



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá

PALOMA VITÓRIA CAMARGO DOS SANTOS

Ideias sobre probabilidade de alunos do sexto ano do ensino fundamental: uma análise
por meio dos jogos *Travessia do Rio* e *Os passeios aleatórios da Mônica*

Guaratinguetá
2024

Paloma Vitória Camargo dos Santos

Ideias sobre probabilidade de alunos do sexto ano do ensino fundamental: uma análise
por meio dos jogos *Travessia do Rio* e *Os passeios aleatórios da Mônica*

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia e Ciências do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos de Souza

Guaratinguetá
2024

S237i	Santos, Paloma Vitória Camargo dos Ideias sobre probabilidade de alunos do sexto ano do ensino fundamental: uma análise por meio dos jogos <i>travessia do rio</i> e os <i>passeios aleatórios da Mônica</i> / Paloma Vitória Camargo dos Santos - Guaratinguetá, 2024. 58 f : il. Bibliografia: f. 55-58 Trabalho de Graduação em Matemática (Licenciatura) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2024. Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos de Souza 1. Jogos em educação matemática. 2. Estudantes do ensino fundamental. 3. Probabilidades. I. Título. CDU 51
-------	--

PALOMA VITÓRIA CAMARGO DOS SANTOS

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE
DO REQUISITO PARA OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
“GRADUADA EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA”

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM NOME DO CURSO

Profª Dra. Elisangela Pavanelo
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Antonio Carlos de Souza
Orientador/UNESP-FEG



Prof.ª Dra. Elisangela Pavanelo
UNESP-FEG



Prof. Me. Heron Gonzalez
UNESP-Rio Claro

Janeiro de 2024

A meu pai, Gilberto (*in memoriam*), cujo eterno apoio, incentivo e amor moldaram cada passo da minha jornada.

AGRADECIMENTOS

A minha mãe, Miria, e a meu pai, Gilberto (*in memoriam*), minhas maiores fontes de amor, que sempre apoiaram minhas decisões e que serão sempre minhas motivações na busca para ser uma pessoa melhor;

Ao meu orientador, Prof. Dr. Antonio Carlos de Souza, pelas correções, apoio, incentivo, compreensão e acima de tudo, pela amizade;

A meu namorado, Gabriel, por todo amor, compreensão, incentivo e inspiração nesses anos juntos;

A minhas irmãs Talita e Gabriela por todo incentivo e amor.

A minha amiga Ana Vitória, minha parceira de estudos, que compartilhou comigo a graduação, permanecendo sempre ao meu lado nos momentos mais desafiadores;

A minhas irmãs de república Luanny (Faixa Rosa), Isabelly (Ostra) e Livia (Google), parceiras de vida, de *rolês* e de caminhadas noturnas até a FEG;

A minha família, República Super Rep, por todo aprendizado;

A todos os demais amigos que fiz nesta jornada;

A todos que participaram desta pesquisa, pela colaboração e disposição durante o processo.

“Vemos que a teoria da probabilidade é no fundo somente o senso comum reduzido ao cálculo; ela nos faz apreciar com exatidão o que mentes pensantes percebem como que por instinto, muitas vezes sem se dar conta disso. (...) é extraordinário que esta ciência, que surgiu da análise dos jogos de azar, tenha se tornado o mais importante objeto de conhecimento humano. (...) As mais importantes questões da vida são na verdade, em sua grande maioria, apenas problemas de probabilidade.”;

Pierre-Simon Laplace.

RESUMO

O objetivo desta pesquisa, de cunho qualitativo e cuja coleta de dados foi realizada durante a atuação da pesquisadora como bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), foi analisar algumas ideias de estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Guaratinguetá perante situações que envolvem probabilidade. Para alcançar esse objetivo, foi explorada a utilização de dois jogos: *Travessia do Rio* e *Os passeios aleatórios da Mônica*. Os resultados da pesquisa evidenciaram que as crianças demonstraram ideias intuitivas da probabilidade, associando a aleatoriedade à sorte ou ao azar, e apresentaram uma melhor compreensão na identificação de eventos impossíveis. Notou-se, ainda, que em relação ao espaço amostral, a maior dificuldade observada foi a falta de compreensão de que eventos, como $3 + 5$ e $5 + 3$, são possibilidades distintas. Poucas crianças refletiram conscientemente sobre o espaço amostral para estabelecer comparações de probabilidades, sendo as justificativas frequentemente baseadas na experiência recente durante o jogo. Concluiu-se, portanto, que o trabalho com estes jogos favoreceu o surgimento natural de ideias intuitivas. No entanto, destaca-se a importância de uma instrução direcionada à construção de conhecimentos formais de probabilidade.

PALAVRAS-CHAVE: Probabilidade; Ensino Fundamental; Educação Matemática; Educação Estatística.

ABSTRACT

The objective of this research, of a qualitative nature and whose data collection was carried out during the researcher's work as a scholarship holder of the Institutional Teaching Initiation Scholarship Program (PIBID), was to analyze some ideas from students in the 6th year of Elementary School at a school of Guaratinguetá in situations involving probability. To achieve this objective, the use of two games was explored: *Travessia do Rio* e *Os passeios aleatórios da Mônica*. The research results showed that children demonstrated intuitive ideas about probability, associating randomness with luck or bad luck, and showed a better understanding in identifying impossible events. It was also noted that in relation to the sample space, the greatest difficulty observed was the lack of understanding that events, such as $3 + 5$ and $5 + 3$, are distinct possibilities. Few children consciously reflected on the sample space to establish probability comparisons, with justifications often being based on recent experience during the game. It was concluded, therefore, that working with these games favored the natural emergence of intuitive ideas. However, the importance of instruction aimed at building formal knowledge of probability stands out.

KEYWORDS: Probability; Elementary School; Mathematics Education; Statistical Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Jogo <i>Travessia do Rio</i>	25
Figura 2 – Ficha de Reflexão: Mudanças no Jogo.....	26
Figura 3 – Questionário: Explorando Ideias Probabilísticas dos Alunos.....	27
Figura 4 – Mapa dos <i>Passeios aleatórios da Mônica</i>	28
Figura 5 – Questionário: Investigando as Ideias Probabilísticas dos Estudantes.....	29
Figura 6 – Questionário: Explorando as Ideias Probabilísticas dos Estudantes pós-experimento.....	30

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Conteúdo proposto para o ensino de probabilidade nos PCN para o Ensino Fundamental.....	17
Quadro 2 – Objetos de conhecimento e habilidade propostas para o ensino de Probabilidade na BNCC Ensino Fundamental anos iniciais.....	18
Quadro 3 – Objetos de conhecimento e habilidade propostos para o ensino de Probabilidade na BNCC Ensino Fundamental sexto ano.....	20
Quadro 4 – Perguntas norteadoras do jogo <i>Travessia do Rio</i>	30
Quadro 5 – Perguntas norteadoras do jogo <i>Os passeios aleatórios da Mônica</i>	31
Quadro 6 – Respostas para o questionário 1.....	33
Quadro 7 – Visão geral das respostas apresentadas no Questionário 2 (jogo <i>Os passeios aleatórios da Mônica</i>).....	34
Quadro 8 – Respostas do questionário 2 (jogo <i>Os passeios aleatórios da Mônica</i>).....	34
Quadro 9 – Visão geral das respostas apresentadas no Questionário 3 (jogo <i>Os passeios aleatórios da Mônica</i>).....	36
Quadro 10 – Resposta do questionário 3 (jogo <i>Os passeios aleatórios da Mônica</i>).....	36
Quadro 11 – Visão geral das respostas apresentadas no Questionário 4 (jogo <i>Os passeios aleatórios da Mônica</i>).....	37
Quadro 12 – Respostas do questionário 4 (jogo <i>Os passeios aleatórios da Mônica</i>).....	38
Quadro 13 – Visão geral das respostas apresentadas no Questionário 5.....	39
Quadro 14 – Respostas do questionário 5 (jogo <i>Os passeios aleatórios da Mônica</i>).....	39
Quadro 15 – Respostas à Ficha de Reflexão sobre Mudanças no Jogo (jogo <i>Travessia do Rio</i>).....	41
Quadro 16 – Visão geral das respostas apresentadas no Questionário 1 (jogo <i>Travessia do Rio</i>).....	43
Quadro 17 – Respostas do questionário 1 (jogo <i>Travessia do Rio</i>).....	43
Quadro 18 – Respostas do questionário 2 (jogo <i>Travessia do Rio</i>).....	45
Quadro 19 – Respostas do questionário 3 (jogo <i>Travessia do Rio</i>).....	45

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
2	PROBABILIDADE.....	13
2.1	Origens históricas e desenvolvimento inicial da Teoria da Probabilidade.....	13
2.2	Definições e Conceitos Fundamentais.....	15
2.3	A mudança do ensino de Probabilidade no Brasil: perspectiva dos Documentos Curriculares.....	17
3	PESQUISA QUALITATIVA.....	21
4	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	24
4.1	Jogos desenvolvidos.....	24
4.1.1	Jogo <i>Travessia do Rio</i>	24
4.1.2	Jogo <i>Os Passeios Aleatórios da Mônica</i>	27
4.2	Síntese das perguntas norteadoras dos jogos aplicados.....	30
4.3	Registro.....	31
5	ANÁLISE.....	33
5.1	Análise do jogo <i>Os passeios aleatórios da Mônica</i>	33
5.2	Análise do jogo <i>Travessia do Rio</i>	41
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	48
	REFERÊNCIAS.....	50

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática, em especial, o tópico de Probabilidade, desempenha um papel significativo no desenvolvimento cognitivo (Magalhães Júnior *et al* 2023) e na formação crítica dos alunos no Ensino Fundamental. Segundo Bennett (2003), a aprendizagem da probabilidade contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico, o que permite que os indivíduos entendam e comuniquem uma variedade de informações em diversas situações do dia a dia que envolvem eventos aleatórios, casualidades e incertezas.

O ensino de Probabilidade, no Brasil, era indicado desde 1997 pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – (Brasil, 1997), e, com a implementação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC – (Brasil, 2018), a Probabilidade, juntamente com a Estatística, teve sua importância reafirmada e passou ser um dos cinco eixos temáticos que devem ser trabalhados também nos anos iniciais (Conti; Vilas Bôas, 2019).

Kian (2019) expõe que a formação de conceitos de natureza probabilística deve ser estimulada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Dessa forma, o autor aborda que a exploração do conceito de probabilidade nesse contexto de aprendizagem visa aprimorar a compreensão de que nem todos os eventos podem ser previstos com certeza. Nesse sentido, a introdução à probabilidade na fase inicial da educação deve se concentrar em promover a percepção de incerteza, de modo a permitir que os estudantes reconheçam a existência de eventos certos, eventos impossíveis e eventos possíveis (Kian, 2019).

A aprendizagem sólida em probabilidade é de extrema importância, não apenas devido às diretrizes estabelecidas pela BNCC, mas também devido à natureza progressiva da educação. À medida que os estudantes avançam em sua trajetória educacional, Brasil (2018) estipula uma progressão de habilidades relacionadas à probabilidade ao longo dos anos escolares. Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, essa progressão tem início com a introdução ao conceito de acaso, que envolve a classificação de eventos em categorias como 'acontecerá com certeza', 'talvez aconteça' e 'é impossível acontecer'. Essa evolução não se limita apenas ao atendimento às diretrizes da BNCC; ela também se estende ao desenvolvimento da capacidade de analisar situações do cotidiano, compreender o espaço amostral e avaliar as chances de eventos aleatórios nos anos subsequentes. Dessa forma, a ênfase na progressão da probabilidade é crucial, tanto pela conformidade com a BNCC, quanto pela expectativa natural de evolução do aluno ao longo de sua educação.

No quinto ano, a BNCC desafia os alunos a apresentar todos os possíveis resultados de experimentos aleatórios e a estimar suas probabilidades. Consequentemente, o sexto ano, que

marca o início dos anos finais do Ensino Fundamental, representa um ponto crucial nessa trajetória de aprendizado, pois exige que os alunos sejam capazes de aplicar esses conceitos estudados em contextos mais complexos.

Dentro dessa circunstância, a presente pesquisa tem por objetivo analisar as ideias de estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Guaratinguetá perante situações envolvendo probabilidade. Para tanto, foi explorada a aplicação de dois jogos. A seleção dos jogos se deu com base no foco particular na aleatoriedade, no espaço amostral e na comparação de probabilidades.

Segundo Carneiro (2015), os jogos servem como instrumentos pedagógicos e, desde a Antiguidade, possuem uma função que vai além do entretenimento, servindo como ferramenta de aprendizagem. Segundo Santos, Sousa e Araújo (2015), os jogos têm se destacado como uma ferramenta valiosa no apoio à avaliação prática, uma vez que proporcionam a criação de um ambiente agradável para a demonstração dos conhecimentos adquiridos.

Vale citar também que os fundamentos deste estudo estão baseados nas exigências cognitivas apontadas por Bryant e Nunes (2012). Esses autores defendem que a compreensão da probabilidade requer o desenvolvimento de quatro habilidades cognitivas essenciais:

1. o entendimento da aleatoriedade.
2. a formação e categorização do espaço amostral.
3. a comparação e quantificação de probabilidades.
4. o entendimento de correlações.

Assim, neste estudo, optou-se por explorar as três primeiras demandas identificadas por esses autores, visando analisar as ideias dos estudantes em relação à probabilidade, especialmente no que diz respeito à aleatoriedade, ao espaço amostral e à comparação de probabilidades em contextos de jogos.

Em relação a sua estrutura, o texto está dividido, além desta introdução, em 5 seções. Na seção 2 são abordados conceitos fundamentais sobre Probabilidade, estudos relacionados ao seu ensino e uma breve análise do currículo de Probabilidade no Brasil. A seção sobre Pesquisa Qualitativa detalha abordagens específicas sobre esse tipo de pesquisa. Na seção de Procedimentos Metodológicos, é descrita a abordagem empregada para conduzir a pesquisa, englobando a especificação do público-alvo, a escolha dos jogos e seu desenvolvimento, assim como o processo de aplicação. A seguir, na seção de Análise de Dados, são apresentados os métodos utilizados para analisar os resultados obtidos. Por fim, na seção de Considerações finais, são apresentadas as discussões e conclusões referentes às ideias

probabilísticas de crianças do sexto ano do Ensino Fundamental. Por último, serão apresentadas as referências utilizadas no estudo.

2 PROBABILIDADE

A teoria da probabilidade desempenha um papel fundamental, tanto na Matemática, quanto em diversas áreas práticas do conhecimento. De acordo com Bennett (2003), o processo de aprendizagem da probabilidade desempenha um papel crucial no fomento do pensamento crítico e isso capacita os indivíduos a compreenderem e comunicarem diversos tipos de informações presentes nas mais variadas situações do cotidiano, nas quais fenômenos aleatórios, acaso e incerteza desempenham papéis significativos. Sendo assim, essa seção será dedicada a compreender alicerces históricos, os conceitos essenciais e as mudanças do Ensino da Probabilidade no contexto educacional brasileiro.

Iniciamos nossa exploração investigando as raízes da teoria da probabilidade, voltando ao século XV e acompanhando seu desenvolvimento ao longo da história. Em seguida, examinaremos como os pioneiros, Jerónimo Cardano, Pascal e Fermat, contribuíram para a formulação e consolidação dos fundamentos da probabilidade.

Posteriormente, a pesquisa avançará para as definições da probabilidade, examinando como diferentes autores conceituam essa teoria fundamental.

Por fim, documentos curriculares no Brasil serão analisados, sobretudo a introdução oficial da probabilidade no contexto educacional. Logo, será possível observar como os currículos foram modificados ao longo dos anos, refletindo a reafirmação da importância atribuída ao ensino da probabilidade nos diferentes ciclos do Ensino Fundamental.

2.1 Origens históricas e desenvolvimento inicial da Teoria da Probabilidade

A teoria da Probabilidade, segundo Lopes e Meirelles (2005), começou a ser reconhecida como um ramo da Matemática por volta do século XV, embora suas origens tenham se iniciado como uma ciência empírica que se desenvolveu muito antes dessa época, especialmente nos contextos de jogos e apostas.

Lopes e Meirelles (2005) acrescentam ainda que os primeiros estudos sobre probabilidade tiveram início no século XVI com Jerónimo Cardano (1501-1576), um matemático e jogador italiano. Autor do "Liber de Ludo Aleae" (O livro dos jogos de Azar), possivelmente o primeiro sobre probabilidades. Os autores apresentam também que Cardano explorou jogos e possibilidades, sendo pioneiro na aplicação de técnicas combinatórias para calcular as possibilidades favoráveis em eventos aleatórios, abordando o fato de que ele também observou o conceito probabilístico de um dado honesto, estabelecendo que as

chances de obter um, três ou cinco eram as mesmas de obter dois, quatro ou seis. Segundo Warsi (2020, p. 162), foi Cardano que “produziu análises profundas de lances de dados”, devido ao seu envolvimento com jogos.

Apesar das significativas contribuições mencionadas, muitos autores, segundo Lopes e Meirelles (2005), se referem a Pascal (1623/1662) e Fermat (1601/1665) como os fundadores do Cálculo das Probabilidades. A origem dessa teoria é atribuída às correspondências trocadas entre eles, nas quais, ambos debatiam a busca por soluções para os problemas relacionados aos jogos de azar, apresentados, em 1653, por Chevalier de Méré, conhecido como filósofo do jogo, que também se interessou pelo uso da Matemática para determinar as apostas nos jogos de azar. Em outras palavras, os desafios que motivaram as investigações de Fermat e Pascal no campo da probabilidade foram inicialmente apresentados por Antoine Gombaud, que, sustentando-se através do jogo, autodenominava-se Cavaleiro de Méré (Silva, 2020).

Lopes e Meirelles (2005) destacam também que o avanço da teoria da Probabilidade experimentou um significativo impulso em 1657, com a publicação do primeiro tratado formal sobre probabilidades. Este foi elaborado pelo físico e astrônomo holandês Christian Huygens. Posteriormente, apenas em 1713, o primeiro livro integralmente dedicado à teoria das probabilidades foi publicado postumamente por Jakob Bernoulli (1654-1705). Uma parte relevante desse trabalho reedita as contribuições de Huygens sobre jogos de azar, enquanto a outra se dedica a permutações e combinações, culminando no teorema de Bernoulli sobre as distribuições binomiais.

Nesse contexto, Vasconcelos, Vasconcelos e Chaquiam (2022) abordam que, baseado na distribuição binomial de Jacob Bernoulli, De Moivre descobriu o desvio médio da distribuição binomial, conforme registrado em "Miscellanea Analytica". De acordo com Boyer (1974, p. 312), "De Moivre aparentemente foi o primeiro a trabalhar com a fórmula de probabilidades [...]. Muitos aspectos das probabilidades atraíram De Moivre, inclusive problemas atuais". Em 1718, ele publicou "A Doutrina da Sorte", considerado por estudiosos da época como "a chave para o início da história de probabilidade", organizando a teoria de forma estruturada (Retrespo; González, 2003).

No início do século XVIII, o matemático francês Thomas Bayes (1702-1761) introduziu outra forma de análise na probabilidade, conhecida como o teorema de Bayes. Esse teorema consiste em determinar a probabilidade dos eventos diante de certas condições iniciais (Junqueira, 2015, p. 4).

Entretanto, segundo Conti e Vilas Bôas (2019), foi em 1812 que se obteve um grande marco da Teoria das Probabilidades. As autoras afirmam que nesse ano, Pierre Simon Laplace

(1749-1827) publicou o tratado "Teoria Analítica das Probabilidades". Neste trabalho, Laplace definiu a probabilidade como o número de vezes em que um dado evento pode ocorrer dividido pelo número total de casos possíveis, considerando que estes têm possibilidades iguais de acontecer. A partir de Laplace, as duas disciplinas, Cálculo das Probabilidades e Estatística, que até então permaneciam separadas, integraram-se de maneira que o cálculo da probabilidade se tornou a ferramenta matemática fundamental da estatística, impulsionando-a teoricamente.

No entendimento de Coutinho (1994), os trabalhos desenvolvidos por Laplace colocaram a Probabilidade definitivamente no quadro matemático e a solidificaram de forma definitiva no contexto matemático. E, compreende-se assim, que essa consolidação histórica estabelece uma base para as definições e conceitos fundamentais que permeiam a compreensão da Probabilidade.

2.2 Definições e Conceitos Fundamentais

A seguinte citação apresenta a definição formulada por Laplace, amplamente imposta no ensino até os dias de hoje:

A razão deste número àquele de todos os casos possíveis é a medida desta probabilidade, que é assim não mais que uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis. (Laplace¹, 1814, p. 35, apud Coutinho, 2007).

Com o passar do tempo, outros autores também conceituam o que é probabilidade. Silva, Fernandes e Almeida (2015) conceituam a Probabilidade como o estudo de experimentos aleatórios. Eles definem experimento como qualquer processo de observação e destacam que, nestes, a incerteza está presente.

É importante compreender que um experimento pode ser classificado como determinístico ou aleatório. O experimento determinístico proporciona resultados essencialmente iguais ao realizar uma ação sob condições quase idênticas, controlando todos os fatores influentes. Por exemplo, ao soltar uma moeda, é certo que ela cairá no chão. Em contraste, os experimentos aleatórios são aqueles nos quais, mesmo com todas as precauções, não é possível conhecer o valor exato do resultado. Esses experimentos, ao serem repetidos

¹ Laplace P.-S. (1814). *Essai Philosophique sur les Probabilités*. (5e édition en 1825, réimprimée en 1985), Paris : Christian Bourgois éditeur apud COUTINHO, C. Q. S.. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta?. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. São Paulo, v 2, n.1, p.50-67, UFSC, 2007.

sob as mesmas condições, podem fornecer resultados diferentes, caracterizando-se como procedimentos cujo resultado é incerto (Silva, 2012).

Sob uma abordagem quantitativa, a probabilidade é representada por um número real, variando de 0 a 1. Nessa perspectiva, busca-se atribuir um grau ou medida à possibilidade de ocorrência de um evento ou de uma classe de eventos (Conti; Vilas Bôas, 2019).

Vale citar também que autores como Viali (2020) descrevem a probabilidade como o ramo da Matemática que pretende modelar fenômenos em que o "acaso" representa um papel preponderante.

Viali (2020) destaca que a ideia de acaso é praticamente tão antiga quanto as primeiras civilizações, sendo que a percepção de que se trata de um "fenômeno natural" só ocorreu posteriormente. O autor define o "acaso" como um conjunto de forças, em geral, não determinadas ou controladas, que desempenham um papel preponderante individual ou coletivamente na ocorrência de diferentes resultados de um experimento ou fenômeno. Por exemplo, ao lançar uma moeda, é senso comum considerar os possíveis resultados como "cara" e "coroa", mas antes de realizar o experimento, não é possível antecipar com certeza qual dos dois resultados ocorrerá, pois os fatores determinantes não podem ser identificados e, caso o sejam, não são passíveis de controle.

Diante disso, é fundamental uma abordagem mais aprofundada para melhor compreensão do conceito de probabilidade, incluindo definições como espaço amostral e eventos.

O conceito de espaço amostral é elucidado por Ross (2010), que o define como o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento cujo resultado não pode ser previsto com certeza. Em outras palavras, mesmo que não se saiba antecipadamente qual será o resultado específico do experimento, é possível ter conhecimento do conjunto abrangente de todas as possibilidades.

No que diz respeito ao evento, também elucidado por Ross (2010), esse é caracterizado como qualquer subconjunto do espaço amostral. Em termos simples, um evento é um conjunto formado pelos possíveis resultados do experimento.

Esses conceitos teóricos, que ajudam na compreensão da probabilidade, encontram aplicações práticas importantes no cenário educacional, conforme delineado pelos documentos curriculares brasileiros.

2.3 A mudança do ensino de Probabilidade no Brasil: perspectiva dos Documentos Curriculares

Considerando o que dizem os documentos curriculares, a discussão sobre a presença do tema Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental é essencial para compreendermos as mudanças do ensino de matemática no Brasil. Ao analisarmos as indicações contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – (Brasil, 1997), identificamos que aqui o ensino de Probabilidade foi oficialmente introduzido no cenário educacional brasileiro sendo apresentada no bloco Tratamento da Informação, composto pelos conteúdos matemáticos: Estatística, Probabilidade e Análise Combinatória (Pinheiro; Silva; Galvão, 2020).

Inicialmente, este tema visava proporcionar aos alunos, a partir do segundo ciclo (crianças de 9 e 10 anos), a ideia de que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que existe a possibilidade de identificar os prováveis resultados desses acontecimentos, além de explorar noções intuitivas como as de acaso quando analisadas em espaços equiprováveis (Pinheiro; Silva; Galvão, 2020). É notável observar que, inicialmente, esses conteúdos estavam atribuídos ao que era denominado "segundo ciclo", abrangendo as 3ª e 4ª séries. Posteriormente, com a introdução do Ensino Fundamental de nove anos, esse ciclo passou a incluir os 4º e 5º anos (Conti; Vilas Bôas, 2019).

A fim de facilitar a compreensão da progressão curricular dos conteúdos de probabilidade delineados nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental, apresentamos, no Quadro 1 a seguir, o conteúdo proposto para o ensino dessa matéria.

Quadro 1 – Conteúdo proposto para o ensino de probabilidade nos PCN para o Ensino Fundamental

Bloco de conteúdo	Ciclos	Conteúdos a serem trabalhados
Tratamento da informação	2º (3ª e 4ª séries)	Exploração da ideia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de “sorte”. Utilização de informações dadas para avaliar probabilidades
Tratamento da informação	3º (5ª e 6ª séries)	Construção do espaço amostral e indicação da possibilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão.
Tratamento da informação	4º (7ª e 8ª séries)	Construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão. Elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidade e verificar probabilidades previstas.

Fonte: Rufino e Silva (2019, p. 121)

No entanto, mesmo o documento reafirmando a importância do ensino de Probabilidade em vários trechos, como por exemplo:

É cada vez mais frequente a necessidade de se compreender as informações veiculadas, especialmente pelos meios de comunicação, para tomar decisões e fazer previsões que terão influência não apenas na vida pessoal, como na de toda a comunidade. [...] Essa característica da vida contemporânea traz ao currículo de Matemática uma demanda em abordar elementos da estatística, da combinatória e da probabilidade, desde os ciclos iniciais (Brasil, 1997, p. 84)

Percebe-se que a temática ficou de fora do ciclo de alfabetização. Somente com a implementação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC –, Brasil (2018), temos que o estudo dessa temática é indicado para os primeiros anos de escolaridade. Assim, a Probabilidade, juntamente com a Estatística, teve sua importância reafirmada e passou ser um dos cinco eixos temáticos que devem ser trabalhados nos anos iniciais. (Conti; Vilas Bôas, 2019).

A BNCC ainda aponta que:

No que concerne ao estudo de noções de probabilidade, a finalidade, no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, é promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Para isso, o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. É muito comum que pessoas julguem impossíveis eventos que nunca viram acontecer. Nessa fase, é importante que os alunos verbalizem, em eventos que envolvem o acaso, os resultados que poderiam ter acontecido em oposição ao que realmente aconteceu, iniciando a construção do espaço amostral (Brasil, 2018, p. 274).

No contexto da análise das noções de Probabilidade, que constitui o foco desta investigação, apresentamos um quadro para uma melhor compreensão do que é proposto pela BNCC. Esse quadro destaca, nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, os objetos de conhecimento relacionados à Probabilidade, juntamente com as habilidades inseridas na Unidade Temática Probabilidade e Estatística.

Quadro 2 – Objetos de conhecimento e habilidades propostas para o ensino de Probabilidade na BNCC Ensino Fundamental anos iniciais.

(continua)

Ano	Unidade temática	Objetos de conhecimento	Habilidades
1	Probabilidade e estatística	Noção de acaso	(EF01MA20) Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez aconteça” e “é impossível acontecer”, em situações do cotidiano.

Quadro 2 – Objetos de conhecimento e habilidades propostas para o ensino de Probabilidade na BNCC Ensino Fundamental anos iniciais.

(continuação)

Ano	Unidade temática	Objetos de conhecimento	Habilidades
2	Probabilidade e estatística	Análise da ideia de aleatório em situações do cotidiano	(EF02MA21) Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como “pouco prováveis”, “muito prováveis”, “improváveis” e “impossíveis”.
3	Probabilidade e estatística	Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral	(EF03MA25) Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.
4	Probabilidade e estatística	Análise de chances de eventos aleatórios	(EF04MA26) Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.
5	Probabilidade e estatística	Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios	(EF05MA22) Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não.
		Cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis	(EF05MA23) Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).

Fonte: Brasil (2018, p. 278 –297)

Já em relação aos anos finais do Ensino Fundamental, a BNCC destaca:

No Ensino Fundamental – Anos Finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem. (Brasil, 2018, p. 274).

Ainda nesse contexto, prosseguimos apresentando um quadro adicional sobre o que propõe a BNCC para os Anos Finais do Ensino Fundamental, os objetos de conhecimento associados à Probabilidade, bem como as habilidades que enfatizam essa temática. Esses elementos estão inseridos na Unidade Temática de Probabilidade e Estatística, direcionada de maneira específica para o sexto ano do ensino fundamental.

Quadro 3 – Objetos de conhecimento e habilidade propostos para o ensino de Probabilidade na BNCC Ensino Fundamental sexto ano.

Ano	Unidade temática	Objetos de conhecimento	Habilidades
6	Probabilidade e estatística	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável. Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)	(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

Fonte: Brasil (2018, p. 278 –297)

Assim, observa-se que os Quadros 2 e 3 proporcionam uma análise das correlações entre os anos iniciais e finais a partir do sexto ano do Ensino Fundamental, a Unidade Temática Probabilidade e Estatística, bem como os objetos de conhecimento e as habilidades a serem desenvolvidas.

Ao examinarmos o Quadro 2 e o Quadro 3, podemos discernir uma progressão de ideias de probabilidade que se desenrola ao longo desses anos.

No Quadro 2, os fundamentos são lançados, introduzindo aos estudantes a noção de acaso, ideia de aleatório e espaço amostral. À medida que avançamos para o Quadro 3, percebemos uma evolução gradual que vai além da simples compreensão do acaso. Aqui, os alunos começam a se envolver em um processo mais sofisticado, embarcando no cálculo de probabilidade de eventos.

Em resumo, a correlação entre os Quadros 2 e 3 não é apenas uma simples ligação entre dois momentos distintos, mas sim a manifestação de um processo educacional delineado, buscando contribuir para que os alunos a internalizem e apliquem conceitos mais complexos de forma progressiva. Assim, essa correlação nos oferece uma visão mais abrangente e estruturada do avanço matemático nesta área.

A partir dessas análises também foi possível observar como os currículos mudaram ao longo dos anos, refletindo a reafirmação da importância atribuída ao ensino da probabilidade nos diferentes ciclos do Ensino Fundamental.

3 PESQUISA QUALITATIVA

Sant'Ana e Lemos (2020) destacam que a pesquisa desempenha um papel abrangente em diversas esferas da sociedade, permeando a política, economia, aspectos sociais e educacionais, manifestando-se em vários fenômenos e contextos sociais. De acordo com essas autoras, o propósito central da pesquisa é impulsionar a análise e o confronto de dados e informações relacionados a um tema específico. Apresentam, ainda, que essa abordagem é fundamentada em um embasamento teórico sólido, direcionado ao objeto de estudo, e visa explorar um problema de interesse do pesquisador. Assim, a pesquisa não se limita apenas a compreender diferentes aspectos da realidade; ela busca, também, formular soluções para as problemáticas identificadas.

Contudo, a pesquisa pode adotar diferentes abordagens. Neste estudo, entretanto, focaremos na pesquisa qualitativa, que segundo Strauss (2008, p. 23) é

[...] Qualquer tipo de pesquisa que produza resultados não alcançados através de procedimentos estatísticos ou de outros meios de quantificação. Pode se referir à pesquisa sobre a vida das pessoas, [...] e também à pesquisa sobre funcionamento organizacional, movimentos sociais, fenômenos culturais e interação entre nações. Alguns dados podem ser quantificados, [...], mas o grosso da análise é interpretativa. (Strauss, 2008, p. 23).

Para Soares (2020), a ênfase da abordagem qualitativa reside na elaboração conceitual de fatos, ideias ou opiniões, bem como na compreensão indutiva ou interpretativa a partir dos dados coletados. Essa abordagem é caracterizada por sua natureza exploratória, subjetiva e espontânea, evidenciada pelos métodos empregados, tais como observação direta, entrevistas, análise de textos ou documentos, e a avaliação de discursos e comportamentos registrados.

Soares (2020) destaca ainda que a pesquisa qualitativa está intrinsecamente ligada aos significados que as pessoas atribuem às suas experiências no contexto social e à forma como compreendem esse ambiente.

De acordo com Merriam (1998), a pesquisa qualitativa engloba a coleta de dados descritivos sob a ótica da investigação crítica ou interpretativa. Ela se dedica ao estudo das interações humanas em variados contextos, explorando a complexidade de um determinado fenômeno com o propósito de decodificar e traduzir o significado dos fatos e eventos.

Nas palavras de Brandão (2001),

A pesquisa qualitativa (...) está relacionada aos significados que as pessoas atribuem às suas experiências do mundo social e a como as pessoas compreendem esse mundo. Tenta, portanto, interpretar os fenômenos sociais (interações,

comportamentos, etc.), em termos de sentidos que as pessoas lhes dão; em função disso, é comumente referida como pesquisa interpretativa (Brandão, 2001, p.13).

Para Oliveira *et al.* (2020, p. 02), “[...] uma pesquisa de natureza qualitativa busca dar respostas a questões muito particulares, específicas, que precisam de elucidações mais analíticas e descritivas”.

Creswell (1994) acrescenta que nos métodos de pesquisa qualitativos há uma variedade de tipos e estratégias para coleta, análise e apresentação de resultados que se adequam à solução de problemas de pesquisa nas ciências humanas e sociais.

Dentre os diferentes tipos de pesquisa qualitativa, nos interessa o Estudo de Caso, o qual utilizamos para a realização da presente investigação.

Conforme afirmam Sátyro e D’albuquerque (2020), essa abordagem se destaca por possibilitar a compreensão de fenômenos sociais complexos. Os autores apresentam ainda que essa abordagem possibilita uma investigação que preserva as características holísticas desses fenômenos, desvendando os processos e mecanismos significativos.

Lüdke e André (1986, p. 17) ressaltam que o método de estudo de caso é apropriado quando o pesquisador manifesta interesse em investigar uma situação singular. Segundo os autores, este estudo, apresenta sete características principais que são:

- 1 – Os estudos de caso visam à descoberta.
- 2 – Os estudos de caso enfatizam a ‘interpretação em contexto’.
- 3 – Os estudos de caso buscam retratar a realidade de forma completa e profunda.
- 4 – Os estudos de caso usam uma variedade de fontes de informação.
- 5 – Os estudos de caso revelam experiência vicária e permitem generalizações naturalísticas.
- 6 – Estudos de caso procuram representar os diferentes e às vezes conflitantes pontos de vista presentes numa situação social.
- 7 – Os relatos de estudo de caso utilizam uma linguagem e uma forma mais acessível do que os outros relatórios de pesquisa (Lüdke; André, 1986, p. 17)

Para Nisbet e Watt² (1978 apud Lüdke; André, 1986) o desenvolvimento do estudo de caso ocorre em três fases. A primeira consiste na fase exploratória, a segunda na delimitação do estudo e a coleta de dados e a terceira constitui-se da análise e interpretação sistêmica dos dados.

De acordo com Lüdke e André (1986), nesse tipo de pesquisa é feita a análise caso a caso, indivíduo a indivíduo e assim, acrescentam que a fase exploratória:

(...) Se coloca como fundamental para uma definição mais precisa do objeto de estudo. É o momento de especificar as questões ou pontos críticos, de estabelecer os contatos iniciais para entrada em campo, de localizar os informantes e as fontes de dados necessárias para o estudo [...] (Lüdke; André, 1986, p. 22).

² NISBET, J.; WATT, J. Case Study. Readguide 26: Guides in Educational Research. University of Nottingham School of Education, 1978 apud LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

Os autores também enfatizam a importância da segunda e terceira fase neste estudo. Na segunda fase, destacam que é crucial para alcançar os propósitos da pesquisa, pois nesse estágio são determinados os aspectos mais relevantes, levando em consideração que o tempo é limitado e isso impossibilita a exploração de todos os ângulos do fenômeno. Quanto à terceira fase, sublinham que, neste momento, surge a necessidade de reunir as informações, analisá-las e disponibilizá-las aos informantes. Isso possibilita que eles expressem suas reações em relação à relevância e à precisão do que é relatado.

Portanto, a escolha deste método fundamenta-se em razões alinhadas diretamente aos objetivos do estudo, que busca analisar as ideias sobre probabilidade por alunos do sexto ano do ensino fundamental, demandando, assim, uma abordagem mais aprofundada e qualitativa. Conforme mencionado por Ponte (1994), o estudo de caso caracteriza-se pela investigação de uma entidade bem definida, no nosso caso, o entendimento de probabilidade desses alunos. Essa abordagem visa conhecer em profundidade o "como" e os "porquês" dessas ideias, evidenciando sua singularidade e características essenciais.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para conduzir esta pesquisa, adotou-se a metodologia de estudo de caso. Conforme mencionado por Ponte (1994), e já citado anteriormente, o estudo de caso caracteriza-se pela investigação de uma entidade bem definida, no nosso caso, o entendimento de probabilidade por alunos do sexto ano.

Dessa forma, a pesquisa foi conduzida com a participação de um grupo de estudantes do sexto ano do ensino fundamental de uma escola pública em Guaratinguetá. A execução das atividades ocorreu durante a realização das atividades do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), do qual atuo e faço parte como bolsista.

A análise do entendimento de probabilidade foi conduzida por meio da aplicação de jogos, os quais são reconhecidos como ferramentas atrativas e dinâmicas para o processo avaliativo (Santos, 2015).

4.1 Jogos desenvolvidos

Os jogos desenvolvidos para que fosse possível identificar possíveis indícios que mostre as ideias dos alunos sobre probabilidade foram: *A Travessia do Rio* e *Os Passeios Aleatórios da Mônica*. O primeiro foi modificado a partir do caderno de jogos do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa –PNAIC – (Brasil, 2014), enquanto o segundo teve suas discussões propostas, adaptadas de Cazorla e Santana (2006). O trabalho com esses jogos ocorreu em dois dias distintos, envolvendo a participação de 15 alunos no primeiro dia e 12 no segundo. É relevante destacar que, para a análise dos dados, foram consideradas as respostas dos alunos que participaram de ambos os dias de aplicação dos jogos, totalizando assim 11 alunos. A fim de preservar a identidade dos alunos, estes serão designados como A1, A2, A3, e assim sucessivamente até A11.

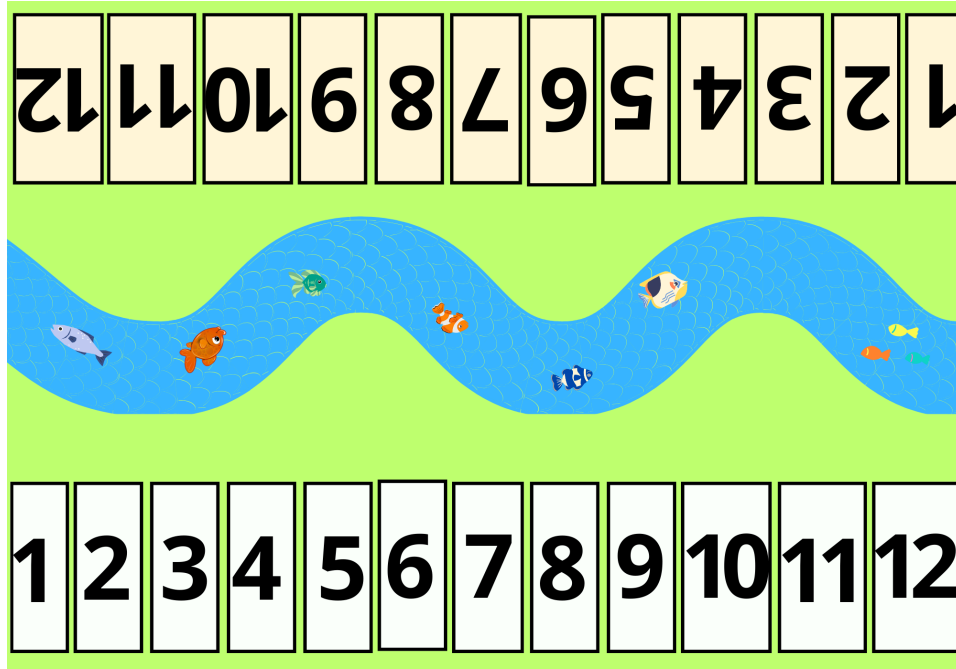
Com o objetivo de elucidar os jogos e os questionários aplicados, apresentaremos a seguir uma descrição detalhada de cada um.

4.1.1 Jogo *Travessia do Rio*

O jogo *Travessia do Rio* faz parte do caderno de jogos do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa - PNAIC (Brasil, 2014). Este jogo, realizado em dupla, oferece

uma simulação de um Rio, cercado por números de 1 a 12 em cada uma de suas margens, conforme ilustrado na figura 1 abaixo.

Figura 1 – Jogo *Travessia do Rio*



Fonte: Adaptado de Brasil (2014)

Os objetivos do jogo, conforme delineados na proposta do PNAIC, envolvem a resolução de adições e a análise das possibilidades de obter as somas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 no lançamento de dois dados.

Neste estudo, introduzimos adaptações para o trabalho com o jogo. Cabe destacar que, neste contexto, a terminologia "barquinhos" é utilizada para referir-se ao que originalmente era chamado de "fichas" no caderno PNAIC.

Com isso, as seguintes regras foram estabelecidas:

1. Cada jogador posiciona seus barquinhos em números de uma das margens do Rio da maneira que preferir, com a possibilidade de colocar mais de um barquinho na mesma casa, deixando, portanto, outras vazias.
2. Os jogadores, de forma alternada, lançam dois dados e calculam a soma obtida. Se a soma corresponder ao valor de uma das casas onde estão seus barquinhos, eles movem os barquinhos para o outro lado do rio.
3. O vencedor é aquele que consegue primeiro mover todos os seus barquinhos para o outro lado do rio.

Para atingir o objetivo dessa pesquisa, é fundamental mencionar que a gama de resultados (somas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12) citada anteriormente não foi previamente fornecida aos alunos, uma vez que a intenção foi que os alunos, por conta própria, percebessem que o número 1 não é uma possibilidade ao somar os resultados de dois dados lançados. Dessa forma, durante a aplicação do jogo, as regras foram gradualmente introduzidas, isto é, inicialmente, os alunos foram instruídos a colocar os barquinhos nos números sem conhecimento prévio das regras de lançar dois dados e somar suas faces. Esse primeiro momento teve por objetivo fazer com que os alunos refletissem sobre suas escolhas à medida que as regras foram sendo introduzidas. Após a explicação inicial, os jogadores tinham a oportunidade de realizar trocas entre os números escolhidos.

Nesse cenário, os participantes deveriam fundamentar e expor as razões que motivaram as alterações. Mesmo no caso de decidirem não realizar modificações, os jogadores ainda deveriam apresentar uma justificativa para a sua decisão. Essas justificativas foram registradas por meio de uma ficha distribuída a cada aluno, e podem ser analisadas na figura 2 a seguir:

Figura 2 – Ficha de Reflexão: Mudanças no Jogo

Após a explicação das regras do jogo, você gostaria de mover algum dos barquinhos para uma casa diferente?

() Não () Sim

Se sim, qual barquinho você gostaria de mover e por quê? Se não quiser fazer nenhuma mudança, por favor, também explique o motivo.

Fonte: Elaborada pela autora

Além das possibilidades relacionadas ao desenvolvimento do cálculo mental, é possível observar que esse jogo pode proporcionar meios para a criação de estratégias com base na observação de que algumas somas ocorrem com maior frequência do que outras, além de destacar a existência de um resultado impossível, o número 1.

Com o propósito de obter as informações necessárias para análise, após a aplicação do jogo *Travessia do Rio*, os alunos responderam a um questionário, conforme evidenciado na figura 3 a seguir:

Figura 3 – Questionário: Explorando Ideias Probabilísticas dos Alunos

- ① João colocou todos barquinhos na casa 1. Ele possui chance de ganhar o jogo?
() Não () Sim

Por que você acha isso ?

- ② Joana colocou todos seus barquinhos na casa 8. Nos dados, quais combinações de números podem ser somadas para dar o número 8?

- ③ Se eu jogar dois dados, qual soma é mais fácil de sair e por quê?

Fonte: Elaborada pela autora

A análise deste questionário teve como objetivo analisar as ideias dos alunos em relação à noção de espaço amostral e aleatoriedade.

4.1.2 Jogo *Os Passeios Aleatórios da Mônica*

O outro jogo selecionado foi o *Os Passeios Aleatórios da Mônica*, idealizado inicialmente por Fernandez e Fernandez (1999) para o Ensino Superior e posteriormente ajustado por Cazorla e Santana (2006) para estudos na Educação Básica.

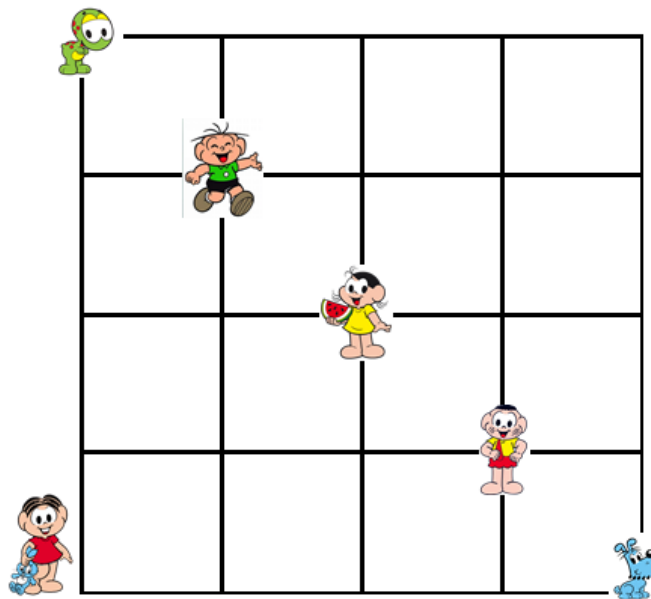
O jogo teve questionamentos adaptados a fim de se adequar aos conhecimentos dos alunos e atender os objetivos desta pesquisa.

Cazorla e Santana (2006) apresentam que:

Mônica e seus amigos moram no mesmo bairro. A distância da casa da Mônica para a casa de Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão e Bidu é de quatro quarteirões. (...). A Mônica costumava visitar seus amigos durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida: segunda-feira, Horácio; terça-feira, Cebolinha; quarta-feira, Magali; quinta-feira, Cascão e sexta-feira, Bidu. Entretanto, para tornar mais emocionantes os encontros, a turma combinou que o acaso escolhesse o amigo a ser visitado pela Mônica. Para isso, determinaram uma regra para a visita: na saída de sua casa e a cada cruzamento, Mônica deve jogar uma moeda; se sair cara (C), andará um quarteirão para o Norte, se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste. Cada jogada representa um quarteirão de percurso, assim, Mônica deve jogar a moeda quatro vezes para poder chegar à casa dos amigos. (Cazorla; Santana, 2006, p. 44-45.)

Na Figura 4, apresenta-se o mapa que ilustra o bairro de Mônica e seus amigos, incluindo a distância entre sua casa e a de seus amigos.

Figura 4 – Mapa dos *Passeios aleatórios da Mônica*



Fonte: Cazorla e Santana (2006)

Após a apresentação das regras deste jogo, os alunos responderam um questionário, conforme exposto na figura 5, com o propósito de demonstrar sua compreensão em relação ao conceito de acaso, sua capacidade de realizar comparações de probabilidades ao verificar a existência de chances diferentes e eventos impossíveis como também fazer distinções entre situações predefinidas e situações determinadas pelo acaso.

Figura 5 – Questionário: Investigando as Ideias Probabilísticas dos Estudantes

① Qual é a diferença entre a forma antiga da Mônica visitar seus amigos e a nova forma?

② Na nova maneira, todos os amigos terão a mesma chance de serem visitados?
☐ Não ☐ Sim

Por que você acha isso?

③ Existe a chance da Mônica não visitar algum amigo?
☐ Não ☐ Sim

Por que você acha isso?

Fonte: Fonte: Elaborada pela autora

Além disso, visando aprofundar a análise do entendimento dos alunos em relação à probabilidade, foi realizado um experimento. Nesse contexto experimental, os alunos, agrupados em equipes, foram instruídos a lançar uma moeda quatro vezes para determinar se sairia cara (C) ou coroa (X), formando assim uma sequência. No caso de cara, Mônica avançaria um quarteirão para o Norte; no caso de coroa, um quarteirão para o Leste. Esse procedimento foi repetido 30 vezes, e os alunos registraram todos os resultados obtidos.

Por exemplo, se a sequência fosse cara, cara, coroa, cara, os alunos registraram a sequência como CCXC e identificariam que o amigo visitado seria o Cebolinha.

Em seguida, responderam a um outro questionário, como pode ser observado na figura 6 abaixo:

Figura 6 – Questionário: Explorando as Ideias Probabilísticas dos Estudantes pós-experimento

④ Após a experimentação responda: Todos os amigos terão a mesma chance de serem visitados?

() Não () Sim

⑤ É possível Mônica chegar em Cascão sem sair uma cara?
Por quê?

Fonte: Fonte: Elaborada pela autora

O trabalho desenvolvido tinha como propósito confrontar as respostas fornecidas pelos alunos, ou até mesmo validar o que foi afirmado por eles, além de também questionarem os alunos sobre um evento impossível. Portanto, o questionário visava obter essas confirmações e compreender as diferentes ideias dos alunos após a experimentação.

4.2 Síntese das perguntas norteadoras dos jogos aplicados

As questões apresentadas durante o jogo tinham o propósito de analisar as ideias dos alunos do sexto ano do Ensino Fundamental em relação à probabilidade. Especificamente, abordavam aspectos como aleatoriedade, focando em eventos aleatórios. Além disso, exploravam o conceito de espaço amostral, incluindo o levantamento de possibilidades e eventos impossíveis. Ainda, englobava a comparação de probabilidades, abordando questões que discutiam a igualdade e diferença nas chances de ocorrência de um evento.

Assim, no quadro 4 e 5, que pode ser observado a seguir, encontramos um resumo das perguntas realizadas nos jogos *Travessia do Rio* e *Os Passeios aleatórios da Mônica*, respectivamente, bem como o foco probabilístico envolvido em cada questão.

Quadro 4 – Perguntas norteadoras do jogo *Travessia do Rio*

(continua)

Foco e habilidades analisadas	Perguntas norteadoras
Espaço amostral- Verificação de evento impossível	Após a explicação das regras do jogo, você gostaria de mover algum dos barquinhos para uma casa diferente? Se sim, qual barquinho você gostaria de mover e por quê? Se não quiser fazer nenhuma mudança, por favor, também explique o motivo.

Quadro 4 – Perguntas norteadoras do jogo *Travessia do Rio*

(continuação)

Foco e habilidades analisadas	Perguntas norteadoras
Espaço amostral- Verificação de Evento impossível	João colocou todos seus barquinhos na casa 1. Ele conseguirá ganhar o jogo? Por quê?
Espaço amostral - Levantamento de possibilidades	Joana colocou todos seus barquinhos na casa 8. Nos dados, quais combinações de números podem ser somadas para dar o número 8?
Espaço amostral - Levantamento de possibilidades	Se eu jogar dois dados, qual soma é mais fácil de se obter e por quê?”

Fonte: Elaborada pela autora

Quadro 5 – Perguntas norteadoras do jogo *Os passeios aleatórios da Mônica*

Foco e habilidades analisadas	Perguntas norteadoras
Compreensão da Aleatoriedade - Distinções entre escolhas predefinidas e escolhas aleatórias	Qual é a diferença entre a forma antiga da Mônica visitar seus amigos e a nova forma?
Comparação de probabilidades - Verificação de probabilidades diferentes	Todos os amigos terão a mesma chance de serem visitados? Por quê?
Comparação de probabilidades - Verificação de Evento impossível	Existe a chance de a Mônica não visitar algum amigo?
Comparação de probabilidades - Verificação de probabilidades diferentes	Após o experimento - Todos os amigos terão a mesma chance de serem visitados? Por quê?
Comparação de probabilidades - Evento impossível	É possível Monica chegar a Cascão sem sair uma cara? Por quê?

Fonte: Fonte: Elaborada pela autora

Estes quadros sintetizam as principais temáticas abordadas pelos jogos, proporcionando uma visão mais clara das questões norteadoras, seus respectivos focos e as habilidades que buscamos verificar nos participantes.

Assim, os quadros não apenas simplificam a interpretação dos dados, mas também guiam de maneira eficaz os próximos passos na análise e interpretação dos resultados.

4.3 Registro

Para que fosse possível realizar uma análise dos dados, registramos todas as etapas dos jogos, incluindo interações, questionamentos e respostas dos alunos, por meio de gravações

em áudio. Além disso, os questionários, contendo as respostas dos alunos, também ofereceram valiosos subsídios para a realização de uma verificação completa, contribuindo ainda mais para a compreensão das ideias dos estudantes em relação aos conceitos probabilísticos abordados.

A seguir, na próxima seção, serão apresentadas as análises relacionadas às ideias dos alunos em relação à probabilidade.

5 ANÁLISE

As análises conduzidas nesta abordagem consideraram os quadros 4 e 5, apresentados na subseção 4.2, como pontos de referência para o conteúdo a ser examinado em cada questão. Em outras palavras, a análise da compreensão dos alunos foi conduzida com base nas informações contidas nesses quadros, visando analisar aspectos como aleatoriedade, espaço amostral e comparação de probabilidades. A análise focalizou principalmente na qualidade das justificativas e argumentos apresentados pelas crianças para fundamentar suas respostas a cada pergunta.

Para a análise dos dados, foram consideradas as respostas fornecidas por 11 alunos que participaram dos dois dias de aplicações dos jogos.

Cabe mencionar que, mesmo o jogo Travessia do Rio ocorrendo em duplas, os questionários foram aplicados individualmente entre os alunos.

É importante ressaltar também que todos os questionários foram reescritos para preservar a identidade dos alunos.

5.1 Análise do jogo *Os passeios aleatórios da Mônica*

Inicialmente, fundamentou-se na seguinte indagação orientadora: Qual é a diferença entre a forma antiga da Mônica visitar seus amigos e a nova forma? A questão em destaque concentra-se na avaliação da percepção da aleatoriedade e nas distinções entre escolhas predefinidas e situações aleatórias. As justificativas dos alunos do sexto ano para esse questionamento estão detalhadas no Quadro 6 abaixo.

Quadro 6 – Respostas para o questionário 1

(continua)

Aluno	Respostas obtidas
A1	“O de agora ele decide na sorte, e o antigo em dias semanais”.
A2	“Na nova ela deixa a sorte escolher para ela, já na antiga ela mesma escolheu”.
A3	“A diferença é que agora ela escolhe na sorte e na antiga ela tinha uma ordem estabelecida para cada um”.
A4	“Na nova forma depende da sorte e na antiga não”.
A5	“Na nova forma já era definido já na nova ela decide na hora”
A6	“Antes ela ia para a casa deles normalmente, mas agora ela joga moeda para cima, se sair cara ela vai andar um quarteirão para o norte, se sair coroa para o leste”

Quadro 6 – Respostas para o questionário 1

(continuação)

Aluno	Respostas obtidas
A7	“Antes ela usava a forma que ela visitava durante os dias da semana em ordem pré-estabelecida. E agora ela usa forma de acaso, ou seja, de sorte e ela usava a cara e coroa”
A8	“Que cada quarteirão ela joga cara e coroa ela chega perto das casas de cada amigo”
A9	“A diferença é que na forma antiga ela ia por dia e na forma nova ela vai por sorte”
A10	“A diferença é que ela sabia os dias certo para visitar seus amigos já a nova forma é por sorte da moeda”
A11	“Antes era como uma lista de visitas já agora acontece o que tiver que acontecer”

Fonte: Elaborada pela autora

Para Batanero e Diaz (2007) o significado de probabilidade, intuitivamente, é relacionado a concepções que envolvem sorte e destino, além de serem baseadas em crenças e opiniões. Assim, a partir das respostas observadas, é possível perceber que os alunos, em grande maioria, associaram o acaso à sorte, ou seja, os resultados apontaram que o significado intuitivo, conforme apresentado pelos autores, foi evidenciado.

Posteriormente, temos uma questão que apresenta como foco a comparação de probabilidade, objetivando compreender e analisar a habilidade de comparar probabilidades diferentes. Dessa forma, no quadro 7, é possível realizar uma análise abrangente das perspectivas individuais de cada aluno em relação à seguinte indagação: “Na nova maneira, todos os amigos terão a mesma chance de serem visitados?”. Em seguida, o quadro 8 apresenta as justificativas fornecidas por esses alunos em relação às suas respostas.

Quadro 7 – Visão geral das respostas apresentadas no Questionário 2 (jogo *Os passeios aleatórios da Mônica*)

Quantidades de alunos	Respostas obtidas
7	NÃO
4	SIM

Fonte: Elaborada pela autora

Quadro 8 – Respostas do questionário 2 (jogo *Os passeios aleatórios da Mônica*)

(continua)

Aluno	Respostas obtidas	Justificativas
A1	Não	“Não, as chances podem mudar conforme a Mônica anda”
A2	Sim	“Por que todos têm a mesma chance de ser sorteados”

Quadro 8 – Respostas do questionário 2 (jogo *Os passeios aleatórios da Mônica*)
(continuação)

Aluno	Respostas obtidas	Justificativas
A3	Não	“Porque pode ser que vai uma pessoa repetida e a outra não vai”
A4	Não	“Por que cada um pode ter a sua sorte de cair cara ou coroa”
A5	Sim	“Porque as distâncias de todos os amigos são a mesmas”
A6	Sim	“Porque cada um está na mesma distância”
A7	Não	“Por que é jogo de sorte”
A8	Não	“Por que se só sair cara, por exemplo, ela vai visitar só uma pessoa”
A9	Não	“Por que o jogo cara ou coroa é um jogo de sorte, e não sabemos o que pode cair”
A10	Sim	“Por causa da sorte”
A11	Não	“Por que é uma forma de sorte ou azar”

Fonte: Elaborada pela autora

Como exposto anteriormente, para Mônica visitar qualquer um dos amigos ela lança uma moeda quatro vezes e a sequência de cara e coroa é quem determina qual amigo será visitado.

Há 16 possibilidades de sequências no lançamento de uma moeda quatro vezes. Para chegar em Bidu é necessário que saia na moeda uma sequência de quatro coroas, enquanto para visitar Horácio é necessário que saia quatro caras. Em ambos os casos há 1 possibilidade em 16. Já para visitar Cebolinha é preciso 3 caras e 1 coroa em qualquer sequência (CCCX; CCXC; CXCC; XCCC), possuindo 4 possibilidades em 16. De maneira semelhante, Mônica também possui 4 possibilidades em 16 de se chegar a Cascão, porém, nesse caso, precisa de 3 coroas e 1 cara em qualquer sequência (XXXC; XXCX; XCXX; CXXX). Já para chegar em Magali, Mônica precisa que saia uma sequência em qualquer ordem, de duas caras e duas coroas. Assim, Magali apresenta 6 chances em 16 de ser visitada.

É perceptível que nenhum dos alunos apresentou como justificativas para suas respostas a diferença entre a quantidade de possibilidades de caminhos que Mônica poderia percorrer para visitar seus amigos. Nesse caso, não houve distinção entre as probabilidades e sim, na grande maioria, a reafirmação de pensamentos intuitivos.

Alguns alunos afirmaram "sim" e associaram a possibilidade de Mônica visitar seus amigos ao número de quarteirões presentes no bairro. Esses alunos indicaram que Mônica precisaria percorrer exatamente 4 quarteirões para visitar todos os amigos, sugerindo que, se a

quantidade de quarteirões é a mesma entre os amigos, todos teriam a mesma chance. No entanto, outros alunos apontaram que a visita é realizada por sorte, argumentando que todos têm chances iguais de serem visitados. É notável que essa perspectiva não considera os diferentes caminhos possíveis de visita.

Por outro lado, alguns alunos responderam "não" e também argumentaram que a probabilidade de Mônica visitar seus amigos estava atrelada à sorte, concluindo que suas chances eram diferentes. Aqueles que relacionam a probabilidade de visita à sorte e azar não exploraram profundamente suas reflexões sobre essa resposta, destacando novamente a visão intuitiva destacada por Batanero e Diaz (2007).

De maneira geral, observou-se que as crianças não refletiram conscientemente sobre os elementos dos eventos que compõem o espaço amostral para realizar a comparação de probabilidades. As ideias apresentaram predominantemente um caráter intuitivo.

Na questão a seguir, trabalhamos com a análise de comparação de probabilidades com verificação de evento impossível, assim no quadro 9, podemos observar as ideias gerais dos alunos em relação a esse conhecimento e no quadro 10 as justificativas, a partir da questão norteadora: “Existe a chance da Mônica não visitar algum amigo?”.

Quadro 9 – Visão geral das respostas apresentadas no Questionário 3 (jogo *Os passeios aleatórios da Mônica*)

Quantidades de alunos	Respostas obtidas
4	NÃO
7	SIM

Fonte: Elaborada pela autora

Quadro 10 – Resposta do questionário 3 (jogo *Os passeios aleatórios da Mônica*)

(continua)

Aluno	Respostas obtidas	Justificativas
A1	Não	“Por que independente de qual casa ela for ela vai andar 4 quarteirões”
A2	Sim	“Como a sorte está escolhendo, Mônica não poderá ter certeza que conseguirá visitar todos”
A3	Sim	“Porque ele pode não ser sorteado”
A4	Sim	“Por que ela vai jogar a moeda primeiro e pode ser que ela cai no mesmo amigo repetido”
A5	Não	“Não porque todos moram em esquinas então não tem como, só se ela cortar caminho”

Quadro 10 – Resposta do questionário 3 (jogo *Os passeios aleatórios da Mônica*)
(continuação)

Aluno	Respostas obtidas	Justificativas
A6	Não	“Porque não tem como ela não visitar todo mundo”
A7	Sim	“Por que se cai para cima ela não visita o Bidu”
A8	Sim	“Por que é na sorte e ela pode ficar sem visitar um amigo”
A9	Sim	“Por que depende do lado que a moeda cair”
A10	Sim	“Porque o jogo é de sorte”
A11	Não	“Por que ela joga uma moeda”

Fonte: Elaborada pela autora

Conforme mencionado anteriormente, as possibilidades de Mônica visitar seus amigos são variadas, e essa diversidade decorre da quantidade de trajetos possíveis que Mônica pode seguir para encontrá-los. No entanto, observa-se que essa complexidade não foi devidamente considerada nas respostas dos alunos, que novamente atribuíram o fator sorte ou azar ao amigo a ser visitado por Mônica. É evidente também que alguns alunos justificaram a impossibilidade de Mônica não visitar algum amigo, pois todos estariam a uma distância igual, permitindo que ela percorresse os 4 bairros e visitasse cada um deles.

O próximo questionário, conduzido após o desenvolvimento da atividade realizada pelos alunos, reintroduz a pergunta: "Todos os amigos terão a mesma chance de serem visitados?" Essa questão concentra-se na comparação de probabilidades, visando compreender e analisar a habilidade dos alunos em avaliar probabilidades distintas. A repetição da pergunta tem o propósito de verificar se os alunos, após a experimentação, adquiriram uma ideia aprimorada do cenário, ao mesmo tempo que busca confrontar ou reafirmar as respostas fornecidas anteriormente.

Quadro 11 – Visão geral das respostas apresentadas no Questionário 4 (jogo *Os passeios aleatórios da Mônica*)

Quantidades de alunos	Respostas obtidas
10	NÃO
1	SIM

Fonte: Elaborada pela autora

Quadro 12 – Respostas do questionário 4 (jogo *Os passeios aleatórios da Mônica*)

Aluno	Respostas obtidas	Justificativas
A1	Não	“O Bidu e o Horácio só conseguem ir numa sequência”.
A2	Não	“Alguns possuem diferentes caminhos para chegar à casa deles, enquanto outros pouco ou apenas um como Horácio e Bidu”.
A3	Não	“Não porque eles não foram visitados de maneira igual e o Bidu e Horácio só tem um caminho”.
A4	Não	“Não, porque o Horácio e Bidu só tem sequência XXXX ou CCCC”.
A5	Sim	“Alguns saíram menos, mas mesmo assim saíram”.
A6	Não	“Eu acho que não porque uns amigos foram mais visitados do que outros”.
A7	Não	“Não, porque teve amigos mais visitados do que outros”.
A8	Não	“Não, porque se cair coroa já não pode ser o Horácio e se cair cara já não pode ser o Bidu”.
A9	Não	“Porque se cair coroa o Horácio não vai e se cair cara o Bidu não vai”.
A10	Não	“Uns amigos não foram visitados com a mesma quantidade que os outros”.
A11	Não	“Não, porque Magali está no centro e no centro é mais possível ser escolhido”.

Fonte: Elaborada pela autora

Em uma análise geral, notou-se que as crianças demonstraram uma reflexão mais consciente das justificativas desse questionário. Agora, é evidente que as ideias dos alunos não têm, predominantemente, um caráter intuitivo.

Neste momento, os alunos conseguem compreender que a quantidade de sequências fornecidas pela moeda no jogo desempenha um papel crucial nas visitas. Isso é perceptível em situações como "O Bidu e o Horácio só conseguem ir numa sequência", onde o aluno A1 justifica que nem todos têm chances iguais, pois Bidu e Horácio só serão visitados se a sequência for composta exclusivamente de caras ou coroas, apresentando uma chance menor de ocorrência. Ou ainda, em afirmações como "Não, porque a Magali está no centro e no centro é mais provável ser escolhido" feita pelo aluno A11. Apesar de terem essa ideia, os alunos ainda não conseguiram explicar o motivo pelo qual isso ocorreu.

Entretanto, podemos entender que o desenvolvimento do trabalho proporcionou um ambiente de discussão das ideias apresentadas no jogo, , pois agora conseguiram associar de maneira mais clara a quantidade de caminhos com as chances de visita.

Já o próximo questionamento: “É possível Mônica chegar na casa do Cascão sem sair um cara?” teve como objetivo analisar a ideia dos alunos em relação a um evento impossível e pode ser analisada a seguir nos quadros 13 e 14:

Quadro 13 – Visão geral das respostas apresentadas no Questionário 5

Quantidades de alunos	Respostas obtidas
11	NÃO
0	SIM

Fonte: Elaborada pela autora

Quadro 14 – Respostas do questionário 5 (jogo *Os passeios aleatórios da Mônica*)

Aluno	Respostas obtidas	Justificativas
A1	Não	“Não é possível se não tiver Norte”.
A2	Não	“Não, todos os caminhos do Cascão precisam de uma cara”.
A3	Não	“Não porque não tem como ela chegar no Cascão sem sair cara, porque se não ela chegaria no Bidu e não no Cascão”.
A4	Não	“Não, porque precisa de um Norte”.
A5	Não	“Não, porque se for só coroa A Mônica vai para a casa do Bidu”.
A6	Não	“Não, porque ele está um quarteirão acima e se cair só coroa o único que pode é o Bidu”.
A7	Não	“Não, porque a coroa só vai para o leste e o leste é a direção do Bidu”.
A8	Não	“Não porque todos iam cair em coroa e ela iria visitar o Bidu”.
A9	Não	“Não, porque a coroa vai para o leste (lado) e se não sair a cara vai chegar no Bidu”.
A10	Não	“Não, porque precisava de uma cara para chegar no Cascão”.
A11	Não	“Não, ela precisa de um Norte para chegar na casa do Cascão”.

Fonte: Elaborada pelo autor

Para visitar o Cascão é necessário sair três coroas e uma cara no lançamento das moedas. Logo, é impossível chegar até o Cascão sem sair uma cara.

De uma forma geral, através desse questionário, fica evidente que os alunos não tiveram dificuldade em responder corretamente à questão, apresentando que o reconhecimento de um evento impossível é uma habilidade presente nos alunos.

Além das análises conduzidas por meio dos questionários, uma investigação adicional foi realizada, abrangendo as indagações, justificativas, dúvidas e perguntas que surgiram ao final da atividade.

Ao encerrarmos o jogo *Os passeios aleatórios da Mônica*, os alunos foram reunidos para compartilhar suas reflexões finais. Durante essa discussão, questionou-se aos alunos sobre o motivo pelo qual alguns amigos eram visitados com mais frequência pela Mônica do que outros.

Uma aluna sugeriu que aqueles localizados no centro tinham uma maior probabilidade de serem visitados do que os nas extremidades, embora não conseguisse justificar completamente essa observação. Nesse contexto, o aluno A4 ao tentar complementar essa resposta, mencionou que "os da ponta têm apenas uma sequência, ou só sair cara ou só sair coroa, o que é mais difícil". Nesse momento, os alunos começaram a perceber a existência de diferentes trajetos que a Mônica poderia seguir para visitar a Magali. Por exemplo, mencionaram quatro possíveis caminhos: CCXX, XXCC, XCXC, CXCX. Ao mesmo tempo, notaram que para o Bidu existia apenas um caminho: XXXX.

Apesar dessa percepção, os alunos não conseguiram associar todos os caminhos possíveis que a Mônica poderia percorrer para visitar Cebolinha, Cascão e Magali. Entretanto, reconheceram que a existência de mais caminhos aumentava a chance do amigo ser visitado.

É interessante destacar que no início das atividades, os alunos questionaram o significado da palavra "acaso". No entanto, logo associaram essa palavra à sorte. Observa-se que na maioria dos questionários respondidos pelos alunos, eles citam a sorte como determinante nas visitas da Mônica.

Em conclusão, a realização do jogo *Os passeios aleatórios da Mônica* não apenas proporcionou uma análise das ideias dos alunos em relação à probabilidade, mas também foi capaz de aprofundar conceitos de aleatoriedade, espaço amostral e comparação de probabilidades promovendo a evolução no pensamento dos alunos em relação a esses temas.

Embora os alunos tenham enfrentado desafios ao associar o espaço amostral do jogo e as diferentes probabilidades que Mônica possuía, ficou claro que a experiência do jogo enriqueceu significativamente o entendimento dos alunos sobre o papel do acaso e da sorte no contexto do problema. As respostas e justificativas apresentadas indicaram uma assimilação

mais profunda dos conceitos, evidenciando uma aprendizagem ativa e reflexiva por parte dos estudantes.

Portanto, o jogo não apenas serviu como uma ferramenta eficaz para explorar alguns conceitos matemáticos, mas também estimulou o pensamento dos estudantes em relação à probabilidade.

5.2 Análise do jogo *Travessia do Rio*

Em relação ao jogo *Travessia do Rio*, conforme mencionado anteriormente, os alunos inicialmente posicionaram seus barquinhos nas casas de 1 a 12 antes de conhecerem as regras do jogo. Após a explicação do jogo, foi concedida a oportunidade de realizar duas mudanças. Por exemplo, poderiam trocar da casa 1 para a casa 7, caso tivessem inicialmente escolhido a casa 1 e percebessem que essa era uma situação impossível.

A questão orientadora deste momento foi: “Após a explicação das regras do jogo, você gostaria de mover algum dos barquinhos para uma casa diferente? Se sim, qual barquinho você gostaria de mover e por quê? Se não quiser fazer nenhuma mudança, por favor, também explique o motivo”.

Assim, no quadro 15 a seguir é possível observar as justificativas apresentadas pelos alunos em relação a sua mudança ou permanência.

Quadro 15 – Respostas à Ficha de Reflexão sobre Mudanças no Jogo (jogo Travessia do Rio)
(continua)

Aluno	Respostas obtidas	Justificativas
A1	“Sim”	“Mudei da casinha 4 para 10 e da casinha 1 para 12 para ter mais chances”.
A2	“Sim”	“Eu mudei da casinha 3 para a 10 e do 3 para 12 pois quanto maior o número, mais diferentes combinações tem ao somar”.
A3	“Sim”	“Mudei a casinha Dois para 8 e a casinha 2 para casinha 12”.
A4	“Não”	“Para ter mais chance de sair”.
A5	“Sim”	“Mudei da casinha 1 para a 7 e da casinha 4 para a 3”.
A6	“Não”	“Por que eu acho mais fácil”.
A7	“Sim”	“Sim, porque fiz outra estratégia apostei duas no 10 e duas no 11”;

Quadro 15 – Respostas à Ficha de Reflexão sobre Mudanças no Jogo (jogo Travessia do Rio)
(continuação)

A8	“Sim”	“Sim, porque tem mais chances. mudei a casinha 2 para 1 e a casinha 6 para 7”.
A9	“Sim”	“Mudei da casa 8 para as 6 e da 3 para a 4”.
A10	“Sim”	“Eu mudei a casinha 5 para a 1”.
A11	“Sim”	“Eu mudei as casinhas 3 e 12. Não apostei nas casinhas 3,6 e 12 porque a chance de tirar é mais difícil. Coloquei no 2,4 e 1 porque é mais fácil”.

Fonte: Elaborada pela autora

Este questionamento foi formulado com o intuito de analisar a ideia inicial dos alunos em relação ao jogo, bem como ao espaço amostral e aos eventos considerados impossíveis que permeiam essa atividade.

Sabemos que ao somar as *faces* de dois dados, obtemos diferentes combinações que resultam nos números de 2 a 12. Contudo, alguns números apresentam mais combinações do que outros.

Neste estágio inicial, foi possível perceber que alguns alunos estabelecem uma relação entre a probabilidade de um número ocorrer e o número de combinações ao jogar dois dados, como ilustrado na seguinte resposta do aluno A2: "Eu mudei da casinha 3 para a 10 e do 3 para 12, pois quanto maior o número, mais diferentes combinações tem ao somar."

Contudo, é crucial destacar que, nesse caso, o aluno associou erroneamente a ideia de que números mais altos oferecem mais possibilidades de combinações. Contrariamente, sabemos que essa relação não se mantém verdadeira. Por exemplo, para o número 12, o maior resultado possível ao somar duas *faces* de dados, apenas a soma $6+6$ atende a essa condição. Em contrapartida, o número 7, por exemplo, possui seis combinações possíveis, sendo elas: $1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+2$, $6+1$.

Também é perceptível que nem todos os alunos consideraram adequadamente o espaço amostral do jogo, que representa o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento. Essa situação fica evidente em declarações como a do aluno A11: "Eu mudei as casinhas 3 e 12. Não apostei nas casinhas 3, 6 e 12 porque a chance de tirar é mais difícil. Coloquei no 2, 4 e 1 porque é mais fácil." Nessa resposta, o aluno apresenta justificativas baseadas em intuições pessoais sobre o que consideram mais fácil ou difícil de ocorrer, sem uma análise mais profunda do espaço amostral.

Observamos também que alguns alunos fizeram a remoção de barquinhos da casinha 1, caracterizada como uma impossibilidade de ocorrência. Um determinado aluno, identificado

como A1, justificou: "Mudei da casinha 4 para 10 e da casinha 1 para 12 para ter mais chances", no entanto, não aprofundou suas justificativas para que possamos inferir que a alteração tenha sido motivada pela impossibilidade do evento 1.

No mesmo contexto, é relevante mencionar uma situação captada por meio de uma gravação em áudio, na qual um aluno expressou desconforto ao perceber que sua dupla havia colocado seus barquinhos no número 1. Ele argumentou que seu amigo não poderia ganhar, pois afirmou que o número 1 não sairia. Apesar do aviso, o amigo não o ouviu e manteve a aposta no número 1.

Além disso, observamos que alguns alunos alteraram suas apostas, optando pelo número 1 e justificando que teriam mais chances com essas mudanças, sem perceber a impossibilidade desse resultado. Enquanto outros prontamente perceberam que o evento do número 1 não era possível, outros só notaram essa situação durante a execução do jogo. Nesse contexto, uma aluna solicitou permissão para fazer uma mudança, pois havia apostado no 1 e só agora percebeu que essa opção era impossível de ocorrer. No entanto, a troca não foi autorizada, uma vez que, conforme as regras estabelecidas, essa modificação deveria ocorrer antes do início do jogo.

Esse ponto de partida estabeleceu as bases para a dinâmica subsequente. Após a conclusão desta rodada, os alunos foram indagados com a seguinte questão: "João colocou todos os seus barquinhos na casa 1. Ele possui chance de ganhar o jogo?", focalizando a ideia deles sobre o espaço amostral e a aleatoriedade. As respostas desse questionamento podem ser observadas nos quadros 16 e 17 a seguir:

Quadro 16 – Visão geral das respostas apresentadas no Questionário 1 (jogo *Travessia do Rio*)

Quantidades de alunos	Respostas obtidas
11	NÃO
0	SIM

Fonte: Elaborada pela autora

Quadro 17 – Respostas do questionário 1 (jogo *Travessia do Rio*)

(continua)

Aluno	Respostas obtidas	Justificativas
A1	Não	“Porque tem que somar”.
A2	Não	“Como possui dois dados que tem números de 1 a 6 o mínimo seria $1 + 1 = 2$ ”.

Quadro 17 – Respostas do questionário 1 (jogo Travessia do Rio)

(continuação)

Aluno	Respostas obtidas	Justificativas
A3	Não	“Porque tem que somar”.
A4	Não	“Porque não tem como somar”.
A5	Não	“Porque tem que somar”;
A6	Não	“Porque não tem nenhuma forma de cair num com os dois dados só se jogar um dado aí poderia cair no 1”.
A7	Não	“Porque são dois dados e se cair um em cada dado vai ficar 2”.
A8	Não	“Porque tem que somar”.
A9	Não	“Porque são dois dados e o um não dá”.
A10	Não	“Porque tem que somar os dois dados”.
A11	Não	“Não, porque você terá que somar. São dois dados e no dado não tem 0”.

Fonte: Elaborada pela autora

É conhecido que, ao lançar dois dados, é impossível obter uma soma de 1. O objetivo era verificar se as crianças tinham essa compreensão.

Dessa forma, por meio das justificativas dos alunos, tornou-se evidente que todos concordaram que João não poderia ganhar o jogo nessas condições. As justificativas variaram, com alguns alunos explicando que a soma mínima ao lançar dois dados seria dois, enquanto outros destacaram a impossibilidade de obter um resultado menor devido à ausência do zero nos dados. Entretanto, é notável que a realização do jogo, antes desse questionário, promoveu uma melhoria significativa na ideia dos alunos em relação ao evento impossível.

Esta observação evidencia que as crianças demonstraram relativa facilidade ao identificar eventos impossíveis por meio da análise dos elementos que compõem um determinado espaço amostral. Essa habilidade também pode ser observada em estudos, como o de Carvalho (2005), que demonstrou que crianças foram capazes de antecipar eventos certos e eventos impossíveis.

Para prosseguir com a investigação, sugerimos aos alunos o seguinte questionamento: “Joana distribuiu todos os seus barquinhos na casa 8. Nos dados fornecidos, quais combinações de números podem ser somadas para resultar no número 8?”

Será possível analisar as justificativas apresentadas pelos alunos no quadro 18 a seguir:

Quadro 18 – Respostas do questionário 2 (jogo *Travessia do Rio*)

Aluno	Justificativas
A1	5 + 3
A2	4+4, 3+5, 6+2
A3	4+4, 3+5, 6+2
A4	4+4, 1+7, 6+2, 2+6
A5	4+4, 6+2
A6	4+4, 3+5, 6+2, 2+6
A7	4+4, 3+5, 6+2, 8+0, 5+3
A8	5+3
A9	6+2, 4+4, 2+6
A10	4+4, 3+5, 6+2
A11	4+4, 3+5, 6+2

Fonte: Elaborada pela autora

Ao analisar as justificativas, é evidente que todos os alunos apresentaram pelo menos uma combinação cuja soma resulta em 8. No entanto, observa-se uma dificuldade significativa na identificação de que eventos como $3 + 5$ e $5 + 3$ são possibilidades distintas; apenas quatro alunos apresentaram combinações nesse formato.

Além disso, notamos que algumas crianças apresentaram combinações que não são viáveis ao lançar dois dados, como $0 + 8$ e $1 + 7$. Esses exemplos destacam a necessidade de aprofundar a compreensão dos alunos sobre as combinações possíveis ao explorar o espaço amostral do jogo.

De maneira geral, observamos que poucas crianças refletiram, conscientemente, sobre o espaço amostral para estabelecer essas combinações.

Para concluir o questionário, a última pergunta orientadora foi: "Se eu lançar dois dados, qual soma é mais fácil de obter e por quê?" As respostas dos alunos estão detalhadas no Quadro 19 a seguir:

Quadro 19 – Respostas do questionário 3 (jogo *Travessia do Rio*)

(continua)

Aluno	Respostas obtidas	Justificativas
A1	10	"Porque é o número mais fácil de cair".
A2	7	"Porque saiu mais esse".

Quadro 19 – Respostas do questionário 3 (jogo Travessia do Rio)

(continuação)

Aluno	Respostas obtidas	Justificativas
A3	6, 7	“Porque foi o que mais saiu para mim”.
A4	7	“Porque sempre caiu no 7 o jogo todo”.
A5	8	“Porque na minha jogada o número que mais saiu foi 8”.
A6	6	“Porque só saía esse número”.
A7	10	“Porque é mais fácil de cair”.
A8	7	“Porque é um número mais fácil de sair”.
A9	8	“Caiu mais oito”.
A10	7	“Porque saiu mais vezes em um jogo. O 7 saiu 11 vezes”.
A11	7	“Porque é o número que mais saiu no jogo”.

Fonte: Elaborada pela autora

Nessa última questão, é evidente, a partir de suas justificativas, que os alunos utilizaram sua experiência no jogo para responder. Embora seis alunos tenham apontado o 7 como o número mais fácil de sair, o que é verdadeiro devido ao maior número de combinações em comparação com os outros números, escolheram o sete devido à sua frequência significativa durante o jogo.

Além disso, nota-se que os outros dois números mais mencionados foram o 6 e o 8, que realmente são os números que, após o 7, possuem mais combinações.

Neste contexto, os alunos deixaram de considerar as diversas possibilidades de se obter algumas somas, ou seja, não levaram em consideração o espaço amostral das combinações possíveis ao somar dois dados. Esse espaço amostral, que é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento, possui alguns números com maiores possibilidades de combinações. Por exemplo, o número 3 possui duas possibilidades de combinação ($1+2$ e $2+1$), enquanto o número 7 tem seis combinações possíveis ($1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+2$, $6+1$). Portanto, a probabilidade de obter o número 7 é maior, uma vez que há mais eventos possíveis em comparação com o número 3.

No entanto, ao responderem a essa questão, os alunos não refletiram sobre essa disparidade nas possibilidades de combinações, destacando uma lacuna na consideração do espaço amostral e nas probabilidades associadas aos diferentes resultados.

A execução do jogo não apenas permitiu a análise das concepções dos alunos sobre probabilidade, mas também contribuiu para que aprofundassem um pouco sobre conceitos de

aleatoriedade, espaço amostral e comparação de probabilidades, contribuindo assim para o avanço no entendimento dos alunos em relação a esses temas.

De modo geral, é possível observar que o jogo não apenas desempenhou um papel eficaz na exploração de conceitos probabilísticos, mas também impulsionou o pensamento dos estudantes em relação a essas questões.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de analisar algumas ideias de estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental perante situações que envolvem probabilidade. Assim, a partir das atividades propostas e os questionários associados foi possível observar que eles desempenharam um papel crucial na pesquisa, proporcionando uma análise detalhada das ideias dos alunos em relação a conceitos como probabilidade, acaso e eventos aleatórios, contribuindo de maneira significativa para atingir os objetivos propostos.

Observou-se, neste estudo, que as crianças demonstraram ideias intuitivas, nem sempre coerentes, diante das demandas cognitivas investigadas. Verificou-se uma associação frequente da aleatoriedade à sorte ou ao azar, alinhando-se com as concepções intuitivas de probabilidade descritas por Batanero e Diaz (2007). No que diz respeito ao espaço amostral, em relação ao jogo *Travessia do Rio*, mesmo enfrentando dificuldades na elaboração de uma lista com as respostas, as crianças não hesitaram em registrar pelo menos uma possibilidade. Ao abordar a formação do número 8 no lançamento de dois dados, todas as crianças listaram pelo menos um resultado, com algumas delas incluindo três das cinco possíveis possibilidades. Contudo, uma dificuldade real destacada foi a incompreensão de que a ordem dos eventos resulta em possibilidades distintas, como evidenciado pelo descarte de eventos como $5 + 3$ se já tivessem registrado $3 + 5$ por grande parte dos alunos.

Quanto à identificação de eventos impossíveis, a maioria das crianças não teve dificuldades em reconhecê-los nos dois jogos, apresentando argumentos consistentes em sua maioria.

No que se refere à comparação de probabilidades, poucas crianças conseguiram analisar as probabilidades considerando os elementos dos eventos no espaço amostral. No entanto, muitas demonstraram indícios de compreensão, indicando a necessidade de intervenção apropriada para a consolidação desse aprendizado.

No jogo *Travessia do Rio*, os alunos tendiam a comparar os números considerando o valor absoluto ou a ordem, desviando do foco proposto na análise das possibilidades de formação dos eventos no lançamento de dois dados. Por outro lado, no jogo *Os passeios aleatórios da Mônica*, as crianças apresentaram reflexões mais consistentes na comparação de probabilidades, relacionando-as aos elementos dos eventos envolvidos no espaço amostral. A capacidade de desenhar caminhos no jogo *Os passeios aleatórios da Mônica* pode ter facilitado essas compreensões, indicando que algumas situações propiciam uma compreensão mais fácil do que outras.

Apesar de as crianças não possuírem conhecimentos consolidados sobre os temas probabilísticos discutidos no estudo, observa-se claramente que as noções intuitivas emergem e podem servir como base para a construção de conhecimentos mais coerentes, especialmente quando há instrução formal para tal (SILVA, 2016).

Além disso, foi possível evidenciar que as crianças adquiriram conhecimento por meio da experiência com o jogo, mesmo que esse não fosse o objetivo central do estudo. Outras reorganizaram seus pensamentos em resposta às intervenções e questionamentos da pesquisadora e dos colegas de classe, destacando-se como um mecanismo eficaz de intervenção que resultou em aprendizado.

Concordamos com Silva (2016) quando a autora aborda que é imprescindível que haja intervenção escolar para ampliação das noções iniciais que nem sempre são corretas. Assim como concordamos com a perspectiva de Bryant e Nunes (2012), os quais destacam a importância de intervenções escolares para a ampliação da compreensão da probabilidade, especialmente no que se refere aos conceitos de aleatoriedade e espaço amostral.

De maneira geral, podemos concluir que apesar de nenhum dos conceitos discutidos aqui estarem consolidados, as crianças apresentaram potencial para o desenvolvimento e aprendizagem deles.

Além disso, assim como mencionado por Silva (2016), constatamos aqui que os jogos abordados neste estudo desempenham um papel fundamental como facilitadores e impulsionadores no processo de aprendizagem de noções probabilísticas. Eles não apenas serviram para identificar e analisar as ideias das crianças, mas também contribuíram para a ampliação do entendimento delas em relação a conhecimentos que envolvem o raciocínio probabilístico. Portanto, os jogos têm o potencial de promover o desenvolvimento da alfabetização probabilística (Gal, 2004), destacando-se na abordagem de elementos cognitivos como aleatoriedade, incerteza, cálculo de probabilidades, linguagem e contexto, bem como de componentes disposicionais, tais como crenças e atitudes.

REFERÊNCIAS

- BATANERO, C.; DIAZ, C. **Meaning and understanding of mathematics**. New York: Springer, 2007.
- BENNETT, D. J. **Aleatoriedade**. São Paulo: Martins Fontes, 2003.
- BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo abordagem fenomenológica**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
- BORBA, M. C. *et al.* **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- BRANDÃO, Z. A dialética macro/micro na sociologia da educação. **Cadernos de pesquisa**, São Paulo, n. 113, p. 153-165, 2001. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/cp/a/bLYVCGRqgZKkmpCrTbvCXw/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 05 out. 2023.
- BRANSKI, R. M.; FRANCO, R. A. C.; LIMA JÚNIOR, O. F. Metodologia de estudo de casos aplicada à logística. *In*: CONGRESSO DE PESQUISA E ENSINO EM TRANSPORTE, 24., 2010, Salvador. **Anais [...]**. Salvador: 2010. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/277598822_METODOLOGIA_DE_ESTUDO_DE_CASOS_APLICADA_A_LOGISTICA. Acesso em: 05 out. 2023.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC, 2017.
- BRYANT, P.; NUNES, T. **Children's understanding of probability: a literature review**. Nuffield Foundation. 2012. Disponível em: http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf. Acesso em: 22 sep. 2023.
- CARVALHO, R. P. F. **A formação de conceitos probabilísticos em crianças de 4ª série do ensino fundamental**. Orientadora: Beatrice Laura Carnielli. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2005.
- CARNEIRO, K. T. **Por uma memória do jogo: a presença do jogo na infância de octogenários e nonagenários**. Orientador: Denis Domeneghetti Badia. 2015. Tese (Doutorado em Educação Escolar) - Faculdade de Ciências e Letras, Universidade Estadual Paulista, Araraquara, 2015. Disponível em: https://agendapos.fclar.unesp.br/agenda-pos/educacao_escolar/3520.pdf. Acesso em: 16 set. 2023.
- CAZORLA, I.; SANTANA, E. **Tratamento da informação para o ensino fundamental e médio**. Itabuna: Via Litterarum, 2006.
- CONTI, K. C.; VILAS BÔAS, S. G. Acaso e probabilidades nos anos iniciais: potencial dos jogos como mediadores na construção do conhecimento. **Revista brasileira de educação em**

ciências e educação matemática, Cascavel, v. 3, n. 2, p. 379–399, 2019. Disponível em: <https://e-revista.unioeste.br/index.php/rebecem/article/view/22625> . Acesso em: 8 dez. 2023.

COUTINHO, C. Q. S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta?. **Revista eletrônica de educação matemática**. São Paulo, v. 2, n.1, p.50-67, 2007. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12991/12092>. Acesso em: 8 dez. 2023.

COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista**. Orientador: Tânia Maria Mendonça Campos. 1994. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1994.

CRESWELL, J. W. **Research design: qualitative & quantitative approaches**. London: Sage, 1994.

FERNANDEZ, D. W. X.; FERNANDEZ, D. X. O prazer de aprender probabilidade através de jogos: descobrindo a distribuição binomial. *In*: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL “EXPERIÊNCIAS E EXPECTATIVAS DO ENSINO DE ESTATÍSTICA - DESAFIOS PARA O SÉCULO XXI”, 1999, Florianópolis. **Anais [...]**. Florianópolis: 1999.

GAL, I. **Towards 'probability literacy' for all citizens**. Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2004.

KIAN, F. A. Linguagem probabilística para o final dos anos iniciais do ensino fundamental: um caminho para o desenvolvimento da alfabetização probabilística. *In*: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019, SÃO PAULO. **Anais [...]**. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2019.

KLUBER, T. E.; BURAK, D. Sobre a pesquisa qualitativa na modelagem matemática em educação matemática. **Boletim de educação matemática**, Rio Claro, v. 26, n. 43, p.111-133, 2012. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/rjqt7ZmmPYckD4LpvvXdVzm/>. Acesso em: 4 dez. 2023.

OLIVEIRA, C. L. Um apanhado teórico-conceitual sobre a pesquisa qualitativa: tipos, técnicas e características. **Travessias**, Cascavel, v. 2, n. 3, p. e3122, 2010. Disponível em: <https://e-revista.unioeste.br/index.php/travessias/article/view/3122/2459> . Acesso em: 4 dez. 2023.

LOPES, C. E.; MEIRELLES, E. O desenvolvimento da probabilidade e da estatística. *In*: ENCONTRO REGIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, 18., 2005, Campinas. **Anais [...]**. Campinas: Estocástica nas Séries Iniciais, 2005. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais.htm>. Acesso em: 13 nov. 2023.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

MAGALHÃES JÚNIOR, A. *et al.* Teaching probability for children: challenges and solutions: **Concilium**, [S. l.], v. 23, n. 19, p. 525–532, 2023. Disponível em: <http://clium.org/index.php/edicoes/article/view/2044> . Acesso em: 20 oct. 2023.

MERRIAM, S. B. **Qualitative research and case study applications in education**. São Francisco: Jossey-Bass, 1998.

OLIVEIRA, C. L. Um apanhado teórico-conceitual sobre a pesquisa qualitativa: tipos, técnicas e características. **Travessias**, Cascavel, v. 2, n. 3, p. e3122, 2010. Disponível em: <https://e-revista.unioeste.br/index.php/travessias/article/view/3122>. Acesso em: 13 dez. 2023.

OLIVEIRA, G. S. *et al.* Grupo Focal: uma técnica de coleta de dados numa investigação qualitativa?. **Cadernos da Fucamp**, Monte Carmelo, v.19, n.41, p.1-13, 2020. Disponível em: <https://revistas.fucamp.edu.br/index.php/cadernos/article/view/2208>. Acesso em: 13 dez. 2023.

PINHEIRO, M. G. C.; SILVA, A. F. G.; GALVÃO, M. E. E. L. Dos PCN à BNCC: uma análise interpretativa das indicações de aprendizagens no tema probabilidade. **Revista paranaense de educação matemática**, Campo Mourão, v. 9, n. 18, p. 137–157, 2020. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6188>. Acesso em: 11 dez. 2023.

PONTE, J. P. O estudo de caso na investigação em educação matemática. **Quadrante: revista teórica e de investigação**, Lisboa, v. 3, n. 1, p. 3–18, 1994. Disponível em: <https://quadrante.apm.pt/article/view/22652>. Acesso em: 23 out. 2023.

RESTREPO B, L. F.; GONZÁLEZ L, J. La historia de la probabilidad. **Revista colombiana de ciências pecuárias**. Medellín, v. 16, 2003. Disponible: <https://www.redalyc.org/pdf/2950/295026121011.pdf>. Acesso em: 14 dic. 2023.

ROCHA, J. C. **A reinvenção solidária e participativa da universidade**: um estudo sobre redes de extensão universitária. Orientador: Celma Borges. 2008. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2008.

RUFINO, M. A. S.; SILVA, J. R. Aprendizagem significativa de probabilidade: um olhar sobre a compreensão dos professores do ensino fundamental. **Revista dynamis**, Blumenau, v. 25, n. 3, p. 115-137, 2019. Disponível em: <https://bu.furb.br/ojs/index.php/dynamis/article/view/8524> . Acesso em: 13 dez. 2023.

ROSS, S. **Probabilidade**: Um curso moderno com aplicações. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

SANT’ANA, W. P.; LEMOS, G. C. Metodologia científica: a pesquisa qualitativa nas visões de Lüdke e André. **Revista eletrônica científica ensino interdisciplinar**, Mossoró, v. 4, n. 12, 2020. Disponível em: <https://periodicos.apps.uern.br/index.php/RECEI/article/view/1710>. Acesso em: 13 dez. 2023.

SANTOS, F. J. S.; SOUSA, S. R. C. T.; ARAÚJO, R. L. Jogos como instrumento avaliativo no ensino de geografia. *In*: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 2015, Campina Grande. **Anais [...]**. Campina Grande: Realize Editora, 2015. Disponível em: <http://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/16212> . Acesso em: 05 out. 2023.

SÁTYRO, N. G. D.; D'ALBUQUERQUE, R. W. O que é um estudo de caso e quais as suas potencialidades. **Sociedade e cultura**, Goiânia, v. 23, 2020. Disponível em: <https://revistas.ufg.br/fcs/article/view/55631>. Acesso em: 13 dez. 2023.

SILVA, E. J. S. **Estatística aplicada à química**. São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe: Cesad, 2012.

SILVA, J. L.C.; FERNANDES, M. W.; ALMEIDA, R. L. F. **Estatística e probabilidade**. 3. ed. Fortaleza: Eduece, 2015.

SILVA, R. C. B. “**É a moeda que diz, não é a gente que quer não**”: conhecimentos probabilísticos de crianças em situação de jogo. Orientador: Rute Elizabete de Souza Rosa Borba. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Faculdade de Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

SILVA, W. N. **Um resumo sobre a história da probabilidade e alguns problemas curiosos**. Orientador: Aroldo Eduardo Athias Rodrigues. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Santarém, 2020.

SOARES, S. J. Pesquisa científica: uma abordagem sobre o método qualitativo. **Revista ciranda**, Montes Claros, v. 3, n. 1, p. 1–13, 2020. Disponível em: <https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/ciranda/article/view/314> . Acesso em: 13 dez. 2023.

TOLEDO, L. A.; SHIAISHI, G. F. Estudo de caso em pesquisas exploratórias qualitativas: um ensaio para a proposta de protocolo do estudo de caso. **Revista da FAE**, Curitiba, v. 12, n. 1, 2016. Disponível em: <https://revistafae.fae.edu/revistafae/article/view/288>. Acesso em: 4 dez. 2023.

VASCONCELOS, V. B.; VASCONCELOS, G. B.; CHAQUIAM, M. Um percurso pela história da probabilidade. **Boletim cearense de educação e história da matemática**, Serrinha, v. 9, n. 26, p. 31–46, 2022. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/7990> . Acesso em: 12 dez. 2023.

VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade. **Revista brasileira de história da matemática**, Rio Claro, v. 8, n. 16, p. 143–153, 2020. Disponível em: <http://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/177> . Acesso em: 15 nov. 2023.

WARSI, K. **O livro da matemática**. Rio de Janeiro: Globo Livros, 2020.