



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

A Classificação das Formas Binárias aplicada em Máquinas de Catástrofes

Alessandra Roberta Custodio de Oliveira

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação – Mestrado Profissional em
Matemática Universitária do Departamento
de Matemática como requisito parcial para a
obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Eliris Cristina Rizzioli

2010

510 Oliveira, Alessandra Roberta Custodio de
O48c A Classificação das Formas Binárias aplicada em Máquinas de
Catástrofes/ Alessandra Roberta Custodio de Oliveira- Rio Claro:
[s.n.], 2010.
59 f., il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Eliris Cristina Rizziolli

1. Catástrofes. 2. Máquina de Zeeman. 3. Formas Binárias. 4. Teorema de Thom. I. Título

TERMO DE APROVAÇÃO

Alessandra Roberta Custodio de Oliveira

A CLASSIFICAÇÃO DAS FORMAS BINÁRIAS APLICADA EM MÁQUINAS
DE CATÁSTROFES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Eliris Cristina Rizzioli
Orientadora

Prof. Dr. Aldício José Miranda
UNIFAL-MG - Universidade Federal de Alfenas-MG

Profa. Dra. Carina Alves
IGCE - Instituto de Geociências e Ciências Exatas - UNESP/Rio Claro

Rio Claro, 03 de Setembro de 2010

Dedicado àqueles que mesmo sem entender uma palavra desta, a leram

Agradecimentos

Durante esse mestrado houve fases muito difíceis, mas também tive pessoas que iluminaram meu caminho.

Agradeço primeiramente a Deus, pois tudo posso Naquele que me fortalece, e Ele me ajudou nesta e em toda minha vida. À Vera Lucia Duracenko Ramos que foi à luz em momentos de escuridão.

Aos colegas desse mestrado: Ana Claudia, Patricia Casagrande, Ribamar, Juracelio, Gustavo, Henrique, Batista, Maicon, mas em especial a Fabricio Okamoto, Patricia Souza, Robinson Antão e sem sombra de duvidas a Nilton Delben que me ensinou a trabalhar com essa linguagem computacional que acreditava que não conseguiria apreender.

Aos meus pais, ele por construir a máquina de catástrofe, mesmo sem entender seu funcionamento, ela que de seu modo exigente me faz ir sempre além.

A toda família Andrade, Sergio, Rosalina, Helen e Iara, que me deram uma base familiar quando mais necessitava, em especial a Iara Eugenia de Andrade, criatura singular que de seu modo torpe me fez ver que ainda posso ter conquistas.

Por último, mas não em menor importância, à Elíris, orientadora desta tese, que além de tutora confiou que após a tempestade viria a bonança, e pacientemente aguardou e ajudou no que foi possível, não somente na parte acadêmica mas também no âmbito pessoal. Que acreditou que eu podia mesmo quando eu não tinha essa certeza, foi a amiga nas horas difíceis e sua empolgação com os escritos motivou e contribuiu com esta tese de maneira impressionante.

Quando tomamos consciência da capacidade de materializarmos fora o que somos por dentro, compreendemos que cada um de nós vive no mundo de luz ou de trevas que criou para si.

Resumo

Este trabalho trata da classificação geométrica das formas binárias quádricas e cúbicas. Além disto, aplicamos esta classificação ao estudo de máquinas de catástrofes. Para este fim, adotamos os seguintes livros [1], [2] e [3].

Palavras-chave: Catástrofes, Máquina de Zeeman, Formas Binárias, Teorema de Thom.

Abstract

This work make reference of the geometry classification of the two variables quadratic, cubic and quartic forma. Before that, the aplication that classification in study of the catastrophe machines. For this based in thats books [1], [2] e [3].

Keywords: Catastrophe, Zeeman Machine, Binary Forms, Thom's Theorem.

Lista de Figuras

2.1	Cone Discriminante	23
2.2	Caso três retas	27
4.1	Catástrofe Dobra	45
4.2	Catástrofe Cúspide	48
4.3	Catástrofe Rabo de Andorinha	51
4.4	Seções na Catástrofe Borboleta	53
5.1	Máquina de Zeeman	54
5.2	Esquemas para Máquina de Zeeman	58

Sumário

1	Introdução	9
2	Álgebra das Formas Binárias	10
2.1	Elementos de Álgebra Linear sobre $\mathbb{R}^n$	10
2.2	Forma Binária Quadrática	19
2.3	Forma Binária Cúbica	25
3	Topologia e Funções de Várias Variáveis	29
3.1	Topologia do Espaço Euclidiano	29
3.2	Diferenciabilidade	33
4	Geometria de Catástrofes	39
4.1	Teorema de Thom	39
4.2	Sobre as Catástrofes: Dobra, Cúspide, Rabo de Andorinha e Borboleta	44
4.2.1	Dobra	44
4.2.2	Cúspide	46
4.2.3	Rabo de Andorinha	49
4.2.4	Borboleta	52
5	Máquina de Catástrofes	54
	Referências	59

1 Introdução

Arnold em seu livro Teoria da catástrofe [4], diz que a descrição do Mundo depende de uma interação delicada de fenômenos contínuos e descontínuos (ou discretos). Estes ultimos os primeiros a serem notados. Catástrofes são mudanças súbitas representando respostas descontínuas de um sistema de variações suaves em condições extremas.

As informações sobre teoria da catástrofes começaram a aparecer nos meados da década de sessenta, portanto a teoria é muito recente e não temos muitas referências no assunto. Tomando a frase de Poincaré que diz: *"os matemáticos não destroem os obstáculos que povoam a sua ciência mas simplesmente os empurram até sua fronteira. Possam esses obstáculos ser deslocados para o mais longe possível além dessa fronteira, até o domínio inconsciente e do irracional"*, ou seja com todas as dificuldades de referências e afins, iniciamos esta dissertação.

Vemos a necessidade de entender as formas binárias, depois apresentamos uma breve noção de topologia e diferenciabilidade. O último capítulo é dedicado ao estudo geométrico de algumas variedades de catástrofes não umbílicas derivadas da classificação de germes apresentados pelo teorema de Thom.

Terminamos este trabalho com os procedimentos para construção de uma máquina de catástrofe, a máquina de Zeeman; breve momento onde usamos Física Clássica que é essencial para a teoria de vários tipos de comportamentos sutis; de repente a água ferve, o gelo derrete a Terra e Lua estremecem, prédios caem; onde de um momento N para $N + 1$ surge um colapso, um caos.

Por último, quanto ao mérito deste trabalho ao estudante de graduação no curso Matemática, ou curso afim, o conteúdo desta dissertação demonstra a interdisciplinaridade entre as grandes áreas Álgebra, Topologia e Análise de naturezas tão distintas.

2 Álgebra das Formas Binárias

Para desenvolver tópicos intrínsecos à Teoria das Catástrofes é preciso explorar a interligação da Álgebra Linear com Geometria Espacial. Neste sentido, aqui estudamos a álgebra de Formas Binárias tendo como fio condutor suas características geométricas inerentes.

Inicialmente, estudamos elementos de Álgebra Linear, sobretudo para definir a notação usada neste texto; a seguir apresentamos as Formas Binárias Quadradas (de grau 2) e Cúbicas (de grau 3). Finalizamos este capítulo com a geometria de formas polinomiais de graus superiores a 3.

2.1 Elementos de Álgebra Linear sobre $\mathbb{R}^n$

Para qualquer inteiro $n > 0$ definimos o **Espaço Euclidiano n -dimensional** como sendo o conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Às vezes é conveniente usar a notação $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e referir a cada x_i como i -ésima coordenada de x .

Se $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos a adição e a multiplicação por escalar como:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Observamos que o elemento neutro 0 é a **n-upla** $(0, 0, \dots, 0)$. Estas operações dão a $\mathbb{R}^n$ uma estrutura de **espaço vetorial real**, e seus elementos são chamados **vetores**.

Estas operações tem uma interpretação geométrica visual em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. A regra da adição corresponde a lei do paralelogramo e a multiplicação por escalar para troca de escala, ou troca de direção, se o escalar é negativo.

Quando $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, o conjunto de todos os λx , $\lambda \in \mathbb{R}$, é chamado **reta** por 0 e x é o elemento neutro é chamado **origem**.

Um **subespaço** de $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto W com as propriedades:

1. Se $x, y \in W$ então $x + y \in W$;
2. Se $x \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\lambda x \in W$.

Para mostrar o sentido geométrico de um subespaço, consideramos $\mathbb{R}^3$. A condição (2) pode ser interpretada da seguinte maneira: se $x \in W$ então a reta que passa por 0 e x também pertence a W . Sobre a condição (1), dados pontos x e y em W , o vértice do paralelogramo (referente a soma $x + y$) pertence a W .

A seguir exploramos exemplos de subespaços em $\mathbb{R}^3$.

(a) Se $W = \{0\}$, onde $0 = (0, 0, 0)$, é um subespaço chamado **subespaço trivial**.

Observe que se $W \neq \{0\}$ é possível encontrar, $x \in W$ com $x \neq 0$. Então a reta que passa por x e 0 também está em W . Esta reta, inclusive, pode ser todo W , como no próximo exemplo.

(b) $W = \{\lambda x; x \in W \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}\}$. (Reta passando pela origem).

Se um subespaço em $\mathbb{R}^3$, não é o subespaço trivial $\{0\}$, e contém uma reta passando pela origem, $r = \{\lambda x; x \in W \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}\}$, temos a seguinte interpretação: se existe $y \in W$ não pertencente a reta r , então a reta $\{\lambda y; y \in W \text{ e } \mu \in \mathbb{R}\}$, que passa por y e 0 está contida em W , assim como o vértice do paralelogramo cujos lados são duas retas, definidas pelos pontos $\lambda x + \mu y$ para λ e $\mu \in \mathbb{R}$. É possível mostrar, que os pontos do plano são definidos por 0, x e y . Ou seja, W é dado por:

(c) $W = \{\lambda x + \mu y : x, y \in W \text{ e } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ (plano que passa pela origem).

Finalmente, se W não é nenhum dos acima: (a), (b) ou (c), segue que W contém um ponto z que não pertence ao plano $\{\lambda x + \mu y : x, y \in W \text{ e } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, porém com três retas. É possível mostrar que $W = \{\lambda x + \mu y + \nu z \mid x, y, z \in W \text{ e } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$, ou seja:

(d) $W = \mathbb{R}^3$

Portanto, os subespaços de $\mathbb{R}^3$ são $\{0\}$, retas passando pela origem, planos passando pela origem ou o próprio $\mathbb{R}^3$. Estes podem ser classificados como:

- 0 – *dimensional* somente a origem;
- 1 – *dimensional* que são as retas;
- 2 – *dimensional* que são os planos;

- 3 – *dimensional* que é o próprio $\mathbb{R}^3$

Agora, pretendemos definir um subconjunto de um espaço vetorial real que o determine completamente. Para tanto, precisamos da definição a seguir.

Um conjunto de pontos $\{v^1, v^2, \dots, v^r\} \in \mathbb{R}^n$ é **linearmente dependente** se existem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ não todos nulos, tais que:

$$\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \dots + \lambda_r v^r = 0.$$

Se a única solução para a equação acima é a solução-trivial dizemos que este conjunto é **linearmente independente**.

Geometricamente em $\mathbb{R}^3$, dois pontos são linearmente independentes se nenhum deles está na reta origem do outro; três pontos são linearmente independentes se nenhum plano os contém.

O conjunto dos vetores $\{v^1, v^2, \dots, v^r\}$ é uma **base** do subespaço W se este conjunto é linearmente independente e ainda, se cada elemento $v \in W$ pode ser escrito como uma combinação linear destes elementos, ou seja, existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tais que:

$$v = \lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \dots + \lambda_r v^r.$$

Assim uma base para o subespaço W é um conjunto linearmente independente $\{v^1, v^2, \dots, v^r\}$ que gera W , $W = [v^1, v^2, \dots, v^r]$.

A **dimensão** de W é o número de elementos da base. É possível mostrar que a dimensão independe da base que escolhemos, logo dimensão é um objeto bem definido. Para indicar a dimensão de um subespaço W usamos $\dim W$. Por convenção, $\{0\}$ tem dimensão 0. Por exemplo, o espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ tem dimensão n , e todo subespaço deste tem dimensão menor ou igual a n .

Observamos que nem todo espaço vetorial tem dimensão finita, a saber, para o espaço vetorial real formado por todos os polinômios na variável x , qualquer conjunto linearmente independente formado por polinômios sempre terá um polinômio de maior grau, digamos que este grau seja k , assim o polinômio x^{k+1} não pertencerá a este conjunto e, conseqüentemente, nenhum conjunto finito linearmente independente gera tal espaço vetorial.

A diferença $n - \dim W$ é chamada a **codimensão** de W em $\mathbb{R}^n$. A co-base de W em $\mathbb{R}^n$ é o conjunto de vetores $\{v^1, \dots, v^r\}$ que reunidos com a base de W , forma uma base para $\mathbb{R}^n$. Necessariamente, r é igual a codimensão de W .

Sobretudo, estamos interessados em estudar o comportamento de aplicações especiais de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Tais aplicações são as transformações que definimos a seguir.

Uma **transformação linear** ou uma aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$ é uma função:

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

com as seguintes propriedades, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$;

(b) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

É possível determinar a forma geral de uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ sabendo apenas sua imagem para cada elemento de uma determinada base $\{u^1, \dots, u^n\}$ de $\mathbb{R}^n$, isto é, sabendo os valores $f(u^1), \dots, f(u^n)$. Para isto, tomamos uma base $\{v^1, \dots, v^m\}$ para $\mathbb{R}^m$ e então, uma vez que cada $f(u^i)$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, existem escalares λ_{ji} , $j \in \{1, \dots, m\}$, tais que:

$$f(u^i) = \lambda_{1i}v^1 + \dots + \lambda_{mi}v^m = \sum_{j=1}^m \lambda_{ji}v^j$$

Também, cada elemento $x \in \mathbb{R}^n$ é unicamente escrito da forma:

$$x = \sum_{i=1}^n \mu_i u^i, \quad (\mu_i \in \mathbb{R}).$$

Destas observações, segue que:

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \mu_i u^i\right) = \sum_{i=1}^n \mu_i f(u^i) = \sum_{i=1}^n \mu_i \sum_{j=1}^m \lambda_{ji} v^j.$$

Observamos que é mais conveniente utilizar a base canônica de $\mathbb{R}^n$,

$$\{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)\}.$$

Note que nesta base temos que $x = \sum_{i=1}^n \mu_i u^i = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, onde cada μ_i é uma coordenada de x , muitas vezes denotada por x_i . Assim podemos escrever,

$$f(x_1, \dots, x_n) = (\lambda_{11}x_1 + \dots + \lambda_{1n}x_n, \dots, \lambda_{m1}x_1 + \dots + \lambda_{mn}x_n).$$

Uma característica relevante ao adotar como espaço vetorial o espaço euclidiano é a possibilidade de se obter uma interpretação geométrica do efeito de uma aplicação linear sobre tais espaços. Por exemplo, a aplicação linear, f de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ definida por $f(1, 0) = (\alpha, \beta)$ e $f(0, 1) = (\gamma, \delta)$, conseqüentemente, $f(1, 1) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta)$. Assim f pode ser interpretada da seguinte maneira: f distorce o plano preservando retas que

passam pela origem e, no caso em que (α, β) e (γ, δ) são linearmente independentes, aplica quadrados em paralelogramos.

Observe ainda que se (α, β) e (γ, δ) são linearmente dependentes, com pelo menos um deles não nulo, f aplica $\mathbb{R}^2$ a uma reta. Contudo se $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ então f aplica todo $\mathbb{R}^2$ à origem $(0, 0)$.

Em geral, geometricamente uma transformação linear se comporta como uma distorção preservando ‘retas’ que passam pela origem e transformando cubos em paralelepípedos.

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, definimos **posto** de f como sendo a dimensão da imagem $f(\mathbb{R}^n) = \{f(x) | x \in \mathbb{R}^n\}$. A **nulidade** de f é a dimensão do subespaço $N(f) = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}$ chamado **núcleo** de f . Citamos um importante teorema, que relaciona a dimensão do domínio $\mathbb{R}^n$ com a nulidade e o posto de f , a saber, o Teorema do Núcleo e da Imagem, do qual segue que: $n = \dim f(\mathbb{R}^n) + \dim N(f)$. Observe que a codimensão de $N(f)$ é a dimensão da imagem $f(\mathbb{R}^n)$.

Dizemos que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo se esta é uma transformação linear bi-jetora, ou seja, se f é uma transformação linear invertível. Relembramos que uma aplicação é invertível, quando existe uma aplicação linear $g : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ tal que $g(f(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, e $f(g(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$.

Observamos que uma consequência importante do Teorema do Núcleo e da Imagem é a condição suficiente (e necessária) para que a transformação linear f seja bi-jetora, a saber, $m = n$ e o posto de f seja m ; já que destes fatos seguem as condições sobrejetividade (por quanto $\dim f(\mathbb{R}^n) = n$ implica $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$) e injetividade (uma vez que $\dim f(\mathbb{R}^n) = n$, segue do Teorema do Núcleo e da Imagem que $\dim N(f) = 0$, consequentemente, $N(f) = \{0\}$, e isto é equivalente a f ser uma transformação linear injetora).

Outra importante consequência do Teorema do Núcleo e da Imagem é a classificação das transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. Note que neste caso, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, segue que $n = \dim f(\mathbb{R}^n) + \dim N(f)$, mas $\dim f(\mathbb{R}^n) = 0$ ou $\dim f(\mathbb{R}^n) = 1$, pois $f(\mathbb{R}^n)$ é subespaço do espaço 1-dimensional $\mathbb{R}$. Desta forma, f é a aplicação nula se $\dim f(\mathbb{R}^n) = 0$ (pois, neste caso, $f(\mathbb{R}^n) = \{0\}$) ou f é uma transformação linear tal que $\dim f(\mathbb{R}^n) = 1$ e $\dim N(f) = n - 1$.

Neste último caso, se $\{v^1, \dots, v^{n-1}\}$ é uma base para o Núcleo, podemos estendê-la para uma base de $\mathbb{R}^n$ adicionando ao conjunto $\{v^1, \dots, v^{n-1}\}$ um vetor v^n que seja linearmente independente com estes; desta forma podemos definir f da seguinte maneira: $f(v^i) = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ e $f(v^n) = 1$. Note que qualquer outra aplicação linear não nula, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $g = f \circ h$, onde h é uma mudança de coordenada adequada a qual leva base escolhida para definir f para a base escolhida para definir g .

Sob o ponto de vista matricial, é possível definir uma transformação linear relativa às bases escolhidas, respectivamente, para o domínio e contradomínio. Se $B = \{u^1, \dots, u^n\}$ é base para $\mathbb{R}^n$ e $C = \{v^1, \dots, v^m\}$ é base para $\mathbb{R}^m$, já vimos que existem escalares λ_{ji} , $j \in \{1, \dots, m\}$ $i \in \{1, \dots, n\}$, tais que:

$$f(u^i) = \lambda_{1i}v^1 + \dots + \lambda_{mi}v^m = \sum_{j=1}^m \lambda_{ji}v^j$$

Com estes escalares podemos elaborar a seguinte matriz, na qual as colunas são dadas pelas coordenadas de cada vetor $f(u^i)$ com relação a base $C = \{v^1, \dots, v^m\}$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} = (\lambda_{ji}), 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n.$$

Esta matriz com m linhas e n colunas é chamada a matriz de f com relação as bases B e C . A linguagem matricial facilita certas operações entre transformações lineares, entre todas as possíveis, exploramos as seguintes: dadas as transformações lineares $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ e $h : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$, é possível realizar as seguintes operações:

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Se escolhermos a base $u^1, \dots, u^n$ para $\mathbb{R}^n$, $v^1, \dots, v^m$ para $\mathbb{R}^m$ e $w^1, \dots, w^p$ para $\mathbb{R}^p$ sejam as matrizes de f , de g e de h , com relação as estas bases, denotadas respectivamente por (λ_{ji}) , (μ_{ji}) , (ν_{kj}) . Segue que as operações acima podem ser obtidas matricialmente da seguinte maneira: as duas primeiras como

$$\alpha(\lambda_{ji}) = (\alpha\lambda_{ji}), 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n; \forall \alpha \in \mathbb{R};$$

$$(\lambda_{ji}) + (\mu_{ji}) = (\lambda_{ji} + \mu_{ji}), 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n.$$

Quanto a composição de transformações lineares temos que se

$$f(u^i) = \sum_j \lambda_{ji}v^j$$

$$h(v^j) = \sum_k \mu_{kj}w^k,$$

então

$$(h \circ f)(u_i) = h\left(\sum_j \lambda_{ji} v^j\right) = \sum_j \lambda_{ji} h(v^j) = \sum_j \lambda_{ji} \sum_k \nu_{kj} w^k = \sum_k \left(\sum_j \nu_{kj} \lambda_{ji}\right) w_k.$$

Se ρ_{ki} , com $1 \leq k \leq \rho, 1 \leq i \leq n$, é a matriz de $f.h$, com relação as bases dadas acima, segue pela regra do produto para matrizes que $(v_{kj})(\lambda_{ji}) = (\sum_k \nu_{kj} \lambda_{ji})$. Consequentemente, $\rho_{ki} = \sum_k \nu_{kj} \lambda_{ji}$. Ou seja, a matriz da transformação linear determinada pela composição entre duas transformações lineares é a matriz resultante da multiplicação das matrizes destas transformações.

Denotamos por 0_{mn} a matriz nula, ou seja, aquela matriz $m \times n$ cujas entradas são iguais a 0.

$$0_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz identidade, denotada por 1_n , é a matriz $n \times n$ onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 os demais são iguais a 0. Isto é,

$$1_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Veja que a transformação linear que corresponde a esta última matriz é a aplicação linear identidade, ou seja, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Para finalizar esta seção, apresentamos as operações elementares realizadas sobre uma matriz, as quais não alteram a característica importante sobre as matrizes, a saber, a de ser ou não uma matriz invertível, ou equivalentemente, ter seu determinante igual ou diferente de zero. Ressaltamos que, este tipo de manipulação é relevante ao estudar a invertibilidade de aplicações lineares, visto que é possível mostrar que uma aplicação linear é invertível se, e somente se, sua matriz com relação a quaisquer bases é invertível.

Outra aplicação desta manipulação é a determinação do posto (dimensão da imagem) de uma transformação linear f , pode-se mostrar que o posto da transformação linear é igual ao posto de sua matriz. Relembramos que, posto de uma matriz é um inteiro positivo dado por: $r = \max\{s : \det(A_s) \neq 0, A_s \text{ é submatriz de } A \text{ de ordem } s\}$.

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz qualquer, as operações elementares de matrizes são estas:

1. Permutar linhas;
2. Multiplicar uma das linhas por um dado escalar não nulo;
3. Somar uma linha a outra e substituir por esta nova linha uma das linhas envolvidas.

O interessante desta manipulação, é que por meio de uma sequência destas operações a matriz inicial pode ser colocada na forma ‘escalonada’:

$$\begin{pmatrix} * & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & * & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & * & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Note que todas as entradas abaixo dos elementos da diagonal, $*$, são iguais a 0. A seguir, ilustramos tais operações com um exemplo. Denotamos a i -ésima linha por L_i .

Seja A a seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix}.$$

Permuta de L_1 com L_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix}.$$

Substituição de L_3 por $L_3 - 2.L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -9 \\ -3 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix}.$$

Substituição de L_4 por $L_4 + 3.L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -9 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Substituição de L_3 por $L_3 + 5.L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -4 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Substituição de L_4 por $L_4 - 4.L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Substituição de L_4 por $L_4 + L_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O processo está completo pois já obtemos uma matriz na forma escalonada. Se A fosse a matriz de uma determinada transformação linear de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^4$, note que esta não seria invertível pois o determinante é nulo; ainda mais, podemos concluir que o posto da matriz é 3, e consequentemente o posto desta transformação linear também é 3 (pelo Teorema do Núcleo e da Imagem a nulidade é 1).

2.2 Forma Binária Quadrática

Uma **forma quadrática** de n variáveis $x_1, \dots, x_n$ é uma aplicação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$q(x) = \sum_{ij} \lambda_{ij} x_i x_j,$$

onde $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ e x denota a n -upla $(x_1, \dots, x_n)$.

Por exemplo, se $n = 2$, temos

$$q_a(x_1, x_2) = \lambda_{11}x_1x_1 + \lambda_{12}x_1x_2 + \lambda_{21}x_2x_1 + \lambda_{22}x_2x_2.$$

Observe que, neste caso, podemos escrever

$$q_a(x_1, x_2) = \lambda_{11}x_1^2 + (\lambda_{12} + \lambda_{21})x_1x_2 + \lambda_{22}x_2^2.$$

Agora, se $n = 3$, temos

$$\begin{aligned} q_b(x_1, x_2, x_3) = & \lambda_{11}x_1x_1 + \lambda_{12}x_1x_2 + \lambda_{13}x_1x_3 + \lambda_{21}x_2x_1 + \lambda_{22}x_2x_2 + \lambda_{23}x_2x_3 + \\ & + \lambda_{31}x_3x_1 + \lambda_{32}x_3x_2 + \lambda_{33}x_3x_3. \end{aligned}$$

Neste caso, ainda podemos escrever

$$\begin{aligned} q_b(x_1, x_2, x_3) = & \lambda_{11}x_1^2 + \lambda_{22}x_2^2 + \lambda_{33}x_3^2 + (\lambda_{12} + \lambda_{21})x_1x_2 + (\lambda_{13} + \lambda_{31})x_1x_3 + \\ & + (\lambda_{23} + \lambda_{32})x_2x_3. \end{aligned}$$

Também podemos expressar uma forma quadrática em linguagem matricial. Para isto, consideramos a matriz linha

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

e a sua transposta, a matriz coluna

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Denotando $\Lambda = \lambda_{ij}$ a matriz da forma quadrática temos:

$$q(x) = x\Lambda x^T.$$

Por exemplo, as formas quadráticas q_a e q_b se escrevem respectivamente,

$$q_a(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

e

$$q_b(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ainda, note que q_a pode ser escrita da seguinte maneira,

$$q_a(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{11} + \lambda_{11}}{2} & \frac{\lambda_{12} + \lambda_{21}}{2} \\ \frac{\lambda_{21} + \lambda_{12}}{2} & \frac{\lambda_{22} + \lambda_{22}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} q_a(x) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \right] \right\} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot [\Lambda + \Lambda^T] \right\} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se substituirmos $M := \frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^T)$, temos que

$$q(x) = xMx^T,$$

com M uma matriz simétrica (isto é, $M = M^T$).

Indutivamente, é possível realizar este argumento para n qualquer, ou seja, qualquer forma quadrática pode escrita como

$$q(x) = xMx^T, \tag{I}$$

onde M é a matriz simétrica dada por $M = \frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^T)$.

Observamos que de agora em diante consideraremos que toda forma quadrática se escreve como em (I), M matriz simétrica, e mais, denotaremos as entradas de M por λ_{ij} , isto é, $M = (\lambda_{ij})$. Ainda, M será chamada a matriz da forma quadrática q .

O objetivo agora é mostrar que toda forma quadrática pode ser reduzida, por meio de uma mudança de coordenadas adequada $x \mapsto y$, à forma

$$d_1 y_1^2 + \dots + d_n y_n^2. \tag{II}$$

Entendemos por **mudança de coordenadas linear** uma transformação linear bi-jetora. Observe que para garantir isto basta que a respectiva matriz desta transformação linear seja não singular, ou seja, tenha determinante diferente de zero.

Para tanto, analisamos dois casos. O primeiro é quando todos os elementos da diagonal principal são iguais a zero, isto é $\lambda_{ii} = 0, \forall i \in 1, \dots, n$. Neste caso, se a forma quadrática é não nula, existe pelo menos uma entrada λ_{ij} diferente de zero, e ainda, pela simetria de M , λ_{ji} também é diferente de zero. Podemos supor sem perda de generalidade que esta entrada não nula é λ_{12} , pois caso contrário, se a entrada não nula é $\lambda_{i_0 j_0}$ fazemos a primeira mudança de coordenada linear, a saber, aquela que aplica x_{i_0} em x_1 e x_{j_0} em x_2 e não altera as demais coordenadas. Assim, podemos escrever:

$$q(x) = 2\lambda_{12}x_1x_2 + h(x_3, x_4, \dots, x_n).$$

Agora, considere a aplicação linear G sobre $\mathbb{R}^n$,

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) = (y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n) :=$$

$$\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(x_1 - x_2), x_3, x_4, \dots, x_n \right).$$

Desta forma,

$$(q \circ G)(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = q(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) =$$

$$2\lambda_{12}(y_1 + y_2) \cdot (y_1 - y_2) + h(y_3, y_4, \dots, y_n) = 2\lambda_{12}y_1^2 - 2\lambda_{12}y_2^2 + h(y_3, y_4, \dots, y_n).$$

Ou seja, com esta mudança de coordenadas linear transformamos uma forma quadrática (não nula) com todos os elementos da diagonal iguais a zero em uma forma quadrática que tem elementos diferentes de zero em sua diagonal. Portanto é suficiente analisar o caso em que a forma quadrática não nula tem pelo menos um dos elementos de sua diagonal principal diferente de zero.

Podemos assumir, sem perda de generalidade que $\lambda_{11} \neq 0$ (pois, se fosse $\lambda_{i_0 i_0}$ usamos a mudança de coordenada linear que aplica x_{i_0} em x_1 e mantém inalteradas as outras coordenadas).

No intuito de obter a mudança de coordenada adequada para que q se escreva como em (II), primeiramente denotamos

$$q(x) = \lambda_{11} \left(\sum_{ij} \mu_{ij} x_i x_j \right),$$

com $\mu_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{11}}$.

Note que os termos em que x_1 ocorrem são:

$$x_1^2 + 2 \sum_{j=2}^n \mu_{1j} x_1 x_j = \left(x_1 + \sum_{j=2}^n \mu_{1j} x_j \right)^2 - \left(\sum_{j=2}^n \mu_{1j} x_j \right)^2.$$

Fazendo a mudança de coordenada linear, H , sobre $\mathbb{R}^n$ tal que:

$$H(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) := \left(x_1 + \sum_{j=2}^n \mu_{1j} x_j^2, x_2, x_3, \dots, x_n \right).$$

Obtemos

$$(q \circ H)(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = q(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = \lambda_{11} y_1^2 + \bar{q}(y_2, \dots, y_n),$$

onde $\bar{q}$ é uma forma quadrática apenas nas variáveis $y_2, \dots, y_n$. Chegamos na forma (II) se repetimos este processo um número de vezes suficiente para eliminar os demais termos mistos.

Após escrever uma forma quadrática $q(x)$ na forma

$$d_1 y_1^2 + \dots + d_n y_n^2,$$

ainda é possível simplificar mais: substituindo cada x_i por uma mudança de coordenadas adequada para que sua nova coordenada z_i possua coeficiente 1 ou -1. Ou seja, ainda é possível realizar uma mudança de coordenadas linear adequada para que uma forma quadrática não nula seja da forma

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_r^2 - z_{r+1}^2 - \dots - z_s^2$$

onde $s \leq n$. O número s é chamado o **posto** da forma quadrática e é possível mostrar que este número é igual ao posto da matriz simétrica M ; portanto não depende da transformação linear utilizada. Ainda, o número r tal que

$$2r - s = r - (s - r) = \sum \text{coeficientes}$$

é denominado o **índice** da forma quadrática $q(x)$.

Qualquer forma quadrática é unicamente determinada pelo posto e pelo índice. A seguir estudamos a classificação, mediante posto e índice, para uma forma quadrática binária nas variáveis x e y e coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Neste caso as possibilidades de combinações r e s são, respectivamente:

- (i) $u^2 + v^2$ (posto 2, índice 2);
- (ii) $u^2 - v^2$ (posto 2, índice 0);
- (iii) $-u^2 - v^2$ (posto 2, índice -2);
- (iv) u^2 (posto 1, índice 1);
- (v) $-u^2$ (posto 1, índice -1);
- (vi) 0 (posto 0, índice 0).

Esta classificação é obtida, sobretudo, analisando o determinante da matriz da forma quadrática binária

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

ou seja, analisando a possibilidade de $ac - b^2 = 0$, ou melhor, analisando o conjunto das ternas $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : ac - b^2 = 0$, este conjunto é conhecido como **Cone Discriminante**.

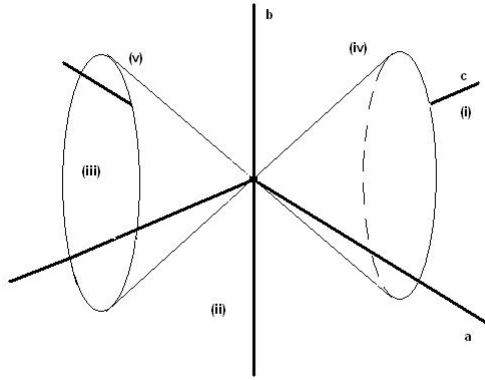


Figura 2.1: Cone Discriminante

Observe que, quando $ac - b^2 = 0$, temos

$$\left[x\sqrt{a} + \frac{b}{\sqrt{a}}y\right]^2 = ax^2 + 2bxy + \frac{b^2}{a}y^2 = q(x, y).$$

Portanto, se $ac - b^2 = 0$, podemos reduzir $q(x, y)$ para a forma:

- (iv) quando a e c são números positivos;
- (v) quando a e c são números negativos;
- (vi) quando a, b e c são iguais a zero.

Por outro lado, $ac - b^2 \neq 0$, temos

- (i) quando $b^2 - ac < 0$ e $a > 0$ (interior da metade do cone que está no lado positivo);
- (ii) quando $b^2 - ac > 0$ (lado de fora do cone);
- (iii) quando $b^2 - ac < 0$ e $a < 0$ (outra metade interior do cone no lado negativo).

2.3 Forma Binária Cúbica

Uma **forma cúbica** de n variáveis $x_1, \dots, x_n$ é uma aplicação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{C}(x) = \sum_{ijk} \lambda_{ijk} x_i x_j x_k,$$

onde $\lambda_{ijk} \in \mathbb{R}$, $\forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ e x denota a n -upla $(x_1, \dots, x_n)$.

A seguir, classificamos as formas binárias cúbicas nas variáveis x e y ,

$$\mathcal{C}(x, y) = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3$$

mediante o estudo de suas possíveis raízes reais, ou seja, através da análise da estrutura do conjunto

$$R_A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3 = 0\},$$

onde $A = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$.

Observe ainda que para cada $A \in \mathbb{R}^4$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, se $(x, y) \in R_A$ então $(\lambda x, \lambda y) \in R_A$, em outras palavras, se (x, y) é uma raiz de $\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3$ então todos os pontos da reta $\{(\lambda x, \lambda y), \lambda \in \mathbb{R}\}$ que passam pela origem também o são.

No intuito de descrever todas as raízes de $\mathcal{C}(x, y)$ procuramos interseções de R_A com subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ previamente escolhidos (estas escolhas podem ser justificadas pela geometria projetiva). O primeiro subconjunto a considerar é a reta $x = 1$. De fato, se $(u, v) \in R_A \cap \{(1, y), y \in \mathbb{R}\}$ então

$$(u, v) \in P_A(y) = \{y \in \mathbb{R} : \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 = 0\}.$$

Observe que, exceto se $A = (0, 0, 0, 0)$, $P_A(y)$ possui no máximo três elementos y_1, y_2 e y_3 e portanto, para o caso $x = 1$, temos as seguintes retas de raízes:

$$R_1 = \{(\lambda, \lambda y_1), \lambda \in \mathbb{R}\};$$

$$R_2 = \{(\lambda, \lambda y_2), \lambda \in \mathbb{R}\};$$

$$R_3 = \{(\lambda, \lambda y_3), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Agora procuramos a interseção de $P_A(y)$ com a reta $x = 0$, isto é a interseção de $P_A(y)$ com o eixo y . Note que se $(u, v) \in P_A(y) \cap \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$ então (u, v) é uma raiz do polinômio de grau dois

$$\alpha + \beta y + \gamma y^2.$$

Se λ_4 e λ_5 são raízes de tal polinômio temos que (u, v) pertence a uma das seguintes retas de raízes

$$R_4 = \{(0, \lambda y_4), \lambda \in \mathbb{R}\};$$

$$R_5 = \{(0, \lambda y_5), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto R_A pode ser a interseção combinada envolvendo os seis conjuntos abaixo (a origem e as retas de raízes)

$$R_0 = \{(0, 0)\};$$

$$R_1 = \{(\lambda, \lambda y_1), \lambda \in \mathbb{R}\};$$

$$R_2 = \{(\lambda, \lambda y_2), \lambda \in \mathbb{R}\};$$

$$R_3 = \{(\lambda, \lambda y_3), \lambda \in \mathbb{R}\};$$

$$R_4 = \{(0, \lambda y_4), \lambda \in \mathbb{R}\};$$

$$R_5 = \{(0, \lambda y_5), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Assim temos as seguintes possibilidades para R_A de acordo com as interseções combinadas não vazias:

- (i) três retas raízes distintas;
- (ii) única reta raiz (real);
- (iii) três retas raízes, sendo que duas são retas coincidentes;
- (iv) três retas raízes coincidentes;
- (v) o plano todo, caso $A = (0, 0, 0, 0)$.

A partir destas possibilidades fazemos a classificação para forma binária cúbica, por meio de mudança de coordenadas adequadas (note que mudança de coordenadas não altera o comportamento das raízes) . Por exemplo, no caso (i), podemos desenhar (vide figura a seguir) um paralelogramo "unitário".

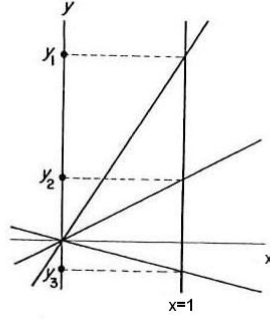


Figura 2.2: Caso três retas

Desta forma as retas raízes podem ser definidas pelas equações

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ u - v = 0 \end{cases}$$

Logo, a forma binária cúbica pode ser reduzida a

$$\mathcal{C}(u, v) = u.v.(u - v).$$

Mas ainda temos que explorar as possíveis fatorações $\mathcal{C}(u, v)$ em único termo cúbico, termo(s) linear(es) combinados com termo quadrático. Com isto e fazendo uso da classificação das formas binárias quadradas obtemos:

(a) $(Lu + Mv)(u^2 - v^2);$

(b) $(Lu + Mv)u^2;$

(c) $(Lu + Mv)(u^2 + v^2).$

Agora podemos fatorar (a) como:

$$(Lu + Mv)(u - v)(u + v);$$

a menos que $(Lu + Mv)$ seja um escalar múltiplo de $(u - v)$ ou $(u + v)$.

Se $(Lu + Mv)$ é um escalar múltiplo de $(u - v)$ ou de $(u + v)$ podemos considerar $L = M = c$ ou $L = -M = c$. Escrevendo $U = (u \pm v)c^{\frac{-1}{3}}$, $V = vc^{\frac{-1}{3}}$, obtemos que U^2 divide c e portando recaímos no caso b).

No caso b), se $M \neq 0$ consideramos as novas coordenadas:

$$U = Lu + Mv, V = u$$

resultando na expressão UV^2 . Se $M = 0$ podemos fazer a seguinte mudança de coordenadas

$$U = L^{\frac{-1}{3}}u, V = u$$

dando a $\mathcal{C}$ a forma reduzida U^3

No caso c), se L e M não são ambos nulos então uma mudança de escala e de eixos reduzem $\mathcal{C}$ na forma $(U^2 + V^2)V$. Se não, teremos a rotação dos eixos pela mudança:

$$w = \frac{Lv - Mu}{\sqrt{L^2 + M^2}} \text{ e } z = \frac{Lv + Mu}{\sqrt{L^2 + M^2}}$$

que após manipulações algébricas temos:

$$\mathcal{C}(x, y) = \sqrt{L^2 + M^2(w^2 + z^2)}z$$

e a mudança de escala resultará na forma reduzida $(U^2 + V^2)V$.

Portanto, com uma mudança de coordenadas adequadas reduzimos qualquer forma cúbica homogênea diferente de zero em uma das expressões que tem interpretações geométricas distintas:

(i) $(U - V)UV;$

(ii) $(U^2 + V^2)V;$

(iii) $U^2V;$

(iv) $U^3.$

3 Topologia e Funções de Várias Variáveis

Neste capítulo tratamos da diferenciabilidade de funções de várias variáveis. Para este propósito inicialmente estudamos alguns conceitos topológicos sobre $\mathbb{R}^n$. Sugermos a referência bibliográfica [5] para mais detalhes sobre este tema.

3.1 Topologia do Espaço Euclidiano

O **produto interno canônico** do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, é dado por:

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n,$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ são vetores de $\mathbb{R}^n$.

Para este produto interno, dado $x \in \mathbb{R}^n$, definimos a **norma euclidiana**, $\|x\|$, por:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Ou seja, $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$, de modo que $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $\|x\| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ dizem-se **ortogonais** quando $\langle x, y \rangle = 0$

A norma euclidiana possui as seguintes propriedades:

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}, (|\alpha| \text{ significa o valor absoluto do número real } \alpha)$, tem-se:

N1: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

N2: $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \|x\|$;

N3: $x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

De um modo geral, uma **norma** num espaço vetorial E é qualquer função real $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpre as condições N1, N2 e N3 acima.

Além da norma euclidiana, há uma infinidade de normas que se pode considerar no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, ela é a mais natural, por isso, a menos que se faça menção do contrário, adotaremos a norma euclidiana.

Há duas normas que são de manipulação formal mais simples, as quais poderemos utilizar em $\mathbb{R}^n$, quando houver conveniência. As quais são definidas por:

$$\|x\|_M = \max \{ \|x_1\|, \dots, \|x_n\| \} \text{ (Norma do Máximo),}$$

$$\|x\|_S = \|x_1\| + \dots + \|x_n\| \text{ (Norma da Soma).}$$

E são tais que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\|x\|_M \leq \|x\| \leq \|x\|_S \leq n \|x\|_M.$$

Uma norma no espaço vetorial E dá origem a uma noção de **distância** em E . Dados $x, y \in E$, a distância de x a y é definida por $d(x, y) = \|x - y\|$.

As condições N1, N2 e N3 que a norma satisfaz, implicam imediatamente nas propriedades de distância:

$\forall x, y, z \in E$

d1: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

d2: $d(x, y) = d(y, x)$

d3: $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$

Exemplo 3.1. 1. O produto interno canônico entre $(1, 2)$ e $(5, 3)$:

$$\langle (1, 2); (5, 3) \rangle = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 5 + 6 = 11.$$

$$2. \|(3, 2, 7)\|^2 = \langle (3, 2, 7); (3, 2, 7) \rangle = 9 + 4 + 49 = 62 \text{ e } \|(3, 2, 7)\| = \sqrt{62}.$$

$$3. d((1, 3, 5), (2, 5, 8)) = \|(1, 3, 5) - (2, 5, 8)\| = \|(-1, -2, -3)\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}.$$

A **bola aberta** de centro em um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a é menor do que r .

Notação: $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| < r\}$

Analogamente, definimos a **bola fechada** $B[a, r]$ e a **esfera** $S[a, r]$, ambas com centro em a e raio r , como sendo:

$$B[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| \leq r\} \text{ e } S[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| = r\}.$$

Observe que $B[a, r] = B(a, r) \cup S[a, r]$

Note que, se $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ então a bola $B[a, r] \subset \mathbb{R}^n$, definida pela norma $\|x\|_M = \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\}$ é o produto cartesiano $B[a, r] = [a_1 - r, a_1 + r] \times \dots \times [a_n - r, a_n + r]$. Com efeito, $\|x - a\| < r \Leftrightarrow \|x_1 - a_1\| < r, \dots, \|x_n - a_n\| < r$. Do mesmo modo, usando ainda a norma do máximo, temos $B(a, r) = \prod_{i=1}^n (a_i - r, a_i + r)$ para a bola aberta. Estas propriedades tornam a norma do máximo conveniente em relação ao produto cartesiano.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. O **segmento de reta** de extremos x, y é o conjunto

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\}.$$

Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **convexo** quando contém qualquer segmento de reta cujos extremos pertençam a X , ou seja:

$$x, y \in X \Rightarrow [x, y] \subset X.$$

Exemplo 3.2. 1. Todo subespaço vetorial $E \subset \mathbb{R}^n$ é convexo;

2. Toda variedade afim $a + E = \{a + x; x \in E\}$ (onde $E \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial) é convexa;

3. Se $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ são convexos então o produto cartesiano $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é convexo.

4. $X = \mathbb{R}^n - \{0\}$ não é convexo, pois tem-se $e_1 \in X$, $-e_1 \in X$ mas $0 \in [-e_1, e_1]$.

5. É possível mostrar que toda bola aberta $B \subset \mathbb{R}^n$ é convexa.

Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **limitado** quando existe um número real $c > 0$ tal que $\|x\| < c$, para todo $x \in X$. Isto equivale a dizer que X está contido na bola fechada de centro na origem e raio c .

Se existir alguma bola $B[a, r]$, de centro arbitrário, contendo X então, para todo $x \in X$, tem-se $\|x - a\| \leq r$. Pondo-se $c = r + \|a\|$ temos então $\|x\| < c$, logo X é limitado. Assim, um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado se, e somente se, está contido em alguma bola.

Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, a i -ésima projeção $\Pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $\Pi_i(x) = x_i$ onde x_i é a i -ésima coordenada de x . Deste modo, um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado se, e somente se, suas projeções $X_1 = \Pi_1(X), \dots, X_n = \Pi_n(X)$ são conjuntos limitados em $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.3. Em $\mathbb{R}^2$ tomando-se a norma euclidiana, as bolas chamam-se discos (abertos ou fechados) e as esferas reduzem-se a círculos.

Em $\mathbb{R}^3$, a norma euclidiana define no espaço bolas e esferas que correspondem às imagens que fazemos delas.

Seja X um subconjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Um ponto $a \in X$ chama-se **ponto interior** a X quando é centro de alguma bola aberta contida em X , ou seja, quando existe $\delta > 0$ tal que $\|x - a\| < \delta \Rightarrow x \in X$.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se **aberto** quando todos seus pontos são interiores, isto é, quando para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset X$.

Os conjuntos abertos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ têm as seguintes propriedades:

1. O conjunto vazio $\emptyset$ e o espaço $\mathbb{R}^n$ são abertos;
2. A interseção $A = A_1 \cap \dots \cap A_k$ de um número finito de conjuntos abertos $A_1, \dots, A_k$ é um conjunto aberto;
3. A reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de uma família qualquer $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos abertos A_λ é um conjunto aberto.

Exemplo 3.4. Toda bola aberta de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

De fato, mostremos que todo ponto pertencente a bola aberta de centro em $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é ponto interior.

Seja $x \in B(a, r) \Rightarrow \|x - a\| < r$

Tomemos $s = r - \|x - a\|$.

Se $x = a$ então $B(x, s) = B(a, r)$

Se $x \neq a$ então $\|x - a\| > 0$, logo para $s > 0$, temos $s < r$, pois $\|x - a\| < r$ (já que $x \in B(a, r)$). Provemos que $B(x, s) \subset B(a, r)$.

Seja $y \in B(x, s)$. Mostremos que $y \in B(a, r)$.

Como $y \in B(x, s)$ temos que $\|y - x\| < s$, queremos mostrar que $\|y - a\| < r$.

Da desigualdade triangular segue que: $\|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\|$

$\|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < s + \|x - a\| \stackrel{*}{=} r - \|x - a\| + \|x - a\| = r$

Portanto, $\|y - a\| < r$. Logo, $y \in B(a, r)$

Assim toda bola aberta de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.5. O intervalo da reta (a, b) é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$, pois $(a, b) = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{|b-a|}{2}\right)$ e pelo exemplo anterior, toda bola aberta é um conjunto aberto.

É possível mostrar que todo conjunto aberto em $\mathbb{R}$ é um intervalo aberto ou uma união de intervalos abertos.

3.2 Diferenciabilidade

Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, onde U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, uma aplicação. Escrevendo $f(x) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, vemos que cada componente f_i é uma função $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$.

Dizemos que f é **de classe C^∞** (ou **suave**) quando as derivadas parciais de f_i , de todas as ordens existem e são contínuas em U , $\forall i \in \{1, \dots, p\}$.

Observe então que, se f é de classe C^∞ , pelo Teorema de Schwarz, as derivadas mistas de uma função coordenada são iguais. Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, onde U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, uma aplicação de classe C^∞ e $v \in U$. Definimos a matriz

$$J[f](v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(v) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(v) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(v) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(v) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(v) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(v) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(v) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(v) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(v) \end{bmatrix},$$

onde todas as derivadas parciais são calculadas em v , como **a matriz jacobiana de f em v** .

A aplicação linear $Df(v) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ associada à matriz jacobiana de f em v é chamada **a derivada** (ou **a diferencial**) de f em v .

Observamos que no caso em que $p = 1$ esta aplicação linear $Df(v)$ é identificada ao vetor $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(v), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(v) \right)$.

Por exemplo, a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2) = (\sin(x_1 x_2), \exp x_1^2, \cos(x_1 - x_2^4 + 3))$ é uma aplicação de classe C^∞ , pois as funções seno, cosseno, exponencial e polinomial são de classe C^∞ e portanto a composição dessas funções também é de classe C^∞ .

Observe que a composição de duas aplicações C^∞ , possivelmente restrita a um domínio (aberto) menor é de classe C^∞ .

Sejam U e V subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^m$. Uma aplicação $\phi : U \longrightarrow V$ é chamada difeomorfismo se

1. ϕ é bijetora
2. ϕ e ϕ^{-1} são de classe C^∞ .

Enunciamos agora um teorema do cálculo avançado que nos será útil:

Teorema 3.1. (Teorema da Função Inversa) *Seja $\phi : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^∞ , com U_1 aberto em $\mathbb{R}^m$ e $u \in U_1$. Se a matriz jacobiana de ϕ em u for não singular, existe um aberto $U \subseteq U_1$, tal que $u \in U$ e $\phi : U \longrightarrow \phi(U)$ é um difeomorfismo.*

*Dizemos que ϕ é um **difeomorfismo local** em u se satisfizer as hipóteses do Teorema da Função Inversa no ponto u .*

Deste Teorema seguem os seguintes Corolários,

Corolário 3.1. *Dadas duas aplicações quaisquer, $g : U_1 \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow V_1 \subseteq \mathbb{R}^p$ e $f : U_2 \subseteq \mathbb{R}^p \longrightarrow V_2 \subseteq \mathbb{R}^m$, U_i, V_i abertos em seus respectivos conjuntos, $i = 1, 2$, e um ponto $a \in U_1$. Suas matrizes jacobianas satisfazem*

$$J[f \circ g](a) = J[f](g(a)) \circ J[g](a).$$

Demonstração. Denotando

$$\begin{aligned} h : U_1 &\longrightarrow V_2 \\ t &\longrightarrow (f \circ g)(t) = f(g(t)). \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial f_i}{\partial g_1} \frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f_i}{\partial g_2} \frac{\partial g_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial g_p} \frac{\partial g_p}{\partial x_j} \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$, e portanto

$$J[f \circ g](a) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_1}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(a) & \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_1}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_2}(a) & \cdots & \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_1}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(a) \\ \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_2}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(a) & \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_2}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_2}(a) & \cdots & \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_2}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_m}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(a) & \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_m}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_2}(a) & \cdots & \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_m}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde todas as derivadas $\frac{\partial f_i}{\partial g_k}$ e $\frac{\partial g_k}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p$, são calculadas em $g(a)$ e a respectivamente.

Por outro lado, observe que

$$J[f](g(a)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(g(a)) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(g(a)) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(g(a)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(g(a)) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(g(a)) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(g(a)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(g(a)) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(g(a)) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p}(g(a)) \end{bmatrix}$$

e

$$J[g](a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

onde todas as derivadas $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ e $\frac{\partial g_k}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p$, são calculadas em $g(a)$ e a , respectivamente.

Logo

$$\begin{aligned} J[f](g(a)) \cdot J[g](a) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(g(a)) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(g(a)) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(g(a)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(g(a)) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(g(a)) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(g(a)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(g(a)) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(g(a)) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(g(a)) \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(a) & \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_2}(a) & \dots & \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(a) \\ \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(a) & \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_2}(a) & \dots & \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(a) & \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_2}(a) & \dots & \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \quad (2) \end{aligned}$$

onde todas as derivadas $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ e $\frac{\partial g_k}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p$, são calculadas em $g(a)$ e a , respectivamente.

Como $(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t), \dots, g_p(t)) \Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial g_k}(g(a)) \frac{\partial g_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(g(a)) \frac{\partial g_k}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p$. Comparando (1) e (2) temos que

$$J[f \circ g](a) = J[f]g(a) \circ J[g](a).$$

□

Corolário 3.2. Dado um difeomorfismo $\phi : U \longrightarrow V$, U, V abertos de $\mathbb{R}^n$, o posto da matriz $J[\phi](a)$ é igual a n , para todo $a \in U$.

Demonstração. Demonstrar que $J[\phi](a)$ tem posto n é equivalente a demonstrar que a aplicação linear definida por $J[\phi](a)$ é injetora.

Observe então que, como ϕ é um difeomorfismo, existe uma função $\phi^{-1} : V \longrightarrow U$ tal que $(\phi \circ \phi^{-1})(t) = \text{Id}(t) = t, \forall t \in V$ e $(\phi^{-1} \circ \phi)(t) = \text{Id}(t) = t, \forall t \in U$, e portanto, pelo corolário anterior ,

$$J[\phi^{-1} \circ \phi](a) = J[\text{Id}](a) = \text{Id}_{n \times n} \text{ e } \Rightarrow J[\phi^{-1}](\phi(a)) \cdot J[\phi](a) = \text{Id}_{n \times n}.$$

O que nos diz que $J[\phi^{-1}](\phi(a))$ é uma aplicação sobrejetora e $J[\phi](a)$ é uma aplicação injetora, ou seja, como já observamos, $J[\phi(a)]$ tem posto n . $\square$

Exemplo 3.6. 1. Consideremos um caso de dimensão 1: Seja $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ (U aberto de $\mathbb{R}$ contendo o ponto u) e suponha que a matriz jacobiana de ϕ em u seja não singular. Neste caso, o jacobiano de ϕ em u é dado por sua derivada em u . Logo, essa matriz é não singular se, e somente se, $\phi'(u) \neq 0$. Tome por exemplo a função $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = x^k$, para algum inteiro positivo k . Logo $\phi'(x) = kx^{k-1}$ e portanto, existe um difeomorfismo local em 0 se, e somente se, $k = 1$. Porém, para qualquer outro valor de x tal que $x \neq 0$, observe que $\phi'(x) \neq 0$ e portanto temos um difeomorfismo local neste ponto.

2. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(x, y) = (x, y^2)$. A matriz jacobiana de ϕ em um ponto (x, y) é então dada por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$ que é não singular se, e somente se, $y \neq 0$. Assim, ϕ é um difeomorfismo local em todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $y \neq 0$. Esta aplicação é chamada “dobro”o plano (x, y) é “dobrado”ao longo da reta $y = 0$.

Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$, onde U é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^m$ de classe C^∞ . Um ponto $x \in \mathbb{R}^m$ é chamado **ponto regular de f_x** , e f é chamada **submersão em x** se $Df(x)$ é uma aplicação sobrejetora, ou equivalentemente, se a matriz jacobiana de f em x tem posto p (o que só é possível se $p \leq m$).

Um **valor regular de f** é um ponto $c \in \mathbb{R}^p$ tal que, para todo $x \in D_f$, com $f(x) = c$, x é um ponto regular.

Um **ponto crítico** é um ponto $x \in \mathbb{R}^m$ para o qual o posto da matriz $J[f](x)$ não atinge seu valor máximo, a saber $\min(m, p)$. De maneira análoga, definimos um **valor crítico** como sendo qualquer ponto $f(x) \in \mathbb{R}^p$ tal que x é um ponto crítico.

Observe então que, para $m \geq p$, crítico e não regular significam as mesmas coisas, já que $\min(m, p) = p$. Se $p = 1$, a condição para que x_0 seja um valor não regular é que em x_0 , $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) = 0$.

Ainda, pela definição, se dado $c \in \mathbb{R}^p$, não existir $x \in \mathbb{R}^m$ tal que $f(x) = c$ então c automaticamente é um valor regular, pois não há pontos $x \in \mathbb{R}^m$; $f(x) = c$ para verificarmos se x é um ponto regular.

Exemplo 3.7. 1. Seja $m = p = 1$, $f(x) = x^2$. Assim, todo valor $c \neq 0$ é um valor regular, já que $J[f](x) = [2x]$ que tem posto 1 se, e somente se, $x \neq 0$. O único ponto não regular de f é 0.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$. Logo

$$J[f](x, y) = \begin{bmatrix} 4x & 6y \end{bmatrix}$$

que tem posto 1 a menos que $x = y = 0$. Assim, qualquer valor $c \in \mathbb{R}^*$ é valor regular de f . Observe que, para $c > 0$, $f^{-1}(0)$ é uma elipse no plano.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$. Então

$$J[f](x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 + y & 3y^2 + x \end{bmatrix}$$

e $J[f](x, y)$ não atinge posto máximo nos pontos que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ 3y^2 + x = 0 \end{cases}$$

que tem, como solução, os pontos $(0, 0)$ e $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. Concluimos portanto, que $(0, 0)$ e $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ são pontos não regulares de f (e também pontos críticos). Como $f(0, 0) = 0$ e $f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = \frac{1}{27}$, temos que qualquer valor de c diferente de 0 e $\frac{1}{27}$ é valor regular de f . Por outro lado, de acordo com a observação feita na definição, observe que 0 é valor regular de $f|(\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})$ e $\frac{1}{27}$ é valor regular de $f|(\mathbb{R}^2 - \{(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})\})$.

Seja f uma aplicação de U em $\mathbb{R}$, com $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. A matriz abaixo é denominada a matriz Hessiana de f no ponto x_0 , $H(f)|_{x_0}$.

$$H(f)|_{x_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \end{bmatrix}.$$

Ainda, um ponto crítico de f é um ponto **não-degenerado** se $\det H(f)|_{x_0} \neq 0$ e, **degenerado** caso contrário, isto é, $\det H(f)|_{x_0} = 0$.

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe $\mathbb{C}^\infty$, a **Serie de Taylor** ao redor do ponto $x_0 \in U$ - denotando $x_0 = (x_{0_1}, \dots, x_{0_n})$ e $x = (x_1, \dots, x_n)$ - é dada por:

$$f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0).x_i.x_j + \dots +$$

$$\frac{1}{r!} \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}}(x_0).x_{i_1}.x_{i_2} \dots .x_{i_r} + \dots$$

Uma vez que f é de classe $\mathbb{C}^\infty$, temos que esta série converge para $f(x_0 + x)$, $\forall x \in U_{x_0}$, onde U_{x_0} é uma vizinhança de x_0 .

Por exemplo, se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_0 = (0, 0)$, temos que a série de Taylor de f é da por:

$$f(0, 0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).y \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0).x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0).x.y + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).y.x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0).y^2 \right) + \dots$$

4 Geometria de Catástrofes

A Teoria da Catástrofe idealizada pelo matemático francês René Thom, como dito na introdução desta, tem por significado mudanças súbitas que ocorrem por exemplo no arrembentar de uma onda na praia, no rolar de uma pedra, na mudança súbita de comportamento de um animal quando muda sua trajetória quando sua ação é de presa ou predador.

Neste capítulo apresentamos objetos clássicos em Teoria de Singularidades e das Catástrofes. Iniciamos com a definição de germe de aplicação C^∞ .

Dadas duas aplicações de classe C^∞ , $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $U_i \subset \mathbb{R}^n$, aberto, $i \in \{1, 2\}$. Dizemos que $f_1 \sim f_2$ se, e somente se, existir uma vizinhança U de x em $U_1 \cap U_2$ tal que as restrições $f_1|_U$ e $f_2|_U$ coincidam, isto é, $f_1(z) = f_2(z), \forall z \in U$. As classes de equivalência sobre essa relação são chamadas **germes de aplicações** em x , e um elemento da classe de equivalência é chamado representante do germe em x . Frequentemente, é usada a notação $f : (U, x) \rightarrow (\mathbb{R}, f(x))$. Chamamos U de fonte e $\mathbb{R}$ de meta.

O tema fundamental da Teoria da Catástrofe é a classificação de pontos críticos de germes de aplicação C^∞ . Para germes de aplicação $f, f : (U, x) \rightarrow (\mathbb{R}, f(x))$, podemos dividir estes pontos críticos em duas grandes classes: os pontos críticos degenerados e os pontos críticos não-degenerados, já definidos anteriormente. Para os pontos críticos não-degenerados aplicamos a classificação das formas binárias quadráticas para obter o lema de Morse, a saber: *Seja $f : (U, x) \rightarrow (\mathbb{R}, f(x))$ um germe de aplicação C^∞ . A origem é um ponto crítico não-degenerado se, e somente se, existe um difeomorfismo local ϕ , numa vizinhança da origem, tal que $\phi(0) = 0$ e $(f \circ \phi)(y) = -y_1^2 - \dots - y_s^2 + y_{s+1}^2 + \dots + y_n^2$, em torno da origem, onde s denota o índice de f em 0.*

4.1 Teorema de Thom

A classificação dos pontos críticos degenerados é mais complexa e delicada. Esta é apresentada pelo Teorema de Thom que tratamos a seguir (para mais detalhes [1], pagina 121). Para tanto, dada uma aplicação C^∞ , dizemos que duas famílias à r -parâmetros de f , F e G , são **equivalentes**, em torno da origem, se existir os seguintes objetos:

- um difeomorfismo

$$l : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^r$$

- uma aplicação C^∞

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, u) &\longrightarrow h(x, u) \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} h_u : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longrightarrow h_u(x) = h(x, u) \end{aligned}$$

é difeomorfismo

- uma aplicação C^∞

$$d : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$$

tais que:

$$G(x, u) = F(h_u(x), l(u)) + d(u), \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$$

na vizinhança da origem.

Ainda, dizemos que a família F à r -parâmetros de f é **estável** se

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R},$$

é equivalente a qualquer família

$$f + \varepsilon : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$$

onde

$$\varepsilon : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$$

é uma família suficientemente ‘próxima’ de f (no sentido da topologia de Whitney, conforme [3]).

Com estas observamos estamos aptos ao anúncio do Teorema de Thom. Observamos que embora o resultado acima não seja demonstrado aqui, seu início se dá pela classificação de formas binárias críticas apresentadas anteriormente, com a qual é possível determinar as duas primeiras catástrofes cuspóides presentes no enunciado do teorema: a Dobra e Cúspide.

Teorema 4.1. (Teorema de Thom) *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, considere ainda uma aplicação, f , C^∞ , de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. Se uma família a r -parâmetros de f é estável então esta família é equivalente a uma das seguintes formas normais. Observamos que cada $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ e $(t_1, t_2, \dots, t_r) \in \mathbb{R}^r$. O símbolo M denotado como a aplicação de Morse da forma:*

$$(u_2^2 + \dots + u_2^2 - u_{i+1}^2 - u_2^n) \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$\text{e, } N \text{ a função: } (u_3^2 + \dots + u_2^2 - u_{i+1}^2 - u_2^n) \quad (2 \leq i \leq n).$$

Catástrofe Cuspóides

1. Dobra - (A_2)

$$u_1^3 + t_1 u_1 + (M)$$

2. Cúspide - (A_3)

$$\pm(u_1^4 + t_2 u_1^2 + t_1 u_1) + (M)$$

3. Rabo de Andorinha - (A_4)

$$(u_1^5 + t_3 u_1^3 + t_2 u_1^2 + t_1 u_1) + (M)$$

4. Borboleta - (A_5)

$$\pm(u_1^6 + t_4 u_1^4 + t_3 u_1^3 + t_2 u_1^2 + t_1 u_1) + (M)$$

5. Wigman - (A_6)

$$(u_1^7 + t_5 u_1^5 + t_4 u_1^4 + t_3 u_1^3 + t_2 u_1^2 + t_1 u_1) + (M)$$

Catástrofes Umbílicas

6. Elíptica - (D_4^-)

$$(u_1^2 u_2 - u_2^3 + t_2 u_2 + t_1 u_1) + (N)$$

7. Hiperbólica - (D_4^+)

$$(u_1^2 u_2 + u_2^3 + t_2 u_2 + t_1 u_1) + (N)$$

8. Parabolóide - (D_5)

$$\pm(u_1^2 u_2 - u_2^4 + t_4 u_2^2 + t_3 u_1^2 + t_2 u_2 + t_1 u_1) + (N)$$

9. Segunda Elíptica - (D_6^-)

$$(u_1^2 u_2 - u_2^5 + t_5 u_2^3 + t_4 u_2^2 + t_3 u_1^2 + t_2 u_2 + t_1 u_1) + (N)$$

10. Segunda Hiperbólica - (D_6^+)

$$(u_1^2 u_2 + u_2^5 + t_5 u_2^3 + t_4 u_2^2 + t_3 u_1^2 + t_2 u_2 + t_1 u_1) + (N)$$

11. Segunda Parabolóide - (E_6)

$$\pm(u_1^3 + u_2^4 + t_5 u_1 u_2^2 + t_4 u_2^2 + t_3 u_1 u_2 + t_2 u_2 + t_1 u_1) + (N)$$

É possível mostrar que dentre tais formas as seguintes tem codimensão menor ou igual a 4 (de acordo com [3]).

1. Dobra

$$u_1^3 + t_1 u_1 + (M)$$

2. Cúspide

$$\pm(u_1^4 + t_2 u_2^2 + t_1 u_1) + (M)$$

3. Rabo de Andorinha

$$(u_1^5 + t_3 u_1^3 + t_2 u_1^2 + t_1 u_1) + (M)$$

4. Borboleta

$$\pm(u_1^6 + t_4 u_1^4 + t_3 u_1^3 + t_2 u_1^2 + t_1 u_1) + (M)$$

5. Elíptica Umbílica

$$(u_1^2 u_2 - u_2^3 + t_2 u_2 + t_1 u_1) + (N)$$

6. Hiperbólica Umbílica

$$(u_1^2 u_2 + u_2^3 + t_2 u_2 + t_1 u_1) + (N)$$

7. Parabolóide Umbílica

$$\pm(u_1^2 u_2 - u_2^4 + t_4 u_2^2 + t_3 u_1^2 + t_2 u_2 + t_1 u_1) + (N)$$

A nomenclatura para estas formas são escolhidas de acordo com o comportamento, aspecto de seu Conjunto de Bifurcação. A partir deste momento, exploraremos o Conjunto de Bifurcação de cada forma não-umbílicas de codimensão menor ou igual a 4, quais sejam: Dobra, Cúspide, Rabo de Andorinha e Borboleta.

Para este fim, definimos os seguintes objetos: seja $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$ uma família de funções tal que para cada $c \in \mathbb{R}^r$, V_c é a função dada por $V_c(x) := V(x, c) \in \mathbb{R}$.

Uma **variedade de catástrofe** M é um subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ definido por:

$$DV_c(x) = 0,$$

ou seja, o conjunto de todos os pontos críticos de V_c . Logo,

$$M = \{(x, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r : DV_c(x) = 0\}.$$

O conjunto M é uma variedade desde que V seja um desdobramento miniversal, embora não exploramos esta vertente em nosso trabalho, observamos que isto se dá como uma consequência da teoria de Transversalidade.

É denominada **aplicação catástrofe**, uma aplicação χ dada pela restrição à variedade M da projeção $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^r$, definida por $\pi(x, c) = c$.

Neste contexto, o **conjunto singular** S é o conjunto dos pontos de M tais que o posto da transformação linear derivada D_χ é menor que r . A imagem $\chi(S)$ é chamado conjunto das Bifurcações, denotado por B .

4.2 Sobre as Catástrofes: Dobra, Cúspide, Rabo de Andorinha e Borboleta

4.2.1 Dobra

A catástrofe dobra é a catástrofe mais simples entre as sete exploradas. Para este caso consideramos a aplicação **base**

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{3}x^3 \end{aligned}$$

e a seguinte deformação

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, a) &\longmapsto V_a(x) = V(x, a) := \frac{1}{3}x^3 + ax \end{aligned}$$

A variedade, M_1 , de catástrofe DOBRA é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, definido por:

$$M_1 = \{(x, a) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial}{\partial x} V_a(x) = 0\}$$

Veja que $\frac{\partial}{\partial x} V_a(x) = 0$, implica $x^2 + a = 0$.

Logo,

$$M_1 = \{(x, a) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + a = 0\}.$$

Reescrevendo M_1 temos que:

$$M_1 = \{(x, -x^2), x \in \mathbb{R}\}$$

Nosso objetivo é explorar a geometria desta variedade analisando seu conjunto de Bifurcação. Para isto exploramos a série de Taylor de $V_a(x)$ para pontos pertencentes ao conjunto Singular M_1 , denotado por S_1 .

Temos que:

$$V_a(x + X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + 0.$$

onde $a_i = \frac{1}{i!}(V_a)^{(i)}(x)$.

$$V_a(x + X) = V_a(x) + (x^2 + a)X + xX^2 + \frac{1}{3}X^3 + 0.$$

Como $(x, a) \in S_1$, segue que:

$$V_a(x + X) = \left(\frac{x^3}{3} + (-x^2)x \right) + 0X + xX^2 + \frac{1}{3}X^3 + 0.$$

Logo,

$$V_a(x + X) = \frac{X^3}{3} + xX^2 + 0 \cdot X + \left(-\frac{2}{3}x^3\right).$$

Portanto,

$$\frac{1}{3}(x + X)^3 + (-x^2)(x + X) = V_a(x + X) = \frac{1}{3}X^3 + xX^2 + 0X + \left(-\frac{2}{3}x^3\right).$$

Observe que analisando a matriz Hessiana vemos que o termo quadrático xX^2 é não-degenerado se $x \neq 0$, mas é degenerado se $x = 0$. Assim $S_1 = \{0\}$ e $B_1 = \{(0, 0)\}$, onde B_1 denota o conjunto de Bifurcação; o ponto $(0, 0)$ é chamado **ponto de Dobra**. Por outro lado, quando $x > 0$ o termo quadrático é positivo e V_a tem um ponto de mínimo e quando $x < 0$ o termo quadrático é negativo e V_a tem um ponto de máximo.

A geometria de M_1 esta resumida na figura 4.1, abaixo. Veja que a Variedade Catástrofe Dobra é uma parábola; o conjunto de Bifurcação é um único ponto no qual, à sua esquerda, há dois comportamentos, um ponto de máximo e um ponto de mínimo, e, à sua direita, não há nenhum ponto.

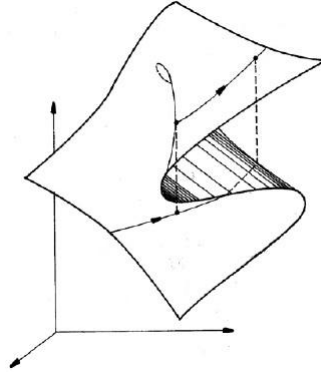


Figura 4.1: Catástrofe Dobra

4.2.2 Cúspide

Considere a seguinte aplicação **base** para esta catástrofe:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{4}x^4 \end{aligned}$$

com sua respectiva deformação:

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, a, b) &\longmapsto V_{ab}(x) = V(x, a, b) := \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx. \end{aligned}$$

A variedade, M_2 , de catástrofe CÚSPIDE é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, definido por:

$$M_2 = \{(x, a, b) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial}{\partial x} V_{ab}(x) = 0\}$$

Veja que $\frac{\partial}{\partial x} V_{ab}(x) = 0$, implica $x^3 + ax + b = 0$.

Logo,

$$M_2 = \{(x, a, b) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + ax + b = 0\}.$$

Reescrevendo M_2 temos que:

$$M_2 = \{(x, a, -x^3 - ax), x, a \in \mathbb{R}\}.$$

Nosso objetivo é explorar a geometria desta variedade analisando seu conjunto de Bifurcação. Para isto exploramos a série de Taylor de $V_{ab}(x)$ para pontos pertencentes ao conjunto Singular M_2 , denotado por S_2 .

Temos que:

$$V_{ab}(x + X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 + 0.$$

onde $a_i = \frac{1}{i!}(V_a)^{(i)}(x)$.

$$V_{ab}(x + X) = V_a(x) + (x^3 + ax + b)X + \left(\frac{(3x^2 + a)X^2}{2}\right)X^2 + \left(\frac{6x}{6}\right)X^3 + \left(\frac{6}{24}\right)X^4 + 0.$$

Como $(x, a, b) \in S_2$, segue que:

$$\begin{aligned} V_{ab}(x + X) &= \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + (-x^3 - ax).x\right) + (x^3 + ax + (-x^3 - ax)).X + \\ &\quad + \left(\frac{3x^2 + a}{2}\right)X^2 + \left(\frac{6x}{6}\right)X^3 + \left(\frac{6}{24}X^4\right) + 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$V_{ab}(x+X) = \frac{X^4}{4} + xX^3 + \left(\frac{3x^2}{2} + \frac{a}{2}\right)X^2 + 0X - \left(\frac{3x^4}{4} + \frac{ax^2}{2}\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \frac{(x+X)^4}{4} + \frac{a(x+X)^2}{2} - ((x+X)^3 + a(x+X)) = \\ V_{ab}(x+X) &= \frac{X^4}{4} + xX^3 + \left(\frac{3x^2}{2} + \frac{a}{2}\right)X^2 + 0X - \left(\frac{3x^4}{4} + \frac{ax^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Analisando os termos da expansão acima, para analisar o Conjunto de Bifurcação, vemos a necessidade de uma nova mudança de variáveis, considerando p, q, r os coeficientes dos termos quadrático, cúbico e quártico, temos:

$$\begin{aligned} p(a, x) &= \frac{3}{2}x^2 + \frac{a}{2} \\ q(a, x) &= x \\ r(a, x) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Isso sugere que troquemos o plano cartesiano pelo plano $r = \frac{1}{4}$ e $a(p, q)$ coordenadas. Portanto uma vez que:

$$p = \frac{3}{2}q^2 + \frac{a}{2}$$

$$2p = 3q^2 + a$$

$$a = 2p - 3q^2$$

Segue que:

$$M_2 = (q, 2p - 3q^2, -2pq + 2q^3), p, q \in \mathbb{R}.$$

Deste modo o termo quadrático da série de Taylor é degenerado, quando $p = 0$, e este representa o q -eixo no espaço (p, q) . A imagem deste tipo de ponto é uma dobra em termos do sistema original (x, a) pois: quando $p = 0$ temos:

$$\begin{aligned} x &= q \\ a &= -3q^2, \text{ ou seja, } a = -3x^2. \end{aligned}$$

Ainda, quando p é não degenerado temos um ponto de mínimo local quando $p > 0$ e um ponto de máximo local quando $p < 0$.

Quando $p = 0$, necessariamente analisamos os termos cúbico e $q \neq 0$. O termo cúbico determina o tipo do ponto crítico. Note ainda que se $p = 0$ e $q = 0$ (a origem no espaço (p, q)) o tipo do ponto crítico é determinado pelo termo X^4 .

Se $p = 0$ e $q \neq 0$, temos que $a = -3x^2$ e então o conjunto de bifurcação é o conjunto de pontos:

$$(-3x^2, 2x^3), x \in \mathbb{R}$$

ou ainda se $a = -3x^2$ e $b = 2x^3$.

Temos que:

$$\begin{aligned} 2x^3 = b &\Rightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{\frac{b}{2}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{b}{2}} \text{ e} \\ -3x^2 = a &\Rightarrow -3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = a \Rightarrow \\ -3^3 \cdot \left(\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right)^2}\right)^3 &= a^3 \Rightarrow \\ -27 \cdot \frac{b^2}{4} = a^3 &\Rightarrow -27b^2 = 4a^3 \Rightarrow 4a^3 + 27b^2 = 0. \end{aligned}$$

Logo o conjunto de Bifurcação é definido pela equação: $4a^3 + 27b^2 = 0$, o qual descreve uma cúspide. Veja a figura 4.3 abaixo.

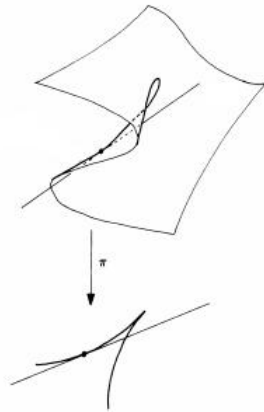


Figura 4.2: Catástrofe Cúspide

4.2.3 Rabo de Andorinha

Considere a seguinte aplicação **base** para esta catástrofe:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{5}x^5 \end{aligned}$$

com sua respectiva deformação:

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, a, b, c) &\longmapsto V_{abc}(x) = V(x, a, b, c) := \frac{1}{5}x^5 + \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx. \end{aligned}$$

A variedade, M_3 , de catástrofe RABO DE ANDORINHA é um subconjunto de $\mathbb{R}^4$, definido por:

$$M_3 = \{(x, a, b, c) \in \mathbb{R}^4 : \frac{\partial}{\partial x} V_{abc}(x) = 0\}.$$

Veja que $\frac{\partial}{\partial x} V_{abc}(x) = 0$, implica $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$.
Logo,

$$M_3 = \{(x, a, b, c) \in \mathbb{R}^4 : x^4 + ax^2 + bx + c = 0\}.$$

Reescrevendo M_3 temos que:

$$M_3 = \{(x, a, b, -x^4 - ax^2 - bx), x, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Nosso objetivo é explorar a geometria desta variedade analisando seu conjunto de Bifurcação . Para isto exploramos a série de Taylor de $V_{abc}(x)$ para pontos pertencentes ao conjunto Singular M_3 , denotado por S_3 .

Temos que:

$$V_{abc}(x + X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 + a_5X^5 + \dots$$

onde $a_i = \frac{1}{i!}(V_a)^{(i)}(x)$.

$$\begin{aligned} V_{abc}(x + X) &= V_{abc}(x) + (x^4 + ax^2 + bx + c)X + \left(\frac{4x^3 + ax + b}{2}\right)X^2 + \left(\frac{12x^2 + a}{6}\right)X^3 + \\ &\quad + \left(\frac{24x}{24}\right)X^4 + \left(\frac{24}{120}\right)X^5 + 0. \end{aligned}$$

Como $(x, a, b, c) \in S_3$, segue que:

$$V_{ab}(x + X) = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + (-x^3 - ax).x\right) + (x^3 + ax + (-x^3 - ax)).X +$$

$$+ \left(\frac{3x^2 + a}{2} \right) X^2 + \left(\frac{6x}{6} \right) X^3 \left(\frac{6}{24} X^4 \right) + 0.$$

Logo, $V_{abc}(x + X)$ é igual a

$$\frac{X^5}{5} + xX^4 + \left(2x^2 + \frac{a}{3} \right) X^3 + \left(2x^3 + ax + \frac{b}{2} \right) X^2 + 0X - \left(\frac{4x^5}{5} + \frac{2ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} \right).$$

Portanto,

$$\frac{(x + X)^5}{5} + \frac{a(x + X)^3}{3} + \frac{b(x + X)^2}{2} - ((x + X)^4 + a(x + X)^2 + bx) =$$

$$\frac{X^5}{5} + xX^4 + \left(2x^2 + \frac{a}{3} \right) X^3 + \left(2x^3 + ax + \frac{b}{2} \right) X^2 + 0X - \left(\frac{4x^5}{5} + \frac{2ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} \right).$$

Como na catástrofe anterior existe a necessidade de uma nova mudança de coordenadas. Tomando as coordenadas utilizando os coeficientes da série de Taylor como segue:

$$\text{Quadratica: } p(x, a, b) = 2x^3 + ax + \frac{b}{2}$$

$$\text{Cubica: } q(x, a, b) = 2x^2 + \frac{a}{3}$$

$$\text{Quartica: } r(x, a, b) = x$$

$$\text{Quinta: } s(x, a, b) = \frac{1}{5}$$

$$\text{Assim o hiperplano } s = \frac{1}{5} \text{ no subespaço } (p, q, r, s) \text{ é o espaço } (p, q, r)$$

Portanto, se

$$r = x$$

$$q = 2r^2 + \frac{a}{3} \rightarrow a = 3 \cdot q - 6 \cdot r^2$$

e

$$p = 2r^3 + (3 \cdot q - 6 \cdot r^2) \cdot r + \frac{b}{2} \rightarrow p = 2r^3 + 3qr - 6r^3 + \frac{b}{2}$$

$$2p = 6qr - 8r^3 + b \rightarrow b = 2p - 6qr + 8r^3$$

então

$$x(p, q, r) = r$$

$$a(p, q, r) = 3q - 6r^2 \quad (*)$$

$$b(p, q, r) = 2p - 6qr + 8r^3$$

Observe que o termo quadrático é degenerado, se e somente se $p = 0$, que define o plano coordenado (q, r) . Sobre esse plano o 3-jato é do tipo X^3 . Note que, se $p = 0$ e $q = 0$, temos o r -eixo sobre qual o 4-jato é do tipo X^4 ou $-X^4$. Ainda, $p = 0$, $q = 0$ e $r = 0$, temos o 5-jato X^5 . De (*), em termos de p, q, r , temos que M_3 é dada por:

$$(r, 3q - 6r^2, 2p - 6qr + 8r^3, -2pr + 3qr^2 - 15r^4, p, q, r \in \mathbb{R})$$

e seu conjunto singular que é dado por $p = 0$ é:

- $S_3 = \{(r, 3q - 6r^2, 2p - 6qr + 8r^3, -2pr + 3qr^2 - 15r^4)\}$ se $q \neq 0$
- $S_3 = \{(r, -6r^2, 2p + 8r^3, -2pr - 15r^4)\}$ se $q = 0$

Portanto seu conjunto de bifurcação é respectivamente:

- $B_3 = \{(a, b, c)(r, 3q - 6r^2, 2p - 6qr + 8r^3, -2pr + 3qr^2 - 15r^4)\}$ se $q \neq 0$
- $B_3 = \{(a, b, c)(r, -6r^2, 2p + 8r^3, -2pr - 15r^4)\}$ se $q = 0$

Os quais são ilustrados pela figura a seguir

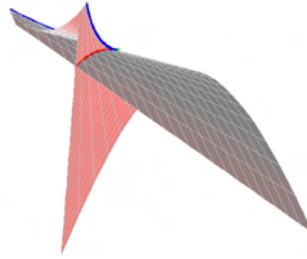


Figura 4.3: Catástrofe Rabo de Andorinha

4.2.4 Borboleta

Para a próxima Catástrofes apenas daremos uma breve noção de como seria seu Conjunto de Bifurcação analisando sua série de Taylor, sem a análise geométrica completa, uma vez que este conjunto pertence ao espaço $\mathbb{R}^4$.

Considere a seguinte aplicação **base** para esta catástrofe:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{6}x^6 \end{aligned}$$

com sua respectiva deformação:

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, a, b, c, d) &\longmapsto V_{abcd}(x) = V(x, a, b, c, d) := \frac{1}{6}x^6 + \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx. \end{aligned}$$

A variedade, M_4 , de catástrofe BORBOLETA é um subconjunto de $\mathbb{R}^5$, definido por:

$$M_4 = \{(x, a, b, c, d) \in \mathbb{R}^5 : \frac{\partial}{\partial x} V_{abcd}(x) = 0\}$$

Veja que $\frac{\partial}{\partial x} V_{abcd}(x) = 0$, implica $x^5 + a.x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0$.

Logo,

$$M_4 = \{(x, a, b, c, d) \in \mathbb{R}^5 : x^5 + a.x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0\}.$$

Reescrevendo M_4 temos que:

$$M_4 = \{(x, a, b, c, -x^5 - a.x^3 - b.x^2 - c.x), x, a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Nosso objetivo é explorar a geometria desta variedade analisando seu conjunto de Bifurcação. Para isto exploramos a série de Taylor de $V_{abcd}(x)$ para pontos pertencentes ao conjunto Singular M_4 , denotado por S_4 .

Temos que:

$$V_{abcd}(x + X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 + a_5X^5 + a_6X^6 + 0.$$

onde $a_i = \frac{1}{i!}(V_a)^{(i)}(x)$.

$$\begin{aligned} V_{abcd}(x + X) &= V_{abcd}(x) + (x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d)X + \left(\frac{5x^4 + 3ax^2 + bx}{2}\right)X^2 + \\ &+ \left(\frac{20x^3 + 6ax^2 + 2b}{6}\right)X^3 + \left(\frac{60x^2 + 6a}{24}\right)X^4 + \left(\frac{120x}{120}\right)X^5 + \left(\frac{120}{720}\right)X^6 + 0. \end{aligned}$$

Como $(x, a, b, c, d) \in S_4$, segue que:

$$\begin{aligned}
V_{abcd}(x+X) = & \left(\frac{1}{6}x^6 + \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + (-x^5 - ax^3 - bx^2 - cx)x \right) + \\
& + (x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + (-x^5 - ax^3 - bx^2 - cx))X + \left(\frac{5x^4 + 3ax^2 + 2bx + c}{2} \right) X^2 + \\
& + \left(\frac{20x^3 + 6ax + 2b}{6} \right) X^3 + \left(\frac{60x^2 + 6a}{24} \right) X^4 + \left(\frac{120x}{120} \right) X^5 + \left(\frac{120}{720} \right) X^6 + 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
V_{abcd}(x+X) = & \frac{X^6}{6} + xX^5 + (4x^2 + 4a)X^4 + \left(\frac{10x^3}{3} + ax + \frac{b}{3} \right) X^3 + \\
& + \left(\frac{5x^4}{4} + \frac{3ax^2}{2} + bx + \frac{c}{2} \right) X^2 + 0X - \left(\frac{5x^6}{6} + \frac{3ax^4}{4} + \frac{2bx^2}{3} + \frac{cx^2}{2} \right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
V_{abcd}(x+X) = & \frac{X^6}{6} + xX^5 + (4x^2 + 4a)X^4 + \left(\frac{10x^3}{3} + ax + \frac{b}{3} \right) X^3 + \\
& + \left(\frac{5x^4}{4} + \frac{3ax^2}{2} + bx + \frac{c}{2} \right) X^2 + 0X - \left(\frac{5x^6}{6} + \frac{3ax^4}{4} + \frac{2bx^2}{3} + \frac{cx^2}{2} \right).
\end{aligned}$$

Observe que analisando a matriz Hessiana vemos que o termo quadrático:

$$\left(\frac{5x^4}{4} + \frac{3ax^2}{2} + bx + \frac{c}{2} \right)$$

é não-degenerado.

A Figura abaixo mostra os possíveis tipo de seções (no plano (c, d)) que aparecem de acordo a variação do par (a, b) no círculo unitário. Para mais detalhes veja [1].

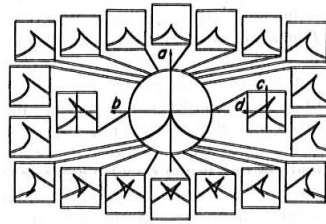


Figura 4.4: Seções na Catástrofe Borboleta

Observe que temos um ponto de borboleta do tipo X^6 na origem, uma linha de pontos tipo Rabo de Andorinha no fator X^5 . Analisando certos casos, temos por exemplo, que se $b = 0$ e $a > 0$, uma seção deste conjunto de Bifurcação é formada pela Catástrofe Cúspide onde as variáveis são c e d .

5 Máquina de Catástrofes

A primeira máquina de catástrofe foi inventada por E. C. Zeeman, Universidade de Warwick, em 1969. Depois de três semanas de experimentos com elásticos e clips ele refinou para a versão aqui descrita.

Para analisar a máquina de Zeeman, o primeiro passo é localizar a posição do ponto de cúspide P . Por simetria dos eixos conforme figura abaixo.

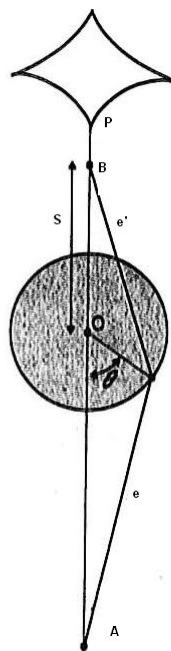


Figura 5.1: Máquina de Zeeman

Tomamos uma certo diâmetro e consideramos essa medida uma unidade de medida, ou seja, 1. Tomando elásticos com comprimento igual a essa unidade sem estarem esticados e a distância do centro do diâmetro O até um ponto A como sendo 2.

É claro, novamente pela simetria, que como o ponto B corre ao longo do eixo que terá um ponto P de equilíbrio na posição $\theta = 0$. O ponto P é onde o equilíbrio muda de estável para instável, por princípio geral da estabilidade.

Sejam e , e' sendo o comprimento de dois pedaços do elásticos quando a posição do disco esta alinhado em θ , próximo de 0 mas não necessariamente nele. Se λ é o módulo

da elasticidade então a energia, devida a Lei e Hook, é igual a:

$$V_s(\theta) = \frac{\lambda}{2} (e - 1)^2 + \frac{\lambda}{2} (e' - 1)^2.$$

Agora

$$e^2 = \left(2 - \frac{1}{2} \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sin \theta\right)^2$$

pela expansão da série de Taylor encontramos:

$$e^2 = \left(2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\theta\right)^2 + O(4)$$

onde $O(4)$ denota uma função de ordem 4.

$$e^2 = \left(2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\theta^2}{4}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\theta\right)^2 + O(4)$$

$$e^2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{\theta^2}{4}\right)^2 + \frac{\theta^2}{4} + O(4)$$

$$e^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\frac{3}{2}\frac{\theta^2}{4} + \left(\frac{\theta^2}{4}\right)^2 + \frac{\theta^2}{4} + O(4)$$

$$e^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3\theta^2}{4} + \left(\frac{\theta^2}{4}\right)^2 + \frac{\theta^2}{4} + O(4)$$

$$e^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3\theta^2}{4} + \frac{\theta^2}{4} + O(4)$$

$$e^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \theta^2 + O(4). \quad (\star)$$

Observe que inserindo os termos:

$$\left(\frac{\theta^2}{3}\right)^2 - \left(\frac{\theta^2}{3}\right)^2$$

em $\star$ não alteramos a igualdade:

$$e^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \theta^2 + \left(\frac{\theta^2}{3}\right)^2 - \left(\frac{\theta^2}{3}\right)^2 + O(4)$$

$$e^2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{\theta^2}{3}\right)^2 - \frac{\theta^4}{9} + O(4)$$

$$e^2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{\theta^2}{3}\right)^2 + O(4)$$

Logo, a menos de parcelas com grau maior ou igual a 4 temos que:

$$e = \frac{3}{2} + \frac{\theta^2}{3} + O(4) \quad (I).$$

Analogamente,

$$e'^2 = \left(s - \frac{1}{2} \cos(\pi - \theta)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sin(\pi - \theta)\right)^2$$

Como:

$$\cos(\pi - \theta) = \cos \pi \cos \theta + \sin \pi \sin \theta = -1 \cos \theta + 0 \sin \theta = -\cos \theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \pi \cos \theta - \sin \pi \sin \theta = 0 \cos \theta + 1 \sin \theta = \sin \theta$$

Temos que:

$$e'^2 = \left(s + \frac{1}{2} \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sin \theta\right)^2 + O(4).$$

Usando a expansão de Taylor encontramos:

$$e'^2 = \left(s - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \theta\right)^2 + O(4).$$

Analogamente ao que foi feito para e é possível mostrar que:

$$e' = \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{s(2s-1)}{2s(2s+1)} \theta^2 + O(4) \quad (II).$$

Por (I) e (II), segue que:

$$V_s(\theta) = \frac{\lambda}{4} \left[\frac{1}{4} + \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \theta^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{s(2s-1)}{2s(2s+1)}\right) \right] + O(4)$$

O Lema de Morse implica que encontrado o tipo de ponto crítico local podemos desconsiderar o termo $O(4)$, desde que o coeficiente θ^2 seja não nulo. Agora o coeficiente de θ^2 será positivo se $\frac{1}{3} > \frac{s(2s-1)}{2s(2s+1)}$ e negativo se $\frac{1}{3} < \frac{s(2s-1)}{2s(2s+1)}$.

Segue que o equilíbrio muda de máximo para mínimo quando: $\frac{1}{3} = \frac{s(2s-1)}{2s(2s+1)}$, onde $2(2s+1) = 3s(2s-1)$.

Após cálculos obtemos:

$$s = \frac{7 \pm \sqrt{97}}{12} \sim 1, 40.$$

Como P claramente é um termo positivo teremos que:

$$s = \frac{7 + \sqrt{97}}{12}.$$

Após uma análise similar com $\theta = 0$ substituindo θ por π encontramos um valor de s distinto do mencionado acima, a saber, $s = \frac{27 + \sqrt{489}}{20} \sim 2,46$, levando-nos a um novo valor de P' .

Se V_{ab} , é a função de energia correspondente ao repouso e tem posição (a, b) tendo o mínimo de Morse em θ , então para (a', b') próximo o suficiente de (a, b) a função $V_{a'b'}$ tem mínimo de Morse em θ' próximo θ . A vizinhança θ' pode ser expressa por uma função suave de (a, b) pela redução da função de Morse pela forma padrão. Então perto do ponto de equilíbrio o disco move-se suavemente com (a, b) . Por outro lado, se aproxima de um ponto que não é de Morse, este será restritivo. A geometria em torno deste ponto especial, onde a propriedade de Morse e suas consequências de movimentos sutis são quebrados.

A seguir analisaremos o detalhe do comportamento do ponto P . Como já visto que o termo θ^2 é onde a energia tende a P e por simetria não existe um termo θ^3 , portanto devemos procurar θ^4 . Agora trabalhando conforme Figura 5.1, e deixando o ponto livre em B sendo o ponto (α, β) relativo a coordenada abaixo. A fórmula de e é como a anterior com exceção que agora trabalhamos em $O(5)$ e continuamos com o termo $\theta(4)$:

$$e'^2 = \left(s + \frac{1}{2} \cos \theta - \alpha \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \beta \right)^2.$$

Se trabalharmos fora de $V_{\alpha, \beta}(\theta)$ a energia correspondente de ordem 4, resulta na forma:

$$V_{\alpha, \beta}(\theta) = (a_0 + a_1 \beta \theta + a_2 \alpha \theta^2 + a_3 \beta \theta^3 + a_4 \theta^4) + O(5)$$

onde $a_0, \dots, a_4$ são constantes as quais os valores aproximados são: $a_0 \sim 0,54$; $a_1 \sim 0,24$; $a_2 \sim 0,16$; $a_3 \sim 0,09$; $a_4 \sim 0,045$.

Note que o estágio que P , onde $\alpha = \beta = 0$, temos a função da forma: $\mu \theta^4 + O(5)$, ($\mu > 0$), desde que seja um ponto crítico degenerado. Então para um resultado qualitativo de P , desprezamos o termo de $O(5)$.

Continuamos com as simplificações tomando a unidade elástica fazendo $\lambda a_4 = \frac{1}{4}$ para eliminar o termo cúbico por mudança de variável:

$$x = \theta + \frac{\beta a^3}{4a_4}$$

e para definir um múltiplo escalar a para α e b para β , numericamente resultará na seguinte fórmula:

$$V_{ab}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx + c.$$

Podemos considerar a constante c igual a zero sem perda de generalidade pois estamos interessados somente em pontos críticos de V_{ab} , desta forma,

$$V_{ab}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$$

Determinando assim a fórmula da Catástrofe Cúspide.

A partir destes resultados podemos construir a máquina. Primeiramente precisamos de pontos fixos, podendo estes ser pregos ou tachas, um disco de 20 cm de diâmetro e uma prancha de aproximadamente 30 cm por 150 cm.

Tomando uma das laterais da prancha na largura de 30 cm fixamos um ponto A bem próximo a ela, bem no centro desta, deste ponto fixamos o centro O alinhado com o ponto A que será o centro do disco. A distância do centro O ao ponto A, será de 40 cm. O disco será fixado mas de forma a ter o menor atrito possível para melhor visualização do momento catástrofe. Na extremidade do disco fixamos um ponto B, ou seja colocamos uma tacha no disco mas próximo possível de sua extremidade. O próximo passo é obter elásticos de tamanho específicos conforme dados das equações anteriores. Um elástico que ligará fixamente do ponto A ou ponto B, terá o comprimento igual ao diâmetro, ou seja, 20 cm sem ser esticado, o outro elástico ligará o ponto B para um ponto que não será fixo, o ponto C será testado para obter o ponto de colapso.

Este ponto colapso se dará quando com uma pequena perturbação, ou seja, uma pequena movimentação no disco, mudará completamente sua trajetória, em outras palavras, se fizermos essa pequena movimentação ele retornar ao mesmo ponto, não será um colapso, porém se com essa pequena movimentação o disco mudar de "quadrante"teremos um ponto de colapso.

Abaixo, esquemas para nortear esta construção.

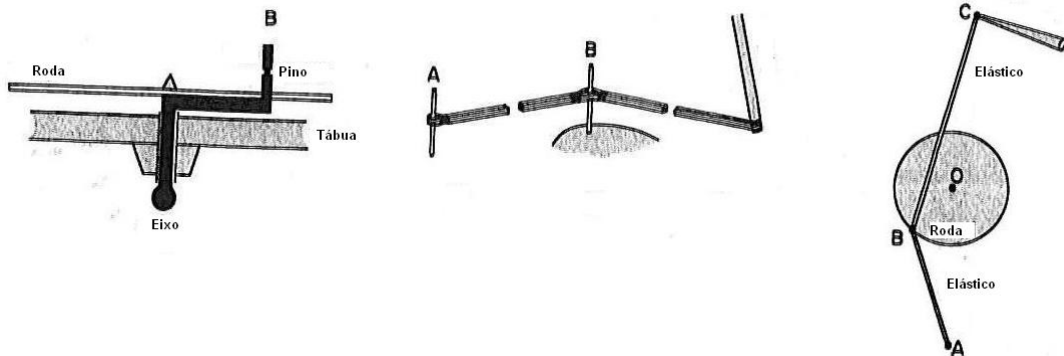


Figura 5.2: Esquemas para Máquina de Zeeman

Referências

- [1] POSTON, T.; STEWART, I. *Catastrophe Theory and its Applications*. 1. ed. London: Pitman Publishing Limited, 1978.
- [2] POSTON, T.; STEWART, I. *Taylor Expansion and Catastrophes*. 1. ed. London: Pitman Publishing Limited, 1976.
- [3] GIBSON, C. G. *Singular Points of smooth mappings*. 1. ed. London: Pitman Publishing Limited, 1970.
- [4] ARNOLD, V. I. *Teoria da Catástrofe. Tradução Livre de: Catastrophe theory*. 1. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 1989.
- [5] LIMA, E. L. *Análise no espaço $\mathbb{R}^n$* . 1. ed. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária-IMPA, 2004.