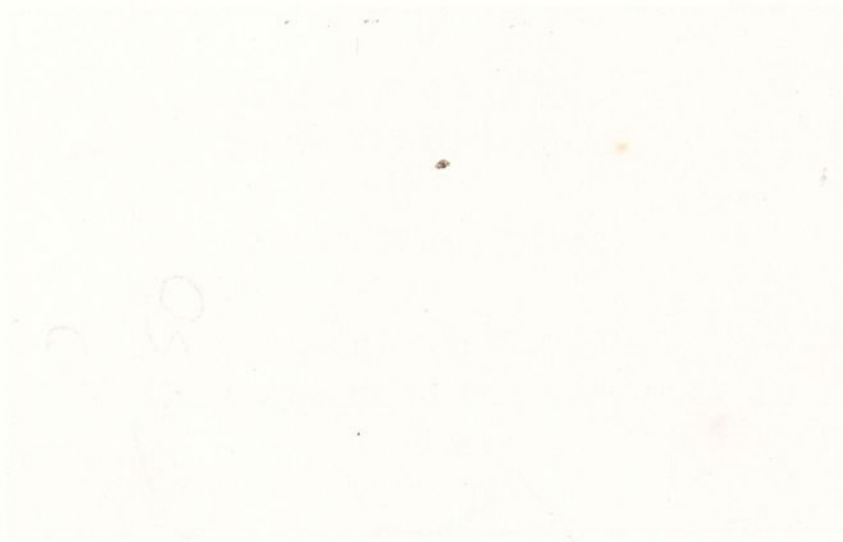


Rita de Cássia Amaral

Grafos e Alguns Espaços Vetoriais



1910000811



RITA DE CÁSSIA AMARAL

GRAFOS E ALGUNS
ESPAÇOS VETORIAIS

GRAFOS E ALGUNS
ESPAÇOS VETORIAIS

Rita de Cássia Amaral

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada e
Computacional.
MAC-030

Orientador: Prof. Dr. Walter Jílio Cortez Mendes



811/98

São José do Rio Preto

1988

RITA DE CÁSSIA AMARAL

GRAFOS E ALGUNS ESPAÇOS VETORIAIS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Aplicada e Computacional do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, para a obtenção do título de Mestre em Ciências Matemáticas (Área de Concentração: Matemática Aplicada e Computacional).

Orientador: Prof. Dr. Walter Júlio Cortez Morales.



811/98

São José do Rio Preto

1988



AGRADECIMENTOS

Manifesto a minha gratidão a todas as pessoas que, de forma direta ou indireta, auxiliaram-me na realização deste trabalho e de forma particular:

ao prof. Dr. Walter Júlio Cortez Morales, por me fornecer a possibilidade de realização deste trabalho com sua orientação e incentivo;

à prof. Helaine Vítolo Meneghetti, pela revisão gramatical e amizade;

ao prof. Dr. José Márcio Machado, pela presença nos momentos mais difíceis desta jornada;

à minha família, em especial ao meu irmão Jorge pelo incentivo inicial e contínuo para a realização deste trabalho;

Ao meu pai, à memória de
à CAPES, pelo apoio financeiro. de minha mãe e ao prof. Dr.
Walter-Júlio.

AGRADECIMENTOS

Manifesto a minha gratidão a todas as pessoas que, de forma direta ou indireta, auxiliaram-me na realização deste trabalho e de forma particular:

ao prof. Dr. Walter Júlio Cortez Morales, por me fornecer a possibilidade de realização deste trabalho com sua orientação e incentivo;

à prof. Helaine Vítolo Meneghetti, pela revisão gramatical e amizade;

ao prof. Dr. José Márcio Machado, pela presença nos momentos mais difíceis desta jornada;

à minha família, em especial ao meu irmão Jorge pelo incentivo inicial e contínuo para a realização deste trabalho;

à CAPES, pelo apoio financeiro.

*azul e verde
vai sendo roxo e amarelo
e as nuvens todas se acabam
e uma estrela vai chegando
Cecília Moraes*

Resumo

Nesta dissertação fez-se um estudo de espaços vetoriais finitos associados com a teoria de grafos finitos. Estudou-se os espaços vetoriais associados aos conjuntos de vértices e arestas de um grafo. O conjunto de arestas munido de uma estrutura de espaço vetorial cremos ser o mais amplo, importante e elegante em sua apresentação; isto não significa que o espaço vetorial associado ao conjunto de vértices não seja importante, o qual podemos justificar dizendo que na literatura consultada não encontra-se um estudo sobre uma subestrutura de espaço vetorial para esta classe de elementos de um grafo e dentro de nossa possibilidade cabe-se dizer também que para o conjunto vértices e união aresta não existe alguma classe de espaço vetorial associado (ao grafo). Em princípio apresentou-se nesta dissertação alguns resultados de caracterização para os subespaços ciclo, co-ciclo e biciclo, desde o ponto de vista intrínseco da teoria de grafos. Ilustrou-se os espaços ciclos e co-ciclos do matróide via representações de matróides.

O horizonte azul e verde
vai sendo roxo e amaranço
e as nuvens todas se acabam
e uma estrela vai chegando

Cecília Meireles.

Resumo

Nesta dissertação fez-se um estudo de espaços vetoriais finitos associados com a teoria de grafos finitos. Estudou-se os espaços vetoriais associados aos conjuntos de vértices e arestas de um grafo. O conjunto de arestas munido de uma estrutura de espaço vetorial cremos ser o mais amplo, importante e elegante em sua apresentação; isto não significa que o espaço vetorial associado ao conjunto de vértices não seja importante, o qual podemos justificar dizendo que na literatura consultada não encontra-se um estudo sobre uma subestrutura de espaço vetorial para esta classe de elementos de um grafo e dentro de nossa possibilidade cabe-se dizer também que para o conjunto vértices e união aresta não existe alguma classe de espaço vetorial associado (ao grafo). Em princípio apresentou-se nesta dissertação alguns resultados de caracterização para os subespaços ciclo, co-ciclo e biciclo, desde o ponto de vista intrínseco da teoria de grafos e matróides. Ainda ilustrou-se os espaços ciclos e co-ciclos do matróide via representabilidade de matróides.

Índice

Abstract

Introdução 9

Capítulo 1 Elementos de Álgebra Linear 13

1.1 Introdução 13

The association of graphs to finite vector spaces is studied in this dissertation. Some results characterizing the cycle, bicycle and cocycle spaces from the view point of graph and matroid theories are presented. In particular, the cycle and cocycle spaces in a matroid by representable matroids. 27

1.2 Conceitos 27

Capítulo 3 Espaços Vetoriais Associados ao Grafo 44

3.1 Introdução 44

3.2 Espaço Aresta, 2^E (ou K^E) 45

3.3 Espaço Vértice, 2^V (ou K^V) 50

Capítulo 4 Espaços: Ciclo, Co-ciclo e Biciclo 55

4.1 Introdução 55

Índice

Introdução	9
Capítulo 1 Elementos de Álgebra Linear	13
1.1 Introdução	13
1.2 Conceitos	13
Capítulo 2 Elementos de Teoria de Grafos	27
2.1 Introdução	27
2.2 Conceitos	27
Capítulo 3 Espaços Vetoriais Associados ao Grafo	44
3.1 Introdução	44
3.2 Espaço Aresta, 2^E (ou K^E)	45
3.3 Espaço Vértice, 2^V (ou K^V)	50
Capítulo 4 Espaços: Ciclo, Co-ciclo e Biciclo	55
4.1 Introdução	55

4.2 Espaço Ciclo	56
4.3 Espaço Co-ciclo e Espaço Biciclo	59
4.4 Bases para os espaços ciclo e co-ciclo	63
Capítulo 5 Espaços Ortogonais e Ortogonais Complementares	70
5.1 Introdução	70
5.2 Espaços Ortogonais	70
5.3 Espaços Ortogonais Complementares	75
Capítulo 6 Caracterização do Espaço Biciclo	87
6.1 Introdução	87
6.2 Espaço Biciclo	89
Capítulo 7 Planaridade e dualidade	98
7.1 Introdução	99
7.2 Planaridade	99
7.3 Dualidade	101
Capítulo 8 Noções de matroids	110
8.1 Introdução	110
8.2 Matroids: base, independência, rank, circuito e fecho	111
Capítulo 9 Dualidade em matroid	128
9.1 Introdução	128
9.2 Dualidade em Matroid	128

Capítulo 10 Representabilidade de matróides **135**

10.1 Introdução 135

10.2 Matróides Representáveis 135

10.3 Espaços Circuitos e Cocircuitos do Matróide 139

Considerações Finais **144**

Bibliografia **146**

Neste trabalho tentamos abranger o mais amplo possível sobre alguns espaços vetoriais finitos que tenham ligação com a teoria de grafos, em outras palavras, dado um grafo finito, nós estudamos a maneira como pode ser munido de uma estrutura de espaço vetorial sobre os conjuntos de vértices e arestas.

A literatura que nos influenciou para o desenvolvimento deste assunto, entre outras, podemos mencionar: Biggs⁶, Chen¹¹, Deo¹², Gould¹³, Oxley²⁰, Rencski²¹, Trudeau²⁴, Thulasiraman & Swamy²³, Welsh²⁶, Whitney^{27,28,29}, Williams & Maxwell³⁰ e Wilson^{31,32}. Apesar de termos esta influência nós não tivemos acesso ao estudo dos espaços dos subconjuntos de vértices e conjunto de vértices união arestas; razão pela qual, estudamos os subespaços do conjunto arestas e mencionamos da estrutura de espaço vetorial do conjunto de vértices.

Nós apresentamos a nossa exposição seguindo a seguinte sequência:

Desenvolvemos no primeiro e segundo capítulos as revisões de alguns conceitos básicos, em especial envolvendo os tópicos de álgebra linear e teoria de grafos.

Introdução

No terceiro capítulo apresentamos algumas formas equivalentes de se definir o espaço aresta e o espaço vértice.

No quarto capítulo apresentamos um estudo dos subespaços do espaço aresta.

Neste trabalho tentamos abranger o mais amplo possível sobre alguns espaços vetoriais finitos que tenham ligação com a teoria de grafos, em outras palavras, dado um grafo finito, nós estudamos a maneira como pode ser munido de uma estrutura de espaço vetorial sobre os conjuntos de vértices e arestas.

A literatura que nos influenciou para o desenvolvimento deste assunto, entre outras, podemos mencionar: Biggs⁶, Chen¹¹, Deo¹², Gould¹⁵, Oxley²⁰, Recski²¹, Trudeau²⁴, Thulasiraman & Swamy²³, Welsh²⁶, Whitney^{27,28,29}, Williams & Maxwell³⁰ e Wilson^{31,32}. Apesar de termos esta influência nós não tivemos acesso ao estudo dos espaços dos subconjuntos de vértices e conjunto de vértices união arestas; razão pela qual, estudamos os subespaços do conjunto arestas e mencionamos da estrutura de espaço vetorial do conjunto de vértices.

Nós apresentamos a nossa exposição seguindo a seguinte sequência:

Desenvolvemos no primeiro e segundo capítulos as revisões de alguns conceitos básicos, em especial envolvendo os tópicos de álgebra linear e teoria de grafos.

No terceiro capítulo apresentamos algumas formas equivalentes de se definir o espaço aresta e o espaço vértice.

No quarto capítulo apresentamos um estudo dos subespaços do espaço aresta.

No quinto capítulo apresentamos algumas relações entre os subespaços estudados no capítulo 4, em outras palavras, tratamos da ortogonalidade e ortogonalidade complementar.

No sexto capítulo apresentamos algumas caracterizações do subespaço biciclo, em especial algumas conclusões que obtivemos.

No sétimo capítulo desenvolvemos o dual geométrico, abstrato e combinatório de um grafo, seguindo o trabalho de Whitney^{27,29} e obtivemos um resultado elementar sob lema 7.3.1.

O oitavo capítulo constitui de uma introdução da teoria de matróides e alguns exemplos.

No nono capítulo fazemos uma introdução sobre a dualidade de matróides.

No último capítulo apresentamos os espaços ciclo e co-ciclo de um matróide; para este propósito nós estudamos a F-representação de matróides. Resultado interessante que vimos na literatura é que todo matróide gráfico e co-

gráfico são F -representáveis (F corpo arbitrário), em particular sobre o corpo de Galois módulo dois, o qual acarreta os matróides gráfico e cográfico serem binários. Outro fato observado é que a referência Welsh²⁶ apresenta cinco caracterizações equivalentes para matróides binários, enquanto Oxley²⁰ apresenta oito caracterizações para esta classe de matróides binários.

Elementos de Álgebra Linear

1.1 Introdução

Neste capítulo, serão revistos alguns conceitos básicos de álgebra linear necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Por se tratar de revisão, não nos preocuparemos em oferecer as demonstrações dos resultados; contudo, o interessado poderá encontrar nas referências Callioff et al.⁶, Halmos¹⁶, Knopp¹⁷ e Lancaster¹⁸.

1.2 Conceitos

Um conjunto F com a operação $+$, chamada adição, é um grupo se, e somente se,

$$i) \forall x, y \in F, x + y \in F,$$

$$ii) \forall x, y, z \in F, x + (y + z) = (x + y) + z;$$

iii) Existe um único $0 \in F$, tal que, $0 + x = x + 0 = x, \forall x \in F$. O elemento 0 é chamado elemento neutro do grupo; e

iv) Para todo $x \in F$, existe um único $y \in F$, tal que, $x + y = y + x = 0$. O elemento

Capítulo 1

O grupo F é um grupo abeliano, se $\forall x, y \in F, x + y = y + x$.

Elementos de Álgebra Linear

1.1 Introdução

Neste capítulo, serão revistos alguns conceitos básicos de álgebra linear necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Por se tratar de revisão, não nos preocuparemos em oferecer as demonstrações dos resultados; contudo, o interessado poderá encontrar nas referências Callioli et al⁹, Halmos¹⁶, Knopp¹⁷ e Lancaster¹⁸.

1.2 Conceitos

Um conjunto F com a operação $+$, chamada adição, é um grupo se, e somente se,

i) $\forall x, y \in F, x + y \in F$;

ii) $\forall x, y, z \in F, x + (y + z) = (x + y) + z$;

- iii) Existe um único $\theta \in F$, tal que, $\theta + x = x + \theta = x$, $\forall x \in F$. O elemento θ é chamado elemento neutro do grupo; e
- iv) Para todo $x \in F$, existe um único $y \in F$, tal que, $x + y = y + x = \theta$. O elemento y é chamado inverso de x e vice - versa.

O grupo F é um grupo abeliano, se $\forall x, y \in F$, $x + y = y + x$.

Seja F um conjunto munido das operações $+$ e $\cdot$, chamada respectivamente de adição e multiplicação. F é um corpo se, e somente se,

- i) F é um grupo abeliano na $+$ (com o elemento neutro θ);
- ii) $F - \{ \theta \}$ é um grupo abeliano na $\cdot$; e
- iii) $\forall x, y, z \in F$, $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ (propriedade distributiva).

Exemplo: O corpo finito $Z_q = \{0, 1, \dots, q-1\}$, com adição (módulo q) e multiplicação (módulo q), denotado por $GF(q)$ e chamado corpo de Galois, onde q é inteiro primo (em particular $q = 2$).

Consideramos um conjunto V com uma operação binária $\oplus$ e F um corpo com as operações $+$ e $\cdot$. Definimos uma operação multiplicação, denotada por $*$, entre os elementos de F e V , na qual, todo par (α, v) , $\alpha \in F$ e $v \in V$, está associado a um único elemento, denotado por $\alpha * v$, em V . Então, o conjunto V é um espaço vetorial sobre F se, e somente se,

i) V é um grupo abeliano com $\oplus$; e

ii) $\forall \alpha, \beta \in F$ e $\forall v_1, v_2 \in V$,

$$(\alpha \cdot \beta) * v_1 = \alpha * (\beta * v_1),$$

$$(\alpha + \beta) * v_1 = (\alpha * v_1) \oplus (\beta * v_1),$$

$$\alpha * (v_1 \oplus v_2) = (\alpha * v_1) \oplus (\alpha * v_2)$$

e

$$1 * v_1 = v_1, \text{ onde } 1 \text{ é a identidade multiplicativa em } F.$$

Se não houver confusão, ao invés de referirmos espaço vetorial V sobre o corpo F , simplesmente diremos V um espaço vetorial.

Seja V um espaço vetorial sobre F , e W um subconjunto de V .

Então, W é um subespaço vetorial de V se, e somente se,

i) $0 \in W$;

ii) $\forall w_1, w_2 \in W, w_1 \oplus w_2 \in W$; e

iii) $\forall \alpha \in F$ e $\forall w \in W, \alpha * w \in W$.

Obs.: Indicamos com o símbolo ■ o final de uma demonstração ou a ausência dela no resultado.

Lema 1.2.1 Se W é um subespaço vetorial de um espaço vetorial V sobre F , então

W também é um espaço vetorial sobre F . ■



Seja $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um subconjunto do espaço vetorial V .

Teorema 1.2.1 A intersecção de qualquer número finito de subespaços de um espaço vetorial V é um subespaço de V . ■

Se W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de um espaço vetorial V , o conjunto de todas as somas $w_1 \oplus w_2$, onde $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$, é dito a soma dos subespaços vetoriais W_1 e W_2 e é indicado por $W_1 \oplus W_2$. Consequentemente, $W_1 \oplus W_2$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial V .

Teorema 1.2.2 Seja A uma matriz com elementos no corpo F . Então, as linhas (ou

colunas) não nulas de A , na forma escalonada, são linearmente independentes. Se, e somente se, um deles for uma combinação linear dos vetores restantes.

No espaço vetorial V , tomamos $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, um subconjunto qualquer e denotamos por $[S]$ o conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de S , isto é, $[S] = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F\}$.

Então, este é um subespaço de V denominado subespaço gerado por S .

Dizemos que um espaço vetorial V é finitamente gerado se existe um subconjunto finito S de V , de modo que $[S] = V$.

i) $V = [S]$, isto é, o conjunto S gera o espaço todo; e

ii) S é linearmente independente.

Nós vimos que a intersecção finita de subespaços é um subespaço, no entanto a união não é necessariamente um subespaço, contudo $W_1 \oplus W_2 = [W_1 \cup W_2]$ é um subespaço vetorial de V (para W_1 e W_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V).

reversos $\dim V$. Se, $\dim V = n$, então V é um

espaço vetorial n -dimensional sobre um corpo F .

Seja $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um subconjunto do espaço vetorial V .

Dizemos que S é linearmente independente (L.I.) se, e somente se, a equação $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$, com $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$, verifica-se apenas para $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Caso contrário, S é linearmente dependente (LD).

Lema 1.2.2 Os vetores não nulos $v_1, v_2, \dots, v_n$ são linearmente dependentes se, e somente se, um deles for uma combinação linear dos vetores restantes. ■

Teorema 1.2.2 Seja A uma matriz com elementos no corpo F . Então, as linhas (ou colunas) não nulas de A , na forma escalonada, são linearmente independentes. ■

Teorema 1.2.3 Ao invés de dizermos uma matriz com elementos no corpo F , diremos somente uma matriz sobre F , ou ainda, A uma matriz de ordem $m \times n$.

ao sentido de inclusão de conjuntos) de S , então $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de

Qualquer subconjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de um espaço vetorial V é uma base de V se, e somente se,

- i) $V = [S]$, isto é, o conjunto S gera o espaço todo; e
- ii) S é linearmente independente.

V , com $k < n$. Então, existem elementos $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n \in V$ tais que

$\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$ é uma base de V .

Ao número de elementos de uma base de um espaço vetorial V denominamos dimensão de V e escrevemos $\dim V$. Se, $\dim V = n$, então V é um espaço vetorial n -dimensional sobre um corpo F .

Teorema 1.2.5 Sejam V um espaço vetorial e W um subespaço vetorial de V .

Então, $\dim W \leq \dim V$. Se X é um conjunto finito e não vazio, então o conjunto W de todas as funções de X em um corpo F , isto é, $W = \{f / f: X \rightarrow F\}$ é um espaço vetorial de dimensão igual ao número de elementos de X . Para quaisquer funções $f, g \in W$ e qualquer escalar $\alpha \in F$, verifica-se:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ e}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in X.$$

P1.2.1. Nenhuma base de V contém mais elementos que $\dim V$.
Sempre que nos referirmos nesta dissertação a um espaço vetorial estaremos considerando-o de dimensão finita.

P1.2.2. Se B_1 e B_2 são duas bases de V e $v \in B_1$, então existe $w \in B_2$, tal que,

Teorema 1.2.3 Seja S um subconjunto do espaço vetorial V . Se $V = [S]$ e $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é um subconjunto linearmente independente maximal (maximal no sentido de inclusão de conjuntos) de S , então $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V . ■

P1.2.4. a) Se S é um subconjunto de V , então $0 \leq \dim[S] \leq |S|$.

Teorema 1.2.4 (Teorema do Completamento) Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$, e seja $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ um subconjunto linearmente independente de V , com $k < n$. Então, existem elementos $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n \in V$ tais que $\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ é uma base de V . ■

Teorema 1.2.5 Sejam V um espaço vetorial e W um subespaço vetorial de V .

Então, $\dim W \leq \dim V$. Em particular, se $\dim W = \dim V$, então $V = W$. ■

Teorema 1.2.6 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, e sejam W_1 e W_2 subespaços de V . Então, $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$. ■

Em um espaço vetorial V valem as seguintes propriedades:

P_{1.2.1}. Nenhuma base de V contém propriamente outra;

P_{1.2.2}. Se B_1 e B_2 são duas bases de V e $v \in B_1$, então existe $w \in B_2$, tal que,

$(B_1 - \{v\} \cup \{w\})$ também é uma base;

P_{1.2.3}. Sejam B_1 e B_2 bases de V , então $|B_1| = |B_2|$; e

P_{1.2.4}. a) Se S é um subconjunto de V , então $0 \leq \dim[S] \leq |S|$;

b) Se S_1 e S_2 são subconjuntos de V , com $S_1 \subseteq S_2$, então

$$\dim[S_1] \leq \dim[S_2] \text{ e}$$

c) Se S_1 e S_2 são subconjuntos de V , então

$$\dim[S_1 \cup S_2] + \dim[S_1 \cap S_2] \leq \dim[S_1] + \dim[S_2]. \blacksquare$$

Consideramos o conjunto $F^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in F\}$, então, com as operações usuais, (+ (soma ordinária) e $\cdot$ (multiplicação ordinária)), F^n é um espaço vetorial sobre F . Para significar que o vetor w de F^n possui n componentes, escrevemos n -vetor w .

Considerando A uma matriz arbitrária $m \times n$ sobre um corpo F , o espaço linha de A é o subespaço de F^n gerado pelas linhas de A , e o espaço coluna de A é o subespaço de F^m gerado pelas colunas de A . A dimensão do espaço linha de A é denominada posto das linhas de A e a do espaço coluna é denominada posto das colunas de A . O posto das linhas é igual ao maior número de linhas linearmente independentes, e o posto das colunas é igual ao maior número de colunas linearmente independentes. Conseqüentemente, o posto das linhas e das colunas são iguais, ou seja, as dimensões dos espaços linha e coluna são iguais. Também, o posto de A (ou de A^T , onde A^T indica a matriz transposta de A) é igual ao maior número de linhas (ou colunas) linearmente independentes.

Sejam V_1 e V_2 espaços vetoriais sobre o mesmo corpo F . Uma aplicação $T: V_1 \rightarrow V_2$ é chamada transformação linear se, e somente se, $T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2), \forall v_1, v_2 \in V_1$ e $\alpha, \beta \in F$.

Seja $T: V_1 \rightarrow V_2$ uma transformação linear. Então,

i) a imagem de T , denotada por $\text{Im}(T)$, é o seguinte subconjunto de V_2 :



$$\text{Im}(T) = \{v_2 \in V_2 / T(v_1) = v_2, \text{ para algum } v_1 \in V_1\}; \text{ e}$$

ii) o núcleo de T , denotado por $\text{Ker}(T)$, é o conjunto dos elementos em V_1 , os quais são associados com o elemento nulo de V_2 , isto é, $\text{Ker}(T) = \{v \in V_1 / T(v) = 0\}$.

Teorema 1.2.9 Dois espaços vetoriais V_1 e V_2 no mesmo corpo F são isomorfos

se, e somente se, $\dim V_1 = \dim V_2$.

É evidente que o núcleo e a imagem de T são subespaços de V_1 e V_2 respectivamente. Muitas vezes, o núcleo de uma transformação linear T é denominado espaço nulo de T e sua dimensão é denominada nulidade de T , enquanto a dimensão da imagem de T é denominada o posto de T .

uma única matriz $A_{m \times n}$ (salvo a semelhança de matrizes), onde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposição 1.2.1 Seja $T : V_1 \rightarrow V_2$ uma transformação linear. Então, a transformação linear T é injetora se, e somente se, $\text{Ker}(T) = \{0\}$. ■

Teorema 1.2.7 Sejam $T : V_1 \rightarrow V_2$ uma transformação linear e V_1 espaço de dimensão finita sobre o corpo F . Então,

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T)) \equiv \text{posto}(T) + \text{nulidade}(T) = \dim V_1. \blacksquare$$

Se A é uma matriz $n \times n$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ e T a trans-

Sejam V_1 e V_2 dois espaços vetoriais sobre um corpo F . Então, V_1 e V_2 são isomorfos se existe uma transformação linear $T : V_1 \rightarrow V_2$ o qual é uma bijeção.

Teorema 1.2.8 Todo espaço vetorial n -dimensional sobre o corpo F é isomorfo ao espaço F^n . ■

Teorema 1.2.9 Dois espaços vetoriais V_1 e V_2 no mesmo corpo F são isomorfos se, e somente se, $\dim V_1 = \dim V_2$. ■

A transformação linear $T: F^n \rightarrow F^m$ dada pela equação $T(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)$ é representada por meio de uma única matriz $A_{m \times n}$ (salvo a semelhança de matrizes), onde

$$(A)_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ e reciprocamente.}$$

Em virtude da correspondência biunívoca que existe entre uma matriz e a transformação linear, podemos falar núcleo de A e imagem de A , isto é:

Se A é uma matriz $m \times n$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ e T a trans-

formação linear associada a A , então:

i) o espaço nulo de A , denotado $\text{Ker}(A)$ ($= \text{Ker}(T)$), é a coleção de vetores $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, satisfazendo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ii) a imagem de A , denotada $\text{Im}(A)$ ($= \text{Im}(T)$), é a coleção de vetores expressáveis como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ para qualquer } (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Conseqüentemente, a nulidade de T é igual a nulidade de A e o

posto de T é igual ao posto de A . Daí, podemos concluir:

O posto de A somado a nulidade de A é igual ao número de colunas da matriz A .

Seja V um espaço vetorial (sobre o corpo F), e sejam

$w_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in V$ e $w_2 = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in V$. O produto interno de w_1 e w_2 , denotado por $\langle w_1, w_2 \rangle$, é o escalar dado por:

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \dots + \alpha_n \gamma_n.$$

Os vetores w_1 e w_2 do espaço vetorial n -dimensional V são ortogonais se, e somente se, $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$ (com, 0 a identidade aditiva no corpo F).

Dois subespaços W_1 e W_2 do espaço vetorial V (sobre o corpo F) são ortogonais se, e somente se, qualquer vetor de W_1 é ortogonal a todo vetor de W_2 .

Os subespaços W_1 e W_2 de um espaço vetorial V sobre um corpo F são ortogonais complementares se, e somente se, W_1 e W_2 são ortogonais e $V = W_1 \oplus W_2 = [W_1 \cup W_2]$.

Para ilustrar a relação de ortogonalidade, consideremos o espaço vetorial $V = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$ sobre o corpo $GF(2)$, isto é, $V = F^3$, onde $F = GF(2)$.

i. Se considerarmos os subespaços W_1 e W_2 de V , $W_1 = [(1,0,0), (0,0,1)]$ e $W_2 = [(1,0,0), (0,1,0)]$, observamos que W_1 e W_2 não são ortogonais, pois $\langle (1,0,1), (1,1,0) \rangle = 1.1 + 0.1 + 1.0 = 1$.

ii. Se considerarmos a transformação linear $T: F^3 \rightarrow F^3$, onde $T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y)$, verificamos que os subespaços $\text{Ker}(T) = [(1,1,0)]$ e

$\text{Im}(T) = [(1,1,0), (0,0,1)]$ de F^3 são ortogonais (qualquer $w_1 \in \text{Ker}(T)$ e $w_2 \in \text{Im}(T)$, $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$), mas não são ortogonais complementares (não existe $w_1 \in \text{Ker}(T)$ e $w_2 \in \text{Im}(T)$, tal que, $w_1 + w_2 = (1,0,0)$).

iii. Se considerarmos os subespaços S e W de V , $S = [(1,1,1)]$ e $W = [(1,1,0), (0,1,1)]$, verificamos que qualquer elemento de S é ortogonal a todo elemento de W e $V = [S \cup W]$, logo W e S são ortogonais complementares.

Quanto a teoria de determinantes nós precisamos dos seguintes

resultados:

• $\det A = \det A^T$, para toda matriz quadrada A sobre um corpo F ;

• $\det(A.B) = \det A . \det B$, para quaisquer matrizes A e B que esteja definido o produto A por B ;

• Se A é uma matriz $m \times n$, então o determinante de uma submatriz $p \times p$ de A ($1 \leq p \leq \min(m,n)$), obtido a partir de A pela retirada de $m - p$ linhas e $n - p$ colunas, é chamado um menor de A de ordem p . As linhas e colunas mantidas em A são dadas por $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m$ e $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n$ respectivamente,

e o correspondente menor é denotado por $A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ j_1 & j_2 & \dots & j_p \end{pmatrix}$.

- (Teorema de Binet-Cauchy) Se A é uma matriz $m \times n$, B uma matriz $n \times m$ e

$$m \leq n, \text{ então } \det A \cdot B = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} \cdot B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}.$$

- Seja A uma matriz sobre um corpo F . O posto de A é r se, e somente se,

i) Existe em A pelo menos uma submatriz quadrada de ordem r com determinante diferente de zero; e

ii) Qualquer submatriz quadrada de ordem maior que r tem determinante nulo.

- Seja A uma matriz $m \times m$. Então, A é inversível (ou não singular) se, e somente se, $\det A \neq 0$.

Neste capítulo, mencionaremos algumas definições e resultados

básicos da teoria de grafos que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Estas

- Dada uma matriz A de ordem $m \times n$ ($m \leq n$) dizemos que uma submatriz B não singular é maior se a ordem de B for m .

definições e resultados foram tomadas a partir das referências: Berge², Bond & Murty³ e Thulasiraman & Swamy²³, Trudeau²⁴.

- Se A é uma matriz $m \times n$ ($m \leq n$), então o determinante de qualquer submatriz de ordem m é denominado um determinante maior de A .

2.2 Conceitos

Um grafo G é um par ordenado de conjuntos (V, E) consistindo

de um conjunto $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ (denominado conjunto de vértices) e de um con-

junto $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ (denominado conjunto de arestas), onde os elementos e_i de E

$(i = 1, \dots, m)$ são pares não ordenados de elementos (elementos não necessariamente distintos) de V . Também denotaremos o conjunto V como $V(G)$ e o conjunto E como $E(G)$, para dizermos o conjunto de vértices e arestas respectivamente.

Capítulo 2

Os elementos de $V(G)$ e $E(G)$ são denominados vértices e arestas respectivamente do grafo G .

Elementos da Teoria de Grafos

Em razão de $|V| = n$ e $|E| = m$, dizemos que G possui ordem n e tamanho m respectivamente. No nosso trabalho, caso não mencionemos contrário, consideramos somente grafo finito, isto é, grafo de ordem n e tamanho m , para algum n e m inteiros.

2.1 Introdução

Neste capítulo, mencionaremos algumas definições e resultados básicos da teoria de grafos que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Estas definições e resultados foram tomadas a partir das referências: Berge⁵, Bond & Murty⁸ e Thulasiraman & Swamy²³, Trudeau²⁴.

Além disto, dizemos que a aresta e é incidente em x e y e reciprocamente.

As arestas do tipo (x, t) e (t, y) no grafo G são denominadas arestas adjacentes.

2.2 Conceitos

Um grafo G é um par ordenado de conjuntos (V, E) consistindo de um conjunto $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ (denominado conjunto de vértices) e de um conjunto $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ (denominado conjunto de arestas), onde os elementos e_r de E

$(r = 1, \dots, m)$ são pares não ordenados de elementos (elementos não necessariamente distintos) de V . Também denotaremos o conjunto V como $V(G)$ e o conjunto E como $E(G)$, para dizermos o conjunto de vértices e arestas respectivamente de G .

Os elementos de $V(G)$ e $E(G)$ são denominados vértices e arestas respectivamente do grafo G .

Em razão de $|V| = n$ e $|E| = m$, dizemos que G possui ordem n e tamanho m respectivamente. No nosso trabalho, caso não mencionemos contrário, consideramos somente grafo finito, isto é, grafo de ordem n e tamanho m , para algum n e m inteiros não negativos.

Figura 2.2.1

Se $e = (x, y)$ é uma aresta do grafo G , então os vértices x e y são denominados os extremos de e e por conseguinte x e y são vértices adjacentes. Além disto, dizemos que a aresta e é incidente em x e y e reciprocamente.

As arestas do tipo (x, t) e (t, y) no grafo G são denominadas arestas adjacentes.

Duas ou mais arestas com os mesmos extremos distintos em comum são denominadas arestas paralelas.

Uma aresta $e = (x, y)$ é denominada uma laçada (ou laço) se $x = y$.

Um grafo pode ser representado por um diagrama, isto é, o vértice é representado por um ponto (ou um pequeno círculo) e uma aresta e é representada por um segmento de linha que une dois pontos que representam os vértices extremos de e . O grafo da figura 2.2.1 (abaixo) ilustra o diagrama de um grafo $G = (V, E)$, com $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

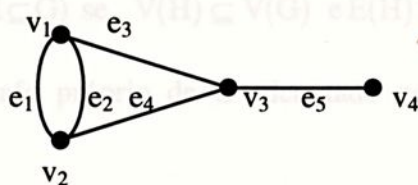


Figura 2.2.1

Obs.: Sem dúvida haverá pelo menos um diagrama representando um grafo dado.

Um grafo $G = (V, E)$ é simples, se G não possuir laçadas nem arestas paralelas. G é denominado grafo vazio se não possuir arestas, enquanto G é nulo, se $V = \emptyset$ e $E = \emptyset$.

O grau de um vértice v de G , denotado por $d_G(v)$ ou $d(v)$, é o número de arestas (laçadas) incidentes em v .

Um vértice v é denominado vértice isolado se, e somente se, $d_G(v) = 0$.

O grafo G que possui todos os vértices com o mesmo grau é denominado regular, isto é, $d_G(v) = r$ para todo vértice v de G e r algum inteiro não negativo.

Um grafo $H = (V(H), E(H))$ é um subgrafo de $G = (V(G), E(G))$ (denotado por $H \subseteq G$) se, $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$ e dizemos que H é denominado subgrafo próprio de G (denotado por $H \subset G$), se $V(H) \subset V(G)$ ou $E(H) \subset E(G)$.

Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ subgrafos de um grafo $G = (V, E)$. Dizemos que G_1 e G_2 são grafos arestas-disjuntos, se $E_1 \cap E_2 = \emptyset$; analogamente, G_1 e G_2 são grafos vértices-disjuntos, se $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

O subgrafo H do grafo G é denominado subgrafo gerador de G se, e somente se, H possui todos os vértices de G , isto é, $V(H) = V(G)$.

Seja E' um subconjunto de $E(G)$. O subgrafo induzido por E' é

o subgrafo $H = (V', E')$, no qual V' é o conjunto de todos os vértices de G que são extremos das arestas de E' . Este subgrafo é denotado por $G[E']$.

Seja V' um subconjunto de $V(G)$. O subgrafo induzido por V' é o subgrafo $H = (V', E')$, no qual E' é o conjunto de todas as arestas de G cujos extremos estão em V' . Este subgrafo é denotado por $G[V']$.

Um caminho no grafo G é uma seqüência alternada finita de vértices distintos e arestas distintas da forma $W: v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$, tal que, os vértices v_0 e v_k são os extremos inicial e final respectivamente do caminho e os vértices v_{i-1} e v_i os vértices extremos de e_i , $1 \leq i \leq k$. O comprimento do caminho W é o número de arestas da seqüência. Os vértices v_i , para $i \neq 0$ e $i \neq k$, são vértices interiores do caminho W .

Por um ciclo (ou circuito) entendemos um caminho fechado, isto é, o vértice inicial e final do caminho coincidem, $v_0 = v_k$.

A matriz ciclo (ou matriz circuito), denotada por $B_c = [b_{ij}]$, de um grafo $G = (V(G), E(G))$ é uma matriz que possui $|E|$ ($E \equiv E(G)$) colunas e tantas linhas quanto o número de ciclos em G e elemento b_{ij} é dado por:

$b_{ij} = 1$, se a j -ésima aresta está no i -ésimo ciclo

e

$b_{ij} = 0$, caso contrário.

Uma linha de B_c é denominada vetor ciclo (ou vetor circuito) de

G.

A relação binária R sobre $V(G)$ definida por:

$$v_i R v_j \Leftrightarrow v_i = v_j \text{ ou existe um caminho em G ligando } v_i \text{ e } v_j$$

é uma relação de equivalência sobre $V(G)$. As classes de equivalências distintas são chamadas componentes conexas (ou simplesmente componentes) de G. Se existe uma única componente conexa, dizemos que G é conexo; caso contrário, dizemos que G é desconexo. Denotamos o número de componentes conexas de G por $\omega(G)$.

Teorema 2.2.1 Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo, então o grafo $G \setminus e = (V, E - \{e\})$ (ou $G \setminus e = G - \{e\}$), (com aresta e removida) é conexo se e pertence a algum ciclo de G. ■

Um grafo $G = (V, E)$ é chamado bipartido, se existem $V_1, V_2 \subseteq V$, tais que, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e para toda aresta

$e = (x, y) \in E$, $x \in V_1$ e $y \in V_2$. No caso de G ser um grafo simples e bipartido, com bipartição V_1 e V_2 , onde qualquer $x \in V_1$ é adjacente a todo vértice de V_2 , dizemos que G é um grafo bipartido completo e denotamos por $K_{p,q}$, sendo $|V_1| = p$ e $|V_2| = q$.

O teorema a seguir caracteriza os grafos bipartidos.

Teorema 2.2.2 Um grafo G é bipartido se, e somente se, G não possui ciclos ímpares. ■

O grafo $G = (V, E)$, com $|V| = n$, é denominado grafo completo e denotado por K_n , se quaisquer dois vértices distintos são unidos exatamente por uma aresta.

Teorema 2.2.3 Consideremos os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$; dizemos que os grafos G_1 e G_2 são isomorfos e escrevemos $G_1 \cong G_2$, se existir uma bijeção $\varphi: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$, tal que, preserve a adjacência dos vértices, isto é, se existir $e = (x, y) \in E_1(G_1)$ se, e somente se, $(\varphi(x), \varphi(y)) \in E_2(G_2)$.

Consideremos dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$. Temos que:

i) A união de G_1 e G_2 , aqui denotado por $G_1 \cup G_2$, é o grafo

$$G_3 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2);$$

ii) A intersecção de G_1 e G_2 , denotado por $G_1 \cap G_2$, é o grafo

$$G_3 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2);$$

iii) A soma anel de G_1 e G_2 , denotado por $G_1 \oplus G_2$, é o grafo induzido pelo

$$\text{conjunto de arestas } E_1 \Delta E_2 = (E_1 \cup E_2) - (E_1 \cap E_2).$$

Um grafo G é acíclico se não possuir ciclos.

Teorema 2.2.5 Um subgrafo conexo H de um grafo conexo $G = (V, E)$ é uma árvore geradora de G se, e somente se, H é acíclico e $|E(H)| = |V(G)| - 1$.

Se o grafo G é acíclico e conexo, então G é denominado uma árvore.

Teorema 2.2.3 Seja $G = (V, E)$ um grafo. O grafo G é uma árvore se, e somente se,

quaisquer dois vértices distintos de V estão ligados por um único caminho. ■

Teorema 2.2.4 Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo. O grafo G é uma árvore se, e

somente se, $G' = (V, E \cup \{e\})$ (ou $G' = G \cup \{e\}$), para qualquer aresta $e \notin E(G)$,

possuir exatamente um ciclo. ■

Para uma árvore geradora $H = (V, S)$ do grafo conexo $G = (V, E)$,

definimos a árvore co-geradora da árvore H no grafo G (denotada por $\bar{H}$), como o

complemento de H , isto é, $\bar{H} = (V, E - S)$ (ou $\bar{H} = H - S$).

Se H é um subgrafo acíclico conexo de um grafo G , então H é denominado uma árvore do grafo G .

Se H é um subgrafo gerador conexo e acíclico de um grafo G , então H é denominada árvore geradora de G .

Teorema 2.2.5 Um subgrafo conexo H de um grafo conexo $G = (V, E)$ é uma árvore geradora de G se, e somente se, H é acíclico e $|E(H)| = |V(G)| - 1$. ■

Teorema 2.2.6 Um grafo G é conexo se, e somente se, G possui uma árvore geradora. ■

Teorema 2.2.7 Seja $G = (V, E)$ um grafo. O grau de todo vértice em G é par se, e somente se, G for uma união de ciclos arestas-disjuntos. ■

Para uma árvore geradora $H = (V, S)$ do grafo conexo $G = (V, E)$, definamos a árvore co-geradora da árvore H no grafo G (denotada por $\bar{H}$), como o complemento de H , isto é, $\bar{H} = (V, E - S)$ (ou $\bar{H} = H - S$).

2. $\mu(G) = |E| - |V| + k$ e consequentemente, temos a relação:

Consideremos $G = (V, E) \equiv (V(G), E(G))$ um grafo com k com-

ponentes $G_1, \dots, G_k$. O grafo $H = \bigcup_{i=1}^k H_i$, onde H_i é uma árvore geradora da com-

ponente G_i (para cada índice fixado $i = 1, \dots, k$), H é denominado uma floresta

geradora do grafo G . Se $H = (V, S)$ é uma floresta geradora do grafo $G = (V, E)$,

então o grafo $\bar{H} = (V, E - S)$ é denominado floresta co-geradora da floresta H no

grafo G .

Consideremos (para cada índice fixado, $i = 1, \dots, k$)

$H_i = (V_i, E_i)$ e $\bar{H}_i = (V_i, \bar{E}_i)$ árvores geradora e co-geradora da componente G_i

de um grafo $G = (V, E) \equiv (V(G), E(G))$ (com k componentes), então temos:

$$\sum_{i=1}^k |E_i| = \sum_{i=1}^k (|V_i| - 1) = |V| - k$$

e para cada índice fixado, $i = 1, 2, \dots, k$, ponha $\bar{E}_i = E(G_i) - E_i$ e

$\sum_{i=1}^k |E(G_i)| = |E|$, então

$$\sum_{i=1}^k |\bar{E}_i| = \sum_{i=1}^k |E(G_i) - E_i| = \sum_{i=1}^k |E(G_i)| - \sum_{i=1}^k |E_i| = |E| - (|V| - k) = |E| - |V| + k.$$

De onde, o número de arestas da floresta geradora é $|V| - k$ e o número de arestas

da floresta co-geradora é $|E| - |V| + k$. O posto (*rank*) de G , denotado por $\rho(G)$, é

o número de arestas de uma floresta geradora, isto é, $\rho(G) = |V| - k$ e a nulidade

de G , denotado por $\mu(G)$, é o número de arestas de uma floresta co-geradora, isto

é, $\mu(G) = |E| - |V| + k$ e conseqüentemente, temos a relação:

$$\rho(G) + \mu(G) = |E(G)|.$$

Propriedade 2.2.1 Toda floresta geradora (ou árvore) de um grafo G possui o mesmo número de arestas.

Propriedade 2.2.2 Toda floresta (árvore) geradora não contém propriamente outra (em um grafo).

Propriedade 2.2.3 Sejam H e S florestas (árvores) geradoras de um grafo G e w uma aresta de H . Então, existe uma aresta s de S , tal que, $(H - w) \cup \{s\}$ é uma floresta geradora de G .

O posto de um grafo G satisfaz as seguintes propriedades:

Propriedade 2.2.4 $0 \leq \rho(H) \leq |E(H)|$, para todo subgrafo H de G .

Propriedade 2.2.5 Se H e S são subgrafos de G , com $H \subseteq S$, então $\rho(H) \leq \rho(S)$.

Propriedade 2.2.6 Se H e S são subgrafos de G , então

$$\rho(H \cup S) + \rho(H \cap S) \leq \rho(H) + \rho(S).$$

Consideremos um grafo G com $G_1, \dots, G_k$ componentes conexas e T_i uma árvore geradora da componente G_i ($i = 1, \dots, k$). Seja s_{ij} ($j = 1, \dots, \rho(G_i)$) aresta da árvore T_i ($i = 1, \dots, k$) e c_{it} ($t = 1, \dots, \mu(G_i)$) aresta da árvore co-geradora $\bar{T}_i$ em G . Desde que, T_i é uma árvore, então (pelo teorema 2.2.4) $T_i \cup c_{it}$ ($t = 1, \dots, \mu(G_i)$) contém exatamente um único ciclo, denotado por $C_{it}(T_i, c_{it})$ ou simplesmente por C_{it} . Este ciclo é formado pela aresta c_{it} e por algumas arestas de T_i que ligam por um único caminho os extremos de c_{it} . O ciclo C_{it} , definido desta maneira, é chamado ciclo fundamental (ou circuito fundamental) relativo a aresta c_{it} na floresta geradora T .

Ao conjunto dos $\mu(G)$ ciclos fundamentais $C_1, \dots, C_{\mu(G)}$ de G relativos respectivamente, as arestas $c_1, \dots, c_{\mu(G)}$ correspondentes a uma floresta (árvore) geradora T de G , denominamos sistema fundamental de ciclos ou conjunto de ciclos fundamentais de G relativo a T .

Um ciclo fundamental C_i relativo a uma floresta geradora T não pode ser expresso como a soma anel dos restantes ciclos fundamentais relativo a T , pois uma característica importante do conjunto de ciclos fundamentais é que a aresta c_i de $\bar{T}$ não está presente em qualquer outro ciclo fundamental relativo a árvore geradora T ; além disto, o ciclo C_i possui somente uma aresta c_i de $\bar{T}$, isto é, nenhuma outra aresta de $\bar{T}$, além de c_i está presente no ciclo C_i .

Teorema 2.2.8 Cada ciclo de G possui uma aresta em comum com qualquer floresta co-geradora.

No quarto capítulo, mostraremos que todo ciclo de G pode ser expresso como uma soma anel de alguns ciclos fundamentais de G relativo a uma floresta (árvore) geradora.

Denominamos matriz ciclo fundamental, denotada por B_f , a uma submatriz da matriz ciclo cujos vetores ciclos de G correspondem a todos os ciclos fundamentais de G relativos a uma floresta (árvore) geradora do grafo G .

Pelas operações elementares de linhas e colunas, podemos escrever a matriz B_f da seguinte forma: $B_f = [U \mid B_{f_0}]$, onde U é a matriz unidade de ordem $\mu(G)$ e as colunas de B_{f_0} correspondem as arestas da floresta (árvore) geradora de G . Em outras palavras:

- i) Para $1 \leq i \leq \mu(G)$, a i -ésima coluna corresponde a aresta c_i da floresta (árvore) co-geradora de G .
- ii) A i -ésima linha corresponde ao ciclo fundamental determinado por c_i .

Desde que, $B_f = [U \mid B_{f_0}]$ e sendo U uma matriz de ordem

$\mu(G)$, resulta que o posto de B_f é $\mu(G)$.

Para ilustrar uma matriz ciclo fundamental tomemos o grafo da figura 2.2.1 e seja árvore geradora consistindo das arestas e_1 , e_3 e e_5 , daí a matriz ciclo fundamental é a seguinte:

$$B_f = \begin{array}{c|cc} & e_2 & e_4 & e_1 & e_3 & e_5 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}.$$

Um subconjunto $S \subseteq E(G)$ é um conjunto corte de um grafo conexo G se, e somente se, S é um conjunto minimal (inclusão) de arestas de G , cuja remoção de G o torna desconexo, isto é, $G \setminus \{S\}$ é desconexo.

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo, e sejam $V_1, V_2 \subseteq V$ tal que, $V_1 \cup V_2 = V$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Ao conjunto de todas as arestas de G , com um extremo em V_1 , e o outro em V_2 , denominamos corte de G (ou co-ciclo) e denotamos por (V_1, V_2) . Se os grafos vértices induzidos por V_1 e por V_2 forem conexos, então, por definição, (V_1, V_2) é um conjunto corte.

Teorema 2.2.9 Seja (V_1, V_2) um corte em um grafo. Então, (V_1, V_2) é um conjunto corte ou é a união de conjuntos cortes arestas-disjuntos.

A matriz corte (ou matriz co-ciclo), denotada por $Q_c = [q_{ij}]$, de um grafo $G = (V(G), E(G))$ é uma matriz que possui $|E(G)|$ colunas e tantas linhas quanto o número de cortes em G e o elemento q_{ij} é dado por:

$q_{ij} = 1$, se a j -ésima aresta está no i -ésimo corte

e

$q_{ij} = 0$, caso contrário.

Uma linha de Q_c é denominada vetor co-ciclo (ou vetor co-circuito) do grafo G .

Consideremos $G = (V, E)$ um grafo com $G_1, \dots, G_k$ componentes conexas e T_i árvore geradora da componente G_i ($i = 1, \dots, k$). Seja b_{ij} ($j = 1, \dots, \rho(G_i)$) aresta da árvore T_i . Quando removemos uma aresta b_{ij} de T_i , desconectamos T_i , onde $T_i - \{b_{ij}\}$ tem exatamente duas componentes conexas T_{i1} e T_{i2} . Sejam V_{i1} e V_{i2} o conjunto de vértices de T_{i1} e T_{i2} respectivamente. Consideremos $G_i[V_{i1}]$ e $G_i[V_{i2}]$ subgrafos de G . O conjunto corte (V_{i1}, V_{i2}) é denominado conjunto corte fundamental (ou simplesmente corte fundamental) de G com respeito a T_i ($i = 1, \dots, k$).

Ao conjunto de todos os $\rho(G)$ cortes fundamentais relativo as $\rho(G)$ arestas de uma floresta (árvore) geradora de um grafo G , chamamos sistema

fundamental de cortes (ou conjunto de cortes fundamentais) de G relativo a T .

Uma característica importante de um corte fundamental relativo a uma floresta geradora T é o de possuir exatamente uma aresta b de T , isto é, nenhuma outra aresta de T , além de b , está presente no corte fundamental relativo a T , construído tomando-se a aresta b de T ; além disto, b não está presente em qualquer outro corte fundamental relativo a T . Devido a estas propriedades, um corte fundamental (relativo a T) não pode ser expresso como a soma anel dos cortes fundamentais restantes.

No quarto capítulo, mostraremos que todo corte de G pode ser expresso como a soma anel de alguns cortes fundamentais.

Teorema 2.2.10 Todo conjunto corte de um grafo G possui uma aresta em comum com qualquer floresta geradora.

Uma submatriz da matriz corte Q_c que corresponda aos $\rho(G)$ cortes fundamentais com relação a uma floresta geradora, é denominada matriz corte (ou matriz co-ciclo) fundamental e denotada por Q_f , em particular Q_f é de ordem $\rho(G) \times E(G)$.

Pelas operações elementares de linhas e colunas podemos escrever a matriz Q_f da seguinte forma: $Q_f = [U \mid Q_{f_0}]$, onde U é a matriz unidade de ordem $\rho(G)$ ($\rho(G) \leq |E(G)|$) e as colunas da matriz Q_{f_0} correspondem as arestas da floresta (árvore) co-geradora de G . Ainda podemos dizer:

- i) Para $1 \leq i \leq \rho(G)$, a i -ésima coluna corresponde a aresta b_i da floresta (árvore) geradora considerada e
- ii) A i -ésima linha corresponde ao conjunto corte fundamental determinado por b_i .

Valendo-se de que $Q_f = [U \mid Q_{f_0}]$ e U sendo a matriz unidade de ordem $\rho(G)$, então o posto de Q_f é $\rho(G) = |E(T)| = |V(G)| - \omega(G)$, onde T é uma floresta (árvore) geradora do grafo $G = (V(G), E(G))$.

A matriz corte fundamental para o grafo da figura 2.2.1 e a árvore geradora consistindo das arestas e_1 , e_3 e e_5 é a seguinte matriz:

$$Q_f = \begin{array}{c|cc} & e_1 & e_3 & e_5 & e_2 & e_4 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array},$$

onde podemos notar que a matriz unidade U é de ordem $\rho(G) = 3$ e o posto de Q_f é $\rho(G) = |E(T)| = |V(G)| - \omega(G) = 4 - 1 = 3$.

Capítulo 3

3.2 Espaço Aresta, 2^E (ou K^E)

Espaços Vetoriais Associados ao Grafo

3.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos o espaço grafo, isto é, o espaço vetorial associado a um grafo. Na primeira associação, seção 3.2, estaremos nos referindo ao espaço de todas as arestas do grafo finito; o qual chamaremos espaço aresta de G . Analogamente, na seção 3.3, estudaremos do espaço vetorial vértice.

A associação de um espaço vetorial a um grafo visa o benefício não só do estudo da teoria, mas também o da solução de alguns problemas relacionados aos grafos.

Entre a literatura revista por nós, encontramos que os primeiros estudos sobre a relação entre o espaço vetorial e a teoria de grafos, entre outros, foram desenvolvidos por: Whitney em 1935, Doyle em 1955, Gould em 1958 e Chen em 1970.

Todo espaço vetorial considerado a partir deste capítulo, está definido sobre o corpo finito, em especial, o corpo de Galois, de módulo dois, $GF(2)$. Existem outras maneiras, com respeito ao corpo utilizado, de associar um espaço vetorial com um grafo, vide Biggs⁶, Bollobás⁷ ou Bachem & Kern⁴.

3.2 Espaço Aresta, 2^E (ou K^E)

As definições e terminologias apresentadas nesta seção foram tomadas a partir das referências: Thulasiraman & Swamy²³ e Biggs⁶.

Seja o grafo $G = (V(G), E(G))$, com conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e conjunto de arestas $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Ao invés de tomarmos o conjunto de arestas denotado por $E(G)$ de G , simplesmente denotaremos o conjunto $E(G)$ por E .

Ao conjunto potência de E , isto é, $2^E = \{A \mid A \subseteq E\}$, vamos munir da operação binária Δ e da operação $*$, definidas como segue:

$$\forall A, B \in 2^E, A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

e

$$\forall \alpha \in GF(2) \text{ e } \forall A \in 2^E,$$

$$\alpha * A = A, \text{ se } \alpha = 1$$

e

$$\alpha * A = \emptyset, \text{ se } \alpha = 0.$$

Verifica-se que:

i) 2^E é um grupo abeliano com a operação Δ ; e

ii) $\forall \alpha, \beta \in GF(2)$ e $\forall A, B \in 2^E$, se satisfaz:

$$(\alpha \cdot \beta) * A = \alpha * (\beta * A),$$

$$(\alpha + \beta) * A = (\alpha * A) \Delta (\beta * A),$$

$$\alpha * (A \Delta B) = (\alpha * A) \Delta (\alpha * B).$$

Assim, o conjunto 2^E munido das operações Δ e $*$ é um espaço vetorial sobre $GF(2)$ e denominado *espaço aresta* do grafo G . Este espaço aresta sempre será denotado por 2^E , se não houver confusão com o conjunto potência de E .

É evidente que a base canônica de 2^E é formada exatamente pelas arestas do grafo G , isto é, $\{\{e_1\}, \dots, \{e_m\}\}$, e por esta razão a dimensão do espaço vetorial 2^E é $|E|$.

Alternativamente, o espaço vetorial 2^E pode ser visto como o conjunto 2^E constituído de todos os subgrafos (arestas) induzidos de G . Esta forma de ver o espaço vetorial 2^E se devem:

- ao fato de que cada subgrafo aresta-induzido de G corresponde a um único subconjunto de E e reciprocamente,
- de considerarmos entre dois subgrafos arestas induzidos $G[E_i]$ e $G[E_j]$ de G a operação soma anel de $G[E_i]$ e $G[E_j]$, denotado por $G[E_i] \oplus G[E_j]$ que, por defini-

ção, é o $G[E_i \Delta E_j]$, e

iii. de escrevermos:

$\alpha * G[E_i] = G[E_i]$, se $\alpha = 1$, para significar $\alpha * A = A$, para qualquer $A \subseteq E(G[E_i])$ e analogamente, $0 * G[E_i] = \emptyset$, se $\alpha = 0$ ($\emptyset$ é o grafo nulo).

Assim, concluímos que o conjunto constituído de todos os subgrafos arestas induzidos de G e munido das operações explicitadas acima é um espaço vetorial sobre $GF(2)$ e isomorfo ao espaço 2^E definido anteriormente.

Agora, consideramos o conjunto K^E formado por $|E|$ -uplas indexadas pelos elementos de E . O elemento (vetor) Γ de 2^E é associado ao elemento representado por $\omega^\Gamma \in K^E$, chamado o vetor incidente de Γ , cuja e -ésima componente ω_e^Γ do vetor ω^Γ é definida como:

$$\omega_e^\Gamma = 1, \text{ se } e \in \Gamma;$$

e

$$\omega_e^\Gamma = 0, \text{ se } e \notin \Gamma.$$

Para os vetores $\omega^\Gamma = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \in K^E$ e $\omega^H = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in K^E$ (onde, $\beta_i, \alpha_i \in GF(2)$ ($i = 1, 2, \dots, m$)), definamos as operações:

função $f: E \rightarrow GF(2)$, $\omega^H + \omega^r = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_m + \beta_m)$ (soma módulo 2), com

$\alpha_i = f(e_i)$ ($1 \leq i \leq m$), isto é, $\omega^r = (f(e_1), \dots, f(e_m))$.

$$\forall \alpha \in GF(2), \alpha \cdot \omega^H = (\alpha \cdot \alpha_1, \alpha \cdot \alpha_2, \dots, \alpha \cdot \alpha_m),$$

verifica-se que K^E munido das operações definidas acima é um espaço vetorial sobre $GF(2)$, cujos elementos são denominados vetores incidentes dos subgrafos de G .

$E = \{e_1, \dots, e_m\}$ em $GF(2) = \{0, 1\}$, temos que a cada elemento de E foi associado

como imagem um único elemento de $GF(2)$, que para imagem de e_i foi escolhido

0 ou 1 e que escolhida a imagem de e_1 , para a imagem de e_i ($i = 2, \dots, m$) foi esco-

espaço de todos os $|E|$ -vetores sobre $GF(2)$, de onde concluímos que os espaços

2^E e K^E são isomorfos. Em vista deste isomorfismo, K^E também é denominado

espaço aresta de G sobre $GF(2)$.

Podemos considerar os vetores de $x \in K^E$ como um vetor linha

O conjunto formado por todas as funções de E em $GF(2)$, onde ou vetor coluna, segundo a conveniência.

quaisquer funções f e g de E em $GF(2)$, qualquer $\alpha \in GF(2)$ e qualquer $e \in E$,

$$(f + g)(e) = f(e) + g(e)$$

Abaixo ilustramos os espaços isomorfos 2^E e K^E associados ao

e

grafo da figura 3.2.1.

$$(\alpha f)(e) = \alpha f(e),$$

é um espaço vetorial $|E|$ -dimensional sobre $GF(2)$. Assim, este espaço é isomorfo

ao K^E . Em razão deste isomorfismo, ao invés de considerarmos os elementos de

K^E como vetores, cujas coordenadas são indexadas por $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, podemos

considerar o conjunto K^E formado por todas as funções de E em $GF(2)$, onde cada

função $f: E \rightarrow GF(2)$ pode ser representada por um vetor $\omega^\Gamma = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, com $\alpha_i = f(e_i)$ ($1 \leq i \leq m$), isto é, $\omega^\Gamma = (f(e_1), \dots, f(e_m))$.

O número de elementos do conjunto K^E (ou o número de subgrupos de G) é 2^m . De fato, considerando K^E constituído por todas as funções de $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ em $GF(2) = \{0, 1\}$, temos que a cada elemento de E foi associado como imagem um único elemento de $GF(2)$, que para imagem de e_1 foi escolhido 0 ou 1 e que escolhida a imagem de e_1 , para a imagem de e_i ($i = 2, \dots, m$) foi escolhido 0 ou 1 independente da de e_{i-j} ($j = 1, 2, \dots, i-1$). Daí, concluímos que $|K^E| = 2^m$ (ou $|K^E| = 2^{|E|}$).

Podemos considerar os vetores de $x \in K^E$, como um vetor linha ou vetor coluna, segundo a conveniência.

Abaixo ilustramos os espaços isomorfos 2^E e K^E associados ao grafo da figura 3.2.1.

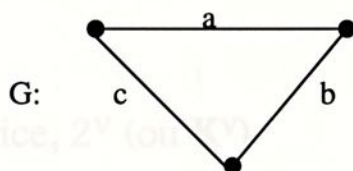


Figura 3.2.1

$2^E = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$, o espaço aresta de G sobre o $GF(2)$,

$K^E = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$, o espaço de vetores incidentes de G (espaço aresta de G) sobre $GF(2)$,

e $E = E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$

as funções de $E(G)$ em $GF(2)$:

$$f_1(a) = 0, f_1(b) = 0 \text{ e } f_1(c) = 0, \quad f_5(a) = 1, f_5(b) = 1 \text{ e } f_5(c) = 0,$$

$$f_2(a) = 1, f_2(b) = 0 \text{ e } f_2(c) = 0, \quad f_6(a) = 1, f_6(b) = 0 \text{ e } f_6(c) = 1,$$

$$f_3(a) = 0, f_3(b) = 1 \text{ e } f_3(c) = 0, \quad f_7(a) = 0, f_7(b) = 1 \text{ e } f_7(c) = 1 \text{ e}$$

$$f_4(a) = 0, f_4(b) = 0 \text{ e } f_4(c) = 1, \quad f_8(a) = 1, f_8(b) = 1 \text{ e } f_8(c) = 1;$$

formando o espaço das funções, no qual, por exemplo:

Se $\Gamma = \emptyset$, então temos $f_1(a) = 0, f_1(b) = 0 \text{ e } f_1(c) = 0$, que é representado pelo vetor $(0,0,0)$ equivalente a $\emptyset$, em outras palavras, simplesmente escrevemos

$$\emptyset \equiv f_1 \equiv (0,0,0)$$

ou

se $\Gamma = G[\{a\}]$, então $f_2(a) = 1, f_2(b) = 0 \text{ e } f_2(c) = 0$, representado pelo vetor $(1,0,0)$.

3.3 Espaço Vértice, 2^V (ou K^V)

No restante do nosso trabalho consideramos somente o espaço aresta de um grafo, porém tomando-se por base a definição de espaço aresta feita

em Thulasiraman & Swamy²³ e a definição de espaço vértice em Biggs⁶, apresentamos nesta seção, de forma análoga, a associação de um grafo ao espaço vértice.

espaço vetorial sobre GF(2), se nós definirmos a operação $*$ da seguinte forma:

Seja o grafo $G = (V, E)$, com $V \equiv V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $E \equiv E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.

Consideramos o conjunto $2^V = \{D / D \subseteq V\}$.

Análoga a definição do espaço aresta de G , consideramos uma operação binária Δ no conjunto 2^V e uma operação $*$ entre os elementos de GF(2) e do conjunto 2^V , tal que:

$$\forall A, B \in 2^V, A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

e

$$\forall \alpha \in GF(2) \text{ e } \forall D \in 2^V,$$

$$\alpha * D = D, \text{ se } \alpha = 1$$

e

$$\alpha * D = \emptyset, \text{ se } \alpha = 0.$$

Verifica-se que 2^V com estas duas operações (Δ e $*$) é um espaço vetorial sobre GF(2). Este espaço é denominado *espaço vértice* de G .

Sendo $\{\{v_1\}, \dots, \{v_n\}\}$ a base canônica de 2^V , então a dimensão do espaço 2^V é n , o número de vértices do grafo G .

Definindo uma operação $\oplus$ entre dois subgrafos vértices-induzidos $G[V_i]$ e $G[V_j]$ de G , onde $G[V_i] \oplus G[V_j] = G[V_i \Delta V_j]$, e sabendo que

cada subgrafo vértice induzido de G corresponde a um único subconjunto de V , verificamos que o conjunto de todos os subgrafos vértices induzidos é também um espaço vetorial sobre $GF(2)$, se nós definirmos a operação $*$ da seguinte forma:

Qualquer G_i , subgrafo vértice induzido de G

$$1 * G_i = G_i$$

e

$$0 * G_i = \emptyset, \text{ com } \emptyset \text{ o grafo nulo.}$$

Este espaço vetorial possui dimensão n , logo isomorfo ao espaço vértice definido anteriormente. Em vista do isomorfismo, também denotamos este espaço por 2^V e chamamos de espaço vértice de G .

Assim, como definimos K^E , consideramos K^V o conjunto de vetores indexados por V , onde o elemento Γ de 2^V é representado por $\omega^\Gamma \in K^V$ se, e somente se, a componente ω_v^Γ do vetor ω^Γ é definida como:

$$\omega_v^\Gamma = 1, \text{ se } v \in \Gamma$$

e

$$\omega_v^\Gamma = 0, \text{ se } v \notin \Gamma.$$

Verifica-se que K^V é um espaço vetorial sobre $GF(2)$ e possui dimensão n , quando consideramos que :

Para qualquer $\omega_H = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^V$ e $\omega_\Gamma = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in K^V$ (onde $\alpha_i, \beta_i \in GF(2)$ ($i = 1, \dots, n$)),

$$\omega_H + \omega_\Gamma = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) \text{ (soma módulo dois)}$$

e

$$\forall \alpha \in \text{GF}(2),$$

$$\alpha \omega_H = (\alpha \alpha_1, \dots, \alpha \alpha_n).$$

Notemos que K^V e 2^V são isomorfos, por motivos semelhantes aos de K^E e 2^E . Neste caso, também chamamos K^V de espaço vértice induzido de G sobre $\text{GF}(2)$.

Também, análogo ao caso do espaço aresta, podemos considerar K^V o conjunto formado por todas as funções de V em $\text{GF}(2)$, onde qualquer função $g: V \rightarrow \text{GF}(2)$ é representada pelo vetor $\omega = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, com $g(v_i) = \alpha_i$ (para $i = 1, \dots, n$).

Ilustramos abaixo os espaços isomorfos 2^V e K^V (sobre $\text{GF}(2)$) associados ao grafo da figura 3.3.1 (abaixo).

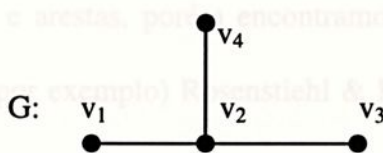


Figura 3.3.1

$$2^V = \{\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}\},$$

$$K^V = \{(0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1),$$

$(0,1,1,0), (0,1,0,1), (0,0,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,1), (1,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1)\}$

e as funções de $V(G)$ em $GF(2)$: $f_1(v_1) = 0, f_1(v_2) = 0, f_1(v_3) = 0$ e $f_1(v_4) = 0,$

$$f_2(v_1) = 1, f_2(v_2) = 0, f_2(v_3) = 0 \text{ e } f_2(v_4) = 0,$$

$$f_3(v_1) = 0, f_3(v_2) = 1, f_3(v_3) = 0 \text{ e } f_3(v_4) = 0,$$

$\vdots$

$$f_{16}(v_1) = 1, f_{16}(v_2) = 1, f_{16}(v_3) = 1 \text{ e } f_{16}(v_4) = 1,$$

formando o espaço das funções, onde:

Se $\Gamma = G[\{v_1, v_2, v_3, v_4\}]$, então

$$f_{16}(v_1) = 1, f_{16}(v_2) = 1, f_{16}(v_3) = 1 \text{ e } f_{16}(v_4) = 1, \text{ que}$$

é representado pelo vetor $(1,1,1,1)$ e equivalente a $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Em razão do objetivo do nosso trabalho, omitimos uma relação entre os espaços vértices e arestas, porém encontramos estudos que relacionam estes dois espaços, vide (por exemplo) Rosenstiehl & Read²², Archdeacon et al³, Biggs⁶ e Bollobás⁷.

4.2 Espaço Ciclo

Esta seção, visa uma caracterização do espaço ciclo, sobre o

Capítulo 4

Teorema 4.2.1 Seja o grafo $G = (V, E)$. Então, o conjunto C formado por todos os ciclos e por toda a união de ciclos arestas-disjuntos de G (incluindo o grafo nulo

Espaços: Ciclo, Co-ciclo e Biciclo

Demonstração:

$0 \in C$, por hipótese.

4.1 Introdução

Neste capítulo, identificaremos os espaços ciclo, co-ciclo e bi-ciclo (como subespaços do espaço aresta), e veremos a dimensão e o número de elementos dos dois primeiros espaços a partir da determinação das bases. Quanto ao estudo do espaço biciclo, será visto no capítulo 6.

Também, acreditamos que pode-se identificar alguns subespaços importantes a partir do espaço vértice, mas para isso serão necessários alguns cuidados, enquanto se refere a definição de operações convenientes para não violar as propriedades que garantem a existência de um subespaço de um espaço vetorial.

Os resultados deste capítulo foram retirados de Chen¹⁰, Deo¹², Thulasiraman & Swamy²³ e Wilson³¹.

4.2 Espaço Ciclo

Esta seção, visa uma caracterização do espaço ciclo, sobre o seguinte resultado.

Teorema 4.2.1 Seja o grafo $G = (V, E)$. Então, o conjunto C formado por todos os ciclos e por toda a união de ciclos arestas-disjuntos de G (incluindo o grafo nulo $(\emptyset)$) é um subespaço vetorial de 2^E .

Demonstração:

i) $\emptyset \in C$, por hipótese.

ii) Mostremos que o conjunto C é fechado com respeito a operação soma do espaço vetorial 2^E , isto é, sejam $C_1, C_2 \in C$ e provemos que $C_1 \oplus C_2 \in C$.

Desde que, $C_3 = C_1 \oplus C_2 \in 2^E$, então, pelo teorema 2.2.6, é suficiente mostrarmos que todo vértice de C_3 possui grau par.

Consideremos qualquer vértice v em C_3 , como $C_3 = C_1 \oplus C_2$, então v está presente em pelo menos um dos subgrafos C_1 ou C_2 .

Seja X_i o conjunto de arestas incidentes sobre v em C_i , para $i = 1, 2, 3$, então $|X_i|$ é o grau do vértice v em C_i .

Como $C_3 = C_1 \oplus C_2$, temos (pela definição de operação soma):

$$X_3 = X_1 \Delta X_2 = (X_1 \cup X_2) - (X_1 \cap X_2).$$

Daí, ilustrar o teorema 4.2.1 usamos o grafo G da figura 4.2.1,

$$\begin{aligned} |X_3| &= |(X_1 \cup X_2) - (X_1 \cap X_2)| \\ &= |X_1 \cup X_2| - |X_1 \cap X_2| \\ &= |X_1| + |X_2| - 2|X_1 \cap X_2|. \end{aligned}$$

Desde que, $C_1, C_2 \in C$, então $|X_1| = 2q$ e $|X_2| = 2t$, para q e t inteiros positivos.

Assim, $|X_3| = 2q + 2t - 2|X_1 \cap X_2| = 2(q + t - |X_1 \cap X_2|)$; daí $|X_3|$ é par e desta forma $C_3 \in C$.

Figura 4.2.1

Figura 4.2.2

Figura 4.2.3

iii) Agora provemos que para $\forall \alpha \in GF(2)$ e $\forall C_1 \in C$, $\alpha * C_1 \in C$.

Como $\alpha * C_1 = \begin{cases} C_1, & \text{se } \alpha = 1 \\ \emptyset, & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$, concluímos que $\alpha * C_1 \in C$.

Figura 4.2.4

Corolário 4.2.1: Portanto, C é um subespaço do espaço aresta de G , isto é, C é subespaço do 2^E . ■

Demonstração:

Este subespaço C é denominado *espaço ciclo* (ou *espaço circuito*) de G .

Pelo teorema, $C_1 \Delta C_2$ é um ciclo ou a união de ciclos arestas-disjuntos.

Tomemos $C_3 = C_1 \Delta C_2$, daí

Para ilustrar o teorema 4.2.1 usamos o grafo G da figura 4.2.1, onde $\{(0,0,0,0,0), (1,1,1,0,0), (0,0,1,1,1), (1,1,0,1,1)\}$ é o espaço ciclo C de G sobre $GF(2)$, a figura 4.2.2 ilustra o vetor incidente $C_1 = (1,1,0,1,1)$, a figura 4.2.3 o vetor incidente $C_2 = (1,1,1,0,0)$ e finalmente a figura 4.2.4 ilustra $C_1 \oplus C_2$.

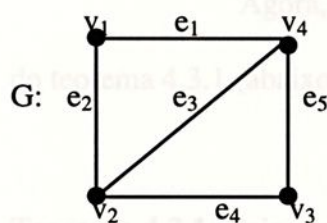


Figura 4.2.1

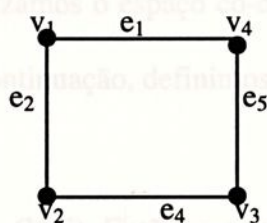


Figura 4.2.2

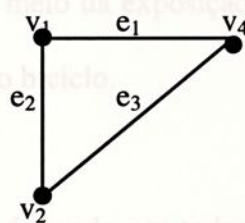


Figura 4.2.3

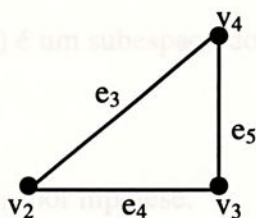


Figura 4.2.4

Corolário 4.2.1: Seja C o espaço ciclo de G , e sejam $C_1, C_2 \in C$, com $C_1 \neq C_2$ e $e \in C_1 \cap C_2$. Então, existe um ciclo C_3 que não contém e em $C_1 \cup C_2$.

Demonstração:

Por hipótese, $C_1 \neq C_2$ e $e \in C_1 \cap C_2$, logo $C_1 \Delta C_2 \neq \emptyset$ e $e \notin C_1 \Delta C_2$.

Pelo teorema, $C_1 \Delta C_2$ é um ciclo ou a união de ciclos arestas-disjuntos.

Tomemos $C_3 = C_1 \Delta C_2$, daí

$$B = C_3 = C_1 \Delta C_2 = C_1 \cup C_2 - C_1 \cap C_2 \subseteq C_1 \cup C_2 \text{ e o}$$

corolário está provado. ■

4.3 Espaço Co-ciclo e espaço Biciclo

Agora, caracterizamos o espaço co-ciclo por meio da exposição do teorema 4.3.1 (abaixo) e, na continuação, definimos o espaço biciclo.

Teorema 4.3.1: Seja o grafo $G = (V, E)$. Então, o conjunto C_0 formado por todos os conjuntos cortes e por toda a união de conjuntos cortes arestas disjuntas de G (incluindo o grafo nulo ($\emptyset$)) é um subespaço do espaço vetorial 2^E .

Demonstração:

i) $\emptyset \in C_0$, por hipótese.

ii) Mostremos que $\forall S_1, S_2 \in C_0, S_1 \oplus S_2 \in C_0$.

Como S_1 e S_2 são cortes, então são da forma $S_1 = (V_1, V_2)$ e $S_2 = (V_3, V_4)$, para $V_i \subset V$ ($i = 1, \dots, 4$), no grafo $G = (V, E)$.

Por conseguinte, temos: $V = V_1 \cup V_2 = V_3 \cup V_4$

e

$$V_1 \cap V_2 = V_3 \cap V_4 = \emptyset.$$

Sejam: $A = V_1 \cap V_3$;

$$B = V_1 \cap V_4;$$

$$C = V_2 \cap V_3 \text{ e}$$

$$D = V_2 \cap V_4.$$

Pode-se ver que A, B, C e D são conjuntos mutuamente disjuntos, por exemplo, se for $A \cap B \neq \emptyset$

$$\Rightarrow (V_1 \cap V_3) \cap (V_1 \cap V_4) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow V_1 \cap (V_3 \cap V_4) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow V_1 \cap \emptyset \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq \emptyset, \text{ absurdo.}$$

De modo semelhante, mostra-se que $A \cap C = \emptyset, A \cap D = \emptyset, B \cap C = \emptyset, B \cap D = \emptyset$ e $C \cap D = \emptyset$.

$$\text{Por outro lado, } A \cup B = (V_1 \cap V_3) \cup (V_1 \cap V_4)$$

$$= V_1 \cap (V_3 \cup V_4)$$

$$= V_1 \cap V$$

$$= V_1;$$

semelhantemente: $C \cup D = V_2; A \cup C = V_3$ e $B \cup D = V_4$.

Daí, S_1 e S_2 ficam expressos como:

$$S_1 = (A \cup B, C \cup D)$$

$$= (A \cup B, C) \cup (A \cup B, D)$$

Logo, concluímos que C_0 é um subespaço vetorial de 2^X .

$$= (A,C) \cup (A,D) \cup (B,C) \cup (B,D)$$

e

$$S_2 = (A \cup C, B \cup D)$$

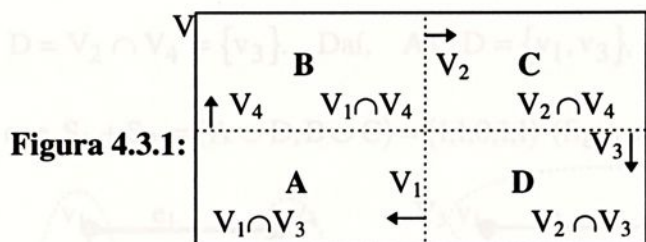
$$= (A, B \cup D) \cup (C, B \cup D)$$

$$= (A,B) \cup (A,D) \cup (C,B) \cup (C,D).$$

$$\text{De onde, } S_1 \oplus S_2 = (A,C) \cup (B,D) \cup (A,B) \cup (C,D).$$

Como $(A,C) \cup (B,D) \cup (A,B) \cup (C,D) = (A \cup D, B \cup C)$, podemos escrever: $S_1 \oplus S_2 = (A \cup D, B \cup C)$.

Como $A \cup D$ e $B \cup C$ são mutuamente disjuntos e $(A \cup D) \cup (B \cup C) = V$ (observe a figura 4.3.1), então $S_1 \oplus S_2$ é um corte em G , isto é, $S_1 \oplus S_2 \in C_0$.



iii) Agora, provemos que para $\forall \alpha \in \text{GF}(2)$ e $\forall S \in C_0$

$$\alpha * S \in C_0.$$

$$\text{Temos: } \alpha * S = \begin{cases} S, & \text{se } \alpha = 1 \\ \emptyset, & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}.$$

Portanto, $\alpha * S \in C_0$.

Logo, concluímos que C_0 é um subespaço vetorial do 2^E . ■

Corolário 4.3.1: Seja C_0 o espaço co-ciclo de G e sejam C_{01} e $C_{02} \subset C_0$ com

Este subespaço C_0 é denominado espaço co-ciclo (ou espaço co-circuito, ou ainda, espaço conjunto corte) de G .

Sendo, C_0 e C subespaços do espaço vetorial 2^E sobre $GF(2)$.

Para ilustrar o teorema 4.3.1 consideramos o grafo da figura 4.2.1, onde o espaço co-ciclo $C_0 = \{(0,0,0,0,0), (1,1,0,0,0), (0,1,1,1,0), (0,0,0,1,1), (1,0,1,1,0), (1,1,0,1,1), (0,1,1,0,1), (1,0,1,0,1)\}$. Tomando, por exemplo, S_1 e S_2 , dois elementos de C_0 , onde $S_1 = (V_1, V_2) = (1,0,1,1,0)$ (figura 4.3.2) e $S_2 = (V_3, V_4) = (0,1,1,0,1)$ (figura 4.3.3), com $V_1 = \{v_1, v_2\}$, $V_2 = \{v_3, v_4\}$, $V_3 = \{v_1, v_4\}$ e $V_4 = \{v_2, v_3\}$, então $S_1 \oplus S_2 = (1,1,0,1,1)$. No grafo da figura 4.3.4 temos: $A = V_1 \cap V_3 = \{v_1\}$, $B = V_1 \cap V_4 = \{v_2\}$, $C = \{V_2 \cap V_3\} = \{v_4\}$ e $D = V_2 \cap V_4 = \{v_3\}$. Daí, $A \cup D = \{v_1, v_3\}$, $B \cup C = \{v_2, v_4\}$ e verificamos que $S_1 + S_2 = (A \cup D, B \cup C) = (1,1,0,1,1)$ (figura 4.3.4).

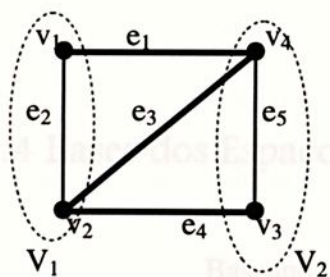


Figura 4.3.2

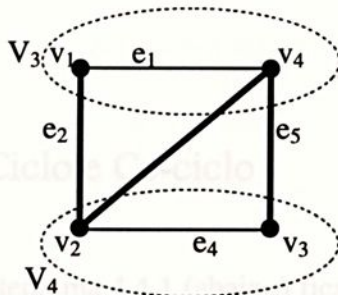


Figura 4.3.3

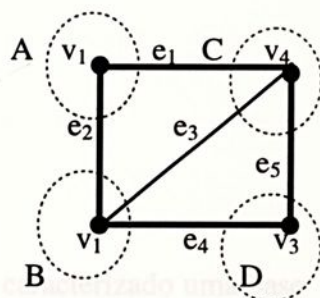


Figura 4.3.4

A demonstração do corolário a seguir é análoga a do corolário

4.2.1.

Corolário 4.3.1: Seja C_0 o espaço co-ciclo de G e sejam C_{01} e $C_{02} \in C_0$, com $C_{01} \neq C_{02}$ e $e \in C_{01} \cap C_{02}$. Então, existe um co-ciclo C_{03} que não contém e em $C_{01} \cup C_{02}$. ■

Demonstração: Sendo, C_0 e C subespaços do espaço vetorial 2^E sobre $GF(2)$, então $C \cap C_0$ é um subespaço vetorial de 2^E sobre $GF(2)$. Este sub-espaço, denotado por B_i , é denominado *espaço biciclo*, por exemplo, vide o artigo de Archdeacon et al³.

O espaço biciclo B_i aparece no grafo da figura 4.2.1, como $B_i \equiv C \cap C_0 = \{(0,0,0,0,0), (1,1,0,1,1)\}$.

Existe alguma solução algébrica para se contornar o problema de encontrar um grafo que possa corresponder aos espaços ciclo e co-ciclo dados, por exemplo, vide Gould¹⁵.

4.4 Bases dos Espaços Ciclo e Co-ciclo

Baseando no teorema 4.4.1 (abaixo) fica caracterizado uma base para o espaço ciclo e também para o espaço co-ciclo; ainda definiremos a matriz circuito base e a matriz co-ciclo base.

Teorema 4.4.1 Seja $G = (V, E)$ um grafo dado. Então, os ciclos e co-ciclos fundamentais associados a uma floresta geradora considerada, constituem uma base para os subespaços ciclo e co-ciclo respectivamente.

Demonstração:

Assumamos que G seja conexo, isto é, $\omega(G) = k = 1$.

Consideremos T uma árvore geradora de G , na qual $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ são as arestas de T com $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ os respectivos co-ciclos fundamentais.

Qualquer S_i possui exatamente uma aresta que não está presente em qualquer um dos S_j , para $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n-1$ (por definição de co-ciclos fundamentais). Daí, S_i não pode ser expresso como soma anel dos S_j , para $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n-1$ e desde que S_i é qualquer elemento do conjunto de co-ciclos fundamentais considerado, concluímos que este conjunto é independente.

Seja S qualquer subgrafo do subespaço co-ciclo de G .

Suponhamos que S possui exatamente t arestas $s_{r_1}, s_{r_2}, \dots, s_{r_t}$ que estão em T .

Definamos o co-ciclo $S' = S_{r_1} \oplus S_{r_2} \oplus \dots \oplus S_{r_t}$.

Em razão da definição de soma anel, de s_{r_i} estar presente somente em S_{r_i} para $i = 1, 2, \dots, n-1$ (por definição de co-ciclos fundamentais) e em

razão da definição de S' , concluímos que: $s_{r1}, s_{r2}, \dots, s_{rt}$ estão presentes em S' e são as únicas arestas de S' que estão em T .

Em virtude de $s_{r1}, s_{r2}, \dots, s_{rt}$ serem as únicas arestas de T que estão em S e em S' , então $S \oplus S'$ não possui arestas de T .

Se $S \oplus S' \neq \emptyset$, temos uma contradição, pois em razão de $S \oplus S'$ possuir somente arestas que não estão em T , então para qualquer $v_i, v_j \in V(G)$, existe um caminho por T ligando v_i a v_j em $G \setminus (S \oplus S')$, daí $G \setminus (S \oplus S')$ é conexo. Assim $S \oplus S'$ não é um co-ciclo em G ; no entanto, por teorema 4.3.1, $S \oplus S'$ é um co-ciclo ou a união de co-ciclos arestas disjuntas, desde que S e S' são co-ciclos. Portanto, $S \oplus S' = \emptyset$. Daí $S = S' = S_{r1} \oplus S_{r2} \oplus \dots \oplus S_{rt}$.

Aqui podemos concluir que o conjunto de co-ciclos fundamentais é uma base para o subespaço co-ciclo, pois o conjunto de co-ciclos fundamentais é independente e S é qualquer subgrafo do subespaço co-ciclo de G e gerado por co-ciclos fundamentais ($S = S_{r1} \oplus S_{r2} \oplus \dots \oplus S_{rt}$).

Caso G possua mais de uma componente conexa ($k = 1$), consideramos uma floresta T e também que a componente conexa G_i de G contém a árvore geradora T_i da floresta T , para $i = 1, 2, \dots, k$.

Qualquer co-ciclo fundamental associado a floresta T de G , possui exatamente uma aresta que não está presente em qualquer um dos outros co-ciclos fundamentais associados a T , assim um co-ciclo fundamental não pode ser

expresso como soma de ciclos e portanto, o conjunto de co-ciclos fundamentais de G é independente.

Seja R um subgrafo do subespaço co-ciclo de G .

Se R for um subgrafo de G_i , ele é gerado pelo conjunto de co-ciclos fundamentais associados à árvore geradora T_i e portanto, gerado pelo conjunto de co-ciclos fundamentais associados a T .

Se $R = R_{r1} \cup R_{r2} \cup \dots \cup R_{rt}$ com R_{ri} subgrafo de G_{ri} para $i = 1, 2, \dots, t$, foi provado que R_{ri} é gerado pelo conjunto de co-ciclos fundamentais associados a T_{ri} , assim R é gerado pelo conjunto de co-ciclos fundamentais associados a $T_{r1} \cup T_{r2} \cup \dots \cup T_{rt}$ e portanto, gerado pelo conjunto de co-ciclos fundamentais associados a T .

Em virtude de R ser qualquer subgrafo do subespaço co-ciclo de G e gerado pelo conjunto de co-ciclos fundamentais, concluímos que tal conjunto gera o subespaço co-ciclo de G . Além disto, provamos que este conjunto é independente. Por conseguinte, o conjunto de co-ciclos fundamentais associados a floresta é uma base para C_0 .

De modo exatamente semelhante, podemos provar que os ciclos fundamentais relacionados a uma floresta geradora considerada, constituem uma base para o subespaço ciclo de G , vide Deo¹². ■

Corolário 4.4.1 Seja $G = (V, E)$ um grafo. Então, a $\dim(C) = \mu(G)$ e o número de elementos do C (incluindo o vetor nulo) é $2^{\mu(G)}$ (ou $|C| = 2^{\mu(G)}$).

Demonstração:

Em vista de que o conjunto de ciclos fundamentais associados a uma floresta geradora é uma base para C e sabemos, pela definição de ciclos fundamentais, que este conjunto possui $\mu(G)$ elementos, logo a demonstração de $\dim(C) = \mu(G)$ está concluída.

Agora, consideremos $B = \{c_1, c_2, \dots, c_{\mu(G)}\}$ uma base para o espaço C . Pela consideração do espaço vetorial sobre $GF(2)$, existe somente dois escalares possíveis (zero ou um) para multiplicar c_1 (uma combinação linear com os elementos desta base e a mesma situação ocorre para os outros c_i ($i = 2, \dots, m$), independente do escalar que multiplicar c_{i-j} , para $j = 1, 2, \dots, i-1$). Assim, o número de combinações lineares com os elementos desta base é $2^{\mu(G)}$, ou seja, $|C| = 2^{\mu(G)}$. É imediato que o vetor nulo está incluído nesta quantidade ($2^{\mu(G)}$), basta tomarmos todos os escalares valendo zero em uma combinação linear dos elementos desta base. ■

Corolário 4.4.2 Seja $G = (V, E)$ um grafo. Então, a $\dim(C_0) = \rho(G)$ e o número de elementos do C_0 (incluindo o vetor nulo) é $2^{\rho(G)}$.

Uma prova deste corolário segue de forma análoga a demonstração do corolário anterior. ■

No o grafo da figura 4.2.1, para os circuitos $(1,1,1,0,0)$ e $(0,0,1,1,1)$, os quais são fundamentais e também os cortes $(1,1,0,0,0)$, $(0,1,1,1,0)$ e $(0,0,0,1,1)$ que são fundamentais (quando consideramos a árvore geradora correspondente ao vetor $(1,0,1,0,1)$), observamos que qualquer circuito pode ser obtido por meio da soma anel dos circuitos fundamentais mencionados, por exemplo, o circuito $(1,1,0,1,1)$ é a soma anel de $(1,1,1,0,0)$ com $(0,0,1,1,1)$ e que qualquer corte pode ser obtido utilizando a soma anel dos cortes fundamentais citados, por exemplo, o corte $(1,0,1,1,0)$ é a soma anel de $(1,1,0,0,0)$ com $(0,1,1,1,0)$. Verificamos também que $\dim(C) = 2 = \mu(G)$, $\dim(C_0) = 3 = \rho(G)$, $|C| = 2^2$ e $|C_0| = 2^3$.

Como uma consequência imediata destes resultados temos que o número máximo de linhas linearmente independente na matriz corte é $\rho(G)$ e na matriz circuito é $\mu(G)$ e consequentemente temos o seguinte resultado:



Teorema 4.4.2 Seja G um grafo com k componentes conexas. Então, o posto da matriz circuito é $\mu(G)$ e o posto da matriz corte é $\rho(G)$.

Uma demonstração detalhada pode ser encontrada em Deo¹²■.

Qualquer submatriz de B_c com posto $\mu(G)$, denotada por B , é denominada matriz circuito base e qualquer submatriz de Q_c com posto $\rho(G)$, denotada por Q , é denominada matriz corte base. É interessante observar que B e Q geram B_c e Q_c , assim podemos dizer que B e Q contém todas as informações de B_c e Q_c , respectivamente.

5.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos algumas relações entre os espaços ciclo, co-ciclo e biciclo; em especial a relação de ortogonalidade. Além disso, discutiremos também da ortogonalidade complementar dos espaços C e C_0 no K^E .

5.2 Espaços Ortogonais

Os resultados desta seção são baseados nas referências Chen^{10,11} e Deo¹².

O teorema 5.2.1 (abaixo) sem dúvida é uma base fundamental para os estudos de ortogonalidade entre os espaços ciclo e co-ciclo.

Teorema 5.2.1 Consideremos o grafo G e os subespaços ciclo C e co-ciclo C_0 de G . Sejam Γ um elemento de C e Γ_0 um elemento de C_0 . Então, $\Gamma \cap \Gamma_0$ não é um conjunto unitário, isto é, $|\Gamma \cap \Gamma_0| \neq 1$, em outras palavras, $|\Gamma \cap \Gamma_0|$ é um inteiro

Capítulo 5

Demonstração:

Sejam C_0 e C os subespaços co-ciclo e ciclo respectivamente de um grafo G .

Espaços Ortogonais e Ortogonais Complementares

Consideremos o ciclo Γ em C e o co-ciclo Γ_0 em C_0 .

Se $\Gamma \cap \Gamma_0 = \emptyset$, então o teorema está provado.

Se $\Gamma \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$, então os subgrafos $G_1 = G[V_1]$ e $G_2 = G[V_2]$, (componentes de $G - \Gamma_0$) são disjuntas.

5.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos algumas relações entre os espaços ciclo, co-ciclo e biciclo; em especial a relação de ortogonalidade. Além disso, discutiremos também da ortogonalidade complementar dos espaços C e C_0 no K^E .

5.2 Espaços Ortogonais

Suponhamos que Γ e Γ_0 tenham algumas arestas em comum. Se nós caminharmos sobre o circuito Γ começando a partir de um vértice v_1 do conjunto V_1 , retornaremos ao vértice v_1 após atravessar o elemento em um número

Os resultados desta seção são baseados nas referências Chen^{10,11} e Deo¹².

O teorema 5.2.1 (abaixo) sem dúvida é uma base fundamental para os estudos de ortogonalidade entre os espaços ciclo e co-ciclo.

Teorema 5.2.1 Consideremos o grafo G e os subespaços ciclo C e co-ciclo C_0 de G . Sejam Γ um elemento de C e Γ_0 um elemento de C_0 . Então, $\Gamma \cap \Gamma_0$ não é um conjunto unitário, isto é, $|\Gamma \cap \Gamma_0| \neq 1$, em outras palavras, $|\Gamma \cap \Gamma_0|$ é um inteiro par.

Demonstração:

Sejam C_0 e C os subespaços co-ciclo e ciclo respectivamente de um grafo G .

Consideremos o ciclo Γ em C e o co-ciclo Γ_0 em C_0 .

Se $\Gamma \cap \Gamma_0 = \emptyset$, então o teorema está provado.

Se $\Gamma \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$, então os subgrafos $G_1 = G[V_1]$ e $G_2 = G[V_2]$, (componentes de $G - \Gamma_0$) são disjuntas.

Se $\Gamma \subseteq G_1$ ou $\Gamma \subseteq G_2$, mas não em ambos, então obviamente o número de arestas em comum entre Γ e Γ_0 é igual a zero, portanto $|\Gamma \cap \Gamma_0| = 0$, o qual é um número par.

Suponhamos que Γ e Γ_0 tenham algumas arestas em comum. Se nós caminharmos sobre o circuito Γ começando a partir de um vértice v_1 do conjunto V_1 , retornaremos ao vértice v_1 após atravessar exatamente em um número par de arestas de Γ_0 , isto implica que Γ e Γ_0 possuem um número par de arestas em comum; veja figura 5.2.1.

Sendo Γ e Γ_0 qualquer elemento de C e C_0 respectivamente, concluímos que todo elemento do subespaço circuito, C , de G possui um número par de arestas em comum com qualquer elemento do subespaço co-ciclo, C_0 , de G , em outras palavras, $|\Gamma \cap \Gamma_0| \neq 1$. ■

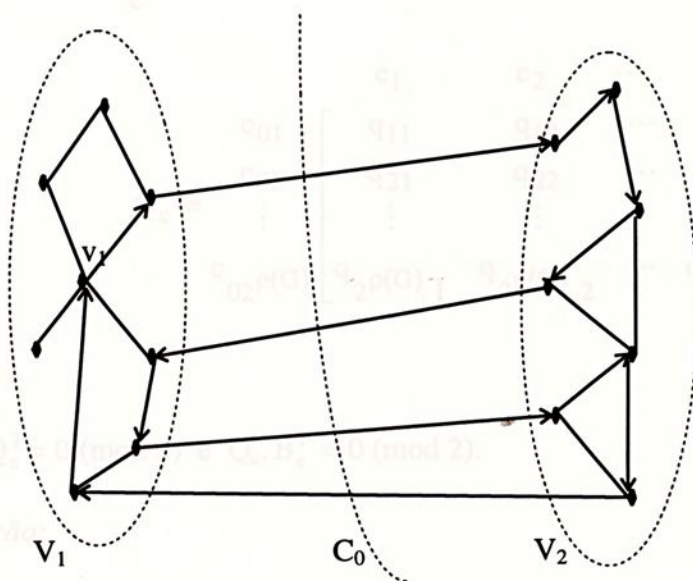


figura 5.2.1

Agora, utilizando o teorema 5.2.1 provaremos a seguir os resultados sobre ortogonalidade, teorema 5.2.2 e 5.2.3.

Teorema 5.2.2 Se as colunas da matriz circuito, B_c , e da matriz corte, Q_c , são organizadas com as arestas na mesma ordem, isto é,

$$B_c = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & \cdots & e_m \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{2^{\mu(G)}} \end{matrix} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{2^{\mu(G)},1} & b_{2^{\mu(G)},2} & \cdots & b_{2^{\mu(G)},m} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

e

$$Q_c = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & \cdots & e_m \\ \begin{matrix} c_{01} \\ c_{02} \\ \vdots \\ c_{02^{\rho(G)}} \end{matrix} & \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{2^{\rho(G)},1} & q_{2^{\rho(G)},2} & \cdots & q_{2^{\rho(G)},m} \end{bmatrix} \end{matrix},$$

então $B_c \cdot Q_c^T = 0 \pmod{2}$ e $Q_c \cdot B_c^T = 0 \pmod{2}$.

Demonstração:

Consideremos $B_c \cdot Q_c^T = A$, com $A = (a_{ij})$.

O elemento a_{ij} , pela definição de produto de matrizes, é o produto interno da i -ésima linha de B_c com a j -ésima coluna de Q_c^T .

Pela definição de B_c , um elemento da i -ésima linha de B_c é não nulo se, e somente se, a correspondente aresta de G está no i -ésimo circuito; e pela definição de Q_c , um elemento da j -ésima coluna de Q_c^T (ou j -ésima linha de Q_c) é não nulo se, e somente se, a correspondente aresta de G está no j -ésimo co-ciclo.

Assim, a_{ij} é o número de arestas em comum do i -ésimo circuito com o j -ésimo co-ciclo que, pelo teorema 5.2.1, é um número par. Logo, $a_{ij} = 0 \pmod{2}$.

5.3 Espaços Ortogonais Complementares

Aplicando a transposta em ambos os lados da identidade $B_c \cdot Q_c^T = 0$, temos:

$$Q_c \cdot B_c^T = 0 \pmod{2}. \blacksquare$$

Teorema 5.2.3 Seja G um grafo. Então, os subespaços ciclo e co-ciclo de G são ortogonais.

Demonstração:

Sejam c e c_0 vetores dos espaços ciclo, C , e co-ciclo, C_0 , respectivamente.

Notemos que c e c_0 representam subgrafos de C e C_0 respectivamente e de acordo com teorema 5.2.1, todo subgrafo de G em C possui um número par de arestas em comum com qualquer subgrafo de G em C_0 , então c e c_0 possuem um número par de coordenadas em comum valendo 1; daí o produto interno entre c e c_0 é igual a soma módulo dois de um número par de 1's, que módulo dois é zero.

Desde que, qualquer vetor em C é ortogonal a qualquer vetor de C_0 , concluímos que C e C_0 são ortogonais. $\blacksquare$

É imediato, com base no teorema acima, que todos os vetores

em $C \cap C_0$ são ortogonais a si mesmo. Por conseguinte, todo elemento do subespaço biciclo possui um número par de componentes não nulas.

5.3 Espaços Ortogonais Complementares

Nesta seção, apresentaremos dois resultados que caracterizam quando os subespaços C e C_0 são ortogonais complementares no K^E . Na literatura vista, um primeiro resultado se deve Williams & Maxwell³⁰ e o segundo resultado que achamos mais simples e elegante em vista de que utiliza matrizes maiores, é atribuído a Chen¹⁰. Contudo, apresentamos estes dois resultados, iniciando com o seguinte teorema de Williams & Maxwell³⁰.

Teorema 5.3.1 Os espaços ciclo e co-ciclo são ortogonais complementares no K^E se, e somente se, $C \cap C_0 = \{0\}$.

Demonstração:

Lembramos por definição que:

Os espaços C e C_0 são ortogonais complementares se, e somente se, C e C_0 são ortogonais e $K^E = C + C_0$. (i)

Por outro lado, sabemos que:

$$\dim(C + C_0) = \dim C + \dim C_0 - \dim(C \cap C_0). \quad \text{(ii)}$$

Agora, seja T uma floresta no grafo $G = (V, E)$ (G tem k componentes conexas), então temos:

$$\dim C + \dim C_0 = (|E| - |V| + k) + (|V| - k) = |E|. \quad (\text{iii})$$

A partir dos itens (ii) e (iii), concluímos que:

$$\dim(C + C_0) = |E| - \dim(C \cap C_0). \quad (\text{iv})$$

Desde que, os espaços C e C_0 são ortogonais complementares,

$$\text{então } \dim(C + C_0) = \dim K^E = |E|. \quad (\text{v})$$

A condição necessária do teorema resulta da combinação de (iv)

e (v), isto é:

Se C e C_0 são ortogonais complementares, então

$$\dim(C \cap C_0) = 0, \text{ ou seja } C \cap C_0 = \{0\}.$$

Agora, a condição suficiente admitamos que seja $C \cap C_0 = \{0\}$,

então

$$\dim(C \cap C_0) = 0. \quad (\text{vi})$$

Combinando as equações (iv) e (vi), temos que:

$$\dim(C + C_0) = |E|. \quad (\text{vii})$$

Por outro lado, sendo $C + C_0$ subespaço de K^E e $\dim K^E = |E|$,

então:

$$K^E = C + C_0. \quad (\text{viii})$$

Usando a definição (i) e a conclusão (viii) conjuntamente com o teorema 5.2.3, concluímos que os subespaços C e C_0 são ortogonais complementares. ■

A continuação, apresentamos uma ilustração do teorema 5.3.1.

Consideremos o grafo dado pela figura 5.3.1 (abaixo).

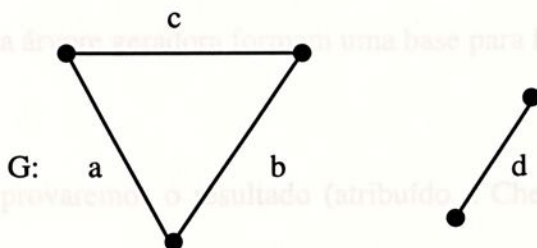


Figura 5.3.1

Temos:

$$|K^E| = 2^4 = 16, |C| = 2 \text{ e } |C_0| = 2^3 = 8, \text{ onde}$$

$$C = [(1,1,1,0)] = \{(0,0,0,0), (1,1,1,0)\},$$

$$C_0 = [(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1)] = \{(0,0,0,0), (1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1), (0,1,1,1), (1,1,0,1), (1,0,1,1)\},$$

$C \cap C_0 = \{(0,0,0,0)\}$ e os vetores de K^E que não estão em C e nem em C_0 são

obtidos unicamente da seguinte forma:

$$(1,0,0,0) = (1,1,1,0) + (0,1,1,0),$$

$$(0,1,0,0) = (1,1,1,0) + (1,0,1,0),$$

$$(0,0,1,0) = (1,1,1,0) + (1,1,0,0),$$

$$(1,0,0,1) = (1,1,1,0) + (0,1,1,1),$$

$$(0,1,0,1) = (1,1,1,0) + (1,0,1,1),$$

$$(0,0,1,1) = (1,1,1,0) + (1,1,0,1) \text{ e}$$

$(1,1,1,1) = (1,1,1,0) + (0,0,0,1)$. Notemos também que neste caso, em que $C \cap C_0 = \{(0,0,0,0)\}$, o conjunto de ciclos fundamentais e o conjunto de cortes fundamentais relativos a uma árvore geradora formam uma base para K^E .

A seguir, provaremos o resultado (atribuído a Chen¹¹) sobre a ortogonalidade complementar dos subespaços C e C^0 , via matriz maior*, mas antes provaremos o seguinte lema:

Lema 5.3.1 Seja $G = (V, E)$ um grafo com k componentes conexas. Então, uma submatriz de uma matriz base, Q , de C_0 (B , de C) é maior se, e somente se, as colunas desta submatriz correspondem as arestas de uma floresta geradora (floresta co-geradora) de G .

Demonstração:

Basta provarmos para a matriz base Q em vista que para a matriz B de C é análogo, vide Thulasiraman & Swamy²³.

Consideremos Q particionada em colunas de modo que:

$$Q = [Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_m]$$

* Lembremos que, dada uma matriz A de ordem $m \times n$ ($m \leq n$), dizemos que uma submatriz B de A é maior se a ordem de B for m e B não é singular.

Seja $\gamma = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_m]$ um vetor circuito em G . Então, pela relação de ortogonalidade, temos:

$$Q \cdot \gamma^T = 0$$

ou

$$\gamma_1 Q_1 + \gamma_2 Q_2 + \dots + \gamma_m Q_m = 0 \quad (5.1)$$

Agora, podemos considerar, sem perder a generalidade, que os r primeiros elementos de γ são não nulos e os restantes nulos, então com base em (5.1), temos:

$$\gamma_1 Q_1 + \gamma_2 Q_2 + \dots + \gamma_r Q_r = 0$$

Daí, concluímos que, existe uma combinação linear entre as colunas da matriz corte que correspondem as arestas de um circuito do grafo G , ou seja, as colunas da matriz corte que correspondem as arestas de um circuito do grafo são linearmente dependentes.

Seja Q_{11} a matriz maior de Q obtido pelas permutações necessárias das colunas de Q , por conseguinte temos:

$Q = [Q_{11} \ Q_{12}]$, onde as colunas de Q_{11} são linearmente independente e, pela conclusão acima, não existe circuito no subgrafo correspondente a estas colunas. Neste caso, sendo o posto de Q igual a $\rho(G)$ (veja teorema 4.4.2), o número de arestas no subgrafo correspondente a estas colunas é igual a $\rho(G)$.

Sendo este um subgrafo de G acíclico e como $\rho(G) = |V| - k$, temos:

Para $k = 1$, pelo teorema 2.2.5, este subgrafo é uma árvore geradora e para $k > 1$, uma floresta geradora.

Agora, particionando as colunas de Q (permutando se for necessário) temos que:

$Q = [Q_{11} \quad Q_{12}]$, onde as colunas de Q_{11} correspondem as arestas de uma floresta geradora T em G .

Seja $Q_f = [U \quad Q_{f_0}]$ a matriz corte fundamental com respeito a T .

Desde que as linhas de Q podem ser expressas como combinação linear das linhas de Q_f , então temos:

$$Q = [Q_{11} \quad Q_{12}] = DQ_f \quad \left(\text{onde, } D = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1 \rho(G)} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\rho(G) 1} & \cdots & \alpha_{\rho(G) \rho(G)} \end{bmatrix} \right)$$

$$= D[U \quad Q_{f_0}].$$

Pela igualdade de matrizes, obtemos:

$$Q_{11} = DU \equiv D.$$

Agora, D possui ordem $(|V| - k) \times (|V| - k)$ e como as matrizes Q e Q_f são ambas de posto $|V| - k$, segue-se que D não é singular. Desta forma, Q_{11} é uma submatriz maior de Q . ■

O seguinte teorema 5.3.2 é um resultado algébrico devido a

Chen¹¹, contudo Rosenstiehl & Read²², ofereceram uma prova combinatorial, mas nós optamos em fazer a apresentação algébrica.

Teorema 5.3.2 Os subespaços C e C_0 são ortogonais complementares no K^E se, e somente se, o grafo G contém um número ímpar de florestas geradoras ou florestas co-geradoras.

Demonstração:

Lembrando que Q e B são matrizes bases de C e C_0 respectivamente e considerando as colunas de Q e B organizadas com as arestas na mesma ordem, portanto escrevemos:

$$H = \begin{bmatrix} Q \\ B \end{bmatrix}, \text{ que é uma matriz quadrada de ordem } m.$$

Calculemos:

$$H \cdot H^T = \begin{bmatrix} Q \\ B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q^T & B^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QQ^T & QB^T \\ BQ^T & BB^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QQ^T & 0 \\ 0 & BB^T \end{bmatrix}, \text{ (pelo teorema 5.2.2,}$$

resulta que $BQ^T = 0$ e $QB^T = 0$).

A partir da definição de determinante de uma matriz, resulta:

$$(\det H)^2 = (\det QQ^T) \cdot (\det BB^T).$$

Pelo teorema de Binet-Cauchy e lembrando que Q e B são matrizes de ordem $\rho(G) \times m$ e $\mu(G) \times m$ respectivamente, temos:

$$(\det H)^2 = x^2.$$

Em razão de estarmos trabalhando sobre $GF(2)$, temos:

$$\begin{aligned}
 (\det H)^2 &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{\rho(G)} \leq m} Q \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho(G) \\ j_1 & j_2 & \dots & j_{\rho(G)} \end{pmatrix} \cdot Q^T \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_{\rho(G)} \\ 1 & 2 & \dots & \rho(G) \end{pmatrix} \\
 &\quad \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{\mu(G)} \leq m} B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \mu(G) \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{\mu(G)} \end{pmatrix} \cdot B^T \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{\mu(G)} \\ 1 & 2 & \dots & \mu(G) \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{\rho(G)} \leq m} Q \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho(G) \\ j_1 & j_2 & \dots & j_{\rho(G)} \end{pmatrix}^2 \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{\mu(G)} \leq m} B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \mu(G) \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{\mu(G)} \end{pmatrix}^2 \\
 &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{\rho(G)} \leq m} Q \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho(G) \\ j_1 & j_2 & \dots & j_{\rho(G)} \end{pmatrix} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{\mu(G)} \leq m} B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \mu(G) \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{\mu(G)} \end{pmatrix} \\
 &= x \cdot y
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Agora, usando o lema 5.3.1, resulta que $Q \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \rho(G) \\ j_1 & j_2 & \dots & j_{\rho(G)} \end{pmatrix}$ e

$B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \mu(G) \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{\mu(G)} \end{pmatrix}$ não são nulos se, e somente se, as $\rho(G)$ colunas tomadas

em Q correspondem as arestas de uma floresta geradora e as $\mu(G)$ colunas tomadas em B correspondem as arestas de uma floresta co-geradora, logo x e y (em (5.2)) nos fornecem o número de floresta geradora e floresta co-geradora respectivamente de G .

Lembrando que cada floresta geradora fica associada a uma única floresta co-geradora e reciprocamente, concluímos que $x = y$.

Por conseguinte,

$$(\det H)^2 = x^2.$$

Em razão de estarmos trabalhando sobre $GF(2)$, temos:

$x = 1$, se o número de floresta geradora ou floresta co-geradora for ímpar, ou seja, $\det(H) \neq 0$.

$$e = \left[Q \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right] \left[B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

$x = 0$, caso contrário.

Concluimos que H não é singular se, e somente se, C e C_0 são ortogonais complementares e o teorema está provado. ■

Ilustramos este teorema através do grafo da figura 5.3.1 e todas as florestas geradoras associadas (florestas: T_1 , T_2 e T_3) ilustradas na figura 5.3.2

abaixo, onde $Q = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ são respectivamente, matri-

zes corte base e circuito base associadas ao grafo G .

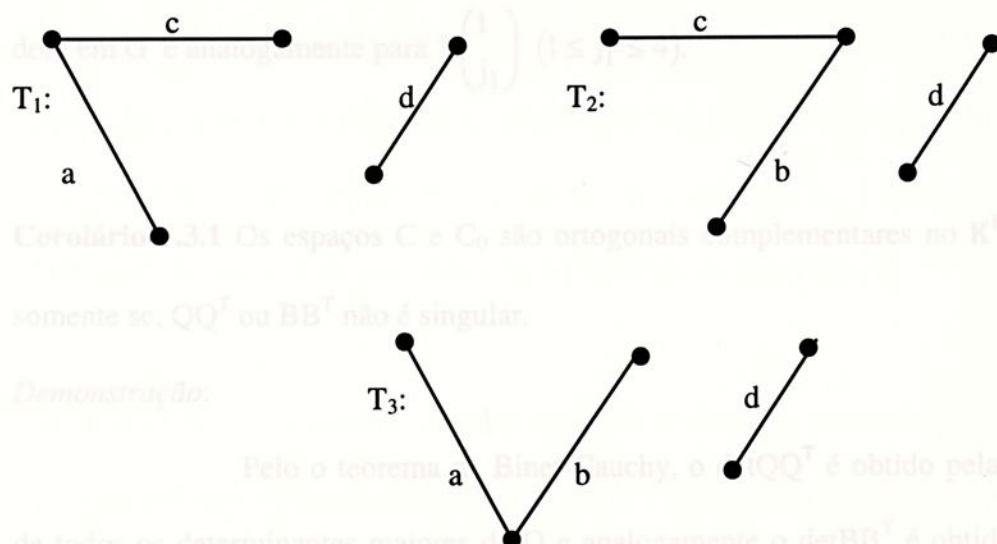


Figura 5.3.2

$$\begin{aligned}
 (\det H)^2 &= \left(\det \begin{bmatrix} Q \\ B \end{bmatrix} \right)^2 = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq 4} Q \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} \cdot \sum_{1 \leq j_1 \leq 4} B \begin{pmatrix} 1 \\ j_1 \end{pmatrix} \\
 &= \left[Q \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + B \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right]
 \end{aligned}$$

$$= \left[\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & d \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & d \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & d \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right] \cdot \left[\begin{vmatrix} a \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d \\ 0 \end{vmatrix} \right]$$

$$= [0 + 1 + 1 + 1] \cdot [1 + 1 + 1 + 0] = 1 \cdot 1 = 1$$

Observe que existe um número ímpar (três) de $Q \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix}$

($1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq 4$) não nulos e, de acordo com o lema 5.3.1, estes determinantes não nulos possuem as colunas correspondentes as arestas de uma árvore geradora em G e analogamente para $B \begin{pmatrix} 1 \\ j_1 \end{pmatrix}$ ($1 \leq j_1 \leq 4$).

Corolário 5.3.1 Os espaços C e C_0 são ortogonais complementares no K^E se, e somente se, QQ^T ou BB^T não é singular.

Demonstração:

Pelo o teorema de Binet-Cauchy, o $\det QQ^T$ é obtido pela soma de todos os determinantes maiores de Q e analogamente o $\det BB^T$ é obtido pela soma de todos os determinantes maiores de B .

Demonstração: Pelo Lema 5.3.1, as colunas dos determinantes maiores não nulos em Q correspondem às arestas de florestas geradoras de G , enquanto as colunas dos determinantes maiores não nulos em B correspondem às arestas de florestas co-geradoras de G .

Aplicando o teorema 5.3.2, C e C_0 são ortogonais complementares se, e somente se, G possui um número ímpar de florestas geradoras ou florestas co-geradoras.

De onde concluímos que C e C_0 são ortogonais complementares se, e somente se, $\det QQ^T \neq 0$ (ou $\det BB^T \neq 0$). ■

A prova do corolário 5.3.2 (abaixo) é uma aplicação imediata do teorema 5.3.2.

Corolário 5.3.2 Todo vetor x de K^E é expresso unicamente como a soma módulo dois de dois vetores x_1 e x_2 , onde x_1 é um vetor incidente a algum ciclo de C e x_2 é um vetor incidente a algum co-ciclo de C_0 se, e somente se, o grafo G possui um número ímpar de florestas geradoras ou florestas co-geradoras. ■

Corolário 5.3.3 Se G contém um número ímpar de florestas geradoras (ou florestas co-geradoras), então qualquer subgrafo de G é unicamente expresso como uma soma anel de um co-ciclo ou a união arestas disjuntas de co-ciclos e um ciclo ou a união arestas disjuntas de ciclos de G .

Demonstração:

Se G possui um número ímpar de florestas geradoras ou florestas co-geradoras, então pelo teorema 5.3.2 os espaços C e C_0 são ortogonais complementares, isto significa que todo elemento de K^E (isto é, todo subgrafo de G) é unicamente expresso como a soma de dois elementos, um de C e o outro de C_0 .

A prova do corolário está completa, desde que os elementos de C são ciclos ou a união arestas disjuntas de ciclos e os elementos de C_0 são co-ciclos ou a união arestas disjuntas de co-ciclos. ■

6.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos a caracterização do subespaço biciclo seguindo o trabalho de Chen^[1]. Este subespaço torna-se interessante quando não é trivial, em outras palavras, quando os subespaços C e C_0 não são ortogonais complementares no K^E . Cabe destacarmos, entre outras, as conclusões a que chegamos:

1. A dimensão deste subespaço é $|E| - p$;
2. O número de subgrafos no conjunto biciclo é um número par, isto é, $2^{|E| - p}$;
3. O número de subgrafos em G que são ciclos ou a união arestas-disjuntos de ciclos e não são co-ciclos (ou a não união arestas-disjuntos de co-ciclos) é igual a $2^{\mu(G)} - 2^{|E| - p}$. Analogamente, o número de subgrafos em G que são co-ciclos ou

Capítulo 6

Caracterização do Espaço Biciclo

6.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos a caracterização do subespaço biciclo seguindo o trabalho de Chen¹¹. Este subespaço torna-se interessante quando não é trivial, em outras palavras, quando os subespaços C e C_0 não são ortogonais complementares no K^E . Cabe destacarmos, entre outras, as conclusões a que chegamos:

1. A dimensão deste subespaço é $|E| - p$;
2. O número de subgrafos no conjunto biciclo é um número par, isto é, $2^{|E| - p}$;
3. O número de subgrafos em G que são ciclos ou a união arestas-disjuntos de ciclos e não são co-ciclos (ou a não união arestas-disjuntos de co-ciclos) é igual a $2^{\mu(G)} - 2^{|E| - p}$. Analogamente, o número de subgrafos em G que são co-ciclos ou

a união de co-ciclos arestas-disjuntos e não são ciclos (ou a não união arestas-disjuntos de ciclos) é igual a $2^{\rho(G)} - 2^{|E|-p}$ e a negatividade lógica de ambas as sentenças é dada por $2^{|E|} - 2^{\rho(G)} - 2^{\mu(G)} + 2^{|E|-p}$.

4. O número máximo de subgrafos em G que não estão na soma dos espaços C e C_0 está entre $r+1$ e $r+2^{|E|-p}$, $r = 2^{|E|} - 2^{\rho(G)} - 2^{\mu(G)}$ (onde, o menor limitante foi dado por Deo);

5. A dimensão de $C + C_0$ é p ;

6. O número de subgrafos de G na soma dos espaços C e C_0 é um número par, isto é, 2^p ;

7. O número de subgrafos de G que não estão na soma dos espaços C e C_0 é um número par, isto é, $2^{|E|} - 2^p$;

8. O número de subgrafos de G que estão no espaço ciclo adicionado ao número de subgrafos de G que estão no espaço co-ciclo é menor ou igual a $2^{|E|} - 2^p$; e

9.. O número de subgrafos em G que não são ciclos ou a união de ciclos arestas-disjuntos e nem são co-ciclos união arestas-disjuntos de co-ciclos, mas que são a soma de algum ciclo ou a união arestas-disjuntos de ciclos com um co-ciclo ou a união arestas-disjuntos de co-ciclos é igual a $2^p - 2^{\rho(G)} - 2^{\mu(G)} + 2^{|E|-p}$.

Tendo em vista a finalidade deste capítulo, todo grafo G considerado possuirá pelo menos um subgrafo não nulo que seja um ciclo ou a união de ciclos aresta-disjuntos e também seja um conjunto corte ou a união de conjuntos

base) e B (matriz circuito base) organizadas com as arestas na mesma ordem e a

notação para a matriz H é $H = \begin{bmatrix} Q \\ B \end{bmatrix}$.

6.2 Espaço Biciclo

O teorema a seguir é uma caracterização de $C \cap C_0$ (espaço biciclo) obtida por Chen¹¹.

Teorema 6.1 Um vetor x está no espaço biciclo se, e somente se, o vetor x está no núcleo da matriz H .

Demonstração:

Provemos a condição necessária, ou seja, suponhamos que $x \in C \cap C_0$ e provemos que $x \in \text{Ker}(H)$.

A partir do produto $Hx = \begin{bmatrix} Q \\ B \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} Qx \\ Bx \end{bmatrix}$ e pela hipótese $x \in C \cap C_0$, de onde $\langle x, x \rangle = 0 = \langle q, x \rangle$, como queira que seja q ciclo ou co-ciclo, em particular temos:

$Q \cdot x = 0$, (Q , matriz co-ciclo base cujos vetores linhas q são co-ciclos)

e

$B \cdot x = 0$, (B , matriz ciclo base cujos vetores linhas q são ciclos).

Daí, $Hx = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, por conseguinte, $x \in \text{Ker}(H)$.

Agora, provemos a condição suficiente, isto é, provemos que $x \in C \cap C_0$ para todo $x \in \text{Ker}(H)$.

Pela igualdade de matrizes, conjuntamente pela hipótese,

$$Hx = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ ou seja, } \begin{bmatrix} Q \\ B \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ de onde resulta que } Qx = 0 \text{ e } Bx = 0.$$

Sabemos que o posto de Q é $\rho(Q) = |V| - k$ (k é o número de componentes conexas de G) e $|E|$ é o número de colunas de Q , então a nulidade de Q é $|E| - |V| + k$ e como B possui posto $\mu(B) = |E| - |V| + k$ e, conjuntamente com o teorema 5.2.2, temos que as colunas de B^T formam uma base para o espaço nulo de Q (ou para o espaço nulo de C_0 , desde que as linhas de Q formam uma base para C_0). Analogamente, prova-se que as colunas de Q^T é uma base para o espaço nulo de B (ou para o espaço nulo de C).

Daí, x é expresso como uma combinação linear das colunas de B^T e é expresso como uma combinação linear das colunas de Q^T . Além disso, as colunas de B^T são uma base para o espaço C e as colunas de Q^T são uma base para o espaço C_0 , então concluímos que $x \in C \cap C_0$. ■

No corolário a seguir, Chen¹¹ relaciona a dimensão de $C \cap C_0$ com o posto de H .

Corolário 6.2.1 A dimensão do espaço biciclo é igual a dimensão do espaço nulo da matriz H .

A demonstração do corolário 6.2.1 é uma demonstração imediata do teorema. ■

Dizer que o espaço biciclo é distinto do espaço nulo, significa a existência de um vetor em K^E que não pode ser expresso como a soma módulo dois de dois vetores, com um vetor pertencente ao C_0 e o outro vetor pertencente ao C . Em outras palavras, existe um subgrafo de G que não pode ser expresso como a soma anel de dois subgrafos com um subgrafo em C_0 e o outro subgrafo em C . Sabendo que G é um subgrafo de si mesmo, surge a pergunta se neste caso o vetor incidente do grafo G sempre está presente na soma dos subespaços C e C_0 . O corolário, a seguir, vem nos fornecer uma resposta afirmativa a esta pergunta.

Corolário 6.2.2 O vetor correspondente ao grafo G está presente na soma dos subespaços C e C_0 .

Demonstração:

Seja g o vetor de K^E incidente do grafo G .

Mostrando que $R = \begin{bmatrix} Q \\ B \\ g \end{bmatrix}$ possui o mesmo posto de $\begin{bmatrix} Q \\ B \end{bmatrix}$, esta-

remos mostrando que g é expresso como combinação linear das linhas de Q e B ,

isto é, $g \in [C_0 \cup C]$ (desde que, as linhas de Q são uma base para C_0 e as linhas de B uma base para C). Daí, em virtude de $C_0 + C = [C_0 \cup C]$, a prova do corolário estará completa.

Corolário 6.2.3 Um grafo G pode ser expresso como a soma anal. de um conjunto

Tomemos um vetor x no núcleo da matriz $\begin{bmatrix} Q \\ B \end{bmatrix}$. Pelo teorema 6.2.1, x está no espaço biciclo e daí, pelo teorema 5.2.1, x possui um número par de elementos valendo um.

Assim,

$gx = 0$, desde que, g é um vetor cujos elementos são todos iguais a um e x possui um número par de elementos valendo um.

Logo, x está no núcleo da matriz R .

É evidente que todo vetor x no núcleo de R também está no nú-

cleo de $\begin{bmatrix} Q \\ B \end{bmatrix}$.

Assim, R e $\begin{bmatrix} Q \\ B \end{bmatrix}$ possuem o mesmo subespaço nulo, e evidente-

mente a mesma nulidade.

Pelo corolário 6.2.1, a $\dim(B_1) = \dim(\text{Ker}(\begin{bmatrix} Q \\ B \end{bmatrix}))$

Se r é a nulidade de R e lembrando que R e $\begin{bmatrix} Q \\ B \end{bmatrix}$ possuem o

mesmo número de colunas ($|E|$), temos:

posto de $R = |E| - r = \text{posto de } \begin{bmatrix} Q \\ B \end{bmatrix}$ e a prova do corolário está completa. ■

O corolário a seguir é uma consequência direta do corolário anterior.

Corolário 6.2.3 Um grafo G pode ser expresso como a soma anel de um conjunto corte ou a união arestas-disjuntos de conjuntos cortes e um circuito ou a união arestas-disjuntos de circuitos de G . ■

A partir da referência Deo¹² temos o número mínimo $2^{|E|} - 2^{p(G)} - 2^{\mu(G)} + 1$ de grafos não nulos que não estão em C e nem em C_0 . Em virtude desta observação e dos resultados, já mencionados, conseguimos as seguintes conclusões:

1- A dimensão do espaço biciclo, $\dim(B_i)$, é igual a $|E| - p$, onde p é o posto de G .

Demonstração:

Pelo corolário 6.2.1, a $\dim(B_i) = \dim\left(\text{Ker}\left(\begin{bmatrix} Q \\ B \end{bmatrix}\right)\right)$

Agora, se p é o posto de G , e sabendo que esta matriz possui

$|E|$ colunas, então, por um resultado de álgebra linear, a $\dim\left(\text{Ker}\left(\begin{bmatrix} Q \\ B \end{bmatrix}\right)\right)$ é $|E| - p$.

Logo, $\dim(B_i) = |E| - p$. ■

2-O número de subgrafos no espaço biciclo, incluindo o grafo nulo, é um número par, isto é, $2^{|E|-p}$.

Omitimos esta demonstração em razão de ser semelhante a do corolário 4.4.1, provado no capítulo 4. ■

3- O número de subgrafos em G que são ciclos ou a união arestas-disjuntos de ciclos e não são co-ciclos (ou a não união arestas-disjuntos de co-ciclos) é igual a $2^{\mu(G)} - 2^{|E|-p}$. Analogamente, o número de subgrafos em G que são co-ciclos ou a união de co-ciclos arestas-disjuntos e não são ciclos (ou a não união arestas-disjuntos de ciclos) é igual a $2^{\rho(G)} - 2^{|E|-p}$. Também, a negatividade lógica de ambas as sentenças, isto é, o número de subgrafos não nulos do grafo G que não estão em C e nem em C_0 é $2^{|E|} - 2^{\rho(G)} - 2^{\mu(G)} + 2^{|E|-p}$.

Demonstração:

Utilizando a fórmula de Silva-Sylvestre temos:

$$|C \cap \overline{C_0}| = |C| - |C \cap C_0| = 2^{\mu(G)} - 2^{|E|-p}.$$

De álgebra linear, temos:

A demonstração negativa lógica da primeira é análoga a anterior.

Se os grafos nulos (por definição) estão incluídos em C e em C_0 , então, obviamente, não estão incluídos em $\overline{C \cup C_0}$. *

Pela lei de Morgan, $\overline{C \cup C_0} = \overline{C} \cap \overline{C_0}$.

Pelo princípio de inclusão e exclusão,

$$|\overline{C} \cap \overline{C_0}| = |K^E| - |C| - |C_0| + |C \cap C_0|.$$

Sabendo que $|K^E| = 2^{|E|}$, $|C| = 2^{\mu(G)}$, $|C_0| = 2^{\rho(G)}$ e

$|C \cap C_0| = 2^{\dim(B_i)}$, a prova está completa. ■

4- O número máximo de subgrafos em G que não estão na soma dos espaços C e C_0 é $2^{|E|} - 2^{\rho(G)} - 2^{\mu(G)} + 2^{|E|-p}$.

Demonstração:

Desde que, $C \cup C_0 \subseteq [C \cup C_0]$, então $|\overline{C \cup C_0}| \leq |\overline{[C \cup C_0]}|$. (i)

Segundo o resultado anterior (3),

$$|\overline{[C \cup C_0]}| = 2^{|E|} - 2^{\rho(G)} - 2^{\mu(G)} + 2^{|E|-p}. \quad (ii)$$

Comparando (i) e (ii),

$$|\overline{C \cup C_0}| \leq 2^{|E|} - 2^{\rho(G)} - 2^{\mu(G)} + 2^{|E|-p}. \quad (iii)$$

De álgebra linear, temos:

* Considerando X um conjunto, usamos $\overline{X}$ para denotar o complementar deste conjunto.

De álgebra linear, temos:

$$[C \cup C_0] = C + C_0. \quad (\text{iv})$$

Assim, a prova está completa comparando (iv) e (iii). ■

5- A $\dim(C + C_0)$ é p .

Demonstração:

$$\dim(C + C_0) = \dim(C) + \dim(C_0) - \dim(C \cap C_0)$$

$$= \mu(G) + \rho(G) - \dim(B_i)$$

$$= |E(G)| - |V(G)| + \omega(G) + |V(G)| - \omega(G) - |E(G)| + p$$

$$= p, \text{ onde } p \text{ é o posto da matriz } \begin{bmatrix} Q \\ B \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

6. O número de subespaços de G na soma dos espaços C e C_0 é um número par, isto é, 2^p .

A demonstração é análoga a do corolário 4.4.1. ■

Como consequência imediata deste resultado temos:

7. O número de subgrafos de G que não estão na soma dos espaços C e C_0 é um número par, isto é, $2^{|E|} - 2^p$. ■

Comparando os resultados 4 e 7 temos:

$$2^{|E|} - 2^p \leq 2^{|E|} - 2^{\rho(G)} - 2^{\mu(G)} + 2^{|E|-p}$$

$$\Rightarrow -2^p \leq -2^{\rho(G)} - 2^{\mu(G)} + 2^{|E|-p}$$

$$\Rightarrow 2^{\rho(G)} + 2^{\mu(G)} \leq 2^{|E|-p} + 2^p$$

$$\Rightarrow |C_0| + |C| \leq 2^{|E|-p} + 2^p. \blacksquare$$

9. O número de subgrafos em G que não são ciclos ou a união de ciclos arestas-disjuntos e nem são co-ciclos união arestas-disjuntos de co-ciclos, mas que são a soma de algum ciclo ou a união arestas-disjuntos de ciclos com um co-ciclo ou a união arestas-disjuntos de co-ciclos é igual a $2^p - 2^{\rho(G)} - 2^{\mu(G)} + 2^{|E|-p}$.

A demonstração segue análoga a da primeira sentença do terceiro resultado, bastando calcular $|(C + C_0) \cap (\overline{C} \cup \overline{C_0})|$. ■

Neste capítulo, apresentaremos três formas equivalentes de se definir o dual de um grafo planar, com o objetivo de motivar alguns resultados da dualidade de um matróide que será apresentado no capítulo 9. Também apresentamos uma conclusão a que chegamos (lema 7.3.1) a partir da equivalência entre as duas primeiras definições de dual, apresentadas neste capítulo. Em razão do objetivo deste capítulo omitiremos algumas demonstrações.

7.2 Planaridade

Um grafo G é planar se o diagrama que o representa puder ser

Capítulo 7

representado numa esfera, de tal modo que as arestas se interceptem so-

mente nos vértices extremos. Em outras palavras, o grafo G é planar se existe uma

transformação topológica, tal que, o grafo resultante, denotado por G_T , tenha to-

Planaridade e dualidade

Os grafos G e G_T são isomorfos.

7.1 Introdução

As arestas de um grafo plano G dividem o plano em porções,

Os resultados apresentados neste capítulo foram tomados a partir chamadas regiões ou faces, dentre as quais exatamente uma face é infinita (ilimitada), sendo que as outras são faces finitas (limitadas).

Neste capítulo, apresentaremos três formas equivalentes de se definir o dual de um grafo planar, com o objetivo de motivar alguns resultados da dualidade de um matróide que será apresentado no capítulo 9. Também apresentamos uma conclusão a que chegamos (lema 7.3.1) a partir da equivalência entre as duas primeiras definições de dual, apresentadas neste capítulo. Em razão do objetivo deste capítulo omitiremos algumas demonstrações.

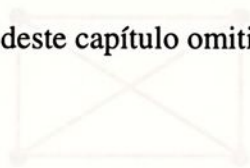


Figura 7.2.1a

$\Rightarrow$

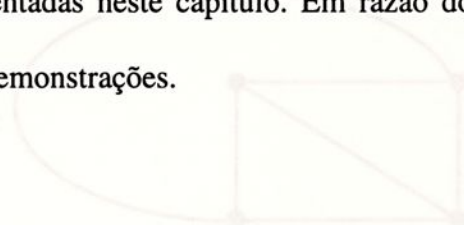


Figura 7.2.1b

7.2 Planaridade

Um grafo G é planar se o diagrama que o representa puder ser encaixável no plano (ou na esfera), de tal modo que as arestas se interceptem somente nos vértices extremos. Em outras palavras, o grafo G é planar se existe uma transformação topológica, tal que, o grafo resultante, denotado por G_T , tenha todas suas arestas não interceptando-se duas a duas a não ser nos vértices. O grafo G_T é chamado o grafo plano associado a G .

Os grafos G e G_T são isomorfos.

As arestas de um grafo plano G dividem o plano em porções, chamadas regiões ou faces, dentre as quais exatamente uma face é infinita (ilimitada), sendo que as outras são faces finitas (limitadas).

Ilustrações:

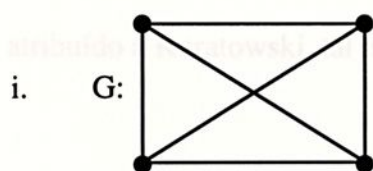


Figura 7.2.1a

$\Rightarrow$

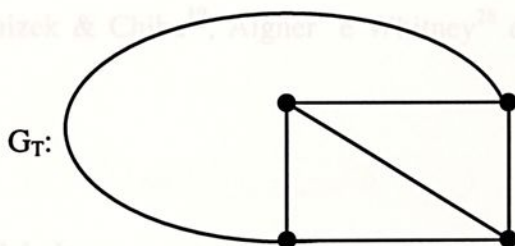


Figura 7.2.1b

7.3 Caracterização de planaridade de Whitney

7.3.1 Dualidade

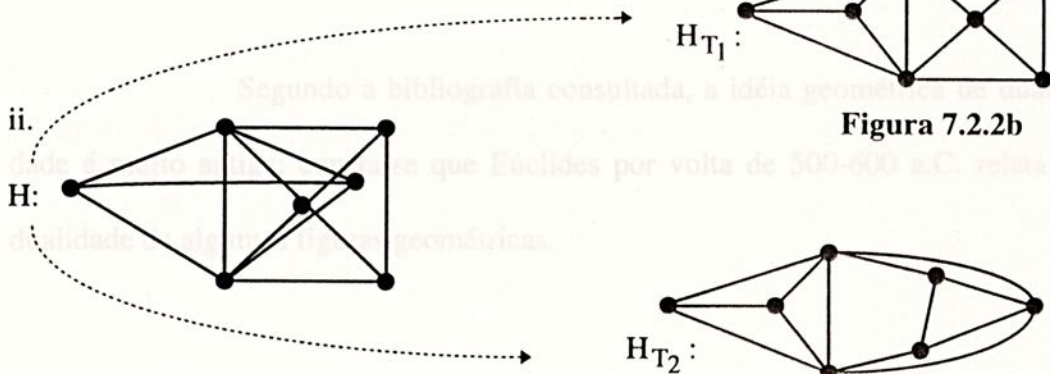
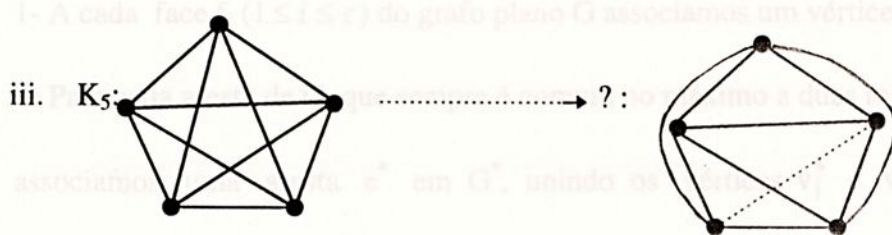


Figura 7.2.2a

Figura 7.2.2b

Figura 7.2.2.c



Uma primeira caracterização clássica de planaridade, cuja demonstração pode ser encontrada em Nishizek & Chiba¹⁹, Aigner¹ e Whitney²⁸ é atribuído a Kuratowski, tal como segue:

Teorema 7.2.1 (Kuratowski) Um grafo G é planar se, e somente se, G não possuir, como subgrafo, um grafo homeomorfo ao K_5 ou ao $K_{3,3}$. ■



7.3 Caracterização de planaridade de Whitney

7.3.1 Dualidade

Segundo a bibliografia consultada, a idéia geométrica de dualidade é muito antiga; consta-se que Euclides por volta de 500-600 a.C. relata a dualidade de algumas figuras geométricas.

Consideremos o grafo plano $G = (V, E)$, com $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ e o conjunto de faces $F = \{f_1, \dots, f_r\}$, definamos o dual geométrico de G , denotado por G^* , como segue:

- 1- A cada face f_i ($1 \leq i \leq r$) do grafo plano G associamos um vértice v_i^* do G^* .
- 2- Para cada aresta de G , que sempre é comum no máximo a duas regiões f_i e f_j , associamos uma aresta e^* em G^* , unindo os vértices v_i^* e v_j^* , ou seja, $e^* = (v_i^*, v_j^*)$ corresponde a aresta que pertence a f_i e f_j em G .
- 3- Se $f_i = f_j$, então $v_i^* = v_j^*$, isto é, no dual e^* corresponde a um laço.

Ilustração:

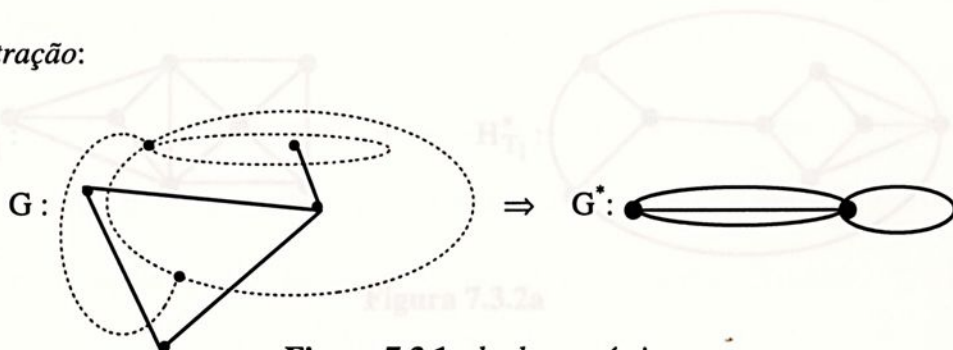


Figura 7.3.1: dual geométrico

O teorema a seguir não é difícil de checar e omitiremos a demonstração (citada, Wilson³²).

Figura 7.3.2b

Teorema 7.3.1 Seja G um grafo plano conexo. Então, G^{**} (o dual do dual) é isomorfo a G . ■

Vejamos algumas relações entre o grafo e o seu dual.

Teorema 7.3.3 Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e seja $G^* = (V^*, E^*)$ o dual geo-

Teorema 7.3.2 (Whitney²⁷) Um grafo é planar se, e somente se, ele possui um métrico de G . Então, $c \subseteq E$ é um ciclo em G se, e somente se, o correspondente conjunto de arestas $c^* \subseteq E^*$ é um conjunto corte em G^* .

Demonstração: A um grafo planar ficam associados vários grafos planos todos eles isomorfos entre si, no entanto poderá haver grafos planos associados cujos duais não sejam necessariamente isomorfos, veja figuras 7.2.2a, 7.3.2a e 7.3.2b.

Se $c^* = (V_1^*, V_2^*)$ for um conjunto corte em G^* , temos:

Ilustrações:

$V_1^* \cup V_2^* = V^*$, $V_1^* \cap V_2^* = \emptyset$ e $V_1^*, V_2^* \neq \emptyset$.

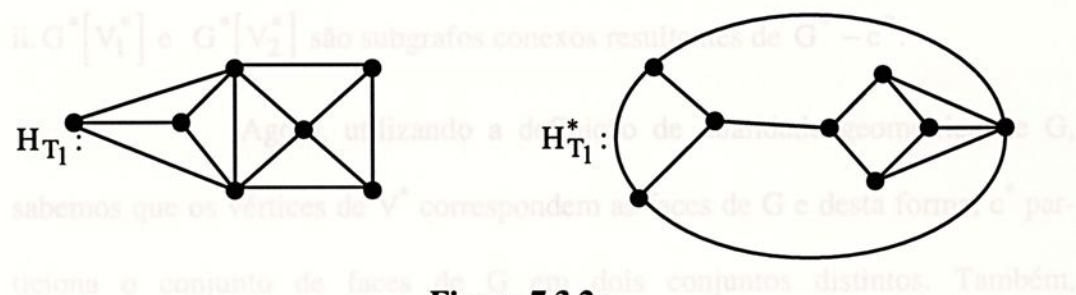


Figura 7.3.2a

(considerando que V_1^* não possui o vértice associado a face infinita) todas as

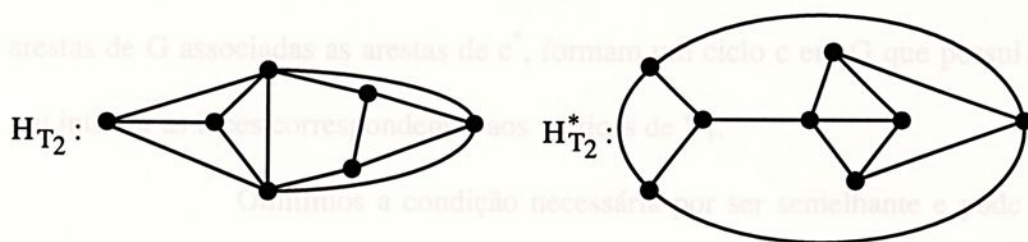


Figura 7.3.2b

Vejamos algumas relações entre o grafo e o seu dual.

Teorema 7.3.3 Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e seja $G^* = (V^*, E^*)$ o dual geométrico de G . Então, $c \subseteq E$ é um ciclo em G se, e somente se, o correspondente conjunto de arestas de c em G^* ($c^* \subseteq E^*$) é um conjunto corte em G^* .

Demonstração:

Sem perda da generalidade podemos considerar G um grafo plano conexo.

Se $c^* = (V_1^*, V_2^*)$ for um conjunto corte em G^* , temos:

i. $V_1^* \cup V_2^* = V^*$, $V_1^* \cap V_2^* = \emptyset$ e $V_1^*, V_2^* \neq \emptyset$;

ii. $G^*[V_1^*]$ e $G^*[V_2^*]$ são subgrafos conexos resultantes de $G^* - c^*$.

Agora, utilizando a definição de dualidade geométrica de G , sabemos que os vértices de V^* correspondem as faces de G e desta forma, c^* particiona o conjunto de faces de G em dois conjuntos distintos. Também, (considerando que V_1^* não possui o vértice associado a face infinita) todas as

arestas de G associadas as arestas de c^* , formam um ciclo c em G que possui em seu interior as faces correspondentes aos vértices de V_1 .

Omitimos a condição necessária por ser semelhante e pode ser encontrada em Wilson³². ■

Figura 7.3.3

Corolário 7.3.1 Seja $G = (V, E)$ um grafo plano e seja $G^* = (V^*, E^*)$ o dual geométrico de G . Então, $c_0 \subseteq E$ é um conjunto corte em G se, e somente se, o correspondente conjunto de arestas $(c_0^* \subseteq E^*)$ forma um ciclo em G^* .

Demonstração:

Teorema 7.3.4 O conjunto $c_0 \subseteq E$ é um conjunto corte em G se, e somente se, (pelo teorema 7.3.1) o conjunto $c_0 \subseteq E$ é um conjunto corte em G^{**} . Por outro lado, o conjunto $c_0 \subseteq E$ é um conjunto corte em G^{**} se, e somente se, (pelo teorema 7.3.2) o conjunto $c_0 \subseteq E$ é um circuito em G^* . ■

A figura 7.3.3, onde a, b, c e d são as arestas de G e a^*, b^*, c^* e d^* as arestas de G^* que correspondem respectivamente as arestas de G , ilustra o teorema 7.3.3 e o corolário 7.3.1.

Agora, se G^* for euleriana, então pelo teorema 2.2.6, todo vértice

de G^* possui grau par. Desta forma, pela definição de dual geométrico, toda face

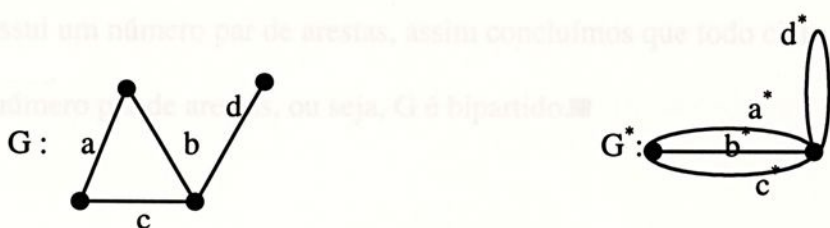


Figura 7.3.3

$$K^E = \{(0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1),$$

$$(1,1,1,0), (1,1,0,1), (1,0,1,1), (1,1,1,1), (0,1,0,1), (0,0,1,1), (0,1,1,0), (0,1,1,1)\} = K^{E^*},$$

$$C = \{(0,0,0,0), (1,1,1,0)\} = C_0^* \text{ e}$$

$$C_0 = \{(0000), (1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1), (1,1,0,1), (1,0,1,1), (0,1,1,1)\} = C^*.$$

Teorema 7.3.4 Sejam G um grafo planar e G^* o seu dual. Então, o grafo G é bipartido se, e somente se, o grafo G^* é euleriano (união de ciclos arestas-disjuntos).

Demonstração:

Se G é bipartido, então todo ciclo de G possui um número par de arestas. Logo, pelo teorema 7.3.3, todo conjunto corte em G^* possui um número par de arestas, o que acarreta dizer que o número de arestas incidentes em cada vértice é par, pois a retirada de todas as arestas incidentes em um vértice acarretará em um corte. Assim, pelo teorema 2.2.6, G^* é uma união de ciclos arestas-disjuntos.

Agora, se G^* for euleriano, então pelo teorema 2.2.6, todo vértice de G^* possui grau par. Desta forma, pela definição de dual geométrico, toda face

de G possui um número par de arestas, assim concluímos que todo ciclo de G possui um número par de arestas, ou seja, G é bipartido. ■

A segunda maneira de se definir o dual de um grafo, denominada dual abstrato, independe da noção geométrica, e além disto esta definição generaliza o dual geométrico de grafos planares.

Demonstração:

Um grafo G^* é denominado um dual abstrato de um grafo G se existe uma correspondência bijetora entre as arestas de G com as de G^* , tal que, um conjunto de arestas de G formam um circuito em G se, e somente se, o correspondente conjunto de arestas de G^* formam um conjunto corte em G^* .

Com base nesta definição, um grafo H é o dual de G se, e somente se, um conjunto de vetores que formam uma base para o espaço circuito de G corresponde ao conjunto de vetores que formam uma base para o espaço co-ciclo de H , ou seja, o espaço ciclo de G corresponde ao espaço co-ciclo de H , como ilustramos com a figura 7.3.3.

Notemos pelo teorema 7.3.3, que se G^* for o dual geométrico de G , então G^* é o dual-abstrato de G . A recíproca desta relação de equivalência é dada em whitney²⁷.

Obtemos o seguinte resultado após observarmos que dois duais não isomorfos têm a propriedade de possuírem ciclos e/ou co-ciclos correspondentes, em outras palavras:

Lema 7.3.1 Se H e F são dois duais não isomorfos de G , então existe uma bijeção de H em F , tal que, preserva ciclos e co-ciclos

Demonstração:

1. A partir da hipótese, existem bijeções $\varphi: E(H) \rightarrow E(G)$ e $\psi: E(G) \rightarrow E(F)$, então a composta $\psi \circ \varphi$ de $E(H)$ em $E(F)$ é uma bijeção.
2. Seja Γ um co-ciclo em H , então $\varphi(\Gamma)$ é um ciclo em G .

Agora, aplicando a bijeção ψ ao ciclo $c = \varphi(\Gamma)$, temos:

$\psi(c) = \psi(\varphi(\Gamma)) = (\psi \circ \varphi)(\Gamma)$. Daí, $(\psi \circ \varphi)(\Gamma)$ é um co-ciclo em F .

3. Repete-se o processo para Γ um ciclo de H , e o lema está demonstrado. ■

Os seguintes diagramas, onde as figuras 7.3.4 e 7.3.5 são os duais do grafo planar 7.2.2a, com a aresta a_i correspondendo a aresta b_i (para $i = 1, \dots, 13$), ilustram este lema. Considere, por exemplo, o corte $\{a_2, a_4, a_{10}, a_{13}\}$ e compare com $\{b_2, b_4, b_{10}, b_{13}\}$ e o ciclo cujo conjunto de arestas é $\{a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}\}$ e compare com $\{b_{10}, b_{11}, b_{12}, b_{13}\}$.

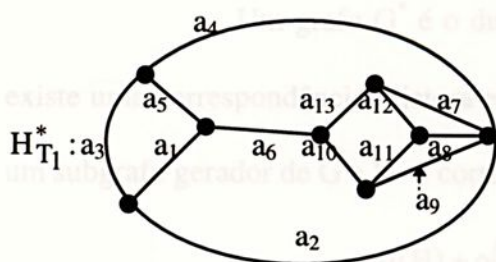


Figura 7.3.4

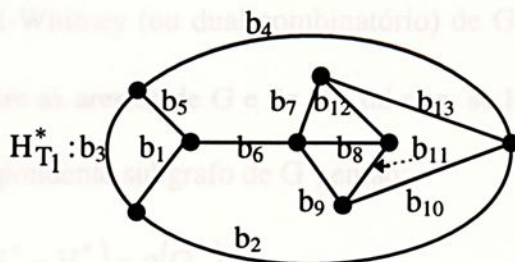


Figura 7.3.5

O teorema a seguir é análogo ao teorema 7.3.1 e a demonstração

é encontrada em Thulasiraman & Samy²³ e Wilson³².

Teorema 7.3.7 Se G^* é um dual-Whitney de G , então G é um dual-Whitney de G^* . ■

Teorema 7.3.5 Se G^* é um dual abstrato de G , então G é um dual abstrato de G^* . ■

O teorema a seguir nos mostra que o dual abstrato caracteriza os grafos planares; a demonstração poderá ser encontrada em Wilson³², contudo notemos que a condição necessária é dada pelo teorema 7.3.3.

Teorema 7.3.6 Um grafo é planar se, e somente se, ele possui um dual abstrato. ■

A seguir apresentamos a terceira definição equivalente de dualidade. Esta definição foi dada por Whitney²⁷.

Veremos no nono capítulo que as definições de dualidade abstrata, dualidade-Whitney são consequências diretas da dualidade de matróides.

Um grafo G^* é o dual-Whitney (ou dual combinatório) de G se existe uma correspondência bijetora entre as arestas de G e de G^* , tal que, se H é um subgrafo gerador de G e H^* o correspondente subgrafo de G^* , então:

$$\mu(H) + \rho(G^* - H^*) = \rho(G^*).$$

O teorema a seguir é análogo aos teoremas 7.3.1 e 7.3.4.

Teorema 7.3.7 Se G^* é um dual-Whitney de G , então G é um dual-Whitney de G^* . ■

O teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em Whitney²⁷, nos fornece uma caracterização de grafos planares por meio do dual-Whitney.

Teorema 7.3.8 Um grafo é planar se, e somente se, ele possui um dual-Whitney. ■

Uma prova de equivalência entre a primeira e a terceira definição de dualidade pode ser encontrada em Whitney²⁷.

Veremos no nono capítulo que as definições de dualidade abstrata, dualidade-Whitney são conseqüências diretas da dualidade de matróide.

Neste capítulo, apresentamos algumas definições de matróide, em especial, seguindo o trabalho de Whitney²⁸, de Wilson^{21,22} e Oxley²⁹.

Capítulo 8

Um *matróide* M é um par ordenado $(E, \mathcal{B})$ consistindo de um conjunto finito e não vazio E (chamado *conjunto fundamental*) e uma coleção não vazia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de E (chamadas *bases*) satisfazendo as duas condições a seguir:

Noções de Matróides

8.1 Introdução

Em 1935, Whitney publicou um artigo com o título “On the abstrat properties of linear”, onde introduz-se uma teoria denominada teoria de matróides. Ele construiu esta teoria verificando analogias entre o conjunto de arestas de um grafo e a estrutura de uma matriz. A literatura consultada nos mostra que B. L. van der Waerden deu início informalmente a esta teoria antes que Whitney. Esta teoria ficou esquecida por um bom período de tempo; até que em 1958 W. T. Tutte obtém alguns resultados sobre esta teoria e, desde então, o interesse em teoria de matróides e suas aplicações na teoria combinatorial, assim como em outros ramos da matemática e engenharia tem crescido rapidamente, justificando o fato de encontrarmos hoje um grande número de publicações sobre o assunto; e cremos que existem muitos assuntos novos ligados a esta teoria.

Neste capítulo, apresentamos algumas definições de matróide, em especial, seguindo o trabalho de Whitney²⁸, de Wilson^{31,32} e Oxley²⁰.

8.2 Matroids: base, independência, rank, circuito e fecho.

Um *matróide* M é um par ordenado $(E, \mathcal{B})$ consistindo de um conjunto finito e não vazio E (chamado *conjunto fundamental*) e uma coleção não vazia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de E (chamados *bases*) satisfazendo as duas condições a seguir:

$\mathcal{B}$ i. Se $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{B}$, então $\mathcal{B}_1 \subsetneq \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_2 \not\subset \mathcal{B}_1$, isto é, nenhuma base contém propriamente a outra base; e

$\mathcal{B}$ ii. Se $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in \mathcal{B}_1$, então $\exists y \in \mathcal{B}_2$, tal que, $[(\mathcal{B}_1 - \{x\}) \cup \{y\}] \in \mathcal{B}$.

Ilustração 8.2.1: Seja $G = (V, E)$ um grafo. Então, $(E, \mathcal{B})$, onde $\mathcal{B} = \{E(\Gamma) / \Gamma \text{ é uma floresta (ou árvore) geradora de } G\}$, é um matróide.

Demonstração: De fato:

$\mathcal{B}$ i. Se $E(\Gamma_1)$ e $E(\Gamma_2) \in \mathcal{B}$, então Γ_1 e Γ_2 são florestas (ou árvores) geradoras de G , daí (pela propriedade 2.2.2) Γ_1 não contém propriamente Γ_2 e vice-versa.

$\mathcal{B}$ ii. Se $E(\Gamma_1)$ e $E(\Gamma_2) \in \mathcal{B}$ e w é uma aresta de Γ_1 (isto é, $w \in \Gamma_1$), então (pela propriedade 2.2.3) existe uma aresta s de Γ_2 , tal que, $(\Gamma_1 - w) \cup \{s\}$ é uma floresta geradora, daí $[(E(\Gamma_1) - w) \cup \{s\}] \in \mathcal{B}$.

Ilustração 8.2.2: Seja V um espaço vetorial finito e $\mathcal{B} = \{B / B \text{ é uma base de } V\}$.

Então, $(V, \mathcal{B})$ é um matróide.

De fato:

$\mathcal{B}$ i. Se B_1 e $B_2 \in \mathcal{B}$, então (pela propriedade $P_{1.2.1}$) $B_1 \not\subseteq B_2$ e $B_2 \not\subseteq B_1$.

$\mathcal{B}$ ii. Se B_1 e $B_2 \in \mathcal{B}$ e $w \in B_1$, então (pela propriedade $P_{1.2.2}$) existe $v \in B_2$, tal que, $[(B_1 - w) \cup \{v\}] \in \mathcal{B}$.

As duas ilustrações acima com os resultados $P_{2.2.1}$ e $P_{1.2.3}$ exemplificam a propriedade a seguir.

Propriedade 8.2.1 Quaisquer duas bases de um matróide possuem o mesmo número de elementos.

Demonstração:

Sejam $\mathcal{B}_1 = \{x_1, \dots, x_r\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{y_1, \dots, y_t\}$ bases de um matróide, com $r < t$, isto é, $|\mathcal{B}_1| < |\mathcal{B}_2|$.

Segundo $\mathcal{B}$ ii, $\forall x_i \in \mathcal{B}_1$, $\exists y_j \in \mathcal{B}_2$, tal que, $(\mathcal{B}_1 - \{x_i\}) \cup \{y_j\} \in \mathcal{B}$.

Aplicando esta condição, tomando cada um os $x_1, x_2, \dots, x_k$ ($1 \leq k \leq r$) elementos de $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2$, temos que existem $y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jk} \in \mathcal{B}_2$, tal que,

$\mathcal{B}_3 = (\mathcal{B}_1 - \{x_1, x_2, \dots, x_k\}) \cup \{y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jk}\} \in \mathcal{B}$. É evidente que $\mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{B}_2$, o que contradiz a condição $\mathcal{B}_i$, logo $|\mathcal{B}_1| \geq |\mathcal{B}_2|$. ■

Ilustração 4.2.3: Seja $G = (V, E)$ um grafo. Então, $(E, \mathcal{J})$, onde $\mathcal{J} = \{E(\Gamma) / \Gamma \text{ é uma árvore ou uma floresta de } G\}$, é um matróide.

O matróide, cujo conjunto fundamental é E , pode ser referido apenas por um matróide sobre E .

Um subconjunto A de E é dito um conjunto independente, considerando M um matróide sobre E , se A for um subconjunto de alguma base de M . Com base nesta definição é imediato que as bases de M sejam os conjuntos independentes maximais; e por esta razão se listarmos os conjuntos independentes de um matróide este fica completamente determinado, em outras palavras, temos uma outra definição de matróide, via axiomas de independência, que será dada a seguir.

Um matróide M é um par ordenado $(E, \mathcal{J})$ consistindo de um conjunto finito e não vazio E (chamado conjunto fundamental) e uma coleção não vazia $\mathcal{J}$ de subconjuntos de E (chamados *conjuntos independentes*) satisfazendo as três condições a seguir:

$\mathcal{J}_i$. $\emptyset \in \mathcal{J}$;

$\mathcal{J}_{ii}$. Se $X \in \mathcal{J}$ e $Y \subseteq X$, então $Y \in \mathcal{J}$; e

$\mathcal{J}_{iii}$. Se $X, Y \in \mathcal{J}$ e $|X| < |Y|$, então $\exists y \in Y - X$, tal que, $X \cup \{y\} \in \mathcal{J}$.

A prova de equivalência destas duas primeiras definições de um matróide pode ser encontrada em Welsh²⁶, Oxley²⁰ e Whitney²⁸.

Ilustração 8.2.3: Seja $G = (V, E)$ um grafo. Então, $(E, \mathcal{J})$, onde $\mathcal{J} = \{E(\Gamma) / \Gamma \text{ é uma árvore ou uma floresta de } G\}$, é um matróide.

De fato:

As condições $\mathcal{J}_i$ e $\mathcal{J}_{ii}$ são imediatas, agora provaremos a condição $\mathcal{J}_{iii}$, sejam $E(\Gamma_1)$ e $E(\Gamma_2) \in \mathcal{J}$ e $|E(\Gamma_1)| < |E(\Gamma_2)|$.

Desde que, Γ_1 e Γ_2 são árvores ou florestas, então

$$|E(\Gamma_1)| = |V(\Gamma_1)| - \omega(\Gamma_1) \text{ e } |E(\Gamma_2)| = |V(\Gamma_2)| - \omega(\Gamma_2).$$

Se existe $v \in \Gamma_2$, com $v \notin \Gamma_1$, então qualquer $e = (u, v) \in \Gamma_2$ pode ser adicionada a Γ_1 sem formar um ciclo em Γ_1 . Se não existir v nestas condições, então $|V(\Gamma_2)| \leq |V(\Gamma_1)|$, e por hipótese $|E(\Gamma_2)| > |E(\Gamma_1)|$ o que implica em $\omega(\Gamma_2) = |V(\Gamma_2)| - |E(\Gamma_2)| < |V(\Gamma_1)| - |E(\Gamma_1)| = \omega(\Gamma_1)$, isto é, $\omega(\Gamma_2) < \omega(\Gamma_1)$; daí existe uma aresta $e \in \Gamma_2$ que une componentes distintas de Γ_1 e por esta razão pode ser adicionada a Γ_1 sem formar um ciclo em Γ_1 .

Ilustração 8.2.4: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Se a, b, c, d, e e f deno-

tam as colunas (nesta ordem) de A , então $(E, \mathcal{J})$, com $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ e

$\mathcal{J} = \{X / X \subseteq E \text{ e } X \text{ é linearmente independente}\} = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a,d\}, \{a,c\}, \{a,e\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{b,e\}, \{c,e\}, \{c,d\}, \{d,e\}, \{a,c,e\}, \{a,d,e\}, \{b,c,e\}, \{b,d,e\} \}$, é um matróide (basta checar).

Na teoria de grafos, se T é uma árvore de um grafo G , podemos estender T para uma árvore geradora de G e analogamente, em um espaço vetorial, se S é um subconjunto independente, podemos estender S a uma base deste espaço vetorial. O resultado a seguir é uma generalização desta analogia entre a árvore T e o conjunto S citados.

Demonstrações:

Propriedade 8.2.2 Seja $M = (E, \mathcal{J})$ um matróide e $X \in \mathcal{J}$. O conjunto X pode ser estendido para uma base de M .

Demonstração:

Se X é um conjunto independente maximal, não há o que se provar; caso contrário $X \subset Y$, onde Y é independente maximal, isto é, Y é base de M .

Por Jiii, $\exists y_1 \in Y - X$, tal que, $X \cup \{y_1\} \in \mathcal{J}$; se $X \cup \{y_1\}$ for independente maximal, está provada; caso contrário, $\exists y_2 \in Y - (X \cup \{y_1\})$, tal que, $(X \cup \{y_1\}) \cup \{y_2\} \in \mathcal{J}$. Se $X \cup \{y_1, y_2\}$ for independente maximal, a demonstração terminou, se não, repete-se o raciocínio até se obter um conjunto independente maximal. ■

com $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $\mathcal{J} = \{X \subseteq E / G[X] \text{ é uma árvore ou floresta de } G\}$. Podemos checar facilmente que $\mathcal{J}$ é uma coleção de subconjuntos independentes de M .

A propriedade 8.2.3 (abaixo) generaliza a similitude comum entre o fato de quaisquer duas árvores geradoras do grafo gerado por um subconjunto qualquer de arestas de um grafo possuírem o mesmo número de arestas e o fato de que quaisquer dois subconjuntos linearmente independentes maximais de um subconjunto de um espaço vetorial possuírem o mesmo número de vetores.

Propriedade 8.2.3 Seja $M = (E, \mathcal{J})$ um matróide e sejam $X, Y \subseteq A$, para $A \subseteq E$. Se, X e Y são independentes maximais em A , então $|X| = |Y|$.

Demonstração:

Suponhamos que $|X| < |Y|$.

Por $\mathcal{J}_{iii}$, $\exists y \in Y - X$, tal que, $X \cup \{y\} \in \mathcal{J}$.

É evidente que $X \cup \{y\} \subseteq A$ e $|X \cup \{y\}| = |X| + 1$, o que contradiz a hipótese de X ser independente maximal em A . ■

Os matroids $M_1 = (E_1, \mathcal{J}_1)$ e $M_2 = (E_2, \mathcal{J}_2)$ são isomorfos (denotamos $M_1 \cong M_2$), se existe uma bijeção ϕ de E_1 em E_2 que preserve a independência, isto é, $X \in \mathcal{J}_1$ se, e somente se, $\phi(X) \in \mathcal{J}_2$.

É imediato que se, M é um matróide sobre E , então,

Ilustração 8.2.5: Denotamos por M_4 o matróide da ilustração 8.2.4 e por M_5 o matróide definido a partir do grafo G da figura 8.2.1 (abaixo), onde $M_5 = (E, \mathcal{J})$,

com $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $\mathcal{J} = \{X \subseteq E / G[X] \text{ é uma árvore ou floresta de } G\}$. Podemos checar facilmente que $M_4 \equiv M_5$, por exemplo, se considerarmos a bijeção dada por: $\varphi(a) = \text{aresta } n$, $\varphi(b) = \text{aresta } p$, $\varphi(c) = r$, $\varphi(d) = q$, $\varphi(e) = s$, $\varphi(f) = t$, vemos que um conjunto X é independente em M_5 , isto é, $\varphi(X)$ é uma árvore ou floresta de G .

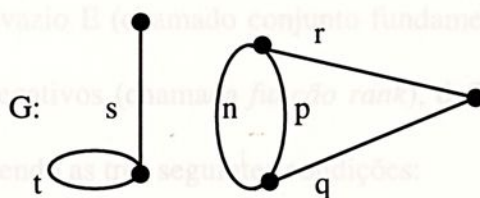


Figura 8.2.1

Seja $M = (E, \mathcal{J})$ é um matróide e $A \subseteq E$. Denominamos *rank* de A e denotamos por $\rho(A)$ o número de elementos do subconjunto independente maximal de A , isto é, $\rho(A) = \max\{|X| / X \subseteq A \text{ e } X \in \mathcal{J}\}$; e denotamos por $\rho(M)$ o número de elementos de um subconjunto independente maximal de M . (Nós usaremos o termo rank neste sentido, que a grosso modo corresponde na tradução o posto de uma matriz).

É imediato que se, M é um matróide sobre E , então:

- i. $\rho(A) = |A|$, se A for um subconjunto independente de E ; e
- ii. $|B| = \rho(B) = \rho(E)$, se B for uma base do matróide.

Ilustração 8.2.7 Seja $G = (V, E)$ um grafo e $\forall H \subseteq E$, $\rho(H)$ é o número de arestas da floresta (ou árvore) geradora de $G[H]$. Então, (E, ρ) é um matróide (use as propriedades 2.2.4, 2.2.5 e 2.2.6).

Um subconjunto A de E é chamado um conjunto dependente do matróide M sobre E , se A não for independente. Se A for dependente minimal, então A é um circuito de M . (Para mais detalhe veja matróide ciclo de um grafo, abaixo).

Um elemento x de E é um laço (ou laçada) do matróide M sobre E se, e somente se, o conjunto unitário $\{x\}$ é um circuito (conjunto dependente minimal de M). Um par de elementos distintos x e y de E , são paralelos em M se, e somente se, o conjunto $\{x, y\}$ é um circuito de M .

Lema 8.2.1 Consideremos o matróide $M = (E, \mathcal{I})$.

i. x é um laço se, e somente se, $\rho(\{x\}) = 0$; e

ii. x e y são paralelos se, e somente se, $\rho(\{x\}) = \rho(\{y\}) = \rho(\{x, y\}) = 1$.

Um matroid M que não possuir laços e nem pares de elementos paralelos é denominado *matróide simples*. M é denominado *matróide bipartido* se qualquer circuito de M possuir um número par de elementos, enquanto M é de-

nominado *euleriano* se o seu conjunto fundamental puder ser expresso como a união de circuitos disjuntos.

Ilustração 8.2.9 Seja $G = (V, E)$ um grafo com pelo menos um conjunto corte.

Então, o par $(E, \mathcal{C})$ À continuação, definimos um matróide em termos de circuitos, o que faz sentido se observarmos que os circuitos determinam os conjuntos independentes do matróide.

Um matróide M é um par ordenado $(E, \mathcal{C})$, consistindo de um conjunto finito e não vazio E (chamado conjunto fundamental) e uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de E (chamados *circuitos*) satisfazendo as duas condições seguintes:

- $\mathcal{C}i$. Se $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{C}$, então $\mathcal{C}_1 \not\subseteq \mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_2 \not\subseteq \mathcal{C}_1$, em outras palavras, nenhum circuito está contido em outro circuito ; e
- $\mathcal{C}ii$. Se $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{C}$, com $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2$ e $x \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, então $\exists \mathcal{C}_3 \in \mathcal{C}$, tal que, $\mathcal{C}_3 \subseteq [(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) - \{x\}]$.

Ilustração 8.2.8 Seja $G = (V, E)$ um grafo com pelo menos um ciclo. Então, o par $(E, \mathcal{C})$, onde $\mathcal{C} = \{X \subseteq E / G[X] \text{ é um ciclo}\}$ é um matróide.

De fato:

- $\mathcal{C}i$. Se $X, Y \in \mathcal{C}$, então $X \not\subseteq Y$ e $Y \not\subseteq X$, pois se $X \subseteq Y$, então Y não é circuito (não é dependente minimal), o que está em contradição com a hipótese.

cliii. Se $x \in \text{cl}(A)$, $\text{cl}(A \cup \{x\}) = \text{cl}(A)$.
 @ii. É imediato, pelo corolário 4.2.1.

Ilustração 8.2.9 Seja $G = (V, E)$ um grafo com pelo menos um conjunto corte.

Então, o par $(E, \mathcal{C})$, onde $\mathcal{C} = \{X \subseteq E / G[X] \text{ é um conjunto corte}\}$ é um matróide.

@i. Análoga a anterior.

Ilustração 8.2.1 @ii. É imediato pelo corolário 4.3.1. a, b e c denotam as colunas

(nesta ordem) de A , então o par (E, cl) , onde $E = \{a, b, c\}$ e qualquer $B \subseteq 2^E$,

Considerando o matróide $M = (E, \rho)$ e $A \subseteq E$, o *fecho** de A ,
 $\text{cl}(B) = \{x / x \in (B) \cap E\}$, é um matróide:

denotado por $\text{cl}(A)$, é o conjunto de todos os elementos de E que são dependentes
 sobre A , ou seja, $\text{cl}(A) = \{x \in E / \rho(A \cup \{x\}) = \rho(A)\}$.

A seguir oferecemos alguns exemplos de matrôides que devido a
 importância recebem nomes específicos.

Valendo-se da definição de fecho e considerando 2^E o conjunto
 das partes de E , podemos definir o matróide M nos termos de fecho tal como se-
 gue:

Se E é um conjunto finito e não vazio, então $M = (E, \mathcal{I})$, com
 $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$, é um matróide sobre E e denominado *matróide trivial*. O único conjunto

Um matróide M é um par ordenado (E, cl) , consistindo de um
 independente do matróide M é o conjunto $\emptyset$.
 conjunto finito e não vazio E (chamado conjunto fundamental) e uma função

$\text{cl}: 2^E \rightarrow 2^E$ (chamada *função fecho*) satisfazendo as três condições abaixo:

Exemplo 8.2.2. Matróide discreto:

cli. $\forall A \subseteq E, A \subseteq \text{cl}(A) = \text{cl}(\text{cl}(A))$;

Se E é um conjunto finito e não vazio, então $M = (E, \mathcal{I})$, com

clii. Se $A \subseteq B \subseteq E$, então $\text{cl}(A) \subseteq \text{cl}(B)$; e

$\mathcal{I} = 2^E \setminus \{2^E\}$ é o conjunto das partes de E , é um matróide sobre E e denominado *ma-*

* A forma inglesa da palavra fecho é closure ou span.

cliii. Se $x \in \text{cl}(A \cup \{y\})$ e $x \notin \text{cl}(A)$, então $y \in \text{cl}(A \cup \{x\})$.

Ilustração 8.2.10 Seja $G = (V, E)$, um grafo com $\rho(G) \geq 1$. Então, o par (E, cl) ,

onde qualquer $A \in 2^E$, $\text{cl}(A) = \{x / \rho(G[A] \cup x) = \rho(G[A])\}$, é um matróide.

Ilustração 8.2.11 Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Se a, b e c denotam as colunas

(nesta ordem) de A , então o par (E, cl) , onde $E = \{a, b, c\}$ e qualquer $B \in 2^E$,

$\text{cl}(B) = \{x / x \in ([B] \cap E)\}$, é um matróide.

A seguir oferecemos alguns exemplos de matrôides que devido a importância recebem nomes específicos.

Exemplo 8.2.1. Matróide trivial

Se E é um conjunto finito e não vazio, então $M = (E, \mathcal{J})$, com $\mathcal{J} = \{\emptyset\}$, é um matróide sobre E e denominado *matróide trivial*. O único conjunto independente do matróide M é o conjunto $\emptyset$.

Exemplo 8.2.2. Matróide discreto

Se E é um conjunto finito e não vazio, então $M = (E, \mathcal{J})$, com $\mathcal{J} = 2^E$ (2^E o conjunto das partes de E), é um matróide sobre E e denominado *ma-*

tróide discreto. A coleção de conjuntos independentes no matróide M são todos os elementos de 2^E .

Exemplo 8.2.3. Matróide Uniforme ($U_{m,k}$)

Se E é um conjunto finito e não vazio, com $|E| = m$, então $M = (E, \mathcal{I})$, onde $\mathcal{I} = \{X / X \subseteq E \text{ e } |X| \leq k, \text{ para } 0 \leq k \leq m\}$, é um matróide sobre E , denotado por $U_{m,k}$ e denominado *matróide k -uniforme*, ou ainda, *matróide uniforme de rank k* . Notemos que os subconjuntos independentes de $U_{m,k}$ são todos os subconjuntos de E que possuem no máximo k elementos.

Considerando $A \subseteq E$, obtemos:

i. Os valores da função rank são dados por:

$$\rho(A) = \begin{cases} |A|, & \text{se } |A| \leq k \\ k, & \text{se } |A| \geq k. \end{cases}$$

ii. A família de bases de $U_{m,k}$ é dada por:

$$\mathcal{B}(U_{m,k}) = \{A / |A| = k\}.$$

iii. A família de circuitos $U_{m,k}$ é dada por:

$$\mathcal{C}(U_{m,k}) = \{A / |A| = k + 1\}.$$

iv. A família de conjuntos fechados é dada por:

$$\text{cl}(A) = \begin{cases} A, & \text{se } |A| < k \\ E, & \text{se } |A| \geq k. \end{cases}$$

Observemos também que $U_{m,0}$ é o matróide trivial e que o $U_{m,m}$ é o matróide discreto, isto é, os dois exemplos anteriores de matrôides são casos particulares deste matróide $U_{m,k}$, isto é, para $k = 0$, $U_{m,0}$ é trivial e para $k = m$ é o matróide discreto.

Exemplo 8.2.4. Matróide Gráfico

Seja $G = (V, E)$ um grafo, com $E \neq \emptyset$. O par ordenado $(E, \mathcal{J})$, onde $\mathcal{J} = \{X \subseteq E / G[X] \text{ é uma floresta ou uma árvore de } G\}$ é um matróide, denotado por $M(G)$ e denominado o *matróide circuito* (ou *matróide ciclo*) de G .

Valendo desta definição de matróide o resultado a seguir é imediato.

Propriedade 8.2.4 Seja $G = (V, E)$ um grafo (com $E \neq \emptyset$) e seja $M(G) = (E, \mathcal{J})$ o matróide circuito de G . Então:

- Um conjunto de arestas de G é independente se, e somente se, ele não possui um ciclo de G .
- Os circuitos do matróide $M(G)$ são ciclos de G .

Exemplo 8.2.5 Um matróide L é chamado matróide gráfico se existir um grafo G , tal que, L é isomorfo ao matróide circuito $M(G)$.

Ilustração 8.2.12 O matróide $U_{3,2}$ é isomorfo ao matróide circuito $M(G) = (E, \mathcal{J})$, com $E = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{J} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ (veja figura 8.2.2) (abaixo) e por esta razão $U_{3,2}$ é um matróide gráfico, ao passo que $U_{4,2}$ não é um matróide gráfico, pois não encontramos um grafo com quatro arestas com a propriedade que três arestas quaisquer formem um circuito.

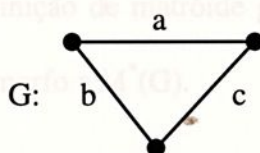


Figura 8.2.2

Ilustração 8.2.13 Tomemos o grafo $G = (V, E)$ da figura 8.2.2 (acima) e a família de conjuntos independentes $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$. Pela literatura consultada, concluímos que matróides é uma extensão da teoria de grafos.

Exemplo 8.2.6 Os três grafos abaixo (figura 8.2.3), não são isomorfos mas os matroids circuitos associados são isomorfos. Este é um resultado de Whitney²⁷.

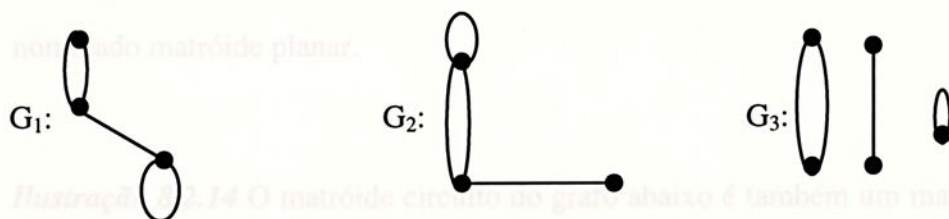


Figura 8.2.3

Exemplo 8.2.5 Matróide cográfico

Dado um grafo $G = (V, E)$ não somente podemos definir (sobre o conjunto das arestas) o matróide circuito, mas podemos definir, tomando como família de conjuntos independentes todos os subconjuntos de E que não contenha co-ciclos de G . Formalmente o par $(E, \mathcal{J})$, com $\mathcal{J} = \{ X / X \subseteq E \text{ e } X \text{ não possui corte de } G \}$ é um matróide denominado o *matróide co-ciclo* de G e denotamos por $M^*(G)$. Neste caso, um corte de G é um circuito de $M^*(G)$.

Análoga a definição de matróide gráfico, dizemos que um matróide P é *cográfico* se P for isomorfo a $M^*(G)$.

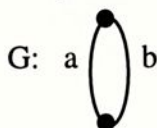
Ilustração 8.2.13 Tomemos o grafo $G = (V, E)$ da figura 8.2.2 (acima) e a família de conjuntos independentes $\mathcal{J} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$. Daí, o matróide co-ciclo de G $M^*(G) = (E, \mathcal{J})$. Notemos que $U_{3,1}$ é um matróide cográfico.

Exemplo 8.2.6 Matróide planar

Um matróide que é gráfico e cográfico ao mesmo tempo é denominado matróide planar.

Ilustração 8.2.14 O matróide circuito do grafo abaixo é também um matróide co-ciclo de G , portanto é um matróide planar.

Figura 8.2.4:



Observamos, como consequência direta do Lema 7.3.1, que embora os duais geométricos de um grafo possam não ser isomorfos, eles possuem matróide circuito e co-ciclo isomorfos, em outras palavras, se G é um grafo planar com duais $G_1^* \neq G_2^*$, então $M(G_1^*) \cong M(G_2^*)$ e $M^*(G_1) \cong M^*(G_2)$.

Dualidade em matróides

9.1 Introdução

Os conceitos ortogonal de espaços vetoriais e dual de um grafo planar motivaram a dualidade de matróides (introduzida por Whitney em 1935); em outras palavras, a dualidade de matróides generaliza a ortogonalidade de espaços vetoriais e dual dos grafos planares.

Neste capítulo (onde fizemos uma breve introdução na dualidade de matróides), percebe-se que a dualidade de um matróide inclui as definições de dualidade da teoria de grafos dadas no sétimo capítulo e também beneficia a aplicação de matróides na teoria combinatorial.

Os resultados deste capítulo se encontram basicamente em Wilson^{31,32}, Oxley²⁰ e Rencski³¹.

9.2 Dualidade em matróide

Iniciaremos esta seção com o seguinte resultado:

Capítulo 9

Teorema 9.2.1 Seja $M = (E, p)$ um matróide sobre E (definido nos termos da

função p). Então, $N = (E, p^*)$ é um matróide sobre E , onde

$$p^*(A) = |A| + p(E - A) - p(E), \quad \forall A \subseteq E.$$

Dualidade em matróides

Temos que:

9.1 Introdução

Os conceitos ortogonal de espaços vetoriais e dual de um grafo planar motivaram a dualidade de matróides (introduzida por Whitney em 1935); em outras palavras, a dualidade de matróides generaliza a ortogonalidade de espaços vetoriais e dual dos grafos planares.

Neste capítulo (onde fizemos uma breve introdução na dualidade de matróides), percebe-se que a dualidade de um matróide inclui as definições de dualidade da teoria de grafos dadas no sétimo capítulo e também beneficia a aplicação de matróides na teoria combinatorial.

Os resultados deste capítulo se encontram basicamente em Wilson^{31,32}, Oxley²⁰ e Recski²¹.

9.2 Dualidade em matróide

Iniciaremos esta seção com o seguinte resultado:

Teorema 9.2.1 Seja $M = (E, \rho)$ um matróide sobre E (definido nos termos da função ρ). Então, $N = (E, \rho^*)$ é um matróide sobre E , onde

$$\rho^*(A) = |A| + \rho(E - A) - \rho(E), \quad \forall A \subseteq E.$$

Demonstração:

Temos que:

$$\rho(E - A) = \max\{|X| / X \subseteq (E - A) \text{ e } \rho(X) = |X|\} \leq \max\{|Y| / Y \subseteq E \text{ e } \rho(Y) = |Y|\}$$

$= \rho(E)$ e daí, podemos escrever:

$$\rho(E - A) \leq \rho(E) \quad \text{ou} \quad \rho(E) - \rho(E - A) \geq 0. \quad (i)$$

Agora, por hipótese e por (i):

$$\rho^*(A) = |A| + \rho(E - A) - \rho(E) \leq |A| + \rho(E) - \rho(E) \leq |A|, \text{ logo:}$$

$$\rho^*(A) \leq |A|. \quad (ii)$$

Por outro lado,

$$\rho(A \cup (E - A)) + \rho(A \cap (E - A)) \leq \rho(A) + \rho(E - A)$$

$$\Rightarrow \rho(E) + \rho(\emptyset) \leq \rho(A) + \rho(E - A)$$

$$\Rightarrow \rho(E) - \rho(E - A) \leq \rho(A) \leq |A|$$

$$\Rightarrow -|A| + \rho(E) - \rho(E - A) \leq 0$$

$$\Rightarrow |A| + \rho(E - A) - \rho(E) \geq 0$$

$$\Rightarrow \rho^*(A) \geq 0 \quad (\text{iii})$$

Comparando (ii) e (iii) temos:

$$0 \leq \rho^*(A) \leq |A| \quad (\text{iv})$$

A prova de $\rho^*(A) \leq \rho^*(B)$, $\forall A, B \subseteq E$ e $A \subseteq B$ é direta e por esta razão é omitida. (v)

Agora, para $\forall A, B \subseteq E$,

$$\begin{aligned} \rho^*(A \cup B) + \rho^*(A \cap B) &= |A \cup B| + \rho(E - (A \cup B)) - \rho(E) + |A \cap B| + \rho(E - (A \cap B)) \\ &\quad - \rho(E) = |A| + |B| - |A \cap B| + \rho((E - A) \cap (E - B)) + |A \cap B| + \rho((E - A) \cup (E - B)) \\ &\quad - 2\rho(E) \leq |A| + |B| + \rho(E - A) + \rho(E - B) - 2\rho(E) \quad (\text{por } \rho \text{ iii aplicando em } \rho) \\ &= \rho^*(A) + \rho^*(B), \text{ assim} \end{aligned}$$

$$\rho^*(A \cup B) + \rho^*(A \cap B) \leq \rho^*(A) + \rho^*(B). \quad (\text{vi})$$

A partir de (iv), (v) e (vi) concluímos que $N = (E, \rho^*)$ é um matróide. ■

Whitney com este teorema 9.2.1 define o dual de um matróide como segue:

Se $M = (E, \rho)$ é um matróide definido nos termos da função rank, define-se o *matróide dual* de M e denotado por M^* , como sendo o matróide sobre E e cuja função rank ρ^* é dada pela expressão:

$$\rho^*(A) = |A| + \rho(E - A) - \rho(E), \quad \forall A \subseteq E. \quad (\text{ii})$$

Como consequência direta desta definição (diferenciando do dual de um grafo) temos:

- Todo matróide possui dual; e
- O dual de um matróide é único.

Usando a definição de dual, obtém-se as bases de M^* por meio das bases de M da seguinte forma:

Teorema 9.2.2 Seja $M = (E, \rho)$ um matróide sobre E , e seu dual $M^* = (E, \rho^*)$. Então, B^* é uma base de M^* se, e somente se, $E - B^*$ (ou $B = E - B^*$) é uma base de M .

Demonstração:

Basta mostrarmos que se B^* é uma base de M^* , então $E - B^*$ é uma base de M , em vista que a recíproca é obtida simplesmente revertendo-se os argumentos, assim:

Mostremos que se B^* é uma base de M^* , então $E - B^*$ é uma base de M , de fato:

Se B^* é uma base de M^* , então B^* é independente e

$$\rho^*(B^*) = |B^*| \quad (i)$$

Por hipótese,

$$\rho^*(B^*) = |B^*| + \rho(E - B^*) - \rho(E). \quad (ii)$$

Substituindo a igualdade de (i) na (ii) temos que $E-B^*$ possui um subconjunto independente maximal de M , isto é,

$$\rho(E-B^*) = \rho(E) \quad (\text{iii})$$

Agora, para mostrarmos que $E-B^*$ é independente em M , basta mostrarmos que $\rho(E-B^*) = |E-B^*|$ e para isto, temos por hipótese que

$\rho^*(B^*) = |B^*|$ e $M = (E, \rho)$ e o dual de $M = (E, \rho^*)$, então:

$$\begin{aligned} \rho(E-B^*) &= |E-B^*| + \rho^*(E - (E-B^*)) - \rho^*(E) \\ \Rightarrow \rho(E-B^*) &= |E-B^*| + \rho^*(B^*) - |B^*| \\ \Rightarrow \rho(E-B^*) &= |E-B^*|. \end{aligned} \quad (\text{iv})$$

Logo, por (iii) e (iv), $E-B^*$ é uma base de M . ■

Como consequência imediata deste teorema temos que B é uma base de um matróide M se, e somente se, $E-B$ é uma base de M^* , o que acarretará que B é uma base de M^{**} e vice-versa, isto é, $M=M^{**}$.

Uma prova para o teorema a seguir pode ser encontrada em Wilson³².

Teorema 9.2.3 Se G é um grafo, então $M^*(G) = (M(G))^*$, isto é, o matróide conjunto corte $M^*(G)$ de um grafo G é o dual do matróide circuito $M(G)$.

$M^*(G)$ e por esse Se M^* é o dual de M tem-se:

- Um cocircuito de M é circuito de M^* (no caso do matróide circuito $M(G)$ os cocircuitos de $M(G)$ são os conjuntos cortes de G).
- Uma cobase de M é uma base de M^* .
- O corank de M é o rank de M^* .

Verifica-se que os resultados apresentados no sétimo capítulo têm extensão na

Com base nas definições acima, conclui-se que um matróide cográfico é dual do matróide gráfico; e também pode-se ver que qualquer resultado sobre circuitos de um matróide fornece imediatamente dois resultados sobre grafos, desde que se possa aplicar o resultado tanto para o matróide circuito $M(G)$ de um grafo como para o matróide conjunto corte $M^*(G)$ de G . Em outras palavras, dois resultados de grafos são simplesmente formas duais de um único resultado da teoria de matróides, necessitando deste modo provar um resultado na teoria de matróides e usar a dualidade a fim de obter dois resultados na teoria de grafos. Este é um dos exemplos de como a dualidade de matróides beneficia à aplicação de matróides, para mais informações vide, por exemplo, Recski²¹ ou Wilson³¹.

Como consequência do teorema 9.2.3 (acima), tem-se que a definição de dualidade de um matróide generaliza a definição de dual-abstrato de um grafo planar G , ou seja, os circuitos de $M(G)$ correspondem aos cocircuitos de

$M^*(G)$ e por esta razão os circuitos de G correspondem aos conjuntos cortes de G^* . Agora, em razão do dual abstrato ser equivalente ao dual-Whitney e generalizar o dual geométrico, tem-se que o dual de um matróide também generaliza estas duas definições.

Verifica-se que os resultados apresentados no sétimo capítulo têm extensão natural para a teoria de matrôides, para maiores informações, vide, por exemplo, Wilson³¹, Oxley²⁰ ou Rescki²¹.

10.1 Introdução

Neste capítulo, introduzimos a noção de representabilidade de matrôides e os espaços circuitos e co-circuitos do matróide.

Os resultados apresentados foram tomados basicamente de Oxley²⁰, Welsh²⁶ e Wilson³¹.

10.2 Matrôides Representáveis

Consideremos o matróide $M = (E, \mathcal{I})$, onde $|E| = n$ e um corpo arbitrário F . Dizemos que M é representável sobre o corpo F , se existe um espaço vetorial V sobre F (assumamos que $\dim(V) = n$ e escrevemos V^n ao invés de V simplesmente) e uma aplicação injetiva $\phi: E \rightarrow V^n$, tal que, se X é um membro de M (isto é, $X \in \mathcal{I}$), então $\phi(X)$ é linearmente independente em V (sobre F).

Capítulo 10

Representabilidade de matróides

10.1 Introdução

Neste capítulo, introduzimos a noção de representabilidade de matróides e os espaços circuitos e co-circuitos do matróide.

Os resultados apresentados foram tomados basicamente de Oxley²⁰, Welsh²⁶ e Wilson³¹.

10.2 Matróides Representáveis

Consideremos o matróide $M = (E, \mathcal{I})$, onde $|E| = n$ e um corpo arbitrário F . Dizemos que M é representável sobre o corpo F , se existe um espaço vetorial V sobre F (assumamos que $\dim(V) = n$ e escrevemos V^n ao invés de V simplesmente) e uma aplicação injetiva $\phi: E \rightarrow V^n$, tal que, se X é um membro de M (isto é, $X \in \mathcal{I}$), então $\phi(X)$ é linearmente independente em V (sobre F).

Suponhamos que $M = (E, \mathcal{J})$ seja representável sobre o corpo F , então dada qualquer base $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ de M (é evidente que $\rho(M) = m$) a imagem de B , $\phi(B) = \{\phi(b_1), \phi(b_2), \dots, \phi(b_m)\}$, é linearmente independente em V^n , isto é, o conjunto $D = \{\phi(b_1) = v_1, \phi(b_2) = v_2, \dots, \phi(b_m) = v_m\}$ é uma base para um subespaço W de V^n , de onde W é gerado por D .

Agora, se $w \in W$, então $w = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$, $\alpha_i \in F$, $i = \overline{1, m}$, implica que w é associado a uma (única) m -upla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ de elementos de F e reciprocamente uma m -upla de elementos de F fica associado a um vetor w de W , e por conseguinte o conjunto

$$F^m = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) / \alpha_i \in F, i = \overline{1, m}\}$$

com as operações usuais de adição e multiplicação (escalar) é um espaço vetorial sobre o corpo F . Logo, os espaços W e F^m são isomorfos.

Para a transformação linear $T: V^n \rightarrow F^m$ ($m < n$) existe uma matriz A que representa a T com respeito às bases $D = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ e $\beta = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, de F^m e V^n respectivamente, isto é, $A = [a_{ij}]$ de ordem $m \times n$ e cujos elementos $a_{ij} \in F$, $\forall i = \overline{1, m}$ e $j = \overline{1, n}$.

Usando as operações elementares (de linhas e coluna de A) A tem a seguinte forma:

$$A \approx [I_m | Q], \text{ onde } I_m \text{ é a matriz identidade e } Q \text{ é algu-}$$

ma matriz $m \times (n - m)$ sobre F . A esta matriz $U = [I_m | Q]$ chamamos uma *representação vetorial padrão* de M com respeito à(s) base(s) D (e β).

Por outro lado, se P é um matróide vetorial de A , denotado por $P \equiv P[A]$ (P é matróide vetorial de A , se o conjunto fundamental é indexado pelas colunas de A , e a família de conjuntos independentes de P são os conjuntos de vetores-colunas linearmente independentes de A), então M é isomorfo a P . Consequentemente, dizemos que um matróide N é representável sobre um corpo F se, e somente, N é isomorfo a $M[A]$, para alguma matriz $A = (a_{ij})$, cujos os elementos $a_{ij} \in F$, $\forall i, j$.

Nem todos os matrôides são representáveis, por exemplo, o matróide de Vámos V_8 não é representável, vide referência Oxley²⁰.

Teorema 10.2.1 Se M é um matróide vetorial de $[I_m | Q]$, então o seu dual M^* é o matróide vetorial de $[-Q^T | I_{n-m}]$. ■

Corolário 10.2.1 Se M é representável sobre o corpo F , então o seu dual M^* também é representável sobre F . ■

As demonstrações dos dois resultados acima são encontradas em Oxley²⁰.

Se o corpo F for o corpo de Galois módulo 2, $F = GF(2)$, então o

matróide M representável sobre F é chamado *binário*; formalmente, um matróide M é binário se M for representável sobre o corpo $GF(2)$.

Como todo matróide gráfico (ou cográfico) é representável sobre qualquer corpo F , então o matróide gráfico (ou cográfico) é binário. Porém, nem todo matróide é binário, por exemplo, o matróide $U_{4,2}$ definido sobre $E = \{a, b, c, d\}$ não pode ser representável sobre $GF(2)$, pois se considerarmos $\{a, b\}$ uma base e os elementos de E associados respectivamente aos elementos de $\{(1,0), (0,1), (x,y), (z,t)\}$, teríamos que os elementos x, y, z e t não poderiam ser nulos, pois por exemplo, teríamos $(1, 0)$ e (x,y) linearmente dependentes, se $y = 0$. Assim, concluiríamos que $x = y = z = t = 1$, o que também contradiria a condição de (x, y) e (z, t) ser linearmente independente. Porém, $U_{4,2}$ é representável sobre qualquer corpo diferente do $GF(2)$, pois considerando $\{a, b\}$ uma base e os elementos de E associados respectivamente aos elementos $\{(1,0), (0,1), (1,1), (1,x)\}$, a condição é satisfeita tomando x qualquer elemento distinto de 0 e 1.

A ilustração acima não contradiz a que todo matróide gráfico ou cográfico é binário, pois nós vimos que $U_{4,2}$ não é matróide gráfico e nem cográfico.

Um conjunto de caracterizações do matróide binário é apresentado na referência Oxley²⁰, ou seja, as seguintes afirmações são equivalentes para um matróide M :



- (i) M é binário.
- (ii) Se C é um circuito e C^* é um cocircuito, então $|C \cap C^*|$ é par.
- (iii) Se C_1 e C_2 são circuitos distintos, então $C_1 \Delta C_2$ contém um circuito.
- (iv) Se C_1 e C_2 são circuitos distintos, então $C_1 \Delta C_2$ é a união disjunta de circuitos.
- (v) A diferença simétrica de qualquer conjunto de circuitos é vazia ou contém um circuito.
- (vi) A diferença simétrica de qualquer conjunto de circuitos é uma união disjunta de circuitos.
- (vii) Se B é uma base e C é um circuito, então $C = \Delta_{e \in C-B} C(e, B)$.
- (viii) Existe uma base B de M tal que, se C é um circuito, então $C = \Delta_{e \in C-B} C(e, B)$.

Para mais detalhes sobre a representabilidade de matróides gráficos (ou cográficos), vide Oxley²⁰ e Welsh²⁶.

10.2 Espaços Circuitos e Cocircuitos do Matróide

Desde que o matróide ciclo $M(G)$ de um grafo G é binário, então admite uma outra representação mais elegante e simples.

Os ciclos fundamentais são:

Seja $D = \{b_1, \dots, b_m\}$ uma base qualquer de $M(G) = (E, \mathcal{J})$ e

$D^* \equiv E - D = \{e_1, \dots, e_q\}$ é o co-base de $M(G)$. Seja

$C_j = C(e_j, D) \left((D^* \cap C_j) = \{e_j\} \right)$ o circuito fundamental e_j em D (C_j é único cir-

cuito contido em $\{b_1, \dots, b_t\} \cup \{e_j\}$, onde $1 \leq t \leq m$). Analogamente,

$C_j^* = C_0(b_j, D^*)$ são os co-ciclos fundamentais. Então, a representação vetorial

padrão de M sobre $GF(2)$ é dada pelas colunas da matriz $A = [a_{ij}]$,

$1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq |E|$, onde $a_{ij} = 1$ se, e somente se, $b_i \in c_j$, caso contrário $a_{ij} = 0$.

Ilustração 10.1 Consideremos o grafo $G = K_4$ e $M = (E, \mathcal{J})$, onde $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

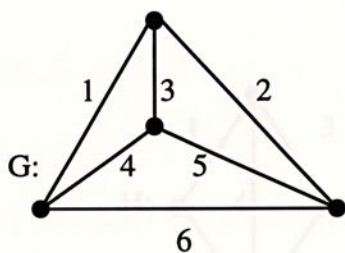


Figura 10.1

Tomemos a base $D = \{1, 2, 3\}$ de m . (D árvore geradora de K_4) e

$E - D = \{4, 5, 6\}$.

Os ciclos fundamentais são:

$$c_4 = \{1,3\} \cup \{4\}, \quad c_5 = \{3,2\} \cup \{5\} \quad \text{e} \quad c_6 = \{1,2\} \cup \{6\}, \quad \text{e}$$

sendo a representação vetorial padrão de $M(K_4)$ dada por:

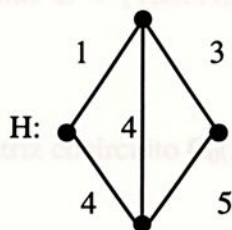
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Enquanto a representação vetorial padrão de $M^*(K_4)$ é dado por

$$[-Q^T | I_3] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ilustração 10.2 Consideremos o grafo H e $M(H) = (E, \mathcal{J})$, onde $E = \{1,2,3,4,5\}$,

$E - D = \{4,5\}$, onde $D = \{1,2,3\}$ é uma base de M .



Os ciclos fundamentais $c_4 = \{1,2\} \cup \{4\}$ e $c_5 = \{2,3\} \cup \{5\}$.

Portanto, a representação vetorial padrão de $M(H)$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e de } M^*(H) \text{ é } \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv [-Q^T | I_{n-m}].$$

Denotamos os espaços circuito e cocircuito de M por $E_c(M)$ e $E_{c_0}(M)$, respectivamente, isto é, os subespaços vetoriais $E_c(M) = \{c_1, c_2, c_3\}$ e $E_{c_0}(M) = \{c_4, c_5, c_6\}$ de $V^n = V^5$ (sobre o corpo $GF(2)$) e tem dimensão 2 e 3 respectivamente.

Consideremos o conjunto finito E com $|E| = n$ e $M = (E, \mathcal{J})$ um matróide binário e V^n um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo de $GF(2)$.

O *espaço circuito* de M é o subespaço de V^n gerado pelos vetores incidentes aos circuitos de M , em outras palavras, é o subespaço gerado pelas linhas da matriz circuito $C(M)$ de M .

O *espaço cocircuito* de M é o subespaço de V^n que são gerados pelos vetores incidentes aos cocircuitos de M , em outras palavras, é o subespaço de V^n gerado pelas linhas da matriz cocircuito $C_0(M)$ de M .

Ilustração 10.3 Considerando o grafo H da ilustração 10.2 (anterior) temos:

O matróide $M(H) = (E, \mathcal{J})$, onde $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e o espaço vetorial $V^n = V^5$ (sobre o corpo $GF(2)$).

A matriz circuito $C(M)$ e a matriz cocircuito $C_0(M)$ são

$$C(M) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{e} \quad C_0(M) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_1^* \\ c_2^* \\ c_3^* \\ c_4^* \\ c_5^* \\ c_6^* \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Denotamos os espaços circuito e cocircuito de M por $E_c(M)$ e $E_{c_0}(M)$, respectivamente, isto é, os subespaços vetoriais $E_c(M) = [\{c_1, c_2, c_3\}]$ e $E_{c_0}(M) = [\{c_1^*, c_2^*, c_3^*, c_4^*, c_5^*, c_6^*\}]$ de $V^n = V^5$ (sobre o corpo $GF(2)$) e tem dimensão 2 e 3 respectivamente.

Acreditamos que neste trabalho tenhamos atingido o nosso propósito de ter abrangido sobre os espaços vetoriais finitos que estão associados com a teoria de grafos existentes na literatura consultada, na possibilidade de um estudo sobre o espaço vértice de um grafo e como também associar uma estrutura de um espaço vetorial ao conjunto vértices uniões arestas de um grafo.

Percebemos na literatura consultada a preocupação de alguns autores em obter o número de subgrafos nos espaços vetoriais determinados, assim como o do seu complementar, sendo que, por exemplo, Deo¹² calcula um limite inferior para o número de subgrafos não vazios do grafo G que não estão no espaço ciclo e nem no espaço co-ciclo, enquanto Rosenstiel & Read¹³ apresentam uma relação da dimensão do espaço biciclo com o polinômio de Tutte; desta forma, além de termos exposto claramente o nosso objetivo cremos ter conseguido alguns resultados, os quais aparecem no sexto capítulo.

Com relação à teoria de matróides, esperamos ter introduzido uma teoria básica relacionada com a teoria de grafos, e para quem desejar continu-

ar um estudo na teoria de matróides há muito o que ser estudado e nos parece sugerir a referência Oxley²⁰, que em especial trás um capítulo só de conjecturas e problemas em aberto.

Considerações Finais

Acreditamos que neste trabalho tenhamos atingido o nosso propósito de ter abrangido sobre os espaços vetoriais finitos que estão associados com a teoria de grafos existentes na literatura consultada, na possibilidade de um estudo sobre o espaço vértice de um grafo e como também associar uma estrutura de um espaço vetorial ao conjunto vértices união arestas de um grafo.

Percebemos na literatura consultada a preocupação de alguns autores em obter o número de subgrafos nos espaços vetoriais determinados, assim como o do seu complementar, sendo que, por exemplo, Deo¹² calcula um limitante inferior para o número de subgrafos não nulos do grafo G que não estão no espaço ciclo e nem no espaço co-ciclo, enquanto Rosenstiel & Read²² apresentam uma relação da dimensão do espaço biciclo com o polinômio de Tutte; desta forma, além de termos exposto claramente o nosso objetivo cremos ter conseguido alguns resultados, os quais aparecem no sexto capítulo.

Com relação à teoria de matróides, esperamos ter introduzido uma teoria básica relacionada com a teoria de grafos, e para quem desejar continu-

ar um estudo na teoria de matróides há muito o que ser estudado e nos parece sugerir a referência Oxley²⁰, que em especial trás um capítulo só de conjecturas e problemas em aberto.

1. AIGNER, M. *Graph Theory: An Development from the 4-color*. Moscow: BCS Associates, 1987.
2. ANDRÁSFAL, B. *Graph theory: flows, matrices*. Bristol: Adamilger, 1991.
3. ARCHDEACON, D. BONNINGTON, C. P., LITTLE, C. H. C. An algebraic characterization of planar graph. *Journal of graph theory*, v.19, p.237-250, 1995.
4. BACHEM, A., KERN, W. *Linear programming duality*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
5. BERGE, C. *Graphs*. 3.ed. Amsterdam: North-Holland, 1991.
6. BIGGS, N. *Algebraic graph theory*. 2.ed. Cambridge: University Press, 1993.
7. BOLLOBÁS, B. *Graph theory*. 3ed. New York: Springer-Verlag, 1990.
8. BONDY, J. A., MURTY, U. S. R. *Graph theory with applications*. London: Macmillan Press, 1976.
9. CALLIOLI, C. A., DOMINGUES, H. H., COSTA, R. C. F. *Álgebra linear e aplicações*. 4.ed. São Paulo: Atual, 1983.
10. CHEN, W. K. *Applied graph theory*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1971.
11. CHEN, W. K. On vector spaces associated with a graph. *SIAM J. APPL. MATH.* v.20, p.526-529, 1971.
12. DEO, N. *Graph theory with applications to engineering and computer science*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.
13. DOULE, R. J. Topological and dynamical invariant theory of an electrical network. *J. Math. phys.* v.34, p.81-94, 1955.
14. GONDRAN, M., MINOX, M. *Graphs and algorithms*. Chichester: John Wiley

Bibliografia

- 1 AIGNER, M. *Graph Theory: An Development from the 4-color* Moscow: BCS Associates, 1987.
- 2 ANDRÁSFAL, B. *Graph theory: flows, matrices*. Bristol: Adamilger, 1991.
- 3 ARCHDEACON, D. BONNINGTON, C. P., LITTLE, C. H. C. An algebraic characterization of planar graph. *Journal of graph theory*, v.19, p.237-250, 1995.
- 4 BACHEM, A., KERN, W. *Linear programming duality*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- 5 BERGE, C. *Graphs*. 3.ed. Amsterdam: North-Holland, 1991.
- 6 BIGGS, N. *Algebraic graph theory*. 2.ed. Cambridge: University Press, 1993.
- 7 BOLLOBÁS, B. *Graph theory*. 3ed. New York: Springer-Verlag, 1990.
- 8 BONDY, J. A., MURTY, U. S. R. *Graph theory with applications*. London: Macmillan Press, 1976.
- 9 CALLIOLI, C. A., DOMINGUES, H. H., COSTA, R. C. F. *Álgebra linear e aplicações*. 4.ed. São Paulo: Atual, 1983.
- 10 CHEN, W. K. *Applied graph theory*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1971.
- 11 CHEN, W. K. On vector spaces associated with a graph. *SIAM J. APPL. MATH.* v.20, p.526-529, 1971.
- 12 DEO, N. *Graph theory with applications to engineering and computer science*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.
- 13 DOULE, R. J. Topological and dynamical invariant theory of an eletrical network. *J. Math. phys*, v.34, p.81-94, 1955.
- 14 GONDRAN, M., MINOX, M. *Graphs and algorithms*. Chichester: John Wiley

& Sons, 1990.

- 15 GOULD, R. Graphs and vector spaces. *J. Math. Phys.*, v.37, p.193-214, 1958.
- 16 HALMOS, P. R. *Espacios vectoriales finito-dimensionales*. Traducción de G. A. Carrasco. Méjico: Compañía Editorial Continental, S. A., 1965. original en inglés.
- 17 KNOPP, P.J. *Linear algebra: an Introduction*. California: John Wiley & Son, 1974.
- 18 LANCASTER, P. *The theory of matrices* London: Academic Press, 1985.
- 19 NISHIZEKI, T., CHIBA, N. *Planar Graphs Theory and algorithms*. Amsterdam: North-Hollande, 1988.
- 20 OXLEY, J. G. *Matroid Theory*. New York: Oxford University Press, 1992.
- 21 RECSKI, A. *Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics*. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- 22 ROSENSTIEHL, P., READ, R. C. On the principal edge tripartition of a graph. *Ann. Discrete Math*, v.3, p.195-226, 1978.
- 23 THULASIRAMAN, K., SWAMY, M. N. S. *Graphs: theory and algorithms*. New York: John Wiley & Sons, 1992.
- 24 TRUDEU, R. J. *Introduction to graph theory*. New York: Dover Publications, 1993.
- 25 TUTTE, W. T. A homotopy theorem for matroids, I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.88, p.144-174, 1958.
- 26 WELSH, D. J. A. *Matroid theory*. London: Academic PRESS, 1976.
- 27 WHITNEY, H. Non-separable and Planar Graphs. *Trans. Am. Math. Soc.*, v.34, p.339-362, 1932.
- 28 WHITNEY, H. On the abstract properties of linear dependence. *Amer. J. Math*, v.57, p.509-533, 1935.
- 29 WHITNEY, H. 2-isomorphic graphs. *Amer. J. Math*, v.55, p.245-254.

- 30 WILLIAMS, T.W., MAXWELL, L. M. The decomposition of a graph and the introduction of a new class of subgraphs. *SIAM J. Appl. Math.*, v.20, p.385-389, 1971.
- 31 WILSON, R. J. An introduction to matroid theory. *Am. math. Monthly*, v.80, n.5, p.500-525, 1973.
- 32 WILSON, R. J. *Introduction to graph theory*. 3.ed. New York: Longman, 1985.
- 33 WILSON, R. J., WATKINS, J. J. *Graphs: an introductory approach*. New York: John & Sons, 1990.



