

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"**  
**CAMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA**

**LUCAS VICTORELLI CARAVITA**

**UM ESTUDO SOBRE O COMPORTAMENTO AEROELÁSTICO DE UMA SEÇÃO TÍPICA  
UTILIZANDO AERODINÂMICA NÃO ESTACIONÁRIA**

São João da Boa Vista

2022

**Lucas Victorelli Caravita**

**UM ESTUDO SOBRE O COMPORTAMENTO AEROELÁSTICO DE UMA SEÇÃO TÍPICA  
UTILIZANDO AERODINÂMICA NÃO ESTACIONÁRIA**

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica do Campus de São João da Boa Vista, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Aeronáutica .

Orientador: Profº Dr. Vagner Candido de Sousa

São João da Boa Vista

2022

C262e

Caravita, Lucas Victorelli

Um estudo sobre o comportamento aeroelástico de uma seção típica utilizando aerodinâmica não estacionária / Lucas Victorelli Caravita.

-- São João da Boa Vista, 2022

38 p. : il., tabs.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Engenharia Aeronáutica) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Engenharia, São João da Boa Vista

Orientador: Vagner Candido de Sousa

1. Aeroelasticidade. 2. Aerodinâmica. 3. Equações lineares. 4. Sistemas não lineares. 5. Métodos de espaço de estados. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Engenharia, São João da Boa Vista. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA  
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**UM ESTUDO SOBRE O COMPORTAMENTO AEROELÁSTICO DE UMA SEÇÃO  
TÍPICA UTILIZANDO AERODINÂMICA NÃO ESTACIONÁRIA**

Aluno: Lucas Victorelli Caravita  
Orientador: Prof. Dr. Vagner Candido de Sousa

Banca Examinadora:

- Vagner Candido de Sousa (Orientador)
- Leandra Isabel de Abreu (Examinadora)
- Luiz Augusto Camargo Aranha Schiavo (Examinador)

A ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no prontuário do aluno (Expediente nº 074/2022)

São João da Boa Vista, 29 de novembro de 2022

Dedico esse trabalho à meus pais, minha irmã, meus avós e o restante de minha família que com muito amor e carinho não mediram esforços para que eu pudesse chegar aqui. Dedico também a meu orientador pelo suporte para conclusão do trabalho e a meus colegas de faculdade com quem partilhei os últimos 5 anos de minha vida.

## RESUMO

Este trabalho analisou a resposta da simulação de dois modelos numéricos diferentes para casos abaixo, acima e na velocidade crítica de flutter, os modelos são o de Edwards, que considera as forças aerodinâmicas como lineares e o de Beddoes Leishman, que as considera em parte linear e em parte não linear. O objetivo do trabalho é mostrar as diferenças causadas pelo estol dinâmico em casos acima da velocidade de flutter. Os resultados obtidos estão dentro do esperado, onde o modelo de Beddoes-Leishman representa melhor a física do problema, diminuindo a amplitude máxima de torção, translação e ângulo de ataque do aerofólio quando esse chega a amplitudes suficientemente grandes para entrar em estol.

**PALAVRAS-CHAVE:** AEROELASTICIDADE, AERODINÂMICA, EQUAÇÕES LINEARES, SISTEMAS NÃO LINEARES, MÉTODOS DE ESPAÇO DE ESTADOS.

## **ABSTRACT**

This work analysed the response of the simulation of two numeric models for different cases below, above and at the critical speed for flutter. The models are from Edwards, who considers just the linear part of the aerodynamic and from Beddoes-Leishman who considers also the non-linear part. The main objective of this work is to show the differences that are caused by the dynamic stall in cases above the flutter speed. The results was as expected, where the Beddoes-Leishman model had a better representation of the motion physics with less range of torsion, translation and attack angle when the airfoil comes to a range of motion bigger than the stall angle.

**KEYWORDS:** AEROELASTICITY, AERODYNAMIC, LINEAR EQUATIONS, NON-LINEAR SYSTEMS, SPACE OF STATES METHODS.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	$\theta$ e h para V menor que $V_{cr}$ . . . . .	12
Figura 2	$\theta$ e h para V igual a $V_{cr}$ . . . . .	13
Figura 3	$\theta$ e h para V maior que $V_{cr}$ . . . . .	13
Figura 4	Ponto de sustentação máximo (estol) . . . . .	14
Figura 5	Separação da camada limite. - Fonte: Biasi - 2010 . . . . .	14
Figura 6	Amplitude constante devido a estol dinâmico . . . . .	15
Figura 7	Método de Runge-Kutta de 4 ordem . . . . .	17
Figura 8	Aerofólio como molas que simulam resistência a torção e translação . . . . .	18
Figura 9	$\theta$ e h sem escoamento . . . . .	31
Figura 10	$\theta$ , $\alpha$ e h a 14,49 m/s . . . . .	32
Figura 11	$\theta$ , $\alpha$ e h a 17 m/s . . . . .	33
Figura 12	$\theta$ , $\alpha$ e h a 20 m/s . . . . .	34
Figura 13	Modelo de Beddoes-Leishman, linear x não linear . . . . .	34
Figura 14	Beddoes-Leishman linear x Edwards . . . . .	35
Figura 15	Amplitude casos linear e não linear . . . . .	35

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros da equação estrutural - Fonte: [Santos e Pereira 2017] . . . . .	26
Tabela 2 – Parâmetros da parte aerodinâmica - Fonte: [Santos e Pereira 2017] . . . . .	27
Tabela 3 – Parâmetros Modelo de Beddoes-Leishman - Fonte: [Santos e Pereira 2017] . . . . .	28
Tabela 4 – Parâmetros das matrizes(aerodinâmica linear) - Modelo de Beddoes-Leishman - Fonte: [Santos e Pereira 2017] . . . . .	28
Tabela 5 – Parâmetros da parcela de aerodinâmica não linear - Modelo de Beddoes-Leishman - Fonte: [Santos e Pereira 2017] . . . . .	29
Tabela 6 – Parâmetros do modelo de Edwards - Fonte: [Vagner Sousa 2016] . . . . .	30

## LISTA DE SÍMBOLOS

$d$	Amortecimento
$\alpha$	Ângulo de ataque
$\theta$	Ângulo de torção estrutural
CG	Centro de gravidade
$C_n$	Coefficientes da função de Theodorsen
$a_{nn}$	Coefficientes da matriz de entrada de aerodinâmica linear (Beddoes)
$c_{nn}$	Coefficientes da matriz de saída de aerodinâmica linear (Beddoes)
$C_l$	Coefficiente de sustentação
$C_m$	Coefficiente de momento
T	Constantes de tempo
$T_n$	Constantes de Theodorsen
c	Corda
h	Distância de translação
$X_\theta$	Distância eixo elástico - centro de gravidade
$\omega$	Frequência
$m_a$	Massa do aerofólio
$m_t$	Massa total
M	Número de Mach
eta	Porcentual da força tangencial medida em relação ao esperado
$X_{ac}$	Posição do centro aerodinâmico
$X_{ea}$	Posição do eixo elástico
b	Semicorda
L	Sustentação
t	Tempo
$\delta$	Varição de um parâmetro

$V$	Velocidade
$V_{cr}$	Velocidade crítica
$V_{som}$	Velocidade do som

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>FLUTTER E ESTOL DINÂMICO</b>	<b>12</b>
2.1	Flutter	12
2.2	Estol dinâmico	13
<b>3</b>	<b>MÉTODOS COMPUTACIONAIS</b>	<b>16</b>
<b>4</b>	<b>MODELO DE BEDDOES-LEISHMAN</b>	<b>18</b>
4.1	Equações estruturais	18
4.2	Equações aerodinâmica linear	19
4.3	Equações aerodinâmica não linear	20
<b>5</b>	<b>MODELO DE EDWARDS</b>	<b>23</b>
<b>6</b>	<b>PARÂMETROS</b>	<b>26</b>
6.1	Parâmetros estruturais do aerofólio	26
6.2	Parâmetros aerodinâmica	26
6.3	Parâmetros do modelo de Beddoes-Leishman	27
6.4	Parâmetros do modelo de Edwards	29
<b>7</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>31</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>36</b>
<b>9</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>37</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>38</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O fenômeno aeroelástico conhecido como flutter caracteriza-se pela oscilação auto estimulada (contínua ou crescente ao longo do tempo) de uma seção típica de um aerofólio, isso representa um problema do ponto de vista da aviação. Uma vez que leva asas de aeronaves a grandes torções, podendo ocasionar problemas estruturais e gerar desconforto aos tripulantes. Apesar de ser conhecido como algo a ser evitado no geral, alguns estudos procuram utilizar o flutter de forma positiva, como por exemplo, utilizando essas torções para gerar energia através de aerofólios feitos de materiais piezoelétricos.

Esse trabalho tem como objetivo contribuir com o estudo do flutter através da simulação numérica desse fenômeno, para isso será realizada a comparação de resultados obtidos utilizando dois modelos de aerodinâmica não estacionária diferentes, sendo eles o modelo exponencial de Edwards, um modelo que considera aerodinâmica linear, e o modelo de Beddoes-Leishman, que a considera em parte linear e em parte não linear. Ao considerar não linearidades (queda de sustentação devido ao estol) na aerodinâmica encontra-se resultados mais realísticos, principalmente em momentos que o aerofólio atinge ângulos de ataque elevados, em comparação ao resultados obtidos sem considerá-las.

O modelo de Beddoes-Leishman acopla equações governantes da estrutura de um aerofólio com equações da aerodinâmica, onde parte dessas equações diferenciais representa a parcela linear da física do problema, que é a única presente para ângulos abaixo do início do estol, o restante representa a parcela da aerodinâmica não linear, que ocorre quando o ângulo de ataque é grande a ponto do aerofólio começar a entrar em estol, isso se dá por conta de vórtices gerados quando ocorre o desprendimento da camada limite.

Para a implementação desse modelo é necessário a aplicação do método de Runge-Kutta, uma vez que o acoplamento e as não linearidades dificultam a utilização de modelos computacionais já prontos. Para isso, nesse trabalho utilizou-se da linguagem 'MATLAB'.

Os resultados obtidos são comparados através de gráficos que representem a movimentação do aerofólio ao longo do tempo, vistos nesse trabalho através da análise da rotação em torno do eixo elástico ( $\theta$ ), da translação ( $h$ ) e do ângulo de ataque ( $\alpha$ ), dessa forma fica visível a diferença dos modelos estudados.

## 2 FLUTTER E ESTOL DINÂMICO

### 2.1 FLUTTER

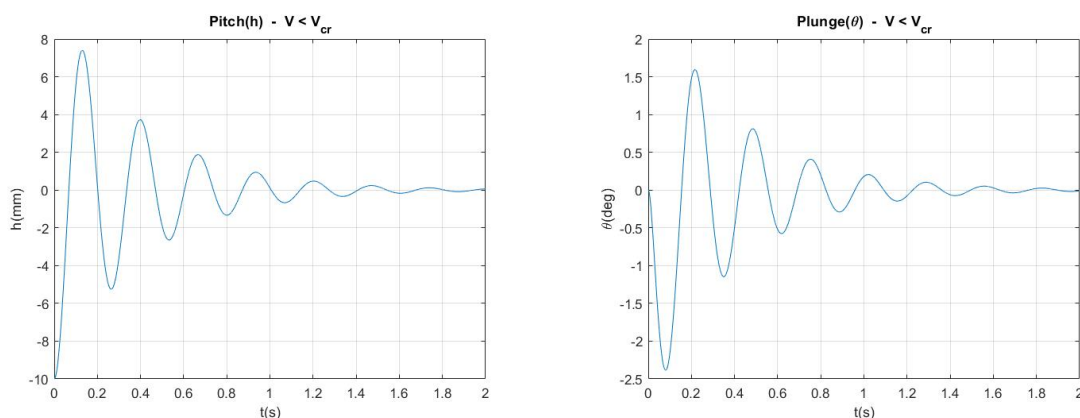
O flutter é um fenômeno que foi descoberto na década de 1950. Devido aos avanços aeronáuticos obtidos na segunda guerra mundial, onde houve um salto assustador de tecnologia, aeronaves mais rápidas começaram a ser produzidas, entretanto notou-se que a partir de certa velocidade as asas das aeronaves se tornavam instáveis, torcendo em volta do seu centro elástico e realizando um movimento de subida e descida na ponta da asa, o que gerou falhas em diversas aeronaves.

Diversos estudos foram realizados para entender o que estava acontecendo, até que Jordan concluiu que se tratava de flutter, um fenômeno até então desconhecido, que ao combinar forças aerodinâmicas, inerciais e estruturais gera oscilações no aerofólio.

As forças aerodinâmicas  $M$  e  $L$  (momento e sustentação respectivamente) causam um movimento de torção em torno do eixo elástico, e translação ao longo da asa, criando um ângulo  $\theta$  (torção) e um parâmetro  $h$  (movimento de subida e descida do aerofólio). A estrutura da asa, por outro lado, gera forças contrárias a esse movimento (semelhante a uma mola tendendo a voltar a condição de não deformação). Além disso, temos as forças inerciais, que fazem com que o movimento, seja ele indo em direção ao ponto de estabilidade estrutural ou na direção contrária, tenda a manter sua direção.

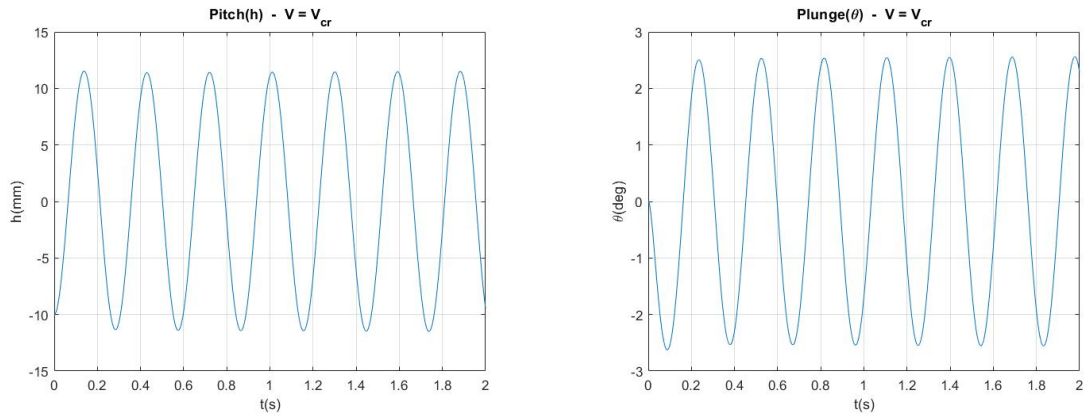
O somatório dessas forças pode resultar em três situações diferentes. Caso a parte estrutural se sobreponha a parte aerodinâmica ocorre a diminuição da magnitude da oscilação até que o movimento estabilize em um  $\theta$  e  $h$  fixo. Figura 1, esse fenômeno ainda não pode ser considerado flutter.

Figura 1 –  $\theta$  e  $h$  para  $V$  menor que  $V_{cr}$



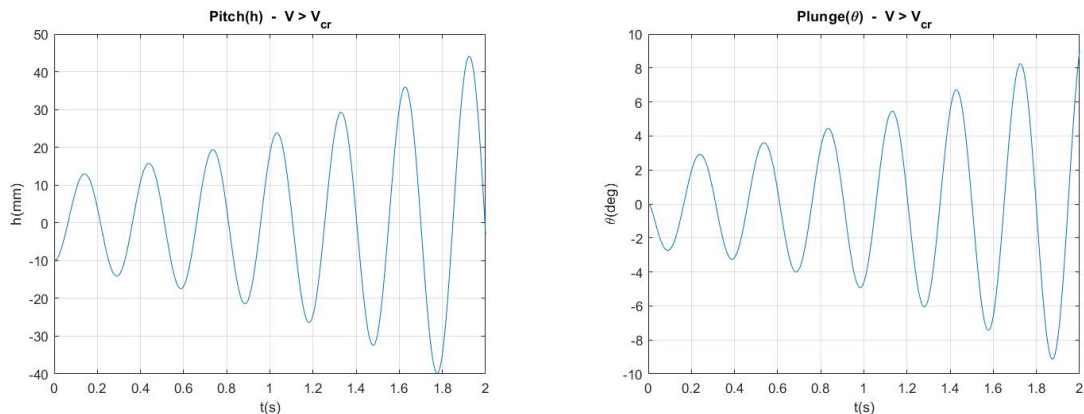
Fonte: Elaborado pelo autor

Caso as forças aerodinâmicas e estruturais sejam equivalentes, o que ocorre apenas para uma velocidade crítica (acima dela se sobressai a parte aerodinâmica e abaixo dela a parte estrutural), inicia-se o fenômeno de flutter, mantendo a amplitude constante das oscilações. Figura 2.

Figura 2 –  $\theta$  e  $h$  para  $V$  igual a  $V_{cr}$ 

Fonte: Elaborado pelo autor

Acima da velocidade crítica (onde se sobressaem momento aerodinâmico e sustentação) a amplitude da oscilação aumenta Figura 3, fazendo com que o aerofólio enfrente cargas cada vez maiores e corra o risco de falhar. Esse aumento só termina com a diminuição da força aerodinâmica gerada pelo estol dinâmico.

Figura 3 –  $\theta$  e  $h$  para  $V$  maior que  $V_{cr}$ 

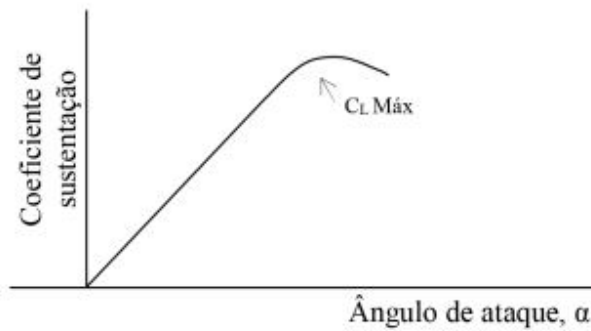
Fonte: Elaborado pelo autor

## 2.2 ESTOL DINÂMICO

Caso as forças aerodinâmicas aumentassem infinitamente com o aumento de  $\alpha$  (ângulo de ataque), a tendência seria da oscilação crescer também infinitamente ao longo do tempo, entretanto, ao chegar em um ângulo de ataque específico, que varia para cada perfil aerodinâmico, começa a ocorrer o efeito do estol Figura 4, que faz com que o momento e a sustentação diminuam.

O estol ocorre quando, para determinado valor de  $\alpha$ , acontece a separação do extradorso da asa de maneira repentina, ou seja, conforme o ângulo de ataque aumenta a diferença da força de inércia do escoamento e a força que é responsável por manter o escoamento colado ao extradorso do aerofólio diminui, até que elas se igualem e ocorra uma separação repentina do escoamento no extradorso.

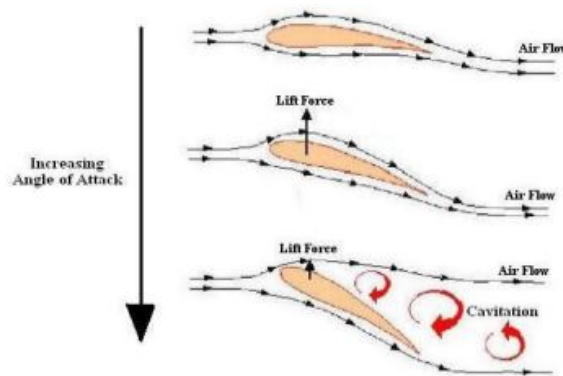
Figura 4 – Ponto de sustentação máximo (estol)



Fonte: Balen - 2016

A separação gera vórtices na região entre a parte superior do aerofólio e o escoamento laminar (Figura 5), o que faz com que diminua a diferença de pressão entre o extra e intradorso. O estol costuma aparecer para ângulos de ataque entre 10 e 20 graus e gera uma queda de sustentação em aeronaves, fazendo com que seja necessário uma velocidade maior para manter voo nivelado.

Figura 5 – Separação da camada limite. - Fonte: Biasi - 2010

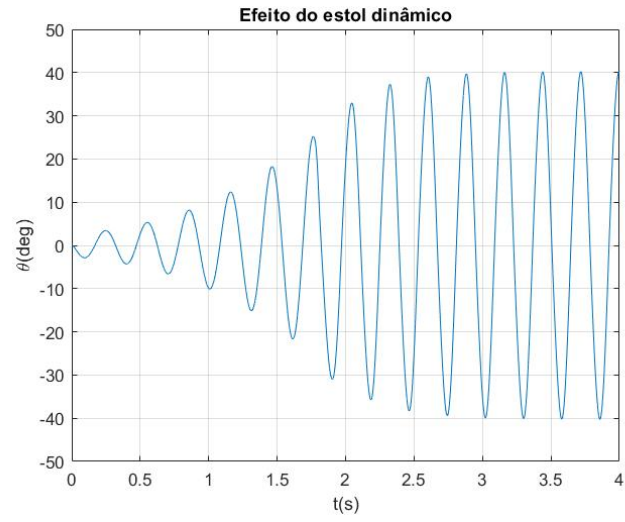


Fonte: Biasi - 2010

No caso do flutter, quando a amplitude das oscilações ultrapassa o ângulo de estol existe uma diminuição momentânea da sustentação, isso ocorre até o momento em que o ângulo de ataque retorne a um valor abaixo do estol, esse fenômeno, conhecido como estol dinâmico, acontece tanto para ângulos positivos quanto negativos, porém, para perfis assimétricos o módulo dos ângulos de estol é diferente.

Após o ângulo de estol as forças aerodinâmicas seguem diminuindo com o acréscimo do ângulo de ataque, o que faz com que, em um ângulo específico as forças aerodinâmicas e estruturais entrem em equilíbrio mesmo para  $V > V_{cr}$ , mantendo assim as oscilações constantes, visto na Figura 6.

Figura 6 – Amplitude constante devido a estol dinâmico



Fonte: Elaborado pelo autor

### 3 MÉTODOS COMPUTACIONAIS

O modelo de Beddoes-Leishman, por ser representado por equações diferenciais presentes em espaço de estados, necessita de um método computacional capaz de calcular EDOs a cada instante de tempo e retornar os valores para serem utilizados na equação seguinte, para isso foi utilizado o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Cada equação diferencial do modelo utiliza esse método, separadas em funções que são alinhadas na ordem do modelo dentro de um código principal, de forma a utilizar a saída de uma função como entrada em outra, por exemplo, utilizando as saídas aerodinâmicas na equação estrutural. Para que possa se obter um resultado ao longo do tempo foi necessário criar um laço que ao fim das equações retorna ao começo adicionando determinado passo de tempo ( $0.5 * 10^{-4}$ ), esse laço segue até que o tempo de simulação seja igual ao desejado, retornando assim um gráficos de  $\theta$ ,  $\alpha$  e  $h$  ao longo do tempo.

Esse modelo realiza quatro estimativas para encontrar a diferença entre o valor da variável no próximo passo de tempo e no passo atual, para isso ele utiliza da derivada encontrada na estimativa anterior dentro da equação de espaço de estados, ponderando o peso de cada uma das estimativas (peso um para a primeira e quarta estimativa e dois para a segunda e terceira), de modo a aproximar o máximo possível da diferença real, com esse valor obtido realiza-se a soma entre o valor no passo atual e a diferença achada, a fim de encontrar o valor da variável no próximo passo de tempo. Para isso é necessário a matriz que multiplica o valor antigo da variável somado a uma matriz que multiplica o valor de uma entrada externa e essa entrada externa (vinda de outra função do modelo).

Além da variável obtida diretamente pelo método de Runge-Kutta, também foram calculadas variáveis de saída dentro das funções, que são variáveis dependentes das calculadas por Runge-Kutta e da entrada externa.

Para que os modelos funcionem corretamente é necessário definir ângulos estruturais de entrada, uma vez que esses são entradas para as equações aerodinâmicas. Toda a parte computacional é realizada através do software MATLAB, que oferece as ferramentas necessária para o cálculo. O método de Runge-Kutta pode ser observado na Figura 7 e equações 3.1 e 3.2.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(1) = A * x + B * F \\ \frac{dx}{dt}(2) = A * (x + \frac{dx}{dt}(1) * passo/2) + B * F \\ \frac{dx}{dt}(3) = A * (x + \frac{dx}{dt}(2) * passo/2) + B * F \\ \frac{dx}{dt}(4) = A * (x + \frac{dx}{dt}(3) * passo) + B * F \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} averSlope = (\frac{dx}{dt}(1) + 2 * (\frac{dx}{dt}(2) + \frac{dx}{dt}(3)) + \frac{dx}{dt}(4))/6 \\ x = x + averSlope \end{cases} \quad (3.2)$$

Figura 7 – Método de Runge-Kutta de 4 ordem

```
function x = runge_kutta_4_ordem(A , B , C , D , x , F , passo_de_tempo)

    dxdt(1) = A * x + B * F; % primeira estimativa da solução
    dxdt(2) = A * (x + dxdt(1) * passo_de_tempo / 2) + B * F;% segunda estimativa da solução
    dxdt(3) = A * (x + dxdt(2) * passo_de_tempo / 2) + B * F; % terceira estimativa da solução
    dxdt(4) = A * (x + dxdt(3) * passo_de_tempo) + B * F; % quarta estimativa da solução

    averSlope = (dxdt(1) + 2 * (dxdt(2) + dxdt(3)) + dxdt(4)) * passo_de_tempo / 6;

    x = x + averSlope;

    saida = C * x(1) + D * F;

end
```

Fonte: Elaborado pelo autor

## 4 MODELO DE BEDDOES-LEISHMAN

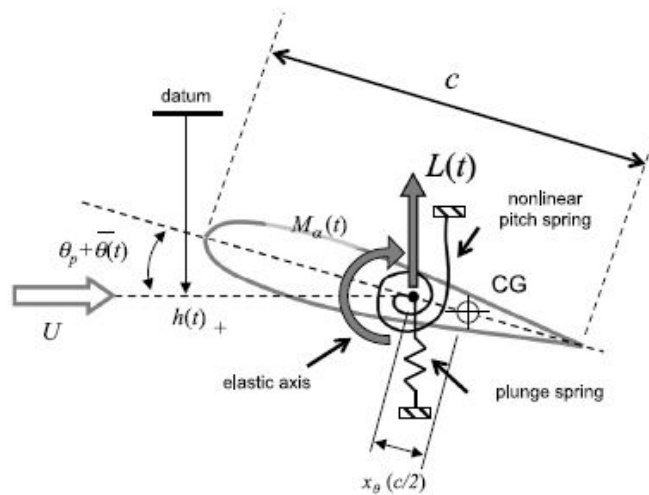
Segundo [Santos e Pereira 2017], o modelo Beddoes-Leishman acopla equações relativas aerodinâmica linear e não linear a um conjunto de equações diferenciais que representam a estrutura de uma seção típica de um aerofólio, esse acoplamento é obtido através da utilização das saídas das equações diferenciais estruturais como entradas nas equações aerodinâmicas ( $\alpha$  e  $q$ ) e as saídas das equações aerodinâmicas como entrada das equações estruturais ( $C_{mea}$  e  $C_l$ ).

Essa troca de informações é feita através de um loop que soluciona primeiramente as equações estruturais, em seguida a aerodinâmica linear e por último a não linear em cada passo de tempo, retornando os valores para as equações estruturais do próximo instante de tempo.

### 4.1 EQUAÇÕES ESTRUTURAIS

As equações estruturais são divididas entre a equação de entrada e a de saída. No caso da entrada são acoplados o movimento de rotação, representado pelo ângulo  $\theta(t)$ , e o movimento de translação, representado por  $h(t)$ , esses valores e suas derivadas são obtidos a cada instante de tempo através da equação 4.1, que possui como entradas as saídas aerodinâmicas  $C_l$  e  $C_{mea}$  que representam, respectivamente, o coeficiente de sustentação e o coeficiente de momento à um quarto da corda. Essas equações representam o aerofólio que pode ser visto na Figura 8.

Figura 8 – Aerofólio como molas que simulam resistência a torção e translação



Fonte: [Santos e Pereira 2017]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_e & 0 & X_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{X_\theta}{r_\theta^2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \ddot{h} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_h^2 & -d_{11} & 0 & -d_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{d_{21}}{r_\theta^2} & -\omega_\theta^2 & -\frac{d_{22}}{r_\theta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \dot{h} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{4V^2}{\mu\pi c^2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{8V^2}{\mu\pi r_\theta^2 c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_l \\ C_{mea} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Onde  $\omega_h$  e  $\omega_\theta$  são, respectivamente as frequências naturais de translação e rotação,  $c$  é a corda do aerofólio,  $X_\theta$  é a distância entre o CG e o eixo elástico do aerofólio,  $r_\theta$  é o raio de giro,  $V$  é a velocidade do vento e  $\mu$  representa a razão de massa do aerofólio,  $\mu_e$  a razão de massa entre o aparato experimental e o aerofólio e a matriz  $d_{ij}$  (matriz de Rayleigh) mostra os termos de amortecimento.

Já a equação de saída (4.2) fornece o ângulo  $\alpha(t)$  e sua derivada adimensional  $q(t)$ , tendo como entradas os valores de  $\theta(t)$ ,  $h(t)$  e suas derivadas, todos obtidos na equação de entrada estrutural

$$\begin{cases} \alpha(t) = \theta(t) + \arctan \left[ \frac{\dot{h}(t)}{V} \right] \\ q(t) = \frac{c}{V} \dot{\theta}(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

## 4.2 EQUAÇÕES AERODINÂMICA LINEAR

Assim como as equações estruturais, as equações aerodinâmicas são divididas em equações de entrada e de saída, para a parte linear as entradas são  $\alpha$  e  $q$  (saídas das equações estruturais) e as saídas resultantes são definidas por  $C_n^p$  e  $C_m^p$ , formando assim a equação 4.3, definida por um espaço de estados com 8 variáveis de estado.

$$\dot{x} = [A]x + [B] \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Sendo que as matrizes  $\dot{x}$ ,  $A$ ,  $x$  e  $B$  estão simplificadas para facilitação da leitura e são representadas pelas equações 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \cdots & \dot{x}_7 & \dot{x}_8 \end{bmatrix}^T \quad (4.4)$$

$$A = \text{diag} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{77} & a_{88} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_7 & x_8 \end{bmatrix}^T \quad (4.6)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

As equações de saída geram o coeficiente de força normal ( $C_n^p$ ) e o coeficiente de momento aerodinâmico a 1/4 da corda ( $C_m^p$ ), que compõe, junto com outros coeficientes de momento e força normal (não lineares), os valores de  $C_{mea}$  e  $C_l$ . Esse conjunto forma um sistema linear com 8 equações, representadas através da equação 4.8.

$$\begin{bmatrix} C_n^p \\ C_m^p \end{bmatrix} = [C]x + D \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Onde as matrizes  $C$  e  $D$  são definidas pelas equações 4.9 e 4.10

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & c_{25} & c_{26} & c_{27} & c_{28} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{4}{M} & \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{M} & -\frac{7}{12M} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

### 4.3 EQUAÇÕES AERODINÂMICA NÃO LINEAR

As equações não lineares utilizam como entradas as saídas das equações lineares ( $C_n^p$  e  $C_m^p$ ) e são divididos em partes, a primeira (4.11 e 4.12) representa o efeito de um atraso na distribuição de pressão na superfície do aerofólio, já a segunda (4.13, 4.14, 4.15 e 4.16) está relacionada a separação do escoamento no aerofólio e utiliza as saídas das equações 4.12 e 4.2 como entradas. Ainda existe uma terceira parte (4.17 e 4.18), que representa o coeficiente de força normal durante a fase de desprendimento de vórtices, período em que ocorrem vórtices de ar no intradorso do bordo de fuga e extradorso do bordo de ataque, esses eventos mudam as propriedades de força normal aplicada sobre o aerofólio.

Como essas equações representam não linearidades ao longo do tempo, algumas de suas propriedades variam também de acordo com o instante de tempo, é o caso de  $f(\alpha)$ ,  $T_f$ ,  $T_v$ ,  $f''$ ,  $f_m$ ,  $\tau_v$  e  $T_v$ . As equações não lineares estão expostas a seguir.

$$\dot{x}_9 = \frac{2V - x_9 + C_n^p(t)}{c} \frac{1}{T_p} \quad (4.11)$$

$$x_9 = C_n' \quad (4.12)$$

$$\dot{x}_{10} = \frac{2V - x_{10} + f\left(\frac{C_n'}{C_{n\alpha}}\right)}{c} \frac{1}{T_f} \quad (4.13)$$

$$x_{10} = f''(t) \quad (4.14)$$

$$\dot{x}_{11} = \frac{2V - x_{11} + f(\alpha)}{c} \frac{1}{T_{f0}} \quad (4.15)$$

$$x_{11} = f_m \quad (4.16)$$

$$\dot{x}_{12} = \frac{2V - x_{12} + \dot{C}_v}{c} \frac{1}{T_v} \quad (4.17)$$

$$x_{12} = C_n^v(t) \quad (4.18)$$

Onde o termos  $T_p$  e  $C'_n$ , significam, respectivamente, uma constante de tempo para representar o atraso e um coeficiente de força normal. Os termos  $T_{f0}$ ,  $T_f$  e  $T_v$  também são constantes de tempo relacionadas ao atraso da separação do escoamento, sendo a segunda e a terceira modificadas durante a fase do vórtice. Os termos  $f(C'_n)$ ,  $f(\alpha)$  e  $\dot{C}_v$ , são descritos nas equações 4.19 e 4.20.

$$\begin{cases} f(\hat{\alpha}) = 1 - 0.3e^{-\frac{|\hat{\alpha}| - \alpha_1}{s_1}} & \text{se } |\hat{\alpha}| \leq \alpha_1 \\ f(\hat{\alpha}) = 0.04 - 0.66e^{-\frac{\alpha_1 - |\hat{\alpha}|}{s_2}} & \text{se } |\hat{\alpha}| > \alpha_1 \end{cases} \quad (4.19)$$

Sendo  $\hat{\alpha} = \alpha$  ou  $f(\frac{C'_n}{C_{n\alpha}})$ .

$$\begin{cases} \dot{C}_v = C_n^c [1 - 0.25(1 + \sqrt{f''})^2] & \text{se } \tau_v \leq 2T_v l \\ \dot{C}_v = 0 & \text{se } \tau_v > 2T_v l \end{cases} \quad (4.20)$$

Onde  $\dot{C}_v$  é a derivada no tempo adimensional de  $C_v$ .

Os termos obtidos nas equações não lineares são utilizados para obter coeficientes de momento e força normal (equações 4.21) que são agrupados com o restante dos coeficientes de acordo com as equações 4.22 e 4.23 para a obtenção dos coeficientes totais de momento a 1/4 da corda e sustentação ( $C_{mea}$  e  $C_l$ ).

$$\begin{cases} C_n^f(t) = C_n^c(t) \frac{1 + \sqrt{f''}}{2} \\ C_m^f(t) = \{K_0 + K_1(1 - \hat{f}) + K_2 \text{sen}(\pi \hat{f}^2)\} \\ C_n^f(t) = \eta C'_{n\alpha} \sqrt{f''} \frac{C_n^c}{C_{n\alpha}} \\ C_m^v(t) = -0.25 \left[ 1 - \cos \frac{\pi \tau_v}{T_v l} \right] C_n^v \end{cases} \quad (4.21)$$

$$C_{mea}(t) = C_m^p(t) + C_m^f(t) + C_m^v(t) + [C_n^p(t) - C_n^c(t) + C_n^f(t) + C_n^v(t)](X_{ea} - X_{ac}) \quad (4.22)$$

$$C_l(t) = [C_n^p(t) - C_n^c(t) + C_n^f(t) + C_n^v(t)] \cos \alpha(t) - C_t^f(t) \text{sen} \alpha(t) \quad (4.23)$$

A partir do momento em que  $C_{mea}$  e  $C_l$  são obtidos é adicionado um passo de tempo ao sistema e recalculado os valores para esse instante seguinte, método que segue até o final do tempo de simulação.

## 5 MODELO DE EDWARDS

O modelo de Edwards utiliza também, segundo [Vagner Sousa 2016], uma matriz de espaço de estados para a parte estrutural, que pode ser vista na equação 5.1, e duas equações (5.3 e 5.2), para a sustentação e o momento aerodinâmico, onde assim como no caso de Beddoes-Leishman a parte estrutural utiliza a saída aerodinâmica como entrada e vice-versa.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \ddot{x}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ K & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ \dot{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$M_\alpha = -\rho b^2 \left[ \pi \left( \frac{1}{2} - a \right) U b \dot{\alpha} + \pi b^2 \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} - \dot{\alpha} \pi b \ddot{h} \right] + 2\rho U b^2 \pi \left( a + \frac{1}{2} \right) C_{(K)} f(t) \quad (5.2)$$

$$L = -\rho b^2 (U \pi \dot{\alpha} + \pi \ddot{h} - \pi b a \ddot{\alpha}) - 2\pi \rho U b C_{(K)} f(t) \quad (5.3)$$

Onde  $x_s$  é uma matriz 2x1 que contém o ângulo de ataque  $\alpha$  e o parâmetro de translação  $\bar{h}$ . O parâmetro  $F$  também é uma matriz 2x1 que contém os valores, respectivamente, de momento e sustentação aerodinâmicos. Já os termos M, K e B representam a massa, rigidez e amortecimento sem as contribuições não circulatorias do aerofólio.

No caso do modelo de Edwards, entretanto, é possível acoplar as equações estrutural e aerodinâmica, onde com algumas manipulações descritas em [Vagner Sousa 2016] chega-se ao seguinte espaço de estados acoplado (5.4).

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{M} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \ddot{x}_s \\ \dot{x}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -\tilde{K} & -\tilde{B} & \tilde{D} \\ \tilde{E}_1 & \tilde{E}_2 & \tilde{F}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ \dot{x}_s \\ x_a \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Onde os termos  $\tilde{E}_1$ ,  $\tilde{E}_2$ , representam equações de primeira ordem do modelo aerodinâmico e  $\tilde{D}$  um tempo adimensional. Esses termos são demonstrados nas equações 5.5, 5.6, e 5.7.

$$\tilde{E}_1 = \frac{1}{\omega_h} \left( \frac{U}{b} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ S_1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\tilde{E}_2 = \frac{1}{\omega_h} \begin{bmatrix} 0 \\ S_2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\tilde{D} = \frac{1}{\omega_h^2} D \quad (5.7)$$

Os termos  $\tilde{M}$  (termo de massa),  $\tilde{K}$  (termo de rigidez) e  $\tilde{B}$  (termo de amortecimento) estão expressos nas equações 5.8, 5.9 e 5.10

$$\tilde{M} = M - \frac{\rho b^2}{m} M_{nc} \quad (5.8)$$

$$\tilde{K} = K - \frac{\rho b^2}{m} \left( \frac{U}{\omega_h b} \right)^2 (K_{nc} + \frac{1}{2} R S_1) \quad (5.9)$$

$$\tilde{B} = B - \frac{\rho b^2}{m} \left( \frac{U}{\omega_h b} \right) (B_{nc} + \frac{1}{2} R S_2) \quad (5.10)$$

Os termos  $M_{nc}$ ,  $K_{nc}$  e  $B_{nc}$  representam contribuições não circulatorias da massa, rigidez e amortecimento respectivamente. Os parâmetros  $R$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  são vetores relacionados a parte circulatoria do sistema, a parte que corresponde aos termos não circulatorios pode ser vista nas equações 5.11, 5.12, 5.13.

$$M_{nc} = \begin{bmatrix} -\pi(\frac{1}{8} + a^2) & -2T_{13} & \pi a \\ -2T_{13} & \frac{T_3}{\pi} & T_1 \\ \pi a & T_1 & -\pi \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$K_{nc} = \begin{bmatrix} 0 & -(T_{10} + T_4) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\pi}(T_4 T_{10} - T_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$M_{nc} = \begin{bmatrix} \pi(a - \frac{1}{2}) & 2p + (\frac{1}{2} - a)T_4 & 0 \\ -p + T_1 + \frac{T_4}{2} & \frac{T_{11}T_4}{2\pi} & 0 \\ -\pi & T_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Os vetores correspondentes ao sistema circulatorio são mostradas nas equações 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17

$$R = \begin{bmatrix} 2\pi(a + \frac{1}{2}) \\ -T_{12} \\ -2\pi \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{T_{10}}{\pi} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2} - a) & \frac{T_{11}}{2\pi} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 0.006825(\frac{U}{b})^2 & 0.10805(\frac{U}{b}) \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Nas equações aerodinâmicas (5.2 e 5.3) existe a presença do fator  $C_{(K)}f(t)$ , que é composto pela multiplicação da função de Theodorsen ( $C_{(K)}$ ) pelo termo  $f(t)$ , que é obtido através da equação 5.18.

$$f(t) = U\alpha + \dot{h} + b(\frac{1}{2} - a)\dot{\alpha} \quad (5.18)$$

Entretanto, através de manipulações e aproximações [Vagner Sousa 2016] a multiplicação  $C_{(K)}f(t)$  pode ser substituída pela equação 5.19.

$$C_{(K)}f(t) \approx (C_0 + C_1 + C_2)f(t) + C_3C_4(C_1 + C_2)x_{a1} + (C_1C_3 + C_2C_4)x_{a2} \quad (5.19)$$

Onde são incluídos os termos  $x_{a1}$  e  $x_{a2}$ , que juntos compõem uma matriz 2x1 que faz parte da equação 5.4 ( $x_a = [x_{a1} \ x_{a2}]^T$ ), além disso os termos da equação 5.19 que multiplicam esses dois parâmetros são representados na forma adimensional na equação 5.4 através do parâmetro  $\tilde{F}_p$ , demonstrado na equação 5.20

$$\tilde{F}_p = \frac{1}{\omega_h^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.01365(\frac{U}{b})^2 & -0.3455(\frac{U}{b}) \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

As constantes  $T_1$  a  $T_{14}$  são conhecidas como constantes de Theodorsen e serão explicadas no capítulo sobre parâmetros.

## 6 PARÂMETROS

Os parâmetros utilizados nos modelos serão apresentados separadamente nesse capítulo, porque muitos dos parâmetros servem para ambos os modelos, entretanto alguns são exclusivos de Beddoes-Leishman ou Edwards e serão mostrados em subseções desse capítulo.

### 6.1 PARÂMETROS ESTRUTURAIS DO AEROFÓLIO

Os parâmetros estruturais se referem a ambos os modelos e representam a parte física do aerofólio, sem relação com o escoamento. Podem ser vistos na tabela 1.

<b>PARÂMETROS ESTRUTURAIS</b>		
<b>Parâmetro</b>	<b>Abreviação</b>	<b>Valor</b>
Corda	$c$	0.25 m
Semicorda	$b$	0.125 m
Massa do aerofólio	$m_a$	1.5 kg
Massa total do aparato	$m_t$	3.6733 kg
Distância eixo elástico - centro de gravidade	$X_\theta$	0.66
Raio de giro	$r_\theta$	0.7303
Amortecimento de translação	$d_{hh}$	5.49
Amortecimento acoplado translação - rotação	$d_{ah}$	10.03
Amortecimento acoplado translação - rotação	$d_{ha}$	10.03
Amortecimento de rotação	$d_{aa}$	32.48
Frequência de translação	$\omega_h$	34.0676 rad/s
Frequência de rotação	$\omega_\theta$	24.85 rad/s

Tabela 1 – Parâmetros da equação estrutural - Fonte: [Santos e Pereira 2017]

### 6.2 PARÂMETROS AERODINÂMICA

Os parâmetros abaixo (2) se referem apenas a parte de aerodinâmica de ambos os modelos.

PARÂMETROS AERODINÂMICA		
Parâmetro	Abreviação	Valor
Velocidade	$V$	Variável(m/s)
Velocidade crítica	$V_{cr}$	14.49 m/s
Velocidade do som	$V_{som}$	343 m/s
-	$T_i$	0.00072886 s
Posição do eixo elástico	$X_{ea}$	0.25
Posição do centro aerodinâmico	$X_{ac}$	0.25
Mach	$M$	$V/V_{som}$
Beta	$\beta$	$\sqrt{1 - M^2}$
$C_n\alpha$	$C_n\alpha$	$2 * \pi / \beta \text{ rad}^{-1}$

Tabela 2 – Parâmetros da parte aerodinâmica - Fonte: [Santos e Pereira 2017]

### 6.3 PARÂMETROS DO MODELO DE BEDDOES-LEISHMAN

Estes parâmetros são utilizados apenas para o modelo de Beddoes-Leishman, sendo que as tabelas 3 ,4 e 5 representam respectivamente os parâmetros a serem utilizados na equação 6.3, os parâmetros da parte linear da aerodinâmica e da parte não linear.

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{\alpha} = \frac{0.75}{((1 - M) + \pi * \beta^2 * M^2 * (A1 * b1 + A2 * b2))} \\ K_q = \frac{0.75}{((1 - M) + 2 * \pi * \beta^2 * M^2 * (A1 * b1 + A2 * b2))} \\ K_{\alpha M} = \frac{(A3 * b4 + A4 * b3)}{(b3 * b4 * (1 - M))} \\ K_{qM} = \frac{7}{(15 * (1 - M) + 3 * \pi * \beta * M^2 * b5)} \end{array} \right. \quad (6.1)$$

<b>PARÂMETROS BEDDOES-LEISHMAN</b>	
<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>
A1	0.3
A2	0.7
A3	1.5
A4	-0.5
A5	1.0
b1	0.14
b2	0.53
b3	0.25
b4	0.1
b5	0.5

Tabela 3 – Parâmetros Modelo de Beddoes-Leishman - Fonte: [Santos e Pereira 2017]

<b>COEFICIENTES MATRIZES AERODINÂMICA LINEAR</b>	
<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>
a11	$-b1 * \beta^2 * (2 * V/c)$
a22	$-b2 * \beta^2 * (2 * V/c)$
a33	$-1(K_{alpha} * T_i)$
a44	-0.5
a55	1.0
a66	0.14
a77	0.53
a88	0.25
c11	$C_{n\alpha} * \beta^2 * (2 * V/c) * A1 * b1$
c12	$C_{n\alpha} * \beta^2 * (2 * V/c) * A2 * b2$
c13	$4/M * (-1/(K_{\alpha} * T_i))$
c14	$1/M * (-1/(K_q * T_i))$
c21	$c11 * (0.25 - X_{ac})$
c22	$c12 * (0.25 - X_{ac})$
c25	$-(1/M) * (-A3/(b3 * K_{\alpha M} * T_i))$
c26	$-(1/M) * (-A4/(b4 * K_{\alpha M} * T_i))$
c27	$-(C_{n\alpha}/16) * b5 * \beta^2 * (2 * V/c)$
c28	$-(7/(12 * M)) * (-1/(K_{qM} * T_i))$

Tabela 4 – Parâmetros das matrizes(aerodinâmica linear) - Modelo de Beddoes-Leishman - Fonte: [Santos e Pereira 2017]

<b>PARÂMETROS AERODINÂMICA NÃO LINEAR</b>		
<b>Parâmetro</b>	<b>Abreviação</b>	<b>Valor</b>
Constante de tempo	$T_p$	1.7
Ângulo onde $f = 0.7$	$\alpha_{10}$	15.25 graus
Máxima variação de $\alpha_1$	$\delta_{\alpha_1}$	2.1 graus
Início de $T_f$	$T_{f0}$	3
Constante de tempo empírica	$T_{vl}$	7
Início de $T_v$	$T_{v0}$	6
Constante empírica	$k_0$	0.0025
Constante empírica	$k_1$	-0.135
Constante empírica	$k_2$	0.04
Porcentual da força medida experimentalmente	$\eta$	0.965
-	$m$	2
Coeficiente de momento para força normal 0	$C_{m0}$	0
$C_n$ na eminência do estol	$C_{n1}$	1.45

Tabela 5 – Parâmetros da parcela de aerodinâmica não linear - Modelo de Beddoes-Leishman - Fonte: [Santos e Pereira 2017]

#### 6.4 PARÂMETROS DO MODELO DE EDWARDS

O modelo de Edwards, assim como o de Beddoes-Leishman, apresenta alguns parâmetros exclusivos para a parte aerodinâmica, esses valores podem ser observados na tabela 6.

<b>PARÂMETROS MODELO DE EDWARDS</b>	
<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>
$C_0$	$2\mu_a$
$C_1$	$-0.33\mu_a$
$C_2$	$-0.67\mu_a$
$C_3$	$-0.0455$
$C_4$	$-0.3$
$\mu_a$	$\pi$
$T_1$	$-\frac{1}{3}\sqrt{1-c^2} + c\cos^{-1}c$
$T_3$	$-\left(\frac{1}{8} + c^2\right)(\cos^{-1}c)^2 + \frac{1}{4}\sqrt{1-c^2}$ $\cos^{-1}c(7 + 2c^2) - \frac{1}{8}c(1 - c^2(5c^2 + 4))$
$T_4$	$-\cos^{-1}c + c\sqrt{1-c^2}$
$T_5$	$-(1 - c^2) - (\cos^{-1}c)^2 + 2c\sqrt{1-c^2}\cos^{-1}c$
$T_7$	$-\left(\frac{1}{8} + c^2\right)\cos^{-1}c + \frac{1}{8}c\sqrt{1-c^2}(7 + 2c^2)$
$T_{10}$	$\sqrt{1-c^2} + \cos^{-1}c$
$T_{11}$	$\cos^{-1}c(1 - 2c) + \sqrt{1-c^2}(2 - c)$
$T_{12}$	$\sqrt{1-c^2}(2 + c) - \cos^{-1}c(2c + 1)$
$T_{13}$	$\frac{1}{2}[-T_7 - (c - a)T_1]$
$T_{14}$	$\frac{1}{16} + \frac{1}{2}ac$
$a$	$0$

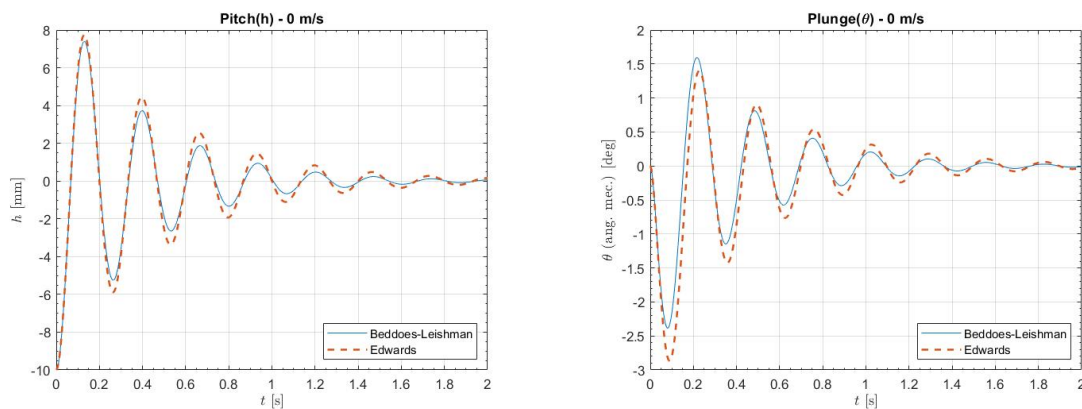
Tabela 6 – Parâmetros do modelo de Edwards - Fonte: [Vagner Sousa 2016]

## 7 RESULTADOS

Foram comparados os resultados obtidos através dos modelos de Edwards e de Beddoes-Leishman para velocidades menores, maiores e igual a Velocidade crítica (no caso dos parâmetros utilizados a  $V_{cr}$  é igual a 14,49 m/s). Também foi realizada a comparação entre o modelo de Beddoes-Leishman com a influência dos parâmetros não lineares e sem essa influência, os resultados obtidos podem ser verificados através dos gráficos de  $\theta$ ,  $h$  e  $\alpha$ , onde os dois primeiros representam deformações elásticas na seção do aerofólio e o terceiro o ângulo de ataque, determinado através da equação 4.2, que depende de  $\theta$  e  $h$ .

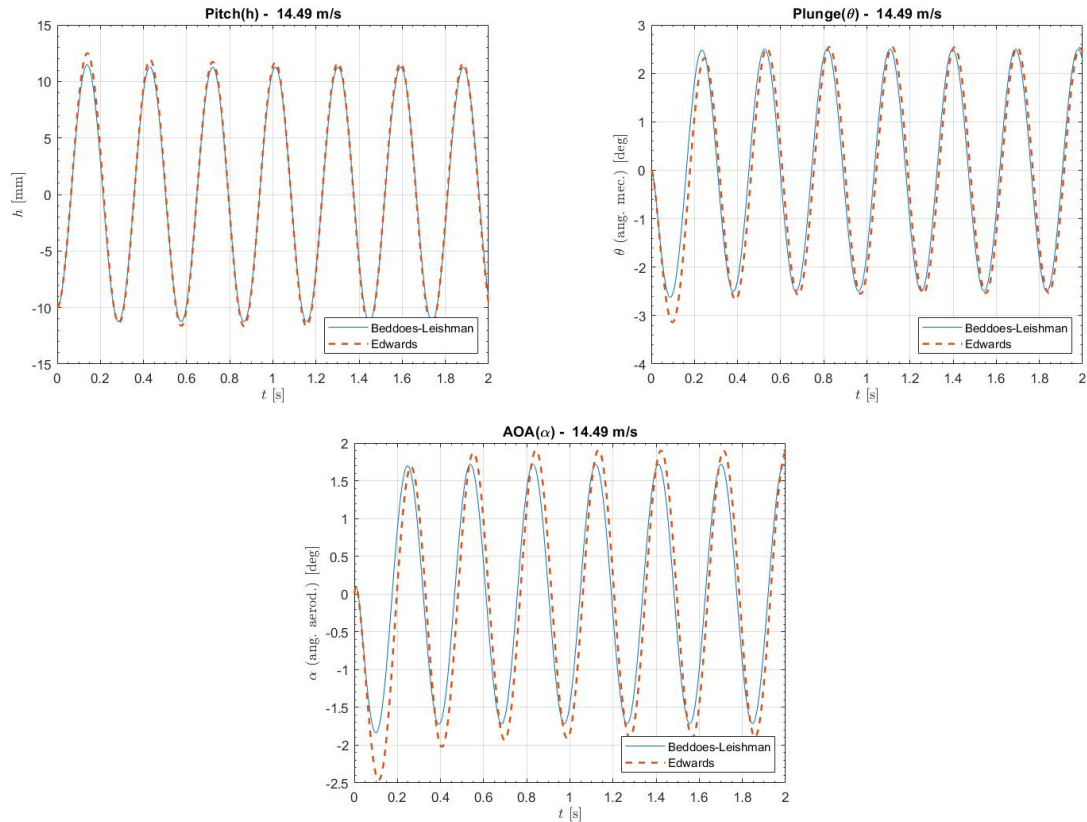
Na Figura 9 tem-se o resultado dos dois modelos sem a presença de escoamento, onde existe a estabilização para  $\theta$ ,  $h$  iguais a zero, nota-se que ambos os modelos fornecem resultados muito parecidos, mantendo a mesma frequência e amortecimento e tendo apenas uma pequena variação na amplitude.

Figura 9 –  $\theta$  e  $h$  sem escoamento



Fonte: Elaborado pelo autor

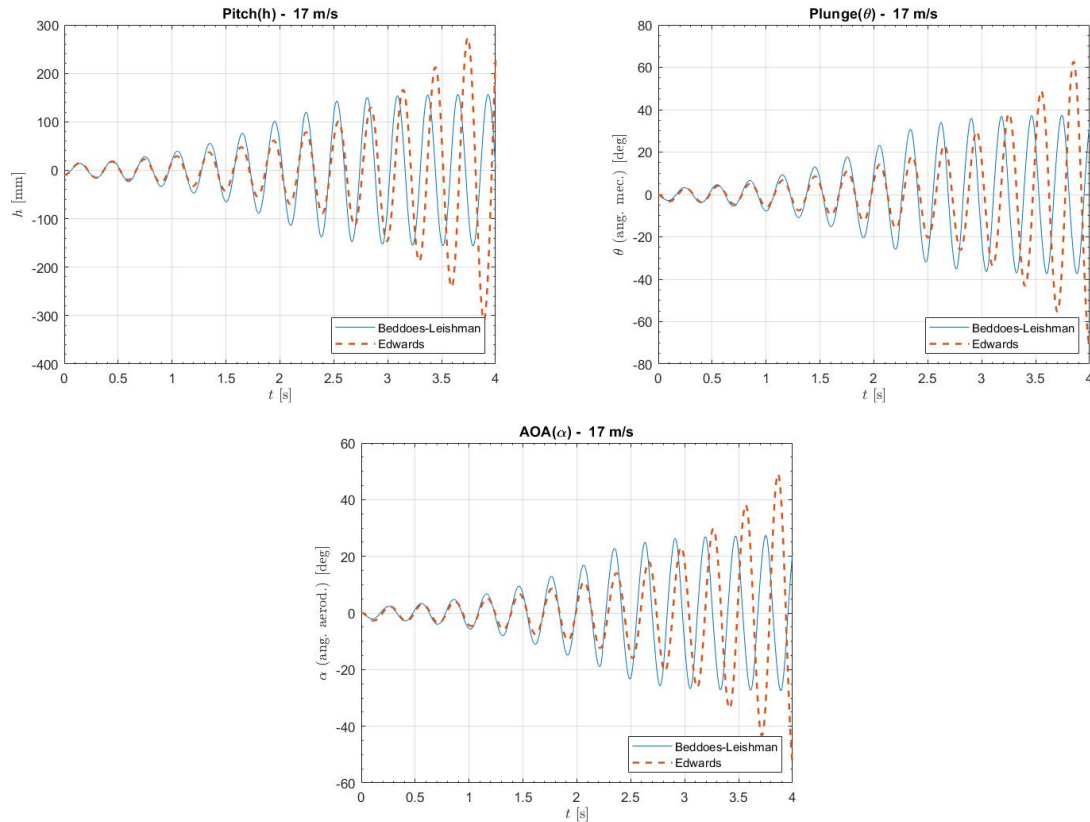
Na Figura 10 observa-se o resultado dos modelos para a velocidade crítica 14,49 m/s, onde as amplitudes do ângulo de ataque, rotação e translação se mantém constantes, assim como no caso sem escoamento os resultados são muito semelhantes, com poucas variações de amplitude, portanto ambos modelos ainda fornecem resultados confiáveis na velocidade crítica.

Figura 10 –  $\theta$ ,  $\alpha$  e  $h$  a 14,49 m/s

Fonte: Elaborado pelo autor

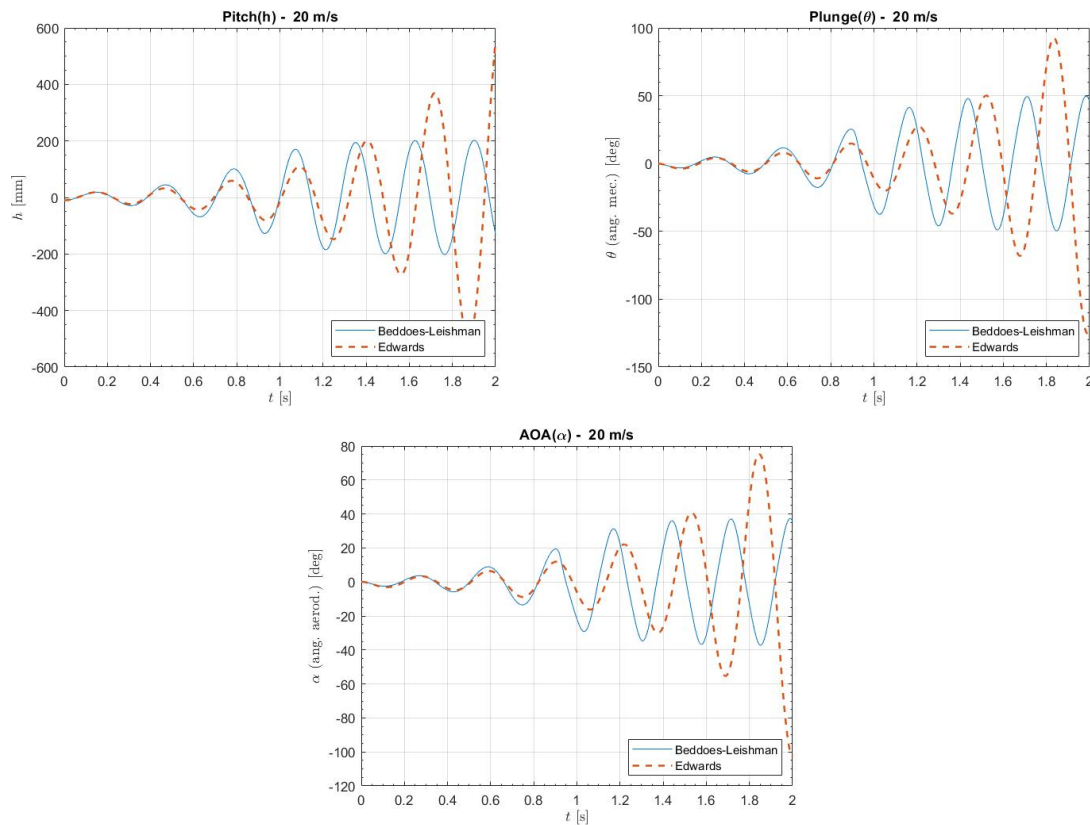
Para velocidades acima da velocidade de flutter, onde ocorre estol dinâmico nota-se a diferença entre os modelos, pode-se observar na Figura 11 e Figura 12 o impacto para as velocidades de 17 m/s e 20 m/s, onde o modelo de Beddoes-Leishman chega a um valor de amplitude limite, o que já era esperado, devido ao efeito das não linearidades geradas pelo estol dinâmico. Por outro lado, no modelo de Edwards, os movimentos seguem tendo aumento de amplitude mesmo após o ângulo que teoricamente ocorreria o estol dinâmico, o que também é esperado, uma vez que esse modelo não considera esse tipo de não linearidade.

As diferenças percebidas entre os dois modelos para altos ângulos de ataque é o que os diferencia e fica nítido que o modelo de Beddoes-Leishman se aproxima muito mais da realidade nesse caso. Também é notável que existe uma diferença na amplitude dos dois modelos antes de estol dinâmico, onde o modelo de Beddoes-Leishman possui ângulos maiores.

Figura 11 –  $\theta$ ,  $\alpha$  e  $h$  a 17 m/s

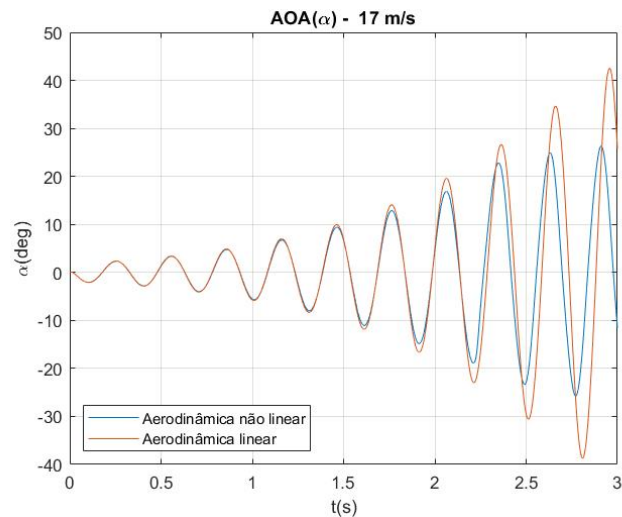
Fonte: Elaborado pelo autor

Outra diferença importante a se notar é a diferença entre o modelo de Beddoes-Leishman com e sem os parâmetros não lineares, essa diferença é muito importante, porque através dela pode-se diagnosticar o ângulo de ataque onde inicia-se o efeito do estol dinâmico, no caso dos parâmetros utilizados nesse trabalho, como pode ser visto na Figura 13, o estol dinâmico inicia em um ângulo de ataque de por volta de 10 graus, que é onde ocorre a primeira diferença de amplitude entre o caso linear e não linear, e tem seu efeito acentuado com o acréscimo desse ângulo.

Figura 12 –  $\theta$ ,  $\alpha$  e  $h$  a 20 m/s

Fonte: Elaborado pelo autor

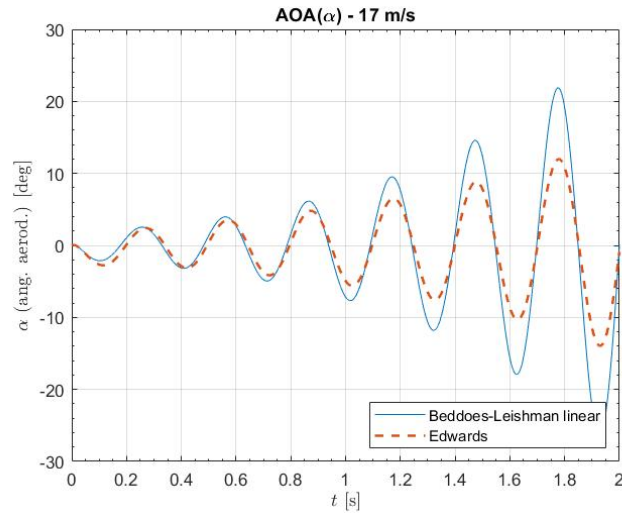
Figura 13 – Modelo de Beddoes-Leishman, linear x não linear



Fonte: Elaborado pelo autor

Percebe-se também que o modelo de Beddoes-Leishman, ao não se considerar as não linearidades aerodinâmicas, produz um resultado muito semelhante do modelo de Edwards, onde em ambos a amplitude diverge infinitamente, entretanto a amplitude no caso de Beddoes-Leishman diverge mais rapidamente, como pode ser visto na Figura 14

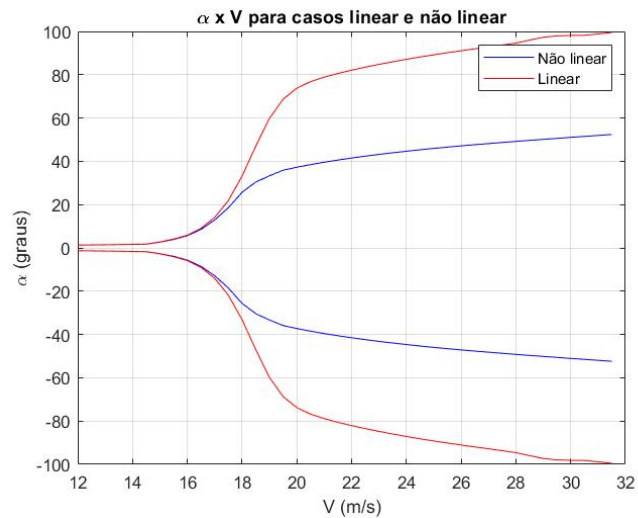
Figura 14 – Beddoes-Leishman linear x Edwards



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 15 mostra a grande diferença entre não considerar as não linearidades, visto que a partir da velocidade crítica ocorre um aumento muito grande na amplitude quando não se considera o efeito do estol dinâmico, deixando claro a necessidade de considerá-lo ao trabalhar nessa faixa de velocidades.

Figura 15 – Amplitude casos linear e não linear



Fonte: Elaborado pelo autor

## 8 CONCLUSÕES

O trabalho em questão realizou a comparação entre as simulações numéricas de um caso de flutter utilizando três metodologias diferentes, o modelo linear de Edwards e o modelo de Beddoes-Leishman em seus casos linear e não linear.

Para a comparação dos resultados foram gerados gráficos dos movimentos de translação, rotação e do ângulo de ataque de um aerofólio. Os gráficos foram feitos através de códigos do MATLAB que foram responsáveis por estimar as equações dos modelos através do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Foram comparadas três situações diferentes entre o método de Beddoes-Leishman e o método de Edwards, sendo elas a resposta do aerofólio para casos abaixo, acima e na velocidade crítica de flutter. O resultado das simulações mostrou que até para baixos ângulos de ataque todos os modelos demonstram relativamente bem a física do problema, entretanto para ângulos de ataque acima de 10 graus começa a existir uma diferença no resultado dos modelos, que aumenta com o acréscimo desse ângulo.

Sem escoamento ambos os modelos retornam para o ângulo estrutural neutro, possuindo a mesma amplitude e frequência. Com o escoamento a 14,49 m/s é encontrada a velocidade de flutter da seção típica do aerofólio, em ambos os casos tivemos a mesma amplitude e frequência. Para velocidade acima dessa velocidade crítica, entretanto, o resultado dos modelos difere quanto a amplitude no momento em que existem ângulos maiores que 10 graus, apesar de manter a frequência quase igual, temos os modelos lineares aumentando a amplitude infinitamente enquanto o modelo não linear vai até um valor máximo, quando entra em equilíbrio com amplitude constante.

Esses resultados já eram esperados e podem ser explicados pelo estol dinâmico, onde ocorrem diminuições das forças aerodinâmicas em ângulos elevados devido ao descolamento da camada limite, o que faz com que as forças estruturais se sobressaiam e tenda a se manter uma amplitude de movimento máxima e constante.

Os resultados são importantes para mostrar que o modelo de Beddoes-Leishman é capaz de simular de uma forma mais real o que acontece em um caso acima da velocidade de flutter, sendo assim mais indicado para simular eventos que ocorrerão nessa faixa de velocidades, enquanto o modelo de Edwards serve apenas para casos até a velocidade crítica.

## 9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho em questão demonstrou de forma gráfica a diferença entre os modelos de Beddoes-Leishman e de Edwards, chegando aos resultados esperados, entretanto podem ser realizadas novas pesquisas afim de entender melhor a magnitude dessa diferença e sua relação com o que ocorre em um caso real.

Para isso sugere-se que em futuros trabalhos relacionados a área sejam medidas as diferenças percentuais entre os modelos, de forma que se saiba até quanto acima da velocidade crítica é possível medir sem considerar a parte não linear e tendo um comprometimento máximo do resultado escolhido pelo autor.

Outro experimento interessante de ser realizado para validar os resultados aqui obtidos é a comparação com resultados experimentais, para isso é preciso construir um aerofólio com as características utilizadas nesse trabalho (ou realizar a simulação novamente com as características do aerofólio desejado), com isso pode-se ver a diferença dos resultados obtidos através de simulação para os reais e validar se o modelo de Beddoes-Leishman consegue de fato reproduzir o que ocorre durante um estol dinâmico.

## REFERÊNCIAS

- SANTOS, C.; MARQUES, F.; HAJJ, M The effects of structural and aerodynamic nonlinearities on the energy harvesting from airfoil stall-induced oscillations. **Journal of Vibration and Control**. United States, Vol. 25(14), p. 1991–2007, Fev. 2019.
- SANTOS, C.; PEREIRA, D; MARQUES, F.; On limit cycle oscillations of typical aeroelastic section with different preset angles of incidence at low airspeeds. **Journal of Fluids and Structures**. Amsterdã, Vol 74, p. 19–34, Jul. 2017.
- SANTOS, L.; MARQUES, F.; Nonlinear aeroelastic analysis of airfoil section under stall flutter oscillations and gust loads. **Journal of Fluids and Structures**. Amsterdã, Vol 102, Fev. 2021.
- SANTOS, L.; MARQUES, F.; Improvements on the Beddoes–Leishman dynamic stall model for low speed applications. **Journal of Fluids and Structures**. Amsterdã, Vol 106, Set. 2021.
- EDWARDS, J.; ASHLEY, H.; BREAKWELL, J; Unsteady Aerodynamic Modeling for Arbitrary Motions. **AIAA Journal**. Washington D.C, Vol 17, p.365–374, Abr. 1979.
- SOUSA, V.; Effects of superelastic shape memory springs on the aeroelastic behavior of a typical airfoil section: passive vibration attenuation and energy harvestig applications. São Carlos, Brasil
- CHANTHARASENAWONG, C; Nonlinear Aeroelastic Behaviour of Aerofoils Under Dynamic Stall. London, England
- LEISHMAN, J.; BEDDOES, T.; BREAKWELL, J; A Semi-Empirical Model for Dynamic Stall. **Journal of the american helicopter society**. Yeovil, England
- GAERTNER, Evan M., Modeling Dynamic Stall for a Free Vortex Wake Model of a Floating Offshore Wind Turbine (2014). Masters Theses. 85.