

# Algumas considerações sobre homotopia e homologia\*

Jessica Cristina Rossinati Rodrigues da Costa <sup>†</sup>

Maria Gorete Carreira Andrade <sup>‡</sup>

17 de dezembro de 2013

## Resumo

A Topologia Algébrica pode, intuitivamente, ser definida como sendo o estudo de técnicas para conseguir, através de funtores, imagens algébricas de espaços topológicos. Geralmente, estas imagens são grupos e as funções contínuas entre os espaços topológicos são projetadas sobre homomorfismos entre grupos. Ou seja, dado um espaço topológico  $X$  associamos a ele um grupo  $G(X)$  e dada uma função contínua  $f : X \rightarrow Y$  associamos a essa função um homomorfismo de grupos  $G(f) : G(X) \rightarrow G(Y)$  satisfazendo algumas propriedades functoriais. Com isso, pode-se resolver problemas da Topologia através da Álgebra. Neste trabalho, apresentamos algumas considerações sobre dois dos principais funtores da Topologia Algébrica, o grupo fundamental  $\pi_1(X)$  e a homologia singular  $H_*(X)$ . Antes de dar as definições formais, apresentamos uma ideia intuitiva sobre o que medem, em termos topológicos, esses dois funtores. Depois de apresentarmos a ideia intuitiva, formalizaremos as definições e apresentaremos alguns resultados sobre estes grupos, dentre eles o Teorema de Hurewicz, que relaciona  $\pi_1(X)$  e  $H_1(X)$ , cujas demonstrações podem ser encontradas nas referências. Apresentamos também alguns exemplos e aplicações dos resultados.

**Palavras Chave:** Homologia Singular, Grupo fundamental, Teorema de Hurewicz.

## Introdução

Um dos mais simples e mais importantes funtores da Topologia Algébrica é o grupo fundamental, denotado por  $\pi_1(X, x_0)$ , o qual cria uma imagem algébrica do espaço de laços (caminhos fechados) em um espaço  $X$ , baseados em um ponto  $x_0 \in X$ , usando a ideia de homotopia de caminhos. Quando o espaço  $X$  é conexo por caminhos esse grupo é denotado simplesmente por  $\pi_1(X)$ .

O grupo fundamental  $\pi_1(X, x_0)$  é especialmente útil quando estudamos espaços de dimensão baixa. Em vista disso, necessitamos de uma ferramenta para lidar com espaços com dimensões mais altas. Existem grupos definidos de maneira similar ao grupo fundamental, chamados grupos de homotopia superiores e denotados por

---

\*Este trabalho é resultante do projeto de iniciação científica financiado pela FAPESP, Processo n<sup>o</sup> 2011/21268-6, sob orientação da Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Gorete Carreira Andrade.

<sup>†</sup>E.mail: jessica.rossinati@gmail.com - Aluna do curso de bacharelado em Matemática, IBILCE-UNESP-S.J.Rio Preto-SP-Brasil.

<sup>‡</sup>E.mail: gorete@ibilce.unesp.br - Departamento de Matemática - IBILCE-UNESP-S.J.Rio Preto-SP-Brasil.

$\pi_n(X, x_0)$  que podem ser usados para tratar espaços de dimensões maiores. Mas eles são extremamente difíceis de calcular. Felizmente, existe uma alternativa mais fácil de computar: os grupos de homologia  $H_n(X)$ .

Existem diversas maneiras de se calcular grupos de homologia. Por exemplo, usando, quando possível, triangulações do espaço (obtendo os grupos de homologia simplicial) ou, também quando possível, usando decomposições celulares do espaço (obtendo os grupos de homologia celular). Mais geralmente, para se calcular os grupos de homologia, podemos trabalhar com funções contínuas definidas em certos subespaços do  $\mathbb{R}^n$ , chamados de simplejos padrão, com contradomínio  $X$ , obtendo, através dessas funções, os grupos de homologia singular, que de certa forma, generaliza os outros dois tipos de grupos de homologia citados.

Neste trabalho, apresentamos na seção 1, de forma intuitiva, uma ideia da homotopia e do grupo fundamental. Na seção 2 tratamos de forma heurística o que vem a ser a homologia de um espaço  $X$ . Veremos que esses grupos estão relacionados com o número de “buracos”  $n$ -dimensionais de  $X$ ,  $n \geq 1$ . Na seção 3 formalizamos as definições desses grupos e na seção 4 apresentamos alguns resultados bastante importantes da teoria, dentre eles o Teorema de Hurewicz, que fornece uma relação entre  $\pi_1(X)$  e  $H_1(X)$ .

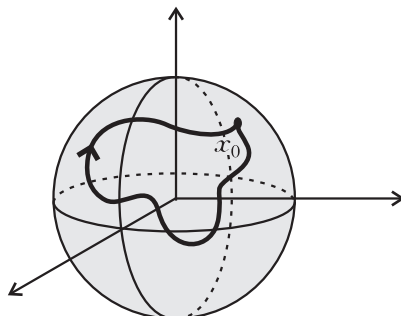
Observamos que, intuitivamente, dizer que um espaço  $X$  tem um buraco  $n$ -dimensional é dizer que  $X$  possui alguma imagem de uma esfera  $\mathbb{S}^n$  dada por uma aplicação contínua  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow X$ , que não pode ser deformada em um ponto.

Observamos também que, este trabalho não tem como propósito demonstrar resultados que se encontram nas referências. Assim vamos omitir a maioria das demonstrações. O objetivo principal deste trabalho é apresentar ao leitor uma ideia do que vem a ser a homotopia (em termos de homotopia de caminhos) e a homologia (principalmente o grupo  $H_1(X)$ ), mostrando algumas similaridades e diferenças entre as duas teorias.

## 1 A ideia da homotopia em termos do grupo fundamental

O grupo fundamental de um espaço  $X$ , denotado por  $\pi_1(X, x_0)$ , pode ser definido de modo que seus elementos são laços (caminhos fechados) em  $X$ , começando e terminando em um determinado ponto base fixo  $x_0 \in X$ , mas dois tais laços são vistos como determinando o mesmo elemento do grupo fundamental se um laço pode ser deformado continuamente no outro dentro do espaço  $X$ .

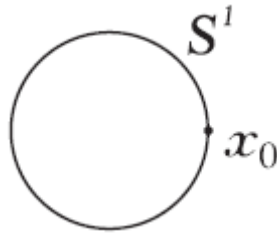
Se  $X$  é conexo por caminhos e todo laço em  $X$  pode ser deformado continuamente em um ponto, dizemos que  $X$  é simplesmente conexo, e neste caso o grupo fundamental  $\pi_1(X, x_0)$  é trivial. Exemplos de espaços simplesmente conexos são o espaço  $\mathbb{R}^n$  e a esfera  $\mathbb{S}^n$ ,  $n > 1$ .



O grupo fundamental mede o quão longe um espaço está de ser simplesmente conexo. Se um laço não pode ser deformado continuamente em um ponto é porque há um “buraco” atrapalhando. O grupo fundamental mede, de certa forma, o comportamento desses buracos, que chamamos de buracos 1-dimensionais.

Se  $a$  é um laço baseado em  $x_0$ , o elemento do grupo fundamental (ou seja a classe desse laço) será denotado por  $[a]$ .

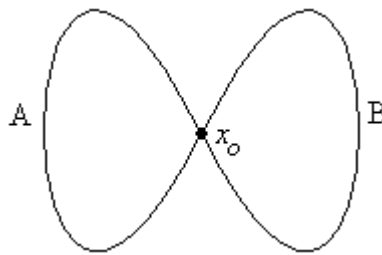
Por exemplo, considere a circunferência  $S^1$ . Através de um ponto  $x_0 \in S^1$ , obtemos laços baseados em  $x_0$ , no sentido anti-horário, sobre a circunferência. Seja  $\alpha$  a classe do laço  $a$  que dá exatamente uma volta na circunferência. Se um laço  $b$  não completar uma volta podemos “deformar” continuamente este laço no próprio ponto base, ou seja,  $[b] = [x_0] = 1 = \alpha^0$ .



Agora, todo laço que der uma volta e menos que duas, pode ser deformado continuamente no laço  $a$  que dá uma única volta. Essa classe de laços é  $\alpha = \alpha^1$ . Podemos aplicar o raciocínio inúmeras vezes, encontrando as classes  $\alpha^2, \alpha^3, \dots$  e assim por diante. Para laços com sentido negativo, ou seja, sentido horário, definimos novas classes de equivalência  $\alpha^{-1}, \alpha^{-2}, \dots$  de modo análogo ao visto anteriormente. Sendo assim, podemos concluir intuitivamente que

$$\pi_1(S^1) = \{\dots, \alpha^{-3}, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \alpha^0, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots\} = \{\alpha^n | n \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}.$$

Num outro exemplo, considere o espaço  $X$  formado por duas circunferências  $A$  e  $B$  tangentes, sendo  $x_0$  o ponto de interseção dessas duas circunferências. Seja  $a$  o laço que percorre uma única vez a circunferência  $A$  e seja  $b$  o laço que percorre uma única vez a circunferência  $B$ .



Considere  $\alpha = [a]$  e  $\beta = [b]$ . Usando o mesmo raciocínio anterior, cada produto de potências de  $a$  e  $b$  (de acordo com o número de voltas na circunferência) fornece um elemento distinto de  $\pi_1(X)$ . Por exemplo, o produto  $a^3.b^2.a^{-2}.b$  é o laço que dá três voltas ao redor de  $A$ , duas voltas ao redor de  $B$ , duas voltas em  $A$  no sentido oposto e finalmente uma volta em  $B$ . Temos  $\alpha^3.\beta^2.\alpha^{-2}.\beta = [a^3.b^2.a^{-2}.b] \in \pi_1(X)$ .

O conjunto de todas as sequências como esta, consistindo de potências de  $\alpha$  e  $\beta$  (e denominadas palavras) forma um grupo não abeliano usualmente denotado por  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  e chamado de grupo livre com dois geradores  $\alpha$  e  $\beta$ .

Dos exemplos apresentados, verificamos que o número de geradores do grupo fundamental está relacionado ao número de buracos 1-dimensionais de  $X$ . Por exemplo, o espaço  $\mathbb{R}^n$  e a esfera  $S^n$ ,  $n > 1$  não têm buracos 1-dimensionais e assim

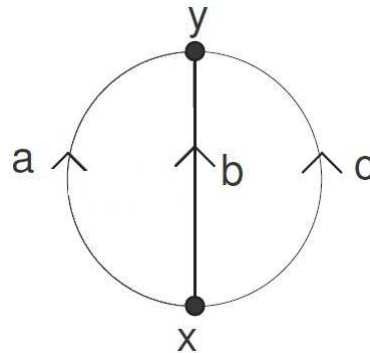
$\pi_1(\mathbb{R}^n) = \pi_1(\mathbb{S}^n) = \{1\}$ . O círculo unitário  $\mathbb{S}^1$  tem um buraco 1-dimensional e isto é refletido no fato que o grupo fundamental de  $\mathbb{S}^1$  tem um gerador. Já a figura oito tem dois buracos 1-dimensionais e o grupo fundamental tem dois geradores.

## 2 A ideia da homologia

A motivação original para definir grupos de homologia é observar que espaços topológicos (em particular variedades) são distinguidos pelos seus “buracos”  $n$ -dimensionais. Em termos heurísticos, o tamanho e a estrutura de  $H_n(X)$  nos dá informação sobre o número e o tipo de buracos  $n$ -dimensionais em  $X$ .

Para definir os grupos de homologia usamos aplicações contínuas, cuja imagem está em  $X$ , definidas em um subespaço do  $\mathbb{R}^n$ , denotado por  $\sigma_n$  que é homeomorfo a  $I^n$ , onde  $I$  é o intervalo  $[0,1]$  da reta. Essas aplicações  $\phi : \sigma_n \rightarrow X$  são chamadas de  $n$ -simplexos singulares.

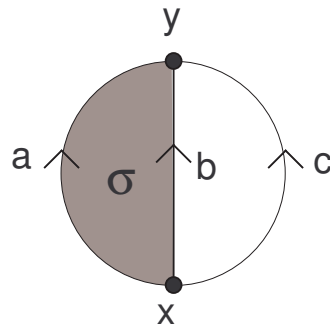
Por exemplo, seja  $X$  o espaço formado de três caminhos  $a$ ,  $b$  e  $c$  ligando os vértices  $x$  e  $y$ , conforme mostra a figura.



Podemos obter outros caminhos em  $X$  fazendo justaposição dos caminhos  $a$ ,  $b$  e  $c$  com os caminhos inversos  $-a$ ,  $-b$  e  $-c$ . Um caminho (1-simplexo) que sai de um vértice e no final volta no mesmo vértice é chamado de 1-ciclo. Por exemplo:  $a - b$  e  $c - b$  são 1-ciclos. Todo 1-ciclo que não é bordo (fronteira) de um subespaço de dimensão 2 (que podemos chamar de 2-simplexo ou de uma combinação linear de 2-simplexos), fornece um elemento não nulo em homologia. Isto significa que o 1-ciclo circunda um “buraco” 1-dimensional do espaço.

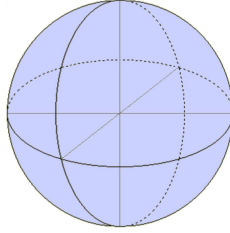
No espaço em questão temos dois 1-ciclos que são geradores de  $H_1(X)$ . Ou seja,  $H_1(X) = \langle a - b, c - b \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Então,  $H_1(X)$  tem 2 geradores e  $X$  tem 2 buracos 1-dimensionais. Como não há buracos  $n$ -dimensionais,  $n \geq 2$ , temos  $H_n(X) = \{0\}$ ,  $n \geq 2$ .

Considere agora o seguinte espaço  $X$  dado pela figura:

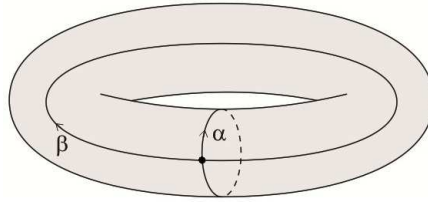


Neste espaço temos um 1-ciclo  $z = (c - b)$  que não é bordo e assim fornece um gerador em  $H_1(X)$ . O 1-ciclo  $(a - b)$  é bordo do 2-simplexo  $\sigma$ . Assim esse ciclo fornece a classe nula em  $H_1(X)$  e temos  $H_1(X) = \langle c - b \rangle \simeq \mathbb{Z}$ . Como  $X$  não tem buracos de dimensões maiores, temos  $H_n(X) = \{0\}$ ,  $n \geq 2$ .

Seguindo essa ideia da homologia medir, de certo modo, o “número de buracos”  $n$ -dimensionais de  $X$ , considerando agora a esfera  $\mathbb{S}^2$  vemos que o único buraco que esse espaço possui é um “buraco” 2-dimensional e assim temos  $H_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$  e  $H_k(\mathbb{S}^2) = \{0\}$  para  $k \neq 2$ ,  $k > 1$ .



Agora, se considerarmos o toro  $\mathbb{T}^2$ ,



vemos que este espaço possui dois “buracos” 1-dimensionais, determinados pelos caminhos  $\alpha$  e  $\beta$  e um “buraco” 2-dimensional (a parte interna, que é oca, do toro). Assim, pode-se concluir intuitivamente que,  $H_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ,  $H_2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}$  e  $H_k(\mathbb{T}^2) = \{0\}$  para  $k > 2$ .

### 3 Formalizando as definições

#### 3.1 O grupo Fundamental

Nesta seção formalizamos a definição do grupo fundamental de um espaço  $X$ . Para maiores detalhes ver [1] e [4].

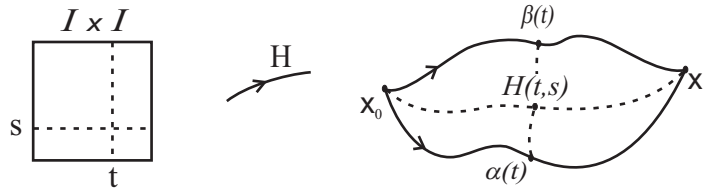
**Definição 1** Um caminho em  $X$  é uma aplicação contínua  $\alpha : I \rightarrow X$ , onde  $I$  denota o intervalo  $[0, 1]$  da reta. Os pontos  $\alpha(0) = x_0$  e  $\alpha(1) = x_1$  são chamados de ponto final e ponto inicial do caminho, respectivamente. Se  $\alpha : I \rightarrow X$  é um caminho com  $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$  dizemos que  $\alpha$  é um laço baseado em  $x_0$ .

**Definição 2** Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  caminhos em  $X$  tais que  $\alpha(0) = x_0$ ,  $\alpha(1) = \beta(0) = x_1$  e  $\beta(1) = x_2$ . O caminho produto  $\alpha * \beta$  é o caminho definido por  $\alpha * \beta : I \rightarrow X$  tal que:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**Definição 3** Dois caminhos  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  com mesmo ponto inicial  $x_0$  e mesmo ponto final  $x_1$  são homotópicos (notação:  $\sim$ ) se existe uma função contínua  $H : I \times I \rightarrow X$  tal que

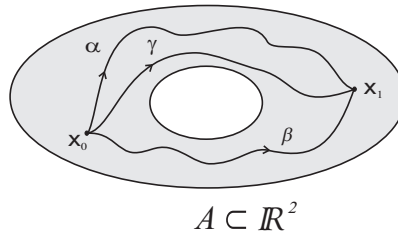
$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \alpha(t); & H(t, 1) &= \beta(t), \forall t \in I \\ H(0, s) &= x_0; & H(1, s) &= x_1, \forall s \in I \end{aligned}$$



**Observação 1** (i) A relação de homotopia de caminhos é uma relação de equivalência e denotamos por  $[\alpha]$  a classe de homotopia de um caminho  $\alpha : I \rightarrow X$ . Assim,

$$[\alpha] = \{\beta : I \rightarrow X \mid \beta \sim \alpha\}.$$

(ii) Na figura abaixo,  $\alpha$  pode ser deformado continuamente em  $\gamma$ , mas  $\alpha$  não pode ser deformado continuamente em  $\beta$ .



Sejam  $\Omega(X, x_0) = \{\alpha : I \rightarrow X \mid \alpha \text{ é um laço baseado em } x_0\}$  e  $\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0) / \sim = \{[\alpha] \mid \alpha \text{ é um laço baseado em } x_0\}$ .

Dados  $[\alpha], [\beta]$  elementos de  $\pi_1(X, x_0)$ , definimos em  $\pi_1(X, x_0)$  a operação

$$[\alpha].[\beta] := [\alpha * \beta].$$

Essa operação fornece uma estrutura de grupo em  $\pi_1(X, x_0)$  (ver [1]). O elemento neutro de  $\pi_1(X, x_0)$  é a classe de homotopia do caminho constante em  $x_0$ , denotado por  $1 = [c_{x_0}]$  e o inverso de um elemento  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$  é a classe  $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ , onde  $\alpha^{-1} : I \rightarrow X$ , definido por  $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t)$ , é o caminho inverso de  $\alpha$ .

O grupo  $\pi_1(X, x_0)$  é chamado de **grupo fundamental de X com ponto base  $x_0$** .

**Observação 2** Geralmente, o grupo fundamental é um grupo não abeliano.

Se o espaço topológico  $X$  é conexo por caminhos, o grupo fundamental independe do ponto base considerado, como mostra o seguinte resultado.

**Teorema 1 (Independência do Ponto Base)** *Sejam  $X$  um espaço conexo por caminhos e  $x_0, x_1 \in X$ . Então,  $\pi_1(X, x_0)$  é isomorfo a  $\pi_1(X, x_1)$ . Neste caso, denotamos  $\pi_1(X, x_0)$  simplesmente por  $\pi_1(X)$ .*

Demonstração: Ver por exemplo [1], Proposição 2.10. □

**Definição 4** *Seja  $h : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua com  $h(x_0) = y_0$  e seja  $\alpha : I \rightarrow X$  um laço baseado em  $x_0$ . O caminho  $h \circ \alpha : I \rightarrow Y$  é um laço baseado em  $y_0$ . Definimos  $h_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  por  $h_{\#}([\alpha]) = [h \circ \alpha]$ . A aplicação  $h_{\#}$  está bem definida e é um homomorfismo chamado de **homomorfismo induzido por h**, relativo ao ponto base  $x_0$ .*

O cálculo explícito do grupo fundamental não é simples e requer ferramentas poderosas, como por exemplo o Teorema de Van-Kampem, o qual não trataremos aqui. Apenas usando a ideia intuitiva vista na seção 2, temos os seguintes exemplos:

- Exemplo 1** (a) Se  $X$  é um espaço com um único ponto então  $\pi_1(X) = \{1\}$ .  
 (b) Considere o espaço  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ . Temos  $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \{1\}$ .  
 (c) Considere a esfera  $\mathbb{S}^n$ . Temos  $\pi_1(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 1, \\ \{1\} & \text{se } n > 1. \end{cases}$   
 (d) Se  $X$  é a união de duas circunferências tangentes, ou seja, a figura oito, então  $\pi_1(X) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .

## 3.2 Os grupos de Homologia Singular

Nesta seção apresentamos a definição dos grupos de homologia singular. Para maiores detalhes ver [3].

Seja  $p$  um inteiro positivo e considere o subespaço de  $\mathbb{R}^{p+1}$  dado por

$$\sigma_p = \{(t_0, t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid \sum t_i = 1 \text{ e } t_i \geq 0 \forall i\}.$$

O subconjunto  $\sigma_p$  é chamado de **p-simplexo padrão** do  $\mathbb{R}^{p+1}$  com vértices

$$x_0 = (1, 0, \dots, 0), x_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, x_p = (0, \dots, 0, 1).$$

e ordem natural.

**Definição 5** Seja  $X$  um espaço topológico. Um  $p$ -simplexo singular em  $X$  é uma função contínua  $\phi_p : \sigma_p \rightarrow X$ , sendo  $\sigma_p$  o  $p$ -simplexo padrão.

**Exemplo 2** Um 0-simplexo singular

$$\phi_0 : \sigma_0 = \{1\} \rightarrow X$$

é uma aplicação constante. Para cada ponto de  $X$  temos um 0-simplexo singular. Assim, podemos identificar os 0-simplexos singulares com suas imagens que são pontos de  $X$ .

Considere agora um 1-simplexo singular

$$\phi_1 : \sigma_1 \rightarrow X.$$

Como  $\sigma_1 \simeq [0, 1] \subset \mathbb{R}$ , podemos identificar os 1-simplexos singulares em  $X$  com os caminhos em  $X$ .

**Definição 6** Seja  $i \in \mathbb{N}$  com  $0 \leq i \leq p$ . A  $i$ -ésima face de um  $p$ -simplexo padrão é o conjunto

$$\{(t_0, t_1, \dots, t_p) \in \sigma_p \mid t_i = 0\}$$

que pode ser visto com um  $(p-1)$ -simplexo padrão. A aplicação  $F_p^i : \sigma_{p-1} \rightarrow \sigma_p$  definida por  $F_p^i(x_0, \dots, x_{p-1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{p-1})$  é a inclusão da  $i$ -ésima face em  $\sigma_p$ .

**Definição 7** Seja  $\phi : \sigma_p \rightarrow X$  um  $p$ -simplexo singular. Denotemos por  $\phi^{(i)}$  a composta  $\phi \circ F_p^i$ .  $\phi^{(i)} : \sigma_{p-1} \rightarrow X$  é um  $(p-1)$ -simplexo singular chamado de  $i$ -ésima face do  $p$ -simplexo singular  $\phi$ .

**Definição 8** Seja  $X$  um espaço topológico, definimos  $S_n(X)$  como sendo o grupo abeliano livre gerado pelos  $n$ -simplexos singulares de  $X$ . Um elemento  $c$  de  $S_n(X)$  é chamado de **n-cadeia singular** de  $X$  e tem a forma  $c = \sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \phi$ , onde  $n_{\phi}$  é um inteiro, igual a zero para todo, exceto para um número finito de  $\phi$ 's.

**Observação 3** O grupo abeliano livre  $S_n(X)$  é isomorfo a uma soma direta de cópias de  $\mathbb{Z}$ . Isto é, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S_n(X) = \bigoplus_{\phi} \langle \phi \rangle \simeq \bigoplus_{\phi} \mathbb{Z}.$$

**Definição 9** Seja  $\partial_p : S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)$  definido nos geradores por

$$\partial_p(\phi) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \phi^{(i)} = \sum_{i=0}^p (-1)^i (\phi \circ F_p^i)$$

nos geradores e estendido por linearidade. A aplicação  $\partial_p$  é um homomorfismo chamado de **operador bordo**.

**Exemplo 3** Se  $\phi$  é um 1-simplexo então, como visto anteriormente,  $\phi$  pode ser visto como um caminho ligando os pontos  $\phi(1,0) = x_0$  e  $\phi(0,1) = x_1$ . Daí  $\partial_1(\phi) = x_1 - x_0$ . Se  $x_0 = x_1$  então  $\phi$  pode ser identificado com um laço em  $X$  e  $\partial_1(\phi) = x_0 - x_0 = 0$ .

Podemos construir então uma sequência

$$S_*(X) : \dots \xrightarrow{\partial_{p+1}} S_p(X) \xrightarrow{\partial_p} \dots \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0 \quad (*).$$

Pode-se mostrar que para cada  $p > 0$  tem-se  $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$  e assim  $\text{Im} \partial_{p+1} \subset \ker \partial_p$ . A sequência (\*) é chamada de complexo de cadeias singulares associado ao espaço  $X$ .

**Definição 10** Dizemos que um elemento  $c \in S_n(X)$  é um  **$n$ -ciclo** se  $\partial_n(c) = 0$  e um elemento  $d \in S_n(X)$  é um  **$n$ -bordo** se existe  $e \in S_{n+1}(X)$  tal que  $d = \partial_{n+1}(e)$ . O grupo abeliano  $Z_n(X) := \text{Ker} \partial_n = \{c \in S_n(X) \mid c \text{ é um } n\text{-ciclo}\}$  é chamado de grupo dos  $n$ -ciclos de  $X$  e o grupo  $B_n(X) := \text{Im} \partial_{n+1} = \{d \in S_n(X) \mid d \text{ é um } n\text{-bordo}\}$  é chamado de grupo dos  $n$ -bordos de  $X$ .

**Definição 11** Seja  $X$  um espaço topológico. Com as notações anteriores, para cada  $n \in \mathbb{N}$  o grupo quociente

$$H_n(X) := \frac{\ker \partial_n}{\text{Im} \partial_{n+1}} = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}$$

é chamado de  **$n$ -ésimo grupo de homologia singular de  $X$** .

**Observação 4** (i)  $H_n(X)$  é um grupo abeliano que mede intuitivamente os  $n$ -ciclos em  $X$  que não são  $n$ -bordos. O elemento neutro de  $H_n(X)$  será denotado por  $0$ .  
(ii) Um elemento de  $H_n(X)$  é a classe de homologia de um  $n$ -ciclo  $c \in S_n(X)$ , denotada por  $\bar{c}$ .

Considere agora um espaço conexo por caminhos. Como quaisquer dois pontos de  $X$  (0-simplexos singulares) são ligados por um caminho (1-simplexo singular), pode-se mostrar o seguinte resultado:

**Teorema 2** Se  $X$  é um espaço topológico conexo por caminhos, então  $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$ .

Demonstração: Ver [3], Proposição 1.4.  $\square$

Sejam  $f : X \rightarrow Y$  é uma função contínua e  $\phi$  um  $p$ -simplexo singular de  $X$ . Definimos um  $p$ -simplexo singular  $f_{\#}(\phi)$  em  $Y$  por  $f_{\#}(\phi) = f \circ \phi$ . Para cada  $n$ , isto se estende de maneira única para um homomorfismo  $f_{\#} : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$  definido por  $f_{\#}(\sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \phi) = \sum_{\phi} n_{\phi} \cdot (f \circ \phi)$ . Considere o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & S_n(Y) \\ \partial^X \downarrow & & \downarrow \partial^Y \\ S_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & S_{n-1}(Y) \end{array}$$

Temos  $\partial_i^Y(f \circ \phi) = f \circ (\partial_i^X(\phi))$  e assim  $f_{\#}(Z_p(X)) \subset Z_p(Y)$  e  $f_{\#}(B_p(X)) \subset B_p(Y)$ . Nessas condições temos a seguinte definição:

**Definição 12** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  é uma função contínua. Para cada  $p \in \mathbb{Z}$ , a aplicação  $f_{*p} : H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$ , definida nos  $p$ -ciclos por  $f_{*p}(\bar{c}) = \overline{f_{\#}(c)}$  é chamada de **homomorfismo induzido por  $f$  em  $H_p$** .*

Assim como no caso do grupo fundamental, para se computar os grupos de homologia singular de um espaço  $X$  são necessárias ferramentas, tais como o Teorema de Mayer-Vietoris, que não trataremos aqui. De acordo com as ideias intuitivas sobre os grupos de homologia apresentadas na seção 3 e usando também o Teorema 2, temos os seguintes exemplos.

**Exemplo 4** (a) *Se  $X$  é um espaço com um único ponto então*

$$H_k(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } k = 0; \\ \{0\}, & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

(b) *Considere a esfera  $\mathbb{S}^n$ . Temos*

$$H_k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } k = 0, n; \\ \{0\}, & \text{se } k \neq 0, n. \end{cases}$$

(c) *Considere o toro  $\mathbb{T}^2$ .*

$$H_k(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } k = 0, 2; \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } k = 1; \\ \{0\} & \text{se } k > 2. \end{cases}$$

## 4 Invariância homotópica e topológica e a relação entre $\pi_1$ e $H_1$

Nesta seção veremos que o grupo fundamental e os grupos de homologia são invariantes homotópicos (e conseqüentemente topológicos). Também estudaremos a relação entre o grupo fundamental  $\pi_1(X)$  e o grupo de homologia  $H_1(X)$ . Com isso, podemos observar melhor algumas similaridades e diferenças entre esses grupos. Maiores detalhes podem ser encontrados em [1] ou [4].

## 4.1 Invariância homotópica e topológica

Primeiramente, recordemos algumas definições.

**Definição 13** *Sejam  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicações contínuas. Dizemos que  $f$  é homotópica a  $g$  (denotamos por  $f \sim g$ ) se existe uma aplicação contínua  $F : X \times I \rightarrow Y$  tal que  $F(x, 0) = f(x)$  e  $F(x, 1) = g(x)$ ,  $\forall x \in X$  onde  $I = [0, 1]$ . A relação  $\sim$  é uma relação de equivalência.*

**Definição 14** *Uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  é chamada de equivalência de homotopia se existe uma aplicação contínua  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $g \circ f$  é homotópica a identidade  $i_X$  de  $X$  e  $f \circ g$  é homotópica a identidade  $i_Y$  de  $Y$ . A aplicação  $g$  é chamada de inversa homotópica para a aplicação  $f$ . Se existir uma equivalência de homotopia entre  $X$  e  $Y$  dizemos que  $X$  e  $Y$  têm o mesmo tipo de homotopia e denotamos por  $X \equiv Y$ .*

**Observação 5** (i) *Se  $f : X \rightarrow Y$  é um homeomorfismo ( $X \approx Y$ ) então é claro que  $f$  é uma equivalência de homotopia. Assim, espaços homeomorfos têm o mesmo tipo de homotopia.*

(ii) *Dizer que  $X \equiv Y$  é dizer que  $X$  pode ser deformado continuamente em  $Y$  ou  $Y$  pode ser deformado continuamente em  $X$ .*

O próximo resultado mostra que o grupo fundamental e os grupos de homologia são invariantes homotópicos e consequentemente topológicos.

**Teorema 3** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos conexos por caminhos. Se  $X$  tem o mesmo tipo de homotopia de  $Y$  (em particular se são homeomorfos), então*

- (i)  $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$ ;
- (ii)  $H_n(X) \simeq H_n(Y)$ ,  $\forall n \geq 0$ .

Demonstração:

- (i) Ver [1], Teorema 5.9.
- (ii) Ver [3], Proposição 1.11. □

**Corolário 1** *Se  $X$  é um espaço contrátil, isto é, um espaço conexo por caminhos que tem o mesmo tipo de homotopia que o espaço com um único ponto, então*

- (i)  $\pi_1(X) = \{1\}$ .
- (ii)  $H_n(X) = \{0\}$ ,  $\forall n \geq 1$ . □

**Exemplo 5** *Segue do Corolário anterior que os espaços contráteis  $\mathbb{R}^n$  e  $D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1^2 + \dots + x_n^2) \leq 1\}$ ,  $n \geq 1$ , têm grupo fundamental e grupos de homologia triviais.*

O grupo fundamental e os grupos de homologia podem ser úteis para se decidir se dois espaços não são homeomorfos. É claro que existem outros invariantes topológicos que fornecem esse tipo de informação. Por exemplo, para mostrar que  $\mathbb{R}$  não é homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ , basta observar que  $\mathbb{R} - \{0\}$  é desconexo e  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  é conexo. Mas em dimensões maiores, muitas vezes não podemos usar esse raciocínio. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 6** *Se  $n > 2$  que  $\mathbb{R}^2$  não é homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .*

*De fato, se  $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}^n$ , teríamos  $\mathbb{R}^2 - \{0\} \approx \mathbb{R}^n - \{0\}$  e assim*

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^n - \{0\}). \quad (*)$$

Mas, pode-se mostrar que, para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$ ,  $\mathbb{R}^m - \{0\} \cong \mathbb{S}^{m-1}$ . Logo, de (\*), temos

$$\mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^{n-1}) = \{1\}$$

o que nos dá uma contradição.

Observe que não podemos usar o mesmo raciocínio do exemplo anterior com o grupo fundamental se, em lugar do  $\mathbb{R}^2$ , considerássemos  $\mathbb{R}^m$ , com  $m \neq n$ ,  $m > 2$  pois,  $\pi_1(\mathbb{S}^m) = \{1\}$  para  $m > 1$ . Mas podemos usar os grupos de homologia, como mostra o próximo exemplo.

**Exemplo 7** Se  $m \neq n$ ,  $m, n > 1$  então  $\mathbb{R}^m$  não é homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

Para ver isso vamos supor  $m > n$  e que esses espaços são homeomorfos. Daí,  $\mathbb{R}^m - \{0\} \approx \mathbb{R}^n - \{0\}$  e assim

$$H_m(\mathbb{R}^m - \{0\}) \simeq H_m(\mathbb{R}^n - \{0\}).$$

Usando o Exemplo 4 (b), e novamente o fato que, para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$ ,  $\mathbb{R}^m - \{0\} \cong \mathbb{S}^{m-1}$ , temos

$$\mathbb{Z} = H_m(\mathbb{S}^m) \simeq H_m(\mathbb{S}^n) = \{0\},$$

o que nos fornece uma contradição.

Os dois exemplos anteriores mostram que para  $n > 1$ , há diferenças sobre as informações que os grupos  $\pi_1$  e  $H_n$  fornecem. Mas e se  $n = 1$ , será que há alguma relação entre o tipo de informação fornecida por  $\pi_1$  e  $H_1$ ? A resposta está na próxima subseção.

## 4.2 A relação entre $\pi_1$ e $H_1$

Primeiramente faremos algumas considerações cujos detalhes podem ser encontrados em [2].

Sejam  $X$  um espaço topológico e  $p$  um ponto de  $X$ . Considere  $\phi : I = [0, 1] \rightarrow X$  um laço baseado em  $p$  e  $[\phi]$  a classe de homotopia de  $\phi$  em  $\pi_1(X, p)$ .

Podemos também considerar  $\phi$  como um 1-simplexo singular em  $S_1(X)$ . Como  $\phi$  é um laço temos  $\partial_1(\phi) = 0$ , e assim  $\phi$  é um ciclo. Seja  $\bar{\phi}$  a classe de homologia de  $\phi$  em  $H_1(X) = \frac{Z_1(X)}{B_1(X)}$ .

Se  $\phi$  e  $\gamma$  são laços em  $X$  baseados em  $p$  (1-ciclos) então são válidas as seguintes afirmações:

(i) Se  $\phi \sim \gamma$  então  $\bar{\phi} = \bar{\gamma}$ . Em particular, se  $\phi$  é homotópico a um caminho constante, então  $\bar{\phi} = 0$ .

(ii)  $\overline{\phi * \gamma} = \bar{\phi} + \bar{\gamma}$ .

(iv) Se  $\phi^{-1}$  é o caminho inverso de  $\phi$  então  $\overline{\phi^{-1}} = -\bar{\phi}$ .

Usando (i) temos bem definida uma aplicação

$$h : \pi_1(X, p) \rightarrow H_1(X)$$

dada por  $h([\phi]) = \bar{\phi}$ , para todo  $[\phi] \in \pi_1(X, p)$  que é um homomorfismo pois, por (ii), temos,

$$h([\phi] \cdot [\gamma]) = h([\phi * \gamma]) = \overline{\phi * \gamma} = \bar{\phi} + \bar{\gamma} = h([\phi]) + h([\gamma]).$$

Suponha agora que  $X$  é um espaço conexo por caminhos e seja  $\pi_1'(X) = [\pi_1(X), \pi_1(X)]$  o subgrupo comutador de  $\pi_1(X)$ . O grupo quociente  $\pi_1(X)/\pi_1'(X)$  é chamado de abelianização de  $\pi_1(X)$  e será denotado por  $\pi_1(X)_{ab}$ . Considere a aplicação projeção natural  $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(X)_{ab}$ , definida por  $\rho([\phi]) = [\phi]\pi_1'(X)$  e o diagrama

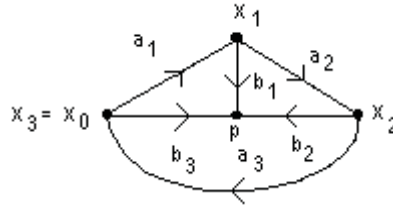
$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{h} & H_1(X) \\ \rho \downarrow & \nearrow \bar{h} & \\ \pi_1(X)_{ab} & & \end{array}$$

Temos bem definida uma aplicação induzida por  $h$ ,

$$\bar{h} : \pi_1(X)_{ab} \rightarrow H_1(X) \quad \text{dada por } \bar{h}(\rho([\gamma])) = h([\gamma]).$$

Para cada  $\bar{c} \in H_1(X)$  temos  $c = \sum_{i=1}^k n_i a_i$  em  $Z_1(X)$  e podemos ver cada  $a_i$  como um caminho começando no ponto  $x_{i-1}$  e terminando em  $x_i$ . Como  $X$  é conexo por caminhos, existem caminhos  $b_i$  ligando  $x_i$  a  $p$ ,  $i = 0, \dots, k$ .

Considere os laços  $b_{i-1}^{-1} * a_i * b_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .



Temos então

$$\bar{h}(\rho([(b_0^{-1} * a_1 * b_1)^{n_1} * (b_1^{-1} * a_2 * b_2)^{n_2} * \dots * (b_{k-1}^{-1} * a_k * b_k)^{n_k}])) = \left[ \sum_{i=1}^k n_i a_i \right] = [c]$$

e assim,  $\bar{h}$  é epimorfismo. Pode-se mostrar também que  $\bar{h}$  é um monomorfismo.

Essas considerações nos dão uma idéia da demonstração do seguinte resultado:

**Teorema 4 (Teorema de Hurewicz):** *Seja  $X$  um espaço topológico conexo por caminhos e  $p \in X$ . A aplicação  $h : \pi_1(X, p) \rightarrow H_1(X)$  definida por  $h([\phi]) = \bar{\phi}$  é um epimorfismo e  $\text{Ker}(h) = [\pi_1(X), \pi_1(X)]$ . Assim, temos bem definido um isomorfismo  $\bar{h} : \pi_1(X, p)_{ab} \rightarrow H_1(X)$  dado por  $\bar{h}([\phi]\pi_1(X)') = h([\phi])$ . Assim,*

$$H_1(X) \simeq \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]} = \pi_1(X)_{ab}.$$

Demonstração: Para detalhes, ver [2], Teorema 2.A.1. □

**Observação 6** *O isomorfismo  $\bar{h} : \pi_1(X)_{ab} \rightarrow H_1(X)$  é chamado de **isomorfismo de Hurewicz**.*

Se soubermos o grupo fundamental de um espaço  $X$  conexo por caminhos podemos, através do isomorfismo de Hurewicz, obter  $H_1(X)$ .

**Exemplo 8** Considere a esfera  $\mathbb{S}^n$ ,  $n \geq 1$ . Então

$$\pi_1(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 1 \\ \{1\} & \text{se } n > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad H_1(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 1 \\ \{0\} & \text{se } n \neq 1. \end{cases}$$

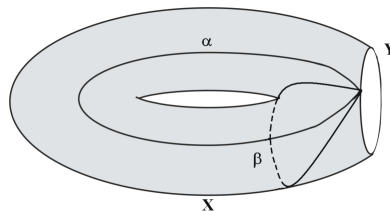
**Exemplo 9** Considere o toro  $\mathbb{T}^2$ . Então  $\pi_1(\mathbb{T}^2) = H_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

**Exemplo 10** Se  $X$  é a figura-oito (união de dois círculos tangentes em um ponto) então

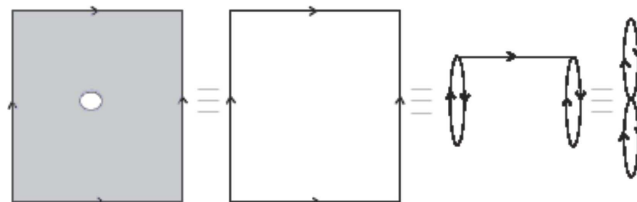
$$\pi_1(X) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad H_1(X) = \pi_1(X)_{ab} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

O próximo exemplo mostra que os homomorfismos induzidos por uma aplicação contínua de  $Y$  em  $X$  nos grupos  $\pi_1$  e  $H_1$  podem ter propriedades distintas.

**Exemplo 11** Seja  $X = T^2 - D$  o toro menos um disco aberto e seja  $Y = \partial D$ , como mostra a figura.

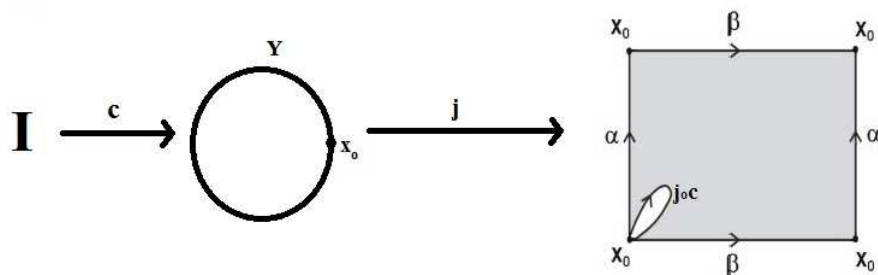


Então,  $\pi_1(X) \simeq \langle [\alpha] * \langle [\beta] \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ . Isto segue do fato que  $X$  tem o mesmo tipo de homotopia da “Figura 8”. Para visualizar isto geometricamente, considere o fato de que o toro pode ser obtido de uma região quadrangular identificando os lados opostos e assim obtemos a figura abaixo:



Considere  $j : Y \rightarrow X$  a aplicação inclusão de  $Y$  em  $X$ . Vamos determinar os homomorfismos induzidos  $j_{\#}$  em  $\pi_1$  e  $j_*$  em  $H_1$ .

Seja  $c : I \rightarrow Y$  o laço padrão em  $Y \approx \mathbb{S}^1$ , que também pode ser visto como um 1-ciclo. Geometricamente temos:



Pode-se mostrar que  $j \circ c \sim \alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1}$  em  $X$ .

Vamos determinar o homomorfismo induzido

$$j_{\#} : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X).$$

Temos  $\pi_1(Y) = \langle [c] \rangle \simeq \mathbb{Z}$ . Assim,

$$j_{\#}([c]) = [j \circ c] = [\alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1}] = [\alpha][\beta][\alpha]^{-1}[\beta]^{-1}$$

que é um elemento não trivial em  $\pi_1(X) \simeq \langle [\alpha] \rangle * \langle [\beta] \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .

Segue disto que  $j_{\#}$  é um monomorfismo.

Para a homologia temos  $H_1(Y) = \langle \bar{c} \rangle \simeq \mathbb{Z}$  e  $H_1(X) = \langle \bar{\alpha} \rangle \oplus \langle \bar{\beta} \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Considere o homomorfismo induzido em  $H_1$ ,

$$j_* : H_1(Y) \rightarrow H_1(X).$$

Como  $c$  é um 1-simplexo singular que é um 1-ciclo,  $j \circ c$  é um 1-ciclo e  $j \circ c \sim \alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1}$  segue que

$$\overline{j \circ c} = \overline{\alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1}} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} - \bar{\alpha} - \bar{\beta} = 0.$$

Assim,

$$j_*(\bar{c}) = \overline{j \circ c} = 0.$$

Daí,  $j_*$  é o homomorfismo nulo.

**Observação 7** O grupo fundamental,  $\pi_1(X)$ , por ser uma ferramenta da teoria de homotopia, tem um apelo mais geométrico que o grupo  $H_1(X)$ , que faz uso da Álgebra Homológica para ser definido. No entanto, como o grupo  $H_1(X)$  é abeliano, o que geralmente não acontece com  $\pi_1(X)$ , ele torna-se mais fácil de lidar. Apesar da relação entre  $\pi_1(X)$  e  $H_1(X)$  e de que aparentemente eles fornecem resultados similares sobre o espaço topológico  $X$ , há diferenças claras entre as informações fornecidas por esses grupos quando se trabalha, por exemplo, com espaços de recobrimento (e a relação do grupo fundamental com o grupo das transformações de recobrimento), teoria de nós, espaços de Eilenberg-MacLane, dentre outros assuntos.

## Referências

- [1] Andrade, Maria Gorete C., Fanti, Ermínia L. C.; *Grupo Fundamental - uma visão geométrica, Notas de Seminários*, Departamento de Matemática-IBILCE-Unesp, São José do Rio Preto, 1996.
- [2] Hatcher, Allen; *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [3] Vick, James W.; *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology*, Academic Press, 1973.
- [4] Croom, Fred H.; *Basic Concepts of Algebraic Topology*, New York : Springer-Verlag, 1978.