

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

**Princípios da Supressão de Vibrações Mecânicas:
Amortecimento Quadrático, Atrito de Coulomb e Barra com
Memória de Forma**

Natália Sayuri Masunaga



Trabalho de Graduação

Orientador: Douglas Domingues Bueno

Área de Pesquisa: Vibrações Mecânicas

**UNESP
Ilha Solteira - SP
Junho 2021**



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de Ilha Solteira

CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**“Princípios da Supressão de Vibrações Mecânicas:
Amortecimento Quadrático, Atrito de Coulomb e Barra com
Memória de Forma”**

Natália Sayuri Masunaga

Orientador: Douglas Domingues Bueno

Trabalho de Graduação apresentado à Faculdade de Engenharia - UNESP – Campus de Ilha Solteira, para cumprimento de requisito para obtenção do Grau de Engenharia Mecânica.

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

M424p Masunaga, Natália Sayuri.
Princípios da supressão de vibrações mecânicas: amortecimento quadrático, atrito de Coulomb e barra com memória de forma / Natália Sayuri Masunaga. --
Ilha Solteira: [s.n.], 2021
70 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Mecânica) -
Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. Ilha Solteira, 2021

Orientador: Douglas Domingues Bueno
Inclui bibliografia

1. Supressão de vibrações. 2. Amortecimento quadrático. 3. Atrito de
Coulomb. 4. Ligas com memória de forma.


Raiane da Silva Santos
Supervisora Técnica de Seção
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Divisão Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB/3 - 9999



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Ilha Solteira

Curso de Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE ENGENHARIA - CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ATA DA DEFESA – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

TÍTULO: Princípios da Supressão de Vibrações Mecânicas: Amortecimento Quadrático, Atrito de Coulomb e Barra com Memória de Forma

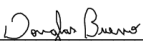
ALUNA: Natália Sayuri Masunaga

RA: _____

ORIENTADOR: Douglas Domingues Bueno

Aprovado (X) - Reprovado () pela Comissão Examinadora

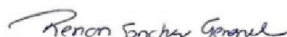
Comissão Examinadora:

Prof. _____ 

Presidente (Orientador)

Prof. _____ 

Eng. Msc. João Angelo Ferres Brogin
(doutorando no Departamento de Engenharia Mecânica)

Prof. _____ 

Eng. Msc. Renan Sanches Geronel
(doutorando no Departamento de Engenharia Mecânica)

Ilha Solteira (SP) 28 de maio de 2021.

Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Cursos: Eng^a Agrônoma, Ciências Biológicas, Eng. Civil, Eng. Elétrica, Eng. Mecânica, Física, Matemática e Zootecnia.
Avenida Brasil Centro, 56 - CEP 15385-000 Ilha Solteira São Paulo Brasil
pabx (18) 3743 1000 fax (18) 3742 2735 scom@adm.feis.unesp.br www.feis.unesp.br

Resumo

Diferentes níveis de vibrações e ruídos podem ocorrer durante o funcionamento de sistemas mecânicos. Para garantir o desempenho requerido do sistema mecânico, para diversas aplicações é necessário assegurar que ocorra a dissipação de energia vibratória. Para isso, várias técnicas de controle passivo de vibrações têm sido propostas, por exemplo envolvendo o uso de materiais viscoelásticos. Por outro lado, além dos clássicos efeitos de dissipação por amortecimento e atrito, no contexto dos materiais inteligentes, as ligas com memória de forma (LMF) vêm sendo investigadas em aplicações de diversos sistemas de engenharia. O presente trabalho compreende uma investigação dos fundamentos da supressão de vibrações mecânicas utilizando três diferentes formas de dissipar energia. São apresentadas as metodologias utilizadas e as respostas no domínio do tempo para a realização de análises de sistemas com amortecimento passivo. Considera-se o amortecimento viscoso quadrático, o atrito de Coulomb e o uso de barra com liga com memória de forma. Os modelos propostos são representados em espaço de estados e resolvidos utilizando o método Runge-Kutta 4ª ordem. São apresentadas simulações computacionais para discutir os efeitos de cada uma das forças de dissipação nas vibrações de um sistema massa mola de um grau de liberdade. Os resultados obtidos ilustram os potenciais destes materiais para dissipação de vibração.

Palavras-chave: Supressão de vibrações. Amortecimento viscoso quadrático. Atrito de Coulomb. Ligas com memória de forma.

Abstract

Different levels of vibrations and noise can occur when operating mechanical systems. To guarantee the required performance of the mechanical system, for several applications it is necessary to ensure that the dissipation of vibratory energy occurs. For this, several passive vibration control techniques have been proposed, for example, using viscoelastic materials. On the other hand, in addition to the classic damping and friction dissipation effects, in the context of intelligent materials, shape memory alloys (SMA) have been investigated in applications of various engineering systems. The present work comprises an investigation of the fundamentals of mechanical vibration suppression using three different ways to dissipate energy. The methodologies used and the answers in the time domain for performing analysis of systems with passive damping are presented. Viscous damping is considered quadratic, Coulomb friction, and the use of alloy bar with shape memory. The proposed models are represented in state space and solved using the Runge-Kutta 4th order method. Computer simulations are presented to discuss the effects of each of the dissipation forces on the vibrations of a spring-mass system of one degree of freedom. The results obtained illustrate the potentials of these materials for vibration dissipation.

Key words: Vibration suppression. Quadratic viscous damping. Coulomb friction. Shape memory alloy.

Lista de Figuras

2.1	Sistema de um grau de liberdade.	5
2.2	Correlação do histórico de tensão-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas com valores de tensão e deformação.	7
2.3	Correlação do histórico de tensão-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas com nomenclatura nas regiões.	7
2.4	Correlação do histórico de tensão-deformação para um ciclo incompleto de carregamento com “ <i>minor loop loading</i> ” representada pela linha vermelha com flechas indicadas e “ <i>major loop loading</i> ” representada pela linha preta.	8
2.5	Adaptado de de Sousa (2016).	12
2.6	Adaptado de de Sousa (2016).	12
2.7	Adaptado de de Sousa (2016).	13
2.8	Variação da fração volumétrica de fase martensítica em função da deformação.	13
2.9	Variação do módulo de elasticidade em função da fração volumétrica de fase martensítica. A linha vermelha decresce de $70GPa$ para $30GPa$, enquanto a linha tracejada percorre o sentido oposto na mesma direção.	14
3.1	Sistema de um grau de liberdade com amortecedor, sendo k a rigidez da mola, m a massa do sistema, c o amortecimento, $x(t)$ o deslocamento da massa e $x_0(t)$ o deslocamento da base.	17
3.2	Deslocamento e velocidade de um sistema massa, mola e amortecedor correspondente à atuação de uma função impulso.	19
3.3	Deslocamento e velocidade de um sistema massa, mola e amortecedor correspondente à atuação de uma força $u_c(t) = F_0 \sin(\omega t)$ enquanto $t < 15s$ para $F_0 = 0,01$ e $f = 0,5Hz$	19
3.4	Força de Amortecimento Quadrático em função do tempo para $F_0 = 0,01$, $f = 1Hz$, $A = 0,01$, $C_1 = 0,5$ e $C_2 = 1$	20
3.5	Força de Amortecimento Quadrático em função do deslocamento para $F_0 = 0,01$, $f = 1$, $A = 0,01$, $C_1 = 0,5$ e $C_2 = 1$	20
3.6	Força de Atrito de Coulomb em função do tempo para $F_0 = 0,01$, $f = 2Hz$, $A = 0,01$, $\mu_1 = 0,5$ e $\mu_2 = 1$	21
3.7	Força de Atrito de Coulomb em função do deslocamento para $F_0 = 0,01$, $f = 2Hz$, $A = 0,01$, $\mu_1 = 0,5$ e $\mu_2 = 1$	22

3.8	Sistema de um grau de liberdade com barra de liga com memória de forma (LMF), sendo k a rigidez da mola, m a massa do sistema, $x(t)$ o deslocamento da massa e $x_0(t)$ o deslocamento da base.	23
3.9	Correlação do histórico de tensão-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas, considerando deformação positiva correspondente à cada valor do vetor de temperatura.	24
3.10	Correlação do histórico de tensão-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas, considerando deformação positiva correspondente à $T = A_s = 296K$	25
3.11	Correlação do histórico de tensão-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas correspondente à cada valor do vetor de temperatura.	26
3.12	Correlação do histórico de força-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas considerando cinética de transformação pelo método Tanaka e Nagaki correspondente à cada valor do vetor de temperatura.	27
4.1	Deslocamento e F_{nl} de um sistema massa, mola e amortecedor considerando Força de Atrito de Coulomb para $c = 2\sqrt{mk}$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1$, $A = 0,01$, $x_s(t) = Asin(\omega t)$ e $\mu = 1$	28
4.2	Velocidade e Aceleração de um sistema massa, mola e amortecedor considerando Força de Atrito de Coulomb para $c = 2\sqrt{mk}$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1$, $A = 0,01$, $x_s(t) = Asin(\omega t)$ e $\mu = 1$	29
4.3	Deslocamento de um sistema massa, mola e amortecedor considerando Força de Atrito de Coulomb e para $F_0 = 0,01$, $f = 0,5Hz$, $A = 0,01$, $c = 0$, $x_s(t) = Asin(\omega t)$, $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = 2$	29
4.4	Velocidade e Aceleração de um sistema massa, mola e amortecedor considerando Força de Atrito de Coulomb e para $F_0 = 0,01$, $f = 0,5Hz$, $A = 0,01$, $c = 0$, $x_s(t) = Asin(\omega t)$, e diferentes valores de μ	30
4.5	Aceleração de um sistema massa, mola e amortecedor considerando Força de Atrito de Coulomb e para $F_0 = 0,01$, $f = 0,5Hz$, $A = 0,01$, $c = 0$, $x_s(t) = Asin(\omega t)$, e $\mu_1 = 0,05$, $\mu_2 = 2\mu_1$, $\mu_3 = 2\mu_2$, $\mu_4 = 2\mu_3$ e $\mu_5 = 2\mu_4$	30
4.6	Magnitude da variação da aceleração para diferentes valores de μ (representados pela incógnita n). Os quadrados representam o pico máximo da aceleração e as bolinhas a aceleração mínima durante a transição para um dado instante de tempo t	31
4.7	Plano fase considerando Força de Atrito de Coulomb para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,01$, $x_s(t) = Asin(\omega t)$, $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = 2$	31
4.8	Curva de Histerese da Força de Atrito de Coulomb para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,01$, $x_s(t) = Asin(\omega t)$, $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = 2$	32
4.9	Comportamento dinâmico da Força de Atrito de Coulomb para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,01$, $x_s(t) = Asin(\omega t)$, $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = 2$	32
4.10	Deslocamento de um sistema massa, mola e amortecedor considerando Força de Amortecimento Quadrático para $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,01$, $x_s(t) = Asin(\omega t)$ e $C = 1$	33

4.11	Deslocamento, Velocidade e Aceleração de um sistema massa, mola e amortecedor considerando Força de Amortecimento Quadrático para $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,01$, $x_s(t) = Asin(\omega t)$ e $C = 1$.	33
4.12	Deslocamento de um sistema massa, mola e amortecedor considerando Força de Amortecimento Quadrático e para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,1$, $x_s(t) = Asin(\omega t)$, $C_1 = 10$ e $C_2 = 20$.	34
4.13	Velocidade e Aceleração de um sistema massa, mola e amortecedor considerando Força de Amortecimento Quadrático e para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,1$, $x_s(t) = Asin(\omega t)$, $C_1 = 10$ e $C_2 = 20$.	34
4.14	Plano fase considerando Força de Amortecimento Quadrático para $c = 0$, $f = 0,5$, $f_n = 1$, $A = 0,1$, $x_s(t) = Asin(\omega t)$, $C_1 = 10$ e $C_2 = 20$.	35
4.15	Deslocamento considerando Força de Amortecimento Quadrático e Força de Atrito de Coulomb para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,02$ e $x_s(t) = Asin(\omega t)$.	36
4.16	Velocidade considerando Força de Amortecimento Quadrático e Força de Atrito de Coulomb para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,02$ e $x_s(t) = Asin(\omega t)$.	36
4.17	Aceleração considerando Força de Amortecimento Quadrático e Força de Atrito de Coulomb para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,02$ e $x_s(t) = Asin(\omega t)$.	37
4.18	Aceleração e velocidade considerando Força de Amortecimento Quadrático e Força de Atrito de Coulomb para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,02$ e $x_s(t) = Asin(\omega t)$.	37
4.19	Curva de Histerese considerando Força de Amortecimento Quadrático e Força de Atrito de Coulomb para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,02$ e $x_s(t) = Asin(\omega t)$.	38
4.20	Força de Amortecimento Quadrático para C_1 e diferentes sinais.	38
4.21	Espectro da Força de Amortecimento Quadrático sem e com o método de janelamento.	39
4.22	Espectro da Força de Atrito de Coulomb sem e com o método de janelamento.	39
4.23	Espectro do deslocamento em função da frequência considerando Força de Amortecimento Quadrático para C_1 , $c = 0,5$ e $f_n = 0,5Hz$.	40
4.24	Espectro do deslocamento em função da frequência considerando Força de Atrito de Coulomb para C_1 , $c = 0,5$ e $f_n = 0,5Hz$.	40
4.25	Forças externas apresentadas, sendo $u_{c,1} = Asen(\omega t)$ e $u_{c,2} = A_1sen(\omega_1 t) + A_2sen(\omega_2 t) + A_3sen(\omega_3 t)$.	41
4.26	Força externa apresentada, sendo $u_{c,3} = N(\mu, \sigma^2)$.	41
4.27	Deslocamento do sistema considerando Força de Amortecimento Quadrático, sendo $u_{c,1} = Asen(\omega t)$, $u_{c,2} = A_1sen(\omega_1 t) + A_2sen(\omega_2 t) + A_3sen(\omega_3 t)$ e $u_{c,3} = random.gauss(\mu, \sigma)$.	42
4.28	Plano fase sob Força de Amortecimento Quadrático considerando forças externas senoidais e randômica.	43
4.29	Curva de histerese da força de amortecimento quadrática considerando forças externas senoidais e randômica.	43

4.30	Correlação do histórico de deformação-tempo para condição adiabáticas e isotérmicas considerando cinética de transformação pelo método Tanaka e Nagaki.	45
4.31	Correlação do histórico de força-tempo para condição adiabáticas e isotérmicas considerando cinética de transformação pelo método Tanaka e Nagaki.	46
4.32	Correlação do histórico de deslocamento-tempo para condição adiabáticas e isotérmicas considerando cinética de transformação pelo método Tanaka e Nagaki. As linhas cinzas representam $y(t)$ e as vermelhas, $x(t)$	47
4.33	Correlação do histórico de deslocamento-tempo para condição adiabáticas e isotérmicas considerando cinética de transformação pelo método Tanaka e Nagaki para caso 2, considerando $f = 50Hz$ e $m = 500kg$. A linha vermelha de menor magnitude representa o deslocamento da massa, e a linha cinza de maior amplitude representa o deslocamento da base.	48
4.34	Correlação do histórico de força-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas considerando cinética de transformação pelo método Tanaka e Nagaki para caso 1.	48
4.35	Correlação do histórico de força-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas considerando cinética de transformação pelo método Tanaka e Nagaki para caso 2.	49
4.36	Correlação do histórico de força-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas considerando cinética de transformação pelo método Tanaka e Nagaki para caso 3.	49
4.37	Correlação do histórico de força-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas considerando cinética de transformação pelo método Tanaka e Nagaki para caso 4.	50
4.38	Correlação do histórico de deslocamento-tempo considerando sistema massa-mola-amortecedor.	51

Lista de Tabelas

3.1	Propriedades termodinâmicas da liga com memória de forma.	23
3.2	Propriedades termodinâmicas da liga com memória de forma.	23
3.3	Valores de tensão e deformação para os pontos de A_s , M_s , M_f e A_f , sendo σ dado em 10^8 Pa.	25
4.1	Propriedades da liga com memória de forma de acordo com as referências encontradas.	44
4.2	Propriedades da liga com memória de forma conforme os casos analisados. . . .	44
A.1	Determinação das constantes de transformação.	58

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos do Trabalho	2
1.1.1	Principais Contribuições Alcançadas	2
1.2	Revisão Bibliográfica e Motivação	3
1.3	Estrutura do Documento	4
2	Forças Dissipativas	5
2.1	Amortecedores Quadráticos	6
2.2	Atrito de Coulomb	6
2.3	Ligas com Memória de Forma	6
2.3.1	Equacionamento da Barra	9
2.3.2	Modelos com cinética de transformação de fase assumida	11
3	Supressão de Vibrações	17
3.1	Força de Amortecimento Quadrático	19
3.2	Força de Atrito de Coulomb	21
3.3	Força da Barra de Liga com Memória de Forma	22
4	Resultados e Discussões	28
4.1	Sub-Amortecimento da Força de Atrito de Coulomb	28
4.2	Sub-Amortecimento da Força de Amortecimento Quadrático	32
4.3	Atuação Simultânea das Forças de Atrito de Coulomb e Amortecimento Quadrático	35
4.4	Resposta do sistema aplicando forças internas distintas	38
4.4.1	Determinação das forças internas a serem aplicadas no sistema	38
4.5	Resposta do Sistema Aplicando Forças Externas Distintas	41
4.5.1	Determinação das forças externas a serem aplicadas no sistema	41
4.6	Sistema de Um Grau de Liberdade Contendo Elemento de Liga com Memória de Forma	43
4.7	Comparação Entre Amortecimento do Sistema Massa-mola e com Liga com Memória de Forma	50
5	Conclusão	52
5.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	53
	Referências Bibliográficas	54

A	Tensão durante a Transformação Direta e Reversa	57
A.1	Modelo simplificado para liga com memória de forma pseudo-elástica	57
B	Definição das Matrizes para a Equação do Movimento	59

Introdução

Na busca por estruturas adaptativas mais eficientes para controle de ruído e vibrações pode-se identificar a necessidade de aplicação de materiais inteligentes como os materiais piezoelétricos, os fluidos magnetoreológicos e as ligas com memória de forma, ou *Shape Memory Alloys*. No geral, as técnicas de controle podem ser passivas ou ativas. Sistemas de controle ativo usam os materiais inteligentes como atuadores para produzir um sinal de atenuação externo que reduza a vibração. Sistemas de controle passivo são favorecidos da dissipação da energia de vibração sem que ocorra o aumento da energia total do sistema. Em técnicas de controle passivo, alterações de rigidez mecânica e massa estrutural, frequência de operação e temperatura de operação, impactam significativamente na resposta do sistema em estudo (Ogata 2010). A principal desvantagem dos sistemas passivos é a falta de adaptação a alterações no comportamento dinâmico do sistema vibratório durante sua operação (Rodriguez 2014).

No contexto das técnicas de controle passivo, o presente trabalho apresenta uma investigação de estratégias que podem ser empregadas para supressão de vibrações, envolvendo o uso dos amortecedores quadráticos, amortecedores de atrito seco, ou de Coulomb, e ligas com memória de forma.

Amortecedores quadráticos, ou de fluido viscoso, têm sido utilizados para aumentar o amortecimento passivo de sistemas estruturais, uma vez que este material é amplamente utilizado na prática da engenharia por ser robusto e eficaz no controle de vibrações. Seu princípio de funcionamento é baseado no escoamento de fluido por orifícios que resultam na dissipação da energia. Amortecedores viscoelásticos passaram a ser utilizados na indústria aeronáutica e aeroespacial, tendo como um dos principais autores, Ferry (1961). Mahmoodi (1969) projetou o amortecedor viscoelástico utilizado no *World Trade Center* em Nova Iorque. Em cada uma das torres de 110 andares, foram projetados 10.000 dispositivos amortecedores viscoelásticos.

Amortecedores de atrito seco, ou atrito de Coulomb, são dispositivos construídos para que duas superfícies de contato deslizem uma em relação a outra e dissipem a energia, através da intensidade da força normal e fricção entre elas. Assim, os parâmetros básicos que governam o comportamento do sistema são a força normal e o coeficiente de atrito entre as superfícies de contato (Federico 2008). Popp (2004) recomenda classificar os mecanismos por atrito em função do tipo de contato entre as peças do dispositivo, a qual depende do: tamanho da interface de contato, função do contato, tipo de força normal de contato, propriedades do

contato na direção normal e deslizamento em direção tangencial. Mecanismos de atrito podem ser utilizados em osciladores dinâmicos com um grau de liberdade, ou até mesmo na indústria aeroespacial.

O efeito pseudoelástico das ligas com memória de forma permite que o material apresente recuperação das suas dimensões iniciais quando submetido à taxa de formação de até 8%, característico de seu comportamento histerético, que resulta em uma alta capacidade de dissipação de energia. Para analisar o comportamento dinâmico das ligas com memória de forma, simulações numéricas e experimentos são realizados com sistemas compostos por fios, barras e molas. A memória de forma permite ao elemento mudar de forma através de estímulos externos como a temperatura (Buehler 1968), campo magnético (Kiefer 2005) e outras formas de excitação (Meng 2013). Dentre os diferentes tipos de materiais que apresentam o comportamento de memória de forma, têm-se os polímeros de memória de forma e as ligas com memória de forma (como CuAlBe, CuZnAl, CuAlZnMn e ligas de NiTi). As ligas de NiTi apresentam propriedades atrativas e são amplamente utilizadas na indústria e na academia (Ferry 1961).

As ligas com memória de forma possuem uma ramificação de aplicações industriais, dentre elas a aplicação em absorvedores de vibração, onde seu comportamento histerético é utilizado para reduzir níveis de ruído e vibrações em sistemas mecânico; aplicação médica, que pode ser associada a sua biocompatibilidade em odontologia; e aeronáutica, com foco nos efeitos da histerese pseudoelástica das molas com memória de forma nos comportamentos de fenômenos aeroelástico, como *flutter* e *pós-flutter* da seção típica de asa (de Sousa 2016). A literatura também inclui o uso de ligas com memória de forma para modificar o comportamento de sistemas aeroelásticos. Tawfik & Ro (2002) apresenta o comportamento aeroelástico de painéis reforçados com liga de memória de forma, e Yun (2006) apresenta o aumento de estabilidade em pás de rotores de helicóptero através da empregabilidade de amortecimento passivo histerético proveniente de molas de liga de memória de forma.

1.1 Objetivos do Trabalho

O principal objetivo deste trabalho é a investigação dos diferentes sistemas de amortecimento para controle passivo de vibrações de um sistema de um grau de liberdade contendo amortecimento quadrático, amortecimento por atrito de Coulomb, ou uma barra de liga de memória de forma.

1.1.1 Principais Contribuições Alcançadas

- Estudo dos principais modelos de sistemas de amortecimento utilizados no controle passivo de vibrações.
- Comparações da capacidade dissipativa dos amortecedores quadráticos, atrito de Coulomb e barra de liga de memória de forma acoplados a um sistema massa mola de um grau de liberdade.

1.2 Revisão Bibliográfica e Motivação

Nas últimas décadas, foi amplamente utilizado a combinação dos efeitos das ligas com memória de forma com outros dispositivos sensoriais e ao controle de vibração e ruído de sistemas mecânicos. Desta forma, modelos constitutivos tem sido desenvolvidos para representar o comportamento pseudoelástico destes materiais.

No trabalho de [Aseka \(2008\)](#) calcula-se a resposta de sistemas dinâmicos com amortecimento viscoelástico. Usa-se a metodologia desenvolvida para resolver problemas dinâmicos viscoelásticos com o uso da resposta impulso em sistemas concentrado e em um sistema distribuído como uma viga de Euler-Bernoulli.

No trabalho de [Rodriguez \(2014\)](#) é analisado o efeito de amortecedores de atrito seco sobre o comportamento dinâmico de um sistema vibratório de um grau de liberdade e é desenvolvido uma metodologia experimental para identificar as propriedades físicas dos amortecedores de atrito. São projetados dois dispositivos de atrito, onde no primeiro a força normal de contato é constante e no segundo varia-se a intensidade da força normal. Em ambos são observados a resposta do sistema dinâmico no domínio do tempo.

[Paiva & Savi \(2005\)](#) apresentam o equacionamento matemático de alguns importantes modelos constitutivos, dentre eles o modelo tridimensional de Fremond (1987,1996), que representam o comportamento termomecânico de ligas com memória de forma. O modelo utilizado no estudo considera diferentes fases e diferentes parâmetros referentes a cada uma das fases. As simulações numéricas para validar o modelo proposto submetem uma liga de Ni-Ti sob diferentes cargas termo-mecânicas considerando um modelo constitutivo de uma dimensão. A inclusão de uma constrição estabelece que a martensita reticulada não existe na ausência de tensão, e que a transformação de fase ocorre devido ao fenômeno da expansão térmica.

[Lagoudas & Khan \(2001\)](#) introduzem elementos de liga de memória de forma em dispositivos dissipadores de energia e simula um dispositivo de um grau de liberdade utilizando o modelo constitutivo simplificado para o efeito pseudoelástico. O modelo simplificado é um conjunto de equações constitutivas lineares dependentes da deformação e histórico de carregamento, e com ele é possível prever a resposta do material similar a um modelo polinomial para carregamentos pseudoelásticos sob condições isotérmicas.

[Liang & Rogers \(1997\)](#) demonstraram numericamente e experimentalmente a eficiência de uma mola composta por fios de Ni-Ti em controlar passivamente os níveis de vibração de uma viga. Além disso, diferentes casos foram estudados para comprovar que o amortecimento histerético resultante do comportamento pseudoelástico da liga de memória de forma pode ser utilizado em controle de vibrações passivas ou adaptativas. No caso 1, explora-se a sua alta capacidade de amortecimento uma vez que seu módulo de elasticidade pode alcançar 80GPa. No caso 2, demonstra-se que a liga de memória de forma difere de amortecedores convencionais, como a borracha, que possui taxas de amortecimento altas quando submetida a tensões de cisalhamento. As ligas possuem características de amortecimento semelhantes quando submetidas à compressão, tração ou cisalhamento. No caso 3, evidencia-se o uso da mola de liga de memória de forma como um elemento de controle de rigidez variável considerando duas constantes de mola, uma para austenita em alta temperatura e outra para a martensita em baixa temperatura. No caso 4, a sua tensão de recuperação pode ser utilizado

em controle ativo de vibrações.

Além das referências apresentadas, são conhecidas as dissertações e teses defendidas por [Aguilar \(2001\)](#), [Maesta \(2012\)](#), [de Carvalho \(2014\)](#), [de Oliveira \(2008\)](#), [Carvalho \(2017\)](#) e [Neto \(2012\)](#), [Lima \(2015\)](#) as quais também foram estudadas para elaborar o presente trabalho.

1.3 Estrutura do Documento

Além deste capítulo introdutório, este trabalho de graduação compreende mais 4 capítulos organizados da seguinte forma:

O Capítulo 2 é dedicado à modelagem matemática dos amortecedores quadráticos, de atrito de Coulomb e por ligas com memória de forma, bem como a apresentação dos diferentes equacionamento referentes à barra e liga de memória de forma. Também são apresentados os métodos de transformação de fase na liga de memória de forma.

O Capítulo 3 apresenta a metodologia utilizada para simular os equacionamentos propostos no Capítulo II. O espaço de estados é apresentado e o método de Runge-Kutta 4ª ordem é utilizado para resolver as equações diferenciais numericamente. A força de amortecimento quadrática, por atrito de Coulomb e por liga de memória de forma são avaliadas.

O Capítulo 4 é dedicado aos resultados e discussões obtidos através de simulação numérica para obter a resposta do sistema sob atuação da força de amortecimento quadrática, de atrito de Coulomb e liga de memória de forma. Considera-se diferentes forças internas e externas para avaliar a resposta do sistema sob diferentes amortecimentos e por fim, compara-se o amortecimento em massa-mola-amortecedor e massa-mola-barra de liga de memória de forma.

O Capítulo 5 apresenta as conclusões gerais do trabalho, e sugestões para trabalhos futuros.

Forças Dissipativas

Um dos resultados mais importantes obtido da 2ª lei de Newton é o teorema do trabalho-energia, que estabelece a maneira pela qual o trabalho W realizado sobre uma partícula é convertido em energia cinética. A capacidade que uma força tem de realizar trabalho está relacionada com os conceitos de forças conservativas e não-conservativas (Young & Freedman 2015). Uma força é conservativa se o trabalho realizado sobre uma partícula, que se move entre dois pontos distintos, depende somente desses pontos e não da trajetória percorrida. A força gravitacional e a força elástica são exemplos de forças conservativas. Quando o trabalho realizado depende da trajetória percorrida, tem-se a força não-conservativa, a qual está relacionada à existência das forças dissipativas. Amortecedores quadráticos, atrito de coulomb e as ligas com memória de forma são exemplos clássicos de força dissipativa (Inman 2001).

A Fig. 2.1 apresenta a ilustração de um sistema massa mola de um grau de liberdade, sendo m a massa do sistema, k a rigidez da mola, $x(t)$ o deslocamento do sistema, $x_0(t)$ o deslocamento da base (que pode ser nulo ou fixo) e $u_c(t)$ a entrada de excitação (força externa). Também, $f_{nl}(t)$ representa a força não linear que, neste trabalho, pode ser de: *i*) amortecimento quadrático, *ii*) atrito de Coulomb ou *iii*) liga com memória de forma.

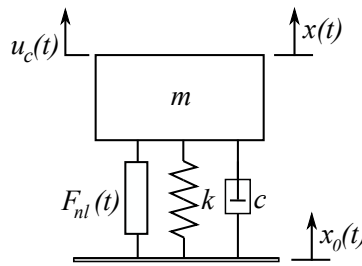


Figura 2.1: Sistema de um grau de liberdade.

Aplicando-se a Segunda Lei de Newton no sistema da Fig. 2.1, obtém-se a Eq. 2.1.

$$m\ddot{x}(t) + c[\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)] + k[x(t) - x_0(t)] + F_{nl}(t) = u_c(t) \quad (2.1)$$

uma vez que a base possui massa desprezível.

2.1 Amortecedores Quadráticos

Amortecedores quadráticos são do tipo fluido viscoso com dependência quadrática da velocidade relativa entre a massa e a base do sistema,

$$F_q = C|\dot{x} - \dot{x}_0|^2 \text{sign}(\dot{x} - \dot{x}_0) \quad (2.2)$$

sendo $\dot{x}$ a velocidade da massa e $\dot{x}_0$ a velocidade da base, conforme Fig. 2.1.

2.2 Atrito de Coulomb

Amortecedores de vibração por atrito de Coulomb dissipam a energia por meio do atrito entre dois corpos sólidos de superfícies planas deslizando um em relação ao outro.

Das leis clássicas de atrito, tem-se que quando o movimento tangencial ocorre, a força de atrito atua na mesma direção da velocidade relativa, mas em sentido oposto sendo μ o coeficiente de atrito de Coulomb, $\dot{x}$ a velocidade tangencial, m a massa da estrutura e g a aceleração da gravidade. De acordo com Rabinowicz (1965), pode ser escrita como,

$$F_a = -\mu mg \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \quad (2.3)$$

ou mais precisamente conforme Eq. 2.4,

$$F_a = -\mu mg \text{sign}(\dot{x}) \quad (2.4)$$

quando $\dot{x} \neq 0$ e $\text{sign}()$ é a função sinal dada por:

$$\begin{cases} \text{sign}(\dot{x}) = 1, & \text{se } \dot{x} > 0 \\ \text{sign}(\dot{x}) = 0, & \text{se } \dot{x} = 0 \\ \text{sign}(\dot{x}) = -1, & \text{se } \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Em problemas dinâmicos, o sentido da velocidade de deslizamento é variável com o tempo, i.e., quando $\dot{x}$ inverte de sentido a força de atrito apresenta uma variação brusca de magnitude.

2.3 Ligas com Memória de Forma

O modelo constitutivo simplificado utilizado para a apresentação do efeito pseudoelástico de uma liga com memória de forma é dependente da deformação e do histórico dos carregamentos mecânicos para a determinação das transformações direta e reversa das fases do material.

Assume-se que a tensão mecânica σ e deformação de transformação ε^t variam linearmente durante as transformações de fase. Assim, o modelo simplificado é representado por um conjunto de equações lineares que permitem a determinação da resposta dinâmica de uma liga com memória de forma submetido a carregamento externos em uma temperatura constante, representado na Fig. 2.2 e Fig. 2.3.

O detalhamento das equações propostas por Lagoudas & Khan (2001) encontram-se no Anexo A. A intersecção entre as linhas representam a transição entre o carregamento elástico ou linear,

transformação direta de fase, descarregamento elástico ou linear e transformação reversa de fase.

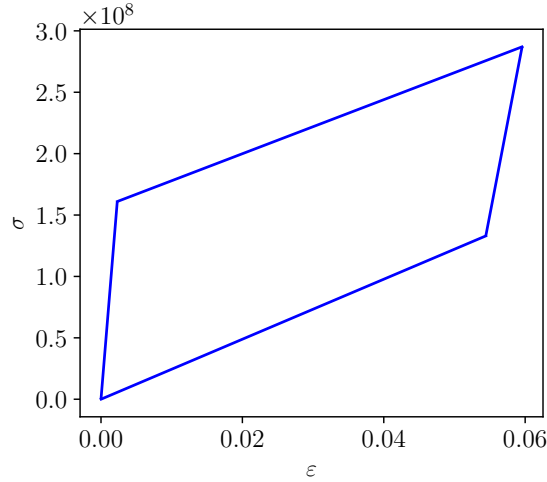


Figura 2.2: Correlação do histórico de tensão-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas com valores de tensão e deformação.

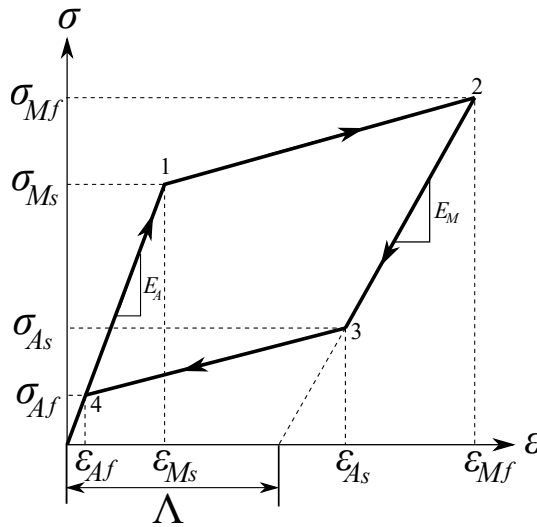


Figura 2.3: Correlação do histórico de tensão-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas com nomenclatura nas regiões.

A região de carregamento linear ocorre a partir da tensão nula durante a fase austenítica e é representada entre os pontos $(\sigma_{Af}, \varepsilon_{Af})$ e $(\sigma_{Ms}, \varepsilon_{Ms})$, ou entre os pontos 4 e 1,

$$\varepsilon^t = 0, \quad \sigma = E_A(\varepsilon) \quad (2.6)$$

onde verifica-se que o aumento linear da tensão é diretamente proporcional à deformação multiplicada pelo do módulo de elasticidade austenítico E_A . Nesta região, a deformação de transformação é nula.

Para a região de transformação direta de fase representada entre os pontos $(\sigma_{Ms}, \varepsilon_{Ms})$

e $(\sigma_{Mf}, \varepsilon_{Mf})$, ou entre os pontos 1 e 2, tem-se que a deformação de transformação varia linearmente entre zero e o valor máximo da deformação de transformação Λ .

$$\varepsilon^t = \Lambda \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{Ms}}{\varepsilon_{Mf} - \varepsilon_{Ms}} \right), \quad \sigma = \sigma_{Ms} + \frac{\varepsilon^t(\sigma_{Mf} - \sigma_{Ms})}{\Lambda} \quad (2.7)$$

Para a região de descarregamento linear representada entre os pontos $(\sigma_{Mf}, \varepsilon_{Mf})$ e $(\sigma_{As}, \varepsilon_{As})$, ou entre os pontos 2 e 3, tem-se que a deformação de transformação permanece igual à Λ e a tensão se relaciona linearmente com a deformação.

$$\varepsilon^t = \Lambda, \quad \sigma = \sigma_{Mf} + E_M(\varepsilon - \varepsilon_{Mf}) \quad (2.8)$$

Para a região de transformação reversa de fase representada entre os pontos $(\sigma_{As}, \varepsilon_{As})$ e $(\sigma_{Af}, \varepsilon_{Af})$, ou entre os pontos 3 e 4, tem-se que a tensão de transformação varia linearmente agora entre Λ e zero.

$$\varepsilon^t = \Lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_{As} - \varepsilon}{\varepsilon_{As} - \varepsilon_{Af}} \right), \quad \sigma = \sigma_{Af} + \frac{\varepsilon^t(\sigma_{As} - \sigma_{Af})}{\Lambda} \quad (2.9)$$

onde E_A e E_M representam os módulos de elasticidade da liga com Memória de Forma na fase puramente austenítica e martensítica, respectivamente. A_s , A_f , M_s e M_f representam o início e o fim das fases austenítica e martensítica.

Para ciclos incompletos de carregamento e descarregamento, as Eqs. 2.6 a 2.9 devem ser modificadas para representar adequadamente o comportamento dinâmico da liga com memória de forma, conforme ilustrado na Fig. 2.4.

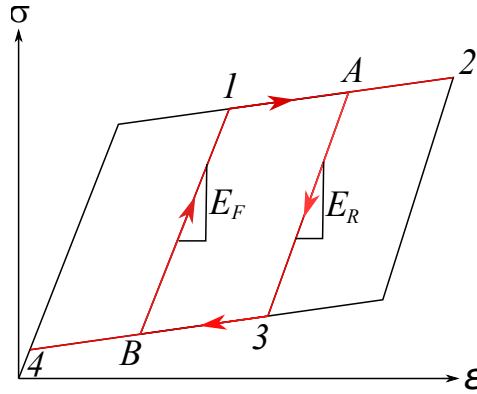


Figura 2.4: Correlação do histórico de tensão-deformação para um ciclo incompleto de carregamento com “*minor loop loading*” representada pela linha vermelha com flechas indicadas e “*major loop loading*” representada pela linha preta.

O carregamento ocorre a partir da tensão nula durante a fase austenítica e é descrito pelas mesmas equações do carregamento elástico inicial e transformações subsequentes, i.e., do ponto 4 até o ponto 1, onde se observa o aumento da tensão e da deformação. Porém, nesta correlação de “*minor loop loading*”, o carregamento é revertido antes que se complete a transformação direta de fase, representada pelo ponto 2.

Como o descarregamento se inicia no ponto A e percorre até o ponto 3, a transformação é nula inicialmente e ocorre com uma rigidez que não é da austenita e nem da martensita.

O descarregamento ocorre linearmente a partir do ponto de transformação máxima, ponto A, e sua inclinação é determinada pelo grau máximo de transformação obtido, representada pela variável E_R . Na intersecção com o ponto 3 se inicia a transformação reversa que ocorre até o ponto B. Esta região coincide com a correlação do “*major loop loading*”.

O material continua a descarregar e tensão e deformação diminuem até que a deformação de transformação seja próximo de zero no ponto 4. Porém, o descarregamento é revertido e o material começa a carregar novamente, a partir do ponto B em direção e sentido ao ponto 1. O carregamento ocorre linearmente a partir do ponto de transformação mínima, ponto B, e sua inclinação é determinada pelo grau mínimo de transformação obtido, representada pela variável E_F .

Para a região de descarregamento linear parcial representada entre os pontos A e 3, tem-se:

$$E_R = \frac{E_M E_A}{\left(\frac{\varepsilon_{max}^t}{\Lambda}(E_A - E_M) + E_M\right)}, \quad \sigma = \sigma_{max} + E_R(\varepsilon - \varepsilon_{max}) \quad (2.10)$$

onde a tensão depende da rigidez de descarregamento E_R e da deformação máxima que ocorre no ponto A. Para a região de transformação reversa representada entre os pontos 3 e B, tem-se:

$$\varepsilon^t = \Lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_{tp3} - \varepsilon}{\varepsilon_{tp3} - \varepsilon_{Af}}\right), \quad \sigma = \sigma_{Af} + \frac{\varepsilon^t(\sigma_{tp3} - \sigma_{Af})}{\Lambda} \quad (2.11)$$

sendo σ_{tp3} e ε_{tp3} a tensão e deformação no ponto 3. Para a região de carregamento elástico parcial representada entre os pontos B e 1, tem-se:

$$E_F = \frac{E_M E_A}{\left(\frac{\varepsilon_{min}^t}{\Lambda}(E_A - E_M) + E_M\right)}, \quad \sigma = \sigma_{min} + E_F(\varepsilon - \varepsilon_{min}) \quad (2.12)$$

onde a tensão depende da rigidez de descarregamento E_F e da deformação mínima que ocorre no ponto B. Para a região de transformação direta de fase representada entre os pontos 1 e A, tem-se:

$$\varepsilon^t = \Lambda \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{tp1}}{\varepsilon_{Mf} - \varepsilon_{tp1}}\right), \quad \sigma = \sigma_{tp1} + \frac{\varepsilon^t}{\Lambda}(\sigma_{Mf} - \sigma_{tp1}) \quad (2.13)$$

sendo que σ_{max} , ε_{max} e ε_{max}^t representam, respectivamente, a tensão, a deformação e a deformação de transformação do ponto A, e σ_{min} , ε_{min} e ε_{min}^t representam, respectivamente, a tensão, a deformação e a deformação de transformação do ponto B. σ_{tp1} e ε_{tp1} representam, respectivamente, a tensão e deformação no ponto 1.

2.3.1 Equacionamento da Barra

As molas são componentes mecânicos de grande utilização nos mais variados dispositivos e apresentam como característica principal a capacidade de apresentar grandes deslocamentos recuperáveis. Outra aplicação importante é a possibilidade de aplicação controlada de força ou torque e o armazenamento desta energia mecânica. Alguns autores exploram o uso de ligas com memórias de forma em molas helicoidais, por exemplo, [Baghani \(2012\)](#) e [Bucchi \(2014\)](#). Porém, as molas helicoidais de LMF são projetadas para que ocorra transformação de

fase ao longo do fio da mola durante o seu uso. Desta forma, as transformações de fase são não lineares, por isso a distribuição de tensão de cisalhamento ao longo da seção transversal do fio também é não linear. Desta forma, adota-se o uso de uma barra para representar o comportamento linear da distribuição de tensões ao longo da seção transversal do componente. Este modelo é o mais simples e é desenvolvido considerando que as distribuições de fase e de tensão são constantes e homogêneas ao longo da seção transversal do componente.

A rigidez da barra de liga com memória de forma é dada em função do módulo de elasticidade, área e comprimento total da barra.

$$k_{lmf} = \frac{E(\xi)A_{lmf}}{L_{lmf}} \quad (2.14)$$

sendo $E(\xi)$ o módulo de elasticidade, a qual varia com a fração volumétrica de fase martensítica ξ (Paiva & Savi 1999), e L é o comprimento da barra LMF. De acordo com Tanaka (1986), o módulo de elasticidade é representado pela Eq. 2.15.

$$E(\xi) = \xi E_M + (1 - \xi)E_A \quad (2.15)$$

A força que atua na barra é dada pela Eq. 2.16.

$$-F_{lmf} = \sigma_{lmf}A_{lmf} \quad (2.16)$$

sendo σ_{lmf} representado por,

$$\sigma_{lmf} = E(\xi)(\varepsilon - \varepsilon_L \xi_0) \quad (2.17)$$

ou,

$$\sigma_{lmf} = E(\xi)(\varepsilon - \varepsilon^t) \quad (2.18)$$

sendo ε a deformação total induzida ao material, exposta na Eq. 2.19, ε_L é a deformação residual máxima, ξ_0 a fração volumétrica de martensita quando se inicia a transformação e ε^t é a deformação de transformação gerada durante as transformações de fase direta e reversa.

$$\varepsilon = \frac{x(t)}{L_{lmf}} \quad (2.19)$$

Como a força atuante sob uma barra de liga com memória de forma é representada pela Eq. 2.16, a Eq. 2.1 pode ser reescrita na Eq. 2.20.

$$m\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) + \sigma_{lmf}A_{lmf} = F_{ext}(t) \quad (2.20)$$

Rearranjando as equações Eq. 2.17, Eq. 2.15, tem-se:

$$m\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) + (\xi E_M + (1 - \xi)E_A)((\varepsilon - \varepsilon^t))A_{lmf} = F_{ext}(t) \quad (2.21)$$

A aplicação do princípio de superposição de Boltzman para os materiais viscoelásticos lineares conduz a lei do comportamento que relaciona as histórias de tensão e de deformação

através da Eq. 2.22, que é uma integral de convolução para um ensaio uniaxial.

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t - \tau) d\varepsilon(t) \quad (2.22)$$

onde $\sigma(t)$ é a tensão e $\varepsilon(t)$ é a deformação (normais ou de cisalhamento), e $E(t)$ é a função módulo do material.

2.3.2 Modelos com cinética de transformação de fase assumida

Os modelos com cinética de transformação de fase utilizam funções matemáticas (cossenoidais, exponencias, entre outras) para descrever a cinética das transformações de fase. Em geral, os modelos consideram além da deformação e da temperatura, a fração volumétrica de fase martensítica (Paiva & Savi 1999). Diversos autores propuseram equações para representar a cinética de transformação de fase, as quais serão apresentadas neste trabalho, como por exemplo, o trabalho de Poorasadion (2014) que apresenta o modelo de Brinson aplicado a um elemento de viga bidimensional com liga com memória de forma. Assim, Liang & Rogers (1997) apresentam uma equação que representa a tensão atuante sobre um elemento de liga com memória de forma carregado uniaxialmente.

$$\sigma - \sigma_0 = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \Omega(\xi - \xi_0) + \Theta(T - T_0) \quad (2.23)$$

Tem-se que σ representa a tensão mecânica, D é o módulo de elasticidade, ε é a a deformação, Ω é a o fator de transformação de fase, Θ é o coeficiente de expansão térmica e T é a temperatura atuante.

$$d\sigma - d\sigma_0 = D(\xi)d\varepsilon + \Omega(\xi)d\xi_S + \Theta dT \quad (2.24)$$

Na Fig. 2.5 tem-se a representação de um diagrama de transformação de fase para uma tensão de compressão com comportamento assimétrico. De acordo com de Sousa (2016), assume-se que os valores das propriedades da liga com memória de forma são arbitrários, e que a temperatura tem início em M_s , i.e., $T > M_s$. No gráfico, o comportamento de tração é representado na região acima da tensão de valor zero, e o comportamento de compressão é representado abaixo da tensão de valor zero. A incógnita “+” representa a tração e “-” representa a compressão. Assim, a transformação induzida por tensão mecânica é dada pela região em azul limitada pelas linhas sólidas, e a transformação de austenita é dada pela região amarela limitada pelas linhas tracejadas.

O comportamento da barra de liga com memória de forma é a descrito pela transição entre a fase austenita e fase martensítica. Durante a transformação cada grão de martensita assume uma orientação particular composta de duas fases representada pela variável M_T , ou composta de apenas uma fase, representada pela variável M_D . Para incremento da tensão, tem-se um comportamento de elástico linear da tensão, enquanto $|\sigma| < |\sigma_s^{M*}|$, onde $\sigma_s^{M*} = \sigma_s^{min*} + C_M^*(T - M_s)$, sendo C_M o declive de tensão-temperatura na região de martensita. Se $|\sigma| > |\sigma_s^{M*}|$, há uma transformação de fase induzida por tensão sem variação de temperatura, até que $\sigma = \sigma_f^{M*}$, onde $\sigma_f^{M*} = \sigma_f^{min*} + C_M^*(T - M_f)$ e a liga com memória de forma seja

totalmente composta por martensita. Para decaimento da tensão, ocorre um descarregamento linear enquanto $|\sigma| > |\sigma_s^{A*}|$, onde $\sigma_s^{A*} = C_A^*(T - A_s)$, sendo C_A o declive de tensão-temperatura na região de austenita (de Sousa 2016).

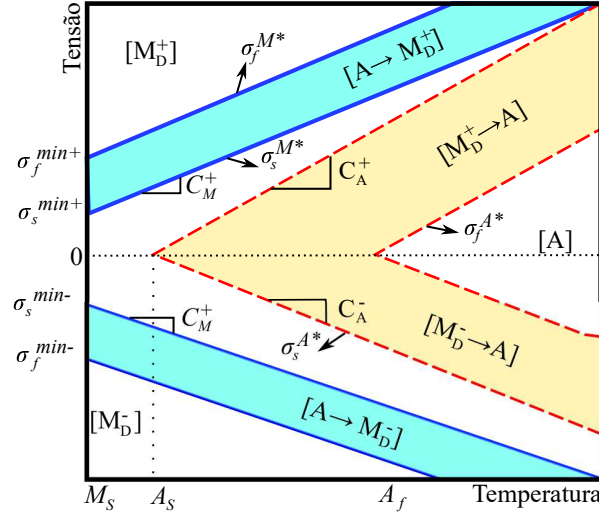


Figura 2.5: Adaptado de de Sousa (2016).

Note que a Fig. 2.5 representa o diagrama de transformação de fase considerando que os declives de tensão-temperatura na região de martensita e austenita são iguais $C_A \neq C_M$ e comportamento assimétrico entre tração e compressão da liga com memória de forma. Já na Fig. 2.6 tem-se a representação de um diagrama de transformação de fase para uma tensão de compressão com comportamento simétrico, sendo $C_A = C_M = C$. E na Fig. 2.7 tem-se a representação de um diagrama de transformação de fase para a temperatura com início em $T < M_s$. Assim, abaixo da temperatura final da martensita M_f , tem-se a presença de martensita reticulada que é caracterizada por comportamento constante da tensão em função da variação da temperatura.

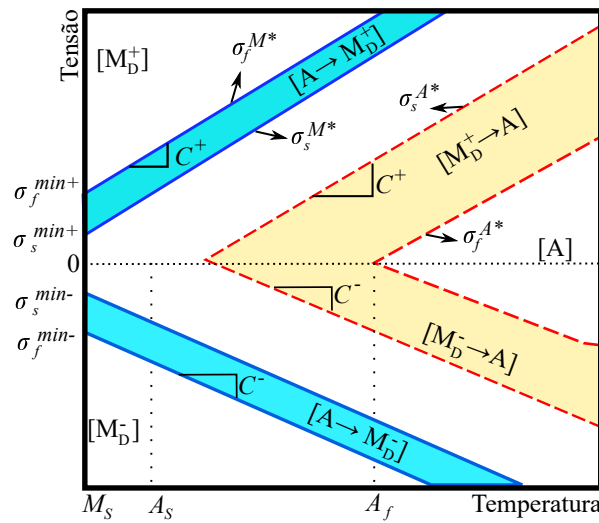


Figura 2.6: Adaptado de de Sousa (2016).

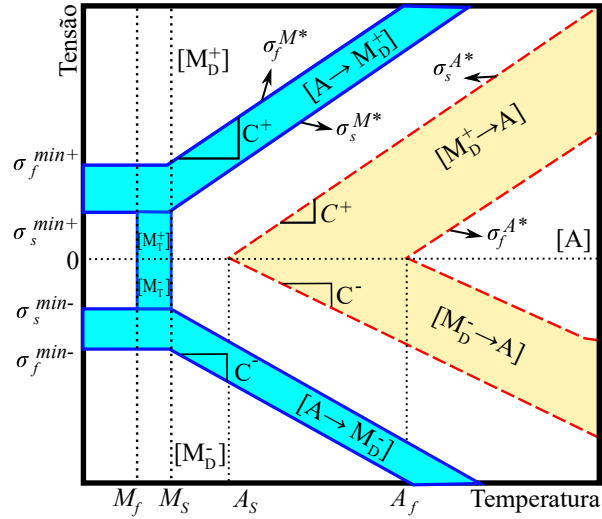


Figura 2.7: Adaptado de de Sousa (2016).

A Fig. 2.8 representa o comportamento da fração volumétrica de fase martensítica em função da deformação da liga com memória de forma. Observa-se que durante a transformação direta de fase ($1 \rightarrow 2$), a função estabelece concavidade tal que $\frac{d^2\xi}{d\varepsilon^2} < 0$ e durante a transformação reversa de fase ($3 \rightarrow 4$), a função possui uma concavidade tal que $\frac{d^2\xi}{d\varepsilon^2} > 0$. Outro fator interessante a ser evidenciado é com relação ao aumento de temperatura, a qual desloca as curvas no sentido do eixo positivo da deformação, o que pode ser traduzido como um aumento do ciclo de histerese.

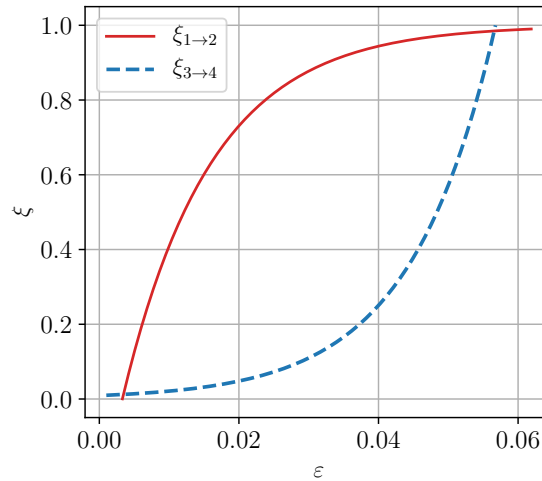


Figura 2.8: Variação da fração volumétrica de fase martensítica em função da deformação.

A Fig. 2.9 apresenta que o módulo de elasticidade E durante a transformação varia entre $30GPa$ e $70GPa$, sendo o primeiro o valor resultante para $\xi = 1$, quando a fase é inteiramente martensítica, e o último valor resultante para $\xi = 0$, quando a fase é predominantemente austenítica. Observe que de $1 \rightarrow 2$, ou na região de transformação direta de fase, $E(\xi)$ diminui de $70GPa$ para $30GPa$ enquanto o valor de ξ aumenta de 0 para 1. Quando $3 \rightarrow 4$, ou na região de transformação reversa de fase, $E(\xi)$ aumenta de $30GPa$ para $70GPa$ enquanto o valor de ξ diminui de 0 para 1.

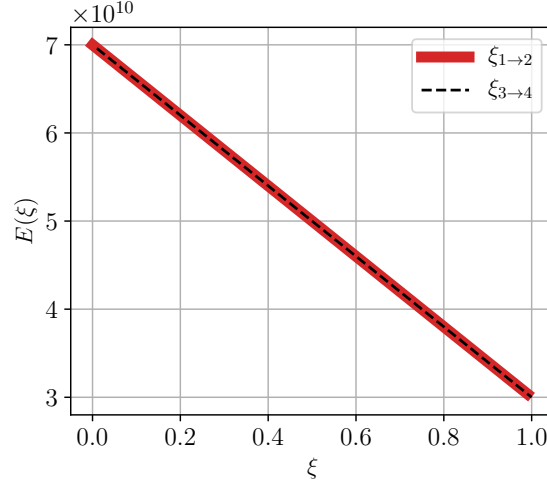


Figura 2.9: Variação do módulo de elasticidade em função da fração volumétrica de fase martensítica. A linha vermelha decresce de 70GPa para 30GPa , enquanto a linha tracejada percorre o sentido oposto na mesma direção.

Método Boyd & Lagoudas

De acordo com o método de Boyd e Lagoudas (Lagoudas & Khan 2001) e a referência de Paiva & Savi (1999), tem-se que a transformação de austenita para martensita é definida por,

$$\xi_{A \rightarrow M} = 1 - e^{-a_M(M_s - T) - b_M \bar{\sigma}} - \xi_0 \quad (2.25)$$

A transformação de martensita para austenita é definida por,

$$\xi_{M \rightarrow A} = \xi_0 e^{-a_A(T - A_s) - b_A \bar{\sigma}} \quad (2.26)$$

sendo as constantes definidas como,

$$a_A = -\frac{2\ln(10)}{(A_s - A_f)}, \quad b_A = \frac{a_A}{C_A} \quad (2.27)$$

$$a_M = \frac{2\ln(10)}{(M_s - M_f)}, \quad b_M = \frac{a_M}{C_M} \quad (2.28)$$

e $\bar{\sigma}$ definida por,

$$\bar{\sigma} = [(3/2)\sigma'_{ij} : \sigma'_{ij}]^{1/2} \quad (2.29)$$

sendo σ'_{ij} tensão deviatórica. M_s , T e ξ_0 são, respectivamente, a temperatura de início da transformação em martensita, a temperatura da LMF e a fração de martensita inicial.

Método de Tanaka & Nagaki

Apesar do modelo tridimensional ser aplicável em estruturas LMF, quando se reduz ao modelo unidimensional, tem-se que ele é similar ao método de Tanaka (Tanaka (1986)), o que foi comprovado por Brinson & Huang (1996) que trouxe resultados semelhantes em simulações.

Quando reduzida para unidimensional, a lei constitutiva de Tanaka pode ser escrita como exposta na Eq. 2.30.

$$\sigma = E(\xi)(\epsilon - \epsilon_L \xi_s) + \Theta(T - T_0) \quad (2.30)$$

Substituindo a Eq.2.15 na Eq. 2.30, tem-se:

$$\sigma = [\xi E_M + (1 - \xi)E_A](\epsilon - \epsilon_L \xi_s) \quad (2.31)$$

sendo Θ o coeficiente de expansão térmica. Uma vez que, T_0 é a temperatura onde a deformação térmica é definida como zero e pode ser negligenciada. Se a tensão térmica pode ser também negligenciada (sendo que sua magnitude é muito menor que a deformação de transformação), o termo Θ pode ser removido.

Sabe-se $\epsilon = \epsilon_{el} + \epsilon_{tr}$, ou seja, a deformação total é a soma da deformação elástica com a deformação de transformação. Assim, tem-se que a transformação de austenita para martensita é definida por,

$$\xi_{A \rightarrow M} = 1 - e^{a_M(M_s - T) + b_M \sigma} \quad (2.32)$$

quando,

$$T > M_f \quad e \quad C_M(T - M_s) < \sigma < C_M(T - M_f) \quad (2.33)$$

Ou seja, a fração volumétrica de martensita é expressa em função dos valores instantâneos de tensão e temperatura, tal que $\beta = \beta(\sigma, T)$. E a transformação de martensita para austenita é definida por,

$$\xi_{M \rightarrow A} = e^{a_A(A_s - T) + b_A \sigma} \quad (2.34)$$

quando,

$$T > A_s \quad e \quad C_A(T - A_f) < \sigma < C_A(T - A_s) \quad (2.35)$$

Sendo as constantes são definidas como,

$$a_A = \frac{\ln(0,01)}{(A_s - A_f)}, \quad b_A = \frac{a_A}{C_A} \quad (2.36)$$

$$a_M = \frac{\ln(0,01)}{(M_s - M_f)}, \quad b_M = \frac{a_M}{C_M} \quad (2.37)$$

O método de Boyd & Lagoudas apresenta modificações em relação ao método de Tanaka & Nagaki, apesar das funções matemáticas utilizadas para descrever a cinética de transformação serem semelhantes. Assim, as constantes a_A , b_A , a_M e b_M são definidas de forma diferente.

Método de Ikuta

Assim como os demais métodos apresentados, o método de [Ikuta & Hirose \(1991\)](#) faz o uso de funções exponenciais para representar as transformações de fase no material. As equações que representam as transformações de fase com relação à temperatura são dadas pela Eq. 2.38 e Eq. 2.39.

$$\xi_{A \rightarrow M} = \frac{\xi_M}{1 + e^{\frac{6,2}{A_f - A_s} \left(T - \frac{A_s + A_f}{2} \right)}} \quad (2.38)$$

$$\xi_{M \rightarrow A} = \frac{1 - \xi_A}{1 + e^{\frac{6,2}{M_s - M_f} \left(T - \frac{M_s + M_f}{2} \right)}} \quad (2.39)$$

Este método não considera as tensões e deformações instantâneas, sendo a cinética de transformação representada por uma exponencial de valores constantes de temperatura.

3

Supressão de Vibrações

Considere um bloco com massa m preso a um referencial inercial por uma mola de rigidez k e por um amortecedor de coeficiente de amortecimento viscoso c , conforme Fig. 3.1. A posição $x(t)$ do bloco é medida a partir de um referencial inercial e $x_0(t)$ representa o deslocamento da base.

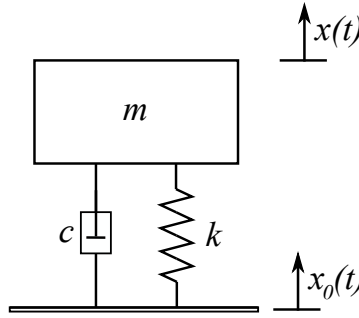


Figura 3.1: Sistema de um grau de liberdade com amortecedor, sendo k a rigidez da mola, m a massa do sistema, c o amortecimento, $x(t)$ o deslocamento da massa e $x_0(t)$ o deslocamento da base.

Assumindo que $x_0(t) = 0$, a equação do movimento é apresentada pela Eq. 3.1, sendo $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{K}$ respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, já a variável $\mathbf{F}_{nl}$ representa a força interna não linear do amortecedor e $\mathbf{U}_c$, a força externa atuante sobre o sistema.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}_{nl}(t) = \mathbf{U}_c(t) \quad (3.1)$$

Emprega-se a notação no espaço de estados apresentada na Eq. 3.2, sendo $\mathbf{A}$ a matriz de estado, $\mathbf{B}_u$ a matriz de entrada de controle, $\mathbf{C}$ a matriz de saída, $\mathbf{D}$ a matriz de transmissão direta, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ a equação dinâmica e $\mathbf{y}(t)$ a equação de observação.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_u\mathbf{u}_m(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}_m(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Quando o modelo matemático é obtido usando as leis da física, as variáveis de estado são aquelas associadas às diversas formas de energia armazenadas no sistema. Por exemplo, em um sistema mecânico, geralmente posição e velocidade, associadas à energia potencial e

cinética, respectivamente, são as variáveis de estado. Como o sistema é de segunda ordem, contém duas variáveis de estado. Define-se os estados do sistema como sendo a posição e a velocidade da massa, respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{ky(t)^2}{2} &\rightarrow x_1(t) \\ \frac{m\dot{y}(t)^2}{2} &\rightarrow x_2(t) = \dot{x}_1(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

e a entrada,

$$u_m(t) = u_c(t) \quad (3.4)$$

no caso, a entrada é um escalar e não um vetor. Colocando na forma de espaço dos estados, por substituição na Eq. 3.1, tem-se $\dot{x}_1(t)$ e $\dot{x}_2(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{c}{m}x_2(t) + \frac{u_c(t)}{m}(t) - \frac{F_{nl}(t)}{m} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Portanto, define-se a equação de estado sob a forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{Bmatrix} u_c(t) + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m} \end{Bmatrix} F_{nl}(t) \quad (3.6)$$

A equação de saída na forma matricial é:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Sendo, as matrizes identificadas por,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{B}_u = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

e $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. No anexo B apresenta-se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}_u$ para um sistema com $x_0(t) \neq 0$. Para este exemplo, considera-se $m = 1 \text{ kg}$; $k = 1 \frac{N}{m}$; $c = 1 \frac{Ns}{m}$; Como esperado, o sistema é amortecido e sua amplitude de deslocamento e velocidade tendem a zero para um tempo suficientemente grande, como mostrado na Fig. 3.2.

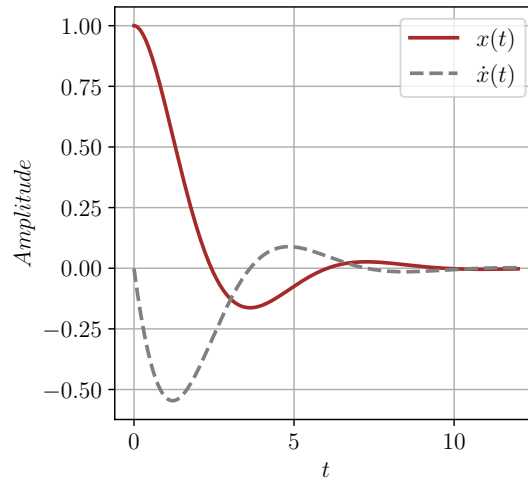


Figura 3.2: Deslocamento e velocidade de um sistema massa, mola e amortecedor correspondente à atuação de uma função impulso.

Por outro lado, para o exemplo a seguir, considera-se $m = 2$ kg; $k = \omega_n^2 m$; $c = 2\sqrt{mk}$, a Fig. 3.3 representa o deslocamento e a velocidade resultantes da atuação da força $u_c(t) = F_0 \sin(\omega)t$ sobre o sistema de um grau de liberdade, sendo $\omega = 2\pi f$.

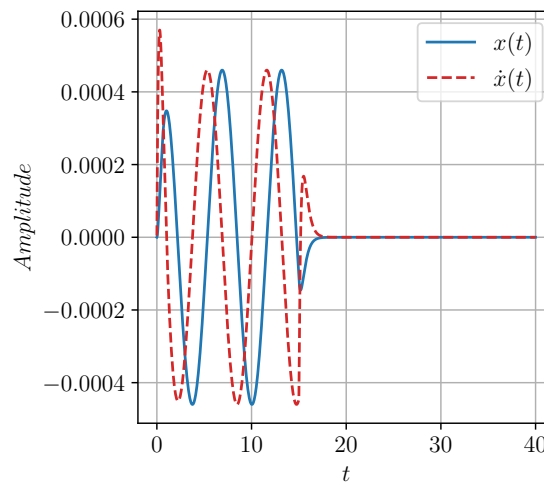


Figura 3.3: Deslocamento e velocidade de um sistema massa, mola e amortecedor correspondente à atuação de uma força $u_c(t) = F_0 \sin(\omega t)$ enquanto $t < 15s$ para $F_0 = 0,01$ e $f = 0,5\text{Hz}$.

3.1 Força de Amortecimento Quadrático

Os amortecedores quadráticos, ou amortecimento da Lei do Quadrado (Thorby 2008), são comuns em aplicações de engenharia. Este tipo de amortecimento é geralmente produzido ao forçar o fluido hidráulico através de um pequeno orifício por alguma forma de êmbolo. O fluxo turbulento resultante implica que a pressão atuando no pistão aumenta com o quadrado da velocidade. Na prática, um amortecedor hidráulico geralmente produz uma força proporcional

ao quadrado da velocidade do pistão. Assim, considera-se a seguinte força atuando no sistema,

$$F_q = C\dot{x}^2 \text{sign}(\dot{x}) \quad (3.11)$$

onde C é o coeficiente de amortecimento quadrático, $\dot{x}$ é a velocidade relativa entre as duas extremidades do amortecedor.

A Fig. 3.4 apresenta a força produzida por um amortecedor quando o fluido está sendo comprimido por um movimento hipotético senoidal, dado por: $x_0(t) = A \sin(\omega t)$. E a Fig. 3.5 apresenta a força produzida em função do deslocamento, sendo $F_{nl} = F_q$ nesta seção.

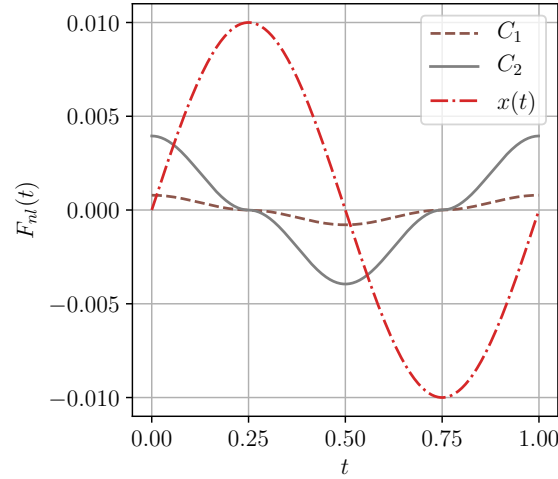


Figura 3.4: Força de Amortecimento Quadrático em função do tempo para $F_0 = 0,01$, $f = 1Hz$, $A = 0,01$, $C_1 = 0,5$ e $C_2 = 1$.

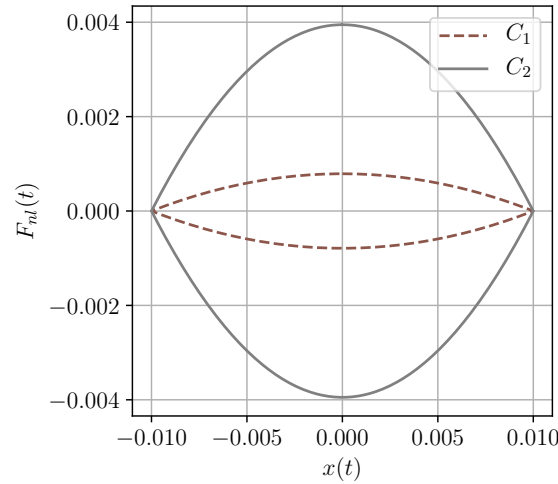


Figura 3.5: Força de Amortecimento Quadrático em função do deslocamento para $F_0 = 0,01$, $f = 1$, $A = 0,01$, $C_1 = 0,5$ e $C_2 = 1$.

Nota-se o comportamento quadrático da força de amortecimento devido à variável $\dot{x}^2$. A oscilação provém da função sinal de $\dot{x}$ conforme o seu valor varia entre 1, -1 . Nos pontos em que $x(t)$ é máximo e mínimo, a força de amortecimento quadrático é zero para qualquer valor

de C . Para maiores valores de C , maior é a amplitude da força de amortecimento quadrático. Além disso, a força de amortecimento atinge seu valor máximo quando $x(t) = 0$. Já, nas raízes de F_q , ocorre a inversão de sinal da função, i.e., $F_q(t = t_i) > 0 \rightarrow F_q(t = t_i) < 0$, ou vice-versa.

3.2 Força de Atrito de Coulomb

Amortecedores de atrito seco são dispositivos construídos para que duas superfícies em contato deslizem uma em relação a outra, dissipando energia. A magnitude desta força é constante em intervalos de tempo e é o produto da força normal atuando entre as superfícies em contato e do coeficiente de atrito da interface. A força reativa é apresentada na Eq. 3.12,

$$F_a = -\mu \text{sign}(\dot{x}) \quad (3.12)$$

onde μ é o coeficiente de atrito de Coulomb, o qual é suposto constante e $\text{sign}(\dot{x})$ é a função sinal apresentada no amortecimento quadrático. É importante notar que sistemas com amortecimento de Coulomb apresentam o decaimento linear de amplitude e que o movimento cessa quando a amplitude do deslocamento é menor do que F_a/k , pois a força da mola já não é mais suficiente para vencer a força de atrito.

A Fig. 3.6 apresenta a força produzida por um amortecedor de atrito seco submetido sob o mesmo movimento hipotético senoidal $x_0(t)$. E a Fig. 3.7 apresenta a força produzida em função da velocidade, sendo $F_{nl} = F_a$ nesta seção.

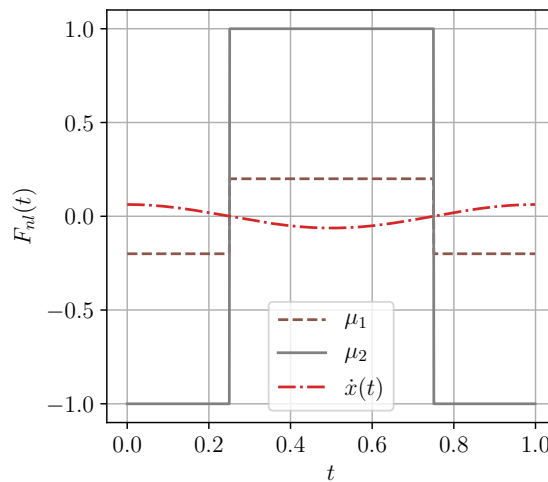


Figura 3.6: Força de Atrito de Coulomb em função do tempo para $F_0 = 0,01$, $f = 2Hz$, $A = 0,01$, $\mu_1 = 0,5$ e $\mu_2 = 1$.

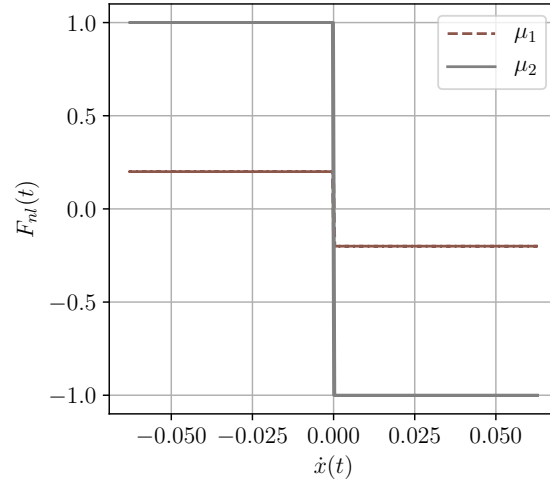


Figura 3.7: Força de Atrito de Coulomb em função do deslocamento para $F_0 = 0,01$, $f = 2Hz$, $A = 0,01$, $\mu_1 = 0,5$ e $\mu_2 = 1$.

A função sinal agora é obtida pela velocidade do sistema e posteriormente multiplicada pela constante representada pelo coeficiente de atrito. Desta forma, a força de atrito possui valor constante para uma faixa de tempo onde a velocidade alcança seu valor máximo, ou mínimo, sendo o seu sinal sempre contrário ao sentido de movimento do sistema, i.e., $F_a(t_i \rightarrow t_f) = 1$, tal que $\frac{dx}{dt} < 0$ e $F_a(t_i \rightarrow t_f) = -1$, tal que $\frac{dx}{dt} > 0$. Conforme visto para a força de amortecimento quadrático, para maiores valores de μ , maior a amplitude da força de atrito de coulomb. Além disso, a força de amortecimento é positiva quando $\dot{x}(t) < 0$ e negativa quando $\dot{x}(t) > 0$, ocorrendo uma inversão de sinal em $\dot{x}(t) = 0$.

3.3 Força da Barra de Liga com Memória de Forma

Na referência [Lagoudas & Khan \(2001\)](#), valida-se numericamente os procedimentos de modelagem do comportamento pseudoelástico das Molas com Liga com Memória de Forma utilizando um dispositivo de absorção de vibração composto por uma massa m apoiada a uma base através de um barra de comprimento L e seção transversal A_{lmf} . Assume-se que inicialmente a barra esteja submetida a um carregamento de tração, sendo que $x(t) > y(t) = Y_0 \sin(\omega t)$.

$$-F_{lmf} = E_{lmf}(\varepsilon^t) A_{lmf} \left(\frac{x(t) - y(t)}{L} - \varepsilon^t \right) \quad (3.13)$$

Para a realização das simulações numéricas são utilizados os mesmos parâmetros do modelo de [GAO & Brinson \(2007\)](#), no qual as propriedades termomecânicas relevantes de uma liga de Níquel-Titânio são apresentadas na Tab. 3.1.

Tabela 3.1: Propriedades termodinâmicas da liga com memória de forma.

Material	Temperaturas	Constantes de transformação
$E_A = 67\text{GPa}$	$M_f = 9^\circ\text{C}$	$C_M = 8\text{MPa}^\circ\text{C}^{-1}$
$E_M = 26.3\text{GPa}$	$M_s = 18,4^\circ\text{C}$	$C_A = 13,8\text{MPa}^\circ\text{C}^{-1}$
$\varepsilon_L = 0,067$	$A_s = 34,5^\circ\text{C}$	$\sigma_s = 100\text{MPa}$
	$A_f = 49^\circ\text{C}$	$\sigma_f = 170\text{MPa}$

Para a realização das simulações numéricas foram utilizados também os mesmos parâmetros estruturais do modelo linearizado de [Lagoudas & Khan \(2001\)](#). A diferença deste modelo é a presença da rigidez natural do sistema (Fig. 3.8), representada pela variável k , tal que $k = \omega_n^2 m$, sendo a frequência natural determinada de acordo com a faixa de operação da liga com memória de forma, que é de $f_n = 23\text{Hz}$, lembrando que $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$.

Tabela 3.2: Propriedades termodinâmicas da liga com memória de forma.

Parâmetros de Projeto	Dados do Material
$m = 500\text{kg}$	$E_A = 70\text{GPa}$
$L = 1\text{m}$	$E_M = 30\text{GPa}$
$Y_0 = 0,01\text{m}$	$C_A = C_M = 7\text{MPa}^\circ\text{C}^{-1}$
$r = 0,01\text{m}$	$M_f = 274\text{K}$
$f = 50\text{Hz}$	$M_s = 292\text{K}$
$\Lambda = 0,05$	$A_s = 296\text{K}$
$T = 315\text{K}$	$A_f = 315\text{K}$

Observa-se do número de equações entre as Eq.s (2.6) a (2.9), que o comportamento dinâmico do sistema se altera de acordo com a fase que atua em determinado limite de tensão e deformação. Assim, através da simulação do sistema pseudo-elástico, é esperado que mesmo na condição de transformação de “*minor loop*”, ainda seja possível alcançar o amortecimento utilizando a liga com memória de forma.

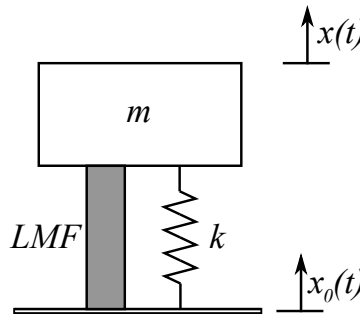


Figura 3.8: Sistema de um grau de liberdade com barra de liga com memória de forma (LMF), sendo k a rigidez da mola, m a massa do sistema, $x(t)$ o deslocamento da massa e $x_0(t)$ o deslocamento da base.

Na Fig. 3.9, pode-se avaliar o comportamento do ciclo de tensão por deformação para diferentes temperaturas de trabalho, sendo elas componentes do vetor $T = [315\text{K} \ 325\text{K} \ 335\text{K} \ 345\text{K}]$.

Assume-se que a liga está inicialmente em seu estado puramente austenítico e sem a presença de qualquer deformação de transformação. O critério de temperatura foi adotado para que a temperatura de operação escolhida fosse sempre maior que a temperatura de austenita inicial, ou seja, $T > A_f$. Uma vez que [Paiva & Savi \(1999\)](#) demonstram que temperaturas abaixo de A_f , ou ainda igual à A_s , resultam em pseudoelasticidade parcial, onde a transformação de fase inversa não é totalmente concluída, o que também foi comprovado através de simulações numéricas realizadas para o presente trabalho, como ilustrado na Fig. 3.10. Em [Aguiar \(2010\)](#), pode-se avaliar a representação do comportamento termoelástico da LMF. Na Fig. 3.9 (a) tem-se um ciclo completo com $A_f = (0, 0)$. A Fig. 3.9 (b) mostra o fenômeno pseudoelástico onde é possível notar uma alteração da curva de tensão-deformação com ciclo completo em $\sigma_{A_f} > 0$ e $\varepsilon_{A_f} > 0$. A diferença entre as duas consiste no deslocamento positivo do ciclo de histerese em $\Delta\sigma = 0,7 \cdot 10^8 \text{ Pa}$ e $\Delta\varepsilon = 0,001$ em cada um dos 4 pontos evidenciados na Fig. 3.9 (b), o que resulta em uma diminuição da área representativa do ciclo de histerese. Este comportamento se repete para os itens (c) e (d), conforme demonstrado na Tab. 3.3.

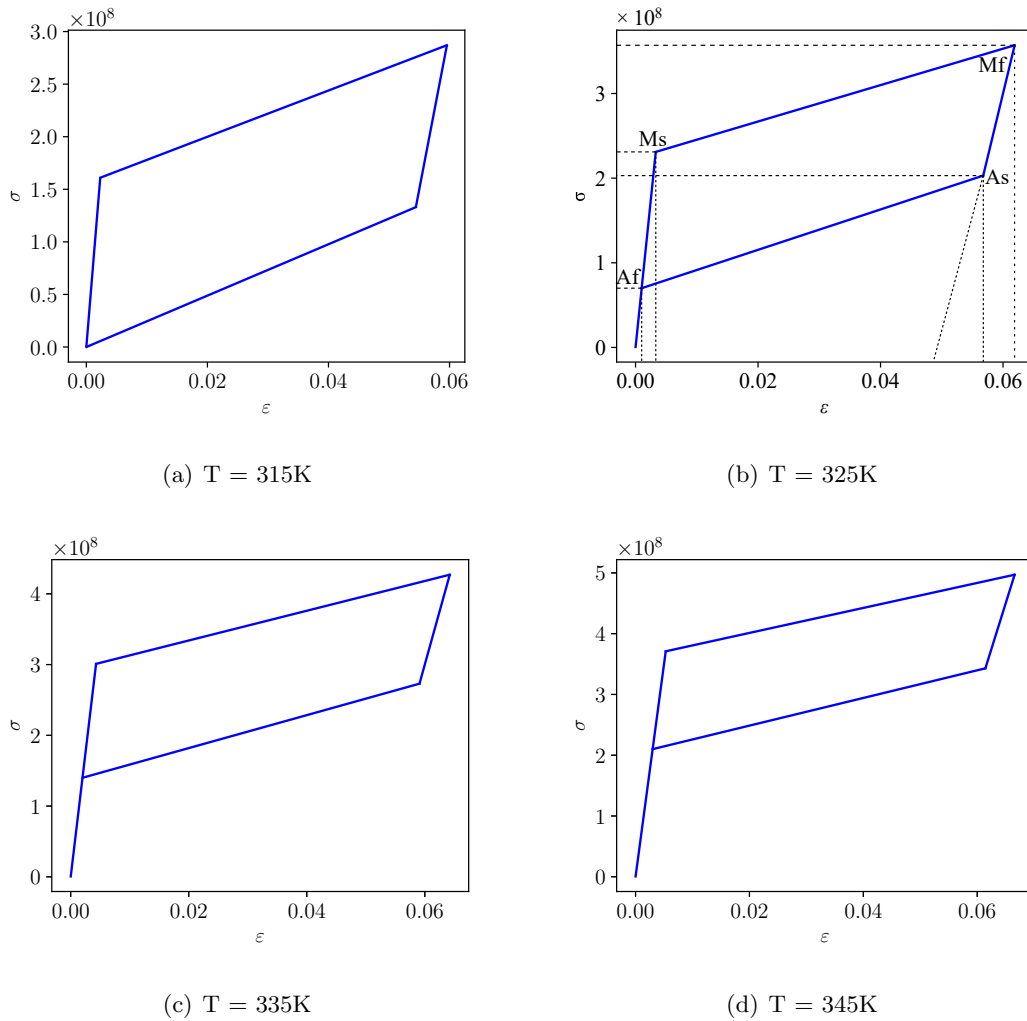


Figura 3.9: Correlação do histórico de tensão-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas, considerando deformação positiva correspondente à cada valor do vetor de temperatura.

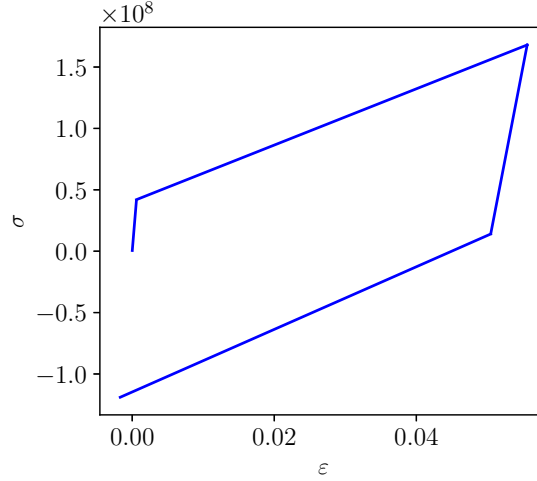


Figura 3.10: Correlação do histórico de tensão-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas, considerando deformação positiva correspondente à $T = A_s = 296K$.

Para os casos apresentados, verifica-se que acréscimos de temperatura em $\Delta T = 10K$ resultam em acréscimo de tensão, em $\Delta\sigma = 0,7 \cdot 10^8 \text{Pa}$, e deformação, em $\Delta\varepsilon = 0,001$. Portanto, observa-se que maiores índices de temperatura, de tal forma que $T > A_f$, resultam em maiores magnitudes das tensões atuantes e deformações, assim como demonstrado por Neto (2012). Portanto, mantendo-se as mesmas propriedades termodinâmicas da liga com memória de forma e variando-se somente a temperatura de operação, conclui-se que a alteração nas tensões e deformações de transição induz a barra a dissipar menor quantidade de energia do sistema, devido à obtenção de menores áreas representativas do ciclo de histerese.

Tabela 3.3: Valores de tensão e deformação para os pontos de A_s , M_s , M_f e A_f , sendo σ dado em 10^8 Pa .

	T = 315K	T = 325K	T = 335K	T = 345K
Pontos	(σ, ε)	(σ, ε)	(σ, ε)	(σ, ε)
A_f	(0; 0)	(0,7; 0,001)	(1,4; 0,002)	(2,1; 0,003)
M_s	(1,61; 0,0023)	(2,31; 0,0033)	(3,01; 0,0043)	(3,71; 0,0053)
M_f	(2,87; 0,05967)	(3,57; 0,0619)	(4,27; 0,06423)	(4,97; 0,06657)
A_s	(1,33; 0,05443)	(2,03; 0,05677)	(2,73; 0,0591)	(3,43; 0,06143)

Na Fig. 3.11 tem-se o diagrama de tensão por deformação considerando um caso uniaxial, onde há tensões e deformações positivas e negativas, i.e., quando a barra é submetida à tração tem-se que $\sigma > 0$ e $\varepsilon > 0$, quando a barra é submetida à compressão tem-se que $\sigma < 0$ e $\varepsilon < 0$. Conforme apresentado por Lagoudas & Khan (2001), assume-se que a deformação de transformação e tensão/compressão variam linearmente durante as transformações e fase, e nas regiões de carregamento e descarregamento da barra, onde não ocorre transformação de fase, tem-se que a liga apresenta um comportamento elástico linear. Assume-se novamente que a liga está inicialmente em seu estado puramente austenítico e sem a presença de qualquer deformação de transformação. Observa-se que o comportamento do ciclo completo de

transformação de fase é simétrico em relação à $\sigma = 0, \varepsilon = 0$ e as magnitudes de tensões e deformações se mantêm iguais em módulo para tração e compressão da barra.

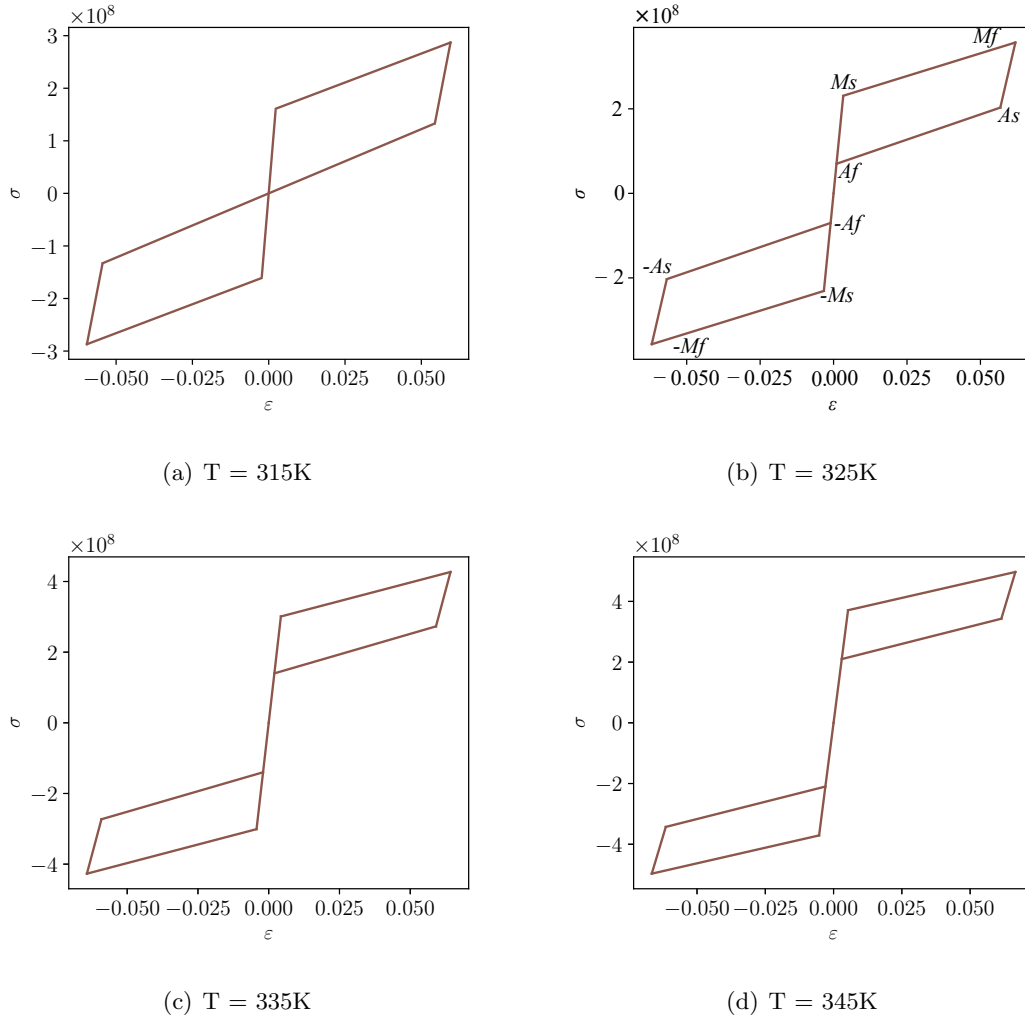


Figura 3.11: Correlação do histórico de tensão-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas correspondente à cada valor do vetor de temperatura.

Na Fig. 3.12 pode-se avaliar a força da liga com memória de forma por deformação para as mesmas temperaturas de trabalho utilizadas na Fig. 3.9. Neste caso, assume-se que a transformação entre fases é regida pelo Método de Tanaka e Nagaki (Eq. 2.32 e Eq. 2.34), ou seja, a cinética de transformação de fase considera funções matemáticas conhecidas. Conforme ilustrado por Paiva & Savi (1999), este método resulta em regiões de transformação de fase não lineares e é capaz de descrever os fenômenos de memória de forma e pseudoelasticidade. Diferente do modelo de Brinson & Huang (1996), o presente modelo leva em conta a fração martensítica induzida por temperatura β_T , uma vez que a transformação de fase é considerada completa. Para maiores índices de temperatura, observa-se que as forças representadas por $F_{nl_{As}}$, $F_{nl_{Ms}}$, $F_{nl_{Mf}}$ e $F_{nl_{Af}}$ aumentam de magnitude para $\varepsilon > 0$. Como o comportamento do ciclo completo de transformação de fase é simétrico em relação à $\sigma = 0, \varepsilon = 0$, as magnitudes de tensões e deformações se mantêm iguais em módulo para tração e compressão da barra.

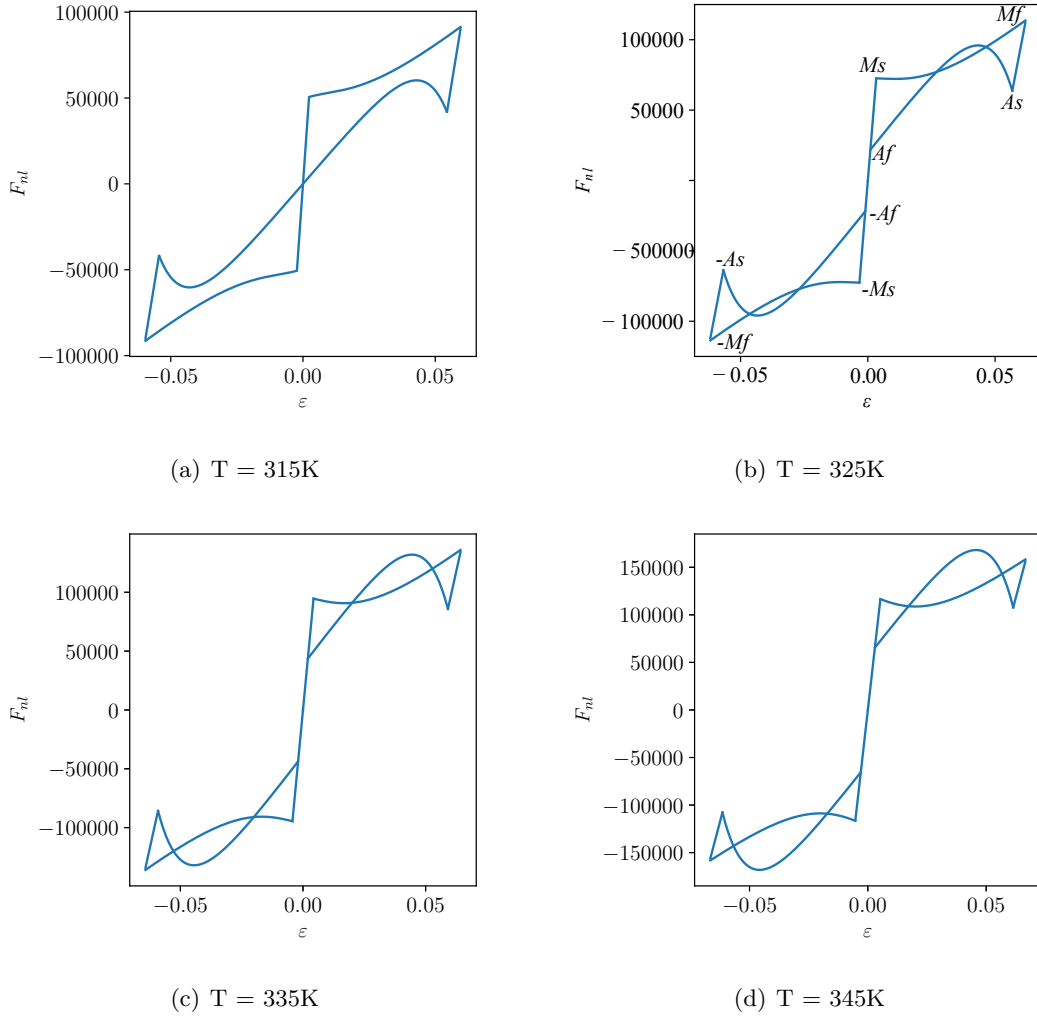


Figura 3.12: Correlação do histórico de força-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas considerando cinética de transformação pelo método Tanaka e Nagaki correspondente à cada valor do vetor de temperatura.

Outro ponto a ser identificado é com relação ao aumento de temperatura e a alteração da cinética de transformação de fase. Com o aumento de temperatura, a parcela em exponencial da Eq. 2.32 diminui, o que resulta em valores próximos de 1 para $\xi_{A \rightarrow M}$ e em menores valores para $\xi_{M \rightarrow A}$.

Resultados e Discussões

Neste capítulo apresenta-se a resposta do sistema para cada força dissipativa através da implementação de simulação numérica realizada em ambiente Python. Diferentemente do Capítulo 2, na qual avalia-se o comportamento da força dissipativa em função do tempo e deslocamento, o presente capítulo compara a resposta do sistema em deslocamento, velocidade, aceleração, plano fase e comportamento dinâmico, sob diferentes condições de amortecimento, rigidez e demais parâmetros.

4.1 Sub-Amortecimento da Força de Atrito de Coulomb

Da Eq. 3.1, assume-se que a força externa atuante sobre o sistema seja nula, ou $u_c = 0$. Considera-se $m = 1kg$, $k = 2m\omega_n$ e $c_{cr} = 2\sqrt{mk}$, sendo $\omega_n = 2\pi f_n$ e $\omega = 2\pi f$. A Fig. 4.1 representa o deslocamento e a velocidade do sistema exposto na Fig. 2.1 para uma base fixa, ou $x_0(t) = 0$.

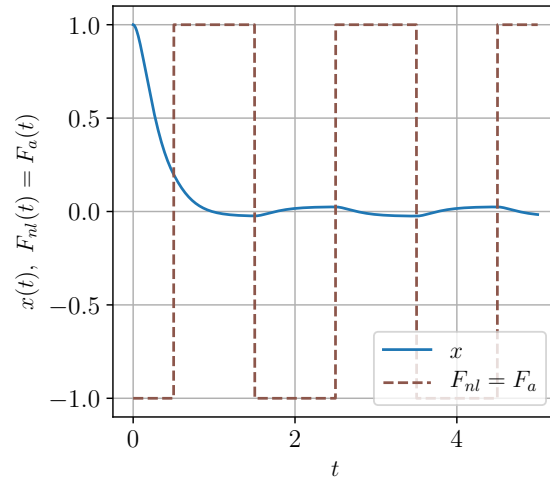


Figura 4.1: Deslocamento e F_{nl} de um sistema massa, mola e amortecedor considerando Força de Atrito de Coulomb para $c = 2\sqrt{mk}$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1$, $A = 0,01$, $x_s(t) = A\sin(\omega t)$ e $\mu = 1$.

Da Fig. 4.1, quando $F_a > 0$, tem-se um movimento uniformemente variado caracterizado

para um deslocamento em função do tempo semelhante a uma parábola decrescente, ocorrendo a inversão no sentido de deslocamento para $F_a = 0$. À partir de $t = 1s$ o deslocamento oscila entre movimentos de mesmo sentido e direção e movimentos contrários para um valor bem próximo de zero. Para um intervalo de tempo $0 < t < 1,75s$ tem-se um movimento acelerado e retrógrado, de maior amplitude para compensar o deslocamento inicial do sistema.

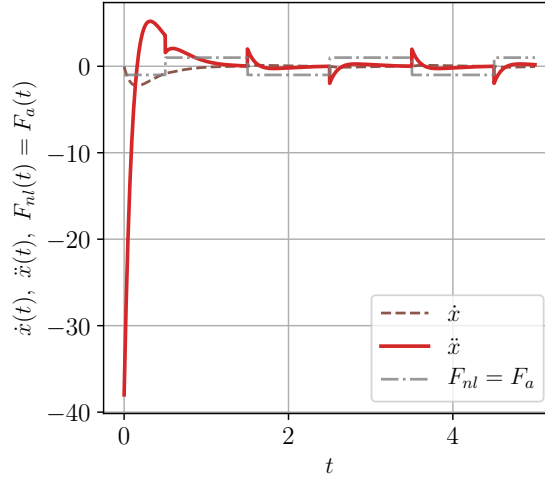


Figura 4.2: Velocidade e Aceleração de um sistema massa, mola e amortecedor considerando Força de Atrito de Coulomb para $c = 2\sqrt{mk}$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1$, $A = 0,01$, $x_s(t) = A\sin(\omega t)$ e $\mu = 1$.

Na Fig. 4.2, para os intervalos de tempo onde $(F_a < 0) \rightarrow (F_a > 0)$ ocorrem os picos de aceleração sempre contrário ao sentido de aplicação da força, tal que seu valor é dado por $\max(\ddot{x}) = 2F_a$. Quando $F_a = 1$ tem-se um movimento retrógrado e retardado e para $F_a = -1$ tem-se um movimento progressivo e retardado. Na Fig.4.3, tem-se o deslocamento do sistema para $c = 0$.

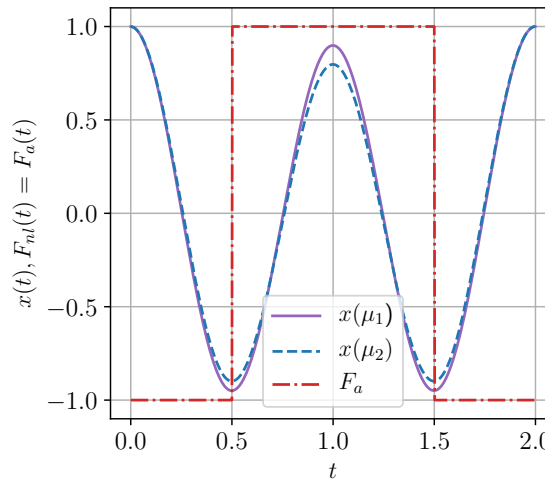


Figura 4.3: Deslocamento de um sistema massa, mola e amortecedor considerando Força de Atrito de Coulomb e para $F_0 = 0,01$, $f = 0,5Hz$, $A = 0,01$, $c = 0$, $x_s(t) = A\sin(\omega t)$, $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = 2$.

Em caso de sistema livre sem amortecimento tem-se que enquanto $F_{nl} = -1$, o valor do deslocamento do sistema é máximo com valor igual à $x(t_i) = 1$. Para valores de $F_{nl} = 1$, o deslocamento decai em 11% para incrementos unitários do coeficiente de atrito. Na Fig.4.4, tem-se a velocidade e aceleração do sistema para $c = 0$.

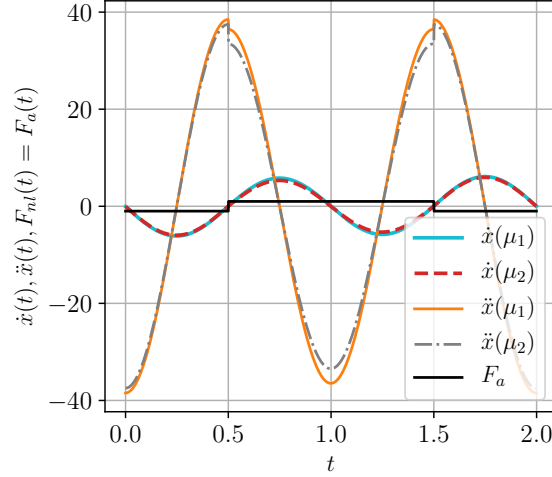


Figura 4.4: Velocidade e Aceleração de um sistema massa, mola e amortecedor considerando Força de Atrito de Coulomb e para $F_0 = 0,01$, $f = 0,5Hz$, $A = 0,01$, $c = 0$, $x_s(t) = A\sin(\omega t)$, e diferentes valores de μ .

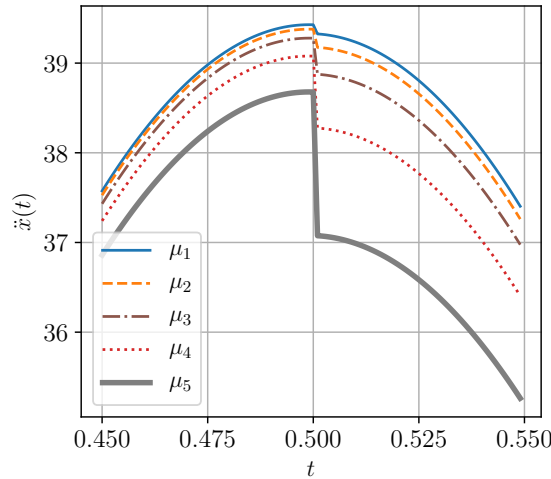


Figura 4.5: Aceleração de um sistema massa, mola e amortecedor considerando Força de Atrito de Coulomb e para $F_0 = 0,01$, $f = 0,5Hz$, $A = 0,01$, $c = 0$, $x_s(t) = A\sin(\omega t)$, e $\mu_1 = 0,05$, $\mu_2 = 2\mu_1$, $\mu_3 = 2\mu_2$, $\mu_4 = 2\mu_3$ e $\mu_5 = 2\mu_4$.

Da Fig.4.4, observa-se uma brusca variação da aceleração associado à transição da força de atrito de Coulomb, tal que $F_{nl} < 0 \rightarrow F_{nl} > 0$ e vice-versa. Neste ponto de transição nota-se que ocorre também a inversão de movimento retrógrado e acelerado para movimento progressivo e acelerado. A variação do coeficiente de atrito reduz a magnitude da aceleração máxima, conforme ilustrado na Fig. 4.5, porém, aumenta a magnitude da brusca variação da aceleração, uma vez que a força de atrito é diretamente proporcional à μ . Em uma análise

mais detalhada, conforme Fig. 4.6, nota-se que o aumento do coeficiente de atrito resulta no aumento linear da queda da aceleração em $t = 0,5s$, conforme o pico de aceleração decai.

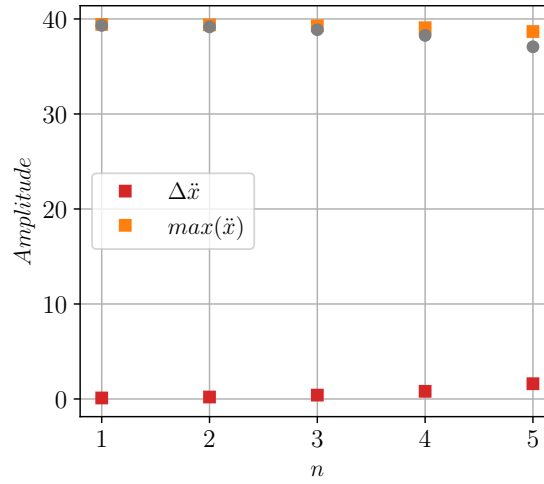


Figura 4.6: Magnitude da variação da aceleração para diferentes valores de μ (representados pela incógnita n). Os quadrados representam o pico máximo da aceleração e as bolinhas a aceleração mínima durante a transição para um dado instante de tempo t .

No plano de fase, apresentado na Fig. 4.7, nota-se que o deslocamento inicial é de $x = 1m$ para uma velocidade de $\dot{x} = 0m/s$. Quando o deslocamento é mínimo, a velocidade é máxima, tal que $|\dot{x}| = 6m/s$. O aumento do coeficiente de atrito permite a redução do deslocamento quando $\dot{x} = 0m/s$ e $|\dot{x}| = 6m/s$.

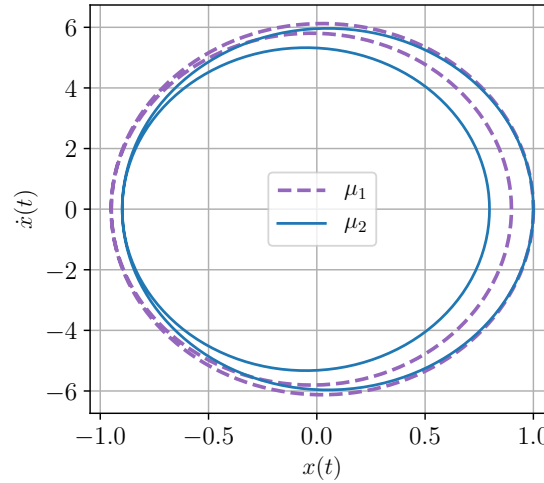


Figura 4.7: Plano fase considerando Força de Atrito de Coulomb para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,01$, $x_s(t) = A\sin(\omega t)$, $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = 2$.

Na curva de histerese, representado na Fig. 4.8, é possível observar a transição imediata da força de atrito de Coulomb nos valores de deslocamento mínimo. Com o aumento do coeficiente de atrito, a magnitude da força é equivalente ao seu valor, i.e, $|F_{nl}| = \mu$. Além disso, evidencia-se que o deslocamento apresenta um valor mínimo menor para valor de coeficiente de atrito

menor. No comportamento dinâmico, representado pela Fig. 4.9, nota-se que a velocidade apresenta magnitudes semelhantes para μ_1 e μ_2 , enquanto que a magnitude da força apresenta o mesmo comportamento citado anteriormente.

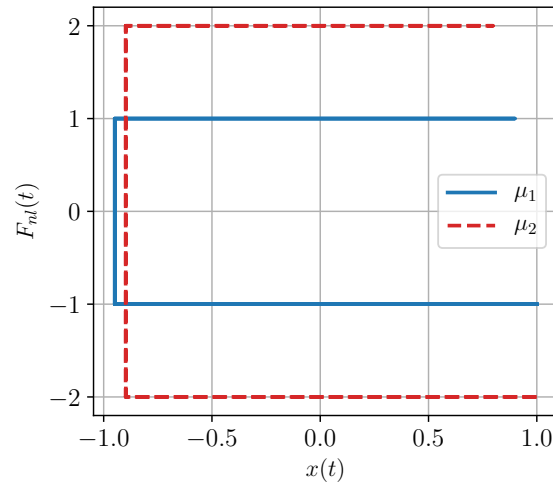


Figura 4.8: Curva de Histerese da Força de Atrito de Coulomb para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,01$, $x_s(t) = A\sin(\omega t)$, $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = 2$.

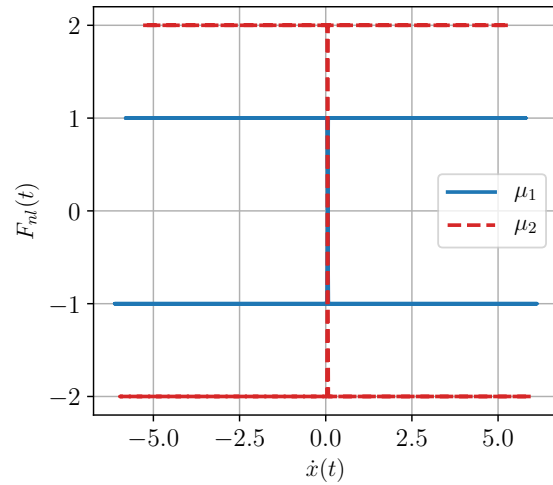


Figura 4.9: Comportamento dinâmico da Força de Atrito de Coulomb para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,01$, $x_s(t) = A\sin(\omega t)$, $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = 2$.

4.2 Sub-Amortecimento da Força de Amortecimento Quadrático

Considera-se um coeficiente de amortecimento $c = 1$ tal que $\zeta = \frac{c}{c_{cr}} < 1$. Quando $F_q \rightarrow 0$ tem-se o deslocamento máximo de sentido contrário na direção de movimento, caracterizado pelos picos de mínimos. Para valores constantes de tempo onde ocorre a inversão de sentido da força de amortecimento quadrático, ou seja, $F_q(t_i) \rightarrow -F_q(t_i)$, tem-se o deslocamento máximo de mesmo sentido na direção de movimento, caracterizado pelos picos de máximos. Em $t_1 = 1s$, x_1 , ou o deslocamento na Fig. 4.10 representa o pico, e a velocidade é nula na Fig. 4.11 (a),

ou $\dot{x}_1 = 0$. Em $t_2 = 2s$, x_2 é o pico e a velocidade $\dot{x}_2 = 0$. Como $\frac{x_1}{x_2} = e^{-\tau}$, lembrando que $\tau = t$, tem-se que a energia dissipada por ciclo é constante quando o movimento é livre e subamortecido, i.e., $\zeta < 1$. Na Fig. 4.11 (b) tem-se a comparação entre a aceleração e velocidade do sistema, o que evidencia que $\ddot{x} = 0$ quando $\dot{x}$ representa os picos de velocidade.

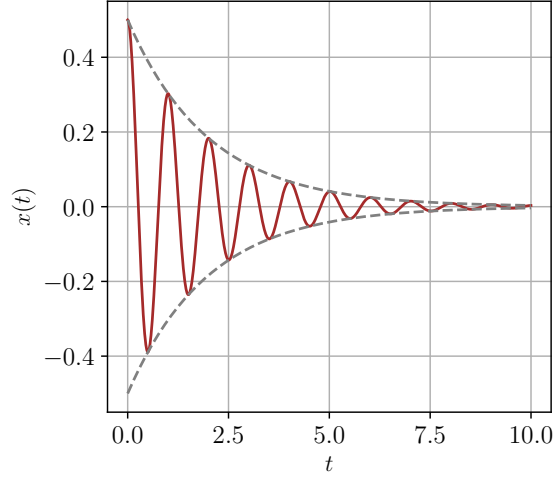
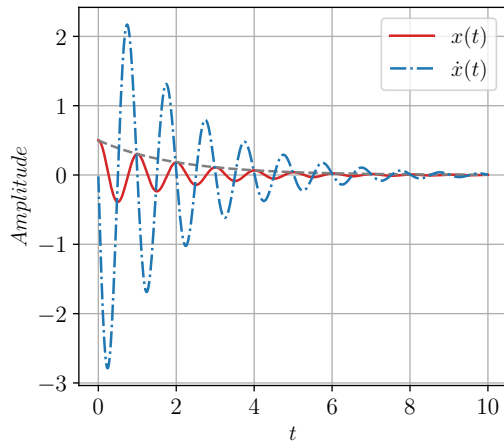
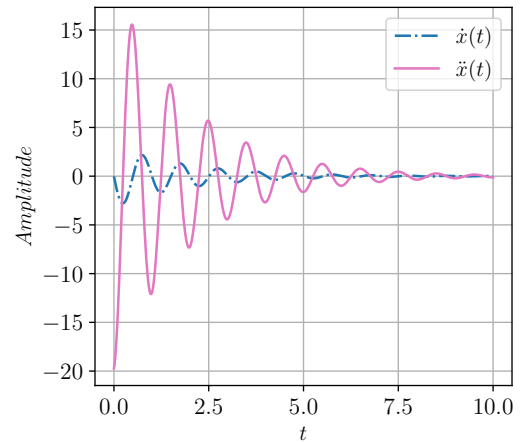


Figura 4.10: Deslocamento de um sistema massa, mola e amortecedor considerando Força de Amortecimento Quadrático para $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,01$, $x_s(t) = A\sin(\omega t)$ e $C = 1$.



(a) Deslocamento e velocidade



(b) Velocidade e aceleração

Figura 4.11: Deslocamento, Velocidade e Aceleração de um sistema massa, mola e amortecedor considerando Força de Amortecimento Quadrático para $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,01$, $x_s(t) = A\sin(\omega t)$ e $C = 1$.

Considera-se agora que $c = 0$ para avaliar o comportamento do sistema quando varia-se o coeficiente de amortecimento quadrático C . Na Fig. 4.12, em caso de sistema livre sem amortecimento, tem-se que quando $F_{nl} = 0$, a amplitude de deslocamento é máxima, de tal forma que o deslocamento no sentido de movimento é maior que o deslocamento no sentido contrário, i.e., $x_{max} > x_{min}$. Além disso, a amplitude do deslocamento positivo oscila entre $x(t_i)_{max} = x(t_{i+1})_{max} = 2x(t_i)_{max}$. A diminuição do valor de C resulta no decaimento do

deslocamento positivo em 25% e decaimento do deslocamento negativo em torno de 16%. Lembrando que para intervalos de tempo pares à partir de $t = 0s$, o deslocamento não se altera, i.e., se $t_i \% 2 = 0 \rightarrow x_{C_1}(t_i) = x_{C_2}(t_i)$.

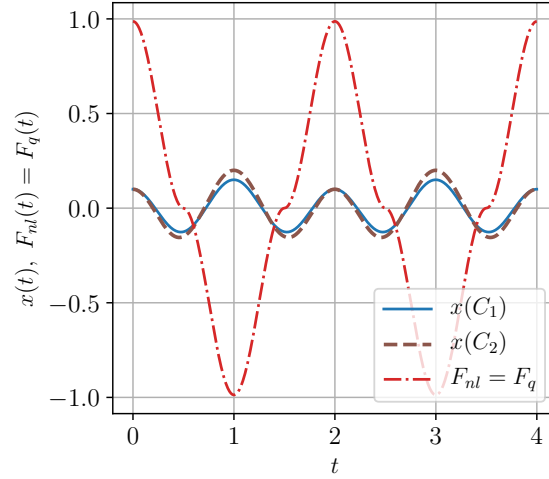


Figura 4.12: Deslocamento de um sistema massa, mola e amortecedor considerando Força de Amortecimento Quadrático e para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,1$, $x_s(t) = A\sin(\omega t)$, $C_1 = 10$ e $C_2 = 20$.

Na Fig. 4.13, observa-se o sentido de aceleração não sofre uma variação brusca como ocorre na força de atrito de Coulomb. Conforme visto no Capítulo 1, a força de amortecimento quadrático possui instantes de tempo onde ela permanece nula, mais precisamente quando $F_{nl} > 0 \rightarrow F_{nl} < 0$ e vice-versa, onde o deslocamento atinge sua maior amplitude, a velocidade é nula e a aceleração atinge seu maior valor. Após este instante, inverte-se o sentido de movimento e assim sucessivamente em todos os instantes de tempo em que $F_{nl} = 0$.

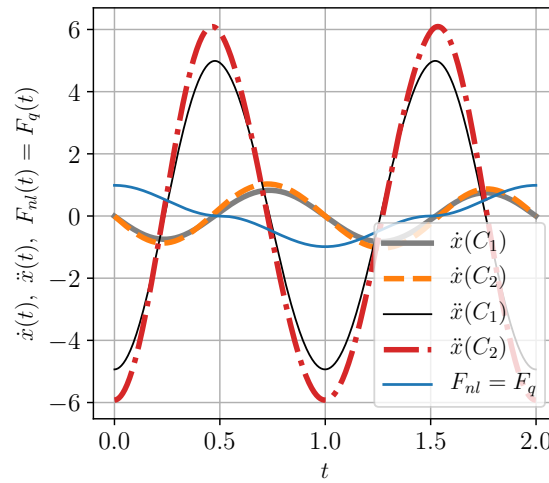


Figura 4.13: Velocidade e Aceleração de um sistema massa, mola e amortecedor considerando Força de Amortecimento Quadrático e para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,1$, $x_s(t) = A\sin(\omega t)$, $C_1 = 10$ e $C_2 = 20$.

A Fig. 4.14 apresenta o plano de fase. Nota-se dois valores distintos de deslocamento quando $\dot{x} = 0m/s$. Quando o sistema é amortecido por C_1 , o deslocamento é predominado pelo valor máximo de $x = 0,15m$ e um segundo valor de $x = 0,1m$. Quando se aumenta o coeficiente de amortecimento quadrático, i.e., $C_2 = 2C_1$, tem-se que o valor secundário do deslocamento é incrementado em 25% do valor regido por C_1 . O valor primário do deslocamento permanece constante em um dado instante de tempo. Para $x(t) < 0$, tem-se um único valor de deslocamento quando $\dot{x} = 0m/s$, o qual tem um decaimento conforme se aumenta C .

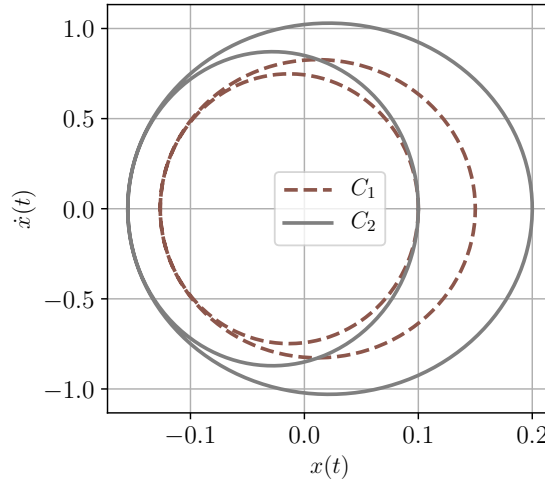


Figura 4.14: Plano fase considerando Força de Amortecimento Quadrático para $c = 0$, $f = 0,5$, $f_n = 1$, $A = 0,1$, $x_s(t) = A \sin(\omega t)$, $C_1 = 10$ e $C_2 = 20$.

4.3 Atuação Simultânea das Forças de Atrito de Coulomb e Amortecimento Quadrático

Considera-se novamente que $c = 0$ para avaliar o comportamento do sistema quando varia-se o valor de C e μ , sendo eles $C = [3, 1]$ e $\mu = [1, 2]$. A força de amortecimento agora é o resultado do somatório da força de amortecimento quadrático e de atrito de Coulomb. Portanto, na Fig. 4.15, nota-se que o deslocamento é zero quando $C > \mu$ e $t = 1s$, e quando $C < \mu$, para o mesmo instante de tempo, o deslocamento é mínimo e negativo de $x = -0,1m$. Observa-se que em $t = 0,5s$, $t = 1s$ e $t = 1,5s$ ocorre a transição de deslocamento positivo para negativo, uma vez que nestes pontos a velocidade $\dot{x}$ é zero e ocorre a variação da aceleração $\ddot{x}$.

O comportamento da velocidade, evidenciado na Fig. 4.16, é caracterizado pelo fator quadrático da força de amortecimento quadrática e a função $\text{sign}(\dot{x})$, presente nas duas forças. Observa-se que $\dot{x} = 0m/s$ em intervalos de tempo onde $\Delta t = 0,25s$, sendo $t_0 = 0s$. Quando $C < \mu$, tem-se que a velocidade permanece negativa, caracterizado pelo movimento retrógrado, na primeira metade do intervalo de tempo, i.e. $\Delta = 1s$ e permanece positiva na outra metade, caracterizando um movimento progressivo. Quando $C > \mu$, a velocidade apresenta um movimento retrógrado no intervalo de tempo de $0,0s$ à $0,5s$ e de $1,0s$ à $1,5s$, e um movimento progressivo de $0,5s$ à $1,0s$ e de $1,5s$ à $2,0s$.

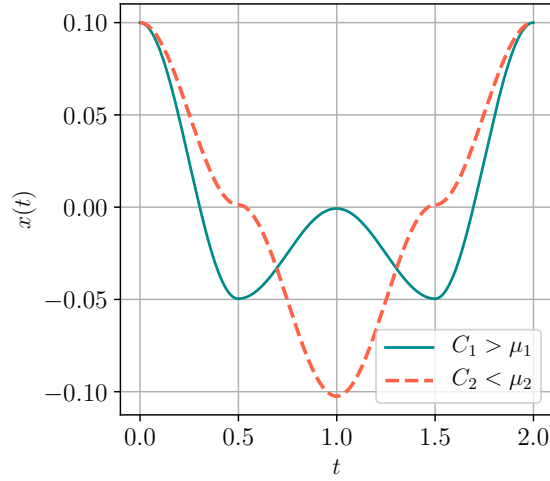


Figura 4.15: Deslocamento considerando Força de Amortecimento Quadrático e Força de Atrito de Coulomb para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,02$ e $x_s(t) = A\sin(\omega t)$.

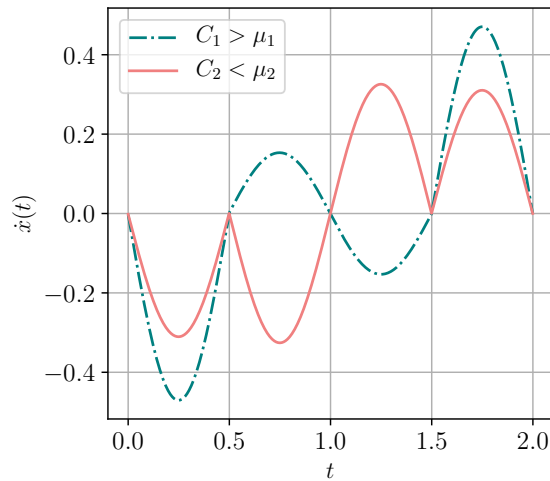


Figura 4.16: Velocidade considerando Força de Amortecimento Quadrático e Força de Atrito de Coulomb para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,02$ e $x_s(t) = A\sin(\omega t)$.

Da Fig. 4.17, verifica-se que a amplitude da aceleração é maior quando $C > \mu$ e apresenta um valor mínimo de $-1m/s^2$ quando $t = 1s$. Quando $C < \mu$, verifica-se que a aceleração apresenta um pico de máximo de $2m/s^2$ para $t = 1s$. A semelhança entre as duas acelerações consiste no intervalo de tempo de $0,5s$ à $1,5s$, onde caracteriza-se o comportamento referente ao amortecimento quadrático. Nas extremidades do intervalo de tempo, observa-se que há a predominância da aceleração resultante do atrito de Coulomb, uma vez que a ordem da grandeza é relativamente maior que os coeficientes de amortecimento quadrático. Na Fig. 4.18 (a) tem-se $t = 0,5s$ à $t = 1,0s$ um movimento progressivo ($\dot{x} > 0$) e acelerado ($\dot{x} > 0$ e $\ddot{x} > 0$) na primeira metade do intervalo e depois ocorre a mudança para progressivo e retardado ($\dot{x} > 0$ e $\ddot{x} < 0$). Na Fig. 4.18 (b) tem-se $t = 0,5s$ à $t = 1,0s$ um movimento retrógrado ($\dot{x} < 0$) e acelerado ($\dot{x} < 0$ e $\ddot{x} < 0$) na primeira metade do intervalo e depois ocorre a mudança para retrógrado e retardado ($\dot{x} < 0$ e $\ddot{x} > 0$).

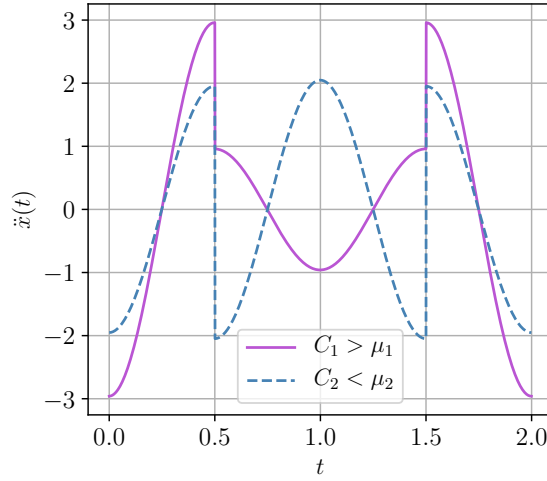
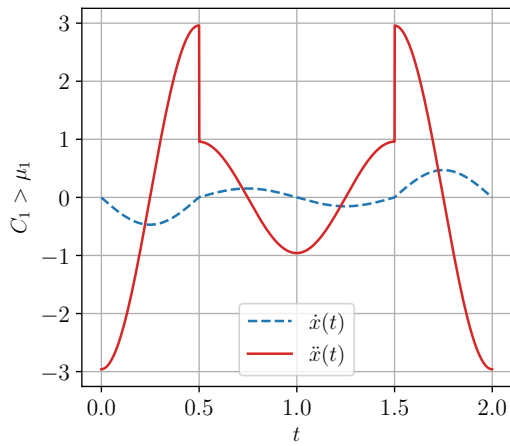
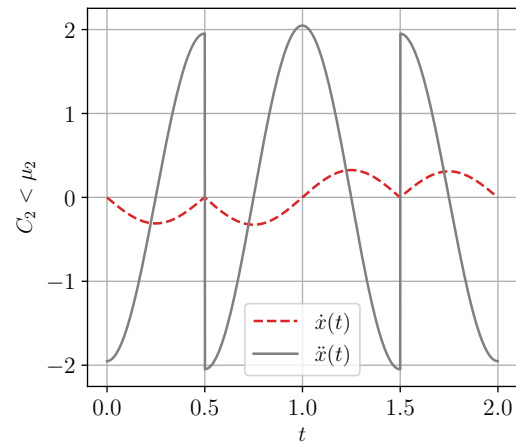


Figura 4.17: Aceleração considerando Força de Amortecimento Quadrático e Força de Atrito de Coulomb para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,02$ e $x_s(t) = A\sin(\omega t)$.



(a) $C_1 > \mu_1$



(b) $C_2 < \mu_2$

Figura 4.18: Aceleração e velocidade considerando Força de Amortecimento Quadrático e Força de Atrito de Coulomb para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,02$ e $x_s(t) = A\sin(\omega t)$.

Ainda na Fig. 4.18 (a) tem-se $t = 1,0s$ à $t = 1,5s$ um movimento retrógrado ($\dot{x} < 0$) e acelerado ($\dot{x} < 0$ e $\ddot{x} < 0$) na primeira metade do intervalo e depois ocorre a mudança para retrógrado e retardado ($\dot{x} < 0$ e $\ddot{x} > 0$). Na Fig. 4.18 (b) tem-se $t = 1,0s$ à $t = 1,5s$ um movimento progressivo ($\dot{x} > 0$) e acelerado ($\dot{x} > 0$ e $\ddot{x} > 0$) na primeira metade do intervalo e depois ocorre a mudança para progressivo e retardado ($\dot{x} > 0$ e $\ddot{x} < 0$). Da Fig. 4.19, a qual apresenta a curva de histerese, é possível observar que para $C < \mu$, a força de amortecimento varia entre 2 e -2 ocorrendo sua inversão para $x(t) = 0m$. Quando $C > \mu$, a força de amortecimento varia entre 1 e -1 ocorrendo sua inversão para $x(t) = -0,05m$. Em ambas as condições avalia-se que o atrito de Coulomb é predominante no resultado da atuação simultânea deste em somatório com a força de amortecimento quadrático.

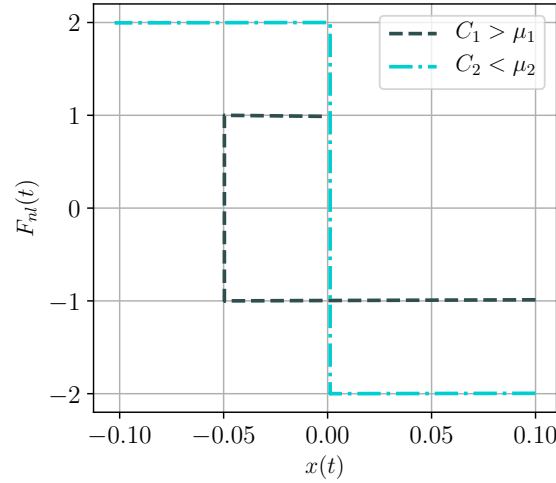


Figura 4.19: Curva de Histerese considerando Força de Amortecimento Quadrático e Força de Atrito de Coulomb para $c = 0$, $f = 0,5Hz$, $f_n = 1Hz$, $A = 0,02$ e $x_s(t) = A\sin(\omega t)$.

4.4 Resposta do sistema aplicando forças internas distintas

Na presente seção avalia-se a resposta para 3 diferentes forças internas.

4.4.1 Determinação das forças internas a serem aplicadas no sistema

A Fig. 4.20 apresenta a força de amortecimento quadrático para C_1 , $f = 1$, $A = 0,01$ e diferentes valores de $x(t)$, sendo eles $x_1(t) = A_1\sin(\omega_1 t) + A_2\sin(\omega_2 t) + A_3\sin(\omega_3 t)$, $x_2(t) = A\sin(\omega t)$ e um sinal senoidal com presença de ruídos, representado por $x_3(t)$. Tem-se que $C_1 = 10$, $A = 0,01$, $A_2 = 0,03$, $A_3 = 0,01$, $f_1 = 0,5Hz$, $f_2 = 0,7Hz$ e $f_3 = 0,9Hz$. A Fig. 4.21 apresenta o espectro desta força em função da frequência.

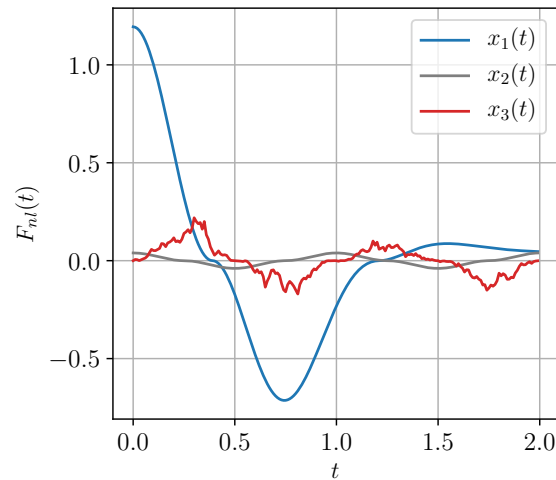
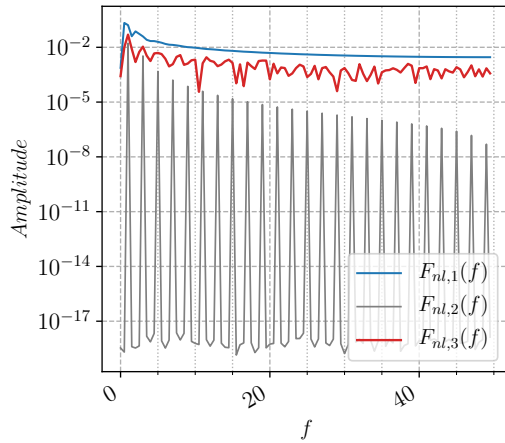
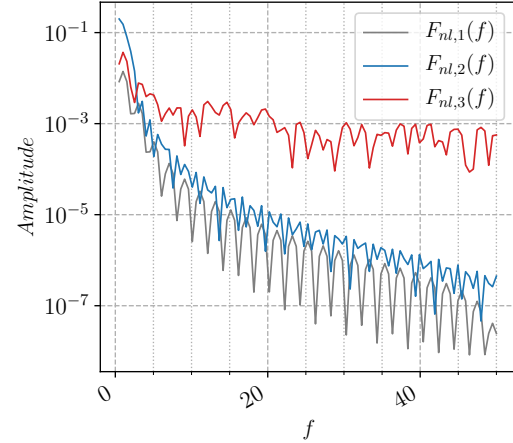


Figura 4.20: Força de Amortecimento Quadrático para C_1 e diferentes sinais.



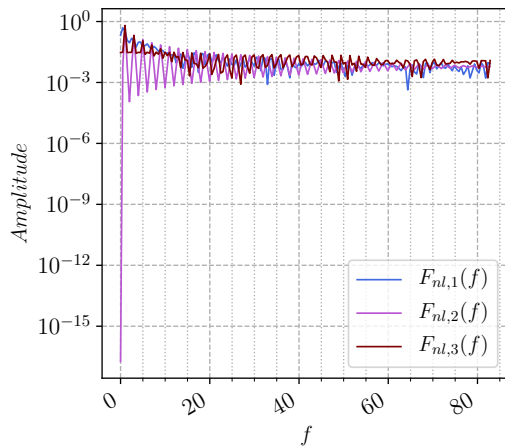
(a) Sem o método de janelamento



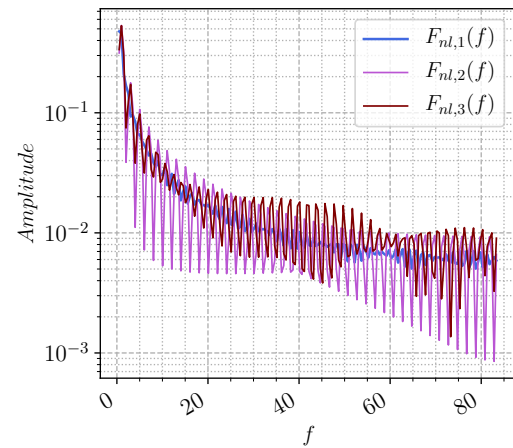
(b) Com o método de janelamento

Figura 4.21: Espectro da Força de Amortecimento Quadrático sem e com o método de janelamento.

Tem-se da Fig. 4.21 que o espectro da força de amortecimento quadrático decai conforme ocorre o acréscimo da frequência. Tem-se um comportamento similar para $F_{nl,1}(f)$ e $F_{nl,2}(f)$ e um decaimento menos acentuado para $F_{nl,3}(f)$. Enquanto $f < 10Hz$, verifica-se que $F_{nl,1}(f) > F_{nl,3}(f)$, porém, para frequência maiores, esta função se inverte. Como a força de atrito de Coulomb assemelha-se à um pulso quadrado no domínio do tempo, considera-se que $\mu_1 = 1$ para melhor avaliar o comportamento da força de atrito de Coulomb sob diferentes aspectos de forças internas.



(a) Sem o método de janelamento



(b) Com o método de janelamento

Figura 4.22: Espectro da Força de Atrito de Coulomb sem e com o método de janelamento.

Tem-se da Fig. 4.22 que o espectro da força de atrito de Coulomb decai conforme ocorre o acréscimo da frequência. Tem-se um comportamento similar entre $F_{nl,1}(f)$, $F_{nl,2}(f)$ e $F_{nl,3}(f)$, sendo a amplitude de $F_{nl,2}$ maior que os demais espectros. A Fig. 4.23 apresenta o correspondente espectro de frequências do sinal do deslocamento. O decaimento das amplitudes pico

ao longo do tempo indica a presença de amortecimento no sistema c . A máxima amplitude no espectro de frequências ocorre em 1 Hz que é a frequência natural do sistema. Durante o intervalo de 0 à 50 Hz ocorrem picos de amplitudes significativamente menores, o que implica que o sistema possui apenas um grau de liberdade. Enquanto $f < 20Hz$ tem-se que a ordem de amplitude mantém-se como $x_1(f) < x_2(f) < x_3(f)$. Para $20Hz < f < 50Hz$ ocorre a inversão destes valores, sendo agora $x_2(f) > x_1(f) > x_3(f)$. O sinal aleatório $x_3(t)$ apresenta atenuações em intervalos de frequência Δf .

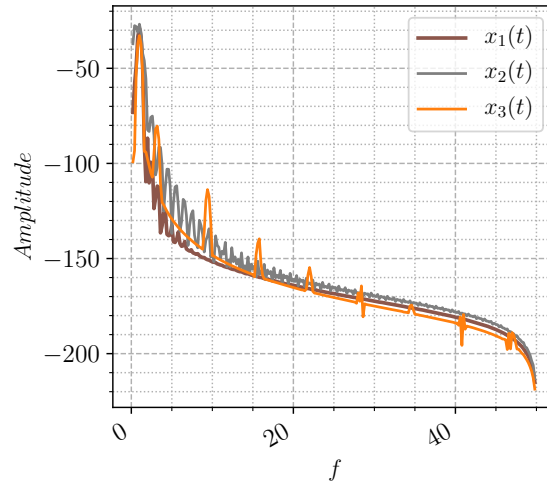


Figura 4.23: Espectro do deslocamento em função da frequência considerando Força de Amortecimento Quadrático para C_1 , $c = 0,5$ e $f_n = 0,5Hz$.

A Fig. 4.24 apresenta o correspondente espectro de frequências do sinal do deslocamento na direção de x . O decaimento das amplitudes não é tão nítido como seria em um sistema sob a atuação da força de amortecimento quadrática.

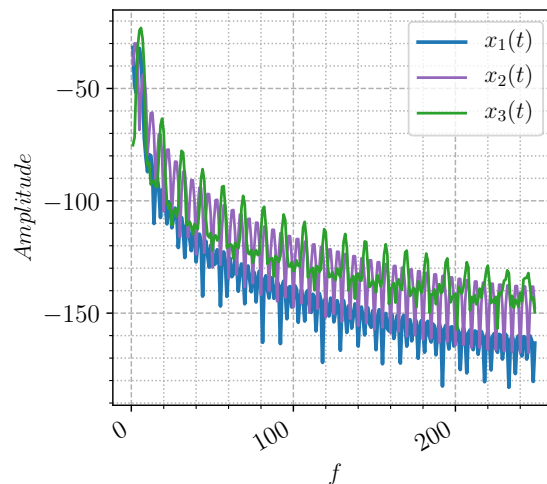


Figura 4.24: Espectro do deslocamento em função da frequência considerando Força de Atrito de Coulomb para C_1 , $c = 0,5$ e $f_n = 0,5Hz$.

4.5 Resposta do Sistema Aplicando Forças Externas Distintas

Considerando que F_{ext} , ou u_c , é uma força externa atuante sobre o sistema, agora avalia-se a resposta para 3 diferentes forças externas.

4.5.1 Determinação das forças externas a serem aplicadas no sistema

A Fig. 4.25 representa a força externa de origem senoidal e a Fig. 4.26 representa a de origem randômica, e ambas serão aplicadas no sistema. Esta seção apresenta a força de amortecimento quadrático para C_1 , $f = 1,5$, $A = 8$ e diferentes valores de $u_c(t)$, sendo eles $u_{c,1}(t) = A\sin(\omega t)$, $u_{c,2}(t) = A_1\sin(\omega_1 t) + A_2\sin(\omega_2 t) + A_3\sin(\omega_3 t)$, e um sinal randômico $u_{c,3}$ com $\mu = 2$ e $\sigma = 5$. Tem-se que $C_1 = 2$, $A = 6$, $A_2 = 4$, $A_3 = 8$, $f_1 = 0,3$, $f_2 = 0,5$ e $f_3 = 0,7$. Observa-se que para instantes de tempo, tais que $t > 8s$, a força externa é nula para melhor avaliar o impacto desta variação no deslocamento do sistema. Considera-se que $x_0 = 0m$ e $\dot{x}_0 = 0,5m/s$.

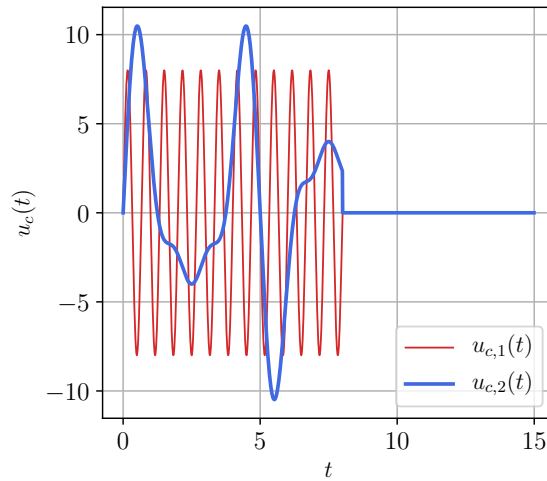


Figura 4.25: Forças externas apresentadas, sendo $u_{c,1} = A\sin(\omega t)$ e $u_{c,2} = A_1\sin(\omega_1 t) + A_2\sin(\omega_2 t) + A_3\sin(\omega_3 t)$.

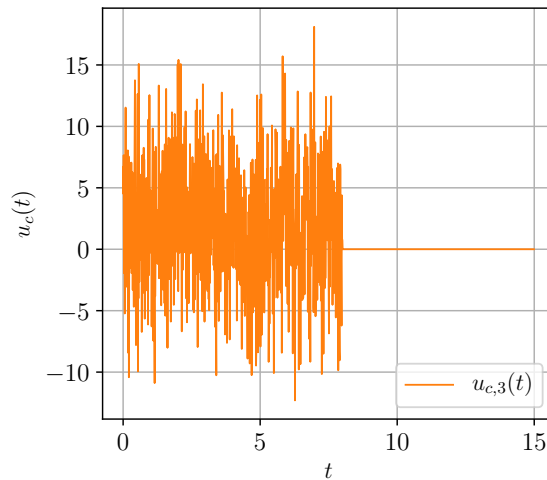
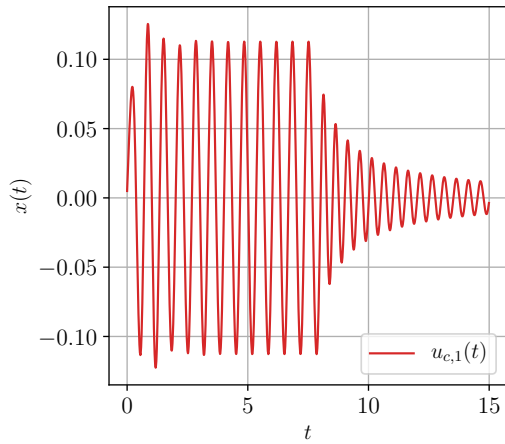
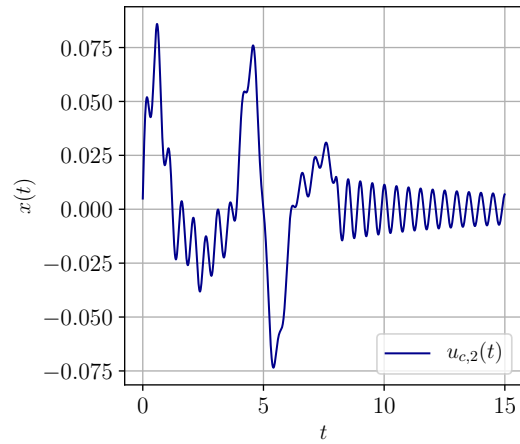


Figura 4.26: Força externa apresentada, sendo $u_{c,3} = N(\mu, \sigma^2)$.

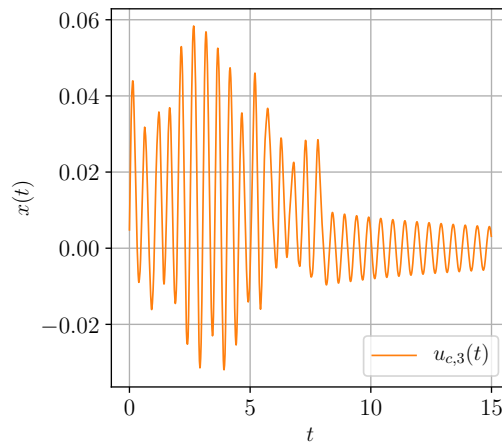
Na Fig. 4.27 (a) tem-se que o deslocamento do sistema apresenta um valor máximo em $x(t = 1) = 0,13m$ e posteriormente, permanece constante até $t = 8s$, quando a força externa senoidal é removida e o sinal decai exponencialmente. Na Fig. 4.27 (b) tem-se que o deslocamento do sistema apresenta um valor máximo acima de $x = 0,075m$ e mínimo de $x = -0,075m$. Na Fig. 4.27 (c) tem-se que o sistema atenua o comportamento randômico da força externa.



(a) $u_{c,1}(t) = A \sin(\omega t)$



(b) $u_{c,2}(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t) + A_3 \sin(\omega_3 t)$



(c) $u_{c,3} = N(\mu, \sigma^2)$

Figura 4.27: Deslocamento do sistema considerando Força de Amortecimento Quadrático, sendo $u_{c,1} = A \sin(\omega t)$, $u_{c,2} = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t) + A_3 \sin(\omega_3 t)$ e $u_{c,3} = \text{random.gauss}(\mu, \sigma)$.

Na Fig. 4.28 verifica-se que todos os sinais convergem para $\dot{x} = 0$ e $x = 0$, sendo o deslocamento resultante da força externa senoidal 1 $u_{c,1}$ aquele de maior amplitude em torno de $x = \pm 0,1$ e portanto, o sinal que apresenta um decaimento menos acentuado. Observa-se em valores que o deslocamento em $t = 15s$ representa 20% do deslocamento máximo em todos os casos apresentados, ou seja, $\frac{\min(x(t))}{\max(x(t))} = 0,2$. A Fig. 4.29 ilustra um comportamento semelhante ao que foi apresentado no Capítulo 3 Seção 3.1, ou seja, nos pontos em que $x(t)$ é

máximo e mínimo, a força de amortecimento quadrático é zero, atingindo seu valor máximo quando $x(t) = 0$.

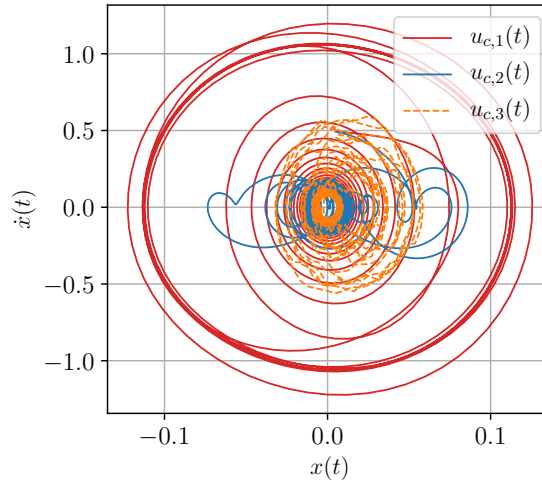


Figura 4.28: Plano fase sob Força de Amortecimento Quadrático considerando forças externas senoidais e randômica.

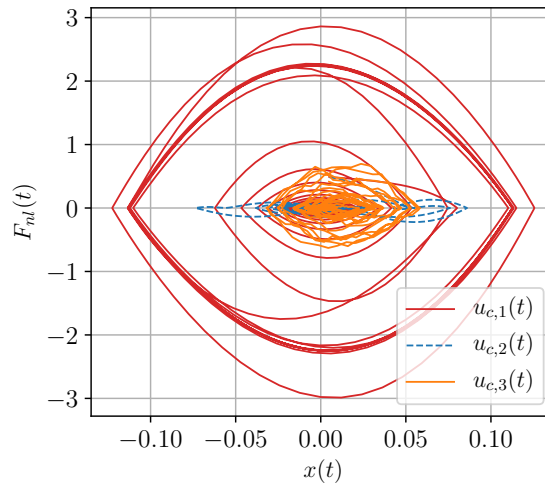


Figura 4.29: Curva de histerese da força de amortecimento quadrática considerando forças externas senoidais e randômica.

4.6 Sistema de Um Grau de Liberdade Contendo Elemento de Liga com Memória de Forma

Diferentes condições para as propriedades da liga com memória de forma estão dispostas na Tab. 4.1. Os modelos escolhidos da literatura são representativos da liga metálica de níquel e titânio. Há também a variação do tamanho do ciclo de histerese, constantes de transformação, temperaturas de transformação e tensões críticas. O ciclo de [Savi \(2008\)](#) é de maior área que o de [Aguiar \(2013\)](#), porém sua transformação de fase de $1 \rightarrow 2$ não é retilínea. Para [Lagoudas](#)

& Khan (2001), as tensões iniciais são nulas, enquanto que para os demais modelos, tem-se valores representativos. As constantes de transformação de austenita e martensita são iguais para o modelo de Lagoudas e para o modelo de Savi, enquanto que para o modelo de Aguiar estes valores diferem. A transformação residual limite é de 7%.

Tabela 4.1: Propriedades da liga com memória de forma de acordo com as referências encontradas.

Referência / Parâmetro	Lagoudas	Aguiar	Savi	Unidade
Liga	NiTi	NiTi	NiTi	-
M_f	274	302	282	K
M_s	292	315	290	K
A_s	296	316	298	K
A_f	315	331	303	K
C_A^*	7	6	5,6	MPa.K ⁻¹
C_M^*	7	4	5,6	MPa.K ⁻¹
σ_s^{min*}	0	100	100	MPa
σ_f^{min*}	0	170	575	MPa
ε_L^*	5	6,7	7	%
D_M^*	30	29,9	22	GPa
D_A^*	70	37,7	46	GPa

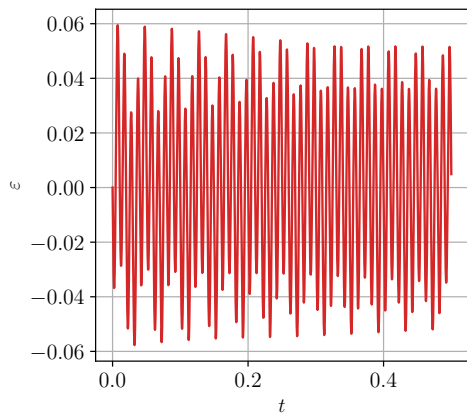
Conhecidos os modelos da literatura, as propriedades do sistema são expostas na Tab. 4.2, os quais foram modificados em 3 situações a partir do modelo de Lagoudas, encontrado na referência Lagoudas & Khan (2001). Os parâmetros originais se encontram na Tab. 3.2.

Tabela 4.2: Propriedades da liga com memória de forma conforme os casos analisados.

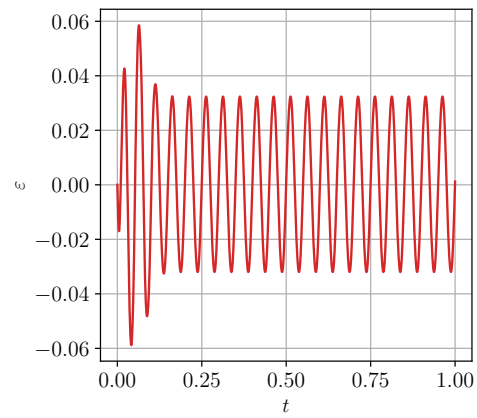
Parâmetros de Projeto	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
$m[kg]$	50	50	50	50
$f_n[Hz]$	2	2	5	5
$f[Hz]$	100	20	10	10
$r[m]$	0,01	0,01	0,001	0,001
$L[m]$	1	1	0,1	0,1
$f_n[Hz]$	2	2	5	5
$T[K]$	315	315	331	315
$X_0[m]$	0	0	0,001	0,001
$Y_0[m]$	0,04	0,05	0,0001	0,0001
ϵ_{min}	0,059	0,058	0,010	0,01
ϵ_{max}	-0,058	-0,059	-0,009	-0,008

O caso 3 difere-se dos demais por usar os parâmetros propostos por Aguiar (2013), ou seja, as temperaturas críticas de transformação, constantes de transformação, deformação residual e módulos de elasticidade diferem-se do modelo proposto por Lagoudas & Khan (2001). Para

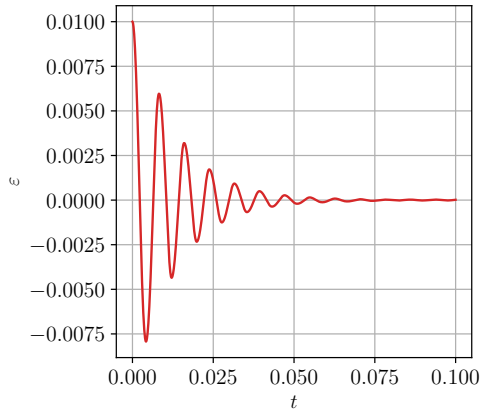
todos os casos apresentados a massa estrutural é a mesma, há uma redução do raio e do comprimento da barra estrutural da liga com memória de forma, e também uma redução da frequência de excitação. Da Fig. 4.30, pode-se avaliar que mesmo para altas frequências de excitação, como $f = 100Hz$ e $f = 20Hz$, a tendência é que a deformação se reduza conforme a constante de tempo aumente. No caso 1 esta redução é pouco expressiva, e no caso 2 esta atenuação tende a ser zero a partir de $t = 0,25s$. Com a redução dos parâmetros estruturais, os casos 3 e 4 mostram que a deformação apresenta um comportamento similar a um sistema criticamente amortecido ($\xi = 1$) e que $\varepsilon \rightarrow 0$. Entre o caso 3 e caso 4, a diferença entre as propriedades da liga com memória de forma, resulta em um decaimento mais acentuado quando $T = 315K$, fazendo-se com que a deformação seja zero em torno de $t = 0,025s$ e seja $t = 0,050s$ para $T = 331K$.



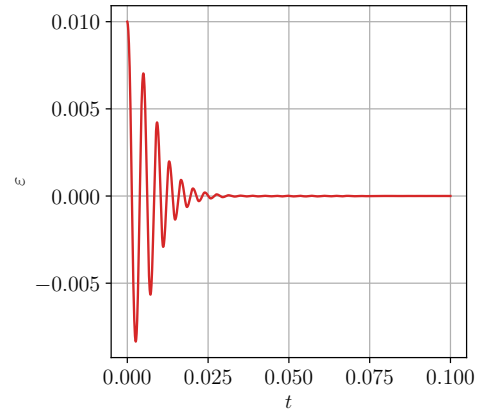
(a) Caso 1



(b) Caso 2



(c) Caso 3



(d) Caso 4

Figura 4.30: Correlação do histórico de deformação-tempo para condição adiabáticas e isotérmicas considerando cinética de transformação pelo método Tanaka e Nagaki.

Na Fig. 4.31 tem-se que a força da barra de liga com memória de forma possui um comportamento geral similar à sua deformação, uma vez que F_{lmf} é diretamente proporcional à ε e ε^t . Para o caso 1 tem-se a atuação de uma força, tal que $F_{lmf} < 10^4$, e no caso 2, com a redução da frequência de excitação, tem-se $F_{lmf} < 75.10^3$. Em comparação com o caso 3, o caso 4

resultou em uma força com amplitude próxima de $F_{lmf} = 75.10^3$, para que a deformação fosse reduzida em um intervalo de tempo menor, i.e., $t_{4(\varepsilon \rightarrow 0)} = t_{3(\varepsilon \rightarrow 0)}/2$, evidenciando-se que o ciclo de histerese para o modelo de Aguiar (2013) é menor em área que o modelo de Lagoudas & Khan (2001), e consequentemente dissipa menor quantidade de energia.

Nos casos 2, 3 e 4 a força apresenta uma brusca variação associada à transição de movimento entre compressão e tração da barra, tal que $\Delta\varepsilon > 0 \rightarrow \Delta\varepsilon < 0$. No caso 3 a magnitude desta variação é mais acentuada.

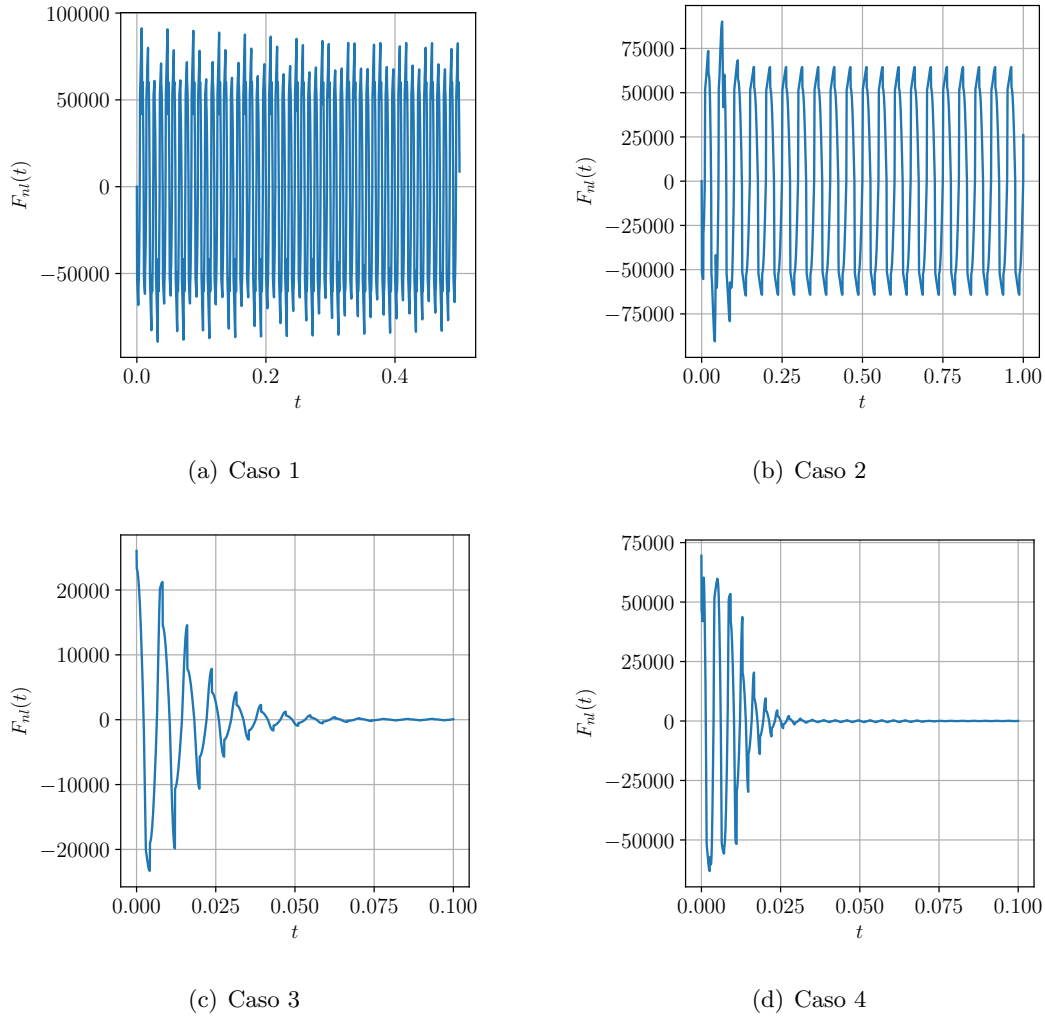
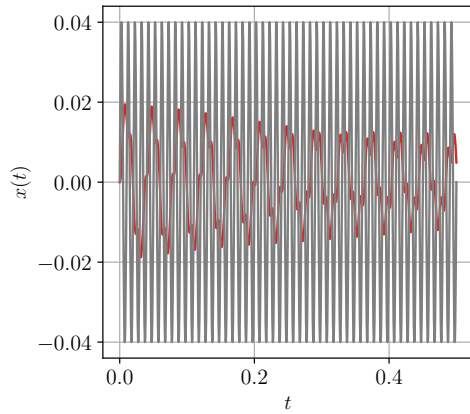


Figura 4.31: Correlação do histórico de força-tempo para condição adiabáticas e isotérmicas considerando cinética de transformação pelo método Tanaka e Nagaki.

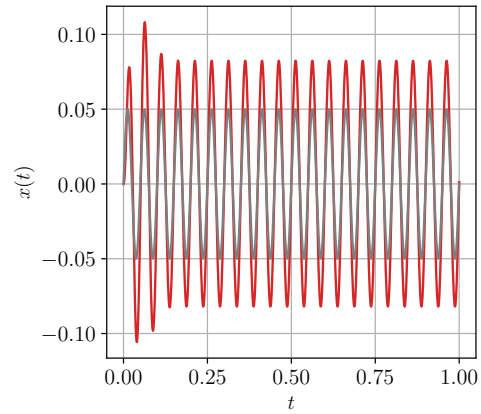
Na Fig. 4.32 tem-se os resultados de deslocamento $x(t)$ do sistema-massa-mola depois que este recebe uma excitação externa senoidal $y(t)$. O caso 1 resulta em decaimento do deslocamento do sistema, de tal forma que para um instante $t = 0s$ tem-se uma amplitude de $x = 0,02m$ e para $t = 0,4s$ tem-se $x = 0,01m$. Para um frequência de excitação menor de $f = 20Hz$, tem-se que o decaimento de $x(t)$ permanece constante a partir de um dado instante de tempo $t = 0,25s$ com uma amplitude de $x(t > 0,25) = 0,08m$. Analisando os resultados numéricos obtidos pode-se concluir a respeito da influência significativa da frequência de excitação no carregamento pseudo-elástico das ligas de memória de forma. Pois, mesmo para

baixas frequências próximas à frequência de ressonância do sistema, ainda assim observa-se uma boa atenuação do deslocamento da massa.

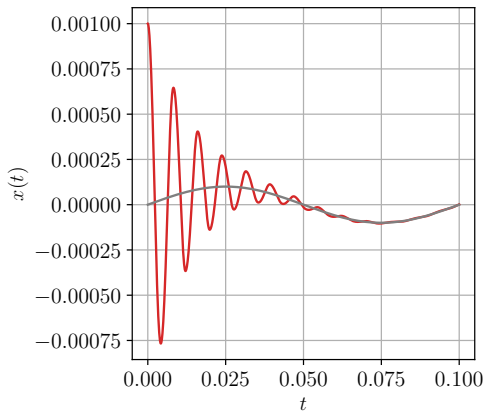
Com a redução dos parâmetro estruturais, os casos 3 e 4 apresentam que o deslocamento exibe um comportamento similar a um sistema criticamente amortecido. O sinal de $x(t)$ oscila com uma amplitude menor e frequência maior em torno do sinal $y(t)$. A diferença entre as propriedades da liga com memória de forma fazem com que haja um decaimento mais acentuado para $T = 315K$ (caso 4), uma vez que para $t = 0s$, $x(t = 0) = 0,001m$ e para $t = 0,25s$, $x(t = 0,25s) = y(t = 0,25s) = 0,0001m$. Enquanto que para $T = 331K$ (caso 3), tem-se que para $t = 0,75s$, $x(t = 0,75s) = y(t = 0,75s) = |0,0001|m$.



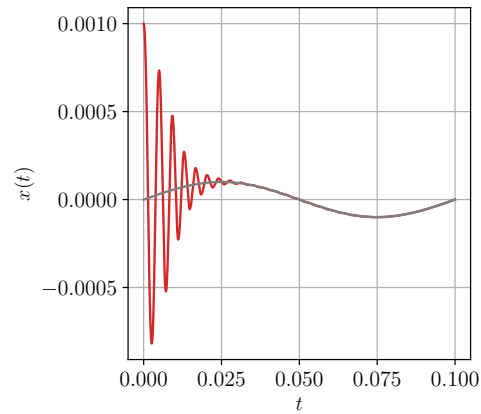
(a) Caso 1



(b) Caso 2



(c) Caso 3



(d) Caso 4

Figura 4.32: Correlação do histórico de deslocamento-tempo para condição adiabáticas e isotérmicas considerando cinética de transformação pelo método Tanaka e Nagaki. As linhas cinzas representam $y(t)$ e as vermelhas, $x(t)$.

Na Fig. 4.33 pode-se avaliar que a massa estrutural exerce influência significativa no sistema, uma vez que o sinal de deslocamento tende a apresentar uma taxa de decaimento menor em função do tempo, apesar da frequência de excitação ainda ser maior que no caso 1. Ainda assim, tem-se que o primeiro pico do deslocamento é de $x = 0,015m$, que é menor que o valor apresentado para o caso com massa estrutural de $m = 50kg$, o que pode ser atribuído à baixa

compressão e tração da barra devido ao alto nível de carga.

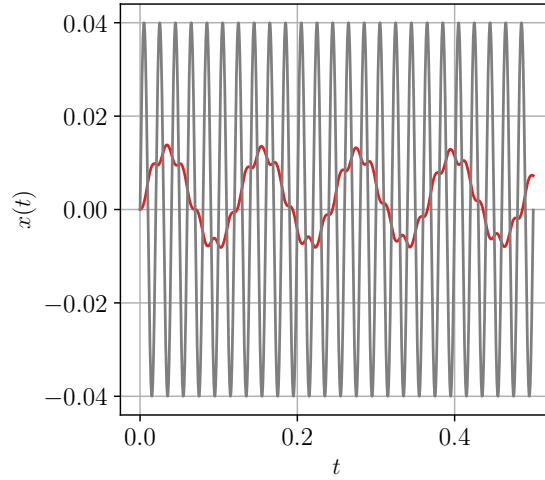


Figura 4.33: Correlação do histórico de deslocamento-tempo para condição adiabáticas e isotérmicas considerando cinética de transformação pelo método Tanaka e Nagaki para caso 2, considerando $f = 50Hz$ e $m = 500kg$. A linha vermelha de menor magnitude representa o deslocamento da massa, e a linha cinza de maior amplitude representa o deslocamento da base.

A seguir tem-se as curvas de força-deformação que representam o ciclo de histerese. Comparando os casos 1 e 2, o sistema que recebeu a maior frequência de excitação resultou em um ciclo de histerese com maiores magnitudes de tensões, sendo $|F_{nl}| = 10^5 N$, enquanto que o sistema que recebeu a menor frequência resultou em um ciclo com magnitudes de força em torno de $|F_{nl}| = 75.10^3 N$. Este aumento da magnitude é decorrente do aumento da amplitude de excitação, pois, sabe-se que maiores frequências de excitação induzem a barra a menores níveis de deformação, resultando em ciclo de histerese menor e assim, menor energia dissipada do sistema.

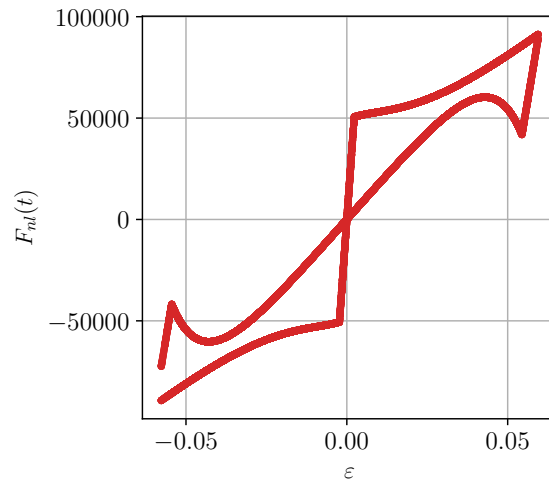


Figura 4.34: Correlação do histórico de força-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas considerando cinética de transformação pelo método Tanaka e Nagaki para caso 1.

Além disso, os resultados comprovam a influência significativa da amplitude de excitação, pois, quanto maior a amplitude de excitação, maior a quantidade de energia dissipada pela liga com memória de forma. No caso 1, a amplitude era de $Y_0 = 0,04m$, resultando em deformações induzidas em torno de 5% a 6%, enquanto que no caso 4, a amplitude era de $Y_0 = 0,005m$, resultando em deformações induzidas em torno de 0,8% a 0,9%.

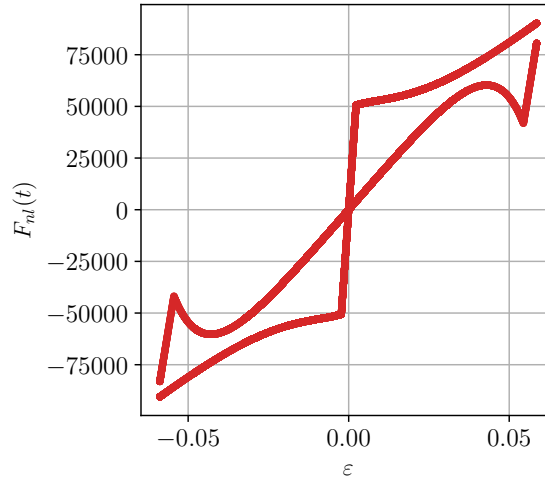


Figura 4.35: Correlação do histórico de força-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas considerando cinética de transformação pelo método Tanaka e Nagaki para caso 2.

Comparando os casos 3 e 4, nota-se uma redução do ciclo de histerese para o caso 3 ($T = 331K$). O aumento na temperatura de início da fase austenítica proposto por [Aguilar \(2013\)](#) leva a uma redução dos valores das tensões e deformações e, conseqüentemente, a uma menor dissipação de energia, uma vez que as condições de carregamento imposto no sistema são as mesmas para o caso 3 e caso 4.

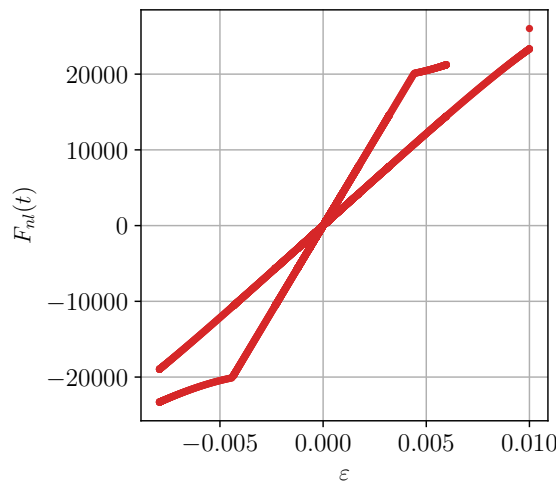


Figura 4.36: Correlação do histórico de força-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas considerando cinética de transformação pelo método Tanaka e Nagaki para caso 3.

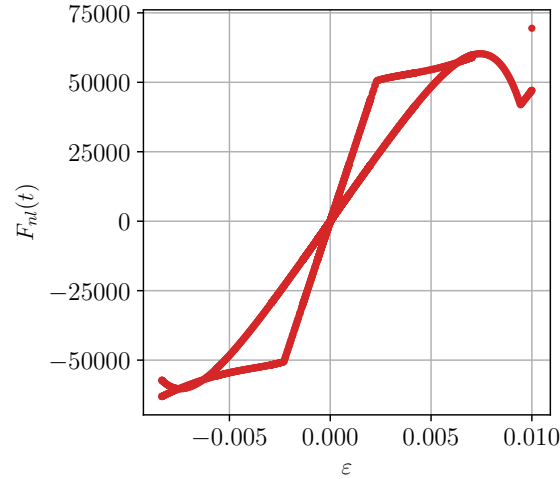
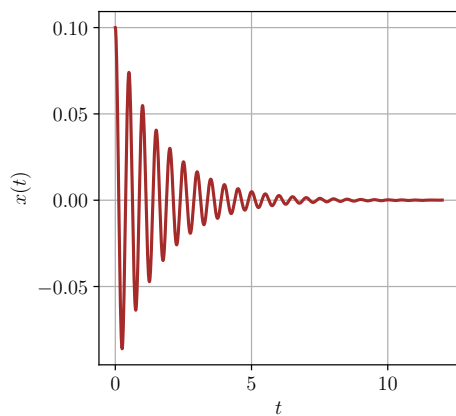


Figura 4.37: Correlação do histórico de força-deformação para condição adiabáticas e isotérmicas considerando cinética de transformação pelo método Tanaka e Nagaki para caso 4.

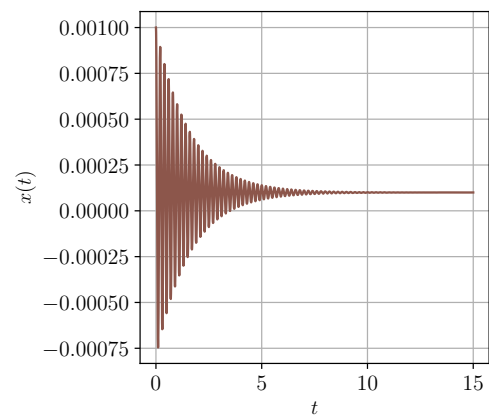
Esses resultados demonstram a eficiência do efeito pseudoelástico das ligas de memória de forma e seu potencial uso em sistemas mecânicos com o objetivo de se atenuar o seus níveis de vibração e ruído quando submetido a carregamentos mecânicos cíclicos. Foi observado que as ligas de memória de forma dependem fortemente da temperatura e da frequência de operação, o que faz com que a variação da resposta esteja associada à mudança desses parâmetros.

4.7 Comparação Entre Amortecimento do Sistema Massa-mola e com Liga com Memória de Forma

Considerando um sistema com massa de $m = 500kg$ e frequência natural de $f_n = 2Hz$, é necessário um amortecimento crítico de $c_c = 628,31Ns/m$. Supondo que a massa é deslocada a uma distância x abaixo de sua posição de equilíbrio, a força restauradora da mola $kx(t)$ e a força de amortecimento $c\dot{x}$ opõem-se a este movimento. O amortecedor apresenta um coeficiente de amortecimento viscoso c que pode ser menor, maior ou igual ao valor de c_c . A Fig. 4.38 (a) apresenta o deslocamento subamortecido ($c = 600Ns/m$) do sistema composto por massa-mola-amortecedor para um deslocamento inicial de $x(t = 0) = 0,1m$. A Fig. 4.38 (b) representa o deslocamento do sistema composto por massa, de deslocamento $x(t = 0) = 0,001m$, e base, com deslocamento $x_0(t = 0) = 0,0001m$. Comparando os resultados entre amortecedores tipo massa-mola-amortecedor e massa-mola-barra, evidencia-se que o deslocamento do sistema é amortecido em menor intervalo de tempo quando se usa a liga com memória de forma. Além disso, a liga com memória de forma é aplicável para níveis maiores de frequências de operação e são capazes de amortecer massas oscilantes de até $500kg$.



(a) Massa-mola-amortecedor



(b) Massa-mola-barra

Figura 4.38: Correlação do histórico de deslocamento-tempo considerando sistema massa-mola-amortecedor.

Conclusão

Este trabalho de graduação apresenta o estudo de três estratégias de dissipação de vibrações para controle passivo. São apresentados resultados de simulações computacionais em ambiente Python, considerando três modelos distintos de força dissipativa, sendo, amortecimento quadrático, amortecimento de atrito de Coulomb e amortecimento por liga com memória de forma. Os resultados obtidos pelas simulações numéricas permitem avaliar os procedimentos de modelagem numérico-computacional de sistemas dinâmicos, e também a potencialidade do uso de cada tipo de dissipador de energia.

O atrito de Coulomb apresenta uma magnitude de força constante em intervalos de tempo dependente do coeficiente de atrito e da função sinal. O decaimento do deslocamento do sistema ocorre para incrementos do coeficiente de atrito, uma vez que a amplitude da força também aumenta. A aceleração do sistema apresenta uma variação brusca em seu ponto máximo, que é associada à transição desta força. Quanto maior o valor do coeficiente, maior é a amplitude deste decaimento da aceleração para um dado instante de tempo.

O amortecimento quadrático produz uma força proporcional ao produto do quadrado da velocidade relativa entre as duas extremidades do amortecedor com o coeficiente de amortecimento quadrático e a função sinal. A força é nula quando o sistema atinge o seu deslocamento máximo, e a magnitude da força máxima é ampliada para maiores valores do coeficiente de amortecimento quadrático. Nota-se que há uma dependência do coeficiente de amortecimento quadrático com o deslocamento relativo em regime permanente e com a frequência de excitação.

Na ocorrência simultânea das duas forças de amortecimento, o comportamento predominantemente quadrático ocorre entre dois picos consecutivos da aceleração, enquanto que o atrito de Coulomb atua nas extremidades do intervalo de tempo em análise. No comportamento dinâmico é nítido que a força de amortecimento comporta-se caracteristicamente como um sistema amortecido por atrito de Coulomb quando o fator de atrito é muito elevado (entre valores de 1 e 2) .

Através da análise do histórico de deslocamento no tempo, o sistema com amortecimento de atrito de Coulomb atinge o regime permanente em menor intervalo de tempo, uma vez que a força do amortecedor depende somente do coeficiente de atrito, que pode variar entre 0,05 (sendo cinético) e 1 (sendo estático) ([Young & Freedman 2015](#)). O sistema com amortecimento quadrático é benéfico para velocidades relativas maiores. Desta forma, dependendo da faixa

de frequência escolhida, a força do amortecedor torna-se quadraticamente mais alta do que usando-se atrito de Coulomb.

Para o sistema de um grau de liberdade com barra de liga com memória de forma, considera-se os parâmetros estruturais do modelo linearizado e a ciclo completo de transformação de fase simétrico. O modelo com cinética de transformação pelo método de Tanaka e Nagaki é caracterizado pelas equações exponenciais de transformação entre austenita e martensita e vice-versa. Observa-se que a correlação do histórico de tensão-deformação para condição adiabática e isotérmica representa uma região de carregamento, uma de descarregamento e duas de transformação de fase, que juntas caracterizam o ciclo completo.

A análise das deformações do sistema permite avaliar que a redução dos parâmetros estruturais resulta em um sistema mais amortecido, de tal forma que a deformação da barra seja nula. Por outro lado, o aumento da temperatura de operação atrasa o decaimento de deformação do sistema. Entre os casos estudados, o ciclo de histerese do modelo de Aguiar é menor em área que o modelo de Lagoudas, e por isso, dissipa menor quantidade de energia.

Os resultados das simulações numéricas permitem concluir que há uma influência significativa da frequência de excitação do carregamento pseudoelástico das ligas de memória de forma, uma vez que maiores frequências de excitação induzem a barra a menores níveis de deformação resultando em um ciclo de histerese menor e assim, menor energia dissipada do sistema.

5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Os seguintes assuntos podem ser tema de pesquisa para continuidade deste trabalho:

- Estudo de sistemas sob atuação simultânea do amortecimento quadrático e ligas com memória de forma, posteriormente com atrito de Coulomb e ligas com memória de forma, objetivando a atingir a máxima atenuação das vibrações e ruídos mecânicos;
- Exploração da histerese pseudoelástica entre a barra e mola helicoidal (fios) contendo liga com memória de forma, levando em conta a variação de frequência e temperatura para desenvolver o dispositivo de amortecimento com maior capacidade de atenuar vibrações e ruídos mecânicos;
- Representação dos efeitos não lineares de transformação de fase da liga com memória de forma ao longo da seção transversal da barra ou mola;
- Representação do Método de Brinson para caso de assimetria entre tensão compressão do barra ou mola contendo liga com memória de forma utilizando os trabalhos de [de Sousa \(2016\)](#), [Poorasadion \(2014\)](#) e [Paiva & Savi \(2005\)](#) como referências.
- Projeto, construção e implementação do sistema de amortecimento otimizado utilizando duas ou mais combinações das forças dissipativas apresentadas;

Referências Bibliográficas

- Aguiar, R. A. A. (2001), Análise da redução de vibrações em sistemas mecânicos utilizando ligas com memória de forma, Master's thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).
- Aguiar, R. A. A. (2013), 'Shape memory alloy helical springs performance: modeling and experimental analysis', *Materials Science Forum* **758**, 147–156.
- Aguiar, R. A. A.; Savi, M. A. P. P. C. L. (2010), 'Experimental and numerical investigations of shape memory alloy helical springs', *Smart Materials and Structures* **19**(2), 025008.
- Aseka, E. H. (2008), Sistemas concentrado e distribuídos com amortecimento viscoelástico utilizando a base gerada pela resposta impulso, Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Baghani, M. ; Naghdabadi, R. . A. J. (2012), 'A semi-analytical study on helical springs made of shape memory polymer', *Smart Materials and Structures* **21**(4), 045014.
- Brinson, L. & Huang, M. (1996), 'Simplifications and comparisons of shape memory alloy constitutive models', *SAGE Publications* .
- Bucchi, F. (2014), 'A passive magneto-thermo-mechanical coupling actuated by sma springs and mr fluid', *International Journal of Structural Stability and Dynamics* **14**(8), 1440031.
- Buehler, W.J.; Wang, F. (1968), 'A summary of recent research on the nitinol alloys and their potential application in ocean engineering', *Ocean Engineering* **1**, 105–120.
- Carvalho, F. I. (2017), Estudo do comportamento aeroelástico de um sistema passivo de supressão de cargas de rajada, Master's thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Campo Montenegro - São José dos Campos - SP -Brasil.
- de Carvalho, A. L. A. (2014), Análise experimental da dinâmica não linear de um oscilador com memória de forma, Master's thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- de Oliveira, B. A. (2008), Desenvolvimento de um isolador de vibração pseudoelástico, Master's thesis, Universidade de Brasília.
- de Sousa, V. C. (2016), Efeitos de molas com memória de forma superelásticas no comportamento aeroelástico de uma seção típica: Aplicações em atenuação passiva de vibrações e coleta de energia, Master's thesis, Escola de Engenharia de São Carlos - Usp.

- Federico, M. (2008), Sviluppo di un banco de prova per lo studio del comportamento di un under-platform damper, Master's thesis, Politécnico de di Torino, Itália.
- Ferry, J. D. (1961), *Viscoelastic properties of polymers*.
- GAO, Xiuji; QIAO, R. & Brinson, L. C. (2007), 'Phase diagram kinetics for shape memory alloys: a robust finite element implementation', *Smart Materials and Structures* **16**(6), 2102.
- Ikuta, Koji; Tsukamoto, M. & Hirose, S. (1991), 'Mathematical model and experimental verification of shape memory alloy for designing micro actuator', *IEEE Micro Electro Mechanical Systems* pp. 103–108.
- Inman, D. (2001), *Engineering Vibration*, Prentice Hall.
URL: <https://books.google.com.br/books?id=bHleAQAAIAAJ>
- Kiefer, B.; Lagoudas, D. (2005), 'Magnetic field-induced martensitic variant reorientation in magnetic shape memory alloys', *Philosophical Magazine* **85**(33-35), 4289–4329.
- Lagoudas, Dimitris C.; Mayes, J. J. & Khan, M. M. (2001), 'Simplified shape memory alloy (sma) material model for vibration isolation', *Smart Structures and Materials* **4326**.
- Liang, C. & Rogers, A. (1997), 'Design of shape memory alloy springs with applications in vibration control', *Journal of intelligent Material Systems and Structures* **8**.
- Lima, A. F. R. (2015), Controle passivo de vibrações de sistemas não-lineares empregando ligas com memória de forma, Master's thesis, Universidade Federal de Uberlândia.
- Maesta, M. F. (2012), Controle nebuloso aplicado em asas adaptativas utilizando ligas de memória de forma, Master's thesis, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.
- Mahmoodi, P. (1969), 'Structural dampers', *Journal of the Structural Division* **95**, 1661–1672.
- Meng, H. (2013), 'Various shape memory effects of stimuli-responsive shape memory polymers', *Smart Materials and Structures* **22**(9), 093001.
- Neto, B. G. (2012), Modelagem por elementos finitos de sistemas dinâmicos combinando materiais viscoelásticos e materiais com memória de forma para o controle passivo de vibrações e ruído, Master's thesis, Universidade Federal de Uberlândia.
- Ogata, K. (2010), *Engenharia de Controle Moderno*, 5 edn, Pearson.
- Paiva, A. & Savi, M. A. (1999), Sobre os modelos constitutivos com cinética de transformação assumida para ligas com memória de forma, in 'Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica'.
- Paiva, A. & Savi, M. A. (2005), 'An overview of constitutive models for shape memory alloys', *Mathematical Problems in Engineering* **2006**, 1–30.
- Poorasadion, S. (2014), 'An improvement on the brinson model for shape memory alloys with application to two-dimensional beam element', *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **25**(15), 1905–1920.

- Popp, K. (2004), *Vibration damping by friction forces: Theory and applications*, Journal of Vibration and Control Editor.
- Rabinowicz, E. (1965), *Friction and wear of materials*, Willey.
- Rodriguez, F. A. M. (2014), Avaliação dinâmica de amortecedores por atrito seco para atenuar vibrações de um sistema vibratório, Master's thesis, Universidade Federal de Uberlândia.
- Savi, M. A. (2008), 'Tensile-compressive asymmetry influence on shape memory alloy system dynamics', *Chaos, Solitons & Fractals* **36**(4), 828–842.
- Tanaka, K. (1986), 'A thermomechanical sketch of shape memory effect: one-dimensional tensile behavior', *Res Mechanica* **2**(3), 59–72.
- Tawfik, M. & Ro, J. (2002), 'Thermal post-buckling and aeroelastic behaviour of shape memory alloy reinforced plates', *Smart Materials and Structures* **11**(22), 297–307.
- Thorby, D. (2008), *Structural Dynamics and Vibration in Practice: An Engineering Handbook*, Elsevier Science.
- Young & Freedman (2015), *Física 1*, 14 edn, Sears and Zemansky.
- Yun, C.Y.; Kim, D. K. S. J. (2006), 'Stability augmentation of helicopter rotor blades using passive damping of shape memory alloys', *International Journal of Aeronautical and Space Sciences* **7**(1), 137–147.

Apêndice A

Tensão durante a Transformação Direta e Reversa

A.1 Modelo simplificado para liga com memória de forma pseudo-elástica

Neste anexo são apresentadas as equações propostas por [Lagoudas & Khan \(2001\)](#) para a obtenção do modelo simplificado da curva de tensão-deformação da liga com memória de forma. A construção do modelo simplificado para a liga com memória de forma pseudo-elástica é baseada na utilização do diagrama de fase de tensão em função da temperatura para obter a resposta de tensão em função da deformação. Assumindo que a temperatura da SMA é constante e o processo é isotérmico e adiabático, utiliza-se a seguinte equação para determinar a tensão,

$$\sigma = C(T - T_x) \quad (\text{A.1})$$

sendo C a inclinação do limite de transformação, i.e., da linha reta que representa o carregamento e descarregamento e separa a austenita da martensita; T é a temperatura e T_x é a temperatura de transição zero para determinada transição.

Desta forma, a resposta pseudo-elástica do sistema em condições isotérmicas e adiabáticas pode ser calculada usando-se,

$$\sigma = E_x(\varepsilon - \varepsilon^t) \quad (\text{A.2})$$

onde E_x representa a rigidez elástica respectiva de cada fase, seja ela austenita, martensita ou uma mistura de ambas, ε é a tensão total aplicada e ε^t é a tensão de transformação. O diagrama de fase tensão-deformação é obtido através do cálculo da tensão e deformação correspondentes a cada fase, representadas na Tab.[A.1](#).

Tabela A.1: Determinação das constantes de transformação.

x	σ_x	ε_x
M_s	$C(T - M_{s0})$	$\frac{C(T - M_{s0})}{E_A}$
M_f	$C(T - M_{f0})$	$\Lambda + \frac{C(T - M_{f0})}{E_M}$
A_s	$C(T - A_{s0})$	$\Lambda + \frac{C(T - A_{s0})}{E_M}$
A_f	$C(T - A_{f0})$	$\frac{C(T - A_{f0})}{E_A}$

A primeira linha representa o início da transformação de austenita para martensita, a segunda o fim da transformação de austenita para martensita, a terceira o início da transformação reversa, i.e., de martensita para austenita e a quarta o fim da transformação reversa.

Apêndice B

Definição das Matrizes para a Equação do Movimento

Neste anexo são apresentadas as matrizes para um sistema com deslocamento de base $x_0(t)$. Para o sistema com amortecimento não linear e submetido à uma força externa, conforme ilustrado na Fig. 2.1, obtém-se,

$$m\ddot{x}(t) + c[\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)] + k[x(t) - x_0(t)] + F_{nl}(t) = u_c(t) \quad (\text{B.1})$$

lembrando que a base possui massa desprezível.

Utilizando a Segunda Lei de Newton, a equação do sistema é dada pela Eq. B.2.

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + c(\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)) + k(x(t) - x_0(t)) + F_{nl}(t) &= u_c(t) \\ m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) - kx_0(t) - c\dot{x}_0(t) + F_{nl}(t) &= u_c(t) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Aplicando a metodologia, obtém-se para o amortecimento quadrático:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x_1(t) \\ \dot{x}_0(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) &= -\frac{c(\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t))}{m} - \frac{k(x(t) - x_0(t))}{m} - \frac{F_{nl}(t)}{m} + \frac{u_c(t)}{m} \\ \dot{x}_2(t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Rearranjando:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{cx_1(t)}{m} + \frac{cx_2(t)}{m} - \frac{kx(t)}{m} + \frac{kx_0(t)}{m} - \frac{F_{nl}(t)}{m} + \frac{u_c(t)}{m} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_0(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} x(t) \\ x_1(t) \\ x_0(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} + \mathbf{B}_u F_{nl}(t) + \mathbf{B}_{uu} u_c(t) \quad (\text{B.5})$$

sendo as matrizes dadas por,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} & \frac{k}{m} & \frac{c}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{B}_{uu} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

A equação de saída na forma matricial é dada por,

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_0(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.8})$$