

ANÁLISE DE VARIÂNCIA *WAVELET* DE SÉRIES TEMPORAIS COM DADOS FALTANTES: AVALIAÇÃO DO ÍNDICE DE CINTILAÇÃO IONOSFÉRICA S4 EM SINAIS DE SATÉLITE GPS

Bruno Felipe de Jesus Oliveira

Orientadora: Profa. Dra. Eniuce Menezes de Souza

Coorientadora: Profa. Dra. Daniele Barroca Marra Alves

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**ANÁLISE DE VARIÂNCIA *WAVELET* DE
SÉRIES TEMPORAIS COM DADOS
FALTANTES: AVALIAÇÃO DO ÍNDICE DE
CINTILAÇÃO IONOSFÉRICA S4 EM
SINAIS DE SATÉLITE GPS**

Bruno Felipe de Jesus Oliveira

Orientadora: Profa. Dra. Eniuce Menezes de Souza

Coorientadora: Profa. Dra. Daniele Barroca Marra Alves

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Matemática Aplicada e
Computacional da Faculdade de Ciências e
Tecnologia da UNESP para obtenção do tí-
tulo de Mestre em Matemática Aplicada e
Computacional

Presidente Prudente, Setembro de 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Oliveira, Bruno Felipe de Jesus.
O45a Análise de Variância Wavelet de Séries Temporais com dados faltantes :
Avaliação do índice de Cintilação Ionosférica S4 em sinais de satélite GPS /
Bruno Felipe de Jesus Oliveira. - Presidente Prudente : [s.n.], 2015
91 f.

Orientadora: Eniuce Menezes de Souza
Coorientadora: Daniele Barroca Marra Alves
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Variância Wavelet. 2. Séries Temporais. 3. Cintilação Ionosférica. I. Souza, Eniuce Menezes de. II. Alves, Daniele Barroca Marra. III. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. IV. Título.

BANCA EXAMINADORA



Profa. Dra. ENIUCE MENEZES DE SOUZA
ORIENTADORA



Prof. Dr. AYLTON PAGAMISSE
UNESP/FCT



Profa. Dra. THELMA SAFADI
UFLA



BRUNO FELIPE DE JESUS OLIVEIRA

Presidente Prudente (SP), 28 de setembro de 2015.

Resultado: APROVADO.

À minha família.
Meus pais, Regina Helena de Jesus Antonio e Ivo Silva de Oliveira,
e a minha irmã Nathalia de Jesus Oliveira.
Tudo seria imensamente mais difícil, se não impossível,
caso não tivesse vocês ao meu lado.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus, fonte de toda sabedoria, por me amparar nos momentos de dificuldades e dar forças para seguir adiante, permitindo concluir mais uma etapa na minha vida.

Agradeço a Profa. Dra. Eniuce Menezes de Souza pela sua orientação, disposição, confiança e principalmente pela compreensão e paciência que sempre teve comigo. À Profa. Dra. Daniele Barroca Marra Alves pela sua coorientação e contribuições no desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do PósMAC e do departamento da Matemática e Computação por serem responsáveis por parte da minha formação acadêmica. E aos professores da banca examinadora pelas críticas e sugestões.

Ao Grupo de Estudos em Geodésia Espacial (GEGE) pelas preciosas palestras e compartilhamentos dos estudos envolvendo cintilação ionosférica e a Gabriela de Oliveira Nascimento Brassarote por disponibilizar os dados da sua dissertação de mestrado para que eu possa estar realizando este trabalho.

À toda minha família (pais, irmã, tios(as) e primos(as)), pelo amor, apoio e incentivo em todas as etapas da minha vida. Agradeço por estarem sempre ao meu lado e pelo entendimento à minha ausência em alguns momentos. Em especial, aos meus pais e irmã, pelo amor incondicional e por torcer e acreditar em mim nesta caminhada.

A meus amigos do mestrado, pelos momentos de angustias e alegrias divididos juntos nesta jornada, especialmente à Joyce Aline Duarte Dobler pela amizade e parceria de longa data, à Crislaine Menezes de Souza e ao Adriano Sueke Takata pelo companherismo e incentivo desde a graduação.

Por fim, a todos que, diretamente ou indiretamente, contribuíram para o desenvolvimento desse projeto de mestrado.

*“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos
não é senão uma gota de água no mar.
Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota”.*
Madre Teresa de Calcuta

Resumo

O GPS é um dos sistemas GNSS mais utilizados em razão da sua disponibilidade e do grande desenvolvimento da tecnologia envolvida, fornecendo aos usuários informações sobre posicionamento, navegação e tempo. No entanto, os sinais GPS transmitidos pelo satélite estão sujeitos a diversos tipos de fenômenos causados por irregularidades que ocorrem na ionosfera. A cintilação ionosférica é um destes fenômenos e pode ser descrita como uma mudança rápida na fase e amplitude do sinal GPS, ocasionando um enfraquecimento ou até mesmo a perda do sinal, dependendo de sua intensidade. Os períodos de cintilação estão relacionados com a hora local, latitude, estações do ano e do nível de atividade solar, sendo que na região equatorial, os efeitos são mais intensos. Os índices $S4$ tem sido amplamente utilizados no estudo da cintilação ionosférica nos sinais GPS. Entretanto, recentemente foi verificada a presença de outros fenômenos nestes índices e foi proposto um índice $S4$ corrigido, $S4_{corr}$. Neste trabalho, foi realizada uma análise de variância *wavelet* nas séries temporais dos índices $S4$ e $S4_{corr}$. Devido à presença de lacunas nestas séries temporais, foi necessário investigar estimadores de variância *wavelet* e respectivos intervalos de confiança que pudessem ser estimados mesmo com dados faltantes. A partir da análise de variância *wavelet* foi possível identificar escalas características que mais contribuem para explicar o comportamento das séries temporais ou a existência de um processo estocástico que melhor caracterize a série temporal dos índices $S4$ e $S4_{corr}$. Algumas distribuições de probabilidade que melhor se ajustam aos índices $S4$ e $S4_{corr}$ também foram investigadas. Foi proposto um particionamento de tais dados de modo que diferentes distribuições ou parametrizações fossem identificadas para diferentes períodos de dados, permitindo uma melhor caracterização dos dados. Os resultados permitiram identificar diferentes escalas características dependendo do satélite e estação analisada, embora estas não se alteraram em relação à correção do índice $S4$ ($S4_{corr}$).

Palavras-Chave: *Análise de Séries Temporais, Variância Wavelet, Cintilação Ionosférica, GPS.*

Abstract

The GPS is one of the GNSS systems most commonly used due to their availability and the great development of the involved technology, providing information on positioning, navigation and time to the users. However, GPS signals transmitted by satellites are subject to several types of phenomena caused by irregularities in the ionosphere. The ionospheric scintillation is one of these phenomena that can be described as a rapid change in the phase and amplitude of the GPS signal, leading to a weakening or even loss of the signal, depending on its intensity. The scintillation periods are related to the local time, latitude, season of the year and the level of solar activity, wherein in the equatorial region, the effects are more intense. The $S4$ index has been widely used in the study of ionospheric scintillation in GPS signals. However, recently the presence of other phenomena in these indices was verified and proposed its correction ($S4_{corr}$). In this work, we performed a wavelet variance analysis in the time series of the $S4$ index to check for changes in the behavior of $S4$ and $S4_{corr}$ indexes. Due to the presence of gaps in these time series, the investigation of estimators as well as the respective confidence intervals that could be estimated even with missing data was needed. From the wavelet variance analysis was possible to identify the characteristic scales of larger contribution to explain the time series behavior, or a stochastic process that best characterizes the time series of $S4$ and $S4_{corr}$ indexes. Furthermore, some probability distributions that fit the $S4$ e $S4_{corr}$ indexes were also investigated. A partition of the data was proposed allowing different distributions and parameterizations be identified for different period of data, and a better characterization of the data. The results allowed identifying different characteristics scales depending on the satellite and station, although they were the same in relation to the $S4$ and $S4_{corr}$ indexes.

Keywords: *Time Series Analysis, Wavelet Variance, Ionospheric Scintillation, GPS.*

Lista de Figuras

2.1	Ilustração da disposição dos satélites que formam a constelação GPS. Fonte: [4]	24
2.2	Perfis na densidade de elétrons em função da altitude, durante o dia e a noite, nas camadas da ionosfera. Fonte: [36]	25
2.3	Irregularidades na densidade de elétrons da ionosfera. Fonte: [16].	26
2.4	Frequência de ocorrência de cintilação de acordo com a localização geográfica. Fonte: [20].	27
3.1	Gráfico da série temporal simulada de um processo puramente aleatório (ruído branco) e o seu correlograma.	31
3.2	Gráfico da série temporal simulada com seu respectivo correlograma. Na parte superior, um passeio aleatório e, na parte inferior, o passeio aleatório após ser aplicado a primeira diferenciação	32
3.3	Gráfico da série temporal simulada para um modelo MA(1) com $\beta = 0.5$ e o seu respectivo correlograma.	33
3.4	Gráfico da série temporal simulada para um modelo AR(1) com $\alpha = 0.9$ e o seu respectivo correlograma.	35
4.1	Gráfico da função <i>wavelet</i> de Haar. Fonte: [39]	41
4.2	Gráfico da função <i>wavelet</i> de Daubechies para $p = 2, 4, 6$ e 10 . Fonte: [39]	42
4.3	Gráfico da $\log \nu_X^2(\tau_j)$ versus $\log \tau_j$ para séries temporais simuladas, sendo: (a) um processo ruído branco; (b) um processo passeio aleatório.	45
4.4	Gráfico da $\log \nu_X^2(\tau_j)$ versus $\log \tau_j$ para séries temporais simuladas, sendo: (a) um processo autorregressivo de ordem 1: $X_t = 0.6X_{t-1} + \epsilon_t$; (b) um processo de médias móveis de ordem 1: $X_t = \epsilon_t + 0.7\epsilon_{t-1}$.	46
5.1	Gráfico da FDP Weibull simulada utilizando diferentes valores para os parâmetro α e β .	54
5.2	Gráfico da FDP Nakagami-m simulada utilizando diferentes valores para os parâmetro m e Ω .	55
5.3	Gráfico da FDP Inversa Gaussiana simulada utilizando diferentes valores para os parâmetro μ e σ .	56
6.1	Distribuição das estações de monitoramento do projeto CIGALA/CALIBRA. FONTE: [1]	60
7.1	Gráfico das séries temporais dos índices $S4$ de cintilação ionosférica coletados pelas estações MAN2, PALM, SJCU, PRU1, POAL referentes ao satélite 11.	64
7.2	Gráfico das séries temporais dos índices $S4_{corr}$ de cintilação ionosférica referentes aos índices $S4$ apresentados na Figura (7.1) das estações MAN2, PALM, SJCU, PRU1, POAL pertencentes ao satélite 11.	65

- 7.3 Gráfico das séries temporais dos índices $S4$ de cintilação ionosférica coletados pela estação MAN2, PALM, SJCU, PRU1, POAL referentes aos períodos de visibilidade do satélite 11. As linhas em vermelho indicam a “quebra” de coleta de dados entre um dia e outro. 67
- 7.4 Gráfico da série temporal dos índices $S4$ da estação MAN2 para o satélite 11, com as lacunas causadas pelos dados faltantes em destaque. 68
- 7.5 Gráfico da $\nu_X^2(\tau_j)$ versus τ_j , ambas em escala logarítmica, para os índices $S4$ da estação PRU1, utilizando no primeiro caso os filtros da *wavelet* de Haar e no segundo, os filtros da *wavelet* de Daubechies com 2 momentos nulos. Para os IC’s com as linhas tracejadas encontram-se os valores determinados pelo estimador semivariograma (4.35) e no caso dos IC’s com as linhas contínuas encontram-se os valores determinados pelo estimador covariância (4.34). 69
- 7.6 Gráfico da $\nu_X^2(\tau_j)$ versus τ_j , ambas em escala logarítmica, para os índices $S4$ referentes as estações MAN2, PALM, SJCU, PRU1 e POAL. Os valores no eixo x indicam o nível de resolução j para a estimativa da variância *wavelet* em cada escala. Para os IC’s com as linhas tracejadas encontram-se os valores determinados pelo estimador semivariograma (4.35) e no caso dos IC’s com as linhas contínuas encontram-se os valores determinados pelo estimador covariância (4.34). 71
- 7.7 Gráfico das séries dos índices $S4$ para os satélites 1, 19 e 31 referentes a estação PRU1, considerando apenas o tempo de visibilidade de cada satélite no período analisado. . . . 75
- 7.8 Gráfico da $\nu_X^2(\tau_j)$ versus τ_j , ambas em escala logarítmica, para os índices $S4$ dos satélite 1, 19 e 31. Os valores no eixo x indicam o nível de resolução j para a estimativa da variância *wavelet* em cada escala. Para os IC’s com as linhas tracejadas encontram-se os valores determinados pelo estimador semivariograma (4.35) e no caso dos IC’s com as linhas contínuas encontram-se os valores determinados pelo estimador covariância (4.34). 76
- 7.9 Gráfico da $\nu_X^2(\tau_j)$ versus τ_j , ambas em escala logarítmica, para os índices $S4$ (antes) e $S4_{corr}$ (após) da estação MAN2. Os valores no eixo x indicam o nível de resolução j para a estimativa da variância *wavelet* em cada escala. Para os IC’s com as linhas tracejadas encontram-se os valores determinados pelo estimador semivariograma (4.35) e no caso dos IC’s com as linhas contínuas encontram-se os valores determinados pelo estimador covariância (4.34). 79
- 7.10 Gráfico da $\nu_X^2(\tau_j)$ versus τ_j , ambas em escala logarítmica, para os índices $S4$ (antes) e $S4_{corr}$ (após) da estação PALM. Os valores no eixo x indicam o nível de resolução j para a estimativa da variância *wavelet* em cada escala. Para os IC’s com as linhas tracejadas encontram-se os valores determinados pelo estimador semivariograma (4.35) e no caso dos IC’s com as linhas contínuas encontram-se os valores determinados pelo estimador covariância (4.34). 79
- 7.11 Gráfico da $\nu_X^2(\tau_j)$ versus τ_j , ambas em escala logarítmica, para os índices $S4$ (antes) e $S4_{corr}$ (após) da estação SJCU. Os valores no eixo x indicam o nível de resolução j para a estimativa da variância *wavelet* em cada escala. Para os IC’s com as linhas tracejadas encontram-se os valores determinados pelo estimador semivariograma (4.35) e no caso dos IC’s com as linhas contínuas encontram-se os valores determinados pelo estimador covariância (4.34). 80
- 7.12 Gráfico da $\nu_X^2(\tau_j)$ versus τ_j , ambas em escala logarítmica, para os índices $S4$ (antes) e $S4_{corr}$ (após) da estação PRU1. Os valores no eixo x indicam o nível de resolução j para a estimativa da variância *wavelet* em cada escala. Para os IC’s com as linhas tracejadas encontram-se os valores determinados pelo estimador semivariograma (4.35) e no caso dos IC’s com as linhas contínuas encontram-se os valores determinados pelo estimador covariância (4.34). 80

- 7.13 Gráfico da $\nu_X^2(\tau_j)$ versus τ_j , ambas em escala logarítmica, para os índices $S4$ (antes) e $S4_{corr}$ (após) da estação POAL. Os valores no eixo x indicam o nível de resolução j para a estimativa da variância *wavelet* em cada escala. Para os IC's com as linhas tracejadas encontram-se os valores determinados pelo estimador semivariograma (4.35) e no caso dos IC's com as linhas contínuas encontram-se os valores determinados pelo estimador covariância (4.34). 81
- 7.14 Gráfico *box-plot* dos índices $S4$ (em branco) e $S4_{corr}$ (em cinza) da estação PRU1 para o satélite 11. 82
- 7.15 Gráfico dos histogramas dos dados e a curva da função densidade de probabilidade Weibull estimada para cada parte do “U” (U1, U2, U3). Na primeira coluna estão os resultados referentes aos índices $S4$ e na segunda coluna estão os resultados referentes aos índices $S4_{corr}$ 83
- 7.16 Gráfico dos histogramas dos dados e a curva da função densidade de probabilidade Nakagami- m estimada para cada parte do “U” (U1, U2, U3). Na primeira coluna estão os resultados referentes aos índices $S4$ e na segunda coluna estão os resultados referentes aos índices $S4_{corr}$ 84
- 7.17 Gráfico dos histogramas dos dados e a curva da função densidade de probabilidade Inversa Gaussiana estimada para cada parte do “U” (U1, U2, U3). Na primeira coluna estão os resultados referentes aos índices $S4$ e na segunda coluna estão os resultados referentes aos índices $S4_{corr}$ 85

Lista de Tabelas

2.1	Classificação do índice $S4$ Fonte: [11]	28
4.1	Intervalos de frequência e período em cada escala $\tau_j = 2^{j-1}$	44
6.1	Estações e satélites analisados da rede CIGALA/CALIBRA	59
7.1	Tempo de visibilidade das estações para o satélite 11 no período de análise . . .	66
7.2	Análise descritiva das séries temporais dos índices $S4$ para o satélite 11	68
7.3	Análise descritiva das séries temporais dos índices $S4_{corr}$ para o satélite 11 . . .	68
7.4	Porcentagens de dados faltantes em cada análise e os períodos relacionados as escalas características analisadas em cada estação	72
7.5	Valores da variância <i>wavelet</i> estimada pelo estimador covariância $\left(\hat{\nu}_X^2(\tau_j)\right)$ e a margem de erro (ME) dos IC's em todas as escalas para os índices $S4$ das estações MAN2, PALM, SJCU, PRU1 e POAL em relação ao satélite 11	73
7.6	Valores da variância <i>wavelet</i> estimada pelo estimador semivariograma $\left(\tilde{\nu}_X^2(\tau_j)\right)$ e a margem de erro (ME) dos IC's em todas as escalas para os índices $S4$ das estações MAN2, PALM, SJCU, PRU1 e POAL em relação ao satélite 11	73
7.7	Informações referentes as séries temporais dos índices $S4$ para os satélites analisados na estação PRU1	74
7.8	Períodos relacionados as escalas características analisadas em cada estação . . .	77
7.9	Valores da variância <i>wavelet</i> estimada pelo estimador covariância $\left(\hat{\nu}_X^2(\tau_j)\right)$ e a margem de erro (ME) dos IC's em todas as escalas para os índices $S4$ referentes aos satélites 1, 19 e 31 da estação PRU1	77
7.10	Valores da variância <i>wavelet</i> estimada pelo estimador semivariograma $\left(\tilde{\nu}_X^2(\tau_j)\right)$ e a margem de erro (ME) dos IC's em todas as escalas para os índices $S4$ referentes aos satélites 1, 19 e 31 da estação PRU1	78
7.11	Parâmetros estimados para as distribuições Nakagami- m , Weibull e Inversa Gaussiana, e a estatística do teste de aderência Kolmogoriv-Sminorv (K-S) para os índices $S4$	86
7.12	Parâmetros estimados para as distribuições Nakagami- m , Weibull e Inversa Gaussiana, e a estatística do teste de aderência Kolmogoriv-Sminorv (K-S) para os índices $S4_{corr}$	86

Sumário

Resumo	7
Abstract	9
Lista de Figuras	10
Lista de Tabelas	13
Capítulos	
1 Introdução	19
1.1 Objetivos	20
1.2 Organização da dissertação	21
2 GPS, Ionosfera e a Cintilação	23
2.1 O sistema GPS	23
2.2 Ionosfera	25
2.3 Cintilação Ionosférica	26
2.3.1 Estimação da Cintilação Ionosférica	28
3 Séries Temporais	29
3.1 Definição	29
3.2 Função de Autocorrelação	30
3.3 Alguns Modelos de Processos Estocásticos	30
3.3.1 Processo Puramente Aleatório (Ruído Branco)	31
3.3.2 Passeio Aleatório	31
3.3.3 Processos de Médias Móveis [MA(q)]	33
3.3.4 Processos Autorregressivos [AR(p)]	34
4 Variância <i>Wavelet</i>	37
4.1 <i>Wavelets</i>	37
4.2 Bases <i>Wavelets</i>	40
4.2.1 <i>Wavelet</i> de Haar	40
4.2.2 <i>Wavelet</i> de Daubechies	41
4.3 Definição para a Variância <i>Wavelet</i>	42
4.4 Escalas Características	44
4.5 Estimação da Variância <i>Wavelet</i>	46
4.5.1 Séries Temporais sem lacunas	46
4.5.2 Séries Temporais com lacunas	48
4.6 Intervalo de Confiança para Variância <i>Wavelet</i> Estimada	49
4.6.1 IC para Séries Temporais sem lacunas	49

4.6.2	IC para Séries Temporais com lacunas	51
5	Modelos Estatísticos utilizados na análise do índice S_4	53
5.1	Distribuição Weibull	53
5.2	Distribuição Nakagami- m	54
5.3	Distribuição Inversa Gaussiana	55
5.4	Estimação dos Parâmetros	56
5.4.1	Método de Máxima Verossimilhança	56
5.5	Teste de aderência	57
5.5.1	Teste Kolmogorov-Smirnov($K-S$)	57
6	Metodologia	59
6.1	Dados dos índices S_4	59
6.2	Implementação	60
6.3	Análise das séries temporais dos índices S_4	60
6.4	Investigação de modelos probabilísticos para a distribuição dos índices S_4 .	61
7	Resultados e Análises	63
7.1	Análise Descritiva das Séries Temporais	66
7.2	Estimação da Variância <i>Wavelet</i>	68
7.2.1	Escolha dos filtros <i>Wavelets</i>	69
7.2.2	Estimação da Variância <i>Wavelet</i> para o Satélite 11 em diferentes Estações	70
7.2.3	Estimação da Variância <i>Wavelet</i> para diferentes satélites na estação PRU1	74
7.2.4	Comparação da Variância <i>Wavelet</i> estimada, antes e após a remoção do multicaminho, para o satélite 11 em diferentes estações	78
7.3	Modelos de Distribuição de Probabilidade para os índices S_4	81
8	Conclusões e Trabalhos Futuros	87
	Referências	88

Introdução

Dentre os sistemas de navegação por satélites que integram o GNSS (*Global Navigation Satellite System*), o sistema GPS (*Global Positioning System*) é o mais utilizado, em razão de possuir a maior constelação de satélites, permitindo realizar monitoramento em qualquer lugar do globo terrestre a qualquer horário, além do grande investimento em novas tecnologias e na modernização deste sistema. Em virtude de conter uma estrutura livre, aberta e confiável, muitas áreas começaram desenvolver tecnologias vinculadas a este sistema, tais como: aviação, marinha, agricultura, telecomunicações, sensoriamento remoto, entre outras. Desta forma, o sistema GPS se tornou um elemento essencial na infra-estrutura global que levou ao desenvolvimento de centenas de aplicações que afetam todos os aspectos da vida moderna.

No entanto, por mais que as tecnologias investidas neste sistema vem modernizando-o, existem ainda uma série de efeitos que ocorrem na atmosfera e afeta a propagação destes sinais durante o caminho percorrido entre o satélite e o receptor. Um destes efeitos é chamado de cintilação ionosférica e ocorre na parte superior da atmosfera, denominada de ionosfera, em consequência das irregularidades causadas pela alta densidade de elétrons livres presentes nesta camada.

A ionosfera, compreendida entre 50 e 1000 km de altura aproximadamente, é uma camada caracterizada pela grande quantidade de íons e elétrons, sendo formada principalmente pela ação da radiação solar incidente na atmosfera. A ionosfera pode ser dividida em três regiões, denominadas de D, E e F, delimitadas verticalmente pelas variações da densidade de elétrons. Na camada F está presente uma grande concentração destes elétrons e ocorre a maior parte das irregularidades que ocasionam o efeito de cintilação e afetam os sinais GPS [23].

As cintilações ionosféricas são definidas como sendo rápidas variações na fase e/ou amplitude do sinal GPS recebido, as quais são causadas por irregularidades na densidade de elétrons ao longo do caminho percorrido pelo sinal na ionosfera [16]. Dependendo da intensidade deste fenômeno, o receptor pode perder a sintonia com um ou mais satélites durante o rastreamento do sinal, comprometendo o desempenho das aplicações que estão vinculadas ao sistema GPS.

Como exemplo, pode-se citar a utilização do sistema GPS nas atividades agrícolas. Nesta área, os receptores demandam de alta precisão e, conseqüentemente, é necessário ter uma grande quantidade de satélites para alcançar a precisão necessária. Durante o período de alta cintilação, a recepção de sinal reduz, o que diminui a quantidade de satélites disponíveis, ou seja, neste período as máquinas que são guiadas pelo GPS podem parar de funcionar, pois mesmo que tenha outros satélites disponíveis, não estão em quantidade necessária para alcançar a precisão desejada do trabalho.

Um dos fatores principais que causa a cintilação ionosférica é a enorme quantidade de plasma (partículas carregadas) que são enviadas pelo Sol à atmosfera. Esse fenômeno ocorre com maior intensidade nos picos de máxima atividade solar, que acontecem a cada 11 anos, aproximadamente. Nesse período o Sol entra em estado repentino de intensas erupções, fazendo com que a densidade de elétrons e a composição da ionosfera sofram mudanças radicais, aumentando o efeito da cintilação.

As cintilações ionosféricas ocorrem com maior intensidade na região equatorial, após o pôr do sol e duram em média 4 horas. Devido a sua localização, o Brasil é uma das regiões mais afetadas pela cintilação, tendo ocorrências mínimas de abril até agosto, e máximas de setembro a março [7]. A investigação dos efeitos e monitoramento da cintilação ionosférica nos sinais GNSS, e em particular o GPS, tem sido realizada através do índice $S4$. Este índice quantifica o efeito da cintilação ionosférica em amplitude e é calculado a cada minuto como sendo o desvio padrão da amplitude do sinal GPS.

No Brasil, uma das iniciativas para estudos sobre a cintilação ionosférica foi o projeto CIGALA/CALIBRA (*Concept for Ionospheric Scintillation Mitigation for Professional GNSS in Latin America/ Countering GNSS high accuracy Applications Limitations due to Ionospheric Disturbances in BRAzil*), em que visou analisar os efeitos da cintilação, compreender suas causas e desenvolver novas técnicas de contra medidas a serem implementadas em receptores GNSS. A equipe deste projeto foi formada por membros de diversas instituições da Europa e do Brasil, dentre as quais esteve inserida a FCT/UNESP. O banco de dados dos índices $S4$ utilizados neste trabalho faz parte deste projeto.

Recentemente, foi verificada a existência de um padrão nas séries temporais dos índices de cintilação $S4$, e que este comportamento periódico está relacionado com o efeito do multicaminho¹ [8]. A estimação deste efeito, junto com sua remoção foi proposta, gerando assim um índice corrigido, denotado por $S4_{corr}$.

A remoção do efeito do multicaminho que comparece no índice $S4$ faz com que seja possível uma investigação mais realística do efeito de cintilação, pois até então, o índice $S4$ tem sido utilizado na literatura como um indicador de (apenas) cintilação. Desta forma, esta pesquisa trata-se de uma continuidade do trabalho de Brassarote (2014), em que se pretende investigar a cintilação sob uma perspectiva estatística a partir da análise multiescala de variância *wavelet* para analisar as séries temporais dos índices $S4$ e $S4_{corr}$. Devido a existência de *gaps* (dados faltantes) em tais índices, são investigados e implementados estimadores de variância *wavelet* que podem ser utilizados com dados faltantes, além dos respectivos intervalos de confiança.

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é realizar uma análise multiescala de variância *wavelet* nas séries temporais dos índices $S4$ e $S4_{corr}$ de cintilação ionosférica dos sinais de satélite GPS, na região equatorial brasileira.

Como objetivos específicos comparecem:

- Investigar estimadores de variância *wavelet* com seus respectivos intervalos de confiança;
- Identificar as escalas com maior contribuição para a variabilidade das séries temporais dos índices $S4$ e $S4_{corr}$;

¹Multicaminho é o fenômeno pelo qual o sinal GPS chega à antena do receptor por caminhos secundários, após refletir em objetos próximos da antena, sendo uma das maiores fonte de erros em medidas GPS de alta precisão [25].

- Analisar modelos de processos estocásticos para as séries temporais dos índices $S4$ e $S4_{corr}$ através da análise gráfica em escala logarítmica da variância *wavelet* vs escala;
- Identificar distribuições de probabilidade que melhor se ajustam aos dados dos índices $S4$ e $S4_{corr}$.

1.2 Organização da dissertação

Esta dissertação encontra-se organizada em 8 capítulos. No primeiro capítulo, foi realizado uma abordagem sobre o trabalho apresentando uma motivação para sua elaboração, bem como quais objetivos pretende-se ser alcançados.

No capítulo 2, faz-se uma introdução ao sistemas GPS, descrevendo algumas características do seu funcionamento, o comportamento da ionosfera com relação a propagação dos sinais GPS e em qual região desta camada ocorre o efeito da cintilação ionosférica. Por fim é apresentado o índice que quantifica o efeito da cintilação ionosférica nos sinais de satélite GPS.

No capítulo 3, apresenta-se alguns modelos estocásticos no estudo de séries temporais para que, posteriormente, pudesse ser analisado se as séries dos índices $S4$ e $S4_{corr}$ tendiam à algum destes modelos. Esta análise foi realizada por meio do estudo da variância *wavelet*.

Assim, no capítulo 4 foi realizada uma revisão bibliográfica sobre a variância *wavelet*, sua definição e estimação tanto para séries regulares, quanto para séries com a presença de “lacunas” (dados faltantes). Além disso foram abordados os seus respectivos intervalos de confiança e as escalas com maior contribuição, sendo este o foco principal deste trabalho.

No capítulo 5, dedicou-se a mostrar modelos de distribuições de probabilidades que pudessem estar sendo utilizados na análise dos índices de cintilação, na estimação dos parâmetros e na análise do ajustamento dos dados com os modelos propostos por meio do teste de aderência.

No capítulo 6 foi apresentada a metodologia utilizada na análise dos índices $S4$ e $S4_{corr}$ dos sinais GPS e no Capítulo 7, as análises dos resultados obtidos através da aplicação da metodologia proposta.

No último capítulo, descreve-se as conclusões e trabalhos futuros decorrentes do desenvolvimento dessa dissertação.

GPS, Ionosfera e a Cintilação

O sistema GNSS inclui uma constelação de satélites que permite determinar a posição de um objeto em qualquer lugar do globo terrestre, seja em terra, mar ou ar. Este sistema integra vários sistemas de posicionamento por satélites existentes como, por exemplo, o sistema americano GPS, o sistema russo GLONASS (*GLObal NAVigation Satellite System*), o sistema europeu Galileo e o sistema chinês BeiDou. O GPS é um dos mais utilizados em diversos segmentos, em razão da alta acurácia¹ proporcionada pelo sistema, da sua disponibilidade e do grande desenvolvimento da tecnologia envolvida, levando em conta, por exemplo, sua modernização.

A acurácia das coordenadas estimadas pelos sinais GNSS pode variar de acordo com os efeitos que tais sinais sofrem durante a passagem pela atmosfera, mais especificamente pela camada da ionosfera. A cintilação ionosférica é um destes efeitos e pode enfraquecer ou até mesmo causar a perda total do sinal GNSS recebido pelos receptores.

Neste capítulo será apresentado uma breve introdução sobre o sistema GPS, seu funcionamento, o comportamento da atmosfera em relação a propagação de sinais e os efeitos da cintilação ionosférica sobre os sinais GPS.

2.1 O sistema GPS

O GPS é um sistema de radionavegação por satélite que visa proporcionar uma navegação com cobertura global e contínua utilizando o sistema de coordenadas ortogonais com origem no centro da Terra, permitindo assim, a obtenção de seu posicionamento tridimensional em tempo real (latitude, longitude e altitude). Este sistema foi desenvolvido pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos da América - *Department of Defense* (DoD) - na década de 70 e tornou-se totalmente operacional em 1995 [25].

Os satélites pertencentes a constelação GPS estão dispostos em 6 planos orbitais igualmente espaçados em torno da Terra, com inclinação de 55° em relação ao Equador e espaçamento longitudinal de 60° . Em cada órbita os satélites viajam a uma altitude média de 20.200 km e com período orbital de 12 horas siderais².

¹Acurácia é o grau de concordância entre o valor estimado para uma grandeza e o considerado “verdadeiro” [25].

²O dia Sideral é uma outra referência astronômica para definir o dia, representada pelas estrelas, em que corresponde ao intervalo de tempo entre duas passagens sucessivas de uma determinada estrela pelo Meridiano Celeste Local [5].

1 Dia Sideral = 23 h 56 min

Atualmente, o sistema opera com uma constelação de 32 satélites e esta configuração permite que a qualquer hora, no mínimo, 4 satélites estejam sempre “visíveis” a qualquer ponto da superfície terrestre. A necessidade de ter no mínimo 4 satélites é para determinar, além das três coordenadas do ponto de interesse, o não sincronismo entre os relógios do receptor e dos satélites [3] e [4].

O sistema GPS proporciona serviço para os usuários civis e militares. O serviço civil, SPS (*Standard Positioning Service*), está disponível gratuitamente para todos os usuários em uma base contínua, ao nível mundial. O serviço militar, PPS (*Precise Positioning Service*), é disponível para os Estados Unidos e forças armadas aliadas, assim como agências governamentais autorizadas pelo governo americano.

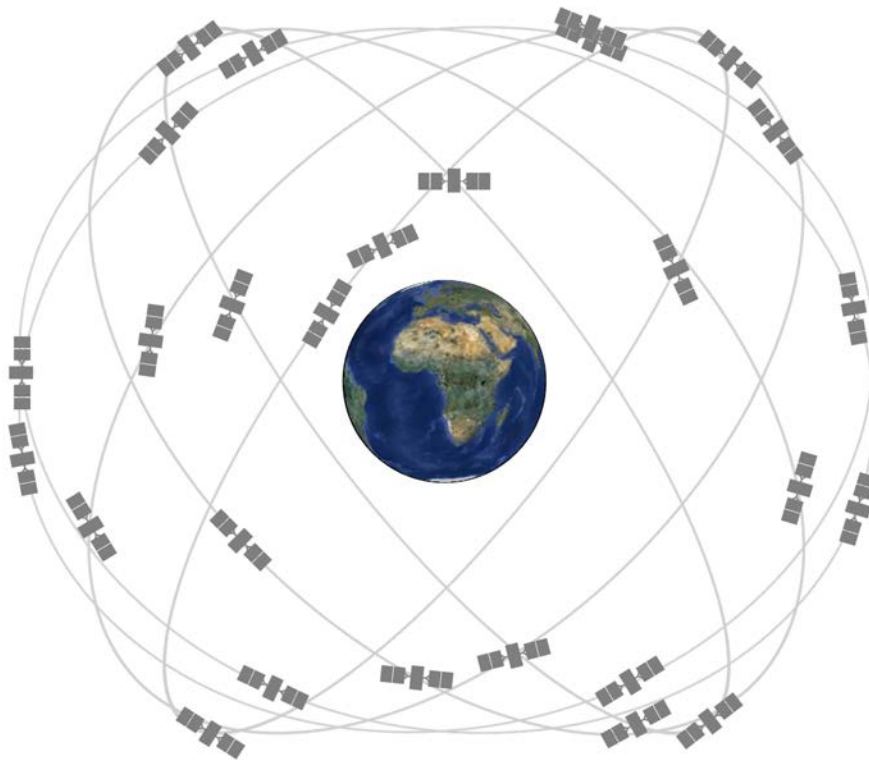


Figura 2.1: Ilustração da disposição dos satélites que formam a constelação GPS. Fonte: [4]

Os sinais transmitidos pelos satélites são denominados “observáveis” e é a partir destas grandezas que os receptores GPS obtêm informações sobre posicionamento, velocidade e tempo. As observáveis possuem estrutura complexa em razão da necessidade de segurança (civil ou militar), porém estão sujeitas aos erros: aleatórios, sistemáticos e grosseiros.

Os erros aleatórios são inevitáveis e considerados como uma característica da observação. Os erros sistemáticos podem ser parametrizados (modelados com termos adicionais) ou reduzidos por técnicas especiais de observação e/ou processamento. E os erros grosseiros são oriundos de falhas humanas e/ou do equipamento e devem ser eliminados.

A ionosfera é uma das causas mais importantes de erros para usuários do GPS que requerem medidas com boa acurácia. Logo, o tratamento desses erros de forma adequada é de extrema importância na obtenção de resultados de alta precisão [25].

2.2 Ionosfera

A atmosfera pode ser descrita como um conjunto de camadas de gases que apresentam diferentes propriedades físicas e químicas, pois sua estrutura está relacionada com diversos elementos à medida que a altitude aumenta, tais como: térmicos, químicos e eletromagnéticos [22]. Com o intuito de estudar a propagação do sinal GNSS na atmosfera, a mesma pode ser dividida em duas camadas: troposfera e ionosfera. Porém, o enfoque deste trabalho está sobre os efeitos que ocorrem na ionosfera, a parte superior da atmosfera.

A ionosfera é uma camada que se inicia por volta de 50 km e estende-se até 1000 km de altitude, aproximadamente. Esta camada é formada principalmente pela ação da radiação solar incidente na atmosfera e caracterizada pela grande quantidade de íons e elétrons livres, produzidos por meio do processo de fotoionização³. No entanto, a propagação das ondas eletromagnéticas são afetadas pelos elétrons livres e não pelos íons, pois os íons possuem uma massa cerca de 20 mil vezes maior do que a dos elétrons e, portanto, são muito densos para responder as rápidas oscilações de uma onda de rádio [23].

A ionosfera pode ser dividida em três diferentes camadas, denominadas por D, E e F, delimitadas verticalmente em função da densidade e do comportamento dos elétrons. Cada uma das regiões se comportam de maneira distintas durante os períodos diurno e noturno, em consequência da queda na densidade de elétrons e a ausência da radiação solar no período noturno. A Figura (2.2) apresenta as densidade dos elétrons durante os dois períodos nas três camadas da ionosfera.

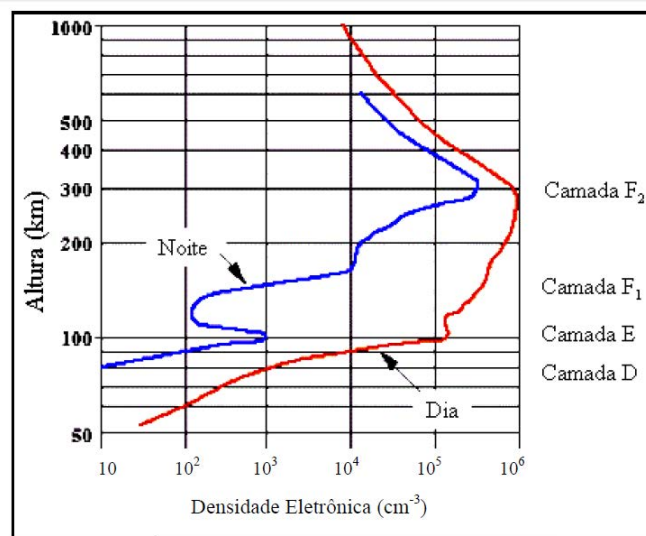


Figura 2.2: Perfis na densidade de elétrons em função da altitude, durante o dia e a noite, nas camadas da ionosfera. Fonte: [36]

A camada D compreende a região mais baixa da ionosfera, entre as altitudes de 50 a 90 km, e encontra-se apenas na região da Terra que está sendo iluminada diretamente pelo Sol. Esta camada é de extrema importância nas telecomunicações, pois reflete ondas de rádio de baixa frequência entre 3 e 30 KHz. A camada E compreende uma região entre as altitudes de 85 e 140 km e está associada ao nível de atividade solar e do ângulo zenital do Sol. Nesta região, surge uma fina camada, denominada esporádica E, oriunda de variações na densidade de elétrons próxima à região compreendida entre 90 e 130 km, capaz de refletir ondas de rádio, com frequências de até 100 MHz aproximadamente [14].

³O processo de fotoionização ocorre quando a radiação solar ao incidir sobre a atmosfera produz uma grande quantidade de íons positivos e elétrons livres [22].

A camada F compreende aproximadamente o intervalo da ionosfera entre as alturas de 140 km e 1000 km, subdividida em períodos de alta ionização em duas camadas denominadas de F1 e F2. A camada F1 é formada entre as altitudes de 140 km e 200 km, e apresenta uma típica concentração de elétrons variando de acordo com a atividade solar na região de latitudes médias ao meio dia local, pois a principal fonte de ionização desta camada é a radiação solar. A camada F2 compreende o intervalo da ionosfera entre as altitudes de 200 km até aproximadamente 1000 km. Esta região é a mais importante do ponto de vista da comunicação em alta frequência, entre 3 e 30 MHz, pois a maior parte das irregularidades que afetam os sinais GNSS acontecem nesta camada. As irregularidades em pequena escala, são as principais responsáveis pelos eventos de cintilação, devido à sua natureza difrativa [23].

2.3 Cintilação Ionosférica

Conforme apresentado, a ionosfera tem grande influência na propagação dos sinais GNSS, pois nesta camada existem diferentes fontes de erros que podem provocar nos sinais variações em sua: direção de propagação, velocidade de propagação, polarização e em sua potência [38]. Um dos efeitos causados na propagação sinal devidos essas irregularidades na ionosfera é a cintilação ionosférica.

As cintilações ionosféricas são rápidas flutuações na fase e/ou na amplitude de um sinal GPS, causadas por irregularidades na densidade de elétrons ao longo do trajeto do sinal na ionosfera [16]. Essas flutuações causam enfraquecimento e variações da fase do sinal recebido pelos receptores GPS, fazendo com que ocorra, em muitos casos, a perda do sinal. Normalmente, essas irregularidades estão localizadas entre 200 e 600 Km de altitude, ou seja, na camada F da ionosfera conforme ilustra a Figura (2.3).

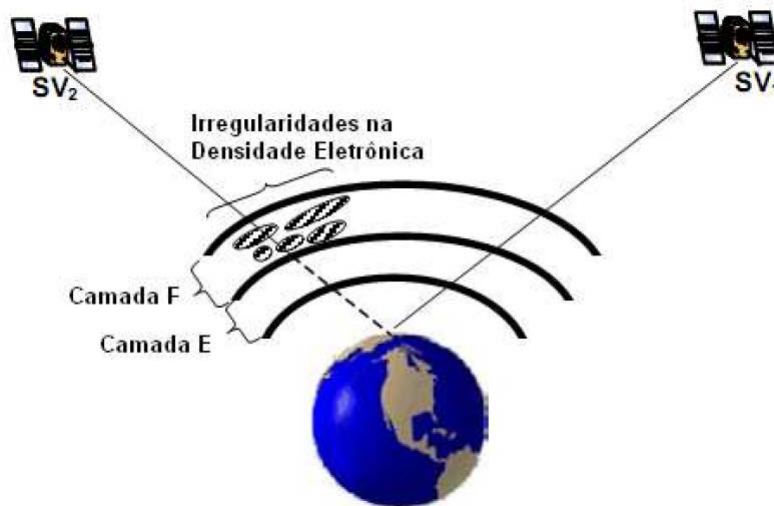


Figura 2.3: Irregularidades na densidade de elétrons da ionosfera. Fonte: [16].

Os períodos de cintilação estão associados, geralmente, com a existência de pequenas regiões com irregularidades na densidade dos elétrons [16], porém também podem estar associados as regiões denominadas como “bolhas ionosféricas”, que ocorrem onde a densidade do plasma ionosférico é drasticamente reduzida, causando um aumento da ocorrência de cintilações ionosféricas.

As bolhas ionosféricas se desenvolvem na região do equador geomagnético e se estendem ao longo das linhas de força do campo geomagnético por extensões de aproximadamente 10.000 Km e, na direção perpendicular, por extensões em torno de 100 a 300 Km . Ocorrem geralmente após o pôr do sol até a meia noite, no entanto, em algumas épocas do ano, podem ocorrer durante toda a noite até o amanhecer [22].

Os efeitos da cintilação ionosférica variam de acordo com a frequência do sinal, localização geográfica, horário local, estação do ano, ciclos solares, dentre outros fatores. No entanto, as cintilações ionosféricas com maior frequência ocorrem nas região equatorial próxima as latitudes geomagnéticas entre 10° N/S e 20° N/S, e nas regiões auroral (latitudes geomagnéticas entre 65° e 75°) e polares (latitudes geomagnéticas maiores que 75°) [41].

Conforme mostra a Figura (2.4), as cintilações ionosféricas são mais intensas na região equatorial, do que na região auroal e capa polar, pois nas regiões de altas latitudes são causadas por tempestades geomagnéticas ou magnetosféricas e na região equatorial, a cintilação está associada com o fenômeno da anomalia equatorial⁴.

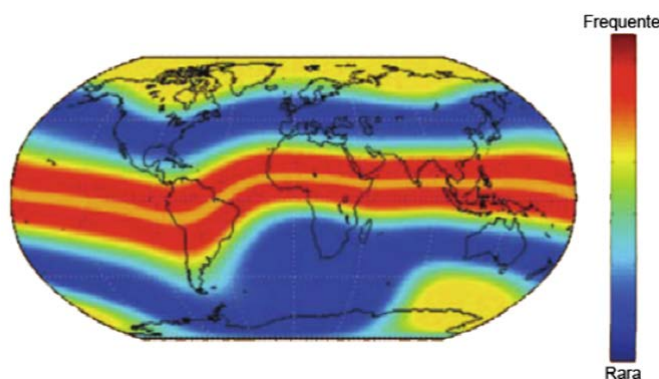


Figura 2.4: Frequência de ocorrência de cintilação de acordo com a localização geográfica. Fonte: [20].

Observa-se que na região equatorial há uma faixa estreita com menor frequência de ocorrência, devido o equador geomagnético estar localizado nesta região. Assim, os efeitos são mais significativos na região da anomalia equatorial em relação à região do equador geomagnético e é observado com maior intensidade nos locais de pico da anomalia, devido à ionosfera equatorial. Na ionosfera equatorial, a combinação dos campos elétricos e magnético sobre a Terra causam o transporte dos elétrons verticalmente, difundindo-os para o Norte e para o Sul. Este deslocamento faz com que a ionização seja reduzida no equador geomagnético e incrementada na anomalia equatorial [41].

No Brasil, por estar localizado na região equatorial, os efeitos da cintilação ionosférica ocorrem com maior intensidade e tem duração em média de 4 horas após o pôr do sol. Os períodos onde se chega aos maiores índices de cintilação são aproximadamente durante o período de setembro à março (equinócio) e os mínimos ocorrem durante os meses de solstício de inverno e verão, ou seja, os meses de abril à agosto [22]. No entanto, cabe acrescentar que a magnitude e a frequência das cintilações são correlacionadas com o ciclo solar, que possuem picos de máxima atividade solar em intervalos de 11 anos, sendo que o

⁴A anomalia equatorial é caracterizada por uma variação latitudinal de densidade de elétrons na região equatorial da ionosfera como resultado de um processo conhecido como “efeito fonte”. Este processo consiste no movimento de elevação do plasma na região do equador geomagnético e posterior descida ao longo das linhas do campo geomagnético até as baixas latitudes [38].

último ocorreu no ano de 2013 [7]. Portanto, em épocas de alta atividade solar, os efeitos de cintilação são potencializados e podem prolongar o tempo médio de duração.

2.3.1 Estimação da Cintilação Ionosférica

As estimativas de cintilação ionosférica podem ser definidas em termos da densidade espectral da potência do sinal, sendo esta uma padronização de quanta energia é recebida em determinada área [11]. A intensidade do sinal pode ser definida também em função da potência, representada como:

$$I = 10 \log P \quad (2.1)$$

em que P representa a potência do sinal.

Entre os índices que são utilizados para quantificar a intensidade de cintilação ionosférica, destaca-se pela literatura os seguintes índices: o índice σ_ϕ , que quantifica cintilação em fase, e o índice $S4$ que quantifica cintilação em amplitude.

Neste trabalho foi utilizado o índice $S4$, o qual tem sido amplamente utilizado para quantificar a magnitude das cintilações em amplitude de sinais transionosféricos, pois consiste no desvio padrão normalizado (ou coeficiente de variação) de observações livres de tendência, as quais são amostradas a altas taxas (50 Hz por exemplo). O índice $S4$ é, em geral, calculado em intervalos de 60 segundos como [2]:

$$S4 = \sqrt{\frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2}} \quad (2.2)$$

em que $\langle . \rangle$ é um operador de média.

Os índices $S4$ podem ser classificados como forte, moderado e fraco, dependendo diretamente da quantidade de cintilação ocorrida no dia em análise [11]. A Tabela (2.1) apresenta a classificação para os índices $S4$ de acordo com a ocorrência de cintilação.

Tabela 2.1: Classificação do índice $S4$ Fonte: [11]	
$S4$	Intensidade da Cintilação Ionosférica
$S4 \geq 0,7$	forte
$0,5 \leq S4 < 0,7$	moderado
$0,3 \leq S4 < 0,5$	fraco
$0 \leq S4 < 0,3$	muito fraco

Séries Temporais

A análise de séries temporais consiste em sumarizar as propriedades de uma série e caracterizar seu comportamento, identificando ou sugerindo um modelo aquedado que melhor a descreva [30].

Neste capítulo serão apresentados alguns modelos de processos estocásticos que são amplamente adotados na análise de séries temporais e serão utilizados para verificar o comportamento dos índices $S4$ de cintilação ionosférica.

3.1 Definição

Uma série temporal é definida como sendo um conjunto de observações feitas sequencialmente ao longo do tempo, podendo ser de forma discreta ou contínua. No entanto, os dados contínuos podem ser discretizados quando são tomados em intervalos fixos de tempo.

Na análise de séries temporais as observações vizinhas são, em geral, dependentes e o interesse é analisar e modelar esta dependência, sendo esta uma das principais características que a diferencia das demais análises de dados estatísticos [10].

Em algumas situações em que se pretende utilizar modelos para descrever séries temporais, é necessário introduzir suposições simplificadoras, que nos conduza a analisar determinadas classes de processos estocásticos (processos controlados por leis probabilísticas) [12].

Uma importante classe de processos estocásticos são os chamados processos estacionários. Nesta classe, as propriedades estatísticas do processo, tais como média e variância, não mudam com o tempo, ou seja, a série temporal apresenta um equilíbrio estável e uma definição formal é descrita como [10]:

Definição 1 *Uma série temporal $\{X_t, t \in T\}$ é dita estritamente estacionária se a distribuição de probabilidade conjunta de $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}$ é mesma de $X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_m+k}$,*

ou seja, a distribuição conjunta não muda mesmo havendo um deslocamento nos tempos por uma quantidade k , dependendo assim, apenas dos intervalos $t_1, t_2, \dots, t_m$.

Na prática, não é comum usar tal definição e costuma-se definir estacionariedade de uma forma menos restrita, dada por:

Definição 2 *Uma série temporal $\{X_t, t \in T\}$ é dita ter estacionariedade de segunda ordem ou fracamente estacionária, se a sua função média é constante e sua função de*

autocovariância depende apenas da defasagem k , ou seja,

$$E(X_t) = \mu$$

e

$$Cov(X_t, X_{t+k}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]$$

.

No entanto, nem sempre as séries temporais obedecem tal estacionariedade, mas algumas séries não estacionárias, excluindo as de comportamento explosivo, podem ser transformadas em estacionárias após algumas diferenças sucessivas. Tais séries são chamadas de não estacionárias homogêneas, ou ainda, intrinsecamente estacionárias, e são definidas como

Definição 3 Uma série temporal $\{X_t, t \in T\}$ é dita intrinsecamente estacionária de d -ésima ordem se após d diferenças sucessivas obtém-se um processo estacionário $\{Y_t, t \in T\}$ definido como

$$Y_t \equiv (1 - B)^d X_t = \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} (-1)^k X_{t-k} \quad (3.1)$$

em que B é um operador de retardo (atraso) definido como $BX_t = X_{t-1}$, de modo que $B^k X_t = X_{t-k}$.

3.2 Função de Autocorrelação

Uma ferramenta importante para identificar as propriedades de uma série temporal é definida através dos coeficientes de autocorrelação. Por meio destes coeficientes pode-se medir a correlação entre as observações de uma mesma variável em diferentes horizontes de tempo, ou seja, correlações entre observações defasadas em 1, 2, 3, ... períodos de tempo [10].

Os coeficientes de autocorrelação são calculados por meio da Função de Autocorrelação (FAC), sendo esta definida como:

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} \quad (3.2)$$

em que $-1 < \rho(k) < 1$ e $\gamma(k) = Cov(X_t, X_{t+k})$.

Por meio da FAC tem-se que a correlação entre X_t e X_{t+k} é a mesma que entre X_t e X_{t-k} , ou seja, $\rho(k) = \rho(-k)$ e através do correlograma, gráfico com os k primeiros coeficientes de autocorrelação em função de k , é possível identificar características de uma série temporal [10]. No entanto, nem sempre tal análise é viável, pois diferentes séries temporais podem gerar os mesmos gráficos do correlograma [30].

3.3 Alguns Modelos de Processos Estocásticos

Os índices $S4$, que quantificam a cintilação ionosférica, possuem características que podem resultar em séries não estacionárias homogêneas. Assim, nesta seção serão descritos alguns modelos de séries temporais que são comumente utilizados.

3.3.1 Processo Puramente Aleatório (Ruído Branco)

Um processo descrito $\{X_t\}$ é chamado puramente aleatório (ou definido também como ruído branco) se consiste de uma sequência de variáveis aleatórias $\{\epsilon_t\}$ independentes e identicamente distribuídas. Este é um modelo muito importante de processo estacionário, pois muitos processos são construídos utilizando-o [10]. Para tal processo segue que:

1. $E(X_t) = \mu$,
2. $Var(X_t) = \sigma_\epsilon^2$,
3. $Cov(X_t, X_{t+k}) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^*$.

Logo, tem-se que o processo puramente aleatório possui média e variância constante e que a correlação entre as variáveis não depende do tempo, ou seja, o processo é estacionário em segunda ordem. Logo, tem-se que a função autocorrelação (FAC) é

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

A Figura (3.1) mostra o comportamento de uma série temporal simulada para um processo puramente aleatório (ruído branco), do qual observa-se que este oscila em torno de uma média constante. Quando tem-se uma série aleatória, os valores sucessivos desta série não apresentam correlação entre si, logo, o correlograma apresenta coeficientes bem próximos a zero, não significativos, como pode ser visto na Figura (3.1).

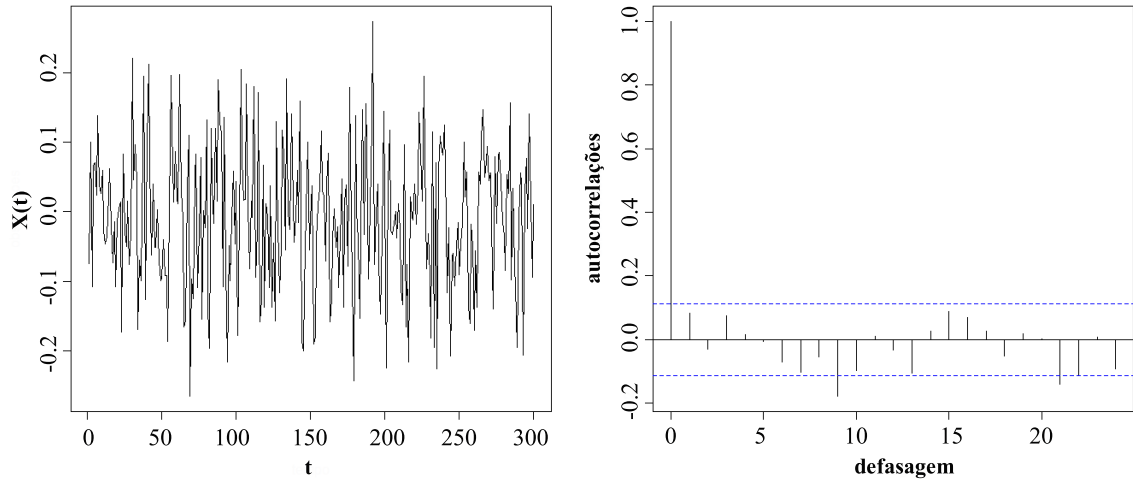


Figura 3.1: Gráfico da série temporal simulada de um processo puramente aleatório (ruído branco) e o seu correlograma.

3.3.2 Passeio Aleatório

Seja $\{\epsilon_t\}$ um processo puramente aleatório com média μ e variância σ_ϵ^2 . Um processo $\{X_t\}$ é chamado de passeio aleatório se

$$X_t = X_{t-1} + \epsilon_t. \quad (3.4)$$

Assim, tem-se que cada observação do processo depende do estado anterior. No entanto, fazendo substituições sucessivas verifica-se que o passeio aleatório é definido como a

soma de um processo puramente aleatório acrescentado de um estado inicial, como mostra abaixo.

$$\begin{aligned}
 X_t &= X_{t-2} + \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\
 &= X_{t-3} + \epsilon_{t-2} + \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\
 &\quad \vdots \\
 X_t &= X_0 + \sum_{j=1}^t \epsilon_j
 \end{aligned}$$

Se o processo é habitualmente iniciado em $X_0 = 0$ tem-se que $X_t = \sum_{j=1}^t \epsilon_j$, possuindo as seguintes propriedades:

1. $E(X_t) = \sum_{j=1}^t E(\epsilon_j) = t\mu$,
2. $Var(X_t) = \sum_{j=1}^t Var(\epsilon_j) = t\sigma_\epsilon^2$,
3. $Cov(X_t, X_{t-k}) = Cov(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{t-k} + \epsilon_t, \epsilon_1 + \dots + \epsilon_{t-k}) = (t-k)\sigma_\epsilon^2$,

em que tais propriedades aumentam linearmente com o tempo. A FAC para este processo é definida

$$\rho(k) = \sqrt{\frac{t-k}{t}}. \quad (3.5)$$

Como as propriedades do processo dependem do tempo, tais como média, variância, covariância e os coeficientes de autocorrelação, o passeio aleatório é um processo não estacionário [12]. No entanto, nota-se que a primeira diferença torna-o estacionário, pois

$$B^1 X_t = X_t - X_{t-1} = \epsilon_t.$$

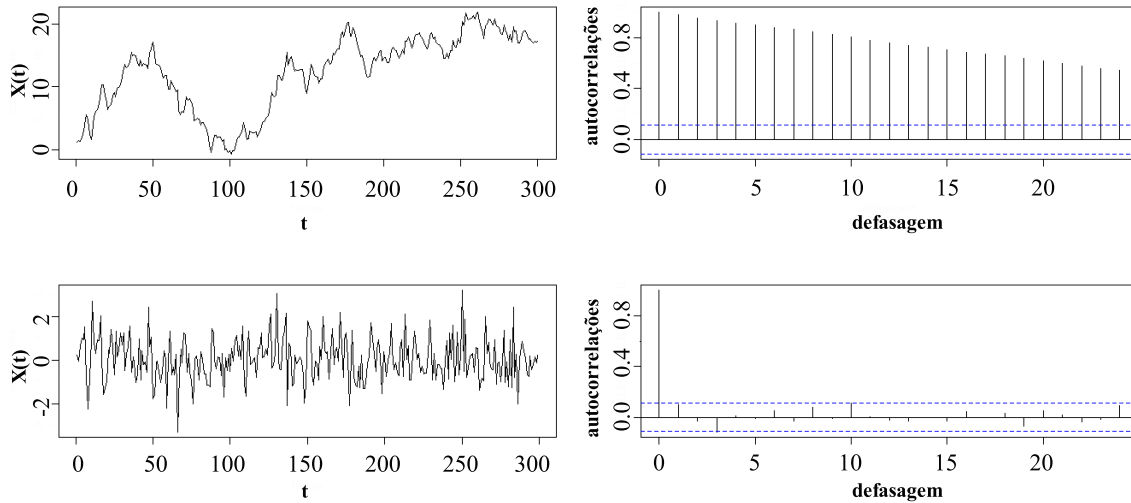


Figura 3.2: Gráfico da série temporal simulada com seu respectivo correlograma. Na parte superior, um passeio aleatório e, na parte inferior, o passeio aleatório após ser aplicado a primeira diferenciação

A Figura (3.2) apresenta o comportamento de uma série temporal simulada para um passeio aleatório, donde nota-se um padrão de tendência estocástica. Para séries com estas características, tem-se que os valores dos coeficientes de correlação não decairão para zero, se não for em grandes defasagens, como pode ser observado no correlograma. No entanto, nota-se também que a tendência estocástica desta série é eliminada após a realização da primeira diferenciação, resultando num processo puramente aleatório.

3.3.3 Processos de Médias Móveis [MA(q)]

Suponha que $\{\epsilon_t\}$ é um processo discreto puramente aleatório com média μ e variância σ_ϵ^2 . Um processo $\{X_t\}$ é denominado processo de média móvel de ordem q se

$$X_t = \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-q}, \quad (3.6)$$

em que $\beta_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \dots, q$. Tal processo é denotado como MA(q), do inglês *Moving Average* [10].

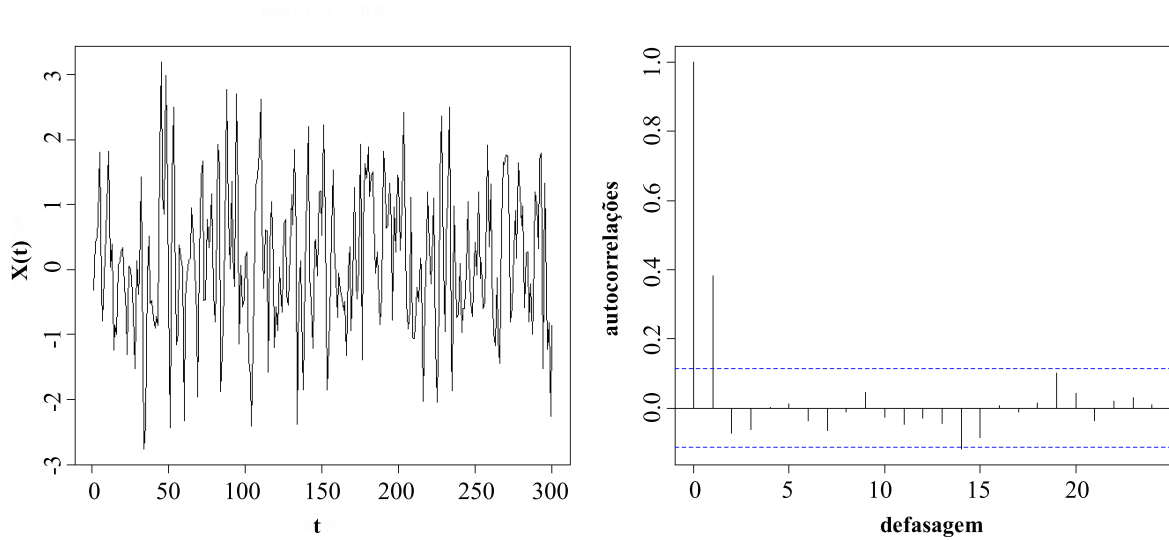


Figura 3.3: Gráfico da série temporal simulada para um modelo MA(1) com $\beta = 0.5$ e o seu respectivo correlograma.

A Figura (3.3) mostra o comportamento da série temporal simulada para um processo MA(1), em que $\beta = 0.5$, donde nota-se que o correlograma apresenta um comportamento semelhante para séries aleatórias. Para processos deste tipo, segue que:

1. $E(X_t) = E(\epsilon_t) + \sum_{j=1}^q \beta_j E(\epsilon_{t-j}) = 0$,
2. $Var(X_t) = Var(\epsilon_t) + \sum_{j=1}^q \beta_j^2 Var(\epsilon_{t-j}) = (1 + \beta_1^2 + \dots + \beta_q^2) \sigma_\epsilon^2$,
3. $Cov(\epsilon_t, \epsilon_s) = \sigma_\epsilon^2$ para $t = s$ e $Cov(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0$.

Sendo a média e a variância constante e como correlação entre as variáveis não depende de t , o processo é dito ser *fracamente estacionário* para todos os possíveis valores de $\beta_1, \dots, \beta_q$. Portanto a FAC deste processo é definida da seguinte forma

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{\sum_{j=0}^{q-k} \beta_j \beta_{j+k}}{\sum_{j=0}^q \beta_j^2}, & k = 1, \dots, q \\ 0, & k > q \\ \rho(-k), & k < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Pode-se observar que a FAC definida em (3.7) tem um ponto de corte na defasagem q , ou seja, $\rho(k) = 0$ para $k > q$. Esta é uma característica específica de processos médias móveis e muito útil na especificação do valor de q .

Sob algumas restrições, conhecidas como condições de *invertibilidade*, o processo $\{X_t\}$ pode ser escrito alternativamente como uma soma ponderada de valores passados (autor-regressivo) [10] e [30].

3.3.4 Processos Autorregressivos [AR(p)]

Considerando $\{\epsilon_t\}$ um processo discreto puramente aleatório com média $\mu = 0$ e variância σ_ϵ^2 , um processo $\{X_t\}$ é denominado processo autorregressivo de ordem p se

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \epsilon_t. \quad (3.8)$$

em que $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \dots, p$. Tal processo é denotado como $AR(p)$, do inglês *Autoregressive*, pois a decomposição do modelo é similar a um modelo de regressão múltipla. No entanto X_t é regredido não em variáveis independentes, mas em valores passados de X_t [10] e [12].

No caso do $AR(1)$, tem-se que

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \epsilon_t, \quad (3.9)$$

e fazendo substituições sucessivas em (3.9) obtém-se

$$\begin{aligned} X_t &= \alpha(\alpha X_{t-2} + \epsilon_{t-1}) \\ &= \alpha^2 X_{t-2} + \alpha \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \alpha^2(\alpha X_{t-3} + \epsilon_{t-2}) + \alpha \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \alpha^3 X_{t-3} + \alpha^2 \epsilon_{t-2} + \alpha \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\ &\quad \vdots \\ X_t &= \alpha^{r+1} X_{t-r-1} + \sum_{j=0}^r \alpha^j \epsilon_{t-j} \end{aligned}$$

Se X_t for um processo estacionário com variância finita σ_X^2 tem-se que

$$E(X_t - \sum_{j=0}^r \alpha^j \epsilon_{t-j}) = \alpha^{2r+2} E(X_{t-r-1}^2) = \alpha^{2r+2} \sigma_X^2.$$

E se $|\alpha| < 1$ segue que $\alpha^{2r+2} \rightarrow 0$ quando $r \mapsto \infty$. Portanto, esta condição permite escrever X_t como um processo MA de ordem infinita, ou seja,

$$X_t = \epsilon_t + \alpha \epsilon_{t-1} + \alpha^2 \epsilon_{t-2} + \dots$$

em que estas condições são suficientes para que X_t seja estacionário.

Logo, a transformação do $AR(1)$ no formato de $MA(\infty)$ fornece

1. $E(X_t) = 0$,
2. $Var(X_t) = \sigma_\epsilon^2(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \alpha^2}$,
3. $\rho(k) = \alpha^{|k|}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Quando tem-se um processo $AR(p)$ de ordem p , para obtenção da FAC assume-se a priori que o processo é estacionário com $E(X_t) = 0$ e $Var(X_t) = \sigma_X^2$. Multiplicando o processo X_t por X_{t-k} e tomando a esperança e dividindo pela variância, chega-se a

$$\rho(k) = \alpha_1 \rho(k-1) + \dots + \alpha_p \rho(k-p), \quad k > 0 \quad (3.10)$$

que são chamadas de equações de Yule Walker [10].

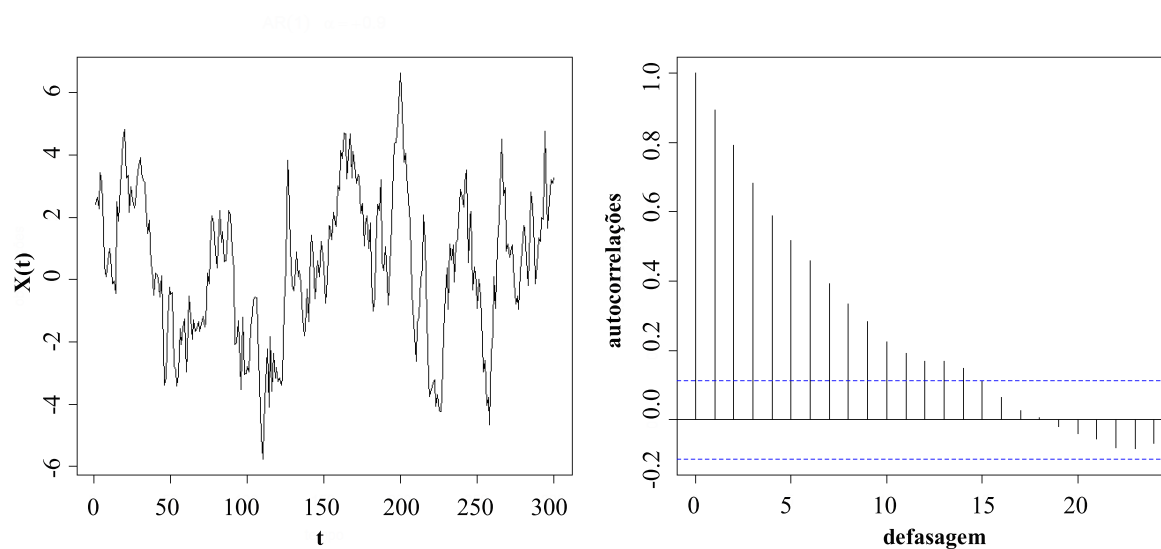


Figura 3.4: Gráfico da série temporal simulada para um modelo AR(1) com $\alpha = 0.9$ e o seu respectivo correlograma.

A Figura (3.4) mostra o comportamento da série temporal simulada para um processo MA(1), em que $\alpha = 0.9$, apresentando diferentes propriedades, tais como um padrão de tendência. Nota-se que o correlograma desta série apresenta um comportamento decrescente, pois a medida que a defasagem aumenta os valores tendem a ficar cada vez menores, aproximando-se de zero.

Variância *Wavelet*

O uso das *wavelets* como uma ferramenta para análise de séries temporais e processamento de sinais tem aumentado nos últimos anos devido o seu potencial para resolver uma série de problemas práticos [34]. Na estatística, por exemplo, as *wavelets* vem sendo utilizadas na estimação de densidades de probabilidade, regressão não-paramétrica e na estimação do espectro de processos estacionários e não-estacionários. Por ser localizada no tempo (ou espaço) e frequência simultaneamente, sua utilização é ideal para analisar sinais não estacionários [32] e [35].

As *wavelets* também dão origem ao conceito de variância *wavelet*, em que esta decompõe a variância de uma série temporal em componentes associados em diferentes escalas, permitindo assim, uma análise da variância em multiescala [35].

A variância *wavelet* “quebra” a variância do processo em “pedaços”, dos quais cada um representa a contribuição da variância global em uma determinada escala. Assim, o interesse em seu estudo está em descobrir em quais destas escalas há maior contribuição com a variabilidade total da série.

Neste capítulo será apresentado uma breve introdução sobre as *wavelets*, para que possa estar definindo a variância *wavelet*. Os estimadores também serão definidos, bem como os intervalos de confiança para cada estimador, além de apresentar as escalas com maior contribuição na análise da variância *wavelets* em multiescal.

4.1 *Wavelets*

As funções *wavelets* pertencem ao espaço $L^2(\mathbb{R})$, denominado também como espaço das funções de energia finita, sendo funções mensuráveis de quadrado integrável sobre $\mathbb{R}$ e definidas como [35]:

Definição 4 Uma função $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ é denominada *wavelet*, se satisfaz as seguintes condições:

C1. Condição de admissibilidade:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (4.1)$$

C2. A função *wavelet* deve ter energia unitária, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$$

C3. Os primeiros p momentos de ψ anulam-se, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^m \psi(t) dt = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, p \quad (4.3)$$

A condição (C1) estabelece que $\psi(t)$ deva oscilar em torno do seu eixo. A condição (C2) garante que a função *wavelet* possua suporte compacto¹, ou um rápido decaimento de amplitude. A condição (C3) indica o grau de suavidade (ou regularidade) da *wavelet*. Assim quanto maior for p , mais suave será $\psi(t)$. Geometricamente, essas condições indicam que $\psi(t)$ terá um formato de uma onda (C1), sendo esta de curta duração (C2) e com um formato suave, dependendo da quantidade de momentos nulos (C3). , ou um rápido decaimento de amplitude. A condição (C3) indica o grau de suavidade (ou regularidade) da *wavelet*. Assim quanto maior for p , mais suave será $\psi(t)$. Geometricamente, essas condições indicam que $\psi(t)$ terá um formato de uma onda (C1), sendo esta de curta duração (C2) e com um formato suave, dependendo da quantidade de momentos nulos (C3).

O espaço $L^2(\mathbb{R})$ é gerado a partir de dilatações e translações de uma única função *wavelet* $\psi(t)$ (denominada também como *wavelet* mãe) formando uma família de funções $\psi_{a,b}(t)$ da seguinte forma:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a \neq 0 \text{ e } a, b \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

Com o intuito de trabalhar com sinais discretos, usualmente toma-se os valores especiais para a e b como sendo $a = 2^{-j}$, $b = k2^{-j}$, $j, k \in \mathbb{Z}$, obtendo uma família de funções *wavelets*:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (4.5)$$

em que $\psi_{j,k}(t)$ é obtida por meio de uma dilatação 2^{-j} e uma translação $k2^{-j}$ da função *wavelet* $\psi(t)$.

Algumas funções *wavelets* possuem características mais adequadas para determinadas aplicações, considerando a presença ou ausência de simetria, o grau de suavidade e sua forma analítica simples ou não. Em especial, as *wavelets* com bases ortonormais e de suporte compacto, além de permitirem a reconstrução perfeita do sinal, possibilitam uma análise mais eficiente. Assim, uma outra forma de gerar uma base para $L^2(\mathbb{R})$ é através da função escala $\phi_{j,k}$ (ou denominada também como *wavelet pai*), definida como:

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \quad (4.6)$$

Com as *wavelets* é possível analisar um sinal em várias escalas de resolução, por meio do procedimento denominado de Análise de Multirresolução (AMR) [21]. O objetivo da AMR é decompor o espaço $L^2(\mathbb{R})$ em subespaços fechados V_j , com j representando o nível de resolução, satisfazendo algumas propriedades das quais pode-se citar:

- $\dots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1}$
- $\overline{\cup V_j} = L^2(\mathbb{R})$
- $\cap V_j = 0$

¹Uma *wavelet* possui suporte compacto se toda sua energia for restrita a um intervalo finito[13].

Deste modo a AMR faz com que o sinal $f \in L^2(\mathbb{R})$ seja aproximado por funções (ou projeções) $f_j \in V_j$ em diferentes níveis de resolução. Conforme o nível de resolução aumenta ($j \mapsto \infty$), a relação $V_j \subset V_{j+1}$ indica que nenhuma informação é perdida e as projeções vão ganhando mais detalhes sobre f , convergindo para a função do sinal original. Os detalhes adquiridos pelas projeções a medida que a resolução aumenta pode ser representado por um outro subespaço, denominado W_j , sendo este o complemento ortogonal de V_j em V_{j+1} , dado por:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

e logo, por substituições sucessivas, tem-se que

$$V_j = V_0 \oplus W_0 \oplus \dots \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1}. \quad (4.7)$$

Quando j tende ao infinito, o espaço $L^2(\mathbb{R})$ pode ser decomposto como:

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \quad (4.8)$$

em que os subespaços $W_j \in L^2(\mathbb{R})$ são gerados pelo conjunto de funções *wavelets* e os subespaços $V_j \in L^2(\mathbb{R})$ são gerados pelo conjunto de funções escalas, definidos em (4.5) e (4.6), respectivamente. Deste modo, as funções escalas e *wavelets* $\{\phi_{j,k}, \psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$ formam uma base ortonormal para o espaço $L^2(\mathbb{R})$ e as funções $f \in L^2(\mathbb{R})$ são decompostas de forma única pela AMR, possuindo a seguinte representação:

$$f(t) = \sum_k v_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j \geq j_0} \sum_k \omega_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (4.9)$$

sendo $v_{j_0,k}$ e $\omega_{j,k}$ definidos como os coeficientes da Transformada *Wavelet*, descritos no domínio discreto e contínuo.

No caso, em que se tem um sinal discreto, os coeficientes da Transformada *Wavelet* Discreta (DWT) são representados pelas seguintes equações:

$$v_{j,k} = \sum_{l=0}^{L-1} g_l v_{j-1,k-l} \quad (4.10)$$

$$g_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(2t - k) dt \quad (4.11)$$

e

$$\omega_{j,k} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l v_{j-1,k-l} \quad (4.12)$$

$$h_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \phi(2t - k) dt \quad (4.13)$$

sendo $v_{0,k} = x_k$ e $x_k \in \mathbf{X} = [x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_{n-1}]$ representando os dados do sinal $f(t)$ no domínio discreto pelo vetor $\mathbf{X}$. Os filtros passa-alta (*high-pass*) h_k e passa-baixa (*low-pass*) g_k são chamados de *quadrature mirror filters* e relacionados pela seguinte equação:

$$h_k = (-1)^k g_{N-1-k} \quad (4.14)$$

em que $N = 2p$, sendo p a quantidade de momentos nulos da *wavelet*.

Os coeficientes da DWT são calculados por um algoritmo recursivo de filtragem, denominado como Algoritmo de Mallat (ou Piramidal) [21]. Por meio deste algoritmo é possível decompor um sinal em bases *wavelets* através da AMR, permitindo que o sinal seja analisado em diferentes níveis de resolução associados nas diferentes escalas de frequência pelos coeficientes da DWT, em busca de observar características que estão presentes no sinal, porém não podem ser detectadas em um determinado domínio.

No processo de decomposição do sinal, os coeficientes $v_{j,k}$ chamados de coeficientes escalas (ou coeficientes de aproximação) são provenientes do filtro passa-baixa, que suaviza e tende a diminuir os ruídos de um sinal. E os coeficientes $\omega_{j,k}$, chamados de coeficientes *wavelets* (ou coeficientes de detalhes), são provenientes do filtro passa-alta, que tende a realçar os detalhes de um sinal produzidos em diferentes intervalos de frequência.

Na prática, $v_{j,k}$ e $\omega_{j,k}$ são obtidos por um processo de convolução seguido de uma decimação (*downsampling*) por 2, ou seja, ao ser aplicado o processo em uma sequência, as amostras pares ou ímpares serão eliminadas. Assim, o nível de resolução $j + 1$ terá metade dos coeficientes do nível de resolução j .

Entretanto, quando a decimação é eliminada no cálculo dos coeficientes da transformada, obtém-se uma Transformada Wavelet Discreta Não Decimada (NDWT), ou seja, a NDWT conserva ambas as decimações, pares e ímpares, em cada nível de resolução e mantém esse procedimento ao longo do Algoritmo Piramidal. Assim, em cada nível de resolução haverá n coeficientes, se o conjunto de dados $\mathbf{X}$ tiver n elementos.

Uma diferença entre DWT e NDWT é que a DWT depende da escolha da origem dos dados, ou seja, uma translação nos dados resulta num conjunto distinto de coeficientes *wavelets*. O mesmo não ocorre com a NDWT, sendo esta invariante a translação [31].

Além de diversas aplicações na literatura, a NDWT tem sido investigada recentemente com diferentes objetivos em dados GPS e resultados importantes tem sido obtidos, como podem ser vistos em [8] e [33]. Uma descrição da AMR, DWT e NDWT mais detalhada pode ser vista em [31], [32] e [35].

4.2 Bases *Wavelets*

De acordo com a literatura, existem várias famílias de funções *wavelets*, dentre as quais são abordadas nesta pesquisa as *wavelets* de suporte compacto de Haar e de Daubechies.

4.2.1 *Wavelet* de Haar

A *wavelet* de Haar, conhecida também como onda quadrada, foi introduzida pelo matemático Haar em 1910, sendo esta ortogonal e simétrica. A família *wavelet* de Haar é conhecida pela sua simplicidade, pois analisa um sinal constante por partes, o que muitas vezes pode se tornar mais adequado. A função de Haar é definida como [18]:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.15)$$

cujas função escala é dada por:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.16)$$

e

$$\psi_{j,k}(t) = \begin{cases} 2^{j/2}, & 2^{-j}k \leq t < 2^{-j}(k + 1/2) \\ -2^{j/2}, & 2^{-j}(k + 1/2) \leq t < 2^{-j}(k + 1) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.17)$$

Para a *wavelet* de Haar os coeficientes dos filtros passa-alta e passa-baixa são dados por $h_0 = -h_1 = 1/\sqrt{2}$ e $g_0 = g_1 = 1/\sqrt{2}$. A Figura (4.1) ilustra a *wavelet* de Haar.

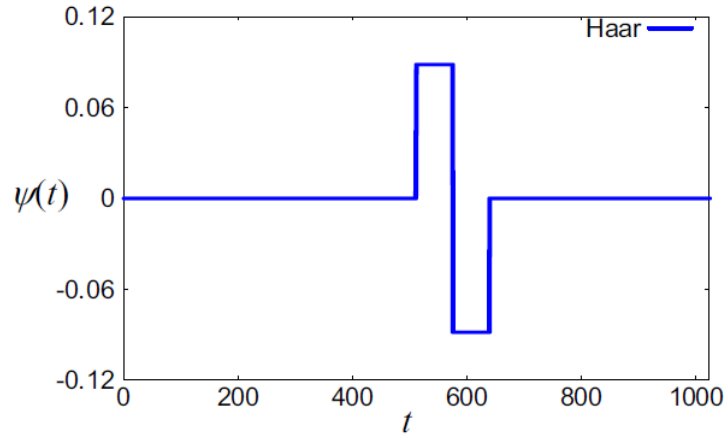


Figura 4.1: Gráfico da função *wavelet* de Haar. Fonte: [39]

4.2.2 Wavelet de Daubechies

As *wavelets* de Daubechies geram bases ortonormais e não possuem uma forma explícita. Possuem p momentos nulos e suporte compacto no intervalo $[-p + 1, p]$. Quando $p = 1$ tem-se a *wavelet* de Haar [13].

Através dos coeficientes dos filtros h_j e utilizando a *quadrature mirror filter relation* definida em (4.14) obtém-se as representações gráficas da Figura (4.2) para as *wavelets* de Daubechies com p momentos nulos.

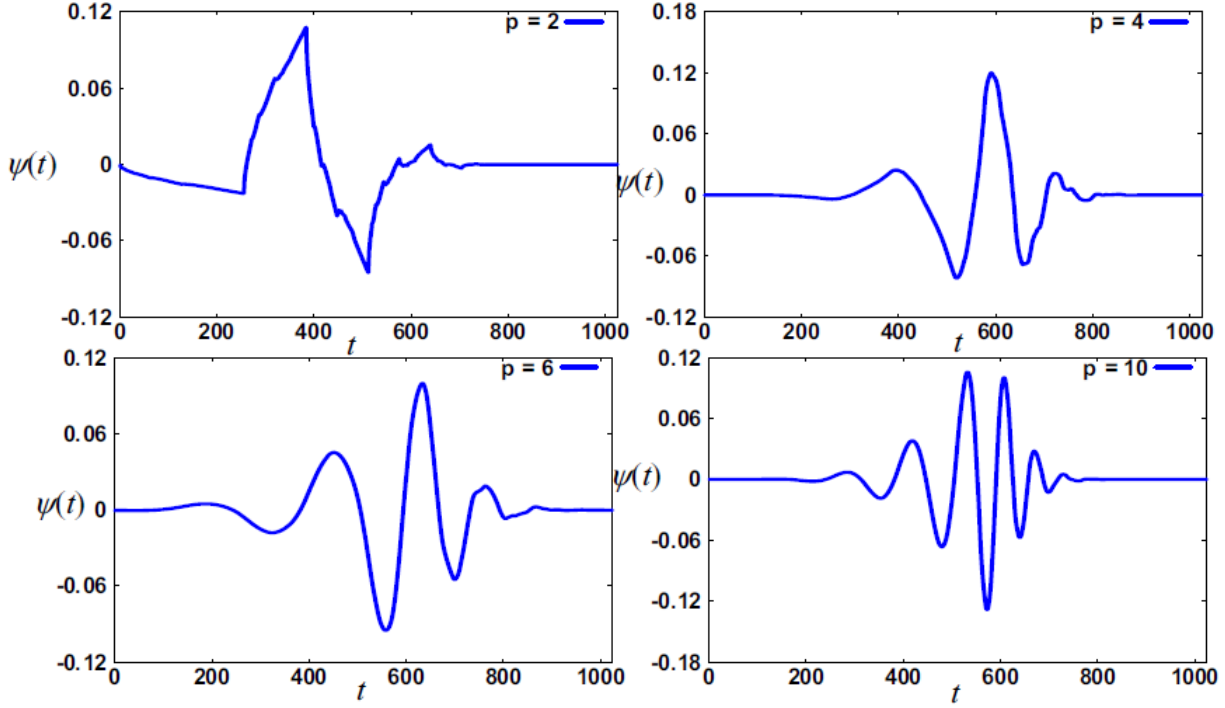


Figura 4.2: Gráfico da função *wavelet* de Daubechies para $p = 2, 4, 6$ e 10 . Fonte: [39]

4.3 Definição para a Variância *Wavelet*

Considere $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ como sendo a realização de um processo estocástico (uma série temporal) intrinsecamente estacionária de d -ésima ordem e seja $\{h_{j,l} : l=0,1,\dots,L_j-1\}$ o conjunto dos coeficientes do filtro *wavelet* Daubechies (filtros passa-alta), associados as escalas $\tau_j = 2^{j-1}$ e com largura em cada nível j dada por $L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1$, sendo L a largura no nível de resolução inicial ($j=1$). O processo estocástico obtido por filtragem é definido como:

$$\overline{W}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} h_{j,l} X_{t-l}, \quad t = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (4.18)$$

sendo denotado também como o processo de coeficientes *wavelets* de nível j .

Definição 5 Se existir e for finita, então a variância *wavelet* dependente do tempo para a escala τ_j é definida como sendo a variância de $\{\overline{W}_{j,t}\}$, ou seja, $\nu_{X,t}^2(\tau_j) = \text{var} \{\overline{W}_{j,t}\}$. No entanto, se a variância *wavelet* é independente do tempo, ou seja invariável ao longo do tempo, então esta é definida como [35]:

$$\nu_X^2(\tau_j) = \text{var} \{\overline{W}_{j,t}\}. \quad (4.19)$$

A variância *wavelet* invariante ao longo do tempo representa a quantidade estimada em aplicações práticas e, portanto, adotada neste trabalho e denotada apenas como variância *wavelet*. Por meio desta, é possível decompor a variância do processo em diferentes escalas, em que cada valor de $\nu_X^2(\tau_j)$ representa a contribuição para a variabilidade total da série na escala τ_j (ou no nível de resolução j). Assim, a variância *wavelet* é uma medida de quanto uma média ponderada de $\overline{W}_{j,t}$ sobre um intervalo τ_j difere de uma média semelhante em um intervalo adjacente [34].

Em particular, a variância *wavelet* pode ser decomposta por meio da função densidade espectral (SDF) do processo $\{X_t\}$. Como SDF decompõe o processo da variância de $\{X_t\}$ sobre o intervalo de frequência $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, ou seja

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_X(f) df = \text{var}\{X_t\},$$

a variância *wavelet* é de interesse por que fornece uma forma de regularizar a SDF por meio dos coeficientes escalas τ_j , resumindo a informação da SDF em pequenos intervalos de frequências. Desta forma, a variância *wavelet* é aproximadamente [35]:

$$\nu_X^2(\tau_j) \approx 2 \int_{\tau_{j+2}^{-1}}^{\tau_{j+1}^{-1}} S_X(f) df. \quad (4.20)$$

Em contrapartida, a variância *wavelet* também pode ser decomposta em função do processo $\{\bar{W}_{j,t}\}$, por meio da seguinte condição.

Definição 6 Se $\{h_{j,l}\}$ tem comprimento $L \geq 2d$ então $\{\bar{W}_{j,t}\}$ é um processo estocástico com SDF definida por

$$S_j = \tilde{H}_j S_X(f) \quad (4.21)$$

em que $\tilde{H}_j$ é a função ganho quadrado associada aos filtros $\{h_{j,l}\}$, definida como:

$$\Pi_j = |H_j|^2 \quad (4.22)$$

e H_j é a função transferência do filtro $\{h_{j,l}\}$, definida em função da Transformada de Fourier Discreta (DFT) [35].

Portanto, a variância *wavelet* é definida tanto para processos estacionários quanto para processos intrinsecamente estacionários, desde que a largura do filtro $\{h_{j,l}\}$ seja grande o suficiente.

A relação entre escala e frequência fornecidas pelas *wavelets* associa as escalas τ_j aos intervalos de frequências $(\frac{1}{4\tau_j}, \frac{1}{2\tau_j}]$ e aos intervalos de períodos $[2\tau_j, 4\tau_j)$. Como a frequência é o inverso do período, tem-se que as escalas maiores estão relacionadas a pequenos intervalos de frequência e grandes intervalos de tempo, conforme mostra a Tabela (4.1).

Tabela 4.1: Intervalos de frequência e período em cada escala $\tau_j = 2^{j-1}$

Escala	Intervalo de Frequência	Intervalo de Período em minutos
τ_j	$\left(\frac{1}{4\tau_j}, \frac{1}{2\tau_j}\right]$	$[2\tau_j, 4\tau_j)$
$\tau_1 = 1$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$	2 a 4 minutos
$\tau_2 = 2$	$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$	4 a 8 minutos
$\tau_3 = 4$	$\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right]$	8 a 16 minutos
$\tau_4 = 8$	$\left(\frac{1}{32}, \frac{1}{16}\right]$	16 a 32 minutos
$\tau_5 = 16$	$\left(\frac{1}{64}, \frac{1}{32}\right]$	32min a 1h4min
$\tau_6 = 32$	$\left(\frac{1}{128}, \frac{1}{64}\right]$	1h4min a 2h8min
$\tau_7 = 64$	$\left(\frac{1}{256}, \frac{1}{128}\right]$	2h8min a 4h16min
$\tau_8 = 128$	$\left(\frac{1}{512}, \frac{1}{256}\right]$	4h16min a 8h32min
$\tau_9 = 256$	$\left(\frac{1}{1024}, \frac{1}{512}\right]$	8h32min a 17h4min
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Embora a Tabela (4.1) tenha sido representada em minutos, esta pode ser facilmente estendida para outras unidades.

4.4 Escalas Características

As escalas características são analisadas através dos picos locais de um gráfico $\log \nu_X^2(\tau_j)$ versus $\log \tau_j$, buscando indentificar as escalas das quais os valores da variância *wavelet* são maiores do que os valores adjacentes. Estas escalas são definidas como [19]:

Definição 7 (Escala característica local) *Seja $\{\nu_X^2(\tau_j) : j \in \mathbb{N}\}$ o conjunto das variâncias wavelets estimadas de uma série temporal intrinsecamente estacionária $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$. Se para algum $j \geq 2$ existir $\nu_X^2(\tau_j)$ tal que $\log(\nu_X^2(\tau_{j-1})) \leq \log(\nu_X^2(\tau_j))$ e $\log(\nu_X^2(\tau_j)) \geq \log(\nu_X^2(\tau_{j+1}))$, então $\nu_X^2(\tau_j)$ é dita uma escala característica local ($\nu_X^2(\tau_{c,j})$).*

Definição 8 (Escala característica global) *Seja $\{\nu_X^2(\tau_{c,j}) : c \text{ e } j \in \mathbb{N}\}$ o conjunto das variâncias wavelets que apresentam escalas características locais da série temporal intrinsecamente estacionária $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$. A variância wavelet com escala característica local é dita global se $\nu_X^2(\tau_{c,j}) > \nu_X^2(\tau_{c,k})$, para todo $j \neq k$.*

Portanto, se for detectada a existência de escalas características na análise multiescala da variância *wavelet*, então nestas escalas há uma grande concentração de energia que está contribuindo mais para a variabilidade da série do que nas escalas que a rodeiam.

No entanto, as escalas características são analisadas na escala $\log - \log$, pois por meio dessa análise também é possível investigar o modelo que melhor descreve o comportamento de um processo estocástico. Assim, para cada modelo de série temporal, o gráfico $\log \nu_X^2(\tau_j)$ versus $\log \tau_j$ apresenta formas diferentes, contendo a existência ou ausência de escalas características locais e globais.

Conforme mostra a Figura (4.3), os processos estocásticos ruído branco e passeio aleatório não apresentam escalas características, ao contrário dos processos autorregressivos e médias móveis apresentados na Figura (4.4). O passeio aleatório foi simulado com 2048 observações conforme equação (3.4). Da mesma forma, o processo autorregressivo simulado segue a equação apresentada (3.4) com ordem 1, ou seja, $X_t = 0.6X_{t-1} + \epsilon_t$. O processo de médias, equação (3.3), foi simulado de ordem 1: $X_t = \epsilon_t + 0.7\epsilon_{t-1}$, também com 2048 observações.

No processo ruído branco, a medida que o nível de resolução aumenta, não existe um aumento ou associação entre as variâncias nas escalas sucessivas, fazendo com que o gráfico da $\log \nu_X^2(\tau_j)$ versus $\log \tau_j$ tenha um decaimento linear. No passeio aleatório ocorre o inverso, a medida que aumenta o nível de resolução tem-se uma correlação mais forte, resultando num gráfico com um comportamento linear crescente do $\log \nu_X^2(\tau_j)$ versus $\log \tau_j$.

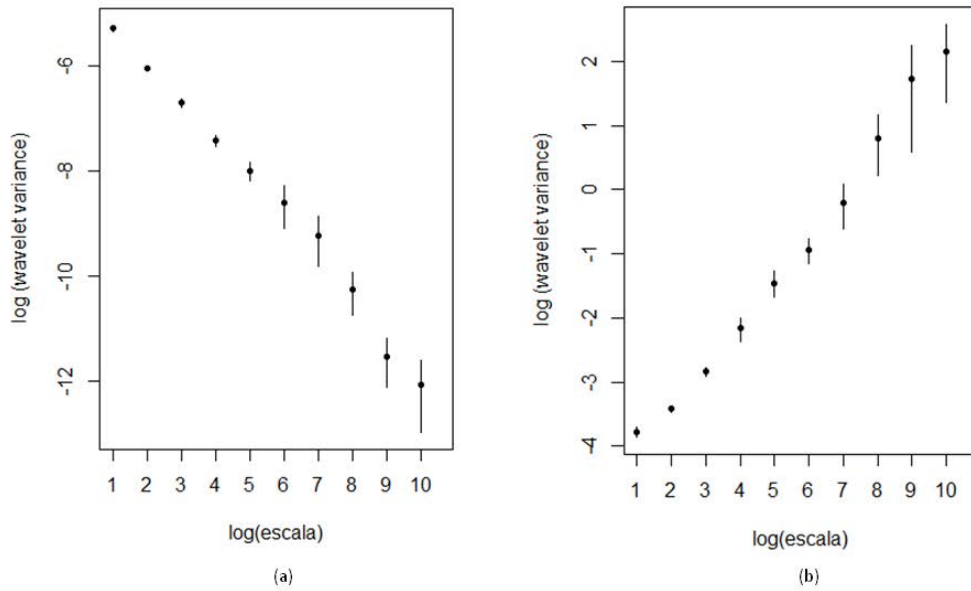


Figura 4.3: Gráfico da $\log \nu_X^2(\tau_j)$ versus $\log \tau_j$ para séries temporais simuladas, sendo: (a) um processo ruído branco; (b) um processo passeio aleatório.

No caso dos processos autorregressivos e de médias móveis ocorre uma alta correlação nas primeiras escalas fazendo com que o gráfico apresente um comportamento crescente até um determinada escala, atingindo um valor máximo $\log \nu_X^2(\tau_j)$, sendo esta uma escala característica global. Após esta escala, ocorre uma diminuição nas associação ente as variâncias nas escalas sucessivas e dependendo da ordem do processo, pode existir algumas escalas características locais.

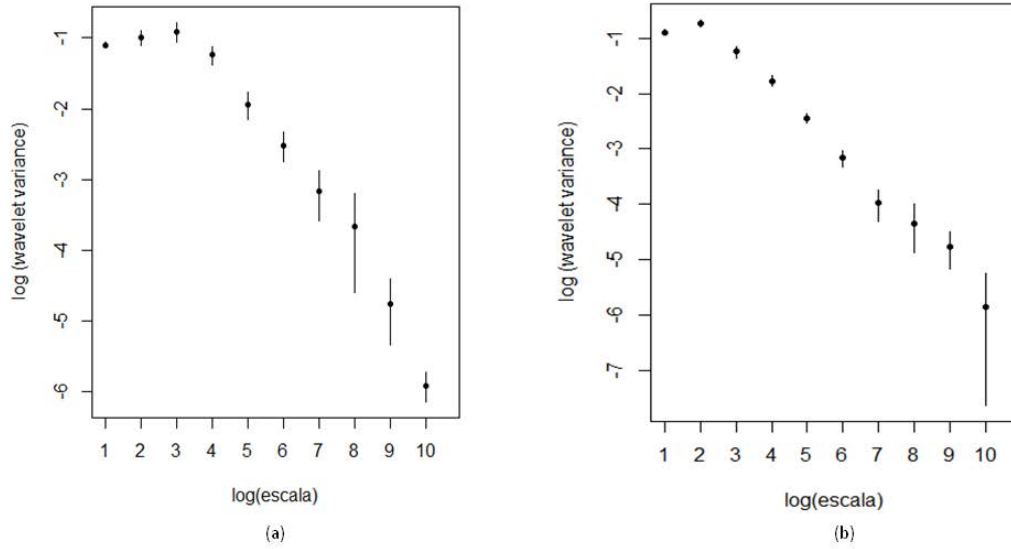


Figura 4.4: Gráfico da $\log \nu_X^2(\tau_j)$ versus $\log \tau_j$ para séries temporais simuladas, sendo: (a) um processo autorregressivo de ordem 1: $X_t = 0.6X_{t-1} + \epsilon_t$; (b) um processo de médias móveis de ordem 1: $X_t = \epsilon_t + 0.7\epsilon_{t-1}$.

Portanto, através de uma análise visual do gráfico $\log \nu_X^2(\tau_j)$ versus $\log \tau_j$ é possível investigar qual modelo melhor descreve o comportamento de uma série temporal. Neste trabalho esse método de investigação foi utilizado para verificar a possibilidade de existir um modelo que melhor descreva os índices $S4$ de cintilação ionosférica.

4.5 Estimação da Variância Wavelet

Como definido anteriormente, séries temporais são amostradas em intervalos regulares de tempo. No entanto, pode ocorrer que em alguns intervalos as observações não sejam registradas, gerando lacunas nas séries temporais. Neste caso, os dados devem ser tratados como “gaps” ou dados faltantes.

As lacunas são muitas vezes tratadas por procedimentos de interpolações nos dados, porém, quando se tem muitos gaps consecutivos, o método apresentado se torna inviável, pois não é possível deduzir o efeito que a interpolação teve sobre qualquer inferência estatística resultante [24].

As séries temporais geradas pelos índices $S4$ de cintilação ionosférica apresentam uma grande quantidade de gaps consecutivos, devido o receptor só coletar dados de um determinado satélite em um curto período por dia.

Apesar do interesse se concentrar em séries temporais com lacunas, serão apresentados estimadores não tendenciosos² em ambos os casos.

4.5.1 Séries Temporais sem lacunas

Quando as séries não apresentam lacunas, os estimadores para o cálculo da variância wavelet serão gerados a partir do seguinte resultado [35].

Teorema 1 Se $L \geq 2d$ e se $\mu_X = 0$, ou seja, a média do processo intrinsecamente estacionária de d -ésima ordem $\{X_t\}$ for nula, então

²Um estimador $\hat{\theta}$ é chamado de não tendencioso ou não viciado se o seu valor esperado for igual ao verdadeiro valor do parâmetro θ , isto é, $E(\hat{\theta}) = \theta$ [26].

$$E\{\overline{W}_{j,t}\} = 0.$$

Assim, se a largura do filtro utilizado e a média do processo satisfizer as condições do Teorema 1, então a variância *wavelet* pode ser reescrita como:

$$\nu_X^2(\tau_j) = \text{var}\{\overline{W}_{j,l}\} = E\{(\overline{W}_{j,l} - E\{\overline{W}_{j,l}\})^2\} = E\{\overline{W}_{j,l}^2\}. \quad (4.23)$$

Portanto, a variância *wavelet* pode ser estimada pela média do quadrado da série temporal gerada pelo processo de filtragem utilizando os coeficientes *wavelets*, tanto para os filtros da NDWT quanto para os da DWT.

O estimador gerado pelos filtros da NDWT é denominado como o estimador *maximal-overlap* (MODWT). Como não ocorre decimação no processo de construção dos coeficientes dos filtros da NDWT, então o estimador *maximal-overlap* é definido em cada nível de resolução j como sendo a média do quadrado do processo de coeficientes *wavelets*, dada por [35]:

$$\hat{\nu}_X^2(\tau_j) = \frac{1}{M_j} \sum_{t=L_j-1}^{n-1} \overline{W}_{j,t}^2, \quad (4.24)$$

em que $M_j = n - L_j + 1$.

No caso da DWT, como os filtros são gerados através de um processo de decimação, o estimador para a variância *wavelet* é descrito para o caso em que o tamanho amostral de $\{X_t\}$ é uma potência de 2. O estimador DWT é definido como [34]:

$$\hat{\nu}_X^2(\tau_j) = \frac{1}{N'_j - L'_j} \sum_{t=L'_j}^{n_j-1} \overline{W}_{j,2^j(t+1)-1}^2, \quad (4.25)$$

em que $L'_j = [(L-2)(1 - \frac{1}{2^j})]$ e $N'_j = \frac{n}{2^j}$, sendo $[\cdot]$ um operador que calcula o maior inteiro inferior ou igual ao argumento, ou seja, um operador de arredondamento.

Quando o tamanho amostral da série temporal $\{X_t\}$ não for diádico, o estimador DWT é definido por meio de uma reamostragem da série inicial, donde serão acrescentados zeros para se obter o seguinte processo estocástico $\{X'_t\}$:

$$X'_t = \begin{cases} X_t, & 0 \leq t \leq n-1 \\ 0, & n \leq t \leq M-1 \end{cases} \quad (4.26)$$

em que $M > n$ é uma potência de 2.

Para este processo, o estimador DWT é definido como:

$$\hat{\nu}_X^2(\tau_j) = \frac{1}{([\frac{n}{2^j} - 1] - L'_j + 1)} \sum_{t=L'_j}^{[\frac{n}{2^j}-1]} \left(W'_{j,2^j(t+1)-1}\right)^2. \quad (4.27)$$

em que $W'_{j,2^j(t+1)-1}$ é o processo obtido por filtragem definido (4.18) tendo os valores de entrada dados pela série temporal (4.26).

Mesmo os dois estimadores sendo não tendenciosos, o estimador de variância baseado nos coeficientes da NDWT é assintoticamente mais eficiente do que o estimador baseado nos coeficientes da DWT [35].

4.5.2 Séries Temporais com lacunas

No caso em que a série temporal $\{X_t\}$ apresenta lacunas, a variância *wavelet* definida em (4.19) pode ser obtida através dos coeficientes de autocovariância $\gamma_{X,l-l'}$ da série definidos em (3.2) ou pelos coeficientes de semivariograma $\varphi_{X,l-l'} = \frac{1}{2}\text{var}(X_0 - X_{l-l'})$, pois como em determinados momentos as observações da série são ausentes, o processo definido em (4.18) não irá convergir para um determinado valor.

Portanto, a variância *wavelet* para um processo intrinsecamente estacionária de d -ésima ordem $\{X_t\}$ é definida de uma forma alternativa como [24]:

$$\nu_X^2(\tau_j) = \sum_{l=0}^{L_j-d-1} \sum_{l'=0}^{L_j-d-1} b_{j,l,d} b_{j,l',d} \gamma_{X,l-l'}, \quad (4.28)$$

ou

$$\nu_X^2(\tau_j) = - \sum_{l=0}^{L_j-d-1} \sum_{l'=0}^{L_j-d-1} b_{j,l,d} b_{j,l',d} \varphi_{X,l-l'}, \quad (4.29)$$

em que $b_{j,l,k}$ é o somatório acumulativo dos filtros *wavelet* Daubechies $\{h_{j,t}\}$ de k -ésima ordem:

$$\begin{aligned} b_{j,l,0} &= h_{j,l} \\ b_{j,l,k} &= \sum_{r=0}^l b_{j,r,k-1} \end{aligned} \quad (4.30)$$

para $l = 0, \dots, L_j - k - 1$.

Na estimação da variância *wavelet* com dados faltantes consecutivos, é necessário informar em quais intervalos a série apresenta lacunas. Para tanto é definido o seguinte processo binário [24]:

$$\delta_t = \begin{cases} 1, & \text{se } x_t \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.31)$$

ou seja, o processo δ_t verifica se a observação é dado com valor real ou faltante para cada $t = 1, \dots, n$ da serie temporal $\{X_t\}$.

Associado a este processo está uma medida de probabilidade que quantifica o maior intervalo sem a presença de dados faltantes na série $\{X_t\}$. A probabilidade é definida como [24]:

$$\beta_k^{-1} = Pr(\delta_t = 1, \delta_{t+k} = 1). \quad (4.32)$$

donde $l \geq 0$ e $l' \leq L_j - 1$ e $k = l, l'$. Quando $n \rightarrow \infty$, o estimador de β_k^{-1} é dado por:

$$\hat{\beta}_{l,l'}^{-1} = \frac{1}{M_j} \sum_{t=L_j-d-1}^{n-1} \delta_{t-l} \delta_{t-l'}. \quad (4.33)$$

Assumindo (4.31) e (4.33), obtém-se os seguintes estimadores para a variância *wavelet*:

$$\hat{\nu}_X^2(\tau_j) = \frac{1}{M_j} \sum_{t=L_j-d-1}^{n-1} \sum_{l=0}^{L_j-d-1} \sum_{l'=0}^{L_j-d-1} b_{j,l,d} b_{j,l',d} \hat{\beta}_{l,l'} X_{t-l} X_{t-l'} \delta_{t-l} \delta_{t-l'} \quad (4.34)$$

e

$$\tilde{\nu}_X^2(\tau_j) = - \frac{1}{2M_j} \sum_{t=L_j-d-1}^{n-1} \sum_{l=0}^{L_j-d-1} \sum_{l'=0}^{L_j-d-1} b_{j,l,d} b_{j,l',d} \hat{\beta}_{l,l'} (X_{t-l} - X_{t-l'})^2 \delta_{t-l} \delta_{t-l'} \quad (4.35)$$

em que $\hat{\nu}_X^2(\tau_j)$ e $\tilde{\nu}_X^2(\tau_j)$ são denominados como estimador covariância e estimador semi-variograma, respectivamente.

Uma das propriedades desses estimadores é que o estimador covariância $\hat{\nu}_X^2(\tau_j)$ não permanece invariante se for adicionado uma constante no processo original $\{X_t\}$ e quando $\delta_t = 1$, para todo $t = 1, \dots, n$, os valores dos estimadores coincidem com o estimador MODWT definido em (4.24) [35].

Para avaliar a variabilidade dos índices $S4$ e $S4_{corr}$ de cintilação ionosférica serão utilizados os estimadores (4.34) e (4.35).

4.6 Intervalo de Confiança para Variância Wavelet Estimada

Como os estimadores da variância *wavelet* são variáveis aleatórias, é de interesse saber o quão próximo o estimador está do verdadeiro valor de $\nu_X^2(\tau_j)$. Assim, os intervalos de confiança (IC) para os estimadores da variância *wavelet* são usados para indicar a confiabilidade de uma estimativa pontual.

Para abordar esta questão, alguns resultados são considerados para que os IC da $\nu_X^2(\tau_j)$ baseados sobre os estimadores possam ser calculados. Tais procedimentos são descritos nos dois casos de séries temporais apresentados na seção anterior.

4.6.1 IC para Séries Temporais sem lacunas

Conforme apresentado anteriormente, a variância *wavelet* de um processo estocástico (uma série temporal) intrinsecamente estacionária de d -ésima ordem $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ é definida em função de um processo $\{\overline{W}_{j,t}\}$ obtido por filtragem utilizando os filtros *wavelets* de Daubechies. Para que sua estimação possa ser realizada, a suposição apresentada no Teorema 1 tem que ser satisfeita. Em consequência, se $L \geq 2d$, então $\{\overline{W}_{j,t}\}$ tem SDF dada por meio da Definição 6. Para que o IC da $\nu_X^2(\tau_j)$ baseado sobre o estimador $\hat{\nu}_X^2(\tau_j)$ possa ser definido é necessário acrescentar algumas suposições adicionais sobre o processo $\{\overline{W}_{j,t}\}$, sendo esta [24] e [35]:

Teorema 2 *Suponha que $\{\overline{W}_{j,t}\}$ seja um processo estacionário Gaussiano (Normal) com média zero e SDF $S_j(f)$. Se $S_j(f)$ é de quadrado integrável finito e estritamente positiva em quase toda parte, isto é,*

$$A_j = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [S_j(f)]^2 df. \quad (4.36)$$

então o estimador $\hat{\nu}_X^2(\tau_j)$ é normalmente distribuído com média $\nu_X^2(\tau_j)$ e variância $A_j/2M_j$, ou seja,

$$\hat{\nu}_X^2(\tau_j) \approx N \left(\nu_X^2(\tau_j), \frac{2A_j}{M_j} \right). \quad (4.37)$$

Por meio da definição apresentada, é possível realizar uma reparametrização em (4.37), fazendo com que a variável aleatória tenha uma distribuição Gaussiana Padrão (Normal Padrão). Desta maneira, segue que:

$$\frac{M_j^{1/2}(\hat{\nu}_X^2(\tau_j) - \nu_X^2(\tau_j))}{(2A_j)^{1/2}} \approx N(0, 1). \quad (4.38)$$

Portanto, o IC para $\nu_X^2(\tau_j)$ sobre o estimador $\hat{\nu}_X^2(\tau_j)$ é definido como [24]:

$$\left[\hat{\nu}_X^2(\tau_j) - \Phi^{-1}(1-p) \left(\frac{2A_j}{M_j} \right)^{1/2}, \quad \hat{\nu}_X^2(\tau_j) + \Phi^{-1}(1-p) \left(\frac{2A_j}{M_j} \right)^{1/2} \right]. \quad (4.39)$$

em que $\Phi^{-1}(1-p)$ é o escore referente ao percentil da distribuição Gaussiana Padrão para $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$.

Para que o IC possa ser calculado em aplicações práticas, é necessário estimar A_j . Um estimador não tendencioso para A_j é definido como [35]:

$$\hat{A}_j = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{S}_j^2(f) df. \quad (4.40)$$

em que, por meio do Teorema de Parseval³ tem-se que

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{S}_j^2(f) df = \sum_{\tau=-(M_j-1)}^{M_j-1} (\hat{s}_{j,\tau})^2, \quad (4.41)$$

e

$$\hat{s}_{j,\tau} = \frac{1}{M_j} \sum_{t=L_j-1}^{n-1-|\tau|} \overline{W}_{j,t} \overline{W}_{j,t+|\tau|} \quad 0 \leq |\tau| \leq M_j - 1.$$

A substituição de A_j por $\hat{A}_j$ em (4.39) conduz uma aproximação do IC para $\nu_X^2(\tau_j)$ sobre o estimador $\hat{\nu}_X^2(\tau_j)$.

No caso em que deseja-se calcular o IC para o estimador $\tilde{\nu}_X^2$, as expressões A_j e M_j são substituídas por:

$$A'_j = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[S_j \left(\frac{f}{2} \right) + S_j \left(\frac{f}{2} + \frac{1}{2} \right) \right]^2 df \quad (4.42)$$

e

$$M'_j = n/2^j \quad (4.43)$$

em virtude de S_j estar descrita em função do processo obtido pelos filtros da NDWT e, neste caso, é necessário diminuir pela metade os coeficientes adicionais a medida que aumenta o nível de resolução j .

Para o estimador $\tilde{\nu}_X^2(\tau_j)$, o IC para $\nu_X^2(\tau_j)$ é definido como:

$$\left[\tilde{\nu}_X^2(\tau_j) - \Phi^{-1}(1-p) \left(\frac{2A'_j}{M'_j} \right)^{1/2}, \quad \tilde{\nu}_X^2(\tau_j) + \Phi^{-1}(1-p) \left(\frac{2A'_j}{M'_j} \right)^{1/2} \right]. \quad (4.44)$$

em que o estimador de A'_j é obtido de forma análoga apresenta para o caso A_j [35].

³Pelo Teorema de Parseval, a propriedade fundamental de uma sequência (a soma das magnitudes ao quadrado) é preservada, de uma maneira simples, por sua Transformada de Fourier. Ou seja, dada sequência infinita de variáveis $\{a_j : t = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ então

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |a_t|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |A(f)|^2 df$$

em que $A(f)$ é a Transformada de Fourier Discreta de $\{a_t\}$.

4.6.2 IC para Séries Temporais com lacunas

Para que os IC's para os estimadores definidos em (4.34) e (4.35) possam ser calculados, é necessário introduzir alguns resultados, pois no caso em que a série temporal possui dados faltantes, a suposição definida pelo Teorema 4.37 não pode ser utilizada, em virtude do processo $\{\overline{W}_{j,t}\}$ ser definido para séries temporais sem lacunas.

Assim, no caso em que as séries temporais tem dados faltantes, os seguintes processos estocásticos são definidos [24]:

$$Z_{u,j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-d-1} \sum_{l'=0}^{L_j-d-1} h_{j,l} h_{j,l'} \beta_{l-l'} X_{t-l} X_{t-l'} \delta_{t-l} \delta_{t-l'}, \quad (4.45)$$

$$Z_{v,j,t} = -\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{L_j-d-1} \sum_{l'=0}^{L_j-d-1} h_{j,l} h_{j,l'} \beta_{l-l'} (X_{t-l} - X_{t-l'})^2 \delta_{t-l} \delta_{t-l'}, \quad (4.46)$$

para um j fixado, com $\{X_t\}$ sendo uma série temporal intrinsecamente estacionária de d -ésima ordem, contendo dados faltantes.

Os processos $Z_{u,j,t}$ e $Z_{v,j,t}$ são ambos estacionários com média $\nu_X^2(\tau_j)$ e, no caso em que $\{X_t\}$ não contém dados faltantes é equivalente ao processo $\{\overline{W}_{2j,t}\}$.

O Teorema seguinte fornece uma base para a inferência sobre a variância *wavelet* no cálculo dos IC's usando os estimadores $\widehat{\nu}_X^2(\tau_j)$ e $\widetilde{\nu}_X^2(\tau_j)$.

Teorema 3 *Suponha que $\{X_t\}$ seja um processo estacionário Gaussiano, cuja SDF é de quadrado integrável e suponha que δ_t é um processo binário estritamente estacionário (independente de $\{X_t\}$). Então os seguintes resultados são válidos:*

- $\widehat{\nu}_X^2(\tau_j)$ é assintoticamente normal com média $\nu_X^2(\tau_j)$ e variância $S_{u,j}(0)/M_j$, em que $S_{u,j}$ é a SDF para $Z_{u,j,t}$.
- $\widetilde{\nu}_X^2(\tau_j)$ é assintoticamente normal com média $\nu_X^2(\tau_j)$ e variância $S_{v,j}(0)/M_j$, em que $S_{v,j}$ é a SDF para $Z_{v,j,t}$.

Sendo satisfeita a condição do Teorema 3, as distribuições amostrais das variáveis aleatórias dos estimadores $\widehat{\nu}_X^2(\tau_j)$ e $\widetilde{\nu}_X^2(\tau_j)$ são definidas como:

$$\widehat{\nu}_X^2(\tau_j) \approx N\left(\nu_X^2(\tau_j), \frac{S_{u,j}(0)}{M_j}\right) \quad (4.47)$$

e

$$\widetilde{\nu}_X^2(\tau_j) \approx N\left(\nu_X^2(\tau_j), \frac{S_{v,j}(0)}{M_j}\right). \quad (4.48)$$

Assim, de forma análoga ao caso das séries temporais sem lacunas, é possível fazer uma reparametrização em (4.47) e (4.48), fazendo com que as variáveis aleatórias dos estimadores tenham uma distribuição Gaussiana Padrão. Desta forma, os IC's podem ser construídos para a variância *wavelet* e são definidos como:

$$\left[\widehat{\nu}_X^2(\tau_j) - \Phi^{-1}(1-p) \left(\frac{S_{u,j}(0)}{M_j} \right)^{1/2}, \widehat{\nu}_X^2(\tau_j) + \Phi^{-1}(1-p) \left(\frac{S_{u,j}(0)}{M_j} \right)^{1/2} \right], \quad (4.49)$$

e

$$\left[\tilde{\nu}_X^2(\tau_j) - \Phi^{-1}(1-p) \left(\frac{S_{v,j}(0)}{M_j} \right)^{1/2}, \tilde{\nu}_X^2(\tau_j) + \Phi^{-1}(1-p) \left(\frac{S_{v,j}(0)}{M_j} \right)^{1/2} \right]. \quad (4.50)$$

No entanto, para calcular os IC's dos estimadores para $\nu_X^2(r_j)$, é necessário estimar $S_{u,j}(0)$ e $S_{v,j}(0)$. Para definir tais estimadores utiliza-se uma aproximação espectral *multitapper*⁴ [24] e [43].

Por meio deste método iterativo, um estimador para $S_{u,j}(0)$ é definido como:

$$\hat{S}_{u,j}(0) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} (J_{u,j,k} - \tilde{u}_j \lambda_{k,+})^2, \quad (4.51)$$

em que

$$J_{u,j,k} = \sum_{t=0}^{M_j-1} \lambda_{k,t} Z_{u,j,t+L_j-1},$$

$$\tilde{u}_j = \frac{\sum_{k=0,2,\dots}^{K_1} J_{u,j,k} \lambda_{k,+}}{\sum_{k=0,2,\dots}^{K_1} \lambda_{k,+}^2}.$$

e

$$\lambda_{k,+} = \sum_{t=0}^{M_j-1} \lambda_{k,t},$$

onde $\{\lambda_{k,t}$, com $t = 0, 1, \dots, M_j - 1$ e $k = 0, 1, \dots, K - 1\}$ representa um conjunto de filtros K ortonormais, denominados de *tapers Slepian*, com dimensão K [37].

O procedimento para estimar $S_{v,j}(0)$ é feita de forma análoga, tomando $Z_{v,j,t+L_j-1}$ no lugar de $Z_{u,j,t+L_j-1}$ [24].

⁴O método espectral *multitapper* é uma técnica desenvolvida por David J. Homsom para estimar a SDF, usando um conjunto de filtros ortogonais $\{\lambda_{k,t}\}$, denominados de *tapers Slepian*. O método calcula, em cada cada nível j de resolução, um conjunto de estimativas independentes do espectro $\{J_{u,j,k}\}$ tomadas em intervalos janelados e, ao final desse processo, é realizada uma média ponderada $\tilde{u}_j$ destas estimadas para que a SDF possa ser estimada.

Modelos Estatísticos utilizados na análise do índice $S4$

De acordo com a literatura, várias funções de densidade de probabilidades (FDP) tem sido utilizadas para descrever sinais GNSS. Dentre as distribuições mais adotadas estão, como por exemplo, as distribuições Weibull, Hoyt, Rayleigh, Rice e Nakagami- m . Dentre essas tem-se que a distribuição Nakagami- m tem sido amplamente utilizada na caracterização da amplitude de cintilação ionosférica, ou seja, nos índices $S4$ [27], [28], [29].

Neste capítulo será apresentada uma breve introdução sobre algumas distribuições utilizadas na análise dos índices $S4$ de cintilação ionosférica, o método de máxima verossimilhança (MMV) para estimar os parâmetros na análise clássica, bem como o teste de aderência para verificar se existe evidências de que as distribuições candidatas descrevem bem os índices $S4$.

5.1 Distribuição Weibull

A distribuição Weibull foi proposta, inicialmente, para calcular o tempo médio de vida útil em máquinas industriais como um modelo estatístico para análise de confiabilidade. No entanto, por ser um modelo simples e com grande versatilidade, a sua aplicabilidade tem se estendido para diversos outros campos, inclusive na área envolvendo propagação de sinais. A FDP Weibull é definida como [42]:

$$f(x/\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right), \quad x \geq 0, \beta > 0, \alpha > 0 \quad (5.1)$$

em que β é o parâmetro de escala e α é o parâmetro de forma.

A Figura (5.1) apresenta algumas formas gráficas que a distribuição assume para diferentes valores de α e β . Em particular, quando $\alpha = 1$, a FDP Weibull é uma generalização da FDP Exponencial.

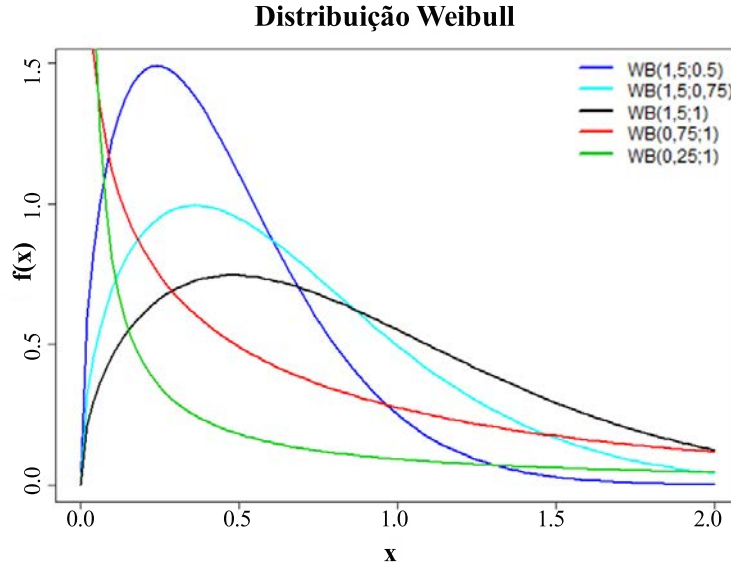


Figura 5.1: Gráfico da FDP Weibull simulada utilizando diferentes valores para os parâmetros α e β .

A Função de Distribuição Acumulada (FDA) Weibull é definida como:

$$F(x/\alpha, \beta) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right). \quad (5.2)$$

A média e variância da distribuição Weibull são dadas, respectivamente, por:

$$E(X) = \beta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (5.3)$$

e

$$Var(X) = \beta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^2 \right] \quad (5.4)$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma definida como:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t) dt.$$

5.2 Distribuição Nakagami- m

A distribuição Nakagami- m foi introduzida como um modelo de desvanecimento de curto prazo em sinais de alta frequência. Desde então tem sido muito utilizada no estudo da amplitude de sinais medidos durante eventos de cintilação. [28]. A FDP Nakagami- m é definida como:

$$f(x/m, \Omega) = \frac{2m^m x^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} \exp\left(-\frac{mx^2}{\Omega}\right) \quad x \geq 0, m \geq 0 \text{ e } \Omega > 0 \quad (5.5)$$

em que Ω é a potência média do sinal e m é o fator de desvanecimento.

Como o parâmetro m descreve o grau de desvanecimento sofrido pelo sinal, este fator indica também a forma da FDP Nakagami- m , conforme mostra a Figura (5.2). Em particular, o modelo de Nakagami inclui a PDF de Rayleigh, para $m = 1$, e aproxima a PDF de Rice, para $m > 1$.

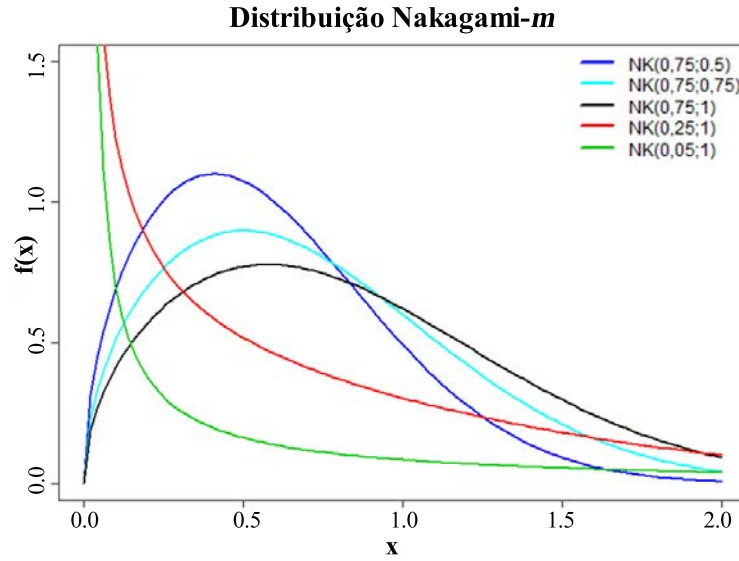


Figura 5.2: Gráfico da FDP Nakagami- m simulada utilizando diferentes valores para os parâmetro m e Ω .

A FDA Nakagami- m é definida como:

$$F(x/m, \Omega) = \frac{\gamma\left(m, \frac{mx^2}{\Omega}\right)}{\Gamma(m)} \quad (5.6)$$

em que $\gamma(\cdot)$ é a função Gamma Incompleta definida:

$$\gamma(a, b) = \int_0^b t^{a-1} \exp(-t) dt.$$

A média e variância da distribuição Nakagami- m são dadas, respectivamente, por [17]:

$$E(X) = \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m)} \left(\frac{\Omega}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.7)$$

e

$$Var(X) = \frac{\Omega}{m} \left[\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m)} - \left(\frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m)} \right)^2 \right]. \quad (5.8)$$

5.3 Distribuição Inversa Gaussiana

A distribuição Inversa Gaussiana foi proposta como um modelo para descrever movimentos aleatórios, sendo inicialmente introduzida no contexto do estudo do movimento browniano, ou seja, o movimento aleatório das partículas suspensas num fluido. Quando $\frac{1}{\sigma^2} \mapsto \infty$ a distribuição se aproxima de uma Gaussiana. A FDP Inversa Gaussiana é definida como:

$$f(x/\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x^3}} \exp\left(-\frac{1}{2\mu^2\sigma^2 x}(x - \mu)^2\right) \quad x \geq 0, \mu > 0 \text{ e } \sigma > 0. \quad (5.9)$$

A Figura (5.3) apresenta algumas formas gráficas que a distribuição assume para diferentes valores de μ e σ .

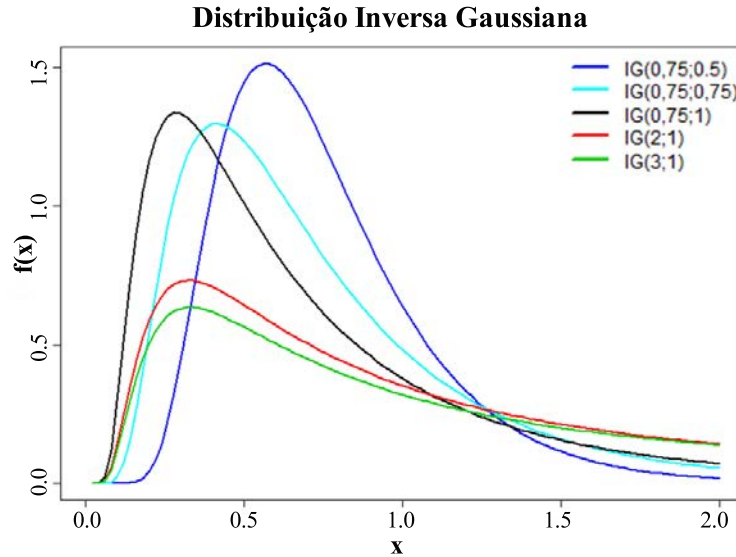


Figura 5.3: Gráfico da FDP Inversa Gaussiana simulada utilizando diferentes valores para os parâmetros μ e σ .

A FDA Inversa Gaussiana é definida como:

$$F(x/\mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 x}}\left(\frac{x}{\mu} - 1\right)\right) + \exp\left(\frac{2}{\sigma^2 \mu}\right) \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 x}}\left(\frac{x}{\mu} + 1\right)\right) \quad (5.10)$$

em que $\Phi(\cdot)$ é a FDA Normal Padrão (Gaussiana) definida:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

A média e variância da distribuição Inversa Gaussiana são dadas, respectivamente, por:

$$E(X) = \mu \quad (5.11)$$

e

$$Var(X) = \sigma^2 \mu^3. \quad (5.12)$$

5.4 Estimação dos Parâmetros

Uma vez escolhida a distribuição a ser ajustada aos dados amostrais, seus parâmetros devem ser estimados por algum método estatístico, para que os cálculos probabilísticos associados aos eventos de interesse possam ser realizados. O método da máxima verossimilhança (MMV) é o procedimento mais utilizado para estimação dos parâmetros na análise clássica [15] e [26].

5.4.1 Método de Máxima Verossimilhança

O MMV é considerado o método de estimação mais eficiente, pois produz estimadores consistentes e de menor variância [15]. O método busca maximizar a função dos parâmetros da distribuição, conhecida como função de verossimilhança. O equacionamento para a condição de máximo resulta em um sistema de números de equações e

incógnitas iguais, cuja as soluções produzem os estimadores de máxima verossimilhança. Este método exige um maior esforço computacional, uma vez que envolve soluções numéricas de sistemas de equações, frequentemente, não lineares e implícitas. O princípio deste método para o caso de um conjunto de variáveis aleatórias contínua baseia-se através das seguintes definições [26]:

Definição 9 *Seja $x_1, x_2, \dots, x_n$ uma amostra aleatória com FDP $f(x; \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. A função de Verossimilhança de θ correspondente a amostra é dada por*

$$l(\theta : x) = f(x_1|\theta)f(x_2|\theta) \dots f(x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta). \quad (5.13)$$

Definição 10 *O EMV de θ é o valor $\hat{\theta} \in \Theta$ que maximiza (5.13) e pode ser obtido como solução da chamada equação de verossimilhança definida como*

$$\frac{\partial l(\theta : x)}{\partial \theta} = 0. \quad (5.14)$$

A verossimilhança contém toda a informação dos dados relevante para estimar θ e o princípio deste método é selecionar como o estimador, o valor para o qual a amostra observada teria sido a mais provável.

Em muitas aplicações, a equação (5.14) é reescrita na escala logarítmica. Como a função logarítmica é monótona crescente, o valor que maximiza (5.14) é o mesmo que maximiza o log desta função. Logo, a equação (5.14) pode ser reescrita em termos de logaritmo e se o EMV de θ existir, este deverá satisfazer a seguinte equação

$$\frac{\partial \log l(\theta : x)}{\partial \theta} = 0. \quad (5.15)$$

Uma condição suficiente para que θ seja o valor máximo da equação (5.13) é que

$$\frac{\partial^2 \log l(\theta : x)}{\partial^2 \theta} \leq 0. \quad (5.16)$$

5.5 Teste de aderência

Os testes de aderência tem como objetivo testar a adequabilidade de um modelo probabilístico a um conjunto de dados observados. Através destes testes é verificado o quanto provável os dados seguir a distribuição densidade de probabilidade proposta. Neste trabalho foi utilizado o teste Kolmogorov-Smirnov ($K-S$) para comparar a precisão dos modelos de distribuição.

5.5.1 Teste Kolmogorov-Smirnov($K-S$)

A estatística do teste $K-S$ é calculada por meio da diferença entre a distribuição de frequência acumulada empírica e a distribuição de frequência acumulada observada, aplicada apenas para o caso em que se tem um conjunto de variáveis aleatórias contínuas. A estatística do teste é definida como [9]:

Definição 11 *Seja $x_1, x_2, \dots, x_n$ uma amostra de variáveis aleatórias contínuas, supondo ser de uma determinada população com FDA $F_X(\cdot)$. A estatística do teste $K-S$ é definida como:*

$$D = \sup_X |F_X(x_i) - F_n(x_i)|, \quad (5.17)$$

em que $F_n(\cdot)$ representa a função de distribuição acumulada empírica dos dados, sendo esta definida por uma função escala $F_n(x) = P(X \leq x)$:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}.$$

Assim, por meio da estatística do teste $K-S$, espera-se que D seja um valor pequeno, pois para existir evidências de que os dados seguem a distribuição suposta, o valor máximo estimado pela diferença entre as FDAs não deva ser muito grande.

Metodologia

6.1 Dados dos índices $S4$

Os períodos analisados dos índices de cintilação ionosférica dos sinais de satélite GPS na região brasileira foram os mesmos avaliados em [8], apresentados na Tabela (6.1). Considerando que este efeito esteja relacionado com a hora local, ocorrendo por algumas horas após o pôr do sol, tendo grande intensidade nos meses em que ocorre equinócio, foram analisados dados durante 6 dias no mês de março. Fez-se necessário avaliar a estação MAN2 e PALM em períodos diferentes, pois nestas estações não haviam dados disponíveis no mesmo período analisado para as demais estações.

Por meio deste levantamento foi possível analisar e comparar a variância *wavelet* em multiescala dos índices de cintilação ionosférica $S4$ e $S4_{corr}$. Os dados dos índices $S4$ pertencem ao projeto CIGALA/CALIBRA, em parceria com a FCT-UNESP e estão disponíveis para consulta por meio da ferramenta *ISMR Query Toll* [6], desenvolvida por [40]. Os dados $S4_{corr}$ representam o índice $S4$ corrigido, ou seja, os índices $S4$ após a estimação e correção do efeito do multicaminho proposto em [8].

O projeto CIGALA/CALIBRA conta com uma rede de 14 estações, das quais 12 estações são fixas espalhadas em pontos estratégicos do território brasileiro e coletam dados dos 32 satélites disponíveis no sistema GPS, além de outros sistemas de navegação por satélite, como o GLONASS e o Galileo. A Figura (6.1) mostra as localizações das estações da rede CIGALA/CALIBRA no Brasil. Dentre estas estações, foram utilizadas neste trabalho as que estão apresentadas na Tabela (6.1).

Tabela 6.1: Estações e satélites analisados da rede CIGALA/CALIBRA

Estação	Satélite	Localização	Período
MAN2	11	Manaus - AM	12 a 17 de março de 2013
PALM	11	Palmas - TO	1 a 6 de março de 2013
PRU1	1 - 11 - 19 - 31	Presidente Prudente - SP	7 a 12 de março de 2013
SJCU	11	São José dos Campos - SP	7 a 12 de março de 2013
POAL	11	Porto Alegre - RS	7 a 12 de março de 2013

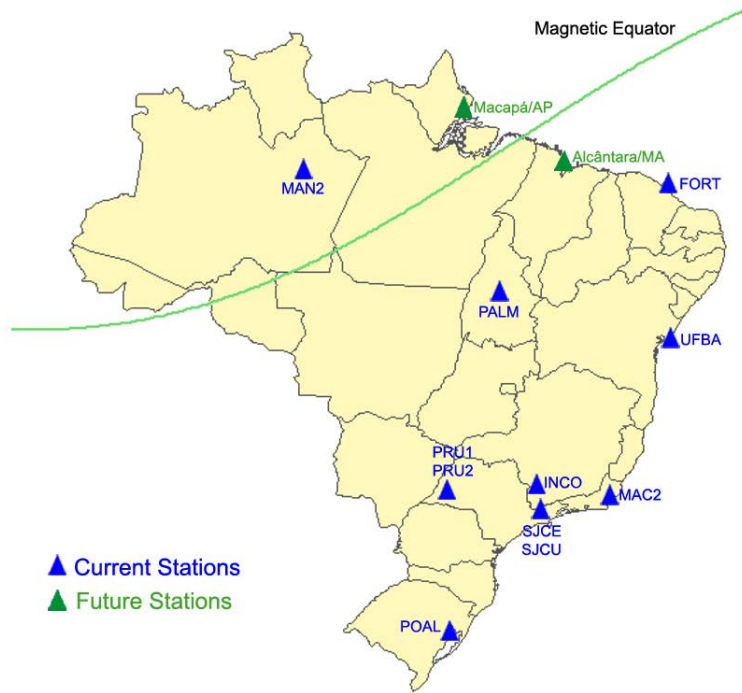


Figura 6.1: Distribuição das estações de monitoramento do projeto CIGALA/CALIBRA. FONTE: [1]

A escolha de cada estação deve-se a sua localização em relação ao equador magnético, de maneira que sejam analisadas estações sujeitas ao efeito da cintilação ionosférica, com maior e menor intensidade. Como a estação que mais quantificou o efeito de cintilação para o satélite 11 foi a PRU1, dados de satélites em diferentes posições foram investigados para esta estação também.

6.2 Implementação

A implementação deste trabalho foi realizada através do *software* R, sendo este um ambiente de programação de código aberto, disponível em <http://www.r-project.org>. O sistema R utiliza diversas bibliotecas de funções, denominados também como pacotes, em que cada um contém um conjunto de funções que permite ou facilita a realização de algumas análises estatísticas.

O código utilizado neste trabalho foi retirado de [24] e adaptado para que a variância *wavelet* fosse estimada utilizando tanto os filtros da *wavelet* de Haar quanto os filtros da *wavelet* de Daubechies. Os pacotes *wavethresh* e *waveslim* foram utilizados e adaptados na implementação dos códigos. Os pacotes *maxLik*, *MASS*, *gamlss* e *gamlss.mx* foram utilizados na estimação dos parâmetros das distribuições de probabilidades.

6.3 Análise das séries temporais dos índices S_4

Na análise dos índices S_4 e S_{4corr} , foram considerados apenas os intervalos de tempo em que os satélites estavam visíveis para cada estação. Desta maneira, as séries temporais destes índices não possuem um ciclo diário de 24 horas. Os períodos dos ciclos são definidos pelo tempo de visibilidade de cada satélite em relação a cada estação. Esta modificação não interferiu na análise, pois as escalas com maior contribuição para

a variabilidade das séries temporais dos índices $S4$ e $S4_{corr}$, foram menores do que as escalas que incluíam o tempo de visibilidade de cada satélite.

Inicialmente foi feita uma análise descritiva das séries temporais dos índices $S4$ em cada estação para verificar o comportamento destas séries e, em seguida, foi realizada uma análise comparativa com a análise descritiva das séries temporais dos índices $S4_{corr}$, apontando mudanças de comportamento destes índices.

Com relação a análise da variância *wavelet*, foram utilizados os estimadores definidos em (4.34) e (4.35) para estimar os valores da variância *wavelet* em multiescala, pois tais estimadores podem ser aplicados em séries temporais com a presença ou ausência de dados faltantes. No caso em que a série temporal não apresente lacunas, estes estimadores tendem a determinar valores próximos do estimador definido em (4.24). Esta análise foi feita levando em consideração a suposição apresentada no Teorema (1).

Por meio dos gráficos gerados pela variância *wavelet* $v_X^2(\tau_j)$ versus τ_j em escala logarítmica, foi possível avaliar as escalas que melhor descreveram a variabilidade das séries dos índices $S4$ que quantificam o efeito da cintilação ionosférica. Para avaliar se houve mudanças nas estruturas da séries temporais dos índices $S4$ com o $S4_{corr}$ realizou-se o mesmo procedimento com as séries temporais dos índices $S4_{corr}$.

Através dos gráficos gerados em escala logarítmica, pode-se também verificar a possibilidade de modelar as séries temporais dos índices $S4$ e $S4_{corr}$ por algum dos processos estocásticos apresentados no Capítulo 3.

6.4 Investigação de modelos probabilísticos para a distribuição dos índices $S4$

Um pressuposto essencial para obtenção de modelos para a distribuição de dados é a independência. Como foi verificado que as séries temporais dos índices $S4$ tem um comportamento periódico em formato de “U”, o que conduz a certa dependência serial, foi proposto realizar um particionamento dos dados de acordo com o período de visibilidade para que em cada subconjunto o comportamento da série pudesse ser considerado independente. Os intervalos particionados foram calculados por meio da divisão de cada “U” em 3 partes.

A primeira parte representa as horas iniciais do rastreamento (visibilidade) do satélite (U1), a segunda parte as horas centrais (U2) e a terceira parte representa as horas finais de rastreamento do satélite (U3). Este procedimento foi realizado, tanto para os índices $S4$ quanto para os índices $S4_{corr}$. Na análise dos modelos probabilísticos, os dados faltantes foram substituídos por valores próximos a zero, para que os parâmetros das distribuições de probabilidades fossem estimados.

Após fazer o particionamento dos dados, foram definidas para cada uma das distribuições de probabilidades analisadas as funções de verossimilhança (5.13). Em seguida, para cada um dos conjuntos de dados, os parâmetros de cada uma destas distribuições foram estimados através do método de máxima verossimilhança apresentado em (5.14).

Os gráficos das curvas de cada uma das distribuições sobre os histogramas dos dados foram plotados para verificar se houve um bom ajuste do modelo, para cada um dos casos analisados. E para validar tais resultados, o teste Kolmogorov-Smirnov apresentado na Definição 11 foi calculado em cada caso, verificando se houve ou não a adequação do modelo com os dados dos índices $S4$ e $S4_{corr}$. O melhor ajuste é indicado pelo menor valor da estatística do teste (5.17).

Resultados e Análises

As séries temporais dos índices $S4$ de cintilação ionosférica observados nas estações MAN2, PALM, SJCUC, PRU1, POAL referente ao satélite 11 são ilustradas na Figura (7.1). Como pode ser visto, as estações apresentam níveis diferentes de intensidade de cintilação ionosférica. Em particular, a estação MAN2 não apresenta índices $S4$ tão elevados como a estação PRU1 e SJCUC, mesmo o período em análise sendo considerado de forte ocorrências de cintilação. Este fato pode ser explicado através da anomalia denominada de efeito fonte.

O efeito fonte faz com que, na região equatorial, os elétrons se movam ao longo das linhas de forças horizontais do campo geomagnético da Terra para longe do equador, causando alta concentração de elétrons nos dois lados do equador geomagnético, nas latitudes geomagnéticas entre ± 10 e ± 20 graus [22], logo as ocorrências de cintilação ionosférica são mais expressivas na região sul e sudeste do país do que na região norte.

Brassarote (2014) analisou o comportamento periódico em formato de “U”, visualizado na Figura (7.1), nas séries temporais dos índices $S4$ e constatou-se que o efeito do multicaminho está agregado nos índices $S4$. Em seguida fez-se a estimação e remoção deste efeito nos índices $S4$ a partir de uma decomposição em multiescala considerando *wavelets* não decimadas [8]. A Figura (7.2) apresenta as séries temporais dos índices $S4$ após a remoção deste efeito, $S4_{corr}$, para as séries apresentadas na Figura (7.1).

Nota-se que após a remoção deste efeito, o formato côncavo em “U” nas séries dos índices $S4$ ficou menos evidente e um pouco mais achatado, além da redução dos valores dos índices nos começos e finais de cada “U”. Uma análise dos espectros dos índices $S4$ de cintilação antes e após remoção pode ser vista em [8]. O intuito deste estudo é analisar a variância em multiescala das séries temporais destes índices (antes e após a remoção) e compará-las.

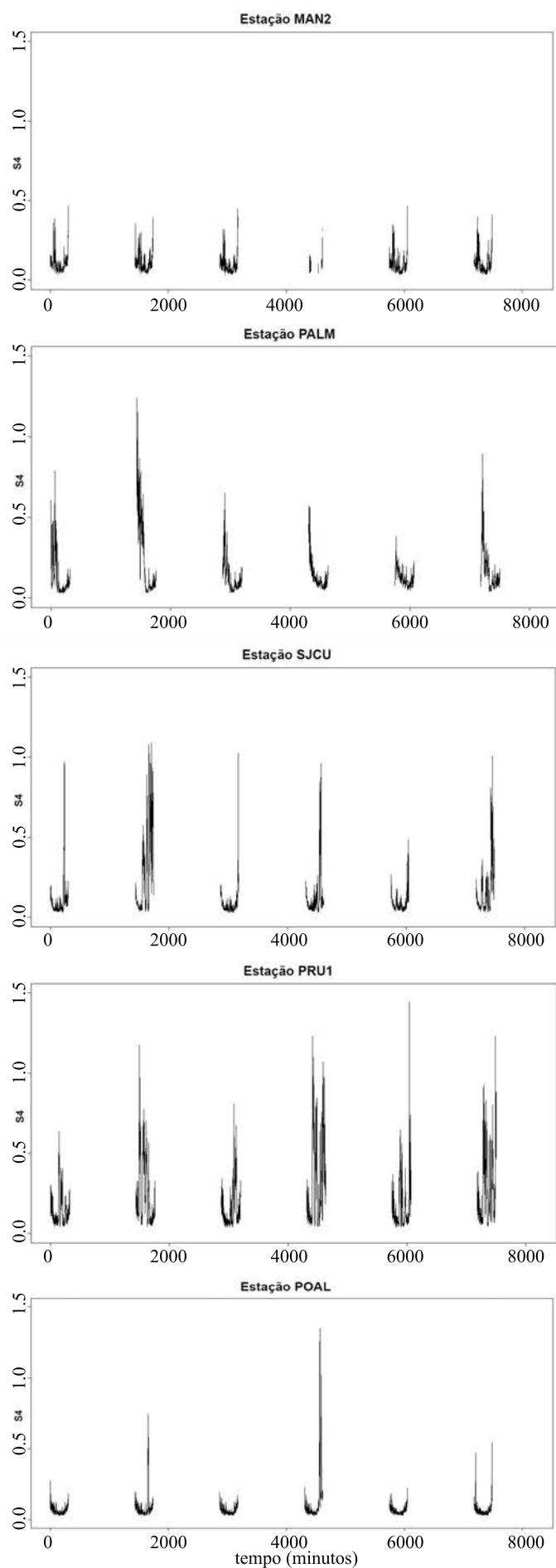


Figura 7.1: Gráfico das séries temporais dos índices S_4 de cintilação ionosférica coletados pelas estações MAN2, PALM, SJCU, PRU1, POAL referentes ao satélite 11.

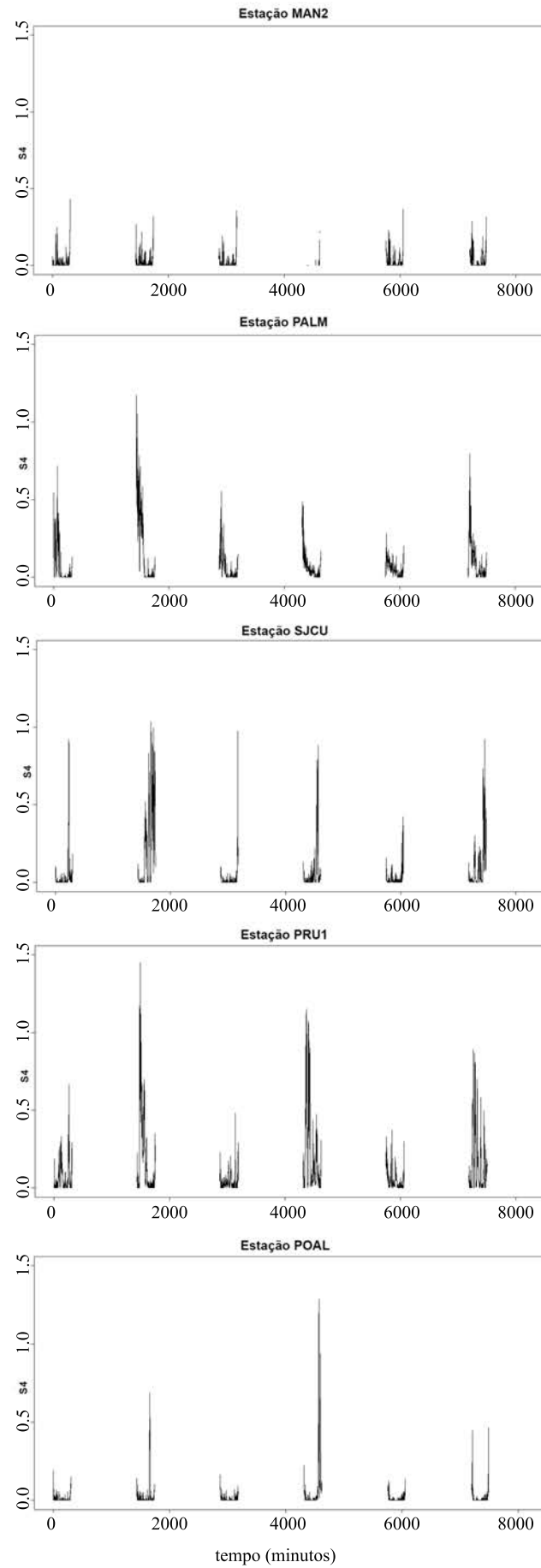


Figura 7.2: Gráfico das séries temporais dos índices $S4_{corr}$ de cintilação ionosférica referentes aos índices $S4$ apresentados na Figura (7.1) das estações MAN2, PALM, SJCU, PRU1, POAL pertencentes ao satélite 11.

7.1 Análise Descritiva das Séries Temporais

O tempo em que cada satélite fica visível para uma determinada estação varia em relação a sua posição orbital, sendo que a visibilidade do satélite é de poucas horas por dia. Nas Figuras (7.1) e (7.2) podem ser observados os espaçamentos gerados entre os dados pelos períodos em que as estações não estão coletando os dados do satélite 11.

Para realizar uma análise mais efetiva dos índices $S4$ de cintilação ionosférica considerou apenas os intervalos de tempo de rastreamento do satélite pelas estações, removendo os intervalos em que não se espera observar dados. Como as séries temporais analisadas possuem observações coletadas por minuto, os períodos de visibilidade são definidos pela quantidade de observações registradas em cada intervalo de coleta. Esta modificação não interfere na análise e interpretação das escalas que estão relacionadas aos intervalos de tempo inferiores ao tempo de visibilidade do satélite. Nestas condições, a Tabela (7.1) informa os tempos de visibilidade do satélite 11 para cada estação analisada.

Tabela 7.1: Tempo de visibilidade das estações para o satélite 11 no período de análise

Estação	Tempo de visibilidade aproximado
MAN2	$\approx 5\text{h } 13\text{min}$
PALM	$\approx 5\text{h } 28\text{min}$
SJCU	$\approx 5\text{h } 10\text{min}$
PRU1	$\approx 5\text{h } 28\text{min}$
POAL	$\approx 5\text{h } 13\text{min}$

As séries temporais dos índices $S4$ após a exclusão do período em que o satélite não estava visível para o receptor estão projetadas na Figura (7.3). As linhas em vermelho no gráfico indica a separação entre os períodos de dados coletados. Nota-se que no total são 6 períodos, referentes as amostras de 6 dias de observação.

Por meio das Tabelas (7.2) e (7.3) pode-se observar uma análise descritiva dos índices de cintilação $S4$ e $S4_{corr}$ em termos de média, mediana (Med), desvio padrão (DP) e coeficiente de variação (CV). Verifica-se que tanto antes quanto após a remoção, as medidas de tendência central das séries estão localizadas nos valores em que a cintilação ionosférica é classificada como “muito fraca” ou “fraca”. Comparando antes e após a remoção do multicaminho, há uma queda nestas medidas. Nota-se que a média é sempre maior do que a mediana, indicando uma assimetria à direita nas distribuições destes índices. A avaliação mais detalhada da distribuição do índice $S4$ será feita na Seção (7.3).

Nota-se também que a porcentagem de observações de $0,5 \leq S4 < 0,7$ e $S4 \geq 0,7$ são baixas, sendo inferior a 15% em cada amostra. A estação PRU1 apresentou as maiores porcentagens, enquanto as estações MAN2 e POAL obtiveram as menores porcentagens. Portanto, mesmo em períodos de forte cintilação, são poucos os momentos em que cada satélite GPS é afetado por este efeito. Entretanto, vale ressaltar que isto pode ocorrer simultaneamente para vários satélites e a intensidade forte pode ser muito mais prejudicial que um efeito fraco frequente.

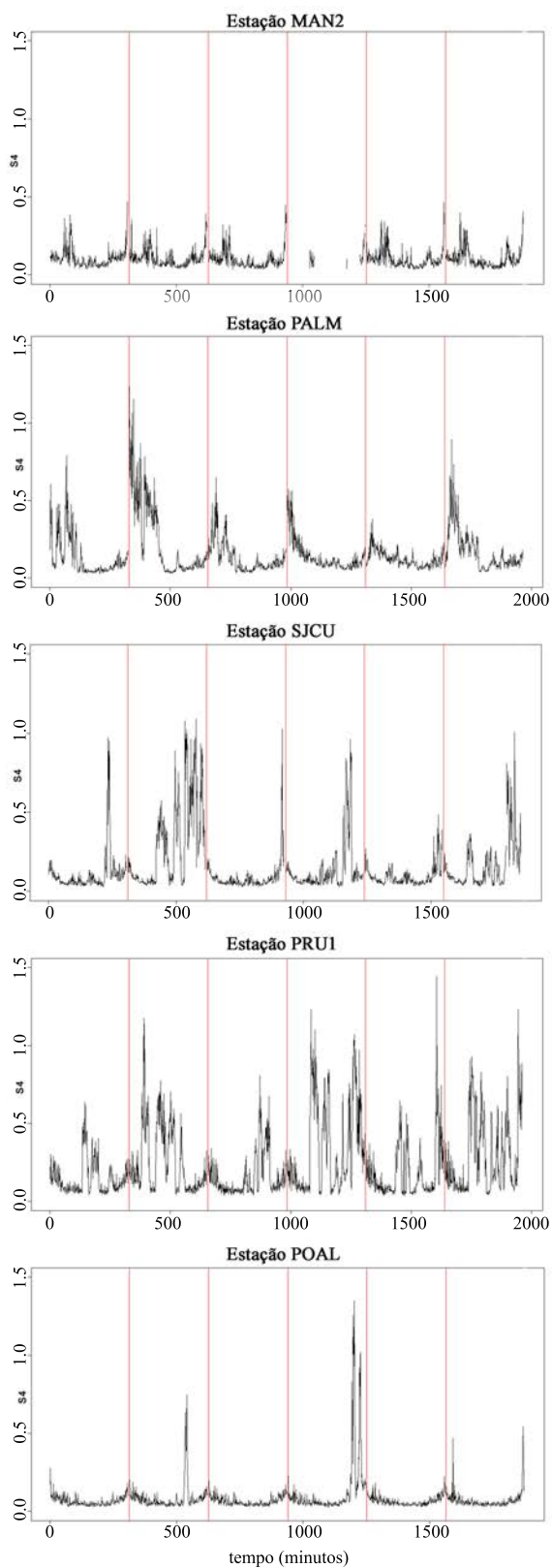


Figura 7.3: Gráfico das séries temporais dos índices S_4 de cintilação ionosférica coletados pela estação MAN2, PALM, SJCU, PRU1, POAL referentes aos períodos de visibilidade do satélite 11. As linhas em vermelho indicam a “quebra” de coleta de dados entre um dia e outro.

Tabela 7.2: Análise descritiva das séries temporais dos índices $S4$ para o satélite 11

Estação	Média	Med.	SD	CV	Porcentagem de observações		
					$0,3 \leq S4 < 0,5$	$0,5 \leq S4 < 0,7$	$S4 \geq 0,7$
MAN2	0,103	0,086	0,060	0,588	2,21%	0%	0%
PALM	0,155	0,104	0,144	0,924	8,17%	3,03%	1,13%
SJCU	0,147	0,082	0,173	1,176	5,87%	2,85%	3,02%
PRU1	0,228	0,131	0,216	0,943	12,82%	7,91%	4,91%
POAL	0,081	0,058	0,100	1,239	0,97%	0,43%	0,81%

Tabela 7.3: Análise descritiva das séries temporais dos índices $S4_{corr}$ para o satélite 11

Estação	Média	Med.	SD	CV	Porcentagem de observações		
					$0,3 \leq S4_{corr} < 0,5$	$0,5 \leq S4_{corr} < 0,7$	$S4_{corr} \geq 0,7$
MAN2	0,025	0	0,049	2,005	0,38%	0%	0%
PALM	0,088	0,034	0,138	1,558	6,11%	1,69%	0,67%
SJCU	0,083	0,011	0,170	2,040	5,00%	2,47%	2,20%
PRU1	0,150	0,037	0,216	1,441	11,01%	6,51%	3,36%
POAL	0,025	0	0,097	3,813	0,93%	0,33%	0,71%

Nota-se também que devido ao fato da correção do efeito do multicaminho ser principalmente na faixa de valores de cintilação fraca e moderada, tanto a média como a mediana foram reduzidas e, conseqüentemente, o coeficiente de variação aumentou.

7.2 Estimação da Variância *Wavelet*

Existem períodos nas séries temporais dos índices de cintilação $S4$ e $S4_{corr}$ dos quais as observações não foram coletadas pelo receptor, podendo ser ou não devido o efeito da cintilação ionosférica. Estes períodos são considerados como “*gaps*” (dados faltantes) e ocasionam lacunas nas séries temporais, conforme mostra a Figura (7.4).

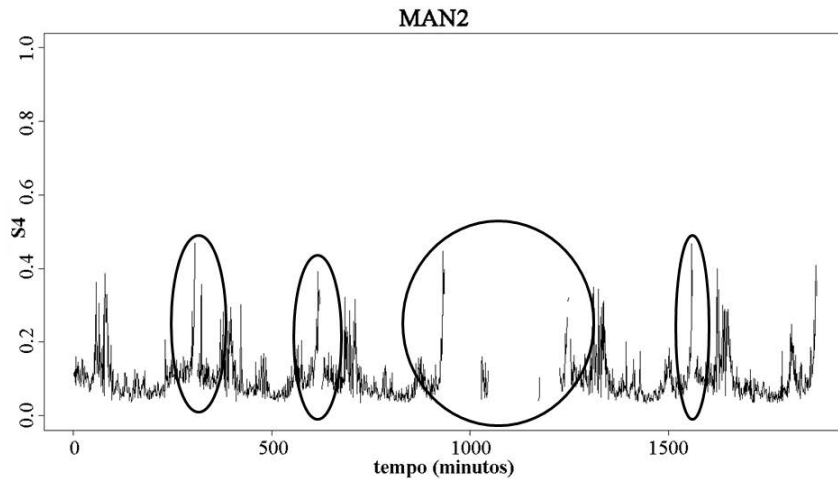


Figura 7.4: Gráfico da série temporal dos índices $S4$ da estação MAN2 para o satélite 11, com as lacunas causadas pelos dados faltantes em destaque.

Nesta análise, tais ausências de dados foram consideradas na estimação da variância *wavelet* em multiescala.

7.2.1 Escolha dos filtros *Wavelets*

Os filtros *wavelets* (filtros passa-alta) utilizados na estimação da variância *wavelet* deu-se a partir da condição apresentada no Teorema 1. Como não houve necessidade de realizar diferenciação nas séries temporais dos índices *S4*, devido a ausência de tendência nas séries, os filtros *wavelets* Daubechies necessitam ter largura $L \geq 2$, pois neste caso $d = 0$.

Diante disso, a escolha dos filtros foi feita analisando o comportamento da variância *wavelet* estimada para os índices *S4* utilizando os filtros da *wavelet* de Haar ($L=2$) e de Daubechies com 2 momentos nulos ($L=4$). A Figura (7.5) apresenta a estimação da variância *wavelet* utilizando os estimadores covariância e semivariograma, definidos em (4.34) e (4.35), referente ao satélite 1 para estação PRU1.

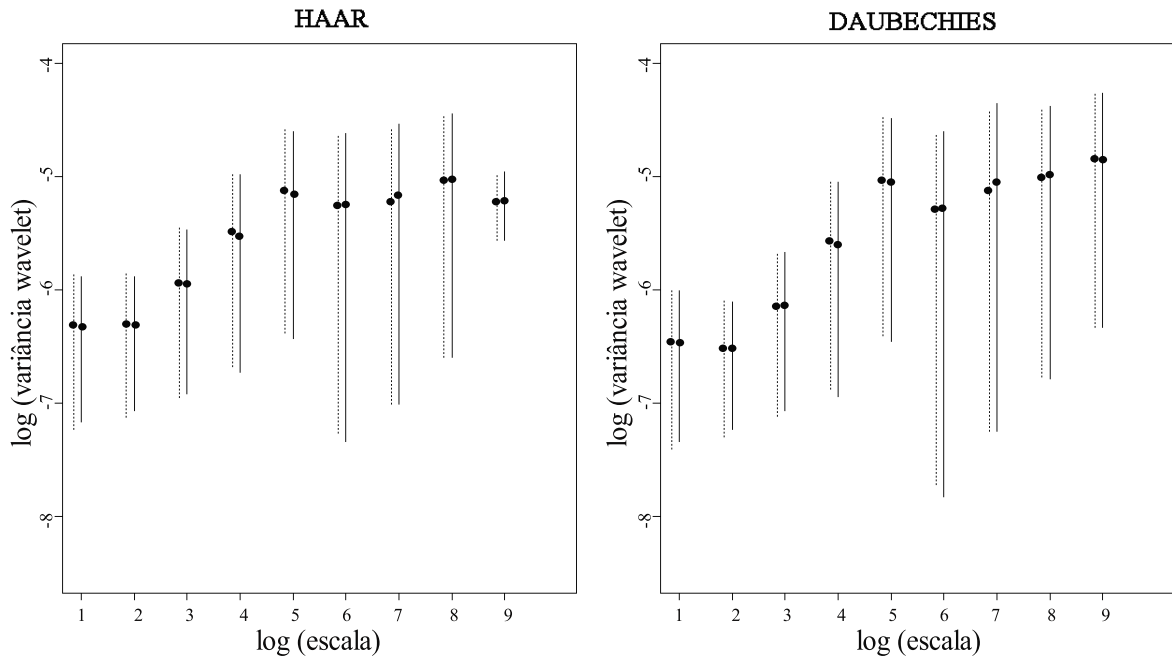


Figura 7.5: Gráfico da $\nu_X^2(\tau_j)$ versus τ_j , ambas em escala logarítmica, para os índices *S4* da estação PRU1, utilizando no primeiro caso os filtros da *wavelet* de Haar e no segundo, os filtros da *wavelet* de Daubechies com 2 momentos nulos. Para os IC's com as linhas tracejadas encontram-se os valores determinados pelo estimador semivariograma (4.35) e no caso dos IC's com as linhas contínuas encontram-se os valores determinados pelo estimador covariância (4.34).

Por meio da Figura (7.5), observa-se que não houve diferenças tão significativas entre a variância *wavelet* estimada, utilizando os filtros de Haar ou de Daubechies. Logo, os estimadores com os filtros de Haar apresentaram um desempenho semelhante ao de Daubechies. Nota-se também que a variância *wavelet* estimada obteve IC um pouco menor utilizando os filtros de Haar. Portanto, a escolha deu-se pelos filtros da *wavelet* de Haar para determinar os valores dos estimadores definidos em (4.34) e (4.35), bem como, os seus respectivos intervalos de confiança. Observa-se que os dois estimadores da variância *wavelet* obtiveram resultados bem próximos em todos os níveis de resolução (escala).

A escolha de filtros da *wavelet* de Daubechies com um número maior de momentos nulos foi descartada, pois em geral, quanto maior o número de momentos nulos, mais

suave é a *wavelet* e, neste caso, as séries temporais não apresentam oscilações suaves que indiquem necessidade de *wavelets* mais suaves e, sim de suporte mais curto para se adequar melhor às variações bruscas.

7.2.2 Estimação da Variância *Wavelet* para o Satélite 11 em diferentes Estações

A Figura (7.6) apresenta os valores estimados da variância *wavelet* para as estações MAN2, PALM, SJCUC, PRU1 e POAL. Com exceção da estação MAN2, que apresentou maior quantidade de dados faltantes, obtendo comportamento diferenciado das demais estações. Observa-se novamente que os dois estimadores da variância *wavelet*, (4.34) e (4.35), obtiveram resultados bem próximos em todos os níveis de resolução (escala), menos para a estação MAN2.

Para a estação MAN2 nota-se que houve um decaimento nos valores dos estimadores da variância *wavelet* até a escala τ_3 , seguido de um acréscimo, porém o maior valor da variância *wavelet* manteve-se no primeiro nível de resolução da escala τ_1 . Esse decaimento nos valores dos estimadores indica que não houve uma escala com maior contribuição para a variabilidade da série, ou seja, para os índices S_4 desta estação não houve uma escala característica global. Este fato pode ser explicado devido os índices coletados nesta estação serem todos inferiores a 0,5 como apresentado na Tabela (7.2). Portanto no período analisado, não houve a ocorrência do efeito da cintilação ionosférica (moderada ou forte) nos sinais GPS.

No caso das estações PALM e SJCUC, houve um máximo na escala τ_8 , sendo esta uma escala característica global. Nota-se que nas primeiras escalas houve um decréscimo no comportamento, com evidência maior na primeira escala de oscilações de maior frequência. A partir da escala τ_3 iniciou uma inclinação positiva, indicando maior dependência entre as escalas até atingir o máximo global, que na realidade, representa o comportamento diário, o que é mais evidente nas séries temporais. No entanto, para a estação SJCUC nota-se também que antes dos estimadores atingirem um máximo global, houve um máximo local na escala τ_5 .

Dentre as estações, a estação PRU1 foi a que apresentou a maior quantidade de índices S_4 acima de 0,5. Graficamente, os valores dos estimadores da variância *wavelet* obtiveram um comportamento um tanto semelhante quanto para as estações PALM e SJCUC, porém nesta estação, houve um máximo na escala τ_5 , indicando uma escala característica global.

Por fim, a estação POAL apresentou um máximo na escala τ_4 , sendo esta uma escala característica global e uma escala característica local, localizada na escala τ_7 , retratando um comportamento periódico.

Os intervalos de tempo (período) referentes as escalas características (local e/ou global) τ_j das estações analisadas, que foram retratadas pelos níveis de resolução j nos gráficos, estão descritos na Tabela (7.4).

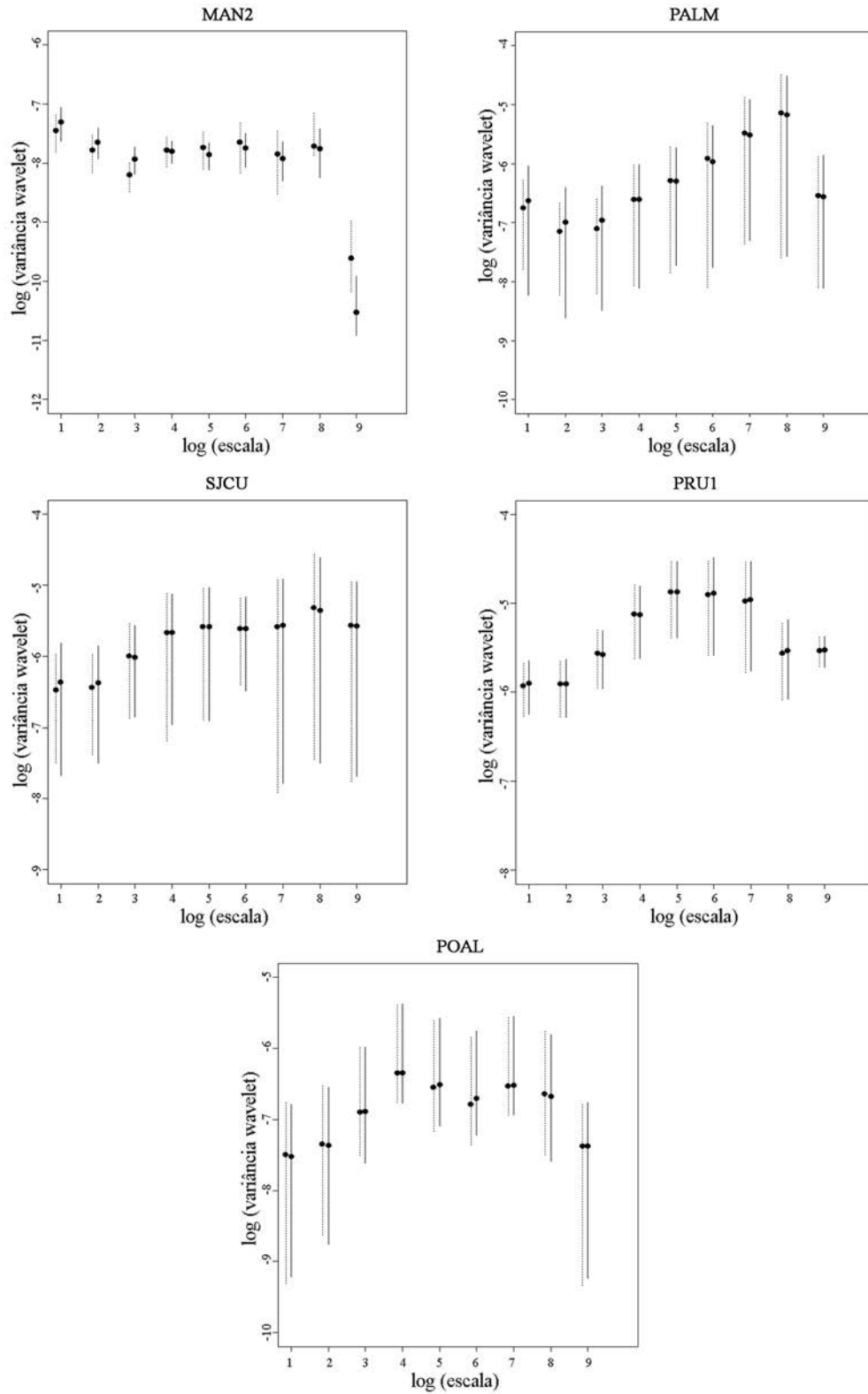


Figura 7.6: Gráfico da $\nu_X^2(\tau_j)$ versus τ_j , ambas em escala logarítmica, para os índices $S4$ referentes as estações MAN2, PALM, SJCUC, PRU1 e POAL. Os valores no eixo x indicam o nível de resolução j para a estimativa da variância *wavelet* em cada escala. Para os IC's com as linhas tracejadas encontram-se os valores determinados pelo estimador semivariograma (4.35) e no caso dos IC's com as linhas contínuas encontram-se os valores determinados pelo estimador covariância (4.34).

Tabela 7.4: Porcentagens de dados faltantes em cada análise e os períodos relacionados as escalas características analisadas em cada estação

Estação	NA (%)	Esc. Global	Período	Esc. Local	Período
	—	—	—	τ_4	16min à 32min
MAN2	15,76%	—	—	τ_6	1h 04min à 2h 08min
	—	—	—	τ_8	4h 16min à 8h 32min
PALM	1,32%	τ_8	4h 16min à 8h 32min	—	—
SJCU	2,32%	τ_8	4h 16min à 8h 32min	τ_5	32min à 1h 04min
PRU1	1,68%	τ_5	32min à 1h 04min	—	—
POAL	2,50%	τ_4	16min à 0h 32min	τ_7	2h 08min à 4h 16min

Dentre as estações observa-se que a estação MAN2 foi a que obteve maior porcentagem de dados faltantes, sendo acima de 15% enquanto as demais permaneceram abaixo de 3%. Nota-se que entre os valores estimados da variância *wavelet*, esta foi a única estação que apresentou valores um pouco diferentes entre os estimadores em alguns níveis de resolução, ficando um tanto discrepante no nível de resolução maior.

A maior porcentagem de dados faltantes pode ser um dos motivos pelo qual os estimadores (4.34) e (4.35) diferiram tanto em estimativa pontual quanto intervalar. Observa-se que os IC para o estimador (4.34) foi menor para esta estação em relação ao (4.35). Seriam necessários estudos de simulação para dizer qual é mais realístico.

Vale ressaltar que o satélite 11 ficou aproximadamente 5 horas visíveis por dia, em cada estação, período este que está representado na escala τ_8 . Como em nenhum caso, houve uma escala de nível maior do que $j = 8$, a mudança realizada na reparametrização das séries dos índices $S4$ - considerando o tempo diário como sendo o período de visibilidade do satélite - não degradou a análise realizada.

Comparando o comportamento gráfico da variância *wavelet* em multiescala estimada para cada estação com os gráficos simulados da variância *wavelet* em multiescala dos modelos de processos estocásticos clássicos apresentados na Seção (4.4), nota-se que as séries temporais dos índices $S4$ de cintilação ionosférica não se ajustam aos modelos de processos estocásticos apresentados, havendo então a necessidade de combinação de processos para que tal modelagem pudesse ser realizada com eficiência, além de confirmar a importância da abordagem a partir de processos *wavelets*.

Como as análises gráficas estão na escala logarítmica, as Tabelas (7.5) e (7.6) apresentam os valores estimados para a variância *wavelet* por meio dos estimadores covariância (4.34) e semivariograma (4.35), bem como as margens de erro¹ (ME) referentes aos IC's estimados para os índices $S4$ e $S4_{corr}$, em cada nível de resolução.

¹A margem de erro (ME) é obtida a partir do produto do escore da distribuição do estimador para 95% de confiança pela raiz da variância do estimador, representando metade da amplitude dos respectivos IC, tanto em (4.49) quanto em (4.50)

Tabela 7.5: Valores da variância *wavelet* estimada pelo estimador covariância $\left(\hat{\nu}_X^2(\tau_j)\right)$ e a margem de erro (*ME*) dos IC's em todas as escalas para os índices *S4* das estações MAN2, PALM, SJCU, PRU1 e POAL em relação ao satélite 11

Escala	MAN2		PALM		SJCU		PRU1		POAL	
τ_j	$\hat{\nu}_X^2(\tau_j)$	<i>ME</i>	$\hat{\nu}_X^2(\tau_j)$	<i>ME</i>	$\hat{\nu}_X^2(\tau_j)$	<i>ME</i>	$\hat{\nu}_X^2(\tau_j)$	<i>ME</i>	$\hat{\nu}_X^2(\tau_j)$	<i>ME</i>
τ_1	0,00068	0,00019	0,00133	0,00106	0,00172	0,00126	0,00265	0,00080	0,00054	0,00054
τ_2	0,00048	0,00012	0,00092	0,00074	0,00171	0,00115	0,00265	0,00086	0,00064	0,00064
τ_3	0,00036	0,00008	0,00095	0,00074	0,00244	0,00138	0,00372	0,00119	0,00102	0,00102
τ_4	0,00041	0,00008	0,00137	0,00107	0,00344	0,00249	0,00583	0,00225	0,00174	0,00174
τ_5	0,00038	0,00009	0,00186	0,00141	0,00376	0,00276	0,00760	0,00310	0,00148	0,00148
τ_6	0,00043	0,00012	0,00259	0,00216	0,00363	0,00210	0,00749	0,00372	0,00122	0,00122
τ_7	0,00036	0,00012	0,00402	0,00335	0,00383	0,00351	0,00714	0,00377	0,00147	0,00147
τ_8	0,00043	0,00017	0,00572	0,00521	0,00470	0,00470	0,00454	0,00213	0,00125	0,00125
τ_9	0,00003	0,00002	0,00142	0,00142	0,00376	0,00330	0,00388	0,00077	0,00062	0,00053

Tabela 7.6: Valores da variância *wavelet* estimada pelo estimador semivariograma $\left(\tilde{\nu}_X^2(\tau_j)\right)$ e a margem de erro (*ME*) dos IC's em todas as escalas para os índices *S4* das estações MAN2, PALM, SJCU, PRU1 e POAL em relação ao satélite 11

Escala	MAN2		PALM		SJCU		PRU1		POAL	
τ_j	$\tilde{\nu}_X^2(\tau_j)$	<i>ME</i>	$\tilde{\nu}_X^2(\tau_j)$	<i>ME</i>	$\tilde{\nu}_X^2(\tau_j)$	<i>ME</i>	$\tilde{\nu}_X^2(\tau_j)$	<i>ME</i>	$\tilde{\nu}_X^2(\tau_j)$	<i>ME</i>
τ_1	0,00058	0,00018	0,00117	0,00075	0,00155	0,00100	0,00256	0,00077	0,00055	0,00055
τ_2	0,00042	0,00013	0,00080	0,00053	0,00160	0,00097	0,00264	0,00083	0,00065	0,00065
τ_3	0,00028	0,00007	0,00083	0,00056	0,00247	0,00143	0,00376	0,00123	0,00102	0,00102
τ_4	0,00042	0,00011	0,00136	0,00105	0,00345	0,00269	0,00589	0,00232	0,00176	0,00176
τ_5	0,00044	0,00014	0,00186	0,00147	0,00373	0,00272	0,00761	0,00310	0,00144	0,00144
τ_6	0,00048	0,00019	0,00268	0,00238	0,00365	0,00199	0,00741	0,00366	0,00114	0,00114
τ_7	0,00039	0,00019	0,00417	0,00354	0,00381	0,00354	0,00710	0,00372	0,00146	0,00146
τ_8	0,00044	0,00036	0,00588	0,00538	0,00490	0,00490	0,00445	0,00203	0,00132	0,00132
τ_9	0,00007	0,00007	0,00144	0,00144	0,00380	0,00337	0,00388	0,00073	0,00062	0,00053

Comparando as Tabelas (7.5) e (7.6) observa-se que os valores da variância *wavelet* estimada são bem pequenos, próximos à zero com no mínimo três casas decimais. Devido este fato, graficamente, os IC's ficaram largos, porém nota-se que as margens de erro dos IC's foram pequenas também, mostrando assim, que houve uma boa confiabilidade na variância *wavelet* estimada.

Ainda que os valores entre os estimadores tenham sido diferentes na estação MAN2, nota-se que a divergência foi apenas na quarta casa decimal e que a discrepância gráfica apresentada na escala τ_9 foi em consequência do valor ser quase nulo.

7.2.3 Estimação da Variância *Wavelet* para diferentes satélites na estação PRU1

Como a estação PRU1 obteve maior porcentagem de índices $S4$ acima de 0,3, foi realizada uma análise da variância *wavelet* em multiescala para dados dos índices $S4$ obtidos pelos satélites 1, 19 e 31 nesta mesma estação. Para efeito de comparação, o período analisado foi o mesmo utilizado no satélite 11. O intuito desta análise é verificar se as escalas características das séries temporais obtidas pelos índices $S4$ são as mesmas para diferentes satélites em relação a uma única estação, ou se são distintas entre os satélites.

Assim como no caso anterior, para realizar a estimação da variância *wavelet* em multiescala considerou-se apenas os intervalos de tempo em que os satélites estavam visíveis para a estação PRU1. Em especial, o satélite 31 ficou visível 2 vezes ao dia e consequentemente, obteve o maior tempo de visibilidade dentre os satélites. Nesta análise foi considerado os dois períodos excluindo o intervalo entre os tempos analisados.

A Figura (7.7) apresenta as séries temporais obtidas dos índices $S4$ para cada satélite analisado e a Tabela (7.7) apresenta os tempos aproximados de cada satélite, bem como a porcentagem de dados faltantes presentes em cada conjunto dos índices $S4$ considerado e as porcentagens dos índices $S4$ com intensidade fraca, moderada e forte.

Tabela 7.7: Informações referentes as séries temporais dos índices $S4$ para os satélites analisados na estação PRU1

Satélite	NA (%)	Tempo de visibilidade	Porcentagem de observações		
			$0,3 \leq S4 < 0,5$	$0,5 \leq S4 < 0,7$	$S4 \geq 0,7$
Satélite 1	1,55%	$\approx 5h\ 30min$	7,15%	3,57%	4,47%
Satélite 19	1,50%	$\approx 5h$	6,95%	6,84%	12,17%
Satélite 31	6,20%	$\approx 6h\ 30min$	10,88%	4,48%	3,00%

Por meio da Tabela (7.7) nota-se que a porcentagem de observações entre os satélites, em cada nível de intensidade do efeito da cintilação, não foram as mesmas. Equanto o satélite 31 obteve a maior porcentagem no efeito fraco, o satélite 19 atingiu os maiores valores para nível de intensidade moderado e forte. Somando as porcentagens nos 3 níveis de intensidade tem-se que o satélite 19 foi o que coletou a maior porcentagem de dados acima de 0,3.

Quando comparado com os valores do satélite 11 apresentados na Tabela (7.2) para esta mesma estação, tais valores não foram maiores do que as porcentagens para o satélite 11, nos níveis de intensidade fraco e moderado. No entanto, dentre os satélites observa-se que os satélites 11 e 19 foram os que mais quantificaram índices $S4$ nos níveis moderado e forte. Com relação a porcentagem de dados faltantes, o satélite 31 se destaca pela quantidade devido ter ficado visível 2 vezes ao dia.

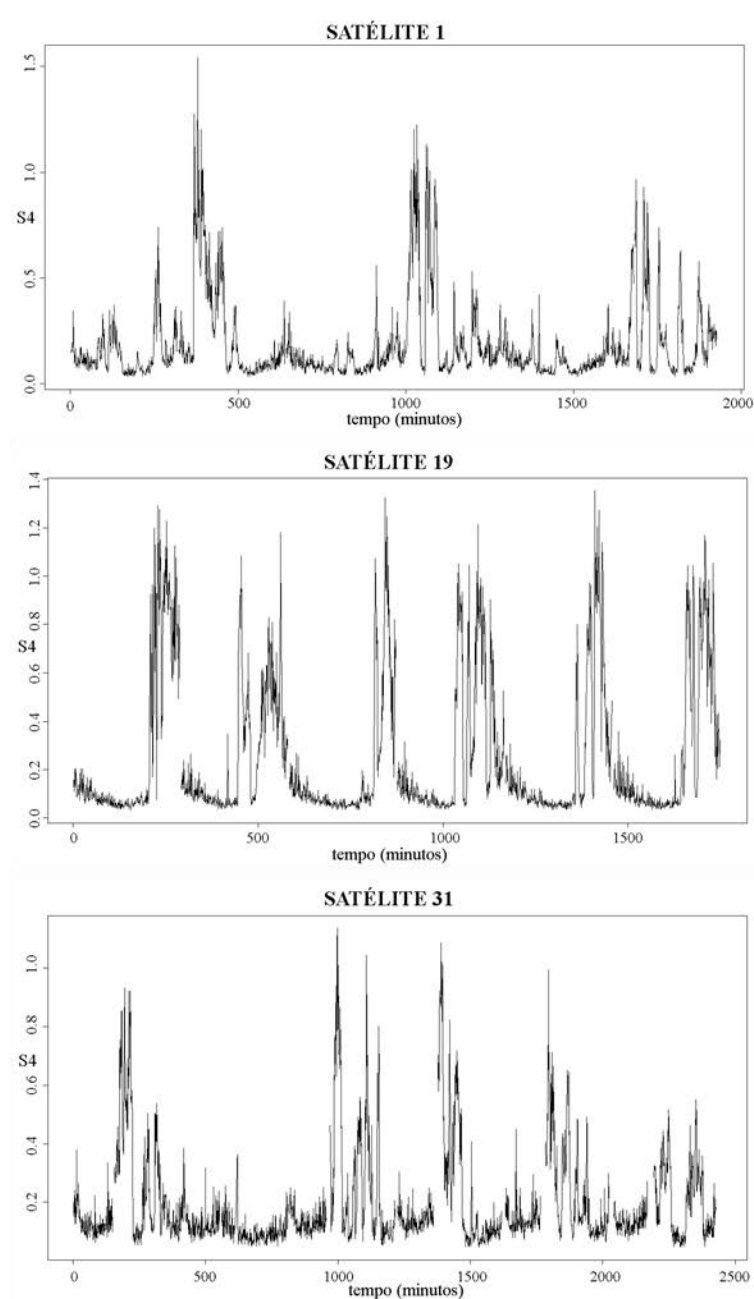


Figura 7.7: Gráfico das séries dos índices $S4$ para os satélites 1, 19 e 31 referentes a estação PRU1, considerando apenas o tempo de visibilidade de cada satélite no período analisado.

No que se refere ao comportamento da variabilidade das séries dos índices $S4$, a Figura (7.8) apresenta o gráfico da variância *wavelet* estimada em escala logarítmica para os 3 satélites analisados da estação PRU1.

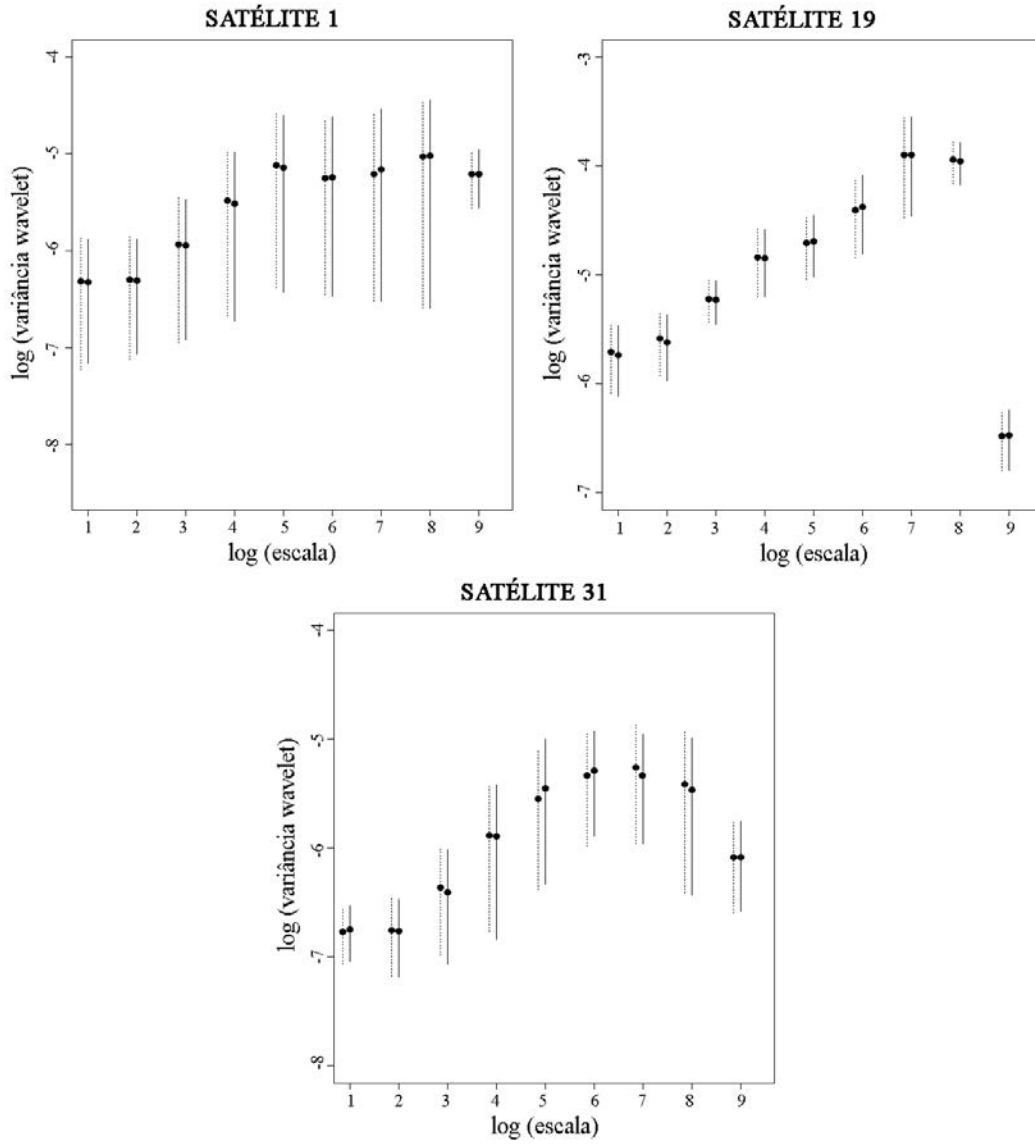


Figura 7.8: Gráfico da $\nu_X^2(\tau_j)$ versus τ_j , ambas em escala logarítmica, para os índices $S4$ dos satélite 1, 19 e 31. Os valores no eixo x indicam o nível de resolução j para a estimativa da variância *wavelet* em cada escala. Para os IC's com as linhas tracejadas encontram-se os valores determinados pelo estimador semivariograma (4.35) e no caso dos IC's com as linhas contínuas encontram-se os valores determinados pelo estimador covariância (4.34).

Analisando a Figura 7.8 nota-se que as escalas com maior contribuição foram distintas entre os satélites 1, 19 e 31. Para o satélite 1 observa-se que inicialmente as duas primeiras escalas estimaram os mesmos valores e em seguida ocorreu uma inclinação positiva até alcançar um máximo local na escala τ_5 e posteriormente um máximo global na escala τ_8 , sendo esta a escala característica global com maior contribuição para a variabilidade da série.

No caso do satélite 19, a medida que aumentou o nível de resolução, houve um ganho linear na variância *wavelet* estimada até alcançar uma escala característica global na escala τ_7 indicando maior dependência entre as escalas. No satélite 31, o comportamento foi bem semelhante ao satélite 1, no entanto os estimadores se divergiram no cálculo da escala com maior contribuição, que ficou entre as escalas τ_6 e τ_7 , estimadas pelos estimadores (4.35) e (4.34), respectivamente.

Tabela 7.8: Períodos relacionados as escalas características analisadas em cada estação

Estação	Esc. Global	Período	Esc. Local	Período
Satélite 1	τ_8	4h 16min a 8h 32min	τ_5	32min a 1h 04min
Satélite 19	τ_7	2h 08min a 4h 16min	—	—
Satélite 31	τ_6	1h 04min a 1h 08min	—	—
	τ_7	2h 08min a 4h 16min	—	—
Satélite 11	τ_5	32 min a 1 h 04 min	—	—

Em todos os casos, as escalas com maior contribuição para a variabilidade das séries temporais dos índices $S4$ retrataram um comportamento periódico. Os intervalos de tempo (período) referentes as escalas características (local e/ou global) τ_j dos satélites analisados estão descritos na Tabela (7.8). Como pode ser verificado, as escalas com maior contribuição estavam dentro do período de visibilidade diária de cada satélite.

Como as análises gráficas estão na escala logarítmica, as Tabelas (7.9) e (7.10) apresentam os valores estimados para a variância *wavelet* por meio dos estimadores covariância e (4.34) e semivariograma (4.35), bem como as margens de erro (ME) dos IC's estimados para os índices $S4$.

Tabela 7.9: Valores da variância *wavelet* estimada pelo estimador covariância ($\hat{\nu}_X^2(\tau_j)$) e a margem de erro (ME) dos IC's em todas as escalas para os índices $S4$ referentes aos satélites 1, 19 e 31 da estação PRU1

Escala	Satélite 1		Satélite 19		Satélite 31	
τ_j	$\hat{\nu}_X^2(\tau_j)$	ME	$\hat{\nu}_X^2(\tau_j)$	ME	$\hat{\nu}_X^2(\tau_j)$	ME
τ_1	0,00178	0,00101	0,00322	0,00101	0,00116	0,00029
τ_2	0,00182	0,00097	0,00363	0,00106	0,00115	0,00039
τ_3	0,00260	0,00161	0,00532	0,00103	0,00164	0,00080
τ_4	0,00402	0,00282	0,00783	0,00234	0,00276	0,00169
τ_5	0,00583	0,00422	0,00910	0,00251	0,00427	0,00248
τ_6	0,00525	0,00460	0,01251	0,00434	0,00502	0,00225
τ_7	0,00573	0,00502	0,02013	0,00862	0,00480	0,00224
τ_8	0,00656	0,00519	0,01910	0,00368	0,00420	0,00260
τ_9	0,00543	0,00159	0,00153	0,00041	0,00227	0,00088

Tabela 7.10: Valores da variância *wavelet* estimada pelo estimador semivariograma $(\tilde{\nu}_X^2(\tau_j))$ e a margem de erro (*ME*) dos IC's em todas as escalas para os índices *S4* referentes aos satélites 1, 19 e 31 da estação PRU1

Escala	Satélite 1		Satélite 19		Satélite 31	
τ_j	$\tilde{\nu}_X^2(\tau_j)$	<i>ME</i>	$\tilde{\nu}_X^2(\tau_j)$	<i>ME</i>	$\tilde{\nu}_X^2(\tau_j)$	<i>ME</i>
τ_1	0,00179	0,00107	0,00330	0,00103	0,00115	0,00030
τ_2	0,00183	0,00102	0,00373	0,00106	0,00116	0,00040
τ_3	0,00263	0,00167	0,00536	0,00103	0,00171	0,00079
τ_4	0,00414	0,00288	0,00788	0,00240	0,00276	0,00161
τ_5	0,00595	0,00426	0,00897	0,00254	0,00390	0,00220
τ_6	0,00521	0,00451	0,01212	0,00425	0,00482	0,00229
τ_7	0,00544	0,00474	0,02015	0,00876	0,00516	0,00258
τ_8	0,00655	0,00519	0,01932	0,00382	0,00442	0,00278
τ_9	0,00542	0,00157	0,00152	0,00039	0,00227	0,0091

Analisando as Tabelas (7.9) e (7.10), observa-se que os valores calculados foram bem próximos entre os estimadores em cada nível de resolução, tendo uma divergência apenas na quarta casa decimal. Nota-se também que em ambos os casos, as margens de erro dos IC's tiveram praticamente o mesmo comprimento, sendo este um valor bem pequeno.

Portanto, verifica-se que ambos estimadores tiveram um bom desempenho e que houve uma boa confiabilidade na variância *wavelet* estimada para os índices *S4* da estação PRU1, referentes aos satélites 1, 19 e 31.

7.2.4 Comparação da Variância *Wavelet* estimada, antes e após a remoção do multicaminho, para o satélite 11 em diferentes estações

Com o intuito de verificar se houve alteração nas escalas características após fazer a remoção do efeito do multicaminho nas séries temporais dos índices *S4*, foi realizada uma análise da variância *wavelet* em multiescala dos índices *S4_{corr}* e os resultados foram comparados com os obtidos pelos índices *S4*. As Figuras (7.9), (7.10), (7.11), (7.12) e (7.13) apresentam os valores estimados para a variância *wavelet* em multiescala das séries temporais dos índices *S4* e *S4_{corr}* para todas as estações MAN2, PALM, SJCU, PRU1 e POAL, referentes ao satélite 11.

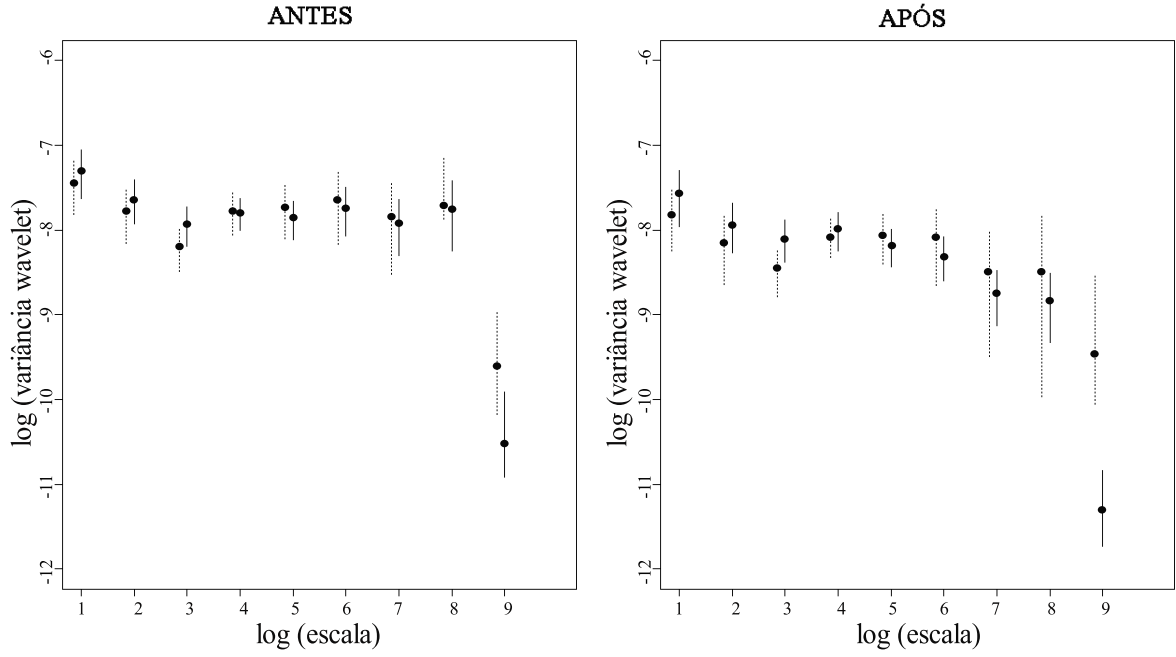


Figura 7.9: Gráfico da $\nu_X^2(\tau_j)$ versus τ_j , ambas em escala logarítmica, para os índices $S4$ (antes) e $S4_{corr}$ (após) da estação MAN2. Os valores no eixo x indicam o nível de resolução j para a estimativa da variância *wavelet* em cada escala. Para os IC's com as linhas tracejadas encontram-se os valores determinados pelo estimador semivariograma (4.35) e no caso dos IC's com as linhas contínuas encontram-se os valores determinados pelo estimador covariância (4.34).

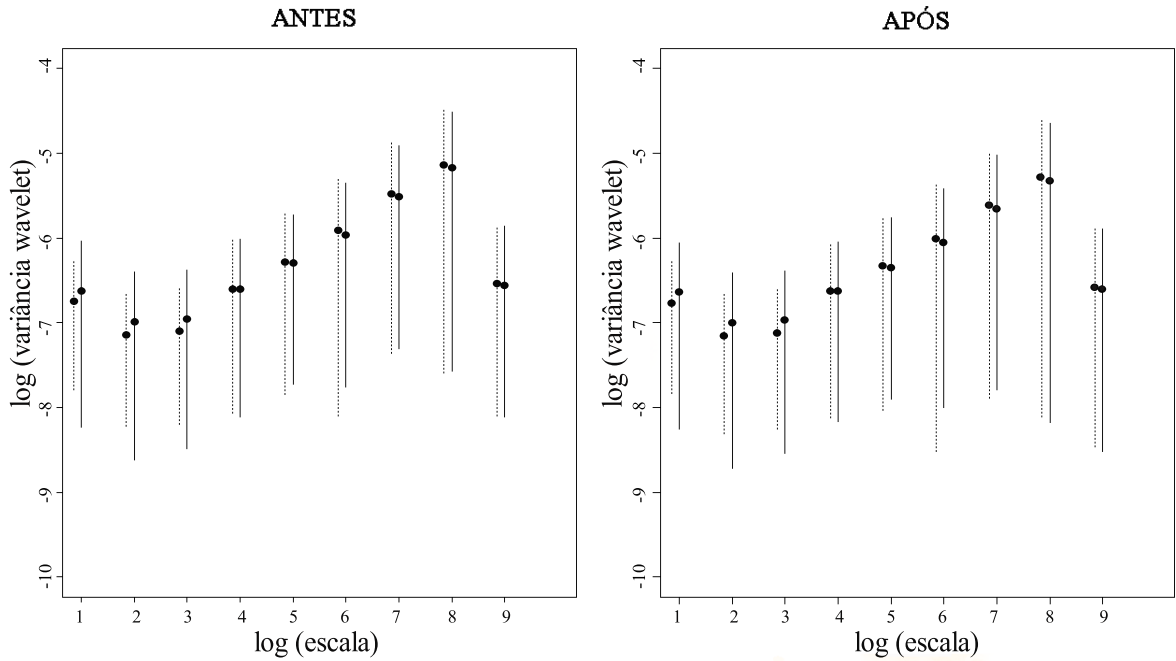


Figura 7.10: Gráfico da $\nu_X^2(\tau_j)$ versus τ_j , ambas em escala logarítmica, para os índices $S4$ (antes) e $S4_{corr}$ (após) da estação PALM. Os valores no eixo x indicam o nível de resolução j para a estimativa da variância *wavelet* em cada escala. Para os IC's com as linhas tracejadas encontram-se os valores determinados pelo estimador semivariograma (4.35) e no caso dos IC's com as linhas contínuas encontram-se os valores determinados pelo estimador covariância (4.34).

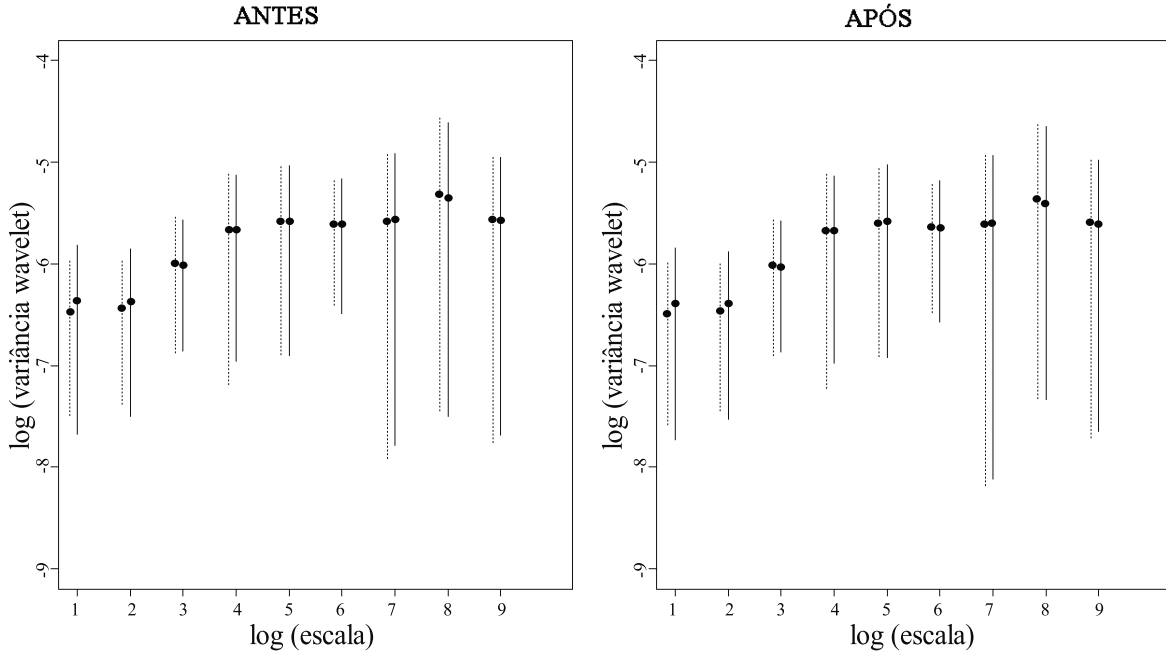


Figura 7.11: Gráfico da $\nu_X^2(\tau_j)$ versus τ_j , ambas em escala logarítmica, para os índices $S4$ (antes) e $S4_{corr}$ (após) da estação SJC. Os valores no eixo x indicam o nível de resolução j para a estimativa da variância *wavelet* em cada escala. Para os IC's com as linhas tracejadas encontram-se os valores determinados pelo estimador semivariograma (4.35) e no caso dos IC's com as linhas contínuas encontram-se os valores determinados pelo estimador covariância (4.34).

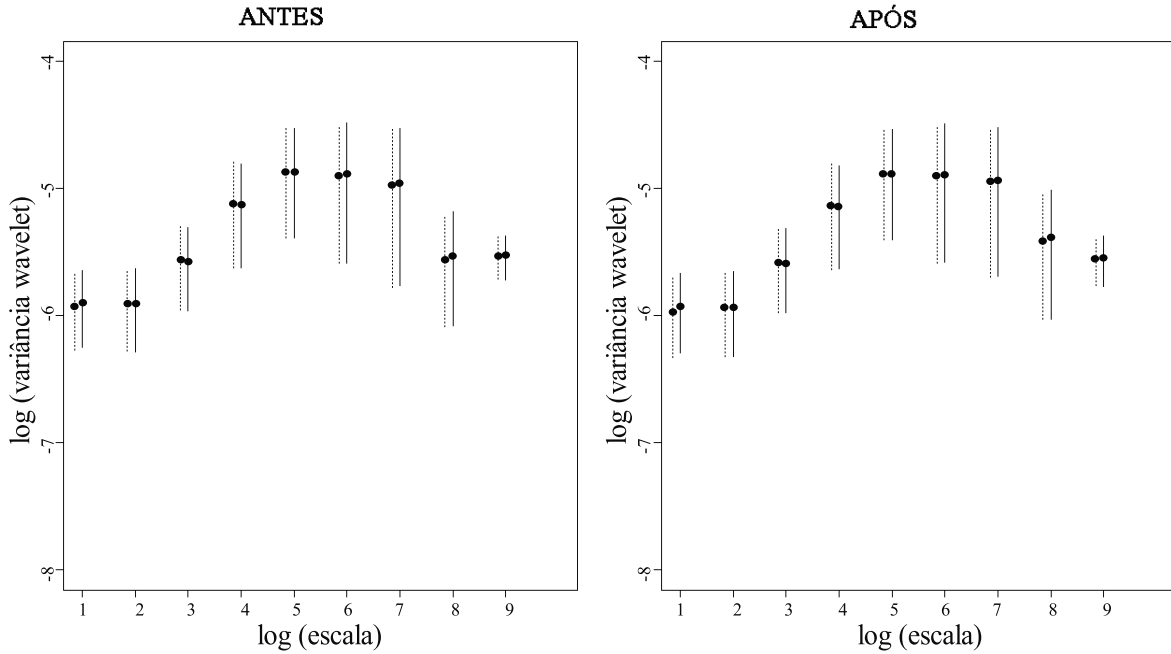


Figura 7.12: Gráfico da $\nu_X^2(\tau_j)$ versus τ_j , ambas em escala logarítmica, para os índices $S4$ (antes) e $S4_{corr}$ (após) da estação PRU1. Os valores no eixo x indicam o nível de resolução j para a estimativa da variância *wavelet* em cada escala. Para os IC's com as linhas tracejadas encontram-se os valores determinados pelo estimador semivariograma (4.35) e no caso dos IC's com as linhas contínuas encontram-se os valores determinados pelo estimador covariância (4.34).

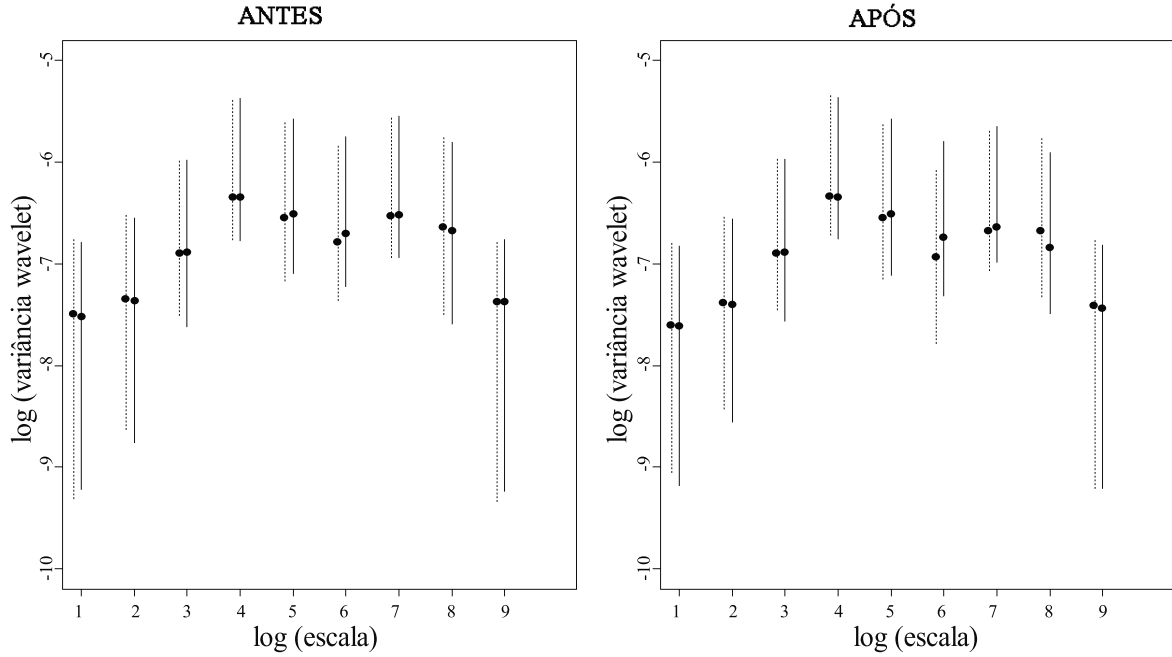


Figura 7.13: Gráfico da $\nu_X^2(\tau_j)$ versus τ_j , ambas em escala logarítmica, para os índices $S4$ (antes) e $S4_{corr}$ (após) da estação POAL. Os valores no eixo x indicam o nível de resolução j para a estimativa da variância *wavelet* em cada escala. Para os IC's com as linhas tracejadas encontram-se os valores determinados pelo estimador semivariograma (4.35) e no caso dos IC's com as linhas contínuas encontram-se os valores determinados pelo estimador covariância (4.34).

Analisando os gráficos nota-se que não houve alterações nas escalas com a maior contribuição para a variabilidade da série (escalas características). Com exceção da estação MAN2, as demais estações mantiveram o mesmo comportamento gráfico da variância *wavelet* em escala logarítmica, quando comparada nos gráficos dos índices $S4$ com os índices $S4_{corr}$. Desta forma, verifica-se que não foram observadas mudanças na variância *wavelet* das séries temporais quando o efeito do multicaminho é removido dos índices $S4$. Porém a sua remoção faz com que seja possível uma análise mais precisa no estudo da cintilação ionosférica.

7.3 Modelos de Distribuição de Probabilidade para os índices $S4$

Na maioria dos trabalhos envolvendo modelos de distribuições para modelar os índices $S4$, normalmente, o conjunto dos dados analisados é formado por um período de horas ou dias de dados coletados continuamente. Em muitos casos, não se leva em consideração valores dos índices abaixo de um determinado valor. Desta maneira, as análises realizadas em relação a tais modelos ajustados são limitadas a verificar a probabilidade de ocorrência de cintilação ionosférica acima ou abaixo ou em um intervalo solicitado em função do índice $S4$.

Nesta análise, o intuito foi dentre as distribuições avaliadas, verificar uma que melhor se ajusta aos dados de índices $S4$ e $S4_{corr}$ no período analisado, além de avaliar a possibilidade dos dados serem ajustados em diferentes intervalos fragmentados de horas. Para investigar tal condição foram considerados os modelos de FDP apresentados no Capítulo 5 e a estação PRU1 foi escolhida para realizar tal análise nos índices $S4$ e $S4_{corr}$, pois apresentou a maior porcentagem de índices $S4$ acima de 0,5 para o satélite 11, conforme apresentado na Tabela (7.2).

Como foi verificado que as séries temporais do índices $S4$ tem um comportamento periódico em formato de “U” e que o efeito do multicaminho removido nos índices estava mais concentrado nas horas iniciais e finais do tempo de visibilidade de cada satélite, os intervalos particionados foram calculados por meio da divisão de cada “U” em 3 partes, conforme descrito na metodologia.

Assim, como o tempo médio de rastreamento do satélite 11 na estação PRU1 foi de aproximadamente 5h 28min diários, considerou o U1 como sendo as observações coletas do início até 1h 50min de visibilidade, o U2 no período de 1h 51min à 3h 40min e o U3 no período de 3h 41min até o satélite perder sintonia com o receptor. Na média, cada parte do “U” contém 1h 50min de observações. A Figura 7.14 mostra a distribuição dos dados da estação PRU1 após ser fragmentados nos subconjuntos U1, U2 e U3.

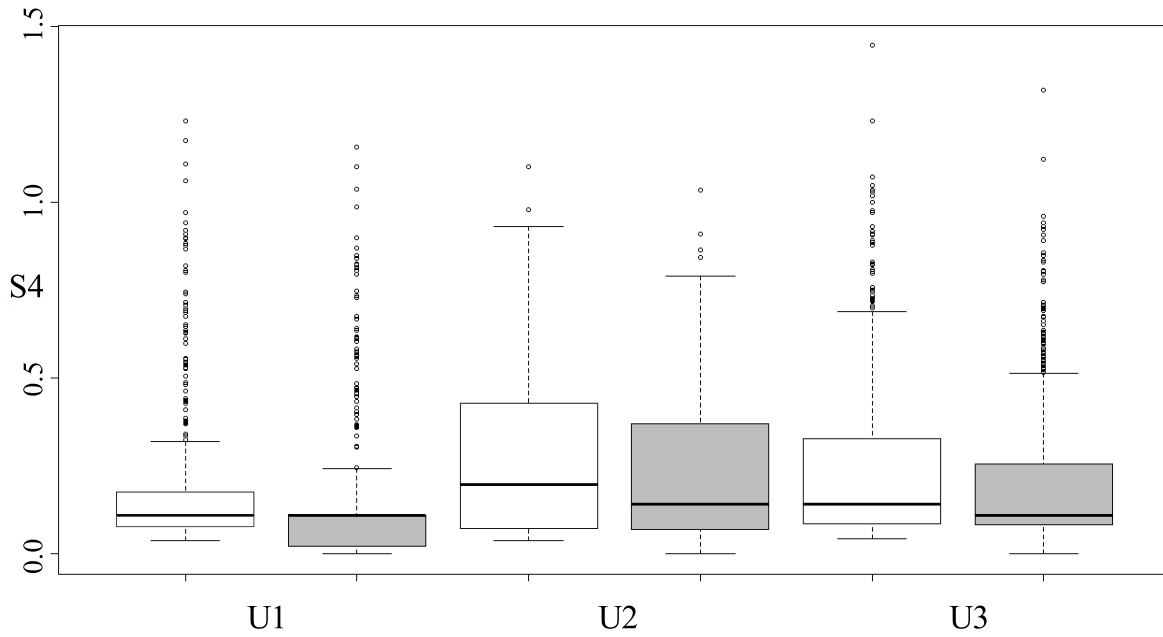


Figura 7.14: Gráfico *box-plot* dos índices $S4$ (em branco) e $S4_{corr}$ (em cinza) da estação PRU1 para o satélite 11.

Por meio do gráfico da Figura 7.14 observa-se que nos 3 casos os dados apresentam um comportamento assimétrico à direita, tanto para os índices $S4$ quanto para os índices $S4_{corr}$. Esta assimetria é destacada devido os conjuntos dos dados ter uma grande quantidade de dados bem próximos a zero, ficando mais evidente no caso do U1 e U3. Nota-se também que no caso do U1 e U3, existe uma grande quantidade de *outliers*. Esta informação é relevante no estudo da modelos de FDP, pois a quantidade de *outliers* influencia no comprimento de cauda da distribuição analisada.

Diante disto, foi realizada a estimação dos parâmetros para a distribuição Weibull, Nakagami- m e Inversa Gaussiana, pelo método clássico de Máxima Verossimilhança para cada um dos subconjuntos U1, U2 e U3. Os resultados obtidos para tais distribuições estão apresentados nas Figuras (7.15), (7.16) e (7.17).

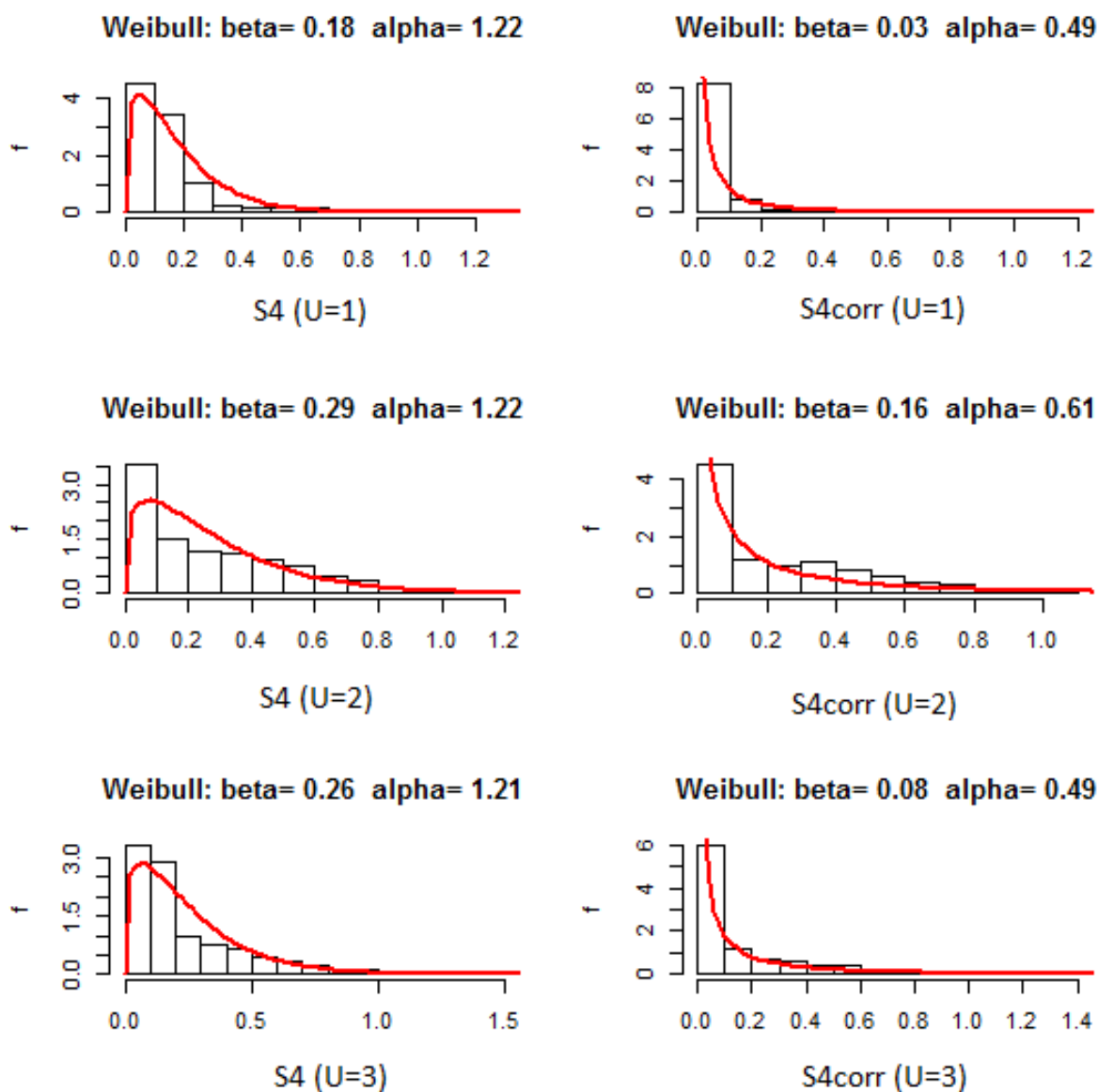


Figura 7.15: Gráfico dos histogramas dos dados e a curva da função densidade de probabilidade Weibull estimada para cada parte do “U” (U1, U2, U3). Na primeira coluna estão os resultados referentes aos índices $S4$ e na segunda coluna estão os resultados referentes aos índices $S4_{corr}$.

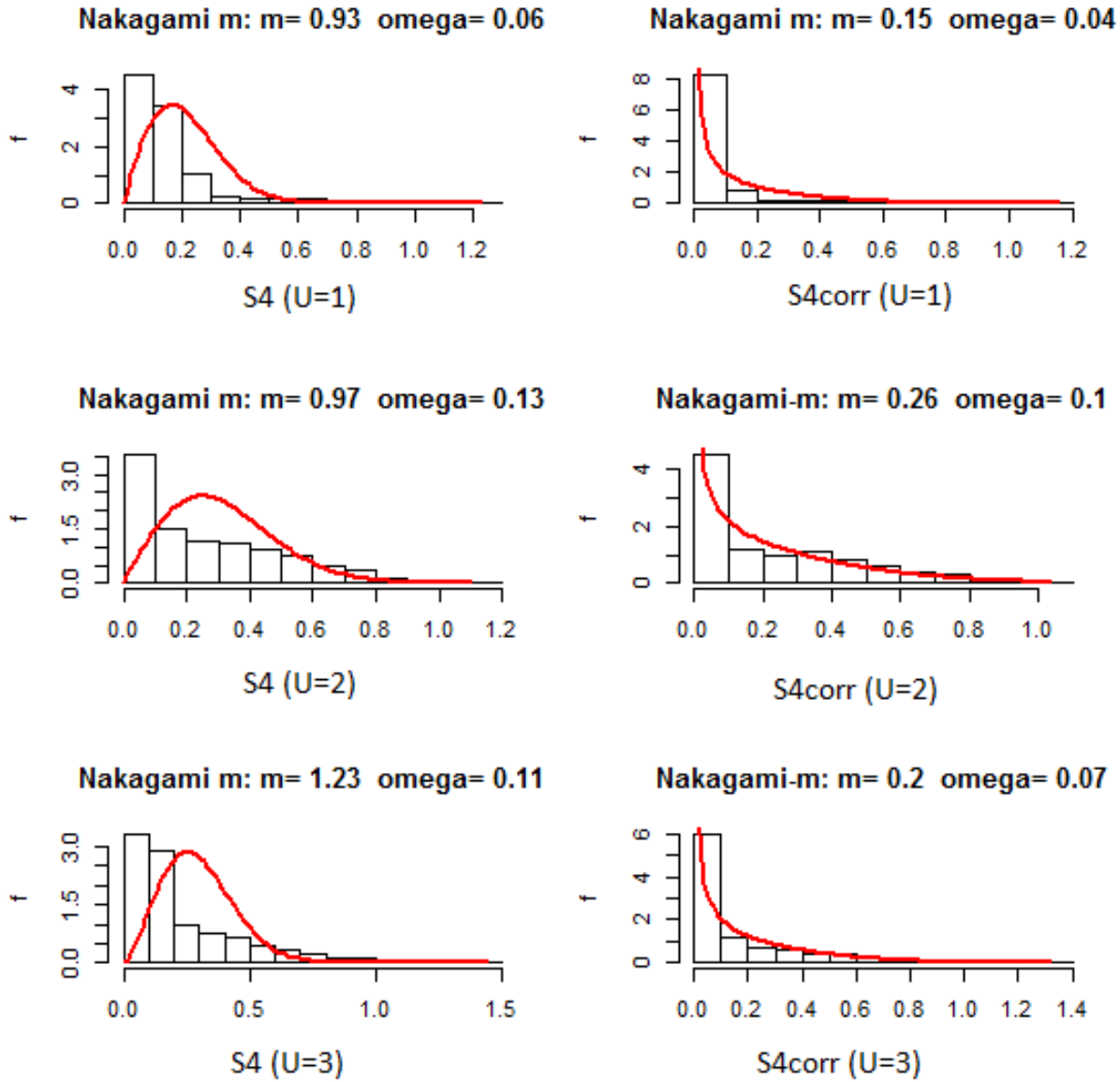


Figura 7.16: Gráfico dos histogramas dos dados e a curva da função densidade de probabilidade Nakagami- m estimada para cada parte do “U” (U_1 , U_2 , U_3). Na primeira coluna estão os resultados referentes aos índices $S4$ e na segunda coluna estão os resultados referentes aos índices $S4_{corr}$.

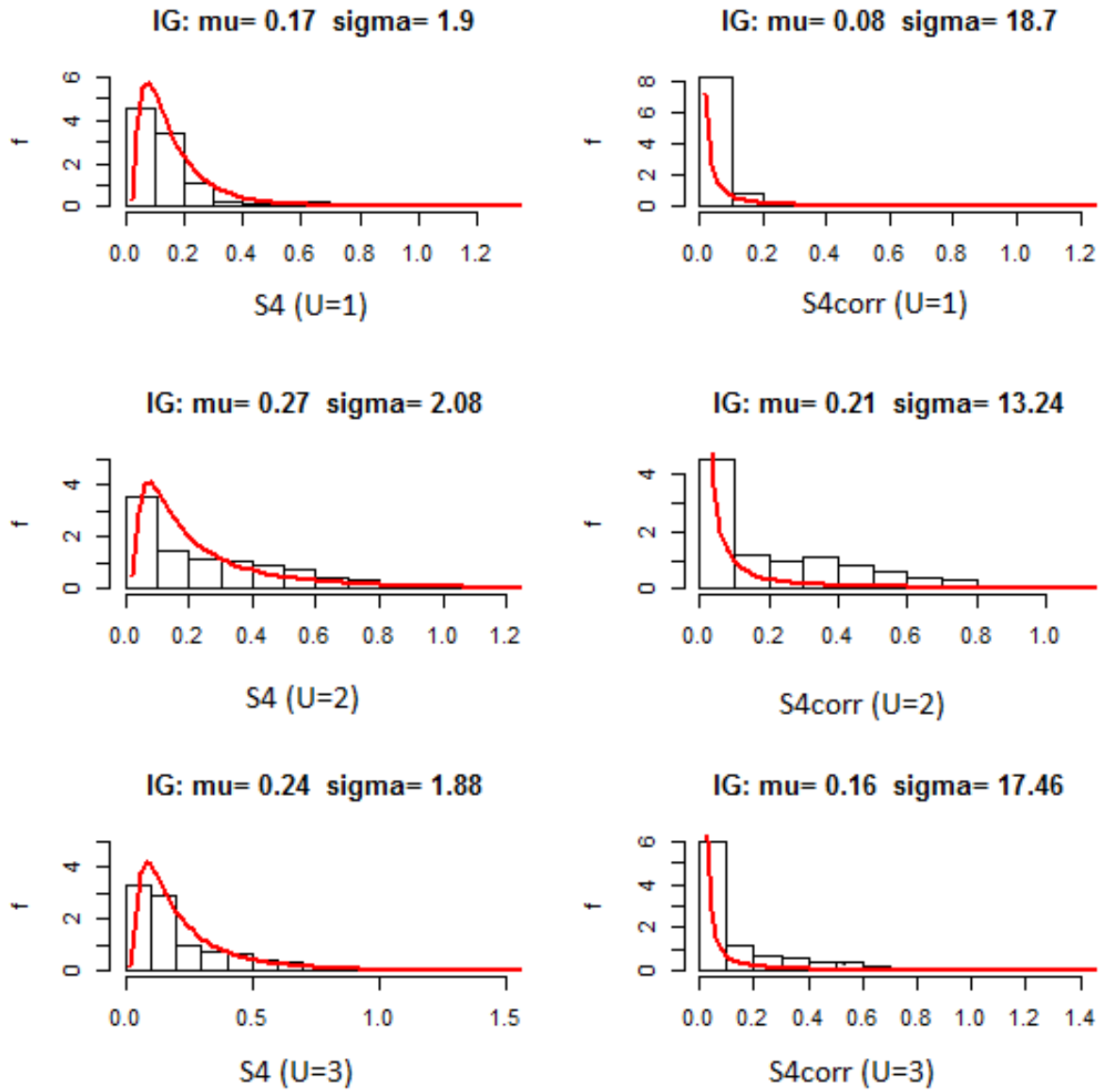


Figura 7.17: Gráfico dos histogramas dos dados e a curva da função densidade de probabilidade Inversa Gaussiana estimada para cada parte do "U" ($U1$, $U2$, $U3$). Na primeira coluna estão os resultados referentes aos índices $S4$ e na segunda coluna estão os resultados referentes aos índices $S4_{corr}$.

As Tabelas (7.11) e (7.12) apresentam os valores estimados dos parâmetros das distribuições Weibull, Nakagami- m e Inversa Gaussiana, junto com a estatística do teste de aderência Kolmogoriv-Sminorv (K-S).

Tabela 7.11: Parâmetros estimados para as distribuições Nakagami- m , Weibull e Inversa Gaussiana, e a estatística do teste de aderência Kolmogoriv-Sminorv (K-S) para os índices $S4$

Partes do “U”	Nakagami- m		K-S	Weibull		K-S	Inversa Gaus.		K-S
	m	Ω		α	β		μ	σ	
U1	0,93	0,06	0,27	1,22	0,18	0,26	0,17	1,90	0,26
U2	0,97	0,13	0,31	1,22	0,29	0,40	0,27	2,08	0,45
U3	1,23	0,11	0,37	1,21	0,26	0,44	0,24	1,88	0,49

Tabela 7.12: Parâmetros estimados para as distribuições Nakagami- m , Weibull e Inversa Gaussiana, e a estatística do teste de aderência Kolmogoriv-Sminorv (K-S) para os índices $S4_{corr}$

Partes do “U”	Nakagami- m		K-S	Weibull		K-S	Inversa Gaus.		K-S
	m	Ω		α	β		μ	σ	
U1	0,15	0,04	0,54	0,49	0,03	0,71	0,08	18,7	0,78
U2	0,26	0,10	0,34	0,61	0,16	0,44	0,21	13,24	0,74
U3	0,02	0,07	0,45	0,49	0,08	0,59	0,16	17,46	0,78

Por meio das Tabelas (7.12) e (7.11) nota-se que no caso do U2, referente ao $S4_{corr}$, o melhor ajuste foi pela Nakagami- m , que melhor aproximou a probabilidade de ocorrência de índices maiores que 0,5. No caso do U2 referente ao $S4$, nenhuma distribuição ficou bem próxima, porém as distribuições Weibull e a Inversa Gaussiana que foram as que melhor se ajustaram mesmo obtendo maiores valores da estatística K-S, do que para a distribuição Nakagami- m . De fato, estas duas distribuições se ajustaram melhor para todos os casos de $S4$.

De modo geral, após a correção do multicaminho, a distribuição dos índices $S4_{corr}$ mudou e ficou melhor ajustada pela Nakagami- m . Entretanto, antes da correção esta distribuição apresentou um ajuste ruim e este ficou próximo da distribuição Rayleigh ($m \approx 1$) nos casos do U1 e U2, e próxima da distribuição de Rice ($m > 1$) para U3. Além disso, verifica-se que o parâmetro de tendência central e dispersão também modificaram após a correção do multicaminho, sendo diferentes também de acordo com o período de rastreo (U1, U2 e U3). No entanto, verifica-se que mesmo havendo indícios de que tais dados podem ser modelados por estas funções de distribuição de probabilidade, é nítido que para alguns casos, principalmente para U2, outras distribuições precisam ser investigadas.

Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho foi apresentada uma metodologia para a investigação do efeito da cintilação ionosférica nos índices $S4$ e $S4_{corr}$ dos sinais GPS por meio de métodos de séries temporais com a presença de dados faltantes, tendo como foco a análise da variância *wavelet* em multiescala. Nesta análise foram adotados dois estimadores, covariância e semivariograma *wavelet*, construídos a partir de *wavelets* de Haar e Daubechies. Foram utilizados os filtros da *wavelet* de Haar, devido ao suporte mais curto e por ter apresentado intervalos de confiança mais precisos do que com os filtros da *wavelet* de Daubechies.

A variância *wavelet* das séries temporais dos índices $S4$ e $S4_{corr}$ foi estimada para o satélite 11 em diferentes estações (MAN2, PALM, SJCU, PRU1 e POAL) e, como a estação PRU1 obteve a maior quantidade de índices $S4$ com intensidade moderada e forte, foi realizada uma análise considerando outros satélites (1, 11 e 19) nesta estação. Em todos os casos, ambos os estimadores tiveram um desempenho similar.

Por meio desta análise foi possível identificar quais as escalas com maior contribuição para a variabilidade do sinal dos índices $S4$ e $S4_{corr}$ em cada estação considerada e compará-las. Nesta investigação concluiu-se que não houve mudanças nas escalas características após a correção do efeito do multicaminho, ou seja, a variabilidade dos dados referentes aos índices $S4$ e $S4_{corr}$ permaneceram iguais.

Com relação a estimação da análise da variância *wavelet* para diferentes satélites da estação PRU1, observou-se que as escalas características não foram as mesmas em todos os casos. Assim, nota-se que por mais que a localização seja a mesma para diversos satélites analisados, o efeito da cintilação ionosférica tem um comportamento independente para cada estação.

No que se refere ao procedimento adotado para ajustar modelos de distribuições de probabilidade aos conjunto dos índices $S4$ referente ao satélite 11, a fragmentação dos dados em 3 partes (U1, U2 e U3) foi necessária para avaliar tais valores em função de um período de ocorrência. Desta maneira houve uma redução na dependência de tais índices com o ângulo de elevação e azimuth dos satélites. Em cada partição foi verificada que as distribuições ajustadas mostraram distintas antes e após a correção do multicaminho.

Como trabalhos futuros, pretende-se identificar distribuições mistas que tenham um bom desempenho para ajustar os índices $S4$ e $S4_{corr}$, visto que os modelos clássicos não desempenham um bom ajuste quando tem-se uma grande concentração de índices $S4$ de cintilação ionosférica próximos do zero. Além disso, testes e medidas apropriadas devem ser utilizados para comparação e determinação da melhor distribuição para os índices $S4$ e $S4_{corr}$, inclusive de acordo com os diferentes períodos. Nesta pesquisa, os índices

foram subdivididos em 3 partes representando o início, meio e fim dos U's (U1, U2 e U3), entretanto, outros particionamentos podem ser investigados.

Em relação aos estimadores covariância e estimador semivariograma para variância *wavelet*, embora tenham apresentado comportamentos similares, para a estação MAN2, em que a porcentagem de NAs foi bem maior que as demais estações (15% e menos que 3% para as estações restantes), estes estimadores diferiram tanto em estimação pontual quanto intervalar. Neste sentido, faz-se necessário avaliar tais estimadores a partir de estudos de simulação, variando a porcentagem de dados faltantes.

Referências

- [1] CIGALA/CALIBRA/ Ionospheric Scintillation. Disponível em:. <<http://is-cigala-calibra.fct.unesp.br/is/stations/fixed.php>>. Acesso em: Nov. 2014.
- [2] Clima Espacial INPE/MCTI. Disponível em:. <<http://www2.inpe.br/climaespacial/AGCGPSViewer/faces/about.xhtml?lan=pt>>. Acesso em: Nov. 2014.
- [3] GPS Constellation Status. Disponível em:. <<https://glonass-iac.ru/en/GPS/>>. Acesso em: Set. 2015.
- [4] GPS.gov: Space Segment. Disponível em:. <<http://www.gps.gov/systems/gps/space/>>. Acesso em: Fev. 2015.
- [5] Introdução á Astronomia e Astrofísica. Disponível em:. <http://www.das.inpe.br/ciaa/cd/HTML/dia_a_dia/1_4_1.htm>. Acesso em: Nov. 2014.
- [6] ISMR Query Tol. Disponível em:. <<http://is-cigala-calibra.fct.unesp.br/is/ismrtool/index.php>>. Acesso em: Nov. 2014.
- [7] C. R. AGUIAR. *Grade Ionosférica para aplicações em Posicionamento e Navegação com GNSS*. Doutorado em Ciências Cartográficas, FCT/UNESP, Presidente Prudente, 2010.
- [8] G. O. BRASSAROTE. *Análise Multiescala de Séries Temporais do efeito da Cintilação Ionosférica nos sinais de satélite a partir de Wavelets Não Decimadas*. Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional, FCT/UNESP, Presidente Prudente, 2014.
- [9] G. CASELLA; R. L. BERGUER. *Inferência Estatística*. Cengage Learning, 2011.
- [10] C. CHATFIELD. *The Analysis of Time Series: An Introduction*. Chapman & Hall/CRC Texts in Statistical Science. CRC Press, 6a edição, 2013.
- [11] R. S. CONKER; M. B. EL-ARINI; C. J. HEGARTY; T. HSIAO. Modeling the effects of ionospheric scintillation on gps/satellite-based augmentation system availability. 38:1–23, Fev. 2003.
- [12] J. D. CRYER; K. S. CHAN. *Time Series Analysis: With Applications in R*. Springer Texts in Statistics. Springer New York, 2008.
- [13] I. DAUBECHIES. Orthonormal Bases of Compact Supported Wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41:909–996, Jan. 1988.

- [14] K. DAVIES. *Ionospheric Radio*. Electromagnetics and Radar Series. Peregrinus, 1990.
- [15] M. H. DEGROOT; M. J. SCHERVISH. *Probability and Statistics: Pearson New International Edition*. Pearson Education Limited, 2013.
- [16] M. L. EL GIZAWY. *Development of an Ionosphere Monitoring Technique using GPS Measurements for High Latitude GPS users*. Mestrado em Engenharia Geomática, The University of Calgary, Canada, 2003.
- [17] L. G. R. GUEDES; M. D. YACOUB. Distribuição de Nakagami: Estatísticas de Primeira e Segunda Ordem para Aplicações em Rádio Móvel. XXVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, 1997.
- [18] A. HAAR. Zur theorie der orthogonaler funktionen-systeme. *Mathematische Annalen*, 69:331–371, 1910.
- [19] M. J. KEIM; D. B. PERCIVAL. Assessing Characteristic Scales Using Wavelets. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C*, 64:377–393, Feb. 2015.
- [20] P. M. KINTNER; B. M. LEDVINA; E. R. PAULA. Gps and ionospheric scintillations. *Space Weather*, 2007. doi:10.1029/2006SW000260.
- [21] S. MALLAT. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11:674 – 693, Out. 1989.
- [22] M. T. MATSUOKA. *Influência de diferentes condições da Ionosfera no Posicionamento Por Ponto com GPS: Avaliação na região brasileira*. Doutorado em Ciências Cartográficas, FCT/UNESP, Presidente Prudente, 2007.
- [23] L. F. MCNAMARA. *The Ionosphere: Communications, Surveillance, and Direction Finding*. Orbit, a foundation series. Krieger Publishing Company, 1991.
- [24] D. MONDAL; D. B. PERCIVAL. Wavelet Variance Analysis for Gappy Data Wavelet Variance Analysis for Gappy Time Series. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 62:943 – 966, Out. 2010.
- [25] J. F. G. MONICO. *Posicionamento pelo GNSS: Fundamentos, Definição e Aplicação*. Editora UNESP, 2008.
- [26] A. M. MOOD; F. A. GRAYBILL; D. C. BOES. *Introduction to the theory of Statistics*. McGraw-Hill international editions. Tata McGraw-Hill.
- [27] A. O. MORAES; E. COSTA; E. R. PAULA; W. J. PERRELLA; J. F. G. MONICO. Extended Ionospheric Amplitude Scintillation Model for GPS Receivers. 49:315– 329, Maio 2014.
- [28] A. O. MORAES; E. R. PAULA; W. J. PERRELLA; F. S. RODRIGUES. On the Distribution of GPS Signal Amplitudes During low-latitude Ionospheric Scintillation. *GPS Solutions*, 17:499– 510, Out. 2013.
- [29] A. O. MORAES; W. J. PERRELLA. Performance Evaluation of GPS receiver under Equatorial Scintillation. *Journal of Aerospace Technology and Management*, 1, Dez. 2009.

- [30] P. A. MORETTIN ; C. M. C. TOLOI. *Análise de Séries Temporais*. Edgard Blucher, 2004.
- [31] P. A. MORETTIN. *Ondas e Ondaletas: Da análise de Fourier à análise de Ondaletas*. Editora da Universidade de São Paulo (EDUSP), 2014.
- [32] G. P. NASON. *Wavelet Methods in Statistics with R*. Springer, 2008.
- [33] T. T. NEGRI. *Reconhecimento de Padrões via Wavelets: Aplicação no monitoramento de estruturas a partir do efeito do Multicaminho proveniente de sinais de satélites GPS*. Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional, FCT/UNESP, Presidente Prudente, 2012.
- [34] D. B. PERCIVAL. On Estimation of the Wavelet Variance. *Oxford Journals Life Sciences Mathematics Physical Sciences: Biometrika U.K.*, 82:619 – 631, Set. 1995.
- [35] D. B. PERCIVAL; A. T. WALDEN . *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge University Press, 2000.
- [36] G. SEEBER. *Satellite Geodesy: Foundations, Methods, and Applications*. Walter de Gruyter, 2003.
- [37] A. SERROUKH; A. T. WALDEN; D. B. PERCIVAL. Statistical Properties and Uses of the Wavelet Variance Estimator for the Scale Analysis of Time Series. *Journal of the American Statistical Association.*, 95:184–196, Mar. 2000.
- [38] S. SKONE; K. KNUDSEN; M de JONG. Limitations in GPS Receiver Tracking Performance Under Ionospheric Scintillation Conditions. *Physics and Chemistry of the Earth*, 26:613–621, 2001.
- [39] E. M. SOUZA. *Análise de Wavelets para detecção e correção do Multicaminho no posicionamento relativo GNSS estatístico e cinemático*. Doutorado em Ciências Cartográficas, FCT/UNESP, Presidente Prudente, 2008.
- [40] B. C. VANI. *Análise da Cintilação Ionosférica no Brasil empregando GNSS e técnicas de Mineração e Visualização de dados*. Mestrado em Ciências Cartográficas, FCT/UNESP, Presidente Prudente, 2014.
- [41] T. et al WALTER. Effect of Ionospheric Scintillations on GNSS: A white paper. *SBAS Ionospheric Working Group*, 4, 2010.
- [42] W. WEIBULL. A statistical theory of the strength of materials. *Royal Swedish Institute for Engineering Research*, 151, 1939.
- [43] B. WHITCHER; P. GUTTORP; D. B. PERCIVAL. Wavelet Analysis of Covariance with Application to Atmospheric Time Series. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres.*, 105:14941–14962, Jun. 2000.