

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

**A PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS DURANTE O PROCESSO
DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE EQUAÇÕES
POLINOMIAIS**

Tatiane da Cunha Puti

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

RIO CLARO (SP)

2011

510.07 Puti, Tatiane da Cunha
P988p A produção de significados durante o processo de
ensino-aprendizagem: avaliação de equações polinomiais /
Tatiane da Cunha Puti. - Rio Claro : [s.n.], 2011
244 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Lourdes de la Rosa Onuchic

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Álgebra escolar. 3.
Resolução de problemas. 4. Educação Matemática. I. Título.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Miriam Godoy Penteado

Profa. Dra. Regina M. S. P. Tancredi

Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic

Tatiane da Cunha Puti
(Aluna)

Rio Claro, 17 de novembro de 2011

Resultado: **Aprovada.**

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meus pais

Sonia M. E. C. Puti e Antonio E. Puti

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pela minha vida, por abençoar meu caminho e por me dar forças para conquistar mais este objetivo.

Aos meus pais, Sonia e Antonio, por todo amor, pela força e confiança depositadas em mim e por estarem sempre ao meu lado.

À minha irmã, Fernanda, com muito carinho.

Ao Valter, pelo amor, carinho, amizade e por sempre estar ao meu lado nos momentos mais difíceis.

A minha família unespiana, Bruna, Érica, Cláudia, Gabi, Verônica, Livia (Bixete), Mazzi, Glalco, Vini e Déa. Obrigada por fazerem parte de minha vida!

À Dona Lourdes, pela amizade, pelo carinho, dedicação e pela confiança que depositou em mim. Obrigada por tudo!

Às professoras Miriam Godoy Penteado e Regina M. S. P. Tancredi, pelas valiosas contribuições prestadas a este trabalho.

Aos colegas da Pós por todos os momentos alegres, pelas partidas de vôlei e pelas experiências compartilhadas. Um agradecimento especial a Debbie por toda ajuda.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, pelos momentos de convivência e aprendizagem.

À Inajara, por toda ajuda e por sempre nos fazer sorrir.

À Ana, Elisa, Alessandra, Zezé e Zé Ricardo por toda atenção e disponibilidade.

Aos membros do GTERP, Analucia, Andressa, Beth, Celia, Eliane, Fabiane, Fernanda, Malu, Marcos, Norma, Paulo, Raquel Araiun, Raquel Brumatti, Roger, Rosilda, pela amizade e pelos momentos de estudo.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Eu não sei se você se recorda do seu primeiro caderno, eu me recordo do meu. Com ele eu aprendi muita coisa, foi nele que eu descobri que a experiência dos erros é tão importante quanto as experiências dos acertos. Porque vistos de um jeito certo, os erros, eles nos preparam para nossas vitórias e conquistas futuras, porque não há aprendizado na vida que não passe pelas experiências dos erros. (...) O caderno nos ensina que erros não precisam ser fontes de castigos. Erros podem ser fontes de virtudes! Na vida é a mesma coisa, o erro tem que estar a serviço do aprendizado; ele não tem que ser fonte de culpas e vergonhas.

Pe. Fábio de Melo

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é o de analisar o ensino-aprendizagem de equações polinomiais do 2º grau. Para esta pesquisa adotamos a Metodologia de Pesquisa de Romberg. Definido o Fenômeno de Interesse, *o Ensino-Aprendizagem de Equações Polinomiais do 2º grau*, foi criado um Modelo Preliminar e apoiado em ideias de outros sobre os eixos norteadores do desenvolvimento da pesquisa: a Álgebra Escolar, a Produção de Significados e a Resolução de Problemas, nos conduziram à seguinte questão ***Quais os significados produzidos, pelos alunos, no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de equações polinomiais do 2º grau?*** Para resolver esse problema, estratégias (o quê?) e procedimentos (como?) foram criados gerando o Procedimento Geral – a criação de um projeto de ensino-aprendizagem-avaliação para trabalhar as equações polinomiais de 2º grau. Esse Procedimento Geral foi posto em ação, em sala de aula, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, na qual os alunos devem ser co-construtores de seu próprio conhecimento durante o processo da resolução do problema proposto, levando-os à construção de novos conceitos, conteúdos e técnicas operatórias matemáticos. Para a coleta de dados utilizamos algumas técnicas: observação participante, seguida de registros (notas de campo, registros de trabalhos de alunos em diferentes momentos e vídeos de algumas aulas). A análise da produção de significados dos alunos foi realizada a partir das atividades trabalhadas em sala de aula. Esta análise apresentou uma abordagem qualitativa que nos possibilitou múltiplas interpretações dos dados coletados segundo nossas crenças, experiências e concepções.

Palavras-chave: Equações Polinomiais de 1º e 2º graus. Álgebra Escolar. Produção de Significados. Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Educação Matemática.

ABSTRACT

The aim of this research is to analyze the processes involved on the teaching and learning of 2nd grade polynomial equations. To pursue this objective, we adopted Romberg's Research Methodology. Once the Phenomenon of Interest was defined, *the Teaching-Learning of 2nd grade Polynomial Equations*, we developed a Preliminary Model and, based on ideas from others about the main aspects related with this research: Elementary Algebra, the Production of Meanings and the Problem Solving, we were conducted to the question ***What are the meanings produced by students in the teaching-learning-assessment process of 2nd grade polynomial equations?*** To solve this problem, strategies (what?) and procedures (how?) were created generating the General Procedure – the creation of a project of teaching-learning-assessment to work with 2nd grade polynomial equations . This General Procedure was put into action, in the classroom, using the Methodology of Teaching-Learning-Assessment of Mathematics through Problem Solving, in which students must be co-constructors of their own knowledge during the resolution process of the proposed problem, guiding them in the construction of new concepts, mathematical subjects and techniques. To collect data we used some techniques: participant observation, followed by records (field notes, records of students work at different times and videos of some classes). The analysis of the meanings production of students was held from the activities worked on in the classroom. This analysis produced a qualitative approach that allowed us multiple interpretations of the data collected according to our beliefs, experiences and ideas.

Key words: Polynomial Equations of the 1st and 2nd grades. Elementary Algebra. Production of Meanings. Methodology of Teaching-Learning-Assessment of Mathematics through Problem Solving. Mathematics Education.

ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

Página

Figura 1 – A relação de sociedade, matemática, alunos, professores e escolarização.....	24
Figura 2 – Atividades dos pesquisadores.....	26
Figura 3 – Modelo Preliminar.....	38
Figura 4 – Visão das distribuições dos Padrões de Conteúdo ao longo das séries iniciais.....	57
Figura 5 – Tabela: Padrões e expectativas para o ensino-aprendizagem da Álgebra desde o pre-K até o ano 12.....	59
Figura 6 - Tabela: Padrões e expectativas para o ensino-aprendizagem da Álgebra desde o pre-K até o ano 12.....	60
Figura 7 - Tabela: Padrões e expectativas para o ensino-aprendizagem da Álgebra desde o pre-K até o ano 12.....	61
Figura 8 – Cinco diferentes representações de ideias matemáticas. Transferências entre e dentre cada uma podem ajudar a desenvolver novos conceitos.....	66
Figura 9 – Usamos as ideias que já temos (pontos azuis) para a construção de uma nova ideia (ponto vermelho), desenvolvendo no processo uma rede de conexões entre as ideias. Quanto mais ideias sejam usadas e quanto mais conexões sejam feitas, melhor será a compreensão.....	77

Figura 10 – Construção dos significados.....	79
Figura 11 – Sabendo como se aprende, os professores podem escolher com mais critério entre as técnicas adequadas para a realização de objetivos específicos.....	81
Figura 12 – Um triângulo retângulo que não está lá realmente.....	83
Figura 13 – Os dois segmentos verticais escuros têm o mesmo comprimento....	83
Figura 14 – Um simples modelo do processo de resolver problemas Matemáticos.....	96
Figura 15 – Um modelo do processo de resolver problemas.....	97
Figura 16 – Modelo Modificado.....	103
Figura 17 – Quadro dos Conteúdos de Matemática por série e bimestre para as quatro séries finais do Ensino Fundamental.....	112

SUMÁRIO

Introdução.....	13
Capítulo 1 – Metodologia de Pesquisa.....	19
1.1. Metodologia de Pesquisa.....	20
1.1.1. Pesquisa em Educação Matemática.....	21
1.2. A Metodologia de Romberg.....	23
1.2.1. Educação Matemática como um Campo de Estudos.....	24
1.2.2. Atividades dos Pesquisadores.....	25
1.2.3. Métodos Usados por Pesquisadores.....	28
1.2.4. Avaliação do Produto Produzido.....	32
Capítulo 2 – 1º Bloco de Romberg: Identificação do Problema da Pesquisa.....	34
2.1. Fenômeno de Interesse.....	35
2.2. Modelo Preliminar.....	37
2.3. Relacionar com Ideias de Outros.....	39
2.3.1. A Álgebra Escolar.....	41
2.3.1.1. Desenvolvimento Histórico da Álgebra.....	41
2.3.1.2. A História da Álgebra no Currículo Brasileiro.....	52
2.3.1.3. Ensino-Aprendizagem da Álgebra.....	54
2.3.1.4. Pensamento Algébrico.....	63
2.3.1.5. Dificuldades dos Alunos em Álgebra.....	71
2.3.2. A Produção de Significados.....	75
2.3.2.1. A Produção de Significados.....	75
2.3.2.1.1. A Comunicação na Produção de Significados.....	85
2.3.2.2. Como “Medir” a Qualidade da Produção de Significados.....	87
2.3.3. A Resolução de Problemas.....	90
2.3.3.1. Uma Breve História da Resolução de Problemas.....	90
2.3.3.2. O que é um Problema?.....	93
2.3.3.3. Diferentes Abordagens da Resolução de Problemas.....	95
2.3.3.4. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.....	97
2.4. A Pergunta da Pesquisa.....	102
2.4.1. Modelo Modificado.....	103
2.4.2. A Pergunta da Pesquisa.....	104
Capítulo 3 – 2º Bloco de Romberg: Planejamento para a	

Resolução do Problema da Pesquisa.....	105
3.1. Selecionar uma Estratégia Geral de Pesquisa e seu Correspondente Procedimento Geral.....	106
3.2. Procedimentos Auxiliares (P_A) em Ação.....	109
3.2.1. P_{A1} : Definição da escola onde se pretende trabalhar.....	109
3.2.2. P_{A2} : A criação de um Projeto de Trabalho, em sala de aula, apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.....	110
3.2.2.1. Consulta aos Documentos Oficiais.....	110
3.2.2.2. A Metodologia de Trabalho em Sala de Aula.....	114
3.2.2.3. A Criação do Projeto de Ensino.....	114
3.2.2.3.1. Projeto de Ensino – Parte I.....	116
3.2.2.3.2. Projeto de Ensino – Parte II.....	134
3.2.3. Termo de Compromisso.....	164
Capítulo 4 – Procedimento Geral em Ação: Aplicação do Projeto.....	165
4.1. Projeto de Ensino – Parte I.....	169
4.2. Projeto de Ensino – Parte II.....	197
Capítulo 5 – 3º Bloco de Romberg: Considerações Finais.....	222
Referências.....	232
Anexos.....	239

INTRODUÇÃO

Em meus primeiro e segundo graus, eu adorava as aulas de Matemática, pois sempre tive facilidade em aprender essa ciência. Obtinha boas notas nas tarefas, nos trabalhos e nas avaliações. Lembro-me que, quando cursava a 6ª série do Ensino Fundamental de uma escola municipal de Ribeirão Preto / SP, logo no início do ano letivo, a professora da turma disse que iríamos trabalhar em grupos. Cada grupo teria um líder, selecionado a partir de uma avaliação realizada pela mesma. O líder de cada grupo teria a função de anotar, em um caderno, a frequência dos membros e, também, auxiliá-los na resolução dos exercícios propostos pela professora. Tive a oportunidade de ser líder de um grupo. A partir desse episódio, meu interesse pela Matemática e, principalmente, pela arte de ensinar Matemática aumentou. O Ensino Médio cursei em uma escola particular de Ribeirão Preto / SP. Nessa escola o ensino era mais “puxado”, o que exigiu de mim mais estudo. Meu interesse pela Matemática aumentou, pois eu continuava indo bem e meus professores me incentivaram a estudar Matemática.

Em 2004, ingressei no curso de Licenciatura Plena em Matemática na UNESP, campus de Rio Claro / SP. Na graduação, deparei-me com algumas matérias bastante abstratas, nas quais tive dificuldade para sua aprendizagem. Era uma “nova” Matemática, completamente diferente daquela aprendida nos primeiro e segundo graus escolares, pois era trabalhada fazendo uso de definições e demonstrações de teoremas. Meu último ano de graduação despertou em mim o interesse em fazer pesquisa.

Na disciplina *Prática de Ensino de Matemática – sob a forma de estágio supervisionado*, durante o ano de 2007, observei uma turma da 8ª série do Ensino Fundamental de uma escola pública de Rio Claro / SP. O professor da turma, no terceiro bimestre, iniciou o tópico Equações Polinomiais do 2º grau, mas os alunos alegavam que não tinham visto as equações do 1º grau. Assim, o professor fez uma revisão, ou podemos dizer, apresentou a técnica de como resolver uma equação do 1º grau, pois já estava com a matéria atrasada. Ele afirmou que as equações do 1º grau são da forma $ax + b = 0$ e que são resolvidas da seguinte maneira:

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$x = -(b/a), \text{ para } a \neq 0$$

Em seguida, ele deu um exemplo, resolveu a equação e entregou uma lista de exercícios semelhantes para os alunos poderem aplicar o método de resolução dado. O professor trabalhou com a turma durante duas semanas. Depois, apresentou aos alunos as equações de 2º grau. Afirmou que as equações do 2º grau apresentam a forma geral $ax^2 + bx + c = 0$ e que para resolvê-las era só seguir o seguinte roteiro:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ para } a \neq 0$$

i) Quem são as constantes a , b e c ?

ii) Encontre o Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

iii) Se $\Delta > 0$ temos duas raízes reais

Se $\Delta = 0$ temos uma raiz real

Se $\Delta < 0$ não temos raízes reais

iv) Encontre as raízes da equação

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

O que pude observar na época era que os alunos não conseguiam compreender o que o professor estava “passando” para eles. Assim, surgiu a indagação: “Como fazer com que os alunos possam aprender de uma maneira significativa?”.

Em 2007, comecei a fazer parte do GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, na UNESP – Rio Claro / SP, onde comecei a ter conhecimento sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A partir das discussões no grupo e das leituras de trabalho na linha da Resolução de Problemas, constatee que essa metodologia poderia me auxiliar ao responder as minhas indagações, pois ela oferece aos alunos a possibilidade de construir novos conhecimentos através da resolução de problemas e a oportunidade de vivenciar um trabalho

significativo em sala de aula. Por fim, em 2009, ingressei no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro / SP, onde desenvolvi esta pesquisa.

O propósito desta pesquisa é o de analisar a produção de significados, construídos por alunos de uma 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental, de uma escola estadual da cidade de Rio Claro / SP, durante o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Equações Polinomiais do 1º e 2º graus através da resolução de problemas. No que se refere ao trabalho com as equações polinomiais do 1º grau, numa revisão buscou-se apoio em livros didáticos e, para trabalhar as equações do 2º grau fez-se uso da Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

Assim, desejava-se que os alunos, ao receberem as atividades, fossem capazes de, com confiança, fazendo um trabalho mental que movimentasse seu conhecimento existente, transformá-lo em saber e conseqüentemente em aprendizagem; que buscassem caminhos que os conduzissem à resolução e conseqüente solução dos problemas dados.

Para podermos relatar a pesquisa, seu desenvolvimento e seus resultados, a organizamos em cinco capítulos.

No primeiro capítulo, Metodologia de Pesquisa, identificamos o que é método, o que é metodologia de pesquisa e o porquê de uma metodologia de pesquisa capaz de desenvolvê-la. Entre várias metodologias consultadas, nossa pesquisa decidiu por seguir a Metodologia de Pesquisa de Romberg, que se apresenta num conjunto de dez atividades distribuídas em três blocos: Identificação do Problema da Pesquisa, Planejamento para a Resolução do Problema da Pesquisa e Considerações Finais.

No segundo capítulo, 1º Bloco de Romberg – Identificação do Problema da Pesquisa – demos início à nossa pesquisa trabalhando as quatro primeiras atividades desse modelo, atividades colocadas com o objetivo de definir nosso Problema da Pesquisa. Identificamos, como nosso Fenômeno de Interesse, *O Ensino-Aprendizagem de Equações Polinomiais do 2º grau* e construímos um Modelo Preliminar para o desenvolvimento da pesquisa. Nele encontramos os elementos constantes no Fenômeno de Interesse e as relações entre eles. Relacionamos nosso Fenômeno de Interesse e o Modelo Preliminar com ideias de outros, ou seja, buscamos examinar o que outros pesquisadores pensavam e pensam sobre eles a fim de avaliar se suas ideias serviriam para esclarecer, ampliar ou modificar o Modelo Preliminar criado.

Esta pesquisa apresenta uma fundamentação teórica baseada em três eixos temáticos, considerados por nós como necessários ao seu desenvolvimento: a Álgebra Escolar, a Produção de Significados e a Resolução de Problemas. Cada eixo, selecionado para colaborar com a condução de nossa pesquisa, pediu um determinado tempo e uma investigação cuidadosa para se pronunciar.

No tópico sobre a Álgebra Escolar apresentamos um desenvolvimento histórico da Álgebra, uma breve história da Álgebra no currículo nacional, o ensino-aprendizagem da Álgebra, um estudo sobre o pensamento algébrico e, por fim, algumas dificuldades encontradas por alunos no estudo da Álgebra. Sobre a Produção de Significados, ponto forte de nossa pesquisa, nos preocupamos em compreender como os alunos aprendem Matemática e, para isso, examinamos cuidadosamente possíveis modos de sentir e apreciar como eles constroem o significado dos conceitos matemáticos, pretendidos pelo professor ao longo do trabalho, com ideias matemáticas envolvidas no processo de ensino-aprendizagem. Nessa pesquisa, entendemos *significado* como “o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Não o conjunto do que se poderia dizer, e, sim, o que efetivamente se diz no interior de uma atividade” e, quando se diz que o aluno vai produzir significados matemáticos, deve-se entender que é quando ele fala sobre aquele objeto, quando ele explica o que aquele objeto quer dizer para ele. Assim, “*produzir significado* é falar a respeito de um objeto”, ou seja, quando uma pessoa acredita naquilo que se está afirmando, que é sua crença, mas é preciso que ela justifique suas crenças-afirmações para que possa ocorrer a produção de significados (LINS; GIMENEZ, 2001, p.145). Ao falar sobre a Resolução de Problemas, apresentamos uma breve história da Resolução de Problemas; adotamos a concepção, para este trabalho, de que problema é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em resolver; apresentamos as diferentes abordagens de Resolução de Problemas: sobre, para e através. Por fim, abordamos a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, chamada de Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, entendendo por através a ideia de ao longo de, durante sua resolução.

Como consequência de nossa investigação nos três eixos temáticos, a Álgebra Escolar, a Produção de Significados e a Resolução de Problemas, fez-se necessária uma mudança em nosso Modelo Preliminar face às novas variáveis que surgiram para um Modelo Modificado.

Após relacionar nosso Fenômeno de Interesse e nosso Modelo Modificado com as ideias dos “outros” colaboradores chegamos à seguinte Pergunta da Pesquisa:

Quais os significados produzidos, pelos alunos, no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de equações polinomiais do 2º grau?

seguida de outras perguntas complementares que, naturalmente, nos pareceram completar nossa pergunta original,

- Há possibilidades de se trabalhar Matemática seguindo o Caderno do Professor, indicado pela Proposta Curricular do Estado de São Paulo, sob a perspectiva da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?
- Será que os grupos e, em particular, cada estudante, conseguiram construir os novos conceitos e os novos conteúdos matemáticos que a professora havia colocado como foco de aprendizagem na resolução do problema proposto?

No terceiro capítulo, 2º Bloco de Romberg – Planejamento para a Resolução do Problema da Pesquisa – estabelecidos o Modelo Modificado e o Problema da Pesquisa, passamos à resolução do mesmo. Assim, nesse capítulo, selecionamos uma Estratégia Geral – Criar um projeto de ensino para trabalhar equações polinomiais do 2º grau – e seu correspondente Procedimento Geral – A criação de um projeto de ensino para trabalhar equações polinomiais do 2º grau. A Estratégia Geral criada, apoiada nas variáveis do Modelo Modificado, pediu por estratégias auxiliares necessárias ao seu desenvolvimento e, com isso, o Procedimento Geral também necessitou de procedimentos auxiliares que, quando postos em ação, levaram o Procedimento Geral à ação.

No quarto capítulo, Procedimento Geral em Ação – Aplicação do Projeto – descrevemos o que ocorreu na aplicação do projeto em sala de aula, olhando para a produção dos alunos nas atividades propostas, para poder identificar as evidências que, quando coletadas, pudessem responder à nossa Pergunta.

Ao colocarmos o Procedimento Geral em ação, realizamos uma análise dos dados coletados após ele ter sido posto em ação. Adotamos a abordagem qualitativa de pesquisa e

para a coleta dos dados utilizamos algumas técnicas como a observação participante, seguida de registros (notas de campo e vídeos de algumas aulas), e da análise da produção de significados dos alunos nas atividades trabalhadas em sala de aula. Para isso, a observadora-pesquisadora investigou o trabalho realizado em sala de aula, nas tarefas extraclasse, nas avaliações pedidas por lei e, principalmente, em seus registros diários retratando o transcorrer das aulas. Como nossa pesquisa apresentou uma fundamentação teórica baseada em três eixos temáticos, utilizamos cada eixo para criar categorias de análise para medir a qualidade da produção de significado dos alunos.

Por fim, no quinto capítulo, 3º Bloco de Romberg – Considerações Finais – demos sentido às evidências coletadas na aplicação do Procedimento Geral, as selecionamos e as relacionamos ao Problema de Pesquisa, relatamos os resultados para outros antecipando suas ações posteriores.

CAPÍTULO 1
METODOLOGIA DE PESQUISA

METODOLOGIA DE PESQUISA

Pesquisar é “ter uma interrogação e andar em torno dela em todos os sentidos, sempre buscando todas as suas dimensões e andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentido, mais dimensões e outra vez...” (JOEL MARTINS apud BICUDO, 1993, p.18).

Neste capítulo propomo-nos a identificar o que é método, o que é metodologia de pesquisa e o porquê de uma metodologia de pesquisa para desenvolver uma pesquisa. E entre as várias metodologias adotamos a Metodologia de Pesquisa de Romberg.

1.1. Metodologia de Pesquisa

A pesquisa surge, quase sempre, de uma curiosidade sobre um problema que inquieta o pesquisador. O ato de pesquisar é visto, por Romberg (1992), como um processo artístico em que se realizam atividades não mecânicas ou prescritas.

O termo *pesquisa* refere-se a processos – a coisas que se faz, não a objetos que alguém pode tocar e ver. Além disso, fazer pesquisa não pode ser visto como uma ação mecânica ou como um conjunto de atividades que se seguem de uma maneira prescrita ou predeterminada. As atividades envolvidas em fazer pesquisa incorporam mais uma característica de arte do que uma disciplina puramente técnica (p.51).

Segundo D’Ambrósio (1996) a pesquisa permite a interação entre a teoria e a prática, ou seja, a pesquisa é realizada quando o indivíduo vai para a prática com um embasamento teórico, o modificando ou o aprimorando.

Para Fiorentini e Lorenzato (2006), pesquisar é um processo de estudo em que se busca saberes ou compreensões sobre um fenômeno, problema ou questão, presentes na realidade ou na literatura, que instiga o pesquisador no que sabe ou diz a respeito.

Desta forma, pesquisar é uma atividade sistemática, metódica e intelectual, que apresenta uma intenção para poder melhorar as condições práticas de existência, pois “não há solução definitiva (...) há sempre o “andar em torno... outra vez e outra ainda”” (BICUDO,

CAPÍTULO 1 – METODOLOGIA DE PESQUISA

1993, p.18). Como afirma Santos (2007), a pesquisa tem como objetivo final responder às necessidades humanas concretas.

Ao se fazer pesquisa utiliza-se procedimentos que conduzem a certo resultado. Os procedimentos utilizados em uma pesquisa são chamados de método, que é “a observação sistemática dos fenômenos da realidade através de uma sucessão de passos, orientados por conhecimentos teóricos, buscando explicar a causa desses fenômenos, suas correlações e aspectos não-revelados” (GOLDENBERG, 2007, p.104,105). Isto é, os métodos são caminhos que facilitam o desenvolvimento de uma pesquisa.

Assim, toda pesquisa apresenta uma estrutura de trabalho que deve ser pautada em uma metodologia de pesquisa, que é um conjunto de métodos que me respondem à forma como eu conduzo a pesquisa, pois, como afirma Goldenberg (2007, p.13), “auxilia a refletir e proporciona um “novo” olhar sobre o mundo: um olhar científico, curioso, indagador e criativo”.

1.1.1. Pesquisa em Educação Matemática

Para compreendermos a Educação Matemática como uma região de inquérito devemos, primeiramente, entender o que é Educação Matemática para, assim, entendermos o que é fazer pesquisa em Educação Matemática.

Abbagnano (1982 apud BICUDO, 1999, p.2) diz que Educação é

(...) a transmissão e o aprendizado das técnicas culturais, isto é, daquelas técnicas de uso, de produção, de comportamento, mediante as quais um grupo de homens é capaz de satisfazer suas necessidades, de proteger-se contra a hostilidade do ambiente físico e biológico e de trabalhar em conjunto em uma forma mais ou menos ordenada e pacífica. Como o conjunto dessas técnicas se chama cultura, uma sociedade humana não pode sobreviver se a sua cultura não é transmitida de geração a geração; e as modalidades e as formas por que se efetua ou se garante essa transmissão se chama educação.

Desta forma, Bicudo (1999, p.3) afirma que Educação é o cuidado, isto é, “cuidado com a sociedade, cuidado com a preservação do existente, cuidado com o desabrochar da potencialidade do indivíduo, cuidado com a formação da pessoa”, entre outros. Para a autora, a Educação Matemática é, então, o “cuidado com o aluno”, “cuidado com a Matemática”, “cuidado com o contexto escolar”, “cuidado com o contexto social” (p.7).

Já Fiorentini e Lorenzato (2006, p.5) afirmam que

CAPÍTULO 1 – METODOLOGIA DE PESQUISA

A Educação Matemática é uma área de conhecimento das ciências sociais ou humanas que estuda o ensino e a aprendizagem da Matemática. A Educação Matemática caracteriza-se como uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico (a Matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar.

A partir das concepções de Educação Matemática acima, podemos dizer que a Educação Matemática estuda o ensino e a aprendizagem da Matemática tendo o cuidado, principalmente, com o aluno dentro da sociedade.

D'Ambrosio, no prefácio do livro *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática* (BORBA; ARAUJO, 2004), afirma que desde a Antiguidade existiu uma preocupação da sociedade com a educação dos jovens no ensino da Matemática. A Educação Matemática surgiu como uma área da educação na passagem do século XIX para o século XX tendo como destaque John Dewey. Dewey, em seu livro *Psicologia do número* (1895), propôs uma relação cooperativa entre professor e aluno e uma integração entre as disciplinas escolares. Em 1901, John Perrey criticou o fato de ser o matemático quem decide o que deve ser ensinado nas escolas e que é o próprio matemático que forma professores para o ensino, dificultando, assim, uma nova educação. Felix Klein, no livro *Matemática elementar de um ponto de vista avançado* (1908), diz que o professor deve levar em conta o processo psíquico do aluno para poder deter seu interesse. Para Klein, o professor terá sucesso se apresentar as coisas de uma maneira compreensível.

Como visto acima, as pesquisas em Educação Matemática apresentam algumas indagações como, por exemplo, as seguintes:

(...) o que é relevante ensinar nos vários níveis (conteúdos, currículos), como ensiná-la, como vê-la num contexto histórico-sócio-cultural, que materiais instrucionais são adequados no processo do seu ensino e aprendizagem, onde e como pode ela ser aplicada no dia-a-dia e nas outras áreas do conhecimento, como pode ou não contribuir com uma filosofia de Educação transformadora, como é encarada e desenvolvida por grupos étnicos diferentes, qual é o impacto que sofreu com o desenvolvimento acelerado da tecnologia (computadores), como os aprendizes assimilam, constroem e desenvolvem conceitos matemáticos (teorias da aprendizagem), como os professores podem auxiliar os aprendizes a assimilar, construir e desenvolver conceitos matemáticos (formação e atualização de professores), como o relacionamento e a cooperação social influi na aprendizagem da Matemática, como avaliar o desempenho matemático das pessoas, como a história da Matemática e a história em geral podem auxiliar a compreender a educação dos conceitos matemáticos (DANTE, 1991 apud NUNES, 2010, p.25).

CAPÍTULO 1 – METODOLOGIA DE PESQUISA

Ao se fazer pesquisa em Educação Matemática, Bicudo (1993) aponta alguns pontos relevantes para esta atividade:

- a. Os pesquisadores em Educação Matemática devem cuidar para não fazerem afirmações ingênuas, imprecisas, vazias, ao lançar mão de estudos elaborados pela Psicologia, História, Filosofia, Matemática, Antropologia, ...;
- b. Os pesquisadores em Educação Matemática devem cuidar para que, ao lançar mão de obras de autores que julgam significativos para elucidar suas interrogações ou para auxiliá-los na busca de compreensões, soluções, etc., façam-no esclarecendo o pensamento do autor. Entretanto, não se trata de apenas apresentar um resumo do pensamento do autor com o qual estão trabalhando, mas, principalmente, trata-se de explicitar suas próprias articulações, as quais tecem o fio condutor do texto que está sendo elaborado. Essa conduta evita que sejam feitas afirmações imprecisas, vazias, bem como evita que o raciocínio do pesquisador fique obscuro, ocultando-se. Esse procedimento implica excluir-se citações curtas de uma ou outra passagem de uma obra de um autor, concluindo, em seguida, a partir do que esse autor teria dito;
- c. Os pesquisadores em Educação Matemática devem cuidar para explicitar sua interrogação (ou pergunta, ou problema), indicando o modo e a direção em que vão conduzir suas pesquisas (p.20).

Portanto, fazer pesquisa em Educação Matemática é uma atividade importante por, como afirma Bicudo (1993), podermos compreender a Matemática, o modo pela qual ela é construída e os significados da Matemática para a sociedade e para o mundo.

1.2. A Metodologia de Romberg

Thomas A. Romberg em seu artigo, publicado em 1992 no *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* e intitulado Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa¹, busca identificar nas ciências sociais as tendências de pesquisa relacionadas ao ensino e à aprendizagem escolares e determinar como essas tendências influenciam o estudo da Matemática nas escolas. Para isso, Romberg descreve a Educação Matemática como um campo de estudo, esboça as atividades que os pesquisadores percorrem durante a pesquisa, resume uma variedade de métodos usados por eles e, finalmente, apresenta cinco tendências de pesquisa.

¹ Tradução de *Perspectives on Scholarship and Research Methods*

1.2.1. Educação Matemática como um Campo de Estudo

A Educação Matemática é considerada um campo de estudo, pois a escola é “um local que contém fenômenos, eventos, instituições, problemas, pessoas e processos que em si mesmos constituem a matéria-prima para investigações de muitos tipos”, ou seja, a “escola é complexa” (SHULMAN, 1988 apud ROMBERG, 1992, p.49, 50). Romberg (1992) apresenta um diagrama da sociedade e o papel da Matemática na escola, desenvolvido por E. G. Begle, em que se mostra a relação da sociedade, da matemática, dos alunos e dos professores no processo da educação escolar.

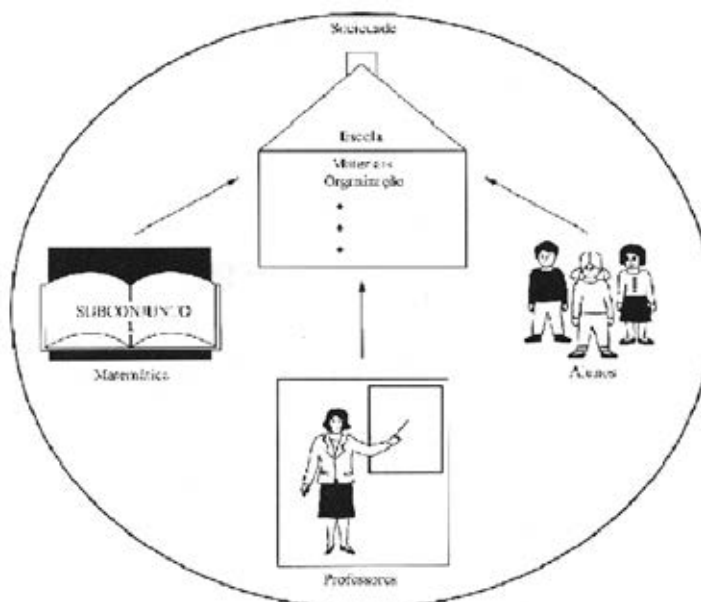


Fig. 1 A relação de sociedade, matemática, alunos, professores e escolarização (E. G. BEGLE, 1961, apud ROMBERG, 1992, p.50)

Esse diagrama mostra a escola inserida dentro da sociedade, no qual há um currículo do qual a Matemática faz parte. A instrução deste conteúdo é realizada por um professor para um grupo de alunos, dentro de uma sala de aula, por um tempo determinado.

Segundo Romberg (1992), esse diagrama apresenta um ponto de vista sobre o ensino de Matemática através do desenvolvimento de cinco pontos básicos:

- As escolas foram criadas para prepararem os jovens para serem membros da sociedade.

CAPÍTULO 1 – METODOLOGIA DE PESQUISA

- Para que um ensino de Matemática seja sólido é necessário haver preocupação de quais ideias de Matemática devem ser ensinadas e como devem ser ensinadas.
- O ensino de Matemática pode ser eficaz quando o aluno é levado em consideração.
- Para que um ensino de Matemática seja eficiente, ele deve ser realizado levando-se em consideração aspectos de educação.
- Os professores são os orientadores e os guias que fazem o processo de educação funcionar.

1.2.2. Atividades dos Pesquisadores

Para Goldenberg (2007) uma pesquisa necessita cumprir três requisitos básicos: a existência de uma pergunta que se deseja responder; a elaboração de um conjunto de passos que permitam chegar à resposta e a indicação do grau de confiabilidade na resposta obtida. Já Santos (2007, p.14) oferece uma “proposta de método para a construção do conhecimento científico”: escolha do tema, revisão de literatura, problematização, seleção e delimitação do problema de pesquisa, formulação de hipótese(s), formulação do objetivo geral, formulação dos objetivos específicos, escolha dos procedimentos de coleta de dados, previsão dos recursos e produção escrita do projeto científico.

Romberg (1992) apresenta um fluxograma, que sintetiza as falas de Goldenberg e Santos, sequenciando dez atividades para se fazer pesquisa:

CAPÍTULO 1 – METODOLOGIA DE PESQUISA

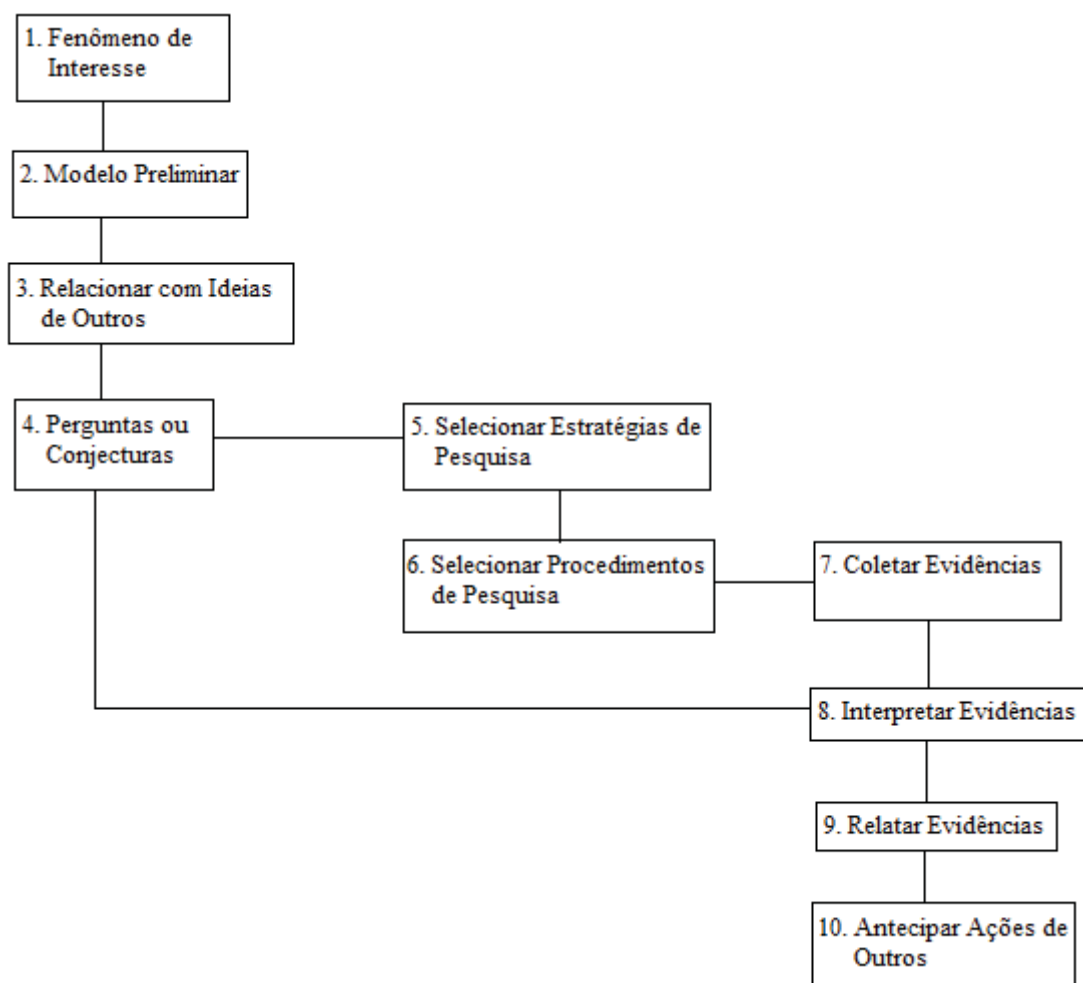


Figura 2 Atividades dos pesquisadores (ROMBERG, 1992, p.51)

Ele afirma que estas atividades não precisam seguir necessariamente a ordem apresentada pelo fluxograma, pois o ato de fazer pesquisa é considerado uma arte por não ser uma disciplina técnica. Esse fluxograma se apresenta em três blocos:

1º Bloco: Identificação do Problema da Pesquisa

As quatro primeiras atividades identificam o problema a ser pesquisado, ou seja, situam as ideias do pesquisador e decidem o que investigar.

- *Atividade 1: Fenômeno de Interesse*

A identificação do fenômeno de interesse é o início de uma pesquisa, isto é, quando o pesquisador situa sua curiosidade sobre certo fenômeno. No caso da Educação Matemática,

CAPÍTULO 1 – METODOLOGIA DE PESQUISA

um fenômeno pode estar relacionado com o modo de aprendizagem dos alunos, como os professores são formados, entre outros.

- Atividade 2: *Modelo Preliminar*

O modelo preliminar é o primeiro “esqueleto” imaginado para o desenrolar da pesquisa, isto é, a ideia inicial do trabalho, em que se encontram os elementos constituintes do fenômeno de interesse e as relações entre eles. É um modelo para ajudar a esclarecer o fenômeno de interesse.

- Atividade 3: *Relacionar com Ideias de Outros*

“Uma atividade importante é a de examinar o que outras pessoas pensam sobre o fenômeno de interesse e determinar se suas ideias podem ser usadas para esclarecer, ampliar ou modificar o modelo proposto” (ROMBERG, 1992, p.51).

Segundo Santos (2007), relacionar com ideias de outros nada mais é do que fazer uma pesquisa bibliográfica e, como ele mesmo afirma,

É verdade que a pesquisa bibliográfica não costuma oferecer dados inéditos, como a pesquisa de campo ou de laboratório. Ressalte-se, porém, que em nada comprometa a possibilidade de originalidade dos raciocínios que, a partir deles, possam ser desenvolvidos. A bem da verdade, dados já publicados podem, mesmo, possibilitar raciocínios inéditos, já que o conceito de *inédito* não se restringe a “realidade nova”. Pode também significar “pensamento novo” a respeito de “realidade velha” (p.104, 105).

- Atividade 4: *Perguntas ou Conjecturas*

Ao examinar um fenômeno de interesse várias questões surgem e selecionar a melhor é uma tarefa difícil. Assim, levantar uma pergunta é um “passo-chave no processo de pesquisa” (ROMBERG, 1992, p.52).

2º Bloco: Planejamento

No segundo bloco, possíveis caminhos são buscados para resolver o problema.

- Atividade 5: *Selecionar Estratégia Geral de Pesquisa*

Nesta atividade, estratégias auxiliares de pesquisa (o quê pesquisar?) são selecionadas para possibilitar a resolução do problema.

- Atividade 6: *Selecionar Procedimentos de Pesquisa*

Selecionam-se procedimentos de pesquisa (como pesquisar?) correspondentes às estratégias selecionadas. Com essas ações estabelece-se o Procedimento Geral da pesquisa.

CAPÍTULO 1 – METODOLOGIA DE PESQUISA

3º Bloco: Considerações Finais

O último bloco, com quatro atividades, é um bloco de ações em que se dá sentido às informações coletadas, frente ao Problema da Pesquisa colocado, relatam-se os resultados obtidos e antecipam-se as ações de outros.

Com as estratégias selecionadas e seus correspondentes procedimentos, colocamos o Procedimento Geral em ação para coletarmos os dados.

- Atividade 7: *Coletar Evidências*

Ao aplicar o projeto criado, muitas evidências se manifestarão. Nessa coleta serão observadas informações relevantes, irrelevantes e algumas até mesmo incompreensíveis.

- Atividade 8: *Interpretar as Evidências*

Toda informação coletada é analisada e interpretada, visando a responder o problema da pesquisa, isto é, só há interesse nas informações que dizem respeito ao problema da pesquisa.

- Atividade 9: *Relatar Resultados*

A partir dos dados da pesquisa coletados e analisados respondendo ao problema da pesquisa, devemos relatar à comunidade acadêmica os fatos evidenciados.

- Atividade 10: *Antecipar Ações de Outros*

Depois de relatado os resultados, a pesquisa é deixada para outros que possam se interessar por seu conteúdo e avançar nesta linha quando possível.

Observamos que nós, do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – GTERP – UNESP – Rio Claro – SP – nomeamos o conjunto destas dez atividades de Metodologia de Pesquisa de Romberg, que será a metodologia de pesquisa adotada para este nosso trabalho.

1.2.3. Métodos Usados por Pesquisadores

Para Romberg (1992), nos segundo e terceiro blocos, o de planejamento e o de conclusão, o pesquisador decide:

“(1) Que evidência é necessária para dirigir as perguntas ou conjecturas levantadas;

CAPÍTULO 1 – METODOLOGIA DE PESQUISA

- (2) Como coletar, analisar e interpretar aquela evidência; e
- (3) Como relatar as descobertas para outros” (p.52).

O pesquisador precisa selecionar métodos de pesquisa, adequados a cada questão, para juntar informações que possibilitem chegar à resposta da pergunta norteadora da pesquisa. As decisões sobre os métodos de pesquisa que são selecionados, segundo Romberg (1992), são uma consequência do primeiro bloco da metodologia, isto é, das atividades de 1 a 4. Romberg afirma que há dois aspectos para o uso do termo *métodos de pesquisa*: os métodos específicos, que “podem incluir a maneira na qual a informação é coletada, o modo como ela é agregada e analisada, ou, às vezes, como ela é relatada” (p.52); e os métodos vigentes, que dependem de cinco fatores: a visão de mundo; a orientação do tempo das perguntas a serem feitas; se a situação existe ou não; a fonte de informação prevista; e o julgamento do produto. A *visão de mundo* situa os métodos usados dentro das crenças de uma particular comunidade de estudo; a *orientação do tempo* considera se as perguntas que estão sendo levantadas estão dirigidas ao passado, ao presente ou ao futuro; *situações*, se existem ou precisam ser criadas; as *fontes* de evidências devem ser tanto artefatos, respostas às perguntas, ou observações de ações; e o *julgamento* se refere a avaliar estudos como uma categoria diferente de métodos de pesquisa.

Um grande número de métodos específicos, que existem na literatura, estão baseados nesses cinco fatores ou fazem uso deles. Segundo Romberg há métodos usados quando uma evidência existe e há métodos usados quando uma situação existe e a evidência deve ser desenvolvida.

Esta pesquisa apresenta uma abordagem qualitativa, apoiada na Metodologia de Pesquisa de Romberg. A visão de pesquisa qualitativa está baseada na ideia de que há sempre um aspecto subjetivo no conhecimento produzido. Não há, nessa visão, neutralidade no conhecimento que se constrói.

Segundo D’Ambrósio (apud BORBA; ARAÚJO, 2004, p.10)

A pesquisa qualitativa, também chamada de pesquisa naturalística, tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve grupos de participantes. Também chamada de método clínico, esta modalidade de pesquisa foi fundamental na emergência da psicanálise e da antropologia. Ela depende da relação observador-observado e, como não é de se estranhar, surge na transição do século XIX para o século XX. A sua metodologia por excelência repousa sobre a interpretação e várias técnicas de análise de discurso.

CAPÍTULO 1 – METODOLOGIA DE PESQUISA

As pesquisas que utilizam abordagens qualitativas nos fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações. Bogdan e Biklen (1994) apresentam uma boa caracterização de pesquisa qualitativa quando escrevem que

1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;
2. A investigação qualitativa é descritiva;
3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Para a coleta dos dados utilizaremos a técnica de observação participante. Em pesquisas qualitativas, a observação é uma técnica para a coleta de dados que possibilita um contato do pesquisador com o fenômeno de interesse a ser pesquisado.

Segundo Lüdke e André (1986), a observação precisa ser controlada e sistematizada. A observação, enquanto uma técnica de pesquisa, “implica a existência de um planejamento cuidadoso do trabalho e uma preparação rigorosa do observador” (p.25). O planejamento da observação determina “o quê” e “o como” observar. Já para a preparação rigorosa do observador

O observador precisa aprender a fazer registros descritivos, saber separar os detalhes relevantes dos triviais, aprender a fazer anotações organizadas e utilizar métodos rigorosos para validar suas observações. Além disso, precisa preparar-se mentalmente para o trabalho, aprendendo a se concentrar durante a observação, o que exige um treinamento dos sentidos para se centrar nos aspectos relevantes. Esse treinamento pode ocorrer em situações simuladas ou no próprio local em que ocorrerá a coleta definitiva de dados, bastando para isso que seja reservada uma quantidade específica de tempo para essa atividade (PATTON, 1980 apud LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p.26).

Para as autoras, “ao olhar para um mesmo objeto ou situação, duas pessoas enxergam diferentes coisas”, pois “o que cada pessoa seleciona para ver depende muito de sua história pessoal e principalmente de sua bagagem cultural” (p.25). Uma característica que está intrínseca no ser humano é a de privilegiar alguns aspectos e de negligenciar outros, mas, em termos de pesquisa, ele é produtor de conhecimentos.

As autoras, ainda afirmam que, como em qualquer outra técnica, a observação apresenta vantagens e desvantagens. A vantagem é que a observação permite ao pesquisador chegar

CAPÍTULO 1 – METODOLOGIA DE PESQUISA

mais perto dos sujeitos da pesquisa, pois na “medida em que o observador acompanha as experiências diárias dos sujeitos, pode tentar aprender a sua visão de mundo, isto é, o significado que eles atribuem à realidade que os cerca e às suas próprias ações” (p.26). Já, como desvantagem, as autoras colocam que “a observação pode provocar alterações no ambiente ou no comportamento das pessoas observadas” e que o método se “baseia muito na interpretação pessoal” do pesquisador (p.27).

Sendo determinada a observação como uma técnica para a coleta de dados, Lüdke e André (1986) oferecem algumas variáveis nos métodos de observação:

- Grau de participação do observador na pesquisa;
- Explicitação dos propósitos da pesquisa junto aos sujeitos;
- Tempo de permanência do pesquisador em campo.

Grau de participação na pesquisa

Há muitas variações dentro desse item que podem mudar conforme o desenvolvimento da pesquisa. A decisão sobre qual o grau de participação na pesquisa não significa simplesmente decidir se a observação será ou não participativa. Esta escolha é realizada segundo a necessidade da pesquisa.

Explicitação dos propósitos da pesquisa junto aos sujeitos

Nesse item, o pesquisador decide qual medida tornará explícitos os propósitos da pesquisa junto aos sujeitos. Buford Junker (1971 apud LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p.28) situam quatro variações dentro desse item: participante total; participante como observador; observador como participante e observador total.

O *participante total* não revela ao grupo sua verdadeira identidade de pesquisador nem o propósito do estudo. O *participante como observador* não oculta totalmente suas intenções, ele revela apenas o que pretende. O *observador como participante* revela sua identidade de pesquisador e os objetivos do estudo desde o início. O *observador total* não interage com o grupo observado, ele pode desenvolver sua atividade, por exemplo, sem ser visto.

Tempo de permanência do pesquisador em campo

O tempo de permanência do pesquisador em campo pode variar dependendo de sua pesquisa, do tipo de problema que está sendo estudado e do propósito do estudo.

1.2.4. Avaliação do Produto Produzido

Segundo Romberg (1992), no campo da Educação Matemática é comum os pesquisadores criarem produtos, materiais, técnicas ou produtos educativos, que visem à melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática. O autor apresenta quatro metodologias gerais para determinar a qualidade do novo produto: avaliação de necessidades, avaliação formativa, avaliação somativa e avaliação esclarecedora.

A avaliação de necessidades decide se o projeto do novo produto é bom. Para isso Romberg (1992, p.58) coloca as seguintes questões, que devem ser respondidas pelo pesquisador, “(a) há uma necessidade do produto? (b) há uma razoável probabilidade de que o produto que está sendo considerado preencherá aquela necessidade? (c) entre outros produtos, que prioridade este produto tem?” (p. 58).

Na avaliação formativa observa-se se o produto criado corresponde às expectativas do projeto, assim, “(a) o conteúdo do produto é de alta qualidade? (b) o desempenho dos resultados pretendidos é alcançado? (c) o desempenho dos resultados não desejados é identificado? E (d) são fornecidos os serviços de apoio necessários para a instalação?” (p. 58).

Para saber se o produto está pronto para ser usado, a avaliação somativa, Romberg (1992) coloca as seguintes questões: “(a) quão diferente é o conteúdo de seu produto daquele de seus concorrentes? (b) que diferenças de desempenho há entre ele e o de seus concorrentes? (c) que diferenças de custo existem entre ele e o de seus concorrentes? E (d) foram feitas provisões para manter o uso do produto?” (p.58).

Por último, a avaliação esclarecedora envolve aplicações de métodos de pesquisa como, por exemplo, estudo de caso, observação participante, etnografia, para podermos avaliar os novos produtos educacionais. Nesta avaliação conta-se sobre o uso do produto e suas implicações no ensino e na aprendizagem.

CAPÍTULO 1 – METODOLOGIA DE PESQUISA

Uma vez adotada a Metodologia de Romberg daremos continuidade à pesquisa trabalhando, no segundo capítulo, o primeiro bloco de Romberg – identificação do problema de pesquisa.

CAPÍTULO 2
1º BLOCO DE ROMBERG
IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA
DA PESQUISA

1º BLOCO DE ROMBERG

IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Seguindo a Metodologia de Pesquisa de Romberg, queremos mostrar, neste capítulo, como poderia ser vista nossa pesquisa inserida nessas atividades. Damos início à pesquisa trabalhando o primeiro bloco, onde as quatro primeiras atividades: Fenômeno de Interesse, Modelo Preliminar, Relacionar com Ideias de Outros e Perguntas ou Conjecturas são colocadas visando à definição do Problema da Pesquisa.

2.1. Fenômeno de Interesse

“Toda pesquisa começa com uma curiosidade sobre um fenômeno particular do mundo real” (ROMBERG, 1992, p.51).

A identificação do fenômeno de interesse é o que constitui o início de uma pesquisa, pois é quando o pesquisador situa sua curiosidade sobre um certo fenômeno. Esse fenômeno é, de fato, o objeto de estudo pretendido e, neste caso, se define como

O Ensino-Aprendizagem de Equações Polinomiais 2º grau

Em meus primeiro e segundo graus, eu adorava as aulas de Matemática, pois sempre tive facilidade em aprendê-la. Mas, muitos de meus colegas não gostavam dessa matéria porque não conseguiam compreender seus conceitos e regras. Assim, me perguntava: – Por que os alunos, em sua maioria, têm tantas dificuldades em aprender Matemática? Respondendo-me, sentia que alguns dos motivos para que esse processo ocorresse podiam surgir da falta de compreensão do conteúdo trabalhado pelo professor com eles, ou seja, os alunos não conseguiam atribuir significado ao que o professor falava. A visão da Matemática, pelos alunos, era a de uma matéria “maçante”, pesada e parecia ser responsável pelo desconforto mental presente em alguns deles.

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Entretanto, na graduação, eu e meus colegas, ao nos depararmos com algumas matérias mais abstratas, às vezes, apresentávamos dificuldade para sua aprendizagem. Parecia-nos uma outra Matemática aquela que nos estavam “ensinando”. Na faculdade, com alunos desejosos de fazer Matemática, ela foi trabalhada fazendo uso de definições e demonstrações de teoremas, numa forma completamente diferente daquela trabalhada na Matemática aprendida nos primeiro e segundo graus escolares. Pude, nesse período, observar que alguns dos professores da graduação não tinham a preocupação de verificar se seus alunos compreendiam ou não os conceitos elaborados por eles e que dificultavam nossa aprendizagem.

Assim, o pensamento de que a Matemática é “chata” está, muitas vezes, presente nas salas de aula. Esse pensamento também é compartilhado por pais, amigos, pessoas que não gostavam ou que não eram “boas” na matemática escolar. Sente-se que há alunos que não conseguem participar de uma aula de Matemática, não gostam de resolver exercícios e, com frequência, não compreendem o porquê de terem que aprender aquela matemática que lhes está sendo impingida.

Segundo o *Relatório Nacional Saeb 2003* (2006), as pesquisas mostram as muitas deficiências dos alunos em Matemática. A média de proficiência mínima satisfatória, para a 8ª série do Ensino Fundamental, é de 300 pontos na escala interpretada pelo Saeb. Em 2003, 49,8% dos alunos ficaram com proficiência entre 125 e 175 pontos, desenvolvendo apenas algumas habilidades elementares de interpretação de problemas. Mas, não conseguindo transpor o que está sendo pedido no enunciado do problema para uma linguagem matemática específica, resolviam equações com uma incógnita, mas não conseguiam interpretar os dados de um problema fazendo uso dos símbolos matemáticos. O *Saresp 2007* (2008) mostra que esses dados ainda continuam valendo, pois quase 50% dos alunos estão abaixo do nível básico. Esses alunos apresentam um domínio insuficiente dos conteúdos trabalhados em sala de aula.

Esses números refletem uma defasagem do ensino que vem ocorrendo há anos. De fato, de minha própria vivência escolar e de observações atuais, posso notar essa defasagem.

No período em que aprendi equações, minha professora ensinava que o importante era encontrar o valor do x . Ela nos passava a técnica e, depois, resolvíamos listas de exercícios

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

para fixar o processo. Caso a professora mudasse a letra e, em vez de x pusesse y ou z, não sabíamos resolver mais nada. A forma de ensino era intensamente mecanizada.

Fruto de minhas análises, sobre essas observações, posso perceber que, ao estudarem equações, os alunos não conseguem atribuir significados aos conceitos e conteúdos trabalhados. Eles não entendem o porquê da letra x na Matemática. Para eles o x não tem sentido algum, é apenas uma letra, como atestado abaixo:

As crianças têm dificuldades em estabelecer significado às letras em álgebra. De fato, algumas crianças não percebem que uma letra é usada para significar um número generalizado, embora outras pensem que o valor numérico de uma letra varia conforme a posição que essa letra ocupa no alfabeto, significando que y é maior que a (MILTON, 1988, apud PINTO, 1997, p.8).

Em 2007, no estágio supervisionado de Prática de Ensino, observei esse fato quando uma aluna, cursando a 8ª série do Ensino Fundamental, ao ser questionada sobre o que ela entendia por $a^n = b \leftrightarrow a = \sqrt[n]{b}$ disse: “— Nada! Se com número (a Matemática) já é difícil, com letra é impossível!”. No ano de 2006, realizei, na escola EEPG Heloisa Lemenhe Marasca, Rio Claro / SP, plantões de dúvidas com alunos da 8ª série do Ensino Fundamental. Na época, um aluno tinha dúvidas sobre equações do 1º grau e não conseguia entender o porquê de ter que encontrar o valor de x.

Assim, considero relevante a investigação que está sendo proposta nesta pesquisa, pois, nela, pretendo investigar não somente as dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem de equações polinomiais como, também, verificar quais os significados por eles atribuídos a esses entes matemáticos durante o processo de ensino-aprendizagem. Ajudá-los a superar essas dificuldades através da resolução de variados problemas é um propósito importante do professor que, como um veículo, os guiará e orientará.

2.2. Modelo Preliminar

O Modelo Preliminar é o “esqueleto” de uma pesquisa, a ideia inicial de um trabalho, em que encontramos os elementos constituintes do fenômeno de interesse e as relações entre eles.

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Segundo Romberg (1992), um modelo é um conjunto de descrições e de relações implícitas das variáveis-chave do fenômeno de interesse. O modelo ajuda a esclarecer o fenômeno de interesse

(...) porque fazer assim envolve especificar as variáveis que se acredita estarem operando na situação real. De fato, o modelo é uma simplificação desde que alguns aspectos da realidade sejam significativos e outros irrelevantes. Apesar disso, o modelo serve como um ponto de partida ou de orientação para a situação de interesse (p.51).

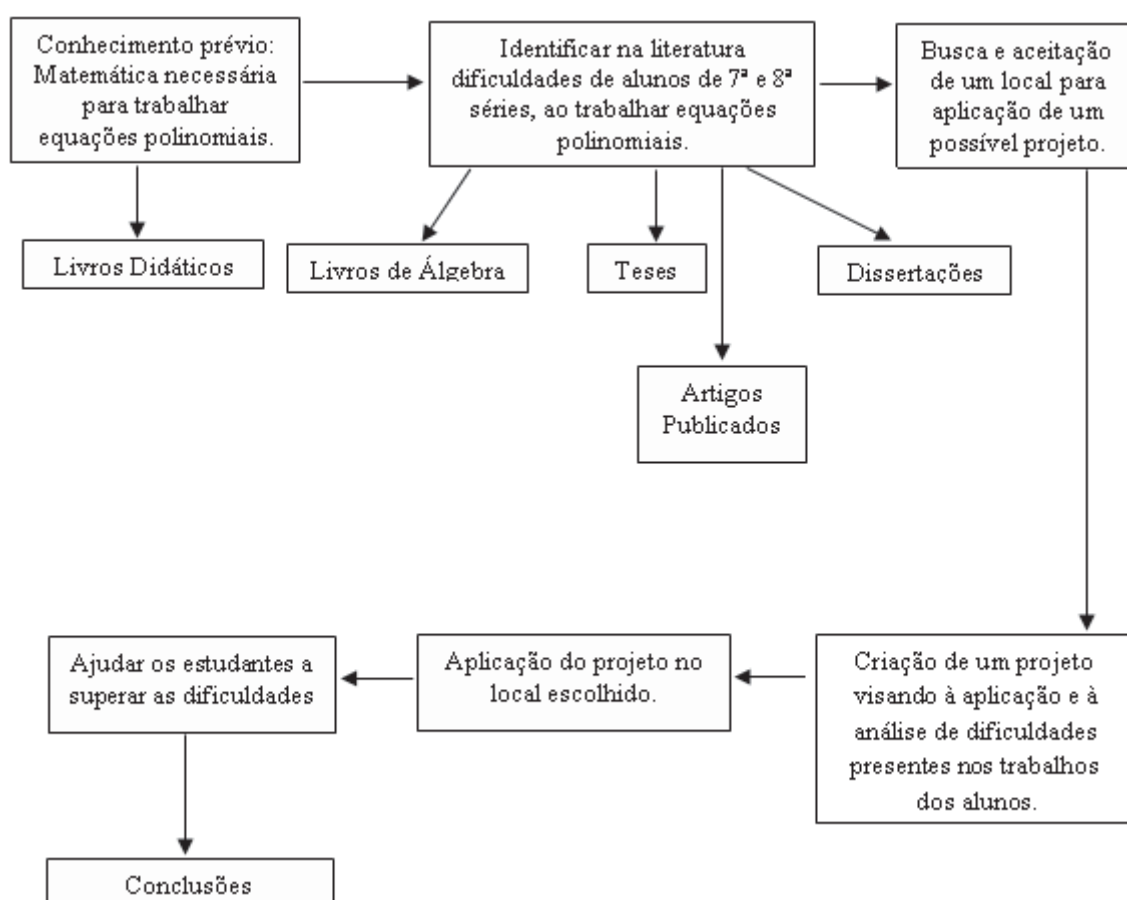


Fig. 3 Modelo Preliminar

Nosso Modelo Preliminar constituiu-se por um conjunto de passos tais como:

- O conhecimento prévio da Matemática trabalhada com alunos até a 6ª série, visando à identificação da Matemática necessária para se trabalhar, com eficiência, as equações polinomiais;

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

- A identificação de dificuldades de alunos no trabalho com equações polinomiais, identificadas na literatura nacional e estrangeira, relacionadas ao ensino-aprendizagem de equações polinomiais;
- A busca e a aceitação de um local para aplicação de um possível projeto, isto é, a definição de uma escola e a permissão para nela aplicar um projeto;
- A criação de um projeto, ou seja, criar um projeto que vise ao ensino-aprendizagem de equações polinomiais dando atenção à aplicação e à análise nos trabalhos dos alunos;
- A aplicação do projeto;
- A busca de diferentes modos de ajudar os alunos a superar suas dificuldades;
- Tirar conclusões.

2.3. Relacionar com Ideias de Outros

Uma atividade importante da pesquisa, segundo Romberg (1992), é a de examinar o que outras pessoas pensam sobre o nosso fenômeno de interesse e determinar se suas ideias podem ser usadas para esclarecer, ampliar ou modificar o modelo preliminar criado.

Relacionar com ideias de outros, nos leva a fazer uma pesquisa bibliográfica e, como afirma Santos (2007), a pesquisa bibliográfica pode não nos oferecer dados novos ou dados inéditos. Mas, vale ressaltar que isso em nada compromete a possibilidade de originalidade.

Acreditamos que esta nossa pesquisa terá uma fundamentação teórica baseada em três eixos temáticos necessários para o seu desenvolvimento: a Álgebra Escolar, a Produção de Significados e a Resolução de Problemas.

Uma vez que o trabalho com equações polinomiais é um tópico importante da Álgebra, decidimos que um dos eixos norteadores de nossa pesquisa seria um estudo mais cuidadoso da “Álgebra” como um padrão de conteúdo reconhecidamente de mérito.

O segundo eixo foi identificado, por nós, como “Produção de Significados”. Nesta pesquisa, entenderemos *significado* como “o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Não o conjunto do que se poderia dizer, e, sim, o que efetivamente se diz no interior de uma atividade” e, quando se diz que o aluno vai produzir significados matemáticos,

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

entende-se que é quando ele fala sobre aquele objeto, quando ele explica o que aquele objeto quer dizer para ele. Dessa maneira, “*produzir significado* é falar a respeito de um objeto” (LINS; GIMENEZ, 1997-2001, p.145). Para compreender como os alunos aprendem Matemática, precisa-se examinar cuidadosamente como eles constroem o significado matemático do conceito e das ideias matemáticas envolvidas no processo. Para ilustrar um conceito matemático, deve-se examinar, em profundidade, como eles (os alunos) constroem esse conceito enquanto estão envolvidos com um problema, numa sala de aula baseada no processo de investigação.

A linha de pesquisa do GTERP compromete-se com o movimento da Resolução de Problemas, tanto teórica quanto metodologicamente.

Sempre, na humanidade, problemas estiveram presentes. Entretanto, o trabalho com Resolução de Problemas é bastante recente e nossa área de pesquisa é mais recente ainda, tendo tido seu início a partir dos anos noventa do século XX. Assim, outro eixo importante de nossa pesquisa é a “Resolução de Problemas”.

Através da resolução dos problemas queremos pesquisar o que alunos pensam, defendem e argumentam sobre as ideias discutidas nos grupos e envolvidas com a busca da resposta ao problema dado. A produção do trabalho desenvolvido pelos alunos quer individualmente, quer em grupos, é o que, em nossa pesquisa, queremos avaliar.

Deste modo, acreditamos que “ouvir” bem esses “outros” que selecionamos para conduzir nossa pesquisa pede, cada um deles, um tempo maior e uma investigação cuidadosa.

2.3.1. A Álgebra Escolar

A Aritmética, segundo Onuchic e Botta (1998), é o ramo da Matemática que trabalha sobre números, relacionando-os, definindo operações sobre eles, estabelecendo propriedades sobre elas e fazendo aplicações. Já Mac Lane e Birkhoff (1967 apud USISKIN, 1995, p.9), querendo fazer uma tentativa de ligação entre a Álgebra Superior e a Álgebra do Ensino Fundamental, afirmam que

A Álgebra começa como a arte de manipular somas, produtos e potências de números. As regras para essas manipulações valem para todos os números, de modo que as manipulações podem ser levadas a efeito com letras que representem números. Revela-se então que as mesmas regras valem para diferentes espécies de números [...] e que as regras inclusive se aplicam a coisas [...] que de maneira nenhuma são números. Um sistema algébrico, como veremos, consiste em um conjunto de elementos de qualquer tipo sobre os quais operam funções como a adição e a multiplicação, contanto apenas que essas operações satisfaçam certas regras básicas.

Usiskin (1995) afirma que a Álgebra do Ensino Fundamental tem a ver com a compreensão do significado das letras (hoje chamadas variáveis) e das operações realizadas com elas. Para ele, os alunos estão estudando Álgebra quando se deparam com as variáveis pela primeira vez.

Assim, podemos dizer que, a Aritmética é a matemática da rua e a Álgebra é a matemática da escola, embora ambas andem juntas, mas a Álgebra resolve problemas que a Aritmética não resolve. Lins e Gimenez (1997) afirmam que a Álgebra é uma ferramenta para a Aritmética e o que interessa na escola é a aplicação de algoritmos.

Neste capítulo apresentamos um desenvolvimento histórico da Álgebra, uma breve história da Álgebra no currículo brasileiro, o ensino-aprendizagem da Álgebra, um estudo sobre o pensamento algébrico e, finalmente, algumas dificuldades dos alunos em Álgebra.

2.3.1.1. Desenvolvimento Histórico da Álgebra

A Álgebra, em seu desenvolvimento histórico, passou por três fases, segundo Nesselmann (1842, apud EVES, 1997, p.206): a retórica, em que tudo era escrito por palavras; a sincopada, em que se faz uso de abreviações para algumas palavras; e a simbólica com o uso de símbolos próprios.

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Falando sobre o desenvolvimento histórico da Álgebra, é claro que estaremos também falando sobre o desenvolvimento das notações algébricas. Como cada fase desse desenvolvimento histórico não tem uma data fixa, um período fixo, realizaremos uma breve viagem às diferentes civilizações a fim de conhecer como elas trabalhavam a Álgebra e, em especial, as equações polinomiais do 2º grau, nosso objeto de estudo.

Babilônia e Egito

No período de 3000 a.C. a 525 a.C. surgiram civilizações ao longo dos rios, como o Nilo, na África, e o Tigre e o Eufrates, na Ásia Ocidental. Estas novas sociedades apresentavam uma economia baseada na agricultura, que variava devido ao fato de ocorrer inundações que irrigavam as terras ao longo desses rios e que, ao descenderem, provocavam diferentes áreas para o plantio.

A Matemática surgiu, nesse contexto, como uma ciência ligada à prática da agricultura e da engenharia. Estes povos necessitavam de cálculos para um calendário utilizável, já que os agricultores precisavam saber em que período ocorriam as enchentes; para desenvolver um sistema de medidas para uso na colheita; para armazenar e distribuir alimentos; para criar métodos de agrimensura para poderem construir canais e reservatórios; para dividir a terra; entre outros.

Os povos da Antiguidade mediam áreas e volumes utilizando suas próprias regras. Mas,

A expansão de cidades precisou de novas e mais elaboradas formas de organização interna que induziu novos e complexos problemas – como calcular certo pedaço de terra, como calcular os juros de um empréstimo, como resolver problemas de herança, como calcular o preço de mercadorias diferentes. Todavia, nós também encontramos problemas não práticos, isto é, problemas que, embora formulados na existência de termos da semiótica concreta de experiências de toda a vida, não têm relação direta com práticas necessárias (RADFORD, 2001, p.14).

Por volta de 2000 a.C., a Aritmética Babilônica evoluiu para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Os babilônios sabiam usar equações, eles não as resolviam por fórmulas, tinham um método próprio de resolução de equações do 2º grau. Segundo Nobre (2003), no

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

tablete babilônico BM 13901, há vinte e quatro problemas matemáticos e alguns se referem às equações de 2º grau. O seguinte problema, retirado desse tablete, envolve equações quadráticas:

Eu somei² a área e o lado de um quadrado e o resultado é 3/4.

Os babilônios resolviam este problema da seguinte forma:

- *Eu somei a área e o lado de um quadrado e o resultado é 3/4;*
- *Tome o coeficiente igual a 1;*
- *Divida o coeficiente pela metade, o resultado é 1/2;*
- *Multiplique 1/2 por 1/2 e o resultado é 1/4;*
- *A 1/4 acrescente 3/4 e o resultado é 1;*
- *A raiz quadrada de 1 é 1;*
- *1/2 que foi multiplicado, deve ser subtraído de 1, e o resultado é 1/2;*
- *Este é o valor do lado do quadrado.*

(NOBRE, 2003, p.7, 8)

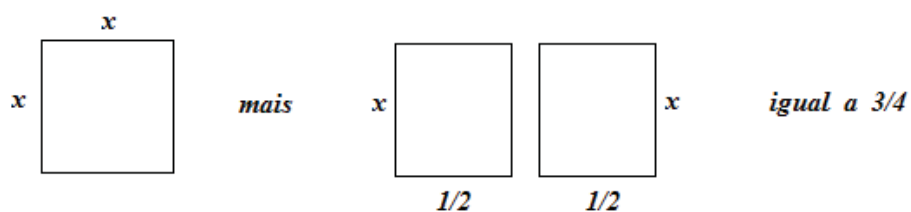
Observemos que os babilônios resolviam de uma maneira dissertativa equivalente ao método de completar quadrados. Na forma algébrica atual obtemos, pelo método de completar quadrados,

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

As expressões x^2 e x eram interpretadas como as áreas de um quadrado e o lado de um retângulo. A solução do problema é, então, a medida do lado do quadrado. O retângulo era dividido em dois retângulos de mesma área. A equação era interpretada como:

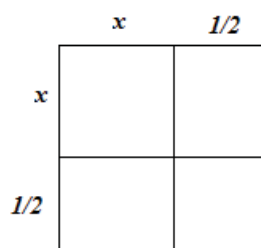
² “A área e o lado do quadrado não podem ser adicionados por serem medidas com unidades diferentes” (NOBRE, 2003, p.5). O que o problema nos diz é que os valores numéricos é que foram somados.

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

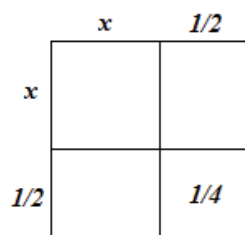


$$x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}$$

Cada retângulo era arranjado de modo que ficassem justapostos a dois lados do quadrado.



De modo a completar um quadrado perfeito acrescentava-se um quadrado no canto da figura anterior, cuja medida do lado desse quadrado é a mesma do lado conhecido do retângulo, ou seja, $\frac{1}{2}$. Assim, a área do novo quadrado é igual a $(\frac{3}{4}) + (\frac{1}{4})$.



$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$x + \frac{1}{2} = 1$$

$$x = 1 - \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Os egípcios iniciaram uma linguagem própria para a Matemática, com certo simbolismo. No Papiro de Rhind (~ 1650 a.C.), também conhecido como Papiro de Ahmes, a incógnita, quantidade desconhecida, era representada pela palavra *aha*.

Para a resolução de problemas algébricos, os egípcios utilizavam o método conhecido como *método da falsa posição*, que consiste em assumir valores falsos para as quantidades procuradas e ajustá-las a partir de um “fator de ajuste proporcional” que transforma os valores falsos em verdadeiros (RADFORD, 2001, p.15). Sanford (1927, apud STANIC; KILPATRICK, 1988) nos coloca um problema, como exemplo, retirado de um trabalho do século XV de Phillip Calandri:

A cabeça de um peixe pesa 1/3 de todo o peixe, a sua cauda pesa 1/4, e o seu corpo pesa 30 onças. Qual é o peso de todo o peixe? (p.3)

Com o método da falsa posição obtemos a resolução do problema acima, da seguinte maneira

Se todo o peixe pesa 12 onças, então a cabeça pesa 4 onças, a cauda 3 onças, e o corpo 5 onças. Evidentemente, o peso do peixe é o mesmo múltiplo de 12 que 30 é de 5 e, então, o peso do peixe é 72 onças (SANFORD, 1927, apud STANIC; KILPATRICK, 1988, p.3).

<i>peso total</i>	<i>peso do corpo</i>
12	5
?	30

desde que vale a proporcionalidade,

$$\frac{12}{x} = \frac{5}{30}$$

Então,

$$5x = 12 \cdot 30 \Rightarrow x = \frac{360}{5} \Rightarrow x = 72$$

Com a linguagem algébrica atual pode-se resolver esse problema da seguinte maneira:

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Seja x o peso do peixe todo, então

$$x = \frac{1}{3}x + 30 + \frac{1}{4}x$$

$$x = \frac{4x + 360 + 3x}{12}$$

$$12x = 7x + 360$$

$$5x = 360$$

$$x = 72$$

No Papiro de Rhind não havia problemas que envolvessem equações polinomiais do 2º grau. Mas, segundo Nobre (2003), em um outro papiro, o Papiro de Moscou, já há exercícios que envolvem equações polinomiais do tipo $ax^2 = b$ como, por exemplo,

Um retângulo tem área 12. Sua largura é $1/2$ do comprimento mais $1/4$ do comprimento. Determine os lados do retângulo.

Usando recursos atuais:



$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x\right) \cdot x = 12$$

$$\frac{3}{4}x \cdot x = 12$$

$$\frac{3}{4}x^2 = 12$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4$$

Assim, o comprimento vale 4 e a largura vale 3.

Grécia

Os gregos, diferentemente dos povos da Babilônia, resolviam sob a forma geométrica muitos problemas que podem ser considerados como sendo referentes a equações de 2º grau.

Segundo Nobre (2003) os *Elementos* de Euclides (~300 a.C.) nos mostram como resolver geometricamente problemas referentes as equações de 2º grau. Nos *Elementos*, a maior parte dos exemplos referentes a isso é encontrada no livro II. Na proposição 11 do livro II, Euclides mostra a resolução geométrica da equação do 2º grau do tipo $x^2 + ax = A$.

Aproximadamente 500 anos depois de Euclides, surge na Grécia o principal trabalho voltado a assuntos que hoje são conhecidos como relativos à resolução de equações algébricas. Diofanto de Alexandria (~250 A. D.) deu um passo significativo para a passagem da álgebra geométrica para a álgebra simbólica. Sua obra *Aritmética*, conforme informa Diofanto na introdução do texto, seria composta de 13 livros. Destes, somente seis chegaram até os nossos dias em sua versão grega original. A tradução para o árabe de outros quatro livros foram encontrados recentemente, no entanto presume-se que estes não tenham sido traduzidos a partir da versão original escrita por Diofanto, mas de uma versão comentada feita por Hypatia (~375-415) por volta dos anos 400. Nesses 10 livros que são conhecidos, não existe nenhuma teoria de resolução de equações, mas Diofanto anuncia na introdução da obra que ali seria mostrado como se resolvem algumas equações específicas de 2º grau e ainda equações que envolvem potências de nível superior, como também equações onde há a utilização de potências em diferentes variáveis, como por exemplo $x^2 + y^2 = a^2$, $x^3 + y^3 = a^3$, etc (NOBRE, 2003).

Índia

Nobre (2003) continuando seu livro *História da Resolução de Equações do 2º grau* conta que

A história da Matemática que é contada tradicionalmente segue, em sentido amplo e bem geral, um caminho que possui origem nos povos egípcios e babilônios, adquire embasamento teórico com os povos gregos e finalmente foi difundida no mundo europeu principalmente por intermédio dos povos árabes. Se essa história for contada com maiores detalhes, então as influências que esses povos sofreram de outros povos começam a florir e o

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

caminho tradicional ganha novas vertentes que necessariamente avançam no mundo oriental. Aparecem as influências vindas de povos milenares, como os chineses e os hindus, por exemplo. No tocante ao assunto da descoberta da resolução de equações algébricas, o povo hindu teve papel primordial (p.12).

Como os números negativos não eram ainda conhecidos no tempo de Diofanto, Nobre (2003, p.13) diz que “a introdução de números negativos como coeficientes de uma equação do 2º grau e a utilização do zero como elemento de cálculo, feitas por eles (hindus) foi decisiva no sentido de se achar sua solução geral”. Dentre os matemáticos que atuaram nessa área, destaca-se Aryabhata (~476-?).

Um estudo no campo da resolução de equações algébricas, mais completo que o realizado por Aryabhata, foi feito pelo também astrônomo e matemático hindu Brahmagupta (~598-665?). Em sua principal obra *Brāhmasphuṭa siddhānta* (628), ele dá um passo importante para a compreensão do processo de resolução de equações de 2º grau e ainda de graus superiores, pois surge como o primeiro autor a utilizar o zero como elemento de cálculo e também a utilizar os números negativos. No campo numérico, ele assumiu o zero como sendo o elemento de separação entre os números positivos e os números negativos. No campo específico da resolução de equações quadráticas, Brahmagupta desenvolveu estudos para a solução geral de equações do tipo $ax^2 + bx = d$, escritas na forma atual. A solução dada por ele para esta equação foi:

à soma multiplicada pelo coeficiente do quadrado, você adiciona o quadrado da metade do coeficiente da incógnita. Em seguida toma a raiz quadrada. A metade do coeficiente da incógnita é subtraída, e finalmente você divide pelo coeficiente do quadrado. Agora você tem a incógnita (NOBRE, 2003, p.14).

Brahmagupta desenvolveu seus estudos em relação à resolução de equações algébricas e obteve importantes resultados com o trabalho com equações do tipo $ax^2 + b = y^2$, conhecidas atualmente como *Equação de Pell*.

Mundo Árabe

Com a criação de um estado árabe independente no ano 622 da Era Cristã, o desenvolvimento da ciência árabe ganha impulso.

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

A principal figura do mundo árabe, que teve estreitas ligações com os povos hindus, foi Muhammad ibn-Musã al-Khwārizmī (780-850). Al-Khwārizmī realizou estudos sobre Álgebra, sua obra principal é *Al-jabr Wa'l muqabalah*, que deu origem à palavra Álgebra:

O nome “Álgebra” é uma versão européia de al-jabr, parte do título do tratado do al-Khowārizmī *Hisāb al-jabr w'al muqābalah*. Aparentemente este título significa “a ciência de reunião e redução” cujas palavras referem-se às duas principais operações que os árabes usavam na resolução de equações. “Reunião” refere-se à transferência de termos negativos de um lado da equação para o outro lado e “redução” a combinação de termos semelhantes no mesmo lado de um único termo ou o cancelamento de termos iguais sobre lados opostos da equação. Por exemplo, na equação, com notação moderna, $6x^2 - 4x + 1 = 5x^2 + 3$, a “reunião” dá $6x^2 + 1 = 5x^2 + 4x + 3$ e da “redução” $x^2 = 4x + 2$ (BURTON, 2007).

A obra *Al-jabr Wa'l muqabalah* apresenta métodos de se resolver equações, especialmente as quadráticas, sem utilizar símbolos. Al-Khwarizmi as classificou em seis tópicos:

1. Quadrado igual à raiz: $ax^2 = bx$
2. Quadrado igual ao número: $ax^2 = c$
3. Raiz igual ao número: $bx = c$
4. Quadrado mais raiz igual ao número: $ax^2 + bx = c$
5. Quadrado mais número igual à raiz: $ax^2 + c = bx$
6. Raiz mais número igual ao quadrado: $bx + c = ax^2$

Nobre (2003) afirma que al-Khwarizmi não trabalhava com os números negativos e, por isso, não fazia sentido a equação de 2º grau na forma geral $ax^2 + bx + c = 0$. O autor, ainda, nos coloca que al-Khwarizmi apresentou soluções diretas para os três primeiros tópicos e para os três últimos, ele realizou equações particulares para cada tópico.

Tópico 4) Um quadrado mais dez raízes do mesmo é igual a trinta e nove. Qual é o quadrado?

Solução dada por al-Khwarizmi:

Tome a metade do número de raízes, obtendo cinco. Isto é multiplicado por si mesmo – o produto será vinte e cinco. Adicione isto a trinta e nove – a soma é sessenta e quatro. Tome então a raiz quadrada disto, que é igual a oito, e subtraia disto a metade do número de raízes que é cinco. A diferença é três. Esta é a raiz do quadrado procurado – e o próprio quadrado é nove (NOBRE, 2003, p.18).

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Tópico 5) Um quadrado mais vinte e uma unidades é igual a dez raízes? Qual é o quadrado?

Solução dada por al-Khwarizmi:

Tome primeiro a metade do número de raízes, que aqui é cinco, e que elevada ao quadrado dá vinte e cinco. De vinte e cinco subtraia as vinte e uma unidades. Isto dá quatro, que tem dois como raiz quadrada. Da metade das raízes, aqui cinco, subtraia-se esta raiz quadrada, obtendo três como a raiz, e o próprio quadrado é nove. Se quiser, pode adicionar a raiz quadrada (a cinco). Terá então sete como raiz, e quarenta e nove como o próprio quadrado... este exemplo fornece duas raízes, algo que não encontramos anteriormente (NOBRE, 2003, p.20).

Tópico 6) Três raízes mais o número quatro é igual a um quadrado. Qual é o quadrado?

Solução dada por al-Khwarizmi:

Tome a metade das raízes, aqui $1(1/2)$, e eleve ao quadrado, obtendo $2(1/4)$. Adicione então o número quatro, dando $6(1/4)$, com a raiz quadrada $1(1/2)$. A isto se acrescenta a metade das raízes, aqui $1(1/2)$, que dá quatro. Então o quadrado é igual a dezesseis (NOBRE, 2003, p.21).

Para cada tópico, após a resolução algébrica, ele apresentava uma justificativa, isto é, uma demonstração geométrica por meio do método de completar quadrados.

Europa

Na Idade Média (séc. XII, séc. XIII), segundo Nobre (2003), o personagem mais importante no mundo matemático foi Leonardo Fibonacci de Pisa (1170?-1250?), que era um mercador italiano que possuía conhecimentos das línguas árabe e grega e que realizou várias viagens por países árabes. Sua mais famosa obra matemática foi *Liber abbaci* (1202, 1228), que é conhecida como um marco do desenvolvimento da Matemática na Idade Média.

No capítulo 14 de *Liber abbaci* encontra-se a contribuição de Fibonacci na resolução de equações algébricas. Ele se utilizava de alguns exemplos encontrados no livro II dos *Elementos* de Euclides e os apresentava através de exemplos numéricos. Seu trabalho específico com equações algébricas é desenvolvido através de casos como $x^2 = bx$ e

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

$x^2 = c$, e então, com base nas equações propostas por al-Khwārizmi, são trabalhadas as equações do tipo $x^2 + bx = c$, $x^2 = bx + c$, $x^2 + c = bx$.

A Renascença (séc. XVI, séc. XVII) é marcada por inúmeros avanços na Matemática e, em especial, o estudo da resolução de equações de 2º grau, pode-se dizer, alcança o seu resultado final.

François Viète (1540-1603), o maior matemático francês do século XVI, foi o responsável por introduzir a notação simbólica que permite a escrita de equações polinomiais e suas propriedades a partir de fórmulas gerais.

Há uma diferença entre a Álgebra de Diofanto e a Álgebra de Viète. Diofanto pensava nos conceitos algébricos relacionados ao objeto número, que nos faz pensar sobre os entes matemáticos. Já Viète pensava nos conceitos algébricos a partir da propriedade número (MOURA; SOUSA, 2005).

Viète utilizava as vogais para representar as incógnitas e as consoantes para representar as constantes. Mas, o trabalho de Viète foi ofuscado pela Álgebra de Descartes, que introduziu, em 1637, a convenção atual: as últimas letras do alfabeto indicam as incógnitas e as primeiras letras as constantes. Descartes também introduziu a notação atual para as potências e percebeu que uma letra poderia representar qualquer quantidade, o que representou um grande avanço em relação ao trabalho de Viète.

Na revista *Zetetiké* (nº 24, 2005) pode-se ler que

A notação literal se libertou por si mesma de determinadas variações das quais fica prisioneira durante séculos: o ‘x’ e o ‘y’ não mais representaram simplesmente número, mas tornaram-se totalmente independentes dos objetos ou das grandezas que deveriam figurar, adquirindo uma significação que ultrapassava o objeto representado, tornando-se, a partir de então, um ser matemático completo, submetido às regras do cálculo ordinário. A letra permite que os raciocínios sejam abreviados e sistematizados, tornando o acesso ao abstrato muito mais fácil (IFRAH, 1998 apud MOURA; SOUSA, 2005, p.23).

A definição do conceito de variável como ‘símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números’ foi feita por Lejeune Dirichlet, no século XIX, numa tentativa de dar uma definição suficientemente ampla de função, a ponto de englobar as relações estudadas por Joseph Fourier. A função é a ferramenta atual de todos os matemáticos, ferramenta que permite ao homem dar nexos e compreender os movimentos fluentes do cotidiano, da realidade, da vida, que ora podem ser regulares, ora podem ser

irregulares. A palavra função expressa, provavelmente, a ideia mais importante de toda a História da Matemática (MOURA; SOUSA, 2005, p.39, 40).

2.3.1.2. A História da Álgebra no Currículo Brasileiro

Em 1599, segundo Mondini (2009), o ensino brasileiro era organizado pelos padres jesuítas. Com a saída dos jesuítas do Brasil e sem professores para continuar as aulas, o ensino passou a ser desarticulado. Em 1772 foram criadas as “aulas régias” (MIORIM, 1998 apud MONDINI, 2009, p.30), em que as aulas eram isoladas não havendo ligações (conexões) entre si.

Nos países mais desenvolvidos, a Álgebra era considerada um conteúdo importante, visto que

Na Inglaterra, na França, na Alemanha e principalmente nos Estados Unidos, a Álgebra é considerada como um dos ramos mais úteis e interessantes da instrução. Tal é a importância que ali se dá a esta matéria, que já foi incluída como parte do ensino obrigatório nas escolas primárias, onde os meninos e as meninas aprendem a converter facilmente os dados de um problema a uma equação algébrica (TRAJANO, 1953 apud MIGUEL, FIORENTINI, MIORIM, 1992, 41).

Como o Brasil queria, num ideal político, se igualar a eles era, então, necessário dominar os conhecimentos que esses países consideravam importantes. Devido a isso, o ensino da Álgebra precisou entrar nos currículos escolares brasileiros e, assim, pode-se dizer que o ensino da Álgebra no Brasil foi importado dos currículos dos países mais desenvolvidos (MONDINI, 2009).

Essa autora continuou dizendo que a Álgebra começou a fazer parte do currículo brasileiro em 1799, com a ocorrência da Carta Régia em 19 de agosto desse ano. A Geometria, a Trigonometria, a Aritmética e a Álgebra eram apresentadas em cursos separados, sendo a Álgebra o último conteúdo trabalhado. Até então eram ensinadas apenas Aritmética, Trigonometria e Geometria, exatamente nessa ordem. Na fase imperial, disseram Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) que quase sempre o estudo completo da Álgebra sucedia o estudo completo da Aritmética e antecedia o estudo completo da Geometria.

Em 1930 chegaram ao Brasil as ideias de Felix Klein, importante matemático do final do século XIX, que “mostraram as intersecções existentes entre áreas distintas como a

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Álgebra e a Geometria e a importância de trabalhar essas intersecções nos processos de ensino e de aprendizagem” (MONDINI, 2009, p. 31). Foram as ideias de Klein que abriram caminhos para o Movimento da Matemática Moderna no Brasil.

Em 1931, a Reforma Francisco Campos tentando organizar o ensino brasileiro, juntou as áreas Álgebra, Aritmética e Geometria assumindo a denominação de “Matemática” (MIGUEL, FIORENTINI, MIORIM, 1992). De acordo com Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), no período de 1799 até início da década de 60 do século XX, o ensino da Álgebra tinha um caráter reprodutivo, baseado em procedimentos mecânicos, e a Álgebra era usada para resolver equações e problemas.

Nessa época o ensino da Álgebra estava baseado nas regras das transformações das expressões algébricas que, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p.83), “são o processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes mediante o emprego de regras e propriedades válidas”. O ensino da Álgebra era, quase sempre, realizado de forma mecânica e automatizado. No livro de Thiré (1944) encontram-se listas de exercícios de Álgebra, em que o aluno deve seguir o modelo dado como, por exemplo, “os dez exercícios que se seguem são da forma $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ”, (apud ARAÚJO, 2008, p.2). A teoria apresentada nesse livro descreve as propriedades das expressões algébricas sem nenhuma justificação.

A Álgebra apresentava um poder de generalização, que a tornava uma ferramenta mais útil que a Aritmética, pois ampliava as possibilidades da Aritmética como, por exemplo, na resolução de problemas. Segundo Perez e Martins (1928, apud MIGUEL, FIORENTINI, MIORIM, 1992, p.43), “o fim que se propõe à Álgebra é achar uma fórmula, e esta refere-se a um caso geral e abstrato”.

Esses autores dizem ainda que

Para o estudante a Matemática devia assemelhar-se a um monstro de duas cabeças: uma estritamente racional, que seria desenvolvida pela Geometria, demonstrando-lhe todas as afirmações com o objetivo de elevar o seu espírito – ainda que tudo isso lhe fosse de difícil entendimento – e a outra, estritamente pragmática, que seria desenvolvida pela Aritmética e pela Álgebra, desafiando regras e fórmulas – geralmente aceitas sem justificativas com a finalidade de resolver problemas, em sua maior parte artificiais (MIGUEL, FIORENTINI, MIORIM, 1992, p.43).

Com o surgimento da Matemática Moderna no Brasil, na década de 1960, o ensino da Álgebra começou a perder a sua utilidade de apenas resolver equações e problemas. O

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Movimento da Matemática Moderna tinha como objetivo unificar os três campos da Matemática com a introdução de elementos unificadores, como a teoria dos conjuntos e as estruturas algébricas. Seu ensino passou a ter preocupações com os aspectos lógico-estruturais dos conteúdos e enfatizou a precisão da linguagem matemática, o rigor e a justificação das transformações algébricas através das propriedades estruturais.

O ensino da Álgebra começava pelo estudo da Teoria dos Conjuntos, cuja ênfase era dada nas operações e suas propriedades. No ano de 1962, entrou em vigor o Parecer 292, de 14 de novembro de 1962, que estabeleceu os tópicos a serem ensinados na Educação Básica, ou seja, para as Séries Iniciais, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Para o estudo da Álgebra ficou estabelecido o estudo de cálculo algébrico (operações com polinômios), razões e proporções, equações e inequações de 1º e 2º graus, trinômios do 2º grau, equações redutíveis a equações de 2º grau, problemas de 2º grau, sistemas de equações de 1º e 2º graus. Atualmente, nos currículos escolares, o conteúdo de Álgebra não se diferencia aos daquela época (MONDINI, 2009).

No final da era da Matemática Moderna, o ensino da Álgebra voltou a enfocar a resolução de equações e problemas. Apesar do fato de que projetos curriculares da Matemática Moderna dos anos 60 terem deixado de preencher os sonhos otimistas de seus construtores por uma reforma curricular massiva e universal, os projetos tiveram, de fato, certas mudanças fundamentais eficientes no conteúdo e na organização do currículo da Matemática de hoje. Um dos fins importantes do ensino de Matemática de hoje é – como durante a era da Matemática Moderna – o de ajudar os estudantes a compreender a estrutura da Matemática. Por exemplo, o pensamento algébrico tinha se tornado um foco de instrução no início das primeiras séries com o objetivo de crescer mais e mais durante cada ano seguinte.

2.3.1.3. Ensino-Aprendizagem da Álgebra

A Matemática, na escola, é uma das matérias em que os alunos apresentam maior dificuldade. Essa dificuldade, em geral, acontece pelo fato de ela ser para os alunos uma matéria sem significados e que, por isso, eles não conseguem compreender. Para muitos

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

alunos, a Matemática perde sua ligação com o cotidiano quando começam a estudar Álgebra, como é citado abaixo

Nós professores, na maioria das vezes, apresentamos os conceitos (...) que constam, nas Propostas Curriculares, de maneira mecânica, sem a participação do aluno no processo de construção desses conhecimentos. Tais conceitos são, normalmente, colocados na lousa para que os alunos copiem e em seguida, explicamos como funcionam, apresentamos alguns exemplos e solicitamos que os alunos façam outros exercícios semelhantes ao exemplo. Quase sempre se tratam de exercícios de repetição e memorização dos conceitos. Quando ensinados dessa forma, os alunos aprendem uma Matemática ausente de significados. (...) A Matemática torna-se um assunto exclusivo da escola, o que a torna desinteressante do ponto de vista do aluno, pois este acaba desestimulado (SCARLASSARI, 2007, p.39).

O professor transmite o seu saber para os alunos como se a mente deles fosse uma caixinha, em que, uma vez colocados os conceitos, esses não saíam dela jamais. Nessas condições, sendo o aluno um ser passivo, ele espera do professor a resolução de exercícios e problemas. Com isso, os alunos não produzem significados para a aprendizagem Matemática que lhes é apresentada, muitas vezes, de uma forma descontextualizada. Para muitos alunos a Álgebra não tem significado, pois apenas procuram memorizar fórmulas que serão esquecidas e, desta maneira, o seu pensamento algébrico não é desenvolvido. Na verdade, todos os alunos produzem seu próprio significado, mas que nem sempre corresponde a perspectiva do professor.

Para algumas pessoas a Matemática é vista como um bicho de sete cabeças, como algo impossível de se aprender. Segundo Lins (2005), monstros não são deste mundo, não seguem as regras deste mundo e, por isso, eles são assustadores, são monstruosos. Por não terem conhecimento de como o monstro age, algumas pessoas não sabem o que devem fazer em relação a ele. Então, por ser caracterizada, por muitos, como um monstro, a Matemática causa nas pessoas o sentimento de não saberem o que fazer com ela. Assim, se hoje a Matemática é considerada como difícil de ser aprendida, é porque sua aprendizagem se apoia sobre a memorização e a aplicação de saberes sem compreensão.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN-Matemática, 5ª a 8ª séries, (1998, p.19), “em nosso país o ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formação precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão”. Dessa maneira, o aluno não fica responsável pela construção de seu conhecimento.

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

No início do século XX, o ensino de Matemática era caracterizado por um trabalho apoiado na repetição e memorização de fatos básicos, como se pretendia nos anos 1920-1930, seguindo as influências de Thorndike com o connexionismo e o associacionismo

O professor falava, o aluno recebia a informação, escrevia, memorizava e repetia. Repetia exercícios feitos em sala de aula e treinava em casa. Media-se o conhecimento do aluno, recebido através de repetição, com a aplicação de testes em que, se ele repetisse bem o que o professor havia feito, concluía-se que sabia. (ONUHCIC, 1999, p.201)

Anos depois, os alunos deviam aprender com compreensão, isto é, eles deviam entender o que faziam.

Durante as décadas de 60 e 70, o ensino de Matemática foi influenciado pelo movimento da Matemática Moderna, que apresentava uma Matemática com muitas propriedades, preocupações excessivas com abstrações, utilizava uma linguagem universal, precisa e concisa, ou seja, o ensino era trabalhado com um excesso de formalização.

O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), nos anos 80, publicou o documento *An Agenda for Action*. Nesse documento são feitas recomendações para a Matemática escolar daquela época. A primeira recomendação dizia que “a resolução de problemas deve ser o foco da Matemática escolar dos anos 80”.

No final dos anos 80, o NCTM publicou os seguintes documentos:

- Em 1989, o *Curriculum and Evaluation Standards* era destinado àqueles que podem tomar decisões sobre o currículo de Matemática e descreve a Matemática que todos os estudantes devem saber e ser capazes de fazer;
- Em 1991, o *Professional Standards for Teaching Mathematics* que ilustra caminhos pelos quais os professores podem estruturar as atividades em sala de aula, de modo que os alunos possam aprender a Matemática descrita no documento acima;
- Em 1995, o *Assessment Standards for School Mathematics* que contém os princípios em que os professores e os educadores se apoiem para construir práticas de avaliação que ajudem no desenvolvimento de uma Matemática forte para todos.

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Em 2000, o NCTM lançou a publicação *Princípios e Padrões para a Matemática Escolar* – Standards 2000. Nela, são descritas características importantes de um ensino de Matemática de alta qualidade.

Nos *Princípios e Padrões para a Matemática Escolar* são estabelecidos os princípios: Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia. São apresentados dez padrões, descrevendo um corpo conectado de competências e compreensões matemáticas – uma fundamentação abrangente recomendada para todos os estudantes, mais do que um *menu* a partir dos quais possam ser feitas escolhas curriculares. Esses padrões são descrições daquele ensino de matemática que capacitaria os estudantes a conhecer e saber fazer. Eles especificam a compreensão, o conhecimento e as habilidades que os estudantes deveriam adquirir desde o pre-K até o ano 12.

Os Padrões de Conteúdo são: Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida, e Análise de Dados e Probabilidade, que foram distribuídos ao longo da escolaridade em quatro faixas.

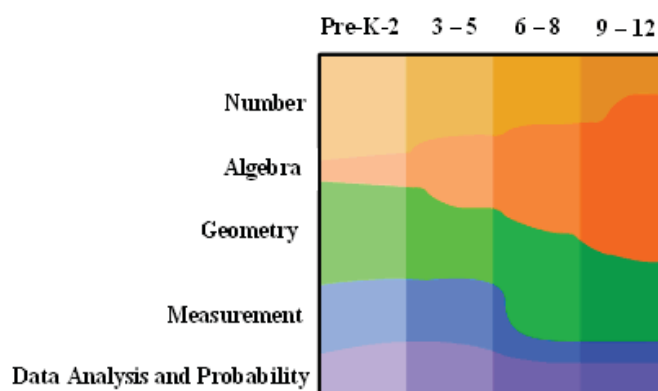


Fig. 4 Visão da distribuição dos Padrões de Conteúdo ao longo das séries

Os Padrões de Procedimento – Resolução de Problemas, Raciocínio e Prova, Comunicação, Conexões, e Representações – realçam os caminhos de adquirir e usar o conhecimento do conteúdo.

O ensino da Álgebra, nos Estados Unidos, desde os anos iniciais até os anos finais da escolaridade, deve permitir que os alunos, segundo orientações dos Standards 2000: compreendam padrões, relações e funções; representem e analisem situações e estruturas matemáticas usando símbolos matemáticos; usem modelos matemáticos para representar e

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

compreender relações quantitativas; e analisem mudanças em vários contextos. Desta forma, os alunos podem adquirir uma formação sólida no ensino da Matemática. No NCTM (2000) encontramos, no anexo, uma tabela dos padrões e expectativas para o ensino-aprendizagem da Álgebra desde o pre-K até o ano 12, por nós traduzida, que se mostra assim

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

PADRÃO	PRE – K – 2	GRADES 3 – 5
<i>Programas Instrucionais do pre-K ao ano 12 deveriam capacitar todos os alunos a</i>	<i>Expectativas: do pré-K até o ano 2, todos os alunos deveriam</i>	<i>Expectativas: nos anos de 3 a 5 todos os alunos deveriam</i>
Compreender padrões, relações e funções	Selecionar, classificar e ordenar objetos pelo tamanho, número e outras propriedades; Reconhecer, descrever e estender padrões como sequências de sons e formas ou simples padrões numéricos e transferir de uma representação para outra; Analisar como os padrões de repetição e de crescimento são gerados.	Descrever, estender e fazer generalizações sobre padrões geométricos e numéricos; Representar e analisar padrões e funções usando palavras, tabelas e gráficos.
Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos	Ilustrar princípios e propriedades gerais de operações, como a comutatividade, usando números específicos; Utilizar de representações concretas, pictóricas e verbais para desenvolver uma compreensão de notações simbólicas inventadas e convencionais.	Identificar propriedades, como comutatividade, associatividade e distributividade e usá-las para trabalhar com números inteiros; Representar a ideia de uma variável como uma incógnita usando uma letra ou símbolo; Expressar relações matemáticas usando equações.
Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas	Modelar situações que envolvem a adição e a subtração de números naturais, usando objetos, imagens e símbolos.	Modelar situações problema com objetos e usar representações como gráficos, tabelas e equações para obter conclusões.
Analisar mudanças em vários contextos.	Descrever mudança qualitativa, tais como o crescimento da altura do estudante; Descrever a mudança quantitativa, tais como o crescimento de duas polegadas em um ano de um aluno.	Investigar como uma mudança em uma variável refere-se a uma mudança em uma segunda variável; Identificar e descrever as situações com taxas constantes ou variáveis de mudança e compará-las.

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

PADRÃO	GRADES 6 – 8	GRADES 9 – 12
<i>Programas Instrucionais do pre-K ano ano 12 deveriam capacitar todos os alunos a</i>	<i>Expectativas: nos anos de 6 a 8 todos os alunos deveriam</i>	<i>Expectativas: nos anos de 9 a 12 todos os alunos deveriam</i>
Compreender padrões, relações e funções	Representar, analisar e generalizar uma variedade de padrões com tabelas, gráficos, palavras e, quando possível, regras simbólicas; Relatar e comparar diferentes formas de representação para uma relação; Identificar funções como lineares ou não lineares e contrastar suas propriedades a partir de tabelas, gráficos ou equações.	Generalizar padrões usando funções definidas explicitamente e recursivamente; Compreender relações e funções e usar várias representações para elas, dentro de uma mudança flexível; Analisar funções de uma variável investigando taxas de variação; interceptos; zeros; assíntotas e comportamento global e local; Compreender e fazer transformações tais como combinar, compor e inverter aritmeticamente funções usadas comumente, usando tecnologia para desempenhar tais operações sobre expressões simbólicas mais complicadas; Compreender e comparar as propriedades de classes e funções incluindo funções exponencial, polinomial, racional, logarítmica e periódica; Interpretar representações de funções de duas variáveis.
Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos	Desenvolver uma compreensão conceitual inicial dos diferentes usos das variáveis; Explorar relações entre expressões simbólicas gráficos de reta, pondo em particular atenção ao significado de intercepto e de declividade; Usar a Álgebra Simbólica para representar situações para resolver problemas, especialmente aqueles que envolvem relações lineares; Reconhecer e gerar formas equivalentes para simples expressões algébricas e resolver equações lineares.	Compreender o significado de formas equivalentes de expressões, equações, desigualdades e relações; Escrever formas equivalentes de equações, desigualdades e sistemas de equações e resolvê-las com fluência – mentalmente ou com lápis e papel em casos simples usando tecnologia em todos os casos; Usar a Álgebra Simbólica para representar e explicar relações matemáticas; Usar uma variedade de representações simbólicas incluindo equações, paramétricas e recursivas, para funções e relações; Julgar o significado, a utilidade e a razoabilidade dos resultados de manipulações simbólicas, incluindo aquelas levadas avante pela tecnologia.

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

PADRÃO	GRADES 6 – 8	GRADES 9 – 12
<i>Programas Instrucionais do pre-K ano ano 12 deveriam capacitar todos os alunos a</i>	<i>Expectativas: nos anos de 6 a 8 todos os alunos deveriam</i>	<i>Expectativas: nos anos de 9 a 12 todos os alunos deveriam</i>
Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações equivalentes	Representar, analisar e generalizar uma variedade de padrões com tabelas, gráficos, palavras e, quando possível, regras simbólicas; Relatar e comparar diferentes formas de representação para uma relação; Identificar funções como lineares ou não lineares e contrastar suas propriedades a partir de tabelas, gráficos ou equações.	Identificar relações quantitativas essenciais em uma situação e determinar a classe ou classes de funções que podem modelar as relações; Usar expressões simbólicas, incluindo formas iterativas recursivas, para representar relações que surgem de vários contextos; Tirar conclusões razoáveis sobre uma situação que está sendo modelada.
Analisar mudanças em vários contextos	Desenvolver uma compreensão conceitual inicial dos diferentes usos das variáveis; Explorar relações entre expressões simbólicas gráficos de reta, pondo em particular atenção ao significado de intercepto e de declividade; Usar a Álgebra Simbólica para representar situações para resolver problemas, especialmente aqueles que envolvem relações lineares; Reconhecer e gerar formas equivalentes para simples expressões algébricas e resolver equações lineares.	Aproximar e interpretar taxas de variação de dados gráficos e numéricos.

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Pode-se ver que um tema importante da Álgebra da sala de aula refere-se à linguagem escrita e falada, à linguagem matemática e suas relações.

Segundo Socas et al. (1996 apud FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2008) a linguagem matemática se apresenta em dois níveis, o semântico, em que os símbolos matemáticos são tratados com significados claros e precisos, apresentando semelhanças com a linguagem retórica ou ordinária. No segundo nível, o sintático, regras e procedimentos são operados sem referência aos seus significados. Klüsener (1999 apud SCARLASSARI, 2007, p.34) afirma que, no nível semântico, os símbolos, os sinais e as notações apresentam um significado claro e preciso. As palavras são associadas a significados ou a ações que estão associadas às operações ou mesmo relações funcionais. Já no nível sintático, as regras, as propriedades e as estruturas são operadas sem referência a um significado.

A maioria dos professores trabalha a linguagem matemática apenas no nível sintático sem trabalhar o pensamento algébrico dos alunos, pois como é dito

(...) a Álgebra tem sido estudada como se fosse apenas a Aritmética Generalizada, centrada em regras, algo que possui um caráter instrumental, útil apenas para resolver equações e problemas, o que deixa a desejar em relação aos conceitos que essa disciplina nos permite trabalhar (SCARLASSARI, 2007, p.27).

Nas escolas brasileiras, o ensino da Álgebra é iniciado na 6ª série (7º ano). Mas, nos dias de hoje, há um predomínio da Álgebra nas séries finais do Ensino Fundamental e “a maioria dos professores ainda trabalha a Álgebra de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões” (MIGUEL, FIORENTINI, MIORIM, 1992, p.40). Scarlassari (2007, p.29) afirma que

(...) nas séries finais do Ensino Fundamental, (...), a Álgebra ainda é abordada de forma mecânica e repetitiva sem proporcionar reflexões e discussões entre os alunos. Sendo esta abordagem agravada pelo fato de seus significados aritméticos e geométricos serem trabalhados nas séries iniciais dessa mesma forma mecânica, artificial e repetitiva, isto quando são trabalhados.

Os PCN (1998) – 5ª a 8ª séries – enfatizam que

No trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento de “sintaxe” (regras de resolução) de uma equação (p.84).

Desta maneira, segundo Araújo (2004), para que a Álgebra seja significativa para os alunos deve-se conectar os conhecimentos novos aos conhecimentos prévios dos alunos associando-se sentido a isto, pois se o ensino for centrado na manipulação de regras os alunos encontrarão dificuldades e terão um sentimento negativo à Matemática. Com isso, a autora afirma que o pensamento algébrico deve ser desenvolvido nos alunos, pois, sem o desenvolvimento do pensamento algébrico, a Álgebra perde o seu valor, que é o de desenvolver um raciocínio mais abrangente e dinâmico.

2.3.1.4. Pensamento Algébrico

Van de Walle e Lovin (2006) dizem que o raciocínio algébrico ou o pensamento algébrico é um termo usado para indicar como os estudantes usam o conteúdo de Álgebra – padrões, relações, funções e representações – para entender e se comunicar sobre situações matemáticas. O pensamento algébrico envolve analisar, representar e generalizar padrões e regularidades em todos os aspectos da Matemática. Identificar e estender padrões são um processo importante no pensamento algébrico. Como disse Kaput (1998 apud VAN de WALLE, 2001) é difícil encontrar uma área de Matemática que não envolva generalizar e formalizar em algum modo fundamental. De fato, este tipo de raciocínio ou pensamento está no centro da Matemática como uma ciência de padrão e ordem.

O pensamento algébrico, segundo Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), apresenta algumas características, como a de ser capaz de perceber padrões e aspectos variantes, saber expressar a estrutura de uma situação-problema; e saber fazer generalizações. Com estas características, o aluno é capaz de fazer relações entre objetos, representando-os e raciocinando sobre suas generalizações.

Para Reys et al (2004), o pensamento algébrico dos alunos cresce quando estes pensam e fazem relações para descrever padrões. Para isso, eles utilizam sua própria simbologia: como palavras, figuras, tabelas; para representarem suas compreensões de relações matemáticas. Ao se comunicarem sobre seus pensamentos, a linguagem da Álgebra cresce

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

junto com o pensamento algébrico, pois trabalhar o pensamento algébrico é trabalhar atividades que envolvam padrões e o uso de várias representações.

O desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno leva tempo, ao longo das séries e dos anos. Se desde os anos iniciais, atividades que proporcionem ao aluno a experiência de reconhecer e descrever padrões forem trabalhadas, então a sua familiaridade com padrões aumenta ao longo dos anos.

Segundo Van de Walle e Lovin (2006), para desenvolver o pensamento algébrico nos alunos algumas ideias devem ser trabalhadas, ideias que eles chamam de “grandes ideias”:

1. Os padrões lógicos existem e são uma ocorrência regular na Matemática. Eles podem ser reorganizados, estendidos e generalizados com palavras e símbolos. O mesmo padrão pode ser encontrado em diferentes formas. Os padrões são encontrados em situações físicas e geométricas tão bem como em números;
2. Uma variedade de representações como diagramas, retas numéricas, cartões e gráficos podem ser usados para ilustrar situações e relações matemáticas. Essas representações ajudam para conceitualizar ideias e para resolver problemas.
3. Simbolismo, especialmente aquele que envolve equações e variáveis, é usado para expressar generalizações de padrões e relações;
4. Variáveis são símbolos que tomam lugar dos números ou uma gama de números. Elas têm significados diferentes dependendo de elas serem usadas como representações de quantidades que variam ou mudam, representações de valores desconhecidos específicos ou espaços reservados em uma expressão generalizada ou fórmula;
5. Equações e inequações são usadas para expressar relações entre duas quantidades. O simbolismo em ambos os lados de uma equação ou inequação representa uma quantidade (p.265).

Padrão

No livro *Padrões no ensino e aprendizagem de Matemática: propostas curriculares para o Ensino Básico*, Vale et al (2009) dizem que Devlin (1998) afirmou que

(...) ao longo dos anos a Matemática tornou-se cada vez mais e mais complicada, as pessoas concentraram-se cada vez mais nos números, fórmulas, equações e métodos e perderam de vista o que aqueles números, fórmulas e equações eram realmente e porque é que se desenvolveram aqueles métodos. Não conseguem entender que a Matemática não é apenas manipulação de símbolos de acordo com regras arcaicas, mas sim a compreensão de padrões – padrões da natureza, padrões da vida, padrões da beleza (DEVLIN, 1998 apud VALE et al, 2009, p.7).

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Como padrão é um modelo, é algo que se repete sempre, podemos encontrar padrões na natureza, no cotidiano, na arte e na Matemática. A Matemática é uma ciência de padrões, na qual descobri-los é um bom caminho para conduzir à resolução de problemas. Pois, como diz Vale et al (2009, p.10), o aluno é levado a “conjeturar, a verbalizar relações entre os vários elementos do padrão e a generalizar”.

No estudo da Álgebra é importante que se desenvolva o pensamento algébrico dos alunos e não somente que se promova a resolução de equações com a aplicação mecânica de regras. Ainda, segundo Vale, uma abordagem para se trabalhar o pensamento algébrico dos alunos é a de trabalhar a Álgebra através da resolução de problemas que envolvam a descoberta e a observação de padrões, que ajudam os alunos “a perceberem a ‘verdadeira’³ noção de variável que, muitas vezes, é vista como um número desconhecido” (p.11).

Friel (2001) afirma que a exploração de padrões é um meio para desenvolver os conceitos de variável e função. No início do desenvolvimento do pensamento algébrico, os alunos devem ser capazes de

observar, descrever, repetir, estender, comparar e criar padrões; selecionar, classificar e ordenar objetos de acordo com suas várias características; prever o que vem a seguir e identificar os elementos que faltam no padrão; aprender a distinguir tipos de padrões, tais como os padrões de repetição e de crescimento (...). Com o passar do tempo, os alunos representam padrões numericamente, graficamente e simbolicamente; procuram relações em padrões e fazem generalizações (FRIEL, 2001, p.2).

O auxílio de tabelas, objetos, símbolos, são estratégias que os alunos utilizam para generalizar padrões. Tais estratégias envolvem os métodos *recursivos* e *não recursivos*. Segundo Van de Walle e Lovin (2006), a maior dificuldade apresentada pelos alunos é a de escrever uma fórmula geral para o padrão construído, uma vez que, os alunos, primeiramente, observam um padrão pelo método recursivo.

Ao falar sobre métodos recursivos e não recursivo, Friel (2001, p.7, 8) registra que

Na forma recursiva de generalização de padrão os estudantes põem foco sobre a taxa de variação de um elemento para o seguinte. Por exemplo, na sequência numérica 7, 13, 19, 25, 31, 37,..., a taxa constante de variação entre termos sucessivos é (+6). Para determinar o décimo termo usar uma estratégia recursiva significa que um estudante deveria tomar o sexto termo (37) e adicionar 6 para determinar o sétimo termo (43), depois adicionar 6 para determinar o oitavo termo (49) e assim até o décimo termo (61) ser

³ Quando Vale et al (2009) falam em ‘verdadeira’, elas estão dizendo que dentro da condição multiface da variável, o aluno deve identificar a que serve para a situação dada.

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

atingido. A forma recursiva de generalização de padrão em relações lineares realça uma taxa de variação constante.

Na forma explícita de generalização de padrão, a regra “adicione seis” está relacionada à ordem dos termos na sequência. Assim, para o primeiro termo, $7 = 1 + 6$; para o segundo termo, $13 = 1 + 6 + 6$; para o terceiro termo, $19 = 1 + 6 + 6 + 6$; e assim por diante. A regra geral seria dado pelo “número do termo $\times 6 + 1$ ”, ou seja, $6x + 1$. A forma explícita de generalização de padrão envolve desenvolver uma regra ou fórmula que destaque a relação entre a variável independente (o número que representa a posição do termo na sequência) e a variável dependente (o número na sequência).

Representação e Simbolismo

Uma das fortes razões que a Matemática tem está no modo com que as ideias podem ser expressas com símbolos, cartazes, gráficos e diagramas. O simbolismo em Matemática, junto com ajudas visuais como cartazes e gráficos deveriam ser entendida pelos estudantes como modos de comunicar ideias matemáticas a outras pessoas. Símbolos, gráficos e cartazes, assim como representações físicas como contadores ou “pedaços de pizza” para frações são também poderosas ferramentas de aprendizagem. Elas permitem que os estudantes manipulem ideias abstratas na forma visual. Mover-se de uma representação para outra é um caminho importante para adicionar compreensão para uma ideia.

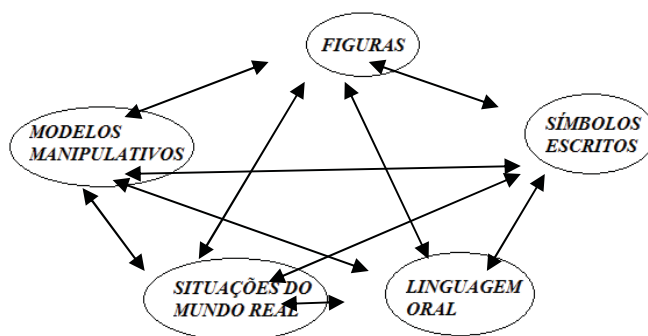


Figura 8 Cinco diferentes representações de ideias matemáticas. Transferências entre e dentre cada uma podem ajudar a desenvolver novos conceitos

As cinco representações ilustradas na figura 5 são simplesmente uma expansão do conceito de modelo. Quanto mais caminhos são dados às crianças para pensar e testar uma

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

ideia emergente, melhor chance ela terá de ser formada corretamente e integrada em uma rica rede de ideias e de compreensão relacional.

Friel (2001) afirma que as crianças, nas séries iniciais, usam objetos, figuras, palavras ou símbolos para representar ideias e as relações matemáticas. Mais tarde, nos primeiros anos da escola elementar, os alunos investigam, representam, descrevem e explicam propriedades matemáticas e começam a fazer generalizações e a usá-las no cálculo com números naturais; desenvolvem a noção da ideia e da utilidade de uma variável como um guardador de lugar. Nos anos de 6 a 8, os alunos encontram usos adicionais de variáveis como quantidades que variam em padrões generalizados, fórmulas, identidades, expressões de propriedades matemáticas, equações e desigualdades. Eles exploram noções de dependência e independência como mudanças de variáveis em relação de uma com a outra, e eles desenvolvem facilidade em reconhecer a equivalência em representações matemáticas que eles podem usar para transformar expressões; resolver problemas e relacionar as representações em forma gráfica, em forma de tabela e simbólica. Eles também adquirem maior facilidade com equações lineares e demonstram como os valores de declividade e do y-interceptor afetam a reta.

Segundo o NCTM (2000 apud FRIEL, 2001) a compreensão dos alunos sobre as representações e operações simbólicas utilizadas na Álgebra deve emergir de situações problema, que possam ampliar as ideias significativas que servem para introduzir as notações e técnicas algébricas.

Variáveis

Para desenvolver o pensamento algébrico nos alunos, o ensino da Álgebra deve ser iniciado a partir de situações-problema, pois, dessa forma, o aluno pode expressar seu pensamento para chegar à resolução de tais situações, contribuindo para a formação significativa da linguagem simbólica no aluno (MIORIM; MIGUEL; FIORENTINI, 1993).

Usiskin (1995) afirma que os alunos começam a estudar Álgebra quando se deparam, pela primeira vez, com a variável. O conceito de variável é multifacetado, pois depende do ponto de vista do papel que desempenha na Álgebra. Desta forma, a Álgebra é concebida de

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

acordo com o papel exercido pela variável. As seguintes sentenças, onde o produto de dois números é igual a um terceiro, recebem um nome correspondente ao papel exercido pela variável:

1. $A = bh$
2. $40 = 50x$
3. $\text{sen}x = \cos x \text{tg}x$
4. $1 = n(1/n), n \neq 0$
5. $y = kx$

Diz Usiskin que à sentença (1) chamamos fórmula, que é uma relação entre grandezas, em que A , b e h representam, respectivamente, área, base e altura de um retângulo, e são valores conhecidos. Em (2) a chamamos de equação, em que x é uma incógnita, onde se tem que descobrir o valor desconhecido no problema. Identidade é a sentença (3), cujo x é o argumento de uma função, isto é, representa os valores do domínio de uma função. Já em (4), a chamamos de aritmética generalizada. Por último, em (5) temos uma função, onde o termo da variável tem um caráter de variabilidade.

Segundo Van de Walle (2006, p.274),

Uma variável é um símbolo que pode representar qualquer um dos elementos de um conjunto de números ou de outros objetos. Embora correta, esta simples definição tem uma variedade de interpretações, dependendo de como as variáveis são usadas. Uma compreensão menos clara pode levar a grande quantidade de compreensões errôneas.

Para o autor, as variáveis são um método poderoso para expressar as regularidades encontradas na Matemática, ou seja, nos ajudam a utilizar os símbolos matemáticos como ferramentas para pensar e compreender as ideias matemáticas da mesma maneira que objetos e desenhos são usados. Van de Walle ressalta que se as variáveis devem ser incluídas com outras formas de pensar então é importante que os alunos desenvolvam uma compreensão dos vários papéis que a variável representa.

Equações

Para os alunos, o sinal de igualdade em uma equação é mais um “sinal para fazer algo” (KIERAN, 1992, p.398) do que um símbolo de equivalência entre o lado esquerdo e o lado direito do sinal de igualdade em uma equação. Pensam que o lado direito indica o resultado, isto é, $4 + 3 = 7$, o que lhes permite adotar significados a equações, tais como, $2x + 3 = 7$ e não a equações como $2x + 3 = x + 4$. Isso leva os alunos a violarem as propriedades simétrica e transitiva da igualdade, pois para eles o sinal de igualdade apenas separa as operações do resultado.

Resolver Equações

Há vários métodos de resolução de equações algébricas ou polinomiais utilizadas pelos alunos. Kieran (1992, p.400) as classificou pelos seguintes tipos:

- a) uso de fatos numéricos;
- b) uso de técnicas de contagem;
- c) encobrimento;
- d) desfazer (ou trabalhar de trás para a frente);
- e) substituição por tentativa e erro;
- f) transposição (isto é, mudar de lado–mudar de sinal);
- g) realizar a mesma operação em ambos os lados da equação.

Segundo Petitto (1979, apud KIERAN, 1992) os cinco primeiros métodos são métodos intuitivos e os dois últimos, segundo Kieran (1992, p.400), são métodos formais.

- *Método do uso de fatos numéricos e das técnicas de contagem*

Os dois primeiros métodos, segundo Booth (1983 apud KIERAN, 1992), são usados por alunos iniciantes em Álgebra, pois surgem da experiência dos alunos com sentenças que envolvem parcela oculta (KIERAN, 1992, p.400), por exemplo, $2 + ? = 5$.

Ao resolver, por exemplo, a equação $5 + n = 8$ os alunos recordam-se do fato numérico aditivo que 5 mais 3 é igual a 8 seria um uso de conhecer os fatos numéricos. Os

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

alunos também podem resolver a mesma equação pela técnica de contagem, em que ao contar 5, 6, 7, 8 observam que foram nomeados três números depois do cinco para chegar ao oito.

- *Método do encobrimento*

Segundo Bell, O'Brien e Shiu (1980 apud KIERAN, 1992), os alunos usam o método do encobrimento para resolver equações como $2x + 9 = 5x$, da seguinte maneira: como $2x + 9$ vale $5x$ então 9 deve ser o mesmo que $3x$ porque $2x + 3x$ também é $5x$, então x é 3. Whitman (1976 apud KIERAN, 1992) em sua pesquisa analisou a relação entre o método do encobrimento e o método formal. Ela concluiu que os alunos que aprenderam a resolver equações só pelo método formal não foram bem preparados conceitualmente para operar sobre equações com operações estruturais. Pois, os alunos que resolveram equações pelo método do encobrimento apresentaram um desempenho melhor do que os que utilizaram os dois métodos, enquanto que os alunos que aprenderam a resolver só pelo método formal apresentaram um desempenho menor do que aqueles que aprenderam só com os dois métodos.

- *Método do desfazer*

O método do desfazer é análogo à abordagem de trabalhar de trás para a frente usado na resolução de problemas aritméticos. Neste método, o aluno ao resolver a equação $2x + 4 = 18$, primeiramente, toma o resultado numérico e, da direita para a esquerda, desfaz cada operação dada por sua inversa. Assim, $18 - 4 = 14 / 2 = 7$.

- *Método da substituição por tentativa e erro*

Para resolver a equação $2x + 5 = 13$, pelo método da substituição por tentativa e erro, o aluno substitui a incógnita por diferentes valores como 2, 3, 6 até encontrar o número 4. Esse método leva tempo para que o aluno possa resolver a equação. Segundo Kieran (1985 apud KIERAN, 1992) quando o aluno aprende a trabalhar com o método formal, ele abandona o da substituição.

- *Método da transposição e da realização da mesma operação em ambos os lados*

Segundo Kieran (1992), o método formal de resolver equações inclui a transposição de termos e a realização da mesma operação em ambos os lados da equação. A transposição é uma síntese da operação em ambos os lados, pois a frase muda de lado—muda de sinal é considerada por muitos professores de Álgebra como uma forma abreviada do procedimento

de realizar a mesma operação em ambos os lados. O procedimento de realizar a mesma operação em ambos os lados da equação enfatiza a simetria de uma equação. Esta ênfase é ausente no procedimento de transposição dos termos.

Os alunos aprendem a resolver equações de uma maneira mecânica utilizando erroneamente o ‘muda de lado – muda de sinal’ e não têm a ideia da manipulação estrutural realizada. Outro erro comum, cometido por alunos, ocorre quando eles confundem o sinal da operação com o do número.

2.3.1.5. Dificuldades dos Alunos em Álgebra

Pesquisas realizadas sobre a forma de aprendizagem de expressões algébricas apontam alguns obstáculos cognitivos dos alunos:

1) *Falta de referencial numérico no uso das letras pelo aluno* (DAVIS, 1975; WAGNER, 1981 apud CHALOUCH e HERSCOVICS, 1995, p.38): se o aluno não vê as letras como representações de números, efetuar operações aritméticas com essas letras torna-se uma tarefa sem sentido. Booth (1995) afirma que na Aritmética também são utilizadas letras, mas de maneira diferente. Por exemplo, a letra m pode ser usada em Aritmética para representar “metros”, enquanto que na Álgebra, m representa um número de metros. Ainda nos fala que “um dos problemas decorrentes dessa visão das letras é que as crianças muitas vezes assumem que letras diferentes devem necessariamente representar valores numéricos diferentes” (p.32).

2) *Incapacidade de aceitar a ausência de fechamento* para o resultado (COLLINS, 1974 apud CHALOUCH e HERSCOVICS, 1995, p.38): os alunos olham para as expressões algébricas como afirmações incompletas e eles procuram simplificá-las como em $2a + 5b$ para $7ab$, errando.

3) *Dilema nome-processo* (DAVIS, 1975 apud CHALOUCH e HERSCOVICS, 1995, p.38): “ $2+3$ ” é o problema e “5” a resposta, enquanto “ $x+3$ ” tanto descreve um processo (somar 3 com x) como dá nome à resposta. Este problema pode estar mais intimamente ligado à dificuldade que os alunos parecem ter em aceitar respostas algébricas do que ao fato de a mesma expressão representar tanto um procedimento como uma resposta

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

4) *Justaposição* (MATZ, 1979 apud CHALOUCH e HERSCOVICS, 1995, p.38): em Aritmética a justaposição de dois números denota adição ($43 = 40 + 3$), mas, em Álgebra, denota multiplicação ($4a = 4 \cdot a = a + a + a + a$).

5) *Interpretação dos símbolos*: a ideia de que o símbolo de adição possa indicar tanto o resultado de uma adição como a ação, ou de que o sinal de igualdade possa ser visto como indicador de uma relação de equivalência em vez de um símbolo para “escreva a resposta”, pode não ser percebida de imediato pelo aluno (BOOTH, 1995, p.27).

A dificuldade que os alunos encontram em Álgebra é, em geral, devido às dificuldades que tiveram em Aritmética e que não foram sanadas (Booth, 1995). O aluno aprenderá Álgebra quando os conceitos aritméticos estiverem devidamente compreendidos.

Por que é difícil aprender Álgebra? Por que esta matéria é desafiante para os alunos? Quais as dificuldades dos alunos em Álgebra? Saul (2008), em seu artigo *Álgebra: matemática e pedagogia*, analisa algumas dificuldades dos alunos devido ao conteúdo da Álgebra. O artigo nasceu de uma discussão entre professores, pesquisadores em Educação Matemática e matemáticos, trazendo com ela problemas do ensino e da aprendizagem algébrica.

O autor, por meio de vinhetas, apresenta algumas dificuldades dos alunos que ocorrem nas salas de aula, por meio de problemas.

Vinheta 1

Andrei é um aluno mediano iniciando a sétima série. Ele pode resolver equações lineares simples, tais como $2x - 3 = 17$. Ele faz isso substituindo a variável com valores numéricos até ele encontrar um que funcione. Ele sabe que 4 é muito pequeno porque $2 \cdot 4 - 3$ é somente 5, e ele precisa de 17. Ele sabe que 30 é muito grande porque $2 \cdot 30 - 3 = 57$, e ele precisa somente de 17. (Eu estou exagerando: Andrei pode chegar mais perto com sua adivinhação). Dado um valor de x maior ou menor conforme a necessidade, Andrei rapidamente chega à solução. Ele pode reconhecer quando ele chega à solução. Mas Andrei não pode resolver a equação $2,3x - 3,02 = 17,83$ da mesma maneira. Ele não pode nem resolver $3x - 3 = 17$ da mesma maneira. Entretanto, dado um número, ele pode reconhecer se é ou não solução de qualquer uma dessas equações.

Segundo Saul (2008), a dificuldade de Andrei nos diz o que a Álgebra não é. Primeiramente, a Álgebra não é o estudo das variáveis, pois Andrei sabe usar a variável x , por

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

exemplo, na afirmação $2x - 3 = 11$. Ele sabe que é verdade para $x = 7$ e falsa para $x = 5$. Desde as séries iniciais, os alunos usam variáveis em problemas aritméticos mais do que em algébricos como, por exemplo, $? + 7 = 12$. Em segundo lugar, a Álgebra não é o estudo de funções. Andrei sabe que a função $f(x) = 2x - 3$ cresce quando x também cresce e que se x está entre, por exemplo, 10 e 20, $f(x)$ estará entre 17 e 37.

Saul (2008) afirma que a Álgebra nos auxilia para representar funções e que seu estudo algébrico fornece ao aluno a prática em fazer aplicações. Para o autor, Andrei apresenta certa intuição sobre variável e função, mas que ele não chega aos fundamentos da Álgebra.

Vinheta 2

Bob é um aluno bem sucedido de Álgebra da oitava série. Ele não tem problemas em fatorar a diferença de dois quadrados e pode trabalhar os seguintes exercícios rotineiramente:

$$4a^2 - 1 = (2a + 1)(2a - 1)$$

$$9 - b^4 = (3 + b^2)(3 - b^2)$$

$$n^4 - 16 = (n^2 + 4)(n^2 - 4) = (n^2 + 4)(n + 2)(n - 2)$$

Com alguma ajuda, ele pode até fatorar $(g - h)$ como

$$(\sqrt{g} + \sqrt{h}) \cdot (\sqrt{g} - \sqrt{h})$$

Mas se lhe for pedido para fatorar 4899, ele não nota que este número é $70^2 - 1$ e não pode usar essa propriedade para realizar a fatoração, mesmo quando seu professor lhe mostra que $4899 = 4900 - 1$. De fato, o que Bob notou é que o número dado é um múltiplo de 3, mas não de 5. Ele então testa 7, 11, e assim por diante, para identificar os fatores primos de 4899.

Para Bob, esse foi somente um problema de fatoração numérica e não algébrica. Com essa vinheta, o autor nos mostra que as equações trabalhadas por Andrei eram percebidas, por ele, como afirmações sobre números particulares e não como generalizações sobre um conjunto de afirmações sobre números. E foi isso o que aconteceu com Bob, ele não observou que a fatoração $4899 = 4900 - 1$ era um caso particular de $x^2 - 1$. Segundo o autor, isto ocorre pois no ensino de Álgebra, rapidamente vamos com os alunos, nos exercícios algébricos, transformando expressões algébricas, sem lhes mostrar o que as variáveis representam.

Vinheta 3

Cath, na oitava série, resolve equações da maneira que Andrei não soube resolver. Ela vê as equações abaixo como sendo do mesmo tipo:

$$2x + 3 = 10$$

$$3x - 1 = 10$$

$$4,2x + 4,5 = 6,7$$

$$(3/4)x + 1/2 = 5/6$$

$$12 = 2x - 3$$

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Cath pode subtrair 3 de ambos os lados de uma das equações e dividir ambos os lados por $\frac{3}{4}$ em outra, mas ela não pode usar essas técnicas para resolver uma equação como $3x - 2 = 5x + 18$. Ela não pode “plugar com números” para esta equação, porque não há um número ‘alvo’ para procurar.

A incógnita em ambos os lados da equação é uma das dificuldades que os alunos na aprendizagem de Álgebra. Segundo Saul (2008), os alunos não se dão bem com o método de tentativa-e-erro para resolver esses tipos de equação. Para os alunos, em equações que apresentam a incógnita em ambos os lados, o sinal de igualdade está no lugar errado. Para resolver equações desse tipo, os alunos precisam saber usar as propriedades da igualdade, isto é, a igualdade continuará verdadeira se adicionarem ou, subtraírem, a mesma quantidade em ambos os lados da igualdade, ou se multiplicarem ou dividirem ambos os lados da igualdade por um número diferente de zero.

2.3.2. A Produção de Significados

Conhecimento é a informação sem uso; o saber é a ação deliberada para fazer do conhecimento um objeto útil diante de uma situação problemática. Disso se deduz que a aprendizagem é uma manifestação da evolução do conhecimento em saber. A aprendizagem consiste, portanto, em dar a resposta correta antes da situação concreta (CANTORAL, 1998 apud D'AMORE, 2007, p.315).

Neste capítulo, ponto forte de nossa pesquisa, procuramos compreender como os alunos aprendem Matemática e, para isso, examinamos cuidadosamente como os alunos constroem o significado dos conceitos matemáticos, pretendidos pelo professor ao longo do trabalho, com as ideias matemáticas envolvidas no processo de ensino-aprendizagem. Apresentamos, também, a concepção adotada, para este trabalho, sobre produzir significado. Ao final do capítulo, discorreremos sobre como medir a produção de significado produzidos pelos alunos.

2.3.2.1. A Produção de Significados

O ensino tradicional vigente é baseado na transmissão, realizada pelo professor, do conteúdo na forma de verdade a ser absorvida pelo aluno. Nessa forma de ensino, o professor é a autoridade dentro da sala de aula e os alunos seres passivos que aceitam o que o professor diz. Há ênfase nos exercícios, que são resolvidos pela repetição de conceitos ou memorização de fórmulas. Neves (1995 apud SCARLASSARI, 2007, p.6) afirma que, no ensino tradicional, o professor explica o conteúdo na lousa, solicita a resolução de uma lista de exercícios e, por último, avalia a 'aprendizagem' como um trabalho enfatizado na escrita e na realização de técnicas operatórias. Dessa forma, a aprendizagem é mecânica e os alunos aplicam as regras na resolução de problemas sem produzirem significados matemáticos necessários à sua construção de conhecimento novo.

Para entendermos o que significa um aluno produzir significados em uma atividade matemática, buscamos inicialmente o dicionário *Houaiss* que nos diz

significar: 1. ter o significado ou o sentido de; querer dizer. 2. apresentar-se como expressão de; exprimir, traduzir. 3. dar a entender; mostrar. 4. ser sinal ou indício de; denotar. 5. fazer conhecer, participar, comunicar. 6. possuir determinado significado; denotar, designar.

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

significado: 1. relação de reconhecimento, de apreço; valor, importância, significação, significância.

significação: 1. ato ou efeito de significar. 2. representação mental relacionada a uma forma lingüística, um sinal, um conjunto de sinais, um fato, um gesto, etc.; aquilo que um signo quer dizer; acepção, sentido, significado. (Grifos nossos).

Assim, nesta pesquisa, entenderemos *significado* como “o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Não o conjunto do que se poderia dizer, e, sim, o que efetivamente se diz no interior de uma atividade” e, quando se diz que o aluno vai produzir significados matemáticos, entende-se que é quando ele fala sobre aquele objeto, quando ele explica o que aquele objeto quer dizer para ele. Assim, “*produzir significado* é falar a respeito de um objeto” (LINS; GIMENEZ, 1997-2001, p.145).

Para que os alunos possam produzir significados em Matemática, eles devem ser co-construtores de seu próprio conhecimento, com a guia e a orientação do professor, pois não são caixas vazias nas quais o professor deposita os conteúdos matemáticos que quer. Dessa forma, para que os professores possam entender o que dizem seus alunos, é preciso que eles entendam como seus alunos constroem suas ideias.

Lins (1993 apud SILVA, 2003, p.6) nos coloca que o “conhecimento é entendido como uma **crença** – algo que o sujeito acredita e expressa, e que se caracteriza, portanto, como uma **afirmação** – junto com o que o sujeito considera ser uma **justificação** para sua **crença-afirmação**”. O autor nos apresenta o conhecimento como um par ordenado

Conhecimento = (crença-afirmação, justificação),

pois uma pessoa acredita naquilo que se está afirmando, que é sua crença, mas é preciso que ela justifique suas crenças-afirmações para que possa ocorrer a produção de significados.

Segundo Van de Walle (2001, p.26), no cotidiano, para se construir algo precisamos de ‘ferramentas, materiais e esforços’. Para o autor, constroem-se as ideias de forma análoga. Ao construir a compreensão (dar significados) precisamos de ferramentas, que são nossas ideias existentes, isto é, nosso conhecimento prévio; de materiais, que são as coisas que já vimos, escutamos ou tocamos – elementos de nossos ambientes físicos – às vezes, os materiais são nossos próprios pensamentos e ideias e, por último, de esforço, que é um pensamento ativo e reflexivo⁴.

⁴O pensamento reflexivo usa as ideias de um pensamento existente para encontrar aquelas que parecem ser úteis em produzir significado para as novas ideias (VAN DE WALLE, 2001, p.27)

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Se as mentes não forem ativamente pensantes, nada acontece. Estas ideias são apresentadas no seguinte diagrama:

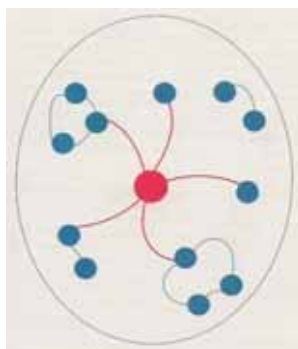


Figura 9. Usamos as ideias que já temos (pontos azuis) para a construção de uma nova ideia (ponto vermelho), desenvolvendo no processo uma rede de conexões entre as ideias. Quanto mais ideias sejam usadas e quanto mais conexões sejam feitas, melhor será a compreensão (VAN DE WALLE, 2001, p.27).

Esse diagrama mostra como se dá a construção de novas ideias. Os pontos azuis representam nossos conhecimentos prévios, as linhas ligando as ideias representam as relações desenvolvidas entre elas. O ponto vermelho é uma ideia que está sendo construída e, para isso, são usados nossos conhecimentos prévios (ideias já existentes), pois darão sentido à nova ideia. Para construir e compreender uma nova ideia (conhecimento), em síntese, há a exigência de um pensamento ativo e reflexivo. “Enquanto a aprendizagem ocorre, as redes de trabalho⁵ são rearranjadas, adicionadas ou, caso contrário, modificadas. Quando há pensamento ativo e reflexivo, os esquemas produzidos são constantemente modificados ou mudados de modo que as ideias se ajustem melhor com aquilo que é conhecido” (VAN DE WALLE, 2001, p.27).

Van de Walle (2001) afirma que há dois tipos de conhecimento matemático, o conhecimento conceitual e o conhecimento processual. O conhecimento matemático conceitual consiste de relações lógicas construídas internamente e existentes na mente como uma parte da rede de ideias. É o tipo de conhecimento a que Piaget se referia como conhecimento lógico matemático. Por sua verdadeira natureza, o conhecimento conceitual é o conhecimento que é entendido. Já o conhecimento processual é o conhecimento das regras e dos procedimentos que se usam ao levar adiante as tarefas matemáticas rotineiras e, também,

⁵ Redes de trabalho ou esquemas cognitivos são o produto da construção do conhecimento e as ferramentas com que adicionam o novo conhecimento que pode ser construído (VAN DE WALLE, 2001, p.27).

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

o simbolismo que é usado para representar a Matemática. O autor nos chama a atenção para entender que resolver longas listas de exercícios não ajudam os alunos a desenvolver um conhecimento conceitual e que os alunos, hábeis com os procedimentos e regras, podem apresentar dificuldade em produzir significados para os conceitos.

Para D'Amore (2007) o processo de ensino-aprendizagem pode ser estudado a partir de dois pontos de vista, do ponto de vista do professor e do ponto de vista do aluno:

- do ponto de vista do professor e do uso que ele faz de uma metodologia didática *dirigida* (expõe, explica, demonstra, esclarece, responde...) ou *indireta* (solicita a observação, a ação ou a construção, interage,...);
- do ponto de vista do aluno que codifica a informação, elabora, propõe hipóteses, projeta, pergunta, reflete, raciocina, argumenta, recupera conhecimentos prévios, cria,... (p.316)

Esse autor afirma que

Quando se raciocina na “perspectiva do aluno”, tende-se a usar de maneira privilegiada o termo *aprendizagem*; mas é óbvio que esse termo, sozinho, não se “sustenta” porque são imediatas e profundas as conexões com capítulos clássicos inteiros e difíceis da Psicologia, como: percepção, memória, compreensão, raciocínio, conceitualização,...; e outros ainda mais complexos: motivação, interesse, vontade,...; e tudo isto para sequer introduzir verdadeiras e próprias... nuvens de poeira psicológicas como: inteligência, pensamento, personalidade,... (p.316)

O trabalho desenvolvido em sala de aula, segundo D'Amore, pode assemelhar-se a uma dinâmica apoiada no entrelaçamento de saberes, tanto os adquiridos quanto os em via de aquisição. Assim, o programa avança e os alunos progridem. Consequentemente, o contrato didático (o termo de compromisso) se modifica por levar em conta os conhecimentos em jogo. D'Amore afirma que esse processo “é uma sucessão de acontecimentos devido a diferentes níveis de comunicação, diferentes lógicas de representação e de competências; mas o próprio processo induz a esses níveis de comunicação, às diferentes lógicas e às diferentes aquisições” (p.328).

A produção de significados, para ele, se constitui a partir de tudo o que foi descrito no parágrafo anterior:

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

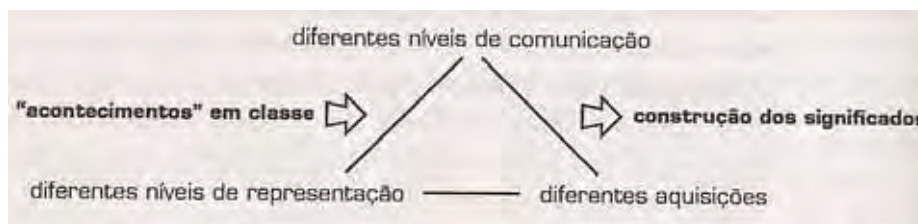


Figura 10 Construção dos significados

Essa construção não é linear por conter rupturas, proceder por tentativas, avançar rapidamente, parar e retroceder. D'Amore afirma que a aprendizagem para o aluno nada mais é do que uma contínua *reorganização cognitiva*, pois os significados construídos são continuamente colocados em discussão e sofrem modificações constantes no interior da sala de aula.

Para Bransford, Brown e Cocking (2007) uma melhor concepção dos objetivos da educação é

ajudar os estudantes a desenvolver as ferramentas intelectuais e as estratégias de aprendizagem necessárias para a aquisição de conhecimento, permitindo que possam pensar produtivamente sobre a história, a ciência e a tecnologia, os fenômenos sociais, a matemática e as artes (p.21).

Os autores afirmam que atualmente uma nova teoria da aprendizagem entra em foco para facilitar a aprendizagem, isto é, há novas maneiras de se ensinar as matérias escolares para os alunos desenvolverem uma profunda compreensão sobre o assunto, tornando-os aprendizes ativos.

Essa nova visão da teoria da aprendizagem dá ênfase ao aprendizado com entendimento, pois os alunos têm pouca oportunidade de dar sentido ao conteúdo, já que os livros didáticos e as avaliações enfatizam a memória ao invés do entendimento. A principal característica da nova teoria da aprendizagem é o "foco nos processos do conhecimento". Quando o aluno chega à escola, ele traz conhecimentos prévios que influenciam, de modo significativo, no modo como percebem o ambiente e o modo como organizam e interpretam essa percepção e isso, por sua vez, influencia as "suas capacidades de memória, raciocínio, resolução de problemas e aquisição de novo conhecimento" (BRANSFORD; BROWN; COCKING, 2007, p.27).

Segundo Bransford, Brown e Cocking (2007), dados comprovam que, quando o professor dá atenção aos conhecimentos prévios trazidos pelos alunos, utilizando-o como

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

ponto de partida para a construção de novo conhecimento, a aprendizagem melhora. Para justificar essa fala, eles apresentam três Princípios de Aprendizagem:

Princípio de Aprendizagem 1: Os alunos chegam à sala de aula com ideias preconcebidas sobre como o mundo funciona. Se o seu entendimento inicial não for considerado, é possível que não consigam compreender os novos conceitos e informações ensinados, ou que os aprendam com o objetivo de fazer uma prova, mas recaindo depois em suas ideias preconcebidas fora da sala de aula (p.33).

Princípio de Aprendizagem 2: Para o desenvolvimento da competência numa área de investigação, os estudantes devem: (a) possuir uma base sólida de conhecimento factual, (b) entender os fatos e as ideias no contexto do arcabouço conceitual, e (c) organizar o conhecimento a fim de facilitar a recuperação e a aplicação (p.35).

Princípio de Aprendizagem 3: Uma abordagem metacognitiva da instrução pode ajudar os estudantes a aprender a assumir o controle da sua própria aprendizagem por meio da definição dos objetivos da aprendizagem e do monitoramento do seu progresso em alcançá-los (p.37).

Os alunos vêm para a escola com conhecimentos prévios. Estes conhecimentos devem ter uma base sólida de conhecimentos factuais, e, não somente, de conhecimentos processuais, para que, com as novas ideias que surgem, os alunos possam fazer novas relações, afim de organizar os seus conhecimentos visando aplicá-los. Por último, os alunos, com uma habilidade metacognitiva, refletem sobre suas ações e, assim, tornam-se monitores de sua própria aprendizagem. Por isso, os alunos devem ser considerados como co-construtores de sua aprendizagem, e, assim, o ensino precisa estar centrado no aluno.

Bransford, Brown e Cocking (2007) afirmam que os três princípios, descritos acima, apresentam as seguintes implicações para o ensino e para a preparação do professor:

- 1. Os professores devem extrair a compreensão preexistente trazida pelos alunos e trabalhar com ela (p.38)*
- 2. Os professores devem ensinar qualquer assunto em profundidade, fornecendo muitos exemplos em que o mesmo conceito está em ação e proporcionando uma base sólida de conhecimento factual (p.39).*
- 3. O ensino de habilidades metacognitivas deve ser integrado no currículo de diversas áreas temáticas (p.40).*

Infelizmente, o ensino e a aprendizagem com frequência não ocorrem dessa maneira.

Ao invés de conectar, construir e refinar as compreensões, as intuições e a desenvoltura matemáticas que os alunos trazem para a sala de aula (Princípio 1), o ensino de matemática frequentemente anula os processos de raciocínio

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

dos alunos substituindo-os por um conjunto de regras e procedimentos que desconecta a resolução do problema do dar sentido. Ao invés de organizar as habilidades e as competências requeridas para fazer fluentemente Matemática ao redor de um conjunto de conceitos matemáticos fundamentais (Princípio 2), aquelas habilidades e competências são frequentemente o centro, e algumas vezes o todo, do ensino. E precisamente porque a aquisição do conhecimento processual está frequentemente divorciado do dar sentido, os alunos não usam estratégias metacognitivas (Princípio 3) quando eles se engajam na resolução de problemas matemáticos (FUSON; KALCHMAN; BRANSFORD, 2005, p. 217).

Num diagrama que procura mostrar ao professor como relacionar o conhecimento com diferentes estratégias de ensino



Figura 11 Sabendo como se aprende, os professores podem escolher com mais critério entre as técnicas adequadas para a realização de objetivos específicos (BRANSFORD; BROWN; COCKING, P.42)

pode-se ver que o conhecimento de como as pessoas aprendem ajuda a escolher as estratégias de ensino: com base em aula expositiva, reforçado pela tecnologia, organizado em torno de indivíduos versus grupos cooperativos, com base em inquirição, com base em habilidades.

Mas será que existe alguma técnica de ensino que seja melhor do que as outras? Segundo Bransford, Brown e Cocking (2007), a resposta é não. As aulas expositivas são ótimas para transmitir informações novas, estimular as faculdades críticas dos alunos, mas para extrairmos as ideias preconcebidas dos estudantes precisamos de outras atividades, que os ajudem a utilizar as estratégias metacognitivas para monitorarem sua aprendizagem. As experiências práticas ajudam a fundamentar o conhecimento emergente mas, sozinha, não evoca a compreensão conceitual subjacente que ajuda na generalização.

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Para desenvolver os três princípios de aprendizagem mencionados, esses autores apresentam quatro atributos, que são interrelacionados, para serem trabalhados em sala de aula.

1. *As escolas e as salas de aula devem estar centradas no aprendiz (p.43): deve-se prestar atenção aos conhecimentos prévios trazidos pelos alunos e o ensino deve começar com o quê o aluno sabe e pensa;*
2. *Para proporcionar um ambiente em sala de aula, centrado no conhecimento, é preciso prestar atenção ao que é ensinado (informações, assuntos), por que é ensinado (compreensão) e como se revela a competência ou habilidade (p.43);*
3. *As avaliações formativas – avaliações contínuas, idealizadas para tornar visível o raciocínio dos alunos tanto para eles próprios como para os professores – são essenciais. Permitem que o professor compreenda as ideias preconcebidas dos estudantes, perceba em que ponto estão no caminho que leva do raciocínio informal para o formal e planeje a instrução de acordo com isso. No ambiente da sala de aula centrada na avaliação, as avaliações formativas ajudam tanto professores como alunos na monitoração do progresso (p.44);*
4. *A aprendizagem é influenciada de maneira fundamental pelo contexto em que acontece. Uma abordagem centrada na comunidade requer o desenvolvimento de normas para a sala de aula e para a escola, assim como conexões com o mundo exterior, que apoiem valores essenciais da aprendizagem (p.45).*

Michael T. Battista (2007), em seu artigo, *Learning with understanding: principles and processes in the construction of meaning for geometric ideas*⁶, apresenta dois princípios.

Princípio 1: A mente humana constrói mais significado do que recebe (p.65).

De acordo com Francis Crick⁷, “ver é um processo construtivo, significando que o cérebro não registra passivamente a informação visual que recebe, ele ativamente busca interpretá-lo” (1994 apud BATTISTA, 2007, p.65).

Para ilustrar essa afirmação, Battista (2007) considera a seguinte figura

⁶ *Aprendizagem com compreensão: princípios e processos na construção de significados para as ideias geométricas.*

⁷ Francis Crick, James Watson e Maurice Wilkins ganhadores do Prêmio Nobel de Fisiologia ou Medicina em 1962.



Figura 12 Um triângulo retângulo que não está lá realmente (BATTISTA, 2007, p. 65)

A maioria das pessoas, ao olhar essa figura, vê um triângulo equilátero parcialmente obscurecido por um triângulo retângulo. Entretanto, o triângulo retângulo não está lá realmente. Ao invés disso, nossa mente o constrói.

A construção do significado, entretanto, não está restrita a ver, ela também se aplica ao raciocínio consciente. Como o psicólogo Robert Ornstein afirma tão eloquentemente, “nossas experiências, percepções, memórias não são diretamente do mundo, mas são nossas próprias criações, um sonho do mundo, aquele que evoluiu para produzir a informação suficiente para nos adaptarmos às circunstâncias locais” (1991 apud BATTISTA, 2007, p.65).

Princípio 2: Indivíduos constroem novo conhecimento e compreensão baseados sobre aquilo que eles já conhecem e pensam (BRANSFORD, BROWN, COCKING, 1999 apud BATTISTA, 2007, p.66).

Nossas interpretações do mundo dependem de nossos modelos mentais atuais. Por exemplo, examinar os dois segmentos verticais escuros na seguinte figura.

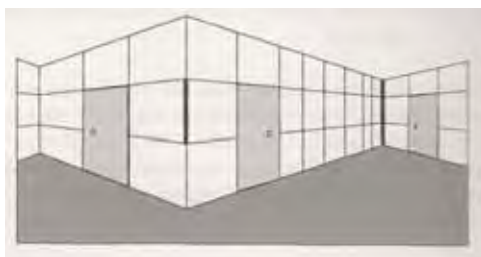


Figura 13 Os dois segmentos verticais escuros têm o mesmo comprimento (BATTISTA, 2007, p.66)

Surpreendentemente esses segmentos têm exatamente o mesmo comprimento. Mas, os modelos mentais que já possuímos para interpretar o contexto do mundo real no qual os segmentos estão mostrados levam-nos a construir a percepção no qual os comprimentos dos segmentos parecem muito diferentes.

Como implicações para o ensino e a aprendizagem da Matemática, dando atenção às construções matemáticas dos estudantes, Battista (2007) diz que o fato de considerar

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

seriamente estes dois princípios tem implicações importantes para compreender e apoiar sua aprendizagem matemática.

Um modo importante de fazer com que o pensamento dos alunos se torne visível é através da fala matemática, isto é, do falar sobre o pensamento matemático.

Um objetivo instrucional de proficiência matemática é um resultado muito mais amplo do que ter domínio de procedimento e Fuson, Kalchman, Bransford (2005) afirmam que há cinco ramos interligados que constituem a proficiência matemática:

- 1 – Compreensão Conceitual – compreensão de conceitos, operações e relações matemáticas;
- 2 – Fluência Procedimental – habilidade em levar adiante procedimentos flexivelmente, acuradamente, eficientemente e apropriadamente;
- 3 – Competência Estratégica – habilidade em formular, representar e resolver problemas matemáticos;
- 4 – Raciocínio Adaptativo – capacidade de pensamento lógico, reflexão, explicação e justificação;
- 5 – Disposição Produtiva – inclinação habitual em ver a Matemática como sensível, útil e vantajosa, acoplada a uma crença em diligência e sobre a própria eficácia (p.218).

Fuson, Kalchman, Bransford (2005) afirmam que esta técnica pode parecer óbvia, mas ela é bastante diferente daquela de dar aulas do modo tradicional ou recomendada pelos livros didáticos e, então, coloca os estudantes a trabalhar isoladamente sobre conjuntos de problemas ou tarefas de casa, ao invés de estudantes e professores discutirem ativamente como eles abordam os vários problemas e o porquê. Tal comunicação sobre o pensar matemático pode ajudar cada um na compreensão, na sala de aula, de um dado conceito ou método porque elucida abordagens contrastantes, algumas das quais são erradas – mas, frequentemente, por razões interessantes. Além disso, comunicar-se sobre o pensar da gente é um objetivo importante em si mesmo que também facilita outros tipos de aprendizagem.

Para os autores, uma ênfase sobre a fala matemática também é importante para ajudar os professores a se tornarem mais aprendizes e saber fazer fortes conexões com cada um de seus alunos. Quando os professores adotam o papel de aprendizes, que tentam compreender os métodos de seus alunos (mais do que só tomar nota dos procedimentos e respostas dos alunos como correta ou incorreta), eles frequentemente descobrem o pensamento, que pode dar mais do que um trampolim para um ensino posterior, capacitando-os para estender o pensamento mais profundamente ou compreender e corrigir erros.

2.3.2.1.1. A Comunicação na Produção de Significados

Como professores, devemos pôr atenção ao conhecimento prévio e aos modos de raciocinar que os estudantes trazem com eles quando se predispõem a aprender tópicos matemáticos novos. Não importa quão incompletas, ingênuas ou informais sejam as ideias dos alunos, essas ideias não podem ser ignoradas porque elas formam a fundamentação da construção de novos significados matemáticos produzidos pelos alunos.

Para que possa ocorrer a produção de significados, a comunicação em sala de aula é um fator muito importante no processo de ensino-aprendizagem-avaliação. A comunicação está sempre presente na sala de aula e é ao falar que o aluno produz significado. Segundo o NCTM (2000), dos anos iniciais até os anos finais da escolaridade, todos os alunos devem:

- Organizar e consolidar o seu pensamento matemático;
- Comunicar suas ideias matemáticas de forma coerente e clara aos colegas, professores e outros;
- Analisar e avaliar o raciocínio matemático e as estratégias dos outros;
- Utilizar a linguagem matemática para expressar ideias matemáticas com precisão.

A comunicação é um processo social em que os participantes interagem entre si, trocando informações e influenciando-se reciprocamente, e é um elemento que constitui o processo de educação. O processo de comunicação em sala de aula compreende um conjunto amplo de processos interativos na diversidade dos contextos em que ocorrem, das representações e das formas de expressão. Os alunos podem comunicar suas ideias, e compreender as ideias formuladas por outros, oralmente, por escrito ou por outras formas (MARTINHO E PONTE, 2011). A comunicação oral permite uma maior espontaneidade e interação entre os alunos, enquanto que a comunicação escrita favorece a precisão das ideias e reflexões sobre elas. A escrita matemática auxilia a aprendizagem dos alunos, em muitos aspectos, incentivando a reflexão, esclarecendo ideias, e agindo como um catalisador para a discussão em grupo e através dela os alunos compreendem o material a ser estudado. No entanto, não se deve perder de vista que é através do discurso oral que se realiza o processo de

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

produção de significados matemáticos entre professor e alunos, pois, como afirma Lins e Gimenez (1997), produzir significado é “falar a respeito de um objeto”.

A capacidade de comunicação dos alunos depende do professor proporcionar a eles um ambiente favorável para isso. É dentro desse conjunto de processos de interação que ocorrerá a produção de significados matemáticos, onde os indivíduos partilham, entre si, as formas como encaram os conceitos e os processos matemáticos, fazendo-os evoluir e ajustando-os ao conhecimento matemático (MARTINHO E PONTE, 2011). A produção de significados evolui quando os alunos partilham seus significados, os tornando públicos ou visíveis. Essa produção é adquirida ao longo dos processos de interação presentes na sala de aula:

- Entre professor e alunos: em uma sala de aula, em que os alunos trabalham, em pequenos grupos, a resolução de problemas, o professor assume um papel de orientador, em que as perguntas tornam-se relevantes e conduzem os alunos ao desenvolvimento de capacidades de comunicação e raciocínio. O professor deve assumir o papel de regulador da atividade comunicativa, de organizador do discurso, com as perguntas que faz, e de encorajador dos alunos, ao levar os alunos a assumirem uma participação ativa e voluntária.
- Entre alunos: as interações entre os alunos, com uma menor carga de formalidade, são fundamentais no estímulo à descoberta e à crítica, assim, como a elaboração de sínteses de significados.

O trabalho em grupo “permite que os alunos exponham as suas ideias, ouçam os colegas, coloquem questões, discutam estratégias e soluções, argumentem e critiquem outros argumentos” (PONTE; SERRAZINA, 2004, p.128). A interação aluno-aluno, em um ambiente de resolução de problemas, é mais rica do que numa aula de resolução de exercícios. Entre esses fatores, os alunos sentem-se mais confortáveis ao falar em pequeno grupo do que em grande grupo, onde vão, progressivamente, apropriando-se da linguagem matemática. Ao falarem e ouvirem os colegas, podem esclarecer os significados e a construção pessoal do conhecimento que, ao ser combinado com o dos outros, torna-se útil. A resolução de problemas proporciona aos alunos uma convivência com aspectos essenciais da experiência

matemática, permitindo-lhes mobilizar e consolidar conhecimentos matemáticos já adquiridos. Um dos modos como o professor pode avaliar se, de fato, os alunos se apropriaram de tais conhecimentos é através da comunicação oral estabelecida entre o professor e os alunos ou entre estes, ou através da comunicação escrita.

2.3.2.2. Como “Medir” a Qualidade da Produção de Significados⁸

Um projeto pode ser construído porque há evidência crescente e, talvez, até aceitação da ideia de que os estudantes constroem seu próprio conhecimento. Também, era ideia aceita de que essa construção fosse fortemente influenciada por uma variedade de fatores incluindo os estudantes, seus colegas, seus pais e as atitudes e crenças sobre Matemática de seus professores, assim como a compreensão e a interpretação de seu conhecimento prévio.

Pensamento recente sobre ensino e aprendizagem de Matemática tem sido influenciado por investigações de pesquisa cognitiva contrastando um modo que especialistas e novatos organizam seu conhecimento e resolvem problemas. Esses estudos têm implicações no modo como os professores organizam a informação a ser ensinada e o tipo de habilidades em resolução de problemas que precisam de atenção em sala de aula. Parece bastante claro que os estudantes necessitam de assistência para organizar seu conhecimento, perceber relações entre pedaços de conhecimento, e de descrever problemas em termos de conceitos ou princípios subjacentes antes de tentar chegar a uma solução.

Várias definições e novas perspectivas para diagnóstico e prescrição têm sido produzidas.

A operação envolvida na obtenção de dados essenciais e informações básicas sobre cada aprendiz e o processo de analisar esses dados e informações é chamado de diagnóstico (TRUEBLOOD, 1997 apud GRAEBER, 1991). A estratégia diagnóstica está baseada sobre um modelo simples, que envolve a mistura de três processos: a identificação do nível de realização de um aluno, a análise do conteúdo a ser ensinado e a implementação de procedimentos instrucionais apropriados (REISMAN, 1977, apud GRAEBER, 1991). O diagnóstico será definido como um exame das estruturas do estudante, as estruturas do

⁸ Texto baseado no livro *Insights into Secondary School Students' Understanding of Mathematics*, de Anna O. Graeber. University Maryland, 1991.

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

conteúdo matemático que está sendo aprendido e, finalmente, uma revisão da natureza das estruturas instrucionais atualmente em prática.

Entendendo como prescrição, a definição encontrada no dicionário Houaiss: *1. ato ou efeito de prescrever, ordem, determinação; 2. norma, preceito, regra; 3. aquilo que se prescreve; se recomenda; se receita*. Em nosso trabalho, a prescrição será definida como o processo de restabelecer a harmonia entre as estruturas do aprendiz e as estruturas da Matemática através da intervenção direta do professor (SCHULTZ; STRAWDERMAN, 1980 apud GRAEBER, 1991). Assim, a prescrição é uma recomendação embora, num planejamento em educação, nem sempre seja seguido fielmente.

Para inferir se cada estudante já conhece os conceitos e as habilidades ensinadas, se eles estão corretos ou não em nível de maturidade é preciso inferir quais pré-requisitos conceituais ou de quais habilidade precisam ser aprendidas antes que um novo tópico seja ensinado (ASHLOCK; JOHNSON; WILSON & JONES, 1983 apud GRAEBER, 1991).

Um diagnóstico matemático prescritivo é uma forma de instrução matemática, baseada sobre o conhecimento do particular aprendiz envolvido (especialmente suas compreensões matemáticas), que antecipa as dificuldades do aprendiz, que enfatiza tanto os objetivos cognitivos quanto os afetivos, e que vê a aprendizagem como preocupada mas não ditada pelas circunstâncias pessoais ou de atitude do aprendiz (ENGELHARDT, 1988 apud GRAEBER, 1991).

Wenger (1987 apud GRAEBER, 1991) enfatizou a natureza interativa da comunicação do conhecimento e a necessidade resultante de os professores entenderem o que os estudantes entendem antes que lhes tenham ensinado com eficiência. Kilpatrick (1987 apud GRAEBER; JOHNSON, 1990, p.2 – 6_b) resume as limitações de um modelo “diagnóstico/prescritivo” depois do uso comum desses termos no campo médico. As perspectivas refletidas nas ideias de Engelhardt (1988), Wenger (1987) e Kilpatrick (1987) parecem razoáveis e consistentes com visões recentes do processo de ensino-aprendizagem.

Saber exatamente como um diagnóstico é feito ou como um ensino prescritivo é levado avante é influenciado não somente por considerações logísticas mas, também, pelos objetivos de ensino e da teoria da aprendizagem que está sendo seguida. Como Underhill, Uprichard e Heddens (1980) notaram

em qualquer tempo dado, o diagnóstico é caracterizado por julgamentos do que é valioso na aprendizagem matemática. Quando o cálculo é altamente

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

valorizado, o diagnóstico consiste primeiramente em estudar o sucesso computacional do aprendiz em termos de precisão e eficiência. Analogamente, quando a resolução de problemas, a estrutura matemática, a compreensão ou o significado, ou a atitude do aprendiz é vista como importante, o diagnóstico deve incluir esses elementos (apud GRAEBER, 1991).

Em outras palavras, aqueles que estão interessados principalmente na habilidade dos estudantes em seguir um procedimento examinarão se e onde o procedimento falha. Aqueles que estão interessados em ajudar os estudantes a construir compreensão conceitual ou relacional estão mais aptos a investigar o raciocínio do estudante usado para chegar a uma resposta.

A informação diagnóstica pode ser obtida a partir de observações de trabalhos escritos e orais dos estudantes, assim como de entrevistas mais formais, questionários ou testes. As respostas dos estudantes tanto para tarefas enfocadas e explorações de fim mais aberto, jogos ou simulações podem conduzir a percepções sobre sua compreensão. As observações podem ser feitas com indivíduos trabalhando sozinhos ou em grupos. A habilidade dos professores em propor questões e apresentar tarefas que produzem percepções na compreensão de conceitos matemáticos dos estudantes e seu processo de raciocínio é essencial.

2.3.3. A Resolução de Problemas

Neste capítulo, apresentaremos uma breve história da Resolução de Problemas, falaremos sobre a concepção de problema adotada para este trabalho, sobre as diferentes abordagens de Resolução de Problemas e, por fim, abordaremos a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, adotada pelo GTERP e chamada Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

2.3.3.1. Uma Breve História da Resolução de Problemas

A Resolução de Problemas como metodologia de ensino em sala de aula, segundo Stanic e Kilpatrick (1989), é bastante recente na Educação Matemática, embora problemas já tenham uma longa história na Matemática da humanidade. Podemos citar, por exemplo, os problemas encontrados no Papiro de Rhind, que também é conhecido como Papiro de Ahmes. Ahmes foi um escriba que copiou esse documento de um outro muito mais antigo, por volta de 1650 a.C. O Papiro de Rhind é um manuscrito matemático egípcio que contém uma coleção de problemas.

Num desses problemas pede-se a soma de uma progressão geométrica de cinco termos, onde o primeiro termo e o multiplicador são, ambos, iguais a sete. No Papiro aparece uma forma do problema abreviado, com dois metros de solução e a resposta dada.

Um outro exemplo, um documento chinês datando de cerca de 1000 a.C. é apresentado e dos antigos gregos é dado uma primeira versão do problema da cisterna:

Eu sou um leão de bronze; meus orifícios são meus dois olhos, minha boca e o peito de meu pé direito. Meu olho direito enche a cisterna em dois dias, meu olho esquerdo em três e meu pé em quatro. Minha boca é capaz de enchê-la em seis horas. Diga-me quanto tempo será preciso para enchê-la com os quatro juntos? (STANIC; KILPATRICK, 1989, p.3).

Métodos particulares de resolução de problemas também têm uma longa história. Por exemplo, uma técnica muito parecida com a Regra da Falsa Posição apareceu no Papiro de Ahmes. Na história de problemas algébricos, Vera Sanford, em 1927, deu um exemplo usando um problema de um trabalho do século XV, apresentado por Phillip Calandri⁹.

⁹ Este problema foi apresentado e resolvido por nós na página 45.

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Trabalhos desta mesma forma podem ser encontrados em problemas semelhantes em livros texto de Matemática do século XIX e do século XX. O ponto importante a ser considerado sobre esses exemplos é que uma visão limitada da aprendizagem de resolução de problemas é assumida. Até muito recentemente ensinar a resolver problemas significava apresentá-los e, talvez, incluir um exemplo de uma solução técnica e específica.

É interessante notar que enquanto o número de educadores matemáticos profissionais de universidades crescia, o lugar da Matemática no currículo escolar vinha sob ataques. Os educadores matemáticos tentavam ajustar-se aos tempos e às ideias mutantes, levando a uma crise na educação matemática por volta dos anos 1930 que, no dizer de Stanic (1983/1984, 1986, apud STANIC; KILPATRICK, 1989), é uma crise que ainda não foi resolvida.

É especialmente irônico que, parcialmente por causa do ataque ao lugar da Matemática no currículo escolar, muitos de nossos precursores, enquanto advogavam os benefícios da Matemática para o nosso pensar, desconfiavam da ideia de dar aos problemas um papel tão grande no currículo.

Stanic e Kilpatrick (1989) observam que a Teoria da Disciplina Mental, durante o século XIX, forneceu a estrutura para a expressão das ideias acima. Segundo os autores, a disciplina mental foi o resultado de uma fusão nem sempre pacífica entre a psicologia das faculdades e a tradição das artes liberais. Como uma teoria de currículo, a Disciplina Mental se baseava na ideia de que era um trabalho da escola ajudar os estudantes a desenvolverem essas faculdades e que as artes liberais tradicionais – ou seja, a matemática e as línguas clássicas – eram os melhores veículos para o desenvolvimento dessas faculdades.

Embora a tradição refletida na Teoria da Disciplina Mental continue a resistir, acontecimentos que ocorreram perto da virada do século XX acarretaram mudanças significativas na forma como era visto o estudo da Matemática. Stanic e Kilpatrick (1989) afirmaram que Thorndike é geralmente reconhecido como um contestador das noções básicas da Teoria da Disciplina Mental.

Assim, eventos ocorridos no ambiente do declínio da Teoria da Disciplina Mental podem ter estabelecido o estágio para educadores matemáticos começarem a dar mais ênfase específico ao desenvolvimento da habilidade em resolução de problemas. Como uma olhada para a resolução de problemas no currículo, desde os antigos egípcios até hoje, diferentes temas são revelados.

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

George Polya (1887-1983) via a resolução de problemas como uma arte e trabalhava com a ideia da heurística, pois se preocupava com o ensino da Matemática baseado na resolução de problemas. Em seu livro, *How to solve it*, cuja primeira edição é de 1945, Polya apresenta quatro passos para se resolver problemas: compreender o problema; elaborar um plano; executar o plano e verificar a solução encontrada no problema original. Para ele, a finalidade da educação é desenvolver a inteligência, isto é, ensinar os alunos a pensar.

Ensinar a pensar significa que o professor de Matemática não deveria simplesmente comunicar informação, mas deveria também tentar desenvolver a habilidade dos estudantes em usarem a informação transmitida: ele deveria enfatizar o saber-fazer, as atitudes úteis e os hábitos da mente desejáveis (POLYA 1964 apud NUNES, 2010, p.79).

Para Polya, o professor deveria ilustrar as técnicas de resolução de problemas, discutir com os alunos a prática de uma maneira compreensiva e não mecanizada. Infelizmente, os livros didáticos incluíram o trabalho de Polya como um procedimento de passos: compreender o problema, desenvolver um plano, executar o plano e avaliar a solução. Mas, ao se trabalhar com as ideias de Polya de uma maneira mecanizada perde-se a essência do seu trabalho, que propunha “um ensino que criasse oportunidades para que os alunos se comportassem como matemáticos, investigando problemas abertos e desafiantes para todos” (D’AMBROSIO, 2008, p.1).

A Resolução de Problemas, no final dos anos 70, começou a ganhar espaço. Nos Estados Unidos, em 1980, foi publicado, pelo *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM – o documento *An Agenda for Action*, no qual se buscava uma melhor Educação Matemática para todos. Nele são feitas recomendações para a Matemática escolar dos anos 80. A primeira delas dizendo que “a resolução de problemas deve ser o foco da Matemática escolar nos anos 80”. Desta forma, a Resolução de Problemas já começa a ser vista como uma metodologia de ensino.

Segundo Onuchic (1999), as pesquisas da década de 80 deram atenção ao processo de resolução de problemas, mas o processo continuava preso à busca da solução. O processo de resolução de problemas visava ao trabalho em sala de aula, na forma de coleção de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas, que era o ponto central do trabalho de professores. Com isso, no final

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

da década de 80, pesquisadores questionavam o ensino e a aprendizagem da resolução de problemas discutindo perspectivas didático-pedagógicas.

Na década de 90, a Resolução de Problemas torna-se uma metodologia de ensino em que o problema é um ponto de partida para o ensino e a aprendizagem de Matemática. No Brasil os PCN (1998) – Parâmetros Curriculares Nacionais – assumiram a Resolução de Problemas como um meio para se fazer matemática dentro da sala de aula afirmando, que o problema é o ponto de partida de uma atividade matemática e não a definição de conceitos.

O NCTM (2000) afirma que desde o Pré-K até a High School, os alunos devem: “construir novos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas; resolver problemas que surgem na Matemática e em outros contextos; aplicar e adaptar uma variedade de estratégias apropriadas para resolver problemas; acompanhar e refletir sobre o processo de resolução de problemas matemáticos” (p.52).

Resolver problemas é uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática e, assim, ela não deveria ser uma parte isolada do programa de Matemática. (...) Os contextos dos problemas podem variar desde experiências familiares envolvendo as vidas dos estudantes ou seu dia-a-dia na escola, até aplicações envolvendo as ciências ou o mundo do trabalho. (...) Bons problemas dão aos estudantes a oportunidade de solidificar e estender sua compreensão e estimular nova aprendizagem. (...) Muitos conceitos matemáticos podem ser introduzidos através de problemas baseados nas experiências familiares vividas pelos estudantes ou de contextos matemáticos (STANDARDS, 2000 apud NUNES, 2010, p.82).

Atualmente vivemos em uma sociedade do conhecimento em que todos devem saber Matemática, pois a sociedade exige cada vez mais cidadãos críticos e reflexivos. Por isso, a escola tem o papel fundamental de proporcionar a todos uma oportunidade de interação social, ou seja, ela deve preparar os alunos para serem membros da sociedade.

2.3.3.2. O que é um Problema?

Ao falarmos sobre resolução de problema, afinal, o que entendemos por problema? Há na literatura várias concepções sobre o termo problema, que reproduzimos abaixo cronologicamente:

Para Polya (1962, p.117)

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

a palavra “problema” será considerada num significado bastante abrangente (...). Ter fome não é usualmente um problema na vida moderna. Se tenho fome em casa, pego alguma coisa na geladeira, ou vou a uma lanchonete, ou a algum outro lugar se estou na cidade. É uma questão diferente, entretanto, quando a geladeira está vazia ou acontece de eu estar na cidade sem dinheiro; nesse caso, ter fome torna-se um problema. Em geral, um desejo pode ou não levar a um problema. Se o desejo traz à minha mente imediatamente, sem qualquer dificuldade, alguma ação óbvia que seja provavelmente a de alcançar o objeto desejado, não há problema. Se, entretanto, nenhuma ação me ocorre, há um problema. Assim, ter um problema significa: *procurar conscienciosamente alguma ação apropriada para atingir um fim claramente concebido, mas não imediatamente atingível*. Resolver um problema significa achar tal ação.

Já em 1995, Dante afirma que “problema é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la” (p.9).

Os PCN – 1998 (p.41) afirmam que “um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la”.

Pérez e Cabrera (2000 apud NUNES, 2010, p.77), por sua vez dizem que problema

É toda situação em que se tem um planejamento inicial e uma exigência que obriga a transformá-lo. O caminho, para passar da situação ou planejamento inicial à nova situação exigida, tem que ser desconhecida e a pessoa deve querer fazer a transformação.

Em seu livro *Aprender Matemática resolvendo problemas*, Marincek (2001, p.15) afirma que

Problema é toda a situação em que os alunos necessitam pôr em jogo tudo o que sabem, mas que contém também algo novo, para o qual ainda não tem resposta e exige a busca de soluções. É nesse movimento de busca de soluções que se estabelecem novas relações e se constroem conhecimentos que modificam os anteriores.

Van de Walle (2001, p.42) diz que um problema é “qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta”.

Vale e Pimentel (2004 apud SOUZA, 2010, p.116) dizem que

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Definir **problema** é um propósito difícil, já que uma determinada situação pode ser um problema para um dado indivíduo, num dado momento, e para o mesmo indivíduo, num outro momento, ser apenas um exercício ou um fato específico. Podemos assim concluir que existe um conjunto de fatores inerentes ao indivíduo e à própria tarefa, além de outros, que vão condicionar quer à sua caracterização quer ao seu desempenho. Das várias definições de problema podemos retirar que um **problema** é uma situação para a qual não se dispõe, à partida, de um procedimento que nos permita determinar a solução, sendo a **resolução de problemas** o conjunto de ações tomadas para resolver essa situação (VALE; PIMENTEL, 2004 apud SOUZA, 2010, p.116).

Segundo Villa e Callejo (2006, p.29)

Um problema é uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática, cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova (VILLA; CALLEJO, 2006, p.29).

É claro que essas diferentes falas englobam as mesmas ideias. Buscando o que de comum e necessário a todas na definição de Problema, Onuchic (1999, p.215) sintetiza dizendo que “problema é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em resolver”.

2.3.3.3. Diferentes Abordagens da Resolução de Problemas

Onuchic (1999) afirma que

Durante a década de 1980, muitos recursos em resolução de problemas foram desenvolvidos, visando ao trabalho em sala de aula, na forma de coleção de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas. Muito desse material passou a ajudar os professores a fazerem da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho. Entretanto, não deu o tipo de coerência e a direção necessária a um bom resultado porque havia pouca concordância na forma pela qual este objetivo era encarado. Essa falta de concordância ocorreu, possivelmente, pelas grandes diferenças existentes entre as concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de “resolução de problemas ser o foco da matemática escolar” (p. 206).

Schroeder & Lester (1989) apresentam três concepções a respeito da resolução de problemas, que poderiam ajudar a refletir sobre essas diferenças: ensinar *sobre* Resolução de Problemas, ensinar Matemática *para* resolver problemas e ensinar Matemática *via* resolução

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

de problemas. Ensinar sobre Resolução de Problemas é considerá-la como um novo conteúdo, teorizando sobre Resolução de Problemas, seguindo de perto as linhas de Polya; ensinar para a resolução de problemas é aplicar uma matemática já trabalhada anteriormente para a resolução do problema dado; ensinar via resolução de problemas é visto como uma metodologia de ensino-aprendizagem e, portanto, como um ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática. Nesta última concepção, “o problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento”, pois os problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a construção dos conceitos matemáticos antes de sua apresentação em linguagem formal (ANDRADE, 1998 apud ONUCHIC, 1999, p. 207).

No ensino para resolver problemas, segundo Schroeder & Lester (1989), o professor se preocupa em desenvolver as habilidades dos alunos para explicarem problemas do mundo real em representações matemáticas e vice-versa. Neste tipo de ensino, os alunos lidam com problemas de aplicação da Matemática somente após os conceitos e habilidades matemáticos terem sido introduzidos, desenvolvidos e praticados. Porém, a Matemática é ensinada separadamente de suas aplicações, como mostra a figura abaixo:

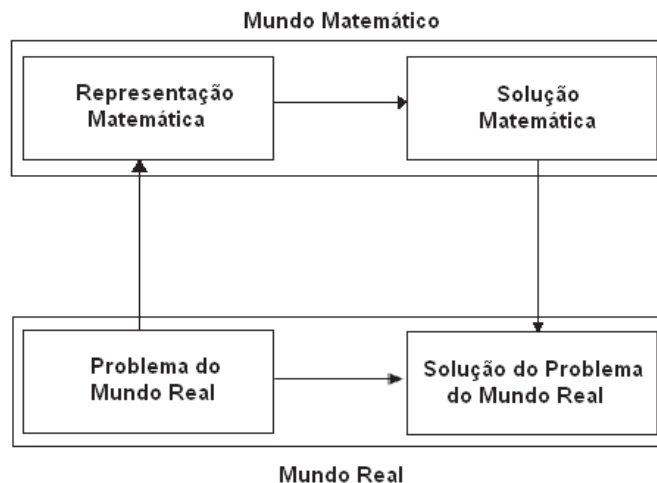


Figura 14 Um simples modelo do processo de resolver problemas matemáticos (SCHROEDER; LESTER, 1989, p.35)

A figura 14 nos apresenta dois níveis: o mundo real, com problemas e aplicações da Matemática, e o mundo idealizado, com símbolos, operações e técnicas matemáticos. Esta figura nos mostra como ocorre o ensino para resolver problemas: temos um problema do mundo real, em que quem o resolve, primeiramente, o traduz para o mundo idealizado

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

(matemático); em seguida, opera-se sobre as representações matemáticas chegando, assim, em uma solução matemática do problema, que é traduzida para o mundo real.

Já no ensino via resolução de problemas, como mostrado na figura 15, a Matemática é construída por meio do problema.

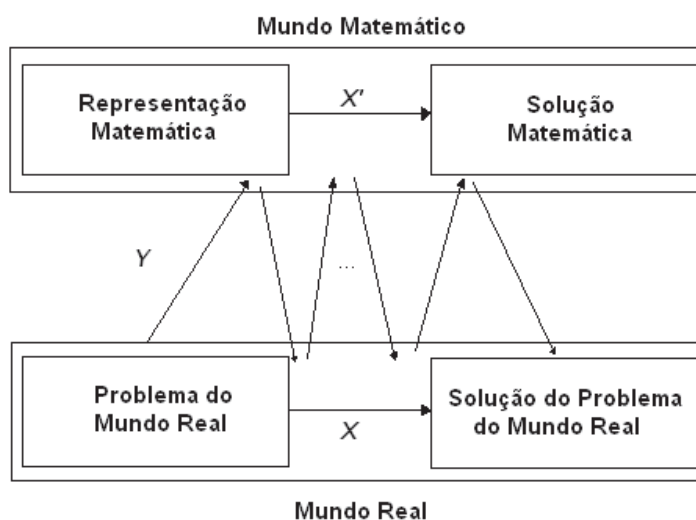


Figura 15 Um modelo do processo de resolver problemas (SCHROEDER; LESTER, 1989, p.35)

Esta figura também nos apresenta dois níveis: o mundo real e o mundo matemático. As flechas Y ilustram a correspondência entre o processo de resolver o problema no mundo real X e no mundo matemático X' e, também, mostram que quem resolve o problema transita entre os dois níveis. As setas Y apontadas para cima indicam que o resolvidor representa os processos de abstração e generalização no mundo matemático do mundo real. Já as setas apontadas para baixo indicam que o resolvidor do problema é capaz de explicar o processo matemático se referindo às ações do mundo real que os símbolos matemáticos representam. Se o resolvidor do problema esqueceu os detalhes de um procedimento matemático, então ele é capaz de reconstruir esse procedimento imaginando os passos concretos correspondentes no mundo em que o problema foi colocado.

2.3.3.4. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Cada ideia introduzida na sala de aula de Matemática pode e deveria ser completamente compreendida por cada criança. Não há exceções! Não há absolutamente desculpa para as crianças aprenderem qualquer aspecto da

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Matemática sem tê-la compreendido. Todas as crianças são capazes de aprender tudo de Matemática que queremos que elas aprendam, e elas podem aprendê-la de uma maneira significativa, de uma forma que faça sentido para elas (VAN DE WALLE, 2001, p.17).

No Brasil, os PCN – 1998, na área de Matemática, têm como objetivo principal fazer com que os alunos possam: pensar matematicamente; levantar ideias matemáticas; estabelecer relações entre elas; saber se comunicar ao falar sobre elas; estabelecer formas de raciocínio; estabelecer conexões entre temas matemáticos e outras áreas; poder construir conhecimentos matemáticos e desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los e até propor novos problemas a partir deles. Fazendo um paralelo, o NCTM (2000) apresenta a Resolução de Problemas como o primeiro padrão de processo, seguido de Raciocínio e Prova, Comunicação, Conexões e Representação.

Entretanto, no ensino tradicional de Matemática em sala de aula, esse trabalho é desenvolvido de forma diferente pois, como afirma Brasil (1964, p.22)

Tradicionalmente o problema é empregado, pelos professores, na verificação e na fixação da aprendizagem. Atentando, porém, para a história das ciências, notamos que o problema antecede invariavelmente as descobertas, é o provocador dos estudos e o orientador das construções teóricas. Por que no ensino da Matemática especialmente, invertemos a ordem natural das coisas?

O que percebemos é que alguns professores não aplicam um problema aos alunos e, sim, um exercício para fixação, em que os alunos utilizam, de forma mecânica, ou uma fórmula ou uma técnica operatória. Já no ensino de Matemática através da resolução de problemas, o aluno aprende Matemática através da resolução dos problemas, isto é, o aluno deve construir a matemática contida no problema.

Deste modo, o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, – GTERP – coordenado pela Prof^a. Dr^a. Lourdes de la Rosa Onuchic, na Unesp – Rio Claro / SP, tem produzido atividades de investigação e de produção científica na área de resolução de problemas. O grupo desenvolve estudos que atinjam a sala de aula, visando a um ensino-aprendizagem com compreensão e significados, em todos os níveis de escolaridade. Por isto, as pesquisas realizadas pelo grupo adotam a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

A palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação indica que o ensino e a aprendizagem devem acontecer simultaneamente durante a construção do conhecimento.

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Desta forma, a avaliação é realizada de forma contínua, para contribuir para uma melhor aprendizagem, pois “as avaliações contínuas permitem que o professor compreenda as ideias preconcebidas dos estudantes, perceba em que ponto estão no caminho que leva do raciocínio informal para o formal e planeje a instrução de acordo com isso” (BRANSFORD; BROWN; COCKING, 2007, 44).

Para este trabalho assumimos a concepção de que “problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver” (ONUCHIC, 1999, p.215). Ou seja, ao resolver um problema o aluno precisa estar interessado em resolvê-lo e não precisa de regras ou métodos prescritos ou memorizados. Sendo assim, nesta metodologia, o problema é visto como um ponto de partida e a construção do conhecimento matemático se dará através de sua resolução, sendo que o problema proposto aos alunos conduzirá à construção de um novo conteúdo, aquele que o professor planeja para aquela aula.

Onuchic e Allevato (2008, p.2) dão uma sugestão para se trabalhar com esta metodologia em sala de aula por meio do seguinte roteiro:

- 1) **Formar grupos e entregar a atividade** – O professor apresenta o problema aos alunos que, distribuídos em pequenos grupos, leem e tentam interpretar e compreender o problema. Ressalte-se que o conteúdo necessário, ou mais indicado, para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula. O problema proposto aos alunos, que chamamos de problema gerador, é que conduzirá ao conteúdo que o professor planejou construir naquela aula.
- 2) **Observar e incentivar** – O professor não mais tem o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos tentam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. O professor faz a intermediação no sentido de levar os alunos a pensar, dando-lhes tempo para tal, e incentivando a troca de ideias entre os alunos.
- 3) **Auxiliar nos problemas secundários** – O professor incentiva os alunos a utilizarem os seus conhecimentos prévios ou técnicas já conhecidas para resolver o problema; estimula-os a escolher diferentes estratégias a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como um interventor e questionador, acompanhando suas explorações e ajudando-os, quando necessário, a resolver problemas secundários. Tratam-se de dúvidas apresentadas pelos alunos no contexto do vocabulário presente no enunciado; no contexto da leitura e interpretação; além daqueles que podem surgir por ocasião da resolução do problema: notação, passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, conceitos relacionados, técnicas operatórias, a fim de dar prosseguimento ao trabalho.
- 4) **Registrar as resoluções na lousa** – Representantes dos grupos são convidados a registrar suas resoluções na lousa. Resoluções certas e erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.
- 5) **Realizar uma plenária** – O professor chama todos os alunos para discutirem as resoluções realizadas pelos colegas, para defenderem seus

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos, pois este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

6) **Buscar um consenso** – Após sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

7) **Formalizar o conteúdo** – Neste momento, denominado “formalização”, o professor registra na lousa uma apresentação formal dos novos conceitos e conteúdos construídos, destacando as diferentes técnicas operatórias e as propriedades qualificadas para o assunto.

Nesta metodologia, os alunos se tornam investigadores de problemas desafiadores, em que devem compreender e questionar os conceitos necessários para a resolução dos problemas. O papel do professor, nesta metodologia, é o de observador e incentivador da aprendizagem, sendo bastante exigido, pois “(...) o professor terá que enfrentar situações inesperadas em sala de aula e, em algumas oportunidades, deverá alterar aquilo que tinha planejado, ainda mais, terá que estar atento às dificuldades apresentadas pelos alunos” (RODRIGUES, 1992 apud SOUZA, 2010, p.123). Ao adotar esta metodologia em sala de aula, o professor precisa ser reflexivo sobre sua prática, pois, como afirma Marincek (2001, p.16),

O professor é responsável por organizar as situações de maneira a garantir que cada aluno avance na construção do saber e que possa acessar esse saber nos diversos momentos em que necessite utilizá-lo.

Para garantir que os alunos construam um conhecimento contextualizado, provido de sentido, é necessário que o professor formule ou escolha cuidadosamente os problemas que irá propor, para que o aluno considere-os como problemas de fato e sinta-se impelido a agir, a falar e a refletir para solucioná-los.

Para auxiliar os professores em sua reflexão frente a qualquer problema proposto, Onuchic preparou as seguintes questões:

- Isso é um problema? Por quê?
- Que tópicos de Matemática podem ser iniciados com esse problema?
- Haverá necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele?
- Para que séries acredita ser este problema adequado?
- Que caminhos podem ser percorridos para se chegar à sua solução?
- Como observar a razoabilidade das respostas obtidas?

CAPÍTULO 2 – 1º BLOCO DE ROMBERG: IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

- Como professor, você teria dificuldade em trabalhar esse problema?
- Que grau de dificuldade acredita que seu aluno possa ter diante desse problema?
- Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais?

2.4. A Pergunta da Pesquisa

Como aplicaremos um projeto em uma turma da 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental, incluímos algumas novas variáveis ao Modelo Preliminar. Ao aplicar o Projeto em sala de aula, utilizaremos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, em conjunto com o Caderno do Aluno (2010), oferecidos pela Proposta Curricular do Estado de São Paulo. Assim, achamos importante realizar uma análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – Matemática – 1998, que diz isso:

Os Parâmetros Curriculares Nacionais explicitam o papel da Matemática no Ensino Fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. Destacam a importância de o aluno desenvolver atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a auto-estima, de respeitar o trabalho dos colegas e de perseverar na busca de soluções. Adotam como critérios para seleção dos conteúdos sua relevância social e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno, em cada ciclo. Indicam a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade Matemática e discutem caminhos para “fazer Matemática” na sala de aula, destacando a importância da História da Matemática e das Tecnologias da Comunicação (p.15).

e da Proposta Curricular do Estado de São Paulo – PCESP.

A Proposta Curricular se completará com um conjunto de documentos dirigidos especialmente aos professores. São os *Cadernos do Professor*, organizados por bimestre e por disciplina. Neles, são apresentadas situações de aprendizagem para orientar o trabalho do professor no ensino dos conteúdos disciplinares específicos. Esses conteúdos, habilidades e competências são organizados por série e acompanhados de orientações para a gestão da sala de aula, para a avaliação e a recuperação, bem como de sugestões de métodos e estratégias de trabalho nas aulas, experimentações, projetos coletivos, atividades extraclasse e estudos interdisciplinares (PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO, 2008, p.9).

Como consequência de nossa investigação nas três áreas, a Álgebra Escolar, a Produção de Significados e a Resolução de Problemas, mostrou-se importante rever nosso Modelo Preliminar, face às novas variáveis que surgiram, tornando-se necessária a construção de um Modelo Modificado.

2.4.1. Modelo Modificado

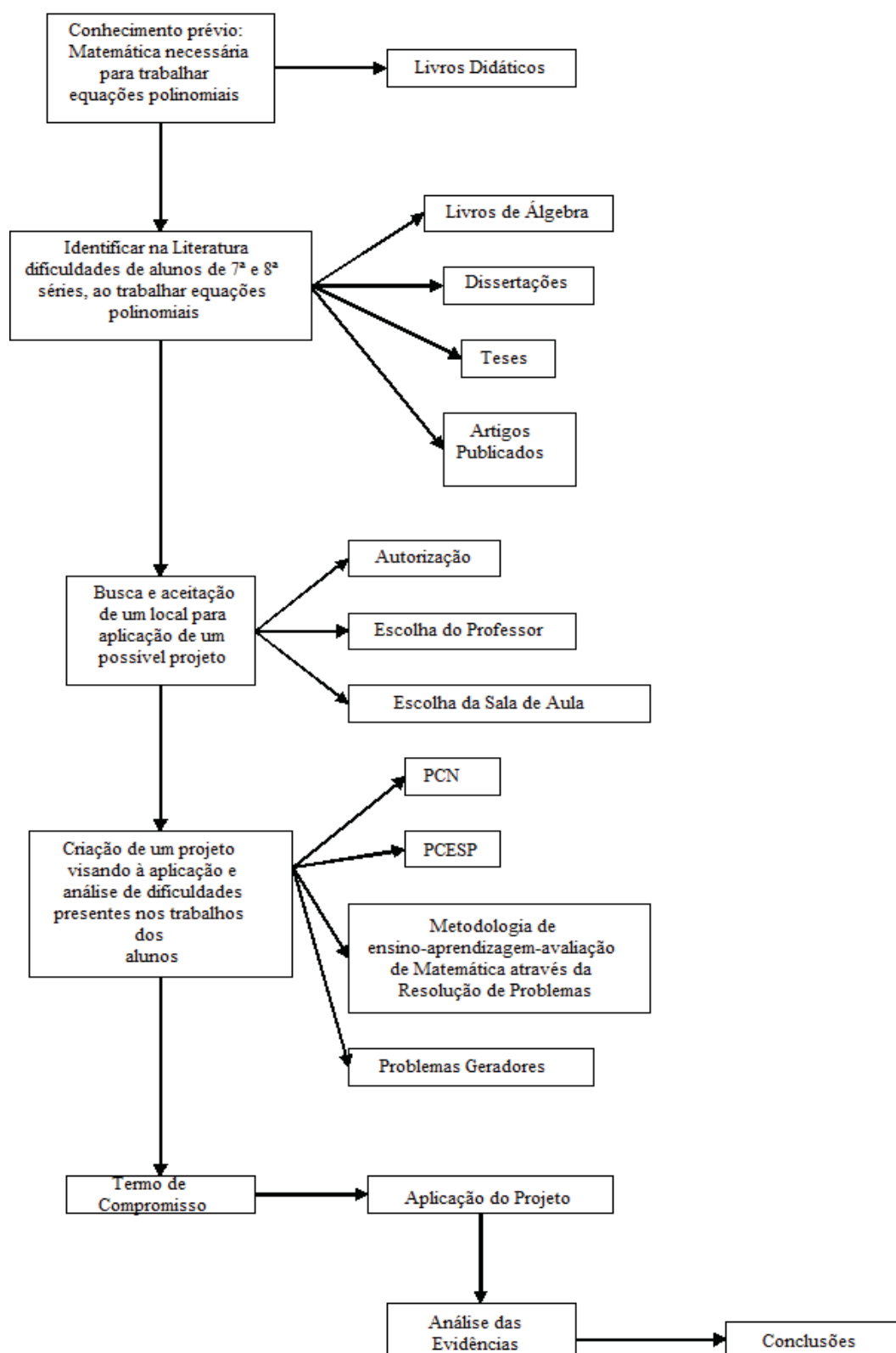


Figura 16 Modelo Modificado

2.4.2. A Pergunta da Pesquisa

O objetivo desta pesquisa é o de analisar a produção de significados, construídos pelos alunos da 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental, durante o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Equações Polinomiais do 1º e 2º graus através da resolução de problemas. No que se refere ao trabalho com equações do 1º grau, numa revisão buscar-se-á apoio em livros didáticos e, para trabalhar as equações do 2º grau far-se-á uso da Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

Assim, pretende-se que os alunos, ao receberem as atividades, sejam capazes de, com confiança, fazendo um trabalho mental que movimente seu conhecimento existente, transformando-o em saber e, então em aprendizagem, busquem caminhos que os conduzam à resolução e consequente solução dos problemas dados.

Após relacionar o fenômeno de interesse e o modelo modificado com as ideias dos nossos outros chegamos à seguinte pergunta norteadora da pesquisa:

Quais os significados produzidos, pelos alunos, no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de equações polinomiais do 2º grau?

Mas, ao longo da pesquisa, outras questões foram surgindo, levando-nos a considerá-las importantes para atingir nosso objetivo:

- Há possibilidade de se trabalhar Matemática seguindo o Caderno do Professor, indicados pela Proposta Curricular do Estado de São Paulo, sob a perspectiva da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?
- Será que os grupos e, em particular cada estudante, conseguiram construir os novos conceitos e os novos conteúdos matemáticos que a professora havia colocado como foco de aprendizagem na resolução de cada problema proposto?

CAPÍTULO 3
2º BLOCO DE ROMBERG
PLANEJAMENTO PARA A
RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA
PESQUISA

2º BLOCO DE ROMBERG

PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Estabelecidos o Modelo Modificado e o Problema da Pesquisa, passamos à resolução do mesmo.

Neste capítulo, inicialmente serão selecionados a Estratégia Geral e seu correspondente Procedimento Geral. A Estratégia Geral criada – criar um projeto de ensino para trabalhar equações polinomiais do 2º grau – apoiada nas variáveis do Modelo Modificado, pedirá por estratégias auxiliares necessárias ao seu desenvolvimento. O Procedimento Geral criado – a criação de um projeto de ensino para trabalhar equações polinomiais de 2º grau – necessitará, também, de procedimentos auxiliares que, quando postos em ação, levarão o Procedimento Geral à ação.

3.1. Selecionar uma Estratégia Geral de Pesquisa e seu Correspondente Procedimento Geral

A decisão sobre que métodos utilizar segue diretamente das questões que se selecionam, da visão de mundo na qual essas questões estão situadas, da tentativa de modelo que se tenha construído para explicar o “fenômeno de interesse”, e da conjectura que se tenha feito sobre a evidência necessária (ROMBERG, 1992, p.52).

O fluxograma de Romberg (1992) nos apresenta, no segundo bloco, as atividades cinco e seis, que nos dizem “o quê fazer” e “como fazer”, respectivamente. Nesse bloco constrói-se uma Estratégia Geral e um Procedimento Geral, que se apoiam nas variáveis do Modelo Modificado para podermos explicar o Fenômeno de Interesse e buscar pela solução do problema.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Para a construção da Estratégia Geral, dizendo o que devemos fazer para responder à pergunta norteadora da pesquisa, devemos atravessar a construção de várias estratégias auxiliares, $E_{A1}, \dots, E_{Am}$, e, correspondentemente, criaremos um Procedimento Geral e chegaremos a ele por meio de seus procedimentos auxiliares, $P_{A1}, \dots, P_{Am}$.

Tendo sempre em mente nosso Fenômeno de Interesse e o nosso Modelo Modificado apresentamos nossa Estratégia Geral, com suas estratégias auxiliares, e seu correspondente Procedimento Geral.

Assim, nossa Estratégia Geral e suas estratégias auxiliares ficaram definidas da seguinte maneira:

Estratégia Geral: Criar um projeto de ensino para trabalhar equações polinomiais do 2º grau.

Estratégias Auxiliares (E_A)

- **E_{A1} :** Definir a escola onde se pretende trabalhar.
 - Conseguir autorização da Direção da Escola;
 - Escolher um professor para aplicar o projeto;
 - Escolher uma sala de aula para aplicar o projeto.
- **E_{A2} :** Criar um Projeto de Ensino apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.
 - Fazer uma análise dos Documentos Oficiais (PCN e PCESP);
 - Adotar a Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino;
 - Escolher problemas geradores;
 - Fazer um roteiro das atividades;
 - Identificar os objetivos de cada atividade.
- **E_{A3} :** Conversar com os alunos sobre o Termo de Compromisso a ser estabelecido na sala de aula.
- **E_{A4} :** Aplicar o Projeto de Ensino na sala de aula.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Com procedimentos selecionados correspondentes às estratégias selecionadas, o nosso Procedimento Geral ficou definido como

Procedimento Geral: A criação de um projeto de ensino para trabalhar equações polinomiais de 2º grau.

A fim de estabelecer esse procedimento, houve a necessidade de criar procedimentos auxiliares correspondentes às estratégias auxiliares:

Procedimentos Auxiliares (P_A)

- **P_{A1} :** Definição da escola onde se pretende trabalhar.
 - Obtenção da autorização da Direção da Escola;
 - Definição do professor;
 - Definição da sala de aula.
- **P_{A2} :** Criação de um Projeto de Ensino apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.
 - Consultar os Documentos Oficiais (PCN e PCESP);
 - Apoio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas;
 - Escolha de problemas geradores;
 - Criação de um roteiro de atividades;
 - Identificação dos objetivos de cada atividade.
- **P_{A3} :** Elaboração de um Termo de Compromisso com os alunos.
- **P_{A4} :** Aplicação do Projeto de Ensino.

3.2. Procedimentos Auxiliares (P_A) em Ação

3.2.1 P_{A1} : Definição da Escola onde se Pretende Trabalhar

Nossa preocupação inicial era a de definir uma escola onde pudéssemos aplicar nosso Projeto de Ensino. Mas, para definirmos a escola, precisávamos definir o professor que trabalharia conosco. Como a pesquisadora não tinha experiência em sala de aula e a metodologia de ensino adotada no Projeto requer preparo e experiência docente, precisávamos encontrar um professor que aceitasse trabalhar, em sua sala de aula, com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. No entanto, caso o professor aceitasse nosso convite para desenvolver nossa proposta, será que ele saberia trabalhar, de maneira eficiente, com a metodologia de ensino sugerida?

Em conversa com o GTERP expusemos nossas preocupações. Um membro do grupo, que lecionava em uma escola estadual da cidade de Rio Claro / SP, nas turmas de 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental, e que conhece bem a metodologia de ensino adotada por nós, prontificou-se a trabalhar conosco nesse projeto. No início de 2010, essa professora defendeu sua dissertação de mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Unesp – Rio Claro / SP, na qual utilizou essa mesma metodologia de ensino. Com isso, essa professora se propôs a nos ajudar, cedendo a sala para observação da pesquisadora, visando a uma análise da produção de significados, produzidos pelos alunos, de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos.

Para a escolha da sala de aula optamos, em conjunto, pela 8ª série 3 (8ª3). Os alunos desta sala já conheciam a metodologia de ensino e puderam trabalhar de forma cooperativa e colaborativa, pois a docente já havia trabalhado, no ano anterior, com esses mesmos alunos.

Tendo sido definido o professor e a sala de aula, pedimos autorização, para a diretora dessa escola, para a aplicação do Projeto nos moldes propostos. A carta de pedido de autorização enviada à escola segue nos anexos.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

3.2.2. P_{A2}: A criação de um Projeto de Trabalho, em sala de aula, apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

3.2.2.1 Consulta aos Documentos Oficiais

Foram consultados os seguintes documentos oficiais nacionais: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Proposta Curricular do Estado de São Paulo (PCESP), a fim de se poder analisar seus objetivos e suas finalidades para o ensino-aprendizagem da Álgebra na Escola Básica.

No que se refere aos PCN, para os propósitos de nossa pesquisa seriam utilizados apenas os PCN – Matemática – 5ª a 8ª séries – 1998 que dizem

O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas (p.115).

Entretanto, nem sempre os professores acreditam que essa forma de ensino possa levar os alunos a um bom desempenho, pois o que se vê realmente nos resultados obtidos nas avaliações escolares e nas aplicações estaduais e nacionais, como o SAEB, o SARESP e outros, não lhes permite acreditar.

Em outros trechos, os PCN – Matemática – 1998 – dizem que

Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as “manipulações” como expressões e equações de uma forma meramente mecânica (p.116). (...) Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar “abstratamente”, se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados (p.117).

E finalizam dizendo que

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

As atividades algébricas propostas no Ensino Fundamental devem possibilitar que os alunos construam seu conhecimento a partir de situações-problema que confirmem significados à linguagem, aos conceitos e procedimentos referentes a esse tema, favorecendo o avanço do aluno quanto às diferentes interpretações das letras. Os contextos dos problemas deverão ser diversificados para que eles tenham oportunidade de construir a “sintaxe” das representações algébricas, traduzir as situações por meio de equações e construir as “regras” para a resolução de equações (p.121, 122).

Já, a Proposta Curricular do Estado de São Paulo tem a finalidade de organizar melhor o sistema educacional do estado, de forma a apoiar o trabalho realizado nas escolas estaduais e de contribuir para a melhoria da qualidade do ensino-aprendizagem para os alunos. A Proposta fornece informações aos professores, coordenadores e diretores das escolas para que se aperfeiçoem cada vez mais. A Secretária de Educação do Estado de São Paulo procura cumprir, juntamente com a Proposta, seu dever de garantir a todos uma base comum de conhecimentos e competências.

Juntamente com a Proposta Curricular há um conjunto de documentos para os professores, os *Cadernos do Professor*, que são organizados por bimestre e por disciplina. O conteúdo de cada bimestre não difere do que deve ser ensinado ou nas escolas ou apresentado nos livros didáticos. O diferencial é a abordagem adotada para cada tema. Nos cadernos são apresentadas *Situações de Aprendizagem* que ilustram a forma de abordar o conteúdo, oferecendo aos professores uma orientação para o desenvolvimento de tais situações, os auxiliando em sua prática em sala de aula. Esse Caderno também apresenta algumas considerações sobre a avaliação das competências esperadas no bimestre. O *Caderno do Professor* tem o intuito de ajudar os professores a melhorarem os indicadores de proficiência dos alunos contribuindo, então, para a qualidade da educação pública.

Ao final da Proposta é apresentado um quadro de conteúdos por série e bimestre para as quatro séries finais do Ensino Fundamental.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

	5ª série	6ª série	7ª série	8ª série
1º bimestre	NÚMEROS NATURAIS - Múltiplos e divisores. - Números primos. - Operações básicas. - Introdução às potências. FRACÇÕES - Representação. - Comparação e ordenação. - Operações.	NÚMEROS NATURAIS - Sistemas de numeração na Antiguidade. - O sistema posicional decimal. NÚMEROS INTEIROS - Representação. - Operações. NÚMEROS RACIONAIS - Representação fracionária e decimal. - Operações com decimais e frações.	NÚMEROS RACIONAIS - Transformação de decimais finitos em fração. - Dízimas periódicas e fração geratriz. POTENCIAÇÃO - Propriedades para expoentes inteiros. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - A linguagem das potências.	NÚMEROS REAIS - Conjuntos numéricos. - Números irracionais. - Potenciação e radiciação em $\mathbb{R}$. - Notação científica.
2º bimestre	NÚMEROS DECIMAIS - Representação. - Transformação em fração decimal. - Operações. SISTEMAS DE MEDIDA - Comprimento, massa e capacidade. - Sistema métrico decimal.	GEOMETRIA/MEDIDAS - Ângulos. - Polígonos. - Circunferência. - Simetrias. - Construções geométricas. - Poliedros.	ÁLGEBRA - Equivalências e transformações de expressões algébricas. - Produtos notáveis. - Fatoração algébrica.	ÁLGEBRA - Equações de 2º grau: resolução e problemas. - Noções básicas sobre função; a ideia de interdependência. - Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e 2º graus.
3º bimestre	GEOMETRIA/MEDIDAS - Formas planas e espaciais. - Noção de perímetro e área de figuras planas. - Cálculo de área por composição e decomposição.	NÚMEROS/ PROPORCIONALIDADE - Proporcionalidade direta e inversa. - Razões, proporções, porcentagem. - Razões constantes na geometria: π. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Gráficos de setores. - Noções de probabilidade.	ÁLGEBRA/EQUAÇÕES - Equações de 1º grau. - Sistemas de equações e resolução de problemas. - Inequações de 1º grau. - Sistemas de Coordenadas (plano cartesiano).	GEOMETRIA/MEDIDAS - Proporcionalidade, noção de semelhança. - Relações métricas entre triângulos retângulos. - Razões trigonométricas.
4º bimestre	TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Leitura e construção de gráficos e tabelas. - Média aritmética. - Problemas de contagem.	ÁLGEBRA - Uso de letras para representar um valor desconhecido. - Conceito de equação. - Resolução de equações. - Equações e problemas.	GEOMETRIA/MEDIDAS - Teorema de Tales e Pitágoras: apresentação e aplicações. - Área de polígonos. - Volume do prisma.	GEOMETRIA/MEDIDAS - O número π; a circunferência: o círculo e suas partes; área do círculo. - Volume e área do cilindro. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Contagem indireta e probabilidade.

Figura 17 Quadro dos Conteúdos de Matemática por série e bimestre para as quatro séries finais do Ensino Fundamental

Nesta pesquisa utilizaremos o Caderno do Aluno da 8ª série do Ensino Fundamental, volume dois (2º Bimestre – 2010). Esse Caderno tem foco no conteúdo das equações polinomiais do 2º grau e na noção de função. As Situações de Aprendizagem, apresentadas nesse Caderno, são as seguintes

- Situação de Aprendizagem 1 – Alguns métodos para resolver equações de 2º grau;
- Situação de Aprendizagem 2 – Equações de 2º grau na resolução de problemas;
- Situação de Aprendizagem 3 – Grandezas Proporcionais e não-proporcionais: estudo funcional, significados e contextos;

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

- Situação de Aprendizagem 4 – Representação gráfica de grandezas proporcionais e algumas não-proporcionais.

Enfatizaremos o primeiro tema (equações polinomiais do 2º grau) em que “pretende-se que os alunos resolvam situações, inclusive geométricas, que possam ser traduzidas por meio de equações de 2º grau, obtendo as raízes por diferentes métodos, e discutindo o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta” (CADERNO DO PROFESSOR, p.9, 2009). O Caderno do Professor sugere que para a resolução das equações polinomiais do 2º grau “sejam enfatizados os procedimentos que envolvam o conhecimento sobre fatoração, exponenciação e radiciação para a resolução de equações quadráticas” (p.9, 2009). Também nos diz que

a fórmula, usualmente conhecida como de Bhaskara, para as equações de 2º grau também deverá ser desenvolvida, porém é fundamental que os alunos tenham uma visão mais abrangente dos processos de resolução, tendo em vista que, no Ensino Médio, eles precisarão resolver equações de grau superior a dois (p.9, 2009).

Assim, nesta pesquisa trabalharemos a primeira Situação de Aprendizagem. Na Situação de Aprendizagem 1 – Alguns métodos para resolver equações de 2º grau – o Caderno do Professor apresenta o seguinte roteiro:

Para a introdução desse tema são sugeridos, inicialmente, problemas e outros tipos de equações que podem ser “traduzidos” por meio de equações de 2º grau, passando-se a discutir alguns modos possíveis de resolvê-las. Antes de introduzir qualquer técnica para a resolução de uma equação de 2º grau, é importante que os alunos utilizem seus conhecimentos já construídos para encontrar as raízes da equação ou solucionar o problema em questão. Como alguns problemas deverão ficar em aberto, esse é o momento propício para iniciar o trabalho com as técnicas de resolução. Todavia, sugere-se a discussão de diversos procedimentos e métodos para resolver equações do 2º grau, antes do desenvolvimento da fórmula de Bhaskara. Para o começo desse trabalho, é conveniente a proposição de equações do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$, uma vez que para obter suas raízes podem ser aplicados os procedimentos utilizados na resolução de equações de 1º grau e conhecimentos sobre potências de números.

A combinação de elementos algébricos e geométricos é também explorada dando sequência às interpretações dos produtos notáveis trabalhados na 7ª série. Depois, o professor pode discutir o seguinte fato: se o produto de dois números reais é zero, necessariamente um desses números é zero, ou seja: se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$, ou $b = 0$ para quaisquer a, b pertencentes aos $\mathbb{R}$. Dessa forma, os alunos poderão resolver equações do tipo $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$ e $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$ (p.12,13, 2009).

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Algumas das atividades propostas pelo Caderno estão presentes em nosso Projeto de Ensino – Parte II, que se encontra na página 134.

3.2.2.2. A Metodologia de Trabalho em Sala de Aula

Tendo como objetivo de pesquisa analisar a produção de significados, produzidos pelos alunos, no processo de ensino-aprendizagem de equações polinomiais, resolvemos adotar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que nos permite analisar tal produção.

Nessa metodologia adotada, o professor: cria situações-problema visando a construir conceitos e procedimentos novos dentro de certas teorias matemáticas; resolve o problema de várias maneiras para estar preparado para a diversidade de resoluções, desenvolvidas, pelos alunos, desse mesmo problema; prepara perguntas que podem conduzir os alunos na plenária; e, por fim, produzir uma formalização do novo conteúdo construído.

Esses passos, mencionados acima, foram realizados pela pesquisadora em conjunto com a professora da turma.

3.2.2.3. A Criação do Projeto de Ensino

Sob a linha da metodologia de ensino adotada, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, para podermos analisar e avaliar a produção de significados produzidos pelos alunos, no processo de ensino-aprendizagem de equações polinomiais de 2º grau, passamos à criação do Projeto.

O Projeto de Ensino seria desenvolvido em duas partes: uma revisão de equações polinomiais do 1º grau e um trabalho efetivo com as equações polinomiais do 2º grau.

O planejamento das aulas, para o desenvolvimento do Projeto criado, feito pela pesquisadora e pela professora da sala de aula, teria inicialmente como objetivo a definição de quais e quantas seriam as aulas destinadas à sua aplicação. Em sua primeira parte, no que se refere ao conteúdo a ser trabalhado, o Projeto contou com quatro atividades, retiradas e adaptadas de livros didáticos, que seriam desenvolvidas durante o mês de junho de 2010, sendo previstas, para ela, 18 horas/aula. A segunda parte do Projeto trabalharia oito

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

atividades, propostas pelo Caderno do Aluno (2010). Essas atividades foram planejadas para o mês de agosto de 2010, num total de 20 horas/aula.

Para cada atividade será explicitado, no Projeto, o conteúdo a ser desenvolvido; os objetivos de cada atividade; as atividades planejadas, com suas possíveis estratégias e resoluções, visando às sugestões de encaminhamento para o trabalho em sala de aula; o desenvolvimento da Plenária; e, por fim, a Formalização, responsabilidade exclusiva do professor, de novos conceitos e novos conteúdos.

A professora da sala e a pesquisadora conceberam certas estratégias visando à produção de significados dos alunos, expressa individualmente, obtida pela discussão em grupos e fazendo uso de seus conhecimentos prévios.

A Plenária será conduzida pela professora, numa reunião com todos os alunos, para discutirem as resoluções apresentadas, pelos grupos, a fim de esclarecer possíveis dúvidas. A pesquisadora, como observadora participante, deverá registrar todas essas situações.

Na Formalização, a professora deverá registrar, na lousa, uma apresentação formal dos novos conceitos e conteúdos construídos naquela atividade, destacando as diferentes técnicas operatórias e as propriedades qualificadas para o assunto, aproveitando-se das familiares notações e simbologias trabalhadas pelos alunos na plenária.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

3.2.2.3.1. Projeto de Ensino – Parte I

ATIVIDADE 1 – FICHA 1¹⁰

1) Você sabe o que é um padrão? Discuta com seus colegas e explique com suas palavras.

2) Discuta o seguinte texto com seus colegas.

Texto: *Enchente no rio Nilo*

O Egito é banhado pelo Nilo, imenso rio que fertiliza as suas margens.

Para poderem plantar na época certa e assim garantir seus alimentos, os egípcios precisavam saber quando haveria inundação. Havia, portanto, a necessidade de conhecer o padrão desse acontecimento.

Eles observaram que o rio subia logo depois que a estrela Sirius se levantava a leste, um pouco antes do Sol. Notando que isso acontecia a cada 365 dias, os egípcios criaram um calendário solar composto de doze meses, de 30 dias cada mês e mais cinco dias de festas, dedicados aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys.

Os egípcios dividiram ainda os doze meses em três estações de quatro meses cada uma: período de semear, período de crescimento e período de colheita.

- Quais os padrões citados no texto?

3) D   outros exemplos de padrões encontrados na natureza, no dia-a-dia.

4) D   exemplos de padrões encontrados na Matemática.

ATIVIDADE 1 – FICHA 2

1) Você sabe o que é um padrão? Discuta com seus colegas e explique com suas palavras.

2) Com o auxílio do Mosaico Mágico construa o desenho da figura, atribuindo uma cor para cada textura. Use o fundo da embalagem como tabuleiro para o jogo.

3) D   exemplos de padrões encontrados na Matemática. Você consegue dar exemplos de padrões encontrados na natureza, no dia-a-dia?

¹⁰ Atividade retirada e adaptada de Souza (2010, p.143).

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Objetivo

Estabelecer o conceito de padrão.

Conteúdo matemático a ser desenvolvido a partir dessa atividade

Padrões

Possíveis estratégias de resolução

Atividade 1 – Ficha 1:

1ª Questão) Buscar uma expressão individual dos alunos, a partir da discussão em grupos e de seus conhecimentos prévios sobre o que eles entendem por padrão.

2ª Questão) A partir da leitura do texto, *Enchente no rio Nilo*, os alunos deverão identificar e construir o conceito de padrão.

3ª Questão) Pedir aos alunos que, de posse do conceito de padrão, deem exemplos de padrões encontrados na natureza e no dia-a-dia.

4ª Questão) Fazendo uso de sua vivência e de seus conhecimentos prévios, pedir aos alunos que apresentem padrões matemáticos como padrões numéricos, pictóricos e geométricos.

Atividade 1 – Ficha 2:

Nesta ficha, as questões 1 e 3 são idênticas a da primeira ficha, que serão trabalhadas no contexto do Mosaico Mágico.

A partir de uma situação concreta, o jogo do Mosaico Mágico, trabalhado com um único grupo de alunos, espera-se que eles montem a figura determinada observando a necessidade de padronizar as cores e a combinação das peças.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Plenária

Pretende-se que os alunos recordem o conceito de padrão e percebam a Matemática como uma ciência de padrões.

Formalização

A Matemática é uma ciência de padrões. Padrão é algo que sempre se repete. Podemos encontrar padrões:

(i) na natureza

- no relevo da Terra (rios, montanhas);
- na plantação;
- nas estações do ano;
- nas fases da Lua;
- divisão do dia: manhã, tarde, noite.

(ii) no cotidiano

- horários de refeição;
- construções – normas de trabalho.

(iii) na matemática

- padrões numéricos;
- padrões algébricos;
- padrões geométricos;
- padrões pictóricos;
- padrões tecnológicos;
- fórmulas;
- teoremas.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Na Matemática, a descoberta de padrões é um bom caminho para conduzir a resolução de problemas: tabelas, palavras, quadros, fórmulas, equações, representações geométricas, gráficos.

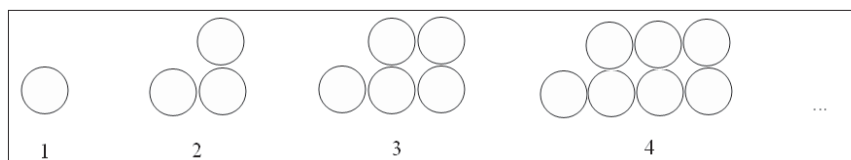
TAREFA EXTRACLASSE

- 1) Escreva, individualmente, um texto sobre o que você aprendeu nessa aula.
- 2) Em grupos, façam uma pesquisa sobre padrões com o objetivo de trazerem mais curiosidades e figuras sobre padrões. Não se esqueçam de colocar a fonte que identifique onde elas foram encontradas.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

ATIVIDADE 2¹¹

Observe a sequência de bolinhas abaixo e responda às perguntas:



- Desenhe as bolinhas que devem ocupar a 5ª posição para que seja mantido o padrão da sequência.
- Quantas bolinhas devem ocupar a 11ª posição? E na 35ª posição? Justifique.
- Qual o padrão encontrado na relação do número de bolinhas com o número de sua posição?

Objetivos

Investigar sequências de figuras com a finalidade de identificar padrões;
 Representar o padrão da sequência por meio de palavras, figuras e símbolos;
 Introduzir o uso de letras na Matemática;
 Utilizar a linguagem algébrica para fazer generalizações da aritmética;
 Identificar expressões equivalentes para expressar o número de bolinhas em cada posição;
 Introduzir o conceito de variável.

Conteúdo matemático a ser desenvolvido a partir dessa atividade

Sequências pictóricas e numéricas;
 Uso de letras para representar números ou grandezas;
 Expressões numéricas e algébricas;
 Introdução ao conceito de variável.

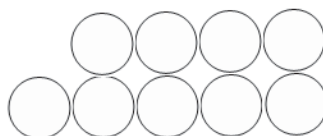
¹¹ Atividade retirada e adaptada do Caderno do Aluno (2009)

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Possíveis estratégias de resolução

I) Seguir o modelo para criar uma outra posição da sequência.

a) 5ª posição



b) 11ª e 35ª posições

Na horizontal de baixo, o número de bolinhas é igual ao número da posição. Na horizontal de cima, o número de bolinhas é igual ao número da posição menos um.

II) Utilizar uma notação indicial

Os alunos poderão construir uma tabela para facilitar a visualização do padrão: somam-se duas bolinhas a cada etapa com relação à etapa anterior.

Posição (n)	Nº de Bolinhas (an)
1	1
2	3
3	5
...	...
35	?

Assim, eles poderão observar que

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + 2 = 3$$

$$a_3 = 3 + 2 = 5$$

$$a_4 = 5 + 2 = 7$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1} + 2$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + 2 = 1 + 2 \cdot 1$$

$$a_3 = 1 + 2 + 2 = 1 + 2 \cdot 2$$

$$a_4 = 1 + 2 + 2 + 2 = 1 + 2 \cdot 3$$

.

.

.

$$a_n = a_1 + 2 (n - 1)$$

ou

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

c) Se n representa a posição da figura na sequência, o número de bolinhas a_n terá a seguinte expressão

$$a_n = 2n - 1$$

Plenária

Depois da apresentação das resoluções de alguns grupos e da defesa, pelos responsáveis por esses grupos, da resolução, ao encontrar o número de bolinhas na 11ª posição, os alunos, nos grupos, poderão usar o método recursivo, em que o número de bolinhas de uma etapa depende diretamente da determinação do número de bolinhas na etapa anterior.

Ao tentarem encontrar o número de bolinhas na 35ª posição, os alunos, possivelmente, deverão buscar por um método mais fácil de resolução, ou seja, que não precise desenhar o número de bolinhas até a 34ª posição para encontrar a 35ª posição.

Fazer uma discussão com os alunos sobre o método recursivo e o método não recursivo para encontrar padrões, em que o método não recursivo é melhor por determinar o número de bolinhas em uma posição qualquer.

Outra maneira possível seria a introdução da tabela como uma ferramenta facilitadora para identificar o padrão.

O padrão recursivo nos itens (a) e (b) é o seguinte: adicionam-se sempre duas bolinhas a mais a cada etapa com relação à etapa anterior. Já, no método não recursivo, o número de bolinhas de cada etapa é calculado apenas com informações associadas ao próprio número que determina a posição da figura na sequência.

A partir do registro dos alunos, no item (c) traduzir a expressão encontrada para a linguagem matemática. Assim, com a ajuda de uma tabela,

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Posição (n)	Nº de Bolinhas (an)
1	1
2	3
3	5
...	...
35	?

para cada posição o professor, junto com os alunos, deve escrever uma expressão que segue um padrão não recursivo que diz que o número de bolinhas de cada posição é uma a menos que o dobro de bolinhas da posição.

Posição (n)	Expressão (an)
1	$2(1) - 1$
2	$2(2) - 1$
3	$2(3) - 1$
.	.
.	.
.	.

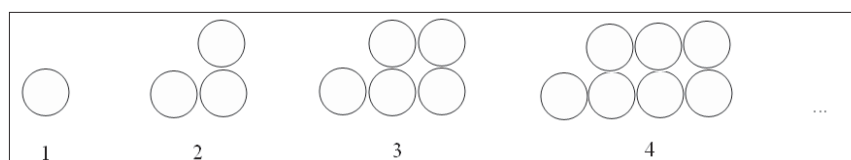
Criar condições para que os alunos observem que o número que está dentro dos parênteses nessa tabela está mudando, variando. Então, podemos substituir esses números por uma letra que os represente, por exemplo, n , ou seja, substituir por uma variável desde que “uma variável é um símbolo que pode representar qualquer um dos elementos de um conjunto de números ou de outros objetos” (VAN de WALLE; LOVIN, 2006, p.274), chegando à expressão geral

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Posição (n)	Expressão (an)
1	$a_1 = 2(1) - 1$
2	$a_2 = 2(2) - 1$
3	$a_3 = 2(3) - 1$
.	.
.	.
.	.
n	$a_n = 2(n) - 1$

Formalização

Observe a sequência abaixo:



Para determinarmos o número de bolinhas nas etapas seguintes podemos utilizar o **método recursivo**, em que o número de bolinhas de uma etapa depende diretamente da determinação do número de bolinhas da etapa anterior. Podemos, também, utilizar o **método não recursivo**, em que o número de bolinhas de cada etapa é calculado apenas com informações associadas ao próprio número que determina a posição da figura na sequência.

Com o auxílio de uma tabela

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Posição (n)	Nº de Bolinhas (an)
1	1
2	3
3	5
...	...

podemos verificar que os seus números estão mudando, variando, e podem ser substituídos por uma letra que os represente, por exemplo, n e a_n , ou seja, substituir por uma variável.

Uma **variável** é um símbolo (letra) que pode representar qualquer um dos elementos de um conjunto de números ou de outros objetos.

Para a sequência dada acima, pode-se representar os métodos recursivo e não recursivo da seguinte maneira

Método Recursivo:

$$a_n = a_{n-1} + 2$$

Método Não Recursivo:

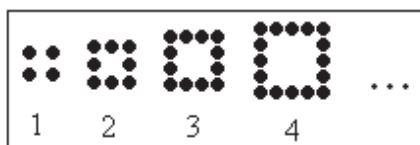
$$a_n = 2n - 1$$

O método recursivo e o método não recursivo ajudam na descoberta de padrões, embora o método não recursivo seja melhor para determinar o número de bolinhas em uma posição qualquer.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

TAREFA EXTRACLASSE¹²

Observe a sequência abaixo e responda às perguntas:



- a) Desenhe as bolinhas que devem ocupar a 5ª posição para que seja mantido o padrão da sequência.
- b) Quantas bolinhas devem ocupar a 11ª posição? E na 35ª posição? Justifique.
- c) Qual o padrão encontrado na relação do número de bolinhas com o número da posição?

¹² Atividade retirada e adaptada do Caderno do Aluno (2009)

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

ATIVIDADE 3¹³

Uma empresa em dificuldades financeiras propôs aos seus funcionários um incentivo em dinheiro para os que solicitassem demissão. O valor a ser recebido varia conforme o tempo de trabalho do funcionário. Para isso, a empresa utiliza a tabela abaixo para calcular quanto cada funcionário deve receber.

Número de Anos Trabalhados	Valor a Receber
1	R\$ 450,00
2	R\$ 700,00
3	R\$ 950,00
4	R\$ 1200,00
5	...
...	...
23	...
...	...

- Qual o valor a ser recebido pelo funcionário que trabalhou durante 5 anos? E aquele que trabalhou por 23 anos?
- Como você relaciona o número de anos trabalhados com o valor a ser recebido?
- João recebeu da empresa R\$ 7700,00. Por quantos anos João trabalhou na empresa?

Objetivos

- Resolver problemas de maneiras diferentes;
- Confrontar resultados;
- Utilizar a heurística¹⁴ como método de investigação da solução de equações;
- Fazer com que o aluno realize operações com expressões algébricas sem se preocupar com técnicas e métodos de resolução;
- Introduzir as equações polinomiais do 1º grau.

Conteúdos matemáticos a serem desenvolvidos a partir dessa atividade

- Expressões algébricas
- Equações polinomiais do 1ª grau

¹³ Atividade retirada do livro de França e Boudeaux (1999).

¹⁴ Método educacional que consiste em fazer descobrir pelo aluno o que se lhe quer ensinar.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Possíveis estratégias de resolução

I) Tentativa e erro

Pelo método de tentativa e erro, com um pensamento puramente aritmético, o aluno percebe que, a partir dos R\$ 450,00 iniciais, o funcionário receberá, a cada ano que passa, mais R\$ 250,00. Assim, o funcionário que trabalhou por cinco anos, olhando na tabela, vê que receberá $R\$ 1200 + R\$ 250,00 = R\$ 1450,00$ e justifica dizendo $R\$ 450,00 + 4 \cdot R\$ 250,00 = R\$ 1450,00$.

II) Método recursivo

Aproveitando-se dessa ideia, ele poderia ver que o funcionário, que trabalhou por 23 anos, passaria a receber $R\$ 450,00 + 22 \cdot R\$ 250,00 = R\$ 450,00 + R\$ 5500,00 = R\$ 5950,00$, usando o método recursivo.

O aluno, ao fazer manualmente essa operação ou fazendo uso de calculadora, poderia perceber que é mais fácil multiplicar o número de vezes que adicionou R\$ 250,00 ao valor inicial R\$ 450,00.

III) Método não recursivo

Fazendo uso de um método não recursivo e chamando de V o valor a receber e n o número de anos trabalhados, poderia chegar a escrever

$$V(n) = R\$ 450,00 + (n - 1) R\$ 250,00$$

Fazendo uso dessa expressão e substituindo V por R\$ 7700,00, chega à equação

$$R\$ 7700,00 = R\$ 450,00 + (n - 1) R\$ 250,00$$

e, para resolver essa equação, o aluno poderia, com um raciocínio aritmético, tentar encontrar o valor de n, lançando mão de tentativa e erro. Sabendo que o funcionário que trabalhou por 23 anos receberá R\$ 5950,00, aluno poderá ir adicionando R\$ 250,00 até chegar a R\$ 7700,00 e isso ocorrerá depois de 7 anos. Então, esse funcionário que irá receber R\$ 7700,00 deverá ter trabalhado 23 anos mais 7 anos, resultando em 30 anos.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Plenária

Discutir com os alunos que a expressão, encontrada no item b da atividade 3, $V(n) = \text{R\$ } 450,00 + (n-1) \cdot \text{R\$ } 250,00$, representa uma lei, na qual o valor a ser recebido pelo funcionário depende do número de anos trabalhados, ou seja, o valor V varia em função de n . Nessa expressão, V é a variável dependente e n é a variável independente.

Já, no item c, para saber quantos anos João trabalhou para ter recebido um total de R\$ 7700,00, torna-se necessário trabalhar com a função inversa, isto é, achar n como função de V , ou seja, $n(V) = (V(n) - \text{R\$ } 250,00) \div \text{R\$ } 250,00$.

Formalização

A expressão encontrada na atividade acima, $V(n) =$
 $\text{R\$ } 450,00 + (n-1) \cdot \text{R\$ } 250,00$, representa uma lei em que o valor V , valor a ser recebido pelo funcionário, depende do número de anos trabalhados (n). Dizemos que o valor V varia em função de n , sendo V a variável dependente e n a variável independente.

Tal expressão é um exemplo de equação. *Equação* é uma igualdade entre duas expressões que têm pelo menos um número desconhecido representado por uma letra. Cada lado da igualdade é chamado membro da equação, primeiro e segundo.

Por exemplo,

$$2x + 3 = 9$$

1º membro = 2º membro

$$29 + x = 2(6 + x)$$

1º membro = 2º membro

A variável pode estar em um dos membros da igualdade ou nos dois membros.

Ao se trabalhar com equações, a variável é **incógnita**. Incógnita significa *valor desconhecido*. Por isso, nas equações devemos encontrar o valor desconhecido para que a igualdade seja verdadeira.

Exemplo,

$$2x + 3 = 9$$

Que valor deve ter x para que a igualdade seja verdadeira?

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

ATIVIDADE 4¹⁵

Um professor propôs o seguinte desafio à sua turma:

Pensei num número. Somei 3 e em seguida calculei o dobro do valor encontrado. O resultado foi 46. Em que número pensei?

Você é capaz de encontrar o número que o professor pensou?

Objetivos Específicos

Desenvolver no aluno a capacidade de resolver uma equação polinomial de 1º grau por meio do pensamento lógico;

Introduzir alguns procedimentos úteis para resolver equações polinomiais do 1º grau: propriedades da igualdade e o uso da balança de dois pratos, como um processo manipulativo, que verifique a presença, na álgebra, das operações inversas.

Conteúdo matemático a ser desenvolvido a partir dessa atividade

Equações polinomiais do 1º grau.

Possíveis estratégias de resolução

Os alunos poderão resolver o problema, aritmeticamente, com o auxílio de uma tabela, em que o aluno toma um número maior e depois um número menor até chegar ao resultado, como fez Andrei nas vinhetas apresentadas por Saul.

Mas, algebricamente, como os alunos resolveriam? Apresentamos variações da equação polinomial do 1º grau dada exigindo outras técnicas operatórias ao trabalhar em outros conjuntos numéricos.

¹⁵ Atividade retirada do livro de França e Boudeaux (1999).

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Plenária

I) 1ª etapa

Com uma leitura em conjunto com os alunos, constroem-se os seguintes passos:

Problema	Linguagem Matemática
Pensei em um número	x
Somei 3	$x+3$
Calculei o dobro do valor encontrado	$2(x+3)$
O resultado foi 46	$2(x+3) = 46$

2ª etapa

Com o auxílio de uma balança de dois pratos mostrar aos alunos a equivalência do sinal de igualdade ($=$), que este sinal representa o equilíbrio entre as expressões. A balança ajuda na compreensão das transformações realizadas em uma equação sem alterar a igualdade. Ou seja, somar, subtrair, multiplicar ou dividir um mesmo número de cada lado da igualdade, mantém a igualdade.

3ª etapa

Mostrar procedimentos para se resolver equações do 1º grau.

Para isso precisamos das Propriedades da Igualdade

- para adição e subtração

$$\forall a, b, c$$

$$a = b$$

$$a + c = b + c$$

$$\forall a, b, c$$

$$a = b$$

$$a - c = b - c$$

- para multiplicação e divisão

$$\forall a, b; c \neq 0$$

$$a = b$$

$$ac = bc$$

$$\forall a, b; c \neq 0$$

$$a = b$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

$$(x + 3) \cdot 2 = 46$$

$$(x + 3) \cdot \frac{2}{2} = \frac{46}{2}$$

$$(x + 3) \cdot 1 = 23$$

$$x + 3 = 23$$

$$x + 3 + (-3) = 23 + (-3)$$

$$x + 0 = 20$$

$$x = 20$$

Formalização

Para resolver a atividade 4, primeiramente, devemos passar o problema da linguagem vernácula para a linguagem algébrica:

Problema	Linguagem Matemática
Pensei em um número	x
Somei 3	$x+3$
Calculei o dobro do valor encontrado	$2(x+3)$
O resultado foi 46	$2(x+3) = 46$

Em seguida, resolver a equação polinomial do 1º grau aplicando as propriedades da igualdade:

- para adição e a subtração

$$\forall a, b, c$$

se $a = b$ então

$$a + c = b + c$$

$$\forall a, b, c$$

se $a = b$ então

$$a - c = b - c$$

- para a multiplicação e a divisão

$$\forall a, b; c \neq 0$$

se $a = b$ então

$$ac = bc$$

$$\forall a, b; c \neq 0$$

se $a = b$ então

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

TAREFA EXTRACLASSE 1

Luciana tem 29 anos e Maurício 6 anos. Daqui quantos anos a idade de Luciana será o dobro da idade de Maurício?

TAREFA EXTRACLASSE 2

Resolva a equação da atividade 3, $R\$ 7700,00 = R\$ 450,00 + (n - 1) R\$ 250,00$, utilizando as propriedades da igualdade.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

3.2.2.3.2. Projeto de Ensino – Parte II

Objetivos Gerais

Compreender a linguagem algébrica na representação geométrica de situações e problemas envolvendo equações polinomiais de 2º grau;

Expressar algebricamente situações envolvendo equações polinomiais do 2º grau;

Resolver equações polinomiais do 2º grau por diferentes métodos: cálculo mental, fatoração e aplicação da fórmula de Bhaskara;

Utilizar a linguagem algébrica para exprimir a área de uma figura plana;

Interpretar enunciados de problemas;

Transpor ideias da álgebra para a resolução da forma geométrica de equações polinomiais do 2º grau;

Conteúdo Matemático a ser desenvolvido a partir desse projeto

Métodos para resolver equações polinomiais do 2º grau;

Solução geral de uma equação polinomial do 2º grau;

Desenvolvimento da fórmula de Bhaskara.

ATIVIDADE 1

Os participantes de um festival de música decidiram que, ao final do evento, fariam uma festa de encerramento. Nessa festa, cada um dos participantes daria uma flor de presente a cada colega que participou do evento.

- a) Quantas flores serão distribuídas se o total de participantes for igual a 5?
- b) E se for igual a 6?
- c) E igual a 7?
- d) Quantas flores serão distribuídas se o número total de participantes for igual a n ?
- e) Se o total de flores distribuídas na festa for igual a 930, então qual será o número de participantes?

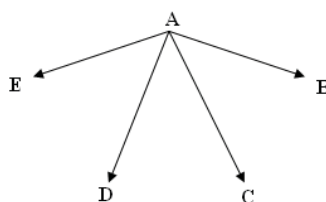
CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Possíveis estratégias de resolução do problema dado

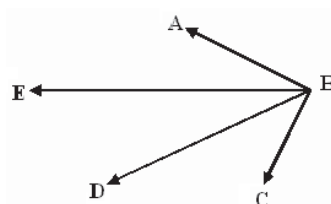
Para os itens *a*, *b*, e *c*, o aluno poderá recorrer a diagramas.

a) Para cinco participantes:

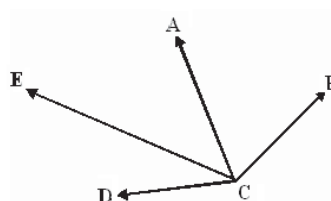
O participante A distribuirá quatro flores.



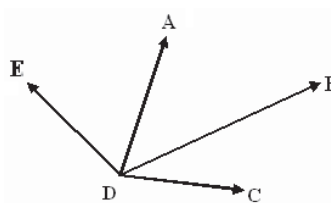
O participante B distribuirá quatro flores.



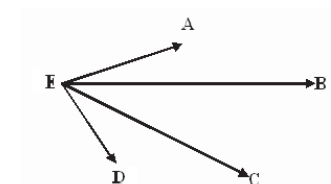
O participante C distribuirá quatro flores.



O participante D distribuirá quatro flores.



Por fim, o participante E distribuirá quatro flores.



CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Portanto, o número total de flores distribuídas será $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \cdot 4 = 20$.

Analogamente, para seis e sete participantes, ter-se-ia:

b) O número total de flores distribuídas será $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 6 \cdot 5 = 30$.

c) O número total de flores distribuídas será $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 7 \cdot 6 = 42$.

O aluno, com os exemplos dos itens acima, poderá observar, no item *d*, que sendo n o número de participantes, cada um de seus membros dará $(n-1)$ flores, pois cada participante não dará uma flor para si mesmo. Dessa forma, o número total de flores a serem distribuídas será $n(n-1)$.

Então, que número vezes o seu antecessor dará 930? Assim, no item *e*, eles poderão representar o problema pela seguinte equação

$$n \cdot (n - 1) = 930$$

Para resolvê-la, os alunos poderão construir uma tabela:

Número de Participantes (n)	Total de Flores ($n \cdot (n - 1)$)
2	$2 \cdot 1 = 1$
...	...
10	$10 \cdot 9 = 90$
...	...
20	$20 \cdot 19 = 380$
...	...
30	$30 \cdot 29 = 870$
...	...
40	$40 \cdot 39 = 1560$

Os alunos perceberão que o valor a ser encontrado está entre 30 e 40 participantes e, pelo método de tentativa e erro, chegarão à resposta de 31 participantes.

Plenária

Na plenária espera-se que os alunos cheguem, no item *e*, à equação $n \cdot (n-1) = 930$ e para resolvê-la construam uma tabela que os auxilie na resolução por tentativa e erro, já que esta é uma equação diferente das equações estudadas anteriormente, pois é uma equação polinomial do 2º grau, uma vez que $n \cdot (n-1) = n^2 - n$.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

ATIVIDADE 2

Para responder a questão anterior, um aluno de 8ª série, aplicando seus conhecimentos algébricos, fez a seguinte reflexão:

Escreveu a equação algébrica relativa ao problema	$x(x - 1) = 930$
Aplicou a propriedade distributiva	$x^2 - x = 930$
Deixou todos os termos no primeiro membro da equação, igualando-a zero, ou seja, adicionou aos dois membros da equação a quantidade (-930).	$x^2 - x - 930 = 0$

Para resolver essa equação, o aluno substituiu a incógnita x pelos seguintes valores: 29, 30, 31 e 32 e, assim, descobriu a alternativa correta. Use o mesmo procedimento e, em seguida, compare o resultado com a sua resposta, obtida na Atividade 1, no item e.

Possíveis estratégias de resolução do problema dado

Os alunos substituirão na equação $x^2 - x - 930 = 0$ os valores dados na atividade e constatarão que a resposta é idêntica à da resposta da Atividade 1, item e. Poderão observar que as equações $n \cdot (n - 1) = 930$ e $x^2 - x - 930 = 0$ são equivalentes.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Plenária

Pretende-se que os alunos observem que as equações $n(n-1)=930$ e $x^2-x-930=0$ são equivalentes. Para isso, trabalhar com os alunos as propriedades da igualdade e dizer que mais para frente eles aprenderão um método que os ajudem na resolução dessas equações.

Relembrar os alunos que equação é uma igualdade entre duas expressões que têm, pelo menos, um número desconhecido representado por uma letra, variável. E que esse valor desconhecido é chamado de incógnita.

As equações do tipo $2x+3=9$; $29 + x = 2 \cdot (6 + x)$ são chamadas de *equações polinomiais de 1º grau*, pois a incógnita está elevada ao expoente 1. Já as equações do tipo $x^2 - x - 930 = 0$; $3x^2 + 5 = 0$; $x^2 - 1 = 0$ são chamadas de *equações polinomiais de 2º grau*, pois apresentam uma incógnita elevada ao expoente 2.

Formalização

Uma expressão algébrica pode receber nome especial de acordo com o número de termos ou parcelas que ela possui. Por exemplo,

- $6a^2 + 2b + 4c$ tem três termos – trinômio;
- $4a + 5b$ tem dois termos – binômio;
- $4t$ tem apenas um termo – monômio.

Expressões algébricas que apresentam mais de um termo são chamadas polinômios ou expressões polinomiais como, por exemplo, $x^2 - 6x + 9$ e $3y^2 + 5y - 7$.

Dessa forma, equações polinomiais ou equações algébricas são as equações em que o primeiro membro, que é uma expressão polinomial, é igual a zero.

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

As equações polinomiais do 1º grau apresentam a incógnita elevada ao expoente 1, por exemplo,

$$2x + 3 = 9$$

$$29 + x = 2(6 + x)$$

Já as equações polinomiais do 2º grau apresentam a incógnita elevada ao expoente 2 como, por exemplo,

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

$$x^2 - x - 930 = 0$$

$$3x^2 + 5 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

TAREFA EXTRACLASSE

Perguntaram a um professor de Matemática sobre o número de pessoas que o acompanharam na visita a uma exposição. Como resposta, o professor criou um probleminha explicando que todas as pessoas que o acompanharam, ao se encontrarem, cumprimentaram-se apertando as mãos e que, assim, ele observou 66 cumprimentos.

- a) Encontre esse número de pessoas.
- b) Escreva a equação algébrica relativa ao problema.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

ATIVIDADE 3

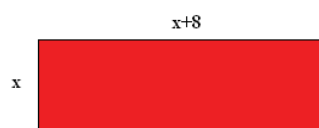
Traduza as situações a seguir por meio de uma equação. Depois resolva esta equação e encontre a resposta do problema.

a) A área de um quadrado de lado x é igual a 49cm^2 . Qual é a medida do lado desse quadrado?

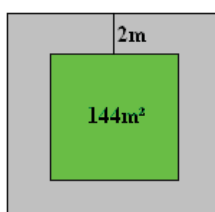
b) Um retângulo tem área igual a 242cm^2 e o seu lado maior é o dobro do lado menor. Qual é a medida do lado maior desse retângulo?

c) A área de um triângulo retângulo isósceles é 18cm^2 . Determine as medidas de seus catetos e de sua hipotenusa.

d) A área do retângulo representado pela figura a seguir é igual a 65cm^2 . Calcule seu perímetro.



e) Um quarteirão na forma de um quadrado foi reduzido de modo a ser contornado por uma calçada com 2 metros de largura, conforme a figura a seguir. Com isso, sua área passou a ser 144m^2 . Qual era a medida da área original desse quarteirão?

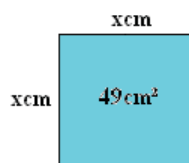


Possíveis estratégias de resolução para os diferentes itens do problema dado

Em cada item o desenho da figura deve auxiliar o aluno na resolução da atividade.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

a)



$$x^2 cm^2 = 49 cm^2$$

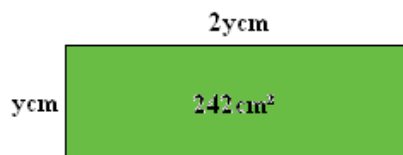
$$x^2 = 49$$

O que o problema pede é achar o valor do lado do quadrado e, para isso, perguntar que número elevado ao quadrado resulta 49? Será bom lembrar que

$$\sqrt{x^2} = x \text{ ou } (-x)$$

e reconhecer que o lado do quadrado é positivo. Logo $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$.

b) A fim de que os alunos percebam a irrelevância da letra utilizada como incógnita, indicar a medida do lado menor do retângulo por y . Assim, olhando a figura



$$y cm \cdot 2y cm = 242 cm^2$$

$$2y^2 cm^2 = 242 cm^2$$

$$2y^2 = 242$$

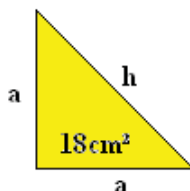
$$y^2 = 121$$

$$y = \pm 11$$

E como o lado maior vale $2y$ então o lado maior mede 22cm.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

c) Indicando a medida dos catetos por a



e sabendo que a área do triângulo é dada por

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

então

$$18\text{cm}^2 = \frac{(a\text{cm}^2 \cdot a\text{cm}^2)}{2}$$

$$18\text{cm}^2 = \frac{a^2\text{cm}^2}{2}$$

$$a^2\text{cm}^2 = 2 \cdot 18\text{cm}^2$$

$$a^2 = 36$$

$$a = 6$$

Portanto, os catetos medem 6cm .

Fazendo uso do Teorema de Pitágoras:

$$h^2\text{cm}^2 = a^2\text{cm}^2 + a^2\text{cm}^2$$

$$h^2\text{cm}^2 = 36\text{cm}^2 + 36\text{cm}^2$$

$$h^2\text{cm}^2 = 72\text{cm}^2$$

$$h = \sqrt{72} = \sqrt{2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Portanto, a hipotenusa mede $6\sqrt{2}$.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

d) A área do retângulo será dada pela equação: $x\text{cm}(x + 8)\text{cm} = 65\text{cm}^2$.

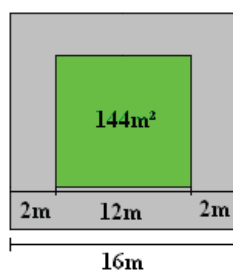
Com o auxílio de uma tabela busca-se encontrar a solução. Dando valores à x têm-se

x	$x \cdot (x + 8)$	Resultado
1	$1 \cdot (1 + 8)$	9
2	$2 \cdot (2 + 8)$	20
...	...	...
5	$5 \cdot (5 + 8)$	65

Assim, a solução será $x=5\text{cm}$. E, os lados desse retângulo são 5cm e $(5 + 8)\text{cm}$. Como o perímetro do retângulo é dado pela soma das medidas dos seus lados, seu perímetro será

$$2 \cdot 5\text{cm} + 2 \cdot (5 + 8)\text{cm} = 10\text{cm} + 26\text{cm} = 36$$

e) Os alunos poderão observar na figura que



o quadrado de área 144m^2 tem lado igual a 12m , pois

$$A = l \cdot l$$

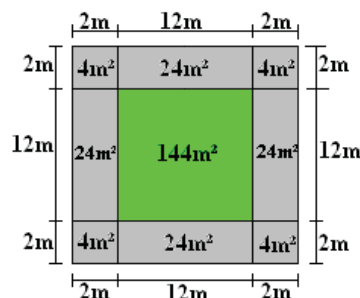
$$144\text{m}^2 = l^2$$

$$l = \sqrt{144\text{m}^2}$$

$$l = 12\text{m}$$

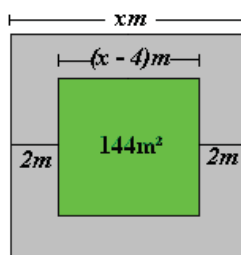
Como as calçadas medem 2m de largura observando a figura, aos 12m deve acrescentar 4m , medindo então o lado do quadrado original 16m e a área desse quadrado medirá $(16\text{m})^2 = 256\text{m}^2$ ou levando-se esses dados à figura, pode-se ver que

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA



$$A = 144m^2 + (4 \cdot 2^2)m^2 + (4 \cdot (12 \cdot 2))m^2 = 144m^2 + 112m^2 = 256m^2$$

Mas, se x for considerada a medida, em metros, do lado do quadrado original, com a redução de quatro metros, o lado do quadrado interno medirá $(x - 4)$ metros e observando a figura



pode-se escrever a seguinte equação:

$$(x - 4)m^2 = 144m^2$$

A solução desta equação pode ser encontrada por meio de cálculo mental, uma vez que se sabe que

$$\sqrt{144m^2} = 12m^2$$

$$\sqrt{144} = 12$$

e que se $x - 4$ é 12, então $x = 16m$.

Conclui-se, então, que a área do quadrado original é $A = (16m)^2 = 256m^2$.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Possíveis problemas secundários apresentados pelos alunos na resolução desses itens

Cálculo de Área de Figuras Planas

Noção de Dobro de um número

Conceito de Triângulo Retângulo Isósceles

Conceito de Perímetro

Conhecimento do Teorema de Pitágoras

Plenária

Trabalhar possíveis problemas secundários apresentados pelos alunos na resolução dos itens da atividade: cálculo de área de figuras planas, noção de dobro de um número, conceito de triângulo retângulo isósceles, conceito de perímetro, conhecimento do teorema de Pitágoras.

Como se pretende dar um enfoque mais formal às equações polinomiais do 2º grau, com o auxílio de uma tabela os alunos poderão observar nas equações construídas nessa atividade que a variável em cada uma delas, se encontra elevada ao quadrado. Em uma outra coluna da tabela será pedido que, de uma maneira equivalente, escrevam as equações em uma igualdade a zero.

a) $x^2 = 49$	$x^2 - 49 = 0$
b) $2y^2 = 242$	$2y^2 - 242 = 0$
c) $a^2 = 36$	$a^2 - 36 = 0$
d) $x(x + 8) = 65$	$x^2 + 8x - 65 = 0$
e) $(x - 4)^2 = 144$	$x^2 - 8x - 128 = 0$

E, comparando essas diferentes formas das equações percebam que elas são representações da mesma situação problema. Essa segunda coluna apresentará a equação na forma de uma equação polinomial de 2º grau.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

- Todas são equações polinomiais de 2º grau, pois há a incógnita elevada ao expoente 2;
- Algumas equações não têm a incógnita elevada ao expoente 1;
- Os itens *d* e *e* apresentam três elementos: a incógnita elevada ao expoente 2, a incógnita elevada ao expoente 1 e uma constante.

A partir dessas observações far-se-á a introdução dos termos

- Equações polinomiais do 2º grau completas;
- Equações polinomiais do 2º grau incompletas;
- Coeficientes dos termos da equação;
- Raízes da equação.

Formalização

Chama-se equação polinomial do 2º grau a toda equação que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que **a**, **b** e **c** são números reais e **a** $\neq 0$. Se $a = 0$ a equação será de 1º grau.

Chamamos **a** e **b** de coeficientes, que são as partes numéricas dos monômios que compõem a equação quadrática.

São chamadas

- Equações polinomiais do 2º grau completas quando **a**, **b** e **c** são diferentes de zero: $ax^2 + bx + c = 0$
- Equações polinomiais do 2º grau incompletas quando ou **b** ou **c** é igual a zero ou quando ambos são zeros:

$$ax^2 + c = 0 ; ax^2 + bx = 0 ; ax^2 = 0$$

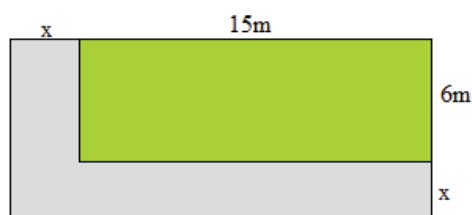
A **raiz** de uma equação polinomial é um número real que ao substituir o valor da incógnita torna a equação verdadeira. Por exemplo, $x^2 = 49 \rightarrow x = 7$ e $x = -7$ são raízes da equação, pois $7^2 = 49$ e $(-7)^2 = 49$.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

TAREFA EXTRACLASSE

Escreva uma equação que represente o problema a seguir:

O projeto de um jardim retangular prevê que se coloquem pedras ornamentais, formando com o jardim uma área maior, também retangular. Na figura a seguir, a região cinza representa o lugar em que as pedras deverão ser colocadas.



Sabendo-se que a área ocupada pelas pedras é de $46m^2$, calcule a medida x , em metros.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

ATIVIDADE 4

Resolva as equações a seguir e depois verifique se os valores encontrados satisfazem as mesmas:

a) $\sqrt{x} + 4 = 9$

b) $2^{x^2} = 16$

c) $x^3 - 9x = 0$

d) $x^4 - 16 = 0$

e) $3x^2 = 27$

f) $x^2 - 4 = 12$

g) $4x^2 - 25 = 0$

h) $\frac{5x^2}{2} = \frac{2}{5}$

i) $x^2 + 1 = 0$

j) $(x + 2)(x - 6) = 0$

l) $(3x + 2)\left(-x - \frac{1}{2}\right) = 0$

Objetivos Específicos

Aplicar técnicas algébricas já aprendidas;

Desenvolver novas abordagens algébricas que permitam a investigação de fatos que podem ser generalizados a outras equações.

Justificativa

Está atividade tem a finalidade de levar o aluno a perceber que é possível recorrer aos seus conhecimentos anteriores para iniciar uma estratégia de resolução de situações que envolvam equações do 2º grau. O desenvolvimento dessa atividade auxilia o aluno na identificação da fatoração algébrica como ferramenta útil na resolução de equações de 2º grau. Com isso, o aluno já inicia a resolução de equações completas do 2º grau, representadas na forma fatorada, o que propicia a aplicação de conhecimentos que o aluno começou a construir na 7ª série (8º ano) do Ensino Fundamental.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Possíveis estratégias de resolução

i) Os alunos poderão utilizar o cálculo mental ou a substituição por tentativa e erro.

ii) Resolução algébrica, pois já aprenderam as Propriedades da Igualdade.

$$a) \sqrt{x} + 4 = 9 \Rightarrow \sqrt{x} = 9 - 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 5 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (5)^2 \Rightarrow x = 25$$

$$b) 2^{x^2} = 16 \Rightarrow 2^{x^2} = 2^4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2, \text{ isto é,}$$

$$\text{ou } x = 2 \text{ ou } x = -2$$

$$c) x^3 - 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$d) x^4 - 16 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 - (4)^2 = 0 \Rightarrow (x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \text{ (não tem solução real) ou } x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Outro modo de resolução

$$x^4 - 16 = 0 \rightarrow x^4 = 16 \rightarrow x = \pm \sqrt[4]{16} \rightarrow x = \pm 2$$

$$e) 3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$f) x^2 - 4 = 12 \Rightarrow x^2 = 12 + 4 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

$$g) 4x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (2x)^2 - (5)^2 = (2x - 5)(2x + 5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$\text{ou } 2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

$$h) \frac{5x^2}{2} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{5x^2}{2} \right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{5}$$

i) $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ (não há solução real, pois não há número real que elevado ao quadrado seja igual a (-1)).

$$j) \text{ ou } x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$$

$$l) \text{ ou } 3x + 2 = 0 \rightarrow 3x = -2 \rightarrow x = -(2/3)$$

$$\text{ou } -x - \left(\frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow -x = \left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow x = -\left(\frac{1}{2}\right)$$

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Plenária

Convencer os alunos de que eles podem resolver a atividade fazendo uso de seus conhecimentos anteriores sobre as equações polinomiais do 1º grau.

Mostrar aos alunos que a fatoração algébrica é uma ferramenta útil na resolução de equações polinomiais de 2º grau. E que para resolver uma equação que está na forma fatorada deve-se aplicar a propriedade que diz: *Se o produto de dois fatores é zero, necessariamente um deles é igual a zero.*

Formalização

Propriedade

Verificar que se o produto de duas expressões algébricas é zero, necessariamente uma delas é zero, ou seja:

Se a e b são expressões algébricas,

se $a \cdot b = 0$, então ou $a = 0$ ou $b = 0$, ou ambos são zeros

Dessa forma, se o produto de dois fatores é zero, necessariamente pelo menos um deles é igual a zero, por exemplo,

$$(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow (x-1) = 0 \text{ ou } (x+1) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

TAREFA EXTRACLASSE

Resolva as equações a seguir e depois verifique se os valores encontrados satisfazem as mesmas:

a) $x^2 = 9$

b) $4x^2 - 36 = 0$

c) $4 = x^2$

d) $-2x^2 + 7 = 0$

e) $x^2 = 0$

f) $3x^2 = 0$

g) $x^2 + 1 = 1$

h) $-x^2 + 4x = 0$

i) $x^2 + x = 0$

j) $(x-3)(2x-10) = 0$

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

As atividades cinco, seis, sete e oito têm os seguintes objetivo e justificativa.

Objetivo Específico

Iniciar as ideias que constituem a demonstração da fórmula geral para a resolução de qualquer equação polinomial do 2º grau: a fórmula de Bhaskara.

Justificativa

Seguindo a tradição grega de interpretar geometricamente situações algébricas, o matemático árabe Al-Khowarizmi, no século IX, desenvolveu um método geométrico para resolução de equações polinomiais do 2º grau, cujos passos transformam uma equação desse tipo em um quadrado perfeito.

ATIVIDADE 5

Leitura e Análise de Texto

Considere o seguinte problema:

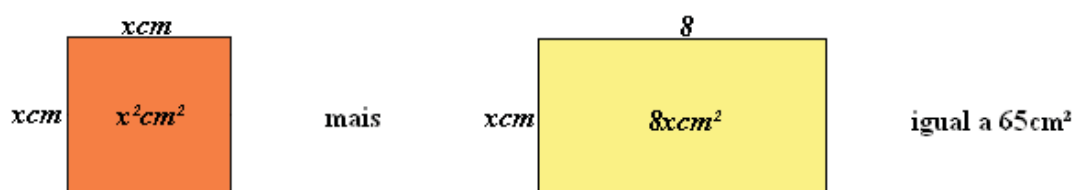
A área de um quadrado acrescida de 8 vezes o seu lado é igual a 65. Qual é a medida do lado desse quadrado?

Na Álgebra Moderna, esse problema pode ser traduzido pela seguinte expressão algébrica: $x^2 + 8x = 65$. Resolvendo a equação, podemos obter a solução do problema.

Antigamente, os matemáticos não dispunham das mesmas ferramentas da Álgebra Moderna. Usavam, então, outras estratégias para resolver problemas desse tipo. Uma delas foi desenvolvida pelo matemático persa *Al-Khowarizmi*, que viveu em Bagdá no século IX.

O método desenvolvido por ele seguia os seguintes passos:

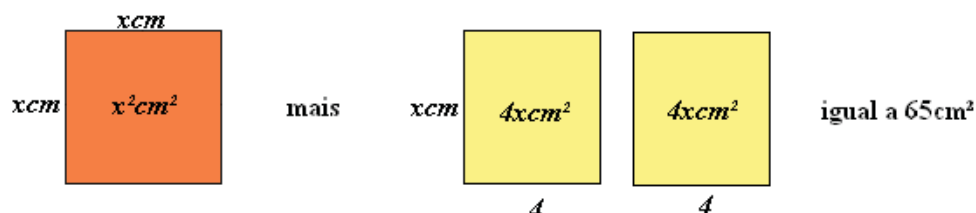
1) As expressões x^2 e $8x$ eram interpretadas como as áreas de um quadrado e de um retângulo. A solução do problema é, então, a medida do lado do quadrado:



CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

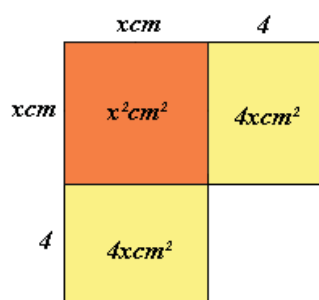
$$x^2 + 8x = 65$$

2) O retângulo era dividido em dois retângulos de mesma área. A equação era interpretada como:

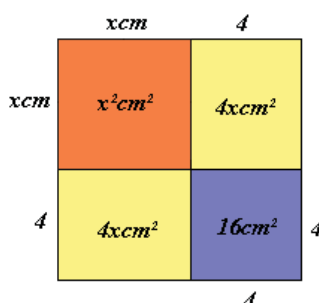


$$x^2 + 2 \cdot 4x = 65$$

3) Cada retângulo era arranjado de modo que ficassem justaposto a dois lados do quadrado. Com essa composição, a área da figura continua sendo 65cm^2 .



4) De modo a completar o quadrado acrescentava-se um quadrado no canto da figura anterior. A medida do lado desse quadrado é a mesma do lado conhecido do retângulo, ou seja, 4. Assim, a área do novo quadrado é $4\text{cm}^2 \cdot 4\text{cm}^2 = 16\text{cm}^2$. Com esse método, “completava-se um quadrado perfeito” de lado $x + 4$ e área igual a $65\text{cm}^2 + 16\text{cm}^2 = 81\text{cm}^2$.



$$x^2 + 2 \cdot 4x + 16 = 65 + 16$$

ou

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

$$(x + 4)^2 = 81$$

5) Sendo a nova área 81cm^2 , então a medida do lado do novo quadrado é $\sqrt{81\text{cm}^2} = 9\text{cm}$. Assim, o lado do quadrado formado $(x + 4)\text{cm} = 9\text{cm}$, leva a $x = 5\text{cm}$ que é a solução do problema dado.

Comentário

Reconsiderando esse problema, queremos deixar aqui a seguinte correção do enunciado desse problema.

A intenção de quem criou o enunciado desse problema parece que era o de expressar uma equação polinomial do 2º grau completa. Tinha o objetivo de, fazendo uso da História da Matemática, mostrar como uma equação desse tipo poderia ser resolvida como uma aplicação do método de completar quadrados, desenvolvido pelo matemático persa Al-Khowarizmi. No Caderno do Aluno, de 2010, e repetido em 2011, aparecem esse problema com seu desenvolvimento decorrendo segundo as ideias de Al-Khowarizmi. Ressaltamos, entretanto, que o enunciado que pretendia chegar à equação $x^2 + 8x = 65$, não corresponde à linguagem algébrica correta, quer pelas palavras, quer pelas unidades de medida. Quando diz área acrescida de oito vezes o seu lado, na verdade está acrescentando à área do quadrado uma medida de comprimento, pois oito vezes um comprimento dá um comprimento.

Essa foi a primeira interpretação que tivemos do problema. Mas, lendo o problema novamente e interpretando o *vezes* como a operação multiplicação entenderíamos que são 8 multiplicado pelo lado do quadrado.

Como o enunciado nos levou a uma interpretação ambígua, uma sugestão para o enunciado poderia ser:

A área de um quadrado de lado $x\text{cm}$ acrescida da área de um retângulo de lados 8cm e $x\text{cm}$, mede 65cm^2 . Qual é a medida do lado desse quadrado?

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Estratégias de Resolução

- i) Leitura, nos grupos, da resolução apresentada no caderno, conduzida pela professora da classe;
- ii) Sob a condução dessa professora seria seguida, passo a passo, a resolução geométrica apresentada por Al-Khowarizmi, atendendo a questionamentos levantados por ela.

Plenária

Discutir com os alunos o processo geométrico para a resolução das equações polinomiais do 2º grau apresentada por *Al-Khowarizmi*, método conhecido como “completamento do quadrado”.

Algebricamente seria feita a transformação da equação $x^2 + 8x = 65$ em uma equação equivalente $x^2 + 2 \cdot 4x + 16 = 65 + 16$, ou seja, $(x + 4)^2 = 81$. Desenvolvendo essa equação poder-se-ia determinar as raízes da equação.

Tarefa Extraclasse

Resolva o problema abaixo usando o método desenvolvido por *Al-Khowarizmi*, apresentado na atividade anterior. Desenhe as figuras e escreva as equações equivalentes a cada etapa.

A área de um quadrado acrescida de 12 vezes o seu lado é igual a 13. Qual é a medida do lado desse quadrado?

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

ATIVIDADE 6

Resolva as equações de 2º grau aplicando o método do “completamento do quadrado” desenvolvido por *Al-Khowarizmi*.

a) $x^2 + 20x = 300$

b) $x^2 + 5x = 6$

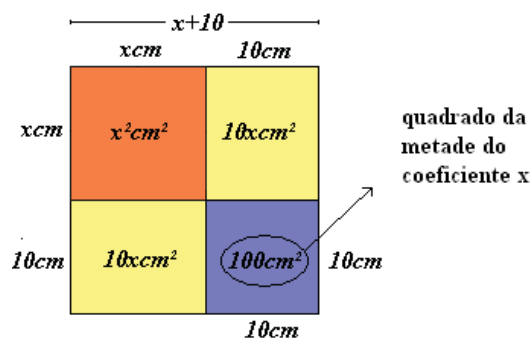
c) $x^2 + 2x + 1 = 0$

Estratégia de resolução

Seguindo os passos do processo da resolução geométrica de equações polinomiais do 2º grau, desenvolvido por *Al-Khowarizmi*, o aluno deverá chegar à solução dessa equação.

Este procedimento será ativado como um processo de fixação do método adotado. Assim,

a) $x^2 + 20x = 300$



$$x^2 + 20x + 100 = 300 + 100$$

$$(x + 10)^2 = 400$$

$$x + 10 = \pm\sqrt{400}$$

$$x + 10 = \pm 20$$

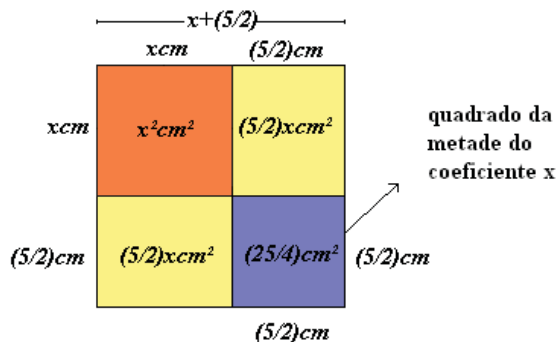
$$x = 20 - 10 \text{ ou } x = -20 - 10$$

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

$$x = 10 \text{ ou } x = -30$$

Mas, $x = 10\text{cm}$ válida.

b) $x^2 + 5x = 6$



$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = 6 + \frac{25}{4}$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

$$x + \frac{5}{2} = \pm \sqrt{\frac{49}{4}}$$

$$x + \frac{5}{2} = \pm \frac{7}{2}$$

$$x = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} \text{ ou } x = -\frac{7}{2} - \frac{5}{2}$$

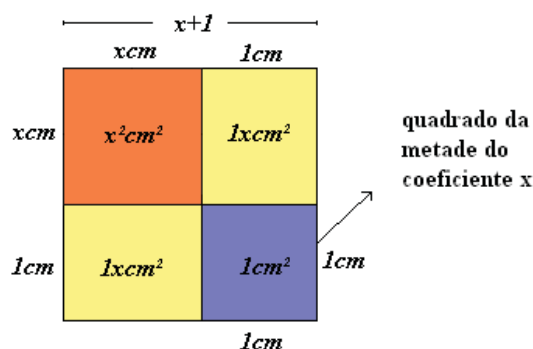
$$x = 1 \text{ ou } x = -6$$

Sendo que, $x = 1\text{cm}$ é a solução válida para o problema.

c) $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x^2 + 2x = -1$$

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA



$$x^2 + 2x + 1 = -1 + 1$$

$$(x + 1)^2 = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

Plenária

Chamar a atenção dos alunos sobre a possibilidade de duas soluções algebricamente obtidas embora apenas uma resposta pelo problema: achar o lado de um quadrado que, obrigatoriamente, é positivo. Ainda, chamar a atenção dos alunos de que, no item c, não há solução geometricamente, embora algebricamente encontra-se $x = -1$.

Formalização

A partir das atividades cinco e seis pretende-se chegar a uma fórmula geral para a obtenção de soluções de uma equação polinomial do 2º grau. Essa fórmula geral é conhecida, no Brasil, pelo nome de **Fórmula de Bhaskara**, que permite a resolução de qualquer equação polinomial de 2º grau, aplicando-se o método de Al-Khowarizmi, isto é, o método de completar quadrados para uma equação polinomial de 2º grau.

Considerando a equação polinomial de 2º grau:

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

$$ax^2 + bx + c = 0, \forall a, b, c \in R; a \neq 0$$

Equivalentemente, essa equação pode ser escrita na forma

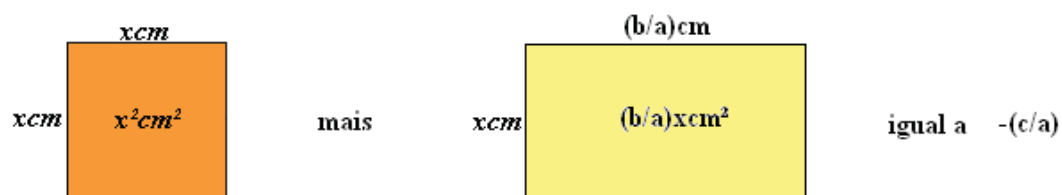
$$ax^2 + bx = -c, \text{ ao tirar-se } (-c) \text{ de ambos os membros.}$$

I) Obtida a equação $ax^2 + bx = -c$, dividindo-se todos os termos por a , tem-se:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

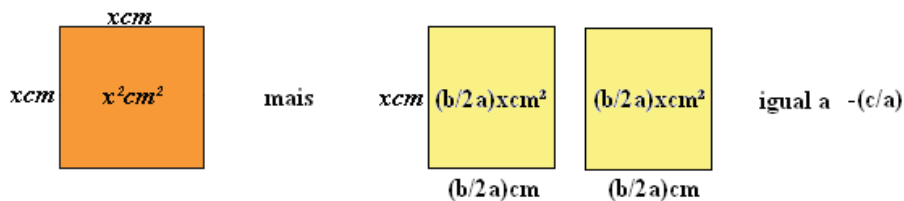
Desta forma, interpreta-se x^2 como a área de um quadrado de lado x e $\frac{b}{a}x$ como a área de um retângulo de lados x e $\frac{b}{a}$.

Considerando como unidade de medida o centímetro, as figuras se apresentarão assim



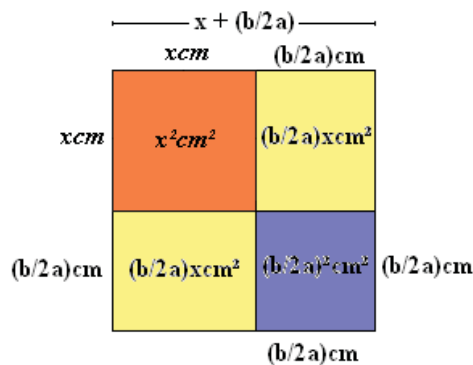
II) Aplicando-se o método de Al-Khowarizmi e dividindo o retângulo em dois retângulos de mesma área vê-se

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA



$$\text{Assim, } x^2 \text{ cm}^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x \text{ cm}^2 = -\frac{c}{a} \text{ cm}^2$$

III) Justapondo-se cada retângulo aos dois lados do quadrado e completando-se um quadrado maior ao se acrescentar um quadrado de lado $(b/2)a \text{ cm}$.



$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2$$

IV) A área desse novo quadrado será então

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2$$

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

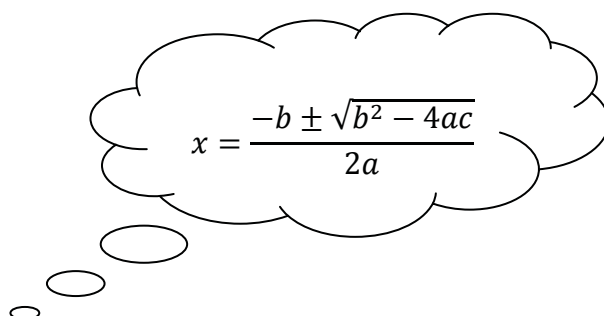
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Assim, extraindo-se a raiz quadrada

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmula de Bhaskara, que apresenta duas soluções, chamadas raízes da equação, lembrando que raiz de uma equação é um número real que, ao substituí-lo no valor da incógnita, torna a equação verdadeira e que $\sqrt{x^2} = \pm x$.

Olhando-se algebricamente para esta fórmula e indicando as raízes dessa equação por x_1 e x_2 tem-se

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

ATIVIDADE 7

Resolva as equações a seguir usando a fórmula de *Bhaskara*. Lembre-se de que, para aplicá-la, a equação deve estar na forma $ax^2 + bx + c = 0$.

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$

b) $3x^2 + 5x + 2 = 0$

c) $7x - x^2 - 6 = 0$

d) $2x^2 + x = 1$

e) $3x^2 - 2x + 1 = 0$

f) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

g) $-x^2 + 2x + 3 = 0$

h) $x^2 - 2x - 3 = 0$

i) $-10x^2 + 20x + 30 = 0$

Estratégia de resolução

Resolver as equações acima utilizando a Fórmula de Bhaskara.

Plenária

Discutir com os alunos a resolução das equações. Dar ênfase ao item e, para o qual não há solução real, falando sobre a possibilidade de existência de raízes reais ou não reais.

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

ATIVIDADE 8

1) Discuta com seus colegas a seguinte afirmação:

Dependendo do valor da expressão $b^2 - 4ac$, uma equação polinomial do 2º grau pode admitir duas raízes reais distintas, duas raízes reais idênticas (uma raiz dupla), ou não admitir raízes reais.

Registre as conclusões da discussão.

2) Explique por que as três últimas equações da atividade anterior têm as mesmas raízes.

Possível estratégia de resolução

1) Com a atividade 8, os alunos observarão que quando o valor da expressão $b^2 - 4ac$ for

Maior que zero: haverá duas soluções reais;

Igual a zero: uma solução real dupla;

Menor que zero: não há solução real.

Caso os alunos não percebam essas condições seria necessário pedir recursos aos itens da atividade sete.

2) Observar que as três equações finais, g , h e i , são equivalentes.

Plenária

Discutir com os alunos que o sinal da expressão $b^2 - 4ac$ é importante para a Fórmula de Bhaskara e que ele é denominado **discriminante**. O discriminante é obtido em função dos coeficientes de uma equação algébrica que determina o número de suas raízes

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

reais. Por isso, o valor do discriminante determina se uma equação polinomial do 2º grau pode admitir duas raízes reais distintas, ou duas raízes reais idênticas ou não admitir raízes reais.

O discriminante é representado pela letra grega Δ (delta), assim, escreve-se $\Delta = b^2 - 4ac$.

Como vimos na Atividade 7 e discutimos na Atividade 8, se

$\Delta > 0 \rightarrow$ há duas raízes reais distintas

$\Delta < 0 \rightarrow$ não há raiz real

$\Delta = 0 \rightarrow$ há duas raízes reais idênticas

Formalização

Fórmula de Bhaskara

Dada a equação polinomial do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0, \forall a, b, c \in R; a \neq 0$$

Suas raízes são obtidas pela fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac$$

Δ é o discriminante, obtido em função dos coeficientes da equação algébrica e determina o número de suas raízes reais.

Se

$\Delta > 0 \rightarrow$ há duas raízes reais distintas

$\Delta < 0 \rightarrow$ não há raiz real

$\Delta = 0 \rightarrow$ há duas raízes reais idênticas

CAPÍTULO 3 – 2º BLOCO DE ROMBERG: PLANEJAMENTO PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

3.2.3. Termo de Compromisso

No ensino de Matemática, na maioria das vezes, as atividades propostas aos alunos são apenas listas de exercícios, em que as resoluções são aplicações de algoritmos em que, de uma forma mecânica, os alunos os resolvem. No processo educativo tradicional, a concepção de ensino que temos é a de que o “professor é o detentor do conhecimento e o responsável pelas decisões a respeito da organização pragmática e metodológica, da inclusão ou exclusão de conteúdos e da avaliação” (SILVA; MOREIRA; GRANDO, 1996, p.15). Ou seja, o professor “ensina” e o aluno aplica esse conhecimento de forma mecânica e, na maioria das vezes, sem produzir significados para isso. Nesse processo, o papel do professor e dos alunos já está pré-estabelecido, o professor “passa” a matéria na lousa, os alunos “copiam” e resolvem os exercícios.

Entretanto, em um processo de ensino em que os alunos são vistos como co-construtores de seu próprio conhecimento, um termo de compromisso onde são colocadas, bilateralmente, por professor e alunos, condições que permitam a ambos desenvolver conscientemente todas as atividades referentes ao ensino e à aprendizagem, no ambiente da sala de aula e de tarefas extraclasse seria importante.

Assim, ficam definidos os papéis de responsabilidade de cada um em sala de aula. E, em um processo de avaliação contínua, a avaliação deve estar integrada ao ensino permitindo uma melhor aprendizagem.

Em um primeiro momento, expusemos um Termo de Compromisso, elaborado pela pesquisadora, aos alunos e à professora antes de começarmos a desenvolver o Projeto de Ensino. Fizemos a leitura do termo, discutimos as possíveis dúvidas e atendemos a algumas modificações surgidas no decorrer da leitura. Assim, em conjunto com a professora e seus alunos, definimos um Termo de Compromisso para que o Projeto de Ensino pudesse ser amplamente desenvolvido. O Termo de Compromisso em sua forma final foi apresentado aos alunos. Pedimos a assinatura de cada um e definiu-se a maneira de trabalho que seria conduzida ao longo da aplicação do Projeto.

A forma final do termo encontra-se nos anexos desta dissertação.

CAPÍTULO 4
PROCEDIMENTO GERAL EM
AÇÃO: APLICAÇÃO DO PROJETO

PROCEDIMENTO GERAL EM AÇÃO

APLICAÇÃO DO PROJETO

Neste capítulo, seguindo a Metodologia de Pesquisa de Romberg, colocamos o Procedimento Geral em Ação e realizamos uma análise dos dados coletados após ele ter sido posto em ação.

O Projeto de Ensino realizou-se com alunos da 8ª série 3 (8ª3) do Ensino Fundamental, período matutino, de uma escola estadual da cidade de Rio Claro / SP. O trabalho foi desenvolvido durante as aulas de Matemática, sendo duas horas/aula na quarta-feira, uma hora/aula na quinta-feira e duas horas/aula na sexta-feira. O projeto foi dividido em duas partes: uma revisão das equações polinomiais do 1º grau e um trabalho efetivo com as equações polinomiais do 2º grau. A primeira parte foi desenvolvida durante o mês de junho de 2010 e a segunda durante os meses de agosto e setembro, também em 2010. Lembramos que há uma diferença entre planejar um projeto e aplicar o projeto como, por exemplo, o tempo estipulado que não foi suficiente, e o fato de os alunos apresentarem mais dificuldades do que o esperado, além de outros empecilhos.

Levando em consideração nosso objetivo e nossas indagações da pesquisa, adotamos a abordagem qualitativa de pesquisa que nos possibilita múltiplas interpretações dos dados coletados segundo nossas crenças, experiências e concepções. Para a coleta dos dados utilizamos algumas técnicas: observação participante, seguida de registros (notas de campo e vídeos de algumas aulas), e análise da produção de significados dos alunos nas atividades trabalhadas em sala de aula. Como a observação implica a existência de um planejamento cuidadoso do trabalho e uma preparação rigorosa do observador, a observadora-pesquisadora precisou investigar no trabalho realizado em sala de aula, nas tarefas extraclasse, nas avaliações pedidas por lei e, principalmente, em seus registros diários retratando o transcorrer das aulas.

A análise de dados é um processo complexo, pois como afirma Carneiro (2009, p.95)

Exige destes (pesquisadores) um olhar atento aos dados e à identificação de aspectos que dialoguem com o objeto investigado. Além disso, o pesquisador necessita realizar a associação dos dados com o aporte teórico da pesquisa. É comum os pesquisadores, em início de investigação, produzirem um grande

volume de dados, o que ocasiona um número mais extenso ainda a ser analisado. Desse modo, muitas vezes, pesquisadores iniciantes sentem-se perdidos diante da quantidade de aspectos e dimensões a serem analisados.

Bodgan e Biklen (1994, p.205) dizem que a análise de dados

(...) é o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros. Em última análise, os produtos finais da investigação constam de livros, artigos, comunicações e planos de ação. A análise de dados leva-o das páginas de descrições vagas até estes produtos finais.

Como nossa pesquisa apresentou uma fundamentação teórica baseada em três eixos temáticos – a Álgebra Escolar, a Produção de Significados e a Resolução de Problemas – utilizaremos cada eixo para criar categorias de análise para medirmos a qualidade da produção de significado dos alunos, pois

(As categorias) brotam, num primeiro momento, do arcabouço teórico em que se apoia a pesquisa. Esse conjunto inicial de categorias, no entanto, vai ser modificado ao longo do estudo, num processo dinâmico de confronto constante entre teoria e empiria, o que origina novas concepções e, consequentemente, novos focos de interesse (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p.42).

Consideremos a categoria *Resolução de Problemas* como ponto de partida, pois todas as atividades foram propostas a partir de problemas. Para cada atividade analisaremos o que ocorreu em sala de aula olhando para o roteiro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas apresentado na página 99 desta pesquisa.

Na segunda categoria, a *Álgebra Escolar*, analisaremos que parte da Matemática foi trabalhada:

- Se os alunos utilizaram alguns dos métodos usados nos primórdios: retórica, sincopada, falsa posição, entre outros;
- A escrita matemática dos alunos;
- Como é que os alunos expressam o pensamento algébrico, apresentado na página 64 desta dissertação:

- Padrão;
 - Representações;
 - Simbolismo;
 - Variáveis;
 - Equações.
- Os vários tipos de resolução das equações;
 - As dificuldades apresentadas pelos alunos.

Na terceira categoria, a *Produção de Significados*, analisaremos a qualidade da produção de significados dos alunos, pois com o projeto aplicado queremos que os alunos saibam pensar matematicamente, construir ideias novas responsáveis pela criação de novos conceitos, novas estratégias, novos algoritmos, novas técnicas operatórias. Para isso, mediremos se os alunos realmente produziram significados matemáticos olhando para:

- Leitura e interpretação do problema dado: se o aluno leu bem, razoável ou mal;
- Identificação das estratégias utilizadas pelos grupos na resolução do problema: tabelas, gráficos, equações, entre outras;
- Se os grupos souberam passar as ideias concebidas da linguagem vernácula para a linguagem matemática;
- Se os alunos resolveram corretamente as expressões matemáticas construídas; se deram uma resposta convincente e uma interpretação adequada a ele como solução da resolução do problema trabalhado pelo grupo.

O fato de criar categorias de análise nos permite medir a qualidade da produção de significado pelos alunos.

Para os diálogos apresentados, neste capítulo, foi criado um conjunto de siglas na qual o leitor se deparará:

- P será utilizado para professor;
- A, B, C... representará a letra inicial do nome do aluno;
- (...) indica que não foi possível entender o que foi dito;

- [...] supressão de parte do diálogo, por não ser conveniente ou relevante;
- (texto) comentário e/ou explicação da pesquisadora para esclarecer ao leitor o significado da frase;
- G1, G2, G3... referem-se ao número do grupo: grupo um, grupo dois e assim por diante.

4.1. Projeto de Ensino – Parte I

Houve uma preocupação ética, uma vez que todos os passos da construção desse projeto foram combinados entre professora e pesquisadora, por ocasião de planejar que, no projeto de ensino, fosse proposta uma revisão de trabalho com equações polinomiais do 1º grau, desde que esse trabalho já fora desenvolvido no final do ano anterior, com a mesma professora e com os mesmos alunos. Entretanto quando, da construção do projeto, surgiu a concordância entre professora e pesquisadora de que uma breve revisão do assunto poderia ajudar os alunos na construção do tópico equações polinomiais do 2º grau, esse constrangimento por parte da pesquisadora desapareceu.

Para esse Projeto de Ensino foram realizados sete encontros, totalizando 14 horas/aula, que foram distribuídas conforme o quadro abaixo:

Atividade Trabalhada	Data Inicial	Horas /Aula	Números de Encontros
1	09/06	2	1
2	10/06	4	2
3	16/06	4	2
4	18/06	2	1
Avaliação	30/06	2	1

Vale ressaltar que para cada encontro eram formados novos grupos, pois muitos alunos faltavam. Assim, o grupo nomeado, por exemplo, G1 para a primeira atividade não é, necessariamente, o mesmo grupo para a segunda atividade.

ATIVIDADE 1 – FICHA 1

1) Você sabe o que é um padrão? Discuta com seus colegas e explique com suas palavras.

2) Discuta o seguinte texto com seus colegas.

Texto: *Enchente no rio Nilo*

O Egito é banhado pelo Nilo, imenso rio que fertiliza as suas margens.

Para poderem plantar na época certa e assim garantir seus alimentos, os egípcios precisavam saber quando haveria inundação. Havia, portanto, a necessidade de conhecer o padrão desse acontecimento.

Eles observaram que o rio subia logo depois que a estrela Sirius se levantava a leste, um pouco antes do Sol. Notando que isso acontecia a cada 365 dias, os egípcios criaram um calendário solar composto de doze meses, de 30 dias cada mês e mais cinco dias de festas, dedicados aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys.

Os egípcios dividiram ainda os doze meses em três estações de quatro meses cada uma: período de semear, período de crescimento e período de colheita.

- Quais os padrões citados no texto?

3) Dê outros exemplos de padrões encontrados na natureza, no dia-a-dia.

4) Dê exemplos de padrões encontrados na Matemática.

ATIVIDADE 1 – FICHA 2

1) Você sabe o que é um padrão? Discuta com seus colegas e explique com suas palavras.

2) Com o auxílio do Mosaico Mágico construa o desenho da figura, atribuindo uma cor para cada textura. Use o fundo da embalagem como tabuleiro para o jogo.

3) Dê exemplos de padrões encontrados na Matemática. Você consegue dar exemplos de padrões encontrados na natureza, no dia-a-dia?

Iniciamos nossas atividades com o conceito de padrão, pois estudar equações é compreender padrões como afirma Devlin (1998 apud VALE et al, 2009, p.7)

(...) ao longo dos anos a Matemática tornou-se cada vez mais e mais complicada, as pessoas concentraram-se cada vez mais nos números, fórmulas, equações e métodos e perderam de vista o que aqueles números, fórmulas e equações eram realmente e porque é que se desenvolveram aqueles métodos. Não conseguem entender que a Matemática não é apenas manipulação de símbolos de acordo com regras arcaicas, mas sim a compreensão de padrões – padrões da natureza, padrões da vida, padrões da beleza.

A Atividade 1 tinha a finalidade de recordar o conceito de padrão e de que os alunos pudessem perceber a Matemática como uma ciência de padrões. A professora, inicialmente, organizou os alunos em grupos e entregou, a cada aluno, uma cópia da Atividade 1. Como essa atividade foi dividida em duas fichas, a primeira foi trabalhada por nove grupos e a segunda, como utilizava o Mosaico Mágico e nós tínhamos apenas um jogo, foi trabalhada por apenas um grupo. Juntamente com a professora, os alunos realizaram uma primeira leitura do problema para tirarem suas dúvidas de interpretação, para que pudessem compreendê-lo melhor.

Enquanto os alunos resolviam a atividade, a professora observava e analisava seu comportamento, estimulando o trabalho colaborativo. Os alunos discutiram bastante a questão, o que é um padrão? Alguns grupos recorreram ao dicionário. Em um grupo pudemos observar que os alunos perguntaram entre si se sabiam o que é padrão, mas ninguém sabia responder. A professora, intermediando no sentido de levar os alunos a pensar, perguntou se eles conseguiam responder sem ver no dicionário, mas eles achavam difícil. Assim, eles recorreram ao dicionário para ver o que significava a palavra padrão. Em outro grupo, eles colocaram com suas palavras o que achavam que era padrão e depois consultaram o dicionário. Tendo respondido a primeira questão da atividade, os grupos resolveram os outros itens sem apresentar dificuldades.

Ao final do encontro, no momento da plenária, em que a professora convida a todos os alunos para uma discussão geral, os alunos participaram colocando suas opiniões. Como as respostas dos alunos foram textos, então um representante de cada grupo leu a resposta do seu grupo para a sala, para poderem discutir. A partir da resposta dos alunos, a professora fez um

resumo na lousa das principais ideias. Vejamos os significados que os grupos deram sobre o que é um padrão:

Padrão é um modelo a ser seguido (G1)

Padrão é uma sequência, pois segue uma ordem, período, é continuação que nunca muda (G2)

Procuramos no dicionário e padrão é: o que serve de base ou norma para avaliação; medida (G3)

O Padrão é algo que acontece repetidamente e sempre, em casos, sempre respeitando o mesmo tempo para acontecer (G4)

Padrão é uma sequência que se repete sempre (G5)

Quando as medidas são iguais em todos os lados, é uma medida que não se modifica (G6)

Padrão é uma estrutura que não pode ser modificada, ou seja, um modo fixo de enxergar uma situação. Por exemplo, um padrão de vida, é a rotina de uma pessoa (G7)

Padrão é a forma correta de se manipular e se conduzir alguma coisa, ou seja, regras. Com a ajuda do dicionário percebemos que estávamos redondamente enganados, padrão é: o que serve de base ou norma para avaliação; medida; objeto que serve de modelo à feitura de outro; desenho decorativo estampado em tecido ou noutra superfície (G8).

Padrão é algo normal, que não sai fora do comum (G9). (Grifos nossos).

Em continuação do trabalho dessa atividade, ao discutirem o texto *Enchente no rio Nilo*, a maioria dos grupos disse que um padrão encontrado no texto era o de que o rio subia logo depois que a estrela Sirius se levantava a leste; alguns grupos apresentaram apenas o padrão das estações do ano e apenas um grupo colocou todos os padrão que foram citados no texto. Vejamos algumas respostas dos grupos:

O primeiro padrão citado no texto foi quando os egípcios notaram que o rio Nilo subia depois que a estrela Sirius se levantava. Depois eles notaram que, o rio Nilo subia a cada 365 dias. Com essas observações, eles criaram um calendário e citaram um padrão de agricultura, a cada quatro meses uma estação, dentre elas, o período de semear, período de crescimento e período de colheita. A partir dessas informações eles criaram um calendário (G2).

Eles observaram que o rio subia logo depois que a estrela Sirius se levantava a leste (G3).

O padrão da época de inundação, que seria necessário para que pudessem ser feito as plantações. O outro padrão a ser seguido era o fato de que logo depois que a estrela Sirius levantava a leste o rio subia (G4).

Período de semear, período de crescimento e período de colheita (G5).

Para encerrar a aula, alguns grupos deram exemplos de padrões encontrados na natureza, encontrados no dia-a-dia e padrões encontrados na Matemática, como podemos observar:

Grupo 4

O galo canta todos os dias.

A vaca amamenta o seu filhote todos os dias.

O Sol nasce todos os dias.

Grupo 7

É sempre de padrão encontrado na natureza são as quatro estações e se repetem de ano em ano. No dia-a-dia pode ser a ordem com que vem para a escola e se repete semanalmente.

Grupo 8

Cada animal tem um padrão alimentício, uns comem e bebem mais que outros. Exemplo: o cachorro bebe água todos os dias, já o camelo bebe de cada 10 a 15 dias mais ou menos.

Grupo 2

Na Matemática há vários padrões, muito deles, são os teoremas, eles sempre desempenham a mesma função, dando sempre o mesmo resultado: Teorema de Pitágoras: $h^2 = c^2 + c^2$. Ou seja, sempre o valor da h^2 será igual à soma do $c^2 + c^2$.

Há também fórmulas que sempre indicam uma proporcionalidade, mostrando um padrão para as proporções, por exemplo:

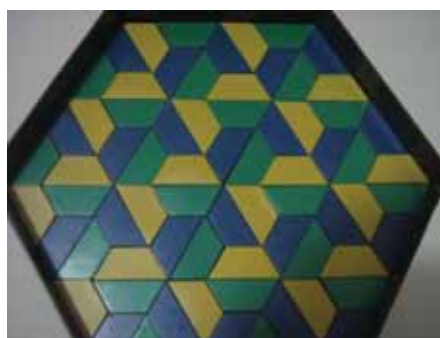
Quantidade de borracha	1	2	3	4	5
Preço da borracha	2,00	4,00	6,00	8,00	10,00

Podemos dizer que a fórmula padrão desse esquema é: $QB \cdot 2 = PB$.

Grupo 7

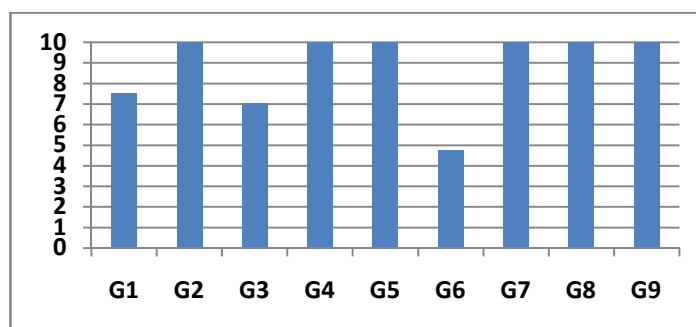
Um exemplo na Matemática pode ser as dízimas periódicas que após a vírgula os números se repetem infinitamente.

O grupo, que trabalhou com o Mosaico Mágico, finalizou a aula apresentando seu trabalho final



e os alunos disseram que para construir a figura acima seguiram um modelo, uma regra.

Ao observarmos o gráfico



Notamos que os alunos não apresentaram dificuldades na atividade proposta.

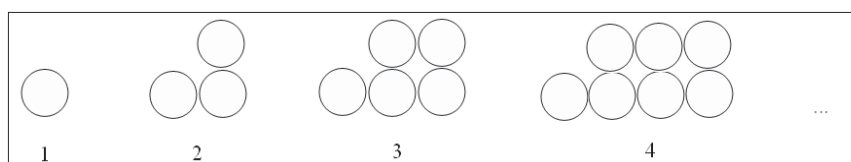
Verificou-se que a ideia mais presente no pensamento dos alunos era a de que padrão é algo que se repete sempre, um modelo, uma sequência, que são características de um padrão.

Frente à colocação dos alunos a respeito dos questionamentos dessas atividades, o professor sente-se motivado a fazer com que eles reflitam sobre alguns padrões da natureza

responsáveis de certa forma por padrões matemáticos como, por exemplo, a distribuição ao longo do ano, a cheia de um rio pela fertilização das terras ribeirinhas, o período de amadurecimento das frutas, etc. Essa é uma função desempenhada pelo professor fazendo com que os alunos percebam o social, o cotidiano da vida, e portanto, ligado à vida dos cidadãos.

ATIVIDADE 2

Observe a sequência de bolinhas abaixo e responda as perguntas:



- Desenhe as bolinhas que devem ocupar a 5ª posição para que seja mantido o padrão da sequência.
- Quantas bolinhas devem ocupar a 11ª posição? E na 35ª posição? Justifique.
- Qual o padrão matemático encontrado na relação do número de bolinhas com o número de sua posição?

Para esta atividade, o objetivo era o de investigar a sequência dada com a finalidade de identificar o padrão e de representá-lo por meio de palavras, figuras e símbolos. Esperava-se que os alunos pudessem encontrar o número de bolinhas seguindo a estrutura da sequência por meio do método recursivo; construir uma tabela para facilitar a visualização do padrão; e identificar o padrão presente na sequência e o “traduzir” para uma linguagem matemática.

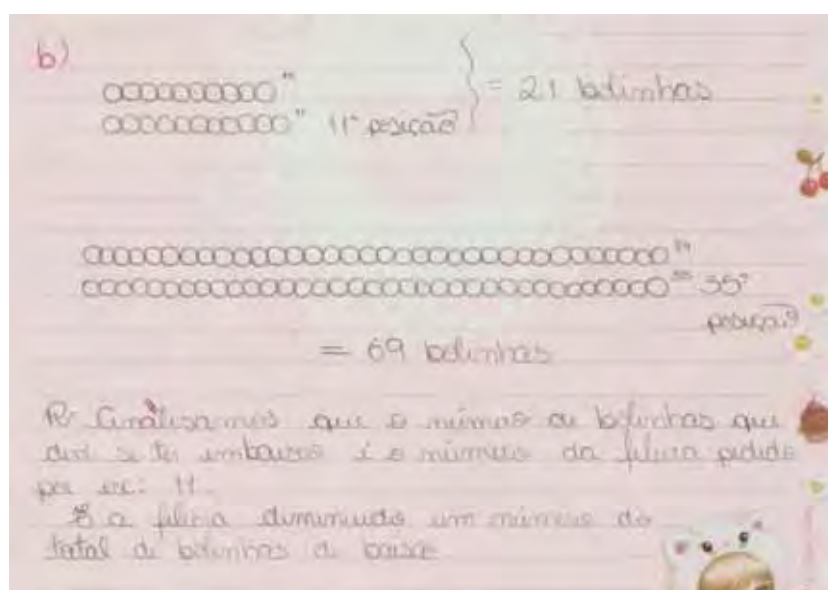
A cada um dos alunos, que estavam em pequenos grupos, foi entregue a segunda atividade. Em seguida, a professora e os alunos, em conjunto, realizaram a leitura do problema para que os alunos pudessem ter uma melhor compreensão.

Houve grupos que observaram que a figura seguinte da sequência era sempre de mais duas bolinhas, outros, que o número de bolinhas era o número da posição mais o número da posição menos uma. Um grupo observou o padrão relacionando o número da posição com o

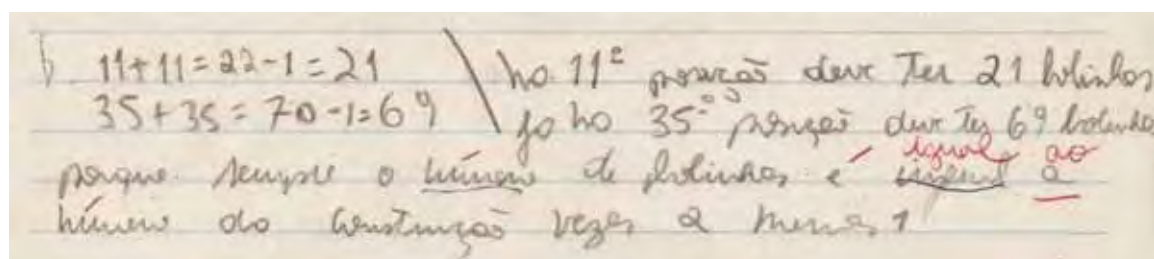
número de bolinhas, explicando que era o dobro da posição menos um, mas em seu registro o grupo não colocou essa ideia em uma linguagem matemática.

Os grupos G1, G2, G3 e G4 fizeram corretamente o desenho, no item a, das bolinhas que devem ocupar a quinta posição para que o padrão da sequência fosse mantido. Os grupos G1, G2, G3 e G6 encontraram o número de bolinhas que devem ocupar a décima primeira e trigésima quinta posições e, apenas, os grupos G1, G3 e G6 justificaram suas respostas:

Grupo 1



Grupo 3

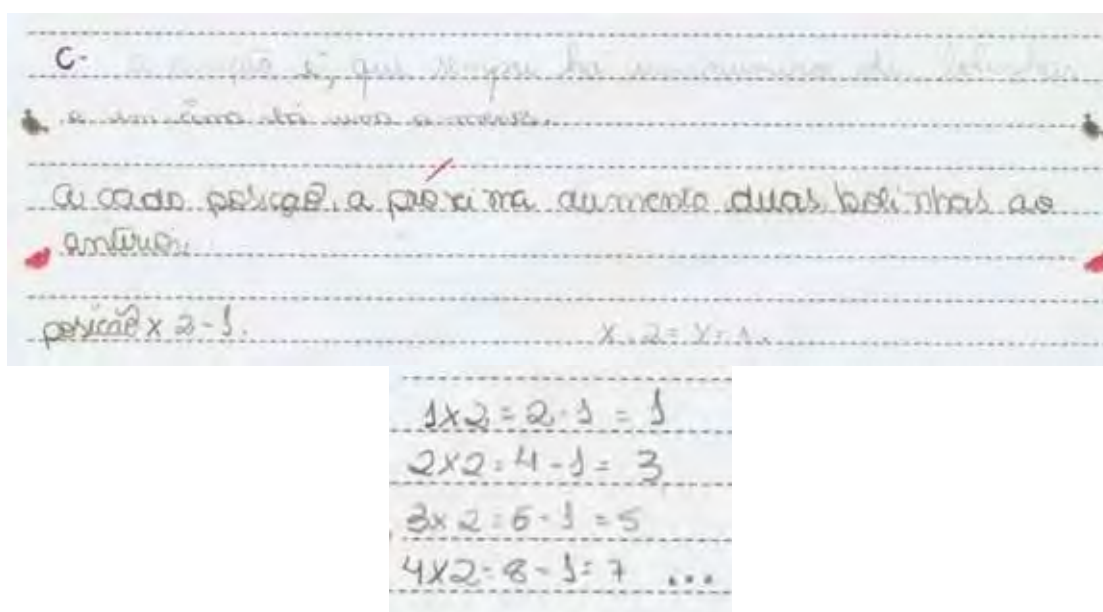


Grupo 6



Ao serem questionados, no item c, sobre qual o padrão encontrado na relação do número de bolinhas com o número de sua posição, todos os grupos conseguiram encontrar o padrão, mas não conseguiram expressá-lo em uma linguagem algébrica. Vejamos algumas respostas:

Grupo 2



Uma observação importante que se pode fazer ao observar o trabalho do grupo G2 é a frequência com que se encontra a expressão em uma mesma ordem de uma multiplicação inicial ser acompanhada imediatamente de uma quantidade expressada por outra operação levando a um resultado errado, ao comparar-se a primeira expressão com a última.

Grupo 3

A relação entre o número de bolinhas e sua posição é que o número de bolinhas é sempre o dobro do número da posição menos 1 agrupadas em duas linhas, sendo que na linha de baixo há sempre a mesma quantidade de bolinhas que a posição e na de cima tem o número de bolinhas menos um.

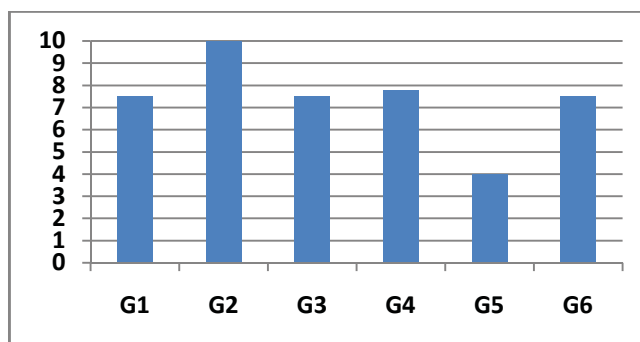
Grupo 4

O número de bolinhas é a posição multiplicada por 2 menos uma bolinha.

Como cada grupo trabalhou de um jeito, a professora pediu que cada grupo escolhesse um representante para ir até a lousa para passar o que foi feito no grupo e se o representante do próximo grupo tivesse algo repetido era apenas para comentar. A professora deixava bem claro aos alunos que o momento da plenária era a hora de ouvir, ouvir o que cada grupo tinha para falar.

Ao final do encontro, a professora formalizou o conteúdo, em que registra na lousa uma apresentação formal dos novos conceitos e conteúdos construídos pelos alunos. Na formalização, a professora introduziu o conceito de variável, que é o símbolo que pode representar qualquer um dos elementos de um conjunto de números ou de outros objetos, e os métodos recursivo e não recursivo.

Observando o gráfico



Notamos que os alunos apresentaram dificuldades em “traduzir” o problema dado para uma linguagem algébrica, embora todo o pensamento fosse descrito por eles nas atividades.

ATIVIDADE 3

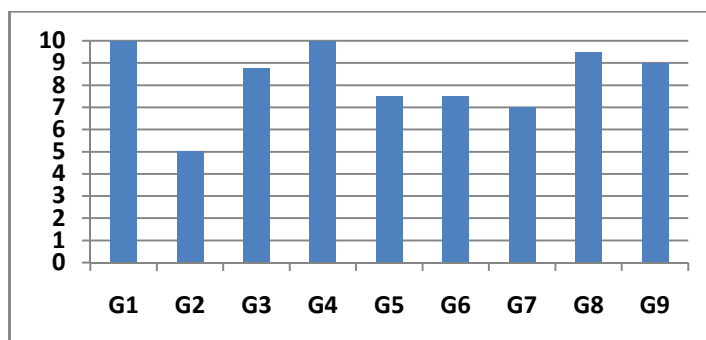
Uma empresa em dificuldades financeiras propôs aos seus funcionários um incentivo em dinheiro para os que solicitassem demissão. O valor a ser recebido variava conforme o tempo de trabalho do funcionário. Para isso, a empresa utilizou a tabela abaixo para calcular quanto cada funcionário deveria receber.

Número de Anos Trabalhados	Valor a Receber
1	R\$ 450,00
2	R\$ 700,00
3	R\$ 950,00
4	R\$ 1200,00
5	...
...	...
23	...
...	...

- a) Qual o valor a ser recebido pelo funcionário que trabalhou durante 5 anos? E aquele que trabalhou por 23 anos?
- b) Como você relaciona o número de anos trabalhados com o valor a ser recebido?
- c) João recebeu da empresa R\$ 7700,00. Por quantos anos João trabalhou na empresa?

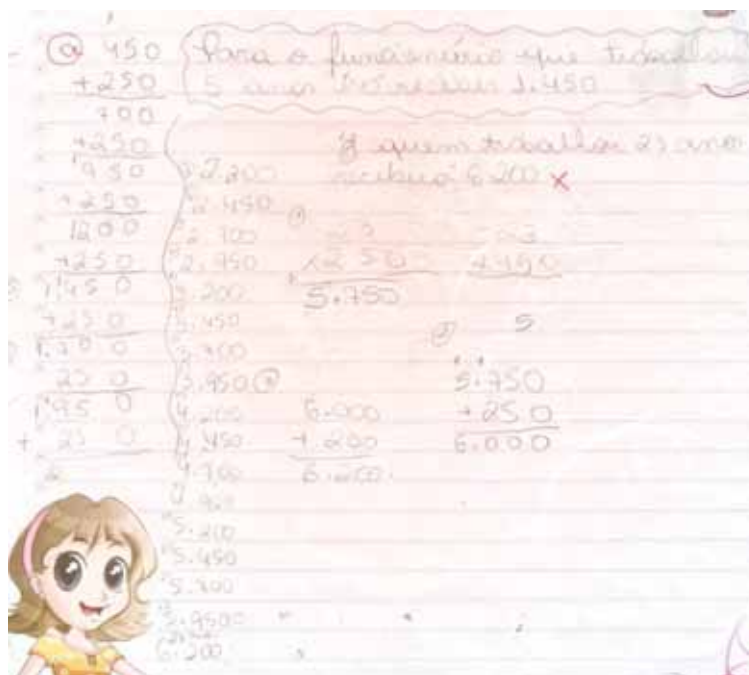
Para esta atividade esperava-se dos alunos que eles pudessem resolver o problema de maneiras diferentes; confrontar resultados; utilizar a heurística como método de investigação da solução de equações; realizar operações com expressões algébricas sem se preocupar com técnicas e métodos de resolução.

A cada um dos alunos, que estavam em pequenos grupos, foi entregue a terceira atividade. Em seguida, a professora e os alunos, em conjunto, realizaram a leitura do problema para que os alunos pudessem ter uma melhor compreensão.



Pudemos observar que a maioria dos alunos percebeu que os valores da tabela aumentavam a cada ano R\$250,00 a partir dos R\$450,00 iniciais. No item a, em que se perguntava qual o valor a ser recebido pelo funcionário que trabalhou durante cinco anos, os alunos tomaram o valor recebido pelo funcionário em quatro anos, valor dado na tabela, e acrescentaram R\$250,00. O item a, ainda pedia para determinar o valor recebido pelo funcionário por 23 anos de trabalho. Observamos que apareceram diferentes maneiras de resolução. Vários grupos fizeram a tabela e foram completando-a até os 23 anos trabalhados, sempre somando R\$250,00, isto é, utilizavam o método recursivo; outros grupos acharam um padrão. Vejamos algumas respostas:

Grupo G2



A professora tendo compreendido o engano da aluna, deveria ter feito com que ela contasse, em sua forma de resolução, quantas vezes havia adicionado R\$250,00, sendo que, na primeira vez, já um ano havia se passado. Ainda, essa aluna cometeu um erro de “conta” ao considerar R\$5750,00 no lugar de R\$5700,00, impedindo de chegar a R\$5950,00.

Grupo G8

Handwritten student work for Grupo G8. The student calculates the salary for 23 years. At the top, they write: $1.200,00 + 250,00 = 1.450,00$ (labeled "1º ano") and $1.450,00 + 250,00 = 1.700,00$ (labeled "2º ano"). Below this, they calculate the total for 23 years: $1.200,00 \times 23 = 27.600,00$ and $27.600,00 + 200,00 = 27.800,00$. They then add the initial salary: $27.800,00 + 1.200,00 = 29.000,00$. The final result is $29.000,00$. The student also includes a note: "Então em 23 anos ganha 29.000,00 e em 23 anos ganha 5.350,00".

No item b, que pedia aos grupos para relacionar o número de anos trabalhados com o valor a ser recebido, a maioria dos grupos encontrou a equação que relaciona os anos trabalhados com o valor a ser recebido:

Grupo G1

Handwritten student work for Grupo G1. The student writes: "b) Observando os números, nós chegamos a conclusão que: $V = n \cdot 250 + 200$ ". They then provide an example: "ex: 1º ano: 450,00; 2º ano: 700,00; 3º ano: 950,00". They also show the calculation for 1 year: $1 \times 250 = 250 + 200 = 450$. At the bottom, they calculate the total for 23 years: $27.800,00 + 200,00 = 28.000,00$.

Grupo G4

b) $1200 + 250 = 1450$
 $1450 + 250 = 1700$

Já no item c, para saber quantos anos João trabalhou para receber R\$7700,00, vários grupos continuaram a preencher a tabela, feita no item a, aumentando os R\$250,00 até aparecer o valor de R\$7700,00. Houve um grupo que achou a equação no item b, mas não soube utilizá-la para a resolução do item c e, assim, utilizou a tabela:

Grupo 8

23 - 5.450	30 - 7.500 + 200 = 7.700
24 - 6.000	
25 - 6.250	
26 - 6.500	
27 - 6.750	
28 - 7.000	
29 - 7.250	

No momento da plenária, a professora chamou os alunos para discutirem as resoluções do problema apresentadas pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. A professora desempenhou o papel de mediadora das discussões e incentivava a participação dos alunos, pois esse é um momento rico para a aprendizagem. Vejamos as falas de alguns grupos na resolução dos itens da atividade:

Grupo G2 (item a)

G: *oh, se em um ano recebe 450 vai aumenta 250 e no próximo ano recebe 700, ae a gente foi fazendo as contas até chegar..., tipo assim, que conforme vai aumentando 250, você vai desde o começo de 1200 vai pra 1450.*

P: *que é pra quantos anos de trabalho?*

G: *cinco anos.*

P: *então vamos colocar na lousa.*

G: *ah, mais eu não fiz contas.*

P: mas coloca cinco anos o que você achou. Vocês observaram que estava acontecendo isso, né? E 23 anos, como vocês acharam?

G: ah tipo assim, é esse negócio que eu to tentando explicar, que eu não soube. Que vez de ser 1000 (...).

A1: É um padrão.

G: É um padrão, nunca muda, o que muda é o mil. De mil vai pra dois mil, que é o resultado.

Aluna escreve na lousa.

G: (...) Eu fiz isso aqui.

P: A primeira continha que você fez, por que você fez?

G: Porque ele tá pedindo 23 anos, eu coloquei aqui que se a cada ano vai aumentando 250 (...), aí deu isso aqui (5750) mais 250.

P: Por que mais 250?

G: Eh... não entendi a pergunta.

P: Tudo bem, você fez a multiplicação, 5750, aí toh acompanhando a sua continha, tá Gleice? Aí você somou 250, né? Aí eu to perguntando por que você somou 250?

G: Porque é o número que aumenta (...) Porque aumenta 250 eu não sei!

Aluna confusa.

G: Só sei que coloquei.

P: Porque é 23 anos, não é? Você falou certinho, vai aumentando 250 a cada ano, tá? Mais aí você pegou mais um 250, você pegou mais um ano.

G: (...)

P: O que vocês acham do mais 250 que ela colocou?

A1: (...)

P: Aí fazendo isso o que acontece?

A1: Ela vai aumentar mais um ano.

P: Aumenta o que?

T: Um ano.

P: Aumenta mais um ano. De 23 anos.

A1: Dá 24 anos.

P: Vai pra 24 anos.

G: Não! Eu fiz o outro também, quer ver?

Aluna mostra para a professora o que havia feito.

G: Eu não vou fazer tudo isso aqui. Olha aqui, a gente foi fazendo a conta e foi aumentando (...)

P: Talvez tenha somado um ano aí.

Professora explica para a classe o que a aluna havia feito.

P: Ela foi fazendo as contas, é aumentando mesmo, 250, 250, tal, fazendo mesmo, tá? Agora olhando aqui, eu entendo o que ela falou, oh: ela fez a continha ali do lado, só que ela foi fazendo antes a lista, 250 mais 250 mais 250 (...) até chegar no 23, tá? Só que nesse meio G, eu acho que você se perdeu, entendeu?

G: Tá.

Grupo G2 (item b)

G: Ah professora, mas tá bagunçado aqui!

P: Vocês fizeram bunitinho. Oh!

G: Me ajuda!

P: Eu vou interferir, não devo, mas vou interferir um pouquinho. Olha só, ela foi e explicou. O que foi feito aqui no começo?

G: Um vezes duzentos e cinquenta dá duzentos e cinquenta.

P: Aí você fez o que?

G: Mais duzentos e cinquenta.

P: Pegou esse resultado e somou...?

G: O mesmo resultado.

P: Duzentos e cinquenta. Esse um aqui, de onde veio esse um?

G: Que é do ano.

P: De um ano, tá bom? Do primeiro ano de trabalho, tá legal? Aí, no primeiro ano de trabalho, olhando na tabela, quanto que o funcionário vai receber?

A: Quatrocentos e cinquenta.

P: Quatrocentos e cinquenta. Então a G fez vários cálculos e aí mostrou que ela estava tentando encontrar um padrão, não é? A gente não tem que encontrar um padrão? Daí ela fez como o pessoal encontrou, os outros grupos que apresentaram. Então é isso o que ela tá querendo mostrar, mas por onde ela começou? Desde o primeiro ano, né G?

G: Sim.

P: Então ela fez: no primeiro ano partia dos quatrocentos e cinquenta, então o primeiro passo...

G: Foi fazer isso, só que deixa eu explicar, quando eu ia fazendo as contas sempre dava menos (...).

P: Vocês perceberam? Então olha o que ela fez. Ela pegou o um e multiplicou o duzentos e cinquenta, deu duzentos e cinquenta, tá? Aí ela somou duzentos e cinquenta, deu duzentos e cinquenta mais tinha que dar?

A: Quatrocentos e cinquenta.

P: Então tirou?

A: Cinquenta.

P: Cinquenta. No segundo ano, multiplicou (...). Vamos lá, faz a continha. Duas vezes duzentos e cinquenta. Você fez!

G: Eu não fiz.

P: Deixe eu ver. Cadê aquela outra folhinha sua? Aqui, oh...

G: Dá quinhentos? Não!

P: É. Aí depois você fez, próximo passo (...).

Aluna somou $500 + 250 = 750$.

G: 750.

P: Mas tinha que dar quanto? No segundo ano?

A: 700

P: 700. Ela viu que passava sempre cinquenta.

Aluna faz: $750 - 50 = 700$.

P: Faz mais um G pro pessoal perceber. O terceiro ano...

Aluna faz: $3 \cdot 250 = 750$; $750 + 250 = 1000$; $1000 - 50 = 950$.

P: No terceiro ano tinha que dar quanto?

A: 950.

P: 950. Ótimo! Perceberam o padrão que ela encontrou? Qual é a sequência G? Primeiro...

G: (...) multiplicar por 250.

P: Depois?

G: Somar 250 e depois fazer menos 50.

P: Esse foi o padrão que encontrou, tá? E ela foi encontrando, no primeiro ano tinha que dar 450, multiplicou pelo ano, somou 250, passava 50, então ela tirava no final. Foi um padrão. Conseguiu chegar numa expressão, G? Numa equação?

G: Não.

C: Professora...

P: Como C?

C: $n \cdot 250$

P: Vamos ver o que a C tá falando. $n \dots$

C: É. Vezes 250 mais 250 menos 50.

Professora coloca a expressão: $n \cdot 250 + 250 - 50$.

P: G, aí oh a sua expressão. Não foi isso que você fez?

G: Foi!

P: Esse n significa o que?

C: O número de anos.

P: É o número de anos. É o primeiro ano, segundo ano, terceiro ano, não foi isso o que você fez? Você não multiplicou por 250, depois...

G: Somei 250.

P: E depois?

G: Tirei 50.

P: Tirou. Alguém consegue perceber alguma coisa aqui? $250 - 50$?

C: É 200 reais.

P: Não é o que o pessoal tinha feito? $n \cdot 250 + 200$. Quem tinha mostrado? Eles já foram direto aqui G!

Grupo 1 (item c)

P: (...) Agora, pra vinte e três anos, M, vocês conseguiram encontrar?

M: Sim.

P: (...) Vinte e três anos como vocês encontraram?

M: A gente achou uma expressão.

P: Qual foi a expressão que vocês escreveram? Coloca aí pra gente ver!

Aluno escreve: $v = n \cdot 250 + 200$.

M: v é o valor de dinheiro e n é o valor de anos trabalhados, aí é v igual a n vezes 250 mais 200.

P: Ótimo!

M: Aí a gente viu que dava certo e fez com vinte e três e descobriu que ia dar 5950.

P: Ótimo! Que é a expressão que o pessoal tinha falado também, né?

M: Ahã.

P: Muito bom.

(...)

M: Pra descobrir a c , que era pra descobrir quantos anos ele tinha trabalhado pra ganhar R\$7700 reais, a gente tentou achar outra expressão. Aí a gente achou! Aí a gente colocou: n , que é o número de anos, porque a gente queria descobrir o valor de n e não de v . Aí a gente colocou n é igual a v , que é o valor de dinheiro.

P: Que ele vai receber.

M: Menos 200 dividido por 250, que eu tava tentando explicar pra ela (pesquisadora), a gente inverteu a... a... primeira expressão ($v = n \cdot 250 + 200$).

Aluno escreve: $n = v - 200 / 250$ (segunda expressão).

M: Porque que nem aqui, oh, se eu quiser descobrir o valor recebido por ele, eu tinha que pegar o valor de n . O n vezes 250 aqui (primeira expressão) eu dividi (segunda expressão) e se aqui eu aumentei duzentos (primeira expressão), eu tinha que diminuir 200 pra chegar no número (segunda expressão).

P: E aí como você chegou aos trinta anos? O pessoal quer saber!

M: Aí eu usei esse aqui (segunda expressão). Eu peguei 7700 menos 200, deu 7500. Aí eu peguei o 7500 e dividi por 250.

P: Ótimo! Muito bom!

No momento de formalizar o conteúdo, em que a professora registra na lousa uma apresentação formal dos novos conceitos e conteúdos construídos, primeiramente, a professora chamou a atenção dos alunos para a questão do uso dos parênteses nas expressões algébricas, chamando a atenção para a segunda expressão do aluno acima que escrevera $n = v - 200 / 250$ e que na verdade deveria ser escrito $n = (v - 200) / 250$. Nesse momento, a professora fez um resumo de tudo o que os alunos fizeram na atividade mostrando que muitos grupos utilizaram o método recursivo e dois grupos utilizaram o método não recursivo. Ela retomou o conceito de variável e formalizou as equações:

P: (...) Pra eu saber quanto eu vou receber, qual é a primeira informação que você tem que ter?

A: Os anos trabalhados.

P: Os anos trabalhados! Ótimo, N. Se eu não souber o número de anos trabalhados não tem como eu calcular o quanto eu vou receber? Não tem, né? (...). Então esses valores aqui são importantes pra eu saber esses daqui, tá? Então esse valor pra eu achar, como a N falou, depende do número de anos trabalhados, tá? Então, essas letras aqui têm nomes especiais. O n pessoal, ele pode ter diferentes valores, não pode? Eu posso trabalhar 10 anos, 1 ano, 15 anos, 30 anos, 2 anos, não é? Então esse número tá variando, não está?

A: Sim.

P: Por isso que ele é chamado de variável. E o valor recebido também não está variando? Tá variando também, não tá?

A: Tá!

P: Então, o valor recebido também tá variando. Só que um é pouquinho diferente do outro, essas duas variáveis. O valor que eu vou receber depende de quantos anos eu vou trabalhar, não depende?

A: Sim.

P: Então essa variável aqui é chamada de variável dependente e essa daqui independente, tudo bem? Então pra eu receber eu preciso saber do número trabalhado, então esse depende desse, tá legal? Agora outra coisa, quando eu colocar usando essa expressão aqui ou essa expressão aqui, uma das duas, pra resolver o item c, qual é o valor recebido?

A: 7700.

P: 7700. Então no lugar do valor recebido eu tenho 7700, não é? Usando aquela expressão $250 \cdot n + 200$, a hora que eu faço isso eu tenho uma única expressão, uma única letra aqui, não tenho? Esse é o único valor que eu tenho que descobrir aqui nessa igualdade, não é? Quando acontece isso, esse valor desconhecido é chamado incógnita.

A: Incó... ?

P: Incógnita. É o que eu quero descobrir, não é? Foi dado a incógnita. (...) vocês tinham de quanto em quanto ia aumentando e os 200 vocês tinham achado um padrão. O único valor que eu não sei é o número de anos trabalhados, tá? Esse valor é o valor desconhecido, que nessa igualdade nos chamamos de incógnita, tá? Outra coisa que vocês já têm aí também, essa igualdade é chamada de equação. Tá bom? Isso é uma equação, eu tenho uma igualdade e qual é o valor desconhecido? A incógnita?

A: O x.

(...)

P: Incógnita, o valor desconhecido. E vocês fizeram, muitos fizeram, usando o método não recursivo, que é usando essa expressão, usando essa expressão aqui que os meninos fizeram, ou usando o recursivo, que é pegando a tabela e indo embora. Fazendo aquela tabelona, mas indo embora. Só que vocês acham que, qual, dependendo do número que eu tenho que achar, qual é o mais vantajoso? Não recursivo ou recursivo?

A: Não recursivo.

(...)

P: Por que P?

A: Porque se tiver um número grande vai demorar muito tempo pra achar o resultado.

P: Ótimo! É isso mesmo!

ATIVIDADE 4

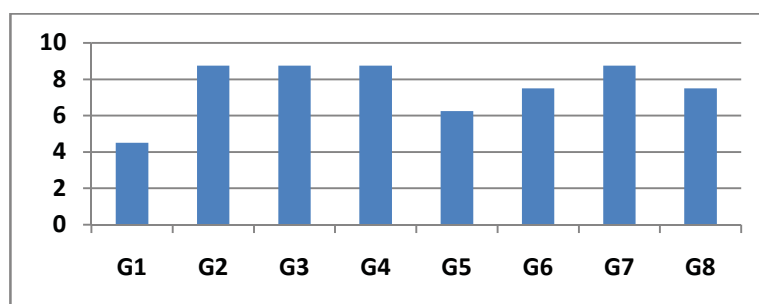
Um professor propôs o seguinte desafio à sua turma:

Pensei num número. Somei 3 e em seguida calculei o dobro do valor encontrado. O resultado foi 46. Em que número pensei?

Você é capaz de encontrar o número que o professor pensou?

A quarta atividade teve como objetivo desenvolver no aluno a capacidade de resolver uma equação por meio do pensamento lógico. Esperava-se que os alunos resolvessem o problema aplicando as operações inversas.

Para cada aluno, que estava nos grupos, foi entregue, por escrito, a quarta atividade. Professora e alunos realizaram a leitura do problema, que não apresentou dúvidas. Os alunos não tiveram dificuldade na interpretação do problema e logo começaram a resolução por meio de um pensamento aritmético.



Todos os grupos chegaram a solução do problema. A maioria dos grupos, em primeiro lugar, achou o número pensado e, em seguida, encontrou a equação para o problema. Todos os grupos apresentaram, também, uma justificativa. Vejamos algumas respostas:

Grupo 1

① O número pensado é 20; quando somo o dobro dele
obtenho 44.

$$20 + 2 = 22$$

$$22 \times 2 = 44$$

$$44 + 2 = 46$$

$W = 20$

O grupo G1 achou o valor pensado, justificou por escrito e com valores numéricos e depois montou a equação. Nota-se que o aluno não colocou os parênteses.

Grupo 2

Handwritten work of Grupo 2. The text reads: "R: pensei num número 20, pensei no 20, mas depois o dobro é 40. Mas esse resultado 40, eu subi, que deu 43. Mas a resposta que eu sei é 20. Então, 20 + 3 = 23. 23 x 2 = 46." Below this, the equation $X = 20$ is written, followed by $(X + 3) \cdot 2 = 46$.

Para encontrar o número pensado, o grupo G2 realizou, primeiramente, os cálculos inversos e depois o justificou por escrito. Ao final, colocaram a equação.

Grupo 3

Handwritten work of Grupo 3. The text reads: "R: Pensei no número 20. Pensei no 20, mas depois o dobro é 40. Mas esse resultado 40, eu subi, que deu 43. Mas a resposta que eu sei é 20. Então, 20 + 3 = 23. 23 x 2 = 46." Below this, the equation $X = 20$ is written, followed by $(X + 3) \cdot 2 = 46$.

Inicialmente, o grupo realizou os cálculos inversos numericamente. Este grupo conseguiu duas expressões. Finalmente, escreveram como que realizaram o pensamento inverso.

Grupo 4

Handwritten mathematical work for Grupo 4. It shows two division problems side-by-side, separated by a vertical line. The left problem is $46 \div 2 = 23$ with a remainder of 0. The right problem is $23 \div 3 = 7$ with a remainder of 2. Below the problems, there is a statement: "O número que ele pensou foi 23." and an equation: $46 = 2 \cdot 3 \cdot n$ where n is the number of periods.

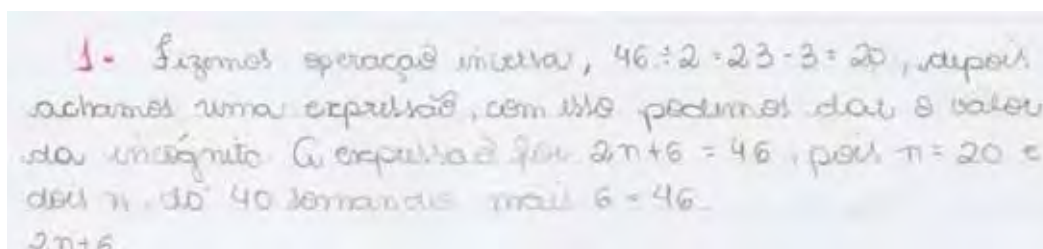
O grupo realizou os cálculos e depois colocou a equação.

Grupo 5

Handwritten mathematical work for Grupo 5. It shows a system of equations: $x + 3 = y$ and $x \cdot 2 = 46$. Below this, it shows the calculation: $46 \div 2 = 23$ and $23 - 3 = 20$. The text explains the process: "1º dividimos 46 por 2, e o resultado é 23, depois subtraímos o 3 do nº 23 que fica o número 20, ou seja, o n que o professor pensou, e se somarmos 3 ao nº 20, dá 23 e se dobrarmos esse valor dá 46."

O grupo primeiro realizou os cálculos e, em seguida, montou a equação. Por fim, o grupo justificou o que fizeram.

Grupo 6



1- Fizemos operações inversas, $46 \div 2 = 23 - 3 = 20$, depois achamos uma expressão, com isso pedimos qual o valor da incógnita. A expressão foi $2\pi + 6 = 46$, pois $\pi = 20$ e daí π , do 40 demandamos mais 6 = 46.
 $2\pi + 6$

O grupo G6, como o próprio grupo disse, realizou as operações inversas e depois acharam a equação.

Observamos que nenhum grupo, de imediato, conseguiu ‘montar’ a equação.

Como os grupos não apresentaram dificuldade na resolução do problema e o resolveram rapidamente, então, foi necessário fornecer aos grupos a tarefa de casa para eles resolverem em sala de aula. Assim, eles resolveram o seguinte problema:

Luciana tem 29 anos e Maurício 6 anos. Daqui quantos anos a idade de Luciana será o dobro da idade de Maurício?

Nesse problema, a maioria dos grupos acertou o tempo que levará para que a idade de Luciana seja o dobro da idade de Maurício. Alguns alunos recorreram à tabela como, por exemplo, o grupo G3:

②

h	M	R: Pensamos em fazer um "taboão" com as idades de todos os alunos.
30	7	
31	8	
32	9	
33	10	
34	11	
35	12	
36	13	
37	14	
38	15	
39	16	
40	17	
41	18	
42	19	
43	20	
44	21	
45	22	
46	23	

$20 - 7 = 13$
 $21 - 8 = 13$
 $22 - 9 = 13$
 $23 - 10 = 13$

$L - 23 = M$

Outros grupos apenas explicaram o pensamento que tiveram como, por exemplo, o grupo G8:

Expressão: $n = (L - M) \cdot 2$ $n = 23 - 6 \cdot 2$

Pensamos na diferença de anos entre eles, depois vimos que Luciana tem que ter a dobro daquela diferença, para ter a idade de Maurício.

n : Depois quantos anos L : idade de Luciana M : idade de Maurício.

A idade 17 anos

Mas, nenhum grupo conseguiu montar a equação que represente o problema.

No momento da plenária, um representante de cada grupo foi à lousa colocar para os demais grupos o que tinham realizado como, podemos observar, no grupo G3:

C: A gente dividiu quarenta e seis por dois, que dava vinte e três... três aqui, que deu vinte.

P: Por que dividiu por dois e depois tirou três?

C: Por que... Quarenta foi o número que ele... o número final. Dois é o dobro do número que ele pensou. Aí dividimos quarenta e seis por dois e tiramos três, que foi o que ele somou, dá vinte.

P: Então o número pensado foi?

C: Vinte. Ponho a expressão?

P: Pode colocar!

C: p, que o valor inicial, é igual a quarenta e seis...

C coloca duas expressões: $p = (46 / 2) - 3$; $(p + 3)2 = 46$.

P: p mais três, vezes dois?

C: É!

P: É igual?

C: Quarenta e seis.

P: Problema dois. Explica a ideia que vocês tiveram.

C: A gente primeiro fez uma tabela e depois...

P: Primeiro lê o probleminha.

C: (Lê o problema).

C: Fez uma tabela com a idade de Luciana e a de Maurício. Aqui a gente não colocou vinte e nove e seis, a gente já foi para o próximo ano.

P: Tá!

C: A gente foi fazendo...

P: Então, na segunda linha seria quanto?

C escreve 31 e 8.

P: Trinta e um e... ? É só fazer seguido, né?

C: É. E a gente viu que do ano que ela tem para o ano que ele tem são vinte e três anos de diferença.

P: Vocês foram fazendo até chegar aí?

C mostra a folha com as contas.

C: Ponho a expressão?

P: Põe.

C escreve $L - 23 = M$.

C: L, é a idade da Luciana, menos vinte e três que é igual à M, que é a idade de Maurício.

P: Então na expressão L é a idade da Luciana, menos vinte e três é igual à idade de Maurício. Por que ficou o menos vinte e três?

C: Porque a gente fez a diferença.

P: A diferença entre?

C: Ela e ele.

P: As idades dela e dele. E a resposta do problema? Daqui quantos anos eles vão ter o dobro da idade do outro?

C: 17 anos.

P: Como vocês acharam o dezessete?

C: A gente foi somando (apontando para os dados da tabela). Fomos vendo quantos anos tinha até chegar no quarenta e seis.

P: Na tabela?

C: É!

Ao final, a professora formaliza o conteúdo, em que registra na lousa uma apresentação formal dos novos conceitos e conteúdos construídos pelos alunos. A professora diz aos alunos que eles trabalharam com equações, que eles fizeram os cálculos mentais e depois encontraram a equação para o problema. Mas, e se a professora tivesse dado as equações para eles resolverem, como eles fariam? Assim, ela formalizou com os alunos as propriedades da igualdade, que facilitam os alunos na resolução de equações.

P: Agora se eu tivesse dado essa equação para vocês resolverem? Eu quero saber o valor de x aqui, então existem algumas propriedades que a gente pode resolver. Eu sempre falei para vocês: imagine que eu tenho, esse sinal de igual ele indica que esse primeiro membro tem o mesmo valor do segundo membro, como se fosse uma equação, uma balança, que eu tenho o mesmo peso da esquerda e o mesmo peso da direita, tá? Se eu tirar um peso aqui da esquerda não vai ficar em equilíbrio, eu tenho que tirar o mesmo peso aqui da direita pra continuar em equilíbrio, por que? Esse sinal de igual significa que elas permanecem sempre em equilíbrio, sempre iguais os dois valores.

4.2. Projeto de Ensino – Parte II

Na segunda parte do Projeto de Ensino realizou-se um trabalho com as equações polinomiais do 2º grau, em que se fez uso da Proposta Curricular do Estado de São Paulo. Para isso, foram realizados dezessete encontros totalizando 29 horas/aula distribuídas da seguinte maneira:

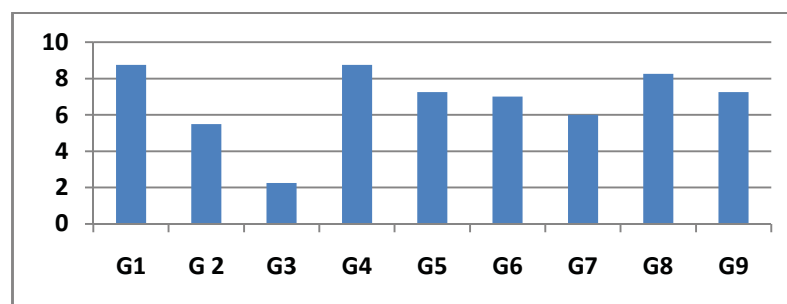
Encontro	Data	Horas/Aula	Atividade Trabalhada
1º	04/08	2	Atividade 1
2º	05/08	1	Atividade 2
3º	06/08	2	Atividade 2
4º	11/08	2	Atividade 3
5º	12/08	1	Atividade 3
6º	13/08	2	Atividade 3
7º	18/08	2	Atividade 3
8º	19/08	1	Atividade 4
9º	20/08	2	Atividade 4
10º	25/08	2	Atividade 5
11º	26/08	1	Atividade 6
12º	27/08	2	Atividade 6
13º	01/09	2	Atividade 7
14º	02/09	1	Atividade 7
15º	03/09	2	Atividade 7
16º	08/09	2	Atividade 8
17º	24/09	2	Avaliação

ATIVIDADE 1

Os participantes de um festival de música decidiram que, ao final do evento, fariam uma festa de encerramento. Nessa festa, cada um dos participantes daria uma flor de presente a cada colega que participou do evento.

- a) Quantas flores serão distribuídas se o total de participantes for igual a 5?
- b) E se for igual a 6?
- c) E igual a 7?
- d) Quantas flores serão distribuídas se o número total de participantes for igual a n ?
- e) Se o total de flores distribuídas na festa for igual a 930, então qual será o número de participantes?

Para a primeira atividade, a cada aluno foi entregue uma cópia da Atividade 1. Com todos os participantes foram formados nove grupos. Professora e alunos realizaram, inicialmente, a leitura do problema a fim de que os alunos pudessem tirar suas dúvidas para terem uma melhor compreensão do enunciado.



Durante a resolução dessa atividade pelos alunos, a professora observava e analisava o comportamento deles e estimulava o trabalho colaborativo. Os alunos, em cada grupo, discutiram entre si o problema e começaram a fazer os registros das resoluções, por meio de tabelas e diagramas.

Para os itens *a*, *b* e *c*, saber quantas flores seriam distribuídas se o total de participantes fosse igual a cinco, seis e sete respectivamente, a maioria dos grupos recorreu à

construção de uma tabela ou fez uso dos membros do próprio grupo para imaginar a situação fazendo de conta que seus lápis, canetas e borrachas fossem flores.

Houve certa dificuldade na compreensão do item *d*, pois os alunos não compreendiam o que significava a letra *n*, por isso foi necessário lembrá-los o que era uma variável. Para resolver esse item *d*, o grupo G4 observou que se podia escrever a expressão $n(n-1)$ e, também, a expressão $(n \cdot n) - n$, que são expressões equivalentes. Já o grupo G1 escreveu a seguinte expressão $f = (n - 1)n$, onde *f* é o número de flores e *n* o número de participantes.

Muitos grupos acharam a expressão no item *d* mas, no item *e*, como não se pedia para escrever uma equação e sim só achar o número de participantes, os alunos não escreveram a equação. Para achar o número *n* de participantes, no item *e*, os alunos recorreram ao ‘chute’ observando os itens anteriores, que é o número vezes o seu antecessor. O grupo G8 observou que se deveria procurar o número que elevado ao quadrado resultaria 900 e, assim, por aproximações, chegaram ao resultado. O grupo G7 foi ‘chutando’ valores até observar que o número procurado estava entre 30 e 32.

Em conversa com a professora da sala, escolhemos três grupos (pois houve várias soluções parecidas) para comentarem a maneira como resolveram a atividade.

O primeiro grupo, que se dirigiu à lousa, mostrou como resolveu os itens a, b e c, em que se pedia o total de flores distribuídas se o total de participantes fosse cinco, seis e sete, respectivamente. Esse grupo mostrou, detalhadamente, como foi resolvido o item a e depois só comentou os itens b e c, pois as resoluções eram semelhantes:

W: Primeiro nós fizemos o 1, 2, 3, 4, 5. Fizemos uma tabela (mostrando os traços).

P: Pode passar, fazer a tabelinha, como vocês fizeram.

(...)

O aluno W faz a seguinte tabela:

1	2	3	4	5

W: Esse aqui é o número de participantes, entendeu? (Referindo-se à primeira linha).

(...)

W: Daí eu peguei assim, daí cada participante vai dar uma flor para cada um, né? Então eu fiz (apontando a segunda linha da tabela), aqui é o tanto de flor.

P: Passa o traço que você passou na folha. Isso. Pode passar certinho pro pessoal ver. O pessoal não viu o que você fez na folha. Isso. Aí? (A professora pediu ao aluno para completar a tabela, para que os outros alunos pudessem entender).

W: Uma flor, duas flor, três flor, quatro flor pra cada um.

1	2	3	4	5
	1	2	3	4

W: Ele (o primeiro participante) deu quatro flor. Daí, aqui pro dois (para o segundo participante), ele dá uma aqui (para o primeiro), pra ele não tem como, então duas aqui (para o terceiro), três aqui (para o quarto), deu quatro flor também. Aí eu fiz assim.

1	2	3	4	5
	1	2	3	4
1		2	3	4

P: Pode continuar. Vai fazendo até o fim!

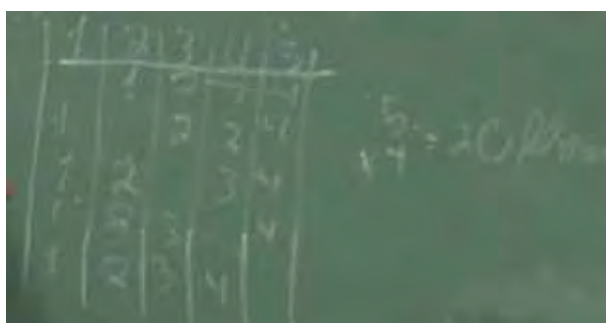
O aluno continuou preenchendo a tabela.

1	2	3	4	5
	1	2	3	4
1		2	3	4
1	2		3	4
1	2	3		4
1	2	3	4	

P: Tá. Acaba de passar o traço, pro pessoal ver como você fez. Pessoal, vocês perceberam como que eles fizeram? A tabela? Distribuíram as flores?

W: Eu peguei e somei os cinco quatro que deu 21 (aluno olha para a folha para conferir a resposta e corrigindo disse), 20 flores.

Esse aluno escreveu na lousa



$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 4 \\ \hline \end{array} = 20 \text{ flores}$$

(...)

P: Aí no item b... aí, qual foi a resposta? No item b foram seis participantes. Quanto vocês acharam?... No item b? Pode por aí na lousa!

Aluno escreve na lousa 30 flores.

P: Como você chegou no 30?

W: Eu fiz a mesma coisa.

P: E quantas flores cada um recebeu?

W: Cinco flores.

P: Cinco flores... e no item c? Quantos participantes eram?

W: Eram sete.

P: Sete. Quanto cada um recebeu?

W: Seis.

O grupo seguinte resolveu o item d, em que deveriam achar uma expressão (equação) para achar a quantidade de flores que seriam distribuídas se o número total de participantes fosse n . Inicialmente, esse grupo disse que resolveu os itens a , b e c de maneira similar à do grupo anterior:

M_a: Eu tinha feito mais ou menos assim (referindo-se ao que o W tinha feito). Aí o M_t achou uma fórmula para achar mais fácil.

P: Pode mostrar então!

A aluna coloca $(n-1) \cdot n$.

M_a: Ene menos um vezes ene. Ene é o número de participantes, aí tira um.

M_t: Tira uma e depois multiplica por ele mesmo.

M_a: Do número restante tira um.

A: Coloca um exemplo.

M_t: Tipo assim, oh! Se o número de participantes é sete, tira um e depois você multiplica por sete, que o número de participantes. $7-1 \cdot 7$.

P: O que faltou aí?

Aluno coloca os parênteses: $(7-1)7$.

P: Isso. Resolve então. Sinal de igual na frente.

Aluno resolve $(7-1)7$

$$7-1=6$$

P: Coloca o sinal de igual.

Aluno refaz: $(7-1)7$.

$$7-1$$

Professora auxilia o aluno a colocar o sinal de igual.

Assim, o aluno resolve: $(7-1)7 = 6 \cdot 7 = 42$.

M_t: Que deu o número da c.

P: Oh, presta atenção (chamando a atenção da sala). (...) Eles deram o exemplo, né? Por que é sempre tira um e depois multiplica por n? Por que sempre tira um?

A₁: Posso falar?

P: Pode falar!

A₁: Porque não vai entregar a flor para si mesmo.

P: Porque não vai entregar a flor para si mesmo, foi o que a A₁ falou. Então se tem sete participantes, quantas flores você vai receber?

A₂: Seis.

P: Seis! Porque você não vai dar uma flor para si mesmo, né? Então o item d era pra... C_a, leia o item d.

P: Isso. Então?

M_a: A gente usou duas fórmulas.

P: Pode colocar.

M_a: Essa $((n-1) \cdot n)$.

P: Essa!

M_t: É a que a M_a achou!

M_a colocou na lousa: $(n-1)n$.

(...)

P: Pega um exemplo.

M_a: Do item e: $(31 \cdot 31) - 31 = 9$.

M_a se confunde com as contas.

M_t: Pega uma conta mais fácil.

P: Faz um exemplo. Pega o item a ou o c. Se for cinco participantes como ficaria?

M_a faz: $(5 \cdot 5) - 5 = 5 \cdot 5 = 25$

P: Não. Faça na sequência. Tem o $5 \cdot 5$, então coloca o 25.

M_a faz, então, com o auxílio do grupo: $(5 \cdot 5) - 5 = 25 - 5 = 20$.

A professora chamou a atenção da sala, afirmando que as duas expressões que o grupo encontrou, $n \cdot (n - 1)$ e $(n \cdot n - n)$, vão chegar ao número total de flores e que elas são expressões diferentes que levam ao mesmo resultado são ditas equivalentes.

O último grupo resolveu o item e:

S coloca as contas na lousa.

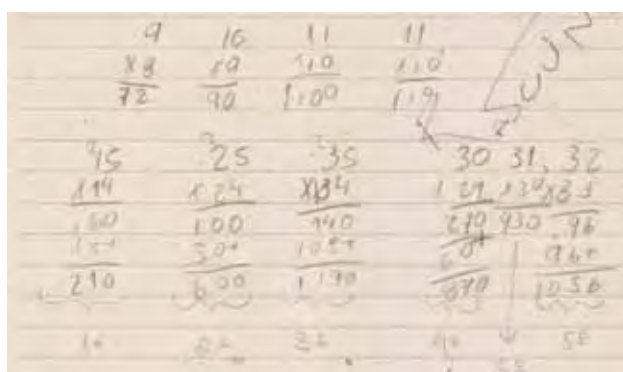
S: (...) Com o 35 eu vi que passava, então, eu voltei pro 32. Daí eu vi que tava entre esses (30 e 32).

P: Então explica pro pessoal. Olha como o S resolveu o item e.

S: Fui fazendo as contas. Daí eu vi que, quando cheguei aqui eu vi que taria entre o 30 e o 31.

P: Aí ele foi fazendo os cálculos, desde o primeiro lá, apontando o item c, o item d, então ele foi fazendo e depois ele aumentou, o 930 é um valor bem alto, então ele foi $15 \cdot 14 = 210$, $25 \cdot 24 = 600$, $35 \cdot 34$ deu 1190, passou! Então ele diminuiu, $32 \cdot 33 = 1056$ ainda tinha passado. Aí ele abaixou mais ainda $30 \cdot 29$ deu 870, aí era menos do que 930. Então tava entre 30 e o 32 e o 29 e o 30. Então ele fez $31 \cdot 30$ e achou o 930. Então, quantos participantes tinham?

S: 31.



A professora reforça que, com esse problema, os alunos puderam observar que se pode encontrar uma expressão que dá o número total de flores distribuídas, generalizando o cálculo para qualquer número de participantes.

A formalização desse trabalho feito nessa atividade ocorreu após o fechamento da segunda atividade, pois a primeira e a segunda são atividades relacionadas.

Os alunos trabalharam bastante com a linguagem retórica, expressando todo o seu pensamento por meio de palavras. Olhando para o pensamento algébrico, os alunos, por meio de suas estratégias, conseguiram perceber qual era o padrão que o problema apresentava e em seguida escreveram uma equação para o padrão encontrado, mas não conseguiram resolvê-la. Para resolver a equação encontrada no problema, os alunos utilizaram o método do uso de fatos numéricos e das técnicas de contagem, métodos esses que são usados por alunos iniciantes em Álgebra. Nesta atividade, os alunos não “fizeram” Álgebra, pois, embora os alunos encontrassem a equação referente ao problema, eles não a utilizaram para encontrar a solução, eles fizeram um trabalho puramente aritmético.

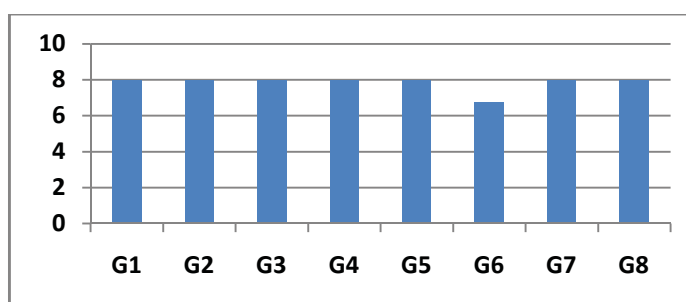
ATIVIDADE 2

Para responder a questão anterior, um aluno de 8ª série, aplicando seus conhecimentos algébricos, fez a seguinte reflexão:

Escreveu a equação algébrica relativa ao problema	$x(x - 1) = 930$
Aplicou a propriedade distributiva	$x^2 - x = 930$
Deixou todos os termos no primeiro membro da equação, igualando-a zero, ou seja, adicionou aos dois membros da equação a quantidade (-930).	$x^2 - x - 930 = 0$

Para resolver essa equação, o aluno substituiu a incógnita x pelos seguintes valores: 29, 30, 31 e 32 e, assim, descobriu a alternativa correta. Use o mesmo procedimento e, em seguida, compare o resultado com a sua resposta, obtida na Atividade 1, no item e.

Na segunda atividade, os alunos foram divididos em oito grupos. Para cada aluno foi entregue uma cópia da atividade e, em conjunto com a professora, os alunos a leram para uma melhor compreensão.



Enquanto os alunos resolviam essa atividade, notaram-se algumas dificuldades. Como na primeira atividade utilizamos a letra n como incógnita e na segunda utilizamos a letra x , alguns alunos tiveram dúvidas em relação à substituição do n pelo x , queriam saber se era a mesma coisa. Alguns alunos mostraram, também, dificuldade em substituir os valores dados

na equação. A ideia da atividade era que os alunos substituíssem na equação $x^2 - x - 930 = 0$ os valores 29, 30, 31 e 32 para depois encontrar as raízes dessa equação e escolher a que servisse para o problema. Alguns grupos não perceberam que as três equações, $x(x-1) = 0$, $x^2 - x = 930$ e $x^2 - x - 930 = 0$, eram equivalentes, havendo alunos que, por não compreenderem o significado de equivalentes, fizeram as substituições dos valores 29, 30, 31 e 32 nas três formas diferentes da equação. É importante que o aluno saiba o que significa serem as três formas equivalentes. Equivalentes significa que as formas diferentes que levam a um mesmo resultado. Assim, $x(x-1) = 930$, fatorando tem-se $x(x-1) = 31 \cdot 30 = 930$. Portanto, $x = 31$. Por sua vez, $x^2 - x = 930$, se $x = 31$. Não fizemos isso devido à limitação do tempo (poderíamos ter feito isso!).

No momento da plenária, um representante do grupo G3 relatou como fez a atividade. Primeiramente, ele leu a Atividade 2 e colocou as equações, apresentadas na tabela, na lousa. Ele, com o auxílio da professora, foi realizando os passos que estão presentes na atividade. Em seguida, ele mostrou como resolveu a atividade:

P: Pode fazer, como vocês pensaram?

P_a substitui em uma das equações.

P: Ah, mas você não colocou na última equação?

P_a: Eu fiz de todas!

P: Ah, você fez de todas!

P_a: Sim. Que que faz só uma?

P: É, porque vai resolver a última equação! Faz a última! Pode deixar. Essas equações, pessoal, elas são equivalentes. Resolver uma ou resolver a outra, não precisa apagar nada! Mas, vamos verificar aquela última que esse aluno considerou pra resolver! (aqui notamos a dificuldade em verificar que as equações são equivalentes).

Aluna coloca a equação: $29^2 - 29 - 812 = 0$.

P: Por que 812?

P_a: Peraí professora! Porque a gente fez assim oh: vinte nove vezes vinte e nove aí deu 841, menos 29 que deu 812!

A professora faz uma pausa, para mostrar para o grupo e para a sala, que quando eles vão realizar cálculos que eles tomem cuidado, que eles organizem, que em cada passo eles possam fazer separado para não ficar confuso e para eles não se perderem.

P: Tá! Então eu só vou parar um pouquinho aqui pra gente organizar na conta que você está fazendo. Quando a gente começa a operação você escreveu $29 \cdot 29$, não é? Então se eu começo a olhar isso daqui, você colocou tudo no mesmo lugar. Quem olha vê, $29 \cdot 29$ olhando aqui: 812. Então é só separar, tá P_a ? Outra coisa, a equação é essa: $x^2 - x - 930 = 0$. Aí é $29^2 - 29 - 930$, depois que você vai colocar o resultado, tá? Você não pode afirmar que vai dar zero ainda. É isso o que eu quero que vocês façam. É aí que vocês vão ver se vai dar certo, tá bom? Aí, o vinte e nove ao quadrado você fez, deu quanto?

P_a : 841.

P: Aí você coloca 841.

P: Menos vinte e nove e o restante da equação. Menos 930. Aí põe o sinal de igual. Agora sim, você tem essa conta que você tinha feito lá. 841 menos 29, que deu quanto? 812 menos 930. Tudo bem? Põe o sinal de igual e aí que você vai ver se vai dar zero.

P: (...) Então deu o zero, que a questão queria?

P_a : Não!

P: Não! Então o vinte e nove não é solução, não é? E os outros, monta agora como fica. Pode falar alto pro pessoal ouvir.

P: Trinta ao quadrado deu 870?

F: É!

P: Não! É que você já tirou o trinta!

Alunas fazem as contas.

P: Isso! Percebeu P_a ? F? Oh, pro pessoal ver também o que vocês estão fazendo aqui. Eu pedi pra elas reescreverem pra não confundir, porque elas estavam fazendo e colocando o resultado. Não que esteja errado, só que é para você organizar o problema, né? Substitua, faça os cálculos pra poder verificar. Com o trinta também não deu como solução da equação. Agora o trinta e um.

Alunas fazem as contas com o trinta e um.

P: Então mostra pro pessoal o que vocês fizeram. Vamos ouvir o que elas têm pra falar.

P_a: A gente colocou no primeiro membro (...) que deu zero.

P: Deu zero! Esse daí deu certo, né? O trinta e dois quanto que deu o resultado?

Coloca aí na lousa!

Alunas fazem os cálculos.

P_a: Deu 62 a mais.

P: 62 a mais. Então comparando com a Atividade 1 o que vocês observaram então? A solução que vocês acharam aqui foi qual? A resposta desta atividade qual foi? Qual que deu certo?

P_a: O 31.

P: O 31. No item e da atividade anterior.

P_a: 31.

P: Foi 31 também. Só que lá vocês acharam como? Vocês fizeram esse mesmo procedimento?

P_a: Não!

P: Como vocês fizeram?

P_a: (...).

Ao final da plenária, a professora realizou a formalização com os alunos. Relembrou o que é equação, o que são equações equivalentes, o conceito de variável e formalizou as equações polinomiais do 1º e 2º graus.

ATIVIDADE 3

Traduza as situações a seguir por meio de uma equação. Depois resolva esta equação e encontre a resposta do problema.

a) A área de um quadrado de lado x é igual a 49cm^2 . Qual é a medida do lado desse quadrado?

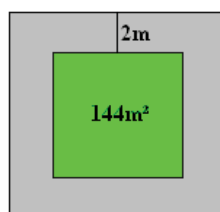
b) Um retângulo tem área igual a 242cm^2 e o seu lado maior é o dobro do lado menor. Qual é a medida do lado maior desse retângulo?

c) A área de um triângulo retângulo isósceles é 18cm^2 . Determine as medidas de seus catetos e de sua hipotenusa.

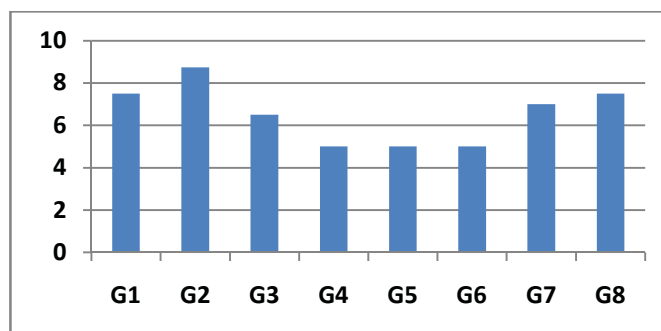
d) A área do retângulo representado pela figura a seguir é igual a 65cm^2 . Calcule seu perímetro.



e) Um quarteirão na forma de um quadrado foi reduzido de modo a ser contornado por uma calçada com 2 metros de largura, conforme a figura a seguir. Com isso, sua área passou a ser de 144m^2 . Qual era a medida da área original desse quarteirão?



Nesta terceira atividade, os alunos se dividiram em oito grupos. Pedia-se que os alunos traduzissem as situações por meio de equações. Há grupos que discutem cada dado do problema, mas há grupos em que um ou outro aluno realiza a atividade sozinho. Os alunos apresentaram várias dificuldades, que consideramos como problemas secundários ao problema dado como, por exemplo, o que é dobro de um número, o que é retângulo, o que é área, o que diz o Teorema de Pitágoras, entre outros.



Procuramos estimular os alunos para a procura de um método matemático que garantidamente os levasse à resolução de uma equação polinomial do 2º grau. Alguns alunos souberam escrever a equação, mas não tinham recursos, a não ser pelo método de tentativa e erro para resolvê-la.

Nesta atividade, os alunos utilizaram o desenho como uma forma de visualização. Vários grupos conseguiram responder a cada item do problema, alguns encontraram a equação depois de ter achado a solução. Eles não conseguem em primeiro momento achar a equação referente ao problema para depois achar o resultado, eles fazem o processo inverso. Houve algumas dificuldades como, por exemplo, confundir área com perímetro, entre outras.

Vejamos algumas respostas dos grupos, por itens:

Item a

Grupo G6

Atividade 3

Diagrama de um quadrado com lado $24,5$.

Área: $24,5 \times 24,5 = 49,5$

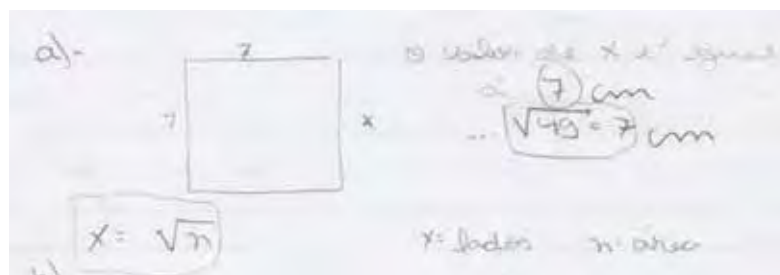
Perímetro: $4 \times 24,5 = 98,0$

Equação: $x^2 + y^2 = 49,5$

Solução: $x = 24,2$

Neste grupo, observamos problemas secundários: confundir potência 2 com multiplicação por 2; confundir área com perímetro; deixou de fazer uso correto das unidades de medida.

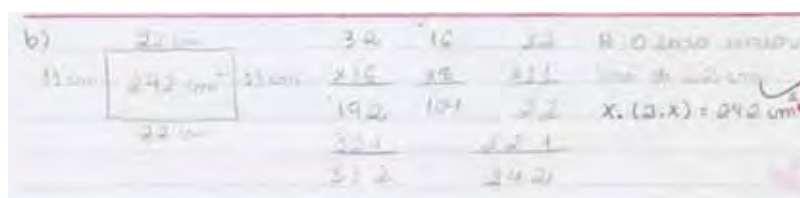
Grupo G8



Já este grupo, generalizando, chegou à equação que dá o valor do lado do quadrado, conhecida sua área. Este grupo, também, não se preocupou com as unidades de medida.

Item b

Grupo G3



Fez aritmética e não álgebra

Grupo G7

Ja: A gente viu que um lado era o dobro do outro, ou seja, esse era o dobro desse. Porque esse aqui é o lado menor. Então a gente fez por tentativa até achar. Então ficou 22 cm, que é o dobro de 11. Aí a gente fez 22×11 que deu 242, que é a área.

P: Pq vc multiplicou por 22×11 ?

*Ja: Pq lado * lado é a área.*

P: E demorou muito pra vocês acharem?

Ja: Não.

P: Como vcs começaram a continha?

J: A gente fez isso aqui, oh: 10×20 .

P: Pq pegou 10×20 ?

J: A gente foi chutando.

P: Tá! Mas pq o 10 e o 20?

Ja: O 10 é o dobro do 20.

P: O 20 que é o dobro do 10!

Ja: É!

P: Perceberam? Essa informação já tá no problema. Aí deu 200. Elas começaram pelo 10×20 . Depois?

Ja: Aí a gente viu que tava quase. Aí a gente fez 11×22 . 22 é o dobro de 11, que deu 242.

P: Tudo bem. Mas qual é a pergunta do problema?(...)

Ja: Qual é a medida do lado maior desse retângulo?

P: Qual é a resposta?

J: É esse aqui oh! O de cima.

P: Que é?

J: O que que eu ponho? (perguntando para a colega de grupo).

J: Pronto! Vinte e dois centímetros.

P: E agora me fala, vocês conseguiram ver a equação que representa esse problema?

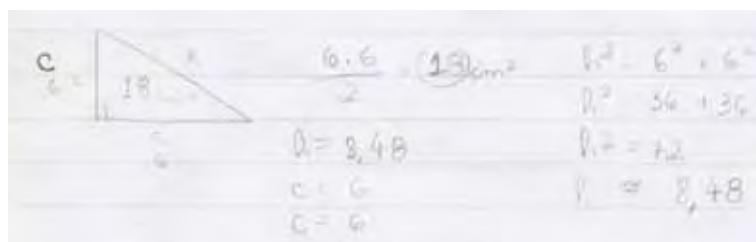
Ja: Não!

P: Não tiveram ideia?

Ja: Não!

Item c

Grupo G2 – já usou o pensamento algébrico.



Foi o único grupo que conseguiu resolver sem o auxílio da professora. A única dúvida era sobre o que era isósceles. Os demais grupos não se lembrando do Teorema de Pitágoras

não conseguiram resolver sozinhos esse problema, em que a ajuda da professora foi necessária.

P: Primeiro vamos falar pros grupos (...). Então mostrem pra gente o que é o triângulo isósceles.

Ma: O triângulo retângulo é o triângulo que tem um ângulo de noventa graus.

M: E isósceles quando ele tem dois lados iguais.

Ma: Pra gente achar a hipotenusa aqui (apontando pra hipotenusa do desenho), foi bem complicado.

M: Assim, oh, a gente tinha que descobrir os lados do triângulo.

P: Como são chamados esses lados do triângulo?

M: Catetos.

Ma: Os lados ao lado do ângulo (ângulo reto) são os catetos e o lado que está de frente pro ângulo é a hipotenusa.

M: Aí a gente tem que descobrir os lados e o valor era 18. Aí a gente pensou em um número vezes o número dividido por dois que dava 18.

P: Por que um número vezes um número dividido por 2?

M: Por que a área de um triângulo retângulo é o lado vezes o lado dividido por 2.

P: A área do triângulo?

M: É!

P: Coloca, então, na lousa pro pessoal ver o que vocês fizeram.

M: Essa é a fórmula.

P: Quem é o x ?

M: É o lado.

Ma: Os catetos.

P: Tá. Porque ali tá c e vocês colocaram x . Isso tem que dar quanto?

M e Ma: 18.

P: Percebem meninos, que isso é uma equação. E aí como vocês fizeram?

Ma: A gente foi chutando, chutando não, a gente foi bem rapidinho, procurar um número que vezes ele, dividido por 2 dá 18.

P: E acharam?

Ma: (...)

M: A gente pensou em um número que vezes esse número dava 36, porque é o dobro de 18 e aí 36 dividido por 2 vai dar 18. Aí a gente pensou no 6.

P: Certo. Então coloca as contas que vocês fizeram.

P: Tá. Terminou o problema?

M: Não!

P: O 6 é então o que no triângulo?

M: Os catetos!

P: Então vamos lá!

Ma: Aí agora temos que achar a hipotenusa. Aí a gente tem que a hipotenusa é o cateto ao quadrado mais o cateto ao quadrado.

P: Essa igualdade aí ($h^2 = c^2 + c^2$) em que conteúdo a gente viu?

M: Teorema de Pitágoras.

Item d

Grupo G1

Handwritten work for Group G1:

Equation: $x(x+8) = 65$

Calculation: $5 \cdot 13 = 65$

Table:

5	13	10
+5	+13	+26
10	26	56

Note: o perímetro do retângulo é de 36cm

Grupo G7

Handwritten work for Group G7:

Diagram: A rectangle with dimensions x and $x+8$, area 65 cm^2 , and perimeter 36 cm .

Calculations:

$5+8=13$

$3 \cdot (5+8) = 33$

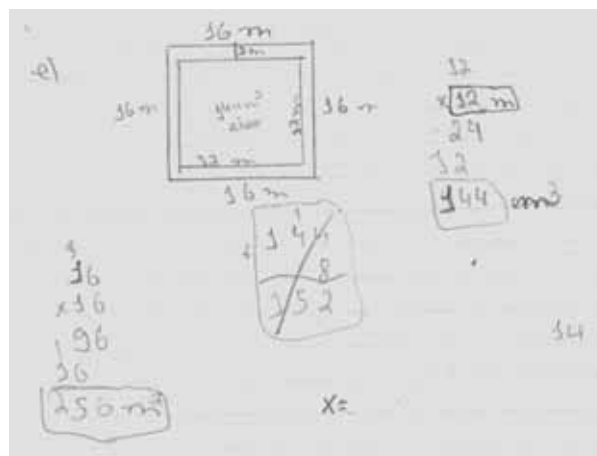
$x(x+8) = 65$

$x = 5 \text{ cm}$

Note: perímetro = ?

Item e

Grupo G8



ATIVIDADE 4

Resolva as equações a seguir e depois verifique se os valores encontrados satisfazem as mesmas:

a) $\sqrt{x} + 4 = 9$

b) $x^3 - 9x = 0$

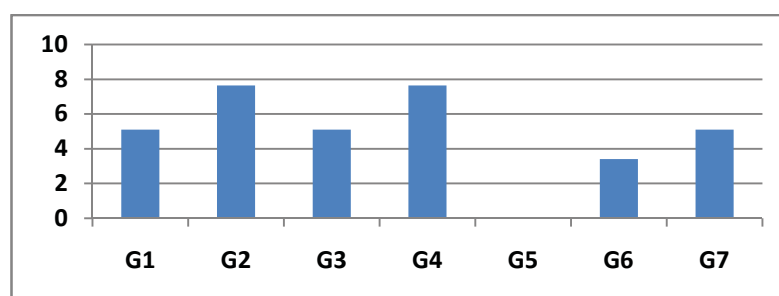
c) $3x^2 = 27$

d) $x^2 - 4 = 12$

e) $x^2 + 1 = 0$

f) $(x + 2)(x - 6) = 0$

Para o quarto encontro, os alunos foram divididos em oito grupos.



Cada aluno recebeu uma cópia da atividade e leram, juntamente com a professora, a atividade. Como, ainda, não mostramos um método para resolver esses tipos de equações apresentadas na atividade, todos os grupos utilizaram apenas o método de tentativa e erro. Os alunos foram chutando números para verificar qual era a raiz. Se a equação era de segundo ou terceiro grau, os alunos só encontravam uma resposta (solução), a positiva. Isso pode ter acontecido por trabalharem na atividade anterior com medidas, não aceitando os valores negativos.

Observemos a resolução do grupo G4:

a) $\sqrt{x^2 + 4} = 9$ $x = 29$ ✓

b) $x^3 - 9 = 0$
 $3^3 - 9 = 0$ $x = 3$ ou $x = -3$ ou $x = 0$ ✓

c) $3x^2 = 27$ $x = 3$ ou $x = -3$ ✓

d) $x^2 - 4 = 32$
 $x^2 - 4 = 32$ $x = 4$ ou $x = -4$ ✓

e) $x^2 + 4 = 0$
 $-x^2 + 4 = 0$ $x = -2$ ✗

f) $(x+2)(x-6) = 0$
 $(6+2)(6-6) = 0$ ou -2 ✓

Obs. Se x encontrado for um inteiro.

Observamos que nesta atividade quatro, a maioria dos grupos teve um bom desempenho embora suas resoluções expressassem mais idéias aritméticas do que algébricas, devido à falta de conhecimento de um método próprio para a resolução de equações polinomiais do 2º grau.

Com esses problemas procuramos estimular os alunos para a procura de um método matemático que garantidamente os levasse à resolução de uma equação polinomial do 2º grau.

Cada uma dessas equações vai exigir um tipo de raciocínio e técnica operatória aritmética. E a estratégia de tentativa e erro é para eles condição para resolução.

ATIVIDADE 5

Com os alunos trabalhando apenas aritmeticamente, com a Atividade 4 os deixamos prevenidos de que alguma matemática nova, capaz de resolver as equações polinomiais de 2º grau, usando o Caderno do Aluno (2010) apresentamos a Atividade 5 deixada no Projeto de Ensino – Parte II.

Feita a leitura do texto e a apresentação do método de *Al-Khowarizmi*, a professora com a participação de todos os alunos, foi resolvido o seguinte problema *A área de um quadrado acrescida de 8 vezes o seu lado é igual a 65. Qual é a medida do lado desse quadrado?*

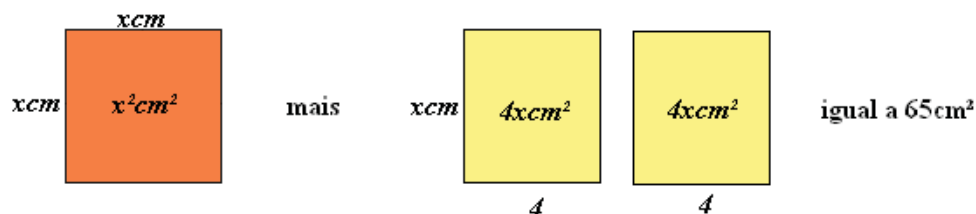
A leitura desse enunciado provocou a escrita e o desenho dos seus dados sem maiores dificuldades.

Segundo método de *Al-Khowarizmi*,

1) As expressões x^2 e $8x$ eram interpretadas como as áreas de um quadrado e de um retângulo. A solução do problema é, então, a medida do lado do quadrado

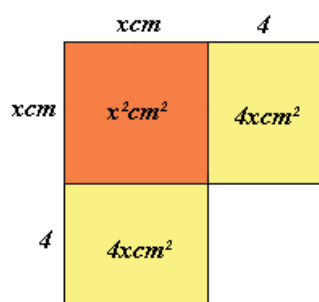
$$x^2 + 8x = 65$$

2) O retângulo era dividido em dois retângulos de mesma área. A equação era interpretada como:

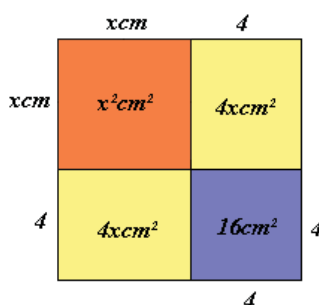


$$x^2 + 2 \cdot 4x = 65$$

3) Cada retângulo era arranjado de modo que ficassem justaposto a dois lados do quadrado. Com essa composição, a área da figura continua sendo 65cm^2



4) De modo a completar o quadrado acrescentava-se um quadrado no canto da figura anterior. A medida do lado desse quadrado é a mesma do lado conhecido do retângulo, ou seja, 4. Assim, a área do novo quadrado é $4\text{cm} \cdot 4\text{cm} = 16\text{cm}^2$. Com esse método, “completava-se um quadrado perfeito” de lado $(x + 4)\text{cm}$ e área igual a $65\text{cm}^2 + 16\text{cm}^2 = 81\text{cm}^2$.



$$x^2 + 2 \cdot 4x + 16 = 65 + 16$$

ou

$$(x + 4)^2 = 81$$

5) Sendo a nova área 81cm^2 , então a medida do lado do novo quadrado é $\sqrt{81\text{cm}^2} = 9\text{cm}$. Assim, o lado do quadrado formado $(x + 4)\text{cm} = 9\text{cm}$ leva a $x = 5\text{cm}$ que é a solução do problema dado.

A Tarefa Extraclasse, que foi resolvida individualmente pelos alunos, parece não ter havido grandes dificuldades, visto que, nesse problema, mudaram apenas os números.

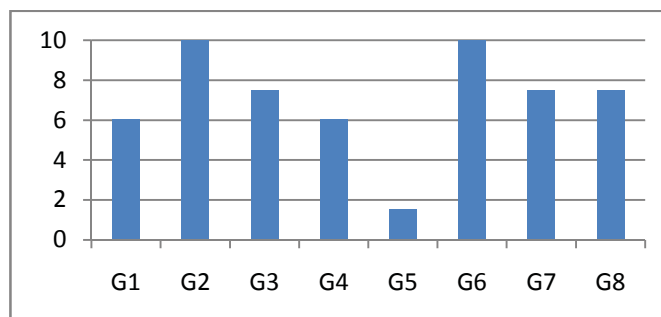
ATIVIDADE 6

Resolva as equações de 2º grau aplicando o método do “completamento do quadrado” desenvolvido por *Al-Khowarizmi*.

a) $x^2 + 20x = 300$

b) $x^2 + 5x = 6$

c) $x^2 + 2x + 1 = 0$



Esta atividade, resolvida nos grupos, também não apresentou problemas. Os alunos até que gostaram dessa experiência: repetir as ações realizadas por um matemático do século IX. Ao final da aula, a professora enfatizou que muitos alunos encontraram apenas uma raiz, a positiva. Mas, também há a raiz negativa e explicou aos alunos que Al-Khowarizmi não trabalhava com números negativos, que não existiam nessa época. Após os alunos colocarem como resolveram a atividade, a professora realizou a formalização do desenvolvimento da fórmula de Bhaskara.

ATIVIDADE 7

Resolva as equações a seguir usando a fórmula de *Bhaskara*. Lembre-se de que, para aplicá-la, a equação deve estar na forma $ax^2 + bx + c = 0$.

a) $2x^2 + x = 1$

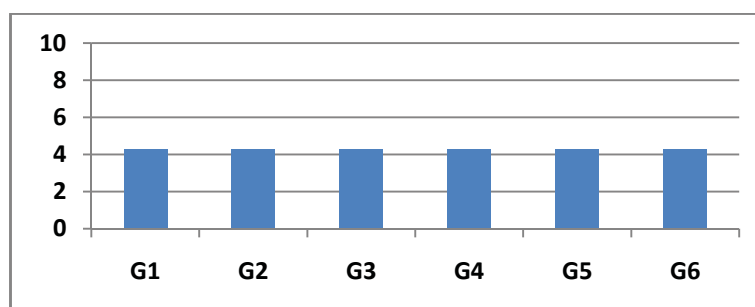
b) $7x - x^2 - 6 = 0$

c) $3x^2 - 2x + 1 = 0$

d) $x^2 - 4x + 4 = 0$

e) $-x^2 + 2x + 3 = 0$

f) $x^2 - 2x - 3 = 0$



Na atividade passada, os alunos não apresentaram dificuldades na resolução de equações polinomiais do 2º grau utilizando o método de completar quadrados. Mas, ao utilizarem a fórmula de Bhaskara, os alunos acharam estranho escrever matematicamente e apresentaram dificuldade na resolução da atividade sete. Eles entenderam de onde veio a fórmula, mas não conseguiam aplicá-la na resolução de equações polinomiais do 2º grau apresentadas. Possivelmente essa dificuldade, no uso da Fórmula de Bhaskara, para resolver equações polinomiais do 2º grau, esteja na identificação do que seja variável e constante. As letras a , b e c , coeficientes dos termos x^2 , x e independente, que entram na composição da fórmula, são constantes em cada equação e x é a variável que se apresenta como uma incógnita a ser descoberta. Apresentaram muitos erros secundários como, por exemplo, encontrar a , b e c e substituir na fórmula para realizar os cálculos. Outros erros: os cálculos realizados para encontrar o discriminante; dificuldade com a regra de sinais e com o uso dos parênteses; entre outros.

Diante de tal situação, em conversa com a professora, achamos importante expor um item para os alunos, pois eles não evoluíram na atividade. Assim, a professora resolveu a questão dada no item a mostrando aos alunos quem são a , b e c e como substituí-los na fórmula.

A partir da explicação, os alunos conseguiram evoluir na atividade sem muita dificuldade.

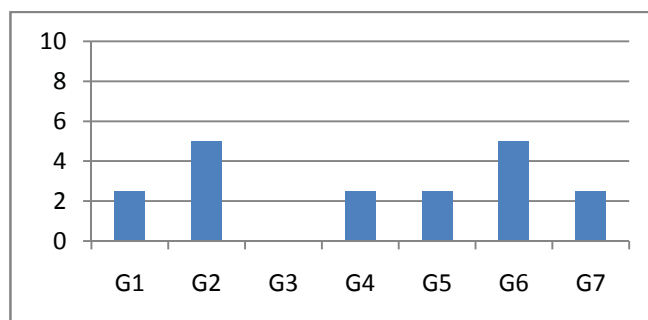
ATIVIDADE 8

1) Discuta com seus colegas a seguinte afirmação:

Dependendo do valor da expressão b^2-4ac , uma equação polinomial do 2º grau pode admitir duas raízes reais distintas, duas raízes reais idênticas (uma raiz dupla), ou não admitir raízes.

Registre as conclusões da discussão.

2) Explique por que as três últimas equações da atividade anterior têm as mesmas raízes.



Em seguida, os alunos iniciaram a atividade oito, em que deveriam observar a importância do delta na fórmula de Bhaskara.

Os alunos apresentaram dificuldade em analisar a relação entre o discriminante e o valor das raízes das equações dadas.

CAPÍTULO 5

3º BLOCO DE ROMBERG

CONSIDERAÇÕES FINAIS

3º BLOCO DE ROMBERG

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Posto em ação o Procedimento Geral criado, passamos ao terceiro bloco do Modelo de Romberg. As atividades de sete a dez da Metodologia de Pesquisa de Romberg são aquelas em que um pesquisador coleta as evidências surgidas durante a aplicação do Procedimento Geral criado; seleciona, interpretando entre elas as que se relacionam à Pergunta da Pesquisa; relata os resultados obtidos; e antecipa a ação de outros.

Assim ao dar sentido às evidências coletadas na aplicação do Procedimento Geral – a criação de um projeto de ensino-aprendizagem-avaliação para trabalhar equações polinomiais do 2º grau – as selecionamos e as relacionamos ao Problema da Pesquisa, relatando os resultados e antecipando as ações de outros.

O objetivo desta pesquisa foi o de analisar a produção de significados, construídos pelos alunos de uma 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental, durante o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Equações Polinomiais de 1º e 2º graus através da resolução de problemas. No que se refere ao trabalho com as equações polinomiais do 1º grau, numa revisão, buscou-se apoio em livros didáticos e para trabalhar as equações polinomiais do 2º grau fez-se uso da Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

Visamos responder à seguinte pergunta norteadora:

Quais os significados produzidos, pelos alunos, no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de equações polinomiais do 2º grau?

Mas, ao longo da pesquisa, outras questões surgiram, levando-nos a considerá-las importantes para atingir nosso objetivo:

- Há possibilidades de se trabalhar Matemática seguindo o Caderno do Professor, indicado pela Proposta Curricular do Estado de São Paulo, sob a perspectiva da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

CAPÍTULO 5 – 3º BLOCO DE ROMBERG: CONSIDERAÇÕES FINAIS

- Será que os grupos e, em particular cada estudante, conseguiram construir novos conceitos e novos conteúdos matemáticos que a professora havia colocado como foco de aprendizagem na resolução de cada problema proposto?

Para responder a pergunta norteadora desta pesquisa, criamos um Projeto de Ensino que foi desenvolvido em duas partes: uma revisão de equações polinomiais do 1º grau e um trabalho com as equações polinomiais do 2º grau. Como a pesquisadora não tivesse experiência em sala de aula e a metodologia de ensino adotada no Projeto requer preparo e experiência docente, um membro do grupo GTERP, que leciona em uma escola estadual da cidade de Rio Claro / SP, nas turmas de 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental, e que conhece bem a metodologia de ensino adotada por nós, prontificou-se a trabalhar conosco nesse projeto. Tendo um papel de observadora participante, pude observar, além das produções dos alunos, o trabalho da professora em sala de aula que, no ano anterior, já havia trabalhado com esses mesmos alunos, fazendo uso da metodologia adotada nesta pesquisa.

Ao aplicarmos o Projeto em sala de aula, foi importante a criação de um Termo de Compromisso pois, em um processo de ensino em que os alunos são vistos como co-construtores de seu próprio conhecimento, são colocadas condições que permitam, à professora e aos alunos, desenvolverem suas atividades referentes ao ensino e à aprendizagem no ambiente de sala de aula.

O planejamento das aulas, para o desenvolvimento do Projeto criado, feito pela pesquisadora e pela professora da sala de aula, tinha como objetivo definir quais e quantas seriam as aulas destinadas à sua aplicação. Como a professora havia trabalhado, no final do ano anterior, o tópico equações polinomiais do 1º grau, ela e a pesquisadora acharam necessário realizar uma revisão, pois os alunos haviam entrado em férias e esse é um tópico que deve conduzir ao ensino das equações polinomiais do 2º grau. Essa revisão permitiu, também, que a pesquisadora desse início ao desenvolvimento de seu trabalho com a aplicação dessa metodologia em sala de aula. Já, para a segunda parte do Projeto, utilizou-se o Caderno do Aluno (2010), em que os alunos trabalharam os problemas “traduzindo” seus enunciados para a linguagem matemática das equações polinomiais do 2º grau, discutindo alguns modos de resolvê-los, utilizando seus conhecimentos prévios. Como alguns problemas ficaram em

CAPÍTULO 5 – 3º BLOCO DE ROMBERG: CONSIDERAÇÕES FINAIS

aberto e/ou pareciam aos alunos “complicados” de resolver, foi importante dar início ao trabalho construindo diferentes procedimentos e métodos que levassem a resolver equações polinomiais do 2º grau antes da construção do desenvolvimento da Fórmula de Bhaskara.

Nossa pesquisa teve sua fundamentação teórica baseada em três eixos: a Álgebra Escolar, a Produção de Significados e a Resolução de Problemas. Como nosso Fenômeno de Interesse foi *o Ensino-Aprendizagem de Equações Polinomiais do 2º grau*, resolvemos que Álgebra seria um eixo da qual as equações polinomiais são um tópico importante. Nesta pesquisa, entendemos que o aluno produz significado quando fala a respeito de um objeto e, para que pudéssemos entender como os alunos constroem o significado matemático do conceito e das ideias matemáticas envolvidas no processo, colocamos a Produção de Significados como outro eixo. Por fim, para poder identificar a produção de significados dos alunos, colocamos a Resolução de Problemas como o terceiro eixo, pois é através da resolução de problemas que os alunos mostram o que pensam, defendem e argumentam sobre as ideias matemáticas discutidas nos grupos, envolvidos com a busca da resposta ao problema dado, produzindo, assim, significados matemáticos.

O que mais enfocamos em nosso trabalho foi desenvolver o pensamento algébrico dos alunos, construindo conhecimentos novos a partir do conhecimento prévio que traziam, em que eles, para alguns problemas, sabiam resolver as equações sem aplicar mecanicamente regras memorizadas. Para resolver as equações propostas, os alunos utilizavam, de início, propriedades de fatos numéricos, de técnicas de contagem e de fatoração, procedimentos usados por alunos iniciantes em Álgebra. Fizemos com que eles trabalhassem seu pensamento algébrico, pois eles analisaram, representaram e generalizaram padrões e regularidades utilizando sua própria simbologia, como palavras, figuras e tabelas para representar sua compreensão sobre as relações matemáticas.

Mais tarde, com o auxílio da professora, os alunos começaram a utilizar o método do encobrimento (apresentado na página 70 desta dissertação). Quando os alunos tinham dificuldade em trabalhar a equação, eles utilizavam o método da substituição por tentativa e erro (p.70). Olhando para as três vinhetas apresentadas por Saul (2008), sobre as dificuldades dos alunos, pudemos notar, em nosso trabalho, que os alunos mostraram ter ideias intuitivas sobre variável e função.

CAPÍTULO 5 – 3º BLOCO DE ROMBERG: CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na resolução de alguns problemas propostos, sentimos que os alunos os resolviam por meio da linguagem retórica, em um nível semântico, onde os símbolos são tratados com significados claros e precisos, fazendo com que os alunos compreendessem as relações matemáticas existentes.

O momento mais difícil, nesse trabalho, deu-se na transição da resolução geométrica, trabalhada com o método de Al-Khowarizmi, para a construção da Fórmula de Bhaskara¹⁶ e seu devido uso. Nessa passagem a professora guiando os alunos procurou levá-los a compreender os passos que relacionavam o trabalho de Al-Khowarizmi e a expressão que dá a Fórmula Geral de Bhaskara (página 160 desta dissertação), onde as raízes da equação polinomial do 2º grau são obtidas por $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Os alunos puderam compreender o desenvolvimento dessa fórmula mas, a maioria deles não conseguiu aplicá-la quando na resolução de algumas equações propostas.

Como nosso objetivo foi o de analisar a produção de significados, construídos pelos alunos, durante o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Equações Polinomiais de 1º e 2º graus, resolvemos trabalhar com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, seguindo o roteiro apresentado na página 99 desta dissertação, para podermos analisar a qualidade da produção de significados dos alunos.

Na metodologia adotada, antes de entrar em sala de aula, o professor se prepara, cria situações-problema visando à construção de conceitos e procedimentos novos dentro de certas teorias matemáticas; resolve o problema de várias maneiras para estar preparado para a diversidade de resoluções desenvolvidas pelos alunos; prepara questões que podem conduzir os alunos na plenária; e, por fim, faz a formalização do novo conteúdo produzido. Deste modo, a professora da sala e a pesquisadora conceberam certas estratégias visando à produção de significados dos alunos expressa individualmente, obtida pela discussão em grupos e fazendo uso de seus conhecimentos prévios.

Inicialmente, os alunos foram divididos em pequenos grupos, onde leram e tentaram interpretar e compreender o problema apresentado pela professora. Durante a aplicação do

¹⁶ No Brasil é adotado o nome de Fórmula de Bhaskara. Entretanto, historiadores dizem que provavelmente não tenha sido Bhaskara que chegou a ela.

CAPÍTULO 5 – 3º BLOCO DE ROMBERG: CONSIDERAÇÕES FINAIS

Projeto, solicitamos a eles que entregassem, por escrito, a resolução dos problemas propostos em todas as aulas. Deixamos-lhes claro que escrevessem todos os seus pensamentos envolvidos na resolução dos problemas pois, em geral, eles tentam explicitar seu modo de raciocinar durante o processo da resolução do problema, procurando indicar as possíveis estratégias assumidas para sua resolução. Essas resoluções se mostraram um documento importante na análise da qualidade da produção de significado dos alunos.

Com o uso da metodologia de ensino adotada em sala de aula, trabalhamos os três Princípios de Aprendizagem apresentados na página 80. Os alunos chegaram à escola com conhecimentos prévios que foram exigidos na resolução dos problemas, pedindo-se que obtivessem relações, assim organizando seus conhecimentos. Utilizaram suas habilidades metacognitivas pois, em grupos, refletiam sobre cada ação tomada na realização do problema.

A professora em sala de aula teve um papel importante. Ela auxiliava os alunos nos problemas secundários que surgiam, observando e, principalmente, incentivando os alunos a resolver o problema, de modo que eles discutissem entre si as ideias que cada um deles trazia para o grupo visando à resolução do problema.

Ao término das resoluções pelos grupos, a professora selecionou diferentes tipos de resolução pedindo a um representante do grupo registrar, na lousa, sua forma de resolução. Com isso, a professora conduziu a Plenária, com a classe toda, para discutirem as resoluções apresentadas a fim de esclarecer possíveis dúvidas. Esse foi um momento riquíssimo da aplicação do Projeto, pois foi através da fala matemática que o pensamento dos alunos tornou-se visível e pôde ajudá-los na compreensão dos conceitos matemáticos construídos na resolução dos problemas. Tal compreensão só pôde ser realizada a partir do confronto de ideias contrastantes que obrigaram os alunos a argumentar e defender suas ideias. Foi, nesse exato momento, que os alunos puderam produzir significados para os novos conceitos trabalhados.

Na Formalização a professora registrou, na lousa, uma apresentação formal dos novos conceitos e conteúdos construídos naquela atividade, destacando as diferentes técnicas operatórias e as propriedades qualificadas para o assunto, aproveitando-se das familiares notações e simbologias trabalhadas pelos alunos na Plenária.

Ao respondermos nossa primeira pergunta complementar à pergunta da pesquisa, sobre os Cadernos do Aluno, indicados pela Proposta Curricular do Estado de São Paulo,

CAPÍTULO 5 – 3º BLOCO DE ROMBERG: CONSIDERAÇÕES FINAIS

dizemos que eles apresentam inicialmente, antes de começar cada tópico, situações de aprendizagem, que são os problemas que irão conduzir o aluno para o novo conceito a ser construído, o que aparece na metodologia adotada. Mas, o ponto negativo dessas situações de aprendizagem são que elas já apresentam caminhos para os alunos seguirem, o que pode “bloquear” o pensamento do aluno. Como Polya diz, o professor tem que fazer com que o aluno pense e não querer que o aluno pense aquilo que o professor quer que ele pense. Em nosso Projeto constatamos que há a possibilidade de se trabalhar os Cadernos sob a perspectiva da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, desde que o professor apresente só o enunciado do problema e deixe os alunos o explorarem, questionando-os sempre que uma dúvida se faça presente. Essa metodologia, também, pede ao professor que, depois de um consenso quanto a resolução do problema, é importante que ele realize a Formalização dos novos conteúdos construídos, pois nos Cadernos não há uma formalização do assunto, deixando os alunos sem ter o material teórico que o fundamente e que é pedido pela maioria dos pais.

Ao responder a segunda pergunta complementar à nossa pergunta da pesquisa, ficou evidente que, através da resolução dos problemas apresentados, os alunos foram levados a pensar: levantaram ideias matemáticas; comunicaram-se ao falar e ao escrever sobre elas; desenvolveram formas de raciocínio; estabeleceram conexões e desenvolveram a capacidade de resolver problemas, explorando-os e generalizando-os. A aplicação do Projeto permitiu uma maior participação dos alunos na resolução dos problemas propostos, quer individualmente, quer em grupos, quer os que o resolveram e quer os que não o conseguiram, mostrando-lhes o que é investigar, enfrentando desafios e aprendendo a tomar decisões. É claro que, entre todos os alunos, há aqueles “cinco por cento” que, como dizem, são criativos, aqueles que se destacam em sala de aula e, ao se manifestarem, são ouvidos por seus colegas. Houve aqueles que apenas copiavam o que se escrevia e aqueles que pareciam, às vezes, perdidos no que estava sendo feito. Notou-se que entre esses alunos que pareciam “perdidos”, o trabalho em grupo foi essencial, pois aquele que se destacava procurava ajudar o colega a se “encontrar”. Vale ressaltar que o trabalho de revisão feito com os alunos, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, fez com que os alunos fossem levados a uma melhor compreensão da construção dos conteúdos sobre as equações polinomiais do 2º grau.

CAPÍTULO 5 – 3º BLOCO DE ROMBERG: CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi por meio dos registros entregues pelos alunos de cada problema trabalhado, pelas discussões em grupos e, principalmente, nas discussões realizadas na Plenária, que os alunos tiveram a oportunidade de produzir significados. Como afirma D'Amore (2007), é por meio de diferentes aquisições, diferentes representações, diferentes comunicações trabalhadas em sala de aula que os alunos produzem significados.

Assim, acreditamos que a resposta à nossa pergunta norteadora da pesquisa é que, pelas evidências que constatamos, ao longo da aplicação do Projeto, nos registros feitos pelos alunos, nas participações e discussões realizadas nas Plenárias, nas anotações feitas pela pesquisadora e pelos vídeos de algumas aulas, notamos que os alunos desenvolveram as grandes ideias do pensamento algébrico; levantaram ideias matemáticas, trocaram ideias, procuraram explorar os problemas e os generalizavam conseguindo chegar à resolução do problema dado. Os alunos se expressaram, quer no grupo, quer individualmente, procurando dar significado ao que diziam e, apesar da dificuldade, houve alunos que puderam entender o desenvolvimento da Fórmula de Bhaskara, dando significado aos fatos que aconteciam.

Mesmo entre os que não compreendiam o fato matemático, havia produção de significado, porque procuravam falar sobre o modo como o entendiam, produzindo um significado nem sempre de acordo com o esperado, que exigia da professora uma posição de compreensão que levasse aqueles alunos a um possível entendimento daquilo que se fazia. Os alunos, acreditando que a professora se preocupava no sentido de que entendessem o que eles estavam fazendo, sentiam-se motivados a questionar e buscar a compreensão sempre acreditando que pudessem acrescentar algo de novo ao significado dado anteriormente.

Uma das limitações apresentadas neste trabalho foi a falta de tempo. Sentimos que os alunos não conseguiram assimilar o conhecimento da sintaxe das equações pois, como os PCN e a PCESP afirmam, o ensino-aprendizagem da Álgebra deve ocorrer ao longo dos anos, desde as séries iniciais pois desenvolver o pensamento algébrico do aluno demanda tempo, e o professor, em sala de aula, precisa cumprir um cronograma e, então, acaba acelerando os passos. Outra limitação foi o não cumprimento da cobrança de tarefas com regularidade. Os alunos, em sua maioria, não entregavam as tarefas de casa exigidas no Termo de Compromisso. Esse fato provocou uma deficiência na análise dos documentos produzidos por

CAPÍTULO 5 – 3º BLOCO DE ROMBERG: CONSIDERAÇÕES FINAIS

eles, pois o estudo realizado em casa propicia a revisão dos assuntos já estudados, ativa conhecimentos anteriores dos alunos de maneira a ajudá-los a assimilar novos conhecimentos e o tempo gasto em tarefas de casa contribui de maneira significativa no desenvolvimento da aprendizagem do aluno. Como afirma Holdan (1995, p.282), “admitindo-se que a transferência de ideias seja uma consequência desejável do ensino de matemática, a tarefa de casa que combine exercícios bem distribuídos com exercícios exploratórios parece o caminho a ser seguido”. Não se deu a devida atenção a esse fato, justificada mais uma vez pela falta de tempo, considerada a execução do programa regulamentar.

Este trabalho mostrou que a ideia de olhar o aluno como uma caixa vazia, que deve ser preenchida pelo conhecimento “transmitido” pelo professor, deve mudar. Atividades que fazem uso do conhecimento prévio dos alunos são fundamentais, pois são a base sobre a qual será construída a compreensão mais formal do assunto. As avaliações dos alunos devem mostrar seu entendimento sobre o assunto trabalhado ao invés de mostrar apenas sua capacidade de repetir fatos. O fato de se ensinar todos os tópicos escolares apenas superficialmente deve ser substituído por um ensino mais detalhado de uma quantidade menor de tópicos gerados por grandes ideias, para que seus principais conceitos sejam compreendidos pelos alunos.

Didaticamente é apresentado um trabalho escrito para o leitor. Para isso é importante que o trabalho esteja terminado, isto é, que o produto realizado por este trabalho seja um novo produto com a intenção de melhorar o ensino e a aprendizagem. Esse produto, na verdade, é destinado a professores de sala de aula cuja atribuição é a de produzir melhoras na aprendizagem dos alunos. O que deve medir essa melhora é a avaliação. Mas a avaliação não significa uma prova bimestral que avalia se os alunos são capazes de reproduzir o que o professor lhes “ensinou” durante as aulas. A avaliação deve ser feita de forma contínua que permite, ao longo dos deslizes cometidos durante o processo de aprendizagem, serem vistos como problemas secundários, superados com a ajuda e a supervisão do professor. Para isso, a avaliação não deve ser feita separadamente do processo de ensino proposto para promover melhor aprendizagem. Com essa forma de avaliação, o produto se manifesta como um processo de engenharia a inventar partes e colocá-las juntas para formar algo novo.

Por fim, esperamos que esta Dissertação sirva como um trabalho que possa antecipar ações futuras, como a de professores que queiram adotar uma nova postura a respeito de sua

CAPÍTULO 5 – 3º BLOCO DE ROMBERG: CONSIDERAÇÕES FINAIS

prática em sala de aula, fazendo reflexões sobre a importância de os alunos serem co-construtores de seu próprio conhecimento e a de pesquisadores interessados em melhorar o ensino-aprendizagem nas escolas públicas do país.

REFERÊNCIAS

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, E. A. **Contextualização do ensino da álgebra e formação de professores.** Disponível em: <http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr12c.doc>. Acesso em: 26 jul. 2008.
- BATTISTA, M. T. Learning with Understanding: principles and processes in the construction of meaning for geometric ideas. In: MARTIN, W. G.; STRUTCHENS, M. E.; ELLIOTT, P. C. **The Learning of Mathematics.** USA: NCTM. 2007, p.65-79.
- BICUDO, M. A. V. Ensino de Matemática e Educação Matemática: algumas considerações sobre seus significados. **Bolema.** Rio Claro: UNESP, ano 12, nº 13, 1999, p.1-11.
- BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. **Proposições.** Campinas: UNICAMP, v.4 1 (10), 1993, p.18-33.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria dos métodos.** Lisboa: Porto Editora, 1994.
- BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra.** Tradução.H. H. Domingues. São Paulo: Atual, p.23-37, 1995.
- BORBA, M.C. , ARAÚJOJ.L. **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática.** Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
- BRANSFORD, J. D.; BROWN, A. L.; COCKING, R. R. **Como as pessoas aprendem: cérebro, mente, experiência e escola.** Tradução: SZLAK, C. D. São Paulo: Editora Senac, 2007.
- BRASIL, L. A. S. **Estudo Dirigido de Matemática no Ginásio.** São Paulo: Fundo de Cultura, 1964.
- BRASIL. MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática 3º e 4º ciclos.** Brasília: MEC, 1998.
- BURTON, D. M. **The History of Mathematics: an introduction.** McGraw – Hill Companies, 2007.
- CARNEIRO, M. G. S. **As possíveis influências das experiências da prática na cultura docente dos futuros professores de matemática.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2009.

CHALOUCHE, L.; HERSCOVICS, N. Ensinando expressões algébricas de maneira significativa. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. Tradução. H. H. Domingues. São Paulo: Atual, p.37-48, 1995.

D'AMBROSIO, B. S. **A Evolução da Resolução de Problemas no Currículo Matemático**. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo1.pdf, 2008. Acesso em: 03 set. 2009.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas, SP: Papirus, 1996.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática**. Tradução: BONOMI, M. C. São Paulo: Editora da Física, 2007.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 6ª Ed. São Paulo: Editora Ática, 1995.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: UNICAMP, 2ª edição, 1997.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/Fiorentini-Fernandes-Cristovao2.doc>>. Acesso em: 05 mar 2008.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, D; MIGUEL, A; MIORIM, M. A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**. vol. 4, nº 1 (10), 1993, p.78-91.

FRIEL, S. N. **Navigating through algebra in grades 6-8**. NCTM. 2001.

FUSON, K. C.; KALCHMAN, M.; BRANSFORD, J. D. Mathematical Understanding: an introduction. In: DONOVAN, M. S.; BRANSFORD, J. D. (eds). **How Students Learn: mathematics in the classroom**. Washington: National Academies Press. NCTM. 2005. p.217-256.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 10ª edição. Rio de Janeiro: Editora Record, 2007.

GRAEBER, A. O. **Insights into Secondary School Students' Understanding of Mathematics**. University Maryland, 1991.

HOLDAN, G. Tornando as tarefas de casa de álgebra mais eficazes. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. Tradução. H. H. Domingues. São Paulo: Atual, p.9-22, 1995.

HOUAISS, A. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. 1ª Ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

INEP. MEC. **Relatório Nacional Saeb 2003**. Brasília: O Instituto, 2006.

KIERAN, C. The Learning and Teaching of School Algebra. In: GROWS, D. A. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: MacMillan, 1992.

LINS, R.C. Matemática, monstros, significados e educação matemática. In BICUDO, M.A.V.; BORBA, M.C. (orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, p. 92-120, 2005.

LINS, R.C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas: Papirus, 1997. 176p.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MARINCEK, V. Algumas contribuições didáticas da Matemática: a resolução de problemas e o papel do professor. In: MARINCEK, V. (coord). **Aprender Matemática resolvendo problemas**. Porto Alegre: Artmed. p. 13-17. 2001.

MARTINHO, M. H.; PONTE, J. P. **Comunicação na sala de aula de Matemática: práticas e reflexões de uma professora de matemática**. Disponível em: [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/Martinho-Ponte 05%20CIBEM.pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/Martinho-Ponte%20CIBEM.pdf)
Acesso em 17 jan. 2011.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Proposições**, vol. 3, nº 17, março de 1992, p.39-52.

MONDINI, F. **Modos de conceber a álgebra em cursos de formação de professores de Matemática**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2009.

MOURA, A. R. L.; SOUSA, M. C. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. **Zetetike**. Campinas: UNICAMP, v.13, nº 24, jul/dez, 2005, p.11-45.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: Library of Congress Cataloging, 2000.

NOBRE, S. **História da Resolução da Equação de 2º grau: uma abordagem pedagógica**. Coleção História da Matemática para professores. Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2003.

NUNES, C. B. **O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de**

professores de matemática. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2010.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. 1ª Escola de Inverno de Educação Matemática de Santa Maria. **Anais.** Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas – Aritmética, Álgebra e Geometria. Universidade Federal de Santa Maria / RS, 2008.

ONUCHIC, L. R.; BOTTA, L. S. Reconceitualizando as quatro operações fundamentais. **Revista de Educação Matemática.** Ano 6, nº 4, 1998, p. 19-26.

ONUCHIC, L.R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In BICUDO, M.A.V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas.** São Paulo: Editora da Unesp, p.199-220, 1999.

PINTO, R. A. **Erros e dificuldades no ensino da álgebra: o tratamento dado por professores da 7ª série em aula.** Dissertação (Mestrado em Educação). Campinas, São Paulo: Unicamp, 1997.

POLYA, G. **How to solve it.** Princeton: Princeton University Press, 1945.

POLYA, G. **Mathematical Discovery: on understanding, learning and teaching problem solving.** USA: Library of Congress Catalog, vol. 1, 1962.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, L. Práticas profissionais dos professores de Matemática. **Quadrante.** nº 13 (2), 2004, p.51-54.

RADFORD, L. G. The historical origins of algebraic thinking. In: SUTHERLAND, R.; ROJANO, T.; BELL, A.; LINS, R. (eds). **Perspectives on School Algebra.** Dordrecht: Kluwer, p. 13-36, 2001.

REYS, R. E.; LINDQUIST, M. M.; LAMBDIN, D. V.; SMITH, N. L.; SUYDAM, M. N. **Helping children learn mathematics.** 7ª edição. Active learning edition with field experience resources. USA: John Wiley & Sons, Inc. 2004.

ROMBERG, T. A. Perspectivas on Scholarship and Research Methods. In: GROUWS, D. A. (ed). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,** p.49-64. NCTM, New York: Simon & Schuster, 1992.

SANTOS, A. R. **Metodologia Científica: a construção do conhecimento.** 7ª edição. Rio de Janeiro: Lamparina, 2007.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Estado de Educação. **Saresp 2007,** 2008.

SÃO PAULO, estado. **Caderno do Professor: matemática, ensino fundamental – 8ª série, volume 2.** Secretaria da Educação; FINI, M. I. (coord), Machado, N. J.; Granja, C. E. S. C.; Mello, J.L.P.; Moisés, R. P.; Spinelli, W. (equipe). São Paulo: SEE, 2009.

SÃO PAULO, estado. Secretaria da Educação, Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas, Fundação para o Desenvolvimento da Educação. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo: matemática**. FINI, M. I. (coord.). São Paulo: SEE, 2008.

SAUL, M. Algebra: the mathematics and the pedagogy. In: **Algebra and Algebraic Thinking School Yearbook**. Seventieth Yearbook. NCTM. 2008, p. 63-79.

SCARLASSARI, N. T. **Um estudo de dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Campinas, 2007.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (eds). **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p.31-42.

SILVA, A. M. **Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática**. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas – Rio Claro, 2003.

SILVA, E. O.; MOREIRA, M.; GRANDO, N. I. O Contrato Didático e o Currículo Oculto: um duplo olhar sobre o fazer pedagógico. **Zetetike**. Campinas: UNICAMP, v.4, nº 06, jul/dez, 1996, p.9-23.

SOUZA, A. C. P. **Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2010.

STANIC, G.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R. ; SILVER, E. (eds). **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, p.1-22, 1989.

USISKIN, Z. Concepções sobre a Álgebra da Escola Média e utilização das Variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. Tradução.H. H. Domingues. São Paulo: Atual, P.9-22, 1995.

VALE, I.; BARBOSA, A.; BORRALHO, A.; BARBOSA, E.; CABRITA, I.; FONSECA, L.; PIMENTEL, T. **Padrões no ensino e aprendizagem da matemática: propostas curriculares para o ensino básico**. 2009.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York: Longman, 2001.

VAN DE WALLE, J. A.; LOVIN, L. A. **Teaching Student-Centered Mathematics – Grades 5-8**. New York: Pearson, 2006.

VILLA, A.; CALLEJO, M. L. Modificação de crenças: proposta de intervenção educativa. In: VILLA, A.; CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas**. Tradução: Ernani Rosa. São Paulo: Artmed, 2006.

ANEXOS

ANEXO I

CARTA DE AUTORIZAÇÃO ENVIADA À ESCOLA

Rio Claro, 29 de maio de 2010.

Prezada Senhora,

Eu, Tatiane da Cunha Puti, portadora da carteira de identidade número 44464459-3, venho por meio deste solicitar à Vossa Senhoria permissão para aplicação de meu projeto para coleta de dados de minha pesquisa de Mestrado, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Unesp de Rio Claro – SP, sob orientação da Prof^a. Dr^a. Lourdes de la Rosa Onuchic. O objetivo do projeto é coletar dados para analisar a produção de significados, construídos pelos alunos, durante o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Equações Polinomiais do 1º e do 2º graus, através da Resolução de Problemas. Acreditamos que, com essa metodologia de ensino, possamos favorecer o processo de ensino-aprendizagem dos mesmos. O período para a realização do referido projeto será iniciado em 2 de junho e terminado em 13 de agosto de 2010.

Atenciosamente

Prof^a. Dr^a. Lourdes de la Rosa Onuchic

Tatiane da Cunha Puti

Ilma. Sr^a.
Diretora da Escola

ANEXO II**CARTA DE AUTORIZAÇÃO ENVIADA AOS PAIS**

Rio Claro, ____ de _____ de 2010.

Eu, _____, portador da carteira de identidade número _____, declaro para os devidos fins que autorizo **Tatiane da Cunha Puti** a utilizar toda a informação captada – filmagem e áudio – durante a participação de meu filho (a), _____, na sala de aula, para fins de sua pesquisa de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro – SP.

Aluno

Responsável

ANEXO III

TERMO DE COMPROMISSO

Escola:

Conteúdo: Equações Polinomiais

Série (Ano): 8ª série (9º ano)

Quantidade de Alunos: 37 alunos

Quantidade de Aulas Previstas: ____ horas/aula

Período: ____/____/____ até ____/____/____

Introdução

Este termo de compromisso tem por objetivo estabelecer parâmetros para nortear o desenvolvimento e a organização de um trabalho diferenciado em Matemática, apontando as responsabilidades e os direitos dos alunos e da professora. O trabalho será realizado na disciplina de Matemática na 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental, em uma escola estadual, localizada na cidade de Rio Claro – SP.

Será desenvolvida parte do conteúdo matemático pertinente à 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental, proposto pela instituição, cujo trabalho será aplicado pelo professor da turma, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, sob a observação participante da pesquisadora Tatiane da Cunha Puti.

Normas:

- As regras da escola deverão ser obedecidas;
- O trabalho será desenvolvido de forma cooperativa e colaborativa. Os estudantes trabalharão em pequenos grupos, com o objetivo de resolver

problemas visando à construção de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos;

- Os grupos serão formados por quatro alunos, aceitando-se três na impossibilidade de um quarto elemento juntar-se ao grupo, devido à insuficiência do número de alunos na sala de aula;
- Todos deverão engajar-se na discussão dos problemas apresentados;
- O trabalho individual de cada membro terá um efeito direto sobre o sucesso do grupo;
- Cada grupo deverá entregar as atividades em uma folha separada ao final de cada aula. A pesquisadora tirará xerox das atividades entregues pelos grupos e na aula seguinte as devolverá. Assim, os alunos poderão ter o registro das atividades em seu caderno;
- As tarefas de casa deverão ser feitas e entregues na aula seguinte.

Avaliação:

Cada aluno será avaliado individualmente, de acordo com o artigo 24, inciso V-a, da L.D.B. da Educação Nacional, lei nº 9394 de 20/12/1996, nos seguintes itens:

- FREQUÊNCIA (Peso 1): “Todos deverão estar presentes no local e horário estipulados”.
- TAREFA (Peso 1): “As tarefas extraclasse serão recolhidas no início de cada aula”.
- TRABALHO DE GRUPO (Peso 1): “Os trabalhos de grupo serão observados e avaliados pela professora durante as atividades em classe”.
- PARTICIPAÇÃO (Peso 1): “Participação nas discussões e no desenvolvimento de atividades propostas”.
- DISCIPLINA (Peso 1): “Será observada a disciplina em sala de aula em todos os momentos da aula de Matemática”.
- PROVA INDIVIDUAL (Peso 5): A avaliação escrita, exigida por lei, terá a validade de 5 pontos.

Outras resoluções:

Questões e problemas sugeridos durante o desenvolvimento do trabalho serão discutidos por todos, alunos e professora, a fim de chegar-se a um comum acordo, ficando estabelecido que as normas deverão ser cumpridas pelos alunos e pela professora.

Ciente dessas normas e de pleno acordo com todas as condições estabelecidas assinam abaixo.

Rio Claro, ____ de _____ de 2010.

Professor

Aluno (a)

Tatiane da Cunha Puti