudança $E_C = -E$.

A reversão temporal é determinada através do operador reversão temporal, $\hat{T} = \mathcal{T}T_0$, em que T_0 atua sobre as funções efetuando o complexo conjugado e a transformação $t \rightarrow -t$, atuando como um operador antilinear:

$$T_0 [\alpha f(\vec{r}, t) + \beta g(\vec{r}, t)] T_0^{-1} = \alpha^* f^*(\vec{r}, -t) + \beta^* g^*(\vec{r}, -t) \quad (2.168)$$

a atuação do operador reversão temporal sobre o espinor fornece

$$\begin{aligned} \hat{T}\psi(\vec{r}, t) &= \mathcal{T}T_0\psi(\vec{r}, t) \\ &= \mathcal{T}\psi^*(\vec{r}, -t) \\ &\equiv \psi_T(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.169)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \hat{T} [\hat{T}\psi(\vec{r}, t)] &= \hat{T} [\mathcal{T}\psi^*(\vec{r}, -t)] \\ &= \mathcal{T} [\hat{T}\psi^*(\vec{r}, -t)] \\ &= \mathcal{T}^2\psi(\vec{r}, t) \\ &= \psi(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.170)$$

e a matriz $\mathcal{T}$ deve se sujeitar a $\mathcal{T}^2 = 1$.

Aplicando $\hat{T}$ à equação de DKP (2.109) obtemos

$$\begin{aligned} &\{i\mathcal{T}\beta^0\mathcal{T}^{-1}\partial_0 - i\mathcal{T}\beta^i\mathcal{T}^{-1}\partial_i - m - T_0V_s^{(1)}T_0^{-1} \\ &- \mathcal{T}PT^{-1}T_0V_s^{(2)}T_0^{-1} - \mathcal{T}\beta^0\mathcal{T}^{-1}T_0A_0^{(1)}T_0^{-1} - \mathcal{T}\beta^i\mathcal{T}^{-1}T_0A_i^{(1)}T_0^{-1} \\ &+ i\mathcal{T}[P, \beta^0]\mathcal{T}^{-1}T_0A_0^{(2)}T_0^{-1} + i\mathcal{T}^{-1}[P, \beta^i]\mathcal{T}^{-1}T_0A_i^{(2)}T_0^{-1}\} \psi_T(\vec{r}, t) = 0 \end{aligned} \quad (2.171)$$

Cotejando as equações (2.109) e (2.171), na condição de tornar (2.171) covariante, devemos ter

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\beta^0\mathcal{T}^{-1} &= \beta^0 \\ \mathcal{T}\beta^i\mathcal{T}^{-1} &= -\beta^i \end{aligned} \quad (2.172)$$

que é satisfeita com $\mathcal{T} = \exp(i\delta_T)\eta^0$. Como $\mathcal{T}^2 = 1$, o fator de fase $\exp(i\delta_T)$ pode assumir os valores 0 ou $\frac{\pi}{2}$, donde inferimos que

$$\mathcal{T}^\dagger = \exp(-i\delta_T)\eta^{0\dagger} = \exp(-i\delta_T)\eta^0 \quad (2.173)$$

logo $\mathcal{T}$ é unitária, i.e.,

$$\mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger = 1 \quad (2.174)$$

Com isso, asseguramos que as relações

$$\begin{aligned} \mathcal{T}PT^{-1} &= P \\ \mathcal{T}[P, \beta^0]\mathcal{T}^{-1} &= [P, \beta^0] \\ \mathcal{T}[P, \beta^i]\mathcal{T}^{-1} &= -[P, \beta^i] \end{aligned} \quad (2.175)$$

são obedecidas. As funções potenciais devem se comportar sob reversão temporal como

$$\begin{aligned}
T_0 V_s^{(1)}(\vec{r}, t) T_0^{-1} &= V_{sT}^{(1)}(\vec{r}, t) = V_s^{(1)}(\vec{r}, -t) \\
T_0 V_s^{(2)}(\vec{r}, t) T_0^{-1} &= V_{sT}^{(2)}(\vec{r}, t) = V_s^{(2)}(\vec{r}, -t) \\
T_0 A_0^{(1)}(\vec{r}, t) T_0^{-1} &= A_{0T}^{(1)}(\vec{r}, t) = A_0^{(1)}(\vec{r}, -t) \\
T_0 A_i^{(1)}(\vec{r}, t) T_0^{-1} &= A_{iT}^{(1)}(\vec{r}, t) = -A_i^{(1)}(\vec{r}, -t) \\
T_0 A_0^{(2)}(\vec{r}, t) T_0^{-1} &= A_{0T}^{(2)}(\vec{r}, t) = -A_0^{(2)}(\vec{r}, -t) \\
T_0 A_i^{(2)}(\vec{r}, t) T_0^{-1} &= A_{iT}^{(2)}(\vec{r}, t) = A_i^{(2)}(\vec{r}, -t)
\end{aligned} \tag{2.176}$$

A reversão temporal da densidade de quadricorrente é obtida por

$$J^\mu(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \psi = \frac{1}{2} \psi^\dagger \eta^0 \beta^\mu \psi \tag{2.177}$$

em que

$$\begin{aligned}
\hat{T} \psi &= \psi_T(\vec{r}, t) \\
\therefore \psi &= \hat{T}^{-1} \psi_T(\vec{r}, t) \\
\therefore \psi^\dagger &= \psi_T^\dagger \hat{T}
\end{aligned} \tag{2.178}$$

portanto

$$\begin{aligned}
J^\mu(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \psi_T^\dagger \hat{T} \eta^0 \beta^\mu \hat{T}^{-1} \psi_T \\
&= \frac{1}{2} \bar{\psi}_T \hat{T} \beta^\mu \hat{T}^{-1} \psi_T
\end{aligned} \tag{2.179}$$

E determinamos a reversão temporal de J^0

$$\begin{aligned}
J^0(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \bar{\psi}_T \hat{T} \beta^0 \hat{T}^{-1} \psi_T \\
&= \frac{1}{2} \bar{\psi}_T \beta^0 \psi_T \\
&= J_T^0(\vec{r}, t)
\end{aligned} \tag{2.180}$$

portanto, J^0 é invariante sob reversão temporal. Analogamente, para J^i

$$\begin{aligned}
J^i(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \bar{\psi}_T \hat{T}^{-1} \beta^i \hat{T} \psi_T \\
&= -\frac{1}{2} (\bar{\psi}_T \beta^i \psi_T) \\
&= -J_T^i(\vec{r}, t)
\end{aligned} \tag{2.181}$$

e J^i muda de sinal sob reversão temporal.

A reversão temporal relativa entre os componentes do espinor mostra que, como no caso da paridade, os componentes ψ_1 e ψ_2 têm mesma reversão temporal, oposta a ψ_3 , ψ_4 e ψ_5 , para o setor escalar. Para o setor vetorial, temos que os componentes ψ_1 , ψ_8 , ψ_9 e ψ_{10} têm mesma reversão temporal, oposta a ψ_2 , ψ_3 , ψ_4 , ψ_5 , ψ_6 e ψ_7 .

2.1.14 As equações para os componentes do espinor

A partir da equação de DKP independente do tempo (2.129), com a representação das matrizes β^μ para os setores escalar e vetorial dadas por (2.58a) e (2.60), respectivamente, determinamos que as equações para os componentes do espinor de um bóson do setor escalar com movimento restrito ao eixo x são dadas por

$$\begin{aligned} (m + V_s^{(1)}) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{m + V_s^{(1)}} \frac{d\phi_1}{dx} \right) + 2iA_1^{(1)} \frac{d\phi_1}{dx} + k^2 \phi_1 &= 0 \\ \phi_2 &= \frac{1}{m + V_s^{(1)}} \left(E - A_0^{(1)} + iA_0^{(2)} \right) \phi_1 \\ \phi_3 &= \frac{i}{m + V_s^{(1)}} \left(\frac{d}{dx} + iA_1^{(1)} + A_1^{(2)} \right) \phi_1 \\ \phi_4 &= \phi_5 = 0 \end{aligned} \quad (2.182)$$

em que

$$\begin{aligned} k^2 &= \left(E - A_0^{(1)} \right)^2 - \left(A_1^{(1)} \right)^2 + i \frac{dA_1^{(1)}}{dx} + \left(A_0^{(2)} \right)^2 - \left(A_1^{(2)} \right)^2 + \frac{dA_1^{(2)}}{dx} \\ &\quad - (m + V_s^{(1)}) (m + V_s^{(1)} + V_s^{(2)}) - \frac{iA_1^{(1)} + A_1^{(2)}}{m + V_s^{(1)}} \frac{dV_s^{(1)}}{dx} \end{aligned} \quad (2.183)$$

com os componentes da quadricorrente escritos como

$$J^0 = \frac{1}{m + V_s^{(1)}} \left(E - A_0^{(1)} \right) |\phi_1|^2 \quad (2.184)$$

$$J^1 = \frac{1}{m + V_s^{(1)}} \left[A_1^{(1)} |\phi_1|^2 + \text{Im} \left(\phi_1^* \frac{d\phi_1}{dx} \right) \right] \quad (2.185)$$

É importante ressaltar que J^0 se torna negativo em regiões do espaço em que $E < A_0^{(1)}$ - circunstância associada ao paradoxo de Klein - e que $A_\mu^{(2)}$ não intervém explicitamente na densidade de quadricorrente.

Para o setor vetorial, com o espinor escrito como $\phi^T = (\phi_1, \dots, \phi_{10})$ e parcionado em

$$\begin{aligned} \psi_I^{(+)} &= \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad \psi_I^{(-)} = \psi_5 \\ \psi_{II}^{(+)} &= \begin{pmatrix} \psi_6 \\ \psi_7 \end{pmatrix}, \quad \psi_{II}^{(-)} = \psi_2 \\ \psi_{III}^{(+)} &= \begin{pmatrix} \psi_{10} \\ -\psi_9 \end{pmatrix}, \quad \psi_{III}^{(-)} = \psi_1 \\ \phi_8 &= 0 \end{aligned} \quad (2.186)$$

obtemos a equação para os componentes do espinor de um bóson do setor vetorial com movimento restrito ao eixo x

$$\begin{aligned}
(m + V_s^{(1)}) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{m + V_s^{(1)}} \frac{d\phi_I^{(\pm)}}{dx} \right) + 2iA_1^{(1)} \frac{d\phi_I^{(\pm)}}{dx} + k_{\pm}^2 \phi_I^{(\pm)} &= 0 \\
\phi_{II}^{(\pm)} &= \frac{1}{m + V_s^{(1)}} \left(E - A_0^{(1)} \pm iA_0^{(2)} \right) \phi_I^{(\pm)} \\
\phi_{III}^{(\pm)} &= \frac{i}{m + V_s^{(1)}} \left(\frac{d}{dx} + iA_1^{(1)} \pm A_1^{(2)} \right) \phi_I^{(\pm)}
\end{aligned} \tag{2.187}$$

em que

$$\begin{aligned}
k_{\pm}^2 &= \left(E - A_0^{(1)} \right)^2 - (m + V_s^{(1)}) (m + V_s^{(1)} + V_s^{(2)}) - \left(A_1^{(1)} \right)^2 \\
&+ i \frac{dA_1^{(1)}}{dx} + \left(A_0^{(2)} \right)^2 - \left(A_1^{(2)} \right)^2 + \frac{A_1^{(2)} - iA_1^{(1)}}{m + V_s^{(1)}} \frac{dV_s^{(1)}}{dx} \pm \frac{dA_1^{(2)}}{dx}
\end{aligned} \tag{2.188}$$

com a densidade de quadricorrente dada por

$$J^0 = \frac{1}{m + V_s^{(1)}} \left(E - A_0^{(1)} \right) \left(|\phi_I^{(+)}|^2 + |\phi_I^{(-)}|^2 \right) \tag{2.189}$$

$$J^1 = \frac{1}{m + V_s^{(1)}} \left[A_1^{(1)} \left(|\phi_I^{(+)}|^2 + |\phi_I^{(-)}|^2 \right) + \text{Im} \left(\phi_I^{(+)\dagger} \frac{d\phi_I^{(+)}}{dx} + \phi_I^{(-)\dagger} \frac{d\phi_I^{(-)}}{dx} \right) \right] \tag{2.190}$$

2.1.15 A supressão do componente espacial do acoplamento vetorial mínimo

A equação (2.130) para uma partícula com movimento restrito ao eixo x pode ser reescrita como

$$\left[\beta^0 \left(E - A_0^{(1)} \right) + i\beta^1 \left(\frac{d}{dx} + iA_1^{(1)} \right) - (m + V_s^{(1)} + PV_s^{(2)} + i[P, \beta^\mu]A_\mu^{(2)}) \right] \phi = 0 \tag{2.191}$$

a forma $\partial_1 + iA_1^{(1)}$ sugere que o componente espacial do acoplamento vetorial mínimo pode ser suprimido através da redefinição do espinor em

$$\phi(x) = \tilde{\phi}(x) \exp(\lambda(x)) \tag{2.192}$$

Substituindo (2.192) em (2.191) temos

$$\beta^0 \left(E - A_0^{(1)} \right) \tilde{\phi} + i\beta^1 \frac{d\tilde{\phi}}{dx} + i\beta^1 \frac{d\lambda}{dx} \tilde{\phi} - \beta^1 A_1^{(1)} \tilde{\phi} - (m + V_s^{(1)} + PV_s^{(2)} + i[P, \beta^\mu]A_\mu^{(2)}) \tilde{\phi} = 0 \tag{2.193}$$

portanto, $A_1^{(1)}$ é eliminado se

$$\frac{d\lambda}{dx} = -iA_1^{(1)} \tag{2.194}$$

ou seja,

$$\lambda(x) = -i \int^x d\zeta A_1^{(1)}(\zeta, t) \quad (2.195)$$

ainda que $A_1^{(1)}$ seja dependente do tempo. A eliminação do termo contendo $A_1^{(1)}$ é um truque matemático conhecido. No entanto, não existe a possibilidade de suprimirmos o componente espacial do acoplamento vetorial não-mínimo, com a exceção de impormos $A_1^{(2)} = 0$.

Capítulo 3

Aplicações em potenciais unidimensionais

Neste estudo aplicamos a equação de DKP a bósons sujeitos a potenciais unidimensionais (por simplicidade) de forma a explicitar algumas propriedades dos acoplamentos escalares e vetoriais, em especial a mistura dos acoplamentos escalar tipo 1 e vetorial mínimo e algumas aplicações (potencial degrau, potencial degrau suave, potencial linear) com o acoplamento vetorial não-mínimo.

3.1 As interações escalares e vetoriais na teoria de DKP

3.1.1 A ocorrência do paradoxo de Klein na teoria de DKP

Do estudo da *equação de DKP independente do tempo e seus componentes* foi salientado que o paradoxo de Klein (fenômeno interpretado como a criação de pares partícula-antipartícula na interface do potencial) ocorre quando J^0 se torna negativo em regiões do espaço em que $E < A_0^{(1)}$, sendo, portanto, um fenômeno intrínseco ao componente temporal do acoplamento vetorial mínimo. De forma a evidenciar as condições para a ocorrência do paradoxo de Klein, restringimos o movimento do bóson ao eixo x , consideramos apenas o setor de spin 0 da teoria de DKP e levamos em conta apenas os termos escalar e vetorial, como em (2.108), obtendo [53]

$$\begin{aligned} (m + V_s^{(1)}) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{m + V_s^{(1)}} \frac{d\phi_1}{dx} \right) + k^2 \phi_1 &= 0 \\ \phi_2 &= \frac{1}{m + V_s^{(1)}} \left(E - A_0^{(1)} + iA_0^{(2)} \right) \phi_1 \\ \phi_3 &= \frac{i}{m + V_s^{(1)}} \left(\frac{d}{dx} + A_1^{(2)} \right) \phi_1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde

$$\begin{aligned} k^2 &= \left(E - A_0^{(1)} \right)^2 + \left(A_0^{(2)} \right)^2 - \left(A_1^{(2)} \right)^2 + \frac{dA_1^{(2)}}{dx} \\ &\quad - (m + V_s^{(1)}) (m + V_s^{(1)} + V_s^{(2)}) - \frac{A_1^{(2)}}{m + V_s^{(1)}} \frac{dV_s^{(1)}}{dx} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para este problema independente do tempo, J^μ tem os componentes

$$J^0 = 2 \frac{E - A_0^{(1)}}{m + V_s^{(1)}} |\phi_1|^2, \quad J^1 = 2 \frac{\text{Im} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \phi_1^* \right)}{m + V_s^{(1)}} \quad (3.3)$$

A única possibilidade de obtermos J^0 negativo existe para uma região do espaço em que $E < A_0^{(1)}$, ou seja, quando o componente temporal do acoplamento vetorial mínimo excede a energia do bóson. Neste cenário fica evidente que o paradoxo de Klein só ocorre para o acoplamento vetorial mínimo.

Do estudo da *simetria PCT na teoria de DKP*, observamos que $V_s^{(1)}$, $V_s^{(2)}$ e $A_\mu^{(2)}$ são invariantes sob conjugação de carga, o que significa que eles não acoplam com a carga do bóson. Em outras palavras, $V_s^{(1)}$, $V_s^{(2)}$ e $A_\mu^{(2)}$ não distinguem partículas de antipartículas e o espectro destas interações é simétrico com relação a $E = 0$. Portanto, estas interações não podem exibir o paradoxo de Klein.

3.1.2 A mistura dos acoplamentos escalar tipo 1 e vetorial mínimo na teoria de DKP em um potencial degrau

O espalhamento de bósons em uma mistura arbitrária dos acoplamentos escalar tipo 1 e vetorial mínimo em um potencial degrau revela que o acoplamento escalar impede que o formalismo de DKP seja equivalente ao formalismo de Klein-Gordon ou Proca [65], além de mostrar que os setores de spin 0 e spin 1 da teoria de DKP se comportam formalmente de maneira semelhante. Com as condições de contorno apropriadas, os efeitos devido ao acoplamento escalar na produção de pares partícula-antipartícula e a localização de bósons são analisados em detalhe [66]. Desta forma, considerando apenas os acoplamentos escalar tipo 1 ($V_s^{(1)}$) e vetorial mínimo ($A_0^{(1)}$) em (2.108), (3.1) e (3.3) com estes potenciais do tipo degrau unidimensional expressos por

$$V_s^{(1)} = \theta(x) c_S V, \quad A_0^{(1)} = \theta(x) c_A V \quad (3.4)$$

em que c_S e c_A são constantes de acoplamento positivas restritas por $c_S + c_A = 1$, $\theta(x)$ denota a função degrau de Heaviside e $V > 0$ é a altura do degrau.

Para $x < 0$ a equação de DKP tem a solução

$$\varphi(x) = \varphi_+ e^{+ikx} + \varphi_- e^{-ikx} \quad (3.5)$$

onde

$$\varphi_\pm^T = \frac{a_\pm}{\sqrt{2}} \left(1, \frac{E}{m}, \mp \frac{k}{m}, 0, 0 \right) \quad (3.6)$$

e

$$k = \sqrt{E^2 - m^2} \quad (3.7)$$

Para $|E| > m$, a solução expressa por (3.5) e (3.6) descreve ondas planas se propagando em ambas as direções do eixo x . A densidade de corrente de carga relacionada à J^μ , correspondendo a φ dado por (3.5), é expresso como

$$J^1 = \frac{k}{m} (|a_+|^2 - |a_-|^2) \quad (3.8)$$

e

$$J_{(\pm)}^0 = \frac{E}{m} |a_\pm|^2 \quad (3.9)$$

Se escolhermos partículas incidindo sobre a barreira de potencial ($J^0 > 0$), $\varphi_+ \exp(+ikx)$ descreverá partículas incidentes ($J^1 > 0$), enquanto $\varphi_- \exp(-ikx)$ descreverá partículas refletidas ($J^1 < 0$). Por outro lado, para $x > 0$ a solução descreve uma onda evanescente ou uma onda progressiva se afastando da interface do potencial. A solução geral tem a forma

$$\varphi(x) = (\varphi)_+ e^{+iqx} + (\varphi)_- e^{-iqx} \quad (3.10)$$

onde

$$(\varphi)_\pm^T = \frac{b_\pm}{\sqrt{2}} \left(1, \frac{E - c_A V}{m + c_S V}, \frac{\mp q}{m + c_S V}, 0, 0 \right) \quad (3.11)$$

e

$$q = \sqrt{(E - c_A V)^2 - (m + c_S V)^2} \quad (3.12)$$

Devido à dupla possibilidade de sinais para a energia de um estado estacionário, a solução envolvendo b_- não pode ser descartada a priori. De fato, este termo pode descrever uma onda progressiva com uma densidade de carga negativa e um fluxo de carga negativo ($J^1 < 0$). Em outras palavras, a solução $(\varphi)_- \exp(-iqx)$ com $q \in \mathbb{R}$ revela a ocorrência do paradoxo de Klein. Desta forma é possível segregar três classes distintas de soluções:

- Classe A. Para $V < E - m$ temos que $q \in \mathbb{R}$, e a solução descrevendo ondas planas propagando-se na direção positiva do eixo x é possível somente se $b_- = 0$. Neste caso, os componentes da densidade de quadricorrente são dados por

$$J^0 = \frac{E - c_A V}{m + c_S V} |b_+|^2, \quad J^1 = \frac{q}{m + c_S V} |b_+|^2 \quad (3.13)$$

- Classe B. Para $E - m < V < V_c$, onde

$$V_c = \begin{cases} \frac{E+m}{2c_A-1}, & \text{para } c_A > 1/2 \\ \infty, & \text{para } c_A \leq 1/2 \end{cases} \quad (3.14)$$

temos que $q = +i|q|$ ou $q = -i|q|$. A solução com $q = \pm i|q|$ exige que $b_\mp = 0$ para obtermos uma densidade de carga finita em $x \rightarrow \infty$. Neste caso, $J^1 = 0$ e

$$J^0 = \begin{cases} \frac{E - c_A V}{m + c_S V} e^{-2|q|x} |b_+|^2, & \text{para } q = +i|q| \quad (V < E/c_A) \\ -\frac{c_A V - E}{m + c_S V} e^{-2|q|x} |b_-|^2, & \text{para } q = -i|q| \quad (V > E/c_A) \end{cases}$$

- Classe C. Com $V > V_c$ existe novamente a possibilidade de propagação de ondas planas na direção positiva do eixo x , sob a condição $b_+ = 0$. A densidade de quadricorrente toma a forma

$$J^0 = -\frac{c_A V - E}{m + c_S V} |b_-|^2, \quad J^1 = -\frac{q}{m + c_S V} |b_-|^2 \quad (3.15)$$

A exigência de continuidade de φ_1 e de $\varphi_1' / (m + V_s^{(1)})$ em $x = 0$ fixa as amplitudes das ondas em termos da amplitude da onda incidente, viz.

$$\frac{a_-}{a_+} = \begin{cases} \frac{k - \tilde{q}}{k + \tilde{q}} & \text{para a classe A} \\ \frac{(k - i|\tilde{q}|)^2}{k^2 + |\tilde{q}|^2} & \text{para a classe B} \\ \frac{k + \tilde{q}}{k - \tilde{q}} & \text{para a classe C} \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\frac{b_+}{a_+} = \begin{cases} \frac{2k}{k+\tilde{q}} & \text{para a classe A} \\ \frac{2k(k-i|\tilde{q}|)}{k^2+|\tilde{q}|^2} & \text{para a classe B} \\ 0 & \text{para a classe C} \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\frac{b_-}{a_+} = \begin{cases} 0 & \text{para a classe A} \\ 0 & \text{para a classe B} \\ \frac{2k}{k-\tilde{q}} & \text{para a classe C} \end{cases} \quad (3.18)$$

onde $\tilde{q} = q(1 + c_S V/m)^{-1}$. Agora focaremos a nossa atenção na determinação dos coeficientes de reflexão (R) e transmissão (T). O coeficiente de reflexão (transmissão) é definido como a razão entre o fluxo refletido (transmitido) e o fluxo incidente. Como $\partial J_0/\partial t = 0$ para os estados estacionários, temos que J_1 é independente de x . Isto implica que

$$R = \begin{cases} \left(\frac{k-\tilde{q}}{k+\tilde{q}}\right)^2 & \text{para a classe A} \\ 1 & \text{para a classe B} \\ \left(\frac{k+\tilde{q}}{k-\tilde{q}}\right)^2 & \text{para a classe C} \end{cases} \quad (3.19)$$

$$T = \begin{cases} \frac{4k\tilde{q}}{(k+\tilde{q})^2} & \text{para a classe A} \\ 0 & \text{para a classe B} \\ -\frac{4k\tilde{q}}{(k-\tilde{q})^2} & \text{para a classe C} \end{cases} \quad (3.20)$$

É instrutivo notar que (3.16)-(3.20) apresentam a mesma forma das obtidas em [?] para a mistura dos acoplamentos vetorial e escalar no formalismo de Klein-Gordon. De forma interessante, $\tilde{q} = q(1 + c_S V/m)^{-1}$ no formalismo de DKP enquanto $\tilde{q} = q$ no formalismo de Klein-Gordon. A expressão para $\tilde{q}$ discorda de q por um fator $(1 + c_S V/m)^{-1}$. Claramente o acoplamento escalar faz toda a diferença, mesmo no limite não-relativístico. A classe C evidencia uma circunstância bizarra, uma vez que J_0 e J_1 são quantidades negativas. Porém, é satisfatório interpretar a solução $(\varphi_t)_- \exp(-iqx)$ como a descrição da propagação, no sentido positivo do eixo x , de partículas com cargas de sinal oposto às partículas incidentes. Esta interpretação é consistente se as partículas que se movem nesta região apresentarem energia $-E$ e sofrerem a influência de um potencial $-c_A V$. De fato, esta onda progressiva descreve a propagação de antipartículas na direção positiva do eixo x . Para todos as classes temos que $R + T = 1$, como é esperado para uma quantidade conservada. A classe C apresenta $R > 1$, o conhecido paradoxo de Klein, implicando que mais partículas são refletidas pela barreira de potencial do que aquelas incidentes. Isso deve acontecer, como visto anteriormente, uma vez que o potencial estimula a produção de antipartículas em $x = 0$. Devido à conservação da carga há, de fato, a criação de pares partícula-antipartícula. Como o potencial em $x > 0$ é repulsivo para as partículas, elas são, necessariamente, refletidas. Do estudo das classes A e B, podemos inferir que o limiar de energia para a produção de pares é dado por $V = V_c$ para $c_A > 1/2$ e que, para $c_A \leq 1/2$ a produção de pares não é possível. Evidentemente, o acoplamento escalar aumenta a energia mínima necessária à produção de pares. O valor mínimo deste limiar ($V = 2m$) ocorre

quando o acoplamento é puramente vetorial ($c_A = 1$). A adição de um contaminante escalar contribui para aumentar este limiar, que surpreendentemente se torna infinito para uma igual mistura dos acoplamentos. Portanto, a produção de pares não ocorre se o acoplamento vetorial não exceder o acoplamento escalar, mesmo que V seja extremamente grande. A propagação de antipartículas na barreira de potencial pode ser interpretada como sendo devido ao fato de que cada antipartícula está sob a influência de um potencial efetivo dado por $(c_S - c_A)V$. Desta forma, cada antipartícula tem uma energia disponível (energia de repouso mais energia cinética) dada por $(2c_A - 1)V - E$, donde concluímos acerca do limiar de energia. Podemos ainda dizer que as partículas estão sob a influência de um degrau ascendente de altura $(c_S + c_A)V$, e que as antipartículas estão sob a influência de um degrau efetivo de altura $(c_S - c_A)V$, um degrau ascendente (repulsivo) se $c_A < 1/2$ e um degrau descendente (atrativo) se $c_A > 1/2$. Para $E - m < V < V_c$ (classe B), temos que $J^0 \geq 0$ para $V \leq E/c_A$, desse modo a onda evanescente com $q = +i|q|$ ($q = -i|q|$) está relacionada a partículas (antipartículas). Assim, podemos afirmar que existe uma polarização da carga devido ao potencial vetorial. A densidade de carga máxima para as antipartículas ocorre para $V = V_c$ e além deste valor elas são separadas. Para a classe B, a densidade de carga além da barreira de potencial é proporcional a $\exp(-2|q|x)$, logo a incerteza da posição na região em que $x > 0$, estimada como sendo o valor de x que torna a densidade de carga igual a $J^0(0)/e$, é dada por $\Delta x = 1/(2|q|)$. Esta incerteza apresenta o valor mínimo

$$(\Delta x)_{\min} = \frac{1}{2(m + c_S V)} \quad (3.21)$$

quando V se torna $V = E/c_A$. Deste último resultado podemos observar que $(\Delta x)_{\min} = \lambda/2$ ($\lambda = 1/m$ é o comprimento de onda Compton) no caso do potencial puramente vetorial ($c_S = 0$). No entanto, podemos concluir que $(\Delta x)_{\min} < \lambda/2$ no caso de um potencial vetorial contaminado com algum acoplamento escalar. Além disso, a penetração do bóson na região em que $x > 0$ encolhe sem limite com o aumento de V . À primeira vista o princípio da incerteza parece estar sendo violado uma vez que é impossível a localização de uma partícula em uma região do espaço menor que a metade de seu comprimento de onda Compton (veja, e.g., [61] e [62]). Essa aparente contradição pode ser remediada recorrendo-se aos conceitos de massa efetiva e comprimento de onda Compton efetivo. De fato, a equação (3.21) sugere que a massa efetiva deva ser definida como $m_{\text{eff}} = m + c_S V$ de forma que $(\Delta x)_{\min} = \lambda_{\text{eff}}/2$ e $(\Delta p)_{\max} = m_{\text{eff}}$, e o comprimento de onda Compton efetivo definido como $\lambda_{\text{eff}} = 1/m_{\text{eff}}$. Isso significa que a localização do bóson não exige nenhum valor mínimo de forma a assegurar a interpretação de partícula única da teoria de DKP.

3.1.3 O acoplamento vetorial não-mínimo na teoria de DKP em um potencial degrau

O espalhamento em um potencial degrau é usado para mostrar que o paradoxo de Klein não ocorre para o caso do acoplamento vetorial não-mínimo. Em particular, mostramos que o componente espacial da interação vetorial não-mínima é crucial para o confinamento de bósons, enquanto seu componente espacial contribui para seu escape [54]. Considerando apenas o acoplamento vetorial não-mínimo ($A_\mu^{(2)}$) em (2.108), (3.1) e (3.3) na forma de um degrau unidimensional expresso por

$$A_\mu^{(2)} = \theta(x) c_\mu V \quad (3.22)$$

onde c_μ são constantes adimensionais e positivas sujeitas a $c_0 + c_1 = 1$ e $V > 0$ é a altura do degrau. Para $x < 0$ a equação de DKP tem a solução

$$\varphi(x) = \varphi_+ e^{+ikx} + \varphi_- e^{-ikx} \quad (3.23)$$

onde

$$\varphi_\pm^T = \frac{a_\pm}{\sqrt{2}} \left(1, \frac{E}{m}, \mp \frac{k}{m}, 0, 0 \right) \quad (3.24)$$

e

$$k = \sqrt{E^2 - m^2} \quad (3.25)$$

Para $|E| > m$, a solução expressa por (3.23) descreve ondas planas se propagando em ambas as direções do eixo x com velocidade de grupo $v_g = dE/dk$ igual à velocidade clássica da partícula. Se escolhermos as partículas incidindo sobre a barreira de potencial, ($E > m$), $\varphi_+ \exp(+ikx)$ representará as partículas incidentes ($v_g = +k/E > 0$), enquanto $\varphi_- \exp(-ikx)$ descreverá as partículas refletidas ($v_g = -k/E < 0$). A densidade de quadricorrente relacionada à corrente J^μ , correspondendo a φ dado por (3.23), é expressa por

$$J^1 = \frac{k}{m} (|a_+|^2 - |a_-|^2) \quad (3.26)$$

Note que a relação $J^1 = J^0 v_g$ é mantida para as ondas incidentes e refletidas, uma vez que

$$J_{(\pm)}^0 = \frac{E}{m} |a_\pm|^2 \quad (3.27)$$

Por outro lado, para $x > 0$ devemos ter $v_g \geq 0$ de forma que a solução nesta região do espaço descreverá ondas evanescentes ou ondas progressivas que se afastam da interface do potencial. A solução geral desta região tem a forma

$$\varphi(x) = (\varphi)_+ e^{+iqx} + (\varphi)_- e^{-iqx} \quad (3.28)$$

onde

$$(\varphi)_\pm^T = \frac{b_\pm}{\sqrt{2}} \left(1, \frac{E + ic_0 V}{m}, \mp \frac{q + ic_1 V}{m}, 0, 0 \right) \quad (3.29)$$

e

$$q = \sqrt{k^2 + (c_0 - c_1) V^2} \quad (3.30)$$

Devido à dupla possibilidade de sinais para a energia de um estado estacionário, a solução envolvendo o termo b_- não deve ser descartada a priori. De fato, este termo pode descrever uma onda progressiva com energia negativa e velocidade de fase $v_{ph} = |E|/q > 0$ (veja, e.g. [23]). Em outras palavras, a solução $(\varphi)_- \exp(-iqx)$ com $q \in \mathbb{R}$ revela a presença do paradoxo de Klein. Desta forma, podemos segregar duas classes de soluções:

- Classe A. Com $c_1 > c_0$ para $V < V^c$, onde

$$V^c = \sqrt{\frac{E^2 - m^2}{c_1 - c_0}} \quad (3.31)$$

ou com $c_1 \leq c_0$ para todo V , temos que $q \in \mathbb{R}$, e a solução que descreve uma onda plana se propagando na direção positiva do eixo x com velocidade de grupo $v_g = q/E$ só é possível se $b_- = 0$. Neste caso os componentes da densidade de quadricorrente são dados por

$$J^0 = \frac{E}{m} |b_+|^2, \quad J^1 = \frac{q}{m} |b_+|^2 \quad (3.32)$$

- Classe B. Com $c_1 > c_0$ para $V > V^c$ temos que $q = \pm i|q|$, e (3.23) com $b_{\mp} = 0$ descreve uma onda evanescente. A solução que satisfaz o requisito de finitude no infinito exige que $b_{\mp} = 0$. Neste caso

$$J^0 = \frac{E}{m} e^{-2|q|x} |b_{\pm}|^2, \quad J^1 = 0 \quad (3.33)$$

Como a solução envolvendo o termo b_- é idêntica à solução envolvendo b_+ , podemos considerar $b_- = 0$.

É importante ressaltar que não existe razão para exigirmos que o espinor $\varphi(x)$ e/ou sua derivada sejam contínuos através de descontinuidades finitas do potencial. Uma análise cuidadosa revela, no entanto, que as condições de contorno seguem das equações diferenciais obedecidas pelos componentes do espinor. Somente o primeiro componente do espinor satisfaz uma equação de segunda ordem do tipo Klein-Gordon, de forma que tanto o primeiro componente do espinor quanto a sua primeira derivada são contínuos ainda que o potencial sofra descontinuidades finitas. Para o caso de um potencial descontínuo, o segundo componente do espinor (se $A_0 \neq 0$) assim como seu terceiro componente (se $A_1 \neq 0$) são descontínuos, todavia J^0 e J^1 não são. Uma possível descontinuidade de J^0 não traria grandes inconvenientes, uma vez que J^0 pode ser interpretado como uma densidade de carga; todavia J^1 (envolvendo $\varphi_1^* d\varphi_1/dx$) deve ser contínuo em um regime estacionário. A demanda por continuidade de φ_1 e $d\varphi_1/dx$ em $x = 0$ fixa as amplitudes em termos da amplitude da onda incidente, viz.

$$\frac{a_-}{a_+} = \begin{cases} \frac{k-q}{k+q} & \text{para a classe A} \\ \frac{(k-i|q|)^2}{k^2+|q|^2} & \text{para a classe B} \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\frac{b_+}{a_+} = \begin{cases} \frac{2k}{k+q} & \text{para a classe A} \\ \frac{2k(k-i|q|)}{k^2+|q|^2} & \text{para a classe B} \end{cases} \quad (3.35)$$

E determinamos os coeficientes de reflexão (R) e transmissão (T) para as duas classes

$$R = \begin{cases} \left(\frac{k-q}{k+q}\right)^2 & \text{para a classe A} \\ 1 & \text{para a classe B} \end{cases} \quad (3.36)$$

$$T = \begin{cases} \frac{4kq}{(k+q)^2} & \text{para a classe A} \\ 0 & \text{para a classe B} \end{cases} \quad (3.37)$$

Para todas as classes temos que $R + T = 1$ como esperado para uma quantidade conservada. Note que a densidade de carga em (3.32) e (3.33) é sempre uma quantidade positiva, como ocorre para J_1 em (3.32). Isto significa que as ondas espalhadas descrevem partículas e não antipartículas e, portanto, o paradoxo de Klein nunca se manifesta.

Para $c_1 > c_0$ o coeficiente de transmissão vai a zero para um potencial V de intensidade maior que o potencial de corte V^c . De fato, o potencial se comporta efetivamente como um degrau ascendente e uma situação similar ocorre na mecânica quântica não-relativística. A incerteza na posição além da interface do potencial para $V > V^c$ pode ser obtida de (3.33), ou seja

$$\Delta x = \frac{1}{2|q|} = \frac{1}{2\sqrt{m^2 + (c_1 - c_0)V^2 - E^2}} \quad (3.38)$$

Desse último resultado podemos observar que a penetração do bóson na região $x > 0$ irá encolher sem limites com o aumento de V . Como no estudo da *mistura dos acoplamentos escalar tipo 1 e vetorial mínimo na teoria de DKP em um potencial degrau* podemos recorrer aos conceitos de massa efetiva e comprimento de onda Compton efetivo. A equação (3.38) sugere a definição da massa efetiva como

$$m_{\text{eff}} = \sqrt{m^2 + (c_1 - c_0) V^2} \quad (3.39)$$

de forma que

$$\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{m_{\text{eff}}^2 - E^2}} \quad (3.40)$$

A massa efetiva indica claramente que este tipo de potencial se acopla à massa do bóson e, como consequência, a inexistência do paradoxo de Klein. A incerteza mínima será $(\Delta x)_{\min} = 1/(2m_{\text{eff}})$ no limite em que $V \rightarrow \infty$. Portanto, para obtermos um resultado consistente com o princípio da incerteza é necessário o uso do comprimento de onda Compton efetivo, definido como $\lambda_{\text{eff}} = 1/m_{\text{eff}}$. Desta forma, a incerteza mínima consoante com o princípio da incerteza é dado por $\lambda_{\text{eff}}/2$. Isso significa que a localização do bóson não exige nenhum valor mínimo de forma a assegurar a interpretação de partícula única na teoria de DKP.

Para o caso em que $c_1 \leq c_0$, no entanto, existe um potencial de corte. Este é um resultado que vai em oposição às nossas concepções acerca da mecânica quântica não-relativística. O caso em que $c_1 = c_0$ apresenta um potencial degrau transparente ($T = 1$ para todo V), ao passo que, para $c_1 < c_0$ o coeficiente de transmissão apresenta o comportamento

$$T \rightarrow \frac{4}{V} \sqrt{\frac{E^2 - m^2}{c_0 - c_1}} \quad (3.41)$$

quando $V \rightarrow \infty$. Estes fatos estranhos ocorrem devido ao componente espacial do potencial degrau, que se comporta como um degrau ascendente, ao passo que seu componente temporal se comporta como um degrau descendente. Para $c_1 = c_0$, embora $\varphi_+ \neq (\varphi)_+$, os efeitos devido aos componentes espacial e temporal se cancelam, e o potencial efetivo se comporta como um potencial transparente. Para $c_1 < c_0$ a tendência do degrau descendente domina e o potencial efetivo se comporta como um degrau descendente.

Para o setor vetorial da teoria de DKP temos, da equação (2.188), a presença de um termo $dA_1^{(2)}/dx$. Para o potencial degrau dado por (3.22), temos que $dA_1/dx = 0$ para $x \neq 0$, portanto, tanto $\phi_I^{(+)}$ quanto $\phi_I^{(-)}$ obedecem à mesma equação, de forma que a solução para a região em que $x < 0$ pode ser escrita como

$$\phi_I^{(\pm)} = A_{+}^{(\pm)} e^{+ikx} + A_{-}^{(\pm)} e^{-ikx} \quad (3.42)$$

onde k é novamente dado por (3.25), e $A_{\pm}^{(\pm)}$ é definido em termos das amplitudes arbitrárias $\alpha_{\pm}$, $\beta_{\pm}$ e $\gamma_{\pm}$ como

$$A_{\pm}^{(+)} = \begin{pmatrix} \alpha_{\pm} \\ \beta_{\pm} \end{pmatrix}, \quad A_{\pm}^{(-)} = \gamma_{\pm} \quad (3.43)$$

Definindo

$$a_{\pm} = \sqrt{2(|\alpha_{\pm}|^2 + |\beta_{\pm}|^2 + |\gamma_{\pm}|^2)} \quad (3.44)$$

temos que os componentes da corrente podem ser escritos da mesma forma que (3.26) e (3.27). Um procedimento similar para a região $x > 0$ nos permite obter os resultados (3.34)-(3.41).

3.1.4 O acoplamento vetorial não-mínimo na teoria de DKP para o espalhamento de bósons em um potencial degrau suave

O espalhamento em um potencial degrau suave é usado para reiterar a ausência do paradoxo de Klein para o acoplamento vetorial não-mínimo e para discutir os interessantes comportamentos dos coeficientes de transmissão obtidos neste estudo considerando a mistura entre os componentes espacial e temporal do potencial degrau suave [55]. Considerando a mesma forma funcional para os componentes temporal e espacial do acoplamento vetorial não-mínimo, i.e. $A_0 = c_0 V(x)$ e $A_1 = c_1 V(x)$ com

$$V(x) = \frac{V}{2} \left(1 + \tanh \frac{x}{2L} \right) \quad (3.45)$$

onde c_0 e c_1 são quantidades adimensionais sujeitas a $c_0 + c_1 = 1$ e V é a altura do degrau. O parâmetro positivo L está relacionado com o alcance da interação, o que faz com que $V(x)$ se altere notavelmente no intervalo $-2L < x < 2L$.

Para o setor de spin 0 da teoria de DKP, φ_1 obedece à equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} + (E_{\text{eff}} - V_{\text{eff}}) \varphi_1 = 0 \quad (3.46)$$

onde E_{eff} e V_{eff} são convenientemente escritos como

$$E_{\text{eff}} = E^2 - m^2, \quad (3.47)$$

$$V_{\text{eff}} = -V_1 \text{sech}^2 \frac{x}{2L} + V_2 \tanh \frac{x}{2L} + V_2 \quad (3.48)$$

com

$$V_1 = \frac{V^2}{4} \frac{1 + 2LV}{LV} \left(c_1 - \frac{LV}{1 + 2LV} \right), \quad (3.49)$$

$$V_2 = V^2 \left(c_1 - \frac{1}{2} \right) \quad (3.50)$$

A solução para (3.46) é a conhecida solução da equação de Schrödinger para o potencial de Rosen-Morse [67]. É instrutivo notar que os parâmetros do potencial de Rosen-Morse efetivo não são parâmetros livres.

O potencial efetivo se aproxima de zero com $x \rightarrow -\infty$ de forma que as soluções para o espalhamento de partículas (ondas incidentes provenientes de $x = -\infty$) impõem que $|E| > m$. Para $x \ll -L$ a equação de DKP tem a solução geral

$$\varphi(-\infty) = \varphi_+ \exp^{+ikx} + \varphi_- \exp^{-ikx} \quad (3.51)$$

em que

$$\varphi_{\pm}^T = a_{\pm} \left(1, \frac{E}{m}, \frac{\mp k}{m}, 0, 0 \right), \quad k = \sqrt{E^2 - m^2} \quad (3.52)$$

A solução expressa por (3.51) descreve ondas planas se propagando em ambas as direções do eixo x . A densidade de quadricorrente correspondendo a φ dado por (3.51) é escrita como

$$J^1(-\infty) = \frac{k}{m} (|a_+|^2 - |a_-|^2), \quad (3.53)$$

e

$$J_{(\pm)}^0(-\infty) = \frac{E}{m} |a_{\pm}|^2 \quad (3.54)$$

Se escolhermos partículas incidindo sobre a barreira de potencial ($J^0(-\infty) > 0$), teremos que $\varphi_+ \exp(+ikx)$ descreverá partículas incidentes, ao passo que $\varphi_- \exp(-ikx)$ descreverá partículas refletidas.

Por outro lado, o potencial se aproxima de $2V_2$ com $x \rightarrow +\infty$ e seu comportamento assintótico discrimina uma onda progressiva (pw) de uma onda evanescente (ew), viz. $E^2 > m^2 + 2V^2(c_1 - \frac{1}{2})$ para uma onda progressiva e $E^2 < m^2 + 2V^2(c_1 - \frac{1}{2})$ para uma onda evanescente. É importante observar que uma onda evanescente é permitida somente se $c_1 > 1/2$. A solução que representa uma onda transmitida ou evanescente para $x \gg L$ tem a forma

$$\varphi(+\infty) = \varphi e^{+iqx} \quad (3.55)$$

onde

$$\varphi^T = b_+ \left(1, \frac{E}{m}, \frac{-q}{m}, 0, 0 \right), \quad q = \sqrt{k^2 - 2V_2} \quad (3.56)$$

Observe que $\varphi(+\infty)$ permanece ligado se $q \rightarrow +i|q|$. Nesta região do espaço os componentes da corrente são dados por $J^1(+\infty) = \frac{q}{m} |b_+|^2$, $J^0(+\infty) = \frac{E}{m} |b_+|^2$ para uma onda progressiva e $J^1(+\infty) = 0$, $J^0(+\infty) = \frac{E}{m} e^{-2|q|x} |b_+|^2$ para uma onda evanescente. A solução $\exp(-iqx)$ deve descrever uma onda evanescente quando $q \rightarrow -i|q|$.

Agora, concentraremos a nossa atenção na obtenção dos coeficientes de reflexão (R) e transmissão (T). Temos, portanto:

$$R = \frac{|a_-|^2}{|a_+|^2}, \quad T = \begin{cases} \frac{q}{k} \frac{|b_+|^2}{|a_+|^2}, & pw \\ 0, & ew \end{cases} \quad (3.57)$$

Para todos os casos, temos que $R+T = 1$, como esperado para uma quantidade conservada. Este fato é facilmente verificado para uma onda evanescente. Para uma onda progressiva, devemos obter uma solução completa do problema, cujo comportamento assintótico nos permite calcular as amplitudes de todas as ondas relativas à amplitude da onda incidente.

Com a mudança de variáveis $y = \frac{1}{2} (1 - \tanh \frac{x}{2L})$ e a introdução de uma nova função $\phi(y)$ através da relação $\varphi_1(y) = y^\nu (1-y)^\mu \phi(y)$ a equação (3.46) se torna a equação diferencial hipergeométrica

$$y(1-y)\phi'' + \Theta\phi' - b_-b_+\phi = 0 \quad (3.58)$$

com $\Theta = [c - (b_- + b_+ + 1)y]$ e

$$b_\pm = \mu + \nu + \frac{1 \pm \omega}{2}, \quad \omega^2 = 1 + 16L^2V_1 \quad (3.59)$$

$$c = 2\nu + 1, \quad \mu^2 = -L^2k^2, \quad \nu^2 = -L^2q^2 \quad (3.60)$$

A solução geral de (3.58) fornece uma solução válida para todo o eixo x e suas constantes arbitrárias devem nos levar às soluções assintóticas discutidas anteriormente. Neste processo, os coeficientes de reflexão e transmissão podem ser expressos como

$$R = \frac{\cosh[2\pi L(k-q)] + \cos(\pi\omega)}{\cosh[2\pi L(k+q)] + \cos(\pi\omega)} \quad (3.61)$$

$$T = \frac{2 \sinh(2\pi Lk) \sinh(2\pi Lq)}{\cosh[2\pi L(k+q)] + \cos(\pi\omega)} \quad (3.62)$$

para um onda progressiva. De uma forma similar, para uma onda evanescente, $R = 1 \forall \omega$. Podemos facilmente mostrar que $R+T = 1$, como esperado para uma quantidade conservada.

É interessante analisar o coeficiente de transmissão como função de V para alguns valores ilustrativos de c_1 , como nas figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6. Em todos os casos temos $m = 1$ e $E = 1.1$. A curva mais forte corresponde a $L = 0.5$ e a curva mais clara a $L = 0.05$. Para $c_1 \geq 1/2$ temos que $\omega \in \mathbb{R}$. Como uma função de V , o coeficiente de transmissão para $c_1 > 1/2$ começa em 1 e vai até 0 em $\frac{k}{\sqrt{2(c_1-1/2)}}$ independente do valor de L . Isto acontece porque o potencial efetivo se comporta como um degrau ascendente, com uma pequena depressão antes da subida. Por outro lado, para $c_1 < 1/2$ o potencial efetivo se comporta como um degrau descendente, com um possível poço entre os patamares superior e inferior. Neste caso, $\omega \in \mathbb{C}$ para valores suficientemente grandes de LV , ou seja, $LV > \frac{1}{4|c_1-1/2|}$, portanto

$$T \rightarrow \frac{2 \sinh(2\pi Lk)}{\exp(2\pi Lk) + \delta} \quad (3.63)$$

onde $\delta = \exp[\pi(|\omega| - 2Lq)] \rightarrow 2|c_1 - 1/2|$. Portanto, o limite $V \rightarrow \infty$ leva a

$$T \rightarrow 2e^{-\zeta} \sinh \zeta, \text{ onde } \zeta = (2c_1 + 1)\pi Lk$$

Claramente, $T \rightarrow 0$ com $L \rightarrow 0$. Nas regiões onde $\omega \in \mathbb{R}$ e devido ao comportamento oscilatório característico de $\cos(\pi\omega)$, o coeficiente de transmissão oscila entre valores máximos e mínimos dados por

$$T_{\min} = \frac{\sinh(2\pi Lk) \sinh(2\pi Lq)}{\cosh^2[\pi L(k+q)]}, \quad (3.64)$$

e

$$T_{\max} = \frac{\sinh(2\pi Lk) \sinh(2\pi Lq)}{\sinh^2[\pi L(k+q)]} \quad (3.65)$$

respectivamente, quando o produto LV assume os valores

$$\frac{N^2 - 1}{2} \text{ para } c_1 = \frac{1}{2} \quad (3.66)$$

$$\frac{\sqrt{c_1^2 + 2(N^2 - 1)(c_1 - 1/2)} - c_1}{4(c_1 - 1/2)} \text{ para } c_1 \neq \frac{1}{2} \quad (3.67)$$

onde N é um inteiro par para $T_{\min}$ e um inteiro ímpar para $T_{\max}$. Verificamos que $c_1 \gtrsim 0.464$ ($c_1 \gtrsim 0.485$) para que exista pelo menos um valor mínimo (máximo) do coeficiente de transmissão. As ressonâncias no coeficiente de transmissão tendem a se repetir para grandes valores de LV e são otimizados para $c_1 = 1/2$, quando $T_{\max} = 1$ e $T_{\min} = \tanh^2(2\pi Lk)$. A presença de máximos e mínimos no coeficiente de transmissão pode ser explicada observando que eles ocorrem quando o potencial efetivo exibe um poço, tanto para o caso de um degrau ascendente quanto para o caso de um degrau descendente. Desta forma, os máximos no coeficiente de transmissão ocorrem devido à interferência construtiva das ondas que se propagam na região do poço, ao passo que os mínimos ocorrem para uma interferência destrutiva nesta mesma região.

3.1.5 O acoplamento vetorial não-mínimo na teoria de DKP e o confinamento de bósons por um potencial linear

A equação de DKP para o potencial linear com um acoplamento vetorial não-mínimo é mapeada no problema do oscilador harmônico unidimensional não-relativístico e as soluções para este tipo de oscilador de DKP são analisadas em detalhes. Enfatizamos, ainda, que o componente

espacial do acoplamento vetorial não-mínimo é crucial para o confinamento de bósons [56] e [68]. Considerando o acoplamento vetorial não-mínimo ($A_\mu^{(2)}$) em (2.108), (3.1) e (3.3) com um potencial linear unidimensional da forma

$$A_0^{(2)} = m^2 \omega_0 |x|, \quad A_1^{(2)} = m^2 \omega_1 x, \quad (3.68)$$

onde ω_0 e ω_1 são quantidades adimensionais. Nosso problema é resolver (2.182) e (2.187) para ϕ e determinar as energias permitidas. Ainda que o valor absoluto de x em $A_0^{(2)}$ seja irrelevante nas equações efetivas para ϕ_1 (para o setor escalar) e $\phi_I^{(\pm)}$ (para o setor vetorial), nós o explicitamos de forma a assegurar a covariância da teoria de DKP sob paridade. Como consequência, teremos que o espinor de DKP terá sua paridade definida e, portanto, A_μ e J_μ serão, genuinamente, quadrivetores.

Para o setor de spin 0 da teoria de DKP, temos que ϕ_1 obedece à equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + (\varepsilon^2 - m^4 \Omega^2 x^2) \phi_1 = 0 \quad (3.69)$$

onde

$$\varepsilon^2 = E^2 - m^2 + m^2 \omega_1, \quad \Omega^2 = \omega_1^2 - \omega_0^2 \quad (3.70)$$

A solução para (3.69), com $\varepsilon^2 > 0$ e $\Omega^2 > 0$, é a conhecida solução da equação de Schrödinger para o oscilador harmônico não-relativístico (veja, *e.g.*, [60]):

$$\varepsilon_n^2 = (2n + 1) m^2 |\Omega| \quad (3.71)$$

$$(\phi_1)_n = N_n H_n \left(m \sqrt{|\Omega|} x \right) \exp \left(-\frac{m^2 |\Omega|}{2} x^2 \right) \quad (3.72)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$, N_n é a constante de normalização, e $H_n(\zeta)$ é o n -ésimo polinômio de Hermite em ζ . Note que a condição $\Omega^2 > 0$ exige que $|\omega_1| > |\omega_0|$, o que significa que o componente espacial do potencial deve dominar sobre seu componente temporal para que o potencial efetivo represente um verdadeiro potencial confinante. Todavia, não há exigências sobre os sinais de ω_1 e ω_0 . De (3.71) obtemos um conjunto discreto das energias de DKP (simétrico em torno de $E = 0$ como deveria ser, uma vez que $A_\mu^{(2)}$ não distingue partículas de antipartículas) $E_n = \pm |E_n|$ em que

$$|E_n| = m \sqrt{1 - \omega_1 + (2n + 1) |\Omega|} \quad (3.73)$$

que não leva em conta o sinal de ω_0 . Em geral, $|E_n|$ é maior para $\omega_1 < 0$ do que para $\omega_1 > 0$, e sofre um incremento com o aumento do número quântico, além de ser uma função monotonamente decrescente de ω_0 . De forma a garantir um espectro real, as constantes de acoplamento ω_0 e ω_1 devem satisfazer ao vínculo adicional

$$(2n + 1) \sqrt{\omega_1^2 - \omega_0^2} \geq \omega_1 - 1 \quad (3.74)$$

Se elevarmos (3.74) ao quadrado, o resultado desta inequação será uma inequação algébrica quadrática em ω_1 (ou ω_0), que pode ser resolvida analiticamente. No entanto, algumas soluções espúrias podem aparecer neste processo; todavia, estas soluções espúrias podem ser eliminadas verificando se elas satisfazem a inequação original. Um procedimento mais instrutivo é seguir um método gráfico, no qual podemos identificar as regiões das funções de ω_1 em (3.74): uma hipérbole do lado esquerdo da inequação,

$$f_H(\omega_1) = (2n + 1) \sqrt{\omega_1^2 - \omega_0^2} \quad (3.75)$$

e uma linha reta do lado direito da inequação,

$$f_S(\omega_1) = \omega_1 - 1 \quad (3.76)$$

$f_H(\omega_1)$ é uma função não-negativa com dois ramos simétricos, e para $|\omega_1| \gg |\omega_0|$ esta função se aproxima de $(2n+1)|\omega_1|$. A figura 3.7 apresenta os resultados para os três primeiros números quânticos com $|\omega_0| > 1$. Para $\omega_1 > |\omega_0|$, esta figura mostra claramente que $f_H \geq f_S$ somente para algum $\omega_1 \geq (\tilde{\omega}_1)_n > |\omega_0|$, embora $f_H > f_S$ para todo $\omega_1 < -|\omega_0|$. Os pontos de intersecção de f_H e f_S , para $|\omega_0| > 1$, correspondem a $|E_n| = 0$. A figura 3.7 também nos permite inferir que $|E_n| > 0$ para $|\omega_0| < 1$. Observe a existência de uma grande densidade de estados, correspondendo a um conjunto infinito de soluções quasi-degeneradas na vizinhança de $|\omega_1| = |\omega_0|$.

No limite de um acoplamento fraco, $\omega_1 \ll 1$ e $|\Omega| \ll 1$, $|E_n| \simeq m$ para pequenos números quânticos, e (3.73) se torna

$$|E_n| \simeq m \left[1 - \frac{\omega_1}{2} + \left(n + \frac{1}{2} \right) |\Omega| \right] \quad (3.77)$$

Este espectro de energia igualmente espaçado é um tipo de limite não-relativístico. Portanto, podemos dizer que os potenciais lineares dados por (3.68) descrevem um genuíno oscilador vetorial não-mínimo de DKP. No entanto, a estrutura de Lorentz dos potenciais não desempenham nenhum papel em um esquema não-relativístico, uma vez que devemos usar a equação de Schrödinger com o potencial $A_0^{(2)} + A_1^{(2)}$. Ainda que o potencial efetivo se comporte como um oscilador harmônico em (3.69), os potenciais lineares dados por (3.68) não fornecem soluções de estados ligados na equação de Schrödinger.

Por outro lado, para $|\omega_1| \gg |\omega_0|$ temos que

$$|E_n| \simeq m \sqrt{1 - \omega_1 + (2n+1)|\omega_1|} \quad (3.78)$$

portanto, $|E_n| > m$ para $\omega_1 < 0$. Com respeito a $\omega_1 > 0$, com o aumento de ω_1 , o espectro se move em direção a $E = 0$, com exceção de $\omega_0 = 0$ que mantém $|E_n| \geq m$ (o espectro consente $|E_0| = m$ neste caso limite).

As figuras 3.8, 3.9 e 3.10 ilustram o espectro em termos de $\omega_0/|\omega_1|$ para três valores diferentes de ω_1 . Para $\omega_1 < 1$ existe uma lacuna espectral dada por

$$2m \sqrt{1 - \omega_1 + (2n+1)|\Omega|} \quad (3.79)$$

e existem infinitos níveis de energia acima de m onde, na ausência de interações, existia o contínuo. À medida que ω_1 aumenta, o espectro se move em direção a $E = 0$, com exceção de $\omega_0 = 0$. A lacuna espectral tende a desaparecer com ω_1 se tornando próximo de 1 (para $\omega_0 \neq 0$), e portanto, os níveis positivos e negativos de energia tendem a se tornar muito próximos. As figuras 3.11 e 3.12 ilustram o espectro em termos de ω_1/ω_0 para dois diferentes valores de ω_0 .

A densidade de carga

$$J_0 = \frac{E}{m} |\phi_1|^2 \quad (3.80)$$

dita que ϕ_1 deve ser normalizada como

$$\frac{|E|}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\phi_1|^2 = 1 \quad (3.81)$$

Usando a propriedade [60]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta H_n^2(\zeta) \exp(-\zeta^2) = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (3.82)$$

determinamos a constante de normalização

$$N_n = \left(\frac{m|\Omega|}{\pi} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{m}{2^n n! |E_n|}}, \quad \text{para } E_n \neq 0 \quad (3.83)$$

Portanto, para $E_n \neq 0$

$$J_{0n}(x) = \frac{\text{sign}(E_n)}{2^n n!} \sqrt{\frac{m|\Omega|}{\pi}} H_n^2 \left(m \sqrt{|\Omega|} x \right) \exp(-m^2 |\Omega| x^2) \quad (3.84)$$

De forma que, usando (2.52) a quantidade $(\Delta x_n)^2 = \langle x^2 \rangle_n - \langle x \rangle_n^2$ pode ser escrita como

$$(\Delta x_n)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |J_n^0(x)| x^2 - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx |J_n^0(x)| x \right)^2$$

Agora se torna simples escrevermos a incerteza na posição

$$\Delta x_n = \sqrt{\frac{n + 1/2}{m^2 |\Omega|}} \quad (3.85)$$

Se Δx_n encolhe, então Δp_n (incerteza no momento) deverá crescer, em consoância com o princípio de incerteza de Heisenberg. Todavia, a incerteza máxima no momento é dada por m , tornando possível a localização de um bóson em uma região do espaço menor do que seu comprimento de onda Compton. No entanto, se definirmos uma massa efetiva como $m_{\text{eff}} = m \sqrt{|\Omega|}$ e o comprimento de onda Compton como $\lambda_{\text{eff}} = 1/m_{\text{eff}}$ encontramos que $\Delta x_n = \lambda_{\text{eff}} \sqrt{n + 1/2}$. Portanto, uma alta localização de bósons, relacionada a grandes valores de $|\Omega|$ ($|\omega_1| \gg |\omega_0|$) nunca ameaçará a interpretação de partícula única na teoria de DKP. Para $|\Omega| \simeq 0$ ($|\omega_1| \simeq |\omega_0|$) temos que $m_{\text{eff}} \simeq 0$ e as soluções quasi-degeneradas anteriormente mencionadas estão relacionadas a estados não-localizados. Todavia, para o comportamento na vizinhança de $E_n = 0$ devemos notar que, apesar de J_{0n} e Δx_n serem independentes de E_n , o espinor de DKP não é definido para $|E_n| = 0$. Portanto, $E_n = 0$ deve ser descartado da teoria. Ainda que os estados de energia positiva e energia negativa nunca se encontrem, eles podem estar extremamente próximos, não oferecendo, portanto, nenhum risco para a ocorrência do paradoxo de Klein.

Para o setor de spin 1, como no procedimento para o setor de spin 0, temos que $\phi_I^{(\pm)}$ obedecem a equação

$$\frac{d^2 \phi_I^{(\pm)}}{dx^2} + (\varepsilon_{\pm}^2 - m^4 \Omega^2 x^2) \phi_I^{(\pm)} = 0 \quad (3.86)$$

onde Ω^2 é definido como em (3.70) e

$$\varepsilon_{\pm}^2 = E^2 - m^2 \pm m^2 \omega_1 \quad (3.87)$$

Para os estados ligados, os quais devotaremos a nossa atenção, devemos exigir que $\varepsilon_{\pm}^2 > 0$ e $\Omega^2 > 0$, como no caso do setor escalar. A solução é expressa como

$$\varepsilon_{n\pm}^2 = (2n_{\pm} + 1) m^2 |\Omega| \quad (3.88)$$

$$\left(\phi_I^{(\pm)}\right)_{n_{\pm}} = N_{n_{\pm}} H_{n_{\pm}} \left(m\sqrt{|\Omega|x}\right) \exp\left(-\frac{m^2|\Omega|}{2}x^2\right) \quad (3.89)$$

onde $n_{\pm} = 0, 1, 2, \dots$, $N_{n_{\pm}}$ é a constante de normalização e $N_{n_{+}} = (N_3, N_4)^T$ é a matriz coluna cujos elementos são as constantes de normalização relacionados às soluções para ϕ_3 e ϕ_4 . Portanto, as condições necessárias para os estados ligados de bósons de spin 1 sujeitos aos potenciais lineares já estão estabelecidas. A forma das soluções analíticas já foram também obtidas e temos que as soluções relacionadas ao espinor $\phi_I^{(+)}$ são formalmente as mesmas obtidas para os bósons de spin 0. Assim, podemos encontrar uma energia comum ao problema dos bósons de spin 1. A condição de contorno exige que os números quânticos n_{+} e n_{-} devam satisfazer à relação

$$n_{+} - n_{-} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2}} \frac{\omega_1}{|\omega_1|} \quad (3.90)$$

Esta exigência dita que as soluções aceitáveis para $\phi_I^{(+)}$ e $\phi_I^{(-)}$ somente ocorrerão para um determinado número de possibilidades para $|\omega_1|/|\omega_0|$, *viz.*

$$\frac{|\omega_0|}{|\omega_1|} = \sqrt{1 - \frac{1}{(n_{+} - n_{-})^2}} \quad (3.91)$$

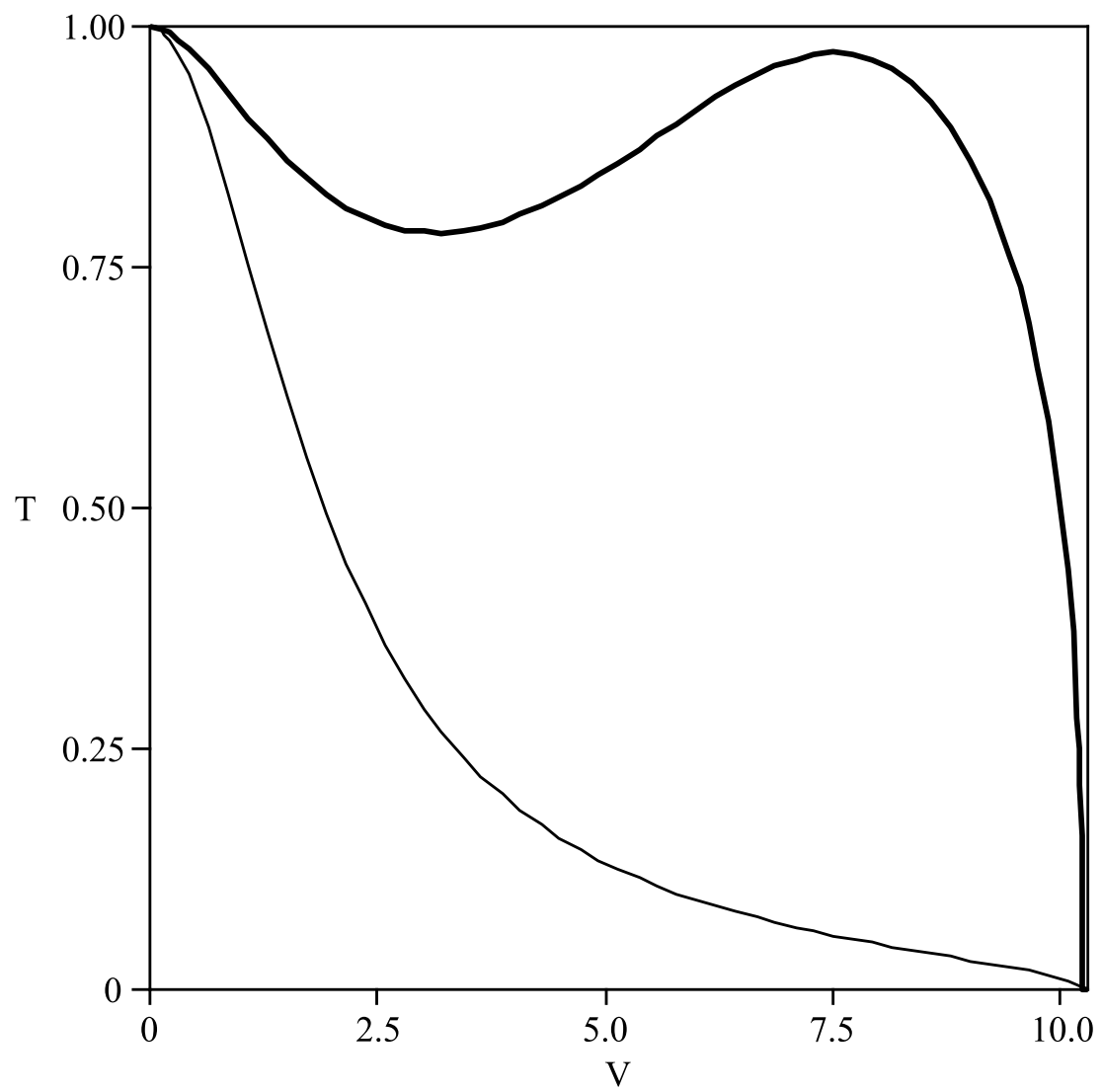


Figura 3.1: Coeficiente de transmissão *versus* altura do degrau V para o caso em que $c_1 = 0.501$

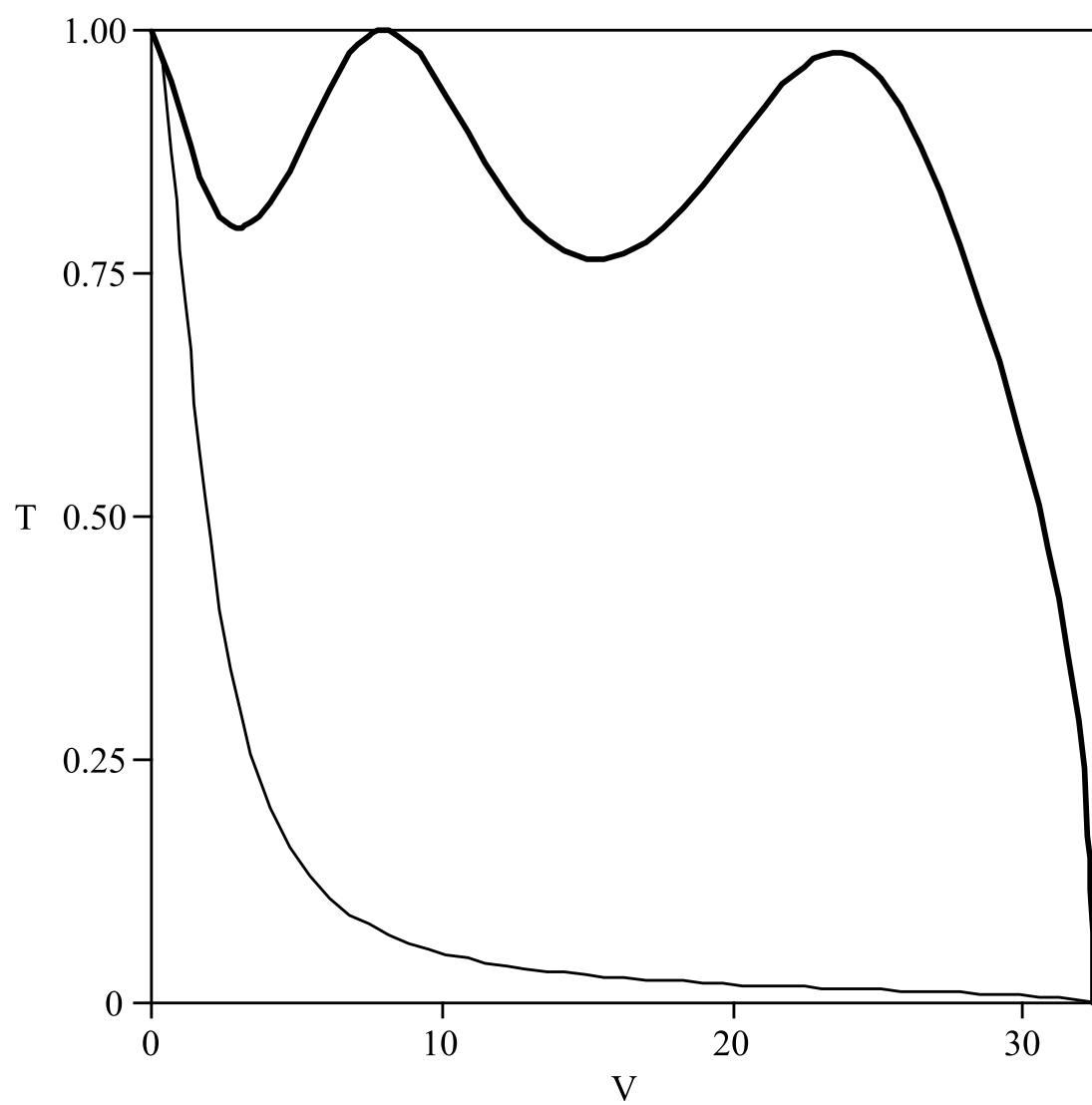


Figura 3.2: Coeficiente de transmissão *versus* altura do degrau V para o caso em que $c_1 = 0.5001$

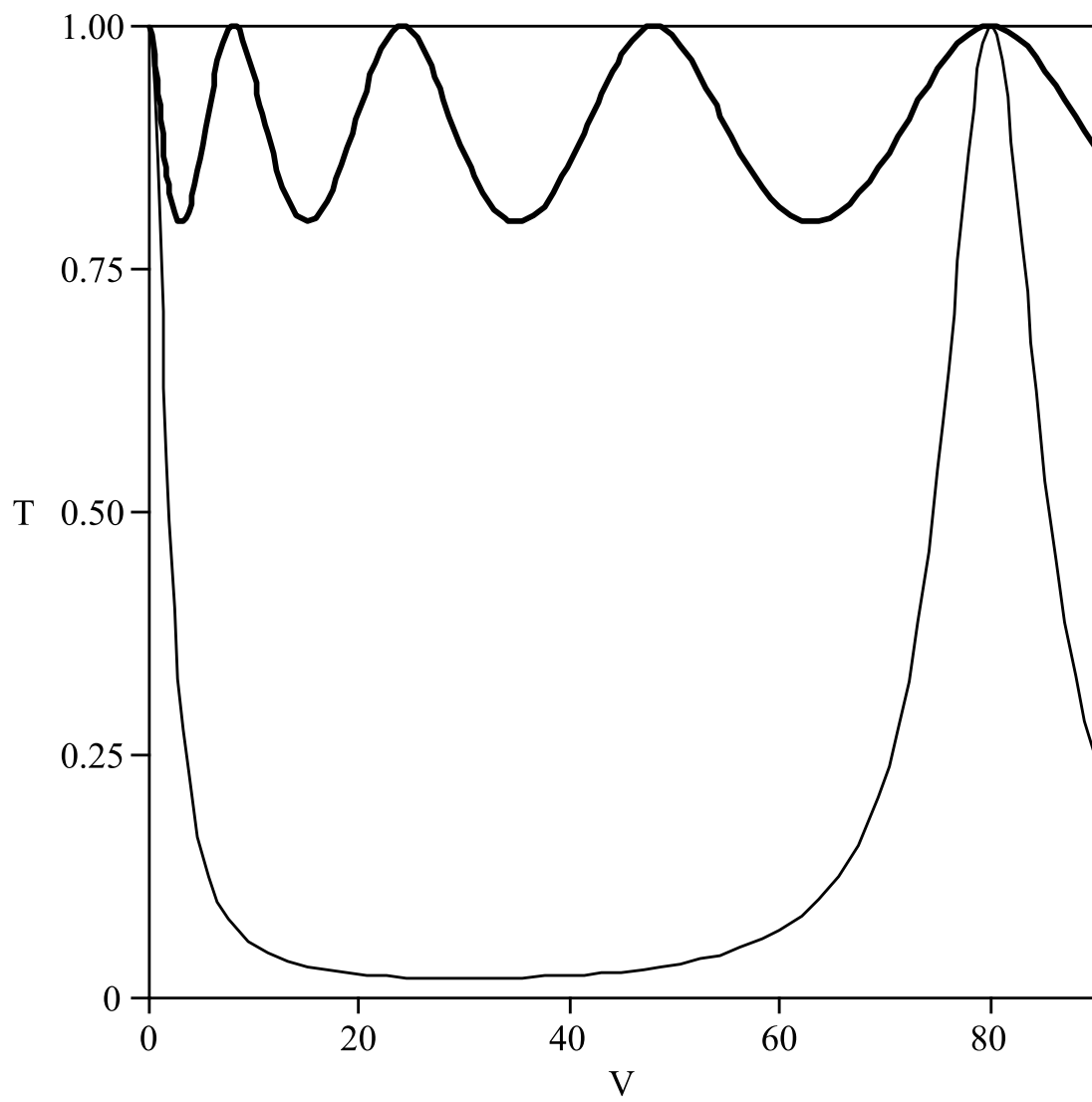


Figura 3.3: Coeficiente de transmissão *versus* altura do degrau V para o caso em que $c_1 = 0.5$

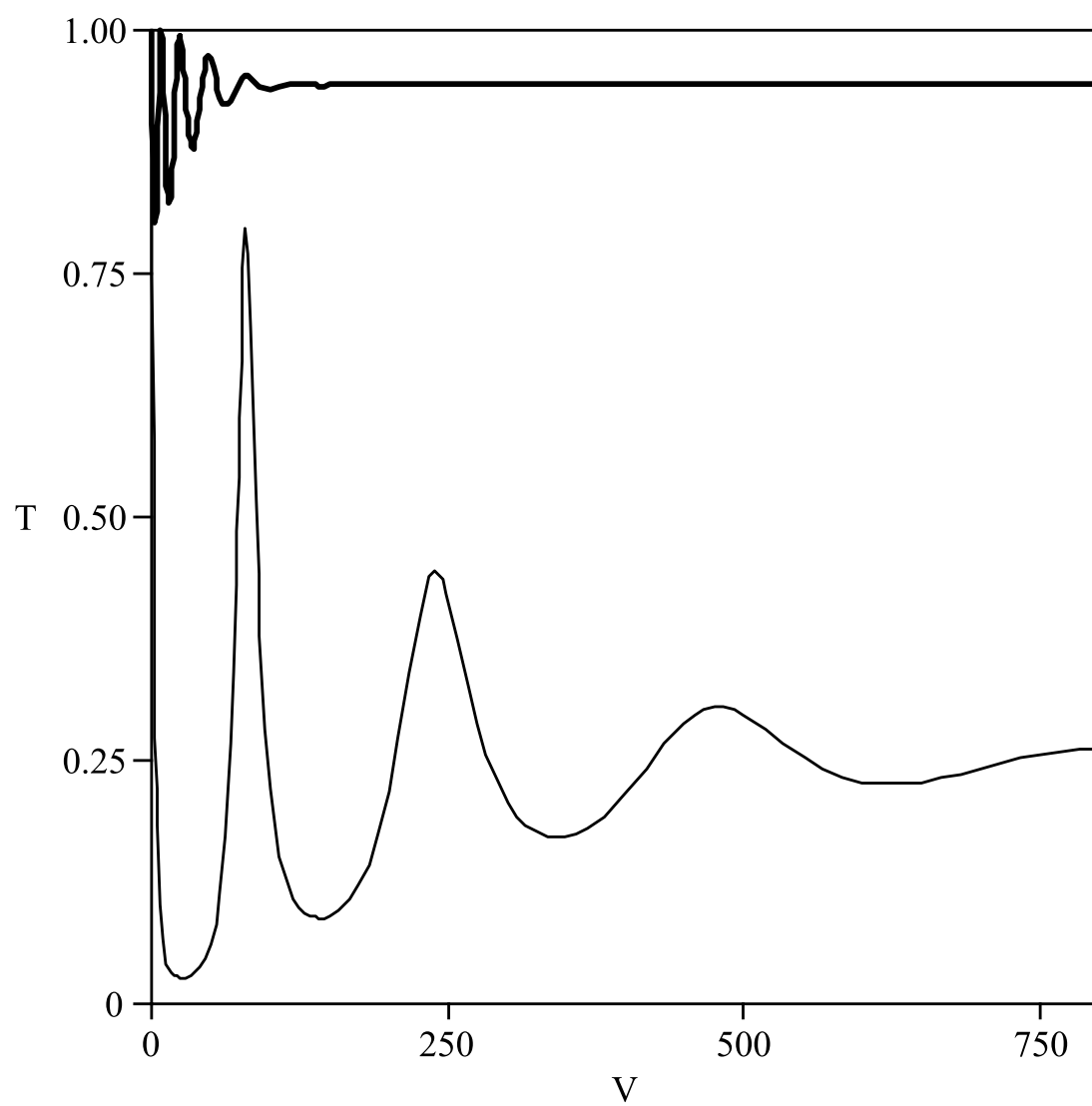


Figura 3.4: Coeficiente de transmissão *versus* altura do degrau V para o caso em que $c_1 = 0.4999$

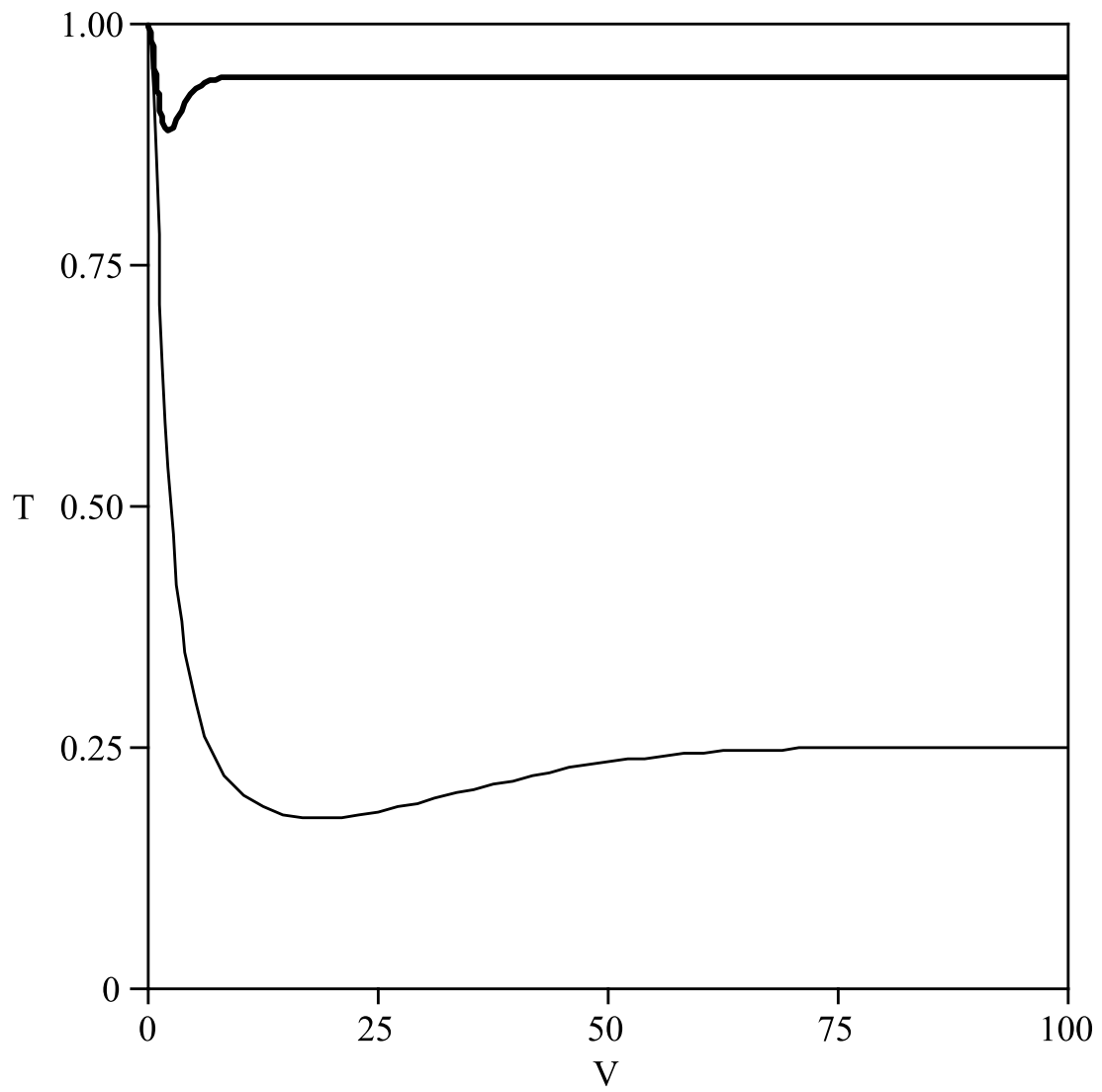


Figura 3.5: Coeficiente de transmissão *versus* altura do degrau V para o caso em que $c_1 = 0.48$

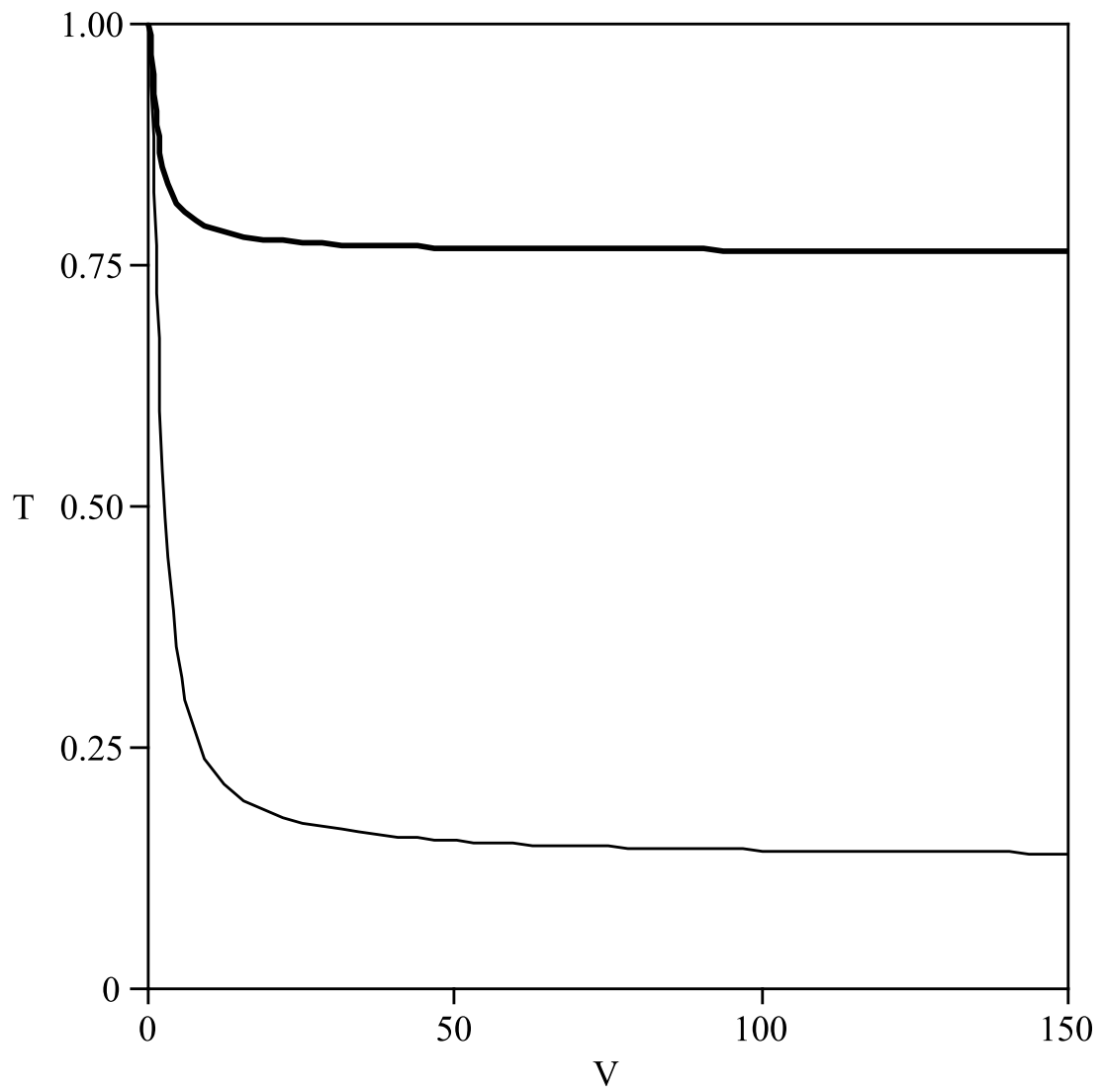


Figura 3.6: Coeficiente de transmissão *versus* altura do degrau V para o caso em que $c_1 = 0$

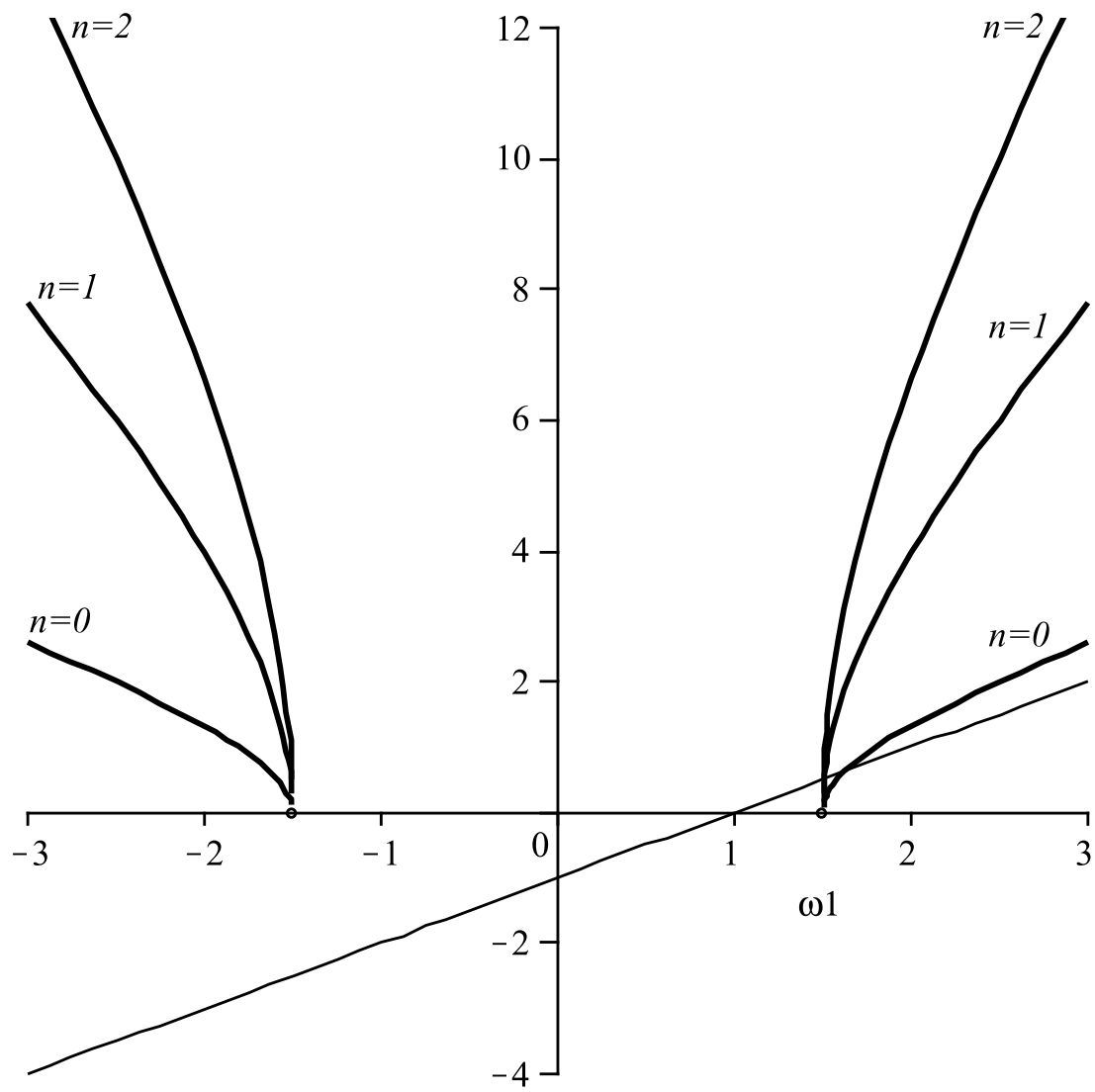


Figura 3.7: Solução gráfica de (3.74) para $|\omega_0| = 1.5$ para os três primeiros números quânticos. Linhas fortes para $f_H(\omega_1)$ e linha suave para $f_S(\omega_1)$.

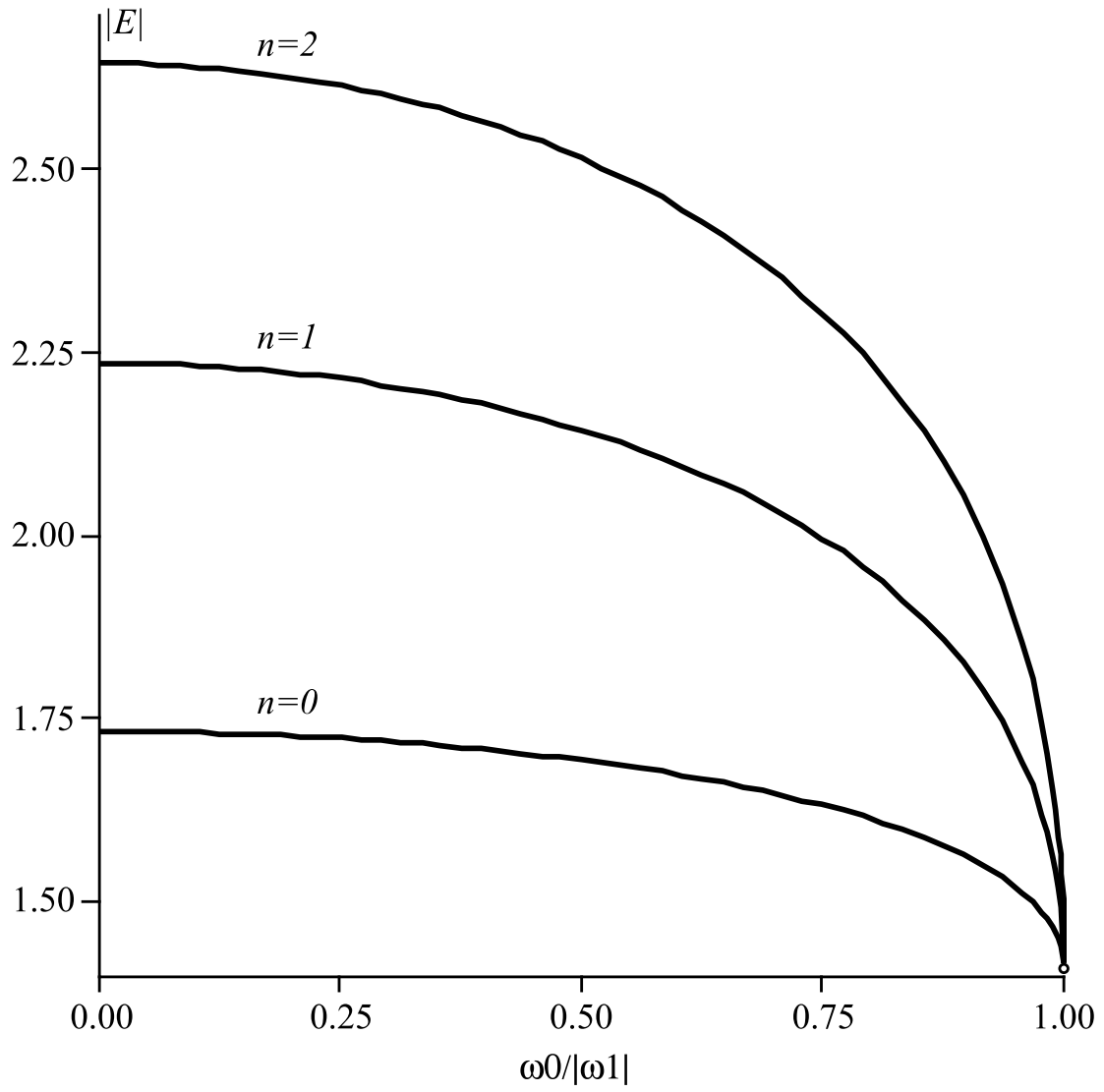


Figura 3.8: Espectro positivo para bósons de spin 0 para os três primeiros números quânticos como uma função de $\omega_0/|\omega_1|$, para $\omega_1 = -1$ ($m = 1$).

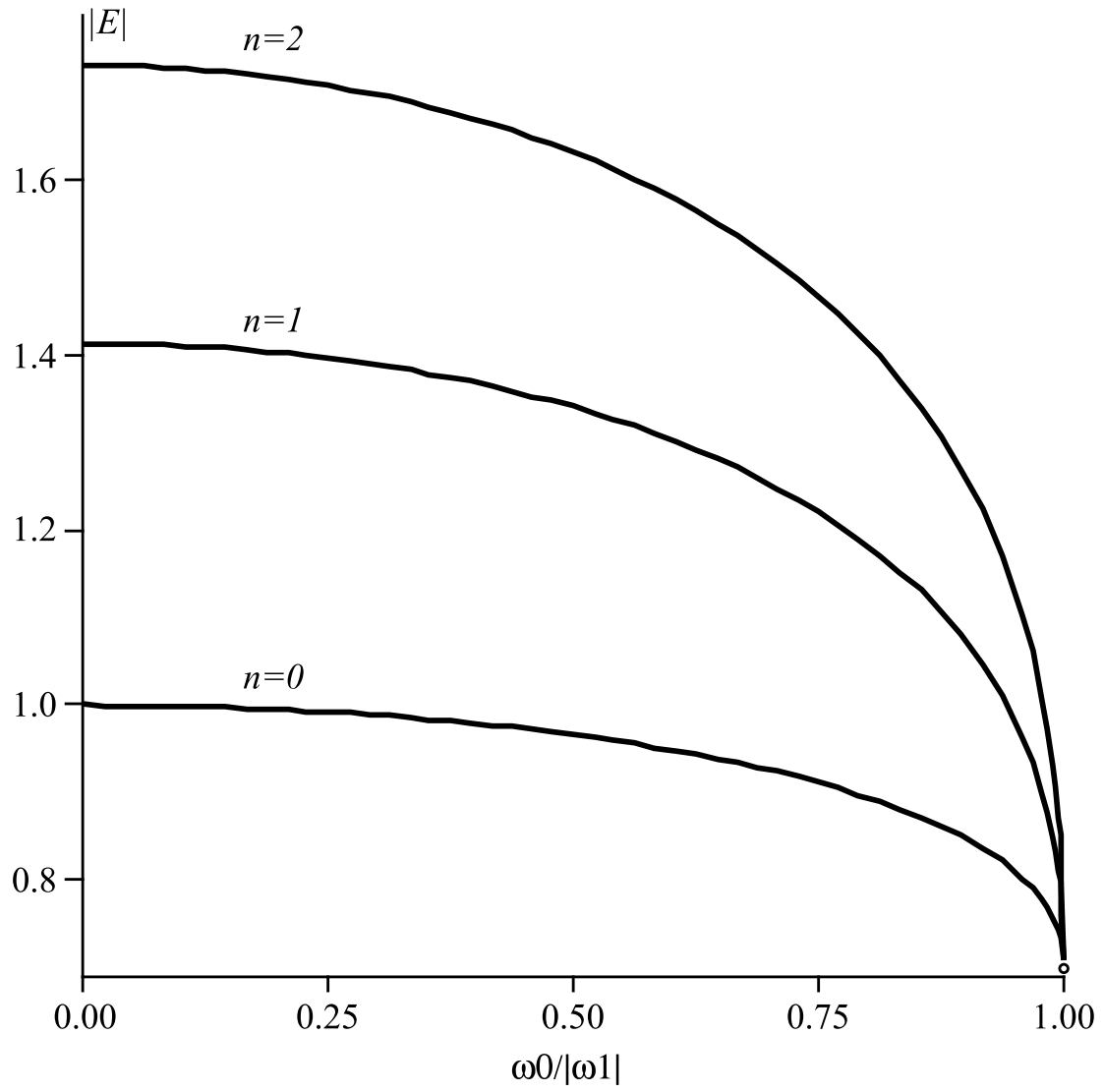


Figura 3.9: Espectro positivo para bósons de spin 0 para os três primeiros números quânticos como uma função de $\omega_0/|\omega_1|$, para $\omega_1 = 0.5$ ($m = 1$).

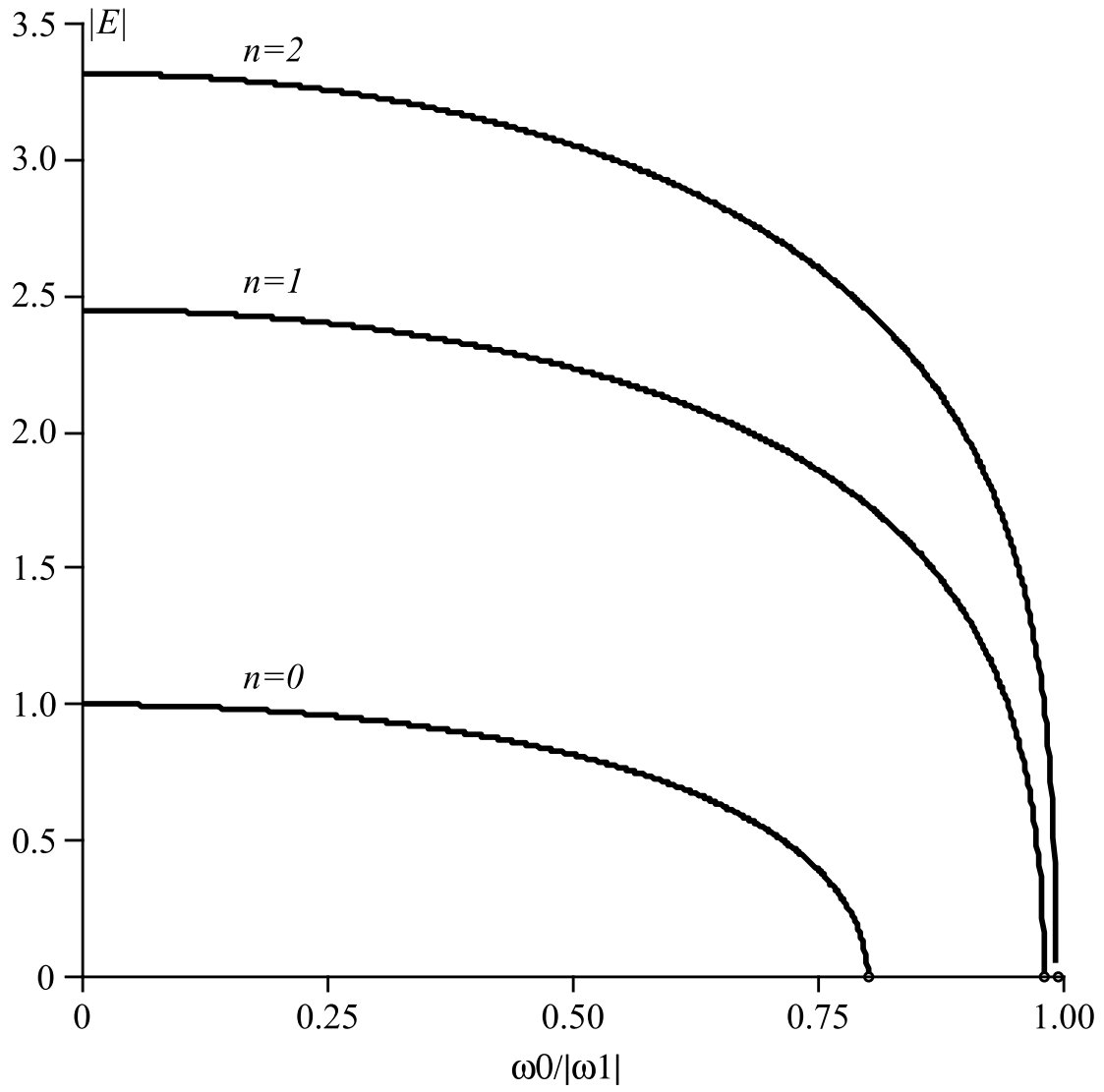


Figura 3.10: Espectro positivo para bósons de spin 0 para os três primeiros números quânticos como uma função de $\omega_0/|\omega_1|$, para $\omega_1 = 2.5$ ($m = 1$).

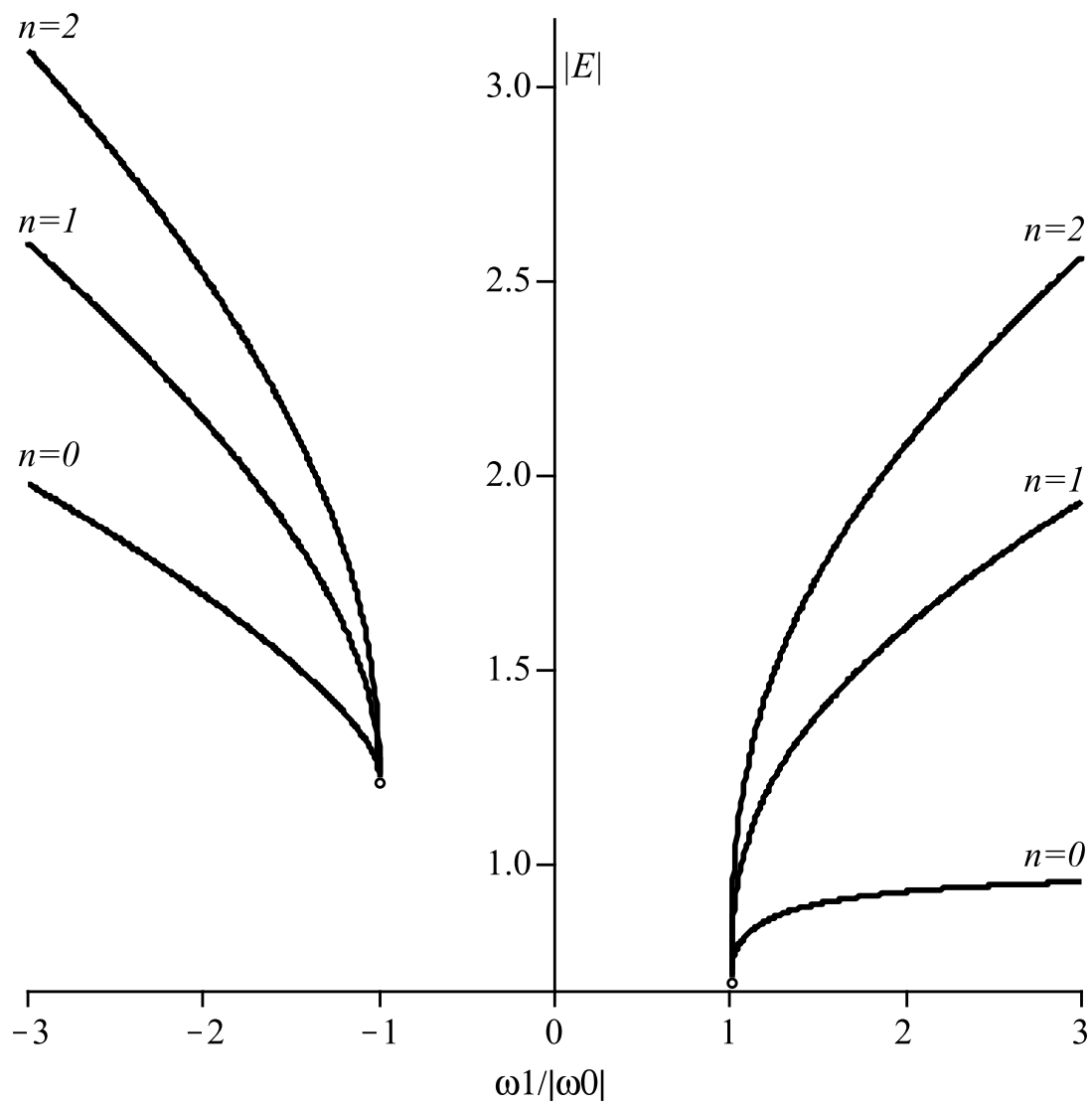


Figura 3.11: Espectro positivo de bósons de spin 0 para os três primeiros números quânticos como uma função de ω_1/ω_0 , para $\omega_0 = 0.5$ ($m = 1$).

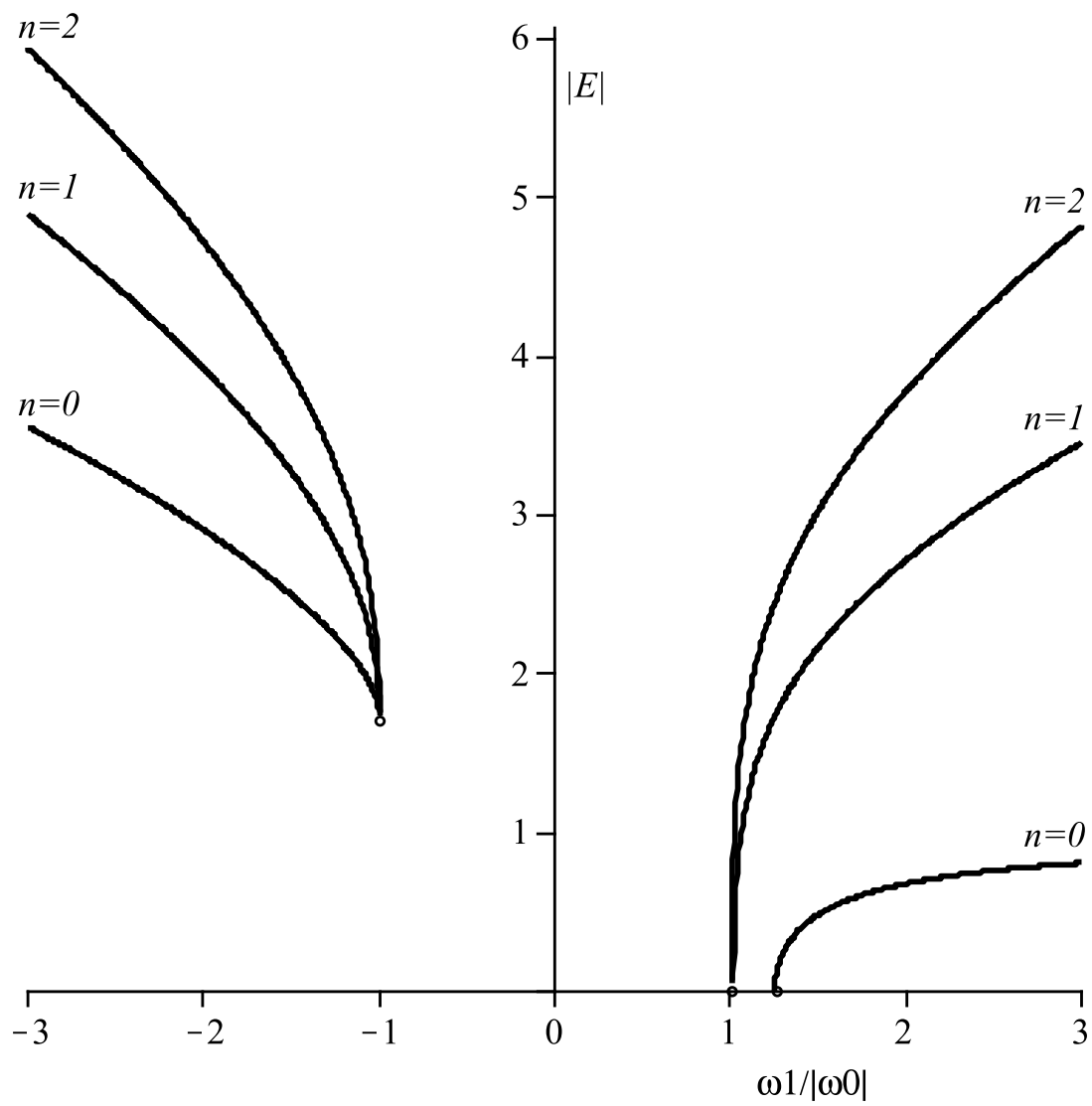


Figura 3.12: Espectro positivo de bósons de spin 0 para os três primeiros números quânticos como uma função de ω_1/ω_0 , para $\omega_0 = 2$ ($m = 1$).

Capítulo 4

Conclusões

Investigamos algumas propriedades da teoria de DKP com as interações escalares e vetoriais. Mostramos que a conservação da corrente impõe restrições severas sobre as estruturas das possíveis interações. A interação vetorial não-mínima recebeu atenção especial. Um estudo detalhado do efeito da paridade, conjugação de carga e reversão temporal sobre os acoplamentos escalar e vetorial foi feito, exibindo certas facetas do potencial vetorial não-mínimo que não são exibidas pelo potencial minimamente acoplado. Principalmente, mostramos que o paradoxo de Klein só pode ocorrer com a interação vetorial mínima, uma vez que o acoplamento vetorial não-mínimo não acopla com a carga da partícula, tornando impossível a ocorrência do paradoxo de Klein para este tipo de acoplamento.

Estabelecemos como se deve calcular os valores esperados corretamente e determinamos as condições de ortonormalidade para os estados estacionários. Adotando uma representação específica para as matrizes de DKP, estabelecemos as equações de movimento unidimensionais para os componentes do espinor de DKP. Salientamos que o componente espacial do potencial vetorial não-mínimo não pode ser absorvido no espinor. Além disso, mostramos que o componente espacial do potencial vetorial não-mínimo poderia ser irrelevante para a formação de estados ligados para potenciais que se anulam no infinito mas que a sua presença é essencial para o confinamento de bósons.

No caso do acoplamento vetorial não-mínimo, tanto os níveis de energia das partículas quanto os das antipartículas são membros do espectro, e o espectro das partículas e das antipartículas é simétrico em $E = 0$. Logo, se a interação é atrativa (repulsiva) para bósons, ela também será atrativa (repulsiva) para os antibósons. No entanto, não há cruzamento entre estes níveis de energia uma vez que os possíveis estados com $E = 0$ são não-normalizáveis. Este fato implica que não existe um canal para uma criação espontânea de bósons-antibósons e, por esta razão, a interpretação de partícula única na teoria de DKP está assegurada.

Para o problema unidimensional, mostramos que a equação de DKP com as interações escalares e vetoriais podem ser mapeadas num problema de Sturm-Liouville de forma que as soluções podem ser encontradas resolvendo um problema tipo Schrödinger da mecânica quântica não-relativística. O comportamento das soluções dos problemas propostos foram discutidos em detalhes, reiterando a ausência do paradoxo de Klein no acoplamento vetorial não-mínimo. A localização de partículas em regiões do espaço arbitrariamente pequenas foi remediada recorrendo aos conceitos de massa efetiva e comprimento de onda Compton efetivo.

Ao estudarmos a influência das interações escalares e vetoriais no formalismo de DKP, mostramos que o setor de spin 1 da teoria de DKP se comporta formalmente como o setor de spin 0, e que o acoplamento escalar faz com que o formalismo de DKP não seja mais equivalente aos formalismos de Klein-Gordon ou Proca. Inferimos que a localização do bóson não exige nenhum valor mínimo no contexto da interpretação de partícula única da equação de DKP.

Referências Bibliográficas

- [1] G. Petiau, Acad. R. Belg., A. Sci. Mém. Collect. **16**, No. 2 (1936); N. Kemmer, Proc. R. Soc. A **166**, 127 (1938); R. J. Duffin, Phys. Rev. **54**, 1114 (1938).
- [2] N. Kemmer, Proc. R. Soc. A **173**, 91 (1939).
- [3] M. Nowakowski, Phys. Lett. A **244**, 329 (1998).
- [4] J. T. Lunardi *et al.*, Phys. Lett. A **268**, 165 (2000).
- [5] M. Riedel, *Relativistische Gleichungen fuer Spin-1-Teilchen*, Diplomarbeit, Institute for Theoretical Physics, Johann Wolfgang Goethe-University, Frankfurt/Main (1979).
- [6] E. Fischbach, M. M. Nieto e C. K. Scott, J. Math. Phys. **14**, 1760 (1973).
- [7] E. Fischbach *et al.*, Phys. Rev. Lett. **26**, 1200 (1971); E. Fischbach *et al.*, Phys. Rev. Lett. **27**, 1407 (1971); E. Fischbach e M. M. Nieto, Phys. Rev. Lett. **29**, 1046 (1972); N. G. Deshpande e P. C. McNamee, Phys. Rev. D **5**, 1012 (1972); A. O. Barut e Z. Z. Aydin, Phys. Rev. D **6**, 3340 (1972); E. Fischbach, M. M. Nieto e C. K. Scott, Phys. Rev. D **7**, 207 (1973); Z. Z. Aydin e A. O. Barut, Phys. Rev. D **7**, 3522 (1973); M. D. Scadron e R. L. Thews, Phys. Rev. D **9**, 2180 (1974); E. Fischbach *et al.*, Phys. Rev. D **9**, 2183 (1974); E. Fischbach, M. M. Nieto e C. K. Scott, Prog. Theor. Phys. **51**, 1585 (1974); F. T. Meiere *et al.*, Phys. Rev. D **8**, 4209 (1973); E. Friedman, G. Kälbermann e C. J. Batty, Phys. Rev. C **34**, 2244 (1986).
- [8] B. C. Clark *et al.*, Phys. Rev. Lett. **55**, 592 (1985).
- [9] G. Kälbermann, Phys. Rev. C **34**, 2240 (1986); R. E. Kozack *et al.*, Phys. Rev. C **37**, 2898 (1988); R. E. Kozack, Phys. Rev. C **40**, 2181 (1989).
- [10] V. K. Mishra *et al.*, Phys. Rev. C **43**, 801 (1991).
- [11] L. J. Kurth *et al.*, Phys. Rev. C **50**, 2624 (1994); R. C. Barret e Y. Nedjadi, Nucl. Phys. A **585**, 311c (1995); L. J. Kurth *et al.*, Nucl. Phys. A **585**, 335c (1995).
- [12] S. Ait-Tahar, J. S. Al-Khalili e Y. Nedjadi, Nucl. Phys. A **589**, 307 (1995).
- [13] B. C. Clark *et al.*, Phys. Lett. B **427**, 231 (1998).
- [14] P. Ghose, D. Home e M. N. S. Roy, Phys. Lett. A **183**, 267 (1993).
- [15] P. Ghose, Phys. Lett. A **191**, 362 (1994); P. Ghose, Found. Phys. **26**, 1441 (1996).
- [16] P. Ghose e M. K. Samal, Phys. Rev. E **64**, 036620 (2001).
- [17] P. Ghose *et al.*, Phys. Lett. A **290**, 205 (2001).

- [18] C. A. Bonin *et al.*, quant-ph/0608002.
- [19] H. Nikolić, hep-th/0702060.
- [20] P. Ghose, M. K. Samal e A. Datta, Phys. Lett. A **315**, 23 (2003).
- [21] W. Struyve *et al.*, Phys. Lett. A **322**, 84 (2004).
- [22] A. Datta, *High Spin Field Theories and Relativistic Quantum Mechanics of Bosons*, in *Bosons, Ferromagnetism and Crystal Growth Research*, Horizons in World Physics, edited by E. Seifer (Nova Publishers, New York, 2007) Vol. 257, Chap. 4, pp. 119-149.
- [23] T. R. Cardoso, L. B. Castro e A. S. de Castro, Phys. Lett. A **372**, 5964 (2008).
- [24] V. Gribov, Eur. Phys J. C **10**, 71 (1999).
- [25] I. V. Kanatchikov, Rep. Math. Phys. **46**, 107 (2000).
- [26] M. C. B. Fernandes e J. D. M. Viannna, Found. Phys. **29**, 201 (1999); A. O. Bolivar, Physica A **315**, 601 (2002).
- [27] V. M. Red 'kov, quant-ph/9812007; J. T. Lunardi, B. M. Pimentel e R. G. Teixeira, Gen. Rel. Grav. **34**, 491 (2002); R. Casana *et al.*, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 4197 (2002); R. Casana *et al.*, Gen. Rel. Grav. **34**, 1941 (2002); R. Casana *et al.*, Class. Quantum Grav. **20**, 2457 (2003); R. Casana *et al.*, Class. Quantum Grav. **22**, 3083 (2003); K. Sogut e A. Havare, Class. Quantum Grav. **23**, 7129 (2005); R. Casana, C. A. M. de Melo e B. M. Pimentel, Class. Quantum Grav. **24**, 723 (2007).
- [28] J. T. Lunardi *et al.*, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 205 (2002).
- [29] B. M. Pimentel e V. Ya. Fainberg, Theor. Math. Phys. **124**, 1234 (2000); V. Ya. Fainberg e B. M. Pimentel, Phys. Lett. A **271**, 16 (2000).
- [30] M. de Montigny *et al.*, J. Phys. A **33**, L273 (2000); M. de Montigny *et al.*, J. Phys. A **34**, 8901 (2001); M. C. B. Fernandes, A. E. Santana e J. D. M. Viannna, J. Phys. A **36**, 3841 (2003); J. D. M. Viannna, M. C. B. Fernandes e A. E. Santana, Found. Phys. **35**, 109 (2005); E. S. Santos e L. M. Abreu, J. Phys. A **41**, 075407 (2008).
- [31] R. Casana *et al.*, hep-th/0506193.
- [32] R. Casana *et al.*, Phys. Lett. A **316**, 33 (2003).
- [33] J. Daicic e N. E. Frankel, J. Phys. A **26**, 1397 (1993); K. Sogut, A. Havare e I. Acikgoz, J. Math. Phys. **43**, 3952 (2002).
- [34] J. A. Swansson e B. H. J. McKellar, J. Phys. A **34**, 1051 (2001).
- [35] A. Boumali, Can. J. Phys. **82**, 67 (2004); A. Boumali, Can. J. Phys. **85**, 1417 (2007).
- [36] M. Merad, Int. J. Theor. Phys. **46**, 2105 (2007);
- [37] M. Merad, H. Bada e A. Lecheheb, Czech. J. Phys. **56**, 765 (2006).
- [38] N. Debergh, J. Ndimubandi e D. Strivay, Z. Phys. C **56**, 421 (1992); Y. Nedjadi e R. C. Barret, J. Phys. A **27**, 4301 (1994).

- [39] Y. Nadjadi, S. Ait-Tahar e R. C. Barret, J. Phys. A **31**, 3867 (1998).
- [40] Y. Nadjadi e R. C. Barret, J. Phys. A **31**, 6717 (1998).
- [41] D. A. Kulikov, R. S. Tutik e A. P. Yaroshenko, Mod. Phys. Lett. A **20**, 43 (2005).
- [42] I. Boztosun *et al.*, J. Math. Phys. **47**, 062301 (2006).
- [43] A. Boumali, J. Math. Phys. **49**, 022302 (2008).
- [44] Y. Kasri e L. Chetouani, Int. J. Theor. Phys. **47**, 2249 (2008).
- [45] A. Boumali, Phys. Scr. **76**, 669 (2007).
- [46] F. Yaşuk M. Karakoc e I. Boztosun, Phys. Scr. **78**, 045010 (2008).
- [47] L. Chetouani *et al.*, Int. J. Theor. Phys. **43**, 1147 (2004).
- [48] B. Boutabia-Chéraitia e T. Boudjedaa, Phys. Lett. A **338**, 97 (2005).
- [49] F. Yaşuk *et al.*, Phys. Scr. **71**, 340 (2005).
- [50] Y. Nadjadi e R. C. Barret, J. Math. Phys. **35**, 4517 (1994).
- [51] Y. Nadjadi e R. C. Barret, J. Phys. G **19**, 87 (1993).
- [52] S. Gönen, A. Havare e N. Unal, hep-th/0207087.
- [53] T. R. Cardoso, L. B. Castro e A. S. de Castro, Can. J. Phys. **87**, 857 (2009).
- [54] T. R. Cardoso, L. B. Castro e A. S. de Castro, Can. J. Phys. **87**, 1185 (2009).
- [55] T. R. Cardoso, L. B. Castro e A. S. de Castro, Nuclear Phys. B, Proceedings Supplement, **199**, 207 (2010).
- [56] T. R. Cardoso, L. B. Castro e A. S. de Castro, J. Phys. A, Mathematical and Theoretical, **43**, 055306 (2010).
- [57] H. M. Pilkuhn, *Relativistic Quantum Mechanics* (Springer, Berlin, 2003).
- [58] Veja, *e.g.*, R. F. Guertin e T. L. Wilson, Phys. Rev. D **15**, 1518 (1977).
- [59] Veja, *e.g.*, B. Vijayalakshmi, M. Seetharaman e P. M. Mathews, J. Phys. A **12**, 665 (1979).
- [60] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1968).
- [61] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations* (Springer, Berlin, 1990).
- [62] P. Strange, *Relativistic Quantum Mechanics with Applications in Condensed Matter and Atomic Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- [63] H. Umezawa, *Quantum Field Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1956).
- [64] R. F. Guertin e T. L. Wilson, Phys. Rev. D **15** (1977) 1518.
- [65] T. R. Cardoso e A. S. de Castro, A.S., *EQUAÇÃO DE DUFFIN-KEMMER-PETIAU VERSUS EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON: Estudo comparativo das soluções para potenciais quadrados*, Projeto FAPESP 2007/07894-6.

- [66] T. R. Cardoso, L. B. Castro e A. S. de Castro, Int. J. Theor. Phys. **49**, 10 (2010).
- [67] N. Rosen e P.M. Morse, Phys. Rev. **42**, 210 (1932) .
- [68] T. R. Cardoso, L. B. Castro e A. S. de Castro, Nuclear Phys. B, Proceedings Supplement, **199**, 203 (2010).