

UNESP
Universidade Estadual Paulista
“Júlio de Mesquita Filho”
Faculdade de Filosofia e Ciências – *Campus* de Marília

Dayene Ferreira dos Santos

Ferramentas articuladas e tecnologia:
um Experimento Didático Formativo sob a luz da Educação Matemática Realística

Marília
2024

Dayene Ferreira dos Santos

Ferramentas articuladas e tecnologia:

um Experimento Didático Formativo sob a luz da Educação Matemática Realística

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação como parte das exigências para a obtenção do título de Doutora em Educação pela Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista (UNESP), *Campus* de Marília.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Miguel.

Marília

2024

S237f Santos, Dayene Ferreira dos
Ferramentas articuladas e tecnologia : um Experimento Didático
Formativo sob a luz da Educação Matemática Realística / Dayene
Ferreira dos Santos. -- Marília, 2024
211 p. : tabs., fotos

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Faculdade de Filosofia e Ciências, Marília
Orientador: José Carlos Miguel

1. Matemática. 2. Educação. 3. Recursos didáticos. 4. Tecnologia. I.
Título.

Dayene Ferreira dos Santos

Ferramentas articuladas e tecnologia:

um Experimento Didático Formativo sob a luz da Educação Matemática Realística

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (Unesp), como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação.

Linha de pesquisa: Teoria e práticas pedagógicas.
Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Carlos Miguel
UNESP – Campus de Marília
Orientador

Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva
UFPR – Campus Curitiba

Prof. Dr. Wellington Pereira das Virgens
IFSP – Campus São Paulo

Prof. Dr. Harryson Júnio Lessa Gonçalves
UNESP – Campus Bauru

Prof. Dr. Gustavo Cunha de Araújo
UFNT – Campus Tocantinópolis e Araguaína

Marília, 30 de outubro de 2024.

*Aos meus amados pais; aos meus inestimáveis irmãos; ao meu eterno
amor mágico [!:]*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela força, sabedoria e perseverança concedidas ao longo desta jornada.

Aos meus pais, Izabel e Hélio, pelo amor incondicional, pelo apoio constante e por acreditarem em mim mesmo nos momentos mais difíceis. Vocês são a base de todas as minhas conquistas.

Aos meus irmãos, Henrique e Helton, pelo incentivo, companheirismo e pelas palavras de encorajamento que me mantiveram motivada a seguir em frente.

Ao meu orientador, José Carlos Miguel, pela orientação paciente, pelas valiosas contribuições e pelo exemplo de dedicação à pesquisa e ao ensino. Sua orientação foi fundamental para a realização desta pesquisa.

Aos meus amigos e colegas, pelo suporte, pelas discussões enriquecedoras e pela camaradagem que tornaram essa jornada mais leve e significativa.

Ao grupo de pesquisa GP FORME, pela oportunidade de crescimento acadêmico, pelo compartilhamento de conhecimentos e pela colaboração que foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do curso, pelo empenho e dedicação em transmitir conhecimento e por serem fontes de inspiração durante toda a minha trajetória acadêmica.

Aos educadores que, com dedicação e persistência, continuam a lutar por uma Educação significativa e de qualidade. Vocês são inspiração e exemplo de que a Educação transforma vidas e sociedades.

A todos, minha eterna gratidão.

“O conhecimento é o gerador do saber, que vai, por sua vez, ser decisivo para a ação, e por conseguinte é no comportamento, na prática, no fazer que se avalia, redefine e reconstrói o conhecimento.”

Ubiratan D'Ambrosio (2013, p. 19).

RESUMO

Trata-se de uma pesquisa-ação sobre um Experimento Didático Formativo, aliado à abordagem de ensino da Educação Matemática Realística, e aplicado em turmas do Ensino Médio que, a partir da construção e utilização de ferramentas articuladas em formato físico e virtual, revela as potencialidades desse tipo de abordagem para o ensino de matemática. Os instrumentos estudados incluem pantógrafos, teodolitos, elipsógrafos e outros aparelhos articulados usados como recursos didáticos, cujas construções se deram com uso de materiais reciclados e, virtualmente, por meio de um *software* gratuito de geometria dinâmica, chamado GeoGebra. Os referenciais teóricos adotados são embasados nas abordagens propostas por Hans Freudenthal e pelos seguidores de Lev Vygotsky. O objetivo é analisar como um Experimento Didático Formativo, aliado a abordagem de ensino da Educação Matemática Realística, pode desencadear o processo de matematização de conceitos e objetos matemáticos, em especial, os geométricos. Além disso, busca-se por aproximações teóricas entre as duas vertentes: o método do Experimento Didático Formativo e a abordagem da Educação Matemática Realística. O experimento ocorreu em uma escola particular em Embú-Guaçu, São Paulo, com turmas de 1ª e 2ª séries do Ensino Médio, durante o ano letivo de 2022, com encontros regulares ao longo de três trimestres. A metodologia está embasada no Experimento Didático Formativo e conta com aporte teórico em pesquisas bibliográficas sobre Ensino de Matemática, Educação Matemática Realística, Fenomenologia Didática e Educação Desenvolvimental. A análise dos resultados se apresenta na forma descritiva e interpretativa, considerando registros dos participantes da pesquisa em formato escrito, gravação em áudio e vídeo, além do preenchimento de formulário eletrônico com perguntas abertas, sob autorização e respeitando as condições do Comitê de Ética em Pesquisa. Como resultado, observou-se a compreensão das ideias matemáticas envolvidas no uso e construção das ferramentas mencionadas, bem como da associação desses conceitos a diferentes fenômenos, além de evidenciar aproximações teóricas entre as duas vertentes.

Palavras-chaves: Educação Matemática Realística; Experimento Didático Formativo; educação matemática; matematização; reinvenção guiada.

ABSTRACT

This is an action-research study on a Formative Didactic Experiment, combined with the teaching approach of Realistic Mathematics Education, applied to high school classes. The experiment, based on the construction and use of both physical and virtual tools, reveals the potential of this approach for teaching mathematics. The tools studied include pantographs, theodolites, ellipsographs, and other articulated tools used as didactic resources. These tools were constructed using recycled materials and, virtually, through a free dynamic geometry software called GeoGebra. The theoretical frameworks adopted are grounded in the approaches proposed by Hans Freudenthal and followers of Lev Vygotsky. The objective is to analyze how a Formative Didactic Experiment, aligned with the approach of Realistic Mathematics Education, can trigger the process of mathematizing concepts and mathematical objects, particularly geometric ones. Additionally, the study seeks theoretical connections between the two strands: the method of the Formative Didactic Experiment and the approach of Realistic Mathematics Education. The experiment took place at a private school in Embu-Guaçu, São Paulo, with first and second-year high school classes, during the 2022 academic year, with regular meetings over the course of three trimesters. The methodology is based on the Formative Didactic Experiment and is supported by theoretical contributions from bibliographic research on Mathematics Education, Realistic Mathematics Education, Didactic Phenomenology, and Developmental Education. The results are presented in a descriptive and interpretive format, considering written records from the research participants, audio and video recordings, and responses to an electronic questionnaire with open-ended questions, all conducted under authorization and in compliance with the Research Ethics Committee's guidelines. As a result, the study observed participants' understanding of the mathematical ideas involved in the use and construction of the mentioned tools, as well as the association of these concepts with different phenomena, highlighting theoretical connections between the two approaches.

Keywords: Realistic Mathematics Education; Formative Didactic Experiment; mathematics education; mathematization; guided reinvention.

RESUMEN

Se trata de una investigación-acción sobre un Experimento Didáctico Formativo, combinado con el enfoque de enseñanza de la Educación Matemática Realista, aplicado en clases de Educación Secundaria, que, a través de la construcción y utilización de herramientas articuladas en formatos físico y virtual, revela las potencialidades de este tipo de enfoque para la enseñanza de las matemáticas. Los instrumentos estudiados incluyen pantógrafos, teodolitos, elipsógrafos y otros dispositivos articulados utilizados como recursos didácticos, cuya construcción se realizó con materiales reciclados y, de manera virtual, mediante un *software* gratuito de geometría dinámica llamado GeoGebra. Los marcos teóricos adoptados se basan en los enfoques propuestos por Hans Freudenthal y los seguidores de Lev Vygotsky. El objetivo es analizar cómo un Experimento Didáctico Formativo, combinado con el enfoque de la Educación Matemática Realista, puede desencadenar el proceso de matematización de conceptos y objetos matemáticos, en especial los geométricos. Además, se busca explorar aproximaciones teóricas entre ambas corrientes: el método del Experimento Didáctico Formativo y el enfoque de la Educación Matemática Realista. El experimento se llevó a cabo en una escuela privada en Embú-Guaçu, São Paulo, con grupos de primer y segundo año de Educación Secundaria, durante el año académico de 2022, con encuentros regulares a lo largo de tres trimestres. La metodología se fundamenta en el Experimento Didáctico Formativo y cuenta con apoyo teórico proveniente de investigaciones bibliográficas sobre la Enseñanza de Matemáticas, la Educación Matemática Realista, la Fenomenología Didáctica y la Educación del Desarrollo. El análisis de los resultados se presenta de forma descriptiva e interpretativa, considerando los registros de los participantes en formato escrito, grabaciones de audio y video, así como el llenado de un formulario electrónico con preguntas abiertas, bajo autorización y respetando las condiciones del Comité de Ética en Investigación. Como resultado, se observó la comprensión de las ideas matemáticas involucradas en el uso y la construcción de las herramientas mencionadas, así como la asociación de esos conceptos con diversos fenómenos, además de evidenciar aproximaciones teóricas entre las dos corrientes.

Palabras-claves: Educación Matemática Realista; Experimento Didáctico Formativo; educación matemática; matematización; reinención guiada.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - “Estrutura das teorias produzidas no interior da Psicologia Histórico-Cultural”	30
Figura 2 - Sistemas triangulares sobre a atividade segundo Vygotsky e Engeström.	32
Figura 3 - Gráfico da altura média anual das marés de Vlissingen.	44
Figura 4 - Comparação do gráfico da Figura 3 e o gráfico da função $k(x)$.	45
Figura 5 - Pirâmide de avaliação proposta por De Lange.	65
Figura 6 - Pantógrafo de 8 hastes expandido.	70
Figura 7 - Montagem do pantógrafo para uso.	71
Figura 8 - Outros pantógrafos e aparelhos articulados.	71
Figura 9 - Representação de um perspectógrafo.	73
Figura 10 - Perspectógrafo de Scheiner.	73
Figura 11 - Capa do livro “ <i>Pantographice</i> ” de Scheiner.	75
Figura 12 - Representação de um pantógrafo de 4 e 8 hastes, respectivamente.	76
Figura 13 - Medidas de um pantógrafo de 4 e 8 hastes.	77
Figura 14 - Desenho feito com pantógrafo de 8 hastes.	78
Figura 15 - Semelhança de triângulos e paralelogramos no pantógrafo de 8 hastes.	78
Figura 16 - Ângulos formados entre as hastes do pantógrafo.	79
Figura 17 - Homotetia em desenho feito com pantógrafo.	79
Figura 18 - Estrutura simplificada de um pantógrafo de 4 hastes.	80
Figura 19 - Movimentação horizontal do pantógrafo.	81
Figura 20 - Representação de um translador em funcionamento.	82
Figura 21 - Representação do elipsógrafo de Proclo-Leonardo.	84
Figura 22 - Representações de elipsógrafos e ferramentas para desenhar curvas.	85
Figura 23 - Elipse desenhada por elipsógrafo virtual.	86
Figura 24 - Estrutura simplificada de um elipsógrafo de 2 trilhos.	87
Figura 25 - Groma egípcia.	88
Figura 26 - Evolução do teodolito.	90
Figura 27 - Modelo de teodolito caseiro.	91
Figura 28 - Ilustração do uso de um teodolito caseiro.	91

Figura 29 - Esquema de observação com teodolito caseiro.	92
Figura 30 - Movimentação horizontal de pantógrafo virtual no GeoGebra Classic.	93
Figura 31 - Contorno de um quadrado de lado 1 com o pantógrafo virtual.	94
Figura 32 - Movimentação do elipsógrafo no GeoGebra Classic.	94
Figura 33 - Movimentação do teodolito no GeoGebra 3D.	95
Figura 34 - Tela de entrada do GeoGebra - Classic online versão 6.0.	96
Figura 35 - Barra de ferramentas.	97
Figura 36 - Janelas de ferramentas - mover, ponto e reta.	97
Figura 37 - Janelas de ferramentas - reta perpendicular e polígono.	97
Figura 38 - Janelas de visualização - círculo e elipse.	98
Figura 39 - Janelas de visualização - ângulo e reflexão.	98
Figura 40 - Janelas de visualização - controle deslizante e mover janela de visualização.	98
Figura 41 - Menu de ações ao clicar com o botão direito do mouse.	99
Figura 42 - Janela de materiais disponíveis no GeoGebra.	100
Figura 43: Construção dos pontos A e B para base da ferramenta “haste”.	103
Figura 44: Vetores construídos a partir dos pontos A e B.	103
Figura 45 - Polígono montado a partir dos pontos A e B e os vetores unitários.	104
Figura 46 - Aparência da haste do pantógrafo virtual.	104
Figura 47 - Ferramenta “haste” construída no GeoGebra.	105
Figura 48 - Pantógrafos virtuais criados pelos participantes da pesquisa via GeoGebra.	105
Figura 49 - Pontos auxiliares para construção do teodolito virtual em GeoGebra 3D.	106
Figura 50 - Estrutura interna de um teodolito virtual.	106
Figura 51 - Teodolito virtual com indicação de ângulos.	107
Figura 52 - Pesquisadora recortando os conjuntos de hastes.	116
Figura 53 - Modelo de aparelho articulado fixado na lousa.	117
Figura 54 - Questões norteadoras para compreender a finalidade do pantógrafo.	118
Figura 55 - Estudante mostrando aos colegas como manusear o pantógrafo.	119
Figura 56 - Modelos de teodolitos caseiros não graduados.	122
Figura 57 - Anotações da pesquisadora sobre usos do teodolito segundo os estudantes.	122
Figura 58 - Estudantes medindo dimensões da quadra por meio de passos (à esquerda) e teodolito (à direita).	124

Figura 59 - Perguntas norteadoras para pesquisa e utilização de aparelhos articulados.	127
Figura 60 - Pantógrafo montado pelo grupo G05B.	136
Figura 61 - Pantógrafos com hastes mal posicionadas.	137
Figura 62 - Estudante do G09B desmontando o pantógrafo para remontá-lo segundo foto.	138
Figura 63 - Estudante do grupo G03C comparando pantógrafos.	138
Figura 64 - Utilidades do aparelho conforme investigações iniciais dos estudantes.	139
Figura 65 - Objetos de comparação ao pantógrafo mencionados pelos estudantes.	140
Figura 66 - Quadro com as medidas dos quadriláteros da tarefa 2 (Turma A).	142
Figura 67 - Registros de ampliações/reduções ao usar pantógrafo em segmentos.	145
Figura 68 - Pantógrafos criados em GeoGebra pelos participantes.	146
Figura 69 - Teodolitos construídos pelos participantes.	149
Figura 70 - Esboços e representações dos estudantes sobre o uso do teodolito.	151
Figura 71 - Versões do teodolito realizada pelos estudantes do grupo G01B.	154
Figura 72 - Pantógrafo reinventado por um participante.	157
Figura 73 - Desenho invertido feito pelo grupo G02A.	157
Figura 74 - Fotos dos aparelhos virtuais criados pelos grupos G01A, G04A, G10A e G02C.	162
Figura 75 - Percepções dos estudantes em relação às tarefas com pantógrafo.	164

Quadro 1 - "Algumas características das abordagens mecanicista, estruturalista e empirista."	52
Quadro 2 - A matematização em diferentes abordagens para a Educação Matemática.	56
Quadro 3 - Usos do contexto segundo De Lange (1995).	63
Quadro 4 - Níveis de tarefas.	64
Quadro 5 - Fases da aplicação e objetivos.	112
Quadro 6 - Códigos para referência aos participantes.	115
Quadro 7 - Respostas a: "Você lembra os nomes dos aparelhos que foram apresentados e construídos nas produções específicas? Se sim, quais?"	131
Quadro 8 - Justificativas dos estudantes sobre a ferramenta que mais gostaram.	132
Quadro 9 - Relação dos grupos que finalizaram as tarefas do pantógrafo do 2º encontro.	142
Quadro 10 - Dimensões dos quadriláteros desenhados por pantógrafo (cm).	143

Quadro 11 - Fatores de ampliação dos quadriláteros desenhados pelos estudantes.	144
Quadro 12 - Resultados para a altura da quadra obtidos com uso do teodolito.	152
Quadro 13 - Aparelhos articulados produzidos pelos estudantes.	156
Quadro 14 - Distribuição dos conceitos e ideias matemáticas relacionadas à construção e uso dos aparelhos articulados.	158
Quadro 15 - Descrição das dificuldades enfrentadas pelos participantes em montar e utilizar os instrumentos articulados.	160
Quadro 16 - Origens e funções dos aparelhos escolhidos pelos participantes.	160
Quadro 17 - Relação entre as tarefas realizadas durante o experimento didático formativo e as evidências de aprendizagem.	166
Quadro 18 - Percepção dos participantes em relação à realização da pesquisa.	169
Gráfico 1 - Preferências dos estudantes sobre as ferramentas construídas.	132
Gráfico 2 - Conceitos matemáticos relacionados ao pantógrafo, segundo os participantes.	134
Gráfico 3 - Conceitos matemáticos relacionados ao teodolito, segundo os participantes.	148

LISTA DE SIGLAS

FI – *Freudenthal Institute*

IOWO – *Instituut voor Ontwikkeling van Wiskunde Onderwijs*

RME – *Realistic Mathematics Education*

EDF – Experimento Didático Formativo

CHAT – *Cultural-Historical Activity Theory*

TA – Teoria da Atividade

THC – Teoria Histórico-Cultural

OW – *Onderzoeksgroep voor Wiskundeonderwijs*

OC – *Onderwijzend Computercentrum*

MMM – Movimento da Matemática Moderna

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	18
1.1 Justificativas, trajetória e delimitação do tema.....	19
1.2 Objetivos, questões e hipóteses.....	23
1.2.1 Objetivo geral.....	23
1.2.2 Objetivos específicos.....	24
1.2.3 Questão norteadora.....	24
1.2.4 Objeto de pesquisa, tese e hipóteses.....	25
1.3 Conexões e relevância da pesquisa.....	26
2 ORIGENS DO EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO: DIDÁTICA DESENVOLVIMENTAL.....	27
2.1 Experimento Didático Formativo: conceitos.....	31
2.2 O Experimento Didático Formativo para Vygotsky, Davydov e Hedegaard.....	33
3 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA: PRECEDENTES.....	38
3.1 O projeto <i>Wiskobas</i>	39
3.1.1 Fase exploratória (1971-1973).....	40
3.1.2 Fase de integração (1973-1975).....	41
3.1.3 Resultados, desenvolvimento posterior e pesquisa (1975-1977).....	42
3.2 O projeto <i>Hewet</i>	43
3.2.1 O curso de matemática A.....	43
3.2.2 Exemplos das tarefas do curso “matemática A”.....	44
3.2.3 Estratégias para inovação e a formação continuada.....	46
3.2.4 Os resultados percebidos pelos estudantes neerlandeses e pelos pesquisadores.....	47
3.3 Freudenthal e a Educação Matemática Realística.....	48
3.4 Matematização, reinvenção guiada e fenomenologia didática.....	53
3.5 Os princípios norteadores da RME.....	58
3.6 A avaliação para a Educação Matemática Realística.....	60
3.6.1 Os diferentes tipos de tarefas na RME.....	62
4 EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA: ALGUMAS APROXIMAÇÕES.....	66
4.1 Alguns constructos e similaridades.....	67
5 AS FERRAMENTAS: ORIGENS, CARACTERÍSTICAS E RELAÇÕES MATEMÁTICAS.....	70
5.1 Pantógrafo.....	70
5.1.1 Origem do pantógrafo e algumas ferramentas articuladas.....	72
5.1.2 As ideias matemáticas no funcionamento do pantógrafo.....	76
5.1.3 A “prova” matemática sobre o funcionamento do pantógrafo.....	80
5.2 Elipsógrafo.....	83
5.2.1 Origem do elipsógrafo.....	84

5.2.2 A construção de elipses por elipsógrafo.....	86
5.2.3 A “prova” matemática sobre o funcionamento do elipsógrafo.....	87
5.3 Teodolito.....	89
5.3.1 Origem do teodolito.....	89
5.3.2 A medição de ângulos e o cálculo de distâncias.....	91
5.3.3 A “prova” matemática sobre o funcionamento do teodolito.....	93
5.4 O uso de tecnologia para visualizar o funcionamento das ferramentas.....	94
6 O SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA GEOGEBRA E O ENSINO DE MATEMÁTICA.....	96
6.1 Conhecendo o GeoGebra.....	97
6.2 O GeoGebra como recurso educativo para o ensino de matemática.....	100
6.3 Construindo ferramentas no GeoGebra.....	103
6.3.1 Construindo um pantógrafo no GeoGebra.....	103
6.3.2 Construindo um teodolito virtual 3D.....	107
7 METODOLOGIA DA PESQUISA.....	108
7.1 Pesquisa-ação e suas definições.....	109
7.2 Perfil da comunidade, da escola e dos participantes.....	111
7.3 Etapas de aplicação das tarefas: da construção à análise das ferramentas.....	113
8 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS.....	115
8.1 Descrição dos encontros.....	117
8.1.1 Encontro 1: (29/03/2022 - 30/03/2022) - apresentação do pantógrafo.....	117
8.1.2 Encontro 2: (05/04/2022 - 06/04/2022) - investigando o pantógrafo.....	119
8.1.3 Encontro 3: (11/04/2022 - 12/04/2023) - a virtualização do pantógrafo.....	121
8.1.4 Encontro 4: (03/08/2022 - 04/08/2022) - conhecendo o teodolito.....	122
8.1.5 Encontro 5: (05/08/2022) - investigando o teodolito.....	124
8.1.6 Encontro 6: (14/08/2022 - 15/08/2022) - aplicações e o teodolito virtual.....	126
8.1.7 Encontro 7: (03/11/2022 - 07/11/2022) - conhecendo outros aparelhos articulados.....	127
8.1.8 Encontro 8: (08/11/2022 - 09/11/2022) - testando as criações.....	129
8.1.9 Encontro 9: (29/11/2022 - 30/11/2022) - reconhecendo as possíveis aprendizagens.....	130
8.2 Os resultados da construção e utilização de pantógrafos.....	131
8.3 Os resultados da construção do teodolito.....	148
8.4 Os resultados da construção de outros articulados.....	157
8.5 Avaliando os participantes.....	164
8.6 Avaliando a pesquisa.....	170
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	172
REFERÊNCIAS.....	178
ANEXOS E APÊNDICES.....	187

1 INTRODUÇÃO

Esta tese foi elaborada para a linha de pesquisa “Teoria e Práticas Pedagógicas” e se trata de uma pesquisa-ação que envolve um Experimento Didático Formativo (EDF), embasado em concepções da Teoria de Ensino Desenvolvimental (TED), além de uma abordagem de ensino fundamentada nas ideias do matemático alemão Hans Freudenthal (1983; 1991) que elaborou a Educação Matemática Realística (RME, em inglês – *Realistic Mathematics Education*). Como precedente desta pesquisa está a dissertação para conclusão do mestrado que descreveu tarefas pautadas nos seis princípios da RME e aplicadas a um grupo de professores de matemática e estudantes do curso de licenciatura em Matemática do Instituto de matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), no ano de 2018 (Santos, 2020).

Para a presente pesquisa, o conjunto de tarefas pensados sob a perspectiva da RME e aplicado por meio de um EDF foi desenvolvido em aulas de matemática de uma escola particular, localizada na cidade de Embu-Guaçu, interior de São Paulo, com três turmas de Ensino Médio, a saber: duas turmas de 1ª série e uma turma de 2ª série (estudantes com idades entre 14 e 18 anos). As tarefas foram aplicadas em três momentos distintos durante o ano letivo de 2022, incorporadas às aulas das disciplinas de Matemática Fundamental, Álgebra, Trigonometria e Geometria. Ao todo, participaram 63 estudantes e foram produzidas mais de 100 ferramentas entre pantógrafos, teodolitos, elipsógrafos, transladores e outros articulados. Para registro, utilizamos fotografias, gravação de áudio e vídeo dos quais alguns desses registros foram incorporados a um site em que disponibilizamos descrições das aplicações e recursos para que outros docentes possam reproduzir o experimento com suas turmas. A pesquisa foi submetida ao Comitê de Ética por envolver estudo com adolescentes e pode ser consultada via Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE) número 55603422.6.0000.5406. Foram elaborados termos de consentimento livre e esclarecido para os estudantes e responsáveis de modo impresso e via formulário digital. Também foi desenvolvido um Experimento Didático Formativo que se trata de um estudo pedagógico de natureza histórico-cultural cujo enfoque de pesquisa é o professor e os estudantes envolvidos em situações de ensino-aprendizagem. Os detalhes da aplicação do conjunto de tarefas e a fundamentação teórica estão descritos nas seções seguintes.

Na primeira seção, dedicamos à descrição dos objetivos, questões de pesquisa, justificativa, conexões e relevância da pesquisa para a área do ensino de matemática. Na

segunda seção, descrevemos sobre o Experimento Didático Formativo e seus precedentes históricos, bem como justificamos nossa escolha por um experimento aplicado a um microciclo didático. Na terceira seção, apresentamos os precedentes e as definições envolvidas na Educação Matemática Realística, além das características da avaliação para esse tipo de abordagem. Na quarta seção descrevemos as aproximações teóricas entre o EDF e a RME. Na quinta seção são apresentadas as ferramentas utilizadas nas tarefas: pantógrafo, elipsógrafo, teodolito e demais aparelhos articulados para desenhar e medir. Na sexta seção, descrevemos sobre a utilização do *software* de geometria dinâmica, apresentando sua interface e aplicações em sala de aula. Na sétima seção, descrevemos a metodologia utilizada para aplicação das tarefas, realização da pesquisa e coleta de dados. Na oitava seção, escrevemos sobre a análise descritiva e interpretativa dos resultados obtidos na pesquisa. Por fim, seguem as considerações finais e referências. Após todas as seções, encontram-se os anexos e apêndices destacados no texto.

1.1 Justificativas, trajetória e delimitação do tema

O tema desta pesquisa é a utilização de recursos pedagógicos nas aulas de Geometria sob uma perspectiva histórica e cultural. A pesquisa surge como uma proposta de incentivo aos docentes de escolas públicas e privadas a incorporarem ferramentas de desenho e medição (teodolito, pantógrafo, elipsógrafo e outros) em suas aulas como instrumentos mediadores que podem despertar o interesse dos estudantes e os auxiliar na compreensão de conceitos matemáticos, especialmente, geométricos. Enquanto escritora desta tese, apresento brevemente nos próximos parágrafos minha trajetória pessoal e acadêmica que influenciou na elaboração desta pesquisa.

Nasci em São Paulo, na região de Santo Amaro, mas passei boa parte da minha vida nas cidades do interior: Juquitiba, Itapequerica da Serra, Embú-Guaçu e, atualmente, Águas de Lindóia. Talvez por influência dos meus pais, migrantes nordestinos, sempre tive apreço pela vida calma das cidades interioranas onde as principais atividades econômicas acontecem nos campos e nas praças dos artesãos. A cultura local moldou meus gostos e por isso desenvolvi alguns talentos nas Artes: sou pintora, desenhista e escultora. Aprendi a usar os recursos da natureza e a respeitá-la e, mesmo quando entrei para o mundo da Educação Matemática, nunca deixei de incorporar atividades que envolvessem artesanato e sustentabilidade. Estudei os Anos Iniciais e Finais na escola pública e, por insistência de uma querida professora de

Língua Portuguesa (amável Fabiana), minha mãe me matriculou no Ensino Médio de uma escola particular, cuja doutrina era adventista. Por muito esforço das partes envolvidas (e um pouco de sorte), consegui uma bolsa que me permitia ficar ali em meio a uma realidade completamente nova e distante da minha. Mas, ainda bem, conheci pessoas muito acolhedoras e que, apesar das minhas origens, não se importavam com o sobrenome da minha família ou nosso poder aquisitivo. Fiz amigos e amigas para uma vida inteira.

No último ano do Ensino Médio, os formandos precisavam escrever e apresentar uma monografia na área de interesse, como um preparatório para a Universidade. De todas as disciplinas disponíveis que, modéstia à parte, alcancei notas altas por muita dedicação, escolhi a matemática, pois era a única disciplina que eu precisava me dedicar o dobro ou mais para entender e não admitiria terminar esse ciclo sem dominá-la (iludida, talvez). A professora que me orientou (saudosos Spinelli) sabia dos meus gostos pela Arte e me apresentou obras do artista gráfico neerlandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972). O trabalho de Escher, embora tenha diferentes fases, é muito conhecido por mostrar desenhos de construções impossíveis e matematicamente engenhosas. Juntas, a professora e eu desenvolvemos uma rica pesquisa e uma apresentação imersiva que meus colegas e amigos lembram com muito carinho e entusiasmo até hoje. Apesar dos 9.5 que recebi pelo trabalho, lembro-me da justificativa da professora sobre a avaliação: “Se eu te desse um 10, você acreditaria que já dominou tudo o que precisava, mas vou te dar esse incentivo” (ou algo assim). Não fiquei chateada, mas intrigada. E foi assim que decidi ser uma professora tão boa quanto ela foi para mim.

Em 2014, aos 17 anos, ingressei no curso de licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, onde conheci os fundamentos da Educação e as particularidades do ensino de matemática, me levando ao contato com a Teoria Etnomatemática desenvolvida pelo pesquisador e educador matemático brasileiro Ubiratan D'Ambrosio, ao qual tive a honra de conhecer pessoalmente no último ano do curso. Desenvolvi a monografia para conclusão do curso fundamentada nas teorias da Etnomatemática e Teoria Histórico-Cultural, sob orientação dos professores [e queridos amigos] Me. José Maria Carlini e Dra. Elisabete Teresinha Guerato, versando sobre propostas pedagógicas para ensino de matemática que envolviam a Geometria Soma, uma manifestação cultural presente em Moçambique em que chefes de tribos fazem desenhos na areia para contar uma história ou ensinar uma tarefa, desenhos estes que envolviam diversos conhecimentos de Geometria, Álgebra e Aritmética. No mestrado, realizado entre os anos de 2018 e 2020 no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, tive

contato com a Educação Matemática Realística e, juntamente à ilustre Dra. Vera Helena Giusti de Oliveira, desenvolvemos a dissertação sobre o uso de pantógrafo (ferramenta articulada, cuja finalidade é desenhar de forma reduzida ou ampliada e é conhecida na região em que residi na época) para o ensino de Geometria sob a luz da RME, sem abandonar os construtos da Etnomatemática. Por fim, ingressei no Doutorado no Programa de Pós-graduação em Educação pela Universidade Estadual de São Paulo no campus de Marília, em 2022, onde recebo orientações do emérito Dr. José Carlos Miguel para elaborar esta tese. Tornei-me membro (oficial ou convidada) de alguns grupos de pesquisa e projetos de extensão: GP FORME (“Grupo de Pesquisa Sobre Formação do Educador” - UNESP/Marília, 2022 - atual); GEPEMA (“Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação” - UEL/Londrina, 2022), 3PAC (Projeto de extensão “Pós Graduar” do Grupo de Pesquisa “Política, Políticas Públicas e Ação Coletiva” - UFABC/São Paulo, 2023 - atual) e RIAC (“Rede Internacional de Autoria Colaborativa - PUC/São Paulo, 2020 - atual). A participação nesses espaços acadêmicos, bem como as experiências profissionais na área da Educação Básica e Superior permitiram chegar ao tema aqui descrito.

A escolha do tema baseia-se nas experiências adquiridas durante o trabalho docente e na dificuldade enfrentada pelos estudantes em entender conceitos matemáticos básicos. Focamos em pesquisas que, através de recursos pedagógicos, atividades e métodos inovadores, procuraram oferecer uma alternativa ao ensino predominante em muitas escolas públicas brasileiras (D'Ambrosio, 2013), o qual frequentemente se restringe à memorização de conceitos matemáticos (Nacarato; Santos, 2014) e não valoriza as origens desses conceitos, que são essenciais para a compreensão do pensamento matemático.

Alguns educadores e pesquisadores, como Nacarato e Santos (2014) e Freudenthal (1983, 1991), sustentam que, para entender melhor os conceitos básicos de Geometria, os estudantes precisam experienciá-los de forma que possam representá-los e aplicar de diversas maneiras. Para isso, o professor deve utilizar atividades que estimulem a investigação e ofereçam instruções que permitam aos estudantes vivenciar descobertas semelhantes às dos matemáticos e enxergar a matemática como uma atividade humana (De Lange, 1995). Van Den Heuvel-Panhuizen (1996) também argumenta que os estudantes desenvolvem um raciocínio matemático mais eficaz quando os conceitos adquirem significado para eles.

A área da Educação está constantemente sendo estudada com o propósito de promover a dinâmica das salas de aula e oferecer aos educadores matemáticos métodos criativos e adequados às necessidades dos estudantes do século XXI. Gomes e Rodrigues (2014)

destacam que os professores de matemática têm se empenhado em pesquisas e discussões sobre métodos de ensino, reconhecendo a necessidade de adaptá-los às demandas atuais.

Nas décadas de 1940 e 1950 do século XX, o ensino de matemática era predominantemente baseado em métodos repetitivos de cálculo e memorização, conhecido como ensino tradicional. Nessa época, os estudantes resolviam longas listas de exercícios e eram obrigados a memorizar demonstrações de teoremas. A partir dos anos 1960, surgiu o Movimento da Matemática Moderna (MMM), que, conforme D'Ambrosio (2013), não alcançou os resultados esperados. Wielewski (2008) observa que o MMM visava alinhar a matemática praticada por pesquisadores com o ensino dessa disciplina na Educação Básica. Durante essa época, o desempenho acadêmico não era necessariamente superior ao de hoje, embora seja comum ouvir que os estudantes daquela época estavam mais envolvidos e tinham um melhor desempenho (D'Ambrosio, 2013). Durante as décadas de 1950 e 1960, os defensores do MMM

acreditavam que poderiam preparar pessoas que pudessem acompanhar e lidar com a tecnologia que estava emergindo. Dessa forma, as propostas veiculadas pelo MMM inseriram no currículo conteúdos matemáticos que até aquela época não faziam parte do programa escolar como, por exemplo, estruturas algébricas, teoria dos conjuntos, topologia, transformações geométricas (Wielewski, 2008, p. 01).

Nos anos 1970, a matemática era predominantemente abordada de forma abstrata e formal, com pouca ênfase nas suas aplicações práticas. Na década de 80, o enfoque mudou para a compreensão dos conteúdos matemáticos, destacando a importância dos aspectos sociais, culturais e cognitivos envolvidos. A partir dos anos 1990, no Brasil, o ensino de matemática e de outras disciplinas passou por transformações significativas com a introdução dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Os PCN foram criados entre 1995 e 1998 com o objetivo de padronizar o currículo em todo o país, como parte da ação estatal. Um dos objetivos dos PCN era fomentar “a intenção de provocar debates a respeito da função da escola e reflexões sobre o que, quando, como e para que ensinar e aprender, que envolvam não apenas as escolas, mas também país, governo e sociedade” (Brasil, 1998, p. 9). Contudo, apesar dos esforços para aprimorar a educação, a matemática ainda é temida por muitas pessoas e frequentemente relacionada a principal causa de reprovação escolar.

Ao analisar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes, podemos considerar que esses desafios estão associados a diversos elementos que vão além da afinidade com a disciplina ou da sua complexidade atribuída. Sanchez (2004) destaca que as dificuldades de aprendizagem em matemática podem se manifestar de diversas formas e as classifica em diferentes categorias. Estas categorias incluem problemas relacionados à realização de

operações matemáticas e à compreensão de problemas, dificuldades associadas ao desenvolvimento cognitivo na matemática, influências emocionais e ao interesse e envolvimento do estudante na aprendizagem, desafios impostos pela complexidade da matemática que exige níveis de abstração que o estudante pode ainda não ter atingido, e questões resultantes de um ensino inadequado ou insuficiente. Assim, ao ensinar matemática, é crucial levar em conta esses aspectos, já que cada estudante possui percepções de mundo, crenças e estilos de aprendizagem distintos.

Além disso, ao desenvolver essa pesquisa, apresentamos uma aproximação entre a abordagem da Educação Matemática Realística e a Teoria do Ensino Desenvolvimental, especificamente, ao realizar um Experimento Didático Formativo (EDF). Baseia-se na premissa de que a aprendizagem ocorre por meio da interação entre os estudantes e o conteúdo, promovendo o desenvolvimento cognitivo e a aquisição de habilidades (Davydov, 1988). O experimento envolve a criação de situações de ensino que estimulam a atividade mental dos estudantes, levando-os a refletir sobre o conhecimento e a construir entendimentos próprios. Essa abordagem visa não apenas transmitir informações, mas também desenvolver a capacidade dos estudantes de pensar criticamente, resolver problemas e aplicar o que aprenderam em diferentes contextos.

Algumas das tarefas propostas envolvem a programação e criação de um modelo virtual da ferramenta no software GeoGebra, aliando teoria, prática e tecnologia. O uso de ferramentas de geometria dinâmica como o GeoGebra pode permitir ao estudante compreender sobre as abstrações matemáticas envolvidas na construção e funcionamento das ferramentas, pois a versão digital é mais precisa e livre de “erros humanos” se seguidos corretamente todos os passos da sua programação. A utilização de comandos e termos lógicos também são fundamentais para a criação da versão virtual da ferramenta e possibilita que outras áreas que envolvem matemática possam ser estudadas, como a Lógica e a Linguagem de Programação. A seguir, descrevemos nossos objetivos, hipóteses e questões norteadoras.

1.2 Objetivos, questões e hipóteses

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral desta pesquisa é analisar como um Experimento Didático Formativo, aliado a abordagem de ensino da Educação Matemática Realística, pode desencadear o

processo de matematização de conceitos e objetos matemáticos. Em particular, buscou-se compreender de que maneira essa abordagem contribuiu para a construção e utilização de pantógrafos, teodolitos, elipsógrafos e outros dispositivos articulados, voltados para desenho ou medição, bem como evidenciou suas potencialidades no processo de ensino e aprendizagem de conceitos geométricos.

Para validar se o objetivo foi alcançado, esperávamos que os participantes mostrassem aplicações e atribuíssem significados aos conceitos de semelhança de figuras, razão e proporcionalidade, homotetia, simetrias, congruência entre ângulos, propriedades de triângulos e paralelogramos, propriedades de elipses e razões trigonométricas quando construíssem e utilizassem as ferramentas nas diferentes tarefas propostas pela pesquisadora.

1.2.2 Objetivos específicos

a) Evidenciar aproximações teóricas entre o Experimento Didático Formativo e a Educação Matemática Realística por meio do contexto histórico e precedentes teóricos dessas abordagens.

b) Avaliar a manifestação dos seis princípios da Educação Matemática Realística durante o desenvolvimento do conjunto de tarefas, identificando como cada princípio é incorporado e aplicado na resolução de problemas.

c) Identificar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes durante a construção das ferramentas em suas versões físicas e as versões virtuais elaboradas exclusivamente via *software* GeoGebra.

d) Elaborar e disponibilizar material didático (livro, e-book, pasta compartilhável ou outro) que reúna as tarefas atualizadas, para garantir que seja acessível e possa ser utilizado por outros docentes.

1.2.3 Questão norteadora

Seguimos com a questão norteadora: Como uma proposta de ensino elaborada segundo os princípios da Educação Matemática Realística e desenvolvida com base em um Experimento Didático Formativo pode desencadear o processo de matematização de conceitos matemáticos, especialmente os geométricos?

Outras questões surgiram antes e durante a pesquisa, a saber:

i) Os participantes, em suas manifestações (orais e/ou escritas), indicaram que o conjunto de tarefas proposto estava de acordo com os fundamentos da Educação Matemática Realística?

ii) Diante das produções e manifestações dos participantes, de que maneira o Experimento Didático Formativo permitiu que os estudantes se relacionassem com os objetos, os conhecimentos envolvidos e a pesquisadora?

iii) Quais foram as principais dificuldades relatadas pelos participantes em relação: às construções físicas e virtuais dos instrumentos; à aplicabilidade da proposta em sala de aula; e ao processo metodológico adotado?

iv) Os participantes solicitaram ajuste(s) no conjunto de tarefas ou no processo metodológico adotado? Se sim, com qual(is) finalidade(s)?

1.2.4 Objeto de pesquisa, tese e hipóteses

Nosso objeto de pesquisa é o conjunto de instrumentos utilizados nas tarefas elaboradas com base nos princípios da RME, abordagem proposta por Freudenthal. Esse conjunto foi aplicado seguindo os aspectos de um EDF, investigação que reflete as concepções da Teoria Histórico-Cultural da Atividade (CHAT, na sigla em inglês para *Cultural-Historical Activity Theory*, também chamada de Teoria da Atividade - TA) (Libâneo, 2004; Freitas; Libâneo, 2022).

Nossa tese é que a utilização de recursos didáticos (físicos e virtuais) como desencadeadores do processo de aprendizagem de conceitos geométricos aliada ao processo de um experimento que seja didático e formativo, resgatando aspectos históricos e culturais dos recursos envolvidos, cria um ambiente favorável à reinvenção guiada e, por sua vez, permite que os estudantes realizem o processo de matematização ao relacionar ideias matemáticas para explicar e compreender a realidade.

Nossa hipótese era que ao ter a oportunidade de (re)inventar instrumentos históricos como o pantógrafo, teodolito, elipsógrafo e outros dispositivos articulados, o estudante do Ensino Médio poderia não apenas compreender, mas também matematizar conceitos geométricos fundamentais, como simetria, homotetia, proporcionalidade, entre outros. Essa abordagem permitiria que o estudante vivenciasse a matemática de maneira mais profunda,

conectando a prática com as origens históricas dos conceitos e das ferramentas, e promovendo uma experiência rica de aprendizagem e de apropriação dos conceitos geométricos. Uma hipótese secundária era que o estudante, ao passar pelo processo de reinvenção guiada de um conceito matemático, poderia compreendê-lo em sua totalidade e seria capaz de utilizá-lo para transformar seu meio ou identificá-lo em diversas atividades humanas, ainda que não sejam intrinsecamente relacionadas ao seu cotidiano. Portanto, a fim de comprovar ou refutar tais hipóteses, realizamos essa pesquisa em três turmas de Ensino Médio durante o período do ano letivo de 2022.

1.3 Conexões e relevância da pesquisa

Consideramos que a importância desta pesquisa reside em sua contribuição para o ensino de matemática, especialmente da Geometria Euclidiana. O caráter inovador da pesquisa se manifesta em dois aspectos: primeiro, ao desenvolver e aplicar recursos didáticos (mencionados na Introdução) baseados na RME, que vê a matemática como uma atividade humana, abordando o ensino dessa ciência de maneira semelhante às práticas dos matemáticos em suas descobertas; segundo, ao integrar a abordagem da RME em um EDF. Todos os produtos gerados por meio desta pesquisa (atividades, roteiros, materiais didáticos, planejamentos, etc.), devidamente registrados, foram compartilhados com a comunidade acadêmica e científica para promover e apoiar o desenvolvimento de um ensino de matemática mais significativo, contextualizado e colaborativo. Esta pesquisa oferece uma alternativa para educadores em busca de inovações na Educação que integrem teoria e prática, valorizando conhecimentos historicamente acumulados e incorporando aspectos culturais.

Existem diversas teorias no campo da Educação, e muitas delas têm sido testadas por diferentes pesquisadores e educadores, que as aplicam em práticas pedagógicas em uma variedade de contextos e cenários. No âmbito da matemática, a investigação sobre processos de aprendizagem e metodologias de ensino é parte da Educação Matemática, a qual é descrita por Fiorentini e Lorenzato (2006) como

uma praxe que envolve o domínio do conteúdo específico (a matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar. Entretanto, sendo a prática educativa determinada pela prática social mais ampla, ela atende a determinadas finalidades humanas e aspirações sociais concretas (Fiorentini; Lorenzato, 2006, p. 5).

As discussões na área da Educação Matemática possibilitam o desenvolvimento de teorias educacionais, que se diversificam em várias abordagens, como, por exemplo, a aplicação de jogos no ensino de álgebra (Oliveira; Silva, 2013; Silva ES, 2020), o uso de ferramentas de cálculo (Ponte; Canavarro, 1997) ou a recuperação histórica dos conceitos matemáticos (Moretti; Moura, 2011; Saito; Dias, 2013). Essas tendências revelam diferentes perspectivas sobre a educação, incluindo tanto enfoques tradicionais quanto inovadores (Machado, 2007).

Embora existam abordagens distintas para o ensino de matemática, buscou-se por uma que recorre ao processo de investigação que recorre ao conhecimento prévio dos estudantes e compreende a matemática como resultado de uma série de ações da humanidade. Nesse contexto, a Educação Matemática Realística confirma que matemática é uma atividade humana e que seu ensino precisa valorizar os aspectos históricos e as realidades nas quais convivem seus aprendizes. Essas realidades podem ser até mesmo figurativas, mas que se permitam ser exploradas a fim de um único propósito: desenvolver um processo de matematização (Van Den Heuvel-Panhuizen, 1996; De Lange, 1995, 1999; Freudenthal, 1983). Hans Freudenthal (1905 - 1990) iniciou os estudos da RME em um período marcado pela transição no ensino da matemática. Para compreender sobre as suas necessidades quanto pesquisador e educador matemático, descreve-se a respeito nas seções seguintes.

2 ORIGENS DO EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO: DIDÁTICA DESENVOLVIMENTAL

Puentes (2017) revela que, antes de compreendermos o movimento da Didática Desenvolvidamental¹ é necessário conhecer sobre os precursores dos estudos relacionados.

É preciso que se esclareça, em primeiro lugar, que a didática desenvolvidamental surgiu na ex-União Soviética, no final da década de 1950, associada à pedagogia, filosofia, fisiologia e, em especial, à psicologia histórico-cultural. Em segundo lugar, ela surge a partir das diferentes tendências que se constituíram ao longo de mais de cinquenta anos de construção de um sistema de ensino e de educação no contexto da edificação, principalmente, da sociedade socialista naquele país. Em terceiro lugar, que essas tendências deram lugar a duas grandes concepções de ensino: 1) a didática desenvolvidamental da atividade e, 2) a didática desenvolvidamental da personalidade (Puentes, 2017, p. 21).

¹ Devido às traduções, referenciais teóricos e demais constructos, utilizam-se diferentes termos para se referir a esse movimento, entre eles: Ensino Desenvolvente, Didática Desenvolvidamental (Puentes, 2017); *Obutchénie* Desenvolvidamental (Longarezi, 2020); Aprendizagem Desenvolvidamental (Puentes; Longarezi, 2021) e Educação Desenvolvidamental (Miguel; Freitas, 2022).

Puentes (2017) explica que a Didática Desenvolvimental da Atividade se inspira nas ideias de Vygotsky, Rubinstein e Leontiev e revela o surgimento de ao menos três sistemas didáticos distintos: a) o sistema Zankoviano, b) o sistema Galperin-Talízinae, c) o sistema Elkonin-Davydov-Repkin; ao passo que a Didática Desenvolvimental da Personalidade se aproxima das concepções de Sergei Leonidovich Rubinstein (1889 - 1960) e Lydia Il'inichna Bozhovich (1908-1981), sustentando a ideia da psique humana como ativa e criativa, assim como a integração entre os aspectos cognitivos e afetivos.

A Didática Desenvolvimental da Atividade surgiu na segunda metade dos anos 1950. Apesar das pressões ideológicas, políticas e econômicas após a queda do sistema socialista e a consequente dissolução da União Soviética em 1991, essa abordagem pedagógica não apenas sobreviveu, mas também se tornou a escolha oficial de currículo para escolas na Rússia, Ucrânia e outras partes da antiga União Soviética. Os três sistemas didáticos citados por Puentes (2017) se embasaram nas teses de Vygotsky de que o ensino apropriado é um elemento fundamental e universalmente interno do desenvolvimento das características humanas; e a pedagogia não deve se prender ao passado, mas utilizá-lo para regular o futuro (Vygotsky, 2010).

Longarezi (2020) descreve que as primeiras investigações experimentais foram conduzidas dentro do ambiente das escolas primárias. Leonid Vladimirovich Zankov (1901 - 1977) que, em 1958, iniciou uma série de experimentos em uma escola, os quais forneceram os fundamentos para a concepção de um "sistema didático novo", contribuindo significativamente para a defesa do potencial progressivo da Didática Desenvolvimental. No início da década de 60, muitos experimentos didáticos na educação primária passaram a ser realizados por grupos como os de Daniil Borosovich Elkonin (1904 – 1984), Vasily Vasilovich Davydov, Pyotr Ivanovich Zinchenko (1903 – 1969), Vladimir Vladimirovich Repkin (1927 – 2022), Pyotr Yakovlevitch Galperin (1902 – 1988), Nina Fiodorovna Talizina (1923 – 2018) e outros. Esses estudos se estenderam nacional e internacionalmente, alcançando a Europa Ocidental, Israel, Japão, Canadá e Estados Unidos. Devido ao envolvimento de tantos grupos, não há clareza do conceito de Didática Desenvolvimental e, por esse motivo, alguns autores utilizam o termo *obutchénie*², palavra de origem russa (Longarezi, 2020).

Originalmente, a Didática Desenvolvimental assume a condição de teoria apenas nos anos de 1995 e 1996, após publicações dos livros de Davydov “O conceito de *obutchénie*

² Termo russo que pode ser compreendido como “processo de ensino-aprendizagem”, entretanto, não há tradução adequada que transmita o complexo significado da palavra em sua língua original (Lima; Puentes, 2022).

desenvolvimental” e “Teoria da *obutchénie* desenvolvimental (Puentes, 2019). Os princípios dessa abordagem pedagógica têm suas raízes na Psicologia Histórico-Cultural estabelecida por Vygotsky, fundamentada no materialismo histórico-dialético (Martins, 1994). Alves (2010) descreve que

O materialismo dialético pode ser definido como a filosofia do materialismo histórico, ou o corpo teórico que pensa a ciência da história. Os princípios fundamentais do materialismo dialético são quatro: (1) a história da filosofia, que aparece como uma sucessão de doutrinas filosóficas contraditórias, dissimula um processo em que se enfrentam o princípio idealista e o princípio materialista; (2) o ser determina a consciência e não inversamente; (3) toda a matéria é essencialmente dialética, e o contrário da dialética é a metafísica, que entende a matéria como estática e anistórica; (4) a dialética é o estudo da contradição na essência mesma das coisas (Alves, 2010, p. 1).

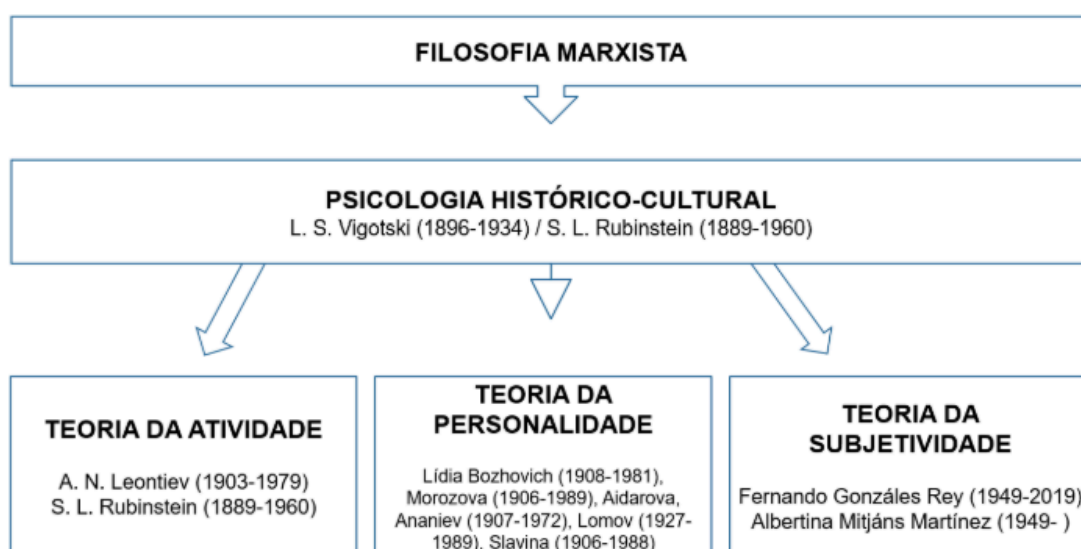
Inspirado pelo trabalho de Marx e Engels, Vygotsky buscou identificar as origens das formas avançadas de comportamento consciente nas interações sociais que os indivíduos estabelecem com o mundo exterior (Martins, 1994). Vygotsky abrangeu campos como fisiologia do sistema nervoso, endocrinologia, genética, medicina, antropologia física e psicologia em seus estudos e essa relação com diversas áreas nos estudos pedagógicos o levou a desenvolver uma teoria geral do desenvolvimento. Alves (2010) revela que Vygotsky adotou dois princípios da dialética de Marx para a construção do conhecimento científico em psicologia: a abstração e a análise da forma mais desenvolvida. O autor explica que a principal dificuldade na análise científica era o fato de que a essência dos objetos não coincide diretamente com a forma de suas manifestações externas e, por isso, seria necessário analisar os processos para descobrir a verdadeira relação subjacente a essas manifestações externas. A missão da análise, proposta por Vygotsky, era justamente revelar essas relações e a análise científica autêntica na Psicologia diferia profundamente da análise subjetiva e introspectiva da época. Assim, a abordagem de Vygotsky se revelou em uma Psicologia histórica, social e cultural.

Os fundamentos dessa perspectiva didática estão alicerçados, portanto, nos princípios gerais da Psicologia Histórico-Cultural, especialmente, no que se refere ao da não espontaneidade da constituição humana, entendida como histórica e cultural; ao do caráter desenvolvimental que a *obutchénie* pode assumir, fundada na nova perspectiva defendida por L. S. Vygotsky da relação *obutchénie*-desenvolvimento; e ao conceito de zona de desenvolvimento possível, em que L. S. Vygotsky demonstra que a *obutchénie* pode impulsionar o desenvolvimento com a colaboração do outro mais experiente, no intervalo que se cria entre os níveis de desenvolvimento real e potencial (Longarezi, 2020, p. 9).

Os estudos oriundos da Psicologia Histórico-Cultural se expandiram e originaram pesquisas sobre a Didática Desenvolvimental, o Experimento Didático Formativo, a Teoria da Atividade e outros conceitos. Conforme salienta Martins (1994), dentre os estudiosos do

grupo, Vygotsky era o principal teórico do marxismo e foi o resgate da metodologia marxista de análise que orientou toda a sua obra na criação de uma nova psicologia. Vygotsky (1991) afirma que o objetivo de seu trabalho era identificar os aspectos distintivos do comportamento humano e formular hipóteses sobre como essas características se desenvolvem ao longo da história da humanidade e ao longo da vida dos indivíduos. Na Figura 1, apresenta-se a estrutura de algumas teorias desenvolvidas a partir da Psicologia Histórico-Cultural, influenciadas pela filosofia marxista.

Figura 1 - “Estrutura das teorias produzidas no interior da Psicologia Histórico-Cultural”



Fonte: Longarezi (2020, p. 10).

Em particular, a Didática Desenvolvimental se estruturaliza com a Teoria da Atividade (Longarezi, 2020; Puentes, 2017) e, a partir dos estudos das teorias advindas da Psicologia Histórico-Cultural, são desenvolvidos sistemas didáticos.

Os avanços didáticos produzidos na perspectiva desenvolvimental o fizeram a partir do campo conceitual produzido pela Teoria da Atividade, sobretudo na perspectiva leontiviana; a partir da relação atividade, consciência e personalidade sustentada por esse constructo e com base na estrutura da atividade elaborada e proposta no seio da Teoria Psicológica da Atividade. Nesse sentido, os princípios que fundamentam a *Obutchénie* Desenvolvimental estão nas teses gerais da psicologia vigotskiana, assim como nos pressupostos desenvolvimentais defendidos pela Teoria Psicológica da Atividade (Longarezi, 2020, p. 11).

Conforme a autora, os pioneiros e desenvolvedores desses sistemas interpretaram algumas teses de Vygotsky de maneiras distintas, o que levou a experimentações voltadas para objetos e processos específicos, orientadas por objetivos particulares. Assim, surgem os

sistemas didáticos: a) o Sistema Zankov focava no desenvolvimento geral de qualidades como inteligência, sentimentos internos e valores morais; b) o Sistema Galperin-Talizina visava o desenvolvimento gradual dos processos mentais; c) o Sistema Elkonin-Davydov-Repkin foi concebido para promover a formação e o desenvolvimento do pensamento teórico. Na Teoria da Atividade estão fundamentadas outras teorias auxiliares, entre elas, o Experimento Didático Formativo.

2.1 Experimento Didático Formativo: conceitos

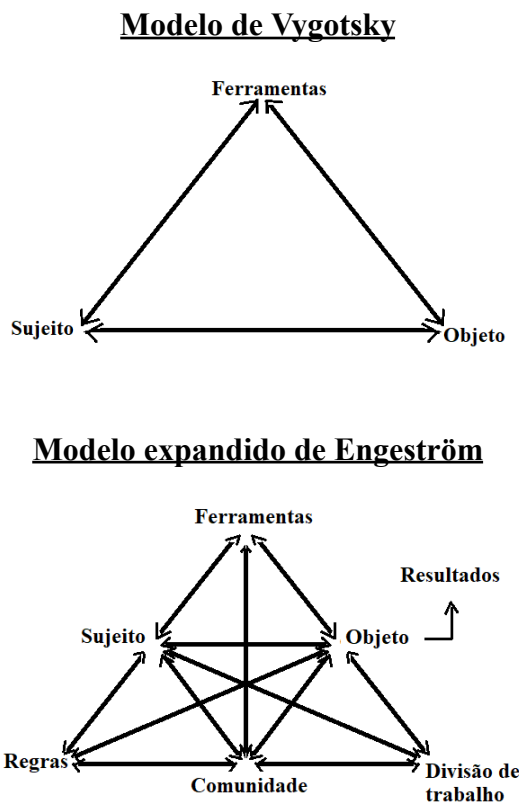
O Experimento Didático Formativo foi conceituado a partir de pesquisas dirigidas por diferentes grupos de pesquisadores russos que seguiram a CHAT inspirada nos estudos de Vygotsky, Leontiev, Rubinstein e Luria (Libâneo, 2004; Freitas; Libâneo, 2022). Embora os experimentos formativos tenham se desenvolvido inicialmente nos campos da Psicologia, os de natureza pedagógica e didática foram estudados por Zankov, Elkonin, Davydov e Repkin (Longarezi, 2019). Trata-se de um método que analisa as relações entre o ensino e o desenvolvimento da atividade mental dos estudantes (Neves; Resende, 2014). Neves e Resende (2014) esclarecem que o termo “experimento” não deve ser associado a uma linha positivista que procura pela “exatidão”, mas se refere a um método de pesquisa elaborado fundamentalmente na Teoria Histórico-Cultural - THC. Essa teoria é estudada na Psicologia e considera que a psique humana é uma “construção” coletiva e cultural (Vygotsky, 1991).

Relatam Cenci e Damiani (2018) que Lev Vygotsky (1896 - 1934) se preocupava com as vertentes da Psicologia na recém-formada União Soviética, pois acreditava que essa Ciência estava fragmentada e não se ocupava de seguir um método, ao qual propôs uma Psicologia Geral que superasse o subjetivismo e se centrasse no método. A “nova” Psicologia deveria se ocupar em compreender a consciência humana considerando as relações histórico-culturais de seu desenvolvimento (Vygotsky, 2004). Ao passo que Alexei Leontiev (1903 -1979) estudou sobre a consciência humana a ser concebida pelo trabalho humano (Leontiev, 1983). Atualmente, Yrjö Engeström (Engeström; Sannino, 2010; Engeström, 2013) discute sobre o desenvolvimento coletivo da consciência humana, destacando que a aprendizagem deve ser realizada em contexto de atividade compartilhada. Dividido em três gerações, os pesquisadores da Teoria da Atividade se apoiaram nas ideias de Vygotsky e Leontiev, destacando a importância de considerar as perspectivas social, histórica e cultural na concepção do conhecimento.

Os estudos teóricos recentes da Teoria da Atividade têm realçado temas como a atividade situada em contextos, a participação como condição de compreensão na prática (como aprendizagem), identidade, papel das práticas institucionalizadas nos motivos dos alunos, a diversidade cultural etc. Na base do estudo desses temas, há a premissa de que todas as ações individuais devem ser interpretadas tendo em conta questões e fatores que não estão imediatamente presentes na situação, nem contidos exclusivamente nas pessoas que atuam nessas situações (Libâneo, 2004, p. 9).

Em outras palavras, destacam-se os fatores sócio-históricos das ações humanas, bem como a necessidade que move a humanidade para desenvolver e se apropriar do conhecimento social e culturalmente constituído. Com base nisso, as gerações de pesquisadores se apoiam nos pressupostos da THC e desenvolvem a Teoria da Atividade. Conforme descrevem Libâneo (2004), Cenci e Damiani (2018), a primeira geração concentra seus estudos nas pesquisas de Vygotsky que considerava a atividade como mediação e parte de um sistema triangular que relaciona objeto-sujeito-artefatos culturais. A segunda se baseia nas formulações de Leontiev com a conceituação de ação individual e ação coletiva, avançando na definição e estruturação da atividade. Na terceira geração, destaca-se o modelo de atividade coletiva proposto por Engeström, na década de 1970, que integra ao modelo as relações entre as diferentes culturas, o trabalho e a atividade – ver Figura 2.

Figura 2 - Sistemas triangulares sobre a atividade segundo Vygotsky e Engeström.



Fonte: Elaborado pelos autores com base em Engeström (2001, p. 134-135).

Cenci e Damiani (2018, p. 923) revelam que “as interações sociais de um sujeito e a cultura na qual ele cresce lhe oferecem as possibilidades de desenvolvimento do seu pensamento” e, ao internalizar a cultura, há superação da esfera biológica. Esse processo de internalização também pode ser aplicado à aprendizagem, pois a *obutchénie* sempre antecipa o desenvolvimento (Lima; Puentes, 2022). Porém, não é possível definir com clareza a *obutchénie* e o desenvolvimento interno como processos independentes, pois existe uma complexa relação entre ambos, uma vez que nem todo ensino ou aprendizagem promove desenvolvimento, especialmente quando não há vínculos com os conhecimentos prévios do aprendiz (Cenci; Damiani, 2018). Por esse motivo, dá-se uma especial atenção ao “espaço mental” em que a aprendizagem pode capacitar o sujeito e fazê-lo evoluir seu potencial: a esse espaço nomeamos de Zona de Desenvolvimento Próximo (ou Proximal) (ZDP) (Chaiklin, 2011). Para o “lugar mental” das funções já consolidadas (aprendidas ou apropriadas), atribui-se a Zona de Desenvolvimento Real (ZDR).

Zona de desenvolvimento proximal é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (Vygotsky, 1991, p. 97).

Para compreender sobre o processo de ensino-aprendizagem, alguns experimentos foram conduzidos, em momentos históricos diferentes, embasados nas ideias de Vygotsky sobre o Experimento Formativo que foi apresentado pelo psicólogo russo como um método alternativo e crítico ao modelo de pesquisa positivista, em que o pesquisador se distancia do objeto de estudo e controla suas condições (Freitas; Libâneo, 2022).

2.2 O Experimento Didático Formativo para Vygotsky, Davydov e Hedegaard

Conforme apresentam Freitas e Libâneo (2022), Vygotsky criticava o método de “resposta ao estímulo” que era muito utilizado na Psicologia, pois julgava inadequado para investigar sobre meios e artefatos que o sujeito em observação poderia utilizar para solucionar problemas em contextos variados. Contudo, o pesquisador russo desenvolveu um novo método com base na abordagem materialista dialética.

A abordagem dialética, admitindo a influência da natureza sobre o homem, afirma que o homem, por sua vez, age sobre a natureza e cria, através das mudanças nela provocadas, novas condições naturais para sua existência. Essa posição representa o elemento-chave de nossa abordagem do estudo e interpretação das funções psicológicas superiores do homem e serve como base dos novos métodos de experimentação e análise que defendemos (Vygotsky, 1991, p. 80).

O novo método constituía em três princípios, a saber, o exame em etapas dos principais componentes que formam a história dos processos de desenvolvimento psicológico; descoberta das verdadeiras conexões em movimento que originam os processos psicológicos; investigação dinâmica da origem dos processos psicológicos, considerando a interligação entre presente e passado no desenvolvimento individual (Vygotsky, 1991). A base da investigação sobre o desenvolvimento humano é a análise do pensamento humano desenvolvido historicamente. O método recebeu diferentes denominações, conforme apresenta Engeström (2011): genético experimental, método instrumental, método histórico-genético e método da dupla estimulação.

Independentemente da denominação, o experimento na concepção de Vygotsky consiste no processo de identificar, compreender e explicar a gênese histórica das funções psíquicas humanas em condições concretas, revelando o movimento de seu surgimento e transformação em relações sociais. O método caracteriza-se por centrar-se na atividade do indivíduo durante a intervenção ativa do pesquisador com foco em processos psíquicos em formação (Freitas; Libâneo, 2022, p. 6).

Entretanto, a análise do desenvolvimento do pensamento humano de forma didática foi feita por Davydov, que propôs uma continuação do método do Experimento Formativo de Vygotsky, voltado para a lógica do processo de ensino-aprendizagem. Nas pesquisas de Davydov e sua equipe em escolas públicas da Rússia, o foco era compreender se existiria e como se realizaria a conexão entre a organização dos conteúdos, a aprendizagem e a formação das habilidades psicológicas dos estudantes. Como resultado, instituiu-se a base do sistema de ensino Elkonin-Davydov que é aplicado nas escolas russas desde 1958 (Freitas; Libâneo, 2022). Nesse sistema, o Experimento Formativo sofre intervenções do pesquisador que busca por novas formações psíquicas nos estudantes.

Davydov (1988) defende que, ao estabelecer os conhecimentos a serem adquiridos pelos estudantes nas disciplinas, também sejam consideradas as capacidades lógicas e psicológicas associadas a esses conhecimentos que se esperam ser logradas após realizarem a atividade de estudo. Além disso, Davydov (1988) expressa que, para realizar o Experimento Formativo, deve-se planejar os conteúdos das novas formações psíquicas e estabelecer os caminhos pedagógicos e psicológicos para efetivar essas formações, ao passo que, no processo de investigação desses caminhos, pode-se analisar sobre as origens e as condições necessárias para novas formações.

No Experimento Formativo proposto por Davydov, os estudantes partem da análise dos objetos de situações reais, buscando compreender sobre suas concepções e leis (ainda que de modo abstrato) para, posteriormente, interpretar esses objetos em situações particulares,

compreendendo-o em sua concretude (Hedegaard, 2002). Para efetivar esse método, as tarefas oferecidas aos estudantes precisam ser investigativas e permitir que haja uma transformação material e/ou mental do objeto que é apresentado na tarefa de estudo, a fim de que seja apropriado um conhecimento de natureza dialética sobre o objeto de estudo (Freitas; Libâneo, 2022). Davydov (1988) propôs uma sequência para as ações de estudo em seis etapas:

1º Transformar os dados da tarefa para revelar as relações universais do objeto de estudo - O objetivo desta atividade é reconhecer a relação universal do objeto, a qual deve ser expressa no conceito teórico correspondente. A manifestação da relação universal do objeto se revela no contexto da análise mental, marcando o início do desenvolvimento do conceito. A singularidade desse processo está, de certa forma, na representação do aspecto real dos dados transformados e, por outro lado, na sua atuação como base genética e fonte de todas as características e peculiaridades do objeto integral, estabelecendo uma relação universal do objeto (Davydov, 1988; Silva, E., 2020).

2º Modelar as relações observadas por meio de gráficos, esquemas e outros - Ao expor os objetivos das tarefas, faz-se necessário criar um modelo geral com base nas relações universais do objeto de estudo para solucionar os problemas apresentados. A modelação pode ser feita por meio de representações gráficas, escritas ou objetivas, mas, Davydov (1999) reforça que não são todas as representações que se tornam modelo; apenas aquelas que estabelecem condições para a resolução da tarefa de estudo. O modelo criado será transformado para compreender o objeto em sua forma essencial.

3º Transformar o modelo para compreender o objeto em seu estado “puro” - Embora, no modelo, a relação geral do objeto apareça de forma abstrata, esta ação permite que o estudante compreenda o objeto em sua concretude. As transformações do modelo alteram a relação geral universal, modificando seu núcleo, trazendo novos resultados. O docente desenvolve um papel importante ao orientar os estudantes nesta etapa, pois “a orientação dos escolares para a relação universal do objeto estudado serve de base para formar neles certo procedimento geral de solução da tarefa de aprendizagem e assim formar o conceito do ‘núcleo’ do objeto” (Davydov, 1988, p. 175).

4º Resolver tarefas específicas com o modelo geral estabelecido no modelo - Davydov (1988) defende que, durante esta ação, as crianças convertem a tarefa inicial de aprendizado em diversas tarefas específicas que podem ser solucionadas por um único procedimento geral, assimilado ao longo da execução de ações de aprendizagem anteriores. Silva (2020) reforça que, a partir desta ação, o docente faz interferências gradativas e o

estudante não deve se ater apenas a repetir o método em diversas tarefas, mas lhe é dada a oportunidade de refletir sobre a transformação do objeto de estudo e investigar o método de modo dialético.

5º Analisar os resultados e controlar as ações precedentes - Ao analisar as ações anteriores, verifica-se se houve assimilação dos conhecimentos de modo que o estudante possa fazer conexões, alterar a operacionalidade e realizar mudanças necessárias para resolver a tarefa (Davydov, 1988). Confirmam Libâneo e Freitas (2013) que o acompanhamento desta ação deve assegurar o cumprimento dos requisitos cognitivos e procedimentais estabelecidos pela tarefa, assim como das condições necessárias para sua execução.

6º Avaliar a eficiência do método geral para resolução da atividade de estudo - A avaliação determina se houve efetiva assimilação da relação geral para solucionar a tarefa de estudo, bem como da sua possibilidade de aplicação em variações da tarefa. Silva (2020) e Davydov (1988) ressaltam que é necessário identificar se o resultado corresponde ao objetivo inicial, pois a avaliação não se limita a meramente observar os estágios alcançados nas demais ações, nem se restringe apenas à análise qualitativa substancial do resultado da assimilação, ou seja, se o estudante foi capaz de estabelecer relação entre o procedimento geral e o conceito correspondente, mas a avaliação se realiza em sua confrontação com a finalidade, pois é por meio desta que os estudantes confirmam se resolveram ou não a tarefa.

Essa estrutura surgiu após investigações de Davydov e sua equipe das aplicações nas escolas que adotaram o sistema de ensino Elkonin-Davydov. Nesse sistema, estabeleceu-se que o Experimento Didático Formativo seria longitudinal (em sequência) aplicado a um mesmo grupo de estudantes acompanhado durante três a quatro anos (em um macrociclo). Conforme distingue Zuckerman (2011), o Experimento Didático Formativo de macrociclo permite que um grupo de estudantes seja acompanhado por um longo período, possibilitando analisar além das características psicológicas individuais e investigar sobre as transições do comportamento e desenvolvimento psíquico dos estudantes; já o experimento de microciclo tem uma duração menor (de dias ou semanas) e permite a realização de pesquisas mais específicas cujo objetivo seja verificar hipóteses do desenvolvimento de certas funções psíquicas em um grupo de mesma idade. Freitas e Libâneo (2022) descrevem que um Experimento Didático Formativo de microciclo precisa considerar três etapas:

- 1) determinação de fases e de níveis de qualidade desejados para a ação do aluno, ou seja, qual deve ser a diferença entre sua ação no início e no final da apropriação de um conceito específico; 2) busca de formas para determinar em que ponto um aluno ou turma se encontra e os critérios para identificar se ocorreram em sua ação as mudanças que se esperaria que ocorressem; 3) definição das formas de apoio

pedagógico a determinado nível no desenvolvimento do aluno ou da turma e das formas de atuação pedagógica que levem ao surgimento de mudanças nas funções psíquicas dos alunos (Freitas; Libâneo, 2022, p. 10).

O planejamento do Experimento Formativo em microciclo pode requerer a definição do período de desenvolvimento da atividade de estudo pelos estudantes, bem como de materiais ou recursos que possam auxiliá-los na realização das tarefas (Zuckerman, 2011). Vygotsky e Davydov investigaram sobre as relações entre o conhecimento e as formações psíquicas dos estudantes na realização do Experimento Didático Formativo e, complementando as ideias dos pesquisadores, Hedegaard contribuiu com a análise das relações entre aprendizagem, práticas institucionais, cultura e experiências de vida dos estudantes (Hedegaard, 2020).

Hedegaard propõe que na organização do ensino devem ser contempladas situações didáticas que promovam relações entre o saber científico e o saber vivido de tal modo que os estudantes sejam capazes de utilizar o conhecimento teórico em situações cotidianas, como um duplo movimento do ensino denominado de ensino radical-local (Hedegaard; Chaiklin, 2005). Nessa proposta, as neoformações psíquicas dos estudantes são desenvolvidas e avaliadas ao mesmo tempo em que ocorrem intervenções pedagógicas contextualizadas. Desse modo, o Experimento Didático Formativo possibilita analisar e acompanhar processos psíquicos dos estudantes ainda em desenvolvimento, sendo favorecidos quando colocados em trabalhos coletivos sobre o objeto de estudo (Freitas; Libâneo, 2022). Sobre a necessidade da contextualização e do trabalho coletivo no Experimento Didático Formativo,

antes de participarem da escola, e quando nela já se encontram, as crianças vivenciam práticas socioculturais e institucionais que influenciam sua forma de ser, de conviver e de aprender conteúdos da vida cotidiana e conteúdos de ensino, enfim conteúdos que as constituem como pessoas no mundo em que vivem. O propósito é descobrir como estes conhecimentos podem se transformar em ferramentas que lhes propiciem condições para a construção de uma vida melhor dentro de suas próprias realidades (Silva E, 2020, p. 97).

O Experimento Didático Formativo, nas concepções de Vygotsky, Davydov e Hedegaard, pode contribuir para alcançar o desenvolvimento humano pleno, de modo a conceber situações desencadeadoras de aprendizagem que reflitam no desenvolvimento dos estudantes e possibilitem a exploração dos conhecimentos historicamente adquiridos: esse é o ponto de convergência com a Teoria Histórico-Cultural (Silva, E., 2020).

Para o desenvolvimento da pesquisa apresentada nesta tese, optamos por um recorte do Experimento Didático Formativo ao aplicá-lo a um grupo específico de estudantes de uma única instituição durante um curto período de tempo, dado que o EDF “possibilita investigar a

atividade docente conectada à atividade discente, articulando e integrando aspectos epistemológicos, socioculturais, psicológicos e didáticos” (Freitas; Libâneo, 2022, p. 12). De modo geral, o método do EDF se originou para obter resultados a longo prazo e contribuir com as pesquisas sobre Didática, porém, diante da necessidade de compreender a relação da atividade docente e a atividade dos participantes desta pesquisa, adotamos um EDF em um microciclo, pois a abordagem da RME se centraliza no processo de ensino da Matemática, sem aprofundar questões como o desenvolvimento da Didática e dos processos históricos-culturais da constituição de conceitos matemáticos, o que não se configura como crítica à abordagem de Freudenthal, pois não é objetivo da RME analisar esses aspectos. Freitas e Libâneo (2022) justificam que, desde o início, Davydov

expressou claramente que a validação dos resultados dos experimentos formativos requereria um macrociclo de pesquisa de pelo menos quatro anos. Com efeito, as pesquisas com sua equipe de colaboradores em escolas experimentais e dentro do Sistema Elkonin-Davydov, inserido na estrutura do Ministério da Educação russo, visavam formular programas de conteúdo, método de ensino em áreas de específicas de conteúdo, materiais com orientação metodológica para os professores e materiais didáticos. Nossas pesquisas são realizadas em âmbito acadêmico, não cabendo replicar pesquisas em macrociclos com as mesmas finalidades daquelas realizadas por Davydov e seus colaboradores. O que se busca realizar são experimentos didáticos em microciclos, assumindo-se o desafio teórico-metodológico e prático de utilizar os princípios e procedimentos de investigação iniciados por Vygotsky, desenvolvidos por Davydov e agregando contribuições de Hedegaard (Freitas; Libâneo, 2022, p. 13).

Com base nisso, por se tratar de uma pesquisa acadêmica cujos objetivos estão relacionados ao processo de ensino de conceitos matemáticos em uma situação específica, desenvolvemos um EDF em microciclo concomitante à abordagem da RME. A seguir, descrevemos os embasamentos teóricos da RME.

3 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA: PRECEDENTES

A abordagem de ensino Educação Matemática Realística foi idealizada por Hans Freudenthal (1983) como uma proposta de reformulação do ensino de matemática ditado pelo Movimento da matemática Moderna. Essa abordagem tem suas origens nos projetos educacionais neerlandeses *Wiskobas* e *Hewet* elaborados por membros do *Instituut voor Ontwikkeling van Wiskunde Onderwijs* – sigla IOWO, atual Instituto Freudenthal – a partir do final da década de 1960.

O projeto *Wiskobas* teve a participação de Treffers e membros do IOWO e foi embasado em três campos matemáticos: aritmético, estrutural e empírico (Treffers, 1987). O

projeto *Hewet* contou com a participação dos integrantes do Instituto Freudenthal, incluindo De Lange (1995) que incorporou dados do projeto a sua tese, desenvolvendo os princípios da avaliação por níveis de competência cognitiva e a “Pirâmide de Avaliação” (Passos, 2015). A seguir, descrevemos sobre esses projetos e as ideias de De Lange que contribuíram para o desenvolvimento da abordagem de Freudenthal.

3.1 O projeto *Wiskobas*

Treffers (1987) apresenta no primeiro capítulo de seu livro *“Three Dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas Project”* os antecedentes do projeto *Wiskobas*. A preocupação do grupo de pesquisa para desenvolver o projeto era “como poderiam descrever os objetivos da Educação Matemática para alguém que não está, ou está pouco, familiarizado com esse tipo de educação?”³ (Treffers, 1987, p. 8 – tradução nossa). Como pano de fundo, as tendências da Educação Matemática que emergiam nos Países Baixos, no final dos 1970, foram usadas para compor os objetivos do projeto *Wiskobas*. Os seus pioneiros eram cientistas e professores universitários que estavam relacionados ao sistema educacional neerlandês e de outros países que também estavam reformulando o currículo escolar da educação básica.

Treffers (1987) afirma que os currículos de matemática aplicados pelo mundo se baseavam em três tendências: aritmética, estrutural e empírica. A tendência aritmética surgiu nos Estados Unidos, a estrutural tem origem francesa e a tendência empírica se manifestou, principalmente, na Inglaterra (Treffers, 1987). A primeira tendência se caracteriza pela introdução precoce da linguagem de conjuntos e da formalização de conteúdos matemáticos pouco aplicáveis à realidade, com mudanças que não diferem tanto em relação ao ensino da matemática no passado. Conhecida também por “Nova matemática”, essa tendência apresentou tópicos de Geometria, Estatística, Probabilidade e Funções, mas manteve uma abordagem de “teoria e treino” amparada por livros didáticos.

A tendência estrutural enfatiza as estruturas matemáticas e apresenta tópicos de Lógica, Álgebra Linear, Números, Probabilidade e Relações. Entretanto, Treffers (1987) apresenta um contraponto para essa tendência: o aprendizado a partir de “questões de valores” tem sua relevância, mas não deve se limitar a matemática pela matemática, pois há uma

³ Original: “How should mathematics education goals be described to someone who is not, or is insufficiently, acquainted with this type of education?”

necessidade de partir de situações reais, das interações dos seres vivos com sua sociedade e meio.

A terceira tendência considera como ponto de partida as vivências dos estudantes, apresentando os conteúdos matemáticos aplicados à realidade como nos processos de medição, no reconhecimento de formas geométricas na natureza e da utilização de funções para modelar situações do dia a dia. O problema dessa tendência é o surgimento de uma coleção de atividades desorganizadas, pois não há registros sistematizados dessas atividades. Durante a experimentação de uma década em escolas de classes primárias⁴, constatou-se que os professores que adotaram essa tendência abandonaram os esquemas e trabalharam sem orientação escrita, possibilitando que os estudantes replicassem esse comportamento em outras fases da vida escolar (Biggs, 1971).

Tendo em vista o que estava acontecendo com o ensino de matemática no mundo, diversas conferências foram realizadas nos Países Baixos para repensar o currículo matemático. Em 1968, surge um novo programa para as escolas neerlandesas.

Nesse mesmo ano, a Comissão de Modernização do Currículo de matemática deu início ao novo projeto denominado *Wiskobas* - ou seja: matemática no ensino fundamental. Seu objetivo: a inovação da educação matemática em nível nacional por meio da instrução em faculdades de formação de professores (Treffers, 1987, p. 11 – tradução nossa⁵).

O projeto ganha força e passa a ser desenvolvido no IOWO, a partir de 1971. Desenvolvido em três fases, o *Wiskobas* foi aplicado em todas as escolas neerlandesas de ensino fundamental (idades dos estudantes entre 4 e 12 anos) e abrangeu as três tendências em Educação Matemática mencionadas anteriormente. Descrevemos as fases do projeto *Wiskobas* a seguir, conforme apresentado por Treffers (1987).

3.1.1 Fase exploratória (1971-1973)

Muitos conteúdos matemáticos foram explorados nessa fase e a equipe do IOWO analisou os livros didáticos de matemática da época a fim de reformulá-los, produzindo um novo material com algumas instruções sobre como desenvolver o trabalho docente na sala de aula. Esse material foi testado na “escola modelo” (Treffers, 1987, p.11 – tradução nossa) e os

⁴ Refere-se às turmas de estudantes entre 4 e 12 anos de idade.

⁵ Original: *In that same year the Commission for Modernization of the Mathematics Curriculum started the new project named Wiskobas - meaning: mathematics in the elementary school. Its purposes: the innovation of mathematics education on a national level through instruction at teacher training colleges.*

rascunhos resultantes de uma série de atividades aplicadas sobre diferentes assuntos matemáticos serviram para compor os textos do curso de formação de professores. Esse curso era oferecido pela própria equipe do IOWO para professores em formação inicial e para aqueles que já exerciam a docência. As experimentações e ideias que surgiram nessa fase foram publicadas no Boletim *Wiskobas*.

Nas escolas de formação de professores, as instruções direcionavam para o desenvolvimento de novas ideias para ensinar matemática no ensino fundamental, levando em consideração aspectos da Educação Matemática que eram discutidos e explorados no projeto *Wiskobas*. O conjunto de atividades foi enriquecido durante a fase de experimentação com a realização de conferências de quatro dias que contavam com a participação de professores, formadores de professores e conselheiros. Nessas conferências eram discutidos conteúdos curriculares, sugestões e visões sobre Educação Matemática, além de estratégias de desenvolvimento educacional. Ao final das conferências, as ideias eram transcritas para o livro guia dos professores, o *Mathematica*, que continha uma visão geral de atividades matemáticas destinadas ao ensino fundamental, também apresentava algumas reflexões matemáticas sobre assuntos relevantes e uma descrição de diversos tópicos educacionais. A partir de 1973, iniciou-se a segunda fase do projeto.

3.1.2 Fase de integração (1973-1975)

Durante a fase de integração, buscava-se elaborar um “currículo exemplar” (Treffers, 1987, p. 12 – tradução nossa) de matemática para o ensino fundamental. Esse currículo foi desenvolvido na escola modelo e passou por um ciclo com fases de rascunho – experimentação – revisão. Todo o seu desenvolvimento foi publicado no Boletim *Wiskobas*. No final dessa fase, uma visão geral do currículo exemplar foi publicada.

O objetivo da visão geral desse currículo era orientar o movimento de inovação da Educação Matemática neerlandesa. O currículo era um ponto focal entre a heterogeneidade do ensino de matemática e funcionava como uma base para o desenvolvimento de outros projetos para formação de professores, aplicações em sala de aula e formulação de material didático. Entretanto, a visão geral do currículo publicada no boletim não era uma diretriz a ser implantada em todas as escolas, como explica Treffers (1987).

A visão geral, entretanto, não pretendia ser uma diretriz para a educação cotidiana. Era um documento de discussão, uma fonte de inspiração, uma base para a

formação, ao invés de um programa. Aliás, para esse objetivo era muito breve, muito exemplar, e o projeto do currículo estava muito estreitamente vinculado a uma escola em particular para ser usado como um exemplo a ser seguido por todos. No entanto, o espírito deste currículo de exemplo podia ser apreendido nesta publicação. Nesse sentido, em suma, [a visão geral] era útil (Treffers, 1987, p. 12 – tradução nossa⁶).

A publicação da visão geral do currículo exemplar marca o fim da fase de integração e inicia o período de finalização do projeto, em que a equipe de pesquisadores e educadores começam a analisar os resultados da implementação do *Wiskobas*, as reformulações necessárias e o futuro da Educação Matemática neerlandesa.

3.1.3 Resultados, desenvolvimento posterior e pesquisa (1975-1977)

Durante este período, partes do currículo desenvolvido no *Wiskobas* foram elaboradas em outras publicações. Os programas e oficinas de formação de professores continuaram, mas novas atividades foram associadas, tais como:

- a) investigar certas áreas do ensino de matemática, caracterizadas por problemas específicos de aprendizagem e ensino ou assuntos que foram pouco estudados, como frações, geometria e uso de calculadoras;
- b) intensificar a cooperação entre *Wiskobas* e *Wiskivon*, um projeto do IOWO responsável pelo ensino da matemática para o grupo de estudantes na faixa de 12 a 16 anos;
- c) analisar extensamente livros de matemática;
- d) estudar sobre os métodos usados nas escolas primárias neerlandesas;
- e) apoiar as equipes de autores de livros didáticos de matemática;
- f) dar suporte às equipes escolares que, após realização de um curso de formação com duração de dois anos, passavam a implementar o currículo para o ensino de matemática.

Muitas das atividades iniciadas em 1971 procederam nos anos seguintes, além da ampliação de trabalhos envolvendo as mídias da época, como rádio e televisão, pesquisas com grupos locais interessados no ensino de matemática, realização de conferências e encontros com professores, formadores de professores e demais membros da gestão escolar. A partir de 1977, ampliaram-se as pesquisas sobre primeiros conceitos de número, aritmética, fração e

⁶ Original: *The overview was, however, not meant as a directive for everyday education. It was a discussion document, a source of inspiration, a foundation for training, rather than a syllabus. As a matter of fact for this aim it was too brief, too exemplary, and the curriculum design was too closely knitted to one particular school to be used as an example for all to follow. However, the spirit of this example curriculum can be grasped from this publication. In this sense it was generally useful.*

proporção, assuntos que eram insuficientemente considerados antes desse movimento de reformulação do ensino de matemática (Treffers, 1987).

Programas de formação de professores foram inspirados no *Wiskobas* e outros projetos foram desenvolvidos para séries mais avançadas, como é o caso do projeto *Hewet*, desenvolvido a partir de 1981, em duas escolas experimentais de ensino secundário, equivalente ao Ensino Médio brasileiro (Verhage; De Lange, 1987).

3.2 O projeto *Hewet*

Embasado na filosofia da RME, o projeto *Hewet* buscava um ensino da matemática pautado em situações realísticas que possibilitassem o desenvolvimento de conceitos matemáticos e não somente a aplicação desses conceitos ao cotidiano (Verhage; De Lange, 1987). Grupos de estudantes (16 a 18 anos, que estudavam no quinto ou sexto ano escolar neerlandês) poderiam escolher entre dois cursos diferentes, matemática A e matemática B, ambos pensados a nível pré universitário, mas o primeiro curso se destinava a estudantes que não seguiriam carreiras científicas.

Os materiais foram desenvolvidos por um grupo de educadores matemáticos e por pesquisadores do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Centro Educacional de Computação (tradução de “*Research Group on Mathematics Education and Educational Computer Centre*”, sigla O.W. & O.C., em neerlandês) da Universidade de Utrecht. Todas as tarefas realizadas pelos estudantes foram observadas pelo grupo de pesquisadores, durante os cinco anos de duração do projeto. Discussões com estudantes e professores participantes auxiliaram nos ajustes dos materiais. Após dois anos de experimentos, o projeto foi expandido para outras 10 escolas; no ano seguinte, mais 40 escolas participavam do projeto *Hewet*. Em 1985, todas as escolas neerlandesas adotaram o novo currículo de matemática e, em 1987, o primeiro exame nacional de matemática foi realizado para verificar os resultados do projeto.

3.2.1 O curso de matemática A

Na grade curricular do curso matemática A, buscava-se integrar conceitos matemáticos à modelagem e suas aplicações, à introdução de novos conceitos a partir de situações reais, à estruturação horizontal unificada, ao uso de computadores, à colaboração e interatividade, às

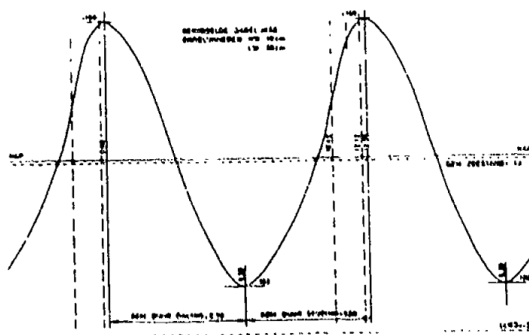
resoluções corretas e não únicas. Inicialmente, o projeto *Hewet* foi implantado em duas escolas experimentais, no ano de 1981.

Verhage e De Lange (1987) descrevem que, na década de 1980, poucos estudantes neerlandeses se tornariam matemáticos profissionais, pois muitos almejavam as ciências contábeis, a medicina, a economia, entre outras áreas e havia necessidade de elaborar um currículo voltado para o uso da matemática de forma aplicada às diversas realidades, sem tanto rigor ou formalidade. Para atender a essa demanda, o programa de estudos oferecido pelo curso de matemática A focava em três assuntos: Cálculo Aplicado; Álgebra Linear e Matrizes para programação; Probabilidade e Estatística. Em todas as disciplinas, o uso de computador era essencial.

3.2.2 Exemplos das tarefas do curso “matemática A”

A modelagem matemática estava presente em muitas tarefas do curso de matemática A. Observe a Figura 3 que mostra um gráfico a respeito da altura média anual das marés de uma cidade costeira dos Países Baixos, Vlissingen.

Figura 3 - Gráfico da altura média anual das marés de Vlissingen.



Fonte: Verhage; De Lange (1987, p. 1206).

Aos estudantes foi apresentada a seguinte questão em relação ao gráfico: “Encontre um modelo simples (trigonométrico) para descrever o movimento das marés.” (Verhage; De Lange, 1987, p. 251). As investigações levaram às seguintes funções:

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad [1]$$

$$g(x) = 190 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 8 \quad [2]$$

$$h(x) = 190 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{6,2} \right) \quad [3]$$

Após análise das funções, os estudantes foram convidados a identificar o melhor modelo, explicá-los e identificar as adaptações necessárias. Verhage e De Lange (1987) relatam que

$f(x)$, ficou claro [para os estudantes] que era um modelo muito grosseiro: a amplitude era “mais ou menos igual a dois metros” e o período foi de 4π ou 12.56, o que não está “muito longe” de 12 horas e 25 minutos.

$g(x)$, conforme uma estudante explicou, era melhor em relação à amplitude: a amplitude de 190 cm, juntamente com uma translação vertical de 8 cm, coincidiu com as marés altas e baixas, o que foi muito relevante para ela.

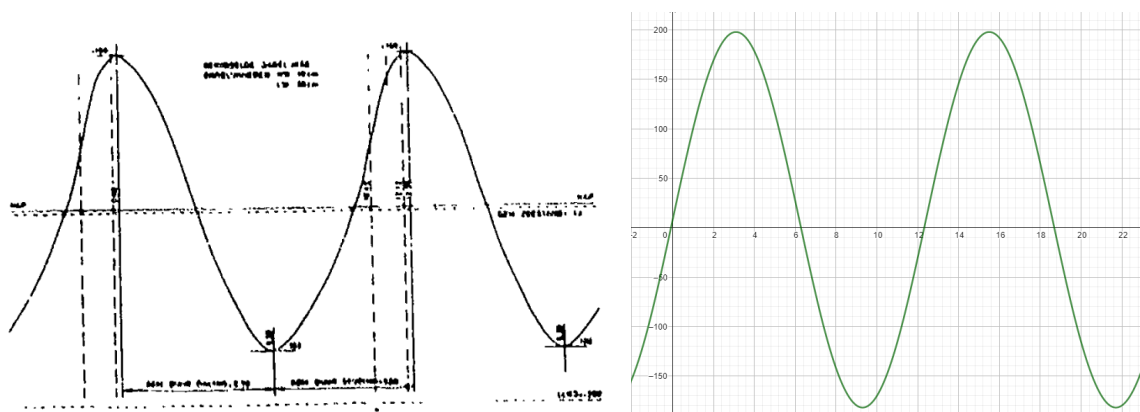
$h(x)$, [segundo um estudante], era mais preciso sobre o período. Este menino considerou o período mais relevante “porque você tem que saber quando a maré está alta” e o período proposto por este modelo foi de 12 horas e 24 minutos, o que, realmente, é muito próximo [ao real] (Verhage; De Lange, 1987, p. 251- tradução nossa⁷).

Encerradas as discussões, os estudantes concluíram que a função

$$k(x) = 190 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{6,2} \right) + 8 \quad [4]$$

era o melhor modelo matemático para a situação. Na Figura 4, é possível comparar o gráfico apresentado na tarefa com o gráfico da função [4].

Figura 4 - Comparação do gráfico da Figura 3 e o gráfico da função $k(x)$.



$$k(x) = 190 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{6,2} \right) + 8$$

Fonte: Adaptado de Verhage; De Lange (1987, p. 1206).

⁷ Original: “ $f(x)$, that was clear was a very rough model: the amplitude was ‘more or less equal to two meters’ and the period was 4π or 12,56 which is not ‘far away’ from 12 hours 25 minutes. $g(x)$, as the girl explained, was better in respect to the amplitude: the amplitude of 190 cm, together with a vertical translation of 8 cm gave exactly the proper high and low tides, which was very relevant to her. $h(x)$, was more precise about the period. This boy considered the period more relevant ‘because you have to know when it is high tide.’ the period proposed by this model was 12 hours and 24 minutes, which really is very close.”

Outro exemplo de tarefa desenvolvida durante o projeto *Hewet* foi o uso do conceito de multiplicação de matrizes no cotidiano de uma loja de roupas. Conforme Verhage e De Lange (1987, p. 252), a tarefa solicitava que os estudantes descobrissem o lucro, preços de venda e custo de acordo com o tipo e tamanho da roupa - Ver ANEXO A.

Os estudantes concluíram que o resultado da multiplicação entre as matrizes de tamanho e preços era uma nova matriz que indicava o lucro, preços de venda e de custos conforme variava o tamanho dos jeans. Esse conceito é comum em uma loja de roupas e pode mostrar a importância das matrizes nesse contexto, ainda que o conceito esteja implícito (Verhage; De Lange, 1987). De fato, os conceitos matemáticos e os métodos formais podem ser mostrados sem contexto, mas uma situação bem escolhida permite aos estudantes reconstruir os conceitos novamente, se necessário.

3.2.3 Estratégias para inovação e a formação continuada

Conforme relatam Verhage e De Lange (1987), os educadores matemáticos precisaram se adaptar ao curso de matemática A e, para alguns, o que era oferecido se afastava daquela matemática axiomática e formalizada, pois a matemática A parecia mais intuitiva, realista e subjetiva. Nesse sentido, alguns professores tiveram algumas dificuldades no início do projeto.

Diante da situação, os pesquisadores precisavam encontrar alternativas para a resistência de educadores matemáticos ao expandir o projeto. Era preciso convencê-los que a matemática A, embora fosse diferente, ainda era matemática. Desse modo, a equipe de pesquisadores deveria estar próxima aos professores: nas primeiras escolas em que o projeto foi implantado, todas as aulas foram observadas diretamente pelos pesquisadores; em 10 escolas, foram ofertados cursos de formação continuada ministradas pela equipe do projeto *Hewet*; nas demais escolas, os educadores participaram de cursos organizados por formadores regulares de professores. De um modo geral, os professores participantes mudaram sua postura, positivamente, após realizarem as formações.

Muitos artigos foram publicados a respeito do desenvolvimento do projeto *Hewet*, entretanto, percebeu-se a necessidade de um contato presencial com educadores de todo o país (Verhage; De Lange, 1987). Assim, conferências, oficinas e cursos de formação foram realizados pela equipe de pesquisadores e, por questões geográficas, foi possível atender a

maioria das escolas. Contudo, o currículo matemático neerlandês passou por uma transformação e adotou o ensino de uma matemática intuitiva e realista.

3.2.4 Os resultados percebidos pelos estudantes neerlandeses e pelos pesquisadores

Inicialmente, os estudantes sentiram dificuldades com a nova abordagem apresentada no curso de matemática A. Embora os estudantes pudessem realizar a escolha pelo curso A ou B, os pesquisadores notaram que o modo como foi conduzido o curso de matemática A causou estranhamento aos discentes. Verhage e De Lange (1987) citam um exemplo: ao apresentar a opção “nenhuma resposta correta” ou “há várias possibilidades de respostas”, os estudantes se incomodavam e não aceitavam que isso fosse possível em um universo matemático. Assim como os docentes, no início do projeto, houve uma resistência que precisou ser superada ao longo dos anos.

Nas duas primeiras escolas em que o projeto *Hewet* foi aplicado, os professores realizaram uma entrevista com os estudantes participantes para identificar suas reações sobre os contextos utilizados nas tarefas e ao processo de matematização, ao qual definiremos na seção 3.4 desta tese. As entrevistas foram gravadas em formato de áudio. Parte da entrevista pode ser consultada no ANEXO B.

Ao questionar os estudantes sobre o uso de histórias e situações contextualizadas nas aulas de matemática, os estudantes comentam que isso os ajudou a compreender as ideias e conceitos matemáticos envolvidos, dando-lhes sentido e significado para serem estudados. Em algumas falas, os estudantes revelam que “tudo fica claro” quando há exemplos reais, mas confessam que essa abordagem é muito diferente do que estavam acostumados, em que as definições e exemplos eram apresentados, logo em seguida, os exercícios eram resolvidos e não havia alternativa para aqueles que não compreenderam o conteúdo que não fosse decorá-lo, como afirma a estudante Laura na entrevista:

“É por causa das histórias que fica claro para mim qual é a ideia, do que se trata. No meu caso, a falta de algo sendo contado foi o que não me permitia entender. Eu não sabia o que era e só tinha aprendido decorando. Aqui há uma história em torno disso e tudo, simplesmente, acontece de forma natural” (Verhage; De Lange, 1987, p. 254 - tradução nossa⁸).

⁸ Original: “It's because of those stories that it's clear to me what the idea is, what it's about. In my case the lack of anything being told was why I didn't understand it. I didn't know what it was about and had to learn it by heart. Here there's a story around it and it just happens as a matter of course.”

Os pesquisadores concluíram que, após a implantação do projeto *Hewet*, mais jovens se interessaram por matemática, em especial, a quantidade de meninas nesses cursos aumentou consideravelmente. Antes do projeto, 72% dos estudantes optavam pelo curso de matemática; após o projeto, esse número alcançou a marca dos 90%. Entretanto, dois aspectos desse projeto precisavam ser revistos: a resistência dos professores e a avaliação.

Por se tratar de uma abordagem intuitiva, subjetiva e realista para o ensino da matemática, as avaliações precisavam de adaptações e novos objetivos. O que deveria ser testado no curso de matemática A? Essa era a questão levantada pelos pesquisadores após analisarem os resultados de cinco anos de projeto. Outros projetos foram desenvolvidos a partir dos resultados obtidos pela equipe do *Hewet* e tiveram como base a mesma filosofia: uma Educação Matemática Realística.

3.3 Freudenthal e a Educação Matemática Realística

Diante dos desafios que o currículo neerlandês apresentava, Hans Freudenthal questionava os objetivos da abordagem de ensino da matemática que era adotada até a década de 1960. Gravemeijer e Terwel (2000) relatam que

Durante sua vida profissional, as visões de Hans Freudenthal contradiziam quase todas as abordagens contemporâneas da “reforma” educacional: a “nova” matemática, objetivos operacionalizados, formas rígidas de avaliação, pesquisa empírica quantitativa padronizada, uma estrita divisão de trabalho entre pesquisa e desenvolvimento de currículo, ou entre desenvolvimento e implementação (Gravemeijer; Terwel, 2000, p. 777 - tradução nossa⁹).

Freudenthal se dedicou à matemática Pura e desenvolveu muitos trabalhos no campo da Topologia, bem como orientou o casal Van Hiele, responsável pela identificação dos níveis do pensamento geométrico. Entretanto, como indica Wittmann (2005), Freudenthal percebeu as fragilidades do sistema de ensino matemático neerlandês e buscou reunir pesquisadores para encontrar alternativas mais assertivas ao ensino de matemática. Freudenthal montou seu grupo na Universidade de Utrecht e “tinha reunido uma equipe de educadores matemáticos altamente criativos, entre eles Aad Goddijn, Fred Goffree, Martin Kindt, Jan de Lange, Ed de Moor, Leen Streefland, George Schoemaker e Adri Treffers.” (Wittmann, 2005, p. 295).

⁹ Original: “During his professional life, Hans Freudenthal’s views contradicted almost every contemporary approach to educational ‘reform’: the ‘new’ mathematics, operationalized objectives, rigid forms of assessment, standardized quantitative empirical research, a strict division of labour between curriculum research and development, or between development and implementation”.

Freudenthal realizou trabalhos notáveis na Topologia, Geometria, Lógica, Álgebra, inclusive escreveu um livro didático a respeito Probabilidade e Estatística. Além disso, escreveu extensivamente sobre Educação Matemática e Bass (2005) relata que Freudenthal era um excelente linguista, ao passo que desenvolveu uma proposta para se comunicar com extraterrestres.

Nascido e educado na Alemanha, Freudenthal assumiu seu primeiro cargo com Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 - 1966) em Amsterdã, às vésperas do Holocausto. Em 1940, com a invasão alemã nos Países Baixos, Freudenthal precisou se esconder durante a guerra, devido à sua origem judaica. Durante esse tempo escreveu romances e ganhou um concurso ao qual entrou usando o nome de um amigo não judeu.

Ao considerar a matemática como uma atividade humana, Freudenthal defendia que o ensino matemático deveria seguir o mesmo caminho e se apropriar dos fenômenos realísticos que, em suas palavras, “imploram para serem organizados” (Bass, 2005, p. 420). A esse processo de organização chamou de matematização, conceito que desenvolvemos nas seções a seguir. Se opondo às abordagens dedutivas que formalizam o geral para ser aplicado ao específico, Freudenthal propôs uma alternativa em que os conceitos são desenvolvidos a partir do concreto para a generalização.

Crítico das metodologias da sua época, o matemático neerlandês acreditava em uma matemática acessível a todos, com aulas heterogêneas e por isso promulgou experimentos instrucionais a partir dos quais desenvolveu ideias curriculares e pedagógicas, além de construir instituições duradouras que continuam a levar seu legado. Em 1927, na Universidade de Berlim, Freudenthal compareceu a uma palestra ministrada por Luitzen Egbertus Jan Brouwer, um seguidor do intuicionismo, uma corrente filosófica matemática que faz parte do construtivismo.

Mondini (2008) complementa afirmando que, embora o logicismo tenha servido como base para o desenvolvimento da Lógica matemática Moderna, também deu origem a um segundo grupo de matemáticos que, ao contrário dos logicistas, buscaram sistematizar a matemática a partir da intuição. Esse grupo formou o movimento intuicionista. De acordo com a descrição de Snapper (1984), os intuicionistas acreditavam que entidades abstratas, como a matemática, são criações humanas e não objetos idealizados, como defendido por Platão. Por esse motivo, a matemática estaria sujeita a erros inerentes à sua própria natureza. A abordagem intuicionista da matemática baseia-se na intuição humana e, portanto, é considerada uma atividade humana.

Após conhecer Freudenthal, Brouwer o convidou em 1930 para ser seu assistente na Universidade de Amsterdã. A influência do intuicionismo, defendido por Brouwer, inspirou o trabalho de Freudenthal. Em maio de 1940, a Alemanha invade a região dos Países Baixos e outros países. Devido à guerra e à perseguição nazista, Freudenthal, sendo judeu, teve que interromper suas atividades na Universidade de Amsterdã. Após a liberação dos Países Baixos pelas tropas canadenses em 1945, Freudenthal retornou ao trabalho no ano seguinte, assumindo um cargo de professor em Utrecht, onde permaneceu até se aposentar em 1975. Em 1990, Freudenthal faleceu enquanto estava sentado em um banco de parque próximo à sua casa, mas antes de sua morte, em 1960, recebeu o título de doutor honorário da Universidade de Berlim. Conforme observado por Van Est (1991)

Talvez esse doutorado honorário também possa ser visto como uma forma disfarçada de gratidão a Freudenthal pelo que ele significou para Amsterdã. Do mesmo modo, muitos com grande apreço e respeito pessoal continuarão a se lembrar desse erudito excepcional (Van Est, 1991, p. 142).

Embora já houvesse discussões sobre práticas educacionais em matemática nos Países Baixos e em outros países, Freudenthal trouxe uma série de contribuições significativas para o campo da Educação Matemática (Gravemeijer; Terwel, 2000). Wittmann (2005) descreve que, dentre as instituições, Freudenthal foi presidente da Comissão Internacional de Instrução matemática (*International Commission on Mathematical Instruction* - ICMI); desenvolveu uma revista internacional em Educação Matemática chamada Estudos Educacionais em Educação Matemática (*Educational Studies in Mathematics Education* - ESM), publicada pela primeira vez em 1968; organizou o Congresso Internacional em Educação Matemática (*International Congress in Mathematics Education* - ICME), em Lyon em 1969; além de estabelecer um grupo de pesquisa em Educação Matemática na Universidade de Utrecht (*Instituut Ontwikkeling Wiskundeonderwijs* - IOWO), em 1971.

Freudenthal se preocupava com questões fundamentais sobre o ensino de matemática às quais também buscavam respostas outros pensadores contemporâneos ao educador neerlandês: nos Estados Unidos e na Alemanha, o currículo matemático estava passando por reformas. Gravemeijer e Terwel (2000) dissertam que saber “o que deve ser ensinado”, “para qual propósito” e “para quem” eram algumas das preocupações que originaram o estudo da Didática. Freudenthal criticava as teorias educacionais de sua época, pois o conceito de “Didática” estava associado a uma teoria pedagógica com metodologias que buscavam a formação essencialmente profissional (a que chamava de *Ausbildung*), ao passo que se deveria

buscar a formação integral do indivíduo, almejando o desenvolvimento do conhecimento, o respeito às normas e a valorização da cultura (*Bildung*) (Gravemeijer; Terwel, 2000).

Adotando uma teoria fenomenológica da Educação Matemática que tem seu ponto de partida na prática da educação e do ensino, e não na transmissão da matemática como um sistema definido e imutável, algumas das suas principais ideias, como a “reinvenção guiada” e a crítica da “inversão antididática” do ensino tradicional, provavelmente foram inspiradas no movimento da reforma pedagógica da época (Gravemeijer; Terwel, 2000).

Wittman (2005) revela que no quinto ano da IOWO, Freudenthal destaca a importância da instituição ao afirmar que

“IOWO não é um instituto de pesquisa; seus membros não se consideram pesquisadores, mas produtores de instruções, como engenheiros no campo da Educação ou como desenvolvedores de currículo. A Engenharia precisa de pesquisa e pode produzir outras pesquisas como resultados. [...] Seu núcleo é o nosso trabalho produtivo, representado por alguns exemplares, e incorpora nossas visões sobre a matemática como uma atividade humana e sobre o desenvolvimento do currículo como uma atividade de sala de aula, guiados por desenvolvedores de currículo, em contato próximo com todos aqueles interessados em educação matemática” (Freudenthal por Wittmann, 2005, p. 296 - tradução nossa¹⁰).

No IOWO foi desenvolvida a concepção curricular de matemática, chamada de Educação Matemática Realística como uma contraproposta ao ensino tradicional, relacionando conceitos matemáticos ao mundo real, no entanto, aspectos estruturais da matemática eram remanescentes na RME no início da década de 1970. (Gravemeijer; Terwel, 2000).

Entretanto, conforme argumenta Wittmann (2005), à medida que a RME se espalhava por quase todo o mundo, a pesquisa em Educação Matemática se distanciava da rigorosa matemática, passava de uma orientação unilateral para aplicações “superficiais” que avaliavam os estudantes por uma série de “competências” e não pelo domínio de conceitos matemáticos. Pouco a pouco, a essência matemática se dissipava. O resultado era uma espécie de “luz RME” que não garantia uma preparação suficiente para estudos acadêmicos. Provavelmente, poderia ser outra razão para o declínio do número de estudantes neerlandeses que estivessem interessados em matemática ou Ciências. Ainda assim, educadores se

¹⁰ Original: “IOWO is not a research institute; its members do not regard themselves as researchers but as producers of instruction, as engineers in the educational field, as curriculum developers. Engineering needs background research and can produce research as a fall-out. [...] Its nucleus is our productive work, represented by a few specimens, and embodies our views on mathematics as a human activity and on curriculum development as a classroom activity, guided by curriculum developers, in close contact with all those interested in mathematics education.”

esforçavam e buscavam propostas que modernizassem o ensino de matemática, como uma alternativa aos sistemas mecanicista, empirista e, especialmente, estruturalista da Matemática Moderna, que predominava naquela época (Ferreira, Buriasco, 2016). No Quadro 1 há uma sistematização das estruturas de ensino da matemática.

Quadro 1 - "Algumas características das abordagens mecanicista, estruturalista e empirista."	
Abordagem	Algumas características
Mecanicista	A ênfase recai nos cálculos em problemas que envolvem números diretamente, com pouca consideração dada às suas aplicações. O ensino da matemática é fragmentado, com os problemas de contexto sendo apenas usados como um campo de aplicação após a aprendizagem. O conteúdo matemático é segmentado em partes desvinculadas, onde os estudantes aprendem métodos de resolução fixos e são treinados individualmente por meio de exercícios. O problema em si não é considerado como ponto de partida para o aprendizado.
Estruturalista	Método influenciado pelo Movimento da matemática Moderna. O problema é introduzido simultaneamente ao estudo do conteúdo necessário para sua resolução. Após lidar com um problema, os estudantes devem demonstrar sua compreensão por meio da resolução de outro problema.
Empirista	Os estudantes são incentivados a realizar investigações, muitas vezes com liberdade para explorar por conta própria. Há um foco significativo na etapa inicial de esquematização por parte dos estudantes ao resolver um problema, incentivando-os a formular hipóteses, às quais são discutidas e testadas. Menos ênfase é colocada no fechamento matemático após a resolução dos problemas. Os estudos são iniciados a partir dos interesses dos estudantes.
Fonte: Adaptado de Silva (2015, p. 14-15).	

Para entender os conceitos matemáticos, é crucial ver a matemática como uma atividade humana. Isso significa adotar uma perspectiva que vai além de simples definições, algoritmos e equações, e vê-la como um processo de estruturação da realidade. Além disso, devemos explorar essa realidade utilizando objetos e conceitos matemáticos (Lopez; Ferreira; Buriasco, 2014).

Freudenthal (1991) ressalta a importância de “fazer matemática” e que poderíamos “repetir o processo de aprendizagem da humanidade, não como aconteceu de fato, mas como

seria feito se as pessoas no passado tivessem conhecido um pouco mais do que sabemos agora¹¹.” (Freudenthal, 1991, p. 48 – tradução nossa), logo

Pensar em uma matemática possível de ser transferida significa pensar que alunos “aprendem” ao armazenar e reproduzir informações, assim como, por exemplo, robôs e computadores. Quem “recebe” não participa da escolha de quais informações vai receber e, muito menos, da decisão de quais são importantes para serem “armazenadas”, de quando aplicá-las, para quê e/ou por que elas são relevantes, ou ainda, como foram obtidas. Essa poderia ser adjetivada como uma “atividade robótica”, “atividade cibernética”, mas não humana (Lopez; Ferreira; Buriasco, 2014, p. 249).

Com o objetivo de romper com o ensino tradicional, em que a matemática é imposta e transmitida aos estudantes, Freudenthal (1973) propõe a "reinvenção guiada". Nesse processo, os conceitos e ferramentas matemáticas não são apresentados antecipadamente, seguidos por exercícios, por exemplo. Em vez disso, os estudantes têm a oportunidade de explorar e descobrir esses conceitos por si próprios. Pressupõe-se que haja uma preparação, na forma de um "guia", que facilite a experimentação e a reinvenção do conceito matemático a ser ensinado.

3.4 Matematização, reinvenção guiada e fenomenologia didática

Defendendo a abordagem da reinvenção guiada, Freudenthal (1973) sustenta que, por meio desse método, os estudantes adquirem um aprendizado "melhor", pois estão vivenciando a matemática, o que pode contribuir para a apropriação do conhecimento em comparação com a imposição do mesmo. Outro argumento apresentado pelo autor é que a (re)descoberta dos conhecimentos matemáticos pode ser uma atividade prazerosa e motivadora, pois permite que o sujeito faça escolhas durante o processo e envolva também suas emoções, uma vez que,

por serem construídos a partir das próprias ações, elaborações e produções dos estudantes, os conteúdos matemáticos tornam-se significativos para eles e, dessa forma, dificilmente serão esquecidos, como usualmente acontece com conteúdo ensinados de forma mecânica e decorada. Além disso, informações decoradas raramente podem ser aplicadas em contextos diferentes dos que foram transmitidos, já os conhecimentos elaborados por meio de matematização podem permitir um leque maior de aplicabilidade [...] (Lopez; Ferreira; Buriasco, 2014, p. 250).

Na abordagem da reinvenção guiada, o foco principal é a atividade em si e sua execução, ao invés dos objetos e produtos finais (Freudenthal, 1973). A matematização é fundamental para o desenvolvimento e realização da atividade, permitindo que os estudantes

¹¹ Original: “[...] repeat the learning process of mankind, not as it factually took place but rather as it would have done if people in the past had known a bit more of what we know now”

utilizem suas próprias ferramentas e conceitos matemáticos para atingir resultados, realizando processos de abstração, esquematização e formulação sem a necessidade de entender imediatamente os conceitos subjacentes. Gravemeijer e Doorman (1999) afirmam que a reinvenção guiada ocorre durante o processo de matematização, onde os estudantes tentam resolver problemas em diversos contextos e níveis de entendimento, compartilhando soluções para avançar para níveis mais complexos.

Outro aspecto importante da abordagem de reinvenção guiada é que as tarefas podem ser entendidas em diferentes níveis de compreensão, não apenas dentro de uma tarefa específica, mas também ao comparar diversas tarefas realizadas, dado que cada indivíduo tem seu próprio nível de entendimento da realidade (Lopez; Ferreira; Buriasco, 2014). Segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (1998), um dos benefícios desse método é a possibilidade do estudante compreender o mesmo conceito em vários níveis, o que lhe permite resolver a mesma tarefa em diferentes contextos.

Se a matemática tem sua origem na matematização da realidade, é lógico que a aprendizagem matemática também deve se basear nesse processo de matematização (Freudenthal, 1991; Van Den Heuvel-Panhuizen, 1996). Nesse contexto, a "fenomenologia didática" proposta por Freudenthal (1983) visa identificar fenômenos que possam iniciar esse processo. Lopez, Ferreira e Buriasco (2014) esclarecem que, nesta abordagem, os fenômenos (situações do mundo real) são analisados e explorados para despertar o interesse dos estudantes, permitindo que eles criem cenários onde a matemática é necessária para resolver problemas. O termo "realística", usado para descrever a abordagem didática de Freudenthal, refere-se ao fato de que os fenômenos da realidade, mesmo que imaginários, são considerados como catalisadores para a aprendizagem (Van Den Heuvel-Panhuizen, 1996; Lopez; Ferreira; Buriasco, 2014).

Assim, a prática da matematização, enquanto atividade humana, permite que os indivíduos reinventem a matemática ao experimentar fenômenos que podem ser imaginários e que ressaltam conceitos matemáticos. Isso contribui para o principal objetivo da abordagem da matemática Realística, que é aprimorar as habilidades matemáticas dos estudantes, conforme destacado por De Lange (1999). Na abordagem da RME, os problemas apresentados durante o processo de ensino-aprendizagem devem ter contextos que possam ser traduzidos em termos matemáticos, incentivando a aplicação da matemática que se deseja ensinar e oferecendo aos estudantes oportunidades para desenvolver suas próprias respostas e estratégias. Esses contextos não precisam necessariamente se referir a situações cotidianas;

podem ser imaginários e fantásticos, mas devem ser concebíveis e realizáveis pelos estudantes, possibilitando uma abordagem matemática acessível a eles (Lopez; Ferreira; Buriasco, 2014).

No processo de estruturação da própria matemática, que é o objetivo de aprendizagem dos estudantes, são destacados mais do que apenas os resultados dessa estruturação, pois é o “o poder maravilhoso que a matemática tem de eliminar o contexto e colocar outros contextos ‘na mesma forma’ é que faz dela uma atividade útil.” (Ferreira; Buriasco, 2016, p. 08). Sendo assim, a ideia de ensinar apenas o que já está estruturado para aplicar posteriormente não parece promissora, uma vez que até mesmo máquinas podem realizar essa tarefa, o que não reflete uma atividade humana. Por exemplo, é possível solicitar à uma inteligência artificial que resolva problemas matemáticos complexos, mas esta obedece a uma série de algoritmos pré determinados que não foram criados ou testados por ela; por outro lado, nem todo ser humano pode possuir as habilidades necessárias para resolver os mesmos problemas matemáticos, mas são capazes de aprender a resolvê-los e, até mesmo, incorporá-los em outras situações, adaptar soluções dependendo do contexto, criar novos problemas com base em suas experiências e explicar sua realidade com base em conceitos matemáticos. Por esse motivo, a matemática é uma atividade essencialmente humana.

A abordagem tradicional de ensinar primeiro os conteúdos matemáticos e depois aplicá-los na resolução de exercícios é chamada por Freudenthal (1983) de "inversão antididática". Esse termo é utilizado para descrever o movimento contrário ao processo educacional habitual, que geralmente começa com a apresentação da matemática formal e só depois introduz suas aplicações e contextos. O termo "antididática" “faz um papel de adjetivo, qualificando a inversão como não sendo didática” (Buriasco; Silva, 2017, p. 8). Essa abordagem contraria a prática dos matemáticos, que iniciam com problemas reais para transformá-los em questões matemáticas. No ensino de matemática, a proposta é que os estudantes aprendam ao serem capazes de matematizar as situações apresentadas, seguindo o mesmo método usado pelos matemáticos.

O processo de matematização está ligado à maneira como compreendemos e processamos a realidade de forma "matemática", utilizando o conhecimento matemático para explicar e esclarecer fenômenos. Isso inclui tanto a realidade "palpável" quanto a realidade mais abstrata, relacionada à habilidade humana de abstração. A matematização, conforme proposta por Freudenthal, pode ser entendida em duas dimensões: horizontal e vertical (Treffers, 1987). A dimensão horizontal refere-se ao sujeito que, a partir de fenômenos e

contextos "realísticos" com os quais tem experiência, desenvolve conceitos matemáticos. A dimensão vertical, por sua vez, enfoca no procedimento de como os conceitos matemáticos são aplicados no âmbito da própria matemática. Ao descrever essas duas abordagens, é importante considerar que

Na componente horizontal a estrada para a matemática é pavimentada por meio de formação de modelo, esquematização e atalhos. A componente vertical atua por processamento matemático, aumentando o nível de estrutura no campo do problema correspondente. Sem dúvida, separar grupos de atividade sem esses dois componentes parece um pouco artificial (Treffers; Goffree, 1985, p. 109).

A priori, Freudenthal discordava das distinções propostas por Treffers e Goffree (1985), pois ele acreditava que não era possível atribuir maior ou menor valor às duas abordagens, nem estabelecer uma "linha de separação" entre elas, uma vez que ocorrem simultaneamente no processo de matematização. Essa diferenciação entre as abordagens era exatamente o que acontece nas metodologias tradicionais de ensino, que sempre enfatizam um conceito matemático como sendo mais importante e isolado de outros (Freudenthal, 1991). Posteriormente, Freudenthal (1991) reconhece que essa diferenciação era adequada.

Eventualmente, reconcilei-me com a ideia dessa distinção, chegando até a apreciá-la de forma positiva. Embora eu adicione algumas nuances à sua formulação, acredito que ainda mantenho o respeito pelas intenções de Treffers. Aceitei essa distinção devido às suas implicações para a educação matemática e, em particular, para a caracterização dos estilos educacionais (Freudenthal, 1991, p. 41 - tradução nossa¹²).

No Quadro 2, verificamos as relações entre as diferentes abordagens para o ensino de matemática e a possibilidade de matematizar conceitos.

Quadro 2 - A matematização em diferentes abordagens para a Educação Matemática.		
Tipos de abordagem para a Educação Matemática	Matematização	
	Vertical	Horizontal
Mecanicista: Reduz a matemática a um conjunto de técnicas, focando mais no "fazer" do que no "compreender". Há pouca ou nenhuma investigação sobre as aplicações dos conceitos matemáticos, e a ênfase está na memorização de passos para resolver exercícios. O professor conhece as técnicas necessárias e as transmite aos estudantes, que então as reproduzem, o que torna improvável a ocorrência de uma verdadeira matematização.	Ausente	Ausente

¹² Original: "Eventually I have reconciled myself with the idea of this distinction, even to the point of appreciating it positively; I do add certain nuances to its formulation, but in a way that still respects Treffers' intentions, I believe. I have accepted the distinction because of its consequences for mathematics education, and in particular, for characterising educational styles."

Empirista: A experiência é crucial para atingir diferentes níveis de compreensão em tópicos matemáticos. Os estudantes são deixados para realizar investigações de forma independente. Com isso, a responsabilidade pela aprendizagem recai sobre o estudante, o que significa que ele pode entender um conceito matemático, mas não há garantia de que será capaz de representar a realidade através de ideias matemáticas.	Ausente	Presente
Estruturalista: Voltada para a abstração, essa abordagem busca explorar as inter-relações entre conjuntos com diferentes estruturas, como elementos ou leis. É amplamente utilizada em áreas como Teoria dos Conjuntos, Funções, Aritmética, Geometria e Análise Real. Não há foco nas origens dos conceitos, e a investigação é mínima ou inexistente. Os estudantes devem empregar lógica e justificativa matemática.	Presente	Ausente
Realística: Compreende a matemática como uma atividade humana, em que a (re)descoberta dos conceitos matemáticos pode ocorrer de maneira semelhante à forma como um matemático realiza uma descoberta. O processo de matematização é essencial para a aprendizagem.	Presente	Presente
Fonte: Elaborado pelos autores baseado em Treffers (1987).		

Podemos entender a matematização como um processo dinâmico e significativo, onde um tópico matematizado hoje pode ser utilizado para modelar um fenômeno diferente em um nível mais avançado no futuro. Na matematização horizontal, o objetivo é representar o problema de forma matemática, traduzindo-o através de modelos, símbolos, generalizações e representações matemáticas. Por outro lado, a matematização vertical envolve o uso de conceitos matemáticos para representar e entender os fenômenos estudados, quase como se o indivíduo estivesse explorando o universo da matemática para interpretar a realidade.

Segundo Trevisan e Buriasco (2015), é essencial que os professores reconheçam que os estudantes desenvolvem seus próprios métodos para adquirir conhecimento e, por isso, passam por diferentes níveis de matematização, podendo até "reinventar" a matemática para si mesmos. Assim, é crucial que os educadores considerem, identifiquem e criem situações que explorem as estratégias informais que os estudantes desenvolvem, buscando promover uma reinvenção orientada através de problemas que possam ser abordados utilizando conceitos, ferramentas e métodos matemáticos. Para apoiar esse processo de ensino-aprendizagem, Freudenthal (1991) sugere que as tarefas sejam projetadas com base em princípios norteadores.

3.5 Os princípios norteadores da RME

Uma vez que o processo de ensino-aprendizagem é dinâmico e necessita do planejamento docente, as tarefas elaboradas para esse processo também devem ser planejadas com objetivos claros e coesos, respeitando as diversidades de aprendizagem e permitindo a utilização de diferentes recursos disponíveis. Nesse sentido, Freudenthal elaborou seis princípios norteadores que podem auxiliar o docente a desenvolver as tarefas em sala de aula (Freudenthal, 1991; Van Den Heuvel-Panhuizen, 1996).

Os estudantes podem alcançar a matematização se lhes for permitido organizar e sistematizar as tarefas propostas de modo “matemático”, mas é atribuído ao docente a responsabilidade de coordenar o processo de forma didática e apresentar contextos ricos¹³ e matematizáveis (Ferreira; Buriasco, 2016). Desse modo, pode ocorrer o que é chamado de “matematização progressiva” ao trabalhar com problemas que

[...] oferecem aos estudantes a oportunidade de desenvolver modelos informais altamente específicos ao contexto e estratégias de resolução [...]. Estes procedimentos de resolução informais podem então se tornar assunto de formalização e generalização para constituir um processo de maior abstração que, na RME, é chamado de: matematização progressiva (Gravemeijer; Doorman, 2009, p. 201).

A matematização progressiva só é possível se os estudantes puderem desenvolver soluções matemáticas em diferentes níveis de compreensão, seja individualmente ou em colaboração com seus colegas, com o auxílio do professor ou baseando-se apenas em seus conhecimentos prévios. Esses princípios são exemplos dos conceitos propostos pela RME. Baseados na fenomenologia didática, os seis princípios que podem orientar uma tarefa matemática são: o princípio da atividade, o princípio da realidade, o princípio dos níveis, o princípio da interatividade, o princípio do entrelaçamento e o princípio da orientação. A seguir, apresentamos uma descrição de cada um desses princípios, conforme as definições fornecidas por Freudenthal (1973, 1981, 1991) e Van Den Heuvel-Panhuizen (1996).

O princípio da *atividade* reforça que matemática é uma atividade humana e a aprendizagem é um processo de construção, em que novas ideias são reveladas ou feitas à maneira que os aprendizes desenvolvem suas habilidades por meio da realização de diferentes tarefas. Os conceitos matemáticos são (re)descobertos tal como a humanidade um dia fez.

¹³ Entende-se como contexto “rico” as situações que possibilitam o estudante a investigar um problema de forma matemática, levando-o a uma ou mais soluções que podem ser adaptadas para outras situações. Esses contextos estão relacionados aos fenômenos realísticos (da realidade ou imagináveis) (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2005).

O princípio da *realidade* destaca que os problemas apresentados para os estudantes devem ser “ricos” e realísticos, isto é, com situações próximas à realidade dos estudantes ou que, ao menos, possam ser imaginadas e experienciadas por eles. Problemas de “comando”, como “calcule” ou “resolva” não são apropriados para compreender a realidade, tampouco para matematizá-la.

O princípio de *níveis* surgiu da inspiração no trabalho do casal Dina e Pierre Van Hiele (Passos, 2015), cujo orientador era o próprio Freudenthal. Seguindo as ideias dos níveis de compreensão propostos pelos Van Hiele, o princípio de níveis revela que as tarefas precisam atender aos vários níveis de compreensão e que uma mesma tarefa pode ser desenvolvida em níveis diferentes. Os níveis podem variar desde a resolução informal ou a simples reprodução de métodos até a análise profunda de um problema ao ponto que o estudante seja capaz de formalizar e alcançar níveis mais avançados.

O princípio da *interatividade* está relacionado ao modo como vivemos em sociedade e enfatiza que o processo de aprendizagem deve oportunizar momentos aos quais os estudantes possam trabalhar juntos, compartilhar soluções e ajudar seus pares a alcançar níveis de compreensão mais altos. O conhecimento é histórico e social, portanto, ao pensar o processo de ensino e de aprendizagem é necessário levar em consideração esse aspecto.

O princípio do *entrelaçamento* sugere que vários conceitos matemáticos sejam desenvolvidos simultaneamente, afinal, a matemática não pode ser fragmentada tal como fazem os currículos escolares. A Álgebra, a Geometria, a Aritmética, a Estatística, a Probabilidade e todas as demais grandes áreas matemáticas estão relacionadas e há conceitos que podem ser melhor compreendidos quando vistos sobre os diferentes “olhares” da matemática. O estudante pode utilizar diversas ferramentas matemáticas para solucionar e elaborar problemas de forma conveniente.

O princípio da *orientação* norteia, principalmente, o trabalho docente, mas não se restringe apenas ao professor. A matemática precisa ser “reinventada” para que os estudantes, de fato, compreendam conceitos matemáticos, portanto, as tarefas precisam ser condizentes com os objetivos de aprendizagem e cabe ao docente conhecer as possíveis etapas de realização dessas tarefas, orientando os estudantes quando necessário e permitindo que sejam autores de suas próprias (re)descobertas. Esse papel também pode ser assumido por um estudante que esteja em um nível mais avançado que, sob a orientação do docente, possa orientar seus colegas.

Durante o processo de ensino da matemática por meio da reinvenção guiada, embasado na fenomenologia didática e com tarefas desenvolvidas conforme os princípios norteadores, os estudantes podem aprender via matematização dos conceitos. Entretanto, de que modo devem ser avaliadas as produções para confirmar que passaram pelo processo de matematização ou para reconhecer pontos de atenção que podem auxiliar o docente em seu papel de “guia”? Nesse caso, é necessário considerar a abordagem da RME ao planejar a avaliação, de modo que as tarefas propostas concedam aos estudantes a liberdade de resolver os problemas de maneiras diversas. Essas tarefas auxiliam o professor na identificação das habilidades individuais de cada estudante e no entendimento do nível de aprendizagem em que se encontra. De Lange (1999) apresenta algumas considerações fundamentais para uma avaliação compatível com a abordagem da RME.

3.6 A avaliação para a Educação Matemática Realística

Em um ensino tradicional, a avaliação está relacionada a uma ferramenta pedagógica específica denominada “prova”, em que os estudantes são submetidos a testes e precisam responder, via escrita, a um conjunto de questões (muitas vezes, descontextualizadas) em um determinado tempo. A cada acerto, é atribuída uma nota e é considerado “aprovado” o estudante que acertar uma quantidade pré determinada de questões e/ou atingir a nota mínima, chamada “média”. Aos estudantes “reprovados” são aplicadas outras provas, com questões similares à primeira, mas assuntos diferentes, sem dar a oportunidade ao estudante de expressar suas respostas por meio de outras formas que não seja pela escrita.

Esse momento pode gerar frustrações, estresse e desgastes (físicos e/ou mentais) aos estudantes, especialmente quando estes desconhecem ou não compartilham das finalidades desse tipo de avaliação. Quando se trata de avaliações em matemática, há muita angústia e as preocupações, de estudantes e professores, estão voltadas para a nota (Lopez; Ferreira; Buriasco, 2014). Conforme De Lange (1999), a avaliação deve produzir informações que possam contribuir e orientar o processo de aprendizagem, permitindo ao estudante que compreenda sobre suas habilidades e o que ainda pode ser melhorado, ao passo que, para o docente, a avaliação fornece subsídios que o ajuda a refletir sobre o processo de ensino. Além disso, os resultados da avaliação precisam ser compreendidos por toda a comunidade escolar (estudantes, professores, gestores, responsáveis) e devem auxiliar na tomada de decisões.

Sobre os conteúdos abordados nas avaliações, não se deve restringir às “habilidades isoladas, mas, ao contrário, toda uma gama de metas deve ser coberta, tanto em extensão (todos os componentes curriculares e as ligações entre eles) como em profundidade (todos os níveis de competências)” (Trevisan; Buriasco, 2015, p. 174). Nesse sentido, De Lange (1999) apresenta nove princípios que podem nortear uma avaliação na perspectiva da RME.

- i. O principal objetivo da avaliação escolar deve ser a promoção da aprendizagem;
- ii. Os problemas matemáticos devem ser realísticos e apresentar contextos que sejam relevantes e significativos;
- iii. Os métodos de avaliação devem permitir que os estudantes demonstrem o que sabem, enfatizando suas habilidades, em vez de focar apenas nas lacunas de conhecimento;
- iv. É importante equilibrar a avaliação, oferecendo diversas oportunidades para que os estudantes expressem suas conquistas de diferentes maneiras;
- v. A avaliação deve estar alinhada com o currículo e suas metas estabelecidas;
- vi. Os critérios de classificação devem ser claros, públicos e consistentemente aplicados;
- vii. Esses critérios de classificação e pontuação devem ser compreensíveis e acessíveis aos estudantes;
- viii. Os estudantes devem ter a oportunidade de receber feedback sobre suas realizações;
- ix. Uma tarefa deve ser autêntica e proporcionar igualdade de oportunidades para todos os estudantes.

A avaliação não deve ser conduzida como um processo isolado, cujo objetivo é cumprir exigências burocráticas da escola, informar os pais sobre o desempenho dos estudantes em períodos específicos ou rotular os estudantes como “bons” ou “maus”. (LOPEZ; Ferreira; Buriasco, 2014). Na verdade, a avaliação deve fornecer informações tanto para os professores quanto para os estudantes, com o objetivo de orientar e ajustar suas práticas de ensino-aprendizagem, adequando-as aos propósitos educacionais. Todos os elementos da avaliação, desde os recursos utilizados até os critérios de correção adotados, bem como a comunicação das informações, devem ser cuidadosamente planejados e formulados para promover a aprendizagem.

Levando em consideração os princípios propostos por De Lange (1999), é responsabilidade do professor e da gestão escolar elaborar avaliações que ofereçam aos

estudantes a oportunidade de lidar com a matemática por meio de tarefas que envolvam problemas reais, permitindo-lhes formular, representar e resolver problemas matemáticos em diversas situações. As tarefas de avaliação devem desenvolver a “alfabetização” matemática dos estudantes, o que requer a incorporação de diversos tipos de conhecimento, utilização de recursos distintos e a abordagem de diferentes níveis do processo de matematização. Com isso, precisamos esclarecer sobre os vários tipos de tarefas que podem ser utilizadas em momentos de avaliação.

3.6.1 Os diferentes tipos de tarefas na RME

As tarefas podem ser compreendidas como conjuntos de ações realizadas pelos estudantes, sob orientação do docente, cujo objetivo é investigar, justificar, solucionar ou problematizar situações diversas de modo a alcançar diferentes níveis de compreensão sobre determinados assuntos. No caso das tarefas matemáticas, devem possibilitar a (re)descoberta de conceitos matemáticos, bem como a compreensão da realidade (incluindo as realidades imaginadas) por meio de ideias matemáticas - o processo de matematização. Foster (2020) enfatiza que as tarefas devem ser propostas pelo(a) professor(a) e

cabe ao professor tomar consciência do tipo de tarefas que propõe a seus alunos. Elas devem estimulá-los a querer progredir com os estudos. Uma tarefa não pode simplesmente impedir ou colocar-se como uma barreira para o desenvolvimento do aluno. Isso não significa que o aluno, ao ver uma tarefa, precise ter de imediato o desenho do caminho a ser seguido na busca da solução, nem mesmo a resposta. É preciso que aquela situação proposta seja ao menos intrigante a ponto de colocá-lo em movimento. Exercícios de reprodução (calcule – resolva) não cumprem bem essa função (Forster, 2020, p. 32).

As tarefas podem ser contextualizadas em situações reais, imaginárias ou limitadas ao domínio da linguagem matemática (Van Den Heuvel-Panhuizen, 1996, 2005). No entanto, apenas utilizar de um contexto real não garante que os estudantes desenvolvam seu raciocínio e aprendam efetivamente. O contexto deve impulsionar o processo de matematização, ainda que seja desafiador determinar quais tipos de contextualização são adequados para determinados problemas matemáticos, pois isso depende da relação entre o problema e o estudante que o está resolvendo (Ferreira; Buriasco, 2015). No entanto, é provável que contextos que sejam familiarmente relevantes para os estudantes facilitem a ocorrência da matematização. Na abordagem da RME, os contextos devem ser experiencialmente reais para os estudantes (Gravemeijer; Doorman, 1999), de modo que possam “vivenciar” as situações propostas.

Essas situações podem englobar diversos contextos e as soluções das tarefas, também conhecidas como exercícios de matematização, estão intimamente ligadas à aplicação e utilização de conceitos matemáticos, com o objetivo de fomentar a matematização. Segundo Diaz e Poblete (2005, p. 4), os problemas que constituem as tarefas podem ser classificados em

Problema de contexto real – Um contexto é real se ele é produzido efetivamente na realidade e envolve ações do aluno.

Problema de contexto realista – Um contexto é realista se ele pode realmente ocorrer. Trata-se de uma simulação de realidade ou de uma parte dela.

Problema de contexto fantasioso – Um contexto é fantasioso se for fruto da imaginação sem fundamento na realidade.

Problema de contexto puramente matemático – Um contexto é puramente matemático se refere exclusivamente a objetos matemáticos: números, relações e operações aritméticas, figuras geométricas etc. (Díaz; Poblete, 2005, p. 4 - tradução de Ferreira e Buriasco, 2015).

De acordo com a RME, se considerarmos que a matemática é uma atividade humana originada pela matematização da realidade, então o processo de aprendizagem dessa disciplina deveria seguir uma abordagem similar. Freudenthal (1983) critica o método tradicional de ensino, no qual, apesar de alguns problemas contextualizados serem apresentados, a matemática é sempre priorizada, sem uma investigação adequada do problema em si, resultando em uma simples aplicação de conceitos matemáticos. Os meios para promover a matematização podem ser classificados de acordo com os diferentes modos de apresentar um contexto. De Lange (1995) apresenta definições sobre os níveis de contextualização, mostradas no Quadro 3.

Quadro 3 - Usos do contexto segundo De Lange (1995).	
Contexto de Ordem Zero (C0)	Utilizados para tornar o problema como se fossem da realidade. São chamados de contexto falso ou de camuflagem e devem ser evitados.
Contexto de Primeira Ordem (C1)	Aparecem em situações em que é suficiente traduzir o texto para a linguagem matemática. Podem ser relevantes e são necessários para avaliar a resposta de um problema.
Contexto de Segunda Ordem (C2)	Confrontam o estudante e o levam a recorrer a ferramentas matemáticas para resolver um problema, o que por sua vez envolve o processo de matematização, ao passo que os contextos de primeira ordem apresentam problemas já matematizados.
Contexto de Terceira Ordem (C3)	Possibilitam o processo de matematização conceitual, isto é, podem introduzir ou desenvolver um conceito matemático.
Fonte: Elaborado pelos autores conforme De Lange (1995).	

Comumente, nos procedimentos de avaliação, principalmente em provas escritas do ensino tradicional, os contextos fornecidos não introduzem novos conceitos, dessa forma, os contextos de avaliação estão, em grande parte, relacionados a três funcionalidades (De Lange, 1995). A primeira, diz respeito a falta de contextualização; são representantes dessa funcionalidade exercícios cujos enunciados têm tom “imperativo” e o objetivo é apenas verificar a habilidade de calcular, por exemplo, “Calcule 75% de 80.”.

A segunda funcionalidade apresenta um contexto “aparente”, mas mantém o objetivo de verificar habilidades de cálculo, como podemos notar em situações semelhantes a “O crescimento populacional de uma espécie de bactérias segue a taxa constante de 12.000 indivíduos por segundo. A população inicial de uma amostra dessas bactérias apresentava 28.450 indivíduos. Calcule o instante em que haverá 100.000 indivíduos.”.

A terceira funcionalidade remete aos contextos que são essenciais para a resolução e os objetivos vão além de avaliar habilidades de cálculo; é caso de “Para a elaboração de uma planta da sala de aula, um estudante estimou a largura e o comprimento da mesma. Quais poderiam ser os valores adequados para esta estimativa? () 1,5 metros () 3 metros () 8 centímetros () 30 quilômetros”. Observe que, no último exemplo, o estudante poderia recorrer aos conhecimentos matemáticos sobre medidas, mas precisa considerar aspectos da sua própria realidade e de suas experiências.

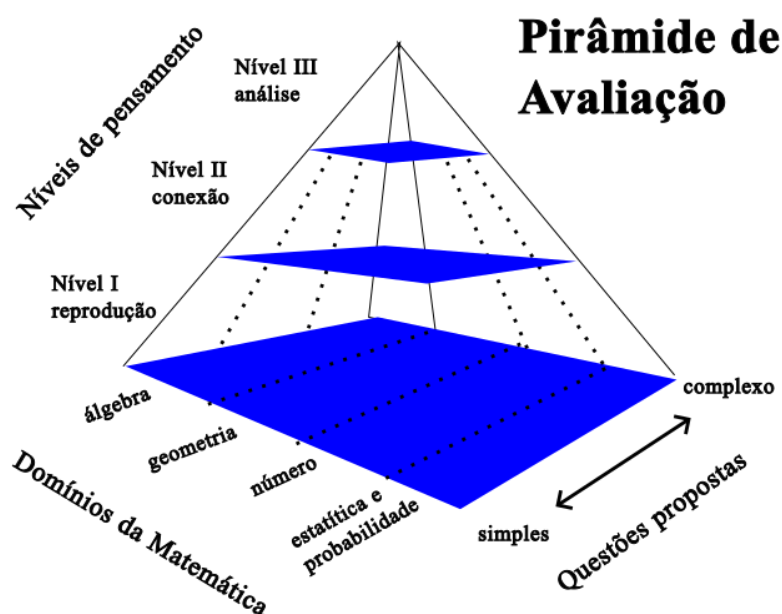
De acordo com De Lange (1995) e Forster (2020), é recomendável evitar a falta de contextualização e, para isso, ele propõe uma categorização das tarefas em diferentes níveis, visando estabelecer uma avaliação alinhada com as expectativas da RME, apresentada no Quadro 4.

Quadro 4 - Níveis de tarefas.	
Nível da tarefa	Caracterização
Nível I (N1)	Esse tipo de tarefa requer habilidades relacionadas à reprodução, como identificar fatos, aplicar algoritmos, desenvolver habilidades, usar ferramentas e conceitos matemáticos e seguir procedimentos rotineiros. Essas tarefas são geralmente apresentadas em formato de múltipla escolha, com um número limitado de respostas aceitáveis. Além disso, os contextos apresentados nessas tarefas costumam não ser realistas.
Nível II (N2)	As tarefas desse nível requerem a habilidade de fazer conexões, em que os estudantes precisam lidar com diferentes representações, relacionar informações, interpretar linguagens, formular e resolver problemas. São tarefas que passam por um processo de matematização e, geralmente, envolvem respostas curtas (com várias soluções possíveis, mas de forma concisa) ou respostas fechadas (com um número limitado de soluções aceitáveis, mesmo

	que envolvam dois ou mais conceitos). Os contextos são selecionados de forma a envolver os estudantes na tomada de decisões matemáticas.
Nível III (N3)	Tarefas que estimulam a análise e requerem um processo de matematização. Para resolvê-las, é necessário realizar análises, interpretações, desenvolver modelos e conjecturas, aplicar estratégias de solução, fazer argumentações, estabelecer generalizações e apresentar provas. Essas tarefas são caracterizadas por serem abertas, permitindo várias soluções possíveis.
Fonte: Elaborado pelos autores com base em De Lange (1999).	

Para elucidar esses níveis de tarefas, De Lange (1999) propõe uma pirâmide de avaliação (Figura 5) que reúne às áreas de domínio matemático (Álgebra, Geometria, Aritmética e Probabilidade e Estatística) e níveis de dificuldade das tarefas (permeiam, continuamente, do mais simples ao complexo, do informal ao informal).

Figura 5 - Pirâmide de avaliação proposta por De Lange.



Fonte: Trevisan; Buriasco (2015, p. 175).

Iniciando pela base da pirâmide e progredindo até o topo, temos os níveis de pensamento que as tarefas devem propiciar - reprodução, conexão e análise - abrangendo quatro áreas (ou domínios) da matemática - Álgebra, Geometria, Números, Estatística e Probabilidade - com questões que variam de simples a complexas. Dessa forma, conforme De Lange (1999), todos os tipos de tarefas de avaliação podem ser classificados dentro da pirâmide. Justifica-se que

a avaliação deve medir e descrever o crescimento do estudante em todos os domínios da matemática e em todos os três níveis de pensamento, as questões em um programa de avaliação completo devem preencher a pirâmide. Devem existir questões em todos os níveis de competência, de diferentes graus de dificuldade e em todos os domínios de conteúdo (De Lange, 1999, p. 17).

De acordo com De Lange (1999), a definição dos níveis é subjetiva, pois não há uma distinção clara entre eles, já que não é sempre possível determinar precisamente onde um nível termina e outro começa. Em uma mesma tarefa, pode haver a presença de mais de um nível. Além disso, as tarefas podem ser classificadas como simples ou complexas, dependendo da maneira como o estudante lida com elas (Ferreira; Buriasco, 2015). Também é possível classificá-las como formais ou informais, com base na linguagem utilizada.

Contudo, De Lange (1999) indica que uma boa avaliação deve ser composta por tarefas de níveis diferentes e que possibilitem aos estudantes (re)inventarem a matemática. De fato, alguns estudantes podem apresentar dificuldades em certas tarefas, mas precisam ter a chance de resolver as situações propostas de forma individual ou coletiva, utilizando linguagem informal ou formal, representando-as por objetos palpáveis ou abstratos.

Para as tarefas desenvolvidas em nossa pesquisa buscamos atender aos critérios de De Lange (1999) quanto à avaliação. Na elaboração das tarefas, optamos pela construção de aparelhos articulados que possibilitasse a (re)invenção de ferramentas de desenho e identificar suas relações com a realidade e com ideias matemáticas. Optamos pelo Experimento Didático Formativo, pois possibilita aos estudantes investigar por conta própria as tarefas e, sob orientação docente, alcançar níveis de compreensão mais avançados.

Em consonância, a abordagem da Educação Matemática Realística revela que as tarefas precisam de contexto para efetivar a aprendizagem com base em situações realísticas, ou seja, que remetem aos processos vivenciados pela humanidade para obtenção do conhecimento e desenvolvimento humano. O Experimento Didático Formativo e a Educação Matemática Realística apresentam aproximações teóricas as quais descrevemos a seguir.

4 EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA: ALGUMAS APROXIMAÇÕES

Os processos de definição dos métodos de abordagem para o ensino, em especial, da matemática, em ambas as concepções surgiram após reflexões sobre o sistema educacional dos respectivos países: de um lado, Vygotsky e seus seguidores, preocupados com o ensino

russo, propõem um sistema que valorize o método dialético, os processos psicossociais da aprendizagem e a apropriação dos conhecimentos historicamente constituídos; do outro, influenciados pelas ideias de Freudenthal, educadores e pesquisadores neerlandeses reformulam o ensino dos Países Baixos com uma proposta de considerar tarefas contextualizadas e princípios norteadores embasados na visão da matemática como uma atividade essencialmente humana.

Embora esses pesquisadores tenham desenvolvido suas ideias em países diferentes, as suas formulações ocorreram em momentos próximos (iniciaram no período entre 1920 e 1970) e em contextos similares, pois os países vivenciavam mudanças na organização política e, conseqüentemente, no sistema educacional. O EDF é uma abordagem que enfatiza a importância da *interação* ativa do estudante com o conhecimento matemático. Defende-se a ideia de que os estudantes aprendem melhor quando são envolvidos em atividades práticas e experimentais, nas quais têm a oportunidade de adquirir seu próprio conhecimento por meio da resolução de problemas e da manipulação de objetos. Nesse sentido, o EDF busca criar situações de aprendizagem que permitam aos estudantes explorar e descobrir os conceitos matemáticos de forma ativa e participativa, situações que, muitas vezes, estão relacionadas à realidade.

Por sua vez, a RME também enfatiza a importância da contextualização e da experiência na aprendizagem da matemática. Freudenthal (1981, 1983) argumenta que os conceitos matemáticos só podem ser compreendidos verdadeiramente quando são ancorados em situações do mundo real e relacionados às experiências pessoais dos estudantes. Assim, a RME busca apresentar os conceitos matemáticos de uma forma que faça sentido, conectando-os com problemas do cotidiano e promovendo a construção de *significados* por meio da prática e da reflexão.

4.1 Alguns constructos e similaridades

Além das semelhanças nas motivações que originaram as ideias defendidas por Vygotsky e Freudenthal, alguns termos de suas abordagens carregam conceitos próximos, especificamente, entre o Experimento Didático Formativo e a Educação Matemática Realística, termos e ideias que descrevemos a seguir.

Resgate histórico: Embora apareça de forma evidente a valorização do contexto histórico na constituição de conceitos matemáticos ao longo do desenvolvimento da

humanidade nas vertentes da THC, como no Experimento Didático Formativo, na Educação Matemática Realística também pode ocorrer essa valorização, uma vez que a proposta de Freudenthal (1983) destaca que a Matemática surge na tentativa de compreender a realidade e da necessidade humana em interpretar os diversos fenômenos e isso deve ser evidenciado nas tarefas propostas pelo docente.

Resolução de problemas: Ambas as abordagens enfatizam a importância da resolução de problemas como uma estratégia central para a aprendizagem matemática. Os estudantes são encorajados a enfrentar desafios matemáticos, de forma empírica ou teórica, buscando soluções por meio da aplicação de habilidades e relação entre conceitos aprendidos. Nessas abordagens, as situações propostas na resolução de problemas podem estar relacionadas à realidade ou à própria teoria matemática, em que a solução de um problema “puramente” matemático possa desenvolver novas habilidades e ferramentas matemáticas necessárias para a solução de outros problemas.

Contextualização: É reconhecida a necessidade de contextualizar os conceitos matemáticos, relacionando-os com situações inspiradas no mundo real e com as experiências pessoais dos estudantes. Isso ajuda a tornar a matemática mais significativa e relevante. Contrapondo o ato de simplesmente memorizar regras e procedimentos, os discentes são incentivados a compreender os conceitos matemáticos por meio da experimentação, da reflexão e da discussão em grupo.

Socialização: É fato que ambas as abordagens destacam a necessidade do processo de aprendizagem ser social, pois, assim como o desenvolvimento da humanidade, o desenvolvimento da matemática só é possível graças ao trabalho social porque nenhum matemático ou matemática teve suas ideias sozinho(a).

Orientação docente: O docente tem um importante papel de “guia” e fornece orientações suficientes para que o estudante possa avançar nas etapas do processo de aprendizagem por níveis cada vez mais complexos, valorizando as ideias que permitem esse avanço ou levando o estudante a refletir sobre suas escolhas nas resoluções se, de fato, permitem solucionar a tarefa.

Conexão entre ideias matemáticas: Destacam que, apesar do ensino tradicional de matemática ser fragmentado, as ideias matemáticas não são isoladas e, muitas vezes, o estudante precisa recordá-las para solucionar diferentes situações e tarefas.

Esses termos e conceitos refletem a convergência de ideias entre o EDF e a RME, destacando a importância dada à participação ativa dos estudantes, à contextualização dos

conceitos matemáticos e à construção de significados por meio da prática e da experiência. Ao integrar elementos dessas abordagens em práticas de ensino de matemática, os educadores podem proporcionar uma experiência de aprendizagem rica e significativa, preparando os estudantes para enfrentar desafios matemáticos e permitindo uma compreensão mais profunda e duradoura das ideias matemáticas e sua relação com o desenvolvimento da humanidade.

Embora existam aproximações teóricas em relação a como abordar o ensino de matemática, também há divergências entre algumas ideias e, dentre elas, destacamos a diferença entre “atividade” e “tarefas”. Nas vertentes teóricas da Teoria da Atividade, a **atividade** está relacionada à formação de um conhecimento e por meio da atividade de estudo “é possível se apropriar da essência (o lógico e o histórico) encarnada na definição abstrata do conteúdo, sem que seja preciso reconstruí-lo enquanto processo investigativo, afinal trata-se de processo de aprendizagem e não de pesquisa [...]” (Longarezi, 2023, p. 193). A atividade de estudo pode ocorrer por meio da **tarefa** de estudo (dentre outros tipos de tarefas) que, segundo Longarezi (2023), é composta por ações que possibilitam ao estudante reproduzir brevemente o processo histórico da constituição de um conhecimento.

Na abordagem de Freudenthal, sucintamente, a **atividade** se relaciona a um processo que organiza e trata diferentes assuntos por meio de objetos matemáticos (Ferreira; Buriasco, 2016) e, por esse motivo, a Matemática é entendida como uma atividade humana. Já as **tarefas** são comandos e situações apresentados aos estudantes que permitam iniciar o processo de reinvenção guiada e propiciar a matematização. Diferentemente da Teoria da Atividade, as tarefas da RME são classificadas pelos tipos de contextos e níveis de aprendizagem e não pelo tipo de ação que o estudante desenvolve.

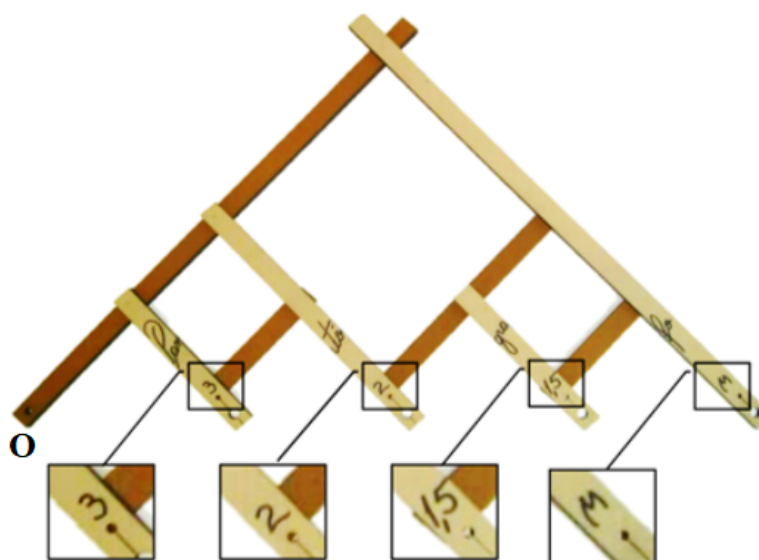
Com base nessas terminologias, adotamos “atividade” e “tarefa” tais como são tratadas na RME, sem detrimento das demais, pois as tarefas propostas para os participantes da pesquisa foram elaboradas sob os princípios norteadores da RME. A seguir, descrevemos sobre as características técnicas dos aparelhos produzidos pelos participantes, o processo histórico e as ideias matemáticas que podem ser relacionadas ou exploradas ao construir e utilizá-los. As ferramentas em questão são chamadas de pantógrafo, teodolito e elipsógrafo. Outros aparelhos articulados foram construídos pelos estudantes, mas descrevemos as principais ferramentas utilizadas pelos participantes da pesquisa.

5 AS FERRAMENTAS: ORIGENS, CARACTERÍSTICAS E RELAÇÕES MATEMÁTICAS

5.1 Pantógrafo

O pantógrafo é uma ferramenta articulada desenvolvida no século XVI cuja função é ampliar ou reduzir imagens por meio da movimentação de suas hastes. Conforme apresentado na Figura 6, geralmente, o pantógrafo é composto por quatro a oito hastes de madeira interligadas por articulações de metal.

Figura 6 - Pantógrafo de 8 hastes expandido.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Os furos localizados na parte inferior das hastes claras destinam-se à inserção de lápis ou canetas, enquanto o orifício à esquerda na haste escura, identificado pela letra "O", deve ser fixado à mesa com um parafuso ou dispositivo similar. Os números destacados indicam o fator de escala para aumentar ou diminuir uma imagem; e a letra "M" corresponde à palavra em inglês mouse, uma vez que o movimento realizado ao utilizar o pantógrafo se assemelha ao uso de um mouse de computador.

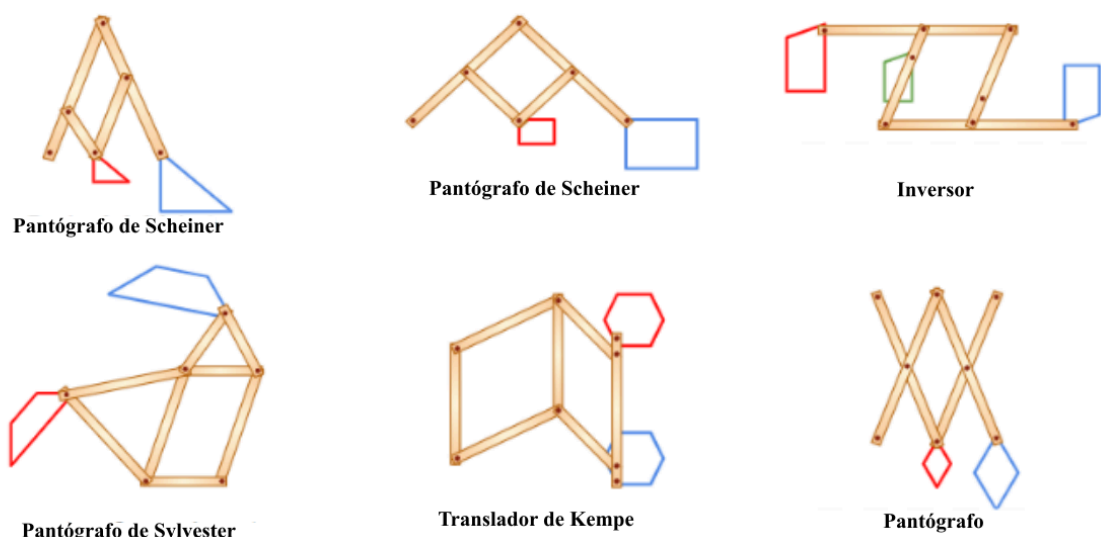
Figura 7 - Montagem do pantógrafo para uso.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

O usuário deve colocar o pantógrafo sobre uma superfície plana de forma que a ferramenta possa girar completamente em torno do ponto "O". A imagem a ser ampliada ou reduzida deve ser fixada à superfície, enquanto uma folha em branco deve ser posicionada de modo que a nova imagem possa ser traçada. Para elucidar o funcionamento de um pantógrafo, sugerimos acessar as etapas descritas no APÊNDICE A. Existem outros formatos para pantógrafos, como podemos identificar na Figura 8, mas todos desempenham a mesma função: desenhar uma nova imagem que seja semelhante à original.

Figura 8 - Outros pantógrafos e aparelhos articulados.



Fonte: Adaptado de Santos (2020, p. 40).

É possível realizar a redução, ampliação ou deslocamento de uma figura usando uma mesma ferramenta como mostrada na figura anterior, apenas trocando as posições entre os

lápiz ou marcadores. As escalas, por vezes indicadas no próprio dispositivo, são determinadas durante a montagem, permitindo a criação de pantógrafos ou outros aparelhos articulados com diferentes fatores de ampliação/redução. Os pantógrafos mais comuns são projetados para ampliar ou reduzir figuras em um fator “2” (dobro ou metade) e fator “3” (triplo ou um terço). Descrevemos sobre os primeiros pantógrafos e seu inventor: o astrônomo alemão Christopher Scheiner (1573 – 1650).

5.1.1 Origem do pantógrafo e algumas ferramentas articuladas

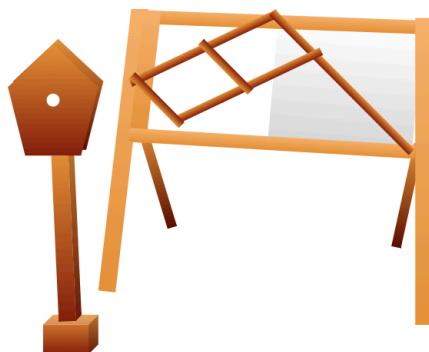
Martínez (2015) destaca que o desenvolvimento da história da matemática é influenciado por decisões políticas, sociais e culturais, o que significa que “o que conhecemos do pensamento matemático depende de quem o conta. A história se encarrega de validar os conhecimentos, mas também de valorizar alguns como menos científicos que outros” (Martinez, 2015, p. 134). Desse modo, o que se tem registrado sobre as invenções articuladas são datadas dos séculos XVI e XVII, a maioria de origem europeia como podemos confirmar nas descrições históricas das ferramentas estudadas.

Conforme Bittencourt (2014), o termo “pantógrafo” tem suas raízes na língua grega, em que “*pantos*” significa “tudo” e “*graphein*” significa “escrever”, portanto, o pantógrafo pode ser interpretado como aquele que “escreve tudo”. Acredita-se que o astrônomo alemão Christopher Scheiner (1573 - 1650) seja o inventor deste dispositivo em 1603, embora alguns pesquisadores argumentem que o aparelho já existia há mais de 2000 anos. O pantógrafo foi inspirado por outro dispositivo do século XVI chamado perspectógrafo, conforme descrito por Brandão (2015). O perspectógrafo

possui um poste móvel, com um furo, através do qual o artista deverá olhar e seguir com a ponta seca. O objetivo desse furo é que o autor olhe sempre o mesmo quadro, sob o mesmo ângulo, na mesma distância, garantindo a qualidade da reprodução. Esse furo representa, na verdade, o centro das linhas da relação de homotetia construída a partir do olho do autor, dos pontos seguidos pela ponta seca do instrumento e da paisagem. (Brandão, 2015, p. 2).

O perspectógrafo permitia desenhar paisagens e objetos em uma escala menor e com detalhes, mas isso exigia habilidade do artista que utilizasse o aparelho. Na Figura 9, temos uma representação de um perspectógrafo feito de madeira.

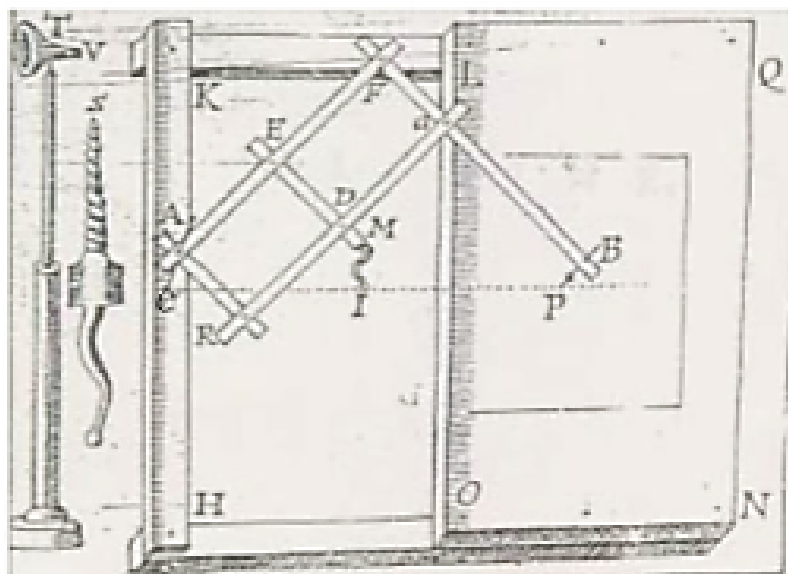
Figura 9 - Representação de um perspectógrafo.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Ainda que seja um objeto estático, exceto pelas hastes articuladas, o funcionamento do perspectógrafo depende da movimentação de paralelogramos. Scheiner também criou uma versão de um perspectógrafo, mostrado na Figura 10.

Figura 10 - Perspectógrafo de Scheiner.



Fonte: Bittencourt (2014, p. 27).

Os pontos C, I e P estão alinhados em uma linha reta. O ponto A permanece fixo em C, enquanto os pontos D, E, F e G são designados como pontos de pivô. O ponto M representa a extremidade móvel que segue o contorno do desenho ou imagem, enquanto o ponto B reproduz o desenho na escala desejada. Este dispositivo foi uma das criações durante o período do Renascimento, uma época em que as obras de arte exploravam os princípios da

perspectiva. Scheiner demonstrava interesse por essas ferramentas e conduziu numerosas pesquisas sobre matemática e Física com o auxílio de suas invenções.

Christopher Scheiner, nascido em 1573 na cidade de Markt Wald, na Alemanha, frequentou escolas jesuítas e manifestou um forte interesse por matemática e Astronomia, assim como pelos instrumentos da época. Ele era hábil no uso de relógios solares e telescópios, ferramentas que utilizava para testar as teorias de Galileu (Bittencourt, 2014). Como matemático e astrônomo alemão, Scheiner focou no estudo das manchas solares e chegou a conclusões que, em alguns aspectos, divergiam das de Galileu. Contudo, em sua obra principal, "Rosa Ursina" (1630), que explorava descobertas sobre as manchas e a superfície solar, Scheiner concordava com Galileu em vários pontos.

Durante sua vida, Scheiner realizou pesquisas sobre óptica e refração atmosférica, experimentando diferentes tipos e arranjos de lentes para desenvolver diversos modelos de telescópios. Em 1631, ele publicou o livro "*Pantographice sev ars delineandi res qualibet per parallelogrammum lineare sev cavum*" (traduzido como "Pantógrafo e a arte de desenhar por paralelogramos"), no qual descrevia seu trabalho com a invenção do pantógrafo, que havia desenvolvido alguns anos antes da publicação, em 1603. Na introdução do livro, Scheiner explica a inspiração que o levou à criação do pantógrafo.

Segundo relatos históricos, em 1603, o pintor Pierre Gregoire, conhecido por seu trabalho "*Syntaxeon artis mirabilis*", em 1585, desafiou Scheiner ao afirmar que havia desenvolvido uma ferramenta de desenho, mas recusou-se a revelar seus segredos. Gregoire afirmou que não acreditava que tal ferramenta pudesse ter sido criada por um ser humano, sugerindo que, na verdade, era uma "inspiração divina" concedida por um gênio celestial, cujos segredos não poderiam ser desvendados por mortais. Motivado pelo desafio, Scheiner decidiu desenvolver sua própria ferramenta. Após um período de intensos esforços, ele criou um instrumento engenhoso e versátil, capaz de copiar, ampliar ou reduzir desenhos, representar objetos em perspectiva e produzir composições anamórficas¹⁴ (Bittencourt, 2014).

Na capa do livro "*Pantographice*" (ver Figura 11), diversos elementos são visíveis, incluindo um perspectógrafo, que é considerado um precursor do pantógrafo. A estrutura representada na ilustração parece assemelhar-se a uma igreja, o que pode sugerir uma associação ao divino. No topo da imagem, aparece a sigla IHS, que provavelmente se refere a "*Iesus Hominum Salvator*", traduzida do latim como "Jesus Salvador dos Homens". No centro, está a inscrição "*Pantographice: Ad Pavlym Sabellvm Albani Principem etc.*"

¹⁴ Refere-se à deformação ou transformação de uma imagem.

(aparentemente uma dedicatória) e o nome do autor. Perto da frase "*inspice et fae secundum exemplar*", que significa "olhe e faça de acordo com o modelo", encontra-se um compasso, destacando a principal função do pantógrafo.

Figura 11 - Capa do livro "*Pantographice*" de Scheiner.



Fonte: Scheiner (1631).

A invenção de Scheiner, para a época, foi considerada “milagrosa”, como descreve Bittencourt (2014).

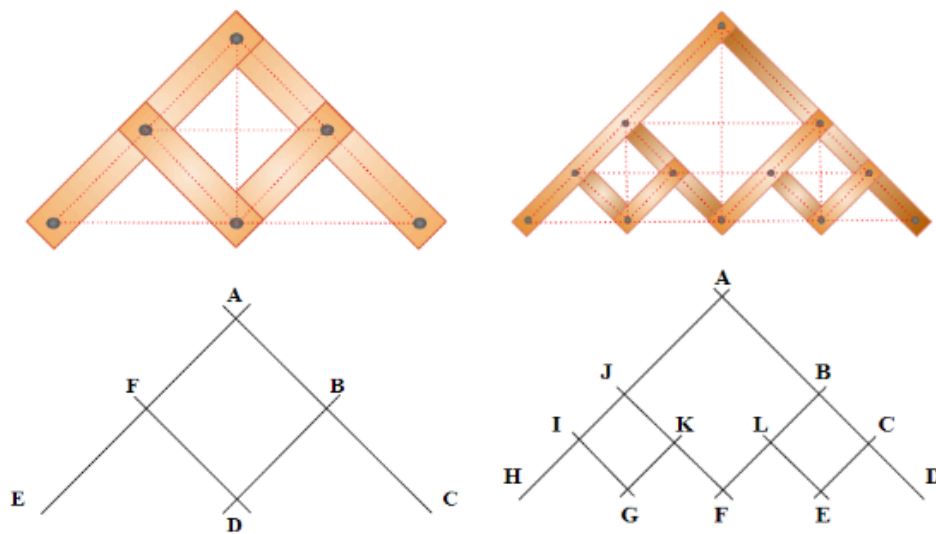
Em razão dessa transferência instantânea da imagem de um plano abstrato para um plano concreto (do virtual ao real), foi considerado por todos os comentaristas da época como uma ferramenta milagrosa, quase mágica, por apresentar nenhuma diferença entre o que é real e físico e o que é racional e matemático (Bittencourt, 2014, p. 27-28).

Quando se trata de ideias matemáticas, a concepção e o uso do pantógrafo proposto por Scheiner, que posteriormente foi adaptado para criar outras ferramentas como inversores e transladores, permitem identificar conceitos matemáticos fundamentais para o funcionamento da ferramenta. Estes incluem o uso das propriedades dos paralelogramos, a homotetia, simetrias, a proporcionalidade e outros conceitos geométricos.

5.1.2 As ideias matemáticas no funcionamento do pantógrafo

Para identificar conceitos envolvidos na construção do pantógrafo, consideramos as estruturas representadas nas Figuras 6 e 12. Salientamos que existem vários modelos de pantógrafos (consulte a [Figura 8](#)), porém todos eles seguem determinadas "regras" de construção. Nos exemplos a seguir, utilizamos a estrutura simplificada dos pantógrafos criados por Scheiner.

Figura 12 - Representação de um pantógrafo de 4 e 8 hastes, respectivamente.



Fonte: Santos (2020, p. 46- 47).

Na Figura 12, os pontos A, B, C, D, E e F do pantógrafo de 4 hastes representam as intersecções das hastes. Além disso, $\overline{CD} // \overline{FD}$, $\overline{AE} // \overline{BD}$, logo

$$\text{med}(\overline{AC}) = 2(\overline{FD}) \quad [5]$$

$$\text{med}(\overline{AE}) = 2(\overline{BD}) \quad [6]$$

Os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K e L representam as intersecções das hastes, $\overline{AD} // \overline{LE} // \overline{JF} // \overline{IG}$, assim como $\overline{AH} // \overline{KG} // \overline{BF} // \overline{CE}$. Em relação às medidas dos segmentos, temos que

$$\overline{AD} = 2(\overline{JF}) \quad [7]$$

$$\overline{AH} = 2(\overline{BF}) \quad [8]$$

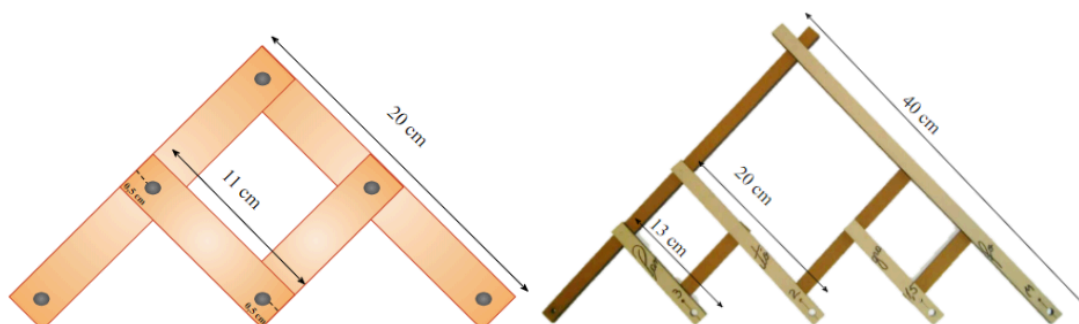
$$\overline{JF} = 2(\overline{IG}) = 2(\overline{LE}) \quad [9]$$

$$\overline{BF} = 2(\overline{JCE}) = 2(\overline{KG}) \quad [10]$$

5.1.2.1 Proporcionalidade nas hastes e nos desenhos de um pantógrafo

Para montar um pantógrafo, é essencial garantir que as hastes tenham comprimentos proporcionais entre si. Em um pantógrafo de 4 hastes, por exemplo, o comprimento das hastes maiores pode ser, ao menos, o dobro do comprimento das hastes menores. Isso significa que, se as hastes maiores medem 20 cm, as hastes menores medem 10 cm e, supondo que haja uma largura de 1 cm para cada haste, então é preciso considerar que a haste menor deve ter 11 cm, como elucidado na Figura 13.

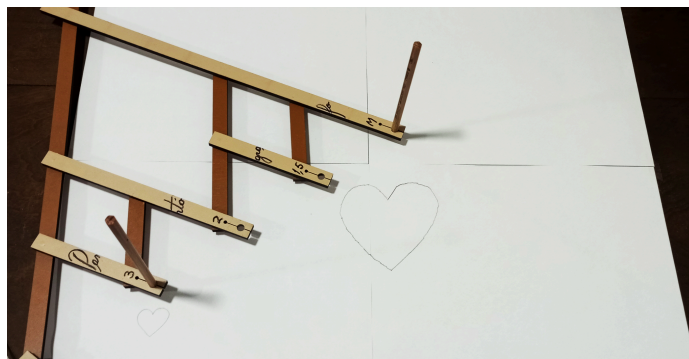
Figura 13 - Medidas de um pantógrafo de 4 e 8 hastes.



Fonte: Santos (2020, p. 48).

Os desenhos criados com o auxílio dos pantógrafos mostrados seguem as proporções de suas hastes e permitem apenas ampliação ou redução de uma imagem. Dependendo do aparelho, é possível realizar ampliações ou reduções em fatores de 1.5, 2 ou 3 vezes. Além disso, os triângulos e paralelogramos formados pelas hastes do pantógrafo possuem medidas proporcionais - ver Figura 14.

Figura 14 - Desenho feito com pantógrafo de 8 hastes.



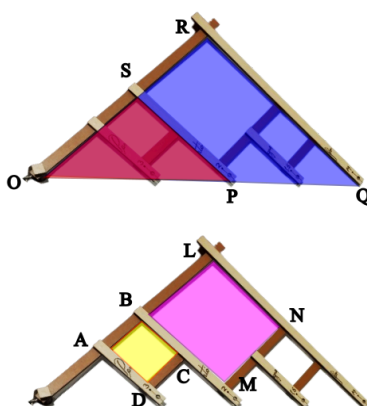
Fonte: Acervo dos pesquisadores.

O desenho feito no pantógrafo de 8 hastes tem dimensões lineares que variam de 1.5, 2 e 3 vezes maiores que a imagem original, pois são formadas figuras geometricamente semelhantes entre si, no caso, o coração maior tem contorno 3 vezes maior que o coração menor.

5.1.2.2 A semelhança de figuras no pantógrafo

Na Figura 15 que, quando expandido, as hastes do pantógrafo formam paralelogramos e triângulos semelhantes entre si, salvo pelas falhas nos cortes das hastes e nas conexões entre elas.

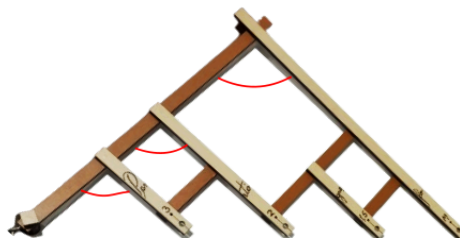
Figura 15 - Semelhança de triângulos e paralelogramos no pantógrafo de 8 hastes.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Devido às semelhanças entre as figuras formadas pelas hastes do pantógrafo, os ângulos entre elas são congruentes, como elucidado na Figura 16 e todos mantêm a mesma medida quando movimentadas as hastes.

Figura 16 - Ângulos formados entre as hastes do pantógrafo.

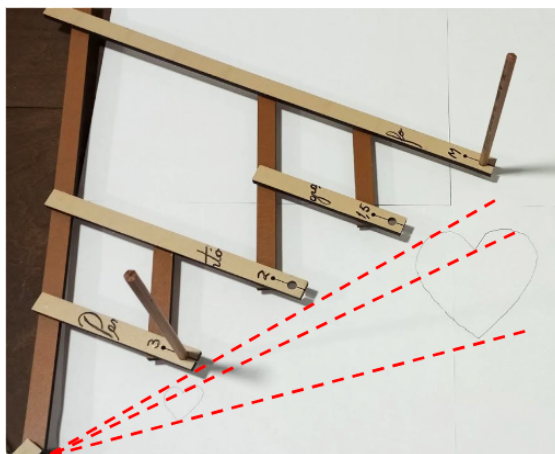


Fonte: Elaborado pelos autores.

5.1.2.3 Homotetia nas figuras desenhadas via pantógrafo

Ao utilizar um pantógrafo, como o da [Figura 6](#), as figuras formadas por ele passam por transformações geométricas como ampliação, redução e translação. Ao alterar as dimensões de uma figura, mas manter sua forma e ângulos internos, ocorre a homotetia que é uma transformação geométrica que preserva a forma e os ângulos internos de uma figura, bem como abrange o paralelismo e a razão entre os segmentos correspondentes, podendo gerar figuras congruentes ou semelhantes (Reis; Melo, 2019). Note que o desenho na Figura 17 preserva a forma, os ângulos, mas tem dimensões visivelmente diferentes.

Figura 17 - Homotetia em desenho feito com pantógrafo.



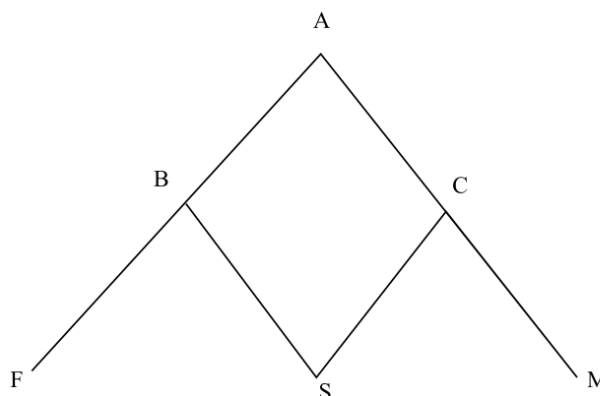
Fonte: Elaborado pelos autores.

Devido ao caráter artesanal do aparelho, podem ocorrer algumas imperfeições perceptíveis. No entanto, mesmo em situações menos ideais como elucidada na figura anterior, é possível observar que as propriedades da homotetia permanecem válidas. Por fim, apresentamos as propriedades matemáticas relacionadas com o funcionamento de um pantógrafo idealizado.

5.1.3 A “prova” matemática sobre o funcionamento do pantógrafo

Vamos examinar a estrutura básica de um pantógrafo simplificado de 4 hastes, pois esta é a versão mais elementar dos pantógrafos que estamos lidando, e os resultados derivados deste modelo podem ser estendidos para pantógrafos com mais hastes. Para elucidar as propriedades matemáticas subjacentes ao pantógrafo, faremos uso dos axiomas, postulados e teoremas da Geometria Euclidiana.

Figura 18 - Estrutura simplificada de um pantógrafo de 4 hastes.



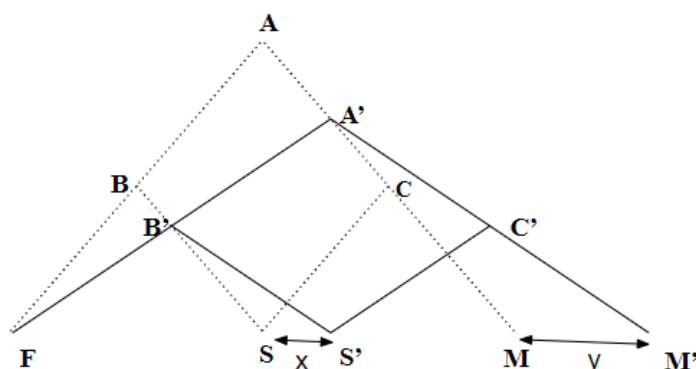
Fonte: Santos (2020, p. 52).

Considere que:

- i. A medida de $\overline{AF}$ é igual a de $\overline{AM}$;
- ii. São paralelos os segmentos $\overline{AF} // \overline{CS}$ e $\overline{AM} // \overline{BS}$;
- iii. $\overline{AF}$ tem comprimento igual ao dobro de $\overline{CS}$ (idem para $\overline{AM}$ ter o dobro do comprimento de $\overline{BS}$);
- iv. B e C são pontos médios de $\overline{AF}$ e $\overline{AM}$, respectivamente;
- v. F, S e M são colineares.

Temos que F é o ponto fixo do pantógrafo, em que é permitido apenas rotacionar o aparelho em torno dele. Vamos considerar que movemos as hastes horizontalmente em relação ao ponto F a uma distância “x” (real, positiva e não nula), então, mantendo os paralelogramos, os pontos A, B, C, S e M se deslocam para às posições de A', B', C', S' e M', respectivamente - ver Figura 19.

Figura 19 - Movimentação horizontal do pantógrafo.



Fonte: Santos (2020, p. 53).

Vemos que $\overline{MM'} = y$ (real, positivo e não nulo). M é onde colocamos o lápis para desenhar a nova imagem a partir da original que é contornada pela movimentação do ponto S. Temos que F, S' e M' são colineares.

Os ângulos $\angle BSS'$ e $\angle AMM'$ são congruentes, pois os segmentos $\overline{BS}$ e $\overline{AM}$ são paralelos entre si e têm como transversal o segmento $\overline{FM'}$. $\overline{AM}$ possui o mesmo comprimento de $\overline{A'M'}$ (idem $\overline{AF}$ e $\overline{A'F'}$), pois são as maiores hastes do pantógrafo e sua movimentação não altera seus comprimentos. Como $\overline{B'S'}$ tem mesmo comprimento de $\overline{BS}$ (idem para os segmentos $\overline{C'S'}$ e $\overline{CS}$), logo

$$\overline{A'M'} = 2 \overline{B'S'} \quad [11]$$

Temos que B' e C' são pontos médios de $\overline{A'F}$ e $\overline{A'M'}$, respectivamente, e a figura formada pelos pontos A', B', S' e C' é um quadrilátero com todos os seus lados de mesmo comprimento. Portanto, $\overline{A'C'} \parallel \overline{B'S'}$ (C' é ponto médio de $\overline{A'M'}$).

Os ângulos $\angle B'S'S$ e $\angle A'M'M$ são congruentes, pois o segmento $\overline{FM'}$ é transversal aos segmentos $\overline{B'S'}$ e $\overline{A'M'}$. Assim, os ângulos $\angle B'SS'$ e $\angle A'MM'$ são congruentes, pois $\overline{B'S'} \parallel \overline{A'M'}$ e são cortados pelo segmento transversal $\overline{FM'}$. Como a soma dos ângulos internos de qualquer

triângulo resulta em 180° , então os ângulos $\angle SB'S'$ e $\angle MA'M''$ são congruentes, portanto, os triângulos $\triangle B'S'S$ e $\triangle A'M'M$ são semelhantes entre si pelo caso ângulo - ângulo (A.A.).

Pela semelhança de triângulos, estabelecemos as seguintes razões:

$$\frac{\overline{B'S'}}{x} = \frac{\overline{A'M'}}{y} \quad [12]$$

mas $\overline{A'M'} = 2 \overline{B'S'}$, então:

$$\frac{\overline{B'S'}}{x} = \frac{2\overline{B'S'}}{y} \quad [13]$$

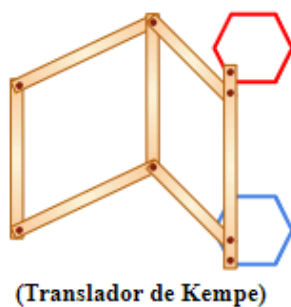
$$\frac{y}{x} = \frac{2\overline{B'S'}}{\overline{B'S'}} \quad [14]$$

$$\frac{y}{x} = 2 \quad [15]$$

Portanto, $y = 2x$, para x e y reais, positivos e não nulos. Um processo análogo pode ser feito se analisarmos um deslocamento “x” vertical. A movimentação das hastes do pantógrafo é uma composição dos movimentos verticais e horizontais. Com isso, concluímos que o modelo apresentado pode gerar imagens com o dobro (ou metade) das dimensões lineares de uma figura. Em outros modelos de pantógrafo, as proporções podem variar, geralmente, em razões de 1,5 e 3.

Os aparelhos do tipo “translador” têm funcionamento similar ao pantógrafo e sua principal função é desenhar uma nova figura de modo que esta seja a translação da figura original, como podemos observar na Figura 20.

Figura 20 - Representação de um translador em funcionamento.



Outros aparelhos articulados funcionam por meio de hastes conectadas entre si, como é o caso do elipsógrafo, descrito a seguir.

5.2 Elipsógrafo

O elipsógrafo é um instrumento articulado cuja função é desenhar elipses por meio da movimentação de suas hastes. Há várias versões de elipsógrafos, mas sua base é a construção em torno dos eixos ou dos focos. Segundo Cordeiro (2014), o elipsógrafo mais conhecido é o de Arquimedes, também chamado de bússola de Arquimedes. Entre os séculos XVI e XVII, muitas ferramentas articuladas foram criadas e auxiliaram na compreensão de conceitos matemáticos, como é o caso do elipsógrafo que permitiu estudar sobre curvas elípticas.

5.2.1 Origem do elipsógrafo

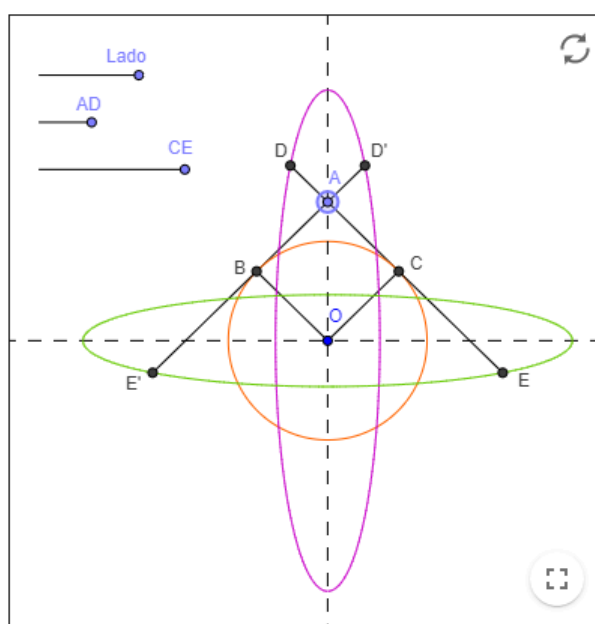
O estudo de cônicas surge desde a Antiguidade e não é alterado até os trabalhos de René Descartes, no século XVII. A elipse era definida por construção em que Apolônio de Tiana (15 - 98), filósofo neopitagórico, a apresentava como uma seção de cone em situações específicas (Martinez, 2015). Posteriormente, com os avanços nos estudos matemáticos, a elipse foi definida [na Geometria Euclidiana] como um conjunto de pontos em um plano - lugar geométrico - nos quais a soma das distâncias a dois pontos fixos é constante ou como a interseção entre um plano que corta todas as geratrizes de um cone circular reto.

Segundo Cordeiro (2014), a criação de ferramentas precursoras ao elipsógrafo teve motivações (ainda que possam ser interpretadas como histórias reais ou lendas), mas foram embasadas na resolução de um problema geométrico: “determinar a aresta de um cubo com o dobro do volume de um cubo dado”. Dentre as histórias relatadas sobre a origem do problema, destacam-se duas lendas que envolvem a duplicação de cubos. A primeira, trata-se da narrativa de Eratóstenes (276 - 194 a.C.) sobre o pedido do rei Minos para que duplicassem o túmulo de seu filho, mas mantivessem o formato cúbico. Houve um engano, pois as arestas foram duplicadas e o túmulo ficou oito vezes maior. A segunda história é sobre uma doença que assolava o Egito e um grupo de sacerdotes foi consultar o Oráculo de Apolo, em Delos. A solução apresentada era que duplicasse o altar de Apolo, mas duplicaram as arestas e o altar ficou oito vezes maior.

Um dos primeiros matemáticos a apresentar uma solução para o problema foi Hipócrates de Chios (470 - 410 a.C.), ao introduzir medidas proporcionais aos segmentos ℓ e 2ℓ , mas sua solução não era passível de representação por meio de régua e compasso. Manaecmus (380 - 320 a.C.) obteve uma solução baseada em “intersecções de pares de curvas obtidas como seções planas de superfícies cônicas, denominadas parábolas, em conjunto com as circunferências, elipses e hipérboles” (Cordeiro, 2014, p. 23). Embora sua solução não possa ser mostrada pelo uso de régua e compasso, contribuiu para definir as diferentes cônicas.

Proclo Diádoco (412 - 485), outro filósofo neoplatônico, inventou um aparato com hastes articuladas capaz de desenhar elipses para serem estudadas, mas foi Leonardo Da Vinci (1452 - 1519) quem aprimorou a invenção. Da Vinci desenvolveu aparelhos capazes de reproduzir cônicas, como é o caso do elipsógrafo conhecido por “elipsógrafo de Proclo-Leonardo” (Mozo, 2017). O aparelho de Da Vinci foi criado não para estudar a elipse, mas traça-la de modo mais exato possível por meio da movimentação de um losango formado por hastes articuladas, como é possível observar na Figura 21. Ao movimentar um dos vértices do losango sob a diagonal correspondente, as hastes movem-se e desenham o contorno da elipse.

Figura 21 - Representação do elipsógrafo de Proclo-Leonardo.



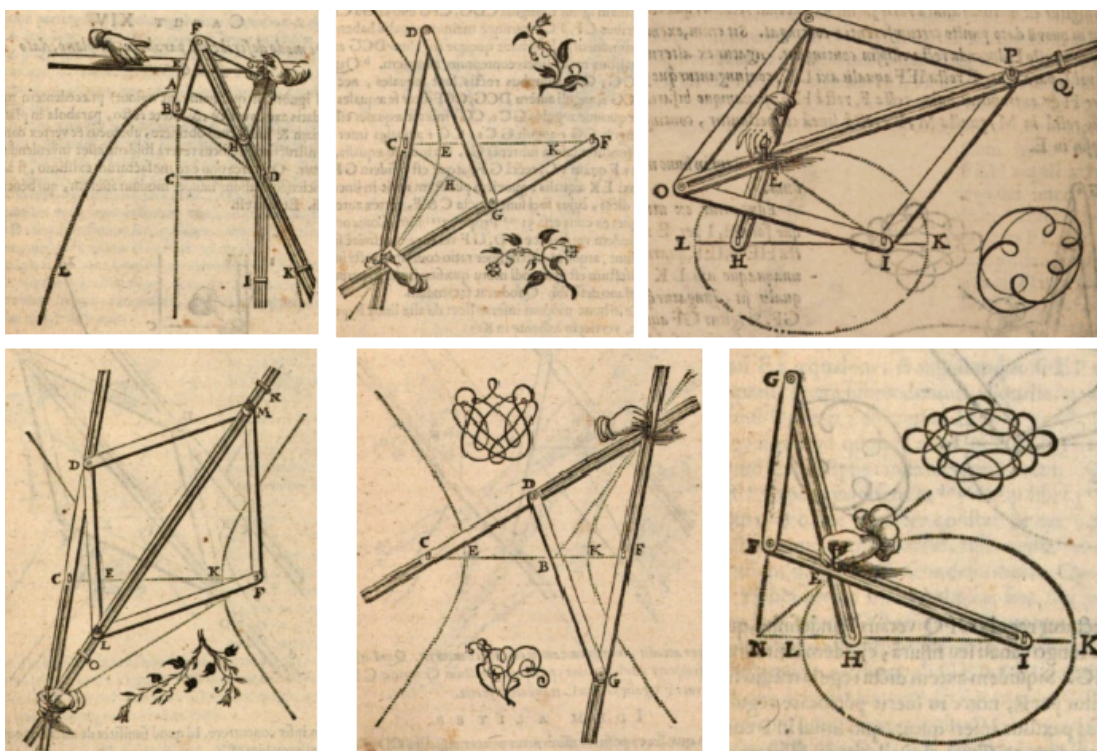
Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra (versão 6.0).

Embora Proclo e Leonardo Da Vinci tenham criado suas versões de elipsógrafos (Cordeiro, 2014; Martinez, 2015), associa-se a invenção a Van Schooten após contatos com Descartes que o influenciou a estudar sobre a Geometria Analítica. Em 1657, Schooten (1657) publica o livro “*Exercitationum mathematicarum libri quinque*” (Cinco livros de exercícios matemáticos - tradução nossa) sobre Aritmética, Geometria e aparelhos de desenho.

O livro I faz uma revisão de padrões usados na Aritmética e na Geometria. O livro II apresenta algumas regras de construção. O livro III reconstrói algumas obras de Apolônio sobre lugares geométricos. O livro IV, *Organica conicarum sectionum*, o mais famoso entre os cinco livros, fala sobre os mais variados instrumentos que traçam cônicas. O livro V consta de exercícios diversos de matemática. (Cordeiro, 2014, p. 25).

No livro, Schooten (1657) apresenta várias versões de elipsógrafo e aparelhos para desenhar curvas, como vemos algumas na Figura 22.

Figura 22 - Representações de elipsógrafos e ferramentas para desenhar curvas.



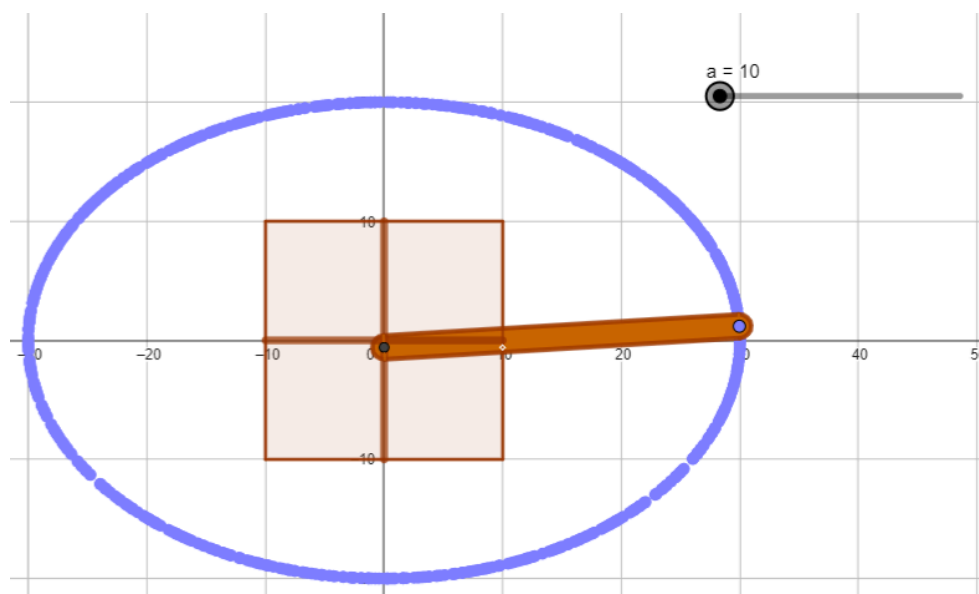
Fonte: Adaptado de Schooten (2014).

5.2.2 A construção de elipses por elipsógrafo

Para construir uma elipse no elipsógrafo, basicamente, basta colocar um lápis na extremidade da haste principal, regular a distância do lápis até os centros (focos) e

movimentar a haste de modo que ela percorra os trilhos. Como o movimento dessa haste é limitado aos comprimentos dos trilhos, a imagem desenhada pelo lápis é de uma elipse. A movimentação pode se dar no sentido horário ou anti horário, como elucidado na Figura 23.

Figura 23 - Elipse desenhada por elipsógrafo virtual.



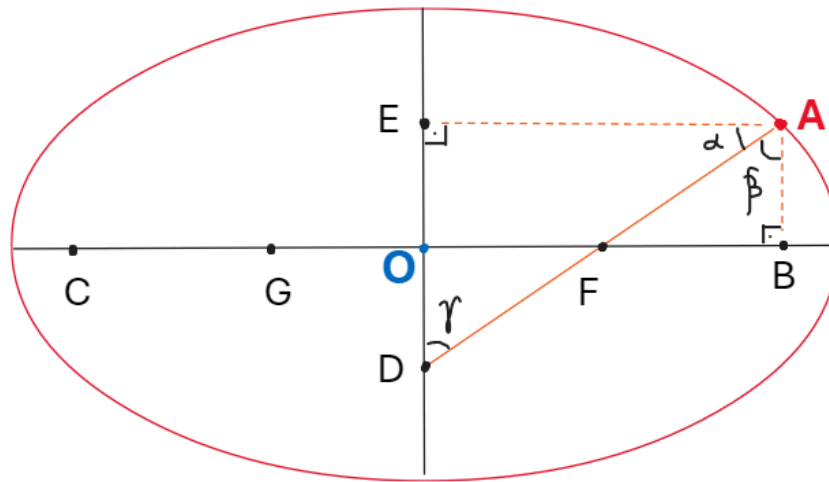
Fonte: Elaborada pelos autores em GeoGebra (versão 6.0).

Em outras versões desse aparelho pode haver mais hastes reguláveis e com a movimentação dessas partes é possível criar curvas que, em uma volta completa, formam elipses. Em alguns modelos, as distâncias focais dependem de como o usuário regula as posições das hastes e dos comprimentos das mesmas: quanto mais longa a haste, maior a distância entre os focos, assim como quanto maiores os trilhos, às distâncias focais também aumentam. Na Figura 23, a constante “a” indicada na tela representa, em unidades, a metade do comprimento de um trilho (por sua vez, corresponde à metade da distância entre o centro e um dos focos da elipse). Durante a construção e utilização de um elipsógrafo, muitas propriedades matemáticas são necessárias e percebidas em seu funcionamento. A seguir, mostramos como conceitos matemáticos estão envolvidos no funcionamento de um elipsógrafo.

5.2.3 A “prova” matemática sobre o funcionamento do elipsógrafo

Para efeitos de prova, considere a estrutura simplificada de um elipsógrafo no formato indicado pela Figura 24.

Figura 24 - Estrutura simplificada de um elipsógrafo de 2 trilhos.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Os segmentos $\overline{GF}$ e $\overline{ED}$ representam os trilhos do elipsógrafo; o segmento $\overline{AD}$ é a haste regulável. Tomamos como conhecidas as propriedades da Trigonometria. Considere o ponto O como origem de um sistema cartesiano em que as retas BC e DE representam os eixos coordenados x e y , respectivamente. Pela soma dos ângulos internos de um triângulo e, dados os ângulos $\hat{FBA} = \hat{AED} = 90^\circ$, temos que:

$$\alpha + \beta = 90 \text{ e } \alpha + \gamma = 90 \quad [16]$$

Logo, $\beta = \gamma$, portanto $\Delta FBA \approx \Delta AED$. Sejam (x,y) as coordenadas do ponto A e considerando $\beta = \gamma$, temos que:

$$\cos\beta = \cos\gamma = \frac{y}{AF} \quad [17]$$

$$\text{sen}\gamma = \text{sen}\beta = \frac{x}{AD} \quad [18]$$

Pelo Teorema Fundamental da Trigonometria, temos:

$$\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{AD^2} + \frac{y^2}{AF^2} = 1 \quad [19]$$

Observe que a equação [19] representa uma elipse, tal como queríamos mostrar. Outros aparelhos articulados também carregam algumas propriedades da Trigonometria, como é o caso do teodolito. O teodolito também utiliza de movimentos curvos para funcionar, mas sua principal função é identificar o ângulo de observação e, com isso, é possível calcular distâncias inalcançáveis utilizando conceitos da Trigonometria.

5.3 Teodolito

Granato e Miranda (2011) descrevem o teodolito como um instrumento da Geodésia – ciência que se ocupa da determinação e registro precisos dos aspectos da superfície terrestre, possibilitando a criação de mapas em escala –, usado para medir ângulos reduzidos no horizonte, distâncias zenitais¹⁵ e azimutais¹⁶. Esse instrumento está entre os mais resistentes historicamente e muitos modelos foram desenvolvidos ao longo dos anos, evoluindo junto à tecnologia: atualmente, os teodolitos são equipamentos modernos e cada vez mais precisos em suas medições. Embora o teodolito tenha sido inventado no século XVIII, instrumentos precursores foram registrados por povos antigos como egípcios, romanos, babilônios, gregos, chineses e árabes (Zilkha, 2014).

5.3.1 Origem do teodolito

A necessidade humana em conhecer o espaço que habita permitiu que diversas ferramentas pudessem ser desenvolvidas, entre elas, a groma. Trata-se de um instrumento primitivo com duas hastes perpendiculares entre si; nas extremidades eram colocadas cordas com ou sem prumo. Sua função era verificar o alinhamento entre objetos e até demarcar ângulos necessários nas construções. Um modelo de groma pode ser visto na Figura 25.

¹⁵ É uma “medida de posição de um astro no sistema horizontal (local) de coordenadas. Consiste no ângulo contado a partir da vertical local até a linha de visada do astro, sendo igual a 0° no zênite e a 90° no horizonte.” (Granato; Miranda, 2011, p. 282).

¹⁶ Trata-se de uma “medida de posição de um astro no sistema horizontal (local) de coordenadas. Consiste no ângulo, contado ao longo do plano horizontal, entre o plano meridiano e o vertical do astro.” (Granato; Miranda, 2011, p. 282).

Figura 25 - Groma egípcia.



Fonte: Zilkha (2011, p. 23).

Hiparco de Nicéia (190 a.C. - 120 a.C.) inventou o astrolábio, precursor do teodolito, e foi muito utilizado nas navegações para auxiliar na geolocalização por meio da posição dos astros no céu. Cláudio Ptolomeu (90 - 168) criou o quadrante, uma ferramenta utilizada para observação de astros celestes, similar ao teodolito primitivo. Avançando na linha temporal, conforme o homem busca compreender a realidade e o espaço ao qual está inserido, teorias são criadas para explicar os fenômenos observados. Conforme Granato e Miranda (2011), a não aceitação do sistema geocêntrico de Ptolomeu pelo modelo heliocêntrico de Nicolau Copérnico (1473 - 1542) contribuiu indiretamente para o início de uma nova era nesse ramo da ciência, por volta de 1500. Galileu Galilei (1564 - 1642), ao utilizar lentes de vidro em seus telescópios para observar o céu, foi o catalisador dessas mudanças. Esse avanço reformulou a Geodésia permitindo o surgimento e a evolução de instrumentos como teodolitos, níveis, taqueômetros, sextantes, câmeras fotogramétricas, entre outros, à medida que as técnicas industriais de manufatura e os materiais optomecânicos se desenvolveram.

Ao passo que a tecnologia evoluía, o teodolito também evoluía: suas primeiras versões envolviam hastes e círculos graduados que passaram a ser substituídos por lentes ópticas e, atualmente, contam com captadores eletrônicos (Bennett, 2000, 2005; Granato, Miranda, 2011; Zilkha, 2014). Na Figura 26, mostramos a evolução dos modelos de teodolito ao longo dos anos. O teodolito moderno inspirou a criação do GPS (*Global Positioning System*), uma vez que a mensuração utilizando teodolito envolve conceitos de Trigonometria e Geometria Plana e o sistema de GPS, inicialmente criado para fins militares, utiliza de conceitos da Física, mas foram integrados os avanços do teodolito moderno nesse sistema (Zilkha, 2014).

Figura 26 - Evolução do teodolito.



Fonte: Adaptado de Zilkha (2014); Museu Virtual EPUSP (s.d.); Royal Museums Greenwich (s.d.); Physics Museum Tuq (1890); The British Museum (s.d.).

Na sala de aula, o uso de teodolito caseiro permite a investigação de diversos conceitos matemáticos envolvendo ângulos, relações trigonométricas, semelhanças de triângulos e outras relações, conforme exemplificamos nesta tese. Para compreender o funcionamento dos teodolitos, descrevemos a seguir.

5.3.2 A medição de ângulos e o cálculo de distâncias

Para compreender o uso do teodolito, consideramos o modelo de um teodolito caseiro representado na Figura 27. Neste modelo, há um transferidor para medir o ângulo de observação, um canudo para orientar a visão do usuário, um barbante e um peso para prumo.

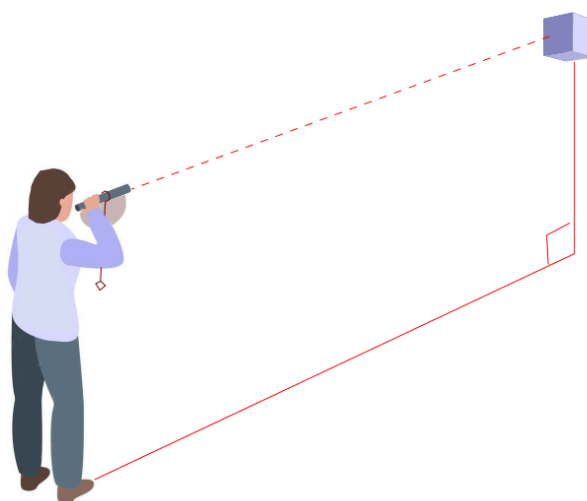
Figura 27 - Modelo de teodolito caseiro.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Um exemplo de uso para o teodolito caseiro é a medição de distâncias inacessíveis, como altura de objetos. O usuário deve se posicionar a uma distância horizontal já mensurada a partir da perpendicular referente ao objeto. Com o teodolito em mãos, deve-se observar, através do canudo, o objeto cuja altura será medida. Uma pessoa pode auxiliar registrando o ângulo de observação indicado pelo barbante, como ilustrado a seguir na Figura 28.

Figura 28 - Ilustração do uso de um teodolito caseiro.



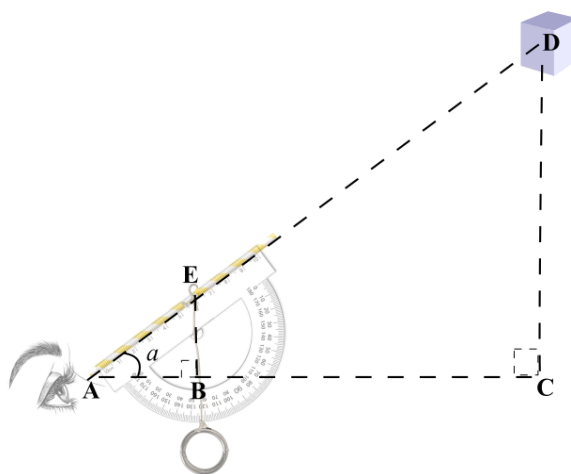
Fonte: Elaborado pelos autores.

Ao anotar o ângulo observado, os cálculos podem ser feitos com base na distância horizontal até o objeto, a altura do observador e o ângulo, como descrevemos a seguir.

5.3.3 A “prova” matemática sobre o funcionamento do teodolito

Observe o esquema de observação do teodolito caseiro na Figura 29.

Figura 29 - Esquema de observação com teodolito caseiro.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Para encontrar a altura h do objeto no ponto D em relação ao solo, precisamos calcular a altura $\overline{CD}$ e adicionar à altura do observador localizado no ponto A . Ao apontar o teodolito para o ponto D , o barbante define o ângulo de observação $\widehat{AEB}$. Considere que:

- i. Os pontos A , E e D são colineares, assim como A , B e C ;
- ii. Os ângulos $\widehat{ABE}$ e $\widehat{ACD}$ são retos;
- iii. A reta que passa por $\overline{CD}$ é perpendicular à superfície de apoio;
- iv. A distância $\overline{AC}$ é conhecida;
- v. O ângulo a é comum aos triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle ACD$.

O triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle ACD$ são semelhantes pelo caso Ângulo - Ângulo. Considerando as razões trigonométricas e propriedades dos ângulos internos de triângulos, temos que:

$$a + \hat{AEB} = 90^\circ \Rightarrow a = 90^\circ - \hat{AEB} \quad [20]$$

$$\operatorname{tg}(a) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{CD} = \operatorname{tg}(a) \cdot \overline{AC} \quad [21]$$

Sendo d a distância entre a linha do solo e a linha dos olhos do observador, concluímos que:

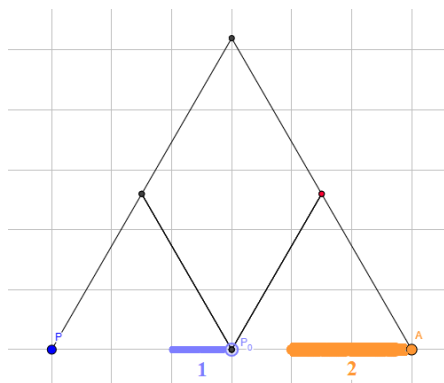
$$h = d + \operatorname{tg}(a) \cdot \overline{AC} \quad [22]$$

Vale ressaltar que, para todos os instrumentos apresentados, as medidas e desenhos não são precisos, pois as ferramentas estão sujeitas a avarias e pequenas deformações, bem como dependem da habilidade do usuário que utiliza os instrumentos. Nesse sentido, para uma boa visualização e cálculos precisos, podemos recorrer ao uso da tecnologia, como modelos virtuais e programação em softwares de geometria dinâmica. Utilizamos o GeoGebra para realizar essas tarefas.

5.4 O uso de tecnologia para visualizar o funcionamento das ferramentas

Para melhor visualização do funcionamento desses aparelhos, realizamos alguns testes com o GeoGebra, um *software* de geometria dinâmica de código aberto e gratuito. Observe na Figura 30 o que ocorre no deslocamento horizontal de uma unidade utilizando um pantógrafo virtual.

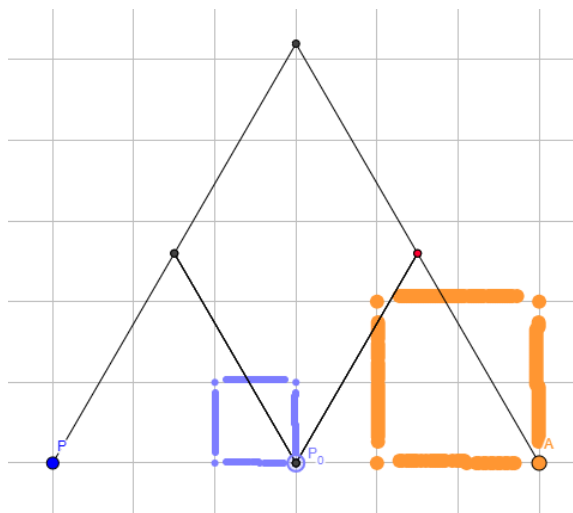
Figura 30 - Movimentação horizontal de pantógrafo virtual no GeoGebra Classic.



Fonte: Elaborado pelos autores no software GeoGebra (versão 6.0).

Da mesma forma, se o ponto em que contorna a figura original preencher completamente a superfície de um quadrado de lado unitário, então o ponto em que o desenho é feito preenche um quadrado de lado igual ao dobro do original. Observe a simulação feita no GeoGebra mostrada na Figura 31.

Figura 31 - Contorno de um quadrado de lado 1 com o pantógrafo virtual.

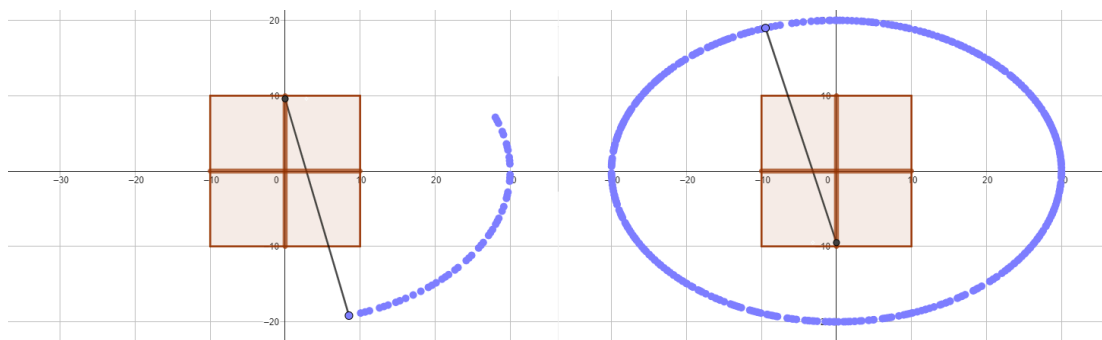


Fonte: Elaborado pelos autores no software GeoGebra (versão 6.0).

Utilizando o recurso de “rastro de objeto”, o quadrado contornado pelo ponto P_0 tem uma unidade de lado (área = 1 u.a.), enquanto o quadrado contornado pelo ponto A tem duas unidades de lado (área = 4 u.a.).

No caso do elipsógrafo, é possível observar a movimentação da haste principal em torno dos eixos do aparelho. Na Figura 32, nota-se o rastro formado pelo ponto ao extremo da haste: este rastro é uma elipse.

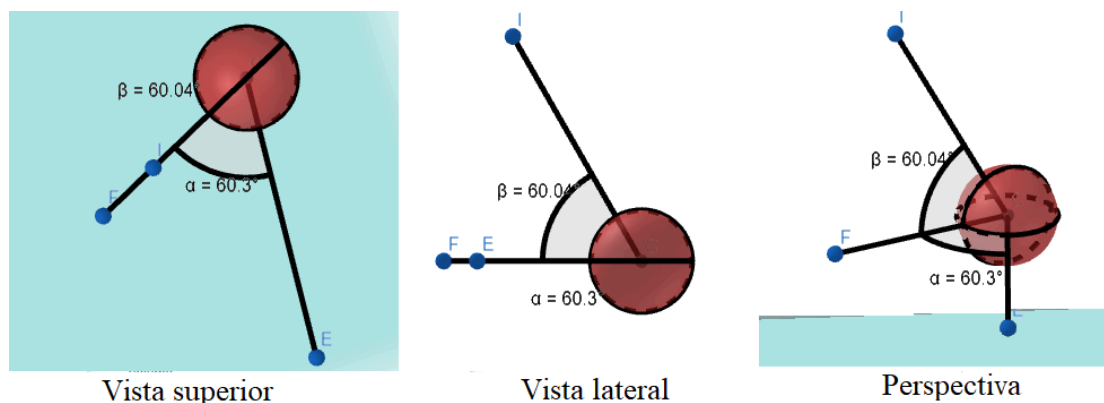
Figura 32 - Movimentação do elipsógrafo no GeoGebra Classic.



Fonte: Elaborado pelos autores no software GeoGebra (versão 6.0).

O teodolito, por sua vez, pode ser representado por uma estrutura espacial. Para isso, utilizamos a plataforma 3D do GeoGebra, como mostrado na Figura 33. Ao movimentar os pontos E , F ou I , os ângulos de observação se alteram (horizontal e vertical).

Figura 33 - Movimentação do teodolito no GeoGebra 3D.



Fonte: Elaborado pelos autores no software GeoGebra (versão 6.0).

O *software* GeoGebra possibilita a visualização do funcionamento de um aparelho idealizado, ou seja, cujos componentes não sofrem avarias devido à manufatura, permitindo que sejam feitas animações e investigações sobre a utilização da ferramenta. É um recurso tecnológico que pode ser incorporado às aulas de matemática e, para a nossa pesquisa, foi utilizado no processo de validação das conclusões sobre o funcionamento dos aparelhos. As construções da versão virtual dessas ferramentas podem ser consultadas nos apêndices D e E. A seguir, descrevemos sobre a origem do GeoGebra e suas possíveis contribuições para o ensino de matemática.

6 O SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA GEOGEBRA E O ENSINO DE MATEMÁTICA

Um dos maiores desafios no ensino de matemática é engajar os estudantes e mostrar que a matemática pode ser interessante, indo além das demonstrações e cálculos complexos. Por isso, muitos educadores e pesquisadores matemáticos têm buscado meios de envolver os estudantes no processo de aprendizagem da matemática, tornando-o acessível e lúdico. Para isso, recorrem ao uso de jogos e brincadeiras (Kishimoto, 2003; Silva, 2018), história da matemática (D'Ambrosio, 1996, 2000; Mendes, 2001), tecnologias da informação e

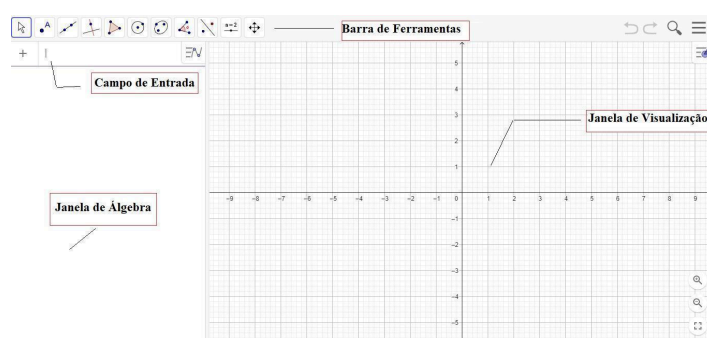
comunicação (Borba; Silva; Gadanidis, 2020), entre outros recursos que se relacionam com os interesses dos estudantes e as diversas realidades.

No tocante ao uso de tecnologias acessíveis e dinâmicas para o ensino de matemática, muitos *softwares* foram desenvolvidos desde a década de 90 e, atualmente, um dos mais usados recursos tecnológicos para o ensino de geometria é o GeoGebra (Reis; Melo, 2019). O GeoGebra é um *software* gratuito de código aberto que foi desenvolvido em 2001, por Markus Hohewarte durante sua tese de doutorado. Atualmente, o aplicativo pode ser utilizado em computadores e dispositivos móveis, com plataformas voltadas para Geometria Analítica e Álgebra (GeoGebra Classic), Geometria Plana e Espacial (GeoGebra Classic e GeoGebra 3D) e Cálculo (GeoGebra Calculator). É possível desenvolver modelos, atividades e até programar animações. Os trabalhos desenvolvidos no GeoGebra podem ser compartilhados e disponibilizados no site da comunidade virtual.

6.1 Conhecendo o GeoGebra

Trata-se de um software livre e gratuito que permite construir figuras geométricas (planas e espaciais), manuseá-las sem perder suas propriedades geométricas, mostrando às fórmulas e equações algébricas envolvidas na construção dos objetos (Araújo; Nóbriga, 2010; Reis; Melo, 2019). Uma das características deste programa em que o distingue dos demais *softwares* de geometria dinâmica é a possibilidade de acessar as ferramentas por meio de botões na “Barra de Ferramentas” ou pelo “Campo de Entrada” - ver Figura 34. Além disso, é possível alterar as propriedades dos objetos construídos por meio da “Janela de Álgebra” e também utilizando algumas ferramentas disponíveis ao clicar com o botão direito do mouse (Araújo; Nóbriga, 2010).

Figura 34 - Tela de entrada do GeoGebra - Classic online versão 6.0.



Fonte: Captura de tela do GeoGebra Classic Online.

A barra de ferramentas possui onze botões de ferramentas nomeados, da esquerda para direita, por: mover, ponto, reta, reta perpendicular, polígono, círculo, elipse, ângulo, reflexão, controle deslizante e mover janela de visualização. A Figura 35 mostra os ícones das janelas.

Figura 35 - Barra de ferramentas.



Fonte: Captura de tela do GeoGebra Classic Online.

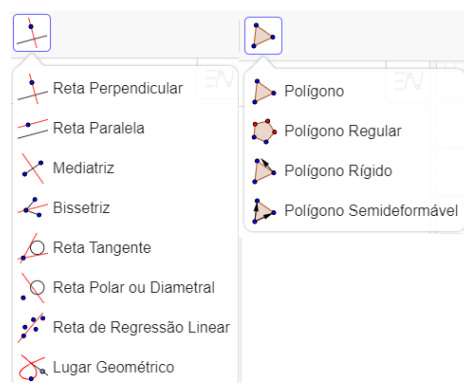
Ao clicar em cada botão, abrimos uma janela de opções que variam de acordo com a ferramenta escolhida, como vemos nas figuras a seguir.

Figura 36 - Janelas de ferramentas - mover, ponto e reta.



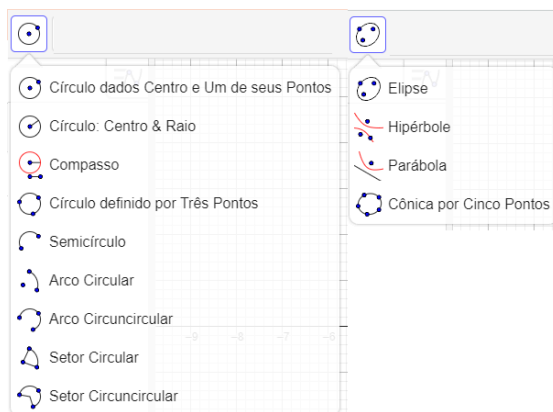
Fonte: Captura de tela do GeoGebra Classic Online.

Figura 37 - Janelas de ferramentas - reta perpendicular e polígono.



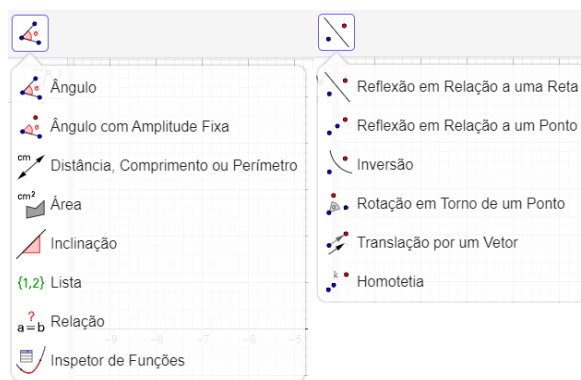
Fonte: Captura de tela do GeoGebra Classic Online.

Figura 38 - Janelas de visualização - círculo e elipse.



Fonte: Captura de tela do GeoGebra Classic Online.

Figura 39 - Janelas de visualização - ângulo e reflexão.



Fonte: Captura de tela do GeoGebra Classic Online.

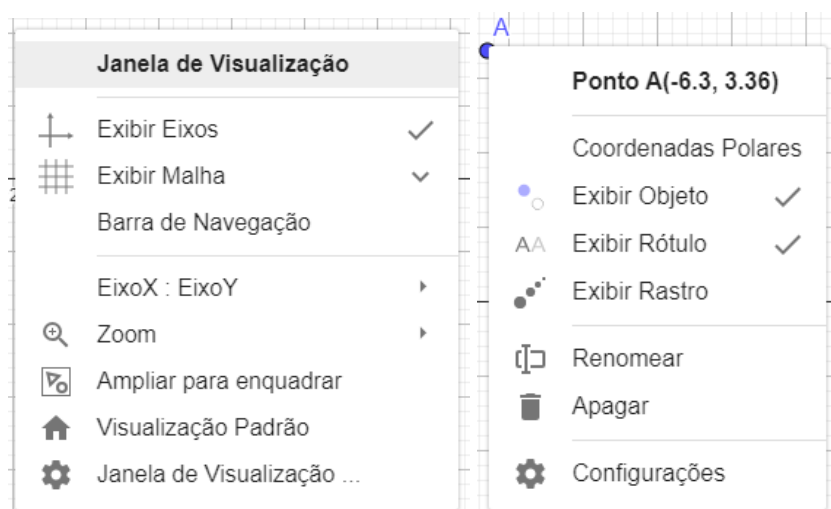
Figura 40 - Janelas de visualização - controle deslizante e mover janela de visualização.



Fonte: Captura de tela do GeoGebra Classic Online.

No APÊNDICE B descrevemos as funções de cada botão. Ao clicar no botão direito do mouse é possível acessar mais ferramentas, como mostra a Figura 41.

Figura 41 - Menu de ações ao clicar com o botão direito do mouse.



Fonte: Captura de tela do GeoGebra Classic Online.

Cada função auxilia na visualização dos objetos em tela. Quando criado um objeto e, sob o objeto, clicamos com o botão direito, abre-se um novo menu de ações que permite modificar as propriedades do objeto. Essas funções variam de objeto para objeto, mas as básicas são: “exibir objeto” (mostra ou oculta o objeto em tela), “exibir rótulo” (mostra ou oculta o nome do objeto), “exibir rastro” (mostra ou oculta o caminho feito pelo objeto na tela), “renomear” (permite escrever um novo nome para o objeto), “apagar” (deleta o objeto e demais objetos ligados a ele) e “configurações” (leva a uma janela de configurações diversas).

6.2 O GeoGebra como recurso educativo para o ensino de matemática

A criação de softwares educacionais possibilitou desenvolver aulas com uma geometria dinâmica: o que antes era feito utilizando lápis, papel e régua, agora pode ser feito na tela do celular e ser investigado via realidade virtual. Com o uso da geometria dinâmica, novas características no processo de construção das representações matemáticas surgiram, resultando em novas possibilidades no desenvolvimento do conhecimento matemático (Borba; Silva; Gadanidis, 2020).

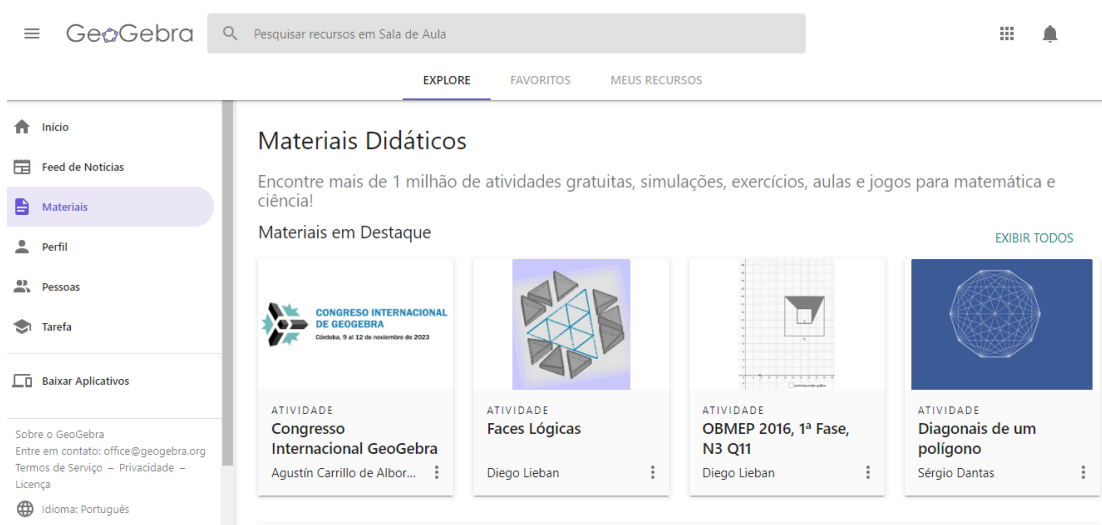
Reis e Melo (2019) defendem o uso do GeoGebra em aulas de matemática, pois permite que os estudantes explorem conceitos abstratos da Geometria e da Álgebra, bem

como reforcem conteúdos que envolvam cálculos e Geometria Analítica, permitindo-lhes compreender que essas áreas da matemática estão conectadas e seus conceitos podem ser utilizados simultaneamente para a resolução de problemas realísticos ou imaginários.

Um software que combina com a Geometria e Álgebra propondo uma aprendizagem significativa seria o software GeoGebra, ele desperta nos alunos a curiosidade e o interesse na aprendizagem, facilitando o conhecimento por parte do aluno, criando um ambiente de aprendizagem onde o aluno tenha a liberdade de expor suas ideias, construção de seus conhecimentos e um fator muito importante é que o professor passa a ser um mediador das atividades e não um professor tradicional - conhecedor de tudo (Reis; Melo, 2019, p. 22-23).

O site oficial do GeoGebra conta com um acervo de atividades de pessoas do mundo todo que compartilham suas criações, além de tarefas prontas para serem utilizadas em sala de aula. Esse recurso fica disponível na aba “Materiais” na página inicial - ver Figura 42.

Figura 42 - Janela de materiais disponíveis no GeoGebra.



Fonte: Captura da tela de “Materiais” do GeoGebra.

Os materiais disponibilizados no GeoGebra podem ser consultados e utilizados pelo docente para introduzir algum assunto, revisar conteúdos, permitir que os estudantes façam algumas investigações ou utilizar os recursos como forma de avaliação.

Para a realização de nossa pesquisa, justificamos a utilização do GeoGebra por se tratar de uma aplicação virtual gratuita, dinâmica e de fácil acesso, pois a interface mostra dicas de uso das ferramentas, além de uma série de tutoriais disponíveis na página de internet oficial. Considerando as potencialidades desse software, utilizamos o GeoGebra em nossas tarefas com o objetivo de permitir aos estudantes que realizassem investigações sobre o

funcionamento das ferramentas, a priori, criadas manualmente, em sua versão virtual, livre de erros “humanos”, para confirmar ou refutar suas primeiras conclusões sobre as propriedades matemáticas envolvidas na construção e utilização das ferramentas. Esse tipo de investigação, aliado ao pensamento computacional, podem auxiliar na matematização de diferentes conceitos.

Segundo Abar e Almeida (2024),

O termo pensamento computacional traz uma nova abordagem na área da ciência cognitiva com a premissa de que a inserção dos conceitos da Ciência da Computação na educação básica desenvolve uma habilidade de abstração diferente, que ajuda as crianças na resolução de problemas em todas as áreas da vida, não apenas no uso de computadores ou para futuros cientistas da computação (Abar; Almeida, 2024, p. 2).

Segundo os autores, embora a definição ainda esteja em discussão, o pensamento computacional abrange uma variedade de habilidades voltadas para a resolução de problemas, como abstração, decomposição, avaliação, identificação de padrões, lógica e design de algoritmos.

As características do pensar computacional privilegiam elementos do saber e do fazer matematicamente no processo de aprendizagem, como: formular problemas; representar dados através de abstrações, como modelos e simulações; automatizar soluções através do pensamento algorítmico; identificar, analisar e implementar possíveis soluções; lidar com problemas abertos e imprevisíveis, como: abstração, algoritmo, decomposição, reconhecimento e generalizações de padrões, etc. (Azevedo; Maltempi, 2020, p. 3)

As metodologias de aprendizagem e o pensamento computacional podem transformar o processo de ensino da matemática em uma experiência dinâmica que supera a mera assimilação de conteúdos. Evitando se limitar a resolver problemas e memorizar fórmulas, essas abordagens incentivam os estudantes a explorar e questionar conceitos de maneira mais profunda (Azevedo; Maltempi, 2020). O objetivo é tentar criar um ambiente em que o aprendizado se torna uma jornada de descoberta e análise crítica, estimulando os estudantes a aplicar habilidades matemáticas em contextos reais e variados. Essa forma de ensino possibilita a promoção de uma compreensão mais rica e contextualizada da matemática, preparando os estudantes para enfrentar desafios cada vez mais complexos.

Além disso, o pensamento computacional e as metodologias modernas de aprendizagem incentivam a colaboração e a criatividade entre os estudantes, integrando aspectos científicos e tecnológicos em seus projetos como, por exemplo, a utilização do *software* GeoGebra para realizar tarefas de construção ou visualização de figuras geométricas (Abar; Almeida, 2024). Essa abordagem não se limita aos muros da sala de aula: ela pode

abrir portas para uma aprendizagem envolvente e interconectada com o mundo real. Ao adotar essas práticas, a motivação do estudante pode ir além da simples obtenção de boas notas em testes padronizados e permite fomentar habilidades essenciais como o pensamento crítico e a resolução de problemas, cruciais para o desenvolvimento pessoal e profissional dos aprendizes.

Enquanto o desenvolvimento de habilidades cruciais para o crescimento pessoal e profissional é uma consequência da adoção dessas práticas, é por meio da criação de ferramentas como o pantógrafo e o teodolito virtuais que esses conceitos ganham sentido e podem ser aplicados. Apresentamos, a seguir, como se deu a construção dessas duas ferramentas no GeoGebra.

6.3 Construindo ferramentas no GeoGebra

Dedicamos essa seção para descrever a construção das ferramentas virtuais pantógrafo e teodolito. Nas tarefas, utilizamos as versões da família 6.0.700 do *software* (ano 2022) e disponibilizamos os comandos nos apêndices D e E, entretanto, ressaltamos que é preciso ajustar alguns desses comandos nas versões recentes, pois a plataforma passou por diversas atualizações. Para isso, recomendamos o acesso aos canais de dúvidas do GeoGebra como a Central de ajuda (<https://help.GeoGebra.org/hc/es> - acesso 03 set. 2024) ou ao canal no YouTube “GeoGebra” (<https://www.youtube.com/@GeoGebraChannel> - acesso 03 set. 2024) para conhecer mais a respeito do *software*. Seguimos com a construção do pantógrafo no GeoGebra.

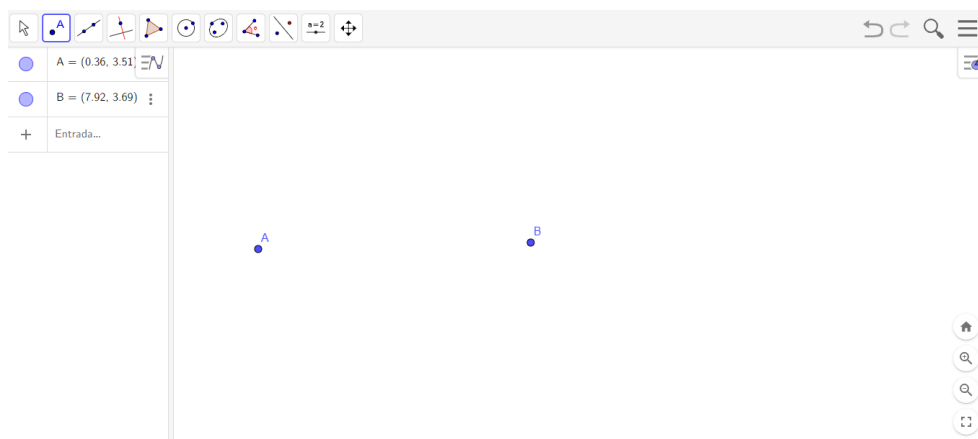
6.3.1 Construindo um pantógrafo no GeoGebra

A construção do pantógrafo virtual foi inspirada na dissertação de Bittencourt (2014), da qual utilizamos como base para compreender a plataforma e realizamos adaptações no processo de construção da versão virtual do pantógrafo. Para montar o pantógrafo virtual foi necessário construí-lo em duas etapas: a primeira, montamos a haste como uma ferramenta a ser adicionada à própria plataforma; a segunda, construímos a base do pantógrafo e aplicamos a ferramenta “haste” sobre ela. Para essa construção, utilizamos o GeoGebra Classic Online, limpamos a tela inicial clicando com o botão direito do mouse e selecionando as opções “sem eixos” e “sem grades”.

A montagem da ferramenta “haste” requer o cumprimento de 8 (oito) passos:

- 1) Com a ferramenta “Ponto”, construímos dois pontos A e B quaisquer na tela, conforme mostrado na Figura 43;

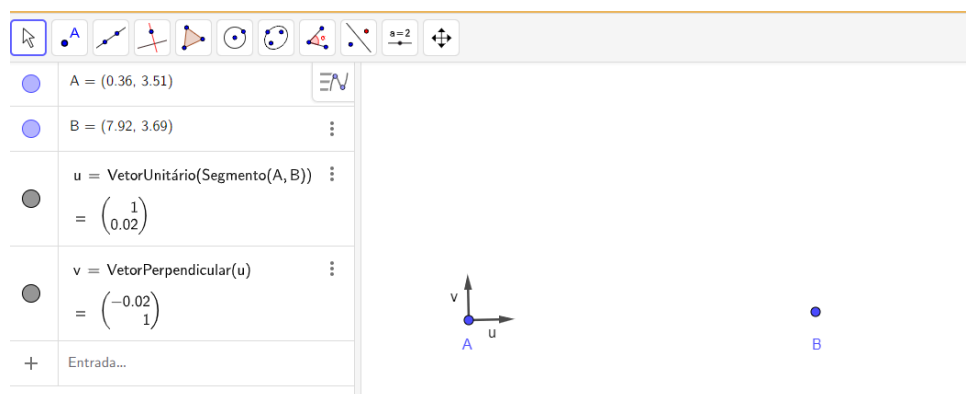
Figura 43 - Construção dos pontos A e B para base da ferramenta “haste”.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

- 2) Utilizando a caixa de entrada, construímos o vetor unitário com base no segmento formado entre os pontos A e B;
- 3) Em seguida, criamos o vetor perpendicular ao vetor anterior, como mostramos a seguir;

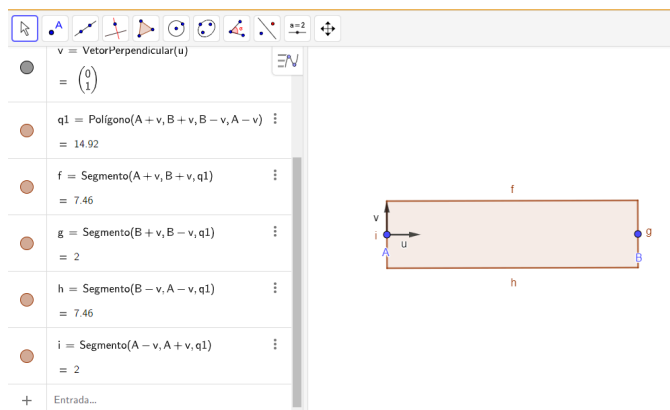
Figura 44 - Vetores construídos a partir dos pontos A e B.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

- 4) Com o comando “Lista”, criamos um conjunto de elementos geométricos indicando os pontos A e B como centros de circunferências cujos raios eram o vetor perpendicular;
- 5) Com base na lista de elementos anterior, montamos um polígono convexo conforme mostrado na Figura 45.

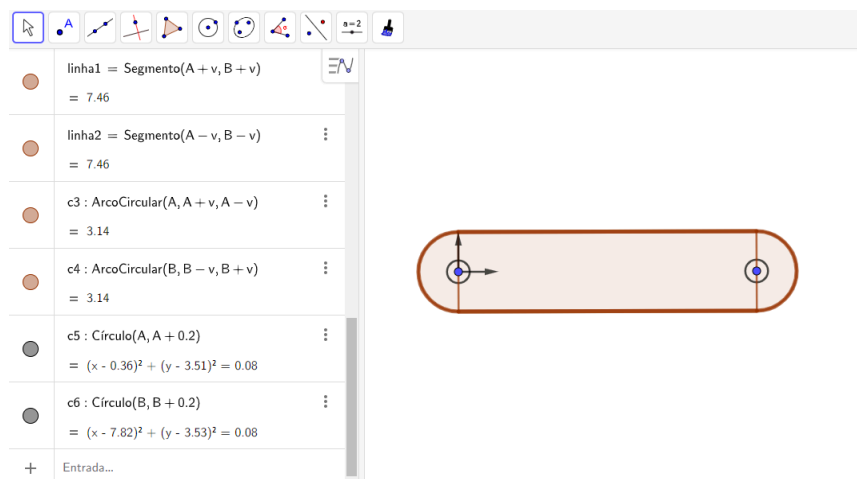
Figura 45 - Polígono montado a partir dos pontos A e B e os vetores unitários.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

- 6) Nas laterais esquerda e direita, construímos semicírculos com centros em A e B e raios conforme comprimento do vetor perpendicular;
- 7) Alteramos algumas características visuais dos semicírculos e do polígono como espessura do contorno e cores. Ocultamos alguns elementos para deixar a haste mais simples, mas ainda havia elementos a serem ocultados;

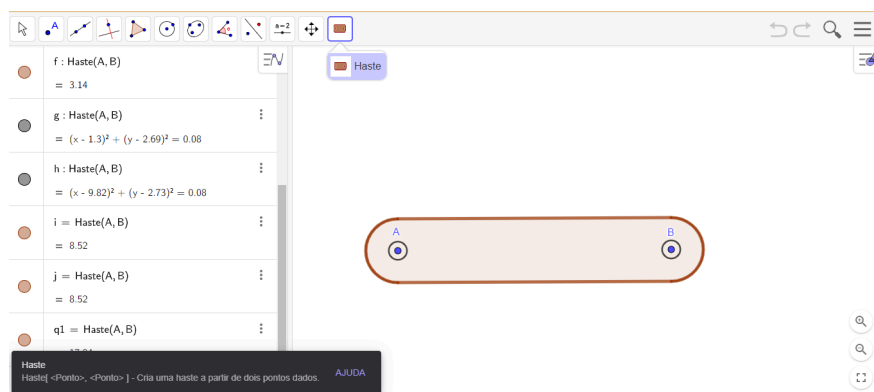
Figura 46 - Aparência da haste do pantógrafo virtual.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

- 8) Salvamos os elementos que compõem a haste e transformamos em uma ferramenta, cujo objetivo era construir uma haste a partir de dois pontos dados.

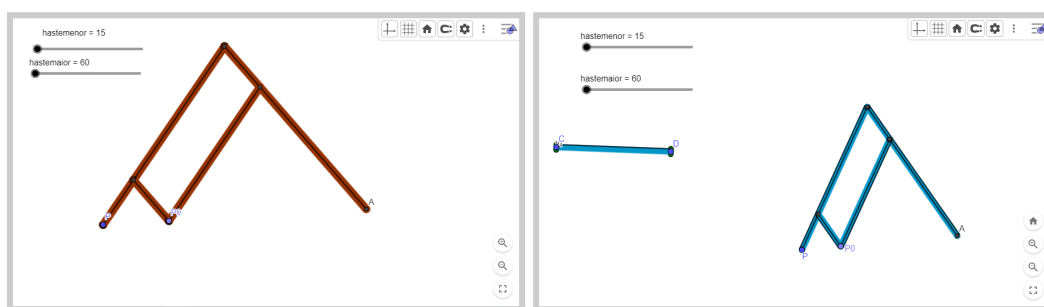
Figura 47 - Ferramenta “haste” construída no GeoGebra.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Para construção do pantógrafo foram necessários 22 (vinte e dois) passos dois quais: os 2 (dois) primeiros determinavam os comprimentos mínimos e máximos das hastes do pantógrafo; os passos de 3 (três) a 11 (onze) foram necessários para a construção dos pontos auxiliares da estrutura do pantógrafo; os passos 12 (doze) a 21 (vinte e um) permitiram construir os segmentos que representam as hastes e; por fim, o passo 22 (vinte e dois) tratava de mudar estilos, habilitar rastros e aplicar a ferramenta “haste”, previamente construída. Na Figura 48, podemos ver a aparência de 2 (dois) pantógrafos virtuais que foram criados pelos participantes da pesquisa.

Figura 48 - Pantógrafos virtuais criados pelos participantes da pesquisa via GeoGebra.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Com o pantógrafo virtual em funcionamento adequado, os estudantes tiveram a oportunidade de explorar a ferramenta em seu estado “ideal”, pois o pantógrafo manual se mostra suscetível a falhas devido aos possíveis erros nos cortes das hastes e nas junções das peças, bem como requer um pouco de prática para seu manuseio, enquanto o virtual só necessita da movimentação feita através do *mouse* do computador ou do “deslizar de dedos”

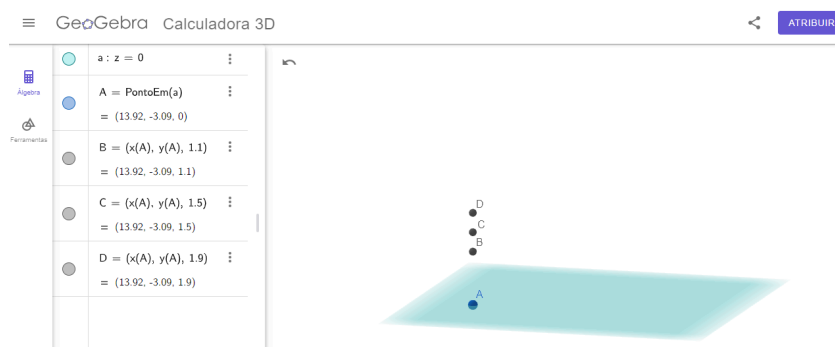
na tela do celular, movimentos com os quais os estudantes apresentaram familiaridade. A seguir, descrevemos sobre a construção do teodolito virtual.

6.3.2 Construindo um teodolito virtual 3D

O teodolito virtual, por ser a versão de um aparelho que pode ser utilizado para mensurar distâncias entre objetos localizados em um determinado espaço, foi construído no *GeoGebra 3D*, em que é possível criar objetos tridimensionais. Para montagem do teodolito virtual foram necessários 17 (dezessete) passos, aos quais resumimos a seguir:

i) Passos 1 a 4: Criamos os pontos A, B, C e D a partir do plano “a: $z = 0$ ” (plano xOy);

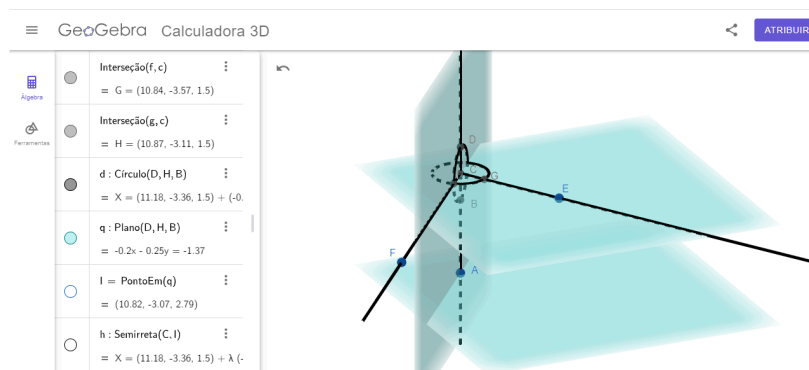
Figura 49 - Pontos auxiliares para construção do teodolito virtual em GeoGebra 3D.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

ii) Passos 5 a 12: Construimos as retas auxiliares, planos e circunferências para simular a estrutura interna de um teodolito;

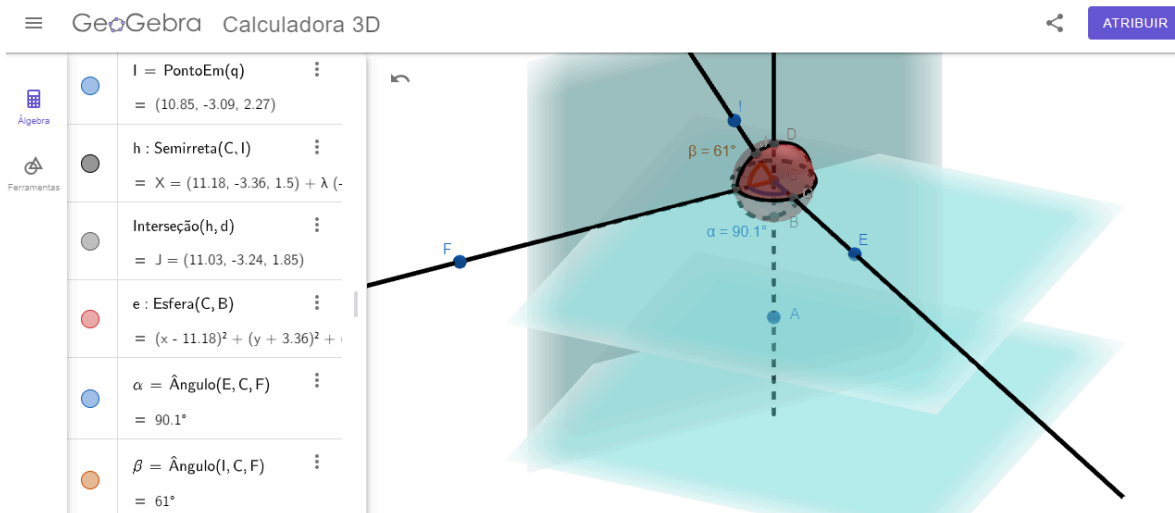
Figura 50 - Estrutura interna de um teodolito virtual.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

iii) Passos 13 a 17: Inserimos uma esfera para cobrir a estrutura e destacamos os ângulos de interesse (ângulo formado entre as semirretas do plano horizontal e entre as semirretas do plano vertical).

Figura 51 - Teodolito virtual com indicação de ângulos.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Com a construção do teodolito de forma virtual, os estudantes tiveram a oportunidade de mensurar o ângulo azimutal e de compreender como podemos utilizar um teodolito para mensurar ângulos que, posteriormente e por meio de relações trigonométricas, permitem calcular distâncias.

Com a utilização do GeoGebra para construir pantógrafos e teodolitos, os participantes puderam criar suas próprias versões de aparelhos articulados com base nas tarefas anteriores. Para compreender sobre essas experiências, descrevemos a metodologia adotada para fundamentação e aplicação da pesquisa, bem como os resultados obtidos nas seções seguintes.

7 METODOLOGIA DA PESQUISA

Nesta seção, dedicamo-nos a descrever os tipos de pesquisa realizados para a composição desta tese e para a realização da pesquisa na instituição de ensino básico. Para elaboração da escrita desta tese, realizamos uma pesquisa bibliográfica que caracteriza-se pelo

levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem porém pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências

teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta (Fonseca, 2002, p. 32).

Utilizamos textos de teses e dissertações, artigos em periódicos com pontuação alta na avaliação Capes e em livros, versando sobre os temas: Educação, Educação e ensino de matemática, Teoria Histórico-Cultural, Teoria da Atividade, Educação Matemática Realística, História de Instrumentos de Desenho e Medidas, bem como de Metodologia Científica. O acesso aos trabalhos já publicados ocorreu de forma física em bibliotecas públicas e particulares, mas também na forma online, por meio de pesquisa no Banco de Teses e Dissertações Capes, Bibliotecas Digitais de Teses e Dissertações e Google Acadêmico.

7.1 Pesquisa-ação e suas definições

Desenvolvemos uma pesquisa de abordagem qualitativa, com procedimentos da pesquisa-ação, pois há envolvimento dos pesquisadores com o objeto de estudo. Silveira e Córdova (2009) descrevem que a pesquisa qualitativa não se preocupa com representações exclusivamente numéricas, tampouco adota uma estrutura positivista para analisar os dados, mas propõe explicar as origens do objeto de estudo, bem como das suas interações com o meio e os participantes de pesquisa. Nessa abordagem, o pesquisador pode participar da pesquisa ou ser um observador indireto. A pesquisa qualitativa tem como características

objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de descrever, compreender, explicar, precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; observância das diferenças entre o mundo social e o mundo natural; respeito ao caráter interativo entre os objetivos buscados pelos investigadores, suas orientações teóricas e seus dados empíricos; busca de resultados os mais fidedignos possíveis; oposição ao pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências (Silveira; Córdova, 2009, p. 32).

No caso da pesquisa-ação, trata-se de um envolvimento planejado do pesquisador com o objeto e o problema de estudo. Sua participação é cooperativa e visa transformar a realidade observada.

O objeto da pesquisa-ação é uma situação social situada em conjunto e não um conjunto de variáveis isoladas que se poderiam analisar independentemente do resto. Os dados recolhidos no decurso do trabalho não têm valor significativo em si, interessando enquanto elementos de um processo de mudança social. O investigador abandona o papel de observador em proveito de uma atitude participativa e de uma relação sujeito a sujeito com os outros parceiros. O pesquisador quando participa na ação traz consigo uma série de conhecimentos que serão o substrato para a realização da sua análise reflexiva sobre a realidade e os elementos que a integram. A reflexão sobre a prática implica em modificações no conhecimento do pesquisador (Fonseca, 2002, p. 35).

Embora seja permitida a interação do pesquisador com o objeto, deve-se tomar cuidado com os limites da pesquisa, evitando ações como excesso de confiança no método de coleta de dados; realização de uma análise demasiadamente minuciosa das observações de campo, indicando uma tentativa de abordar exaustivamente o objeto de estudo, ao mesmo tempo em que se controla a influência do observador; falta de detalhes sobre os procedimentos que conduziram às conclusões; ausência de consideração por aspectos diversos quando examinados por diferentes perspectivas; autoconfiança do pesquisador em relação aos seus dados; certeza de possuir um profundo entendimento do objeto de estudo; envolvimento direto do pesquisador na situação estudada ou com os sujeitos da pesquisa (Silveira; Córdova, 2009).

Quanto aos métodos, utilizamos uma sistematização amparada pelas ações de estudo propostas por Davydov (1988) no Experimento Didático Formativo e pelos princípios norteadores da Educação Matemática Realística, elaborados por Freudenthal e sua equipe. Em suma, a sistematização constituiu-se das seguintes fases:

- **Fase investigativa:** refere-se à tarefa inicial na qual os estudantes observam o modelo disponível pela pesquisadora e buscam compreender sobre suas funções e finalidades. Neste momento, espera-se que os participantes recorram a objetos e situações já conhecidas para assimilar os modelos apresentados.
- **Fase experimental:** dá-se ênfase à tarefa de reprodução do modelo com os materiais disponíveis e testes do aparelho em diferentes situações. É possível que os participantes realizem ajustes no aparelho, se necessários.
- **Fase explicativa:** após construção e experimentação, os estudantes realizam a tarefa que permite refletir sobre possíveis aplicações e buscar por justificativas sobre o funcionamento do instrumento (mecanismos, interações entre as partes do aparelho, limitações, etc.).
- **Fase teórica:** por meio de perguntas norteadoras, os estudantes realizam a tarefa que orienta por justificativas teóricas sobre o funcionamento do instrumento.
- **Fase validativa:** trata-se da aplicação da tarefa de construção da versão virtual do aparelho por meio de modelos ideais feitos no *software* GeoGebra, a fim de confirmar ou refutar as justificativas encontradas nas fases anteriores.

Vale ressaltar que, embora houvesse uma sistematização da pesquisa, as fases aconteceram de modo simultâneo em alguns momentos, pois havia grupos de estudantes que conseguiram avançar para outras fases antes de outros grupos.

A coleta dos dados se deu de forma contínua e por meio de instrumentos diversos: formulários, produção dos estudantes (escrita, aparelhos construídos, fotos e outros), gravação de áudio e vídeo, fotografias e anotações de observação. Todos os dados foram documentados e arquivados para serem acessados posteriormente. A pesquisa, bem como a coleta desses dados foi autorizada pelo Comitê de Ética e Pesquisa, pela Universidade Estadual Paulista (*campus* Marília) e pela instituição em questão, por meio de preenchimento dos termos adequados, tais como Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (preenchido pelos estudantes), Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (preenchido pelos responsáveis) e Declaração (assinada pelo diretor da instituição). Todos os modelos podem ser consultados no APÊNDICE C, bem como na Plataforma Brasil com o número de protocolo CAAE: 55603422.6.0000.5406.

7.2 Perfil da comunidade, da escola e dos participantes

A instituição de ensino participante pertence a uma rede de escolas particulares do estado de São Paulo e está localizada na cidade de Embu-Guaçu. A cidade é rodeada por rios e lagos, cujas principais atividades econômicas são comércio, serviços, indústrias e agropecuária. Há também a produção de artesanatos devido à influência dos municípios vizinhos. A menos de 40 quilômetros do centro, localizam-se as tribos indígenas de *Krukutu*, *Tenondé Porã* e *Guyrapa Ju*, todas de origem Guarani. A proximidade dessas aldeias indígenas resulta na inclusão da região na reserva da Área de Proteção Ambiental (APA), cujo ecossistema é predominantemente composto por Mata Atlântica. As comunidades indígenas influenciam locais próximos, especialmente, devido às atividades de artesanato e turismo. Além disso, Embu-Guaçu dispõe de uma variedade de parques e espaços públicos, cujo objetivo é permitir um turismo sustentável e ecológico.

O colégio foi adquirido pela rede particular em 2019, mas atua há mais de duas décadas e atende à população da região: estudantes e funcionários são residentes dos municípios de Cipó-Guaçu, Embu-Guaçu, Itapequerica da Serra e dos distritos paulistas Grajaú, Interlagos e Parelheiros. Atualmente, atende a mais de 500 estudantes do Ensino Infantil ao Ensino Médio em apenas um período de ensino regular (manhã). Durante a tarde, desenvolvem-se atividades do Ensino Complementar destinado aos estudantes de Ensino Infantil e Ensino Fundamental Anos Iniciais. O colégio ficou conhecido por receber

estudantes da Educação Especial, apesar de não ter profissionais específicos para essa demanda, mas por obter resultados satisfatórios no quesito de socialização desses estudantes.

O período letivo é subdividido em trimestres, com duas “avaliações internas” cada, além de olimpíadas e avaliações sistemáticas, chamadas de “avaliações externas”. As avaliações internas são elaboradas em conjunto com professores de todas as unidades, divididos por áreas do conhecimento e que recebem orientações sobre os assuntos a serem cobrados na avaliação em formato de prova com questões objetivas e discursivas. As avaliações externas são elaboradas pelo sistema de ensino da unidade e pelos órgãos promotores das olimpíadas, todas em formato de prova objetiva. Para os casos de estudantes da Educação Especial, as provas adaptadas são elaboradas pelos próprios docentes de acordo com as necessidades de cada estudante, porém, sem apoio profissional adequado. Além das provas, faz parte do processo avaliativo as chamadas “Orientações de Estudo”, popularmente conhecidas por “lição de casa”; e as “Produções Específicas” em que é permitido aos docentes realizar atividades diversas ou executar projetos, incluindo interdisciplinares, que podem relacionar conteúdos vistos em aula ao cotidiano, revisar ou reforçar tópicos, investigar situações problemas, propor soluções para uma demanda da comunidade, entre outros objetivos.

A infraestrutura do colégio se distancia dos demais da rede particular, pois é uma das unidades de menor área. Em dois andares com acessibilidade a todos os espaços, comporta quadra poliesportiva, espaço compartilhado para refeições, cantina, piscina, laboratório de ciências, espaço recreativo para crianças e 16 salas de aula, além de banheiros em todos os andares, sala dos professores, secretaria e sala dos gestores, coordenadores e orientadores; não há biblioteca ou sala de informática. Em média, há 30 estudantes por sala que participam das aulas obrigatórias de formação básica - Matemática, Linguagens (Língua Portuguesa e Língua Inglesa), Ciências da Natureza (Biologia, Física e Química), Ciências Humanas e Sociais (História, Geografia, Filosofia e Sociologia) e Educação Física -; aulas de formação complementar - Artes, Projeto de Vida, Literatura, Monitoria, Aprofundamentos e Laboratório -; além das aulas de itinerários formativos - Direito e Cidadania, Olimpíadas Acadêmicas, Educação Financeira e Comunicação Social - estas realizadas na modalidade online e no contraturno.

A comunidade escolar, de modo geral, é participativa nas demandas da escola. Pais e responsáveis, especialmente de estudantes do Ensino Infantil e Fundamental, frequentam as reuniões trimestrais e realizam cobranças, bem como sugestões de melhorias no âmbito pedagógico, financeiro e estrutural. Nos eventos promovidos pela escola, a comunidade

escolar participa ativamente, inclusive, na organização e em fornecimentos diversos. Até o ano de 2023, a escola recebeu estudantes de um projeto social gerenciado por uma Organização Não Governamental (ONG) que atua na região. O objetivo do projeto era permitir que crianças e jovens em situação de vulnerabilidade social pudessem frequentar colégios particulares por meio de concessão de bolsas e auxílios, incentivando o crescimento acadêmico dos estudantes contemplados para que tivessem acesso a uma educação de qualidade. A presença desses estudantes possibilitava uma ampla diversidade cultural, social e econômica na escola. Entretanto, o projeto continuou, mas se desassociou do colégio no ano de 2024.

No que concerne aos estudantes que integraram a pesquisa no ano de 2022, encontravam-se matriculados no Ensino Médio. A amostra foi composta por 63 estudantes distribuídos em três turmas, sendo duas pertencentes à 1ª série e uma à 2ª série. As idades dos participantes variaram entre 14 e 18 anos, com alguns deles sendo filiados ao mencionado projeto social. Em média, havia 31 estudantes por turma, sendo a menor turma 28 com indivíduos e a maior com 35. De forma contínua, foram obtidas produções de 61 estudantes, uma participação efetiva próxima a 97%. A pesquisadora ministrou aulas de disciplinas vinculadas à matemática para as turmas, sendo este o seu primeiro ano de interação com esses estudantes. A seguir, descrevemos os métodos para aplicação das tarefas e suas etapas.

7.3 Etapas de aplicação das tarefas: da construção à análise das ferramentas

As tarefas foram alocadas ao longo de três períodos letivos do ano de 2022, durante os quais introduzimos, trimestralmente, as ferramentas pantógrafo, teodolito e elipsógrafo, nesta ordem. Adicionalmente, procedemos à subdivisão das tarefas nas seis fases descritas anteriormente, como explicitadas no Quadro 5.

Quadro 5 - Fases da aplicação e objetivos.	
Fase	Objetivo
Investigativa	Observar o modelo disponível pela pesquisadora (pantógrafo, teodolito e elipsógrafo) e buscar compreender sobre suas funções e finalidades.

Experimental	Reproduzir o modelo com os materiais disponíveis e o testar em diferentes situações, realizando melhorias e ajustes, quando necessário.
Explicativa	Com base em conhecimentos prévios, buscar por justificativas sobre o funcionamento do instrumento (mecanismos, interações entre as partes do aparelho, limitações, etc.).
Teórica	Tentar responder às questões norteadoras por meio de justificativas teóricas sobre o funcionamento do instrumento.
Validativa	Confirmar ou refutar justificativas por meio da construção de modelos ideais feitos no software GeoGebra.
Fonte: Elaborado pelos autores.	

Como exigência da instituição em que realizamos a pesquisa, todas as tarefas foram incluídas na avaliação de “Produção Específica” com o seguinte critério: o estudante que se comprometeu com a pesquisa precisaria apenas participar das tarefas (com ou sem êxito) para garantir a nota máxima, sem prejuízos caso não as concluísse ou desistisse de participar. Nos casos de desistência e não participação, foi ofertada outra atividade que não se relacionasse com a pesquisa. Essas informações foram repassadas para os estudantes e constavam nos termos assinados pelos participantes.

No total, ocorreram doze encontros, sendo que nove foram destinados à aplicação em sala de aula (duração de 50 minutos cada), enquanto os restantes foram dedicados a informar os estudantes sobre a pesquisa e a coletar termos de consentimento e assentimento livre esclarecido. A frequência desses encontros foi semanal, em sua maioria, estendendo-se ao longo das últimas três semanas de cada trimestre. Os estudantes participantes foram agrupados em duplas e trios de acordo com suas preferências. Ao final de cada etapa, a pesquisadora solicitava que os estudantes relatassem e escrevessem sobre suas percepções acerca da pesquisa em uma atividade virtual anexada à plataforma Google Sala de Aula, uma ferramenta online em que é possível disponibilizar atividades, avaliações e outros recursos escolares.

Nos encontros destinados à implementação da pesquisa, os estudantes tiveram a liberdade de organizar a disposição da sala de aula conforme sua conveniência e conforto. Em todos os casos, as turmas escolheram agrupar as carteiras para formar mesas ampliadas,

aproveitando todos os espaços disponíveis na sala, inclusive o chão e as cadeiras, como suportes para os materiais utilizados. A maior parte dos materiais requeridos para a realização das tarefas foi disponibilizada pela pesquisadora, com exceção de placas de papelão, pedaços de madeira, isopor e itens de decoração. Todas as produções dos participantes foram arquivadas para análise e os materiais excedentes foram destinados à reciclagem. Nos encontros que envolveram a construção virtual das ferramentas, a pesquisadora utilizou os recursos de multimídia disponíveis na escola (notebook, projetor, internet).

As produções dos participantes foram coletadas durante a aplicação das tarefas, registradas, analisadas e arquivadas para consultas futuras. Fazem parte das produções os rascunhos de utilização das ferramentas de desenho, os registros em papel feitos pelos estudantes, as respostas ao formulário eletrônico, bem como as ferramentas físicas e virtuais construídas pelos participantes. Outros registros foram feitos pelos pesquisadores como anotações, gravações de áudio, vídeos e fotografias.

O formulário eletrônico continha 17 questões sobre os aparelhos e as percepções dos estudantes acerca das tarefas propostas e foi preenchido após todos os encontros, pois o objetivo era coletar informações das percepções dos participantes sobre toda a pesquisa, embora cada encontro tenha sido registrado pela pesquisadora e pelos próprios estudantes por meio de suas produções. O preenchimento do formulário aconteceu durante uma aula após os encontros, sob supervisão da pesquisadora, mas sem sua interferência: a pesquisadora apenas forneceu o acesso ao formulário e permitiu que os participantes preenchessem sozinhos ou com o grupo. A seguir, detalhamos as etapas de cada encontro de aplicação da pesquisa e descrevemos nossas análises dos resultados obtidos.

8 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

Para analisar os resultados obtidos, primeiramente, descrevemos os encontros da pesquisadora com os estudantes, explicitando as relações entre pesquisadora□objeto□participante e como foram realizadas as tarefas previamente elaboradas pelos pesquisadores. Em seguida, apresentamos as considerações sobre cada conjunto de tarefas conforme tratavam dos instrumentos articulados já mencionados. Por fim, descrevemos sobre as percepções dos participantes quanto à realização da pesquisa e dos conhecimentos mobilizados. Para localizar os participantes da pesquisa, estabelecemos os seguintes códigos a fim de nos referirmos aos estudantes e aos grupos.

Quadro 6 - Códigos para referência aos participantes.	
Código	Definição
E00	Refere-se às respostas ou produções do estudante. Os dígitos “00” indicam um número atribuído ao estudante.
G00X	Refere-se às diversas produções dos grupos. Os dígitos “00” indicam o número atribuído ao grupo. A letra “X” indica a qual turma o grupo pertence. As letras A e B se referem às turmas da 1ª série; a letra C se refere à turma da 2ª série.
Fonte: Elaborado pelos autores.	

Na turma **A**, foram analisadas as produções de 13 grupos que serão referenciados por **G01A, G02A, G03A, G04A, G05A, G06A, G07A, G08A, G09A, G10A, G11A, G12** e **G13A**. Na turma **B**, também foram escolhidos 13 grupos para análise, cujos códigos são **G01B, G02B, G03B, G04B, G05B, G06B, G07B, G08B, G09B, G10B, G11B, G12B** e **G13B**. Finalmente, na turma **C**, optamos por analisar as produções de 12 grupos, codificados por **G01C, G02C, G03C, G04C, G05C, G06C, G07C, G08C, G09C, G10, G11C** e **G12C**. Os grupos foram escolhidos pela alta frequência na entrega das produções e conforme foram autorizadas as análises das mesmas.

Ao todo, obtivemos 44 respostas ao formulário eletrônico. Algumas questões pertinentes foram analisadas e apresentadas neste capítulo subdividido em quatro blocos com análises referentes a(o) pantógrafo; teodolito; elipsógrafo e articulados diversos; e ferramentas virtuais. A pesquisadora realizou as devolutivas das tarefas referentes à construção (física e virtual) e uso de cada ferramenta, comparando as expectativas e o que os estudantes produziram. Mesmo diante das dificuldades, os participantes se mostraram satisfeitos com suas produções, pois perceberam que foram capazes de construir e utilizar uma ferramenta desconhecida, além de relacionar os conhecimentos adquiridos dentro e fora da escola para realizar as tarefas. Sobre avaliação, Lopez, Buriasco e Ferreira (2014) revelam a importância de esclarecer as etapas e objetivos da avaliação para que os estudantes percebam o processo avaliativo como um meio de ajudá-los a compreender suas dificuldades e como melhorar.

Essa discussão e negociação possibilita ao aluno entender a avaliação não como um “bicho de sete cabeças” que tenta impedi-lo de ter sucesso em sua vida acadêmica e, sim, como um guia para ajudá-lo em seu processo de aprendizagem. Os alunos precisam entender o propósito da avaliação e, dessa forma, se preocuparem em aprender matemática ao invés de “aprender a passar de ano” (Lopez; Ferreira; Buriasco, 2014, p. 256).

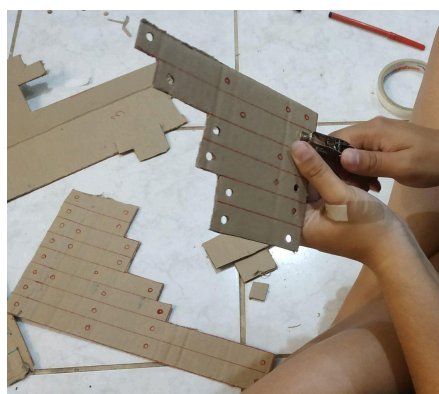
O fato de estarem cientes que sua nota final seria “10”, com a condição de apenas participar e realizar as tarefas, deixaram os participantes confortáveis e sem receios de “fazer errado” porque sabiam que era possível ajustar suas produções e que não sofreriam consequências punitivas pelas tentativas frustradas. Desse modo, os estudantes estavam focados em realizar as tarefas pela satisfação em concluí-las com êxito, mesmo após inúmeros ajustes.

8.1 Descrição dos encontros

8.1.1 Encontro 1: (29/03/2022 - 30/03/2022) - apresentação do pantógrafo

A pesquisadora chegou à sala, cumprimentou a turma e relembrou os estudantes sobre a realização da pesquisa. Até o momento, os estudantes tinham conhecimento do título da pesquisa e seus idealizadores, mas ainda não sabiam sobre os tipos de tarefas que realizariam. Após executar tarefas diárias de classe, a pesquisadora colocou alguns materiais sobre a mesa (caixas de bailarina/percevejo de metal, tesouras, palitos de plástico, hastes de papelão, rolos de fita adesiva e papel sulfite) e fixou um objeto articulado na lousa, enquanto os estudantes observavam suas ações. Em seguida, solicitou à turma que se dividissem em duplas ou trios, acomodando-se como desejassem. A pesquisadora entregou dois conjuntos de hastes de papelão: um conjunto contendo seis hastes cortadas e furadas; outro com oito hastes também cortadas e furadas. Cada par de haste possuía um comprimento distinto dos demais, conforme mostra a Figura 52.

Figura 52 - Pesquisadora recortando os conjuntos de hastes.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Optamos por deixar as hastes prontas devido ao tempo que esse processo leva e à pouca disponibilidade das ferramentas necessárias para furar as hastes, pois o foco da tarefa era que os estudantes compreendessem sobre a montagem do aparelho e o seu funcionamento. Juntamente com os conjuntos, a pesquisadora também entregou algumas bailarinas (ferragem maleável e sem ponta utilizada no processo de encadernação e fixação de materiais diversos). Com esses materiais em mãos, cada dupla/trio foi desafiado a reproduzir o modelo fixado na lousa, conforme mostrado na Figura 53.

Figura 53 - Modelo de aparelho articulado fixado na lousa.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Alguns estudantes se organizaram para investigar o aparelho, um por vez. Até os momentos finais do encontro, cada grupo se dedicou a montar a ferramenta conforme observava o modelo. A pesquisadora caminhava pela sala, observando e registrando os processos de montagem dos grupos, auxiliando quando solicitada, mas sem interferir no processo de investigação dos estudantes: apenas realizava perguntas que pudessem nortear a montagem.

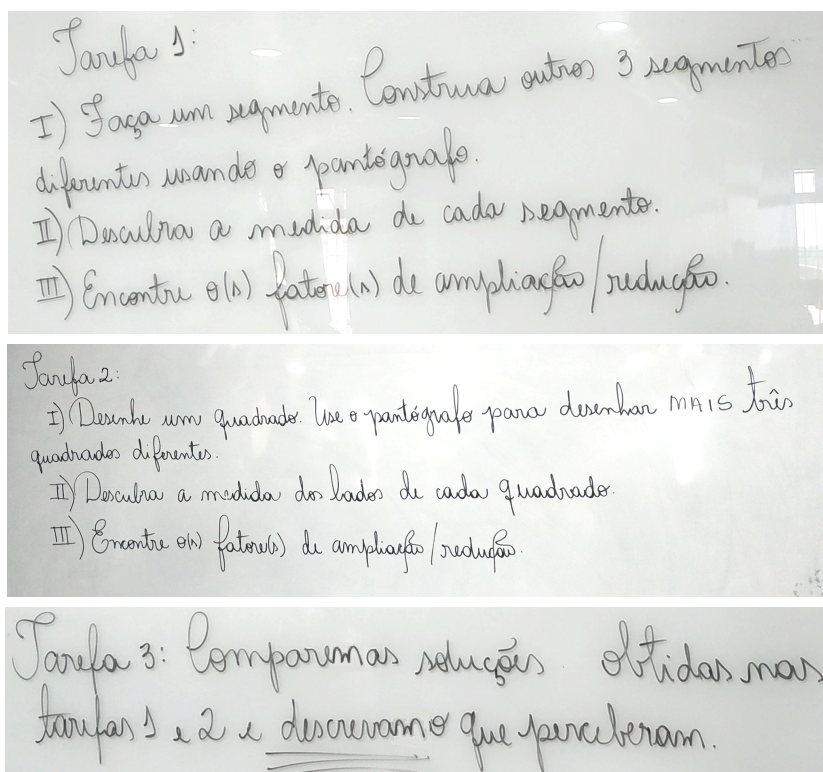
Nos últimos dez minutos do encontro, a pesquisadora perguntou aos estudantes quantos acreditavam ter conseguido montar o modelo e quase todos os grupos afirmaram conseguir realizar a tarefa. Aos que ainda não haviam concluído, a pesquisadora os tranquilizou dizendo que haveria uma sequência no próximo encontro e que teriam tempo para finalizar a tarefa. À turma, foram feitas duas perguntas em sequência: “O que vocês acham que é isso?” e “Para que serve?”. As respostas dos participantes foram anotadas na lousa e registradas pela pesquisadora. Ao término do encontro, a pesquisadora revelou o nome do aparelho (pantógrafo) e sua finalidade (desenhar), abstendo-se, contudo, de utilizar termos como “desenhar linhas” ou “ampliar/reduzir figuras”, assim como quaisquer outras expressões

que pudessem sugerir conceitos matemáticos, uma vez que tais conceitos seriam explorados no próximo encontro. A pesquisadora coletou todas as produções dos estudantes, incluindo aquelas que estavam inacabadas, e despediu-se deles.

8.1.2 Encontro 2: (05/04/2022 - 06/04/2022) - investigando o pantógrafo

A pesquisadora entrou na sala, cumprimentou os estudantes e reforçou sobre a continuação da pesquisa. Após realizar as tarefas de classe, os estudantes formaram os grupos, já determinados no encontro anterior, e receberam suas produções pela pesquisadora, além de folhas de sulfite e fita adesiva que auxiliaram na fixação das folhas sobre a mesa. O modelo de pantógrafo foi fixado à lousa, na qual foram escritas perguntas direcionadoras (consulte a Figura 54) com o objetivo de promover a reflexão sobre o funcionamento do dispositivo. As perguntas foram elaboradas de modo a indicar ideias matemáticas que pudessem ser exploradas a partir do uso do pantógrafo construído pelos participantes.

Figura 54 - Questões norteadoras para compreender a finalidade do pantógrafo.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

A pesquisadora instruiu os grupos a escolher entre iniciar com a tarefa 1 ou 2, encorajando-os a tentar completar ambas durante a aula. A última tarefa seria realizada em

casa, com as descrições sendo entregues na aula seguinte. Vale ressaltar que a pesquisadora lecionava matemática e que os participantes poderiam entregar apenas as descrições fora do encontro. Antes de os estudantes iniciarem as tarefas, a pesquisadora demonstrou como posicionar os lápis/canetas no dispositivo, tanto na versão de seis hastes quanto na de oito hastes, e como movê-lo para criar linhas. Após a demonstração, os grupos foram autorizados a começar a sequência de tarefas.

Em todas as turmas, durante a realização das tarefas, muitos estudantes apresentaram dificuldades na utilização do pantógrafo devido ao não conhecimento do aparelho, na fixação das folhas de sulfite para realizar os desenhos ou ao mal posicionamento das hastes no processo de construção. Diante dessas dificuldades percebidas, a pesquisadora indagou aos estudantes se algum grupo considerava ter logrado realizar um dos itens propostos. Em todas as turmas, pelo menos dois grupos tinham alcançado a conclusão de um dos itens até aquele momento. Com base nessa informação, a pesquisadora solicitou a um representante de cada grupo que tivesse concluído pelo menos um item que explicasse aos demais participantes como operar o aparelho. Os estudantes convidados compartilharam suas soluções, demonstrando-as por meio da manipulação do pantógrafo fixado à lousa, como podemos ver na Figura 55.

Figura 55 - Estudante mostrando aos colegas como manusear o pantógrafo.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Feitas as apresentações, os grupos retornaram às tarefas e todos os registros foram realizados nas folhas entregues pela pesquisadora ou em folhas avulsas trazidas pelos próprios participantes. Os grupos tinham liberdade para realizar a tarefa e utilizar os recursos disponíveis com conveniência. As dificuldades com o uso do aparelho em quatro turmas dificultaram o cumprimento do cronograma proposto para o segundo encontro, sendo possível

realizar a etapa final apenas em uma turma (1ª série). Nos últimos dez minutos, nesta turma, a pesquisadora solicitou que os grupos dissessem as medidas dos quadrados encontradas na Tarefa 2. Os dados foram analisados e descritos na seção seguinte, mas percebemos que muitos grupos ainda tiveram dificuldades em manusear o aparelho, mesmo após explicações.

Concluídas as tarefas, a pesquisadora recolheu as produções (registros em folhas, rascunhos e aparelhos) e finalizou o encontro, despedindo-se da turma. Para os grupos que precisavam concluir a tarefa 3, a pesquisadora solicitou que entregassem suas descrições na aula seguinte, os quais todos concordaram e realizaram o pedido.

8.1.3 Encontro 3: (11/04/2022 - 12/04/2023) - a virtualização do pantógrafo

No terceiro e último encontro para investigação do pantógrafo, a pesquisadora entrou na sala, cumprimentou os estudantes e lembrou sobre as etapas da pesquisa concluídas. Após burocracias do diário de classe, a pesquisadora solicitou que os estudantes sentassem junto aos respectivos grupos e utilizassem anotações.

Em projeção, a pesquisadora mostrou um arquivo (APÊNDICE D) sobre os passos necessários para construção de um pantógrafo ideal e virtual. Além disso, mostrou sobre o acesso ao software GeoGebra e destacou sobre as principais ferramentas que seriam utilizadas na construção do pantógrafo virtual. Como muitos estudantes desconheciam o programa, a pesquisadora decidiu mostrar a montagem passo a passo da “haste” para que os participantes pudessem se familiarizar com o uso das ferramentas do GeoGebra. Foi permitido aos grupos que utilizassem o aplicativo GeoGebra Classic no celular enquanto a pesquisadora mostrava as etapas de construção da haste. Alguns grupos optaram por gravar a projeção e as explicações, outros anotaram em seus cadernos. Esses registros não foram captados, pois os estudantes precisaram deles para realizar a última tarefa: construir o pantógrafo virtual no GeoGebra.

Ao passo que a pesquisadora concluía as etapas de construção, oportunamente, questionava aos estudantes sobre conceitos matemáticos que pudessem estar relacionados aos comandos das ferramentas, por exemplo, a ferramenta “VetorUnitário” - que cria um novo vetor unitário sobre um determinado ponto e no sentido de outro vetor já construído -, a qual foi questionado aos estudantes o que significa um vetor ser unitário e por que os comandos solicitavam a indicação de um ponto e um vetor já criados. As respostas dos estudantes foram registradas via gravação e anotações da pesquisadora. Após concluir as etapas de construção

da haste, foi solicitado aos participantes que um dos integrantes do grupo realizasse o acesso na plataforma do GeoGebra pelo celular e testasse o envio de link via Sala de Aula do Google¹⁷. Confirmados os testes, os estudantes foram encarregados de concluir a última tarefa em casa, entregando seus modelos virtuais do pantógrafo na semana seguinte (18/04/2022 e 19/04/2022) por meio do Sala de Aula do Google. As entregas foram arquivadas para análise.

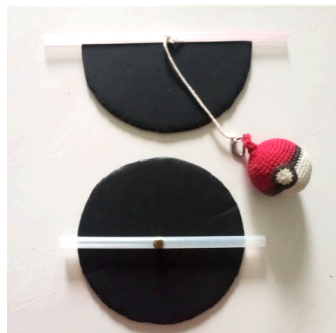
Nos últimos quinze minutos deste encontro, a pesquisadora solicitou aos estudantes que indicassem o que apreciaram das tarefas anteriores, o que acharam que era possível melhorar, quais pontos foram mais desafiadores e com quais assuntos eles conseguiram relacionar a construção e uso do pantógrafo, bem como o que esperavam da última tarefa (expectativas, possíveis dificuldades, justificativas teóricas). Todas as sugestões e conclusões foram registradas pela pesquisadora. Encerrado o encontro, a pesquisadora despediu-se da turma e reforçou o prazo de entrega da última tarefa.

8.1.4 Encontro 4: (03/08/2022 - 04/08/2022) - conhecendo o teodolito

O quarto encontro coincidiu com a primeira aula de matemática do segundo semestre daquele ano, pois os estudantes retornavam do recesso escolar. A pesquisadora entrou na sala, cumprimentou a turma e deu-lhes as boas vindas, lembrando as próximas etapas do calendário da disciplina de matemática e da pesquisa em andamento. Depois da introdução e demonstrando euforia, os estudantes logo se organizaram nos respectivos grupos de trabalho e aguardaram as instruções da pesquisadora. Dessa vez, os conjuntos de materiais foram distribuídos entre os grupos. Cada conjunto continha um pedaço de papelão 20 × 20 centímetros, um par de bailarinas/percevejos de metal, tesoura, um pedaço de barbante e um canudo. Sob a mesa da professora, dois instrumentos arredondados foram colocados e as primeiras orientações foram explanadas pela pesquisadora. Esses instrumentos eram teodolitos caseiros não graduados em dois formatos: um circular com um canudo móvel no centro; o outro em forma de “meia-lua” com um canudo fixo na parte superior, um barbante anexado ao centro do canudo e um peso na outra ponta do barbante, conforme mostrados na Figura 56.

¹⁷ O “Sala de Aula do Google” é uma ferramenta online, gratuita, que auxilia docentes e discentes na organização de tarefas, registros e envio de trabalhos por meio de upload de arquivos, entre outras funções pertinentes ao cotidiano escolar.

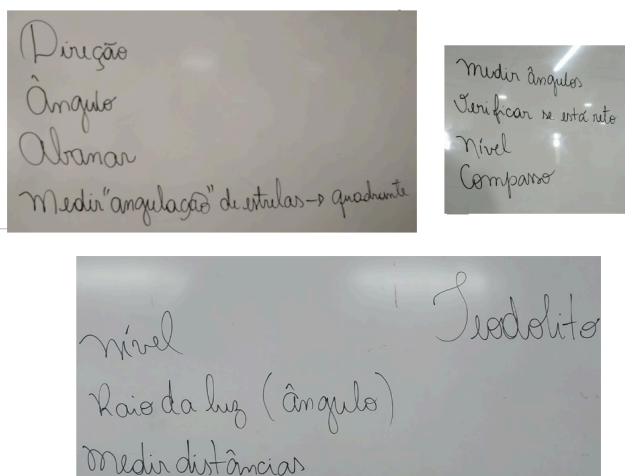
Figura 56 - Modelos de teodolitos caseiros não graduados.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

A pesquisadora solicitou aos estudantes que observassem os instrumentos disponibilizados e procurassem compreender sua montagem e finalidade. Ao passo que alguns grupos se aproximavam dos instrumentos e os manuseavam, alguns estudantes pareciam conhecer a ferramenta e logo revelaram que se tratava de um aparelho para medir distâncias ou ângulos. Ao ouvir essas afirmações, a pesquisadora solicitou que os estudantes falassem suas expectativas quanto ao uso daqueles aparelhos e anotou as respostas na lousa. Em uma das turmas (turma B), um grupo de estudantes afirmou que se tratavam de teodolitos e que conheciam a ferramenta devido a outro professor de matemática que utilizou um teodolito para explicar conceitos matemáticos envolvidos nos instrumentos utilizados durante as Grandes Navegações. Em outra turma, um estudante afirmou se tratar de um “quadrante”, outro instrumento utilizado no período das Grandes Navegações. Na Figura 57 estão as anotações da pesquisadora quanto aos usos que os estudantes atribuíram aos aparelhos.

Figura 57 - Anotações da pesquisadora sobre usos do teodolito segundo os estudantes.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Após os momentos de exploração dos aparelhos dispostos na mesa da pesquisadora, os estudantes iniciaram a montagem de seus próprios teodolitos. Vale ressaltar que apenas para a turma em que os estudantes conheciam a ferramenta lhes foi revelado que o nome do aparelho era “teodolito” (turma A), mas a pesquisadora evitou confirmar que a função do instrumento envolvia medidas de ângulos, pois os estudantes ainda não tinham certeza da finalidade da ferramenta. Foi informado aos estudantes que poderiam escolher um ou os dois modelos disponíveis para montar, além de permitir que utilizassem quaisquer outros materiais da sala de aula para auxiliá-los na montagem da ferramenta. Enquanto os grupos se empenhavam para montar os instrumentos, a pesquisadora caminhava pela sala, auxiliando os estudantes que estavam com dificuldades na montagem e no manuseio dos materiais.

Nos últimos 10 minutos do encontro, a pesquisadora questionou a turma se haviam finalizado a construção da ferramenta e todos os grupos finalizaram. Com isso, a pesquisadora disse à turma que a ferramenta era chamada de teodolito e solicitou que, para o próximo encontro, cada estudante poderia encontrar informações sobre os seguintes itens: a) a origem do teodolito; b) onde foi ou é utilizado; e c) como eram realizadas as medições com os teodolitos primitivos. Os itens foram escritos na lousa para que os estudantes pudessem registrar e, aos que tivessem interesse, pesquisar. Também foram solicitadas as fontes das informações que os participantes encontrariam. Ao final do encontro, a pesquisadora avisou que o próximo encontro aconteceria na mesma semana devido às avaliações internas, recolheu todas as produções feitas no encontro e se despediu, lembrando sobre a pesquisa.

8.1.5 Encontro 5: (05/08/2022) - investigando o teodolito

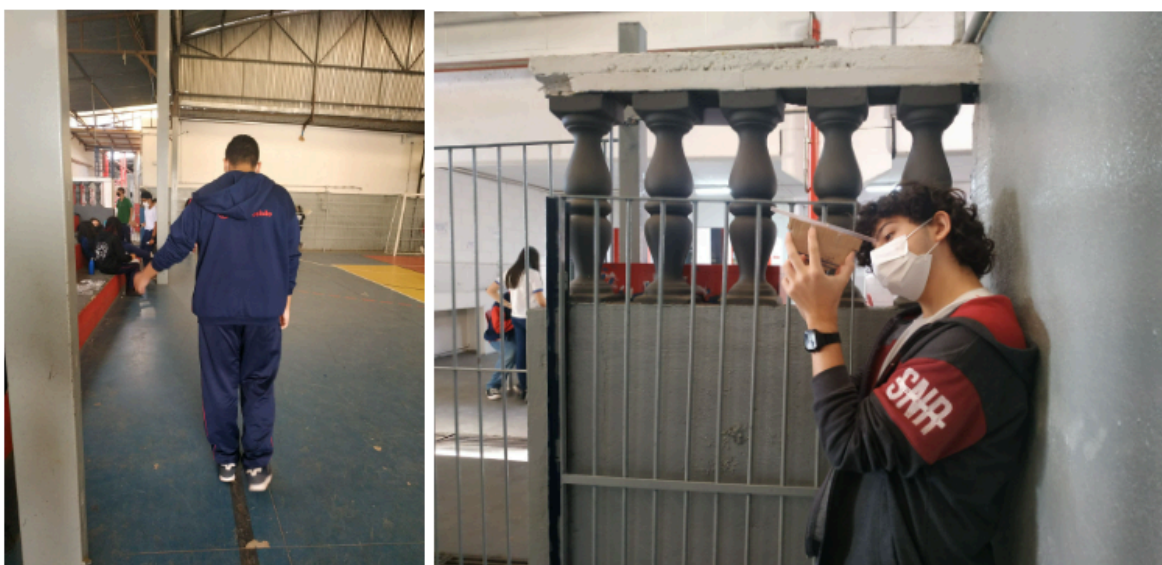
Devido ao período de avaliações da escola em que a pesquisa era realizada, tivemos que adiantar o segundo encontro e, para isso, solicitamos apoio dos demais professores que pudessem ceder algumas aulas das três turmas participantes para a realização dessa etapa.

A pesquisadora entrou em cada turma, uma aula por vez, cumprimentou os estudantes e reforçou o motivo da antecipação do encontro. Recolheu as anotações da pesquisa solicitada no encontro anterior e, por meio de uma conversa, questionou a turma sobre as informações que encontraram. Além disso, permitiu que os participantes explicassem como o teodolito poderia ser utilizado. Após as discussões e explanações dos estudantes, a pesquisadora solicitou que os grupos se juntassem para realizar a próxima etapa na quadra da escola.

Enquanto os grupos se reuniam, a pesquisadora devolveu os teodolitos produzidos aos respectivos grupos.

Organizados, todos os estudantes se dirigiram à quadra para explorar o uso dos seus teodolitos. Na quadra, a pesquisadora explicou que a escola precisava reformar parte da quadra e, para isso, os gestores da escola necessitavam de algumas informações como, por exemplo, as dimensões da quadra, a saber, largura, comprimento e altura em relação ao ponto mais alto do telhado. Os estudantes foram encarregados de conseguir essas informações que seriam repassadas para os gestores e seriam conferidas por profissionais, posteriormente. Diante dessa tarefa, cada grupo iniciou o processo de medição da quadra utilizando os recursos disponíveis no momento como réguas, partes do corpo e o teodolito (ver Figura 58).

Figura 58 - Estudantes medindo dimensões da quadra por meio de passos (à esquerda) e teodolito (à direita).



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Com base nas pesquisas que alguns estudantes realizaram e nas discussões prévias, cada grupo registrou anotações das medidas em seus cadernos e alguns esboçaram desenhos e cenas para que pudessem recordar sobre como realizaram as medições. Alguns grupos mostraram familiaridade com o uso do teodolito, enquanto outros precisaram de intervenções da pesquisadora para que pudessem compreender sobre o seu funcionamento, especialmente, o que observar e registrar.

Nos últimos minutos desta etapa, os grupos foram alertados sobre o tempo e aqueles que já haviam acabado as medições se dirigiram à sala de aula. Todos os grupos participantes das três turmas conseguiram concluir as medições. Na sala de aula, a pesquisadora recapitulou

o encontro e reforçou sobre o objetivo da tarefa. Os estudantes foram alertados que o próximo encontro aconteceria após as avaliações internas (após as duas próximas semanas) e que, possivelmente, poderiam esquecer alguns detalhes daquele encontro. Por esse motivo, a pesquisadora solicitou que os estudantes registrassem, por meio da escrita, o que julgassem ser pertinente para recordar posteriormente, pois precisariam dessas informações para realizar a próxima tarefa.

Ainda nesse mesmo dia, durante uma segunda aula em cada turma, a pesquisadora pediu aos estudantes que utilizassem as informações obtidas com uso do teodolito para estimar a altura da quadra em relação ao ponto mais alto. Em grupos, os estudantes procuraram em seus materiais didáticos e em consultas à internet como utilizar aquelas informações para obter a altura da quadra. Alguns desses grupos demonstraram dificuldades em realizar os cálculos com os dados obtidos e desistiram da tarefa, especialmente ao encontrar medidas “inalcançáveis” para a altura da quadra. Embora a pesquisadora os encorajasse solicitando que tentassem mais algumas vezes, alguns grupos optaram por deixar a tarefa incompleta e se dedicaram a outras atividades que lhes foram permitidas. Vale ressaltar que a participação na pesquisa era totalmente voluntária e os estudantes poderiam desistir a qualquer momento sem quaisquer prejuízos, afinal, prezamos pelo bem-estar dos participantes.

Concluídos os registros e cálculos das dimensões da quadra, a pesquisadora finalizou o encontro, escrevendo na lousa instruções para a próxima tarefa: construir uma versão virtual do teodolito no GeoGebra. O material com as orientações para montar o teodolito virtual foi disponibilizado em uma postagem no Google Sala de Aula. Além disso, foi acordado que o prazo para a realização dessa tarefa consideraria as semanas de avaliações internas da escola (por volta de 15 dias). Por fim, as anotações daquele encontro foram devidamente identificadas e recolhidas pela pesquisadora que logo se despediu e encerrou o encontro.

8.1.6 Encontro 6: (14/08/2022 - 15/08/2022) - aplicações e o teodolito virtual

Neste encontro, a pesquisadora entrou nas respectivas salas, cumprimentou os estudantes e realizou as atividades de rotina. Logo após, solicitou que os estudantes se reunissem nos grupos de trabalho e devolveu-lhes as anotações do encontro anterior. Recordou sobre a utilização do teodolito para medir a altura da quadra e que as medidas seriam comparadas com o valor real. Antes de revelar a medida da altura da quadra, a

pesquisadora permitiu que os estudantes observassem suas anotações, especialmente os cálculos e, aos que julgassem necessário, ajustassem os valores encontrados em um determinado tempo, porém, que tentassem justificar as mudanças nos cálculos. Alguns grupos utilizaram esse período para verificar e validar os valores encontrados, fosse por meio de comparação entre os resultados dos demais grupos ou por revisão dos cálculos; ou ainda, por métodos intuitivos, discutindo e refletindo se a altura calculada era plausível. Embora muitos grupos tenham se engajado nessa tarefa, houve quem preferisse aguardar a próxima etapa e realizar outras atividades não pertinentes à pesquisa.

Passado o tempo para validação, a pesquisadora avisou os estudantes e perguntou se precisariam de mais tempo, ao passo que, em todas as turmas, não houve solicitação para estender o tempo. Assim, a pesquisadora perguntou para cada grupo os dados encontrados e os métodos para obtenção das dimensões da quadra e, sempre que possível, valorizava as experiências e tentativas dos estudantes por meio de palavras de apoio, sugestões de melhorias e confirmando quais etapas foram realizadas adequadamente. O compartilhamento das informações encerrou na primeira aula do encontro e, ao final, a pesquisadora revelou qual era a medida oficial da altura da quadra¹⁸. Para a segunda parte desse encontro, os estudantes poderiam compartilhar suas impressões em relação ao uso do teodolito e, especialmente, comentar sobre a construção do teodolito virtual. A pesquisadora dirigiu as discussões realizando perguntas de resposta aberta para que os estudantes pudessem explicar sobre suas dificuldades, o que gostaram, as possíveis aplicações do teodolito manual e o virtual, entre outros assuntos relacionados. As falas dos estudantes foram anotadas pela pesquisadora e arquivadas para análise posterior. O encontro foi encerrado ao fim da segunda aula, ao qual a pesquisadora agradeceu a participação dos estudantes, revelou a data do próximo encontro e se despediu da turma.

8.1.7 Encontro 7: (03/11/2022 - 07/11/2022) - conhecendo outros aparelhos articulados

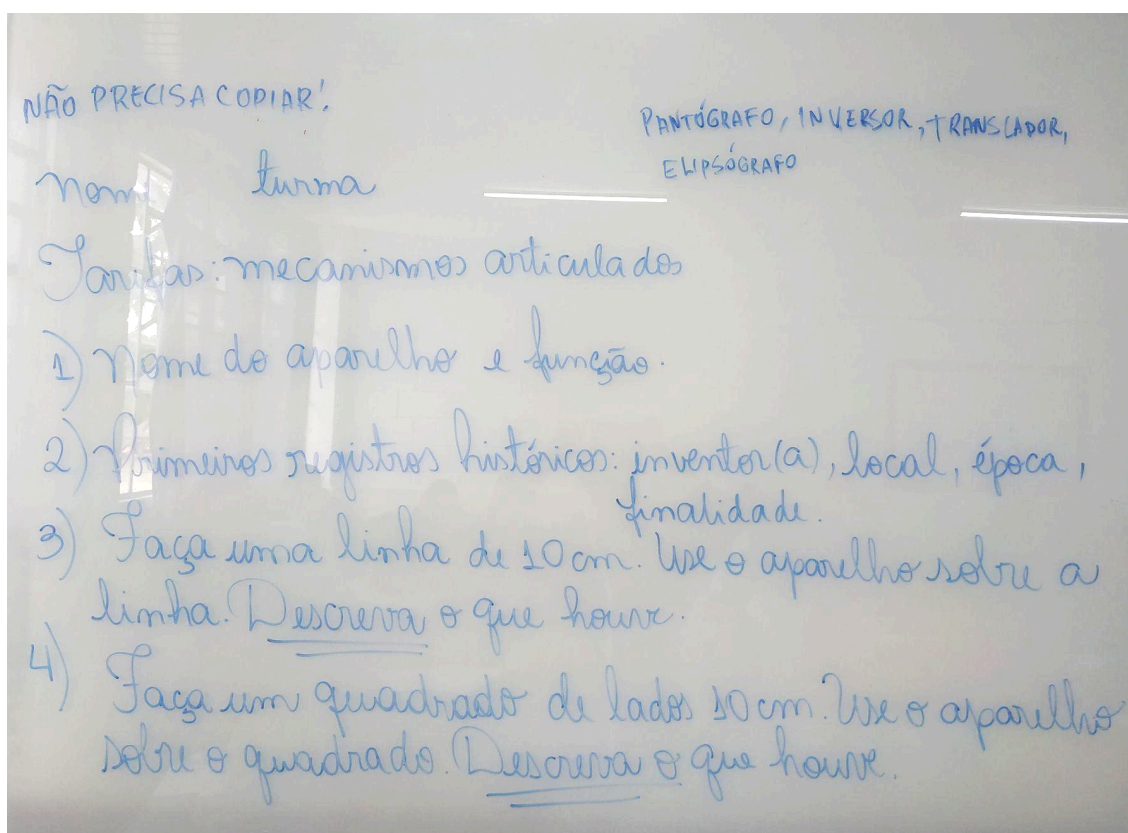
Após o feriado no início do mês de novembro, a pesquisadora realizou o encontro em umas das turmas de 1ª série e, na semana seguinte, nas demais turmas participantes. Como de costume, cumprimentou os estudantes, realizou as atividades de rotina e explicou a todos os

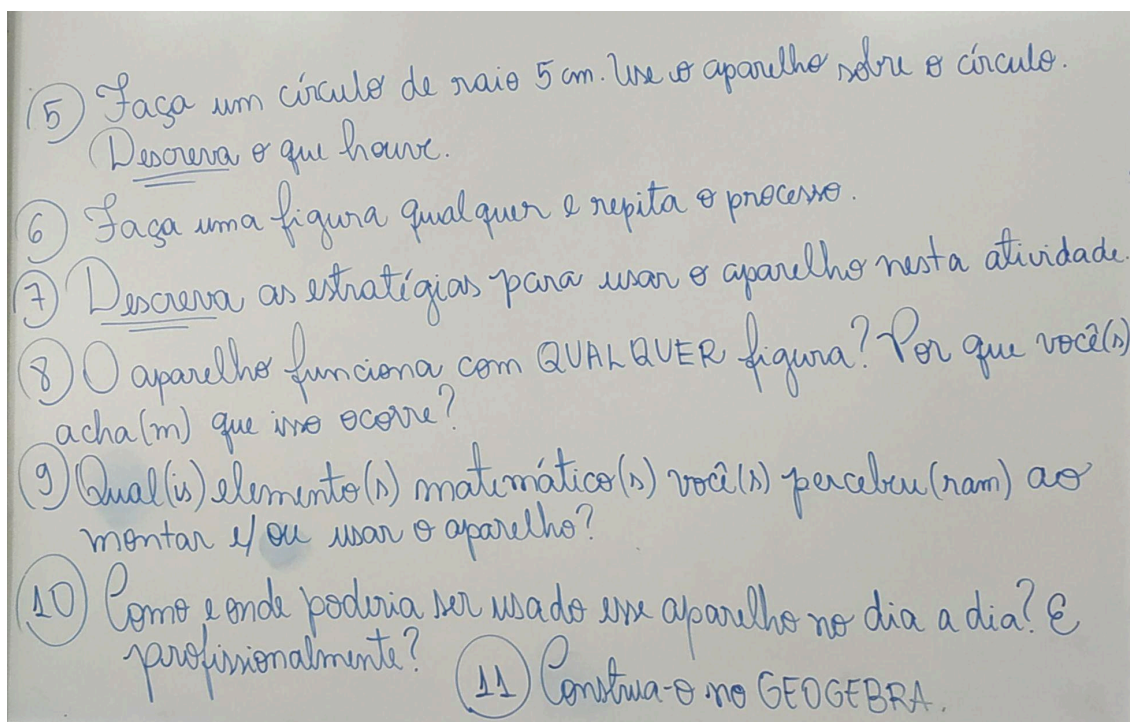
¹⁸ Como já explicitado, a quadra da escola estava passando por uma breve reforma. A altura da quadra foi mensurada utilizando uma trena digital a laser, cujas medidas são mais precisas que uma trena ou equipamento manual ou analógico. As comparações com os valores encontrados pelos estudantes serão apresentadas posteriormente.

presentes que os últimos encontros seguiram uma dinâmica um pouco diferente dos anteriores, pois os estudantes seriam os responsáveis por encontrar ou criar seus próprios mecanismos articulados. Ainda nos mesmos grupos de trabalho, por decisão dos participantes, cada grupo pesquisou a respeito e escolheu uma ferramenta articulada cuja finalidade fosse copiar, desenhar ou transformar figuras utilizando ao menos um lápis.

Para ajudá-los nesse processo de escolha, a pesquisadora escreveu na lousa algumas perguntas norteadoras e algumas ações que poderiam ser reproduzidas utilizando o aparelho escolhido, salvo os instrumentos cuja finalidade fosse desenhar uma figura específica. As perguntas podem ser consultadas na Figura 59. A pesquisadora optou por escrever em uma linguagem acessível aos estudantes e permitiu que eles registrassem as perguntas por meio de fotos, gravações ou cópias em seus cadernos, pois o objetivo não era que respondessem a todos os itens, mas utilizassem como uma forma de nortear a pesquisa e auxiliar na tomada de decisão. A pesquisadora solicitou aos participantes que as possíveis respostas fossem registradas por meio da escrita manual ou digital e entregues no próximo encontro.

Figura 59 - Perguntas norteadoras para pesquisa e utilização de aparelhos articulados.



- 
- (5) Faça um círculo de raio 5 cm. Use o aparelho sobre o círculo. Descreva o que houve.
 - (6) Faça uma figura qualquer e repita o processo.
 - (7) Descreva as estratégias para usar o aparelho nesta atividade.
 - (8) O aparelho funciona com QUALQUER figura? Por que você(s) acha(m) que isso ocorre?
 - (9) Qual(is) elemento(s) matemático(s) você(s) percebeu(ram) ao montar e/ou usar o aparelho?
 - (10) Como e onde poderia ser usado esse aparelho no dia a dia? E profissionalmente?
 - (11) Construa-o no GEOGEBRA.

Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Ainda nesse encontro, os estudantes iniciaram suas pesquisas e registros. Para evitar que algum grupo não tivesse material suficiente para construir o aparelho escolhido, a pesquisadora disponibilizou alguns recursos como fita adesiva, palitos de plástico, bailarinas metálicas, tesouras e papéis. Com isso, alguns grupos iniciaram as primeiras montagens dos aparelhos articulados. Dessa vez, as produções poderiam ser levadas para casa a fim de que os participantes finalizassem a tarefa, pois demandava mais tempo. Passado o tempo do encontro, a pesquisadora despediu-se da turma e solicitou que os grupos trouxesse suas construções no próximo encontro e, se possível, com registro de algumas das respostas referentes às perguntas norteadoras. A pesquisadora também ressaltou que algumas perguntas poderiam não ter resposta, pois o aparelho escolhido poderia ter limitações.

8.1.8 Encontro 8: (08/11/2022 - 09/11/2022) - testando as criações

Por se tratar de um período de final de ano letivo, os últimos encontros aconteceram em datas próximas, pois o cronograma das disciplinas já havia se cumprido. Com isso, a pesquisadora teve a oportunidade de dedicar mais tempo aos dois últimos encontros. Desse modo, os grupos puderam finalizar suas criações utilizando os materiais disponibilizados pela

pesquisadora, bem como outros recursos que obtiveram por meios próprios, com a condição de que pudessem ser reaproveitados ou reciclados posteriormente.

Todos os grupos puderam testar suas invenções, ajustar e solicitar apoio da pesquisadora e dos demais colegas para que os aparelhos funcionassem da melhor maneira possível. Cada grupo exigiu uma necessidade diferente e, portanto, não houve um direcionamento geral como ocorreu nos demais encontros, permitindo que os estudantes se organizassem como desejassem. A pesquisadora realizou registros por meio de fotos, vídeos e anotações escritas a fim de captar as dificuldades enfrentadas e estratégias elaboradas pelos participantes. Ao passo que montavam e testavam suas criações, os estudantes registravam as possíveis respostas para as perguntas norteadoras, mesmo os grupos que optaram por ferramentas com limitações: eles descreviam os motivos do aparelho escolhido não ser capaz de realizar determinadas tarefas.

À medida que alguns grupos finalizaram as construções e registraram suas experiências, os estudantes entregaram as anotações e os aparelhos para a pesquisadora que, após receber esses recursos, solicitou a cada grupo uma nova tarefa: elaborar uma versão virtual daquele aparelho no GeoGebra. Os estudantes puderam utilizar os roteiros de construção do pantógrafo e do teodolito, bem como outros roteiros disponíveis em sites confiáveis, inclusive da galeria de materiais do próprio GeoGebra, mas não poderiam utilizar recursos digitais prontos, embora soubessem que não haveria “punição” para quem utilizasse. No final do encontro, quando todos os grupos entregaram seus aparelhos com as anotações, recorrendo aos conhecimentos prévios dos estudantes, a pesquisadora relatou, em ordem cronológica, sobre as origens dos aparelhos construídos pelos estudantes e como essas invenções influenciaram (e influenciam) o cotidiano, destacando que os mecanismos articulados são muito utilizados em maquinários, equipamentos de engenharia e nos transportes. Os estudantes receberam a última tarefa, a pesquisadora os elogiou pelo empenho e dedicação, despediu-se da turma e revelou a data do último encontro.

8.1.9 Encontro 9: (29/11/2022 - 30/11/2022) - reconhecendo as possíveis aprendizagens

No último encontro, caracterizado pelo final do ano letivo e sua brevidade, a pesquisadora dedicou parabenizações e agradecimentos aos estudantes pela participação na pesquisa. Além disso, solicitou que os participantes descrevessem sobre suas construções dos aparelhos no GeoGebra, suas impressões acerca das dificuldades encontradas ao criar a versão

virtual sem os roteiros e outros aspectos que julgassem pertinentes. Por fim, a pesquisadora pediu que eles compartilhassem suas criações via e-mail ou anexassem à tarefa criada nas turmas virtuais. Em seguida, a pesquisadora relembrou alguns momentos marcantes em cada turma e conduziu uma roda de conversa com diversas temáticas, não necessariamente relacionadas à pesquisa, mas que permitissem aos estudantes se sentirem confortáveis para revelar suas conquistas, frustrações, dificuldades e acertos, bem como anseios com os próximos anos escolares, pois eram turmas de Ensino Médio e essas inquietações surgiram durante o processo de formação desses estudantes.

Após a roda de conversa, a pesquisadora solicitou que os participantes respondessem a um formulário online com perguntas relacionadas aos diferentes aparelhos construídos durante a realização da pesquisa e assuntos matemáticos que julgassem estar relacionados. Os estudantes tiveram a opção de realizar o que foi solicitado pela pesquisadora ou outras atividades, assim como ocorreu em todos os encontros. Enquanto os estudantes respondiam ao formulário, a pesquisadora auxiliou aqueles que não recordaram dos encontros ou que estavam com dificuldades para acessar a plataforma em que estava o formulário. Por fim, quando todos os participantes interessados responderam à tarefa, a pesquisadora encerrou a pesquisa com agradecimentos e fez votos positivos para a jornada dos estudantes.

Após todos os encontros e a coleta dos dados, analisamos os materiais elaborados e realizamos os ajustes necessários conforme observado durante a aplicação da pesquisa e atendendo às solicitações de mudanças elencadas pelos participantes. Ao finalizar os ajustes, reunimos todos os materiais e tarefas em um site mantido gratuitamente pela plataforma “Sites Google” para que outros docentes possam ter acesso às tarefas desenvolvidas na pesquisa. Fotos, depoimentos e arquivos em PDF foram disponibilizados no site “Day by Day” (<https://sites.google.com/view/tesedaday> - acesso 23 mai. 2024), cujo nome foi escolhido como uma brincadeira entre o apelido da pesquisadora e as possíveis traduções: “Dia a dia” ou “Day pela Day”.

8.2 Os resultados da construção e utilização de pantógrafos

Em um dos depoimentos registrados pela pesquisadora, uma participante destacou a importância de tarefas que permitam a investigação e o compartilhamento de soluções entre os pares: “Essa atividade veio para elevar a nossa autoestima!” (E08 - gravação em áudio), afirmou a estudante que, durante a pesquisa, demonstrou muito interesse pelas tarefas e

incentivou seus colegas a participarem ativamente. O motivo de sua afirmação estava relacionado ao fato de a estudante ter muitas dificuldades com o modelo de ensino tradicional da disciplina de matemática (nesta instituição, faz-se o uso constante de apostilas e adota-se o sistema de provas de múltipla escolha ou questões discursivas a nível de vestibular) e, diante das tarefas propostas pela pesquisadora, a estudante teve a oportunidade de vivenciar a matemática de modo investigativo, prático e significativo. A participante se mostrou confortável e concluiu todas as tarefas com êxito, além de ter auxiliado colegas que, em suas palavras, “eram muito *nerds*” (E8 - gravação em áudio) e não imaginava que eles pudessem ter dificuldades com as tarefas.

Conforme as respostas apresentadas pelos estudantes no formulário eletrônico para a primeira pergunta (“Você está respondendo sozinho(a) ou em dupla?”), 29 participantes optaram por responder sozinhos e 15 o fizeram em grupo, totalizando 44 respostas. Ao responderem a segunda questão, os estudantes mostraram que o aparelho mais lembrado foi o pantógrafo, apesar de alguns escreverem os nomes erroneamente, conforme Quadro 7.

Quadro 7 - Respostas a: “Você lembra os nomes dos aparelhos que foram apresentados e construídos nas produções específicas? Se sim, quais?”	
Nome escrito pelos participantes	Frequência
Pantógrafo ou “Pentograma” ou “Pandometro”	41 (39 corretos e 2 incorretos)
Teodolito ou “Teodorito” ou “Tetodolito”	21 (18 corretos e 3 incorretos)
Elipsógrafo ou “Helipsógrafo”	16 (15 corretos e 1 incorreto)
Inversor	10
Mecanismo de 4 barras ou “Mecanismo de 4 barras”	4
Trammel de Arquimedes	1
Mecanismo de Evans	1
Fonte: Elaborado pelos autores.	

Outras respostas foram registradas, tais como: “transferidor” (5) e “papelão, tachas, régua e furador” (1), indicando que os estudantes possam ter confundido os materiais utilizados na construção dos aparelhos com os nomes; também encontramos as respostas “maquete e energia renovável” (2) pertencentes a dois participantes de um mesmo grupo, o que revela a possibilidade destes estudantes terem confundido a pesquisa com outras atividades. Apenas um (1) participante indicou não lembrar os nomes das ferramentas. De modo geral, os participantes lembraram-se dos dispositivos desenvolvidos durante os

encontros, o que denota a importância da pesquisa para os estudantes, pois, mesmo após todos os encontros, ainda recordaram-se dos aparelhos, especialmente da primeira ferramenta construída por eles. As razões pelas quais o pantógrafo e o teodolito foram mais frequentemente lembrados são abordadas nas análises subsequentes.

A terceira pergunta foi “Dos aparelhos construídos, qual(is) você(s) mais gostou(ram)? Por quê?”. Os resultados estão apresentados no gráfico a seguir.

Gráfico 1 - Preferências dos estudantes sobre as ferramentas construídas.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Houve 3 respostas em que os estudantes indicaram nomes de ferramentas que não foram apresentadas em nenhum dos encontros e não tinham relação com os aparelhos mostrados, portanto, não foram explicitadas no gráfico. Dentre os motivos destacados pelos estudantes para justificar suas preferências, elencamos aqueles com maior frequência para compor o Quadro 8.

Quadro 8 - Justificativas dos estudantes sobre a ferramenta que mais gostaram.	
Motivo descrito pelo participante	Frequência de respostas similares
“O pantógrafo, pois ele era mais fácil de manusear” - E31	7
“Pantógrafo, porque foi um projeto interessante que nos ajudou a entender o conteúdo trabalhado em sala” - E02	5

“Pantógrafo, por que ele amplia, reduz, e inverte desenhos” - E43	4
“Pantógrafo, pois é um instrumento muito útil e pode ser utilizado no dia a dia” - E06	3
“Pantógrafo, porque ele era muito interativo e interessante” - E03	3
“Teodolito, porque na prática foi o mais funcional e que realmente conseguimos enxergar um uso facilitado no dia a dia” - E08	5
“Elipsografo, porque foi o mais diferente e ele anda [ainda] não tinha sido trabalhado em sala” - E14	4
“Elipsografo, pq ele funcionou muito bem e eu ter feito é satisfatório” - E18	2
“Elipsografo porque foi o mais complicado de fazer, mas é o mais legal” - E30	2
“Inversor, pois foi oq eu fiz e tive mais facilidade em trabalhar” - E32	3
“Mecanismo de 4 barras pq eu achei + [mais] facil de fazer e + [mais] divertido” - E25	2
“Trammel de Arquimedes, pois tive a liberdade de pesquisar e construir de maneira própria.” - E44	1
Fonte: Elaborado pelos autores.	

Quando questionados sobre a ferramenta que menos gostaram, novamente, o pantógrafo foi o mais citado, o que causou contradição, a priori. Entretanto, os estudantes justificaram sobre essa escolha, indicando que, embora tenham achado interessante a ferramenta, também sentiram dificuldades com a construção e posicionamento do aparelho para usá-la. Transcrevemos algumas das respostas a seguir.

“por que ele não proporciona muita mobilidade” - E09
 “foi um mais difícil, e eu acabei me perdendo nele algumas vezes” - E13
 “por que era o mais simples e conhecido” - E14
 “o meu deu errado e eu não consegui ampliar muito bem as figurinhas” - E18
 “pois foi o que menos deu certo, dando certa dificuldade na hora de realizar sua função” - E21
 “pois ele foi muito complicado de criar no GeoGebra” - E32
 (Transcrição direta - Recortes das respostas dos estudantes ao formulário eletrônico preenchido em 29/11/2022 e 30/11/2022).

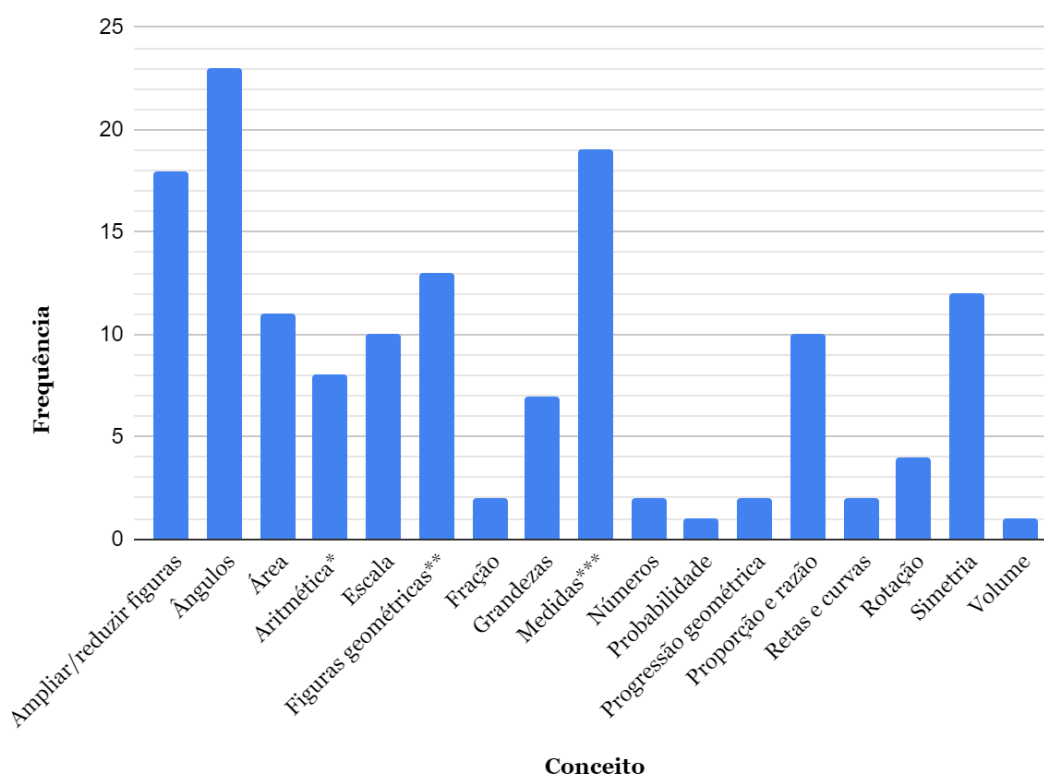
Observamos que a maioria das críticas ao pantógrafo se referem ao processo de construção ou utilização, pois o manuseio da ferramenta era complicado e conseguir desenhar

com o pantógrafo requer habilidades as quais esses estudantes indicaram não estar familiarizados.

O estudante E14 revelou que a popularidade e simplicidade do aparelho o desmotivou, bem como outros 3 participantes descreveram o mesmo motivo, indicando que os fatores “inovador” e “desafiador” eram importantes para esses estudantes, mas como o pantógrafo era uma ferramenta conhecida por eles, não atendeu às suas expectativas. Por fim, o participante E32 descreveu que teve dificuldades com a construção virtual do aparelho no GeoGebra, indicando que não estava habituado a realizar tarefas de programação.

Quando questionados sobre a principal função do pantógrafo, 44 estudantes escreveram “ampliar ou reduzir figuras”, enquanto apenas 2 participantes escreveram “medir ângulos” e “copiar figuras”. Para a questão sobre ideias e conceitos matemáticos relacionados ao pantógrafo, obtivemos as seguintes respostas, conforme Gráfico 2.

Gráfico 2 - Conceitos matemáticos relacionados ao pantógrafo, segundo os participantes.



* Foram consideradas as respostas associadas a cálculos e operações fundamentais.

** Foram consideradas as respostas com nomes de polígonos ou figuras.

*** Foram consideradas as respostas sobre unidades de medidas e distância.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Notamos que muitos estudantes associaram a construção e utilização do pantógrafo às ideias de simetria, transformações geométricas (ampliação, redução, rotação), proporcionalidade, ângulos, grandezas e medidas. A pesquisadora observou que, durante a construção do pantógrafo, quase todos os grupos recorreram aos conceitos envolvendo ângulos para encaixar as hastes nos lugares adequados, pois compreenderam que as aberturas entre as hastes eram fundamentais para seu funcionamento, e que essas aberturas deveriam ser mantidas iguais entre todas as hastes quando estas eram movimentadas. Em seguida, os grupos costumavam ajustar o aparelho trocando as posições das hastes de modo que, ao movimentarem a ferramenta, o ângulo fosse igual entre todas as hastes. A confirmação de que as hastes estavam adequadamente posicionadas era feita por meio da observação: o estudante movia uma das hastes extremas e segurava a outra, enquanto observava cuidadosamente se as aberturas eram iguais; se percebesse algum equívoco, o estudante trocava as posições das hastes.

Esses ajustes e comportamentos dos participantes evidencia o princípio do *entrelaçamento*, em que a matemática não é compreendida como uma ciência fragmentada, mas que é possível recorrer aos diferentes conceitos e ideias matemáticas para solucionar situações. Como descreve Van Den Heuvel-Panhuizen (1996), o princípio do *entrelaçamento* destaca a natureza “fluida” da matemática, em que é possível recorrer aos diferentes assuntos matemáticos para resolver um problema ou realizar uma tarefa, tal como os estudantes mostraram em suas ações no momento em que recorreram aos conceitos já estudados para realizar ajustes ou conferir a construção do pantógrafo, bem como no reconhecimento da potencialidade da ferramenta para discutir diferentes temas da matemática.

Além dos conceitos matemáticos, o estudante E36 revelou que a construção do pantógrafo poderia ser associada às ideias de “paciência” e “coordenação motora”. Certamente, habilidades como estas são necessárias para a conclusão da tarefa proposta, e a resposta do estudante evidencia a necessidade de compreender que a construção de uma ferramenta como o pantógrafo exige planejamento e atenção.

Para a pergunta “Quais conceitos matemáticos você acha que o uso do pantógrafo o ajudou a compreender melhor?”, todos os participantes citaram diversos assuntos associados à Geometria e Medidas: ângulos, simetrias, transformações geométricas, polígonos, áreas, volumes, escalas, grandezas, classificação de triângulos, Teoremas de Pitágoras e de Tales. Apesar de os estudantes não terem explorado todos esses conceitos simultaneamente ao

utilizar o pantógrafo, reconheceram que a ferramenta pode auxiliá-los na compreensão dessas ideias matemáticas.

O modo como essa associação ocorreu foi observado durante as produções dos participantes, em que descreveram ou comentaram sobre ideias matemáticas que permitiram a conclusão das tarefas como, por exemplo, na colocação das hastes, o grupo G05B optou por posicionar as partes do pantógrafo em um formato que se assemelha a um triângulo retângulo, em que as hastes maiores formaram os catetos e ficaram paralelas a um dos lados da mesa; depois, as hastes intermediárias foram posicionadas de modo a formar quadriláteros, como mostrado na Figura 60. Indicamos as marcações em vermelho e amarelo para elucidar a relação de paralelismo entre as hastes e os lados da mesa.

Figura 60 - Pantógrafo montado pelo grupo G05B.



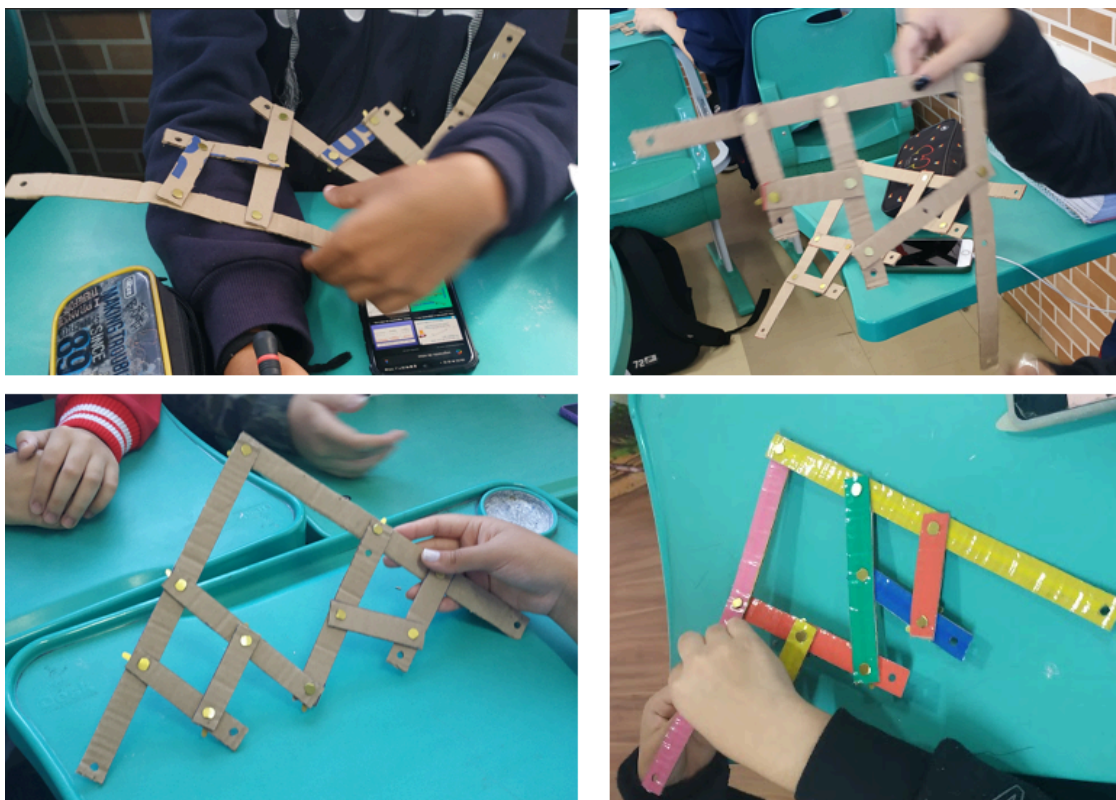
Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Essa relação entre as hipóteses levantadas pelos estudantes e a comprovação de que suas primeiras ideias estavam adequadas à situação evidenciaram o início de uma possível passagem entre diferentes *níveis* de pensamento: o grupo G05B testou suas hipóteses e verificou que havia a formação de quadriláteros, cujos lados estavam representados pelas hastes; a movimentação da ferramenta mostrou que as hastes se mantinham paralelas e os ângulos internos opostos dos quadriláteros eram sempre iguais. Porém, uma passagem de

nível poderia ser efetivada se o grupo registrasse suas observações e generalizasse as ideias e descobertas em uma linguagem mais formal, de modo a justificar o funcionamento da ferramenta por meio dos conceitos matemáticos observados. No entanto, nenhum dos grupos participantes registrou essas informações, seja por escrito ou oralmente. É provável que a ausência de tempo suficiente para assimilar as ideias e/ou alguma intervenção da pesquisadora tenham sido os fatores que impediram os estudantes de registrar essa passagem de *níveis*, embora haja evidências de que alguns participantes alcançaram um certo *nível* de generalização acerca do funcionamento de pantógrafos similares aos modelos fornecidos.

Apesar dos esforços de muitos grupos para conseguirem montar o pantógrafo, vários estudantes relataram na pergunta “Descreva se houve dificuldades ao construir ou usar o pantógrafo.” que sentiram dificuldades ao encaixar as hastes nos lugares adequados, o que resultou em algumas ferramentas não eficientes, como mostrado na Figura 61.

Figura 61 - Pantógrafos com hastes mal posicionadas.

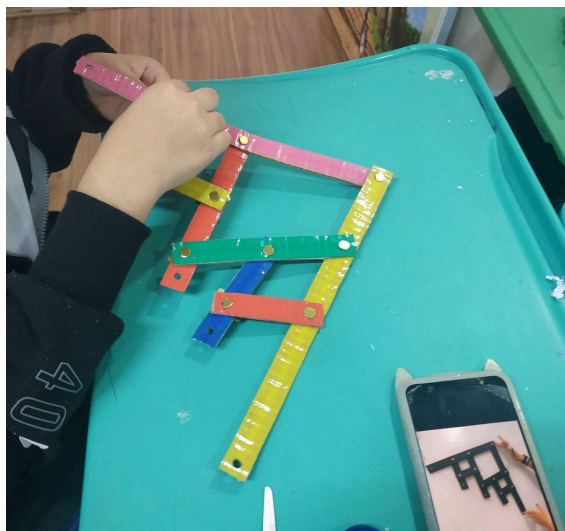


Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Para ajustar suas construções, os estudantes utilizaram o modelo trazido pela pesquisadora e, em alguns casos, os grupos preferiram comparar as ferramentas com as de grupos que conseguiram montá-las. A estudante do grupo G09B, cujo pantógrafo está

mostrado no canto inferior direito da figura anterior, tirou uma foto do modelo e desmontou o pantógrafo para remontá-lo com base na foto (Figura 62).

Figura 62 - Estudante do G09B desmontando o pantógrafo para remontá-lo segundo foto.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Já a estudante do grupo G03C (pantógrafo da Figura 61 no canto inferior esquerdo) optou por comparar seu pantógrafo com o de uma colega que conseguiu montá-lo (Figura 63).

Figura 63 - Estudante do grupo G03C comparando pantógrafos.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

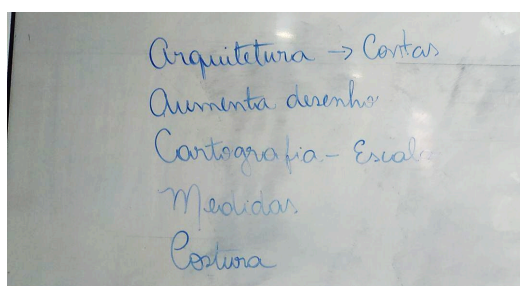
A solução encontrada pela estudante do grupo G09B evidencia uma *interatividade*, pois reconhece que a tarefa não foi bem sucedida e a retoma na tentativa de arrumar o que não funcionou depois de consultar seus colegas. Para isso, sob *orientação* da pesquisadora, a estudante recorreu ao modelo e não mais à intuição, como fez a priori. Ao passo que acompanhou atentamente o modelo disponibilizado, a estudante compreendeu que cada peça

do pantógrafo tinha uma finalidade e que todas as peças precisavam estar em harmonia para garantir o seu funcionamento. Ainda sob *orientação* da pesquisadora, a estudante e seu grupo perceberam que podiam aplicar ideias geométricas de paralelismo e simetria para verificar se a nova montagem estava correta.

Enquanto isso, a estudante do grupo G03C solicitou apoio aos colegas que conseguiram executar a tarefa, o que nos mostra um exemplo do princípio de *interatividade*. Aprender com o grupo social é inerente ao ser humano e não foi diferente nesta situação: por mais que suas tentativas tenham sido boas, a estudante precisava do apoio de um grupo externo para que ajudasse a encontrar os equívocos cometidos na construção do seu pantógrafo. Esse episódio ocorreu em todas as turmas, pois é comum nessa escola que os estudantes busquem ajudar a si mesmos. Vygotsky (1991) relata que o aprendizado, desde muito cedo, é coletivo e isso nos diferencia, enquanto humanos, dos outros animais, pois “o aprendizado humano pressupõe uma natureza social específica e um processo através do qual as crianças adentram na vida intelectual daquelas que as cercam” (Vygotsky, 1991, p. 99).

Analizadas as respostas registradas pelo formulário eletrônico referentes ao pantógrafo, discutimos sobre as observações feitas em campo. No primeiro encontro, ao serem questionados sobre as funcionalidades do pantógrafo (até aquele momento, desconhecido para a maioria), os estudantes levantaram algumas hipóteses sobre profissões que fariam uso da ferramenta, entre elas, arquitetos, engenheiros, costureiras, artistas e geógrafos; também mencionaram funções associadas a “medir”, “calcular” e “desenhar”. Em comparação com a resposta informada no formulário, os estudantes confirmaram suas primeiras ideias de que o pantógrafo poderia ser utilizado para medidas, cálculos e desenhos, embora a principal função da ferramenta seja desenhar. Na Figura 64, temos as anotações feitas no final do encontro que se referem a algumas das funções do aparelho percebidas a priori pelos estudantes.

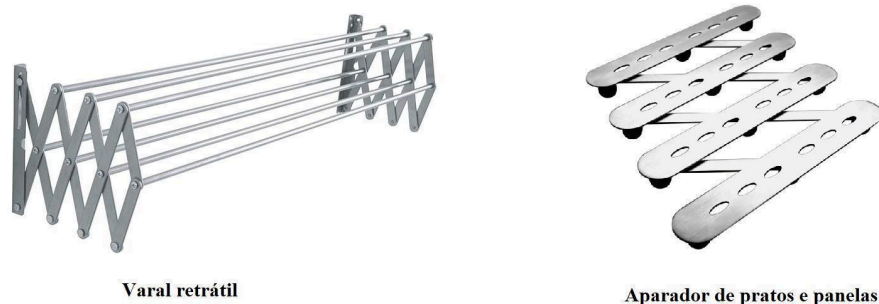
Figura 64 - Utilidades do aparelho conforme investigações iniciais dos estudantes.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Um dos participantes (E06) comentou sobre a função de “aumentar desenho”, pois conhecia o aparelho: teve contato com o pantógrafo em uma feira de artesanato da cidade vizinha, mas alegou que apenas viu o vendedor utilizando a ferramenta e que não compreendeu muito sobre seu uso, uma vez que o vendedor era estrangeiro e sua fala estava carregada de dialetos que eram desconhecidos pelo jovem. Outro estudante observou que a estrutura do aparelho era similar ao de um varal (se referia ao modelo de varal pantográfico de parede, também conhecido como “varal retrátil”), enquanto uma jovem destacou que lembrava um aparador de panelas (suportes colocados sobre uma superfície, geralmente, a mesa, de modo que a panela, ainda quente, seja colocada em cima do suporte). Na Figura 65, apresentamos os objetos usados para comparação.

Figura 65 - Objetos de comparação ao pantógrafo mencionados pelos estudantes.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Apesar da maioria dos estudantes não conhecerem o pantógrafo, à primeira vista, muitos conseguiram comparar com objetos que fazem parte do cotidiano, ainda que esse cotidiano não seja vivenciado por eles, por exemplo, ao afirmar que a ferramenta seria utilizada por arquitetos ou engenheiros. As manifestações dos participantes nesse momento indicaram uma associação da ferramenta com elementos da realidade e evidenciaram a necessidade iminente em justificar novas experiências embasadas em experiências passadas. Ao tratar de comparações com objetos do cotidiano, podemos destacar esse episódio como uma exemplificação do princípio da *realidade*, em que o estudante foi capaz de reconhecer elementos da ferramenta aplicados à realidade. Porém, apenas comparar não é suficiente para determinar uma efetivação do princípio da *realidade*: é preciso problematizar uma situação em que o uso do pantógrafo seja capaz de resolvê-la.

Em uma das turmas, quando o estudante E06 manifestou ter visto o pantógrafo na feira de artesanato, a pesquisadora prontamente questionou sobre o que foi visto em relação a

utilização do aparelho pelo artesão. Embora o estudante não tenha dado muitos detalhes, pois não teve contato com o artesão naquele momento, a descrição do que o estudante viu permitiu que os demais deduzissem usos para o pantógrafo. Segundo o jovem, o artesão movia as hastes do pantógrafo sobre um desenho e, na ponta da haste mais longa, outro desenho era feito, similar ao primeiro, e maior. Dessa forma, os estudantes daquela turma puderam deduzir que o aparelho tinha como função desenhar imagens maiores.

O mesmo estudante se prontificou ir à feira de artesanato novamente para recolher mais informações e, no encontro seguinte, descreveu os usos do aparelho conforme o artesão apresentou: os desenhos poderiam ser ampliados ou reduzidos e o aparelho facilitaria na cópia de imagens; além disso, foi destacado pelo estudante que o vendedor mencionou a possibilidade de criar desenhos em coberturas de bolos de maneira simples. A técnica envolveria fixar a imagem desejada na mesa e aplicar uma cobertura uniforme sobre o bolo; depois, fixar um palito de madeira na extremidade mais longa do pantógrafo. Posteriormente, o uso do dispositivo sobre o bolo permitiria que o contorno do desenho ficasse visível no topo, servindo como um guia para a decoração. Importante ressaltar que a altura do topo do bolo deveria ser nivelada com a superfície da mesa.

Apesar do relato tratar de uma utilização específica, o pantógrafo foi indicado para solucionar um problema de confeitaria: criar um contorno para que seja possível preencher uma cobertura adequadamente. Ao trazer essa descrição, o estudante elucidou para os demais colegas uma aplicação do pantógrafo em uma situação real. A pesquisadora apresentou o relato do estudante para as outras turmas no segundo encontro e os estudantes demonstraram interesse pelo uso do pantógrafo, inclusive, alguns grupos utilizaram a informação de “fixar o desenho” para realizar as tarefas propostas no encontro.

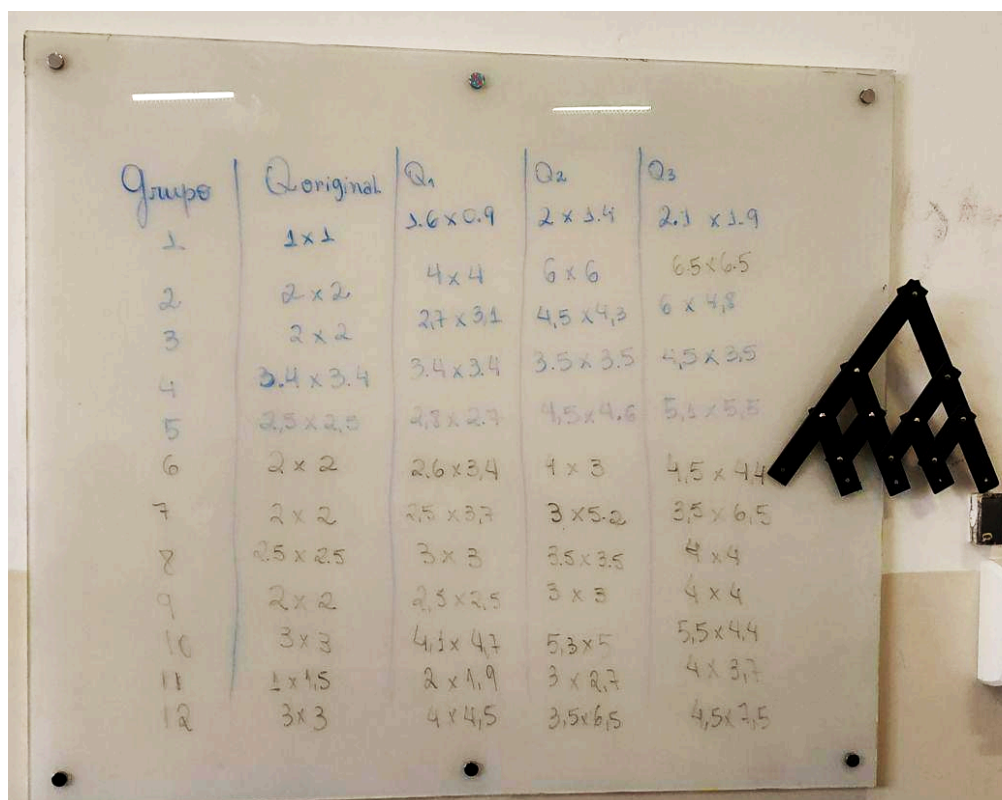
Van Den Heuvel-Panhuizen (1996) enfatiza que na Educação Matemática Realística, além das atividades dos próprios estudantes, grande importância tem a relação com a realidade, pois assim como a matemática surgiu da matematização da realidade, a aprendizagem da matemática também deveria ter a mesma origem. Logo, apesar da ferramenta não ser familiar, os estudantes conseguiram relacioná-la com episódios da realidade, mas ainda não indicaram estar em processo de matematização. Esse processo pode ser visto no segundo encontro quando a pesquisadora propôs as tarefas de exploração do pantógrafo.

No segundo encontro, os participantes realizaram as tarefas propostas pela pesquisadora. No Quadro 9 estão relacionados os grupos que conseguiram concluir as tarefas 1, 2 e 3 (ver [Figura 54](#)).

Quadro 9 - Relação dos grupos que finalizaram as tarefas do pantógrafo do 2º encontro.	
Tarefas concluídas	Grupos
Concluíram apenas uma Tarefa.	Turma A, G06B, G07B, G08B, G13B, G01C, G06C (19 grupos)
Concluíram apenas duas Tarefas.	G01B, G04B, G05B (3 grupos)
Concluíram todas as Tarefas.	G02B, G03B, G09B, G10B, G11B, G12B, G02C, G03C, G04C, G05C, G07C, G08C, G09C, G10C, G11C, G12C (16 grupos)
Fonte: Elaborado pelos autores.	

A Turma A concluiu apenas uma tarefa, pois tiveram dificuldades para organizar os grupos. Além disso, todos os grupos decidiram realizar a Tarefa 2 (construção de quadrados), pois acreditavam que conseguiriam responder às demais tarefas apenas com esta realizada.

Figura 66 - Quadro com as medidas dos quadriláteros da tarefa 2 (Turma A).



Grupo	Qoriginal	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	1x1	1,6x0,9	2x1,4	2,1x1,9
2	2x2	4x4	6x6	6,5x6,5
3	2x2	2,7x3,1	4,5x4,3	6x4,8
4	3,4x3,4	3,4x3,4	3,5x3,5	4,5x3,5
5	2,5x2,5	2,8x2,7	4,5x4,6	5,1x5,5
6	2x2	2,6x3,4	4x3	4,5x4,4
7	2x2	2,5x3,7	3x5,2	3,5x6,5
8	2,5x2,5	3x3	3,5x3,5	4x4
9	2x2	2,5x2,5	3x3	4x4
10	3x3	4,1x4,7	5,3x5	5,5x4,4
11	1x1,5	2x1,9	3x2,7	4x3,7
12	3x3	4x4,5	3,5x6,5	4,5x7,5

Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Entretanto, quando iniciaram a tarefa, faltavam 20 minutos para o término do encontro e não conseguiram seguir com as demais. Apesar do contratempo, a Tarefa 2 foi concluída de acordo com as expectativas de pesquisa e a Turma A obteve respostas muito próximas às esperadas pela pesquisadora. No caso, ao responderem o item III - “Encontrem o(s) fator(es) de ampliação e redução ” -, os estudantes registraram na lousa, com auxílio da pesquisadora, os lados dos quadriláteros obtidos, como mostrado na Figura 66. Apenas o grupo G13A não registrou os dados, pois o pantógrafo construído não era funcional. Os dados foram transferidos para o Quadro 10 para melhor visualização.

Quadro 10 - Dimensões dos quadriláteros desenhados por pantógrafo (cm).				
Grupo	Quadrilátero original	Quadrilátero 1	Quadrilátero 2	Quadrilátero 3
G01A	1,0 x 1,0	1,6 x 0,9	2,0 x 1,4	2,1 x 1,9
G02A	2,0 x 2,0	4,0 x 4,0	6,0 x 6,0	6,5 x 6,5
G03A	2,0 x 2,0	2,7 x 3,1	4,5 x 4,3	6 x 4,8
G04A	3,4 x 3,4	3,4 x 3,4	3,5 x 3,5	4,5 x 3,5
G05A	2,5 x 2,5	2,8 x 2,7	4,5 x 4,6	5,1 x 5,5
G06A	2,0 x 2,0	2,6 x 3,4	4,0 x 3,0	4,5 x 4,4
G07A	2,0 x 2,0	2,5 x 3,7	3,0 x 5,2	3,5 x 6,5
G08A	2,5 x 2,5	3,0 x 3,0	3,5 x 3,5	4,0 x 4,0
G09A	2,0 x 2,0	2,5 x 2,5	3,0 x 3,0	4,0 x 4,0
G10A	3,0 x 3,0	4,1 x 4,1	5,3 x 5,0	5,5 x 4,4
G11A	1,0 x 1,5	2,0 x 1,9	3,0 x 2,7	4,5 x 7,5
G12A	3,0 x 3,0	4,0 x 4,5	3,5 x 6,5	4,5 x 7,5
G13A	-	-	-	-
Fonte: Elaborado pelos autores.				

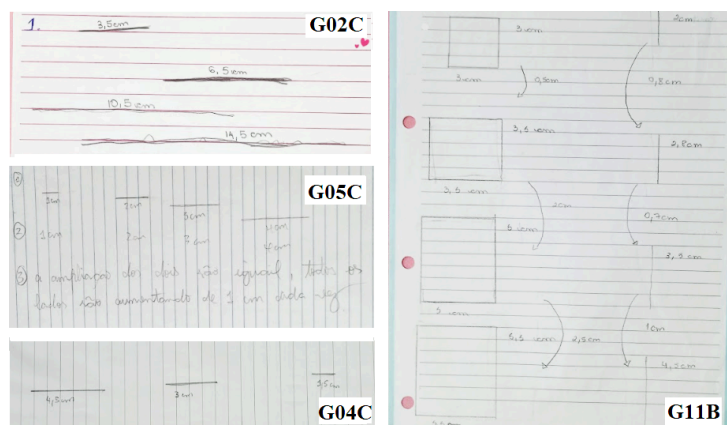
Analisando as informações expressas pelos estudantes, podemos calcular os fatores de ampliação para confirmar se a construção dos pantógrafos ocorreu como esperado. No caso de um pantógrafo construído e utilizado adequadamente, os fatores de ampliação das áreas de quadriláteros desenhados por ele seriam próximos de 2.25, 4 e 9 (nos casos de reduções, os

fatores seriam próximos de 0.44, 0.25 e 0.11) . No Quadro 11 indicamos os fatores de ampliação das áreas dos quadrados feitos pelos participantes. Para encontrar os fatores de ampliação, realizamos a razão entre as áreas dos quadriláteros 1, 2 e 3 com a área do quadrilátero original, respectivamente. Os estudantes também calcularam essas razões, com auxílio de uma calculadora, e registraram as respostas.

Quadro 11 - Fatores de ampliação dos quadriláteros desenhados pelos estudantes.			
Grupo	Quadrilátero 1	Quadrilátero 2	Quadrilátero 3
G01A	1,44	2,80	3,99
G02A	4,00	9,00	10,56
G03A	2,09	4,84	7,20
G04A	1,00	1,06	1,36
G05A	1,21	3,31	4,49
G06A	2,21	3,00	4,95
G07A	2,31	3,90	5,69
G08A	1,44	1,96	2,56
G09A	1,56	2,25	4,00
G10A	1,87	2,94	2,69
G11A	2,53	5,40	22,50
G12A	2,00	2,53	3,75
Fonte: Elaborado pelos pesquisadores.			

Os resultados dos fatores comprovam que todos os estudantes da Turma A tentaram ampliar os quadriláteros originais. Os grupos G02A, G07A e G09A registraram dois fatores próximos aos esperados, enquanto os demais grupos registraram um fator entre os esperados. Os dados indicam que, em ampliações que aumentam 1,5 vezes ou 2 vezes o comprimento linear, os estudantes tiveram facilidade em realizá-las, como podemos confirmar na Figura 67. Para calcular os fatores de ampliação/redução, utilizamos o valor da razão entre o comprimento do segmento desenhado com o pantógrafo pelo comprimento do segmento original.

Figura 67 - Registros de ampliações/reduções ao usar pantógrafo em segmentos.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

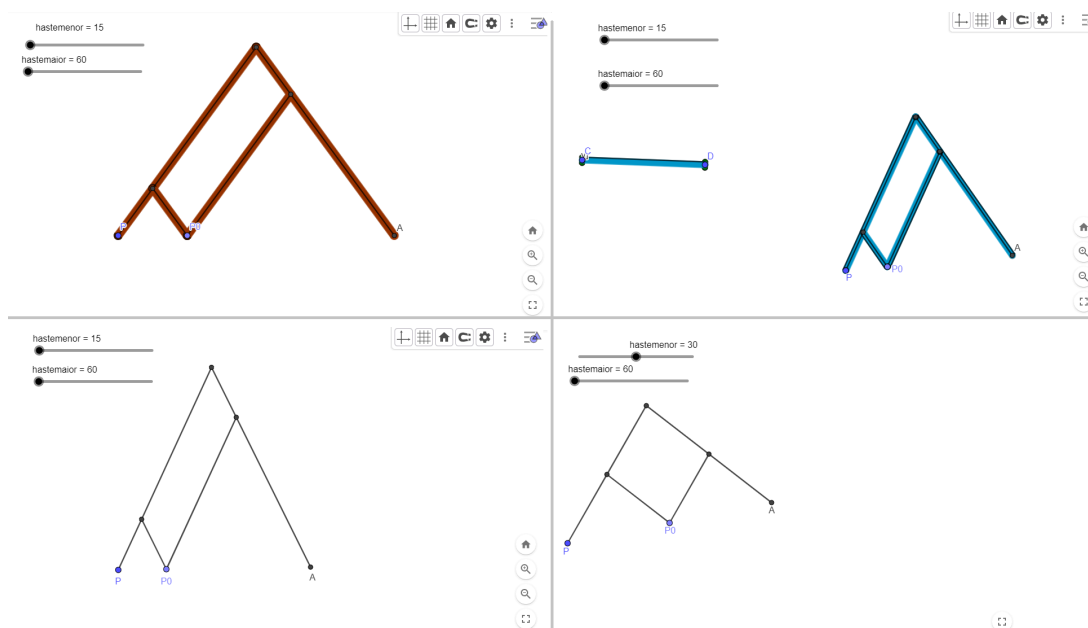
Observamos que o grupo G05C encontrou alguns dos fatores de ampliação conforme esperado e indicou que, a cada novo segmento, o comprimento aumentava 1 cm em relação ao anterior. O grupo G04C encontrou os fatores 1.5 e 2.0, enquanto o grupo G02C encontrou diferenças entre 3 e 4 centímetros de um segmento para o outro. Por fim, o grupo G11B anotou que as diferenças entre os segmentos variava de 0.7 a 1.0 cm entre eles; já entre as laterais dos quadriláteros, as diferenças variaram de 0.5 a 2.0 cm. Isso mostra que, embora todos os fatores de ampliação/redução esperados não tenham aparecido em todas as soluções, percebemos que ao menos um dos fatores sempre estava presente nas comparações entre os segmentos ou lados dos quadriláteros desenhados via pantógrafo, em especial, foram registradas mais ampliações de fatores 1.5 e 2 vezes.

Para que os estudantes percorressem a trajetória da matematização do pantógrafo, a pesquisadora propôs a tarefa do terceiro encontro, em que os grupos deveriam criar uma versão virtual do pantógrafo, a fim de que observassem outras relações matemáticas existentes no processo de construção e utilização da ferramenta. Nesse encontro, a *orientação* da pesquisadora foi fundamental, pois os estudantes não estavam familiarizados com a plataforma do software GeoGebra. Quando os participantes concluíram a tarefa fora da sala de aula, enviaram à pesquisadora por meio de email.

Ao todo, foram enviadas 18 versões de pantógrafos virtuais, o que indica que os grupos tiveram dificuldades em realizar a tarefa. Alguns dos grupos conseguiram compartilhar apenas fotos de suas criações virtuais, o que evidencia que o processo de compartilhamento da produção no GeoGebra não ficou esclarecido para esses grupos. As dificuldades percebidas e levantadas pelos estudantes serviram para manutenção das tarefas

dos próximos encontros. Assim, a pesquisadora adaptou os roteiros e desenvolveu comandos mais objetivos para as demais tarefas. No ANEXO D é possível ver capturas de telas com as produções virtuais dos estudantes, bem como links para acessar algumas das versões que não foram identificadas. Na Figura 68, mostramos alguns dos pantógrafos que foram entregues à pesquisadora.

Figura 68 - Pantógrafos criados em GeoGebra pelos participantes.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

O pantógrafo virtual mostrado na parte inferior direita da figura anterior foi compartilhado do modo como a pesquisadora orientou, enquanto os demais, os estudantes copiaram o link na caixa de pesquisa¹⁹ do navegador e o enviaram por email. Devido ao tipo de compartilhamento adotado pelos estudantes, era possível alterar as configurações da ferramenta virtual: os estudantes que seguiram os passos descritos pela pesquisadora asseguraram que nenhum usuário externo da plataforma alterasse seu projeto, enquanto aqueles que apenas copiaram o link permitiram que outros usuários pudessem alterar a produção. Os projetos se mantiveram inalterados e os objetos virtuais foram manipulados apenas pelos próprios estudantes.

Ao solicitar o envio das versões virtuais de cada grupo, a pesquisadora também solicitou que os estudantes explicassem sobre o funcionamento do pantógrafo. As respostas foram registradas em anotações das falas dos estudantes. De modo geral, os grupos que

¹⁹ É o local onde digitamos o endereço de um site (conhecido por URL - Localizador Uniforme de Recursos, em inglês). Geralmente, essa caixa fica na parte superior da tela de navegação.

conseguiram realizar a tarefa no GeoGebra identificaram que suas suposições a respeito da movimentação das hastes e os ângulos formados entre elas estavam corretas: nos encontros anteriores, alguns grupos utilizaram o fato dos ângulos entre as hastes serem congruentes para montar o pantógrafo corretamente. Dois grupos de uma mesma turma (G04B e G12B) indicaram que, ao acionar a malha quadriculada e desenhar quadrados sobre a malha usando o pantógrafo virtual, era mais perceptível a ampliação e redução das figuras, pois era possível contabilizar o contorno dos quadrados desenhados.

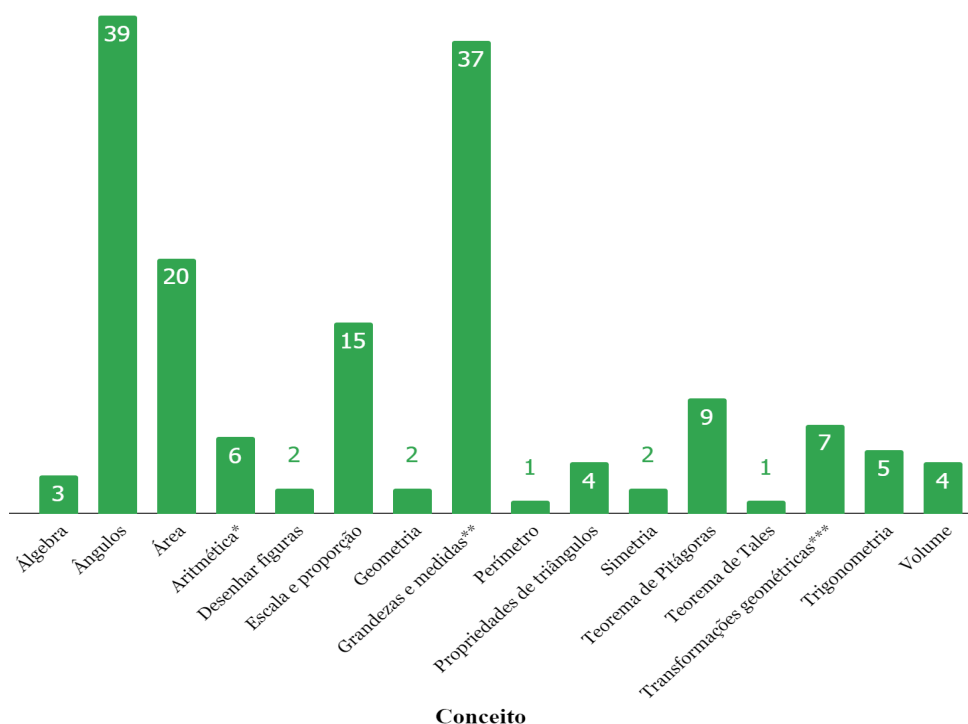
Em relação ao processo de matematização do pantógrafo, os dados mostram que os participantes compreenderam que há conceitos geométricos envolvidos na construção e na utilização da ferramenta: como já citado, os estudantes utilizaram conceitos de paralelismo, perpendicularismo e propriedades dos quadriláteros para realizar e justificar a construção do pantógrafo; quanto ao uso da ferramenta, alguns participantes destacaram a necessidade de fixar as folhas na mesa e também uma das pontas de uma haste, pois era necessário ter um “ponto de apoio” para mover o pantógrafo livremente de forma (provavelmente) inconsciente, os participantes estavam se referindo ao “ponto de fuga”, presente nos estudos de perspectiva e homotetia. Nenhum dos grupos entregou registros sobre a formalização de suas ideias matemáticas acerca da construção e utilização do pantógrafo, mas as manifestaram durante a realização da pesquisa, como descrevemos na seção. Discutimos, a seguir, os resultados da construção dos teodolitos.

8.3 Os resultados da construção do teodolito

O teodolito foi indicado pelos participantes como o terceiro instrumento favorito, como observamos no Gráfico 1. Dentre as justificativas para elegerem o teodolito como favorito, os estudantes reconheceram que se trata de uma ferramenta utilitária, cujo uso é feito por diferentes profissionais para medir algumas distâncias. Quando responderam à pergunta “Qual era a principal função do teodolito?” no formulário online, apenas duas categorias de respostas foram registradas: o termo “medir distâncias” apareceu em 30 (trinta) respostas ao passo que “medir ângulos” teve uma frequência de 13 (treze) respostas e apenas 1 (um) estudante registrou as duas categorias. Essas respostas nos permitiram levantar a hipótese de que a finalidade do teodolito, de modo geral, pareceu estar mais evidente em relação aos outros instrumentos.

Sobre os conceitos aos quais os estudantes relacionaram à construção e utilização de seus teodolitos, muitos associaram aos ângulos e às grandezas e medidas, bem como outros assuntos, majoritariamente, geométricos. Identificamos e apresentamos as respostas dos estudantes no Gráfico 3 a seguir.

Gráfico 3 - Conceitos matemáticos relacionados ao teodolito, segundo os participantes.



* Foram consideradas respostas que envolvessem cálculos, números e operações fundamentais.

** Foram consideradas respostas que envolvessem distâncias, alturas, tamanhos e métricas.

*** Foram consideradas respostas que envolvessem ampliação, redução, rotação e translação.

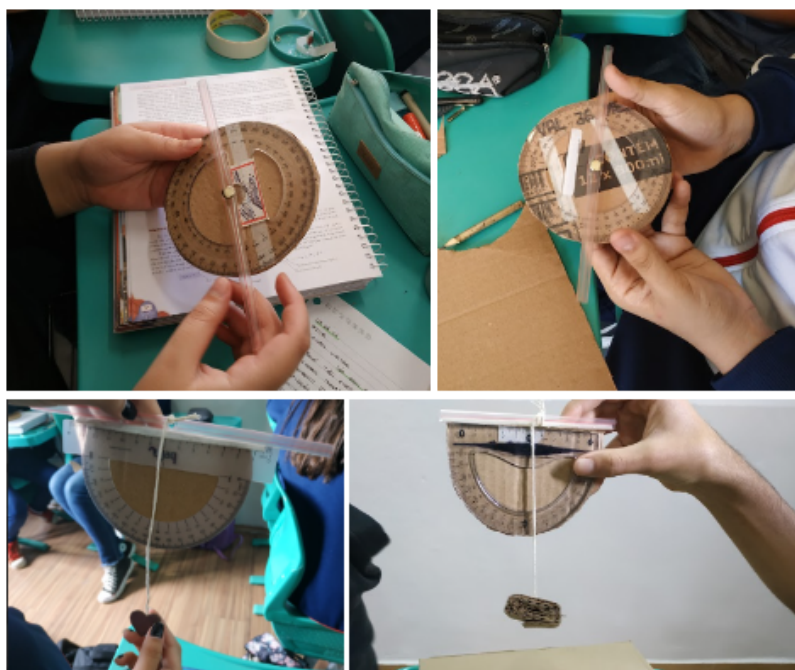
Fonte: Elaborado pelos autores.

Essas respostas confirmam a hipótese de que os participantes compreenderam sobre a finalidade do teodolito e como as ideias matemáticas estão relacionadas ao seu uso e construção, pois mais da metade das respostas apontaram para conceitos que envolvem “ângulos” ou “grandezas e medidas” (*entrelaçamento*), conceitos estes fundamentais na utilização de um teodolito e frequentemente associados a essa ferramenta, como descrevemos na seção 5.3.2 desta tese. Além disso, conforme descrito no Quadro 8, os participantes que preferiram o teodolito dentre as ferramentas estudadas justificaram seu interesse devido às aplicações cotidianas desse aparelho, indicando que o teodolito é uma ferramenta com potencial para ser explorada, matematicamente, em situações *realísticas*.

Em relação ao comando “Descreva as dificuldades ao construir ou usar o teodolito.”, 16 (dezesseis) participantes registraram que não tiveram dificuldades com a construção ou

utilização do teodolito, ao passo que 10 (participantes) relataram ter dificuldades em utilizar o aparelho, em especial, para visualizar o ponto de referência através do canudo e realizar as marcações dos dados fornecidos pelo teodolito, pois não compreenderam como observar o ângulo indicado pelo barbante. De fato, as solicitações de ajuda feitas à pesquisadora enquanto os estudantes construía seus teodolitos foram sobre como anexar o canudo ao transferidor ou à base de papelão (*orientação*). Em relação ao uso do aparelho para concluir as tarefas, a pesquisadora auxiliou alguns grupos na observação da ferramenta para obter os dados necessários. Na Figura 69 há exemplos de alguns teodolitos construídos pelos estudantes.

Figura 69 - Teodolitos construídos pelos participantes.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Observamos que as dificuldades enfrentadas pelos participantes ao utilizar o teodolito se devem a alguns fatores recorrentes. Em primeiro lugar, o canudo de visualização do ponto de referência estava instável ou móvel em alguns aparelhos do tipo "meia lua". Já nos teodolitos circulares, os canudos foram fixados com uma bailarina de metal, o que resultou em uma curvatura que influenciou os dados coletados pelos estudantes. Além disso, notou-se que alguns pesos improvisados para a ponta do barbante eram muito leves. Como resultado, qualquer interferência do ar ou movimentos mínimos durante o uso do aparelho fez com que o barbante se movesse, dificultando a precisão do registro do ângulo observado.

Na tentativa de solucionar esses problemas, durante e após realização da tarefa na quadra, alguns estudantes realizaram ajustes em seus teodolitos, como utilizar mais fita adesiva para melhor fixar o canudo, afrouxar a bailarina de metal para que não curvasse o canudo e acrescentar mais “peso” ao barbante. Os outros 18 (dezoito) estudantes que responderam ao questionário descreveram que o maior desafio foi realizar os cálculos com as informações obtidas via teodolito, dentre eles, apenas 1 (um) estudante apontou ter tido dificuldades com a montagem da versão virtual no GeoGebra.

Sobre a pergunta “Quais conceitos matemáticos você acha que o uso do teodolito o ajudaria a compreender melhor?”, 7 (sete) estudantes relataram, especificamente, conceitos que envolvem escalas, Teorema de Pitágoras, simetrias, medidas e áreas. Os 37 (trinta e sete) participantes restantes indicaram “ângulos” como um dos principais assuntos matemáticos a serem melhor compreendidos com o uso do teodolito, além dos assuntos já mencionados.

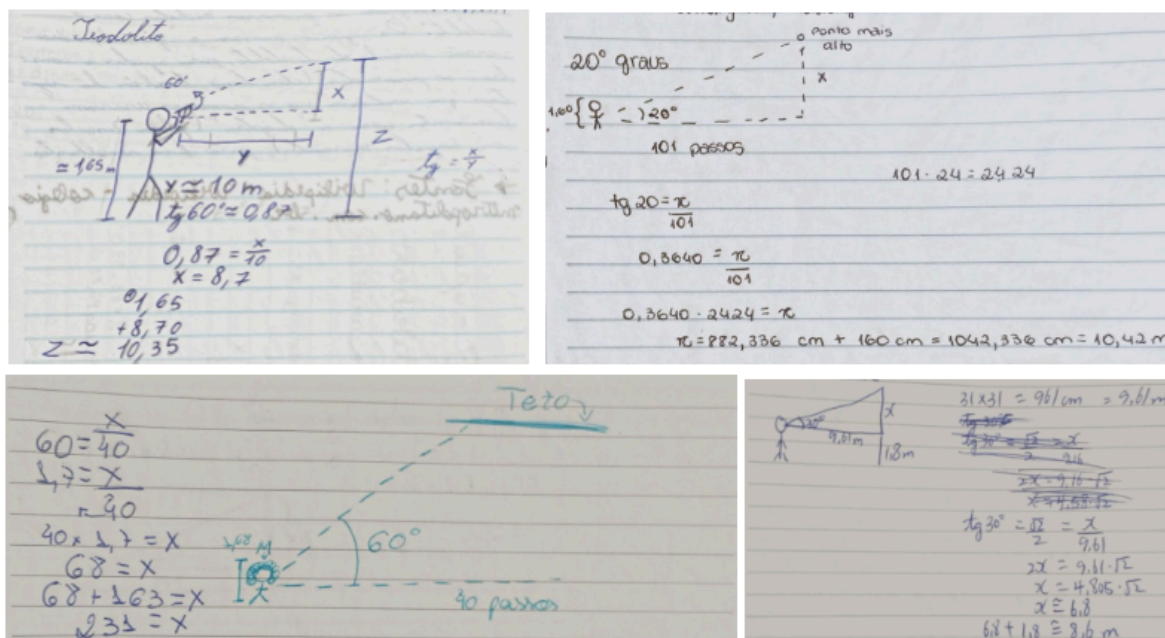
Durante a realização da tarefa para medir a altura da quadra, conforme mostrado na Figura 58, houve estudantes que estabeleceram alguns objetivos para cada membro do grupo: alguém se responsabilizava pelas anotações e esboços da situação em um caderno, outro realizava a medição desde o observador com o teodolito até o ponto de referência e um estudante era responsável por manusear o aparelho. A princípio, em todas as turmas, essa dinâmica se manteve com apenas um estudante realizando um único objetivo, mas logo perceberam que seria necessário comparar informações, pois a forma de medir uma distância pode variar em um grupo de pessoas e os estudantes notaram isso, evidenciando que houve um processo de *orientação* entre os próprios membros de cada grupo.

Por esse motivo, em quase todos os grupos, cada integrante realizou todos os objetivos, ao menos uma vez, e se ajudaram à medida que compreendiam sobre o processo de medição e a utilização do teodolito. Esses pequenos episódios evidenciaram que a *interatividade* foi fundamental para compreender os fenômenos envolvidos e mostrar o domínio dos conhecimentos mobilizados, bem como indicaram que a *orientação* ocorreu entre pares que estavam em processo de aprendizagem, de modo que aquele que conhecia um pouco mais auxiliava o outro que estava iniciando o processo. Esses princípios se mostraram conectados naquele momento e surgiram quase que naturalmente entre os estudantes que estavam atentos aos movimentos e estratégias desenvolvidos pela turma.

Ao retornar à sala de aula, os grupos se organizaram e começaram a reunir as informações obtidas com o uso do teodolito para compor esquemas e elaborar estratégias que

os permitissem encontrar a altura da quadra. Para isso, alguns grupos optaram por anotações e desenhos, como os apresentados na Figura 70.

Figura 70 - Esboços e representações dos estudantes sobre o uso do teodolito.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

A maioria dos grupos que optaram por representações com figuras geométricas escolheram triângulos ou semirretas para suas representações. Os “bonequinhos de palito” indicaram que os estudantes se viram na situação e se representaram nela. Notamos que nos desenhos apresentados na figura anterior, alguns dos estudantes tiveram o cuidado de atribuir às partes desconhecidas uma letra. Esse tipo de registro era comum nas produções dos demais estudantes e, possivelmente, consequência de uma cultura em que as letras são utilizadas para representar incógnitas. Alguns estudantes optaram por escrever as palavras “altura”, “topo”, “passos” e outras que pudessem substituir os valores das dimensões a serem calculadas. Esses registros evidenciaram uma conexão entre áreas da matemática, como a Álgebra e a Geometria (*entrelaçamento*), e destacaram a importância de relacionar diferentes linguagens na resolução de problemas e tarefas como a proposta, uma vez que apenas a figura geométrica ou a representação algébrica sozinhas, para esses estudantes, não eram suficientes para concluir a tarefa.

A partir de um bloco de anotações escritas, os estudantes transformaram esses registros em desenhos, uma nova linguagem, que pudessem auxiliá-los nos processos de visualização e cálculo. Os estudantes evidenciaram uma passagem de *níveis*, pois seus registros simplificados foram “traduzidos” para esquemas mais sofisticados que permitiram

encontrar a solução da tarefa. A justificativa de alguns grupos para a escolha do triângulo envolvia ideias como “medir ângulos verticais e horizontais” (G09B), “medir distâncias e diferença entre dois pontos” (G04B) e “linhas retas vindas do solo” (G06A), este último argumento para justificar a escolha do triângulo retângulo para obter a altura máxima da quadra, pois era preciso uma figura que tivesse uma reta [perpendicular] partindo do solo.

Para os cálculos, os estudantes que conseguiram finalizar essa tarefa recorreram às razões trigonométricas do triângulo retângulo, em especial, à relação que envolve a tangente do ângulo observado. Vale ressaltar que, embora o teodolito forneça informações sobre o ângulo observado, os estudantes precisaram interpretar a que ângulo no triângulo se referia essas informações, por exemplo, poucos grupos perceberam que, no teodolito com barbante, o valor do ângulo agudo marcado pelo barbante deveria ser subtraído do valor do ângulo reto (analogamente, que o valor do ângulo obtuso marcado pelo barbante deveria subtrair o valor do ângulo reto) para obter o grau do ângulo de observação, como já mostrado na seção 5.3.3.

Alguns resultados das alturas calculadas e os possíveis erros estão listados no quadro a seguir. Adotamos a média aritmética simples, desconsiderando o menor e o maior valor dos dados.

Quadro 12 - Resultados para a altura da quadra obtidos com uso do teodolito.			
Turma	Alturas calculadas (m)	Possíveis equívocos	Erro (%)
A	6,22	Não adicionou a altura do(a) observador(a).	20,25
	6,35	Não adicionou a altura do(a) observador(a).	18,59
	8,51	Erro na aproximação de casas decimais.	9,10
	10,14*	Erro na medida dos passos e não utilizou o ângulo correto.	30,00
	10,35	Erro na medida dos passos não utilizou o ângulo correto.	32,70
	10,70	Erro na medida dos passos não utilizou o ângulo correto.	37,18
	11,68	Erro na conversão de unidades não utilizou o ângulo correto.	49,74
	22,95	Usou uma relação trigonométrica inadequada.	194,23
	31,00	Erros de cálculo e de conversão de unidades não utilizou o ângulo correto.	297,43
Média aritmética simples (sem o menor e o maior valor)		11,52	47,69
B	8,50	Erro na aproximação de casas decimais.	8,97

	8,93	Erro na conversão de unidades.	14,49
	10,42*	Erro na contagem dos passos.	33,59
	12,96	Não utilizou o ângulo correto.	66,15
	13,21	Não utilizou o ângulo correto.	69,36
	16,27	Erro na contagem dos passos e não utilizou o ângulo correto.	108,59
	16,43	Erro na contagem dos passos e não utilizou o ângulo correto.	110,64
	16,90	Erro na contagem dos passos e não utilizou o ângulo correto.	116,67
	39,68	Erro na conversão de unidades não utilizou o ângulo correto.	408,72
	47,04	Erro na contagem dos passos e não utilizou o ângulo correto.	503,08
Média aritmética simples (sem o menor e o maior valor)		16,85	116,03
C	3,48	Não utilizou o ângulo correto.	55,38
	8,60	Erro na contagem e medição dos passos.	10,26
	10,30	Não utilizou o ângulo correto.	32,05
	10,70	Não utilizou o ângulo correto.	37,18
	11,90	Não utilizou o ângulo correto.	52,56
	11,63	Adicionou a altura do(a) observador(a) duas vezes.	49,10
	26,01	Usou outra relação trigonométrica e cometeu erros na contagem e medição dos passos.	233,46
Média aritmética simples (sem o menor e o maior valor)		10,70	37,18
* Valores que apareceram mais de uma vez, porém, foram contabilizados uma vez, pois os grupos se uniram. Fonte: Elaborado pelos pesquisadores.			

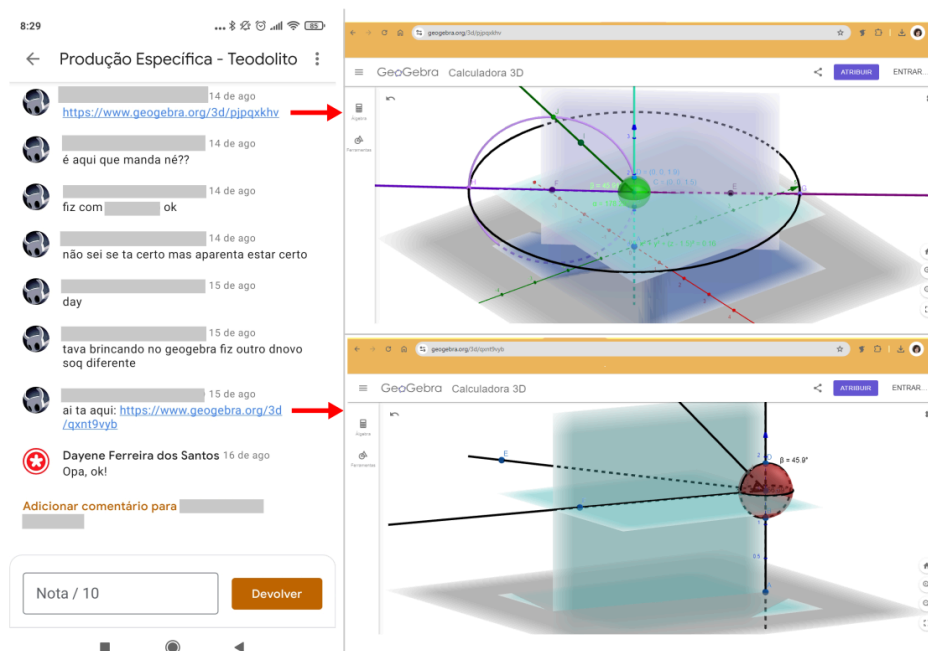
A altura da quadra era próxima de 7,8 metros e, de modo geral, a turma C obteve os melhores resultados, apesar de ser a turma com um menor número de participantes que concluíram a tarefa. Nesse quadro, não foram apresentados os casos em que os estudantes não converteram a medida do passo para alguma unidade de medida do Sistema Internacional (SI), ainda que não fosse um item obrigatório.

Visando auxiliar os estudantes a compreenderem sobre a utilização de um teodolito e considerando que se trata de uma ferramenta que pode ser usada para medir distâncias entre

pontos de referência que estão localizados em um espaço, a pesquisadora solicitou aos participantes que montassem o teodolito virtual por meio do *software* GeoGebra 3D, uma versão que permite criar representações tridimensionais de figuras geométricas. Diferente da solicitação do pantógrafo virtual, em que os estudantes tiveram acesso aos comandos escritos e a vídeos explicativos sobre como realizar a montagem do pantógrafo no GeoGebra Clássico, a montagem do teodolito virtual contou com apenas um documento com os comandos e orientações básicas. O objetivo era que os estudantes pudessem retomar a experiência de criar o pantógrafo via GeoGebra e utilizar os conhecimentos adquiridos para fazer o teodolito.

Foram entregues 19 (dezenove) arquivos interativos de grupos diferentes contendo os teodolitos virtuais dos quais 4 (quatro) pertenciam a grupos da turma C e os demais eram de estudantes das turmas A e B; apenas 2 (dois) não estavam finalizados ou não era possível acessar devido a algum erro de compartilhamento. Além disso, 9 (nove) grupos das turmas A e B não conseguiram compartilhar os arquivos interativos, mas enviaram fotos de suas produções por meio do respectivo fórum da tarefa no Google Sala de Aula e 1(um) desses grupos indicou que não conseguiu realizar a construção do teodolito no GeoGebra. Ao todo, 28 (vinte e oito) grupos entregaram suas versões de teodolitos virtuais. Uma dupla de estudantes da turma B, explorando o *software*, montou duas versões de teodolitos e as compartilhou com a pesquisadora, conforme vemos na Figura 71.

Figura 71 - Versões do teodolito realizada pelos estudantes do grupo G01B.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Observamos que esse estudante se refere ao ato de investigar a ferramenta como uma “brincadeira”, ou seja, uma atividade agradável. Apesar de o foco desta tese não ser as discussões sobre como se define uma brincadeira ou a relação entre “brincar” e “aprender”, vale ressaltar que Vygotsky (1991) revela que o ato de brincar auxilia no desenvolvimento intelectual da criança e permite que ela alcance níveis de abstração, pois quando a criança brinca, ela se projeta para além da sua idade, superando seu comportamento habitual e mostrando-se maior do que é na realidade. Sabemos que as discussões de Vygotsky (1991) se referem ao desenvolvimento infantil, mas podemos fazer uma analogia ao processo de aprendizagem de jovens e adultos associado à brincadeira e ao lúdico, conforme defendem diversos autores aos quais indicamos a leitura: Santos (2010) e Santaella (2012) discutem sobre o papel do lúdico na aprendizagem; Monteiro e Monteiro (2010) revelam a importância de jogos e brincadeiras no processo de ensino-aprendizagem na Educação de Jovens e Adultos; Falkembach (2006) aponta que uso de jogos e atividades lúdicas permitem que crianças, jovens e adultos aprendam e se relacionem com seus pares.

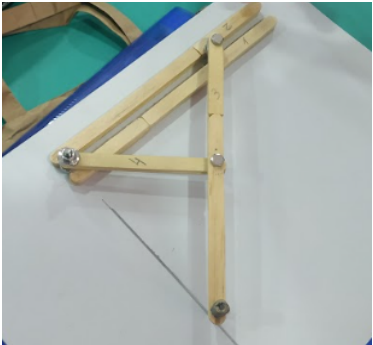
As datas das mensagens enviadas pelo estudante do grupo G01B revelam que ele e seu colega dedicaram tempo para fazer ajustes e investigações na montagem do teodolito, pois a pesquisadora não solicitou ajustes nas produções dos estudantes. Na [Figura 71](#), é possível ver que não há nota atribuída à entrega dessa produção, pois todos os participantes estavam cientes que, independentemente da funcionalidade dos aparelhos virtuais ou mesmo da efetiva entrega dos arquivos, a nota máxima seria mantida, como combinado previamente, portanto, a dedicação desses estudantes em melhorar a versão entregue foi genuína. Notamos que a primeira versão do teodolito virtual (ver tela superior da [Figura 71](#)), embora funcional, apresentava muitas informações e as cores dificultavam a visualização dos valores apresentados pela ferramenta digital. Em sua segunda versão (tela inferior da mesma figura), os estudantes mantiveram as cores sugeridas pela plataforma e ocultaram as circunferências auxiliares, deixando a visualização mais objetiva.

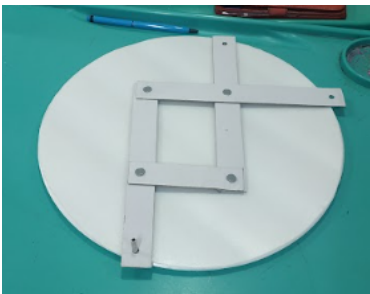
Existe a possibilidade desses estudantes terem contatado outros colegas e visto suas produções, levando-os a ajustar sua versão do teodolito. Entretanto, ainda que fosse o caso, houve uma preocupação da dupla em revisitar o teodolito que criaram e elaborar um novo com ajustes que julgaram necessários. Isso nos revelou que os estudantes se envolveram na tarefa e buscaram compreender sobre o funcionamento do teodolito, por isso, optaram por melhorias, ainda que não solicitadas pela pesquisadora. Essa atitude em realizar ajustes foi

muito observada nos encontros dedicados à criação e replicação de outros instrumentos articulados, como descrevemos a seguir.

8.4 Os resultados da construção de outros articulados

Para os últimos encontros, os estudantes escolheram e criaram suas próprias ferramentas com base nas seguintes condições: a ferramenta precisaria ter um mecanismo articulado e desenhar alguma figura geométrica, além disso, só foram permitidos materiais que pudessem ser reciclados e reaproveitados posteriormente. Ao todo, os participantes produziram mais de 30 aparelhos, pois alguns grupos montaram mais de uma versão do próprio aparelho ou escolheram mais de uma ferramenta, como mostrado no Quadro 13.

Quadro 13 - Aparelhos articulados produzidos pelos estudantes.		
Exemplar	Nome	Quantidade de exemplares similares
	Elipsógrafo / Trammel de Arquimedes	7
	Inversor	3
	Mecanismo de 4 barras	7

	Pantógrafo	18
Fonte: Acervo dos pesquisadores.		

Percebemos que o pantógrafo foi o aparelho mais reproduzido, mas dessa vez, houve algumas variações e a principal delas foi que muitos grupos optaram por alongar uma das hastes em que se posiciona o lápis para desenhar e *(re)inventaram* o pantógrafo, como mostrado na Figura 72 a seguir.

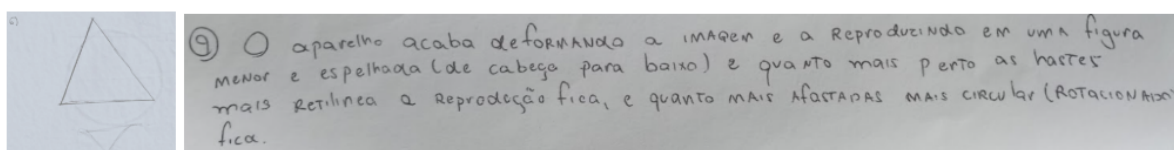
Figura 72 - Pantógrafo reinventado por um participante.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Notamos que o grupo responsável pela montagem do pantógrafo anterior adicionou alguns furos onde poderiam inserir lápis ou canetas e, depois, testar o aparelho para descobrir os desenhos feitos por meio de seu uso. Nesse processo de investigação, o grupo descobriu que seu pantógrafo permitia desenhar figuras invertidas, conforme mostrado na Figura 73.

Figura 73 - Desenho invertido feito pelo grupo G02A.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

O grupo descreveu que “o aparelho acaba deformando a imagem e a reproduzindo em uma figura menor e espelhada (de cabeça para baixo) e quanto mais perto às hastes mais retilínea a reprodução fica, e quanto mais afastadas mais circular (rotacionada) fica.” (G02A). Essa descrição evidencia uma tentativa de matematizar o pantógrafo e explicar, com conceitos geométricos, uma transformação geométrica observada. Essa explicação de um fenômeno observado, por meio de ideias matemáticas, caracteriza o princípio da *atividade*.

A justificativa apresentada por alguns participantes sobre a escolha de “recriar” o pantógrafo, em sua maioria, se definiu pela afinidade dos estudantes com o aparelho e pelas experiências adquiridas nos encontros anteriores, ao passo que os participantes que escolheram os elipsógrafos justificaram que “ele parecia ser o mais difícil” - (E42) e foi tomado como um desafio a ser concluído. Os estudantes que optaram pelos mecanismos de 4 barras diversificaram suas justificativas, pois alguns escolheram devido à semelhança com os aparelhos anteriores e outros construíram o mecanismo por ser mais “acessível (fácil) de fazer” - (E26). No ANEXO C disponibilizamos alguns desenhos técnicos, elaborados pelos estudantes, que permitem recriar os aparelhos escolhidos pelos participantes desta pesquisa.

Ao responderem à questão “Qual ou quais conceitos matemáticos você percebeu ao construir o(s) aparelho(s)?”, os estudantes apontaram os seguintes conceitos e ideias matemáticas, alguns também relacionados ao uso dos aparelhos:

Quadro 14 - Distribuição dos conceitos e ideias matemáticas relacionadas à construção e uso dos aparelhos articulados.		
Conceitos/Ideias	Descrição	Frequência de respostas
Ângulos e medidas relacionadas	Análise de ângulos, medidas de ângulos, uso em transformações geométricas e trigonometria (seno, cosseno, tangente).	22
Ampliação e redução	Técnicas para ampliação e redução de figuras, incluindo cálculos e inversão.	14
Figuras geométricas e desenho	Figuras como elipses, polígonos, triângulos, e outros desenhos geométricos, incluindo cálculos relacionados.	9
Medidas e cálculos	Medições de distâncias, áreas, perímetros, circunferências, e outros cálculos relacionados.	9
Simetria e outras transformações	Análise e aplicação de simetria em figuras, rotação e outras transformações geométricas.	8
Distâncias e proporção	Medição e cálculo de distâncias, proporcionalidade e uso em gráficos.	6

Estruturas e variações	Estruturas relacionadas a figuras e medidas geométricas e análise de variações em medidas e formas.	5
Diversidade de habilidades e engenharia	Integração de conceitos geométricos em diferentes contextos, incluindo engenharia e gráficos.	3
Fonte: Elaborado pelos pesquisadores.		

Para montar esse quadro, agrupamos as diferentes respostas conforme os seguintes critérios:

- **Ângulos e medidas relacionadas:** inclui tudo o que diz respeito a ângulos e suas medidas, trigonometria e transformações que envolvem ângulos;
- **Ampliação e redução:** agrupa todos os conceitos relacionados à alteração do tamanho de figuras, seja por ampliação ou redução;
- **Figuras geométricas e desenho:** consolida todos os aspectos relacionados ao desenho e cálculo de figuras geométricas;
- **Medidas e cálculos:** inclui todos os cálculos e medições que não estão diretamente relacionados a ângulos ou figuras específicas;
- **Simetria e outras transformações:** abrange simetria e outras transformações geométricas, como rotação;
- **Distâncias e proporção:** inclui medições de distâncias e análises de proporcionalidade;
- **Estruturas e variações:** reflete variações em medidas e a estrutura de figuras geométricas;
- **Diversidade de habilidades e engenharia:** reúne conceitos aplicados a diferentes habilidades manuais e citações de contextos diversos, incluindo situações da área de Engenharia Civil.

Verificamos que os estudantes elencaram muitos conceitos geométricos que puderam ser explorados por meio da construção e utilização dos diferentes instrumentos articulados (*entrelaçamento*) que foram desenvolvidos durante as últimas tarefas solicitadas pela pesquisadora, contribuindo para a efetivação do objetivo geral desta pesquisa (ver subseção “1.2.1 Objetivo geral”). Embora tais conceitos e ideias tenham sido apontados pelos estudantes, alguns apresentaram dificuldades em construir seus aparelhos e relataram seus desafios no formulário, cujas descrições foram reunidas no Quadro 15.

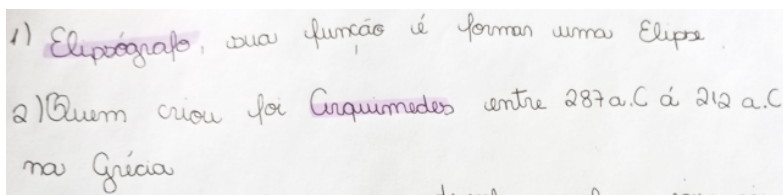
Quadro 15 - Descrição das dificuldades enfrentadas pelos participantes em montar e utilizar os instrumentos articulados.

Descrição	Frequência das respostas
Problemas enfrentados durante a montagem e uso, como material frágil e medidas incorretas.	15
Experiências de facilidade na construção e uso do aparelho.	10
Dificuldades em controlar o aparelho e garantir que ele funcione corretamente, incluindo problemas com a movimentação e o funcionamento geral.	8
Dificuldades com a construção do aparelho no GeoGebra.	5
Questões relacionadas ao entendimento do propósito do aparelho e ao conhecimento necessário para sua montagem e uso.	4
Fonte: Elaborado pelos pesquisadores.	

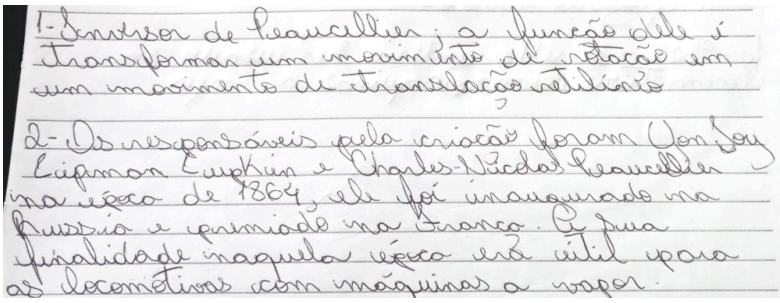
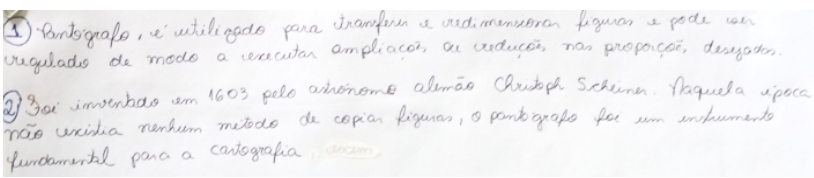
Para enfrentar esses desafios, os estudantes notaram que era essencial melhorar a escolha dos materiais e garantir a precisão nas medidas. Além disso, para aplicações futuras, será preciso aprimorar o design dos aparelhos para assegurar um funcionamento adequado e desenvolver um treinamento mais detalhado sobre o uso do GeoGebra. Fornecer instruções claras e explicativas sobre o propósito e o processo de montagem dos aparelhos poderia ajudar a superar as dificuldades conceituais e práticas, promovendo uma compreensão e uma construção bem-sucedida.

As informações coletadas pelos participantes sobre as origens dos aparelhos e suas respectivas funções foram utilizadas por eles para compreender sobre funcionalidades e finalidades. Alguns desses dados estão no quadro a seguir.

Quadro 16 - Origens e funções dos aparelhos escolhidos pelos participantes.

Nome da ferramenta	Origem, contexto histórico e função
Elipsógrafo ²⁰	 1) Elipsógrafo, sua função é formar uma Elipse. 2) Quem criou foi Arquimedes entre 287 a.C. a 212 a.C. na Grécia

²⁰ Transcrição: “1) Elipsógrafo, sua função é formar uma elipse. 2) Quem criou foi Arquimedes entre 287 a.C. a 212 a.C., na Grécia.”

Inversor ²¹	
Pantógrafo ²²	
Fonte: Elaborado pelos pesquisadores.	

Notamos que os estudantes, em sua maioria, buscaram as informações em fontes confiáveis como artigos acadêmicos publicados na internet. Entretanto, alguns participantes, ao resumir o que encontraram, se equivocaram com algumas informações e/ou não aprofundaram suas pesquisas. Por exemplo, no quadro anterior, o grupo que descreveu sobre o elipsógrafo não especificou sobre as condições e o período em que a primeira versão foi criada, uma vez que a data mostrada (287 a.C. a 212 a.C.) se refere ao período em que Arquimedes viveu; o grupo que descreveu sobre o aparelho inversor de Peaucellier-Lipkin ofereceu mais informações suficientes sobre o período em que o aparelho foi inventado, sua finalidade para a época e sua função, mas não detalhou sobre a premiação citada; por fim, os estudantes que descreveram sobre o pantógrafo cometeram um equívoco ao afirmar que “naquela época não existia nenhum método de copiar figuras”, pois já existiam métodos e ferramentas que permitiam copiar figuras em perspectiva, porém, Scheiner apresentou um mecanismo mais eficiente e inovador.

Essas descrições evidenciaram a necessidade de investigar o contexto histórico e as necessidades que levaram os inventores a criarem tais ferramentas e como essas invenções influenciaram a história da humanidade (*realidade*). Por esse motivo, no penúltimo encontro, a pesquisadora realizou uma interferência após as entregas das anotações dos estudantes e

²¹ Transcrição: “1 - Inversor de Peaucellier, a função dele é transformar um movimento de rotação em um movimento de translação retilíneo. 2 - Os responsáveis pela criação foram Yom Tov Lipman Lipkin e Charles Nicolas Peaucellier na época de 1864, ele foi inaugurado na Rússia e premiado na França. A sua finalidade naquela época era útil para as locomotivas com máquinas a vapor.”

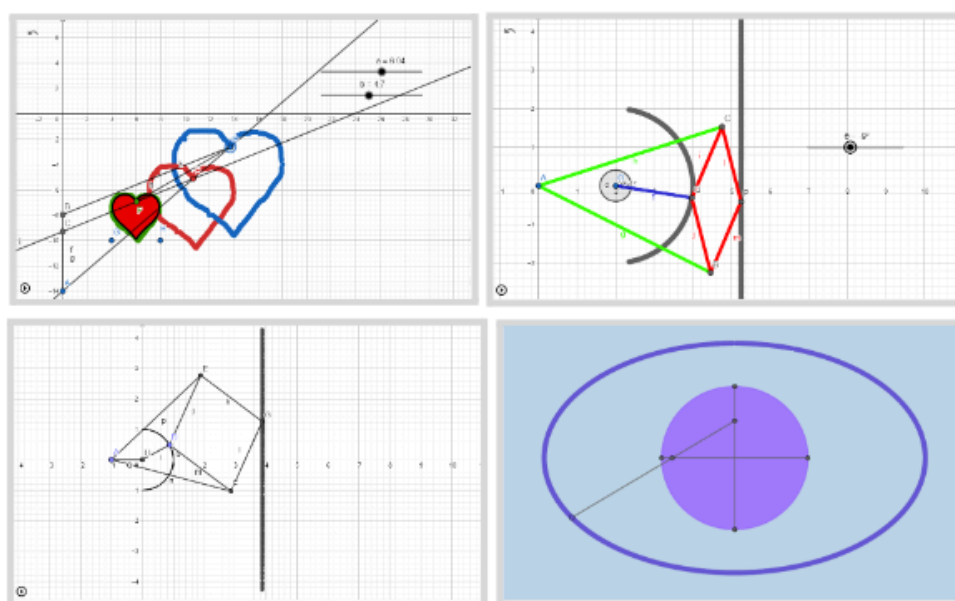
²² Transcrição: “1) Pantógrafo, é utilizado para transferir e redimensionar figuras e pode ser regulado de modo a executar ampliações ou reduções nas proporções desejadas. 2) Foi inventado em 1603 pelo astrônomo alemão Christoph Scheiner. Naquela época não existia nenhum método de copiar figuras, o pantógrafo foi um instrumento fundamental para a cartografia.”

destacou a importância de conhecer o momento histórico em que as ferramentas foram inventadas. Segundo Freitas e Libâneo (2022), em situações como essa, as tarefas de estudos permitem aproveitar os contextos estudados para enfatizar as diferentes atividades humanas e possibilita que os estudantes reconheçam o desenvolvimento humano nas diferentes épocas.

As tarefas de estudo elaboradas precisam mobilizar os motivos dos alunos, considerando sua experiência no contexto local de vida e vinculando-se à atividade dominante no período de desenvolvimento humano em que se encontram. [...] as práticas socioculturais e institucionais de que os alunos participam devem ser as referências para promover a articulação entre os conceitos cotidianos e os conceitos científicos, concretizando-se o duplo movimento do ensino (Freitas; Libâneo, 2022, p.14).

Com isso, os estudantes puderam compreender, com um pouco mais de profundidade, a importância desses instrumentos para o desenvolvimento da humanidade e como se relacionam com a realidade em que se situam. Em relação à construção do instrumento no GeoGebra, recebemos 27 (vinte e sete) arquivos com diferentes aparelhos virtuais dos quais 4 (quatro) foram criados por estudantes que não enviaram materiais desenvolvidos por terceiros, disponibilizados na plataforma. Para a construção desses aparelhos, os estudantes recorreram à pesquisadora, ao material da plataforma e a diferentes canais ou redes sociais em que era possível encontrar informações sobre os comandos necessários para montar as versões virtuais dos aparelhos. Na Figura 74, mostramos as telas dos trabalhos criados pelos estudantes que não enviaram os materiais criados por terceiros.

Figura 74 - Fotos dos aparelhos virtuais criados pelos grupos G01A, G04A, G10A e G02C.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Ressaltamos que, apesar de muitos estudantes terem enviado arquivos de materiais que foram construídos por outras pessoas, em nenhum momento eles assumiram a autoria e foram honestos e honestas em admitir que precisaram recorrer a esse caminho por consideração à pesquisadora e também porque tiveram dificuldades em finalizar a construção do aparelho virtual. Entretanto, dedicaram-se a pesquisar na plataforma e a encontrar a virtualização do instrumento que o respectivo grupo escolheu e enviaram os *links* e arquivos que encontraram relacionados ao instrumento escolhido.

A seguir, descrevemos sobre a avaliação das tarefas e produções dos estudantes em conformidade com a Educação Matemática Realística e embasado nos resultados obtidos por meio do Experimento Didático aplicado.

8.5 Avaliando os participantes

Conforme De Lange (1999) e Lopez, Buriasco e Ferreira (2014), uma avaliação alinhada aos princípios da RME integra tarefas que conectem conceitos matemáticos a contextos do mundo real. No lugar de se restringir a provas teóricas, a avaliação deve incluir tarefas que simulam situações do cotidiano, desafiando os estudantes a resolver problemas autênticos e significativos (De Lange, 1999). Com base nisso e reconhecendo que é essencial que a avaliação considere não apenas a resposta correta, mas também o processo de pensamento dos estudantes, valorizando a construção e a aplicação do raciocínio matemático, adotamos uma avaliação contínua que possibilitasse a reflexão crítica e a comunicação matemática, de modo que os estudantes pudessem expressar e defender suas soluções. Por meio de uma abordagem diagnóstica e formativa, a avaliação forneceu uma devolutiva construtiva, objetivou apoiar o progresso contínuo e adaptou o ensino às necessidades individuais dos estudantes, promovendo uma aprendizagem que fosse relevante.

Quando a pesquisadora realizou as devolutivas das tarefas, após os encontros, solicitou aos participantes que comentassem sobre suas impressões, dificuldades e possíveis melhorias. As afirmações foram registradas no formulário eletrônico e, ao longo dos encontros, em atividades virtuais postadas na plataforma Google Sala de Aula. Na Figura 75 exibimos algumas respostas referentes às tarefas com o pantógrafo.

Figura 75 - Percepções dos estudantes em relação às tarefas com pantógrafo.



1 de abr

O Pantógrafo é um instrumento usado para fazer ampliações (ou reduções) de uma figura, na proporção desejada.

Achamos a pesquisa super interessante; tivemos um pouco de dificuldade na hora de fazer o pantógrafo virtual.
Os pontos favoráveis e que é uma ferramenta bem eficaz para copiar desenhos em tamanho maior ou menor do que um pantógrafo.
Os pontos desfavoráveis, e que para usar um pantógrafo com perfeição precisa de muito treino pois é um pouco complicado.
Um dos pontos que devemos melhorar e na hora de usá-lo, pois ainda não temos muita prática e tivemos muita dificuldade; tivemos muito dificuldade na hora de fazer virtualmente também.

Gostei de fazer por ser uma experiência nova, achei inovador por nunca ter visto ou ouvido falar sobre o pantógrafo, tive bastante dificuldade ao utilizar e achei fácil fazer até, achei que iria ser mais difícil quando vi.

Gostou bastante de montar o Pantógrafo, por gostar de novos desafios desse tipo e atividades diferentes. Achou complicado na hora de utilizar

Achei diferente, gostei de montar o pantógrafo, foi até que bem fácil, no olho mesmo o grupo conseguiu montar, mas na hora de utilizar ele, foi um caos, muito difícil usar esse negócio, acho que só na utilização do pantógrafo que devíamos melhorar, talvez com mais tempo sairia algo.

Opinião:

A proposta da atividade foi interessante, conseguiu trazer conceitos teóricos sobre a matéria de forma prática, e a maior dificuldade foi em realizar a programação da atividade, mas se tornou uma forma diferente de aprendizado, de modo a incentivar novas capacidades do aluno.

Nós achamos a pesquisa interessante, pois além ter uma nova forma de ver álgebra e trigonometria, ajuda a ter uma nova forma de analisar o conteúdo, não houve nenhuma dificuldade, apenas demorou para programar pantógrafo.
Apenas deveria melhorar o funcionamento do site GeoGebra, pois foi complicado de se trabalhar com ele.

Observamos que os estudantes apreciaram as atividades, apesar das dificuldades. Os relatos pós tarefas coincidem com as percepções no final da pesquisa, ainda que tenham passado oito meses entre os relatos. Há uma consistência nas descrições dos participantes e evidências de que as tarefas os ajudaram a perceber sobre aplicações da ferramenta, além de relacionarem o uso e construção do pantógrafo a diferentes assuntos matemáticos (muitos voltados para Geometria), bem como a aplicações na *realidade*. As sugestões de melhorias também são um indicador de que os estudantes compreenderam os objetivos das tarefas, mas sentiram que precisavam de mais apoio e, principalmente, de mais tempo para realizá-las. Freudenthal (1991) discute sobre a necessidade de respeitar o tempo de aprendizagem.

Aprender é realmente demorado. Depende do aluno e da questão de aprendizagem quanto tempo é necessário, isto é, quanto distanciamento pode ser permitido se os processos de aprendizagem forem encurtados. [...] A negligência deste fato é, na minha opinião, a verdadeira razão pela qual as estimativas de tempo nas várias fases do processo de mudança têm estado tão erradas (Freudenthal, 1991, p. 170 - tradução nossa²³).

Com base nas produções e registros dos estudantes, identificamos evidências de que houve aprendizagem de conceitos matemáticos. Agrupamos essas evidências de aprendizagem em três categorias relacionadas à reprodução de modelo e comandos, denominada **reprodução**; à identificação de conceitos matemáticos, relacionando-os com os fenômenos da realidade, denominada **correspondência**; e à generalização das ideias matemáticas obtidas a partir da realização das tarefas, chamada de **universalização**. Cada categoria conta com dois níveis de profundidade (simples e complexo) que se referem ao modo como o estudante expressou o domínio dos conceitos estudados e alcançou os objetivos das tarefas propostas. Em um nível simples, o estudante foi capaz de reproduzir os comandos e modelos, mas não demonstrou domínio sobre as relações existentes entre o funcionamento do aparelho e as ideias matemáticas ou não conseguiu identificar modos de o aparelho ser utilizado na resolução de problemas. Em um nível mais complexo, estão os estudantes que alcançaram os objetivos das tarefas, bem como realizaram os ajustes necessários e mostraram domínio sobre as relações entre o objeto e a realidade.

No Quadro 17, mostramos as relações entre as tarefas da pesquisa e as evidências de efetivação da aprendizagem de diferentes conceitos matemáticos com base nas resoluções dos estudantes.

²³ Trecho original: “*Learning is time-consuming, indeed. It depends on the learner and the learning matter how much time is required, that is, how much estrangement can be allowed if learning processes are to be shortened. [...] Disregard for this fact is, in my opinion, the actual reason why time estimates at the various stages of the process of change have been so far off the mark.*”

Quadro 17 - Relação entre as tarefas realizadas durante o experimento didático formativo e as evidências de aprendizagem.

Pantógrafo				
Categoria	Níveis de profundidade	Encontro 1: Montagem	Encontro 2: Uso e aplicações	Encontro 3: Construção virtual
Reprodução	Simple	O estudante reproduziu a ferramenta com base no modelo disponível e não fez ajustes.	O estudante observou o uso que os colegas fizeram e o reproduziu.	O estudante apenas executou os comandos total ou parcialmente.
	Complexo	O estudante reproduziu a ferramenta com base no modelo, mas realizou testes e ajustes necessários para garantir o bom funcionamento do pantógrafo.	O estudante observou o uso da ferramenta dos colegas, mas realizou testes com segmentos de retas e curvas para compreender a função do pantógrafo.	O estudante executou todos os comandos e personalizou o pantógrafo virtual.
Correspondência	Simple	O estudante compreendeu que a montagem do pantógrafo está relacionada a propriedades matemáticas, mas não as definiu.	O estudante percebeu que o pantógrafo tem função de ampliar e reduzir figuras, mas não indicou outras funções. Também viu a ferramenta apenas como um recurso para as aulas de matemática.	Nos casos de pantógrafos virtuais completos, o estudante habilitou a ferramenta “rastros” e notou que o pantógrafo ampliava as dimensões de um segmento qualquer.
	Complexo	O estudante foi capaz de descrever os conceitos, em sua maioria, geométricos, envolvidos na construção do pantógrafo.	O estudante percebeu que o pantógrafo permite aplicar transformações geométricas em uma figura. Além disso, identificou a necessidade de criação do pantógrafo e seus potenciais usos no cotidiano.	Além de identificar que o pantógrafo virtual ampliava as dimensões lineares de um segmento, o estudante conseguiu identificar proporções por meio de ferramentas como “régua”, “área” ou pela malha quadriculada.
Universalização	Simple	O estudante fez esquemas simples da estrutura do pantógrafo modelo para usar como base da sua montagem.	O estudante reconheceu conceitos geométricos básicos como ampliação, redução e propriedades dos quadriláteros no pantógrafo.	O estudante identificou, nos comandos para construção do pantógrafo virtual, conceitos matemáticos que justificam seu funcionamento.
	Complexo	O estudante elaborou esquemas mais detalhados e realizou medidas que o auxiliassem na montagem de seu pantógrafo. As medidas relacionavam as razões de proporcionalidade entre os comprimentos das hastes.	O estudante identificou diferentes conceitos matemáticos envolvidos na construção e utilização do pantógrafo, além de realizar testes para confirmar hipóteses, registrar as descobertas utilizando uma linguagem informal e, posteriormente, seria capaz de justificar o funcionamento do pantógrafo com linguagem formal.	Não encontramos evidências que indicassem que um estudante atingiu um nível mais complexo. Supomos que, neste nível, o estudante poderia ser capaz de justificar, matematicamente, todos os comandos utilizados para construção do pantógrafo e fazer generalizações sobre o funcionamento de qualquer pantógrafo a partir deste.

Teodolito				
Categoria	Níveis de profundidade	Encontro 4: Montagem	Encontro 5: Uso e aplicações	Encontro 6: Construção virtual
Reprodução	Simple	O estudante reproduziu um dos modelos disponíveis, sem ajustes, mesmo que necessários.	O estudante apenas realizou os movimentos necessários para utilizar o aparelho, conforme instruções da pesquisadora ou colegas, mesmo sem compreender seu uso.	O estudante apenas executou os comandos total ou parcialmente.
	Complexo	O estudante reproduziu a ferramenta com base em um dos modelos, ajustou e fez alterações que não estavam contempladas no modelo escolhido.	O estudante observou os colegas utilizando seus teodolitos, solicitou orientação à pesquisadora, quando necessário, e compreendeu sobre o funcionamento da ferramenta enquanto a usava.	O estudante executou todos os comandos e personalizou o teodolito virtual ou criou mais de uma versão.
Correspondência	Simple	O estudante identificou que a movimentação do canudo indicaria um ângulo.	O estudante conhecia a ferramenta e sua importância histórica, mas não sabia dos seus usos na atualidade.	O estudante percebeu que o teodolito poderia ser utilizado em qualquer lugar do espaço quando construiu uma esfera como base.
	Complexo	O estudante notou que a movimentação do canudo representava a movimentação de segmentos de retas no espaço.	O estudante conhecia a ferramenta e sua importância histórica, bem como sabia de aplicações recentes nas engenharias.	Além de notar que o teodolito poderia ser usado em qualquer lugar do espaço, o estudante percebeu que a movimentação das partes da ferramenta poderia alterar os ângulos observados e obter novos dados.
Universalização	Simple	O estudante fez esquemas simples da estrutura do teodolito-modelo para usar como base da sua montagem.	O estudante reconheceu o ângulo observado, mas não fez esquemas que elucidassem a utilização do teodolito ou relacionassem a mais ideias matemáticas.	O estudante identificou, nos comandos para construção do teodolito virtual, a esfera e às semirretas, além dos ângulos, mas não formalizou suas descobertas.
	Complexo	Não identificamos uma análise mais complexa nessa tarefa, pois os estudantes não registraram esquemas ou estruturas que indicassem uma matematização da montagem do teodolito. Supomos que os estudantes poderiam, ao menos, esboçar a estrutura do teodolito de modo a anotar que o canudo deveria estar centralizado, com comprimento maior ou igual ao diâmetro da ferramenta e que a base do teodolito deveria ser um círculo.	O estudante criou representações sobre o uso do teodolito e associou às propriedades trigonométricas do triângulo retângulo.	Não encontramos evidências que indicassem que um estudante atingiu um nível mais complexo nessa tarefa. Supomos que o estudante poderia relacionar, de modo genérico, a medida do ângulo azimutal com as distâncias horizontal e vertical entre o observador e o objeto observado, por meio das razões trigonométricas, ao construir uma versão idealizada de teodolito.

Outros articulados				
Categoria	Níveis de profundidade	Encontro 7: Montagem	Encontro 8: Uso e aplicações	Encontro 9: Construção virtual
Reprodução	Simple	O estudante reproduziu uma ferramenta anterior.	O estudante se apoiou nos usos das ferramentas anteriores.	O estudante apenas copiou a versão virtual de uma ferramenta anterior ou enviou arquivo de uma versão feita por terceiros.
	Complexo	O estudante construiu uma ferramenta com novas funções a partir de uma ferramenta anterior ou pesquisou uma nova ferramenta na internet e a reproduziu.	O estudante pesquisou sobre o uso da ferramenta e tentou reproduzir, fazendo ajustes quando necessários.	O estudante tentou criar a versão virtual de sua ferramenta com base nos comandos de ferramentas anteriores ou em vídeos e instruções encontradas na internet.
Correspondência	Simple	O estudante indicou as mesmas propriedades matemáticas investigadas nas construções das ferramentas anteriores.	O estudante apresentou os mesmos resultados anteriores.	O estudante reproduziu os comandos das ferramentas e apresentou os mesmos resultados anteriores.
	Complexo	O estudante identificou conceitos matemáticos que ainda não haviam sido investigados nos encontros anteriores, como construção de elipses e a transformação geométrica de um segmento de reta em uma curva.	O estudante se preocupou em investigar o contexto histórico e a necessidade da criação da ferramenta escolhida, bem como pesquisou os usos na atualidade.	O estudante desenvolveu uma sequência de comandos no GeoGebra com base nas experiências anteriores e em versões de terceiros, realizando conexões entre diferentes ideias matemáticas e o funcionamento do aparelho virtual.
Universalização	Simple	O estudante esboçou esquemas simples da estrutura da ferramenta.	O estudante apresentou os mesmos resultados anteriores.	O estudante apresentou os mesmos resultados anteriores.
	Complexo	O estudante elaborou esquemas detalhados com medidas e anotações de como realizar ajustes, de forma generalizada, na montagem da ferramenta escolhida sem comprometer sua estrutura.	Não houve registros que nos permitisse identificar os estudantes que atingiram esse nível em sua forma mais complexa. Supomos que os estudantes que construíram outros aparelhos articulados pudessem justificar o funcionamento da ferramenta por meio de propriedades matemáticas.	Não houve registros que nos permitisse identificar os estudantes que atingiram esse nível em sua forma mais complexa. Supomos que o estudante poderia formalizar suas (re)descobertas na versão física ao analisar a respectiva versão virtual e, então, identificar fórmulas que pudessem justificar a construção e o funcionamento da ferramenta matematicamente.
Fonte: Elaborado pelos pesquisadores.				

Devido a participação efetiva dos estudantes no EDF, identificamos os princípios norteadores da RME expressados nas diversas manifestações dos participantes. Os estudantes não apenas se engajaram ativamente nas atividades propostas, mas também foram capazes de conectar conceitos matemáticos a situações do mundo real, como defendem Lopez, Buriasco e Ferreira (2014).

[...] é desejável que os estudantes tenham um papel ativo na construção de seu conhecimento matemático e que, dessa maneira, aprendam fazer matemática como uma realização, ou seja, matemática como um processo, uma ação, uma maneira de proceder, não como uma ciência, pronta e acabada. matemática como o “realizar” e não como o resultado. Acredita-se que é por meio da matematização de problemas que a aprendizagem matemática acontece (Lopez; Buriasco; Ferreira, 2014, p. 257).

Essa integração prática, potencialmente, facilita a compreensão dos conceitos, mas também promove um ambiente de aprendizado mais significativo e motivador. A interação contínua com problemas contextualizados e a orientação da pesquisa evidenciam como uma abordagem alinhada com os princípios da RME e desenvolvida a partir da perspectiva de um EDF pode fomentar uma aprendizagem matemática mais profunda e duradoura, refletindo a eficácia de métodos pedagógicos que conectam teoria e prática. A seguir, descrevemos sobre as impressões dos participantes quanto à pesquisa e possíveis melhorias.

8.6 Avaliando a pesquisa

Os estudantes tiveram a oportunidade de avaliar a pesquisa como um todo, sugerir melhorias e apontar aspectos que poderiam ser mantidos, caso houvesse uma reaplicação. Os depoimentos mais detalhados foram selecionados, categorizados e apresentados no Quadro 18. As 7 (sete) categorias surgiram a partir das respostas fornecidas pelos participantes, cujos critérios estão especificados a seguir. A relação de todos os depoimentos e as respectivas categorias está no APÊNDICE F.

Quadro 18 - Percepção dos participantes em relação à realização da pesquisa.			
Categoria	Descrição	Depoimentos	Frequência de respostas similares
Contentamento	Respostas que expressam apreciação geral ou satisfação com o projeto, sem detalhes adicionais sobre aspectos específicos.	"Eu gostei de tudo 🍪", "Eu achei ótimo!"	14
Dinâmico	Respostas que destacam a dinâmica, a diversão ou a quebra da rotina proporcionada pelo projeto.	"Foi uma matéria dinâmica e divertida", "Ficou dinâmico e divertido, pois saímos um pouco da rotina."	10
Criativo	Respostas que enfatizam a criatividade do projeto e a originalidade das abordagens utilizadas.	"Foi um projeto muito proveitoso, principalmente em relação a conhecer novos instrumentos.", "Eu achei muito interessante, porque ajudou muito na nota de muitas pessoas."	6

Material	Respostas que mencionam a utilização de materiais específicos ou sugerem o uso de outros materiais no projeto.	"Usar outros materiais", "Acho que só poderia ter objetos mais básicos para reproduzirmos."	3
Aprimoramento	Respostas que fazem sugestões de melhorias ou apontam áreas que poderiam ser desenvolvidas de forma mais aprofundada.	"Achei que poderíamos ter trabalhado mais a função dos instrumentos em aula", "poderia melhorar em relação a quantidade de vezes."	4
Interatividade	Respostas que destacam a interação entre os participantes ou a participação ativa no projeto.	"Achei muito bom para a dinâmica e conhecimento da sala", "Achei esse projeto criativo e bem interativo entre os grupos"	6
Específico	Respostas que mencionam aspectos específicos do projeto ou ferramentas utilizadas, como o GeoGebra.	"Gostei do projeto menos da parte do geogebra porque não sei mexer"	3
Fonte: Elaborado pelos pesquisadores.			

Observamos que os participantes se engajaram no experimento e relataram que a pesquisa foi bem recebida, sugerindo que poderia ser reaplicada com alguns ajustes, como conceder mais tempo para a realização das tarefas, fornecer orientações mais detalhadas sobre a construção das ferramentas virtuais e utilizar materiais mais apropriados. No entanto, percebemos que, embora o experimento tenha possibilitado que os estudantes atingissem níveis de reprodução e conexão dos conceitos matemáticos envolvidos, a matematização poderia ter sido mais evidenciada se houvesse uma formalização das ideias matemáticas e uma explicação mais aprofundada sobre o funcionamento de cada ferramenta. A seguir, apresentamos nossas considerações finais acerca desse Experimento Didático Formativo realizado sob perspectiva da Educação Matemática Realística.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A implementação de um EDF sob a perspectiva da RME se revelou uma alternativa promissora para o ensino de matemática. A integração de conceitos matemáticos com problemas do mundo real não apenas facilita a compreensão e a aplicação dos conteúdos, mas também estimula a curiosidade e o pensamento crítico. Dessa forma, o EDF oferece uma oportunidade valiosa para reimaginar o ensino da matemática, tornando-o mais relevante e acessível, ao mesmo tempo que reforça a conexão entre teoria e prática. Essa abordagem não

só melhora a aprendizagem dos estudantes, mas também contribui para o desenvolvimento de habilidades matemáticas duradouras e aplicáveis.

Nossa pergunta norteadora era “como uma proposta de ensino elaborada segundo os princípios da Educação Matemática Realística e desenvolvida com base em um Experimento Didático Formativo pode desencadear o processo de matematização de conceitos matemáticos, especialmente os geométricos?”. Com isso, estabelecemos o objetivo de analisar como um EDF, aliado a abordagem de ensino da RME, poderia desencadear o processo de matematização de conceitos e objetos matemáticos, em especial, geométricos, ao aplicar o conjunto de tarefas envolvendo a reinvenção de instrumentos como pantógrafo, teodolito, elipsógrafos e outros aparelhos articulados e verificamos que, ao recorrer ao método do EDF, tivemos a liberdade de adaptar as tarefas e criar uma breve cultura de investigação, adaptação e validação entre os estudantes. A cada encontro, os participantes recorreram aos conhecimentos adquiridos anteriormente e conseguiram desenvolver suas tarefas com eficiência e rapidez, quando comparados às tarefas realizadas anteriormente. As ideias e soluções eram compartilhadas entre os grupos e os estudantes mais ativos estavam preocupados com suas entregas, mostraram interesse pela pesquisa e alegaram, por diversas vezes, que se sentiam mais satisfeitos em realizar tarefas como essas, pois conseguiam atribuir significado para tudo que estavam fazendo, mesmo que às ferramentas não fizessem parte do seu cotidiano mais próximo, mas permitiram realizar conexões entre ideias matemáticas que nenhum exercício de suas apostilas possibilitou fazer. Adotar a abordagem da RME possibilitou promover um ensino de matemática significativo, pois a matemática não deve ser ensinada de forma isolada e abstrata, mas contextualizada em situações reais e pertinentes à vida dos estudantes. Essas observações nos ajudaram a responder às demais perguntas.

Em relação aos objetivos específicos, ao que tange sobre evidenciar aproximações teóricas entre o Experimento Didático Formativo e a Educação Matemática Realística por meio do contexto histórico e precedentes teóricos dessas abordagens, apresentamos dados históricos que aliam as preocupações dos grupos liderados por Vygotsky e Freudenthal, cada qual em suas respectivas realidades e tempos, em que os países envolvidos passaram por mudanças políticas e sociais que mudaram os rumos da Educação, dentre outras áreas. Tanto os seguidores de Vygotsky quanto os de Freudenthal se propuseram a reformular os currículos escolares, em especial, referentes ao ensino da matemática, de modo que os contextos sociais e os conhecimentos prévios dos estudantes fossem valorizados. Os pesquisadores russos desenvolveram teorias e métodos que enfatizam a interação social e o contexto cultural na

formação do comportamento humano, incorporando-os ao processo de ensino e aprendizagem de matemática. Nos países baixos, os neerlandeses estabeleceram uma abordagem que compreende a matemática como uma atividade humana e defendem que o ensino de matemática deve ser centrado na resolução de problemas e na investigação ativa dos conceitos. Ambos os grupos destacam a importância de compreender a matemática como uma necessidade humana e uma forma de entender a realidade, portanto, o processo de ensino não pode desconsiderar esse aspecto fundamental.

Sobre identificar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes durante a construção das ferramentas em suas versões físicas e as versões virtuais, verificamos que os estudantes conseguiram concluir a maioria das tarefas e relacionaram, a todo momento, ideias matemáticas que já haviam se apropriado ou que ainda estavam desenvolvendo. Por meio de tentativas e devido aos testes nas versões virtuais, os estudantes mostraram interesse nas tarefas e indicaram melhorias a cada encontro, sugestões que foram incorporadas à medida que a pesquisa se desenvolvia. Observamos que os participantes que se envolveram na pesquisa desde o início mostraram melhorias ao longo dos encontros, especialmente nas etapas investigativa, experimental e explicativa, pois conseguiram realizá-las com rapidez e propriedade a partir do segundo trimestre. Ao realizar a avaliação contínua e não punitiva, os participantes se mostraram confortáveis e se permitiram tentar diversas vezes até concluir a tarefa com êxito. A cada tentativa, o estudante notava propriedades, buscava ajuda com os colegas e ficava atento às orientações da pesquisadora para focar na sua aprendizagem: e é somente com isso que um estudante deveria se preocupar.

Quando buscamos por avaliar a manifestação dos seis princípios da Educação Matemática Realística durante o desenvolvimento do conjunto de tarefas e, notamos que os princípios norteadores foram manifestados ao longo da pesquisa e destacamos alguns exemplos: o princípio de atividade esteve presente no momento em que os estudantes buscaram justificar matematicamente o funcionamento do pantógrafo e as transformações que ele produzia nas figuras previamente desenhadas; o princípio de realidade esteve presente na tentativa de calcular a altura da quadra para resolver um problema real; o princípio de orientação foi fundamental para o desenvolvimento das tarefas e ocorreu tanto entre pesquisadora e estudantes quanto entre os próprios estudantes; o que nos leva ao princípio da interatividade, em que um grupo auxiliou e orientou o outro na reconstrução do pantógrafo; houve evidências do princípio de níveis quando um grupo levantou hipóteses sobre a relação entre o posicionamento das hastes do pantógrafo e as propriedades de quadriláteros, testou

essas hipóteses, porém, não se registrou a passagem de níveis que poderia ter sido efetivada caso o grupo desenvolvesse uma generalização com base nas hipóteses e testes; por fim e não menos importante, o princípio de entrelaçamento pode ser exemplificado pelas resoluções de alguns grupos ao calcularem a altura da quadra utilizando representações de figuras geométricas, relações trigonométricas e transformação de medidas, entre outros conceitos das diferentes áreas da Matemática.

Em relação a elaborar e disponibilizar material didático que reúna as tarefas atualizadas, para garantir que seja acessível e possa ser utilizado por outros docentes, reunimos os materiais já ajustados e adicionamos a um site com acesso público, além de optar por uma plataforma gratuita para construção das versões virtuais das ferramentas, na esperança de que outros docentes e pesquisadores, que valorizam um ensino de matemática a partir da realidade ou que consideram a matemática como uma atividade essencialmente humana, possam aplicá-los em suas salas de aula e ajustá-los conforme às necessidades locais, pois acreditamos que a aprendizagem se efetiva quando é considerada a constituição histórica, cultural e social do conhecimento no processo de ensino.

O pantógrafo e o teodolito foram as ferramentas mais conhecidas por alguns dos estudantes, pois avistaram em uma feira de artesanato da cidade vizinha ou observaram em momentos de uso por topógrafos e engenheiros que, frequentemente, realizam medições de terrenos na região. Isso indicou que as tarefas propostas e as ferramentas apresentadas partiram de contextos muito próximos à realidade dos estudantes ao ponto que, nos encontros finais, a maioria optou por desenvolver versões de ferramentas similares a essas, pois estavam familiarizados. A pesquisa oportunizou aos participantes que encontrassem uma justificativa prática para os conceitos matemáticos aprendidos (ou apenas vistos) na escola, permitindo os atribuir significados e (re)descobri-los. De fato, constatamos que, nas tarefas de construção virtual das ferramentas em que seriam utilizadas essas versões para a etapa validativa das teorias levantadas anteriormente, as expectativas não foram superadas, pois muitos dos estudantes apresentaram dificuldades em manusear o *software*. Os ajustes realizados não foram suficientes para atender às demandas e, por esse motivo, houve escassez nos registros de formalização das ideias matemáticas ao final dos três momentos de aplicação.

Entretanto, ainda que o uso do GeoGebra tenha exigido um pouco de conhecimento computacional dos estudantes envolvidos nesta pesquisa, o *software* se mostrou como uma ferramenta valiosa para o ensino de matemática, pois permitiu tornar os conceitos abstratos mais acessíveis e visíveis. Por ser uma ferramenta gratuita e oferecer um ambiente dinâmico,

o GeoGebra pode estimular o pensamento crítico e a investigação, tornando o aprendizado mais engajante, bem como permite visualizar de forma interativa diferentes gráficos, funções e outras construções geométricas, como as versões virtuais das ferramentas estudadas, facilitando a compreensão de relações matemáticas complexas de modo intuitivo. Embora o domínio da tecnologia seja cada vez mais exigido, os benefícios pedagógicos do GeoGebra, como a possibilidade de representar visualmente problemas matemáticos, justificam sua utilização no ensino da disciplina, especialmente ao promover o desenvolvimento do raciocínio lógico e a compreensão de conceitos que podem ser difíceis para um estudante apreender por meio de abordagens tradicionais.

O fato de elaborarmos as tarefas objetivando os princípios norteadores da RME nos permitiu desenvolver uma sequência coerente entre as tarefas e que atendessem às etapas propostas pelo EDF. Conforme os encontros aconteciam, percebemos com mais clareza o papel do educador no processo da reinvenção guiada e como é possível realizá-lo em uma sala de aula com pluralidades, intenções e motivações distintas entre os discentes. Apesar das dificuldades enfrentadas pelos estudantes, especialmente no momento em que precisaram criar as versões virtuais das ferramentas, o conjunto de tarefas mostrou potencialidades que podem desencadear um processo de matematização de diferentes ideias matemáticas ao longo de um período letivo. Com o EDF, os educadores têm a possibilidade de criar ambientes de ensino que estimulam ativamente o pensamento crítico, a resolução de problemas e a apropriação do conhecimento pelos estudantes. Além disso, enfatizamos a importância de conectar a matemática ao mundo real, tornando-a relevante e significativa para os aprendizes e isso pode ocorrer por meio da RME. Dessa forma, essa abordagem não apenas pode melhorar o desempenho acadêmico dos estudantes na disciplina, como os prepara de modo mais abrangente para enfrentar os desafios da realidade, desenvolvendo habilidades essenciais para o sucesso acadêmico e profissional.

A RME busca proporcionar aos estudantes uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, ao mesmo tempo em que os incentiva a aplicar esses conhecimentos em diversas situações. Com essa abordagem, é possível que os educadores consigam engajar os estudantes de maneira efetiva, pois tornam a matemática relevante e acessível, demonstrando sua importância para o desenvolvimento da humanidade. Além disso, o pensamento crítico é estimulado, bem como permite a realização da resolução de problemas e a tomada de decisões, habilidades essenciais para a vida cotidiana e para o desenvolvimento profissional dos estudantes. Outro aspecto relevante é que a RME promove uma

aprendizagem inclusiva, uma vez que valoriza as diversas formas de conhecimento matemático presentes nas diferentes culturas e contextos sociais. Isso ajuda a combater estereótipos e preconceitos, tornando a matemática acessível e democrática para todos.

Como pesquisadores e participantes desta pesquisa, percebemos que o processo de formação envolvia tanto os estudantes quanto a nós. A cada encontro, buscamos melhorias, reforçando atitudes que permitiram aos estudantes se engajarem e se sentirem protagonistas de seu aprendizado. Muitas ações dos estudantes não eram previstas, e a experiência em sala de aula ajudou na tomada de decisões para manter o foco e alcançar os objetivos pedagógicos e de pesquisa. A aceitação da gestão escolar foi essencial, criando um microciclo favorável para aplicar o método de EDF. No entanto, notamos que nossas ações estavam isoladas, quase exclusivas à Matemática, com exceção de alguns professores de História, Artes, Geografia e Redação que adotaram metodologias não tradicionais. Aos poucos, observamos mudanças na postura dos estudantes, que se sentiram mais confiantes e livres para cometer erros, sabendo que poderiam corrigi-los com orientação. Pensando nisso, sugerimos que, em pesquisas futuras a partir desta, sejam investigados os aspectos subjetivos associados a um EDF ou como uma avaliação, conforme apresentada nesta tese, impacta o processo de aprendizagem de conceitos matemáticos e a autoestima dos estudantes. Sobre o processo de matematização desses conceitos, também é possível realizar estudos para definir as etapas desse processo ao longo de um EDF no ensino de matemática. Seguindo as questões levantadas por esta pesquisa, propomos também investigar os diferentes tipos de registros e como associá-los à matematização do conhecimento, além de examinar como um experimento como este pode promover o letramento matemático. Por fim, seria interessante analisar como o materialismo dialético se manifesta nas produções dos estudantes que participam ativamente de um EDF sob a abordagem da RME ou outra.

Esperamos que esta pesquisa promova reflexões acerca do ensino de Matemática e que mais docentes considerem se distanciar de abordagens puramente tecnicistas e mecanicistas, adotando métodos que considerem a cultura, a história e a realidade dos estudantes. Mostramos que, ao integrar os contextos socioculturais dos estudantes no processo de aprendizagem, é possível promover uma educação mais significativa, que não apenas transmite conhecimentos formais, mas também desperta o interesse e a compreensão profunda da disciplina. Dessa forma, o processo de ensino-aprendizagem se torna mais inclusivo, estimulante e eficaz, permitindo que os estudantes se tornem protagonistas de seu próprio aprendizado.

REFERÊNCIAS

- ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira; ALMEIDA, Marcio Vieira de. Contributos do GeoGebra para exploração do pensamento computacional no contexto da geometria. *Revista de matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, Belém/PA, n. 48, e2024003, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024003.id590>. Acesso 11 set. 2024.
- ALVES, Alvaro Marcel. O método materialista histórico dialético: alguns apontamentos sobre a subjetividade. *Revista de Psicologia da UNESP*, v. 9, n. 1, p. 1-13, 2010.
- ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes; NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. **Aprendendo matemática com o GeoGebra**. Editora Exato, São Paulo, 2010.
- AZEVEDO, Greiton Toledo de; MALTEMPI, Marcus Vinicius. Processo de aprendizagem de matemática à luz das metodologias ativas e do pensamento computacional. *Ciência & Educação*, Bauru, v. 26, p. e20061, 2020. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/dRXC3YvVLztYHK6bZZm6d6m/?format=pdf&lang=pt>. Acesso 11 set. 2024.
- BASS, Hyman. Mathematics, mathematicians, and mathematics education. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 42, n. 4, p. 417-430, 2005.
- BENNETT, Jim. **The divided circle**: a history of instruments for astronomy, navigation and surveying. Oxford: Phaidon, 2000.
- BENNETT, Jim. **Museums and the history of science**. Isis, Chicago, v. 96, p. 602-608, 2005.
- BIGGS, Edith. **Forward and back**: reflections after a decade of discovery mathematics. Education, 3, 1971, p. 84.
- BITTENCOURT, Patrícia Mello. **Utilização do GeoGebra na construção de instrumentos: pantógrafo**. (Dissertação) Programa de Mestrado Profissional em matemática - Instituto de matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=893&id2=1217 Acesso 15 set. 2024.
- BORBA, Marcelo; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática: sala de aula e internet em movimento**. Autêntica, 2016.
- BRANDÃO, Ida. **Pantógrafo**. Ficha de Atividade. 2015. Disponível em: https://freewareneesite.files.wordpress.com/2016/03/pantografo_ficha_atividade.pdf Acesso 11 de mai. 2024.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 1998.
- BURIASCO, Regina Luzia Corio de; SILVA, Gabriel dos Santos e. Aspectos da Educação Matemática Realística. *Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática*, [S.L.], v. 1, n. 1, p. 1-15, 21 dez. 2017. Revista Brasileira de Educação em Ciências e

Educação Matemática - ReBECCEM. <http://dx.doi.org/10.33238/rebecem.2017.v.1.n.1.18559>. Disponível em: <http://e-revista.unioeste.br/index.php/rebecem/article/view/18559> . Acesso em: 08 mar. 2024.

CENCI, Adriane; DAMIANI, Magda Floriana. Desenvolvimento da Teoria Histórico-Cultural da Atividade em três gerações: Vygotsky, Leontiev e Engeström. *Roteiro*, v. 43, n. 3, p. 919-948, 2018.

CHAIKLIN, Seth. A zona de desenvolvimento próximo na análise de Vigotski sobre aprendizagem e ensino. *Psicologia em Estudo*, v. 16, p. 659-675, 2011.

CORDEIRO, José Carlos. **Utilização do GeoGebra na construção de instrumentos: elipsógrafo.** (Dissertação). Programa de Mestrado Profissional em matemática - Instituto de matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: https://sca.profmam-sbm.org.br/profmam_tcc.php?id1=892&id2=749 Acesso 15 set. 2024.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **História da matemática e educação.** In: Cadernos CEDES 40. História e Educação Matemática. 1ª ed. Campinas, SP: Papirus, 1996, p.7-17.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **A interface entre história e matemática: Uma Visão Histórico-Pedagógica.** In: FOSSA, J. A. (Org) Facetas do Diamante. Rio Claro – SP: Ed. SBHMat, 2000, p. 241-271.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática.** 23. ed. Campinas: Papirus, 2013.

DAVYDOV, Vasili Vasilievich. Problems of developmental teaching: the experience of theoretical and experimental psychological research. *Soviet Education*, New York, v. 30, n. 9, p. 3-83, 1988.

DAVYDOV, Vasili Vasilievich. O que é a atividade de estudo? Traduzido de Natchalnaia Shkola. *Revista Escola Inicial*, n. 7, 1999.

DE LANGE, Jan. **Assessment: no change without problems.** In: First national conference on assessment in the mathematical sciences, 1º, 1991, Geelong. Reshaping Assessment Practices: Assessment in the Mathematical Sciences under Challenge.. Geelong: Acer, 1995. p. 1-28. Disponível em: http://education.iugaza.edu.ps/Portals/18/albums/pdf/delange_assessment.pdf. Acesso em 11 mai 2024.

DE LANGE, Jan. **A framework for classroom assessment in mathematics.** National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Assessment Study Group. 1999.

DÍAZ, Verónica.; POBLETE, Álvaro. **Competencias en matemáticas y tipos de problemas.** In: CIBEM – Proceedings V Congreso Iberoamericano de Educación matemática, n. 5., 2005, Portugal. Anais. Portugal: Publicaciones con Comité Editorial, 2005.

ENGESTRÖM, Yrjö. Expansive learning at work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of education and work*, v. 14, n. 1, p. 133-156, 2001.

ENGESTRÖM, Yrjö.; SANNINO, A. Studies of expansive learning: foundations, findings and future challenges. *Educational Research Review*, 2010.

ENGESTRÖM, Yrjö. From design experiments to formative interventions. *Sage Journals, London*, v. 21, n. 5, p. 598-628, 2011.

ENGESTRÖM, Yrjö. **A teoria da atividade histórico-cultural e suas contribuições à educação, saúde e comunicação**. Entrevista concedida a M. Lemos, M. A. Pereira-Queiroz e I. M. Almeida. *Interface: comunicação, saúde e educação*, Botucatu, v. 17, n. 47, 2013.

FALKEMBACH, Gilse. Morgental. **O lúdico e os jogos educacionais**. CINTED - Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, UFRGS, 2006. Disponível em: http://matpraticas.pbworks.com/w/file/fetch/85177681/Leitura_1.pdf. Acesso 31 ago. 2024.

FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Enunciados de tarefas de matemática baseados na perspectiva da Educação Matemática Realística. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 29, n. 52, p. 452-472, 2015.

FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Educação Matemática Realística: uma abordagem para os processos de ensino e de aprendizagem. *Educação Matemática e Pesquisa*, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 237-252, nov. 2016. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/emp/article/view/21078/pdf>. Acesso 11 mai. 2024.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. *Revista Zetetiké*, ano 3, 1995. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/download/8646877/15035/24359> Acesso 11 mai. 2024.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação em matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FONSECA, João José Saraiva. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

FORSTER, Cristiano. **Um olhar realístico para tarefas de função afim em livros didáticos**. (Tese de Doutorado). Universidade Estadual de Londrina, 2020.

FREITAS, Raquel; LIBÂNEO, José Carlos. O experimento didático formativo na perspectiva da teoria do ensino desenvolvimental. *Educação e Pesquisa*, v. 48, 2022.

FREUDENTHAL, Hans. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

FREUDENTHAL, Hans. Major problems in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, v. 12, s.n., p. 133-150, 1981.

FREUDENTHAL, Hans. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Mathematics Education Library, [S.L.], p. 1-596, jun.. Kluwer Academic Publishers, 1983.

FREUDENTHAL, Hans. **Revisiting mathematics education: china lectures**. Springer Science & Business Media, 1991.

GOMES, Thiago de Azevedo; RODRIGUES, Chang Kuo. A evolução das tendências da educação matemática e o enfoque da história da matemática no ensino. *Revista de Educação, Ciências e matemática*, v. 4, n. 3, 2014.

GRANATO, Marcus; MIRANDA, Luiz Roberto Martins de. **A restauração na trajetória de um teodolito do acervo do MAST**. Anais do Museu Paulista: História e Cultura Material, v. 19, p. 279-312, 2011.

GRAVEMEIJER, Koeno; DOORMAN, Michiel. Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, n. 1, v. 39, p. 111-129, 1999.

GRAVEMEIJER, Koeno; TERWEL, Jan. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal Curriculum Studies*. Londres, p. 777-796. nov. 2000.

GRAVEMEIJER, Koeno. **Learning trajectories and local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education**. Artigo apresentado em Simpósio "The use of learning trajectories in research-based mathematics curriculum development assessment and professional development", at the AERA, San Diego, USA, San Diego, 01-04-2004. 2004.

HEDEGAARD, Mariane; CHAIKLIN, Seth. **Radical-local teaching and learning: a cultural- historical approach**. Aarhus: Aarhus University Press, 2005.

HEDEGAARD, Mariane. **A zona de desenvolvimento proximal como base para o ensino**. In: DANIELS, Harris (org.). Uma introdução a Vygotsky. São Paulo: Loyola, 2002. p. 199-227.

HEDEGAARD, Mariane. Children's perspectives and institutional practices as keys in a wholeness approach to children's social situations of development. *Learning, Culture and Social Interaction*, London, v. 26, p. 1-9, 2020.

KISHIMOTO, Tizuko. **Jogos infantis: o jogo, a criança e a educação**. Petrópolis, RJ: Vozes, 1993.2003.

LEONTIEV, Alexei. **Actividad, conciencia, personalidad**. Havana: Editorial Pueblo y Educación, 1983.

LIBÂNIO, José Carlos; FREITAS, Raquel. **Vasily Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico**. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES; R. V. (Orgs.). Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013. p. 315-350.

LIBÂNIO, José Carlos. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a teoria histórico-cultural da atividade e a contribuição de Vasili Davydov. *Revista Brasileira de Educação*, p. 5-24, 2004.

LIMA, Juliana; PUENTES, Roberto Valdés. **Diferentes interpretações em relação ao conceito e termo Obutchénie**. In: TORUCHA, José Zilberstein; HERVIS, Elmys Escribano; MACÍAS, Armando Sá nchez; PUGLIESE, Virginia Azuara. (Org.). Nuevas tendencias en la investigación universitaria: ciencias administrativas, educativas y jurídicas. 1ed.San Luiss Potosi: Salinas de Hidalgo, 2022.

LONGAREZI, Andréa Maturano. **Teoria do experimento formativo no sistema Elkonin-Davydov-Repkin**. In: PUENTES, Roberto Valdés; LONGAREZI, Andréa Maturano (org.). Ensino desenvolvimental: sistema Elkonin-Davydov-Repkin. Campinas: Mercado das Letras; Uberlândia: UFU, 2019. p. 161-212.

LONGAREZI, Andréa Maturano. Gênese e constituição da *Obutchénie* desenvolvimental: expressão da produção singular-particular-universal enquanto campo de tensão contraditória. *Educação*, v. 45, 2020, p. 1-3.

LONGAREZI, Andréa Maturano. **Teoria da Atividade de Estudo e Teoria do Experimento Formativo**. In: PUENTES, Roberto Valdés; LONGAREZI, Andréa Maturano; REPKINA, Natalya Vladimirovna; REPKIN, Vladimir Vladimirovich (org.). Aprendizagem desenvolvimental e atividade de estudo: abordagem na perspectiva do sistema Elkonin-Davidov-Repkin. Campinas: Mercado das Letras; Uberlândia: UFU, 2023, p. 187-212.

LOPEZ, Juliana Maira Soares. FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves. BURIASCO, Regina Luzia Corio de. **Educação Matemática Realística**: considerações para a avaliação da aprendizagem. Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal De Mato Grosso do Sul (UFMS). Mato Grosso do Sul, v. 7, nº 14, 2014.

MACHADO, Cláudia Rejane. **Teorias de pesquisa em educação matemática**: a influência dos franceses. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Rio Grande do Sul, 2007.

MARTINEZ, David. **La elipse a través de la historia**: concepciones epistemológicas de la elipse en tres momentos históricos diferentes. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 133-140, 2015.

MARTINS, João Batista. A perspectiva metodológica em Vygotsky: o materialismo dialético. *Semina: Cio Soc./Hum.*, Londrina, v. 15, n. 3, p. 287-295, set. 1994.

MENDES, Iran. **O uso da história no ensino da matemática**. UEPA, Belém do Pará, 2001.

MIGUEL, José Carlos; FREITAS, Sirley Leite. Educação desenvolvimental: a apropriação do conhecimento matemático em relação à atividade de estudo. *Revista de Educação Pública*, v. 31, 2022.

MONDINI, Fabiane. **O logicismo, o formalismo e o intuicionismo e seus diferentes modos de pensar a matemática**. Universidade Estadual de São Paulo – Campus de Rio Claro, São Paulo, 2008.

MONTEIRO, Benedito da Silva; MONTEIRO, Eliane Silva. **A importância da metodologia do lúdico na EJA no processo de ensino e aprendizagem**. (Monografia) Universidade Federal Rural da Amazônia. 2015. Disponível em: <https://bdta.ufra.edu.br/jspui/handle/123456789/594>. Acesso 31 ago. 2024.

MORETTI, Vanessa Dias; MOURA, Manoel Ouriosvaldo de. Professores de matemática em atividade de ensino: contribuições da perspectiva histórico-cultural para a formação docente. *Ciência e Educação*. Bauru, v. 17 nº 2, 2011.

MOZO, Francisco Javier. **Mecanismos articulados para trazer curvas como recurso educativo digital para la didáctica de las matemáticas en secundaria y bachillerato**. (Tese de Doutorado) Universidad Autónoma de Madrid, 2017.

MUSEU VIRTUAL EPUSP. **Teodolito**. Museu Virtual do Laboratório de Topografia e Geodésia - LTG. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Disponível em: <https://sites.usp.br/ptr-ltg/museu-virtual-teodolito-2/> Acesso em 21 mai. 2024.

NACARATO, Adair Mendes; SANTOS, Cleane Aparecida dos. **Aprendizagem em geometria na educação básica: a fotografia e a escrita na sala de aula**. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014.

NEVES, José Divino; RESENDE, Marilene Ribeiro. **O experimento didático como metodologia de pesquisa: um estudo na perspectiva do “estado do conhecimento”**. XII Encontro de Pesquisa em Educação/Centro-Oeste, Goiânia. Anais do XII Encontro de Pesquisa em Educação/Centro-Oeste, 2014.

OECD. **Education at a Glance**. OECD indicators. OECD Publishing. 2013.

OLIVEIRA, Daniela Cristina; SILVA, Douglas Aires da. **Clube de matemática: atividades lúdicas para o ensino de álgebra**. Encontro Nacional de Educação Matemática – XI ENEM. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba – Paraná, 2013.

PASSOS, Adriana Quimentão. **Van Hiele, Educação Matemática Realística e GEPEMA: algumas aproximações**. 1. ed. Londrina, Paraná: Universidade Estadual de Londrina, 2015. p. 149. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/dissertacoes_teses/tese_adriana_quimentao_passos.pdf. Acesso 08 mar. 2024.

PHYSICS MUSEUM TUQ. **Theodolite (1890)**. The University of Queensland. Disponível em: <https://physicsmuseum.uq.edu.au/theodolite> Acesso 21 mai. 2024.

PONTE, José Pedro da; CANAVARRO, Ana Paula. **matemática e novas tecnologias: a calculadora no ensino da matemática**. Realização de Elisa Antunes; Tecnóloga Helena Leão. Lisboa: Universidade Aberta, 1997.

PUENTES, Roberto Valdés. Didática desenvolvimental da atividade: o sistema Elkonin-Davydov (1958-2015). Obutchénie. *Revista de Didática e Psicologia Pedagógica*, p. 20-58, 2017.

PUENTES, Roberto Valdés. **Uma nova abordagem da Teoria da Aprendizagem Desenvolvimental**. In: PUENTES, Roberto Valdés; CARDOSO, Cecília Garcia Coelho; AMORIN, Paula (Orgs.). Teoria da atividade de estudo: contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davydov e V. V. Repkin. 1. ed. Curitiba: CRV, 2019.

PUENTES, Roberto Valdés; LONGAREZI, Andréa Maturano. **Enfoque histórico-cultural e aprendizagem desenvolvimental: contribuições na perspectiva do GEPEDI**. Livro 1/(Série> Ensino desenvolvimental), Vol. 14. Goiânia: Phillos Academy, 2021.

REIS, Sara.; MELO, Gilberto. **Transformação geométrica homotetia: atividades investigativas**. Universidade Federal do Acre, Rio Branco. 2019. Disponível

<http://www2.ufac.br/mpecim/menu/produtos-educacionais/turma-2017/produto-educacional-sara-jemima-carneiro-dos-reis.pdf> Acesso 11 mai 2024.

ROYAL MUSEUMS GREENWICH. **Theodolite**. National Maritime Museum, Greenwich, London, Caird Collection. Disponível em:
<https://www.rmg.co.uk/collections/objects/rmgc-object-43663> Acesso 21 mai. 2024.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. *Ciência e Educação*, Bauru, v.19, n°1, 2013.

SANCHEZ, Jesús Nicasio Garcia. **Dificuldades de aprendizagem e intervenção psicopedagógica**. Porto Alegre: Artmed, 2004.

SANTAELLA, Lucia. O papel do lúdico na aprendizagem. *Revista Teias*, v. 13, n. 30, p. 11 2012. Disponível em:
<https://www.e-publicacoes.uerj.br/revistateias/article/view/24277/17256>. Acesso em 31 ago. 2024.

SANTOS, Simone Cardoso dos. **A importância do lúdico no processo de ensino aprendizagem**. (Monografia). Universidade Federal de Santa Maria. 2010. Disponível em:
https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/393/Santos_Simone_Cardoso_dos.pdf?sequencia=1&isAllowed=y. Acesso 31 ago. 2024.

SANTOS, Dayene Ferreira dos. **O pantógrafo no ensino de conceitos geométricos à luz da Educação Matemática Realística**. (Tese de Doutorado) Universidade de São Paulo, 2020.

SCHEINER, Christopher. **Pantographice sev ars delineandi res qualibet per parallelogrammum lineare sev cavum**. Romae, Ex Typographia Ludouici Grignani, 1631. Disponível em: < https://archive.org/details/bub_gb_JS0ua5R80MYC Acesso 11 mai. 2024.

SCHOOTEN, Frans Van. **Exercitationum mathematicarum libri quinque**. Ludg. Batav.: Ex Officina Johannis Elsevirii, 1657. Disponível em:
<https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=ucm.5323846917&seq=7> Acesso 11 mai. 2024.

SILVA, Claudionor Renato. Johan Huizinga y el concepto de lo lúdico: la contribución de la filosofía a la literatura infantil matemática. *Educación*, v. 27, n. 52, p. 140-159, 2018.

SILVA, Eliane Santos. **O uso de jogos no ensino de álgebra: uma experiência nos anos finais do nível fundamental**. (Trabalho de Conclusão de Curso) Universidade Federal da Paraíba, 2020.

SILVA, Eliane. **A atividade de estudo no ensino fundamental conforme a teoria do ensino desenvolvimental de V. Davydov e contribuições de M. Hedegaard: um experimento didático em ciências**. (Tese de Doutorado) Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2020.

SILVA, Gabriel dos Santos. **Uma configuração da reinvenção guiada**. (Dissertação de Mestrado) Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

SILVEIRA, Denise Tolfo; CÓRDOVA, Fernanda Peixoto. **Pesquisa qualitativa**. In: Métodos de pesquisa / [organizado por] Tatiana Engel Gerhardt e Denise Tolfo Silveira; coordenado

pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

SNAPPER, Ernst. **The three crises in mathematics:** logicism, intuitionism and formalism. *Mathematics: People/problems-results*, p. 183-193, 1984.

THE BRITISH MUSEUM. **Theodolite.** A catalogue of scientific instruments in the Department of Medieval and Later Antiquities of the British Museum (309). Disponível em: https://www.britishmuseum.org/collection/object/H_1867-0716-2 Acesso 21 mai. 2024.

TREFFERS, Adrian.; GOFFREE, Fred. **Rational analysis of realistic mathematics education.** In: STREEFLAND, L. (ed.). *Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Utrecht, The Netherlands: OW&OC. v. 2, p. 97-123, 1985.

TREFFERS, Adrian. **Three dimensions:** a model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

TREVISAN, André Luís. BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Educação Matemática Realística: uma abordagem para o ensino e a avaliação em matemática. *Revista Eletrônica de Educação Matemática.* Florianópolis, v.10, n. 2, p. 167-184, 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2015v10n2p167>. Acesso em: 11 mai. 2024.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. **Realistic Mathematics Education.** *Encyclopedia Of Mathematics Education*, Países Baixos: Utrecht University, p. 521-525, jan. 1996.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning Mathematics.* Alberta-Canadá, v. 25, n. 2, p. 2-9, 2005. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/40248489>. Acesso em 08 mar. 2024.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. **Reform under attack:** forty years of working on better mathematics education thrown on the scrapheap? No way! In: SPARROW, L.; KISSANE, B.; HURST, C. (Eds.). *Proceedings of the 33th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.* Fremantle: MERGA. 2010.

VAN EST, Willen Titus. Hans Freudenthal. *Educational Studies in Mathematics.* In: *Jaarboek,* Amsterdã, p. 138-142, 1991.

VERHAGE, Heleen; DE LANGE, Jan. **The HEWET project.** In: BERGERON, J. C. (Ed.). *Proceedings of the eleventh International Conference on the Psychology of Mathematics Education.* Montreal: Eric, 1987. v. 3, p. 249-254.

VYGOTSKY, Lev Semionovitch. **A formação social da mente.** 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

VYGOTSKY, Lev Semionovitch. **Teoria e método em psicologia.** São Paulo: Martins Fontes, 2004.

VYGOTSKY, Lev Semionovitch. **Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar.** In: VYGOTSKY, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem. 11. ed. São Paulo: Ícone, 2010. p. 103-117.

WIELEWSKI, Gladys Denise. **O movimento da matemática moderna e a formação de grupos de professores de matemática no Brasil.** Encontro Nacional dos Professores de matemática-ProfMat, 2008.

WITTMANN, Erich. Realistic Mathematics Education, past and present. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, v. 6, n. 4, p. 294-296, 2005.

ZILKHA, Esther. **Utilização do GeoGebra na construção de instrumentos: teodolito.** (Dissertação) Programa de Mestrado Profissional em matemática - Instituto de matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em:
https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/esther_zilkha.pdf Acesso 15 set. 2024.

ZUCKERMAN, Galina. Developmental education: a genetic modeling experiment. *Journal of Russian & East European Psychology*, London, v. 49, n. 6, p. 45-63, 2011.

ANEXOS E APÊNDICES

ANEXO A

Atividade sobre lucro, preços de venda e custo de acordo com o tipo e nº da roupa.

“ No capítulo anterior, multiplicamos de maneira útil as matrizes da loja de jeans que eram da ordem 4×5 por 5×1 . Isso pode ser resumido a seguir.

	W	L	CF	Bo	Ba			Lucro		Lucro
						“cancelamento”				
28	1	3	0	1	2		W	30	28	...
30	5	8	4	1	2		L	35	30	...
32	2	3	5	6	0	×	CF	40	= 32	...
34	0	1	1	0	3		Bo	25	34	...
							Ba	40		

4×5
 5×1
 4×1

Esta forma de multiplicar pode ser estendida para as matrizes das ordens 4×5 por 5×3 , como mostrado a seguir:

	W	L	CF	Bo	Ba			Lucro	Preço de custo	Preço de venda		Lucro	Preço de custo	Preço de venda
28	1	3	0	1	2	W	30	45	75		28	...	...	...
30	5	8	6	1	2	L	35	40	75		30	...	...	...
32	2	3	5	6	0	CF	40	40	80	=	32	...	...	...
34	0	1	1	0	3	Bo	25	40	45		34	...	...	...
						Ba	40	45	85					

4×5
 5×3
 4×3

- Complete os totais da matriz: lucro, preço de venda e preço de custo por tamanho.
- Quais são as condições para que você possa multiplicar matrizes dessa forma?

ANEXO B

Entrevista sobre o projeto *Hewet*

Trecho da entrevista realizada pelos docentes do projeto *Hewet*. Disponível em: Verhage, De Lange (1987, p. 253-254). Os nomes são fictícios para preservar a identidade do estudante entrevistado - tradução nossa.

“ Professor: ‘[O curso] matemática A contém muito mais dessas histórias com problemas, em comparação ao que costumava ser. Com as histórias, vocês geralmente obtêm um texto longo para ler e precisam fazer algo com ele. Nós, muitas vezes, ouvimos a reclamação de que, embora seja divertido, vocês têm que ler muitas dessas histórias antes de obter prática. Percebi que nenhum de vocês mencionou isso, mas vocês já tiveram o suficiente para poder dizer 'eu entendo esse assunto'?’

Marius: ‘Bem, não é verdade que há páginas e páginas de texto, há apenas um pequeno texto introdutório. Não é à toa que a leitura leva tanto tempo que não chegamos à teoria.’

Judith: ‘Com a matemática normal, primeiramente, você obtém a teoria e depois os problemas. [Na matemática A] você geralmente começa com um problema e uma história, mas o primeiro problema costuma ser bem fácil. Então eles evoluem sem você perceber para que as coisas difíceis aconteçam naturalmente.’

[...]

Jan: ‘Em primeiro lugar, é ótimo que você não precise fazer um problema após o outro, e é meio relaxante se você se depara com uma história de vez em quando porque você não fica trabalhando tão intensamente o tempo todo. É menos coisa. Quando você tem histórias o tempo todo, você consegue praticar a busca pelas partes essenciais.’

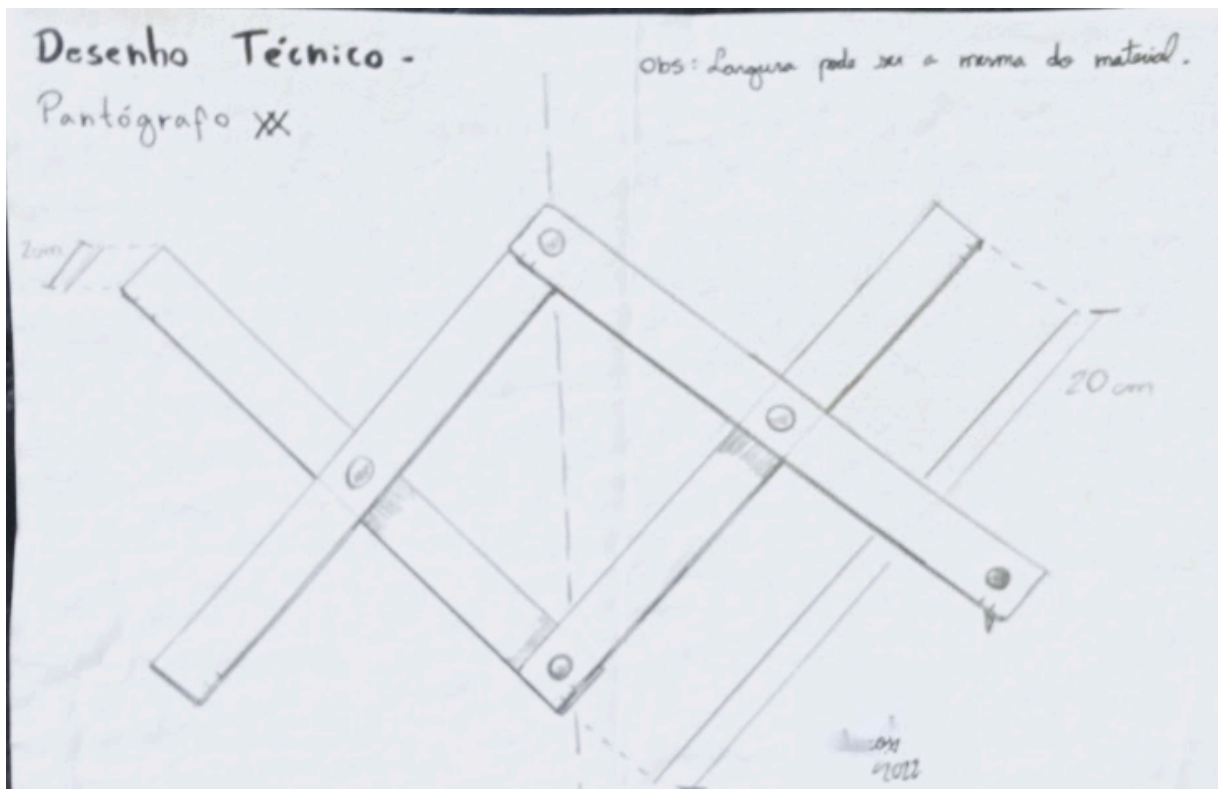
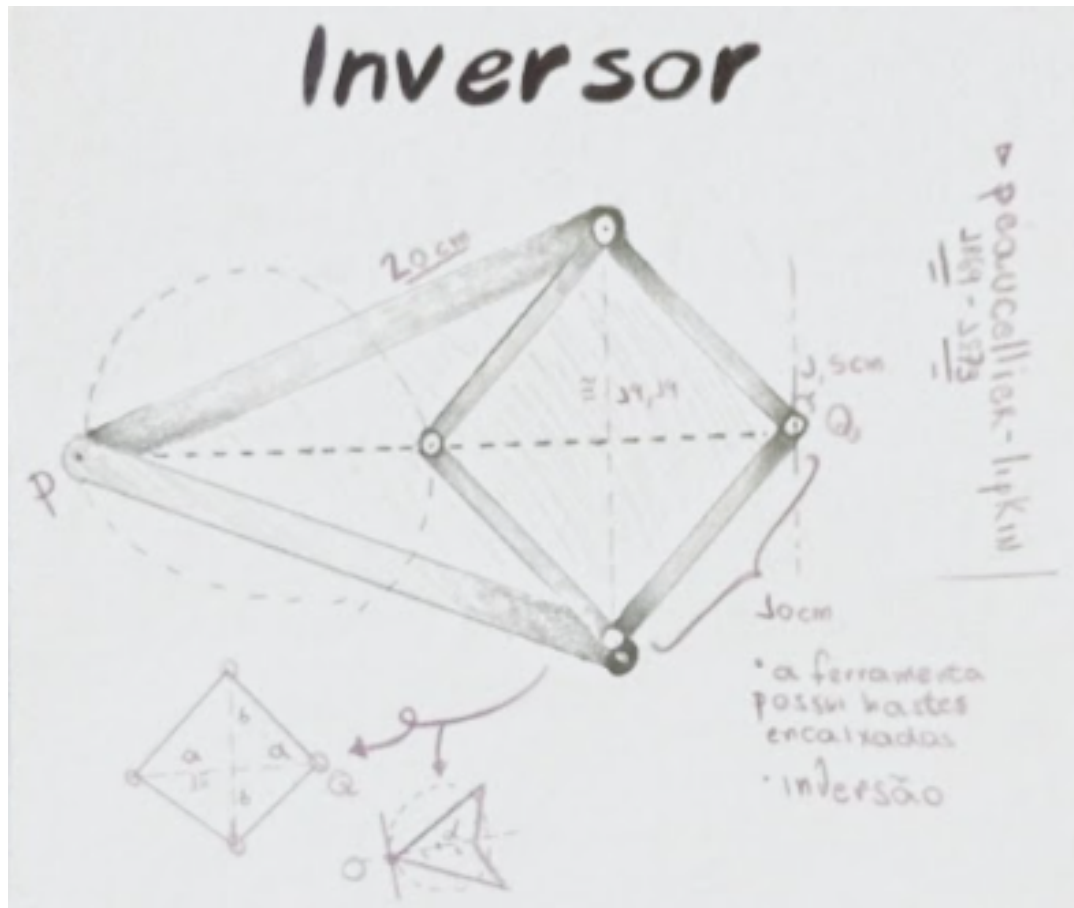
Professor: ‘Se você observar o problema desta manhã, sobre os rendimentos e preços, você achou difícil porque era uma história ou achou que não era tão ruim?’

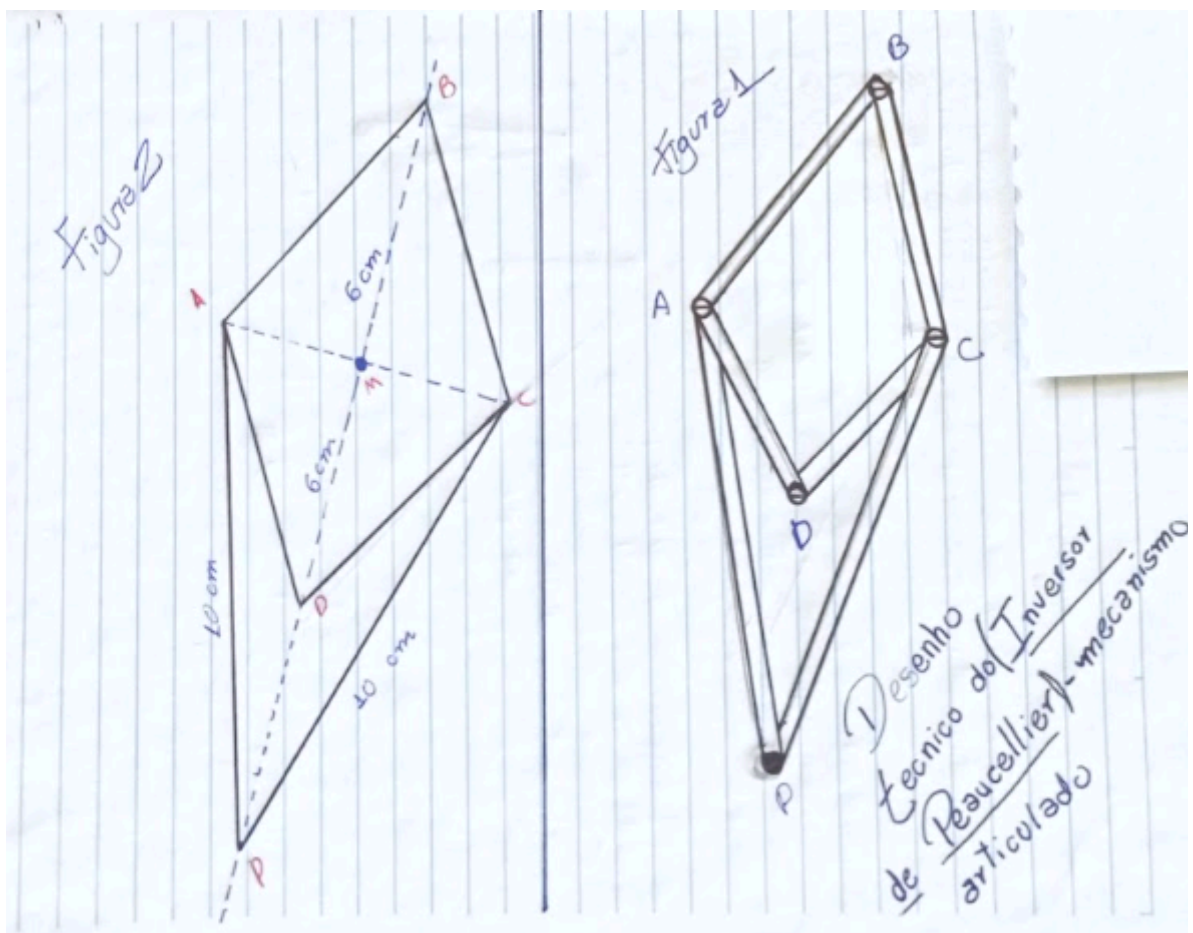
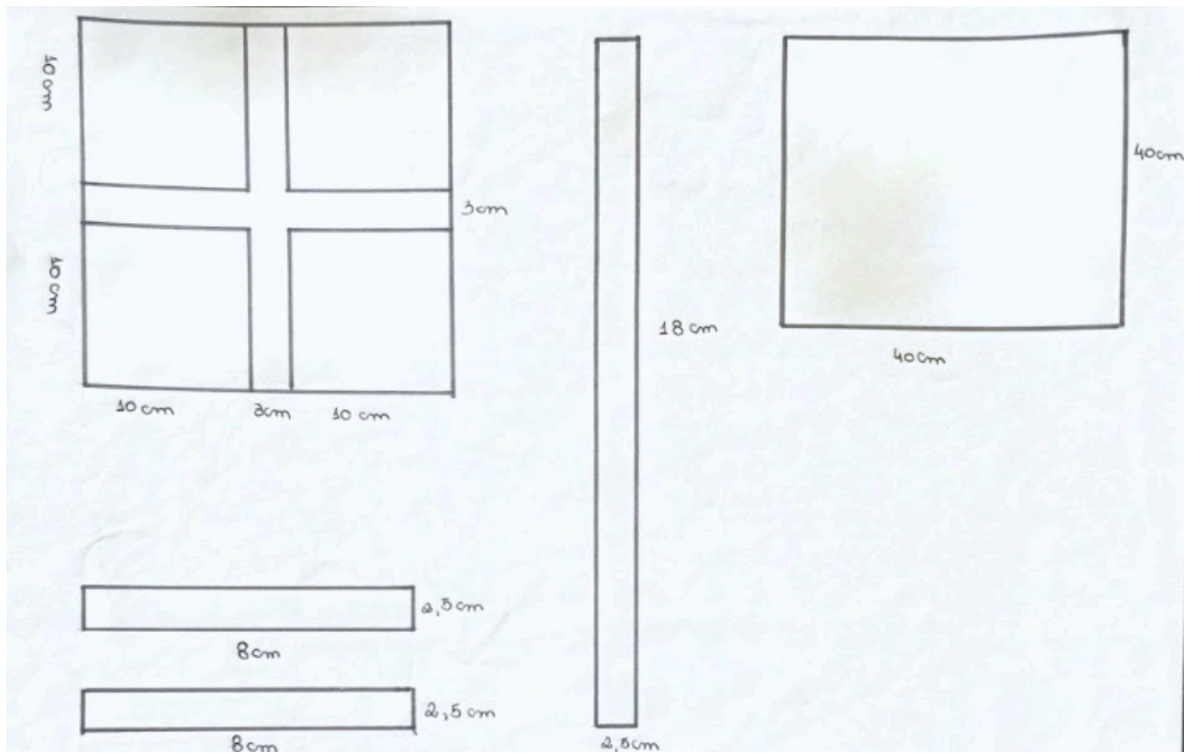
Jan: ‘Não era nada mal. Talvez fosse meio confuso, mas acho que foi uma boa ideia aprender a separar o problema principal das questões secundárias nessa história.’

Laura: ‘É por causa das histórias que fica claro para mim qual é a ideia, do que se trata. No meu caso, a falta de algo sendo contado foi o que não me permitia entender. Eu não

sabia o que era e só tinha aprendido decorando. Aqui há uma história em torno disso e tudo, simplesmente, acontece de forma natural.’

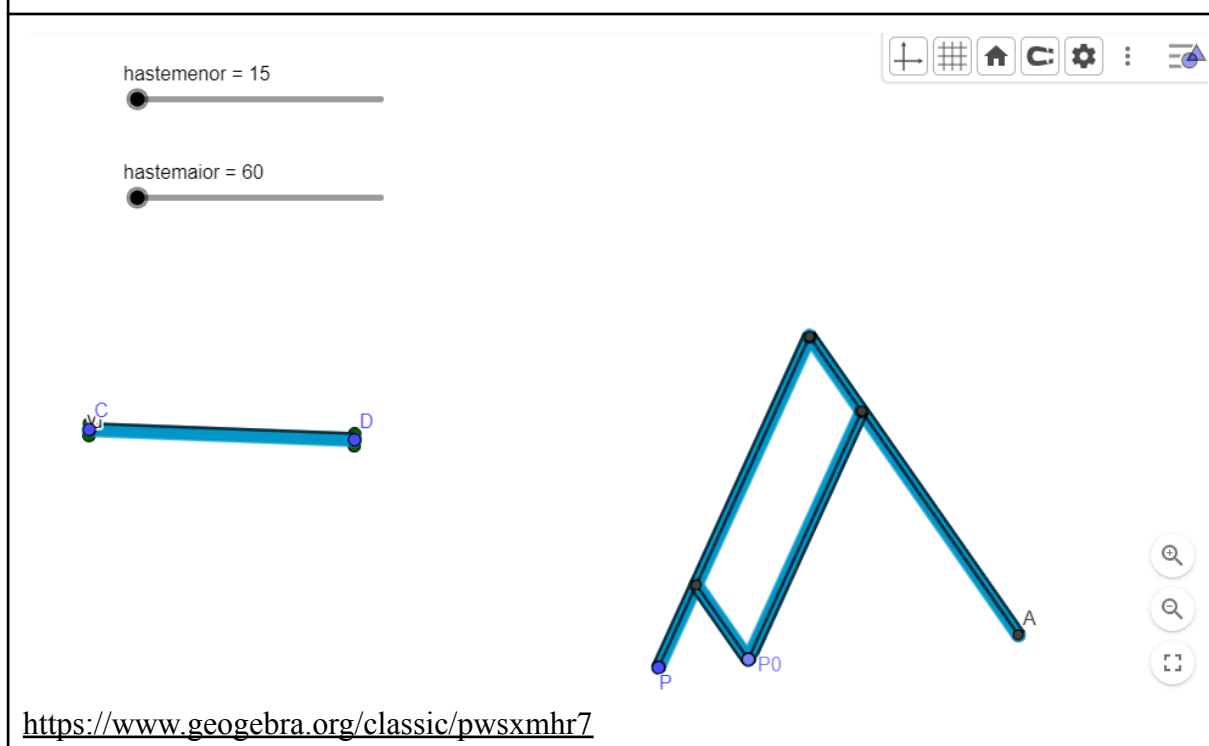
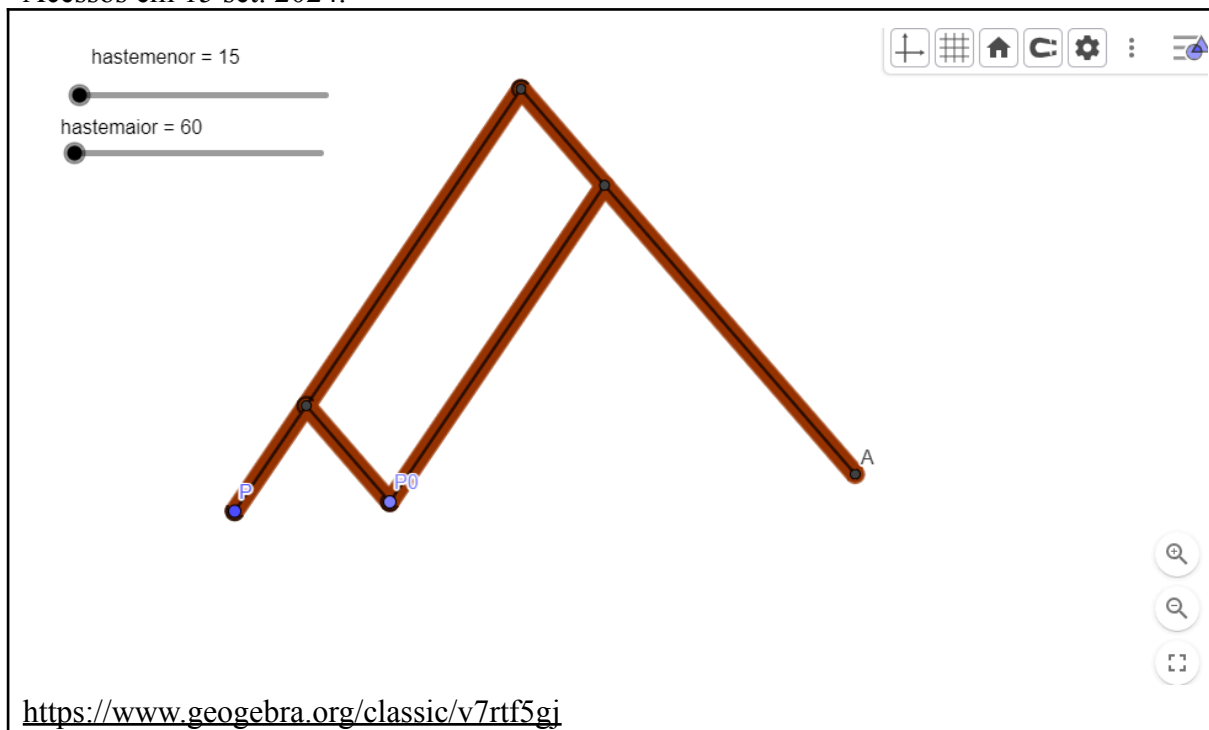
Mauris: ‘É muito mais atraente. Por exemplo, na décima série, temos logaritmos. Você aprende, mas não consegue acompanhar muito bem nas aulas porque simplesmente não interessa, só que agora eu me interesso. O logaritmo ficou muito mais claro através dos exemplos.’ ”

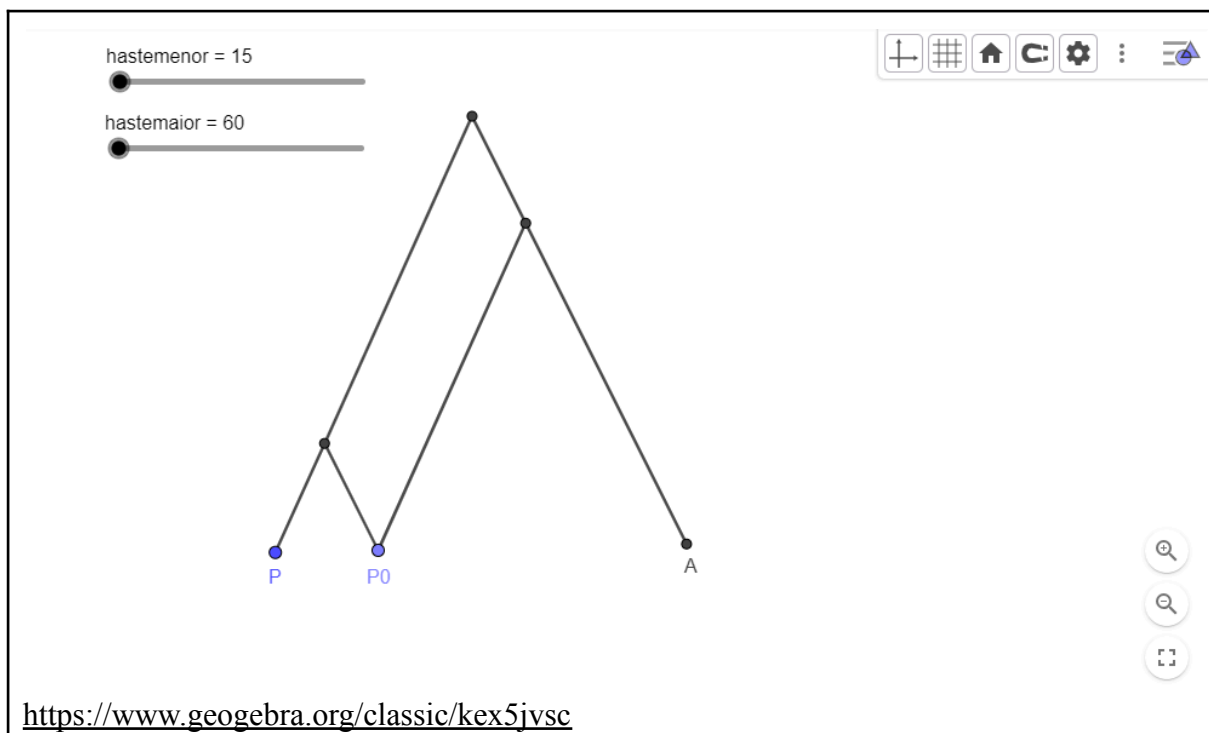




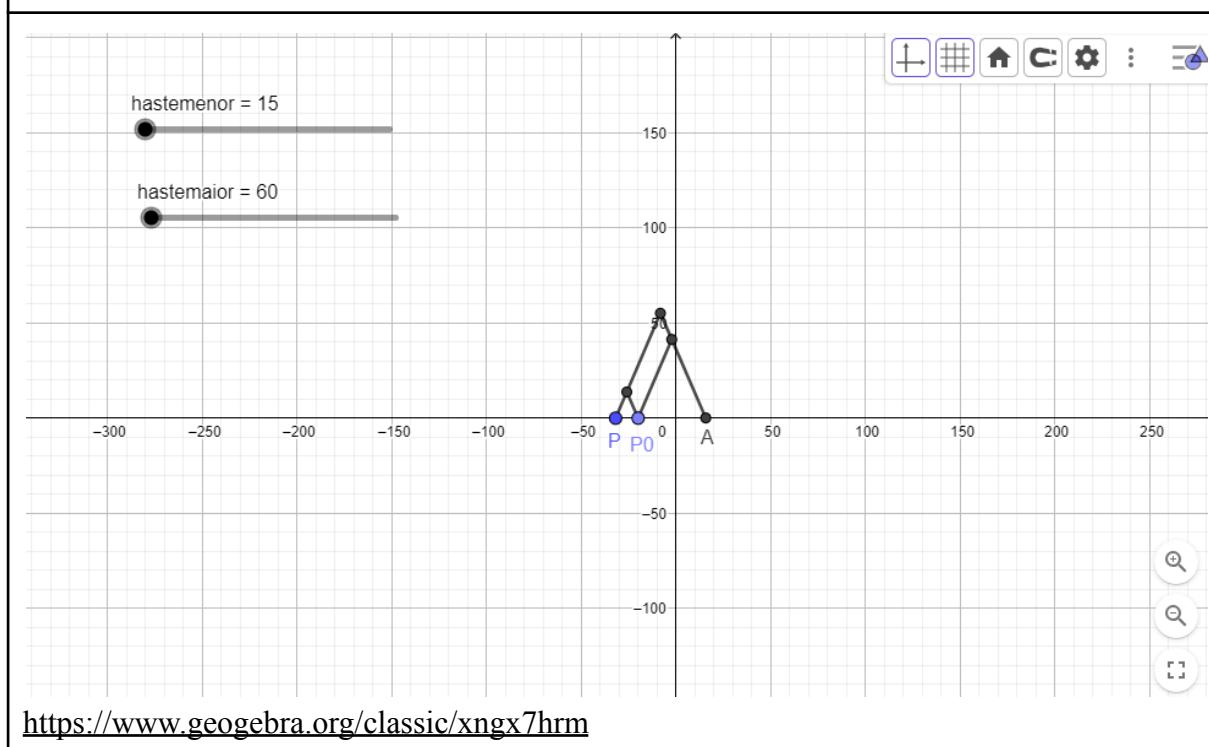
ANEXO D**Telas e links dos pantógrafos virtuais feitos pelos estudantes**

Acessos em 15 set. 2024.





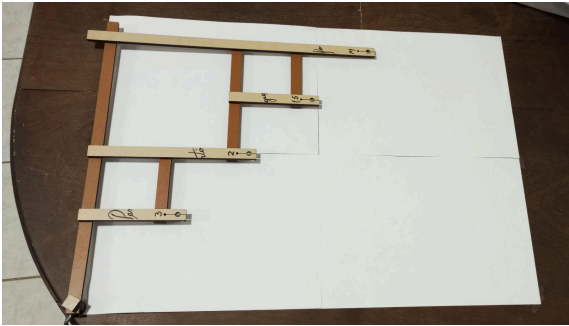
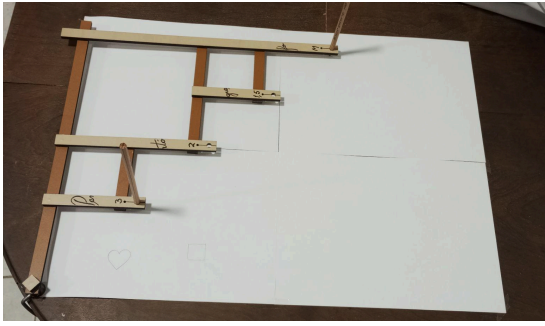
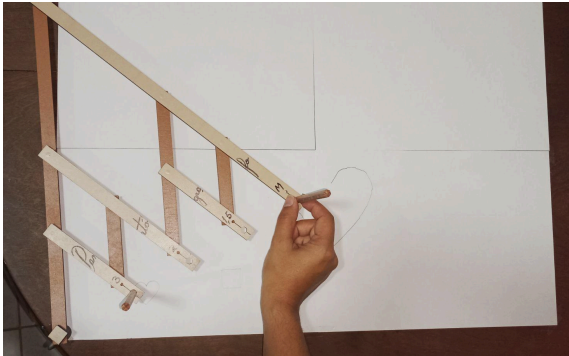
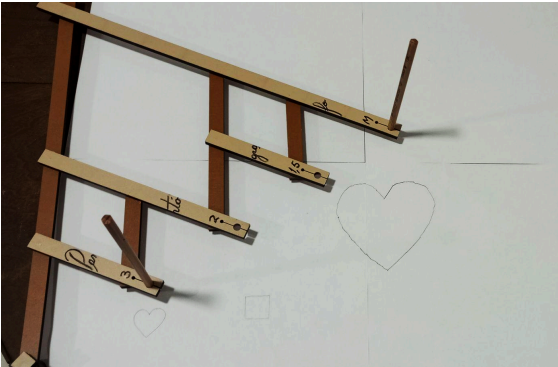
<https://www.geogebra.org/classic/kex5jvsc>



<https://www.geogebra.org/classic/xngx7hrm>

APÊNDICE A

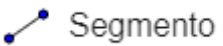
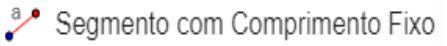
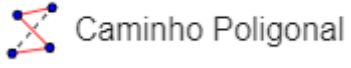
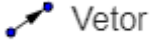
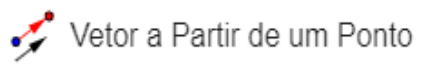
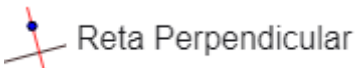
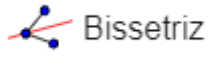
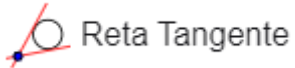
Como utilizar um pantógrafo?

	
1) Fixar o pantógrafo à mesa, bem como as folhas em que irá desenhar.	2) Posicionar lápis em “M” e outro ponto que deseja ampliar ou reduzir um desenho. No caso, o segundo lápis está em “3”. O desenho de um coração foi feito no canto inferior esquerdo das folhas de papel.
	
3) Segurar o lápis em “M”. Movendo as hastes e guiando pelo lápis em “3”, o usuário deve desenhar a nova figura.	4) Ao finalizar o desenho, a nova figura será maior ou menor que a original. Neste caso, o coração desenhado como pantógrafo tem dimensões lineares 3 vezes maior que o original.
Fonte: Elaborado pelos pesquisadores.	

APÊNDICE B

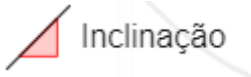
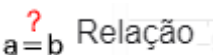
Descrição das funções das ferramentas principais

Ícone e nome	Função
 Mover	Permite mover e manipular objetos.
 Função à Mão Livre	Permite criar uma função desenhando à mão livre na janela de visualização.
 Caneta	Permite escrever ou desenhar na janela de visualização.
 Ponto	Cria um novo ponto ao clicar na tela.
 Ponto em Objeto	Cria um ponto pertencente a um objeto já criado.
 Vincular / Desvincular Ponto	Vincula ou desvincula um ponto a um objeto.
 Interseção de Dois Objetos	Determina a intersecção entre dois objetos selecionados.
 Ponto Médio ou Centro	Determina o ponto médio de um segmento ou o ponto central entre dois objetos.
 Número Complexo	Ao seleccionar uma posição, mostra as coordenadas do número complexo daquela posição.
 Otimização	Ajusta uma função.
 Raízes	Destaca as raízes de uma função, se houver.

 Reta	Cria uma reta.
 Segmento	Cria um segmento com pontos livres.
 Segmento com Comprimento Fixo	Cria um segmento com comprimento dado a partir de um ponto livre.
 Semirreta	Cria uma semirreta a partir de um ponto livre.
 Caminho Poligonal	A partir dos vértices de um polígono (convexo ou não), cria as arestas.
 Vetor	Cria um vetor de pontos livres.
 Vetor a Partir de um Ponto	Cria um vetor a partir de um ponto livre.
 Reta Perpendicular	Cria uma reta perpendicular a uma reta já construída, passando por ponto livre.
 Reta Paralela	Cria uma reta paralela a uma reta já construída, passando por ponto livre.
 Mediatriz	Cria a mediatriz de um segmento ou entre dois pontos já construídos.
 Bissetriz	Cria a bissetriz entre três pontos já construídos.
 Reta Tangente	Cria uma reta tangente à uma curva a partir de um ponto já construído.

 Reta Polar ou Diametral	Cria uma reta polar a partir de um ponto ou uma reta em relação a uma curva, todos já construídos.
 Reta de Regressão Linear	Cria uma reta a partir da seleção de vários pontos.
 Lugar Geométrico	Permite criar um caminho a partir de um ponto e outro objeto ou controle deslizante.
 Polígono	Cria um polígono com pontos livres.
 Polígono Regular	Cria um polígono com ponto fixo e comprimento dos lados fixo.
 Polígono Rígido	Cria um polígono cujos vértices não ficam livres.
 Polígono Semideformável	Cria um polígono com um controle deslizante e apenas um ponto livre.
 Círculo dados Centro e Um de seus Pontos	Cria um círculo a partir de um centro e um ponto livre.
 Círculo: Centro & Raio	Cria um círculo a partir de um ponto livre e um raio fixo.
 Compasso	Cria um círculo a partir de um segmento.
 Círculo definido por Três Pontos	Cria um círculo a partir de três pontos livres.
 Semicírculo	Cria um semicírculo a partir de dois pontos livres.

 Arco Circular	Cria um arco circular a partir de um centro e dois pontos livres.
 Arco Circuncircular	Cria um arco que passa por três pontos livres.
 Setor Circular	Cria um setor circular com três pontos livres.
 Setor Circuncircular	Cria um setor circular a partir de três pontos já construídos.
 Elipse	Cria uma elipse a partir de três pontos livres.
 Hipérbole	Cria uma hipérbole a partir de três pontos livres.
 Parábola	Cria uma parábola a partir de um ponto livre e uma reta.
 Cônica por Cinco Pontos	Cria uma hipérbole a partir de cinco pontos livres.
 Ângulo	Mede o ângulo formado entre três pontos livres.
 Ângulo com Amplitude Fixa	Mostra o ângulo fixo que parte de um ponto livre.
 Distância, Comprimento ou Perímetro	Mostra distância linear de objeto.
 Área	Mostra área de polígono.

 Inclinação	Mostra inclinação de reta ou segmento.
 Lista	Cria lista de pontos e objetos.
 Relação	Indica se um objeto pertence ou tem relação com outro objeto, ambos já criados.
 Inspetor de Funções	Mostra propriedades de uma curva definida por uma função já construída.
 Reflexão em Relação a uma Reta	Reflete o objeto a partir de uma reta já construída.
 Reflexão em Relação a um Ponto	Reflete o objeto a partir de um ponto livre.
 Inversão	Inverte um ponto livre a partir de um círculo já construído.
 Rotação em Torno de um Ponto	Rotaciona um objeto a partir de um ponto livre.
 Translação por um Vetor	Move objeto a partir de um vetor construído.
 Homotetia	Cria um ponto a partir de um ponto livre e uma distância (razão) fixa.
 Controle Deslizante	Cria um controle deslizante para animações e interações.
ABC Texto	Cria uma caixa de texto livre.
 Inserir Imagem	Permite adicionar uma imagem.

 Botão	Cria um botão vinculado a um comando.
☒  Caixa para Exibir / Esconder Objetos	Cria uma caixa de seleção para exibir ou não o objeto vinculado já criado.
$a=1$ Campo de Entrada	Cria uma caixa de entrada para um objeto já criado.
 Mover Janela de Visualização	Move a janela de visualização com todos os objetos criados.
 Ampliar  Reduzir	Amplia ou reduz a tela de visualização.
 Exibir / Esconder Objeto	Exibe ou oculta o objeto.
AA Exibir / Esconder Rótulo	Exibe ou oculta o nome do objeto.
 Copiar Estilo Visual	Copia cores e estilo de contorno de um objeto para outro.
 Apagar	Apaga um objeto já criado.
Fonte: Elaborado pelos pesquisadores conforme informações disponíveis no site do GeoGebra.	

APÊNDICE C**Modelos dos termos utilizados para autorização da pesquisa.**

DECLARAÇÃO

Declaro para os devidos fins, que (o)a pesquisador(a) **Nome**, CPF: **nº**, está **autorizado(a)** a realizar a pesquisa sob o título “**Título**” em turmas de **Ensino Fundamental Anos Iniciais/Ensino Fundamental Anos Finais/Ensino Médio**, na escola **Nome**, situada no **Endereço da instituição**, CNPJ: nº.

Por ser expressão de verdade, firmo a presente declaração.

Local, data.

Nome

Representante da Instituição

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE)

Você está sendo convidado(a) a participar da pesquisa “**Título**” coordenado(a) pelo(a) professor(a) [nome] que pode ser contatado(a) por meio do celular (XX) XXXXXXXX ou email: [email@email]. Seus responsáveis permitiram que você participasse. Queremos investigar as potencialidades de uma proposta pedagógica [descrever finalidade].

Você só precisa participar da pesquisa se quiser, é um direito seu e não terá nenhum problema se desistir. Os estudantes que irão participar desta pesquisa têm de X a Y anos de idade.

A pesquisa será feita na escola [nome], em que os estudantes [descrição da aplicação]. Caso aconteça algo errado, você pode nos procurar pelos telefones que tem no começo do texto.

Esperamos que a realização desta pesquisa te auxilie em [descrever objetivos]. Ninguém saberá que você está participando da pesquisa; não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa vão ser publicados via [dissertação de mestrado/tese de doutorado, artigos e resumos para congressos acadêmicos], bem como outras produções acadêmicas, mas sem identificar os participantes.

Eu _____ aceito participar da pesquisa “**Título**”. Entendi as coisas ruins e as coisas boas que podem acontecer. Entendi que posso dizer “sim” e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir sem prejuízos. O(A) pesquisador(a) tirou minhas dúvidas e conversou com os meus responsáveis. Recebi uma cópia deste termo de assentimento e li e concordo em participar da pesquisa.

Local, ____ de _____ de 202__.

Assinatura do(a) estudante

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (RESPONSÁVEIS)

Estamos realizando uma pesquisa na escola [nome], intitulada “**Título**” coordenado(a) pelo(a) professor(a) [Nome], orientado(a) pelo(a) [Nome do(a) orientador(a)], e gostaríamos que (nome do(a) estudante) _____ participasse da mesma.

Os objetivos desta são: **[enumerar e definir objetivos]**

Participar desta pesquisa é uma opção e no caso de não aceitar participar ou desistir em qualquer fase da pesquisa fica assegurado que não haverá quaisquer prejuízo às notas e demais avaliações internas ou externas.

Caso aceite participar deste projeto de pesquisa gostaríamos que soubessem que:

- a) Os participantes deverão [descrever o que farão]. *Para isso, precisam ter acesso aos materiais solicitados e à internet.* Os materiais [como serão fornecidos?]. A divulgação dos resultados obtidos será feita [como e onde?]. Serão divulgadas imagens apenas das tarefas realizadas e garantimos o anonimato dos participantes que receberão pseudônimos, caso haja necessidade de especificar a autoria das produções. Não divulgaremos nenhuma imagem do(a) participante nem dados pessoais que comprometam a sua integridade. *Não há riscos físicos ou mentais aos participantes, mas destacamos que é necessário ter cuidado com algumas ferramentas cortantes e pontiagudas que podem ser utilizadas durante a realização das tarefas propostas.*
- b) Caso identifiquemos alguma defasagem no processo de aprendizagem ou danos de quaisquer natureza ao estudante, asseguramos um acompanhamento especializado para este indivíduo a fim de tratar e melhorar o desempenho do mesmo.
- c) Para estudantes com alguma necessidade especial e que queira participar da pesquisa, oferecemos um acompanhamento especializado para garantir o bem estar deste participante.
- d) Ressaltamos que os resultados obtidos no processo avaliativo podem compor pontuações extras nas avaliações internas como forma de incentivo à participação efetiva e não haverá descontos de notas caso o(a) estudante desista de participar da pesquisa.

Certos de poder contar com sua autorização, colocamo-nos à disposição para esclarecimentos, através do telefone **[contatos]**.

[Nome orientador(a)]

[Formação]

[Nome pesquisador]

[Formação]

AUTORIZAÇÃO

Eu, _____ portador do RG _____ responsável pelo(a) estudante _____ autorizo a participar da pesquisa intitulada “Título” a ser realizada na escola [nome]. Declaro ter recebido as devidas explicações sobre a referida pesquisa e concordo que a desistência do(a) meu(minha) _____ (parentesco com o(a) participante) poderá ocorrer em qualquer momento sem que ocorra quaisquer prejuízos físicos, mentais ou no desempenho escolar. Declaro ainda estar ciente de que a participação é voluntária e que fui devidamente esclarecido(a) quanto aos objetivos e procedimentos desta pesquisa.

(Local) _____, ____ de _____ de 202__.

Assinatura: _____

(Nome do responsável):

(Nome do(a) estudante)

APÊNDICE D

Comandos para construção do pantógrafo virtual no GeoGebra v6.2.700

Haste:

- 1) Construa os pontos **A** e **B** em quaisquer posições;
- 2) Na caixa de entrada escreva: $\mathbf{u} = \text{VetorUnitário}(\text{Segmento}[A,B])$ e crie o vetor unitário **u** do vetor **AB**;
- 3) Na caixa de entrada escreva: $\mathbf{v} = \text{VetorPerpendicular}[u]$ e crie o vetor **v** perpendicular ao vetor **u**;
- 4) Digite na caixa de entrada: $\mathbf{lista1} = (A+B+v, B-v, A-v)$;
- 5) Crie o polígono com a lista1 digitando: $\mathbf{pol1} = \text{Polígono}[lista1]$;
- 6) Faça dois semicírculos nas extremidades do polígono:
 - a) $\mathbf{c1} = \text{Semicirculo}[A-v, A+v]$;
 - b) $\mathbf{c2} = \text{Semicirculo}[B+v, B-v]$;
- 7) Finalize a haste alterando:
 - a) cor: botão direito sobre o polígono > configurações/propriedades guia "Cor"> transparência 100 > guia "Básico"> desmarcar caixa "Exibir Rótulo";
 - b) Selecione o comando "Copiar Estilo Visual" localizado no conjunto de ferramentas "Mover Janela de Visualização"> clique sobre o polígono > clique sobre os semicírculos **c1** e **c2**;
 - c) Faça as linhas de contorno da haste digitando na caixa de entrada:
 - $\mathbf{l1} = \text{Segmento}[A+v, B+v]$;
 - $\mathbf{l2} = \text{Segmento}[A-v, B-v]$;
 - $\mathbf{c3} = \text{ArcoCircular}[A, A+v, A-v]$;
 - $\mathbf{c4} = \text{ArcoCircular}[B, B-v, B+v]$;
 - d) Altere cor e espessura de cada um destes elementos;
 - e) Crie os círculos **c5** e **c6** digitando na caixa de entrada:
 - $\mathbf{c5} = \text{Circulo}[A, A+0.3u]$;
 - $\mathbf{c6} = \text{Circulo}[B, B+0.3u]$;
- 8) Selecione todos os objetos (Ctrl+A) e clique no ícone $\equiv$. Selecione "Ferramentas"> "Criar uma nova Ferramenta". Os "Objetos Finais" são os segmentos, o polígono, linhas de contorno, arcos e setores. Os "Objetos Iniciais" são os pontos **A** e **B**. Crie um ícone (salve uma imagem da haste) e nomeie a nova ferramenta como "Haste". Ao gravar as configurações deste arquivo a ferramenta "Haste" estará disponível no GeoGebra.

Pantógrafo:

1) Clique no comando "Controle Deslizante"> clique na tela > selecione "número"> min = 15, max = 45, incremento = 15> Ok> botão direito sobre "**a**" > "Renomear"> escreva "hastemenor" > Ok;

2) Clique no comando "Controle Deslizante"> clique na tela > selecione "número"> min =60, max = 150, incremento = 10> Ok> botão direito sobre "**a**"> "Renomear"> escreva "hastemaior"> Ok;

OBS.: Nas demais etapas, renomeie os objetos de acordo com o solicitado para não se perder nas instruções.

3) Construa um ponto **A** qualquer

4) Construa uma circunferência **c**, de centro **A** e raio **hastemenor** (os círculos são do comando "Círculo dados Centro e Raio");

5) Construa um círculo **d**, de centro **A** e raio **2hastemenor**. Altere as propriedades deste círculo:

Cor > Opacidade 10;

6) Construa **B**, no círculo **d**, com o comando "Ponto em Objeto";

7) Construa a circunferência **e** de centro **B** e raio **hastemenor**;

8) Construa a circunferência **f**, de centro **A** e raio **hastemaior**;

9) Clique com o botão direito sobre **d**, e desmarque "Exibir Objeto". Construa um ponto **C**, na interseção **c** e **e** com o comando "Interseção de Dois Objetos" (escolha um dos pontos de interseção e oculte/apague o outro);

10) Trace a semirreta **g** de origem em **A** que passa por **B**;

11) Construa o ponto **E** na interseção de **f** e **g**. Clique com o botão direito sobre **g** e desmarque "Exibir Objeto";

12) Trace o segmento **h**, de **A** a **E** utilizando o comando "Segmento";

13) Da mesma forma, trace o segmento **i**, de **B** a **C**;

14) Construa a circunferência **k**, de centro **E** e raio **hastemaior**;

15) Trace a reta **j** paralela ao segmento **i**, passando por **B** utilizando o comando "Reta Paralela";

16) Trace a reta **l**, paralela ao segmento **h**, e passando por **E**;

17) Marque o ponto **F**, na interseção das retas **l** e **j**;

18) Marque o ponto **G** na interseção da reta **l** com a circunferência **k**, (escolha um ponto e oculte o outro);

19) Trace o segmento **m** do ponto **B** ao ponto **F**;

- 20) Trace o segmento **n** do ponto **E** ao ponto **G**;
- 21) Clique com o botão direito em **G**, escolha a opção "Habilitar Rastro" ou "Mostrar Traço";
- 22) Esconda as retas **l** e **j** e as circunferências. Observe que os segmentos e pontos construídos são os braços e pontos articulados do pantógrafo de ampliação. O ponto de guia é o ponto **B**, e o ponto de escrita é o ponto **G**. Ao mover **B**, observe o movimento de **G**.

Adaptado de: BITTENCOURT, Patricia. **Utilização do Geogebra na construção de instrumentos:** pantógrafo. (Dissertação) PROFMAT - IMPA. Rio de Janeiro, 2014.

APÊNDICE E

Comandos para construção do teodolito virtual no GeoGebra v6.2.700

- 1) No campo de Entrada, insira $z=0$ para criar um plano denominado "**a**";
- 2) Crie um ponto arbitrário **A** no plano **a** (utilizando a opção "ponto em objeto");
- 3) No campo de Entrada, crie o ponto **B** com as coordenadas $(x(A), y(A), 1.1)$, para que fique ligeiramente acima do ponto **A**;
- 4) Da mesma forma, crie os pontos **C** e **D** com as coordenadas $(x(A), y(A), 1.5)$ e $(x(A), y(A), 1.9)$, respectivamente;
- 5) Crie a reta **b** que passa por **A** e **D**;
- 6) Crie o plano **c**, que deve ser paralelo ao plano **a** e passar pelo ponto **C**, clicando na opção "Plano paralelo"
- 7) Construa o círculo **d** com centro em **C**, utilizando a reta **b** como eixo e um raio de 0.4;
- 8) Adicione dois pontos no plano **c**: **E** e **F** com "Ponto em objeto";
- 9) Trace as semirretas **e** e **f** partindo do ponto **A** e indo até os pontos **E** e **F**, respectivamente;
- 10) Determine as interseções:
 - a) Semirreta **e** e o círculo **d** (ponto **G**);
 - b) Semirreta **f** e o círculo **d** (ponto **H**);
- 11) Crie o círculo **g**, definido pelos pontos **D**, **H** e **B**;
- 12) Construa o plano **h**, definido pelos pontos **D**, **H** e **B**, que será perpendicular aos planos **a** e **c**;
- 13) Adicione o ponto **I** no plano **h**;
- 14) Trace a semirreta **i** partindo de **A** até o ponto **I**;
- 15) Faça a interseção entre a semirreta **i** e o círculo **g**, formando o ponto **J**;
- 16) Crie a esfera **j** com centro em **C**, passando por **B**;
- 17) Defina os ângulos:
 - a) Ângulo α , entre os vetores **EC** e **F**, como horizontal;
 - b) Ângulo β , entre os vetores **IC** e **F**, como vertical.

Adaptado de: ZILKHA, E. **Utilização do GeoGebra na construção de instrumentos: teodolito.** (Dissertação) Programa de Mestrado Profissional em matemática - Instituto de matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.

APÊNDICE F

Depoimentos sobre a pesquisa, em categorias

Contentamento:

- "Eu gostei de tudo 🤗"
- "Eu gostei 👍"
- "Para mim o projeto está ótimo"
- "Eu achei muito bom para a dinâmica e conhecimento da sala."
- "Pra mim ficou muito bom e ajudou a aprender melhor e de um jeito diferente"
- "Achei incrível day! amei fazer o projeto e aprendi mt com ele"
- "Eu gostei bastante, é diferente."
- "Muito boa essa aula, sendo bem diferente e legal, um conceito diferente das outras aulas"
- "Eu gostei de tudo"
- "Eu achei muito interessante, porque ajudou muito na nota de muitas pessoas"
- "Eu achei ótimo!"
- "Eu achei muito bom, e faria outras vezes com certeza"
- "Gostei da forma que foi desenvolvido, trazendo tanto uma teoria como a função de cada aparelho."
- "Adoramos."

Dinâmico:

- "Foi uma matéria dinâmica e divertida"
- "Ficou dinâmico e divertido, pois saímos um pouco da rotina."
- "Acho que esses projetos abrem um novo caminho em nossa mente sobre aparelhos e mecanismos, além disso, é legal conhecer a história de como tudo começou "
- "Foi legal, aprendemos coisas boas e que possa ser útil em nosso futuro, tendo em mente que somos novos ainda"
- "O trabalho foi legal pois, junta as pessoas para realizar algo divertido e dinâmico"
- "Eu gostei bastante, pq foi uma aula bem diferente"
- "Foi uma matéria dinâmica e divertida"
- "Achei um bom projeto, além de colocar na prática o que deve ser feito, ele também ajudou a entender o que foi feito nas aulas."
- "Achei perfeito"
- "Na minha opinião é algo incrível de ser aplicado em sala de aula."

Criativo:

- "Achei esse projeto criativo e bem interativo entre os grupos"
- "Eu achei muito interessante, porque ajudou muito na nota de muitas pessoas"
- "Achei o projeto muito divertido, pois ele me trouxe vários conhecimentos sobre mecanismos articulados."
- "Eu achei ótimo! poderia melhorar em relação a quantidade de vezes"
- "Acho bem legal a ideia de ter aulas diferenciadas como essas"
- "Acho q a professora foi muito criativa so ensinar matemática e geometria"

Material:

- "Usar outros materiais"
- "Achei esse projeto criativo e bem interativo entre os grupos, acho que só poderia ter objetos mais básicos para reproduzirmos."
- "Gostei do projeto menos da parte do geogebra porque não sei mexer"

Aprimoramento:

- "Eu gostei. Mas achei que poderíamos ter trabalhado mais a função dos instrumentos em aula."
- "poderia melhorar em relação a quantidade de vezes, fazer mais e verificar de forma mais ampla seu uso no mundo."
- "Eu acho que pode melhorar em relação a aplicação do projeto, deveríamos usar de uma forma mais interessante"
- "Achei q a professora foi muito criativa so ensinar matemática e geometria"

Interatividade:

- "Achei muito bom para a dinâmica e conhecimento da sala."
- "Foi um projeto muito proveitoso, principalmente em relação a conhecer novos instrumentos."
- "Na minha opinião é algo incrível de ser aplicado em sala de aula, além de ser muito prático e participativo."
- "Foi um projeto muito proveitoso, principalmente em relação a conhecer novos instrumentos e formas de trabalhar com eles."
- "O projeto foi interessante de saber como usar e pra que serve."
- "Achei bem legal a ideia de ter aulas diferenciadas como essas"

Específico:

- "Gostei do projeto menos da parte do geogebra porque não sei mexer"
- "Acho q a professora foi muito criativa só ensinar matemática e geometria."
- "Eu gostei bastante, é diferente. Apesar de o geogebra bater uma vibe ah que saco, a maioria foi tranquilo kkkkkk"

