

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO
CAMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ANTONIO ELCIO FERREIRA JÚNIOR

**Caracterização não linear de sistemas aeroelásticos por meio da Função
Densidade de Probabilidade Conjunta**

São João da Boa Vista

2021

ANTONIO ELCIO FERREIRA JÚNIOR

**Caracterização não linear de sistemas aeroelásticos por meio da Função
Densidade de Probabilidade Conjunta**

Versão original

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Campus de São João da Boa Vista para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação.

Orientador: Prof. Dr. Rui Marcos Grombone de Vasconcellos

Coorientador: Prof. Dr. André Alves Ferreira

São João da Boa Vista

2021

F383c

Ferreira Júnior, Antonio Elcio

Caracterização não linear de sistemas aeroelásticos por meio da Função Densidade de Probabilidade Conjunta / Antonio Elcio Ferreira Júnior. -- São João da Boa Vista, 2021

131 p. : il., tabs., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Câmpus Experimental de São João da Boa Vista, São João da Boa Vista

Orientador: Rui Marcos Grombone de Vasconcellos

Coorientador: André Alves Ferreira

1. Aeroelasticidade. 2. Estabilidade dos aviões. 3. Sistemas não lineares. 4. Análise de séries temporais. 5. Estatística. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Câmpus Experimental de São João da Boa Vista. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Caracterização não linear de Sistemas Aeroelásticos por meio da Função Densidade de Probabilidade Conjunta

AUTOR: ANTONIO ELCIO FERREIRA JÚNIOR
ORIENTADOR: RUI MARCOS GROMBONE DE VASCONCELLOS
COORIENTADOR: ANDRE ALVES FERREIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. RUI MARCOS GROMBONE DE VASCONCELLOS (Participação Virtual)
Coordenadoria de Curso de Engenharia Aeronáutica / Câmpus de São João da Boa Vista



Prof.Dr. FLÁVIO DONIZETI MARQUES (Participação Virtual)
Departamento Engenharia Mecânica / EESC/USP



Prof. Dr. JOSÉ AUGUSTO DE OLIVEIRA (Participação Virtual)
- / UNESP - Câmpus de São João da Boa Vista

Sorocaba, 19 de julho de 2021

Dedico este trabalho aos meus pais, que sempre incentivaram o meu crescimento profissional e me apoiaram durante estes dois anos.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à Deus por sempre me guiar e me dar forças nos momentos mais difíceis e ser responsável por todas as minhas oportunidades e conquistas.

Agradeço à minha família, especialmente aos meus pais, Elcio e Luciene, pelos exemplos, integridade apoio e todos os esforços que fazem para que eu possa alcançar meus objetivos ao longo da vida.

Agradeço também ao Prof. Dr. José Augusto de Oliveira e ao Prof. Dr. Ivan Aritz Aldaya Garde, não apenas pelas orientações nas pesquisas em que realizei, mas também pelas conversas e apoio ao longo dos anos.

Por fim, agradeço imensamente ao meu orientador, Prof. Dr. Rui Marcos Grombone de Vasconcellos, não apenas pela oportunidade de realizar este trabalho, mas pelo companheirismo e dedicação no meu aprendizado.

“A única forma dos homens chegarem a algum lugar é deixando algo para trás.”

Christopher E. Nolan

Resumo

JUNIOR, Antonio Elcio Ferreira. **Caracterização não linear de sistemas aeroelásticos por meio da Função Densidade de Probabilidade Conjunta**. 2021. 133 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica), Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus Experimental de São João da Boa Vista, São João da Boa Vista, 2021.

A indústria aeronáutica realiza investimentos significativos na manutenção de aeronaves, devido a diversos fenômenos aeroelásticos que podem ocorrer ao longo das suas vidas úteis, incluindo danos à integridade estrutural. A manutenibilidade é um campo de operação responsável por analisar tal integridade por meio de estudos do ciclo de um componente, desenvolvendo processos ótimos de manutenção de uma estrutura, a fim de evitar possíveis acidentes. Para garantir a confiabilidade de um sistema, a previsibilidade de eventuais problemas ao longo de sua operação torna-se fundamental na pretensão de disponibilidade e desempenho de uma aeronave, a partir do monitoramento de sinais obtidos por sensores distribuídos pela estrutura. Uma alternativa de atingir tal requisito é a análise dos sinais por meio da Função Densidade de Probabilidade Conjunta (*Joint Probability Density Function*, J-PDF), um método estatístico que realiza mensurações do comportamento de variáveis conjuntas ao longo de um intervalo de tempo. Logo, a probabilidade da variável em determinado estado pode indicar a possibilidade de futuras anormalidades no sistema. A presente pesquisa propôs a análise da J-PDF e a avaliação da sua eficiência na área da Aeroelasticidade por meio de sinais não lineares oriundos de estruturas aeronáuticas, evidenciando a potencialidade da J-PDF para a previsão de anormalidades em uma aeronave e apresentando as vantagens que tal metodologia estatística possui, não apenas nos processos de manutenibilidade, mas também em diversas áreas de pesquisa. Os resultados demonstram a eficiência da J-PDF quando aplicada em sistemas aeroelásticos não lineares, em séries temporais numéricas e experimentais, de forma que o espaço de fase gerado demonstra a probabilidade do comportamento das variáveis ao longo do tempo. Com isso, é possível detectar futuras anormalidades e demais efeitos quando o sistema é submetido a condições específicas.

Palavras-chaves: Aeroelasticidade, Função Densidade de Probabilidade Conjunta. Manutenibilidade. Não linearidade.

Abstract

JUNIOR, Antonio Elcio Ferreira. **Nonlinear characterization of aeroelastic systems using the Joint Probability Density Function**. 2021. 133 p. Dissertation (Master of Electric Engineering), São Paulo State University (UNESP), Campus of São João da Boa Vista, São João da Boa Vista, 2020.

The aeronautical industry conducts significant investments in aircraft maintenance due to several aeroelastic phenomena that can occur during an aircraft's life, including damage to structural integrity. Maintainability is an operating field responsible for analyzing such integrity through studies of the component's cycle, developing optimal processes for maintaining a structure to avoid possible accidents. In order to guarantee the accuracy of a system the predictability of eventual problems during its operation becomes essential in the pretension of an aircraft's availability and performance by monitoring the signals obtained by sensors distributed throughout the structure. An alternative to achieve this requirement is the analysis of the signals through the Joint Probability Density Function, J-PDF, a statistical method that measures the behavior of joint variables over a period of time. Thus, the probability of the variable in a given state may indicate the possibility of future abnormalities in the system. This research aimed to analyze J-PDF and evaluate its efficiency in the Aeroelasticity extent through non-linear signals from aeronautical structures, intending to highlight the potential of J-PDF for the prediction of abnormalities in an aircraft and presenting the advantages that such statistical methodology can assist not only in the processes of maintainability but also in several research areas. The results prove the efficiency of J-PDF when applied to non-linear aeroelastic systems, so that the generated phase space demonstrates the probability of the variables behavior over time. Thereby it is possible to detect future abnormalities and another effects when the system is subjected to specific conditions.

Keywords: Aeroelasticity, Joint Probability Density Function, Maintainability, Nonlinearity.

Lista de figuras

Figura 1 – Representação do triângulo de Collar.	23
Figura 2 – Características e nomenclatura de um aerofólio.	23
Figura 3 – Forças atuantes devido a incidência do aerofólio.	24
Figura 4 – Não linearidades estruturais comuns em sistemas dinâmicos.	27
Figura 5 – Representação da separação do escoamento e geração de vórtices.	28
Figura 6 – Fases de elaboração do projeto de manutenibilidade.	30
Figura 7 – Processos de uma ACV.	31
Figura 8 – Distribuição de materiais na estrutura de uma aeronave Airbus A350.	32
Figura 9 – Processos para a aplicação do SHM em estruturas aeronáuticas.	34
Figura 10 – Esquematização de uma rede de sensores instalados na estrutura de uma asa.	35
Figura 11 – Representação de um ponto fixo para a) Poço, b) Fonte e c) Sela.	41
Figura 12 – Ponto fixo em um sistema bidimensional para a) Poço, b) Fonte, c) Sela tipo 1, d) Sela tipo 2 e comportamento oscilatório para e) Centro, f) Espiral estável e g) Espiral instável.	43
Figura 13 – Atrator de Lorenz com condições iniciais definidas.	44
Figura 14 – Onda de pulso quadrado periódico.	46
Figura 15 – Espectro de Fourier do pulso quadrado periódico.	47
Figura 16 – Trajetórias do sistema baseado em uma esfera.	57
Figura 17 – Procedimento para cálculo do expoente de Lyapunov.	58
Figura 18 – Comportamento das trajetórias em um sistema.	59
Figura 19 – Expoente de Lyapunov no mapa logístico de uma série não linear.	60
Figura 20 – Exemplificação na determinação das variáveis (número de pontos e aspecto de similaridade) para o cálculo da entropia	64
Figura 21 – Caracterização de sinais lineares e não lineares por meio do cálculo da entropia, variando o número de pontos e mantendo o aspecto de similaridade fixo.	65
Figura 22 – Representação de um espaço amostral com uma variável aleatória.	69
Figura 23 – Probabilidade do arremesso de um dado não viciado.	72
Figura 24 – Distribuição contínua de Weibull.	72

Figura 25 – Distribuição de uma PDF com $P(x_1 < X < x_2)$	73
Figura 26 – Representação de uma distribuição binomial.	75
Figura 27 – Representação de uma distribuição de Poisson.	76
Figura 28 – Representação das distribuições de probabilidade conjunta, marginal e condicional.	81
Figura 29 – Desenvolvimento da J-PDF a partir de uma distribuição binomial. . . .	83
Figura 30 – Dispersão das variáveis e histograma da série temporal.	83
Figura 31 – Tratamento de dados coletados e aplicação da J-PDF em duas dimensões.	85
Figura 32 – Mensuração da densidade de probabilidade conjunta.	86
Figura 33 – Representação da aplicação do método KDE.	86
Figura 34 – Aplicação da KDE em uma série com o fenômeno do Estol Dinâmico. .	87
Figura 35 – Projeção bidimensional do atrator de Lorenz através das séries temporais.	90
Figura 36 – J-PDF utilizada para analisar as séries temporais providas do atrator de Lorenz.	90
Figura 37 – Análise do atrator de Lorenz com a contaminação de ruído.	91
Figura 38 – Aplicação da J-PDF em um atrator de Lorenz contaminado por ruído.	92
Figura 39 – Modelo aeroelástico com folga na estrutura	93
Figura 40 – Momento restaurador da torção e da superfície de comando.	94
Figura 41 – Série temporal da superfície de comando.	97
Figura 42 – Análise do primeiro cenário de folga na estrutura, com rigidez $20k_\beta$ e J-PDF igual a $1,609 \times 10^{-3}$	98
Figura 43 – Segundo cenário de folga na estrutura, com rigidez $50k_\beta$ e J-PDF equivalente a $1,325 \times 10^{-3}$	99
Figura 44 – Terceiro cenário de folga na estrutura, sendo a rigidez igual a $100k_\beta$ e a J-PDF média igual a $0,398 \times 10^{-3}$	100
Figura 45 – Quarto cenário de dupla folga na estrutura, com $100k_\alpha$ e $100k_\beta$, e J-PDF média resultante igual a $0,197 \times 10^{-3}$	101
Figura 46 – Variação da J-PDF média e máxima com o aumento da rigidez. . . .	101
Figura 47 – Aparato utilizado para os testes de estol dinâmico.	103
Figura 48 – Determinação da frequência natural de oscilação e do momento restaurador da mola.	103
Figura 49 – J-PDF para o estol dinâmico para a) primeira velocidade analisada ($10,52m/s$) e b) velocidade posterior ($10,96m/s$), respectivamente. . .	105

Figura 50 – Caracterização da não linearidade causada pelo estol dinâmico em 0° por meio da a) Entropia e b) J-PDF média, bem como o espaço tridimensional da J-PDF em c) $11,24m/s$ e d) $13,22m/s$	106
Figura 51 – Diferença da J-PDF no caso de 5° em $9,92m/s$ e $13,55m/s$	107
Figura 52 – Variação da entropia e J-PDF em 5° com a velocidade do escoamento.	108
Figura 53 – Complexidade do sinal demonstrada na entropia e na J-PDF com incidência de 10°	109
Figura 54 – Variação da entropia e J-PDF na indução do estol dinâmico em 15°	110
Figura 55 – Representação de uma seção típica com três graus de liberdade.	111
Figura 56 – Aparato experimental para os testes de folga na estrutura.	112
Figura 57 – <i>Encoder</i> utilizado para a detecção de movimentos na superfície de comando.	112
Figura 58 – Amplitudes da superfície de comando para as velocidades analisadas.	114
Figura 59 – Série temporal e respectiva J-PDF para a deflexão da superfície de comando a $13,58m/s$	115
Figura 60 – Séries temporais da deflexão da superfície de comando e aumento da J-PDF média para o incremento da velocidades.	116
Figura 61 – Séries temporais da deflexão da superfície de comando e diminuição da J-PDF média para o decremento da velocidades.	117
Figura 62 – Séries temporais reconstruídas e J-PDF resultantes para as velocidades $13,32m/s$ e $13,14m/s$, também referentes ao decremento na superfície de comando.	118
Figura 63 – Variação da J-PDF média para os dados da superfície de comando, onde o incremento da velocidade gera uma J-PDF maior que os dados coletados no decremento.	119
Figura 64 – Série temporal não estacionária para β em $12,26m/s$ e aplicação da J-PDF.	119
Figura 65 – Aplicação da ferramenta em um sinal referente a torção do modelo aeroelástico.	120
Figura 66 – Séries temporais reconstruídas e J-PDF resultantes para as velocidades de incremento na torção.	122
Figura 67 – Séries temporais reconstruídas e J-PDF resultantes para as velocidades de decremento na torção.	123

Figura 68 – Séries temporais reconstruídas e J-PDF resultantes para as velocidades 13,32m/s e 13,14m/s, também referentes ao decremento da velocidade na torção.	124
Figura 69 – Análise da J-PDF média para os dados da torção ao longo do incremento e do decremento.	125

Lista de tabelas

Tabela 1 – Definição do atrator bidimensional.	43
Tabela 2 – Distribuição de probabilidade de um evento.	71
Tabela 3 – Parâmetros considerados para a análise aeroelástica.	97
Tabela 4 – Dados obtidos referentes a J-PDF nas simulações implementadas. . . .	100
Tabela 5 – Dados obtidos referentes a entropia e a J-PDF média na indução de estol dinâmico para 0°	107
Tabela 6 – Dados referentes a entropia e a J-PDF média para o estol dinâmico em 5° .	108
Tabela 7 – Dados obtidos referentes a entropia e a J-PDF média na indução de estol dinâmico para 10°	109
Tabela 8 – Dados obtidos referentes a entropia e a J-PDF média na indução de estol dinâmico para 15°	109
Tabela 9 – Velocidades utilizadas na análise experimental.	113
Tabela 10 – Resultados obtidos na análise da superfície de comando (β).	115
Tabela 11 – Resultados obtidos na análise da torção (α).	121

Lista de abreviaturas e siglas

ACV	Avaliação do Ciclo de Vida Singulares
AICV	Avaliação de Impacto do Ciclo de Vida
CCV	Custo do Ciclo de Vida
CDF	Função de Densidade Acumulativa
DFT	Transformada Discreta de Fourier
FDA	Função de Distribuição Acumulada
FFT	Transformada Rápida de Fourier
J-PDF	Função Densidade de Probabilidade Conjunta
KDE	Estimativa de Densidade de Kernel
LCO	Oscilação Ciclo Limite
MC	Monte Carlo
PDF	Função Densidade de Probabilidade
PFM	Função Probabilidade de Massa
PZT	Transdutor Piezoelétrico
SHM	Sistema de Monitoramento Estrutural
SNR	Relação Sinal-Ruído
SVD	Decomposição em Valores Singulares

Lista de símbolos

$C^d(\mathbf{r})$	Integral de correlação
c	Deslocamento
\dot{c}	Velocidade
D_e	Dimensão de imersão
f_0	Frequência fundamental
g	Gravidade
K	Distribuição de Kernel
L	Comprimento da haste
M_α	Momento de restauração
N_0	Número de amostras
$n_{in}(\mathbf{r})$	Número de padrões similares
$pn(i)$	Janela de um sinal
r	Distância
T_0	Período fundamental
U	Velocidade de escoamento
U_f	Velocidade de <i>Flutter</i>
x_n	Estados do sistema
\dot{x}	Sistema de uma dimensão
α	Deslocamento angular da torção
β	Deslocamento angular da superfície de comando
γ	Parâmetro de forma
Δt	Intervalo de duas amostras

θ	Parâmetro de escala
Λ	Matriz de covariância
λ	Autovalor
μ	Média de uma variável aleatória
Ω	Frequência no tempo discreto
ω	Movimento de flexão
σ^2	Variância
τ	Tempo de defasagem
φ	Tempo de defasagem

Sumário

1	Introdução	19
1.1	<i>Aeroelasticidade</i>	22
1.2	<i>Objetivo</i>	28
1.3	<i>Áreas de aplicação</i>	28
1.3.1	Mantenabilidade	28
1.3.2	A Avaliação do Ciclo de Vida	30
1.3.3	Monitoramento de Integridade Estrutural (SHM)	33
1.4	<i>Organização da Dissertação</i>	35
2	Sistemas não lineares	37
2.1	<i>A dinâmica não linear</i>	37
2.2	<i>Sistemas dinâmicos unidimensionais e bidimensionais</i>	40
2.3	<i>Sistemas dinâmicos tridimensionais e a relação com o caos</i>	43
3	Ferramentas tradicionais de análise de séries temporais não lineares	46
3.1	<i>Análise em frequência</i>	46
3.2	<i>Reconstrução do espaço de estados</i>	49
3.3	<i>Expoente de Lyapunov</i>	56
3.4	<i>Entropia</i>	61
4	A Função Densidade de Probabilidade Conjunta	66
4.1	<i>Definição</i>	66
4.2	<i>Variáveis aleatórias</i>	68
4.3	<i>Distribuições de probabilidade usuais</i>	74
4.4	<i>Desenvolvimento da ferramenta</i>	77
4.5	<i>Implementação computacional</i>	82
5	Resultados	89
5.1	<i>Implementação da J-PDF em simulações numéricas</i>	89
5.1.1	Aplicação a séries temporais provindas do atrator de Lorenz	89

5.1.2	Aplicação em um sistema aeroelástico simulado com folga na superfície de comando	92
5.2	<i>Implementação da J-PDF em séries experimentais</i>	102
5.2.1	Análise a partir de séries provindas do estol dinâmico	102
5.2.2	Análise a partir casos experimentais de um modelo com folga na estrutura	110
6	Conclusões	126
	Referências	128

1 Introdução

O campo da aeroelasticidade analisa e estuda a interação entre a deformação de estruturas flexíveis expostas a um escoamento aerodinâmico e o esforço inercial resultante. Alguns fenômenos aeroelásticos podem provocar deformações significativas, comportamentos pouco previsíveis, mas potencialmente catastróficos. Conseqüentemente, torna-se extremamente importante o seu estudo, a fim de solucionar e buscar melhorias no projeto aeronáutico, aumentando a confiabilidade e a eficiência de uma aeronave.

Os sistemas aeroelásticos são inerentemente não lineares, especialmente no caso das aeronaves que possuem estruturas leves e aerodinamicamente eficientes, estando sujeitas à comportamentos distintos dos previstos por meio de métodos convencionais de aproximação linear das equações de movimento (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996). A investigação dos problemas aeroelásticos pode ser realizada através de modelos matemáticos do processo físico ou por métodos experimentais para a inspeção direta dos fenômenos. Os resultados dos experimentos, por sua vez, podem ser utilizados em modelos semi-empíricos.

As metodologias para o desenvolvimento de modelos matemáticos com a finalidade de analisar problemas aeroelásticos apresentam deficiências, principalmente pelo fato de envolver dois meios de comportamento dinâmico diferentes, ou seja: o meio elástico que corresponde à estrutura e o meio fluídico que envolve tal aparato.

Os modelos matemáticos utilizados para o estudo prático da aeroelasticidade acabam sendo viabilizados a partir de modelos independentes, tratando o problema da estrutura e da aerodinâmica não estacionária e uma lei de acoplamento para relacionar os estados e esforços nos respectivos modelos.

Por outro lado, ensaios experimentais permitem a observação direta do comportamento de um sistema, contabilizando e analisando todos os efeitos significativos. Os experimentos realizados na área da aeroelasticidade necessitam de uma série de medidas simultâneas de sinais, como por exemplo o deslocamento de superfícies móveis, a aceleração em pontos da estrutura e variações de pressões não estacionárias nas superfícies aerodinâmicas.

Em diversos casos, as medidas necessárias para o desenvolvimento do experimento normalmente são complexas e possuem um alto custo. No entanto, para a análise de sistemas dinâmicos não lineares, os ensaios experimentais ainda representam o método de

maior eficiência para resgatar características importantes do sistema, por meio de respostas no tempo de variáveis significativas (SAVI, 2006).

Na tentativa de compreender fenômenos e comportamentos, observações são frequentemente feitas de maneira sequencial durante um certo período, onde valores futuros podem desencadear em uma série de relações com observações presentes. Esta dependência torna viável o acesso e o entendimento da dinâmica do sistema, a qual geralmente está contida nos dados informativos.

Nesses casos, os dados coletados são pertencentes a sistemas lineares ou não lineares. Os sistemas lineares produzem resultados regulares, ou seja, pequenas variações geram pequenos efeitos que são facilmente previstos por modelos matemáticos. Os sistemas não lineares, por sua vez, possuem uma resposta que pode ou não ser irregular, complexa e dependente das condições iniciais do experimento, apesar de serem resultados de um processo determinístico e não estocástico (SCHREIBER; SCHMITZ, 1997).

O termo Caos é utilizado para descrever os comportamentos complexos supracitados, os quais têm influenciado muitos ramos da ciência, visto que os sistemas caóticos podem apresentar uma dinâmica rica e surpreendente, permitindo explicar comportamentos irregulares observados em sistemas aparentemente simples e determinísticos nas mais diversas áreas de pesquisa (KANTZ; SCHREIBER, 2000).

A ligação mais direta entre o caos e o mundo real é a análise de dados provindos de séries temporais, em termos da dinâmica não linear (KANTZ; SCHREIBER, 2004). Um conjunto de equações diferenciais, ou um mapa, pode modelar um sistema apenas da forma suficiente para fornecer informações relevantes (SAVI, 2002).

Desta forma, torna-se importante analisar sistemas dinâmicos a fim de conhecer detalhes importantes sobre as suas características e particularidades, não possuindo, portanto, um modelo matemático estabelecido. Para isso, utiliza-se um conjunto de técnicas de análise de séries temporais não lineares, com a finalidade de se obter características fundamentais do sistema que são resgatadas a partir de um conjunto discreto, numerável de valores de uma variável de estado de um sistema dinâmico, análises no domínio da frequência, reconstrução do espaço de estados, estudo de recorrência e quantificação de invariantes, por exemplo.

Tendo em vista a necessidade de uma metodologia robusta, que seja capaz de coletar informações importantes sobre o comportamento do sistema não linear com base

em uma ou mais séries temporais medidas, sugere-se a aplicação da Função Densidade de Probabilidade Conjunta (*Joint Probability Density Function*, J-PDF).

A J-PDF é uma operação estatística que realiza mensurações do comportamento de variáveis analisadas ao longo de um determinado intervalo de tempo (VENKATRAMANI; SARKAR; GUPTA, 2018). Por meio de representações em espaços de fase, a J-PDF é capaz de mensurar características do estado atual de um sistema por meio das densidades de probabilidades cruzadas das variáveis analisadas, permitindo a detecção de pequenas variações no comportamento.

A partir das características citadas, espera-se que, após a implementação da J-PDF, seja possível caracterizar um sistema aeroelástico e detectar pequenas flutuações comportamentais causadas por variações de parâmetros ou mesmo aparecimento de danos estruturais, como trincas ou fadiga, as quais, considerando-se as não linearidades presentes no sistema, podem levar a variações significativas de amplitude de movimento da estrutura ou mesmo falha catastrófica.

Devido a sua potencialidade, a J-PDF mostra-se adequada para ser aplicada na forma de ferramenta analítica em processos de manutenção, como o Monitoramento da Integridade Estrutural (*Structural Health Monitoring*, SHM), por exemplo, no qual a estrutura é monitorada para que danos sejam detectados de modo simultâneo (INMAN *et al.*, 2005).

Implementada em diversas áreas da Engenharia, o SHM possui a finalidade, basicamente, de detectar danos estruturais em uma estrutura. Utilizando-se de sensores e sistemas de aquisição de dados acoplados ao corpo em operação, esses dados são obtidos e analisados a fim de determinar a existência de problemas na integridade estrutural do objeto de estudo.

Contudo, esta técnica não possui capacidade de apontar futuras divergências decorrentes de mudança de estados causados por anomalias não lineares. Conseqüentemente, o SHM pode analisar de forma incoerente determinados resultados quando há a presença de efeitos não lineares. Devido a isso, a integração da J-PDF com tal sistema pode ampliar e otimizar resultados úteis para a determinação da integridade de uma estrutura, analisando as probabilidades das variáveis e, conseqüentemente, a previsibilidade do sistema.

1.1 Aeroelasticidade

Quando um sistema aeronáutico em condições de voo sofre deformações que modificam a aerodinâmica da aeronave devido a fatores relacionados a mecânica dos fluidos, mecânica dos sólidos ou dinâmica inercial, torna-se necessário analisar os fenômenos ocorridos tendo como base os conceitos da aeroelasticidade.

A aeroelasticidade abrange a ciência que estuda as interações existentes entre as forças aerodinâmicas, inerciais e elásticas que influenciam no estado de uma estrutura aeroelástica (WRIGHT; COOPER, 2007). As aeronaves atualmente apresentam flexibilidades estruturais que podem resultar no surgimento de fenômenos aeroelásticos, capazes de causar a alteração da distribuição de sustentação e deformações estruturais, logo, a análise de um sistema aeroelástico busca obter respostas do sistema acoplado aeroestrutural, a fim de caracterizar possíveis efeitos estruturais e evitar danos significativos.

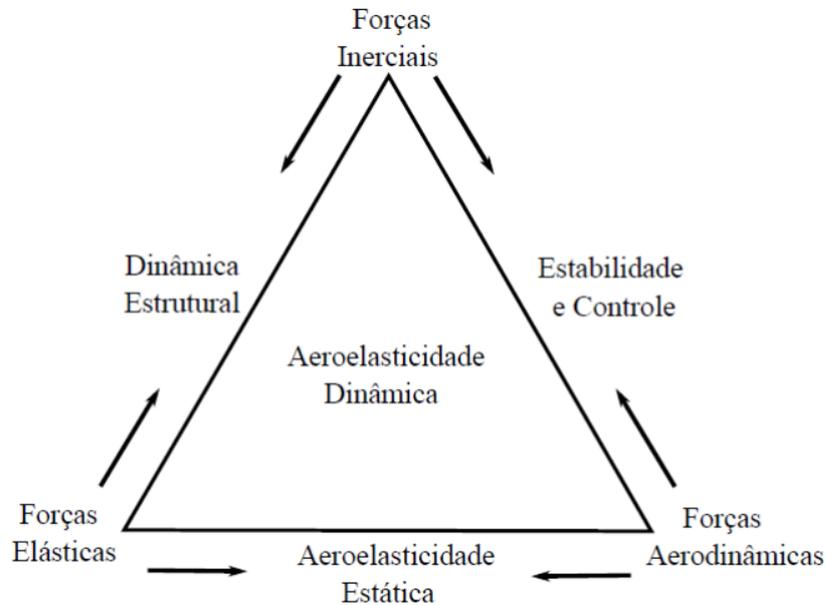
Uma descrição conhecida por representar os conceitos que envolvem a aeroelasticidade é o triângulo aeroelástico de Collar, conforme a Figura 1, por evidenciar de forma clara todas as relações existentes entre as forças presentes na aeroelasticidade (COLLAR, 1946).

As forças decorrentes do escoamento do fluido, da aceleração e das deformações, quando relacionadas separadamente, podem resultar em casos de estabilidade e controle, dinâmica estrutural e aeroelasticidade estática. Quando analisa-se o efeito conjunto, o resultado é um sistema acoplado aerodinâmica e estruturalmente, de forma que as deformações provocam alterações no carregamento aerodinâmico, que por sua vez podem provocar mais deformações. Sob a ação de forças iniciais, o comportamento resultante é chamado de aeroelasticidade dinâmica.

A integridade de uma estrutura diante do efeito do escoamento de um fluido é considerada como um dos problemas mais comuns na aeroelasticidade. Basicamente, a variação da velocidade de escoamento faz com que forças aerodinâmicas que atuam no sistema possam interagir com a estrutura, podendo causar excitação e acoplamento de modos de vibração até ocasionar uma instabilidade em uma condição de voo.

O sistema aeroelástico mais comum é o constituído por uma seção típica de uma asa, ou aerofólio, com ao menos um grau de liberdade exposta à um escoamento. Um aerofólio, como pode ser visto na Figura 2 apresenta algumas características importantes

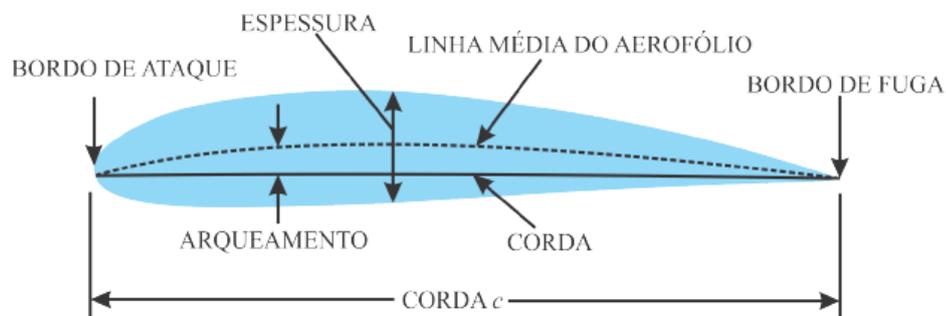
Figura 1 – Representação do triângulo de Collar.



Fonte: (COLLAR, 1946).

que recebem nomenclaturas específicas na aeronáutica, como o bordo de ataque, onde se inicia a divisão do fluxo e altera as características do escoamento do fluido ao longo das superfícies, e o bordo de fuga, região da parte traseira do aerofólio. Os pontos citados definem a linha média do aerofólio, a qual divide a superfície inferior e superior da estrutura. Além disso, existe também a corda, referente a linha reta entre os bordos e é representada por c , o arqueamento que é indicado pela distância entre a linha média e a corda, e a espessura que representa a distância entre as superfícies.

Figura 2 – Características e nomenclatura de um aerofólio.

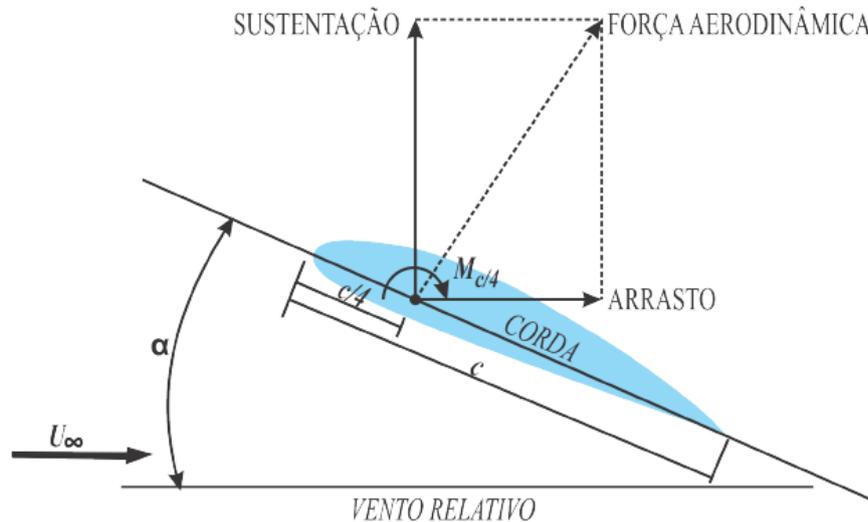


Fonte: (ANDERSON, 2015).

A Figura 3, por sua vez, demonstra o aumento do ângulo de ataque do aerofólio. É possível verificar o ângulo de ataque (α), representado pela inclinação entre o vento relativo e a corda, as forças de sustentação, aerodinâmica, arrasto e a velocidade do escoamento,

definida por U_∞ , Além disso, a distribuição da pressão resulta no momento indicado por M .

Figura 3 – Forças atuantes devido a incidência do aerofólio.



Fonte: (ANDERSON, 2015).

A aeroelasticidade pode ser dividida em estática e dinâmica. A aeroelasticidade estática estuda a relação entre os efeitos aerodinâmicos produzidos por um escoamento onde a velocidade e pressão não variam com o tempo, denominado por escoamento estacionário (BISPLINGHOFF; ASHLEY, 2013). Um exemplo de fenômeno aeroelástico estático é a divergência, que ocorre quando uma superfície sofre o processo de deflexão estática causada por um carregamento aerodinâmico estacionário, resultando no aumento da carga e da deformação até o ponto de gerar falhas na estrutura da superfície. Como os efeitos do escoamento não variam com o tempo na aeroelasticidade estática, é possível representá-los por meio de um conjunto de equações lineares.

Por outro lado, a aeroelasticidade dinâmica envolve os efeitos não estacionários gerados pela interação entre o carregamento aerodinâmico e as deformações causadas pelas forças inerciais e elásticas da superfície sustentadora. O *Flutter* é um fenômeno presente na aeroelasticidade dinâmica que envolve um movimento oscilatório autossustentado, de amplitude crescente que ocorre a partir de uma velocidade crítica do escoamento. Ao ultrapassar tal velocidade, qualquer perturbação é capaz de resultar no aumento da amplitude das oscilações da superfície sustentadora (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996).

Além do *Flutter*, é comum os fenômenos de *Buffeting* e *Galloping* na aeroelasticidade dinâmica. O *Buffeting* é a resposta transitória dos componentes estruturais devido a impulsos aerodinâmicos produzidos pela fuselagem ou pela esteira atrás das asas (SERRANO, 2010). O *Galloping*, por sua vez, representa uma instabilidade comum relacionada à cabos de linhas de transmissão, uma deformação causada por exemplo pelo acúmulo de gelo causa o aparecimento de forças aerodinâmicas que interagem com os cabos e provocam um movimento característico, podendo causar rompimento de cabos ou quebra de torres de transmissão de energia.

Muitas vezes, os fenômenos aeroelásticos dinâmicos geram comportamentos nos quais as teorias e equações lineares não podem ser utilizadas. Em um sistema linear, o entendimento das suas condições iniciais permite que um estado futuro seja conhecido, algo que não ocorre com facilidade em sistemas não lineares. Esses sistemas por sua vez, são gerados a partir de fontes conhecidas de efeitos não lineares em aeroelasticidade, como a separação do escoamento, a turbulência, efeitos de compressibilidade e problemas estruturais como grandes deformações e folgas. (JUNIOR; VASCONCELLOS; MARQUES, 2018).

As aeronaves atuais possuem características que buscam incremento da velocidade e leveza, resultando em estruturas altamente flexíveis expostas à um escoamento de alta energia. Inevitavelmente, as estruturas estão sujeitas a grandes deformações e, conseqüentemente, à efeitos não lineares (FILHO, 2020). Como consequência, a aeronave pode apresentar movimentos autossustentados, por exemplo, como a Oscilação Ciclo Limite, que ocorre quando ocorre após uma instabilidade o sistema converge para uma oscilação com amplitude finita, tal efeito é denominado LCO, do inglês *Limit Cycle Oscillation* (ALONSO; JAMESON, 1994). Por outro lado, quando as oscilações não são periódicas e sensíveis a condições iniciais do sistema, o comportamento é caracterizado como caótico.

O comportamento caótico é caracterizado por oscilações não periódicas, que possuem múltiplas frequências e pode apresentar grande variação de amplitude. Nessa situação, o sistema, apesar de determinístico perde previsibilidade com a evolução temporal. Um sistema caótico é dependente da condição inicial, ou seja, as soluções geradas a partir de pequenas mudança das condições iniciais passam a demonstrar comportamentos aparentemente descorrelacionados entre si com a evolução temporal (SIMONI, 2007).

Como mencionado previamente, as não linearidades em sistemas aeronáuticos podem ser classificadas entre estruturais e aerodinâmicas. Normalmente, não linearidades

estruturais se originam a partir de grandes deformações e problemas de junção, como articulações e fixações. Devido a isso, a não linearidade estrutural pode ser classificada como distribuída ou concentrada. Para o caso das não linearidades distribuídas, os efeitos são considerados como espalhados ao longo de uma estrutura, enquanto que as não linearidades concentradas relacionam-se à efeitos localizados (VASCONCELLOS, 2007). Os efeitos de não linearidade concentradas normalmente são relacionados a momentos de restauração elástica em junções ou articulações, onde podem surgir folgas, histerese e outras respostas não lineares, como descritas a seguir.

Dentre as não linearidades concentradas, destacam-se os efeitos relacionados a rigidez polinomial, onde o comportamento da mola varia com a amplitude do deslocamento, tornando a mola mais ou menos rígida, comumente indicada por *hardening* e *softening*, respectivamente, e o amortecimento não linear seguido por folga. O comportamento de cada efeito pode ser observado na Figura 4.

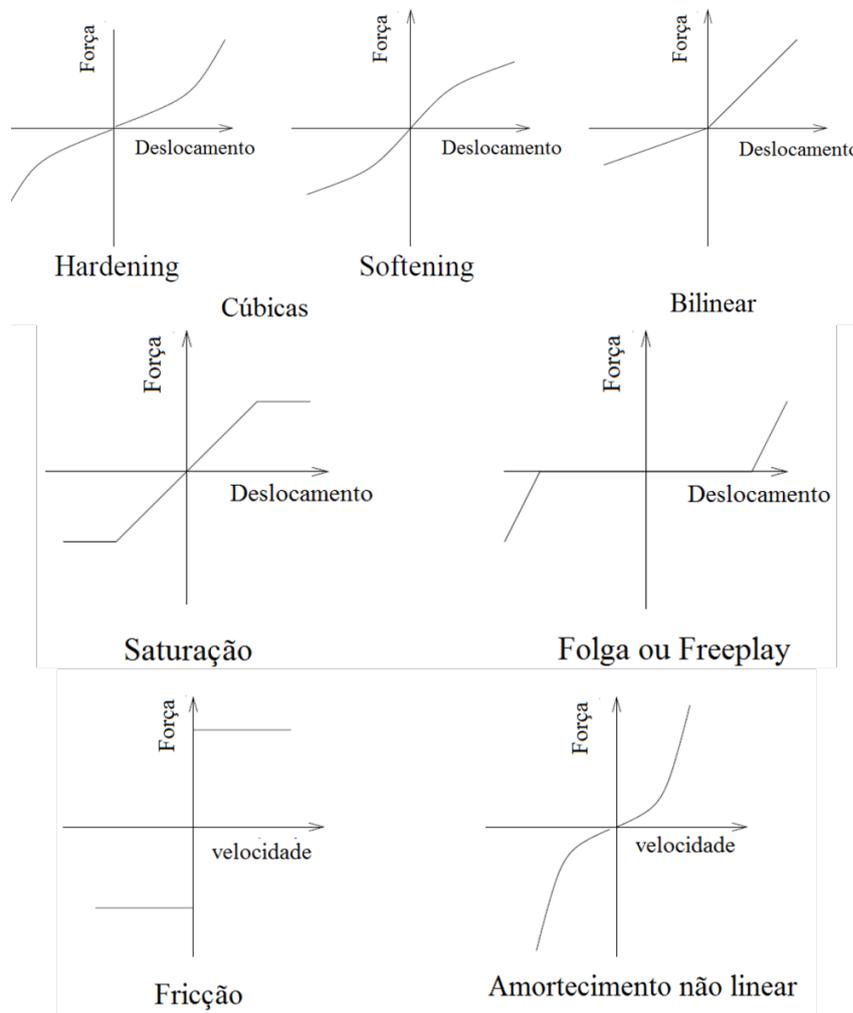
Dentre as não linearidades de origem aerodinâmica, além dos que surgem a partir de efeitos de compressibilidade, um dos principais efeitos amplamente estudado devido aos seus comportamentos de características complexas é conhecido por estol dinâmico (VASCONCELLOS; PEREIRA; MARQUES, 2016).

Basicamente, o estol dinâmico é gerado devido ao efeito da separação do escoamento, no qual um aerofólio se movimenta, de modo que em um baixo ângulo de ataque, a carga viabilize o aumento do ângulo de torção do aerofólio. Contudo, se tal movimento persiste, o ângulo de ataque ocasionado pela torção irá aumentar, gerando um atraso de estol provocado pelo vórtice de separação ocorrido no bordo de ataque, conforme a Figura 5. Conseqüentemente, surge uma região de baixa pressão no extradorso do aerofólio.

O processo do fenômeno prossegue com o vórtice seguindo do bordo de ataque para o bordo de fuga, resultando na separação completa do escoamento e gerando um momento de arfagem negativo que reduz de forma impactante o ângulo de ataque. Tal efeito pode provocar sérios danos estruturais ou até mesmo graves acidentes. O estol dinâmico ocorre de modo frequente em pás de helicópteros. (LEISHMAN; BEDDOES, 1989)

O fenômeno possui grande complexidade, dificultando ou até inviabilizando a elaboração de modelos matemáticos de alta fidelidade. Modelos de ordem reduzida ou semi-empíricos têm sido empregados, no entanto, a análise de dados experimentais ainda representa a melhor forma de entender e buscar informações úteis para a elaboração de modelos mais precisos. Dentre as possibilidades de abordagem de sistemas aeroelásticos

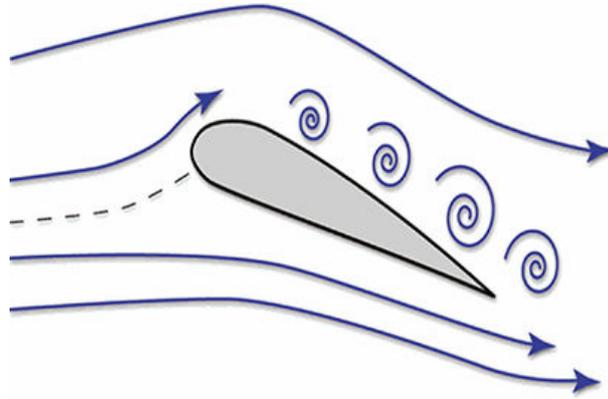
Figura 4 – Não linearidades estruturais comuns em sistemas dinâmicos.



Fonte: (WORDEN; TOMLINSON, 2001).

não lineares, pode-se citar o uso de técnicas de análise de séries temporais que podem ser aplicadas a dados de modelos matemáticos e experimentos. Novas ferramentas que possam contribuir com o conjunto de análises já existentes, de maneira eficiente, na extração informações úteis para a caracterização, identificação ou monitoramento de sistemas aeroelásticos são de suma importância. Tendo em vista os fatos abordados, é evidente e compreensível a importância do desenvolvimento de técnicas para o estudo de sistemas aeroelásticos não lineares, visando aumentar a confiabilidade, segurança e o desenvolvimento de sistemas aeronáuticos mais eficientes.

Figura 5 – Representação da separação do escoamento e geração de vórtices.



Fonte: (MCDOWELL, 2013).

1.2 Objetivo

O objetivo do presente trabalho envolve a implementação e prospecção da viabilidade da utilização da J-PDF em séries temporais aeroelásticas não lineares, a fim de verificar a sua potencialidade na caracterização de sistemas aeroelásticos. As séries temporais são providas de modelos simulados e coletadas por experimentos realizados pelo grupo de pesquisa. Para tanto, implementou-se a J-PDF por meio de um algoritmo robusto e eficiente, capaz de representar o espaço de fase em termos de densidade de probabilidade conjunta, com capacidade de análise qualitativa por observação e quantificação de indicadores que podem caracterizar o comportamento não linear e detectar transições de comportamento.

1.3 Áreas de aplicação

1.3.1 Manutenibilidade

A manutenibilidade é um conceito vasto, no qual pode ser implementado em diversas áreas onde envolvem processos de produção (SERRANO, 2010). Na engenharia estudam-se formas de otimizar os procedimentos para a execução de manutenção, envolvendo estudos logísticos e de otimização desde a fase de projeto até a utilização final do produto, incluindo situações e cenários em que determinados reparos devem ser realizados, para que o produto apresente a máxima confiabilidade com o menor custo de operação durante seu ciclo de vida (KARDEC; NASCIF, 2009).

Especialmente no segmento aeronáutico, os conceitos associados à manutenibilidade são importantíssimos e devem ser aplicados desde a fase de projeto, de forma a garantir a confiabilidade e a redução dos custos de manutenção, incluindo-se o tempo em que a aeronave ficará fora de operação.

Durante a fase operacional, torna-se importante a capacidade de previsão de falhas, de forma que a partir da detecção da falha ou a possibilidade de falha iminente, todas as providências relativas à segurança sejam tomadas e toda a cadeia logística seja mobilizada, possibilitando uma manutenção rápida e efetiva, garantindo segurança, disponibilidade e evitando maiores prejuízos aos operadores.

A prática da manutenibilidade em um produto ou um processo está associada a dois panoramas, de modo que a aplicação do conceito ocorre a fim de eliminar a probabilidade de futuras falhas ou quando a execução transcorre apenas quando um problema é detectado e deve ser solucionado (SERRANO, 2010). Para ambos os casos, a qualidade e o custo da manutenção são considerados como questões extremamente relevantes na análise da integridade estrutural do produto, de forma que o cenário ideal ocorre quando a manutenção é feita no menor custo possível, mas, mantendo o produto com uma alta qualidade de duração e operação (LEMOS; ALBERNAZ; CARVALHO, 2011).

As manutenções podem ser divididas entre manutenção preditiva, preventiva e corretiva. A manutenção preditiva envolve a inspeção dos equipamentos presentes em uma máquina ou produto de forma periódica. A partir de tal análise, é possível acompanhar de forma detalhada a vida útil do material, verificando se existem possíveis causas que estejam antecipando o seu tempo de operação (SERRANO, 2010). Normalmente, em aeronaves, são realizados testes de vibração.

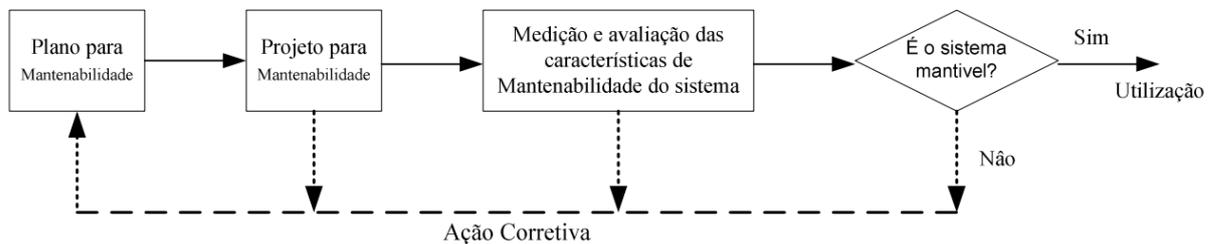
A aplicação da manutenção preditiva garante alguns fatores, como a indicação de uma manutenção antecipada a fim de garantir a integridade da estrutura e reduzir o tempo de inatividade, reduzindo de forma significativa os custos de manutenção.

A manutenção preventiva, por sua vez, envolve a prevenção de uma falha ou dano na estrutura. Desse modo, atividades como revisão sistemática e inspeção de equipamentos são realizados. Apesar de possuir certa similaridade, a manutenção preventiva também é utilizada para corrigir possíveis falhas no sistema, fator que não ocorre nas manutenções preditivas, de modo que esta última realiza processos para evitar danos e não corrigi-los. Devido a isso, as atividades realizadas na manutenção preditiva se diferem das realizadas na manutenção preventiva.

Por fim, a manutenção corretiva ocorre quando o equipamento apresenta alguma irregularidade e necessita de um reparo. Isso significa que tal manutenção é realizada somente quando a falha é detectada. Apesar de ser crucial para manter a integridade e confiabilidade de um sistema, a manutenção corretiva pode causar um maior tempo de inatividade, visto que as manutenções preventiva e preditiva não foram realizadas corretamente.

A Figura 6 ilustra um fluxograma onde se resumem as ações efetuadas durante a aplicação da manutenibilidade. A *priori*, são elaboradas propostas de manutenibilidade, onde todas as questões fundamentais para garantir a eficiência do processo de manutenção são estudados. Posteriormente, o melhor plano é aplicado no projeto de manutenibilidade, com a ideia de evitar possíveis danos no produto causados principalmente por falhas de processos, elétricas ou mecânicas. Por fim, é feita a avaliação do sistema e avaliar se de fato a técnica de manutenibilidade foi empregada de modo efetivo.

Figura 6 – Fases de elaboração do projeto de manutenibilidade.



Fonte: (SERRANO, 2010).

Associando o conceito citado com o presente trabalho, a J-PDF deve ser aplicada no terceiro bloco do fluxograma. Com isso, a medição e avaliação do método é realizada investigando as características dos sinais coletados, de modo que a densidade da função representa a probabilidade de mudanças no comportamento do sistema, tornando-se possível a previsão de futuras falhas. Por fim, analisa-se o resultado das medições, de forma que se for detectado possíveis falhas, é necessário retornar para o plano inicial de manutenibilidade.

1.3.2 A Avaliação do Ciclo de Vida

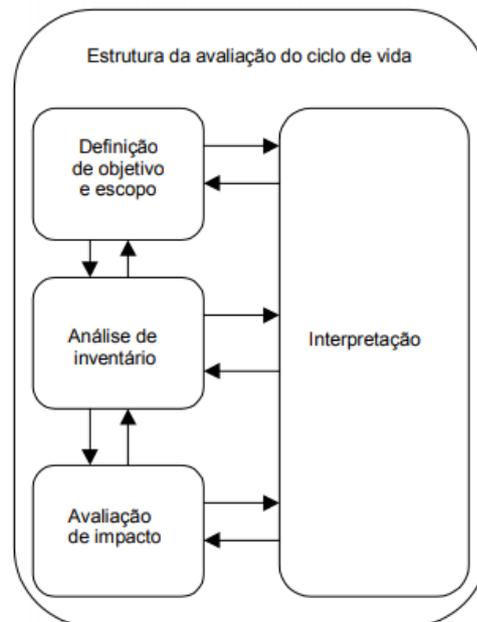
A indústria aeronáutica possui diversos padrões de tecnologia e técnicas que proporcionam a operação de uma aeronave com uma alta eficiência e a segurança de quem

a utiliza. Contudo, a aplicação da Avaliação do Ciclo de Vida (ACV) em equipamentos aeronáuticos tem ganhado destaque na área atualmente (JOHANNING; SCHOLZ, 2014).

A ACV é uma área responsável por avaliar o ciclo de vida de um produto, apontando estágios onde ocorrem atividades com alto potencial de impactos ambientais. Além disso, a ACV permite a avaliação de melhorias e alternativas que garantam o desenvolvimento e a operação de um dispositivo com processos sustentáveis (COLTRO, 2007).

Inicialmente, existiam diversas metodologias para a implementação da ACV, o que resultava em diferentes conclusões perante um mesmo objeto. Logo, para a realização da avaliação são definidos quatro processos básicos para a análise dos impactos existentes, conforme a Figura 7.

Figura 7 – Processos de uma ACV.



Fonte: (BARROS; LIBRELOTTO, 2017).

A primeira ação a ser feita na elaboração da ACV é a Definição do Objetivo e Escopo, onde o produto e o objetivo a ser analisado são definidos, além do direcionamento do método de estudo a ser desenvolvido. Apesar das determinações serem feitas nesta fase, o objetivo e os procedimentos realizados podem ser alterados de acordo com as informações coletadas ao longo do estudo.

Posteriormente, é aplicada a etapa de Análise de Inventário, designada por conter um fluxograma dos processos a serem analisados, além das informações de todas as atividades necessárias para a extração do material, manufatura do produto, manutenção, informações de operação e técnicas de descarte. Nesta fase, destaca-se principalmente o levantamento

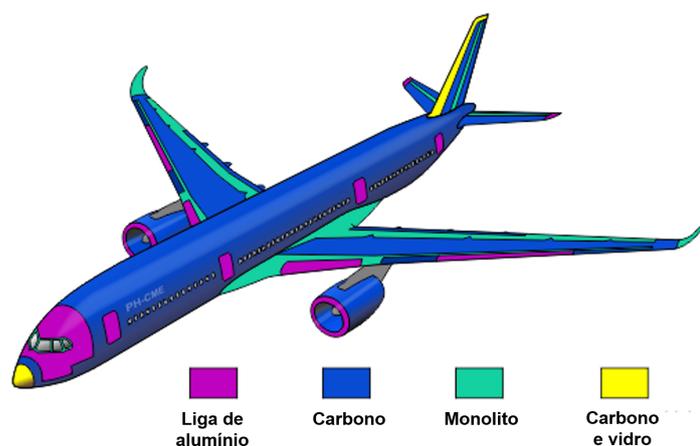
de dados do consumo de energia e as características do produto em determinados cenários, sendo considerados como dados significativos para o entendimento do estado do material e, conseqüentemente, alternativas para a diminuição de impactos ambientais.

A próxima fase do processo envolve a Avaliação de Impacto do Ciclo de Vida (AICV), onde os dados coletados são interpretados e ponderados de acordo com o nível de impacto detectado. Porém, o estudo realizado pode haver diversas modificações, desde a normalização de dados até melhorias de análises com a adição de dados no inventário. Para isso, é feita a última fase da ACV denominada interpretação, onde a integridade do sistema e as conclusões finais da avaliação são abordadas.

Apesar de acessível para alguns objetos de análise, a elaboração de uma ACV pode ser extremamente complexa quando um produto é formado por diversos materiais e dispositivos. A complexidade e a quantidade de níveis na cadeia produtiva são alguns dos principais desafios para a aplicação da ACV na aeronáutica.

Somente a estrutura de uma aeronave Airbus A350 representada na Figura 8, por exemplo, contém quatro materiais na sua estrutura, sendo eles o alumínio, carbono, monolito e vidro. Desse modo, a execução de uma ACV tomando como base um elemento e admitindo que os outros materiais que compõe o restante da aeronave são irrelevantes para uma avaliação, podem resultar em conclusões incorretas, mascarando possíveis impactos ambientais.

Figura 8 – Distribuição de materiais na estrutura de uma aeronave Airbus A350.



Fonte: Adaptado de (MCCONNELL, 2011).

Em cenários como esse, a alternativa se dá em aplicar a ACV em etapas do ciclo de vida do produto, como a extração de matéria prima, a manufatura, o uso e o descarte. Uma das subetapas da fase de uso da aeronave é a manutenção, por apresentar significativos

impactos no Custo do Ciclo de Vida (CCV), e por ter relação direta com a extensão ou redução do ciclo de vida da aeronave, sugerindo significativos potenciais de impactos ambientais. Sendo assim, a J-PDF pode auxiliar tanto na subfase de manutenção, como também na análise de dados na fase do inventário, gerando informações valiosas nos materiais utilizados em uma estrutura.

Desse modo, o presente trabalho associa a ACV na etapa da manutenibilidade, uma área extremamente importante não apenas para a indústria aeronáutica, mas para o desenvolvimento de qualquer dispositivo ou processo.

1.3.3 Monitoramento de Integridade Estrutural (SHM)

Os sistemas de Monitoramento de Integridade Estrutural possuem o objetivo de detectar danos estruturais, não necessariamente sendo obrigatória a identificação do dano de modo simultâneo. Existem diversos campos de aplicação, como a aeronáutica e a aeroespacial na análise de estruturas de aviões, helicópteros e satélites, a área civil para projetos de edifícios e estradas, ou até mesmo a área mecânica para a avaliação de estruturas automotivas.

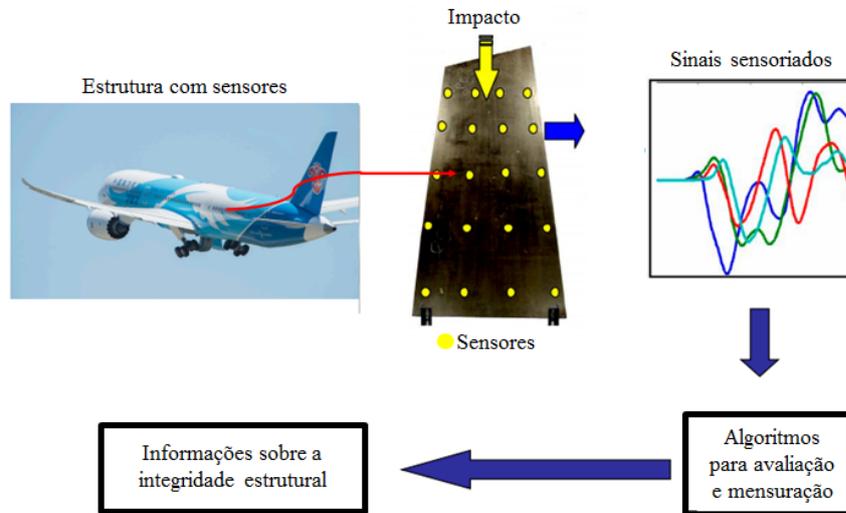
De forma sucinta, a realização do SHM se dá na instalação de sensores capazes de detectar os danos ocorridos e de dispositivos cujo objetivo envolve analisar os sinais coletados pelos sensores e fornecer informações relevantes da integridade estrutural do sistema analisado, conforme o esquemático apresentado na Figura 9, onde ambos os aparatos são instalados na estrutura observada.

O dano pode ser entendido como qualquer tipo de alteração na estrutura capaz de afetar o seu desempenho ao longo do seu estado de operação. A alteração causada por um dano pode ser constatada por aspectos encontrados na rigidez e na dissipação de energia, por exemplo (BAPTISTA; FILHO, 2010).

Inicialmente, é necessário caracterizar o que é um dano. A avaliação de tal efeito é realizada por meio de comparações entre dois estágios distintos da estrutura, sendo eles o estado íntegro do sistema e as suas variações após eventos distintos. Conseqüentemente, a influência do dano resulta na variação da resposta dinâmica da estrutura.

A importância da aplicação do SHM pode ser relacionada no âmbito científico, por meio de pesquisas voltadas para métodos de monitoramento e detecção de danos estruturais

Figura 9 – Processos para a aplicação do SHM em estruturas aeronáuticas.



Fonte: (YANG *et al.*, 2019).

visando sistemas mais seguros, como também ao associar pontos de vista econômicos, de modo que os sistemas nos quais possuem monitoramento de integridade estrutural permitem uma economia significativa quando necessária a prática da manutenção (BAPTISTA; FILHO, 2010). Em sistemas avançados de monitoramento, segundo Rytter (1993) é preciso realizar determinados passos para a realização da detecção, sendo eles:

- Detecção da existência de dano;
- Localização do dano na estrutura;
- Identificação do dano;
- Avaliação da sua extensão;
- Determinação do tempo restante de vida útil da estrutura.

O campo aeronáutico, atualmente, possui um elevado nível de segurança quando avaliada a estrutura dos aparatos, contudo, tal área é considerada como uma das que mais aplicam o conceito do SHM, de modo que os custos de manutenção podem ser reduzidos cerca 27% do custo do ciclo de vida (KESSLER; SPEARING; SOUTIS, 2002).

Os custos que incluem os processos de manutenção são reduzidos por meio da detecção de danos em um estágio inicial. Por outro lado, os gastos indiretos que envolvem o tempo em que a aeronave ficaria sem operação também são diminuídos (BAPTISTA; FILHO, 2010).

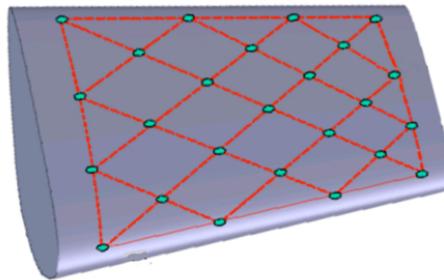
Uma técnica utilizada amplamente para o monitoramento estrutural é nomeada por uso de ondas guiadas. Tais ondas guiadas são definidas como ondas mecânicas nas

quais se propagam ao longo da estrutura ou em elementos estruturais, cujas dimensões são comparáveis ao comprimento da onda guiada (CHARUTZ *et al.*, 2013).

Para a detecção dos danos, podem-se utilizar sensores de transdução piezoelétrica de transmissão ativa (PZT), localizados em regiões específicas da estrutura. Basicamente, um *hardware* gera e recebe as ondas guiadas, informando as características da estrutura. Posteriormente, são realizados processamentos digitais nos sinais registrados pelos transdutores e realizados métodos avaliativos da integridade do sistema (YANG *et al.*, 2019). A Figura 10 ilustra parte de uma asa onde são aplicados dispositivos piezoelétricos ao longo da estrutura, formando uma rede de sensores.

A técnica proposta no presente trabalho poderia ser incorporada às técnicas de processamento para detecção dos danos à partir dos sinais gerados, auxiliando na caracterização de possíveis danos estruturais.

Figura 10 – Esquemática de uma rede de sensores instalados na estrutura de uma asa.



Fonte: (YANG *et al.*, 2019).

1.4 Organização da Dissertação

A continuação do trabalho consiste em cinco Capítulos. No Capítulo 2, é introduzida a fundamentação teórica referente aos sistemas não lineares, onde são apresentadas características, possíveis comportamentos e desafios de análise. No Capítulo 3, são apresentadas as ferramentas tradicionais que são utilizadas atualmente para classificar e compreender fenômenos complexos gerados por efeitos não lineares a partir de séries temporais. No Capítulo 4, é abordada a teoria por trás do método estatístico proposto para analisar séries não lineares, bem como a sua implementação computacional. Os resultados obtidos após a realização de simulações em modelos teóricos e práticos são encontrados no Capítulo 5.

Finalmente, as principais conclusões da pesquisa e sugestões para trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 6.

2 Sistemas não lineares

Neste Capítulo é desenvolvida uma breve fundamentação teórica referente a sistemas não lineares, com a finalidade de demonstrar a importância de analisar fenômenos físicos considerando os efeitos não lineares. Sendo assim, é abordada na Seção 2.1 a definição de sistemas não lineares, na Seção 2.2 a definição de sistemas dinâmicos unidimensionais e bidimensionais, e por fim, a Seção 2.3 demonstra a relação de um sistema de três dimensões com o comportamento caótico.

2.1 A dinâmica não linear

Um sistema dinâmico, normalmente, é representado por meio de equações diferenciais, capazes de descrever a evolução do sistema ao longo do tempo. Uma outra alternativa de indicar um sistema dinâmico seria a utilização de mapas iterativos, porém, há uma diferença significativa entre as metodologias, de modo que as equações diferenciais são usadas no tempo contínuo, enquanto que nos mapas iterativos, o sistema é analisado no tempo discreto (YEUNG; STROGATZ, 1998).

Independentemente do método de análise, um sistema dinâmico evolui no tempo, permitindo a sua caracterização por uma equação diferencial:

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

onde x_1, \dots, x_n são os estados do sistema e f_n determinam as características do mesmo, e consequentemente, indicam se o sistema é considerado como linear ou não linear.

A definição de linearidade parte do princípio da superposição de efeitos, na qual estabelece que um dado efeito pode ser avaliado por meio da superposição de efeitos decorrentes de várias causas. De um modo geral, isto não pode ser considerado em sistemas não lineares (SAVI, 2006).

Os sistemas dinâmicos lineares estão presentes em diversos campos de pesquisa, devido a facilidade de detectar eventos frequentes com características lineares. Os sinais que compõe comportamentos lineares podem ser classificados como autônomos, ou seja, sem dependência específica do tempo. Nesses casos, a evolução do sistema no tempo é

identificada por meio da função dos autovalores da matriz de coeficientes (THIELO, 2000). Por meio do desenvolvimento de oscilações periódicas é possível encontrar a sua solução.

Supondo uma matriz $A_{n \times n}$ com valores randômicos, existe um valor cuja variável denominada por λ é conhecida por ser o valor característico, ou então o autovalor de A se existe um vetor não nulo $x \in \mathbb{R}^n$, onde:

$$Ax = \lambda x \quad (2)$$

sendo que os vetores x não nulos que cumprem a equação (2) são denominados autovetores.

Os sistemas em geral descrevem diversos fenômenos e conceitos explicados pela física. Basicamente, um sistema é constituído de componentes características interconectadas, caracterizadas pelas relações de entrada e saída, ou seja, os sinais são analisados de acordo com as suas condições iniciais e o comportamento do seu estado após a sua aplicação a determinado cenário.

De forma conveniente, um sistema dinâmico pode ser classificado como uma caixa preta, onde são aplicadas as fontes de entrada $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, gerando-se as variáveis $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ que posteriormente serão analisadas. Quando a saída de um sistema é proporcional a sua entrada, classifica-se o sistema como linear (LATHI, 2006). Além da condição de proporcionalidade, um sistema também é determinado por um comportamento aditivo, de forma que o resultado obtido na saída do sistema é equivalente a soma de todas as suas entradas. Desse modo, se:

$$x_1 \rightarrow y_1; x_2 \rightarrow y_2 \quad (3)$$

$$x_1 + y_1 \rightarrow x_2 + y_2 \quad (4)$$

Um sistema dinâmico linear também respeita a propriedade da homogeneidade, na qual envolve a proporção das variáveis. Se uma constante k é multiplicada pela entrada x , a saída y também é multiplicada por k :

$$x \rightarrow y \quad (5)$$

$$kx \rightarrow ky \quad (6)$$

Diferentemente dos sistemas lineares supracitados, os sistemas não lineares descrevem com maior precisão os fenômenos naturais analisados pela física, visto que tais eventos ocorrem devido a inúmeros fatores e comportamentos de diferentes fontes. Suas análises podem ser feitas por meio de equações analíticas, diferenciais ordinárias e integrais, por exemplo.

O modelo matemático de um sistema dinâmico proporciona uma descrição quadro a quadro da realidade, possuindo duas possibilidades distintas: equações diferenciais, que são fluxos contínuos no tempo e no espaço; e mapas, que descrevem a evolução no tempo de um sistema expressando seu estado como uma função do instante anterior. Dessa forma, um mapa é um sistema dinâmico discreto e uma de suas utilidades é auxiliar na análise de modelos descritos por equações diferenciais. Trata-se de uma versão discreta de uma equação diferencial.

Por sua vez, as equações diferenciais podem ser divididas em dois grupos: equações diferenciais parciais, que possuem características espaço-temporais e equações diferenciais ordinárias que descrevem apenas as características temporais do sistema.

O modelo matemático do sistema dinâmico é uma equação de movimento que governa a evolução do sistema dinâmico desde um instante até outro, proporcionando uma descrição quadro a quadro da realidade. No estudo da dinâmica não linear e caótica, muitas pesquisas são desenvolvidas para tratar sistemas dinâmicos descritos por modelos matemáticos simples. A respeito da simplicidade desses modelos, sua resposta pode exibir um comportamento complexo e bastante interessante. Cada um desses sistemas possui uma dinâmica muito rica, passível de exibir um comportamento caótico.

Basicamente, um sistema dinâmico não linear pode ser indicado como um sistema com um elo de retroalimentação no qual a saída de um elemento não é proporcional à sua entrada (DRAZIN; DRAZIN, 1992). Os sistemas não lineares, como supracitado, pode ser descrito por meio de uma equação diferencial:

$$x_{n+1} = f(x_n) + g(t) \quad (7)$$

onde $f(x_n)$ é uma variável que pode variar constantemente de acordo com as condições iniciais do sistema. A análise de uma série não linear, diferentemente dos sistemas lineares cujas soluções são obtidas por meio de resoluções das séries algébricas, necessitam de ferramentas robustas de análise devido a sua complexidade. Uma das primeiras alternativas

de análise, por exemplo, envolve a discretização do sinal, no qual pode ser feito por meio do mapa de Poincaré.

Os sistemas não lineares possuem um alto grau de complexidade, o que impossibilita a aplicação de algumas técnicas implementadas em sistemas dinâmicos lineares. Assim, em diversos casos a solução analítica do sinal não é viável, fazendo com que seja necessária a coleta de informações do sistema, capazes de descrever as características que o sistema possui.

As soluções de um sistema dinâmico não linear são indicadas por curvas no espaço de diversas dimensões, conhecidas por trajetórias. O espaço de n -dimensões por sua vez é denominado de espaço de estados. A partir do espaço de estados é obtido informações relevantes que auxiliam no entendimento do sistema analisado. Para a determinação do espaço de estados, além da resolução do sistema analítico, utilizam-se técnicas de reconstrução do espaço de estados por meio de séries experimentais (SIMONI, 2007).

2.2 *Sistemas dinâmicos unidimensionais e bidimensionais*

Define-se um sistema como um conjunto de informações agrupadas devido a efeitos que geram a interação ou interdependência entre elas, gerando relações de causa e efeito nos fenômenos consequentes com os elementos desse conjunto (MONTEIRO, 2002). A caracterização das informações presentes em um sistema é realizada a partir de grandezas que sofrem variações ao longo do tempo.

Como supracitado, um sistema dinâmico é representado por equações diferenciais, logo, a quantidade de variáveis presentes no sistema definem a sua dimensão no espaço de estados. Os sistemas dinâmicos unidimensionais, por exemplo, descrevem equações logísticas para uma única espécie (mapa logístico unidimensional) e pontos fixos, visto que os mesmos necessitam de uma variável para solucionar a equação diferencial. Sendo assim, os sistemas de apenas uma dimensão podem ser descritos por meio de:

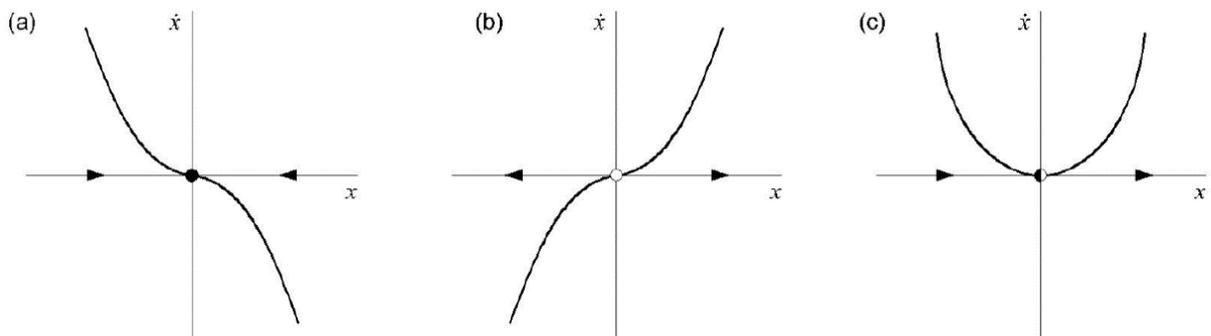
$$\dot{x} = f(x) \tag{8}$$

A equação (8) define que f é influente diante das variações de estado de x , definindo o instante no tempo posterior. A partir do momento em que tem-se o ponto fixo do sistema

para os pontos de x , as trajetórias próximas ao ponto fixo podem ser atraídas ou repelidas, visto que o mesmo pode ser classificado de formas distintas.

O ponto fixo pode ser classificado como poço, ponto de sela e fonte, como pode ser visto na Figura 11. Quando as trajetórias são atraídas para um ponto fixo estável, define-se que o sistema é atraído por um ponto fixo do tipo poço, considerando-o como um atrator. Por outro lado, quando o ponto fixo repele as trajetórias que passam próximas por ele, classifica-se como fonte. Além disso, existem os casos em que determinadas trajetórias são repelidas, enquanto que outras são atraídas para um ponto. Nesse caso, o ponto fixo é do tipo sela (VASCONCELLOS, 2007).

Figura 11 – Representação de um ponto fixo para a) Poço, b) Fonte e c) Sela.



Fonte: (STROGATZ, 2018).

A estabilidade de um ponto fixo depende dos autovalores do sistema, normalmente indicados por λ' , conceito que será abordado com maior detalhamento posteriormente. O termo da derivada presente no autovalor permite identificar o tipo de ponto fixo presente no sistema, de forma que se a operação resultar em um valor positivo, significa que o ponto fixo é do tipo fonte, indicando uma instabilidade no sistema. Da mesma forma, se a derivada gera um valor negativo, o ponto fixo é do tipo poço, referente a um comportamento estável, e por fim, se o valor final for igual a zero, o ponto fixo é do tipo sela.

A determinação do tipo de ponto fixo possibilita a dedução do comportamento das trajetórias ao longo do espaço de estados, assim, em sistemas unidimensionais as trajetórias possuem apenas um direcionamento, ou seja, existe somente a atração para pontos fixos estáveis ou então repulsão de pontos fixos instáveis (VASCONCELLOS, 2007). Os sistemas dinâmicos bidimensionais, por sua vez, podem possuir maiores variações de comportamento ao longo da evolução do tempo, o que resulta em um outro exemplo de atrator.

Para um melhor entendimento, sugere-se a análise de sistemas referentes a pêndulos e osciladores harmônicos, no qual é descrito por equações de segunda ordem. A equação do balanço de um pêndulo, também conhecida por equação de Mathieu, é dada por:

$$\ddot{x} + \frac{g}{L} \text{sen}(x) = 0 \quad (9)$$

onde g representa a gravidade, L o comprimento da haste, x representa o ângulo atual e \dot{x} a velocidade angular do sistema.

Para solucionar tal equação, é preciso de duas variáveis que caracterizem o espaço de estados, assim, é possível representar o sistema dinâmico bidimensional a partir de duas equações:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (10)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (11)$$

Em um caso bidimensional, o sistema é dependente de duas variáveis, logo, consideram-se quatro derivadas parciais. Portanto, o comportamento do ponto fixo deste sistema depende das quatro derivadas, sendo que cada ponto fixo possui dois autovalores reais ou complexos (HILBORN *et al.*, 2000). A resolução do sistema é realizada por meio de uma expansão em séries de Taylor nas vizinhanças do ponto fixo e ignorando termos de derivada que são maiores que 1. O resultado de tal método são duas equações lineares de primeira ordem com coeficientes constantes, os quais são utilizados para a formulação da matriz Jacobiana, definida por:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \quad (12)$$

A identificação do ponto fixo pode ser vista na Tabela 1, na qual apresenta o traço das matriz Jacobiana resultante da somatória dos termos na diagonal principal, representado por TrJ e o valor determinante da matriz, indicado por Δ .

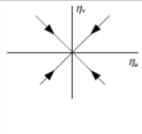
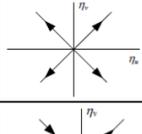
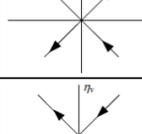
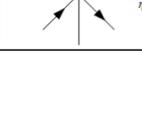
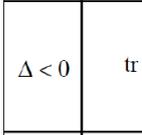
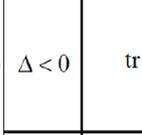
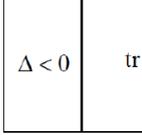
A Figura 12 apresenta as possibilidades para os pontos fixos no espaço de estados de um sistema bidimensional, sendo os quatro comportamentos não oscilatórios das trajetórias supracitados na Tabela 1, além dos casos onde há oscilação.

Tabela 1 – Definição do atrator bidimensional.

Condição	$TrJ < 0$	$TrJ > 0$
$\Delta > (1/4)(TrJ)^2$	poço espiral (atrator)	fonte espiral (repulsor)
$0 < \Delta < (1/4)(TrJ)^2$	poço (atrator)	fonte (repulsor)
$\Delta < 0$	ponto sela (tipo 1)	ponto sela (tipo 2)

Fonte: (VASCONCELLOS, 2007).

Figura 12 – Ponto fixo em um sistema bidimensional para a) Poço, b) Fonte, c) Sela tipo 1, d) Sela tipo 2 e comportamento oscilatório para e) Centro, f) Espiral estável e g) Espiral instável.

(a)	$\Delta > 0$	$\text{tr}(A) < 0$ $\sqrt{\Delta} < \text{tr}(A)$		Sorvedouro (Poço)
(b)	$\Delta > 0$	$\text{tr}(A) > 0$ $\sqrt{\Delta} < \text{tr}(A)$		Fonte
(c)	$\Delta > 0$	$\text{tr}(A) < 0$ $\sqrt{\Delta} > \text{tr}(A)$		Sela
(d)	$\Delta > 0$	$\text{tr}(A) > 0$ $\sqrt{\Delta} > \text{tr}(A)$		Sela
(e)	$\Delta < 0$	$\text{tr}(A) = 0$		Centro
(f)	$\Delta < 0$	$\text{tr}(A) < 0$		Espiral estável (Foco estável)
(g)	$\Delta < 0$	$\text{tr}(A) > 0$		Espiral instável (Foco instável)

Fonte: (SAVI, 2006).

2.3 Sistemas dinâmicos tridimensionais e a relação com o caos

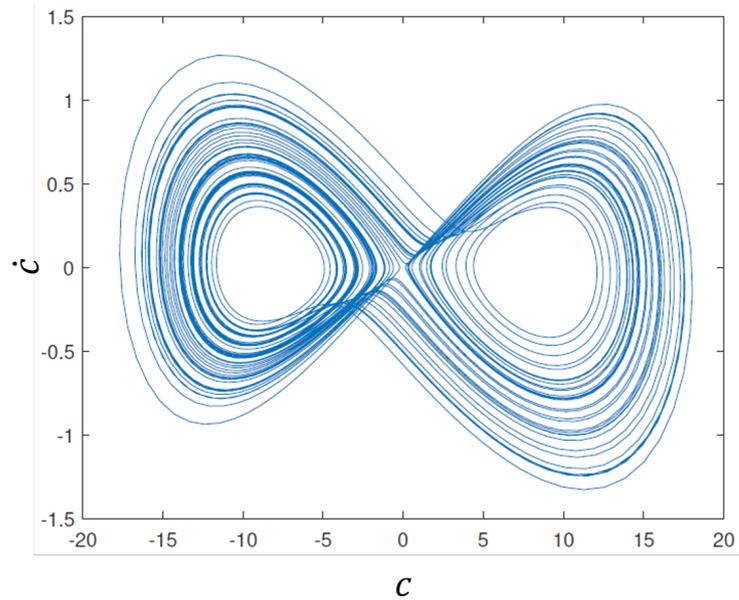
Devido a sensibilidade as condições iniciais do sistema, um efeito não linear pode apresentar variações significativas devido a pequenas variações do seu sistema. Assim, os modelos não lineares são mais realísticos quando são comparados aos modelos com aproximações lineares (SAVI, 2006).

Um sistema considerado como não linear evolui de forma aperiódica em grande parte da sua evolução temporal. Desse modo, torna-se extremamente complexo obter uma solução analítica para tais sistemas. Como alternativa, utilizam-se métodos numéricos, capazes de auxiliar na análise do sistema ao longo do tempo, descrevendo o problema real por meio de uma discretização (SAVI, 2006).

Apesar da complexidade do sistema, é possível prever o seu comportamento, se as condições iniciais não forem alteradas. Como um exemplo de comportamento não linear, pode-se citar o atrator de Lorenz. Na Figura 13, é possível verificar o comportamento do

sistema em termos da taxa de convecção (c), bem como a previsão da sua trajetória, mas somente pelo fato de conhecer as condições iniciais impostas.

Figura 13 – Atrator de Lorenz com condições iniciais definidas.



Fonte: próprio autor.

O atrator de Lorenz determinado por um comportamento caótico, permite demonstrar como o estado de um sistema dinâmico evolui no tempo em um padrão complexo e sem repetições. É possível indicar este sistema determinístico por:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \quad (13)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z)y \quad (14)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z \quad (15)$$

onde σ refere-se ao número de Prandtl e ρ refere-se ao número de Rayleigh. Usualmente, os valores de σ e β são iguais a 10 e 8/3, respectivamente, enquanto que ρ varia (HILBORN *et al.*, 2000).

Além da sensibilidade às condições iniciais, um efeito que consiste de comportamento caótico determinístico pode ser encontrado em sistemas com pelo menos três graus de liberdade, ou seja, os sistemas dinâmicos tridimensionais podem possuir duas ou mais equações não lineares.

Para o sistema tridimensional, surge o conceito de atrator superfície toroidal (toro) e atrator estranho. O atrator estranho é detectado quando as linhas de fluxo dependem sensitivamente das condições iniciais (TAKENS, 1981). Visto que as variações das condições iniciais ocorrem frequentemente devido a imprecisões ou atuação de ruído, a posição indefinida de uma trajetória no atrator estranho o torna imprevisível, fator resultante de divergências exponenciais entre trajetórias vizinhas. A taxa de divergência entre as trajetórias vizinhas é analisada por meio do expoente de Lyapunov, conceito que será abordado na Seção 3.3, contudo, é importante entender que é possível identificar o comportamento de um atrator por meio do valor resultante do expoente.

Considerando um atrator tridimensional, são encontrados três expoentes, assim, se o atrator for um ponto fixo, todos os expoentes possuirão um valor negativo, de forma que as trajetórias convergem para um único ponto. Caso o atrator for ciclo limite, um expoente será nulo e os outros serão negativos, onde o expoente nulo representa a direção ao longo da trajetória. Para um atrator toroidal, dois expoentes são nulos e apenas um é negativo, e por fim, para um atrator estranho, ao menos um expoente é positivo. Desse modo, se o sistema possuir um atrator estranho com um expoente positivo e possui dependência das condições iniciais, o sistema possui uma dinâmica caótica.

A caracterização de comportamentos não lineares é de suma importância para eficiência e segurança em engenharia. O desenvolvimento ou aperfeiçoamento de técnicas que permitam tal caracterização deve ser constante, frente aos desafios e ao surgimento de novas tecnologias.

3 Ferramentas tradicionais de análise de séries temporais não lineares

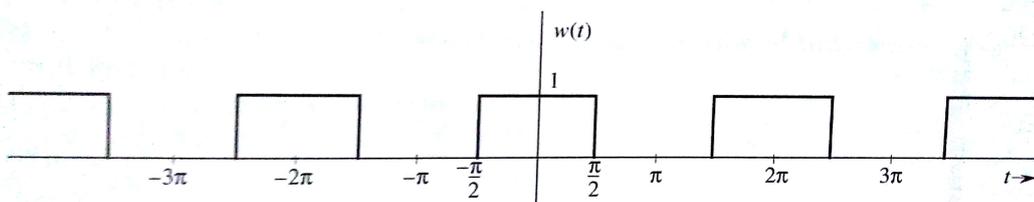
Devido à complexidade existente em um sistema não linear, torna-se necessário a aplicação técnicas capazes de resgatar informações importantes. Neste capítulo serão abordadas ferramentas tradicionais que são utilizadas no estudo de séries temporais não lineares, bem como as vantagens e desvantagens referentes às suas implementações.

3.1 Análise em frequência

Em determinados cenários, os sinais que compõem um sistema dinâmico apresentam características que dificultam a sua análise no domínio do tempo, ou até mesmo o espaço de fase apresenta informações que não são relevantes para um estudo específico. Para isso, podem ser utilizadas ferramentas que analisam o sinal no seu domínio da frequência.

A conversão dos domínios requer de métodos que mantenham a integridade das informações do sistema. A Figura 14 apresenta um sinal de periódico de onda quadrada no domínio do tempo. Por outro lado, a Figura 15 apresenta a mesma onda quadrada, porém no domínio da frequência, onde tal comportamento da onda é denominado por *sinc*. Em ambas as figuras, é possível observar que nos dois domínios é possível extrair informações valiosas que indicam as características de um sinal.

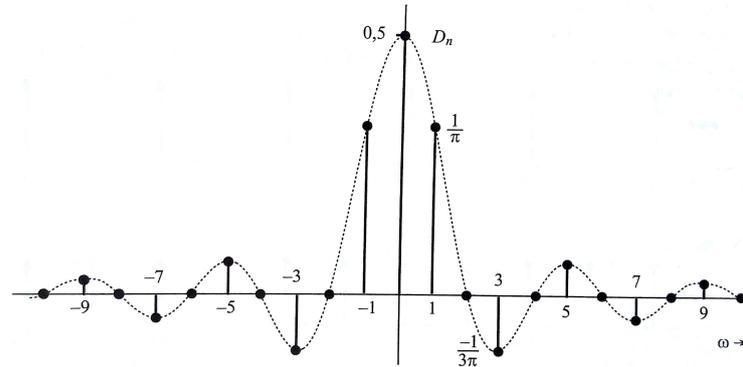
Figura 14 – Onda de pulso quadrado periódico.



Fonte: (LATHI; DING, 2012).

A passagem de um sinal no domínio do tempo para o domínio da frequência é realizada por meio das séries de Fourier, quando é analisado sinais periódicos e contínuos no tempo, e a Transformada de Fourier para sinais sem periodicidade. Com tal aplicação, é possível obter a representação dos espectros dos sinais, bem como as frequências dominantes e relativas.

Figura 15 – Espectro de Fourier do pulso quadrado periódico.



Fonte: (LATHI; DING, 2012).

Dado um sinal cuja função é $x(t)$, define-se que o sinal é periódico se um valor de período $T \neq 0$ respeita a seguinte condição:

$$x(t + T) = f(t) \quad (16)$$

O período fundamental do sinal é dado por T_0 , logo, a frequência fundamental f_0 é dada por:

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (17)$$

Contudo, a análise frequencial depende também de uma metodologia distinta, capaz de adequar o sinal e evitar a perda de informações relevantes. Para isso, são implementadas conversões a partir das séries de Fourier, as quais representam o sinal a partir de uma soma de funções periódicas, representada por:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \text{sen}(\omega_i t) + b_i \text{cos}(\omega_i t) \quad (18)$$

onde a_i e b_i são os coeficientes da série, e ω é dado por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (19)$$

Assim, a representação exponencial de uma série de Fourier de $x(t)$ de período T_0 é:

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i e^{j\omega_0 t} \quad (20)$$

De modo que o coeficiente c_i é calculado por:

$$c_i = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-ji\omega_0 t} dt \quad (21)$$

Quando utilizamos o período fundamental e $k = 0$ na equação (21), tem-se:

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \quad (22)$$

indicando que c_0 é denominado o valor médio de $x(t)$ sobre um período.

Quando a função analisada não é periódica, não é possível representá-la por meio por meio de uma somatória de senos e cossenos. Logo, utiliza-se a transformada de Fourier, dada por:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (23)$$

Para um sinal discreto e aperiódico $x[n]$, a transformada de Fourier com duração finita é dada por:

$$X(\Omega) = \zeta \{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (24)$$

sendo Ω a frequência no tempo discreto.

Como a transformada de Fourier é aplicada de modo computacional, utilizam-se sinais discretos com duração finita, assim aplica-se a Transformada de Fourier Discreta (*Discrete Fourier Transform*, DFT). O método que apresenta resultados satisfatórios em um curto tempo para calcular a DFT é a Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform*, FFT).

A FFT é capaz de gerar informações significativas para uma análise qualitativa da dinâmica do sistema por meio de técnicas de análise espectral (VASCONCELLOS, 2007). Desse modo, informações como as frequências de oscilação do sistema são essenciais para a caracterização de um comportamento caótico.

Apesar de apresentar resultados satisfatórios para sistemas que possuem três graus de liberdade, a FFT não gera resultados que trazem alta confiabilidade para a caracterização de caos quando sinais com maiores graus de liberdade são analisados (MOON, 1992).

O caos caracteriza-se por possuir harmônicos de uma frequência fundamental, o qual gera um espectro de banda limitada. Em sinais aleatórios, normalmente as frequências

estão distribuídas ao longo de todo o espectro, resultando em uma banda infinita (SAVI, 2006), porém em casos específicos, pode ocorrer de um sinal aleatório possuir um espectro similar ao de um sinal caótico. Com isso, nem sempre é possível diferenciar sinais de um sistema aleatório e de um sistema caótico.

Portanto, a análise em frequência é considerada como uma ferramenta qualitativa de caracterização do caos. Contudo, outras metodologias são utilizadas para apresentar uma caracterização quantitativa, como por exemplo os expoentes de Lyapunov e a medida de entropia (SIMONI, 2007). Além disso, a implementação da análise em frequência pode possuir limitações, de acordo com a banda analisada.

3.2 Reconstrução do espaço de estados

Quando um sistema dinâmico é analisado, nem sempre é possível detectar e mensurar todas as variáveis presentes.

A reconstrução utiliza como base o teorema de imersão de Takens. Apesar do espaço resultante não ser idêntico ao espaço de fases original do sistema, o método é capaz de representar o atrator do sistema, mantendo suas principais características.

Dentre os principais métodos de reconstrução do espaço de estado, destacam-se o método das derivadas, o método das coordenadas defasadas e o método da Decomposição em Valores Singulares (SVD).

Na implementação do método das derivadas, a reconstrução do espaço se dá pela aproximação numérica das derivadas de ordem superior de uma variável presente no sistema (PACKARD *et al.*, 1980). Assim, o método é aplicado por meio da seguinte equação:

$$\dot{f}(t) = \frac{f(t_0 + \Delta t(n + 1)) - f(t_0 + \Delta tn)}{\Delta t} \quad (25)$$

sendo que $f(t_0 + \Delta tn)$ é a função de acordo com o intervalo de análise, n o número de amostras, t_0 o tempo inicial e Δt o intervalo entre duas amostras. Desse modo, cada intervalo do espaço de estados é calculado, gerando a reconstrução com aspectos semelhantes ao sistema original.

Apesar de apresentar vantagens como velocidade de processamento devido a simplicidade dos cálculos e a ampla utilização em diversos sinais, tal método possui uma alta

sensibilidade ao ruído, ou seja, sistemas contaminados pelo ruído que são reconstruídos pelo método da derivada possuem uma alta probabilidade de apresentar características divergentes quando comparado o sistema obtido e o sinal real.

Para a aeroelasticidade, onde os fenômenos não lineares são causados por diversas condições do estado e a alta presença do ruído, o método das derivadas não apresenta resultados satisfatórios. Uma solução pra isso seria a aplicação de técnicas de filtragem que eliminem parte do ruído antes da utilização do método das derivadas.

A reconstrução por meio do método das coordenadas defasadas possuiu diversos estudos, como os propostos por Ruelle 1979, Packard et al. 1980, Takens 1981 e Sauer et al. 1991. Basicamente, a ideia por trás da metodologia implica em reconstruir o espaço de estados a partir de defasagens no tempo (SAVI, 2006).

Com base no teorema de Takens, todos os cruzamentos de órbitas são eliminados quando um atrator cuja dimensão D_A é inserido em uma dimensão onde $D_e > 2D_A$, sendo que D_e indica a dimensão de imersão, ou seja, tal variável define quantas defasagens são necessárias para realizar a reconstrução do sistema dinâmico.

A partir do momento em que uma dimensão possua a condição supracitada, a mesma é denominada de dimensão de mergulho ou dimensão de imersão. Com isso, ao D_e possuir um valor alto, definido por $D_e > 2D_A + 1$, o espaço reconstruído é equivalente ao espaço de estados original do sinal. Analisando de forma analítica, o sistema é reconstruído a partir da seguinte equação:

$$y(t) = [s(t), s(t + \tau), \dots, s(t + \tau(d - 1))] \quad (26)$$

onde $y(t)$ indica o espaço reconstruído na imersão, t o instante temporal de análise e τ o tempo de defasagem, definido por:

$$\tau = \varphi \Delta t \quad (27)$$

Sendo φ um valor múltiplo da amostragem e Δt o intervalo de tempo em que contém a amostragem.

Quando o ruído é predominante no sistema dinâmico, ocasionando no aumento da complexidade para a compreensão das características do sinal, é vital a escolha da dimensão e do tempo de defasagem na reconstrução do espaço de estado. Contudo, a determinação

desses parâmetros de imersão são considerados como as principais dificuldades para a aplicação do método das coordenadas defasadas.

Desse modo, o teorema de Takens foi estendido para que cenários onde os efeitos do ruído são significativos sejam analisados por meio de métodos estatísticos, levando em conta erros de estimativa (CASDAGLI *et al.*, 1991).

Existem três metodologias que viabilizam a determinação da dimensão mínima de imersão, denominadas de método da saturação dos invariantes do sistema, método da decomposição em valores singulares e o método das falsas vizinhanças.

O método das falsas vizinhanças determina uma dimensão mínima específica em que não existem cruzamentos da órbita no próprio espaço de estado. Basicamente a técnica consiste em classificar se um ponto vizinho é verdadeiro ou falso quando projetado o sistema na dimensão escolhida.

Em um pequeno espaço, onde a dimensão D é menor que D_e , um determinado ponto do sinal pode ser considerado com um vizinho, mesmo não sendo, logo, o mesmo é considerado como falso vizinho. Por outro lado, quando o espaço está imerso em uma dimensão onde $D_e \geq D$, os pontos vizinhos de todas as órbitas são vizinhos verdadeiros (KENNEL; BROWN; ABARBANEL, 1992).

O método da saturação dos invariantes do sistema estima a dimensão D por meio do cálculo de um dos invariantes do sistema para um valor específico de D . Posteriormente, o valor de D é incrementado e o invariante do sistema é recalculado para que seja feita uma comparação entre o valor atual e o anterior (GRASSBERGER; PROCACCIA, 1983). Se a diferença entre os resultados está dentro de um limite de tolerância estipulado, o valor de D é considerado como válido. Caso contrário, o processo é repetido até que a variação entre os invariantes seja pequena.

A dimensão de imersão D_e pode ser definida pela divisão entre a integral de correlação $C^d(r)$ e a distância r :

$$D_e = \frac{\log(C^d(r))}{\log(r)} \quad (28)$$

A integral de correlação $C^d(r)$ possui uma relação de outros conceitos necessários para a aplicação do método, sendo que a mesma define a fração média do número de

pontos presentes em um atrator com distâncias menores que r (ANDERSON; NAYFEH; BALACHANDRAN, 1996):

$$C^d(r) = \frac{1}{M^2} \sum_{i \neq j}^M H(r - |y_i - y_j|) \quad (29)$$

$$M = N_0 - \tau(d - 1) \quad (30)$$

sendo que N_0 indica o número de amostras e τ é a defasagem do sinal. Além disso, $H(t)$ representa a função *Heaviside*, indicada por:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases} \quad (31)$$

Por fim, $|y_i - y_j|$ é a matriz Euclidiana, calculada por:

$$|y_i - y_j| = \sqrt{\sum_{t=1}^d (s_{i+\tau(t-1)} - s_{j+\tau(t-1)})^2} \quad (32)$$

onde s indica a série experimental presente no sistema dinâmico analisado.

Apesar de eficiente em diversos casos, o método da defasagem deve ser utilizado quando a série temporal em questão não possui ruído, ou então se o mesmo é desconsiderado no sistema. Quando o ruído prevalece no sistema dinâmico, existe a possibilidade dos atratores resultantes apresentarem distorções. Esse evento ocorre devido ao fato de que os métodos para a definição do tempo de defasagem são sensíveis ao ruído.

Do mesmo modo que o método das falsas vizinhanças, a utilização de filtros são úteis para atenuar o ruído da série e viabilizar os cálculos, porém, a aplicação do mesmo pode inferir na defasagem e possíveis distorções na série temporal (SMITH, 2013). Sendo assim, torna-se interessante a utilização da Decomposição em Valores Singulares (SVD).

O método da reconstrução do espaço de estado por meio da decomposição em valores singulares foi proposto por Broomhead & King, onde não é necessária a determinação do tempo de defasagem para a realização dos cálculos. Assim, a dimensão de imersão é determinada e o sinal não sofre distorções para a implementação da reconstrução do espaço, resultando na diminuição da probabilidade de erros significativos (BROOMHEAD; KING, 1986).

O SVD utiliza das propriedades da matriz de covariância para gerar coordenadas descorrelacionadas (VASCONCELLOS, 2007). Inicialmente, é necessário determinar a

variância da variável aleatória. Indicada por σ^2 , a variância indica a dispersão de uma determinada distribuição em relação a sua média. Em outras palavras, a variância mensura quanto a variável se desvia em relação a média. O cálculo da variância é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \quad (33)$$

onde μ é a média da variável e n o número de elementos da variável.

Quando a variância possui um valor pequeno, é indicado que ocorre a massa da distribuição na média está concentrada, e quando a variância possui um valor igual a zero, significa que a distribuição está inteiramente na média.

Quando mais de uma variável aleatória é analisada, aplica-se a covariância, definida por σ_{xy} , responsável por mensurar o grau de interdependência entre duas variáveis aleatórias. Assim, a covariância indica a relação entre as variáveis analisadas, de modo que quanto maior é o seu valor, maior é a dependência entre as variáveis. Assim a covariância das variáveis x e y é dada por:

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_x)(Y_i - \mu_y) \quad (34)$$

Quando mais de duas variáveis são relacionadas, é comumente utilizada a chamada matriz de covariância Λ , definida por:

$$\Lambda = E \{ (X - m_x)(X - m_x)^T \} \quad (35)$$

onde E é o operador do valor esperado, X é o vetor coluna que compõe os valores de X_1, X_2, \dots, X_n e m_x representa as respectivas médias das variáveis na matriz (SOONG, 2004).

Em geral, uma série temporal possui informações relevantes sobre o comportamento e os estados do sistema. A matriz de covariância possui um alto potencial para a reconstrução do espaço de estados, de forma que a sua implementação possibilita na detecção da diferença entre as projeções da trajetória, de forma que o que estado que contém o maior valor de variância indica onde estão as informações do sistema. De modo semelhante, a trajetória onde há o menor valor de variância representa o estado do sinal em que o ruído é predominante. Conseqüentemente, tal operação permite realizar a separação e definição da melhor projeção para a reconstrução do espaço de estados.

Supondo uma matriz com trajetória X definida por:

$$\{X\} = \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \dots \\ x_n^T \end{bmatrix} \quad (36)$$

onde x_1^T representa um vetor transposto por n elementos da série analisada. Assim, as colunas da matriz indicam os vetores de um estados em uma trajetória reconstruída. A finalidade da implementação da matriz se dá em detectar um conjunto de vetores independentes capazes de descrever de modo satisfatório o espaço de estados.

Os vetores constituem parte de uma base ortonormal ($e_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$) pertencente ao espaço de imersão e relacionados possuem a condição:

$$s_i^T X = \sigma_i c_i^T \quad (37)$$

onde s_i e c_i são autovetores do sistema e σ_i indicam os autovalores.

O teorema da decomposição em valores singulares afirma que os vetores c_i e s_i são os autovetores das matrizes XX^T e $X^T X$ da trajetória (MEYER, 2000). Tal fato pode ser indicado a partir das relações:

$$XX^T s_i = \sigma_i^2 s_i \quad (38)$$

$$X^T X c_i = \sigma_i^2 c_i \quad (39)$$

Assim, os vetores s_i e c_i são definidos como os vetores singulares de X e σ_i é considerado como os valores singulares. Reescrevendo a relação da matriz X , é possível calculá-la a partir de:

$$X = SDC^T \quad (40)$$

sendo que S e C representam o conjunto dos vetores $[s_1, s_2, \dots, s_n]$ e $[c_1, c_2, \dots, c_n]$ e D significa a matriz diagonal dos autovalores $[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$.

Sabe-se que o número de autovalores da matriz XX^T que não são iguais a zero é equivalente ao número de autovalores não nulos na matriz de covariância $X^T X$. Além disso, o número de autovetores que são independentes de c_i que descrevem o sistema

dinâmico, e conseqüentemente, o sistema de imersão, é igual ao número de autovalores não nulos (VASCONCELLOS, 2007). Logo, pode-se concluir que:

$$(XC)^T XC = D^2 \quad (41)$$

A Equação (41) indica que cada σ_i^2 indica a projeção da média quadrática da trajetória existente no sistema dinâmico, assim, o autovalor possui dados da trajetória relacionada a cada vetor c_i no espaço de imersão.

Nos casos em que o sinal estudo apresenta comportamentos gerados pelo ruído, os valores de σ_i são mascarados, principalmente nos autovalores pequenos e iguais a zero, de forma que a prevalência do ruído interfere na análise estatística dos dados. Nestes cenários, os autovalores podem ser expressos por meio dos autovalores relacionados com a dinâmica determinística $\bar{\sigma}_i^2$ e a presença do ruído na matriz de covariância ξ^2 por:

$$\sigma_i^2 \bar{\sigma}_i^2 + \langle \xi^2 \rangle, i = 1, 2, \dots, n \quad (42)$$

A Equação (42) indica que no caso de ruído branco, a existência de um piso constante não nulo, em um diagrama chamado espectro singular, que relaciona o tamanho do valor singular com seu índice, é uma característica que pode ser usada para separar as componentes determinísticas, somente as componentes acima desse piso são utilizadas na formação de uma nova matriz de trajetória:

A Equação (42) demonstra que para o caso de um ruído branco, a presença de um limiar constante não nulo em um espectro singular que relaciona o seu índice com o tamanho do valor singular, pode ser considerada como é uma característica usada para separar as componentes determinísticas do sistema (BROOMHEAD; KING, 1986). Assim, somente as componentes acima de tal limiar são utilizadas na geração da nova matriz de trajetória reconstruída \bar{X} , ou seja:

$$\bar{X} = \sum_{\sigma_i > \text{ruído}} (Xc_i)c_i^T \quad (43)$$

Por meio de tal método, é viável a reconstrução do espaço de estado de sistemas lineares e não lineares que possuem a contaminação do ruído, de forma que a nova trajetória não possui comportamentos ruidosos na sua série temporal. O fato de não apresentar o ruído na reconstrução do espaço de estado indica que o SVD também pode ser considerada

com uma técnica de filtragem, o que justificam as vantagens do método e a razão pela qual é utilizada no atual estudo.

De modo sucinto, é necessária a coleta da série temporal presente no sistema dinâmico para a aplicação do método da SVD e obtenção do espaço de estado do sinal. Isso significa que a janela temporal utilizada na análise é de extrema importância para encontrar resultados satisfatórias. O número de amostras na janela determinada por n pode ser encontrada a partir da análise frequencial do sinal:

$$n = \frac{2\pi}{f_c T_s} = \frac{\omega_s}{f_c} \quad (44)$$

onde f_c representa a frequência principal do sinal (de maior magnitude) em rad/s e T_s o intervalo de amostragem (BROOMHEAD; KING, 1986).

3.3 Expoente de Lyapunov

Utilizados amplamente em séries não lineares por meio de ferramentas computacionais, o expoente de Lyapunov possui a finalidade de indicar o nível de sensibilidade quando as condições iniciais de um sistema são aplicadas, determinando divergências exponenciais nas trajetórias de um sinal.

Os resultados obtidos podem ser utilizados para determinar a caoticidade de sistemas dinâmicos não lineares, devido ao fato de que a presença de ao menos um expoente de Lyapunov positivo indica a presença de um comportamento caótico no sistema.

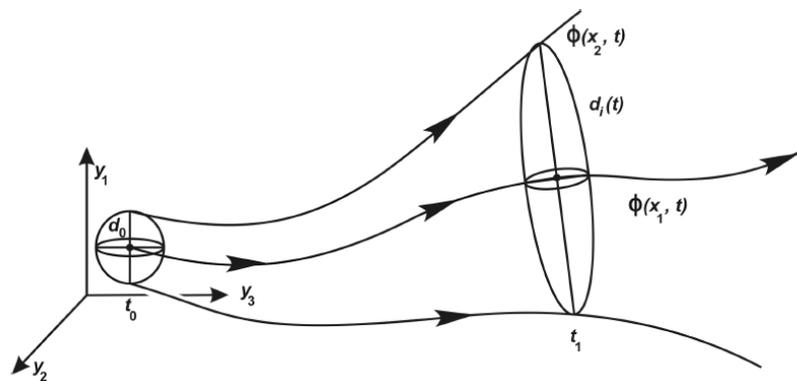
Basicamente, o expoente de Lyapunov representa uma medida da razão exponencial média do afastamento de pontos de trajetórias no espaço de fase. A sua finalidade envolve em representar o nível de perturbação em que uma determinada trajetória pode aumentar ou diminuir ao longo do tempo no espaço de fase (NAYFEH; BALACHANDRAN, 1995). A partir das informações obtidas quando aplicado tal conceito, é possível caracterizar se um sistema dinâmico composto por equações não lineares possui comportamentos caóticos.

Em um sistema dinâmico com um determinado número de dimensões de imersão, os expoentes de Lyapunov são detectados devido as variações comportamentais apresentadas pela fase do sinal no espaço de estados. O maior expoente de Lyapunov encontrado no sistema indica a divergência exponencial entre trajetórias localizadas no espaço de estados. Devido a isso, afirma-se que se o maior expoente de Lyapunov na série de análise é positivo,

o sistema é classificado como proveniente de comportamentos caóticos, e conseqüentemente, o mesmo apresenta sensibilidade as condições iniciais do sistema. Por outro lado, se o expoente de Lyapunov calculado é negativo, significa que a série temporal analisada apresenta comportamentos lineares.

A Figura 16 apresenta a suposição um sistema dinâmico cujas trajetórias próximas umas das outras são indicadas por $\phi(x, t)$ e uma esfera que relaciona o fluxo das trajetórias, cujo diâmetro é equivalente a d_0 .

Figura 16 – Trajetórias do sistema baseado em uma esfera.



Fonte: (SAVI, 2002).

A ideia do expoente de Lyapunov parte da ideia de avaliar o quanto a trajetória $\phi(x_2, t)$ diverge da sua trajetória vizinha $\phi(x_1, t)$ enquanto o sistema dinâmico evolui ao longo do tempo. Com isso, o expoente de Lyapunov avalia a evolução no tempo a partir dos eixos de uma esfera suficientemente pequena de estados do sistema dinâmico (SAVI, 2002).

Entre as diversas técnicas utilizadas para o cálculo do expoente de Lyapunov, destaca-se o método proposto por Wolf et al. 1985a. Ao longo do processo, são definidas duas órbitas y^n e z^n , sendo que y^n é classificada como a órbita de referência. Espera-se encontrar um vetor distância (u^k) dado por:

$$u^k = z^{n-k} - y^{n+k} \quad (45)$$

de forma que as órbitas z^0 e y^0 são as primeiras a serem analisadas.

Após os cálculos, percebe-se que o vetor calculado direciona para o maior expoente de Lyapunov, indicado por λ_1 (WOLF et al., 1985b). A Figura 17 apresenta o procedimento para a aplicação de tal método.

Figura 17 – Procedimento para cálculo do expoente de Lyapunov.

- 1) LER A SÉRIE TEMPORAL $X(t)$
- 2) DEFINIR A DEFASAGEM, A DIMENSÃO E O PASSO DE REPOSIÇÃO
- 3) DEFINIR AS COORDENADAS DEFASADAS
- 4) CALCULAR O VIZINHO MAIS PRÓXIMO AO PRIMEIRO PONTO
 - 4.1) CALCULAR A DISTÂNCIA ENTRE O PONTO FIDUCIAL E O CANDIDATO
 - 4.2) VERIFICAR SE A DISTÂNCIA É MENOR QUE A DISTÂNCIA INICIAL E MAIOR QUE A DISTÂNCIA MÍNIMA (RÚIDO)
- 5) CALCULAR A DISTÂNCIA ENTRE OS PONTOS EVOLUÍDOS
- 6) CALCULAR A DISTÂNCIA ENTRE O ÚLTIMO PAR DE PONTOS E CALCULAR O EXPOENTE DE LYAPUNOV
- 7) PROCURAR PELO PONTO DE REPOSIÇÃO
 - 7.1) CALCULAR A DISTÂNCIA ENTRE O PONTO FIDUCIAL E O CANDIDATO
 - 7.2) VERIFICAR SE A DISTÂNCIA É MENOR QUE A DISTÂNCIA INICIAL E MAIOR QUE A DISTÂNCIA MÍNIMA (RÚIDO)
- 8) ENCONTRAR A MUDANÇA ANGULAR PARA O NOVO VETOR
- 9) SALVAR PONTO COM MENOR MUDANÇA ANGULAR ATÉ AGORA
- 10) ENCONTRANDO O NOVO VIZINHO, VOLTAR AO ITEM (5).
- 11) TERMINAR O PROGRAMA QUANDO A TRAJETÓRIA FIDUCIAL CHEGAR AO FIM

Fonte: (SIMONI, 2007).

Além do método proposto por Wolf et al. (1985a), as séries temporais também podem ser analisadas levando em conta o crescimento exponencial médio da distância entre as órbitas vizinhas da dimensão de imersão por meio de:

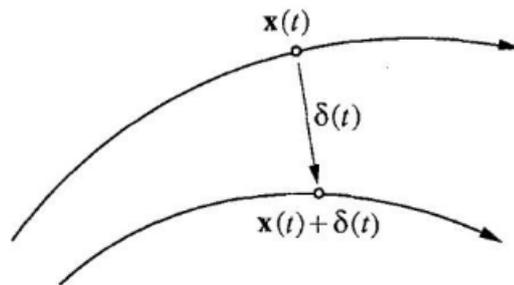
$$p(k) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=1}^N \log_2 \left(\frac{\|y^{n_1+k} - y^{n_2+k}\|}{\|y^{n_1} - y^{n_2}\|} \right) \quad (46)$$

sendo que N e mt_s indicam o número de amostras e o período de amostragem, respectivamente, y^1 é uma amostra e y^2 a sua órbita vizinha.

A função $p(k)$ possui uma dependência com o número de passos referente a um tempo k que pode ser dividido em três fases, sendo que o transiente, indicado pela órbita vizinha que converge na direção do maior expoente de Lyapunov é a primeira fase. A segunda fase envolve o aumento da distância entre as órbitas de forma exponencial, dada por $e^{\lambda_1 t_s k}$ até o ponto em que tal distanciamento seja maior que o limiar do fluxo da órbita y^{n+k} (VASCONCELLOS, 2012). Por fim, a última fase implica no aumento seguido da diminuição do distanciamento devido a existência de dobras no espaço de estados (PARLITZ, 1998).

Como visto nos métodos elaborados por Wolf e Sato, o cálculo do expoente de Lyapunov pode ser calculado de formas distintas, porém, ambos os momentos utilizam o mesmo princípio, que é a análise das órbitas e as suas respectivas trajetórias. Analisando matematicamente, a existência de duas trajetórias próximas permite a definição de $x(t)$ como um determinado ponto de uma das trajetórias, $x(t) + \delta(t)$ o ponto da trajetória vizinha e δ o vetor distância, conforme a Figura 18. A evolução do sistema ao longo do tempo demonstra que estas trajetórias se afastam a um comportamento exponencial, independente da técnica implementada.

Figura 18 – Comportamento das trajetórias em um sistema.



Fonte: (YEUNG; STROGATZ, 1998).

Após tais definições, basta analisar a distância entre as trajetórias, denominada por λ , em uma iteração específica. Conseqüentemente, o valor da iteração é conhecido como o Expoente de Lyapunov. É possível demonstrar como é feita análise do conceito, partindo da ideia do distanciamento da trajetória até a definição do expoente:

$$\begin{aligned}
 |\delta(t)| &= |\delta(0)| e^{\lambda t} \\
 \frac{|\delta(t)|}{|\delta(0)|} &= e^{\lambda t} \\
 \ln(e^{\lambda t}) &= \ln \frac{|\delta(t)|}{|\delta(0)|} \\
 \lambda t &= \ln \frac{|\delta(t)|}{|\delta(0)|}
 \end{aligned}$$

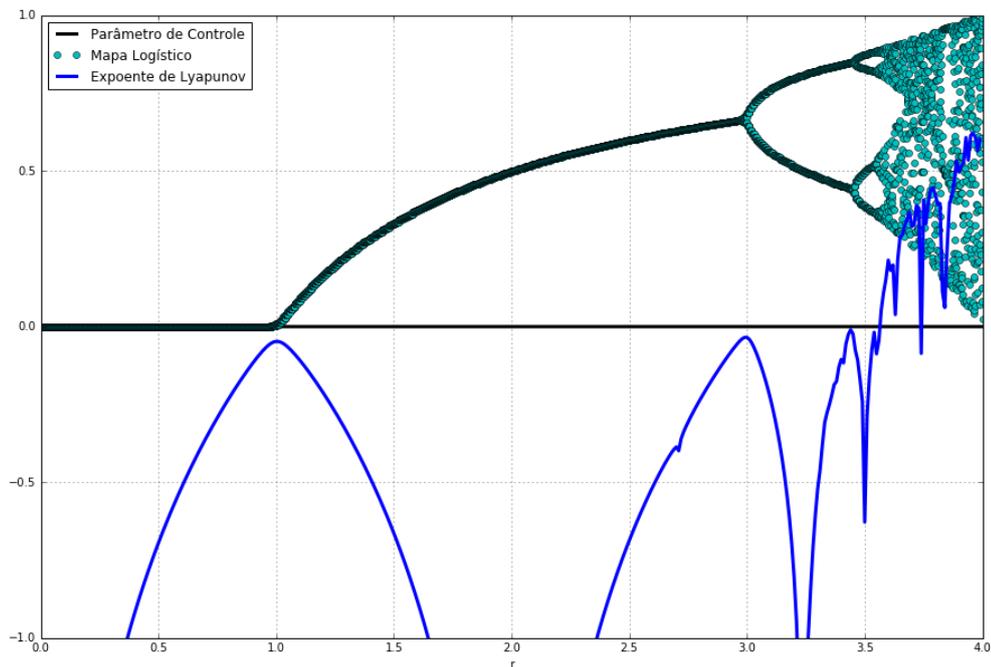
Alterando a ordem das variáveis, tem-se:

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta(t)|}{|\delta(0)|} \quad (47)$$

Assim, se o resultado obtido apresentar um valor de λ positivo e maior que zero, define-se que as trajetórias estão se afastando e o sistema dinâmico estudado apresenta comportamentos caóticos. Por outro lado, se o valor do expoente for negativo, significa que as trajetórias estão aproximando, mostrando uma estabilidade no sistema.

A Figura 19 ilustra o comportamento do expoente de Lyapunov em um mapa logístico. Após os dados de uma série temporal de comportamento caótico serem processados, foi possível apresentar as suas bifurcações, fator que indica aspectos não lineares no sistema. A cada bifurcação, o expoente de Lyapunov, que inicialmente possui valor negativo, começa a aumentar até atingir valores próximos de zero, demonstrando que naqueles instantes, a série de fato apresentava alterações provocadas por condições iniciais. Após a iteração equivalente a 3,5, o sistema passa a ser dominado por comportamentos não lineares, fazendo com que o expoente de Lyapunov possuísse valores positivos conforme o aumento das iterações.

Figura 19 – Expoente de Lyapunov no mapa logístico de uma série não linear.



Fonte: próprio autor.

Após os métodos de Wolf (1985b) e Sato ((SATO; SANO; SAWADA, 1987)), Rosenstein et al.(1993) apresentou um algoritmo no qual considera que a divergência existente entre trajetórias vizinhas de um sistema podem oscilar ao longo da série temporal. Assim, o maior expoente de Lyapunov calculado representa o maior coeficiente angular

da curva que possui a direção de maior instabilidade. Por meio desta premissa, é possível determinar com maior precisão o local onde se encontra o expoente, calculado por:

$$\lambda_1 = \frac{1}{i\Delta t} \frac{1}{M-i} \sum_{j=1}^{M-i} \log_2 \frac{d_j(i)}{d_j(0)} \quad (48)$$

onde Δt é o período de amostragem, $d_j(i)$ a distância entre os vizinhos, $d_j(0)$ a distância inicial e M a relação de:

$$M = N_0 - T(d-1) \quad (49)$$

Pelo fato da equação levar em conta a presença do ruído por meio de N_0 , o algoritmo elaborado é indicado para o cálculo de expoentes de Lyapunov em sinais experimentais.

3.4 Entropia

Considerada como uma ferramenta com grande potencial pra análise da não linearidade, a entropia é um conceito físico relacionado à desordem de um sistema, porém, a entropia também é aplicada amplamente na teoria da informação. Uma informação pode ser entendida como a medida da quantidade de incerteza de um evento ocorrido. O cálculo de uma informação envolve a probabilidade da ocorrência de determinado estado existente dentro do processo, dada por:

$$I = f(P_A) = -\log_\alpha P_A \quad (50)$$

onde A é o evento e P_A a probabilidade do evento A ocorrer. A base α comumente é substituída por 2 para que a resposta obtida possua sua grandeza em bits. De forma que a informação indica o grau de incerteza de um sistema, pode-se dizer que quanto maior for a informação calculada, maior é o grau de incerteza que o sistema possui, permitindo a implementação da sua caracterização. Contudo, em algumas ocasiões, o sistema não possui apenas um tipo de informação, ou seja, o sistema pode sofrer mudanças do seu comportamento ao longo do tempo, capazes de alterar sua estrutura, e conseqüentemente, modificar a informação presente. Devido a isso, são utilizadas as medidas de entropia.

Admitindo um sistema X que contém diversas informações. A entropia é baseada no cálculo da média das informações presentes ao longo do sistema:

$$H(X) = - \sum_{k=0}^{k-1} p_k \log_{\alpha}(p_k) \quad (51)$$

onde para cada valor de k , a probabilidade resultante da informação é coletada e somada, posteriormente. Algumas condições devem ser enfatizadas para o entendimento do funcionamento da entropia. Sua condição é dada por:

$$0 \leq H(X) \leq \log_{\alpha}(K) \quad (52)$$

Se a probabilidade de ocorrência de determinado evento a_k for $p_k = 1$, e todas as outras probabilidades forem zero, significa que $H(X) = 0$. Para essa condição, os valores indicam que não existe incerteza nos eventos, logo, a entropia é equivalente a zero. Como exemplo de entropias nulas, podem-se citar as funções periódicas.

Quando as probabilidades de todos os eventos a_k do sistema forem equiprováveis, gerando a máxima incerteza, ou seja, possuindo o maior valor de entropia possível no sistema analisado ($p_k = \frac{1}{K}$), tem-se que $H(X) = \log_{\alpha}(K)$.

A estimativa de valores obtidos por meio da entropia resulta na ideia do quão complexo o sistema é, mostrando se ao longo da sua escala de tempo, o sistema possui aspectos predominantes regulares ou irregulares, determinando assim, se existem aspectos de comportamentos não lineares ao longo do tempo. Consequentemente, a estimativa realizada permite determinar se o sistema pode ser considerado como caótico (altamente complexo e irregular) ou não caótico (pouco complexo e regular). Para a resolução do problema, Steve M. Pincus desenvolveu a chamada entropia aproximada (ApEn), uma ferramenta matemática que analisa amplamente a informação dentro da série, independentemente do quão irregular ou regular o sistema é (PINCUS, 1991).

Assumindo uma série temporal $y(t)$ composta por uma sequência y e com x medidas instantâneas. Considerando que $pn(i)$ é uma janela do sinal que inicia da amostra i e o número de padrões que são similares para $pn(i)$ é denotado por $nin(r)$, é possível estabelecer uma relação entre esses padrões com o período da série e o número de medidas instantâneas, encontrando o que é chamado de $Cin(r)$ dado por:

$$Cin(r) = \frac{nin(r)}{x - n + 1} \quad (53)$$

onde $Cin(r)$ refere-se a fração de padrões de comprimento n que se assemelham ao padrão do mesmo comprimento com início do intervalo em i . A média dos valores de $Cin(r)$ é $Cn(r)$. No cálculo da entropia aproximada, é necessário analisar os padrões repetitivos no período n e compará-los com os de comprimento $n + 1$. Assim, a entropia aproximada pode ser definida por:

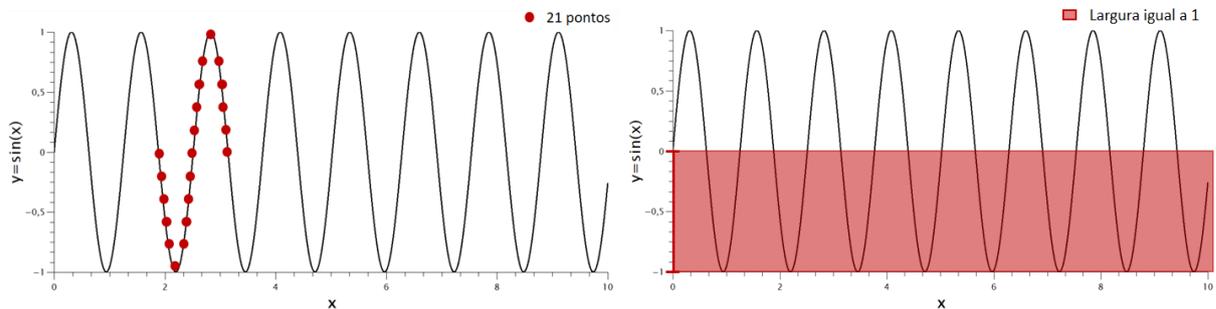
$$ApEn = \ln \left(\frac{Cn(r)}{C_{n+1}(r)} \right) \quad (54)$$

Sendo assim, caso sejam encontrados padrões semelhantes em uma série temporal, a entropia aproximada estima a probabilidade logarítmica que os próximos intervalos com seus respectivos padrões serão diferentes do intervalo analisado. Em condições básicas, se a entropia resultar em zero, significa que o sinal é determinístico, como um sinal senoidal, por exemplo. Se a entropia for maior que zero, significa o sinal possui comportamentos irregulares e pode apresentar comportamentos provindos de efeitos não lineares.

O cálculo da ApEn depende das variáveis n e r , referentes ao número de pontos e o aspecto de similaridade, respectivamente. A variável n representa o número de pontos necessários para detectar a repetição de informação em uma série temporal. Sabe-se que uma série é composta de informações que variam ao longo do tempo, gerando a característica do sinal e o comportamento que o mesmo possui e tende a se repetir. Isso significa que a informação contida na série temporal é repetida inúmeras vezes. Como a entropia analisa as informações da série ao longo do seu comportamento por meio de variações do sistema, torna-se necessário calcular quantos pontos existem em um certo intervalo da série antes que a informação se repita, ou seja, é preciso calcular o número de pontos que formam um intervalo periódico da série que passa a se repetir.

A variável r indica o aspecto de similaridade da série temporal e é aplicada na amplitude do sinal. Quando uma série $y(t)$ é analisada, o seu comportamento pode ser dividido em diversos eventos. O aspecto de similaridade atua no cálculo da entropia como um critério de tolerância da probabilidade do evento ser igual ao analisado no período anterior. Isso significa que a variável demonstra qual a possibilidade de se encontrar o mesmo valor em um período futuro. A Figura 20 demonstra de modo sucinto a contabilização de pontos para a determinação da variável n e a escolha da amplitude da série a fim de representar o aspecto de similaridade.

Figura 20 – Exemplificação na determinação das variáveis (número de pontos e aspecto de similaridade) para o cálculo da entropia

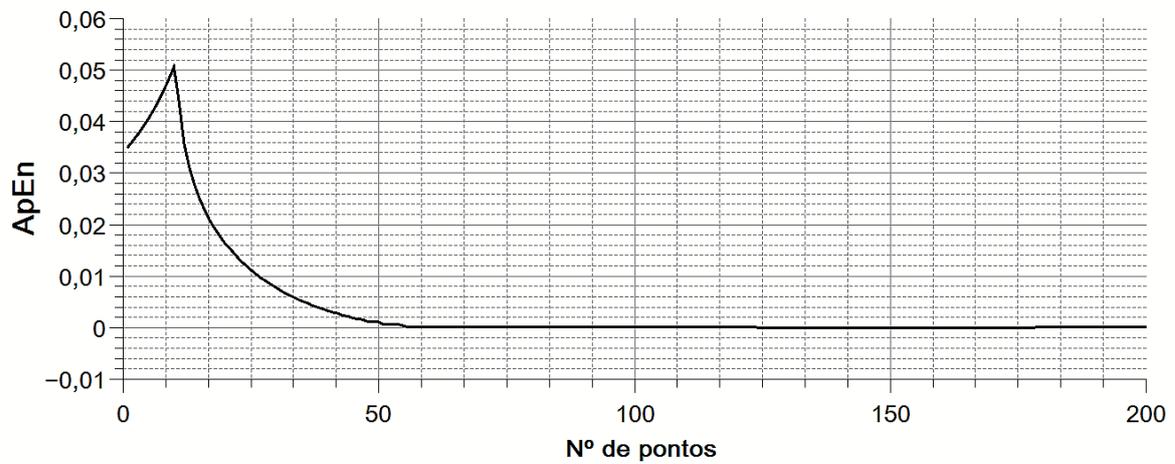


Fonte: próprio autor.

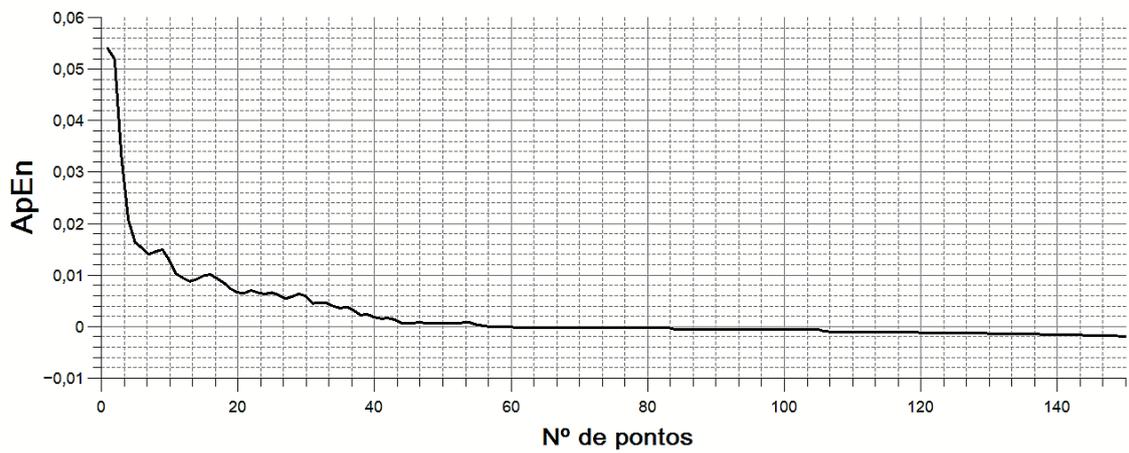
Em séries periódicas, o número de pontos pode ser determinado analisando os picos de amplitude da série e calculando quantos pontos existem no intervalo de dois picos. Por outro lado, em séries aperiódicas, a análise dos picos não pode ser estabelecida, sendo necessário realizar uma análise em frequência para determinar regiões de maior probabilidade de repetição. Apesar das análises serem distintas de acordo com o sistema, ambas as estratégias resultam em um número de pontos necessários para atingir a estabilidade da série, ou seja, o número de pontos necessários para que a entropia passe a ser constante.

Um exemplo de análise pode ser visto Nas Figuras 21a e 21b, onde é analisado a entropia de uma série senoidal e e uma série de Lorenz. Devido ao fato de se tratar de uma série periódica, a entropia da série senoidal possui um breve incremento até o ponto em que as informações se repetem ao longo do tempo. A partir do momento em que não existem novas informações na série, a entropia tende a diminuir. Já a complexidade existente em uma série de Lorenz impede que a análise da entropia resulta em apenas um pico de informação. As informações existentes no sinal resulta na geração de mínimos locais, ou seja, mesmo que a entropia tenda a diminuir com o aumento de pontos, em certos momentos a mesma sofre um incremento devido ao surgimento de novas informações.

Figura 21 – Caracterização de sinais lineares e não lineares por meio do cálculo da entropia, variando o número de pontos e mantendo o aspecto de similaridade fixo.



(a) Análise de entropia em uma série senoidal com 200 pontos.



(b) Análise de entropia em uma série de Lorenz com 150 pontos.

Fonte: autor próprio.

4 A Função Densidade de Probabilidade Conjunta

O presente Capítulo aborda a teoria da J-PDF. Para entender o seu funcionamento, o Capítulo foi dividido em seis seções, de forma que entre as Seções 4.1 e 4.3 são abordados alguns temas da estatística, como variáveis aleatórias e funções densidade de probabilidade, conceitos vitais para o entendimento da Seção 4.4, onde a J-PDF de fato é demonstrada. Após o levantamento teórico referente ao modelo estatístico, a sua implementação em um *software* é encontrada na Seção 4.5.

4.1 Definição

A priori, os conceitos referentes a Função Densidade de Probabilidade Conjunta fazem parte de uma grande área, denominada estatística. Portanto, torna-se necessário compreender inicialmente a definição e a abrangência de tal campo de estudo. Basicamente, a estatística é definida como um conjunto de técnicas, nas quais permitem realizar inferências, analisar dados coletados e formular conclusões precisas, auxiliando quem a utiliza no processo de tomada de decisões (GUEDES *et al.*, 2005). Apesar de ser considerada com um segmento da matemática, a estatística sempre esteve presente na sociedade por meio da análise de eventos e da coleta de informações sobre uma população ou fenômeno.

A complexidade das análises devido ao avanço dos estudos fez com que a estatística fosse compreendida em dois âmbitos, denominados por estatística descritiva e estatística indutiva. Enquanto a descritiva possui a finalidade de reunir e organizar dados por meio de tabelas e gráficos, a fim de obter informações detalhadas, a estatística indutiva tem como base realizar afirmações sobre o comportamento de uma população analisada (SANTOS, 2007).

Tendo como base as definições supracitadas, diversas formulações e teoremas foram desenvolvidos, tornando a estatística como uma área presente praticamente em todas as pesquisas elaboradas pela sociedade científica, utilizada principalmente para comprovar e desenvolver resultados gerados por meio de dados obtidos em simulações e experimentos.

Entre os diversos conceitos estatísticos existentes, destaca-se o termo variável. Como diz seu próprio nome, uma variável representa um fenômeno no qual pode-se equivaler a qualquer valor numérico, podendo indicar diversas mensurações, como a idade média

entre uma população, por exemplo. O entendimento do comportamento de uma variável, seja ela aleatória ou não, pode significar a compreensão de ocorrências presentes em um determinado evento (WALPOLE *et al.*, 1993). Para que tal análise seja feita, é necessário associar o elemento estudado a um valor numérico real, definindo o conceito de uma variável aleatória.

Contudo, a caracterização de um sistema não depende de apenas uma, mas de diversas variáveis aleatórias que se relacionam ao longo do tempo, ou então não estão relacionadas, mas estão presentes em um mesmo sistema. Assim, tendo em vista a necessidade de analisar tais variáveis, é preciso utilizar ferramentas estatísticas robustas com a capacidade de quantificar e identificar padrões em sinais individuais e cruzados.

Uma ferramenta adequada para tal aplicação é a Função Densidade de Probabilidade Conjunta (*Joint Probability Density Function*, J-PDF), quando relacionada ao estado de uma variável. A J-PDF, basicamente, é uma ferramenta que realiza mensurações estatísticas do comportamento de variáveis analisadas ao longo de um determinado intervalo de tempo.

Por meio de representações em espaços de fase, a J-PDF é capaz de apresentar as variações características do estado de um sistema (VENKATRAMANI; SARKAR; GUPTA, 2018). Com isso, torna-se possível associar as densidades de probabilidades de variáveis individuais ou cruzadas a comportamentos considerados normais ou anormais.

Apesar de a sua implementação em sistemas não lineares ser recente, a ferramenta J-PDF é encontrada em diversas áreas ciência, devido a sua potencialidade e viabilidade computacional.

No campo da aeroelasticidade, o estudo proposto por Venkatramani (2018) analisa os efeitos de flutuações irregulares no escoamento em uma asa com dois graus de liberdade com não linearidade tipo *hardening*. As transições no sistema foram identificadas por meio da aplicação da densidade de probabilidade conjunta nas variáveis medidas.

No âmbito da química, a pesquisa proposta por Lindstedt (2000) envolve o estudo avaliativo de partículas nas quais se movimentam em uma estrutura Lagrangiana para a medição de poluição ocasionada por jatos de chamas de difusão turbulenta. A análise do composto formado por metano, oxigênio e nitrogênio é realizada em diferentes valores do coeficiente de Reynolds, estimando a previsibilidade do comportamento estrutural das chamas por meio da J-PDF, evidenciando a potencialidade da técnica. De modo semelhante, Tang (2006) aplica a ferramenta em modelos de combustão turbulenta e

verifica a previsão da formação de Monóxido de Nitrogênio em chamas de difusão e de extinção local.

A J-PDF também é utilizada na Engenharia da Qualidade. Quando um processo de otimização em um projeto de larga escala é elaborado, são analisados diversos procedimentos visando definir qual técnica proporcionará tal aprimoramento requerido diante das condições impostas. Para fabricação de um produto, por exemplo, é necessário analisar o tempo e o custo de produção, devido ao fato de serem variáveis importantes no processo de elaboração. Como ambos os aspectos são considerados como variáveis aleatórias na análise dos métodos de fabricação, deve-se avaliar a probabilidade de que o produto elaborado seja finalizado no menor tempo e necessite do menor custo possível.

Tendo isso em vista, Davoodi (2006) analisa três métodos para o cálculo dessa probabilidade: o método de Monte Carlo (MC), a Função Densidade de Probabilidade Conjunta e um método de MC baseado em limite, de forma que os resultados mostram que quando comparada com os outros métodos probabilísticos analisados, a técnica J-PDF é a mais eficiente para caracterizar o comportamento do processo e prever futuras alterações nas variáveis que causem problemas no processo.

Por fim, na área da elétrica, Yang (2014) propõe uma abordagem paramétrica utilizando a J-PDF para realizar a previsão da geração de energia eólica e obtendo também resultados satisfatórios, os quais fortalecem o grande potencial em que a recente ferramenta possui, podendo ser considerada como promissora e de grande auxílio para a análise de danos estruturais.

As análises realizadas nos trabalhos supracitados evidenciam que com as informações obtidas por meio da J-PDF, é possível analisar de modo detalhado um sinal coletado, após o mesmo sofrer processos de filtragem quando necessário, tornando-se possível determinar se os resultados obtidos apresentam ou não características não previstas. A classificação do comportamento do sinal auxilia diretamente na decisão da realização da manutenção de um produto, por exemplo.

4.2 Variáveis aleatórias

Para compreender a aplicação da técnica J-PDF, é necessário abordar inicialmente alguns conceitos iniciais. A estatística tem como principal finalidade realizar análises

e pressupostos perante determinada população. A partir do momento em que diversas definições e informações de um grupo estudado são reveladas, obtém-se uma série de informações relevantes para o entendimento das características dos tópicos investigados.

Caso a ocorrência de determinados fenômenos são analisados, por exemplo, diversas características podem ser encontradas no chamado espaço amostral, onde se encontram as descrições detalhadas dos possíveis resultados que podem ocorrer ao longo de um determinado estudo.

Para apurar e relacionar a mensuração dessas ocorrências, é conveniente representar numericamente o resultado de uma dada experiência, atribuindo cada ponto do espaço amostral a um número real. A função na qual associa um número real a um elemento do espaço amostral é nomeado como variável aleatória (WALPOLE *et al.*, 1993). A Figura 22 ilustra claramente os conceitos definidos de uma variável aleatória, onde ocorre a atribuição do ponto s a um valor numérico X , gerando a função $X(s)$, na qual possui informações tanto do espaço amostral do evento, quanto da sua caracterização numérica.

Figura 22 – Representação de um espaço amostral com uma variável aleatória.



Fonte: próprio autor.

Supondo um cenário onde uma pessoa atira duas moedas por duas vezes. Pelo fato de serem moedas não viciadas, a probabilidade de que o resultado obtido seja cara ou coroa é igual. Logo, é possível caracterizar facilmente a variável aleatória em questão, de modo que o experimento possui o espaço amostral:

$$S\{HH, HT, TH, TT\}$$

onde ao atirar uma moeda, o resultado obtido pode ser cara, representado por H (*Head*) ou coroa, indicado por T (*Tail*). Assim, o lançamento de duas moedas podem resultar na aparição de duas caras ou duas coroas, bem como uma cara e uma coroa em ordens distintas. Se X é a variável aleatória na qual indica o número de vezes onde a face cara foi sorteada, a atribuição numérica do evento é representada por:

$$X(HH) = 2$$

$$X(HT) = 1$$

$$X(TH) = 1$$

$$X(TT) = 0$$

Diante da formulação apresentada, é possível compreender que se foram sorteadas duas vezes a face cara, a variável aleatória é igual a 2, do mesmo modo que se é sorteada apenas uma ou nenhuma face cara, a variável aleatória é equivalente a 1 e 0, respectivamente.

O espaço Rx representa o conjunto dos possíveis valores de X , nomeado por contradomínio. Assim, se S é o espaço não numérico, Rx é definido como o espaço associado a variável aleatória, correspondendo a característica numérica.

As definições do espaço amostral e da variável aleatória podem ser distintas, conforme o estado da população analisada. Se o espaço amostral possui um número finito de possibilidades, pode-se denominar que o espaço amostral é discreto. Por outro lado, caso exista um número infinito de possibilidades exatamente igual a quantidade de pontos representados por valores numéricos, o espaço amostral é chamado de contínuo (ALBUQUERQUE; FORTES; FINAMORE, 2008).

Do mesmo modo que o espaço amostral é definido, as variáveis são classificadas em aleatórias discretas, contínuas e mistas. Quando Ω é considerada como uma variável aleatória e o número de valores presentes em Ω for enumerável, define-se que Ω é considerada como uma variável aleatória discreta. Com isso, o primeiro valor presente em Ω é nomeado como Ω_1 , por exemplo. Desse modo, considerando o contradomínio Ω_x , a variável aleatória discreta é definida por:

$$\Omega_x = \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n \quad (55)$$

Normalmente, as probabilidades de uma variável aleatória são representadas por uma função, desse modo, as funções de um valor numérico x são escritas na forma de $f(x)$ ou $g(x)$, por exemplo, indicando a probabilidade de X , ou $P(X = x)$. Assim, a denotação do conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ é chamada de função de probabilidade ou distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta X (WALPOLE *et al.*, 1993).

Apesar da definição, existem requisitos necessários para tal definição ser afirmativa. Portanto, $(x, f(x))$ é a função de probabilidade da variável discreta X apenas se:

1. $f(x) \geq 0$;
2. $\sum_x f(x) = 1$;
3. $P(X = x) = f(x)$.

Assim, é possível associar a distribuição de probabilidade de uma determinada variável aleatória discreta X a um espaço amostral S por meio de uma tabela, facilitando a visualização da relação de ambos os termos.

Supondo agora que uma moeda é lançada duas vezes, onde X é a variável dentro do espaço amostral, na qual pode assumir os valores referentes ao número de caras sorteadas após o fim de cada lançamento. Sendo H representando cara e T representando coroa, é gerado a Tabela 2, na qual informa a distribuição de probabilidade perante a variável aleatória X .

Tabela 2 – Distribuição de probabilidade de um evento.

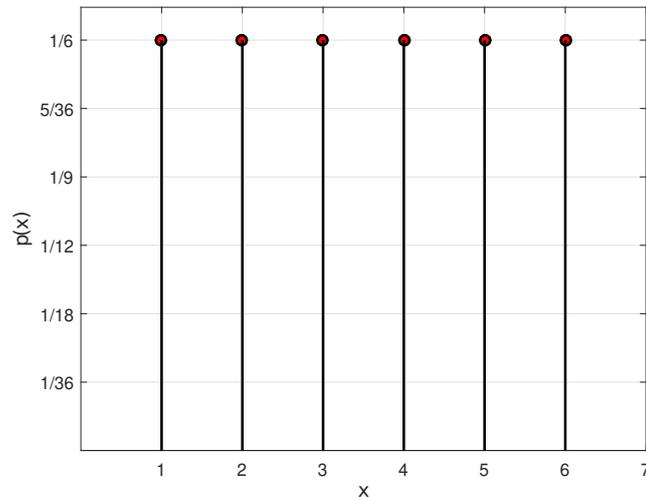
Possíveis valores de X	Possíveis resultados	Probabilidade do evento $f(x)$
0	TT	1/4
1	HT, TH	1/2
2	HH	1/4

Fonte: (WALPOLE *et al.*, 1993).

O comportamento de uma variável aleatória também pode ser visto graficamente. Admitindo um cenário onde um dado não viciado de seis lados é lançado uma única vez, sabe-se que o resultado obtido em um conjunto de seis possibilidades distintas é aleatório. Como não se trata de um dado viciado, as probabilidades de cada face lateral do dado são idênticas, equivalentes a $1/6$. Isso pode ser visto na Figura 23, onde é apresentada a relação entre os valores numéricos de cada lado do dado (x) e a probabilidade ($p(x)$) de cada variável aleatória, equivalente a $1/6$.

Diferentemente de uma variável aleatória discreta, uma variável aleatória contínua possui uma probabilidade igual a zero de assumir precisamente um valor, logo, a distribuição de probabilidade já não pode mais ser indicada na forma de uma tabela (ALBUQUERQUE; FORTES; FINAMORE, 2008). Tal fato se dá por estar se deparando com variáveis espaçadas em intervalos menores. Com isso, ao invés de uma tabela a variável aleatória contínua é expressa por meio de uma formulação, ou seja, uma função dos valores numéricos pertencentes a variável aleatória contínua. Admitindo por exemplo um tubo calibrado com

Figura 23 – Probabilidade do arremesso de um dado não viciado.

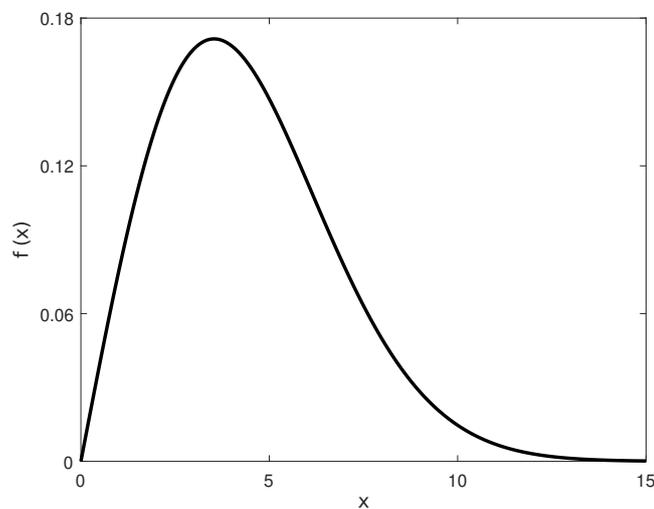


Fonte: próprio autor.

precisão r . Se $A = \pi r^2$, onde r é o resultado de uma variável. Quando r varia, A também varia, logo, pode-se dizer que A é uma variável aleatória (MEYER, 2000).

Para simplificar o entendimento de uma variável aleatória contínua, a Figura 24 apresenta o comportamento de uma distribuição de probabilidade contínua de Weibull, onde a variável aleatória contínua pode possuir diversos valores ao longo de um intervalo. Como a distribuição de Weibull normalmente é utilizada para a determinação do tempo de vida de uma população, tal distribuição é aplicada amplamente em diferentes áreas de estudo.

Figura 24 – Distribuição contínua de Weibull.



Fonte: próprio autor.

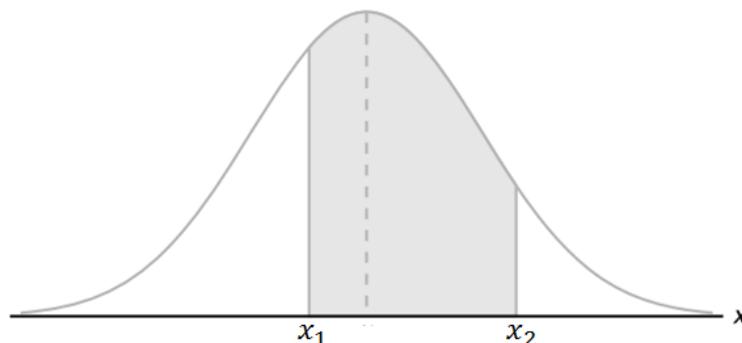
Basicamente, a variável aleatória é considerada como contínua quando sua função de distribuição de probabilidade é contínua e diferenciável em quase todo os pontos, podendo possuir diversos valores ao longo de um intervalo. Para este caso, X é uma variável aleatória contínua caso exista uma função $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ chamada de Função de Densidade de Probabilidade (*Probability Density Function*, PDF). Do mesmo modo que a função de probabilidade, a PDF para uma variável aleatória contínua é definida em um conjunto de números reais \mathbb{R} quando:

1. $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

Uma PDF, basicamente, descreve a probabilidade de uma variável possuir determinado valor. Assim, normalmente, a formulação da função é dada pela integral da densidade da variável em determinado intervalo de análise, estabelecendo uma faixa de valores numéricos. Analisando graficamente, uma PDF é elaborada de forma que a área abaixo da sua curva até o eixo x seja igual a 1, quando calculada a amplitude de X para uma $f(x)$ definida, não podendo resultar em um valor negativo (WALPOLE *et al.*, 1993). A Figura 25 ilustra uma distribuição em que a probabilidade de que X assumo um valor entre x_1 e x_2 é igual a área sombreada, sendo definida por:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \quad (56)$$

Figura 25 – Distribuição de uma PDF com $P(x_1 < X < x_2)$.



Fonte: (WALPOLE *et al.*, 1993).

Há também os casos em que a variável aleatória é considerada como mista, ou seja, é não nula e toma todos os valores em um intervalo ($a \leq x \leq b$). Assim, a distribuição de

probabilidade para tal caso é obtida por meio dos conceitos abordados quando apresentadas as variáveis aleatórias discretas e contínuas.

4.3 Distribuições de probabilidade usuais

Como citado anteriormente, a distribuição de probabilidade tem como finalidade relacionar o comportamento de uma variável de acordo com a sua probabilidade. Para isso, as distribuições são caracterizadas por meio de modelos matemáticos que serão descritos à seguir. Basicamente, as distribuições são divididas entre discretas e contínuas, de modo que as distribuições Binomial e Poisson são consideradas como as distribuições de probabilidade discretas mais utilizadas na estatística.

A distribuição binomial é utilizada para representar eventos onde o resultado de uma variável são organizadas em apenas duas categorias distintas. Por exemplo, analisando a montagem de um equipamento eletrônico, a distribuição binomial pode ser utilizada pra representar a classificação dos produtos definidos como perfeitos ou defeituosos. A determinação de duas classes são necessárias para que todas as probabilidades, caracterizadas normalmente por sucesso e falha, sejam levadas em conta. Desse modo, pode-se estabelecer a relação de probabilidade:

$$P(\text{sucesso}) + P(\text{falha}) = 1 \quad (57)$$

Para aplicar tal distribuição, é necessário verificar que realmente existem apenas dois resultados possíveis nos eventos, de modo que exista a independência dos resultados ao longo das n repetições de um experimento, ou seja, o evento analisado não pode sofrer influência de resultados anteriores (WALPOLE *et al.*, 1993). Desse modo, sendo analisado um processo com n repetições independentes com probabilidade de sucesso p , a distribuição binomial é definida por:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \quad (58)$$

onde $\binom{n}{x}$ representa o número de combinações n para cada valor de x , calculado por:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \quad (59)$$

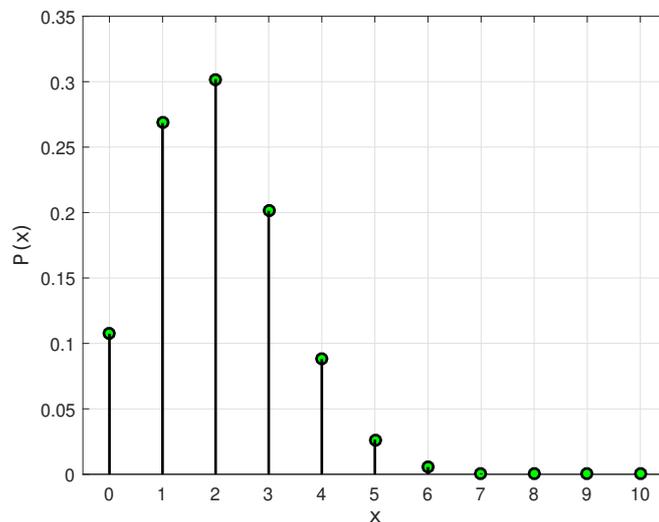
Além disso, é possível também calcular a média μ e a variância σ do evento, dadas por:

$$\mu = np \quad (60)$$

$$\sigma^2 = np(1 - p) \quad (61)$$

A Figura 26 exemplifica uma distribuição binomial de um processo com dez repetições e uma probabilidade de sucesso equivalente a 0,2. Devido à estrutura da formulação de uma distribuição binomial, a figura gerada apresenta um comportamento exponencial.

Figura 26 – Representação de uma distribuição binomial.



Fonte: próprio autor.

Além da distribuição binomial, uma outra distribuição utilizada comumente é nomeada por distribuição de Poisson. Essa distribuição normalmente é utilizada para descrever fenômenos em uma população onde a probabilidade de um evento é dependente de um intervalo contínuo, como o tempo ou uma determinada área (MEYER, 2000).

Do mesmo modo que a distribuição Binomial, a distribuição de Poisson também possui requisitos para a sua implementação. Primeiramente, é preciso assegurar que a variável estudada possui dependência estritamente do intervalo de análise, assim, os eventos ocorrentes são independentes entre si. Como para um intervalo contínuo, a contabilidade dos eventos que não geram sucesso é extramente complexa, sendo considerada como incontável, a distribuição de Poisson apresenta somente os eventos onde não ocorreram falhas.

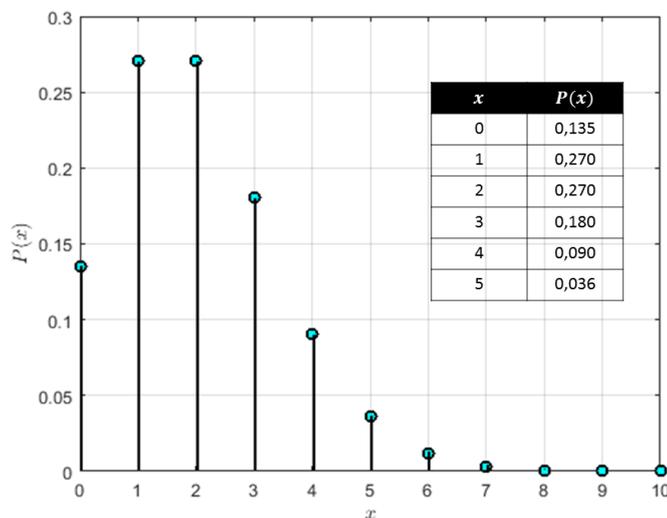
A distribuição é caracterizada pela variável λ , na qual representa a taxa média de eventos ocorridos. Portanto, para calcular a probabilidade de um fenômeno, é necessário utilizar a relação:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^x}{x!} \quad (62)$$

A Figura 27 representa a distribuição de Poisson para o caso à seguir. Supondo que o número de falhas de um equipamento eletrônico segue uma distribuição de Poisson com a taxa λ equivalente a 2. Para descobrir a probabilidade de que um equipamento apresente mais de 5 defeitos, é necessário analisar inicialmente a probabilidade de que ocorram até 5 falhas no equipamento e subtrair a somatória dos eventos da parcela total de possibilidades:

$$1 - P(X \leq 5) = 1 - \sum_{x=0}^5 \frac{e^{-2} 2^x}{x!} = 1 - 0,983 = 0,017 = 1,7\%$$

Figura 27 – Representação de uma distribuição de Poisson.



Fonte: próprio autor.

As distribuições de probabilidade também podem ser contínuas. A distribuição Exponencial, por exemplo, é uma das distribuições de probabilidade contínua mais utilizadas na Estatística, por ser aplicada desde situações onde se analisam falhas em equipamentos até a área da confiabilidade (ALBUQUERQUE; FORTES; FINAMORE, 2008). Além da Exponencial, podem-se citar também as distribuições de Weibull e Normal.

A variável aleatória para a distribuição de Poisson é indicada com o número de ocorrências em um determinado intervalo de tempo, de modo que λ representa a média dos

eventos ocorridos na análise de um processo (WALPOLE *et al.*, 1993). Para a distribuição Exponencial, a variável λ também é utilizada, contudo, tal variável aleatória é definida como o tempo entre dois eventos realizados, de modo que a média (μ) e desvio padrão (σ) de tempo entre esses eventos são dados por $1/\lambda$. Desse modo, a distribuição Exponencial é elaborada por meio de:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (63)$$

Normalmente, a distribuição Exponencial também é utilizada na sua forma acumulada, dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \quad (64)$$

A distribuição de Weibull, vista na Figura 24 é um modelo de distribuição de probabilidade amplamente utilizado, não apenas pelas aplicações supracitadas, mas também na análise de falhas em sistemas complexos. A sua modelação parte por meio do parâmetro de forma (γ), parâmetro de escala (θ) e parâmetro de localização (L), relacionados por:

$$f(x) = \frac{\gamma}{\theta} \left(\frac{x-L}{\theta} \right)^{\gamma-1} e \left[- \left(\frac{x-L}{\theta} \right)^\gamma \right] \quad (65)$$

$$F(x) = 1 - e \left[- \left(\frac{x-L}{\theta} \right)^\gamma \right] \quad (66)$$

Por fim, pode-se citar a distribuição Normal, conhecida também por distribuição Gaussiana, considerada como uma das distribuições mais utilizadas por ser útil em diversas áreas de estudo, devido ao fato de poder representar fenômenos ocorrentes em uma população. Entre as funções que a distribuição apresenta, pode-se discutir o uso do Teorema do Limite Central, relacionado à convergência de somas de variáveis aleatórias ao longo da distribuição de probabilidade. Sua formulação, bem como a sua aplicação será demonstrada adiante, relacionando tal distribuição com a Função Densidade de Probabilidade Conjunta.

4.4 Desenvolvimento da ferramenta

Até o momento, os estudos estatísticos realizados de uma variável aleatória e as suas distribuições de probabilidade estão definidas apenas para espaços unidimensionais,

ou seja, apenas uma dimensão é considerada nos estudos feitos. Todavia, normalmente são encontradas situações onde o fenômeno analisado é dependente de diversas variáveis, como a investigação de um cobre distendido a frio com dureza D e tensão T , gerando uma saída (d, t) , por exemplo (WALPOLE *et al.*, 1993).

Assim, dadas as variáveis aleatórias discretas X e Y , a distribuição de probabilidade resultante é representada por uma função $f(x, y)$. Tal função é chamada de distribuição de probabilidade conjunta, indicando a probabilidade em que os resultados obtidos em x e y ocorram simultaneamente. Contudo, a função apenas é considerada como distribuição de probabilidade conjunta se:

1. $f(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}$;
2. $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$
3. $P(X = x, Y = y) = f(x, y)$

Quando X e Y são consideradas variáveis aleatórias contínuas, a J-PDF representa basicamente a superfície localizada acima do plano xy , onde $P(X, Y) \in S$, sendo S o volume existente formado pelo resultado da distribuição de probabilidade resultante (ALBUQUERQUE; FORTES; FINAMORE, 2008). Desse modo, $f(x, y)$ é a J-PDF das variáveis aleatórias contínuas X e Y quando:

$$P[(X, Y) \in S] = \int \int_S f(x, y) dx dy \quad (67)$$

Analisando as variáveis separadamente, suponha $g(x)$ e $h(y)$ sejam as distribuições de probabilidade de X e Y , respectivamente. A distribuição $g(x)$ é encontrada ao somar $f(x, y)$ para todos os valores existentes de Y , e do mesmo modo, $h(y)$ é obtido somando $f(x, y)$ para os valores de X . Por definição, $g(x)$ e $h(y)$ são denominados de funções marginais de X e Y , respectivamente. Logo, para o caso discreto, as distribuições são calculadas por:

$$g(x) = \sum_y f(x, y) \quad (68)$$

$$h(y) = \sum_x f(x, y) \quad (69)$$

O ajuste de curva realizado para duas ou mais variáveis aleatórias, indicando uma distribuição de probabilidade marginal, então, é representada matematicamente por:

$$F_{XY}(x, y) = P[(X \leq x) \cap (Y \leq y)] = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(x, y) dx dy \quad (70)$$

Como o método de equacionamento é elaborado por meio de somatórios para o caso discreto, o caso contínuo é definido por meio de integrais. Assim, as distribuições marginais são dadas por:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad (71)$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \quad (72)$$

Sabe-se que o valor de x da variável aleatória X é pertencente a uma parcela do espaço amostral. Desse modo, é possível aplicar o conceito da probabilidade condicional, referente a probabilidade de um evento ocorrer baseado na ocorrência de um evento anterior, de forma que ambos os eventos sejam conjuntos não vazios e relativos a um espaço amostral finito. Assim, a probabilidade condicional que relaciona os eventos A e B é dada por:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0 \quad (73)$$

Os eventos definidos por $X = x$ e $Y = y$ também podem ser calculados de um modo similar:

$$P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{f(x, y)}{g(x)}, \quad g(x) > 0 \quad (74)$$

onde X e Y são variáveis aleatórias discretas (WALPOLE *et al.*, 1993).

Para determinar a probabilidade condicional de que a variável X esteja entre os intervalos de a e b , por exemplo, quando é de conhecimento de que $Y = y$, calcula-se da seguinte forma para a variável aleatória discreta:

$$P(a < X < b|Y = y) = \sum_{a < x < b} f(x|y) \quad (75)$$

de modo que a soma realizada efetua uma varredura apenas entre os intervalos de a e b . Seguindo o mesmo procedimento, quando X e Y são variáveis contínuas, se utiliza uma integral para a realização dos cálculos:

$$P(a < X < b|Y = y) = \int_b^a f(x|y)dx \quad (76)$$

A Função Distribuição Acumulada (FDA) possui a finalidade de calcular a probabilidade acumulada para um valor de x específico, ou seja, a FDA determina a probabilidade de que determinado dado coletado na análise seja menor ou igual a um valor estipulado. De modo semelhante, é possível realizar o mesmo processo para determinar a probabilidade de que um valor seja maior do que um número definido, ou até mesmo entre um intervalo conhecido (MEYER, 2000). Analisando mais de uma dimensão, ou seja, analisando os planos x e y , a FDA conjunta é definida como:

$$F_{XY}(x, \infty) = F_X(x) \quad (77)$$

$$F_{XY}(\infty, y) = F_Y(y) \quad (78)$$

onde $F_X(x)$ e $F_Y(y)$ são as distribuições acumulativas de X e Y (Mosquera, 2015).

Assim, além da distribuição de probabilidade poder ser representada pela Função de Densidade de Probabilidade $f_X(x)$ ou $f_Y(y)$, é possível representar pela distribuição acumulativa de probabilidade $F_X(x)$ e $F_Y(y)$. A relação entre os dois modos de representação é dado por:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (79)$$

A representação de uma distribuição de probabilidade, conforme explicado anteriormente, possibilita a elaboração de curvas baseadas no comportamento de uma variável. Entre tais curvas, destaca-se a Distribuição Gaussiana (MOSQUERA, 2015). Conhecida também como Distribuição Normal, a Distribuição Gaussiana é definida no intervalo de $-\infty$ a ∞ por:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right)} \quad (80)$$

Podendo também ser representada a partir da função acumulativa:

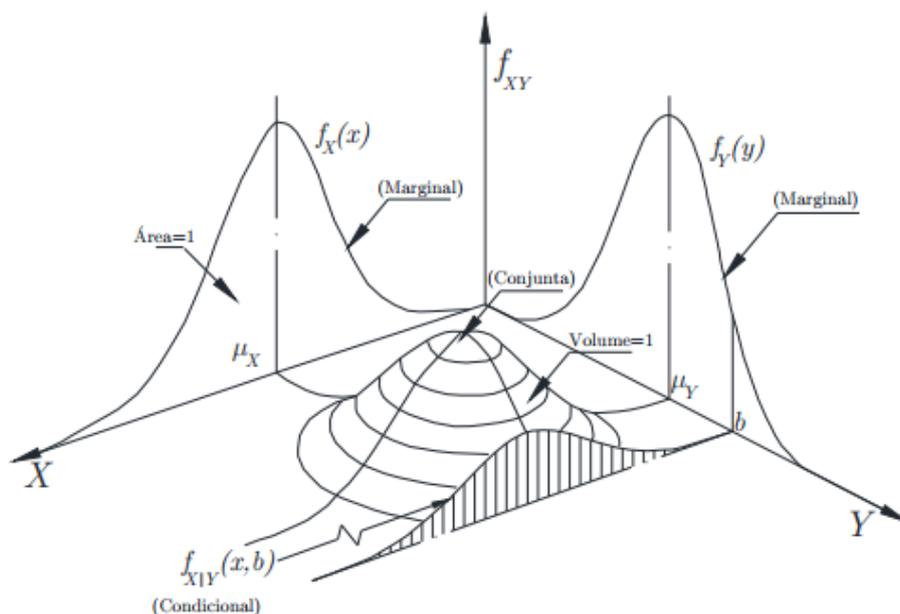
$$F_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} dx \quad (81)$$

Como pode ser visto nas equações (80) e (81), em ambas as representações da distribuição existem dois parâmetros importantes, conhecidos como valor médio (μ_x) e o desvio padrão (σ_x), no qual indica a medida do grau de dispersão de um conjunto de dados, apontando o quanto um conjunto de dados é uniforme ao longo da análise. Ao relacionar a Função Densidade de Probabilidade Conjunta com uma Distribuição Normal, pode-se indicar tal modelagem pela seguinte equação:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right\}} \quad (82)$$

onde μ_x e μ_y indicam os valores médios de x e y , σ_x e σ_y indicam os desvios padrões e ρ representa a correlação linear entre as variáveis. A Figura 28 ilustra todas as distribuições analisadas anteriormente, retratando a distinção comportamental das Funções de Densidade de Probabilidade Conjunta, marginal e condicional, de modo que cada distribuição possui características específicas para o seu desenvolvimento.

Figura 28 – Representação das distribuições de probabilidade conjunta, marginal e condicional.



Fonte: (MOSQUERA, 2015).

No caso do presente trabalho, a J-PDF tem como intuito representar a distribuição de probabilidade conjunta de n variáveis aleatórias existentes na composição de sinais provocados por sistemas aeronáuticos. Logo, a partir das variáveis aleatórias descritas por uma distribuição de probabilidade, é possível abranger novos conceitos, como a saúde estrutural do equipamento ou a sua eficiência ao longo do modo de operação.

4.5 Implementação computacional

Diante da análise teórica e a complexidade por traz da J-PDF, torna-se vantajoso aplicar os conceitos estatísticos por meio de uma ferramenta computacional. Além de gerar resultados importantes do ponto de vista de resgate de informações, a implementação permite uma maior precisão dos resultados obtidos em um menor intervalo tempo, o que garante a eficiência da análise.

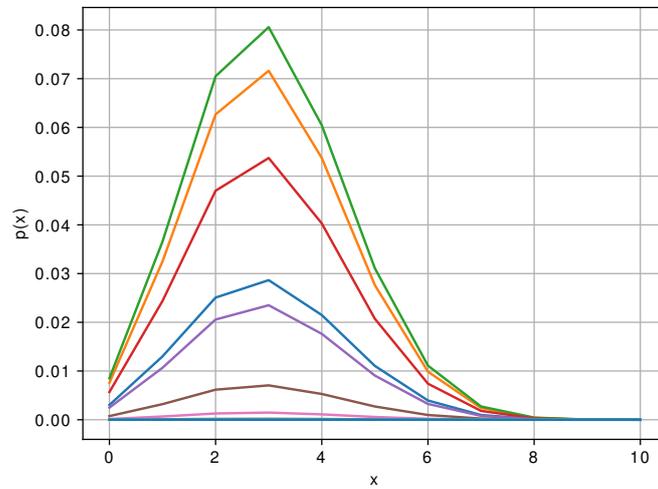
Existem algumas formas de representar a J-PDF por meio de uma ferramenta computacional. É possível, por exemplo, encontrar a densidade de probabilidade conjunta utilizando uma distribuição binomial. Para isso, é preciso inicialmente informar o número de eventos e probabilidade de sucesso em cada processo de análise. Além disso, é necessário também avaliar o método probabilístico a ser analisado, como a Função Probabilidade de Massa (*Probability Mass Function*, PMF), a Função de Densidade Acumulativa (*Cumulative Density Function*, CDF) e o Desvio padrão da distribuição, por exemplo.

Como a J-PDF indica a densidade de probabilidade relacionando o comportamento de duas variáveis em um espaço temporal, foram criadas duas distribuições binomiais com o mesmo número de eventos, mas de probabilidades diferentes, a fim de relacioná-las entre si. Como resultado, pode ser observado a J-PDF para cada evento ocorrido, conforme a Figura 29.

De acordo com o gráfico gerado, podem-se observar pontos positivos e negativos por meio de tal método. Como visto nos conceitos teóricos, os resultados dos eventos independem entre si, logo notam-se as distribuições para cara evento analisado, fator extremamente útil caso o fenômeno analisado envolvam uma série de eventos.

Apesar dos benefícios existentes, destacam-se dois pontos importantes que prejudicam a utilização da função no atual trabalho, como a representação das probabilidades de

Figura 29 – Desenvolvimento da J-PDF a partir de uma distribuição binomial.

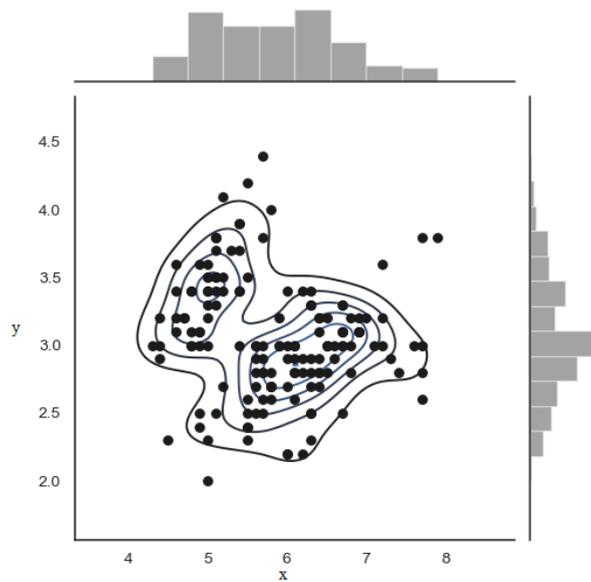


Fonte: próprio autor.

forma bidimensional, impedindo a análise de duas variáveis de modo simultâneo e a não utilização da distribuição gaussiana.

É possível corrigir os fatores apontados apresentando a dispersão das variáveis e o seu contorno, bem como a indicação da J-PDF por meio de um histograma, conforme a Figura 30, porém a visualização bidimensional dificulta a análise de correlação das variáveis utilizadas.

Figura 30 – Dispersão das variáveis e histograma da série temporal.



Fonte: próprio autor.

Para demonstrar diferença significativa da análise de dados submetidos à J-PDF em gráficos bidimensionais e tridimensionais, foi utilizada uma série temporal composta por três fontes de dados que alteravam o comportamento do sistema ao longo do tempo. Inicialmente, pelo fato das três fontes estarem alocadas no mesmo intervalo de tempo e possuírem informações dispersas na janela de amostragem, foi necessário o agrupamento das informações, a fim de detectar as três fontes com seus respectivas informações.

Desse modo, para separar as informações e organizar os dados correlacionados, foi utilizada uma técnica denominada *k-means*, onde são feitos agrupamentos de dados similares entre si, formando a geração dos chamados *clusters*. Assim, dado um conjunto de dados, um algoritmo de clusterização deve utilizar estratégias capazes de indicar as similaridades em conjuntos de dados (KINGSY *et al.*, 2016).

A alternativa normalmente implementada para o processamento de sinais é a distância dos pontos, logo, quanto menor a distância entre os dados, maior a similaridade existente entre as informações. Devido a isso, tal método não é adequado para bases que não sejam numéricas, por exemplo. Para o cálculo, os métodos de distância Euclidiana, Manhattan e Minkowski são utilizados, sendo esta última aplicada para o presente algoritmo implementado. A distância de Minkowski envolve o cálculo padrão do distanciamento, sendo basicamente implementada por:

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^r \right)^{\frac{1}{r}} \quad (83)$$

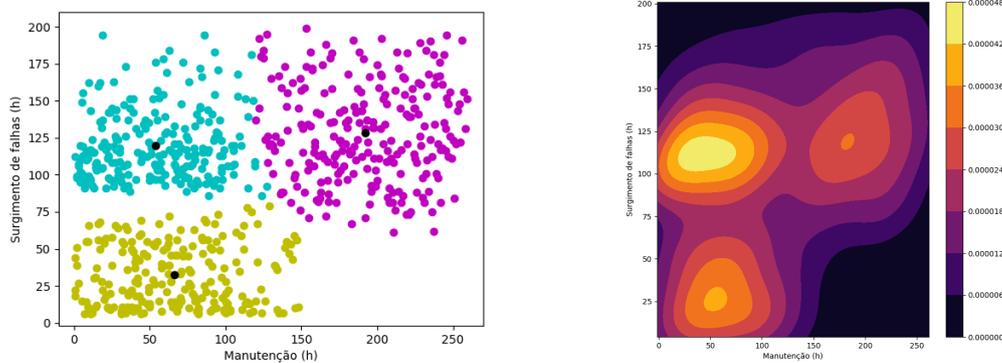
onde x_k e y_k são os k -ésimos componentes do sinal, n indica o número de dimensões do sistema e o parâmetro r varia de acordo com o método de aplicação, sendo que para $r=1$ e $r=2$, são calculadas as distâncias de Manhattan e Euclidiana, respectivamente.

Após implementar a fórmula de Minkowski para calcular as distâncias dos pontos, os dados pertencentes a série temporal foram inseridos para a aplicação dos cálculos. A Figura 31a apresenta as três clusterizações geradas em função do tempo, agrupando os dados correlacionados e dividindo as três fontes de informações.

Com os agrupamentos realizados, tornou-se possível aplicar a J-PDF e analisar a mensuração dos dados. A Figura 31b ilustra a relação das variáveis por meio da densidade de probabilidade conjunta, evidenciando a probabilidade das variáveis aleatórias possuírem um valor específico em um determinado instante de tempo. Quanto maior a densidade de probabilidade conjunta, maior é o valor da probabilidade, indicada pela legenda. Os

contornos aplicados permitem também uma melhor visualização dos pontos onde há a variação da probabilidade.

Figura 31 – Tratamento de dados coletados e aplicação da J-PDF em duas dimensões.



(a) Clusterização dos dados referentes ao motor. (b) Aplicação da J-PDF na série temporal no espaço bidimensional.

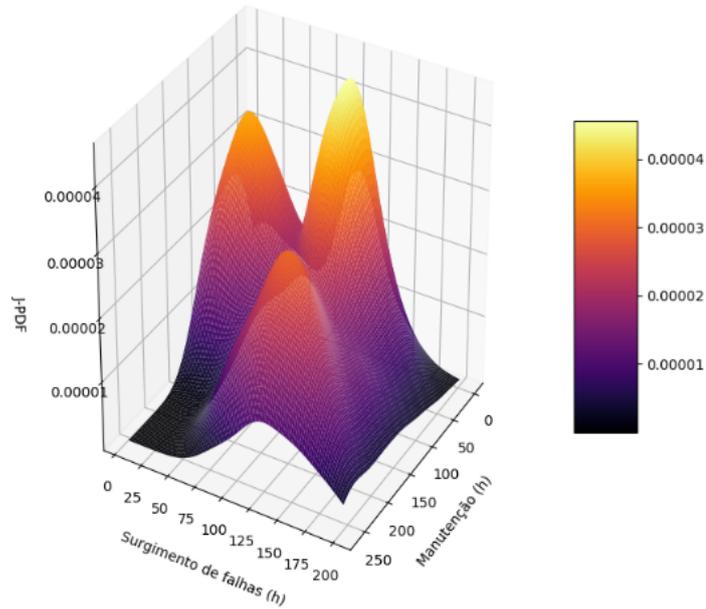
Fonte: próprio autor.

Apesar da Figura 31b apresentar resultados importantes para mensurar a probabilidade do surgimento de falhas, um gráfico bidimensional não permite analisar com uma maior precisão as variações das densidades de probabilidades conforme a mudança de comportamento dos dados. Assim, a Figura 32 apresenta a mensuração da J-PDF em um gráfico tridimensional. Desse modo, pode-se observar o comportamento de cada *cluster*, bem como as probabilidades das variáveis investigadas.

A abrangência da J-PDF quando analisada a sua forma de aplicação, faz com que o estudo seja realizado por meio de diversos processos. Devido a isso, o cálculo da Função Densidade de Probabilidade foi realizado por meio da Estimativa de Densidade de Kernel (*Kernel Density Estimate*, KDE), um método não paramétrico, onde tanto a média quanto o desvio padrão não são considerados como parâmetros de análise. Para tal método, é utilizada a largura de banda das amostras coletadas para estimar o valor da probabilidade.

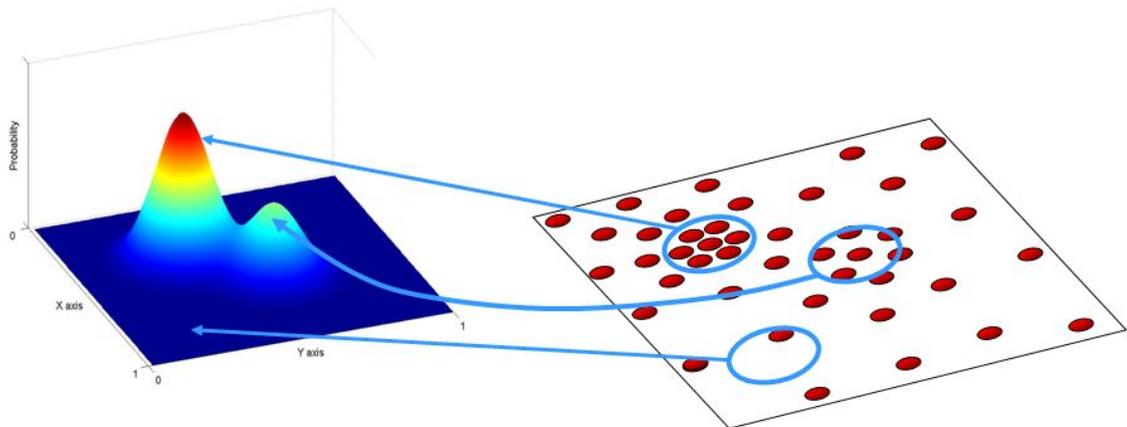
Desse modo, a KDE se baseia em organizar os dados de entrada e ilustrar a superfície das variáveis calculando a densidade de probabilidade da área utilizando uma interpolação e reamostrando o sinal, a fim de evitar gráficos distorcidos. Como resposta final, é desenvolvido uma superfície na qual demonstra a J-PDF do sinal analisado de acordo com o espalhamento das suas amostras. A Figura 33 ilustra o procedimento realizado na KDE.

Figura 32 – Mensuração da densidade de probabilidade conjunta.



Fonte: próprio autor.

Figura 33 – Representação da aplicação do método KDE.



Fonte: próprio autor.

Para realizar a estimativa de densidade de um ponto, é preciso inicialmente definir a distribuição de Kernel. Desse modo, admitindo uma distribuição de Kernel Gaussiano, K pode ser definido como:

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \quad (84)$$

Com isso, é possível definir então a estimativa de densidade equacionando a largura de banda do sinal e a função de Kernel por:

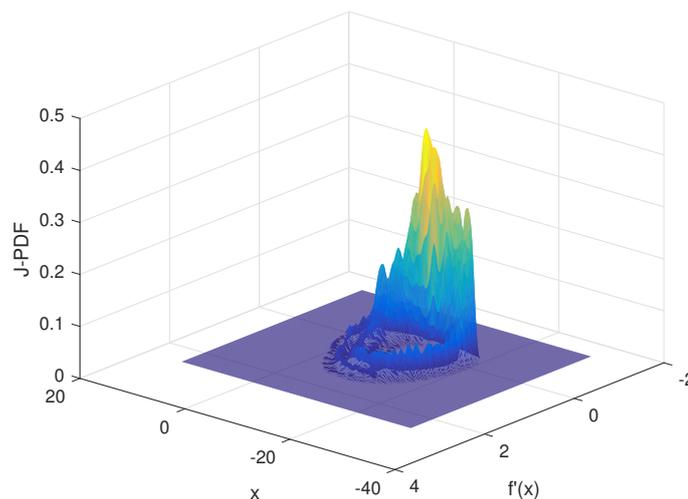
$$f_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \quad (85)$$

onde h indica um parâmetro de uniformização que varia de acordo com o número de interpolações desejadas.

Sendo assim, inicialmente o sinal é coletado e a análise das suas séries temporais é realizada. Para séries teóricas provindas de modelos matemáticos, é utilizado o método da derivada, ou seja, a partir da derivada de uma série temporal é obtida uma segunda série correlacionada para a realização dos cálculos. As séries obtidas a partir de experimentos sofre um processamento por meio da SVD, onde a partir de uma série temporal, são obtidas informações, como deslocamento e a velocidade, permitindo assim, a geração de séries correlacionadas.

Por fim, utiliza-se o KDE para o cálculo da J-PDF, conforme a Figura 34, onde é apresentada a J-PDF de uma série temporal coletada a partir de experimentos de indução de estol.

Figura 34 – Aplicação da KDE em uma série com o fenômeno do Estol Dinâmico.



Fonte: próprio autor.

Um fator interessante a ser abordado envolve a complexidade da codificação devido a presença de possíveis interferências entre sinais e a presença significativa do ruído. Para isso, técnicas de filtragem e de caracterização de séries temporais foram utilizados.

Após a aplicação da SVD, KDE e cálculo da J-PDF, informações como a J-PDF média e máxima do sistema são fornecidas a fim de avaliar e verificar possíveis previsibilidades das trajetórias do sinal, e conseqüentemente, auxiliar na interpretação do estado de um sistema.

5 Resultados

Neste Capítulo são apresentados os resultados da aplicação da J-PDF em séries geradas a partir de sistemas dinâmicos não lineares. Inicialmente, na Seção 5.1, é abordada a aplicação da J-PDF em séries obtidas a partir de simulações numéricas, como a de um atrator de Lorenz observada na Seção 5.1.1. Posteriormente, a J-PDF é implementada na Seção 5.1.2, onde é analisada a eficiência da ferramenta em séries temporais geradas numericamente em um modelo aeroelástico de seção típica com três graus de liberdade. Por fim, na Seção 5.2, a J-PDF foi utilizada para caracterizar séries de comportamentos não lineares, obtidas por meio de experimentos realizados em túnel de vento, sendo a Seção 5.2.1 referente a casos de estol dinâmico em um aerofólio e a Seção 5.2.2, que abrange a análise de um modelo aeroelástico com folga na estrutura da superfície de comando.

5.1 Implementação da J-PDF em simulações numéricas

5.1.1 Aplicação a séries temporais provindas do atrator de Lorenz

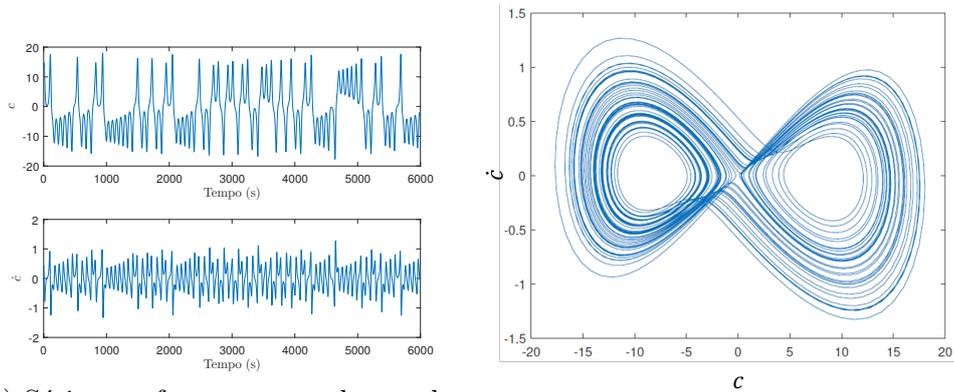
Após a implementação do código que determina a J-PDF a partir de uma série temporal, o algoritmo foi aplicado a fim de verificar a sua eficiência. O método de estudo consistiu em utilizar inicialmente séries provindas de sistemas não lineares simulados numericamente, começando pelo sistema clássico de Lorenz, seguido da aplicação em séries aeroelásticas a fim de observar a potencialidade da ferramentas em sistemas com características não lineares.

O sistema com comportamento não linear analisado inicialmente no presente trabalho é o atrator de Lorenz. No caso em questão, foi utilizada a série temporal referente à taxa de convecção, representada no presente texto por (c) .

Na Figura 35a é possível observar a série temporal de Lorenz na parte superior e a geração de uma nova série após o processo de derivação, a fim de analisar séries correlacionadas, retornando os dados da série (\dot{c}) . Com as duas séries constrói-se um espaço de estados bidimensional onde é possível observar a projeção do atrator estranho característico do sistema de Lorenz, conforme apresentado na Figura 35b.

A aplicação da J-PDF pode ser vista na Figura 36, onde $P(c, \dot{c})$ demonstra as densidades de probabilidade conjunta do sistema.

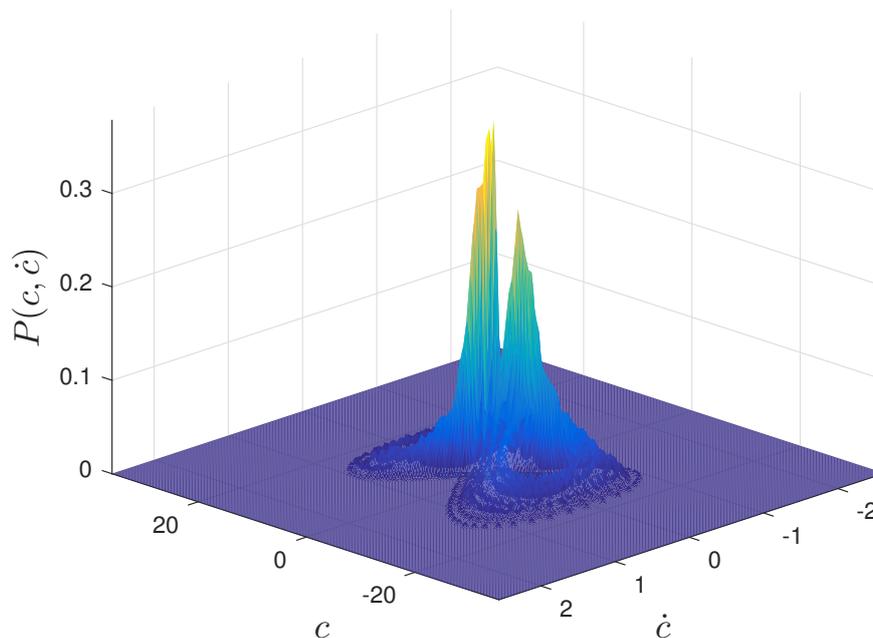
Figura 35 – Projeção bidimensional do atrator de Lorenz através das séries temporais.



(a) Séries referentes a duas das variáveis do atrator (c e \dot{c}). (b) Visualização do atrator de Lorenz quando as séries são relacionadas.

Fonte: próprio autor.

Figura 36 – J-PDF utilizada para analisar as séries temporais provindas do atrator de Lorenz.



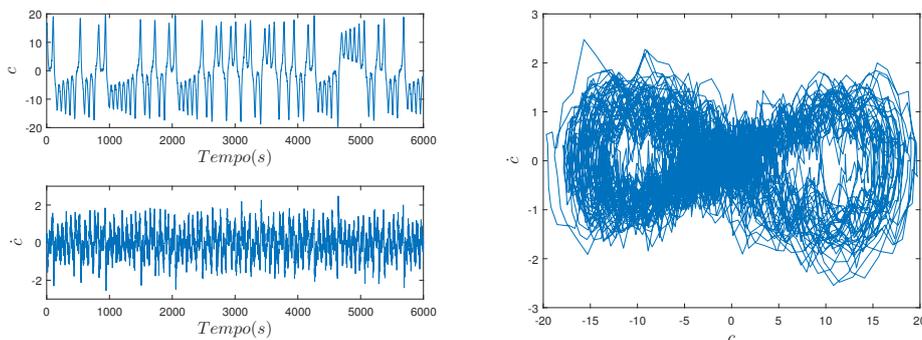
Fonte: próprio autor.

Por meio da implementação, observou-se que a maior densidade de probabilidade no sistema é igual a 0,39, na região próxima as coordenadas $(0,31, 0,02)$, e uma probabilidade média igual a 0,002. Também é possível observar regiões onde as trajetórias apresentam menor densidade de probabilidade conjunta, permitindo a identificação no espaço de fase de regiões com maior ou menor regularidade. Além disso, a região com maior densidade de probabilidade pode ser relacionada com a região de maior atração no espaço de estados.

Portanto, é possível observar e identificar os pontos de maior e menor complexidade do comportamento caótico.

Após a implementação da J-PDF e análise de resultados, a mesma série foi submetida a um ruído branco gaussiano com uma Relação Sinal-Ruído (*Signal to Noise Ratio*, SNR) equivalente a 10. Assim, o mesmo processo foi realizado para esta simulação. Na Figura 37a, é possível verificar as séries (c) e (\dot{c}) obtidas após a reconstrução do espaço de estados por meio da SVD, utilizado aqui para evitar a amplificação do ruído no processo de derivação. Na Figura 37b é demonstrada a relação entre as componentes obtidas da série principal, contudo, comparando as Figuras 35b e 37b, é possível verificar a influência do ruído, de forma que as trajetórias sofrem variações significativas ao longo da evolução temporal.

Figura 37 – Análise do atrator de Lorenz com a contaminação de ruído.



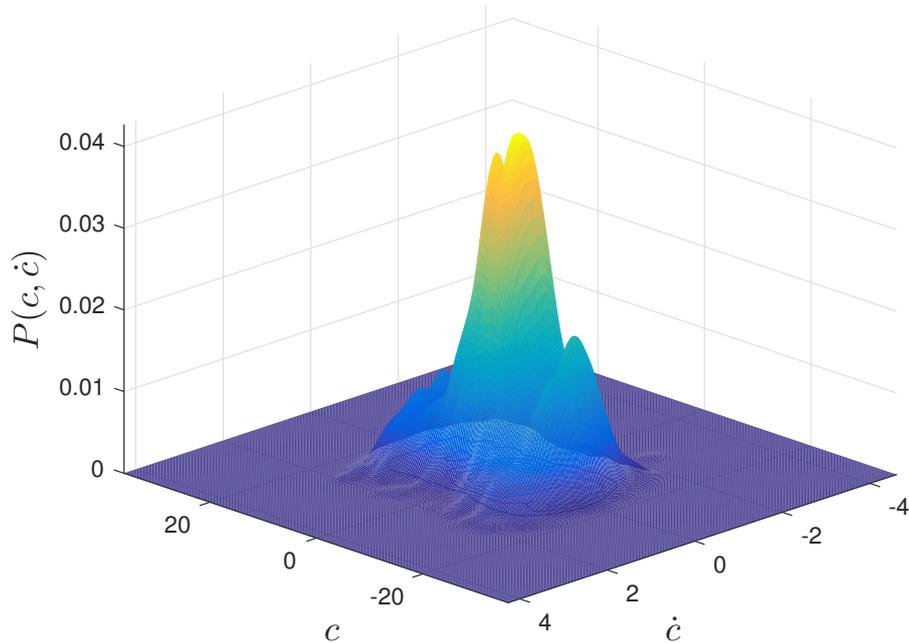
(a) Séries c e \dot{c} referentes ao atrator (b) Atrator de Lorenz sob influência do ruído.

Fonte: próprio autor.

Após obter os sinais correlacionados, as séries temporais foram submetidas ao algoritmo de J-PDF. A Figura 38 apresenta as densidades de probabilidade conjunta para o atual caso. Em comparação com os dados obtidos na Figura 36, percebe-se uma diminuição significativa dos valores probabilidades, sendo que a probabilidade máxima do sistema é igual a 0,04 próxima as coordenadas $(-2,95, -0,04)$ e a probabilidade média se equivale a 0,001.

Portanto, devido ao comportamento aleatório introduzido pelo ruído, a série de Lorenz contaminada apresentou uma densidade de probabilidade conjunta relativamente inferior, como esperado, pois o comportamento aleatório introduzido perturba os padrões determinísticos.

Figura 38 – Aplicação da J-PDF em um atrator de Lorenz contaminado por ruído.



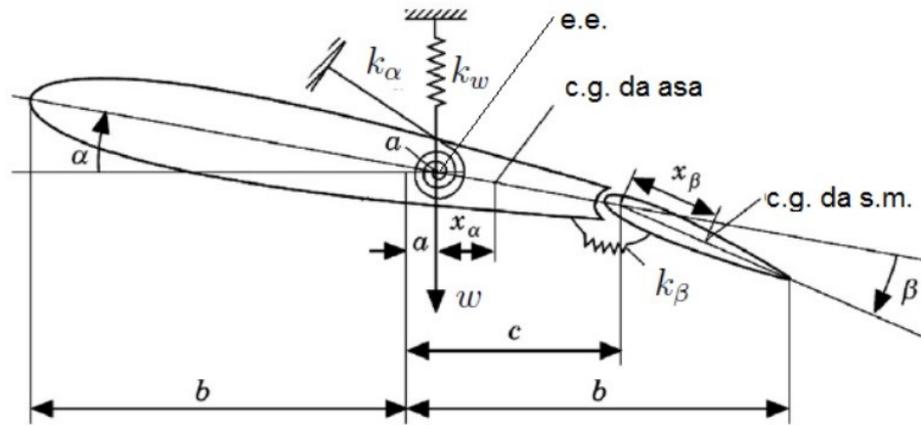
Fonte: próprio autor.

5.1.2 Aplicação em um sistema aeroelástico simulado com folga na superfície de comando

O sistema aeroelástico com folga na estrutura apresentado à seguir é constituído de uma seção típica de superfície sustentadora, com três graus de liberdade, indicados pela torção, flexão e deflexão da superfície de comando. O comportamento da superfície sustentadora é caracterizado por meio da análise dos movimentos realizados pelos graus de liberdade acoplados, onde ω representa o movimento de flexão e os deslocamentos angulares da torção e da superfície de comando, indicados pelos ângulos α e β , respectivamente. A Figura 39 apresenta o modelo aeroelástico utilizado.

O sistema também é composto por molas de flexão, torção e superfície de comando, com as respectivas constantes de rigidez indicadas por k_ω , k_α , k_β , respectivamente. O termo x_β é responsável por apontar a distância entre o centro de gravidade da superfície de comando e o local onde encontra-se o ponto de dobradiça. É possível observar também a presença da distância do eixo elástico até o centro de gravidade do aerofólio, representado por x_α .

Figura 39 – Modelo aeroelástico com folga na estrutura



Fonte: (LI; GUO; XIANG, 2010).

As equações de movimento referente ao modelo apresentado são determinados a partir da equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_i} \right\} - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_i} = 0 \quad (86)$$

onde V representa a energia potencial para a seção típica e T representa a energia cinética. Além disso, q_i retrata as variáveis α , β e ω , e \dot{q}_i as suas respectivas variáveis. Sendo assim, as equações para a torção, superfície de comando e flexão podem ser descritas por:

$$M_\alpha = \alpha k_\alpha + S_\alpha \ddot{\omega} + \ddot{\beta} (S_\beta (c - a)b + I_\beta) + I_\alpha \ddot{\alpha} \quad (87)$$

$$M_\beta = \beta k_\beta + S_\beta \ddot{\omega} + \ddot{\alpha} (S_\beta (c - a)b + I_\beta) + I_\beta \ddot{\beta} \quad (88)$$

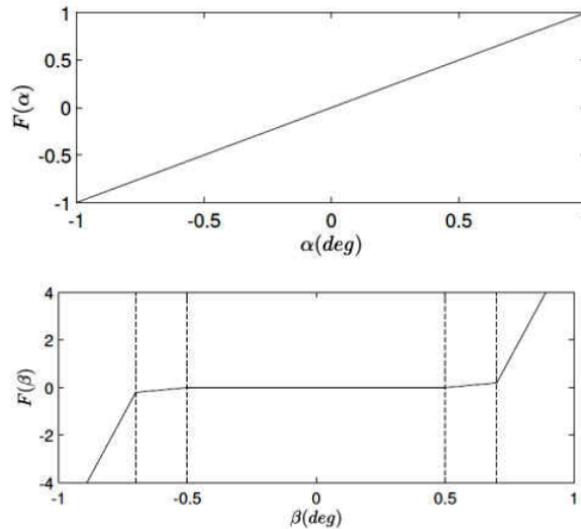
$$L = -(S_\alpha \ddot{\alpha} + S_\beta \ddot{\beta} + m\ddot{\omega} + k_\omega \omega) \quad (89)$$

onde I_α e I_β indicam os momentos de inércia da torção e superfície de comando, S_α e S_β são os momentos estáticos e M_α , M_β e L representam os momentos aerodinâmicos e a sustentação, ou seja, os carregamentos aerodinâmicos do sistema. Por outro lado, o lado direito das equações representa a dinâmica dos componentes estruturais.

Como fonte de não linearidade estrutural, considera-se que a mola da superfície de comando apresenta uma rigidez descontínua, com uma região de folga, ou seja, sem a presença de momento restaurador entre β igual a $\pm 0,5$ grau, seguida por uma região linear

com rigidez k_β . Após o limite de $\pm 0,7$ graus, a superfície atinge o que seria o limitador de deslocamento da superfície. Esse limitador ou batente possui rigidez que pode variar desde um múltiplo da rigidez k_β até valores bem elevados, simulando um impacto. Tais efeitos podem ser observados na Figura 40, onde as funções em termos de α e β representam o momento restaurador das molas de torção e superfície de comando, respectivamente.

Figura 40 – Momento restaurador da torção e da superfície de comando.



Fonte: próprio autor.

A solução do problema aeroelástico apresentado possui dependência de um modelo aerodinâmico utilizado para determinar os carregamentos não estacionários denominados por L , M_α e M_β . A partir do momento em que a não linearidade provoca efeitos na estrutura da asa, o carregamento aerodinâmico não estacionário pode ser calculado por meio de um sistema linear. Supondo a presença do carregamento não estacionário sobre o aerofólio do modelo e de um escoamento incompressível, a resolução do sistema é feita utilizando a solução de Theodorsen. Desse modo as equações que representam o carregamento podem ser indicadas por meio de:

$$L = -\pi\rho b^2 \left[\ddot{w} + U\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha} - \frac{U}{\pi}T_4\dot{\beta} - \frac{b}{\pi}T_1\ddot{\beta} \right] - 2\pi\rho UbC(\bar{k})f(t) + G(\alpha) \quad (90)$$

$$M_\alpha = \pi\rho b^2 \left[ba\ddot{w} - Ub \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} - b^2 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} - \frac{U^2}{\pi}(T_4 + T_{10})\beta + \frac{Ub}{\pi} \left\{ -T_1 + T_8 + (c - a)T_4 - \frac{1}{2}T_{11} \right\} \dot{\beta} + \frac{b^2}{\pi} \left\{ T_7 + (c - a)T_1 \right\} \ddot{\beta} \right] + 2\pi\rho b^2 \left(a + \frac{1}{2} \right) C(\bar{k})f(t) \quad (91)$$

$$\begin{aligned}
M_\beta = \pi \rho b^2 \left[\frac{b}{\pi} T_1 \ddot{w} + \frac{Ub}{\pi} \left\{ 2T_9 + T_1 - \left(a - \frac{1}{2}\right) T_4 \right\} \dot{\alpha} \right. \\
\left. - \frac{2b^2}{\pi} T_{13} \ddot{\alpha} - \left(\frac{U}{\pi}\right)^2 (T_5 - T_4 T_{10}) \beta \right. \\
\left. + \frac{Ub}{2\pi^2} T_4 T_{11} \dot{\beta} + \left(\frac{b}{\pi}\right)^2 T_3 \ddot{\beta} \right] - \rho U b^2 T_{12} C(\bar{k}) f(t)
\end{aligned} \tag{92}$$

sendo:

$$f(t) = U\alpha + \dot{w} + \dot{\alpha}b \left(\frac{1}{2} - a\right) + \frac{U}{\pi} T_{10} \beta + \frac{b}{2\pi} T_{11} \dot{\beta}, \tag{93}$$

o termo quase-estacionário e as funções T_i , as funções-T de Theodorsen (EDWARDS; ASHLEY; BREAKWELL, 1979).

Os carregamentos aerodinâmicos possuem dependência da função de Theodorsen, indicada por $C(\bar{k})$, onde \bar{k} representa a frequência reduzida do movimento harmônico simples do aerofólio. Vale a ressalva de que a não linearidade evidente no sistema apresentado pode resultar na necessidade de definir $C(\bar{k})$ como uma função de movimentos arbitrários, devido a complexidade gerada pelos efeitos induzidos.

Uma função de carregamento elaborada para indicar o resultado da variação de grau no ângulo de ataque pode ser denominada por indicativa. Assim, a função indicativa pode ser desenvolvida na integral de superposição de Duhamel, a fim de determinar o carregamento do aerofólio em um deslocamento arbitrário, causado pelas não linearidades.

Além das funções de Theodorsen, a função de Wagner, indicada por ϕ , é amplamente utilizado na solução de modelos aeroelásticos. Basicamente, a função de Wagner apresenta informações sobre a sustentação do aerofólio em um ângulo de ataque ao longo do tempo. Desse modo, Wagner demonstrou que o incremento da sustentação em um aerofólio ao longo do tempo, com um ângulo de ataque α_0 é dada por:

$$L = \frac{\rho U^2 4\pi b \alpha_0 \rho(s)}{2} \tag{94}$$

Relacionando as funções de Wagner e Theodorsen:

$$\phi(\bar{\tau}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(\bar{k})}{ik} e^{ik\bar{\tau}} dk, \tag{95}$$

onde $\bar{\tau} = Ut/b$ e $\bar{k} = \omega b/U$, como uma função indicial de admitância e a integral de superposição de Duhamel.

para um movimento arbitrário, a sustentação pode ser indicada por:

$$L(\bar{\tau}) = -\frac{\rho U^2 4\pi b}{2} \int_{-\phi}^{\phi} \alpha'_{\frac{3}{4}}(\sigma) \phi(s - \bar{\tau}) d\sigma \quad (96)$$

onde $\alpha'_{\frac{3}{4}}$ é a derivada do ângulo efetivo $\alpha_{\frac{3}{4}}$, dado por:

$$\alpha_{\frac{3}{4}} = \left[\alpha + \frac{h}{U} + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \frac{\dot{\alpha}}{U} \right] \quad (97)$$

sendo h a velocidade vertical e a e b para cálculos de deflexão e rotação. Maiores detalhes podem ser encontrados em (VASCONCELLOS, 2012).

Aplicação do modelo estatístico

O processo para gerar as séries temporais a serem utilizadas consiste de quatro rodadas do modelo descrito, utilizando uma velocidade constante de $20m/s$, com a presença de oscilações autossustentadas devido a não linearidade. Em cada simulação, ocorria o aumento intensidade da não linearidade, fazendo com que o sistema se tornasse mais complexo até o ponto de surgir, devido aos efeitos do batente, os chamados impactos, ocasionados pela rigidez infinita após o valor de $\pm 0,7$ grau. Os múltiplos de rigidez após o batente variam para cada simulação, sendo $20k_{\beta}$, $50k_{\beta}$ e $100k_{\beta}$ para as três primeiras simulações e finalmente, um quarto caso com não linearidade combinada, localizadas na torção e na superfície de comando, com intensidades $100k_{\alpha}$ e $100k_{\beta}$. Os parâmetros aeroelásticos utilizados nas simulações são apresentados na Tabela 3:

Utilizando o algoritmo implementado com base no método KDE, realizou-se as análises das séries obtidas a cada incremento da intensidade da não linearidade, relacionada ao aumento da rigidez do batente. Foram utilizadas variáveis correlacionadas referentes ao deslocamento angular (β) e velocidade angular ($\dot{\beta}$) nas séries estudadas para detectar as regiões com maior densidade de probabilidade no espaço de fase e sua relação com a não linearidade em questão. A Figura 41 ilustra a série temporal da primeira simulação, indicada pela relação entre a posição angular da superfície de comando β ao longo do tempo.

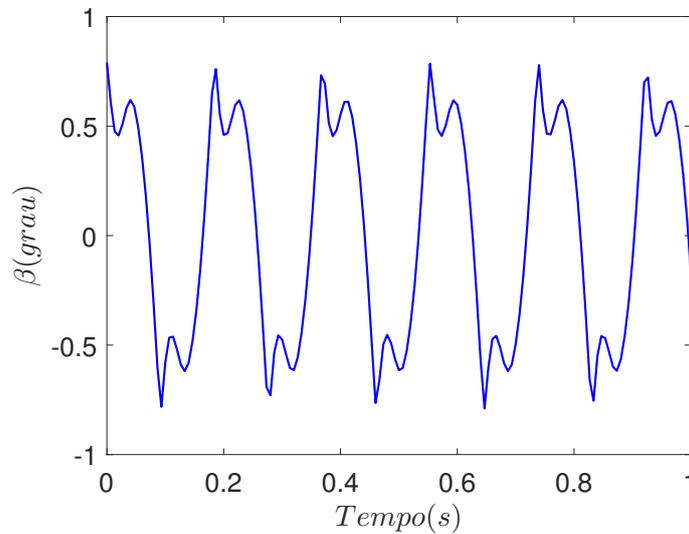
No intervalo de um segundo, percebe-se que o sinal possui aproximadamente 6 ciclos principais e ciclos adicionais mediante a presença de acoplamentos não lineares. Ao

Tabela 3 – Parâmetros considerados para a análise aeroelástica.

Parâmetro	Valor
$\omega_w(rad/s)$	41,5211
$\omega_\alpha(rad/s)$	48,7963
$\omega_\beta(rad/s)$	116,5226
a	-0,5
c	0,5
$b(m)$	0,127
ζ_α	0,01
ζ_β	0,015
x_α	0,3294
x_β	0,0179
r_α	0,6840
r_β	0,07336
μ	27,4273
$\rho(kg/m^3)$	1,225
ζ_ω	0,012

Fonte: próprio autor.

Figura 41 – Série temporal da superfície de comando.

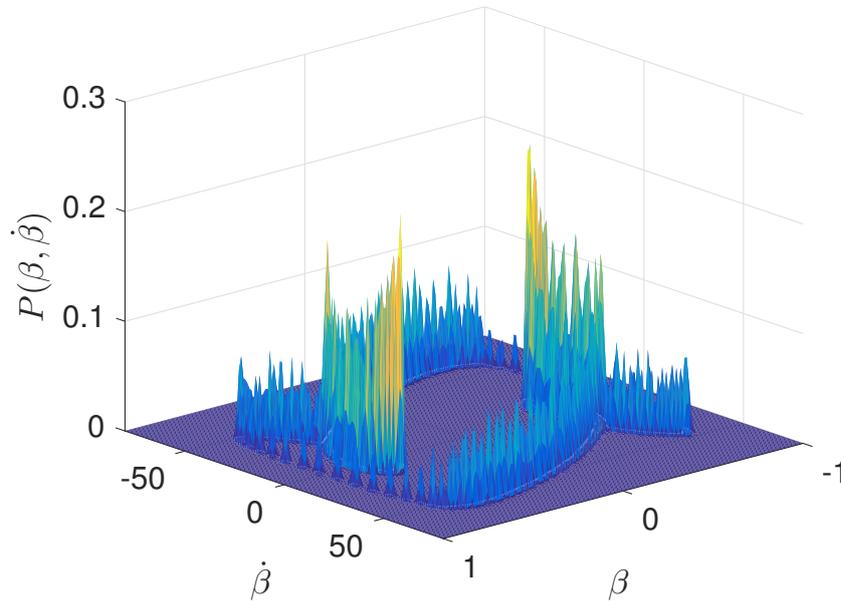


Fonte: próprio autor.

realizar a primeira simulação, foi obtida a função densidade de probabilidade conjunta, conforme a Figura 42.

Os eixos x e $f'(x)$ representam o valor das variáveis β e $\dot{\beta}$, constituindo a projeção do espaço de fase da série temporal, já eixo z indica o valor de mensuração da J-PDF, ou seja, significa a probabilidade de que as variáveis aleatórias possuam um determinado valor em um instante temporal. Analisando a figura, é possível observar duas regiões onde a J-PDF é próxima a 0, 2.

Figura 42 – Análise do primeiro cenário de folga na estrutura, com rigidez $20k_\beta$ e J-PDF igual a $1,609 \times 10^{-3}$.



Fonte: próprio autor.

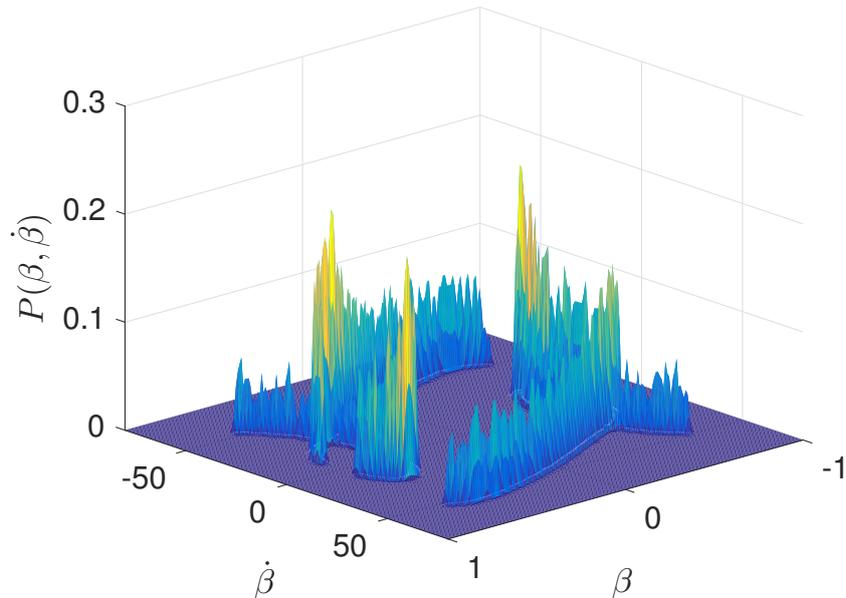
As duas regiões presentes no gráfico correspondem à localização da fronteira dos batentes ($\pm 0,7$ graus). Fato interessante pois permite a localização de descontinuidades no espaço de fase. Assim, quando a probabilidade de que as trajetórias tendam a um ponto comum aumenta, conseqüentemente, o valor da J-PDF também é incrementado. Com isso, são geradas duas regiões onde há uma maior concentração de pontos. Além das regiões de contato com os limites da folga, existem valores da J-PDF com um valor baixo, mais especificamente na região entre $\pm 0,5$ grau, evento relacionado ao determinismo baixo do sistema na região que é dominada pela folga na estrutura.

As simulações subsequentes foram desenvolvidas de forma semelhante, ou seja, inicialmente foi realizada a coleta do sistema dinâmico não linear e analisando a sua série temporal, seguido da aplicação da J-PDF por meio do algoritmo elaborado. Percebe-se que o aumento da intensidade da não linearidade resulta em mudanças perceptíveis e mensuráveis na densidade de probabilidade conjunta.

A Figura 43 apresenta a segunda simulação realizada com o aumento da rigidez após a região de folga na estrutura. Apesar das regiões de impacto não apresentarem mudanças drásticas, os valores de densidade de probabilidade conjunta possuíam valores menores, o que significa um aumento da complexidade do sistema. Isso faz com que o

determinismo e por consequência a probabilidade das trajetórias passarem mais vezes em um mesmo ponto no espaço de estados seja menor.

Figura 43 – Segundo cenário de folga na estrutura, com rigidez $50k_\beta$ e J-PDF equivalente a $1,325 \times 10^{-3}$.



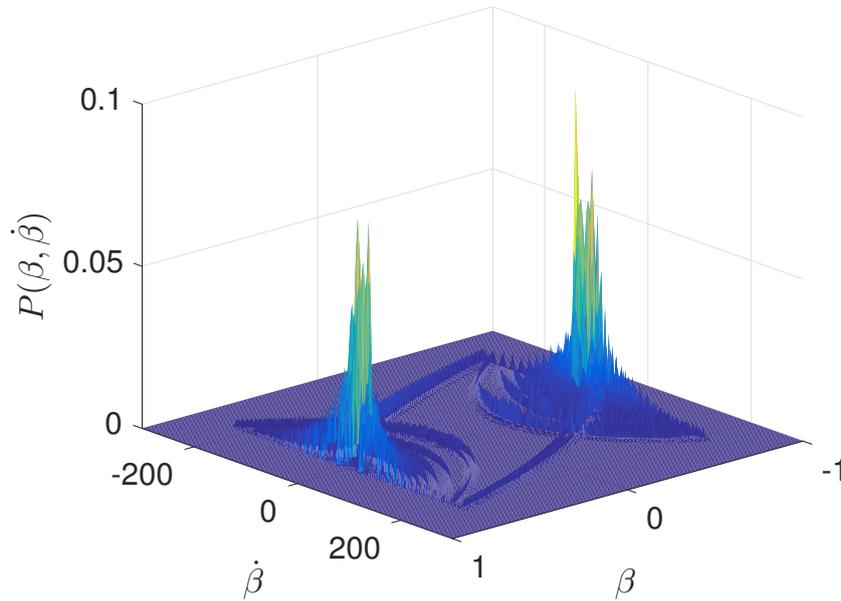
Fonte: próprio autor.

A Figura 44, referente ao terceiro caso, é composto por uma simulação com o efeito provindo de batentes mais rígidos ($100k_\beta$), apresentando diferenças relevantes em comparação com os casos anteriores, devido aos efeitos de impacto. Com isso, os efeitos da não linearidade passaram a ser mais evidentes, gerando a diminuição significativa da J-PDF na maior parte do espaço de estados. Por meio da análise da Figura 44, é possível também observar altos valores da densidade de probabilidade conjunta em duas regiões de impacto do sistema, comparadas com os demais valores ao longo do espaço de fase.

A quarta e mais complexa simulação desenvolvida apresenta um cenário onde há impactos na torção e na superfície de comando, ou seja, dois graus de liberdade do sistema, α e β apresentam impactos com batentes. Analisando a Figura 45, o efeito não linear no sistema dinâmico impede a concentração das variáveis aleatórias fora das regiões de impacto, resultando o espalhamento das densidades de probabilidades conjuntas ao longo do espaço de fase, é possível observar também picos adicionais de probabilidade mais alta, relacionados com os instantes de impacto dos dois graus de liberdade.

De modo sucinto e descritivo, a Tabela 4 apresenta o valor médio e máximo da J-PDF, onde possível observar a tendência da diminuição das densidades de probabilidades

Figura 44 – Terceiro cenário de folga na estrutura, sendo a rigidez igual a $100k_\beta$ e a J-PDF média igual a $0,398 \times 10^{-3}$.



Fonte: próprio autor.

conjuntas ao longo das simulações, fator resultante do aumento da intensidade da não linearidade no sistema.

Tabela 4 – Dados obtidos referentes a J-PDF nas simulações implementadas.

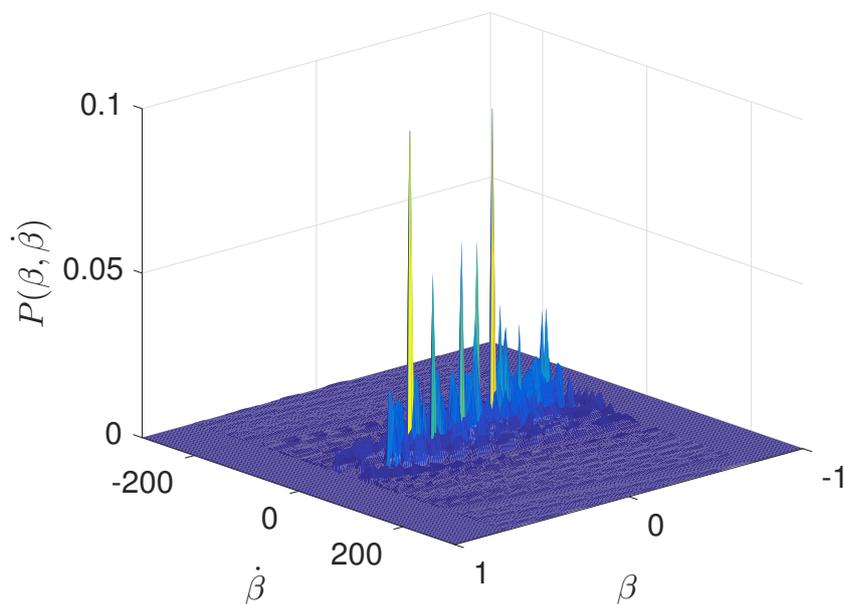
Simulação	J-PDF máxima	J-PDF média (10^{-3})
Simulação <i>I</i>	0,235	1,609
Simulação <i>II</i>	0,216	1,325
Simulação <i>III</i>	0,097	0,398
Simulação <i>IV</i>	0,112	0,197

Fonte: próprio autor.

Além da Tabela 4, é possível verificar os resultados obtidos nas Figuras 46a e 46b, de modo que para ambas as análises, é possível verificar que a probabilidade é reduzida significativamente na terceira simulação, onde a não linearidade afeta de maneira mais significativa o sistema aeroelástico.

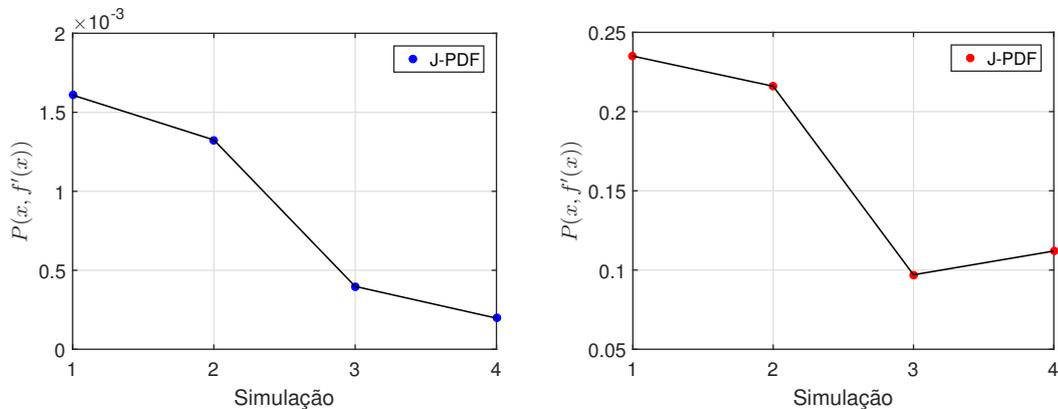
Após a finalização das quatro simulações, foi observada a potencialidade da J-PDF para analisar séries aeroelásticas com a presença de dinâmica não linear. As figuras e valores apresentados permitem identificar mudanças significativas na resposta do sistema aeroelástico, com degradação da previsibilidade relacionada ao aumento da intensidade da não linearidade. Adicionalmente, é possível identificar regiões no espaço de fase onde

Figura 45 – Quarto cenário de dupla folga na estrutura, com $100k_\alpha$ e $100k_\beta$, e J-PDF média resultante igual a $0,197 \times 10^{-3}$.



Fonte: próprio autor.

Figura 46 – Variação da J-PDF média e máxima com o aumento da rigidez.



(a) J-PDF média das simulações.

(b) J-PDF máxima das simulações.

Fonte: próprio autor.

eventos importantes ocorrem, como os pontos de impacto e as regiões de folga, relacionadas aos picos agudos de probabilidade e regiões de probabilidade muito baixa.

5.2 Implementação da J-PDF em séries experimentais

5.2.1 Análise a partir de séries providas do estol dinâmico

Após verificar a eficiência da ferramenta ao aplicá-la ao sistema de Lorenz e um modelo aeroelástico, iniciaram-se as análises em séries coletadas a partir de experimentos, de forma que a primeira análise realizada foi em séries aeroelásticas geradas a partir da indução do fenômeno do estol dinâmico em um aerofólio NACA 0012, em um experimento realizado em 2016 na EESC/USP. Para os casos experimentais à seguir, foi utilizada a normalização dos valores da J-PDF, a fim de apresentar uma maior precisão na comparação entre os diferentes casos estudados.

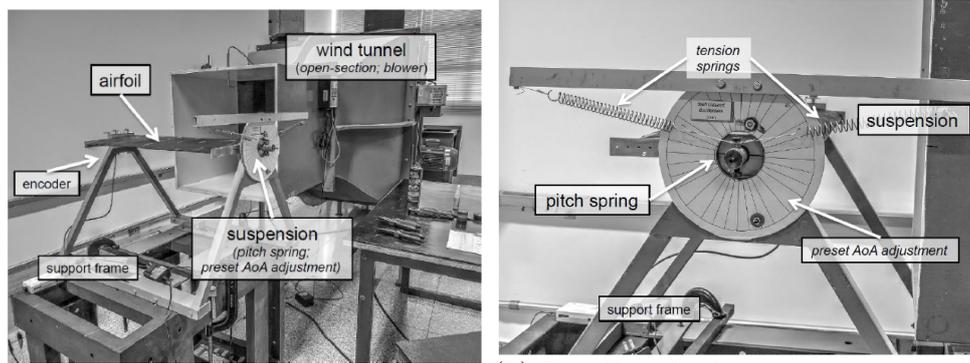
O dispositivo experimental do qual foram coletados os dados para análise neste trabalho foi construído para apresentar movimentos oscilatórios causados por estol dinâmico. O dispositivo consiste em um aerofólio que pode apresentar oscilações em torção a altos ângulos de ataque. A Figura 47a apresenta o dispositivo utilizado, composto por um perfil aerodinâmico, apoiado por rolamentos em ambos os lados, com o propósito de gerar apenas movimentos de torção, o qual é contido pelas reações elásticas de molas de tensão.

O aparato é exposto ao fluxo de ar gerado por um túnel de vento que possui cerca de $23m/s$ de velocidade máxima. O disco de rotação fixado no modelo experimental permite ajustar o ângulo de incidência do aerofólio em relação ao campo de fluxo de ar imposto pelo túnel de vento. Assim, é possível determinar o ângulo de ataque em que o aerofólio será predefinido e analisado. A aquisição dos dados foi realizada por meio de um *encoder* óptico (HEDS-5500[®], Avago Technologies) para medir o ângulo de torção do aerofólio, ligado à uma placa controladora (dSPACE DS1104 R&D Controller Board[®]) em associação com o Simulink[®]. O disco de rotação, as molas de tensão e o sensor de medição podem ser vistos detalhadamente na Figura 47b.

Inicialmente, foi extraída a frequência natural de torção. A média do espectro de potência demonstrou que a frequência natural é equivalente a $2,499Hz$. Apesar da Figura 48a possuir um limite de $20Hz$, as frequências maiores que tal valor convergem para zero.

A Figura 48b apresenta o momento de restauração de torção. A partir dos dados coletados, é possível concluir que o comportamento da mola de tensão em geral não é linear. A caracterização do comportamento é associada a dados obtidos em um sistema

Figura 47 – Aparato utilizado para os testes de estol dinâmico.



(a) Dispositivo experimental.

(b) Detalhes do dispositivo para teste no aerofólio.

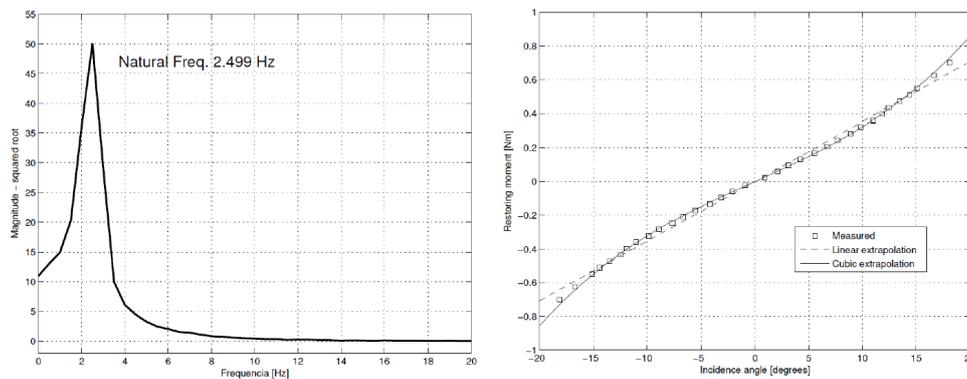
Fonte: (MARQUES; VASCONCELLOS; PEREIRA, 2016).

polinomial de terceira ordem, onde o momento de restauração, indicado por M_α é definido por:

$$M_\alpha = 0,000035\alpha^3 + 0,0288\alpha \quad (98)$$

onde α indica o ângulo de incidência em graus.

Figura 48 – Determinação da frequência natural de oscilação e do momento restaurador da mola.



(a) Frequência natural.

(b) Momento de restauração.

Fonte: (MARQUES; VASCONCELLOS; PEREIRA, 2016).

Ao iniciar a simulação no túnel de vento, o aerofólio é submetido a altos ângulos de ataque enquanto ocorre o aumento da velocidade do escoamento em intervalos, para permitir a aquisição de dados em regime estacionário. Desse modo, o sistema antes amortecido, passa a apresentar movimentos oscilatórios assimétricos até o ponto onde os vórtices gerados pela separação do escoamento do ar no aerofólio seguem do bordo de ataque para o bordo de fuga, gerando um momento restaurador e, conseqüentemente,

reduzindo o ângulo de ataque. Após uma certa velocidade, a atuação dos efeitos não lineares provocados pelo estol dinâmico faz com que o aerofólio deixe de oscilar de modo assimétrico e passa a apresentar oscilações simétricas.

Os testes aeroelásticos realizados geraram séries temporais até o túnel de vento possuir a velocidade de $17m/s$, onde eram observadas as oscilações auto-sustentadas. Os ângulos de incidência iniciais do aerofólio foram de 0° , 5° , 10° , e 15° . Para cada ângulo de incidência aplicado, a velocidade do escoamento era variada na faixa de velocidades do túnel de vento para que as séries temporais estacionárias eram coletadas em cada velocidade. Os sinais aeroelásticos apresentavam os movimentos oscilatórios a altos ângulos de ataque, provocados pelo fenômeno do estol dinâmico.

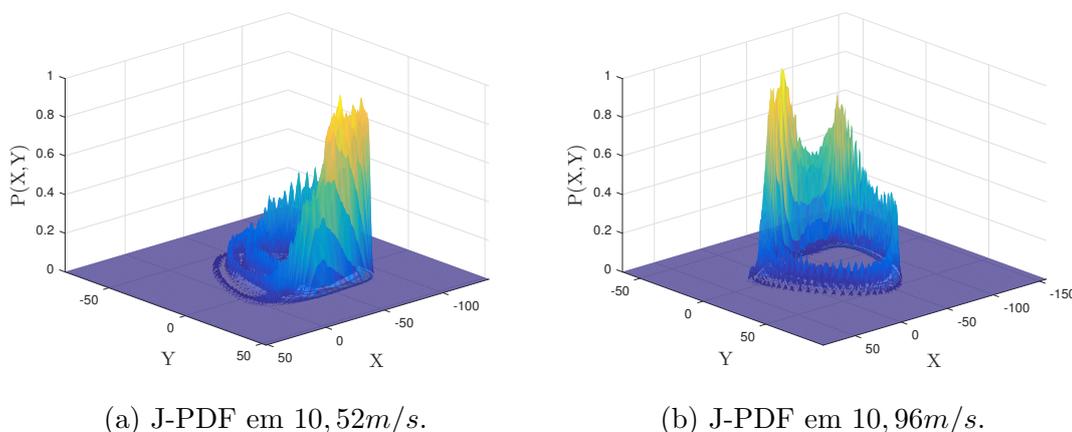
Aplicando a ferramenta nos sinais de estol dinâmico, foi gerado o espaço tridimensional de probabilidades. As Figuras 49a e 49b representam a aplicação da J-PDF nas velocidades $10,52m/s$ e $10,96m/s$, respectivamente. É possível observar algumas alterações no espaço, porém, fica claro para os dois casos a presença de uma região de maior probabilidade seguida por uma região de probabilidades menores. Apesar das pequenas variações entre essas duas velocidades, não ocorre uma mudança muito significativa na topologia da J-PDF.

Conforme o aumento da velocidade, o sistema tende a aumentar a sua complexidade devido a mudanças na separação do escoamento, geração de vórtices e conseqüentemente, variação de pressão no extradorso do aerofólio, porém mudanças de comportamento podem ocorrer devido ao fenômeno de bifurcação. Na Figura 49a, foi possível calcular uma J-PDF média equivalente a $1,69 \times 10^{-2}$, e os dados obtidos pelo sinal seguinte, representados pela sua J-PDF na Figura 49b, mostram o efeito da diminuição na regularidade das oscilações, onde a J-PDF média é igual a $1,05 \times 10^{-2}$, ou seja, ocorre uma diminuição da densidade de probabilidade das trajetórias.

Analisando numericamente, o aumento da complexidade resulta na menor probabilidade das trajetórias do sistema passarem no mesmo ponto, logo a J-PDF tende a ser menor, fato que é possível ao comparar as J-PDFs calculadas. Em adicional, é possível notar na Figura 49b a presença de dois picos, enquanto que na Figura 49a, é possível detectar apenas um, indicando que a variação da topologia no espaço de estados está relacionada a variação da J-PDF.

É possível fazer também uma relação entre a J-PDF e a análise de entropia. Conforme supracitado, de acordo com o aumento da incerteza do sistema e a quantidade

Figura 49 – J-PDF para o estol dinâmico para a) primeira velocidade analisada ($10,52m/s$) e b) velocidade posterior ($10,96m/s$), respectivamente.



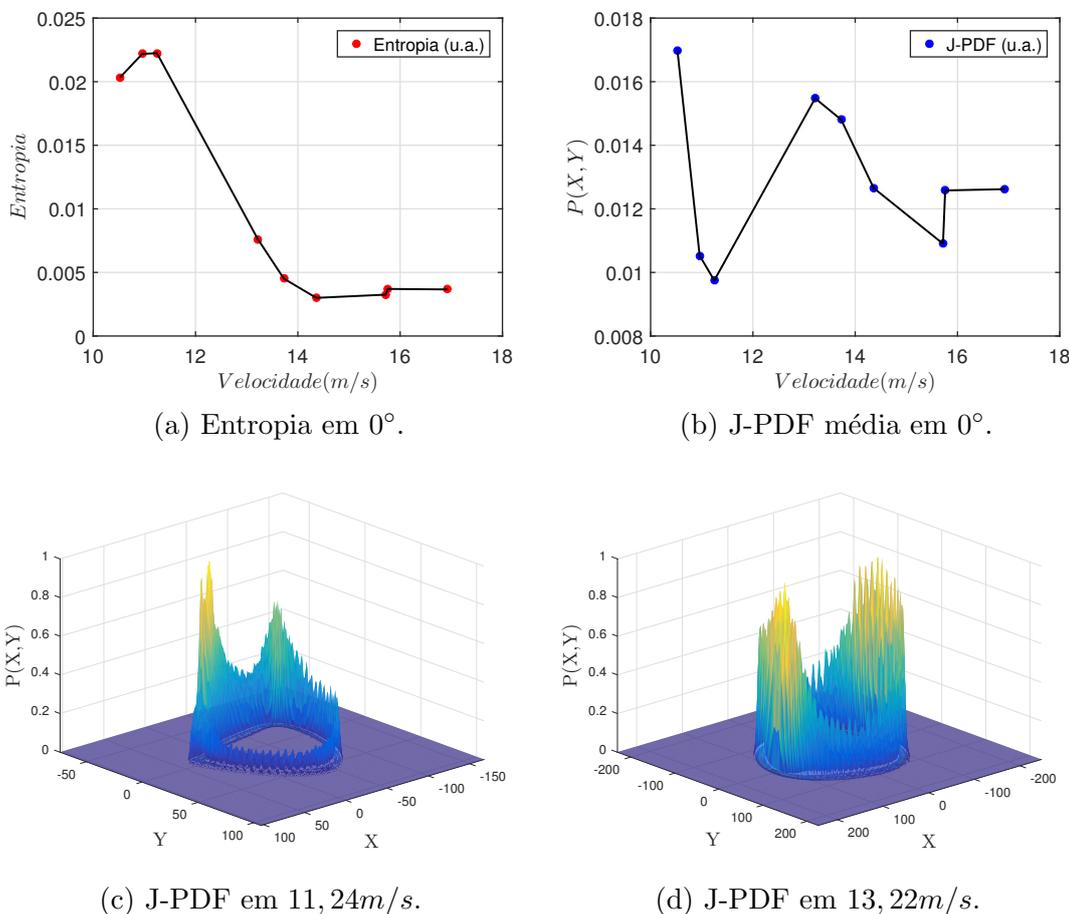
Fonte: próprio autor.

de novas informações que geram a complexidade da série, a entropia também passa a aumentar, e por outro lado, quando o sistema passa a possuir maior regularidade e as informações já são conhecidas, o valor da entropia passa a diminuir e irá tender a zero.

Sendo assim, é possível determinar uma relação entre o valor da entropia e a J-PDF, visto que a complexidade no sistema é indicado por um alto valor da entropia, e a J-PDF, por sua vez, será baixa devido a pequena probabilidade de semelhanças entre os pontos da série ao longo do tempo. Do mesmo modo, a regularidade do sistema que é representada por um valor baixo da entropia, também resulta em um alto valor da J-PDF, indicando que a maioria das trajetórias percorrem o mesmo trecho no espaço de fase, o que aumenta a previsibilidade do sistema.

As Figuras 50a e 50b ilustram a relação entre as ferramentas supracitadas para o experimento em 0° . Para as velocidades ($10,52m/s$, $10,96m/s$ e $11,24m/s$), observa-se o aumento do valor de entropia de $2,03 \times 10^{-2}$ para $2,22 \times 10^{-2}$. Enquanto isso, a J-PDF apresenta um decremento de $1,69 \times 10^{-2}$ para $0,97 \times 10^{-2}$. Para velocidades maiores, ocorre uma mudança de comportamento, quando a velocidade do escoamento atinge ($13,22m/s$, o valor da entropia sofre um decaimento, diferentemente do comportamento da J-PDF na qual sofre um aumento, demonstrando a relação entre as técnicas de análise. É possível observar a priori, que a J-PDF apresenta maior sensibilidade. As Figuras 50c e 50d apresentam a J-PDF nas velocidades de $11,24m/s$ e $13,22m/s$, onde ocorre um aumento da densidade de probabilidade e, conseqüentemente, uma alteração na topologia do sinal, relacionado ao surgimento de movimentos simétricos no aerofólio.

Figura 50 – Caracterização da não linearidade causada pelo estol dinâmico em 0° por meio da a) Entropia e b) J-PDF média, bem como o espaço tridimensional da J-PDF em c) $11,24m/s$ e d) $13,22m/s$.



Fonte: próprio autor.

A Tabela 5 apresenta com maiores detalhes os valores obtidos, contendo os valores de entropia e J-PDF média obtidas para cada velocidade analisada.

Para os ângulos de *preset* de 5° e 10° e 15° , os valores da entropia aproximada também diminuem nas velocidades próximas à transição de uma fase complexa para um momento de maior periodicidade, e a J-PDF, por sua vez, sofre um aumento dos seus valores para tais velocidades de escoamento.

No experimento com ângulo de incidência de 5° , é possível visualizar com maiores detalhes a diferença do comportamento do sistema na fase de transição. Nas Figuras 51a e 51b, observam-se as J-PDFs resultantes antes da transição com velocidade de $(9,92m/s)$ e na fase de transição do sistema, em $(13,55m/s)$, de forma que no primeiro momento existem regiões de altas e baixas concentrações de pontos, referente as probabilidades das trajetórias no sistema, e no momento da transição existem apenas uma região onde há uma

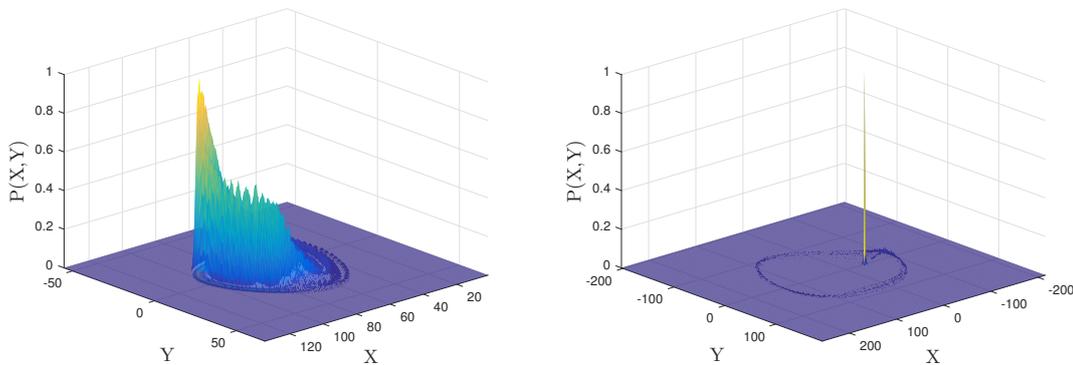
Tabela 5 – Dados obtidos referentes a entropia e a J-PDF média na indução de estol dinâmico para 0° .

Velocidade (m/s)	Entropia	J-PDF média
10,52	$2,03 \times 10^{-2}$	$1,7 \times 10^{-2}$
10,96	$2,22 \times 10^{-2}$	$1,05 \times 10^{-2}$
11,24	$2,22 \times 10^{-2}$	$0,97 \times 10^{-2}$
13,22	$0,76 \times 10^{-2}$	$1,55 \times 10^{-2}$
13,73	$0,45 \times 10^{-2}$	$1,48 \times 10^{-2}$
14,36	$0,3 \times 10^{-2}$	$1,27 \times 10^{-2}$
15,72	$0,33 \times 10^{-2}$	$1,09 \times 10^{-2}$
15,76	$0,37 \times 10^{-2}$	$1,26 \times 10^{-2}$
16,92	$0,37 \times 10^{-2}$	$1,26 \times 10^{-2}$

Fonte: próprio autor.

pequena região em que a J-PDF possui um alto valor, nas coordenadas $(-39,06, -0,39)$. Consequentemente, os outros pontos que possuem um valor de J-PDF baixo indicam o nível de complexidade no sistema e resultam em uma J-PDF média de baixo valor.

Figura 51 – Diferença da J-PDF no caso de 5° em $9,92m/s$ e $13,55m/s$.



(a) J-PDF calculada no experimento de 5° . (b) J-PDF no trecho de alta complexidade.

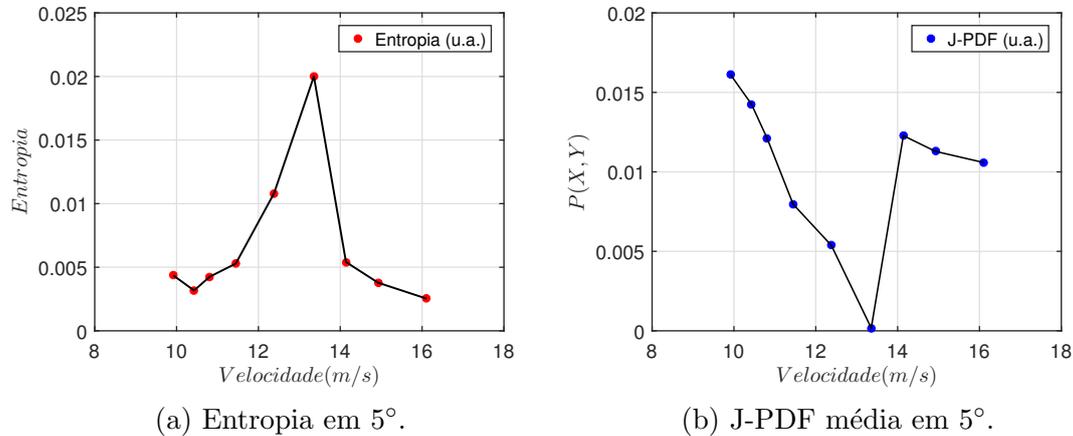
Fonte: próprio autor.

Para este caso, é possível visualizar com maior facilidade a relação entre a entropia e a J-PDF, conforme as Figuras 52a e 52b. A medida em que a entropia é baixa devido a regularidade do sistema e aumenta conforme o aumento da sua complexidade, a J-PDF apresenta uma alta probabilidade inicialmente, e diminui conforme a complexidade do sistema tende a se tornar mais significativa.

É possível detectar em ambas as ferramentas a fase de transição do sistema, ou seja, onde a entropia possui o seu maior valor e, por sua vez, a J-PDF apresenta o seu menor resultado, localizada em $13,55m/s$, com uma entropia igual a $20,01 \times 10^{-3}$ e uma

J-PDF média equivalente a $0,01 \times 10^{-2}$. Em adicional, a Tabela 6 apresenta os valores de entropia e J-PDF para cada velocidade analisada no experimento.

Figura 52 – Variação da entropia e J-PDF em 5° com a velocidade do escoamento.



Fonte: próprio autor.

Tabela 6 – Dados referentes a entropia e a J-PDF média para o estol dinâmico em 5° .

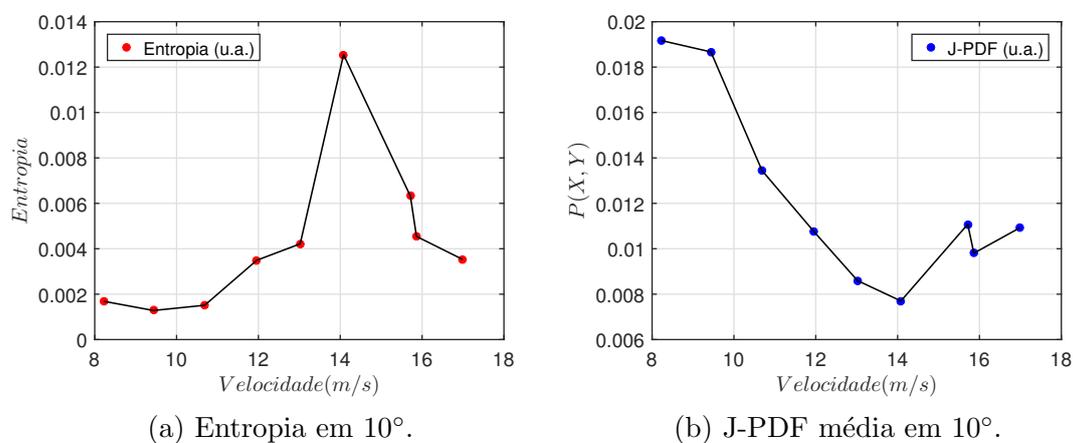
Velocidade (m/s)	Entropia	J-PDF média
9,92	$4,36 \times 10^{-3}$	$1,61 \times 10^{-2}$
10,43	$3,17 \times 10^{-3}$	$1,43 \times 10^{-2}$
10,81	$4,26 \times 10^{-3}$	$1,21 \times 10^{-2}$
11,45	$5,28 \times 10^{-3}$	$0,8 \times 10^{-2}$
12,38	$10,8 \times 10^{-3}$	$0,54 \times 10^{-2}$
13,55	$20,01 \times 10^{-3}$	$0,01 \times 10^{-2}$
14,14	$5,41 \times 10^{-3}$	$1,23 \times 10^{-2}$
14,92	$3,78 \times 10^{-3}$	$1,13 \times 10^{-2}$
16,11	$2,53 \times 10^{-3}$	$1,06 \times 10^{-2}$

Fonte: próprio autor.

Os testes para a indução do estol dinâmico em 10° possuem as mesmas relações abordadas no experimentos anteriores. Conforme as Figuras 53a e 53b, o trecho de maior complexidade do sistema se dá na velocidade de $14,08m/s$, onde a entropia é igual a $1,25 \times 10^{-2}$ e a J-PDF equivalente a $0,77 \times 10^{-2}$. A Tabela 7 apresentam os resultados obtidos para tal caso.

O quarto e último caso envolvendo estol dinâmico, com um ângulo de incidência de 15° apresentou um incremento da complexidade do sistema de modo que o menor valor da J-PDF, e conseqüentemente o maior valor da entropia, encontram-se na velocidade de $16,74m/s$. A evolução dos resultados obtidos tanto para a J-PDF, como para a entropia estão apresentados nas Figuras 54a e 54b, bem como na Tabela 8.

Figura 53 – Complexidade do sinal demonstrada na entropia e na J-PDF com incidência de 10° .



Fonte: próprio autor.

Tabela 7 – Dados obtidos referentes a entropia e a J-PDF média na indução de estol dinâmico para 10° .

Velocidade (m/s)	Entropia	J-PDF média
8,23	$0,17 \times 10^{-2}$	$1,92 \times 10^{-2}$
9,44	$0,13 \times 10^{-2}$	$1,87 \times 10^{-2}$
10,69	$0,15 \times 10^{-2}$	$1,34 \times 10^{-2}$
11,96	$0,35 \times 10^{-2}$	$1,07 \times 10^{-2}$
13,02	$0,42 \times 10^{-2}$	$0,86 \times 10^{-2}$
14,08	$1,25 \times 10^{-2}$	$0,77 \times 10^{-2}$
15,86	$0,45 \times 10^{-2}$	$0,98 \times 10^{-2}$
15,71	$0,63 \times 10^{-2}$	$1,11 \times 10^{-2}$
17	$0,35 \times 10^{-2}$	$1,09 \times 10^{-2}$

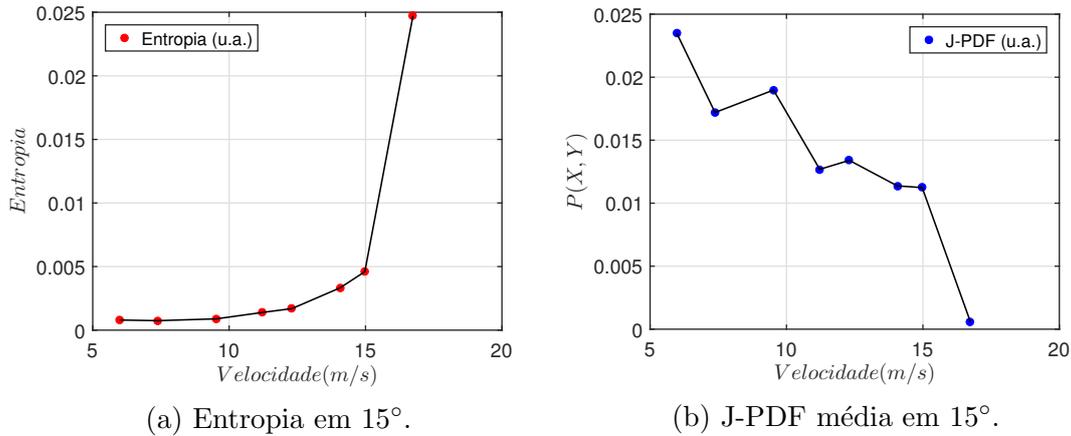
Fonte: próprio autor.

Tabela 8 – Dados obtidos referentes a entropia e a J-PDF média na indução de estol dinâmico para 15° .

Velocidade (m/s)	Entropia	J-PDF média
4,49	0	$0,06 \times 10^{-2}$
5,98	$0,08 \times 10^{-2}$	$2,35 \times 10^{-2}$
7,38	$0,07 \times 10^{-2}$	$1,72 \times 10^{-2}$
9,52	$0,09 \times 10^{-2}$	$1,9 \times 10^{-2}$
11,22	$0,14 \times 10^{-2}$	$1,27 \times 10^{-2}$
12,3	$0,17 \times 10^{-2}$	$1,34 \times 10^{-2}$
14,06	$0,33 \times 10^{-2}$	$1,14 \times 10^{-2}$
14,97	$0,46 \times 10^{-2}$	$1,12 \times 10^{-2}$
16,74	$2,47 \times 10^{-2}$	$0,06 \times 10^{-2}$

Fonte: próprio autor.

Figura 54 – Variação da entropia e J-PDF na indução do estol dinâmico em 15° .



Fonte: próprio autor.

A partir dos experimentos realizados, observa-se que para ângulos de incidência de 0° , 5° e 10° graus ocorreram mudanças significativas no comportamento do sistema com o incremento da velocidade, tornando o nível de complexidade do sinal maior seguido por uma fase de maior regularidade para velocidades maiores. Isso pode ser detectado por meio das medidas da J-PDF, de forma que ao passo de que o sistema tende a sua fase de transição, o valor da J-PDF se reduz devido diminuição da previsibilidade do sistema. Do mesmo modo, o instante de transição, referente ao trecho de maior complexidade apresenta o menor valor da J-PDF do sistema. Por fim, após o instante de transição e início da fase de movimentos simétricos, mais regulares, a complexidade diminui e os valores da J-PDF sofrem um incremento.

5.2.2 Análise a partir casos experimentais de um modelo com folga na estrutura

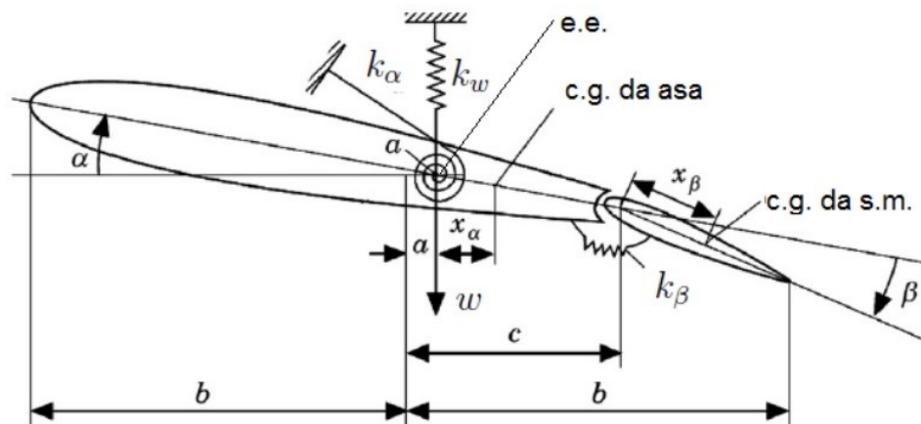
Na presente seção, continua-se demonstrando a potencialidade da J-PDF para análise de sinais aeroelásticos com características não lineares. A técnica será agora aplicada a dados experimentais com não linearidade estrutural concentrada do tipo folga em superfície de comando.

Neste experimento, realizado no laboratório de Aeroelasticidade da EESC-USP em 2012, um modelo de seção típica com três graus de liberdade foi construído. Tal dispositivo simula uma seção típica de asa com três graus de liberdade, sendo a flexão ω , torção α e superfície de comando β . Na superfície de comando é aplicada uma folga na estrutura, tornando-a uma fonte de não linearidade estrutural concentrada.

A flexão e a torção podem ser medidas no eixo elástico, diferentemente do ângulo da superfície de comando por ser analisada na linha de sua articulação. Analisando o modelo aerelástico, podem-se indicar outras definições, como a distância ab , referente a distância entre o eixo elástico e a corda média, c que indica a distância entre o eixo de articulação da superfície de controle e a corda média, além de b , referente a semicorda do aerofólio (VASCONCELLOS; PEREIRA; MARQUES, 2016).

O modelo experimental implementado possui uma suspensão composta por vigas paralelas para viabilizar os movimentos de flexão, além de um arame de aço-mola para a movimentação da torção, onde foi instalado um aerofólio de perfil NACA0012, revestido por um tecido de fibra vidro e resina epóxi, resultando em uma estrutura com alta rigidez. Um maior detalhamento da estrutura desenvolvida pode ser vista na Figura 55.

Figura 55 – Representação de uma seção típica com três graus de liberdade.

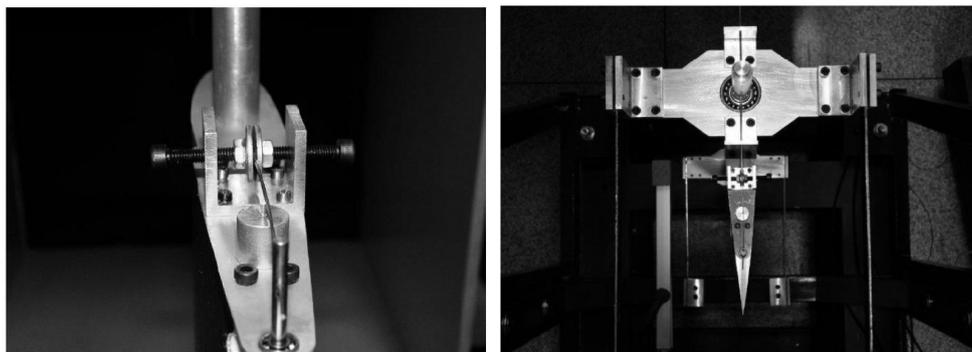


Fonte: (LI; GUO; XIANG, 2010).

O eixo da superfície de comando é conectado ao perfil aeroelástico por um fio de aço-mola, permitindo que um mecanismo de batente ajustável realize a aplicação da folga no sistema, conforme as Figuras 56a e 56b, onde é visível o perfil e rolamentos da estrutura.

Por meio de três *encoders* ópticos USDigital[®], tornou-se possível coletar os movimentos resultantes dos três graus de liberdade. Assim, as movimentações da asa são convertidos em sinais coletados por uma placa controladora DSpace[®] que resultam na geração das séries temporais. Vale a ressalva de que dois *encoders* eram circulares, responsáveis pela coleta de dados referentes aos movimentos da torção e superfície de comando, e um *encoder* linear, responsável pela coleta de informações referentes à flexão. A Figura 57 apresenta o *encoder* utilizado na superfície de comando.

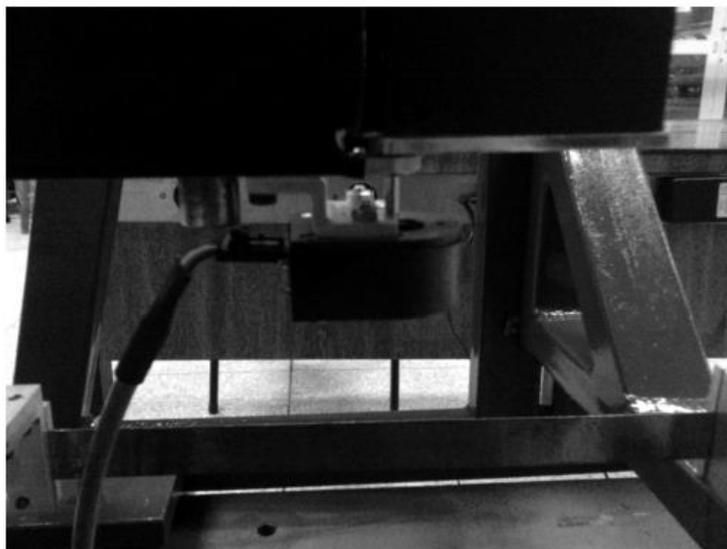
Figura 56 – Aparato experimental para os testes de folga na estrutura.



(a) Mecanismo utilizado para o ajuste de folga na estrutura. (b) Suspensão do equipamento.

Fonte: (VASCONCELLOS, 2012).

Figura 57 – *Encoder* utilizado para a detecção de movimentos na superfície de comando.



Fonte: (VASCONCELLOS, 2012).

Para a execução do experimento referente a análise da não linearidade na folga da estrutura, foi estabelecida uma condição inicial, aplicada na flexão. Pelo fato do mecanismo de folga estar aberto, o sistema estava apto a apresentar comportamentos não lineares de folga na superfície de comando. Durante a execução do experimento, a velocidade de escoamento no túnel de vento era variada e os dados do comportamento do sistema eram coletados pelos *encoders*. Para tal experimento, a velocidade que inicialmente era baixa, foi incrementada em intervalos, com tempo suficiente para garantir o estado estacionário, até a velocidade máxima do túnel e na sequência, ainda com o sistema em movimento autossustentado, foi iniciado o decremento da velocidade do túnel de vento até que as oscilações do sistema fossem amortecidas.

Os dados coletados são referentes as velocidades apresentadas na Tabela 9. É possível verificar relação entre a velocidade de escoamento, indicada por U , e a velocidade de flutter (U_f), referente a $13,58m/s$.

Tabela 9 – Velocidades utilizadas na análise experimental.

Velocidade	U/U_f	$U(m/s)$
	1	13,58
Incremento	1,041	14,14
	1,064	14,46
	1,066	14,48
	1,062	14,42
	1,038	14,10
	1,017	13,82
Decremento	0,9806	13,32
	0,9675	13,14

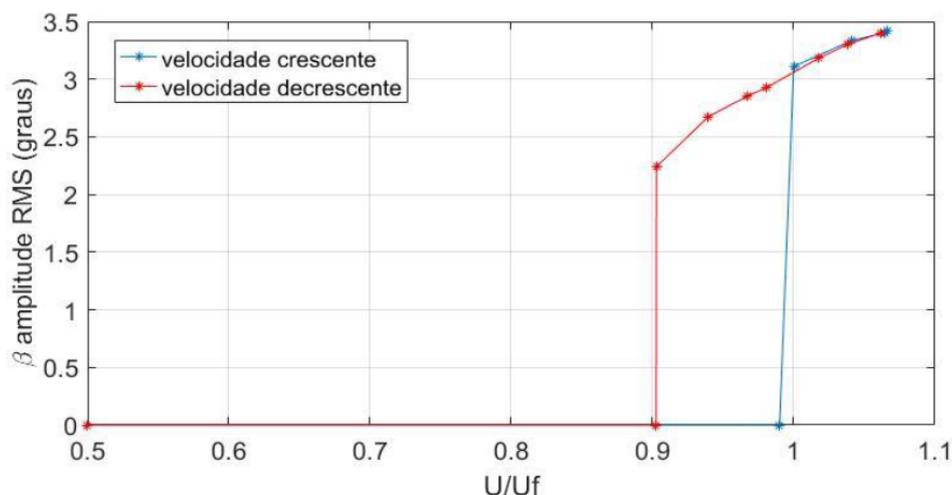
Fonte: próprio autor.

O experimento iniciou-se com baixas velocidades, sendo incrementada a fim de verificar o comportamento do sistema enquanto as oscilações ocorriam. Para as velocidades crescentes e as velocidades próximas as de *Flutter*, o movimento era amortecido. Por outro lado, após a velocidade do escoamento superar a velocidade de *Flutter*, detectou-se a presença das oscilações autossustentadas, de amplitude limitada. O experimento prosseguiu-se até atingir a velocidade máxima no túnel de vento, sendo diminuída para a coleta de novos dados, onde detectou-se que mesmo para velocidades abaixo da velocidade de *flutter*, o sistema apresentou oscilações persistentes, características de um comportamento subcrítico. A Figura 58 apresentam as amplitudes obtidas do movimento da superfície de comando para cada velocidade coletada durante o experimento.

Os comportamentos que ocorrem no sistema durante o experimento podem ser explicados devido a presença da não linearidade folga da estrutura, gerando um comportamento subcrítico, ou seja, com a presença de uma região onde o sistema pode apresentar diferentes comportamentos, dependendo da condição inicial.

A partir da coleta de dados, os sinais referentes à superfície de comando foram analisados por meio da ferramenta computacional desenvolvida. Devido a presença de ruído, aplicou-se a reconstrução do espaço de estados por SVD para a geração das séries temporais, ao invés do método da derivada, a fim de se obter dados mais confiáveis (VASCONCELLOS, 2007). Com isso, torna-se possível a obtenção dos sinais reconstruídos,

Figura 58 – Amplitudes da superfície de comando para as velocidades analisadas.



Fonte: (VASCONCELLOS, 2007).

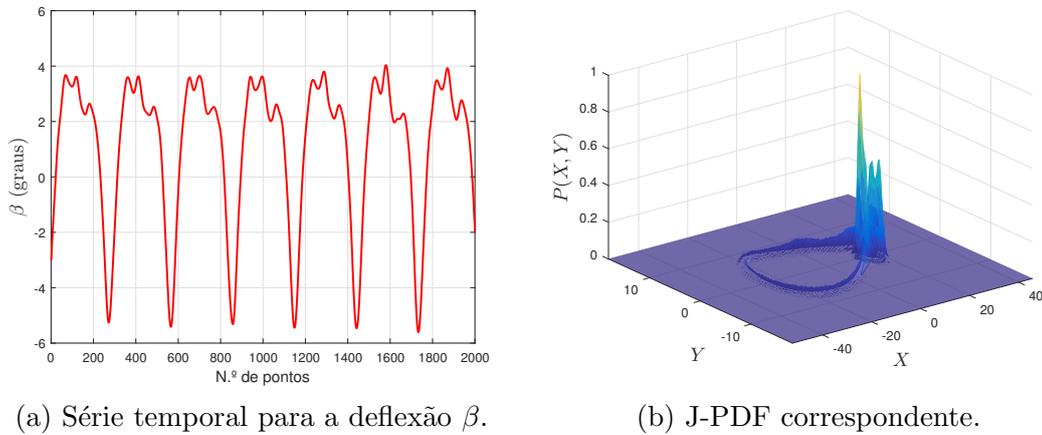
conforme a Figura 59a, que apresenta o sinal reconstruído para a deflexão da superfície de comando, com velocidade de $13,58m/s$ no túnel de vento.

A utilização da SVD permite a geração de duas novas séries relacionadas à série reconstruída, as quais representam o deslocamento e a velocidade angular da superfície de comando. Logo, com duas séries correlacionadas entre si, torna-se possível a aplicação da J-PDF no sinal coletado. A Figura 59b apresenta os resultados obtidos no espaço tridimensional, onde nota-se uma concentração das trajetórias na região $(13, 33, 0, 17)$, demonstrando a alta probabilidade das trajetórias passarem por uma pequena região do espaço de estados. Fisicamente, isso significa que a superfície de comando oscila de maneira assimétrica, com regiões de baixa densidade de probabilidade conjunta, possivelmente relacionadas à região de folga e uma região bem delimitada de alta probabilidade, possivelmente relacionada com a região de contato do fio mola com um dos batentes da folga.

A análise das séries temporais foi realizada para todos os dados coletados ao longo das velocidades de incremento e decremento. Assim, para cada velocidade implementada, a J-PDF máxima e média foram calculadas. A Tabela 10 apresenta os resultados obtidos tanto para o incremento da velocidade, quanto para o decremento da mesma, sendo possível observar a J-PDF média e a coordenada onde a J-PDF máxima para cada velocidade se encontra.

As Figuras 60, 61 e 62 ilustram as séries reconstruídas e o espaço tridimensional da densidade de probabilidade conjunta calculada para os caso de velocidade crescente

Figura 59 – Série temporal e respectiva J-PDF para a deflexão da superfície de comando a $13,58m/s$.



(a) Série temporal para a deflexão β .

(b) J-PDF correspondente.

Fonte: próprio autor.

Tabela 10 – Resultados obtidos na análise da superfície de comando (β).

Velocidade	$U(m/s)$	J-PDF média	Coordenadas
Incremento	13,58	$3,61 \times 10^{-3}$	(13, 33, 0, 17)
	14,14	$2,93 \times 10^{-3}$	(13, 52, 0, 08)
	14,46	$4,06 \times 10^{-3}$	(12, 36, 0, 1)
	14,48	$3,52 \times 10^{-3}$	(12, 7, 0, 04)
Decremento	14,42	$3,28 \times 10^{-3}$	(13, 18, -0, 07)
	14,10	$2,21 \times 10^{-3}$	(14, 07, 0, 07)
	13,82	$2,62 \times 10^{-3}$	(14, 19, -0, 03)
	13,32	$2,78 \times 10^{-3}$	(13, 51, -0, 13)
	13,14	$2,15 \times 10^{-3}$	(13, 27, -0, 08)

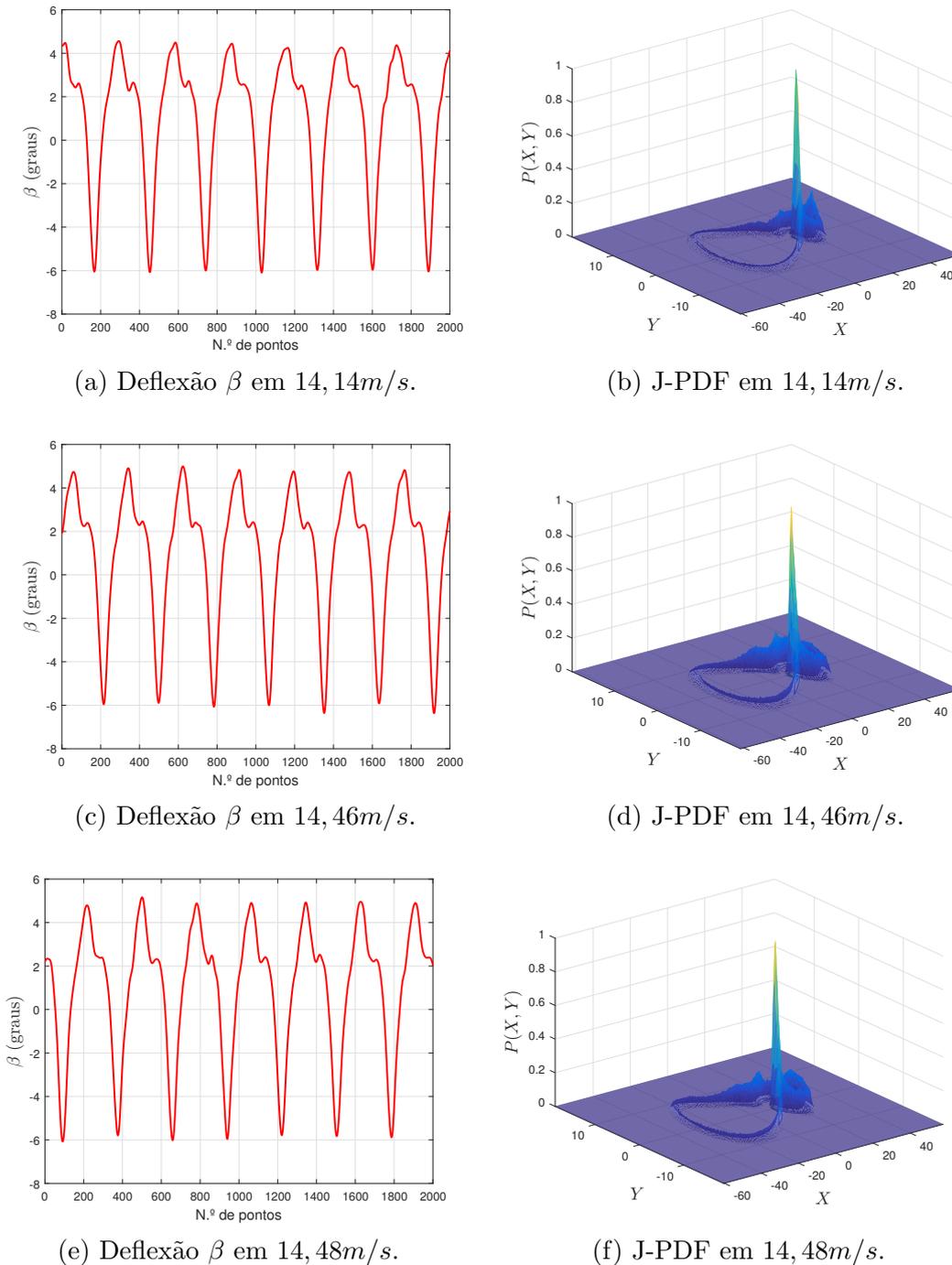
Fonte: próprio autor.

e decrescente, respectivamente. Verificando os espaços obtidos para cada dado coletado, percebe-se que de modo semelhante a velocidade de $13,58m/s$, em todos os casos existe uma pequena região onde a densidade de probabilidade conjunta é alta, indicando a região de contato com um dos batentes da folga.

Analisando os resultados obtidos das J-PDFs médias de cada velocidade, bem como espaço tridimensional gerado, percebe-se que quando o sistema está submetido a altas velocidades, a J-PDF é maior, tanto no incremento quanto no decremento da velocidade, indicando que o movimento oscilatório autossustentado apresenta uma maior regularidade para velocidades do escoamento mais altas.

Por outro lado, quanto menor a velocidade induzida, maior é a atuação da folga, fazendo com que a probabilidade de que as trajetórias passem em um ponto comum seja menor, logo, o valor da J-PDF também diminui. É possível detectar também que em geral,

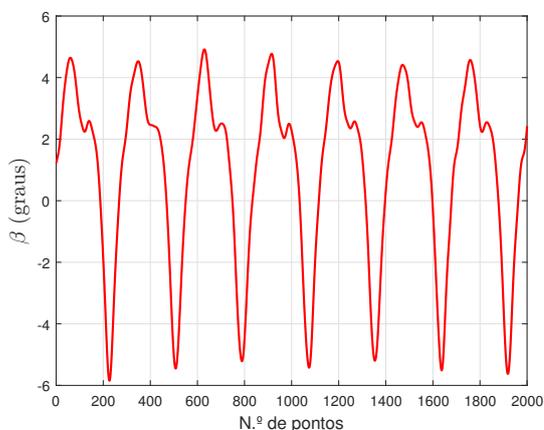
Figura 60 – Séries temporais da deflexão da superfície de comando e aumento da J-PDF média para o incremento da velocidades.



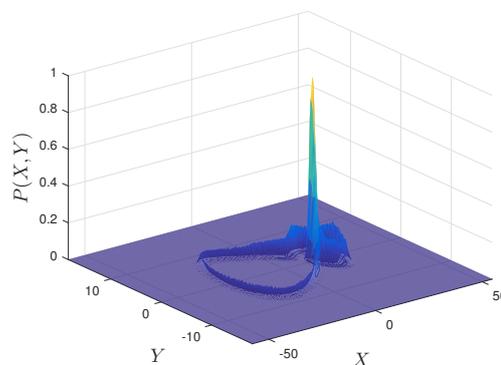
Fonte: próprio autor.

a J-PDF média no decremento é menor comparada aos casos de incremento da velocidade do escoamento, fato possivelmente relacionado à instabilidades na velocidade do túnel durante o decremento. A Figura 63 demonstra o comportamento citado, indicando os valores da J-PDF média e relacionando-os com as velocidades induzidas, tanto para o seu incremento quanto para o decremento.

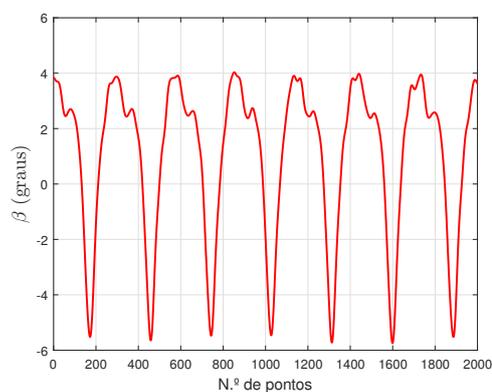
Figura 61 – Séries temporais da deflexão da superfície de comando e diminuição da J-PDF média para o decréto das velocidades.



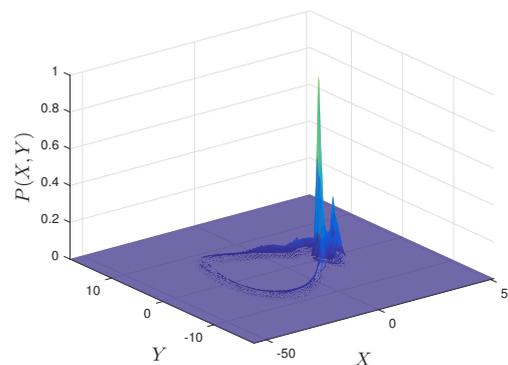
(a) Série reconstruída em 14,42m/s.



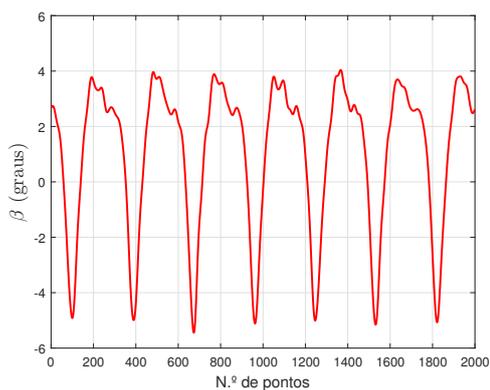
(b) J-PDF em 14,42m/s.



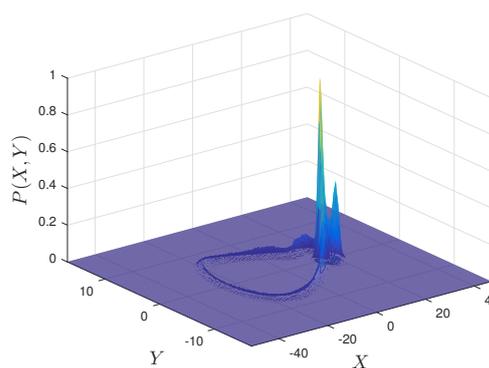
(c) Série reconstruída em 14,10m/s.



(d) J-PDF em 14,10m/s.



(e) Série reconstruída em 13,82m/s.

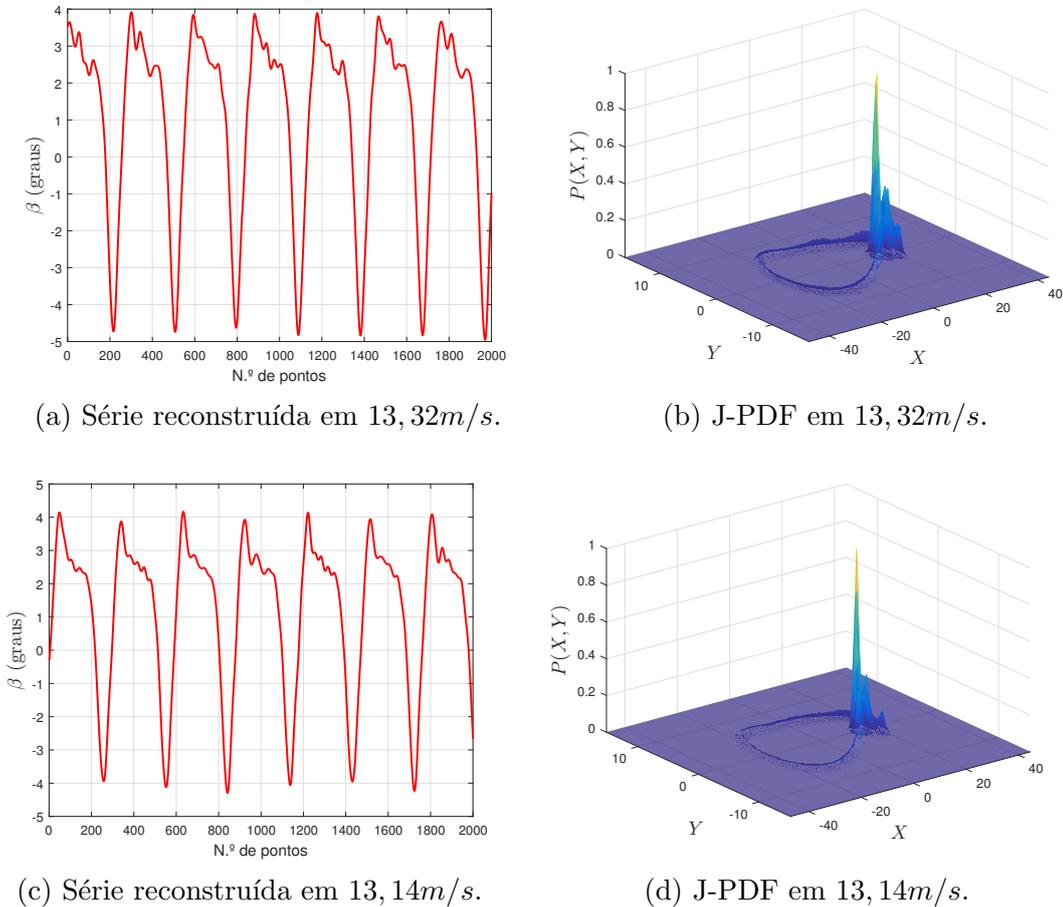


(f) J-PDF em 13,82m/s.

Fonte: próprio autor.

A partir da análise da J-PDF média, é possível detectar também que os valores da J-PDF não são próximos, mesmo em pequenas variações de velocidade. Em 14,14m/s, na velocidade de incremento, foi encontrada uma J-PDF média de $2,93 \times 10^{-3}$, enquanto que em 14,10m/s na velocidade de decréto, a J-PDF média é equivalente a $2,21 \times 10^{-3}$,

Figura 62 – Séries temporais reconstruídas e J-PDF resultantes para as velocidades $13,32m/s$ e $13,14m/s$, também referentes ao decremento na superfície de comando.



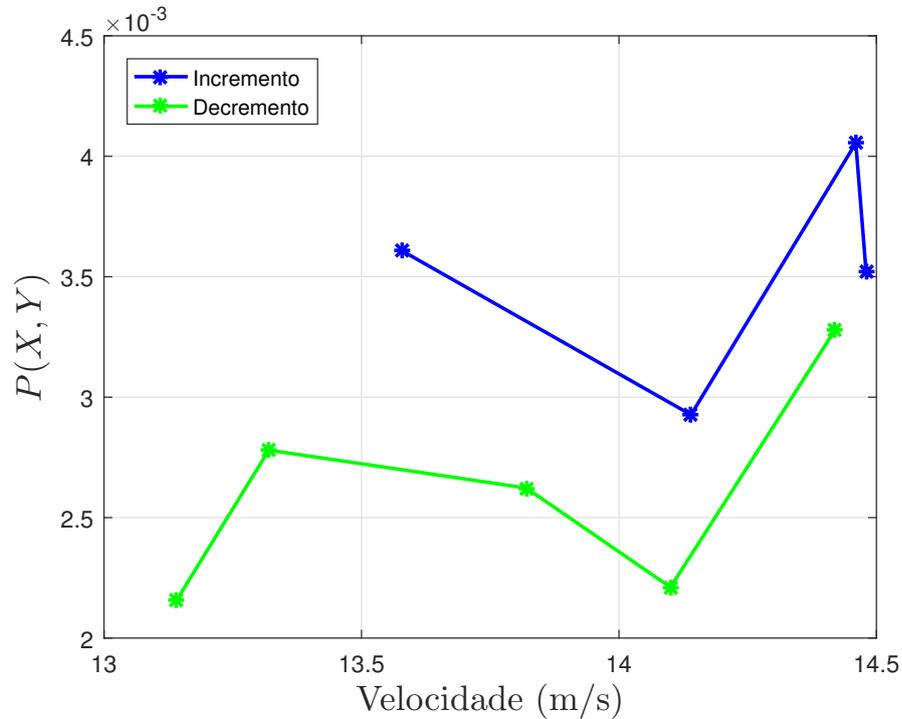
Fonte: próprio autor.

ou seja, houve um diminuição de aproximadamente 25% da probabilidade na variação de apenas $0,04m/s$. Tais dados evidenciam os efeitos da não linearidade, bem como a sensibilidade da J-PDF na detecção de mudanças de comportamento.

Os sinais analisados até então no sistema com folga possuem características estacionárias, possuindo pequenas variações de amplitude na série temporal. A Figura 64a apresenta o sinal referente aos dados obtidos na velocidade de $12,26m/s$, instante onde o sinal deixa de ser estacionário, apresentando uma drástica redução de amplitude. Posteriormente, o sinal sofre um aumento significativo até um novo momento de estabilidade da sua amplitude. Em adicional, a Figura 64b apresenta a J-PDF calculada para o sinal.

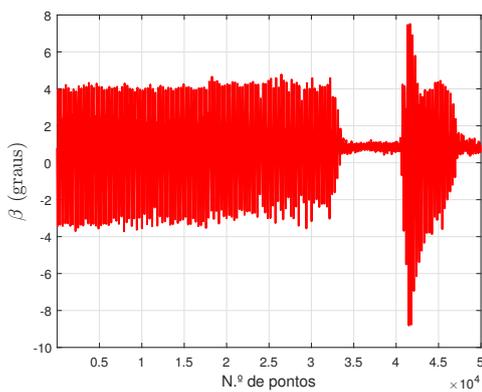
Para esse sinal, a J-PDF média obtida é equivalente a $1,08 \times 10^{-4}$, valor inferior as J-PDF médias coletadas anteriormente. Pela definição da J-PDF, quanto maior a regularidade do sistema, maior é a probabilidade das trajetórias estarem presentes em um

Figura 63 – Variação da J-PDF média para os dados da superfície de comando, onde o incremento da velocidade gera uma J-PDF maior que os dados coletados no decréscimo.

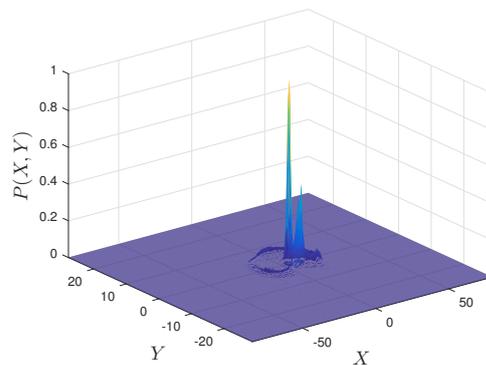


Fonte: próprio autor.

Figura 64 – Série temporal não estacionária para β em 12, 26m/s e aplicação da J-PDF.



(a) Série temporal não estacionária.



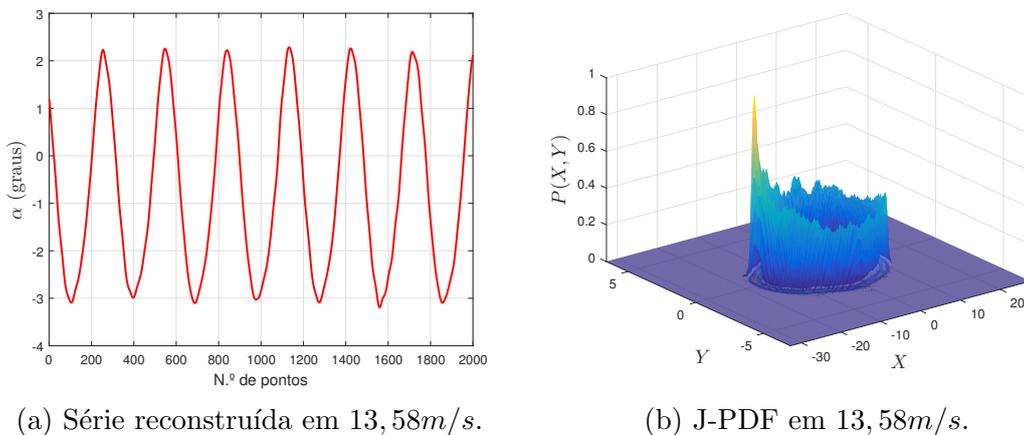
(b) Redução dos picos e da J-PDF média devido a mudança de comportamento.

Fonte: próprio autor.

ponto comum ao longo do tempo, logo, as variações de amplitude podem ser justificadas devido a presença de efeitos não lineares presentes no sinal analisado. Assim, analisando a diferença entre os resultados obtidos da J-PDF ao longo das velocidades, pode-se dizer que a J-PDF expõe informações úteis na detecção de séries não estacionárias dentro do sistema analisado.

Para realizar a análise das séries correlacionadas, utilizou-se o deslocamento e a velocidade referentes a superfície de comando, contudo, com o propósito de ampliar o campo de aplicação da J-PDF, o método estatístico também foi analisado para um segundo grau de liberdade, coletando informações do deslocamento e da velocidade para as séries obtidas da torção. A Figura 65 apresenta o sinal obtido pela torção e geração da sua J-PDF para uma velocidade de $13,58m/s$, equivalente a $1,33 \times 10^{-2}$.

Figura 65 – Aplicação da ferramenta em um sinal referente a torção do modelo aeroelástico.



(a) Série reconstruída em $13,58m/s$.

(b) J-PDF em $13,58m/s$.

Fonte: próprio autor.

Diferentemente dos resultados obtidos para a superfície de comando, onde há a folga na estrutura, pode-se observar uma maior uniformidade das probabilidades da trajetória no espaço tridimensional da torção, ou seja, enquanto β possui uma pequena região onde há uma maior concentração de trajetórias, os sinais correlacionados de α resultam em altos valores de J-PDF ao longo do espaço, e conseqüentemente, indicam uma maior probabilidade das trajetórias passarem por outras regiões do espaço de estados.

A maior regularidade do sistema pode ser observada na reconstrução da série temporal, onde os sinais de torção apresentam oscilações com maior periodicidade em relação à superfície de comando. Os valores das J-PDFs referentes a torção do modelo podem ser encontradas na Tabela 11, enquanto que as Figuras 66, 67 e 68 apresentam os comportamentos da série reconstruída e do espaço de probabilidades nas velocidades definidas.

Analisando as séries temporais e o espaço de estados tridimensional gerado pela J-PDF para a torção, é possível reparar que quanto maior a regularidade da série temporal, maior é a tendência da topologia ser uniforme, ou seja, com todas as correlações entre as séries possuírem o mesmo valor de J-PDF. Apesar disso, ainda é possível detectar regiões

Tabela 11 – Resultados obtidos na análise da torção (α).

Velocidade	$U(m/s)$	J-PDF média	Coordenadas
Incremento	13,58	$1,33 \times 10^{-2}$	(-15, 23, 0, 84)
	14,14	$1,96 \times 10^{-2}$	(-17, 8, 1, 5)
	14,46	$2,15 \times 10^{-2}$	(-17, 78, 1, 83)
	14,48	$1,57 \times 10^{-2}$	(-19, 96, 1, 52)
Decremento	14,42	$1,42 \times 10^{-2}$	(-19, 06, 1, 28)
	14,10	$1,95 \times 10^{-2}$	(-16, 65, 1, 17)
	13,82	$1,65 \times 10^{-2}$	(-15, 75, 0, 78)
	13,32	$1,56 \times 10^{-2}$	(-13, 72, 0, 5)
	13,14	$1,57 \times 10^{-2}$	(-12, 64, 0, 05)

Fonte: próprio autor.

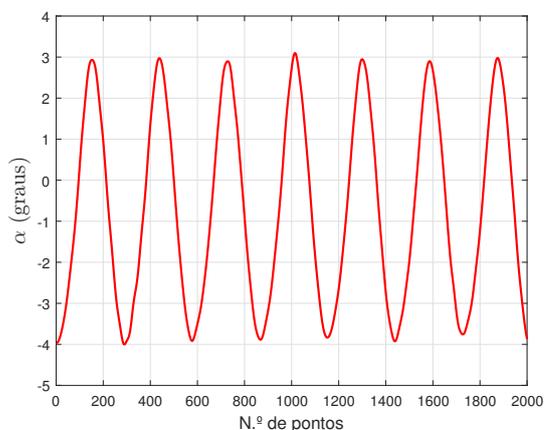
onde o valor da J-PDF varia, referente a mudança do nível de complexidade da torção ao longo do experimento.

Mesmo com uma regularidade maior, comparado com os dados da superfície de comando, é possível perceber também a diferença das J-PDFs entre as velocidades de incremento e decremento do sistema. Nas velocidades maiores, a região de maior probabilidade de trajetória não apresenta destaque, visto que a regularidade da série é maior e o sistema apresenta uma maior previsibilidade, conseqüentemente. Conforme o decaimento da velocidade, é detectado que os sinais começam a apresentar pequenas alterações nos vales inferiores, logo, a complexidade do sinal aumenta. Apesar da alteração não ser significativa observando a série reconstruída, tal alteração é facilmente detectada na J-PDF, onde é possível localizar os instantes temporais onde a probabilidade das trajetórias é maior. Isso demonstra a potencialidade do uso da J-PDF na detecção de comportamentos complexos através do sinal.

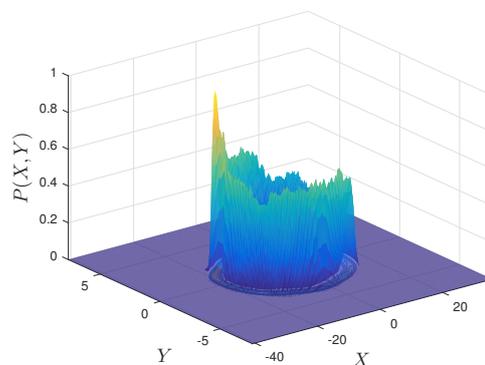
A representação da relação entre a J-PDF e as velocidades induzidas na simulação pode ser vista na Figuras 69. Apesar dos valores da J-PDF média serem superiores aos obtidos da superfície de comando, o comportamento indicado anteriormente, onde o aumento da densidade probabilidade conjunta ocorre de acordo com o incremento da velocidade também ocorre nos sinais de torção.

Analisando as densidades de probabilidades obtidas, percebe-se algumas variações quando comparam-se os resultados da superfície de comando. Anteriormente, na superfície de comando, foi visível a diferença dos valores da J-PDF média nas velocidades de incremento e decremento, fato que não pode ser observado nos dados de torção.

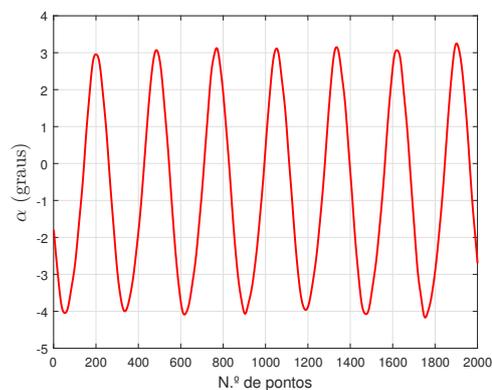
Figura 66 – Séries temporais reconstruídas e J-PDF resultantes para as velocidades de incremento na torção.



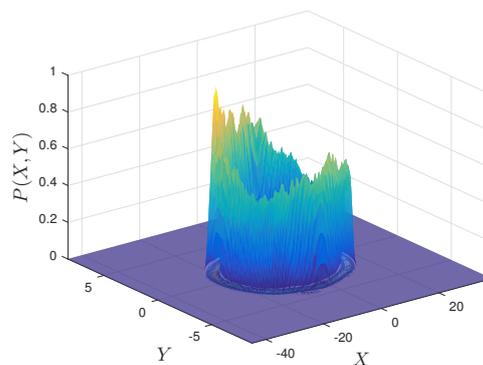
(a) Série reconstruída em 14, 14m/s.



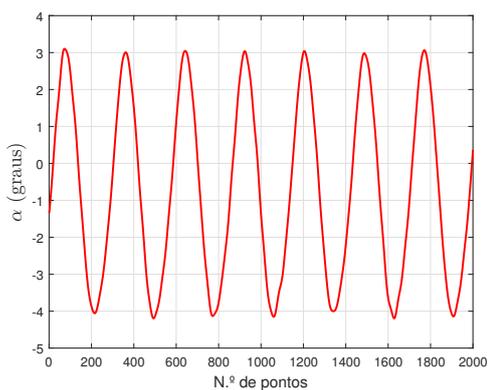
(b) J-PDF em 14, 14m/s.



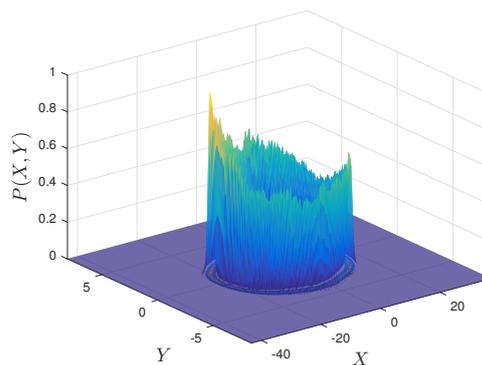
(c) Série reconstruída em 14, 46m/s.



(d) J-PDF em 14, 46m/s.



(e) Série reconstruída em 14, 48m/s.

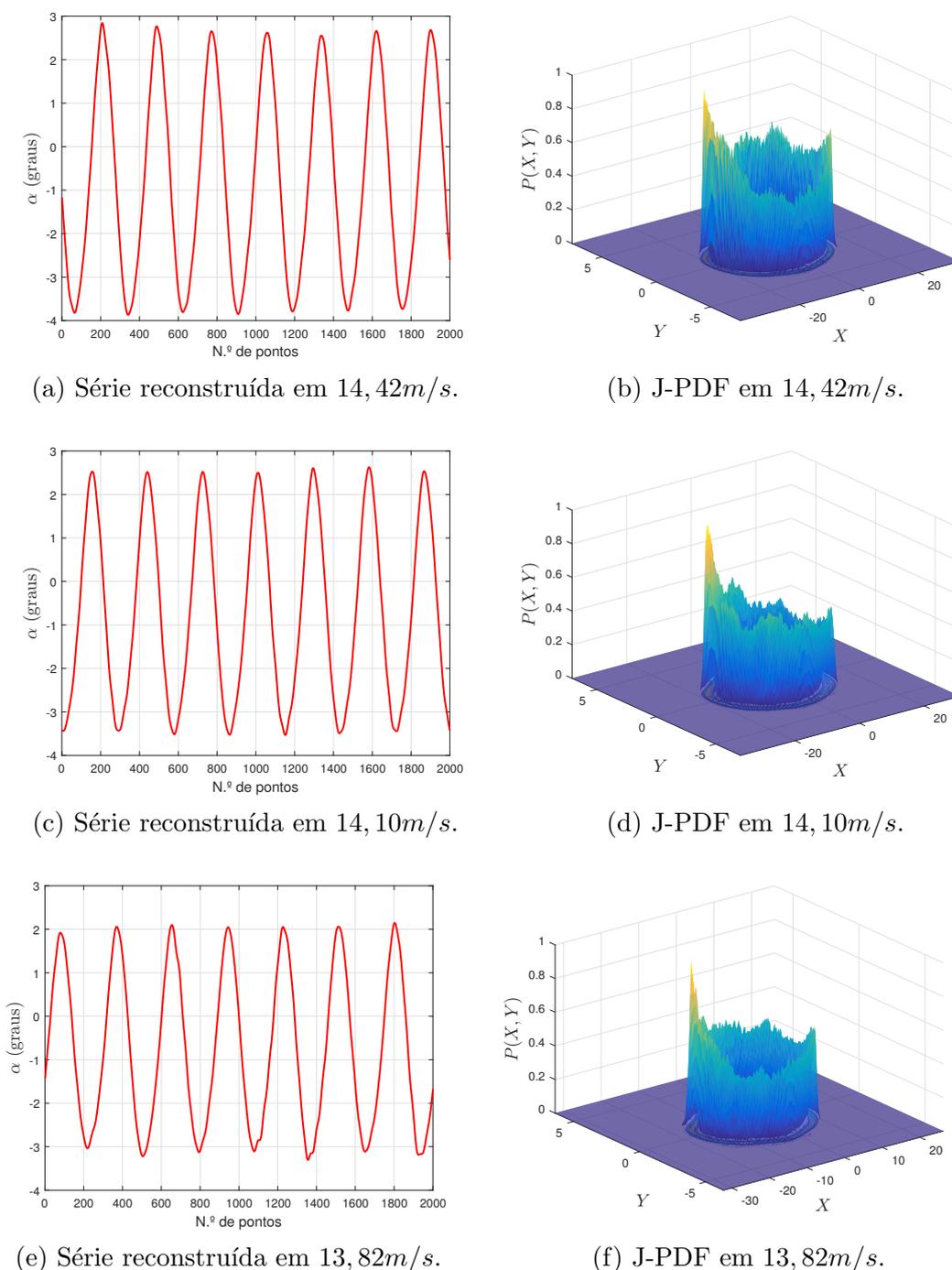


(f) J-PDF em 14, 48m/s.

Fonte: próprio autor.

Como a fonte de não linearidade não é encontrada na torção, os sistema tende a possuir menor complexidade. Consequentemente, torna-se inviável afirmar que a J-PDF é maior na velocidade incremental. Isso pode ser visto ao comparar a J-PDF obtida na velocidade de 13,58 com os demais instantes coletados, onde obteve-se a menor J-PDF.

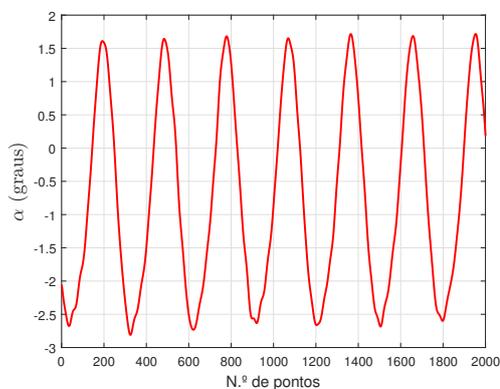
Figura 67 – Séries temporais reconstruídas e J-PDF resultantes para as velocidades de decremento na torção.



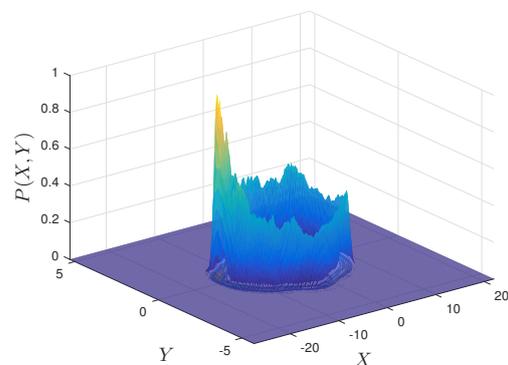
Fonte: próprio autor.

Além disso, o valor das J-PDFs médias na maior velocidade incremental e na última velocidade de decremento são iguais. Portanto, tais dados não são suficientes para mostrar o nível de complexidade do sistema, afinal, sabe-se que a movimentação de ambos os instantes são distintos. Para isso, vale a ressalva da importância da análise gráfica do

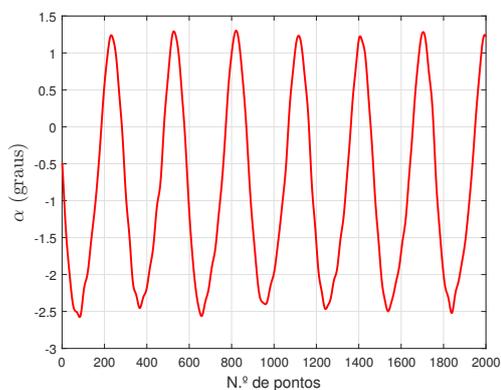
Figura 68 – Séries temporais reconstruídas e J-PDF resultantes para as velocidades $13,32m/s$ e $13,14m/s$, também referentes ao decremento da velocidade na torção.



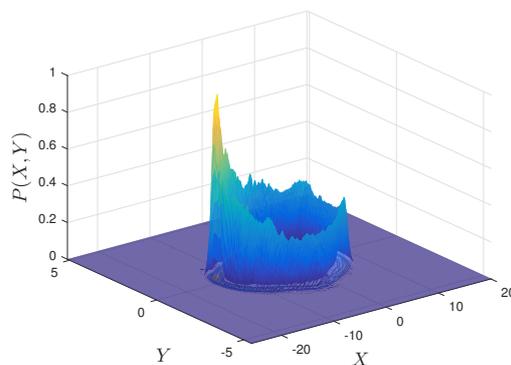
(a) Série reconstruída em $13,32m/s$.



(b) J-PDF em $13,32m/s$.



(c) Série reconstruída em $13,14m/s$.

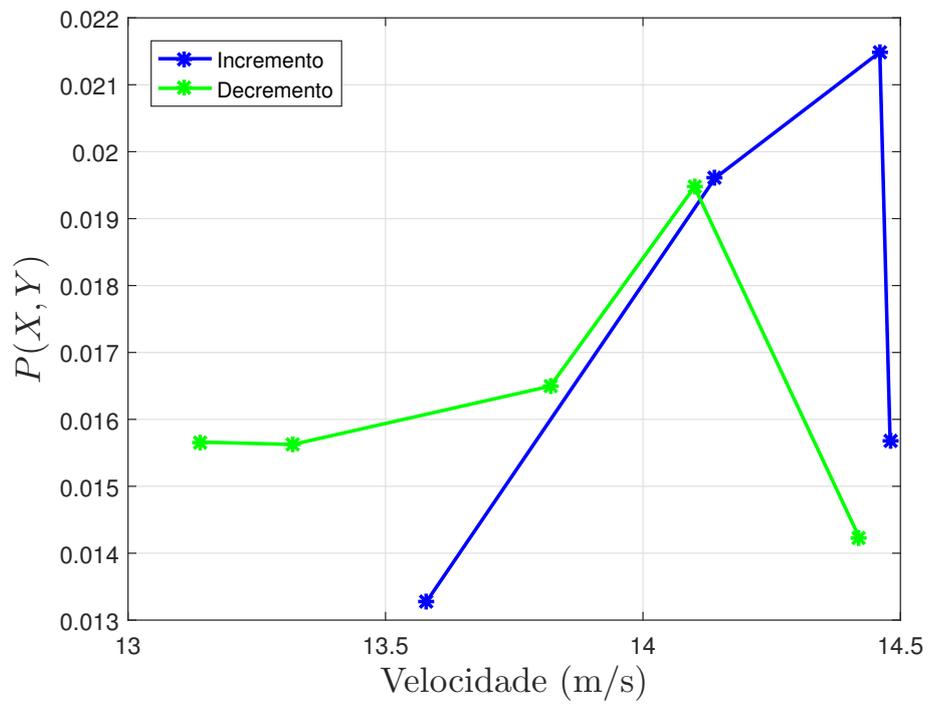


(d) J-PDF em $13,14m/s$.

Fonte: próprio autor.

espaço tridimensional, no qual é capaz de demonstrar a diferença da previsibilidade do sistema, mesmo que a sua J-PDF média seja próxima.

Figura 69 – Análise da J-PDF média para os dados da torção ao longo do incremento e do decremento.



Fonte: próprio autor.

6 Conclusões

O presente trabalho de mestrado permitem verificar a eficiência da J-PDF na análise de séries aeroelásticas com comportamentos não lineares. A implementação da J-PDF em séries dinâmicas permite relacionar variáveis correlacionadas e apresentar as suas probabilidades. Com isso é possível detectar e prever comportamentos altamente complexos capazes e causas possíveis danos em uma estrutura. Além disso, a comparação e análise das probabilidades conjuntas em diferentes séries provindas de um mesmo sistema, permite a detecção de comportamentos provindos de fontes de não linearidade.

Os resultados foram satisfatórios, evidenciando que a J-PDF é um método eficiente para análise se séries aeroelásticas. Na análise das séries teóricas do sistema não linear de Lorenz e do modelo aeroelástico, foi possível verificar o comportamento da série temporal mediante a probabilidade das trajetórias ao longo do espaço tridimensional observado. O cálculo da J-PDF média das variáveis permitiu analisar a diminuição da probabilidade conforme o aumento da rigidez da estrutura. Sendo assim, a resposta do sistema diante do aumento da não linearidade e a detecção dos pontos de impacto por meio da J-PDF permite a identificação da previsibilidade de possíveis desgastes e pode auxiliar processos de manutenibilidade.

A análise da não linearidade na indução do estol dinâmico em um aerofólio, apresentou uma relação importante entre os resultados da J-PDF e da entropia, de modo que o aumento probabilidade conjunta está associado a diminuição da entropia, logo, o aumento da complexidade resulta na diminuição da J-PDF e o aumento da entropia. Isso demonstra que a J-PDF também é capaz de detectar momentos de transição do sistema, onde a passagem de um momento assimétrico para um momento simétrico resulta no aumento das probabilidades.

Analisando os dados experimentais provindos do modelo aeroelástico com folga na estrutura, foi possível notar que a J-PDF tem a tendência de aumentar seu valor para velocidades maiores, tanto no incremento quanto no decremento. Por outro lado, quanto menor a velocidade do escoamento, menor é a amplitude do deslocamento angular da superfície de comando e maior é a atuação da folga, fazendo com que a probabilidade de que as trajetórias passem em um ponto comum seja menor, logo, o valor da J-PDF também diminui. Pelo fato da fonte de não linearidade não estar na torção, a J-PDF

apresentou uma distribuição mais uniforme na trajetória. Além disso, não é possível afirmar que a J-PDF aumenta para velocidades maiores. Contudo, o espaço tridimensional demonstrou um grande potencial para este caso, visto que o mesmo demonstrou a diferença da previsibilidade do sistema por meio das topologias geradas para cada velocidade analisada.

Como continuidade em trabalhos futuros, propõe-se a elaboração de um algoritmo robusto que seja capaz de realizar a caracterização de um sistema, seja ele linear ou não, por meio de diversas ferramentas, como a análise em frequência, reconstrução do espaço de estados, expoente de Lyapunov, entropia e por fim a J-PDF. Com isso, cada ferramenta é capaz de apresentar informações valiosas sobre a série temporal, de modo que cada informação obtida por uma técnica seja complementada e comprovada por outra.

Adicionalmente, sugere-se a criação de um sistema embarcado que calcule a J-PDF em conjunto com as outras ferramentas, a fim de analisar sinais em tempo real. Sabe-se a complexidade para a realização de uma ACV em uma aeronave, contudo, as informações obtidas por meio da J-PDF e outras ferramentas pode apresentar informações que podem ser utilizadas nos valores de entrada do Inventário do Ciclo de Vida ou então no processo da AICV. Conseqüentemente, a aplicação da J-PDF pode ser de grande importância no processo de manutenibilidade de uma aeronave.

Referências

- ALBUQUERQUE, J. P. d. A.; FORTES, J. M. P.; FINAMORE, W. A. Probabilidade, variáveis aleatórias e processos estocásticos. *Editora PUC-Rio e Editora Interciência, Rio de Janeiro, Brasil*, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 70, 71, 76 e 78.
- ALONSO, J.; JAMESON, A. Fully-implicit time-marching aeroelastic solutions. In: *32nd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. [S.l.: s.n.], 1994. p. 56. Citado na página 25.
- ANDERSON, J. D. J. *Fundamentos de engenharia aeronáutica*. [S.l.]: AMGH Editora, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- ANDERSON, T.; NAYFEH, A.; BALACHANDRAN, B. Experimental verification of the importance of the nonlinear curvature in the response of a cantilever beam. 1996. Citado na página 52.
- BAPTISTA, F. G.; FILHO, J. V. Optimal frequency range selection for pzt transducers in impedance-based shm systems. *IEEE Sensors Journal*, IEEE, v. 10, n. 8, p. 1297–1303, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- BARROS, R. A. M. L. D.; LIBRELOTTO, L. A avaliação do ciclo de vida (acv) de edificações integrada a modelagem da informação da construção (bim): O uso de ferramentas computacionais como abordagem para o processo de projeto. In: . [S.l.: s.n.], 2017. Citado na página 31.
- BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H. *Principles of aeroelasticity*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013. Citado na página 24.
- BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H.; HALFMAN, R. L. *Aeroelasticity*. [S.l.]: Dover, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 24.
- BROOMHEAD, D. S.; KING, G. P. Extracting qualitative dynamics from experimental data. *Physica D*, v. 20, p. 217–236, 1986. Citado 3 vezes nas páginas 52, 55 e 56.
- CASDAGLI, M.; EUBANK, S.; FARMER, D.; GIBSON, J. State space reconstruction in the presence of noise. *Physica D*, v. 51, p. 52–98, 1991. Citado na página 51.
- CHARUTZ, D. M.; MOR, E.; HARPUT, S.; COWELL, D. M.; SMITH, P. R.; FREEAR, S. Guided wave enhancement phased array beamforming scheme using recursive feedback. In: IEEE. *2013 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS)*. [S.l.], 2013. p. 166–169. Citado na página 35.
- COLLAR, A. The expanding domain of aeroelasticity. *The Aeronautical Journal*, Cambridge University Press, v. 50, n. 428, p. 613–636, 1946. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- COLTRO, L. Avaliação do ciclo de vida–acv. *Avaliação do Ciclo de Vida como Instrumento de Gestão, 1st edn. CETEA/ITAL, Campinas*, p. 7–14, 2007. Citado na página 31.
- DAVOODI, A.; SRIVASTAVA, A. Probabilistic evaluation of solutions in variability-driven optimization. In: ACM. *Proceedings of the 2006 international symposium on Physical design*. [S.l.], 2006. p. 17–24. Citado na página 68.

- DRAZIN, P. G.; DRAZIN, P. D. *Nonlinear systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1992. v. 10. Citado na página 39.
- EDWARDS, J. W.; ASHLEY, H.; BREAKWELL, J. V. Unsteady aerodynamic modeling for arbitrary motions. *AIAA Journal*, v. 17, n. 4, p. 365–374, 1979. Citado na página 95.
- FILHO, M. J. Análise de transdutor eletromagnético para coleta de energia em aeroelasticidade. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2020. Citado na página 25.
- GRASSBERGER, P.; PROCACCIA, I. Characterization of strange attractors. *Physical review letters*, APS, v. 50, n. 5, p. 346, 1983. Citado na página 51.
- GUEDES, T. A.; MARTINS, A. B. T.; ACORSI, C. R. L.; JANEIRO, V. Estatística descritiva. *Projeto de ensino aprender fazendo estatística*, Universidade Estadual de Maringá Maringá, p. 1–49, 2005. Citado na página 66.
- HILBORN, R. C. *et al. Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 44.
- INMAN, D. J.; FARRAR, C. R.; JUNIOR, V. L.; JUNIOR, V. S. *Damage prognosis: for aerospace, civil and mechanical systems*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2005. Citado na página 21.
- JOHANNING, A.; SCHOLZ, D. *A first step towards the integration of life cycle assessment into conceptual aircraft design*. [S.l.]: Deutsche Gesellschaft für Luft-und Raumfahrt-Lilienthal-Oberth eV, 2014. Citado na página 31.
- JUNIOR, A. E. F.; VASCONCELLOS, R. M. G. de; MARQUES, F. D. Medidas de entropia para caracterização de estol dinâmico. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 6, n. 1, 2018. Citado na página 25.
- KANTZ, H.; SCHREIBER, T. *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge, USA: Cambridge University Press, 2000. Citado na página 20.
- KANTZ, H.; SCHREIBER, T. *Nonlinear time series analysis*. [S.l.]: Cambridge university press, 2004. v. 7. Citado na página 20.
- KARDEC, A.; NASCIF, J. *Manutenção-função estratégica*. [S.l.]: Qualitymark Editora Ltda, 2009. Citado na página 28.
- KENNEL, M. B.; BROWN, R.; ABARBANEL, H. D. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Physical review A*, APS, v. 45, n. 6, p. 3403, 1992. Citado na página 51.
- KESSLER, S. S.; SPEARING, S. M.; SOUTIS, C. Damage detection in composite materials using lamb wave methods. *Smart materials and structures*, IOP Publishing, v. 11, n. 2, p. 269, 2002. Citado na página 34.
- KINGSY, G. R.; MANIMEGALAI, R.; GEETHA, D. M.; RAJATHI, S.; USHA, K.; RAABIATHUL, B. N. Air pollution analysis using enhanced k-means clustering algorithm for real time sensor data. In: IEEE. *2016 IEEE Region 10 Conference (TENCON)*. [S.l.], 2016. p. 1945–1949. Citado na página 84.

- LATHI, B. P. *Sinais e Sistemas Lineares-2*. [S.l.]: Bookman, 2006. Citado na página 38.
- LATHI, B. P.; DING, Z. Sistemas de comunicações analógicos e digitais modernos. *LTC, Rio de Janeiro*, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.
- LEISHMAN, J. G.; BEDDOES, T. A semi-empirical model for dynamic stall. *Journal of the American Helicopter society, Vertical Flight Society*, v. 34, n. 3, p. 3–17, 1989. Citado na página 26.
- LEMOS, M. A.; ALBERNAZ, C.; CARVALHO, R. A. Qualidade da manutenção. *XXXI ENEGEP*, v. 31, 2011. Citado na página 29.
- LI, D.; GUO, S.; XIANG, J. Aeroelastic dynamic response and control of an airfoil section with control surface nonlinearities. *Journal of Sound and Vibration*, n. 329, p. 4756–4771, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 93 e 111.
- LINDSTEDT, R.; LOULOUDI, S.; VÁOS, E. . Joint scalar probability density function modeling of pollutant formation in piloted turbulent jet diffusion flames with comprehensive chemistry. *Proceedings of the Combustion Institute, Elsevier*, v. 28, n. 1, p. 149–156, 2000. Citado na página 67.
- MARQUES, F. D.; VASCONCELLOS, R. M.; PEREIRA, D. D. Experimental investigation of an airfoil response under stall-induced pitching oscillations. In: *57th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 1965. Citado na página 103.
- MCCONNELL, V. P. Past is prologue for composite repair. *Reinforced Plastics, Elsevier*, v. 55, n. 6, p. 17–21, 2011. Citado na página 32.
- MCDOWELL, D. *Dynamic stall basics*. 2013. Disponível em: (<https://www.mnflyer.com/story/2013/12/01/news/dynamic-stall-basics/158.html>). Citado na página 28.
- MEYER, C. D. *Matrix analysis and applied linear algebra*. [S.l.]: Siam, 2000. v. 71. Citado 4 vezes nas páginas 54, 72, 75 e 80.
- MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas dinâmicos*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2002. Citado na página 40.
- MOON, F. C. *Chaotic and fractal dynamics*. New York: Wiley, 1992. Citado na página 48.
- MOSQUERA, I. A. M. *MODELO DE FUNÇÃO DE PROBABILIDADE CONJUNTA DE PARÂMETROS AMBIENTAIS USANDO A TRANSFORMADA DE NATAF*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, aug 2015. Citado 2 vezes nas páginas 80 e 81.
- NAYFEH, A.; BALACHANDRAN, B. Applied nonlinear dynamics, wiley series in nonlinear science. Wiley New York, 1995. Citado na página 56.
- PACKARD, N. J.; CRUTCHFIELD, J. P.; FROMER, J. D.; SHAW, R. S. Geometry from a time series. *Physical Review Letters*, v. 45, p. 712–716, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.

- PARLITZ, U. Nonlinear time-series analysis. In: *Nonlinear Modeling*. [S.l.]: Springer, 1998. p. 209–239. Citado na página 58.
- PINCUS, S. M. Approximate entropy as a measure of system complexity. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 88, n. 6, p. 2297–2301, 1991. Citado na página 62.
- ROSENSTEIN, M. T.; COLLINS, J. J.; LUCA, C. J. D. A practical method for calculating largest lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 65, n. 1-2, p. 117–134, 1993. Citado na página 60.
- RUELLE, D. Ergodic theory of differentiable dynamical systems. *IHES Publications Mathématiques*, v. 50, p. 275–320, 1979. Citado na página 50.
- RYTTER, A. *Vibrational based inspection of civil engineering structures*. Tese (Doutorado) — Dept. of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, 1993. Citado na página 34.
- SANTOS, C. Estatística descritiva. *Manual de auto aprendizagem*, v. 2, 2007. Citado na página 66.
- SATO, S.; SANO, M.; SAWADA, Y. Practical methods of measuring the generalized dimension and largest Lyapunov exponent in high dimensional chaotic systems. *Progress of Theoretical Physics*, v. 77, p. 1–5, 1987. Citado na página 60.
- SAUER, T.; YORKE, J. A.; CASDAGLI, M. Embedology. *Journal of Statistical Physics*, v. 65, n. 3-4, p. 579–616, 1991. Citado na página 50.
- SAVI, M. A. Caos em sistemas mecânicos. In: *Anais do 1º. Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações da SBMAC*. São José do Rio Preto - SP: [s.n.], 2002. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 57.
- SAVI, M. A. *Dinâmica não-linear e caos*. [S.l.]: Editora E-papers, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 20, 37, 43, 49 e 50.
- SCHREIBER, T.; SCHMITZ, A. Classification of time series data with nonlinear similarity measures. *Physical Review Letter*, v. 79, n. 8, p. 1475–1478, 1997. Citado na página 20.
- SERRANO, A. A manutenibilidade no projeto de aeronaves: aportes à segurança de aviação. *Revista Conexão SIPAER*, v. 2, n. 1, p. 150–162, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 25, 28, 29 e 30.
- SIMONI, A. R. *Análise de séries temporais experimentais não lineares*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, 2007. (in portuguese). Citado 4 vezes nas páginas 25, 40, 49 e 58.
- SMITH, S. *Digital signal processing: a practical guide for engineers and scientists*. [S.l.]: Elsevier, 2013. Citado na página 52.
- SOONG, T. T. *Fundamentals of probability and statistics for engineers*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004. Citado na página 53.

STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. [S.l.]: CRC press, 2018. Citado na página 41.

TAKENS, F. Detecting strange attractors in turbulence. In: RAND, D.; YOUNG, L. (Ed.). *Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics*. New York: Springer-Verlag, 1981. v. 898, p. 366–381. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 50.

TANG, D.; DOWELL, E. H. Flutter and limit-cycle oscillations for a wing-store model with freplay. *Journal of Aircraft*, v. 43, n. 2, p. 487–503, 2006. Citado na página 67.

THIELO, M. R. Análise e classificação de séries temporais não estacionárias utilizando métodos não-lineares. 2000. Citado na página 38.

VASCONCELLOS, R. M. G. d. *Reconstrução de espaços de estados aeroelásticos por decomposição em valores singulares*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2007. Citado 8 vezes nas páginas 26, 41, 43, 48, 52, 55, 113 e 114.

VASCONCELLOS, R. M. G. d. *Caracterização e detecção da não linearidade associada à folga em sistemas aeroelásticos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 58, 96 e 112.

VASCONCELLOS, R. M. G. d.; PEREIRA, D. A.; MARQUES, F. D. Characterization of nonlinear behavior of an airfoil under stall-induced pitching oscillations. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 372, p. 283–298, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 111.

VENKATRAMANI, J.; SARKAR, S.; GUPTA, S. Intermittency in pitch-plunge aeroelastic systems explained through stochastic bifurcations. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 92, n. 3, p. 1225–1241, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 67.

WALPOLE, R. E.; MYERS, R. H.; MYERS, S. L.; YE, K. *Probability and statistics for engineers and scientists*. [S.l.]: Macmillan New York, 1993. v. 5. Citado 9 vezes nas páginas 67, 69, 70, 71, 73, 74, 77, 78 e 79.

WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, v. 16, p. 285–317, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 58.

WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 285–317, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 60.

WORDEN, K.; TOMLINSON, G. R. Nonlinearity in experimental modal analysis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 359, n. 1778, p. 113–130, 2001. Citado na página 27.

WRIGHT, J.; COOPER, J. Introduction to aircraft aeroelasticity and loads. *Abstract*[[Google Scholar], p. 123–139, 2007. Citado na página 22.

YANG, C.; CHEN, J.; JI, X.; POLLARD, T. P.; LÜ, X.; SUN, C.-J.; HOU, S.; LIU, Q.; LIU, C.; QING, T. *et al.* Aqueous lithium battery enabled by halogen conversion–intercalation chemistry in graphite. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 569, n. 7755, p. 245–250, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

YANG, M.; ZHU, S.; LIU, M.; LEE, W.-J. One parametric approach for short-term jpdf forecast of wind generation. *IEEE Transactions on Industry Applications*, IEEE, v. 50, n. 4, p. 2837–2843, 2014. Citado na página 68.

YEUNG, M. S.; STROGATZ, S. H. Nonlinear dynamics of a solid-state laser with injection. *Physical Review E*, APS, v. 58, n. 4, p. 4421, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 59.