

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

FISSÃO COULOMBIANA INDUZIDA DO ^{238}U *

Claudia Ianes Barbosa

*Dissertação realizada sob a orientação
do Dr. Diógenes Galetti e apresen-
tada no Instituto de Física Teórica,
em preenchimento final dos requisitos
para a obtenção do título de mestre em
Física.*



São Paulo, Setembro de 1992

*Trabalho Financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Índice

Introdução 1

Capítulo I 10

Capítulo II 20

Capítulo III 30

Capítulo IV 40

Capítulo V 50

Capítulo VI 60

Capítulo VII 70

Capítulo VIII 80

Capítulo IX 90

Capítulo X 100

Resumo

Estuda-se o aumento da probabilidade de fissão do ^{238}U , associado à mudança na barreira de potencial, devido à interação coulombiana durante o espalhamento subcoulombiano de um íon pesado pelo ^{238}U . Para isso, considera-se o modelo de gota líquida, a fenomenologia de camadas segundo proposta de Myers & Swiatecki e a interação coulombiana monopolo do projétil-quadrupolo do alvo. A probabilidade de fissão é calculada segundo proposta de I. Kelson. Os resultados obtidos estão em bom acordo com os dados experimentais, se considerada a simplicidade do modelo.

Abstract

The increase in the fission probability of ^{238}U , associated with changes in the potential barrier, due to coulombian interaction during subcoulombian scattering of a heavy-ion by ^{238}U is studied. To this goal, the liquid drop model, shell correction calculated according to Myers & Swiatecki's proposal and projectile monopole-target quadrupole coulomb interaction are considered. Fission probability is calculated following I. Kelson's proposal. Results are in good agreement with experiments if model simplicity is considered.

Índice

I	Introdução	2
II	Os Modelos	5
II.1	Modelo de Myers & Swiatecki	5
II.2	Modelo de Strutinskii	14
II.3	Modelo Simplificado	17
III	Cálculo da Probabilidade de Fissão	25
IV	Aplicações	30
V	Conclusões	37
A	Parâmetros de Deformação	40
B	Cálculo das Integrais $I_{\alpha\beta}^n$	42
C	Gráficos $^{238}\text{U} - ^{208}\text{Pb}$ para diferentes valores r_0 , a_{sp} e α	45
	Referências Bibliográficas	55

Capítulo I

Introdução

A fissão nuclear é um dentre os vários processos importantes estudados em Física Nuclear e, nas palavras de R. Vandenbosch “... capturou a imaginação de químicos e físicos por mais de meio século” [1]. Tal importância pode ser justificada não só pelas mudanças que sua descoberta introduziu nas teorias nucleares como também pelas novas informações que ainda fornece sobre o núcleo. Mesmo a história desta descoberta apresenta suas peculiaridades.

Quando em 1934 Enrico Fermi e seus colaboradores irradiaram urânio com neutrons pela primeira vez [1], pretendiam estender a tabela periódica pela obtenção do elemento transurânico 93, via reação (n, γ) e subsequente decaimento beta. Isto era razoável segundo as teorias e os experimentos conhecidos na época, para os quais os produtos de uma reação nuclear deveriam possuir números atômicos bastante próximos dos núcleos originais. Entretanto, o urânio irradiado forneceu produtos incompreensíveis para a época, assim como uma mistura de vários períodos de decaimento. A tentativa de desvendar o fenômeno deu início então a uma sucessão de erros e acertos e envolveu físicos e químicos de renome tais como Otto Hahn, Lise Meitner, Strassman, Irène e Joliot Curie entre outros. Dentre as personagens desta história merece menção a química inorgânica Ida Noddack [1], que num artigo também de 1934 sugeriu pela primeira vez que os produtos observados poderiam ser núcleos bem mais leves que o urânio. Infelizmente, tal sugestão não foi seriamente considerada na época, visto que nenhum experimento neste sentido foi levado a cabo.

Foram necessários mais quatro anos de pesquisas (as mais relevantes sendo provavel-

mente as do grupo alemão), para que finalmente em 1938 Lise Meitner e seu sobrinho Otto Robert Frisch sugerissem que os núcleos de *Ba*, identificados pelo grupo de Otto Hahn, eram devidos a um processo de fissão do urânio em dois núcleos menores, que adquiriam então energia cinética devido à repulsão coulombiana, dando origem aos pulsos observados. A fissão nuclear, nome sugerido pelo processo de divisão de células biológicas, foi então extensamente estudada e verificada em experimentos subsequentes, e descrita qualitativamente em termos do modelo de gota líquida de N. Bohr, primeiramente por Meitner e Frisch, e posteriormente por Bohr e Wheeler (1939).

Na década de quarenta as experiências com fissão nuclear tornaram-se numerosas, motivadas principalmente pelas implicações militares do processo, enquanto que a teoria ficou praticamente abandonada, limitada ao pouco desenvolvimento do modelo de gota líquida estático. Somente na década de cinquenta a teoria do processo de fissão tomou novo impulso, tendo surgido entre outros o modelo coletivo, o modelo de camadas e o modelo unificado.

Apesar dos mais de cinquenta anos de pesquisa sobre fissão nuclear, este fenômeno ainda não está totalmente compreendido e continua capaz de surpreender (como a mais recente descoberta do terceiro mínimo da barreira de fissão [2]) o que leva à caracterização do processo como extremamente complexo. Entretanto, como disse Wilets [3], pode-se esperar que ele seja tão complexo que algumas simplificações possam ser introduzidas.

Dos mecanismos de fissão conhecidos é de interesse aquele da indução da fissão em núcleos da região dos actínídeos devido à interação coulombiana com íons pesados durante processos de colisão. Os actínídeos são particularmente úteis para este estudo devido à sua natural fissibilidade e dentre eles, o ^{238}U mostra-se como uma boa escolha devido ao maior número de experimentos que constam da literatura.

Um modelo teórico simplificado para o estudo da fissão coulombiana induzida pode ser elaborado considerando-se o espalhamento a energias subcoulombianas, o que leva à não-inclusão de forças nucleares no modelo, mas ainda deve conter os fenômenos físicos relevantes. Sendo assim, pode-se escrever uma expressão para a energia potencial do núcleo fissil como função da deformação, composta por um termo devido ao modelo de gota líquida e outro associado à fenomenologia de camadas, segundo a proposta de Myers & Swiatecki

[4], e mais um termo que descreve a componente da interação coulombiana relevante para o processo, na forma aproximada monopolo do projétil-quadrupolo do alvo.

A probabilidade de fissão do núcleo considerado pode ser calculada segundo proposta de I. Kelson [5]. Divide-se a trajetória do projétil em pequenos intervalos e contabiliza-se o efeito da interação coulombiana sobre a barreira e a probabilidade de que o núcleo fissione em cada um destes intervalos, não esquecendo que esta probabilidade deve ser multiplicada pela de que o núcleo não tenha fissionado no intervalo anterior. A soma destes produtos sobre todos os intervalos fornece a probabilidade de fissão total. Finalmente, o produto desta probabilidade pela secção de choque Rutherford fornece a secção de choque de fissão induzida.

No capítulo que segue é apresentado com maiores detalhes o modelo de Myers & Swiatecki, que posteriormente é utilizado na construção de um modelo simplificado para descrever a fissão coulombiana induzida. Com um caráter puramente ilustrativo é apresentado também o modelo de Strutinskii, um modelo microscópico para a fenomenologia de camadas. O cálculo da probabilidade de fissão é descrito no capítulo III e as aplicações feitas do modelo simplificado são mostradas no capítulo IV. Finalmente, as dificuldades e os sucessos do modelo são avaliadas no capítulo V, e possíveis refinamentos são sugeridos.

Para maior facilidade na leitura deste trabalho, detalhes dos cálculos mais elaborados e outras minúcias foram separados em apêndices que encontram-se no final do texto.

Capítulo II

Os Modelos

II.1 Modelo de Myers & Swiatecki

Este é um modelo semi-empírico [4] que consegue, utilizando-se de um termo de energia de gota líquida e outro proveniente de um modelo fenomenológico de correção de camada, descrever muito bem a energia potencial média de um núcleo.

Do modelo de gota líquida tem-se a previsão de que a forma de maior estabilidade para o núcleo será a esférica. Um vasto material sobre as discrepâncias entre a forma observada e esta previsão, e sobre a diferença das massas nucleares para o previsto pelo modelo foi acumulado, levando à conclusão de que tais desvios devem estar associados com a estrutura nuclear de camadas.

O modelo de Myers & Swiatecki está baseado no fato de que tanto as discrepâncias nas massas nucleares quanto as configurações deformadas estáveis estão associadas com o fenômeno de adensamento ou rarefação dos níveis de energia no entorno do nível de Fermi.

Assim, o que Myers & Swiatecki propõem, é escrever um termo de energia de correção para o modelo de gota líquida proveniente da estrutura de camadas, que satisfaça esta exigência. Deste modo a fórmula de massa para um núcleo deformado é

$$M(N, Z, \theta) = M_{GL}(N, Z, \theta) + M_{CC}(N, Z, \theta), \quad (\text{II.1})$$

onde θ é o parâmetro que mede a deformação, M_{GL} é o termo de massa associado ao modelo de gota líquida, M_{CC} é o termo de massa associado à correção de camada.

No modelo de gota líquida o núcleo é descrito como uma gota de densidade constante e uniformemente carregada, com uma superfície bem definida parametrizada por

$$R(\theta', \phi) = \lambda_0^{-1} R_0 \left[1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta', \phi) \right], \quad (\text{II.2})$$

ou no caso de simetria axial

$$R(\theta') = \lambda_0^{-1} R_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta') \right], \quad (\text{II.3})$$

onde λ_0 garante a constância de volume da gota sob deformações

$$\lambda_0 = \left\{ \frac{1}{2} \int \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta') \right]^3 d(\cos \theta') \right\}^{1/3}. \quad (\text{II.4})$$

$Y_{\lambda\mu}(\theta', \phi)$ são os harmônicos esféricos, $\alpha_{\lambda\mu}$ são parâmetros de deformação, R_0 é o raio da gota esférica, θ' e ϕ são os ângulos de orientação do núcleo (vide figura II.1), a_n são parâmetros de deformação, $P_n(\cos \theta')$ são os polinômios de Legendre.

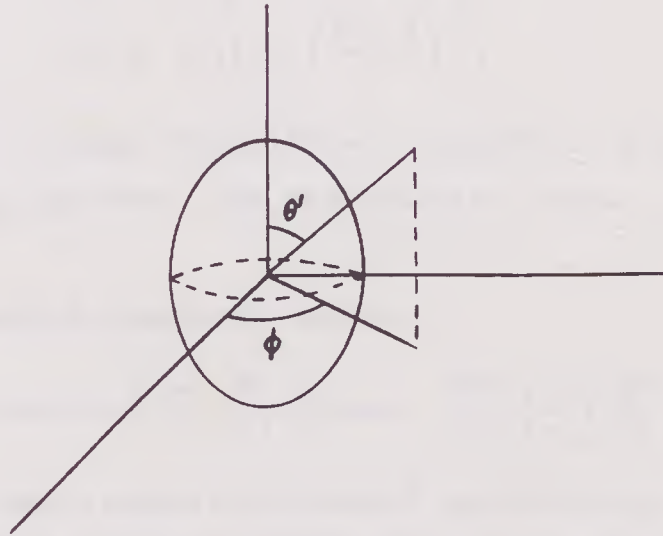


Figura II.1: Ângulos de orientação do núcleo, θ' e ϕ .

A fórmula de massa para o modelo da gota líquida pode ser escrita como

$$M_{GL}(N, Z, \theta) = M_n N + M_H Z + (\text{energia volumétrica}) + (\text{energia de superfície}) \\ + (\text{energia eletrostática}) + \delta, \quad (\text{II.5})$$

aqui M_n é a massa do neutron, M_H é a massa do átomo de hidrogênio e δ é um termo associado com o número de protons e neutrons (ser par ou ímpar) ou mais simplesmente, correção par-ímpar. Sejam

$$\begin{aligned} \text{energia volumétrica} &= -C_1 A \\ \text{energia de superfície} &= C_2 A^{2/3} f(\text{forma}), \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

onde C_1 e C_2 são a energia de ligação volumétrica por partícula e o coeficiente de energia de superfície respectivamente. Pode-se assumir que estes parâmetros têm o mesmo comportamento, ambos anulando-se para um excesso de neutrons, tendo a forma

$$\begin{aligned} C_1 &= a_1 \left[1 - k \left(\frac{N - Z}{A} \right)^2 \right], \\ C_2 &= a_2 \left[1 - k \left(\frac{N - Z}{A} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

com a_1 , a_2 , k constantes. A função $f(\text{forma})$ fornece a dependência da energia superficial com a forma e é igual à razão entre a área da superfície em questão e a área da esfera original.

Para a energia eletrostática tomaremos a expressão

$$\text{energia eletrostática} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}} g(\text{forma}) - \frac{\pi^2}{2} \frac{e^2}{r_0} \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \frac{Z^2}{A}, \quad (\text{II.8})$$

onde $g(\text{forma})$ é a razão entre a energia eletrostática de uma distribuição de carga ligeiramente distorcida e aquela de uma esfera. O segundo termo é uma correção da energia eletrostática devida à deformação arbitrária; basicamente, calcula-se a diferença entre uma densidade de carga bem definida e uma difusa, multiplica-se esta diferença pelo potencial eletrostático esférico e efetua-se a integração em todo espaço. Aqui d é um parâmetro que mede a largura da superfície numa distribuição do tipo Fermi (Woods-Saxon), que

especifica a queda na densidade de carga através desta superfície, e seu valor experimental é 0.5461 fm.

Finalmente, a correção par-ímpar será tomada baseado em observações experimentais [6] , como sendo

$$\delta \begin{cases} -\frac{11}{A^{1/2}} & \text{para núcleos par-par,} \\ 0 & \text{para núcleos de massa ímpar,} \\ \frac{11}{A^{1/2}} & \text{para núcleos ímpar-ímpar.} \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Seja agora o termo de massa associado à correção de camada. Este pode ser escrito, de modo a satisfazer algumas exigências dos resultados experimentais, como

$$M_{CC}(N, Z, \theta) = C s(N, Z) e^{-\overline{(\delta R)^2}/a^2}, \quad (\text{II.10})$$

onde C é um fator de amplitude, $s(N, Z)$ é uma função adimensional de N e Z (cuja forma deve satisfazer a exigência de empacotamento dos níveis de energia nos números mágicos, evidenciada por uma queda repentina no valor da massa para tais números), a exponencial negativa é um fator de atenuação que garante o desaparecimento desta correção para grandes deformações (a escolha da forma gaussiana deve-se a considerações qualitativas e não é essencial para os resultados; formas “bell-shaped” dão o mesmo resultado) e a é o alcance deste termo de correção.

A deformação, especificada aqui por $\overline{(\delta R)^2}$, nada mais é que o desvio quadrático médio da diferença entre $R(\theta', \phi)$ no caso deformado e no caso esférico:

$$\overline{(\delta R)^2} = \frac{\int \int [R(\theta', \phi) - R_0]^2 d\Omega}{\int \int d\Omega}, \quad (\text{II.11})$$

onde $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido.

No limite do caso esférico, isto é, para $\overline{(\delta R)^2} = 0$, denota-se $C s(N, Z)$ por $S(N, Z)$. Para obter $S(N, Z)$, considera-se a diferença das contribuições de partícula única para a energia total, entre os casos com e sem empacotamento dos níveis. Para calcular estas contribuições de partícula única, adota-se a descrição que trará maior simplicidade para o problema, isto é, o caso com empacotamento é descrito pelo corte dos níveis de partícula única em grupos que são então “comprimidos” de forma a produzir hiatos nos números mágicos, enquanto o espectro dos níveis sem empacotamento corresponde àquele de um gás de Fermi degenerado.

No caso extremo de empacotamento total em níveis degenerados (ver figura II.2), separa-se o espectro de energia em grupos, fazendo os cortes nos números mágicos e empacotando completamente estes grupos de níveis nas posições $t_1, t_2, \dots, t_i$ etc. de baixo para cima no poço de potencial, de modo a deixar hiatos nos números mágicos [4]. É importante notar que o empacotamento total pode não ser a descrição mais fiel da situação, mas fornece resultados bastante razoáveis, sem trazer maiores dificuldades para os cálculos.

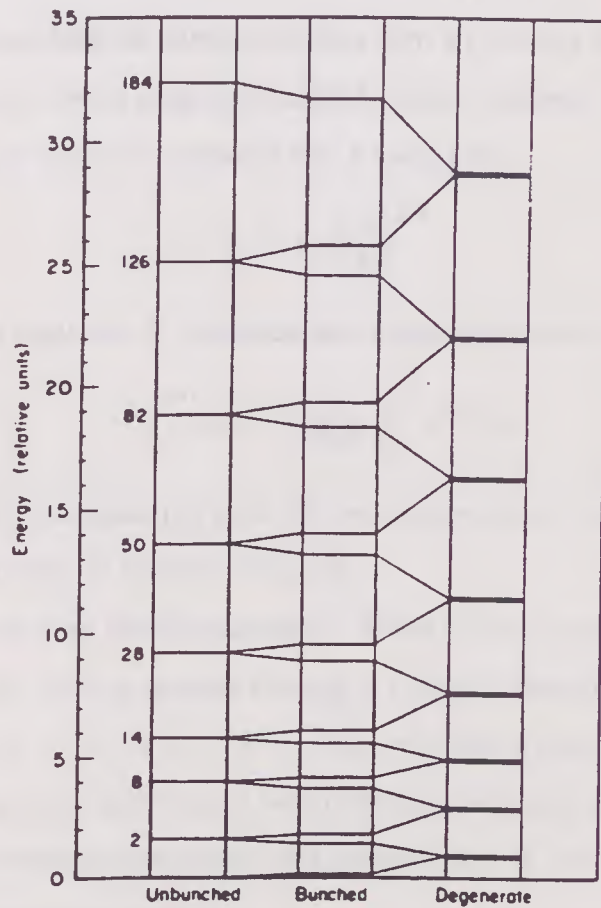


Figura II.2: Diagrama esquemático do espectro de níveis de um gás de Fermi (à esquerda), que foi dividido nos números mágicos formando bandas, cujos níveis foram então adensados. O grau de adensamento é de 100% a direita e 17.5% no centro (este grau de adensamento é deduzido de experimentos) [4].

Seja inicialmente o caso sem empacotamento. Pode-se assumir que o tamanho do poço de potencial é proporcional a $A = N + Z$; existem núcleos para os quais $N = Z = A/2$

de modo que o gás de Fermi preencherá o poço até um certo valor, igual à energia t_F de um gás de Fermi, independente de A (t_F se relaciona com a constante de raio nuclear r_0 por $t_F = (9\pi/8)^{2/3}(\hbar^2/(2Mr_0^2))$ onde M é a massa do nucleon). Pode-se então escrever as energias máximas dos gases de Fermi que representam neutrons e protons nos casos sem empacotamento como

$$t_N = t_F \left[\frac{N}{A/2} \right]^{2/3} \quad t_Z = t_F \left[\frac{Z}{A/2} \right]^{2/3}, \quad (\text{II.12})$$

devido à proporcionalidade da energia cinética com a potência $2/3$ do número de partículas de um gás de Fermi. Desta proporcionalidade segue também que a energia cinética t do n -ésimo neutron num poço de tamanho fixo é dada por

$$t_n = t_N \left[\frac{n}{N} \right]^{2/3} \quad (\text{II.13})$$

e a energia cinética total dos N neutrons sem empacotamento será

$$\int_0^N t_n dn = \frac{t_N}{N^{2/3}} \int_0^N n^{2/3} dn \quad (\text{II.14})$$

(O uso de integrais é justificado por estar-se desconsiderando o caráter discreto dos nucleons, o que é razoável no caso de núcleos pesados).

Seja agora o caso com empacotamento. Todos os níveis entre dois números mágicos sucessivos M_{i-1} e M_i terão a mesma energia t_i e assim contribuirão na mesma proporção para uma integral de $n = 0$ a $n = N$. É fácil ver que haverá vários t_i 's, um para cada camada, separados entre si por valores bem definidos, de modo que pode-se tomar a energia total dos neutrons empacotados como uma integral de 0 a N sobre uma “função escada”, $t_{escada}(n)$, que será definida como

$$t_{escada}(n) = \frac{t_N}{N^{2/3}} q(n), \quad (\text{II.15})$$

onde $q(n)$ é uma função escada adimensional. Esta função $q(n)$ pode ser escrita de vários modos, com os mais variados graus de refinamento. Seja a situação mais simples e ainda assim fisicamente coerente: se $q(n)$ deve representar um espectro empacotado, as t_i 's devem ficar ao menos nas vizinhanças dos níveis que representam, de modo que supor as t_i 's na posição média das bandas é uma aproximação bastante razoável. Logo, $q(n)$ fica sendo o

valor médio de $n^{2/3}$ entre M_{i-1} e M_i

$$q(n) \equiv q_i = \frac{\int_{M_{i-1}}^{M_i} n^{2/3} dn}{\int_{M_{i-1}}^{M_i} dn} = \frac{3}{5} \frac{M_i^{5/3} - M_{i-1}^{5/3}}{M_i - M_{i-1}} \quad \text{para } M_{i-1} < n < M_i \quad (\text{II.16})$$

Vale notar que esta forma de $q(n)$ já prenuncia as desejadas quedas no valor das massas nos números mágicos, a primeira exigência.

Voltemos a integral; analogamente a (II.14) pode-se escrever a energia cinética total para neutrons no caso com empacotamento como

$$\frac{t_N}{N^{2/3}} \int_0^N q(n) dn, \quad (\text{II.17})$$

de modo que a diferença de energia entre os casos empacotado e não-empacotado será, para os neutrons

$$\frac{t_N}{N^{2/3}} F(N), \quad (\text{II.18})$$

com $F(N) = \int_0^N [q(n) - n^{2/3}] dn$.

Finalmente, considerando o empacotamento dos protons como análogo ao dos neutrons, pode-se escrever a diferença total de energia entre os casos empacotado e não-empacotado como

$$\begin{aligned} S(N, Z) &\equiv \Delta E = \Delta E_N + \Delta E_Z = \frac{t_N}{N^{2/3}} F(N) + \frac{t_Z}{Z^{2/3}} F(Z) = \\ &= \frac{t_F}{(A/2)^{2/3}} [F(N) + F(Z)], \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

e (II.10) pode ser reescrita

$$M_{CC}(N, Z, \theta) = S(N, Z) e^{-\overline{(\delta R)^2}/a^2}, \quad (\text{II.20})$$

com $S(N, Z)$ dada por (II.19).

Assim, a fórmula de massa com os termos de gota líquida e de correção de camada fica

$$\begin{aligned} M(N, Z, \theta) &= M_{GL}(N, Z, \theta) + M_{CC}(N, Z, \theta) = \\ &= M_n N + M_H Z + (\text{energia volumétrica}) + (\text{energia de superfície}) + \\ &\quad + (\text{energia eletrostática}) + \delta + S(N, Z) e^{-\overline{(\delta R)^2}/a^2}, \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

que está completa com as expressões de (II.6) a (II.9) e (II.19). Visto que a dependência de (II.21) com a forma do núcleo vem através de $\overline{(\delta R)^2}$, $f(\text{forma})$ e $g(\text{forma})$, pode-se ainda reescrever esta expressão de maneira mais conveniente. Seja a expressão (II.3) que parametriza a superfície nuclear no caso em que existe simetria axial. Pela definição

$$\begin{aligned}\overline{(\delta R)^2} &= R_0^2 \sum_n \frac{a_n^2}{2n+1}, \\ f &= 1 + \sum_n \frac{(n-1)(n+2)}{2(2n+1)} a_n^2 + \dots, \\ g &= 1 - \sum_n \frac{5(n-1)}{(2n+1)^2} a_n^2 + \dots\end{aligned}\quad (\text{II.22})$$

Se forem considerados os termos das expansões até a_2

$$\begin{aligned}\overline{(\delta R)^2} &= \frac{R_0^2}{5} a_2^2, \\ f &= 1 + \frac{2}{5} a_2^2 - \frac{4}{105} a_2^3 + \dots, \\ g &= 1 - \frac{1}{5} a_2^2 - \frac{4}{105} a_2^3 + \dots\end{aligned}\quad (\text{II.23})$$

No caso de um formato elipsoidal, descrito com a ajuda de um parâmetro de deformação extra σ e um parâmetro de forma γ (vide Apêndice A), e relacionados com os semi-eixos a , b , c por

$$\begin{aligned}a &= R_0 \exp \left[\sigma \cos \left(\gamma - \frac{2}{3} \pi \right) \right], \\ b &= R_0 \exp \left[\sigma \cos \left(\gamma + \frac{2}{3} \pi \right) \right], \\ c &= R_0 \exp [\sigma \cos \gamma],\end{aligned}\quad (\text{II.24})$$

tem-se

$$\begin{aligned}\overline{(\delta R)^2} &= R_0^2 \frac{\sigma^2}{5} \left(1 - \frac{\sigma}{7} \cos 3\gamma \right) + \text{potências maiores de } \sigma, \\ f &= 1 + \frac{2}{5} \sigma^2 - \frac{2}{21} \sigma^3 \cos 3\gamma + \text{potências maiores de } \sigma, \\ g &= 1 - \frac{1}{5} \sigma^2 - \frac{1}{105} \sigma^3 \cos 3\gamma + \text{potências maiores de } \sigma.\end{aligned}\quad (\text{II.25})$$

Fazendo uma mudança de variáveis nos parâmetros de deformação (vide equações A.1 e A.2) pode-se reescrever as (II.25)

$$\begin{aligned}
\overline{(\delta R)^2} &= R_0^2 \frac{1}{5} \alpha^2, \\
f &= 1 + \frac{2}{5} \alpha^2 - \frac{4}{105} \alpha^3 \cos 3\gamma + \text{potências maiores de } \alpha, \\
g &= 1 - \frac{1}{5} \alpha^2 - \frac{4}{105} \alpha^3 \cos 3\gamma + \text{potências maiores de } \alpha.
\end{aligned} \tag{II.26}$$

Substituindo estas expressões, (II.21) fica então

$$\begin{aligned}
M(N, Z, \alpha, \gamma) &= M_n N + M_H Z - C_1 A + C_2 A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5} \alpha^2 - \frac{4}{105} \alpha^3 \cos 3\gamma \right) + \\
&\quad + \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{1}{5} \alpha^2 - \frac{4}{105} \alpha^3 \cos 3\gamma \right) - \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \frac{e^2}{r_0} \frac{Z^2}{A} + \\
&\quad + \delta + S(N, Z) e^{-\alpha^2/\alpha_0^2},
\end{aligned} \tag{II.27}$$

Redefinindo (II.27) em termos de um novo parâmetro de deformação (vide A.5)

$$M(N, Z, \theta) = M_0 + E\theta^2 - F\theta^3 \cos 3\gamma + S(N, Z) e^{-\theta^2}, \tag{II.28}$$

onde

$$\begin{aligned}
M_0 &= M_n N + M_H Z - C_1 A + C_2 A^{2/3} + C_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - C_4 \frac{Z^2}{A} + \delta, \\
C_3 &= \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0}, \\
C_4 &= \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \frac{e^2}{r_0}, \\
E &= \left(\frac{2}{5} C_2 A^{2/3} - \frac{1}{5} C_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \right) \alpha_0^2, \\
F &= \frac{4}{105} \left(C_2 A^{2/3} + C_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \right) \alpha_0^3.
\end{aligned} \tag{II.29}$$

Pode-se notar que M_0 é a massa da gota não distorcida. Além disso, E é um coeficiente que especifica a resistência da gota contra deformações esferoidais. O parâmetro de deformação γ será tomado nulo na expressão final (ver II.55), pois será considerada a situação de deformação mais simples.

Juntamente com (II.7) e (II.19), (II.28) está completa. Os parâmetros restantes são fixados via ajuste dos resultados experimentais e são

$$a_1 = 15.677 \text{ MeV}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= 18.56 \text{ MeV} \\
e^2 &= 1.44 \text{ MeV} \\
r_0 &= 1.2049 \text{ fm} \\
k &= 1.7826
\end{aligned} \tag{II.30}$$

Usando a expressão (II.28) pode-se redefinir (II.19) ao subtrair as massas de gota líquida dos valores experimentais das massas e obtém-se

$$S(N, Z) = \left[\frac{F(N) + F(Z)}{(A/2)^{2/3}} - 0.26A^{1/3} \right] 5.8 \tag{II.31}$$

Vale dizer que (II.28) tem um caráter duplo: devido à sua dependência com o parâmetro de deformação θ , esta expressão não só é uma equação de massa, como também fornece uma expressão para a energia potencial de deformação do núcleo, o que é de extrema importância neste trabalho (ver equação II.55).

II.2 Modelo de Strutinskĩ

Existe outro esquema que pode ser utilizado para calcular a energia potencial média de núcleos deformados, que também usa uma construção envolvendo um termo devido ao modelo de gota líquida e outro devido à estrutura de camadas, que foi proposto por V. M. Strutinskĩ [7]. Tal método difere daquele de Myers & Swiatecki basicamente no modo como são contadas as energias de partícula única para a correção de camadas.

Verificou-se que a simples soma das energias de partícula única não reproduzia bem a energia potencial do núcleo para grandes deformações. Strutinskĩ sugeriu então que o adensamento/rarefação dos níveis de energia não era homogêneo, isto é, seria mais realisticamente descrito por uma densidade de níveis $g(E)$, que foi definida como sendo

$$g_\gamma(E) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\gamma} \sum_\nu \exp[-(E - E_\nu)^2/\gamma^2] \tag{II.32}$$

onde γ é o intervalo em que é considerado o adensamento/rarefação e $E_\nu(\eta)$ são os níveis de partícula única para uma dada deformação η (vide A.6).

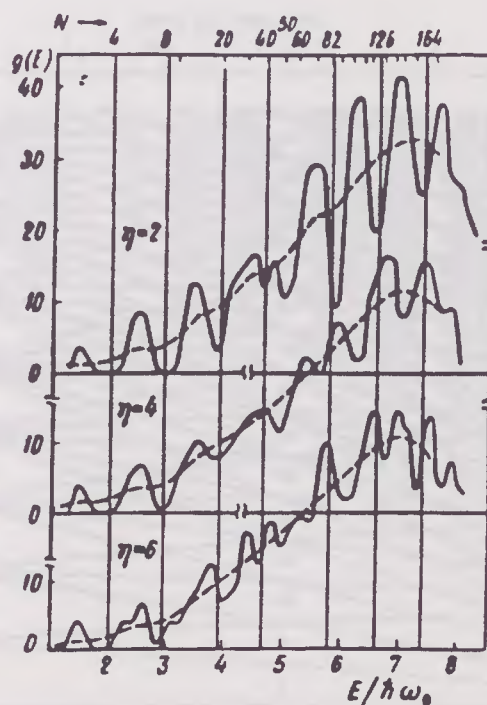


Figura II.3: Densidade de níveis de partícula única $g_\nu(\eta, E)$ calculado de acordo com (II.32) para o esquema de níveis de Nilsson, para diferentes deformações η . As linhas pontilhadas correspondem a uma densidade de níveis homogênea, enquanto as linhas sólidas estão associadas à estrutura de camadas. A queda das curvas para $E > 7.0$ deve-se ao fato dos níveis de camadas mais altas não terem sido considerados [7].

Com a ajuda do esquema de níveis do modelo de Nilsson e da equação (II.32), pode-se montar o gráfico da figura (II.3), onde as linhas verticais correspondem aos números mágicos e tem-se $g(E)$ como função da energia dos níveis para três valores da deformação η . É interessante notar neste gráfico que para $\eta = 2$ a função $g(E)$ tem seus mínimos nos números mágicos, mas para deformações maiores isto se inverte, ficando $g(E)$ máximo nos números mágicos. Isto se deve ao cruzamento de níveis, como pode ser visto na figura (II.4), no caso particular do potencial do tipo oscilador harmônico.

O modelo de Strutinskii, assim como o de Myers & Swiatecki, obtém sucesso na tentativa de explicar os núcleos para os quais a forma de maior estabilidade não é a esférica, e sim alguma deformada, mas o seu maior mérito é explicar a ocorrência, para alguns núcleos, dos chamados estados isoméricos de forma [8]. Vamos considerar um diagrama de níveis

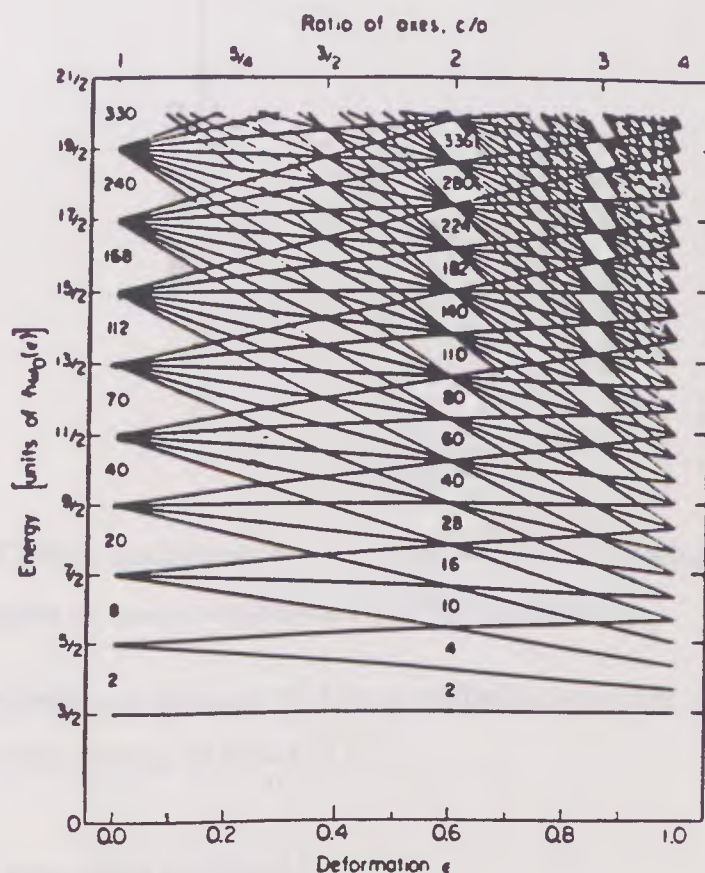


Figura II.4: Níveis de energia de um potencial tipo oscilador harmônico para deformações esferoidais prolatas ε (vide A.9) [8].

como o da figura (II.4). É fácil ver que um núcleo que apresente uma deformação tal que seu nível de Fermi esteja numa região de baixa densidade de níveis estará mais ligado do que aquele cujo nível de Fermi estiver numa região de alta densidade de níveis. Mais do que isso, devido ao cruzamento de níveis, o gráfico da energia potencial como função da deformação poderá apresentar mais de um mínimo (vide figura II.5), o que de fato ocorre para núcleos muito pesados, sendo estes os chamados estados isoméricos de forma.

Pode-se concluir de tudo o que foi dito aqui que o modelo de Strutinskii é mais completo do ponto de vista microscópico e fornece explicação para mais fenômenos que o modelo de Myers & Swiatecki. Entretanto, por uma questão de simplificação dos cálculos, será adotada a descrição destes últimos, já citada na seção II.1, acreditando que os resultados mais relevantes deste trabalho não serão radicalmente afetados por tal escolha. (Particularmente

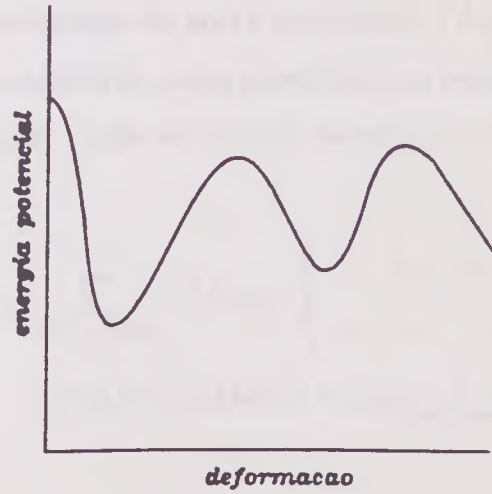


Figura II.5: Gráfico qualitativo de energia potencial $\times$ deformação para um núcleo com duas deformações de maior estabilidade (“duplo mínimo”).

no que diz respeito aos isômeros de forma, trabalhar-se-á com um potencial médio e não com uma barreira como a da figura II.5.)

II.3 Modelo Simplificado

Seja agora a fissão coulombiana induzida. Particularmente, seja o espalhamento de um íon pesado por um núcleo físsil na região dos actínídeos, de modo que o processo físico relevante na indução da fissão seja a interação coulombiana entre alvo e projétil.

A energia potencial do núcleo físsil será escrita como a soma de um termo devido ao modelo de gota líquida, outro devido à correção de camadas (segundo Myers & Swiatecki) e um terceiro devido à interação coulombiana com o projétil (depende das cargas do alvo e do projétil, do número de nucleons de ambos, da separação entre eles, da orientação e da deformação do alvo). Visto já ter-se falado dos dois primeiros, será tratada agora a descrição deste termo de interação.

Seja a interação considerada não-relativística. A energia potencial de interação coulombiana alvo-projétil pode então ser escrita como [9]

$$V(1, 2) = \int \int \frac{\rho_1(\vec{r}_1) \rho_2(\vec{r}_2)}{|\vec{r} + \vec{r}_1 - \vec{r}_2|} dr_1 dr_2, \quad (\text{II.33})$$

onde $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são os vetores posição do alvo e do projétil, $\vec{r}$ é a distância entre seus centros e $\rho_1(\vec{r}_1)$ e $\rho_2(\vec{r}_2)$ são as densidades de carga (medidas com respeito a seus centros de massa). Esta expressão (II.33) pode ainda ser escrita usando-se uma expansão de multipolos [9] como

$$V(1,2) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu} C(\lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu \end{pmatrix} \times \mathcal{M}_1(E\lambda_1, \mu_1) \mathcal{M}_2(E\lambda_2, \mu_2) \frac{1}{r^{\lambda_1 + \lambda_2 + 1}} Y_{\lambda_1 + \lambda_2, \mu}(\theta', \phi), \quad (\text{II.34})$$

onde

$$C(\lambda_1, \lambda_2) = (-1)^{\lambda_1 + \lambda_2} (4\pi)^{3/2} \left[\frac{(2\lambda_1 + 2\lambda_2)!}{(2\lambda_1 + 1)!(2\lambda_2 + 1)!} \right]^{1/2}, \quad (\text{II.35})$$

$\mathcal{M}_1(E\lambda_1, \mu_1)$ e $\mathcal{M}_2(E\lambda_2, \mu_2)$ são os momentos de multipolo dos dois núcleos e $Y_{\lambda_1 + \lambda_2, \mu}(\theta', \phi)$ são os harmônicos esféricos.

Os momentos de multipolo podem ser escritos na forma [10]

$$\mathcal{M}(E\alpha, \beta) = \int \rho(r, \theta', \phi) r^\alpha Y_{\alpha\beta}(\theta', \phi) d^3r. \quad (\text{II.36})$$

Aqui $\rho(r, \theta', \phi)$ é a densidade de carga do núcleo considerado, que será suposta descrita por

$$\rho(r, \theta', \phi) = \rho_0 S[r - R(\theta', \phi)], \quad (\text{II.37})$$

com

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \leq 0 \\ 0 & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad \text{função de Heaviside} \quad (\text{II.38})$$

e $\rho_0 \equiv \text{cte.}$

Como antes, $R(\theta', \phi)$ é a expressão que parametriza a superfície da gota (vide II.2), mas agora, por simplicidade, será escrita como

$$R(\theta', \phi) = \lambda_0^{-1} R_0 [1 + \gamma(\theta', \phi)], \quad (\text{II.39})$$

com

$$\gamma(\theta', \phi) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta', \phi). \quad (\text{II.40})$$

Substituindo (II.39) em (II.37)

$$\rho(r, \theta', \phi) = \rho_0 S \left\{ r - \lambda_0^{-1} R_0 [1 + \gamma(\theta', \phi)] \right\} \quad (\text{II.41})$$

e assim em (II.36)

$$\mathcal{M}(E\alpha, \beta) = \rho_0 \int S \left\{ r - \lambda_0^{-1} R_0 [1 + \gamma(\theta', \phi)] \right\} r^{\alpha+2} Y_{\alpha\beta}(\theta', \phi) d\Omega dr. \quad (\text{II.42})$$

Visto S ser uma função de Heaviside, pode-se efetuar a integração no elemento dr obtendo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(E\alpha, \beta) &= \rho_0 \frac{1}{\alpha+3} \left(\frac{R_0}{\lambda_0} \right)^{\alpha+3} \int [1 + \gamma(\Omega)]^{\alpha+3} Y_{\alpha\beta}(\theta', \phi) d\Omega \\ &= \rho_0 \frac{1}{\alpha+3} \left(\frac{R_0}{\lambda_0} \right)^{\alpha+3} \sum_{n=0}^{\alpha+3} \int \binom{\alpha+3}{n} \gamma^n(\Omega) Y_{\alpha\beta}(\theta', \phi) d\Omega \\ &= \rho_0 \frac{1}{\alpha+3} \left(\frac{R_0}{\lambda_0} \right)^{\alpha+3} \sum_{n=0}^{\alpha+3} \binom{\alpha+3}{n} \int \gamma^n(\Omega) Y_{\alpha\beta}(\theta', \phi) d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

Esta última integral será chamada de $I_{\alpha\beta}^n$ e calculada para os primeiros valores de n . (Só será calculada até $n = 3$ para que a dependência na deformação seja compatível com aquela da expressão da gota líquida.). Assim

$$I_{\alpha\beta}^n = \int \gamma^n(\Omega) Y_{\alpha\beta}(\theta', \phi) d\Omega = \int \left(\sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^* \right)^n Y_{\alpha\beta} d\Omega. \quad (\text{II.44})$$

Usando as propriedades dos harmônicos esféricos e considerando as simetrias do problema obtemos (vide Apêndice B e equação B.12)

$$\begin{aligned} I_{\alpha 0}^1 &= \alpha_{\alpha 0}, \\ I_{\alpha 0}^2 &= \sum_{\lambda\lambda'} \alpha_{\lambda 0} \alpha_{\lambda' 0} \sqrt{\frac{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)}{4\pi(2\alpha+1)}} < \lambda\lambda', 00 | \alpha 0 >, \\ I_{\alpha 0}^3 &= \sum_{\lambda\lambda'\lambda''} \alpha_{\lambda 0} \alpha_{\lambda' 0} \alpha_{\lambda'' 0} \sum_L \frac{[(2\lambda+1)(2\lambda'+1)(2\lambda''+1)(2\alpha+1)]^{1/2}}{4\pi(2L+1)} \\ &\quad \times < \alpha\lambda, 00 | L0 >^2 < \lambda'\lambda'', 00 | L0 >^2. \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

Para $\lambda = \lambda' = \lambda'' = 2$

$$\begin{aligned} I_{\alpha 0}^1 &= \alpha_{\alpha 0}, \\ I_{\alpha 0}^2 &= \alpha_{20}^2 \frac{5}{\sqrt{4\pi(2\alpha+1)}} < 22, 00 | \alpha, 0 >, \\ I_{\alpha 0}^3 &= \alpha_{20}^3 \frac{5^{3/2}}{4\pi} \sum_L \frac{\sqrt{2\alpha+1}}{2L+1} < \alpha 2, 00 | L0 >^2 < 22, 00 | L0 >^2. \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

Voltando para a expressão (II.43) e considerando o caso quadrupolar ($\alpha = 2$) consegue-se, após algum cálculo

$$\mathcal{M}(E2, 0) = \rho_0 \left(\frac{R_0}{\lambda_0} \right)^5 \left[\alpha_{20} + \sqrt{\frac{20}{49\pi}} \alpha_{20}^2 + \frac{15}{14\pi} \alpha_{20}^3 \right] . \quad (\text{II.47})$$

Lembrando que $\rho_0 = [Ze]/[4\pi R_0^3/3]$

$$\mathcal{M}(E2, 0) = \frac{3}{4\pi} Ze \frac{R_0^2}{\lambda_0^5} \left[\alpha_{20} + \sqrt{\frac{20}{49\pi}} \alpha_{20}^2 + \frac{15}{14\pi} \alpha_{20}^3 \right] . \quad (\text{II.48})$$

Seja novamente a expressão (II.34). Como $\mathcal{M}_1(E0, 0) = Z_1 e$ obtém-se, para o termo de interação monopolo do projétil-multipolo do alvo [9]

$$V(1, 2) = \sum_{\lambda_2 \geq 1, \mu_2} \frac{(4\pi)^{3/2} Z_1 e}{2\lambda_2 + 1} \frac{Y_{\lambda_2 \mu_2}(\theta', \phi)}{r^{\lambda_2 + 1}} \mathcal{M}_2(E\lambda_2, \mu_2) . \quad (\text{II.49})$$

Usando (II.48) e o termo de quadrupolo do alvo ($\lambda_2 = 2$)

$$V(1, 2) = \frac{(4\pi)^{3/2}}{5} \frac{Z_1 Z_2 e^2 R_0^2}{\lambda_0^5} \frac{Y_{20}(\theta')}{r^3} \left[\frac{3}{4\pi} \alpha_{20} + \frac{3}{14\pi} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \alpha_{20}^2 + \frac{45}{56\pi^2} \alpha_{20}^3 \right] . \quad (\text{II.50})$$

que é a expressão necessária para descrever a interação monopolo-quadrupolo elétrico do sistema projétil-alvo. Entretanto, ainda é preciso calcular λ_0 e escrever os termos do modelo de gota líquida, do modelo de camadas e (II.50) em função de um único parâmetro de deformação.

De (II.4)

$$\lambda_0 = \left\{ \frac{1}{2} \int \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta') \right]^3 d(\cos \theta') \right\}^{1/3} .$$

Considerando a situação de deformação quadrupolar

$$\lambda_0 = \left(1 + \frac{3}{5} a_2^2 + \frac{2}{35} a_2^3 \right)^{1/3} . \quad (\text{II.51})$$

Efetuando uma expansão em série de Taylor e tomando apenas os termos até $n = 3$

$$\lambda_0^{-5} \simeq 1 - a_2^2 - \frac{2}{21} a_2^3 . \quad (\text{II.52})$$

Considerando as expressões (A.3) a (A.5), (A.10) e (A.11) que inter-relacionam os diferentes parâmetros de deformação pode-se escrever λ_0^{-5} em função do parâmetro de deformação θ

$$\lambda_0^{-5} = 1 - \alpha_0^2 \theta^2 - \frac{2}{21} \alpha_0^3 \theta^3 . \quad (\text{II.53})$$

Reescrevendo (II.50) como função deste mesmo parâmetro θ e substituindo (II.53) temos

$$V(1, 2) = 3\pi \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} Z_1 Z_2 e^2 R_0^2 \frac{Y_{20}(\theta', \phi)}{r^3} \left[\frac{1}{2} \alpha_0 \theta + \frac{2}{7} \alpha_0^2 \theta^2 - \frac{1}{14} \alpha_0^3 \theta^3 \right] . \quad (\text{II.54})$$

Finalmente, com as expressões (II.28) a (II.31), pode-se escrever a expressão procurada para a energia potencial de deformação de um núcleo físsil, interagindo coulombianamente com um íon pesado durante uma colisão, na forma

$$\begin{aligned} V(N_1, Z_1, r, \theta, \theta', \phi) &= V_{GL}(N_1, Z_1, \theta) + V_{CC}(N_1, Z_1, \theta) + V_{IC}(N_1, Z_1, Z_2, r, \theta, \phi) \\ &= E(N_1, Z_1) \theta^2 - F(N_1, Z_1) \theta^3 + S(N_1, Z_1) e^{-\theta^2} \\ &\quad - 3\pi \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} Z_1 Z_2 e^2 R_0^2 \frac{Y_{20}(\theta')}{r^3} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2} \alpha_0 \theta + \frac{2}{7} \alpha_0^2 \theta^2 - \frac{1}{14} \alpha_0^3 \theta^3 \right] , \end{aligned} \quad (\text{II.55})$$

e, resumidamente

$$\begin{aligned} E(N, Z) &= \left[\frac{2}{5} C_2 A^{2/3} - \frac{1}{5} C_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \right] \alpha_0^2 , \\ F(N, Z) &= \frac{4}{105} \left[C_2 A^{2/3} + C_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \right] \alpha_0^3 , \\ C_2 &= a_2 \left[1 - k \left(\frac{N - Z}{A} \right)^2 \right] \\ a_2 &= 18.56 \text{ MeV} , \\ k &= 1.79 , \\ C_3 &= \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} , \\ e^2 &= 1.44 \text{ MeV} , \\ r_0 &= 1.2049 \text{ fm} , \\ \alpha_0^2 &= 5 \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 A^{-2/3} , \\ \frac{a}{r_0} &= 0.27 , \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

$$\begin{aligned} S(N, Z) &= \left[\frac{F(N) + F(Z)}{(A/2)^{2/3}} - 0.26 A^{1/3} \right] C , \\ F(x) &= \int_{x_{i-1}}^x [q(x) - x^{2/3}] dx , \\ q(x) &= \frac{3}{5} \frac{M_i^{5/3} - M_{i-1}^{5/3}}{M_i - M_{i-1}} , \end{aligned} \quad (\text{II.57})$$

x : N ou Z do núcleo físsil considerado,

M_{i-1}, M_i : números mágicos imediatamente inferior e superior, respectivamente, ao número de protons ou neutrons do núcleo físsil considerado ($M_{i-1} < x < M_i$),

Z_1, Z_2 : número de protons do alvo e do projétil, respectivamente,

r : distância entre o alvo e o projétil (medida centro a centro),

$$\begin{aligned} C &= 5.8 \text{ MeV} , \\ R_0^2 &= 55.7546 \text{ fm}^2 , \\ Y_{20}(\theta', \phi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta' - 1) , \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

É importante notar que θ e θ' são coisas distintas: θ é o parâmetro de deformação e θ' é o ângulo de orientação do alvo, como mostra a figura (II.1).

æ Finalmente, a título de ilustração, são apresentados a seguir dois gráficos para o espalhamento $^{238}\text{U} - ^{208}\text{Pb}$ (figuras II.6 e II.7), onde pode-se observar o efeito de abaixamento da barreira de fissão devido à interação coulombiana com o projétil a 100 e a 50 fm de distância respectivamente. É importante notar que o único efeito da correção de estrutura de camadas no potencial está em deslocar seu mínimo para uma deformação diferente da esférica, o que deve favorecer o processo de fissão, não havendo nenhuma mudança na barreira de potencial. De fato, ao aplicar-se o modelo, este deslocamento da deformação de mínimo do potencial será levado em conta ao trabalhar-se com uma barreira efetiva (capítulo IV). Além disso, é interessante observar que o termo de interação coulombiana alvo-projétil por sua vez, só modifica a barreira de potencial, não tendo efeitos sobre o mínimo.

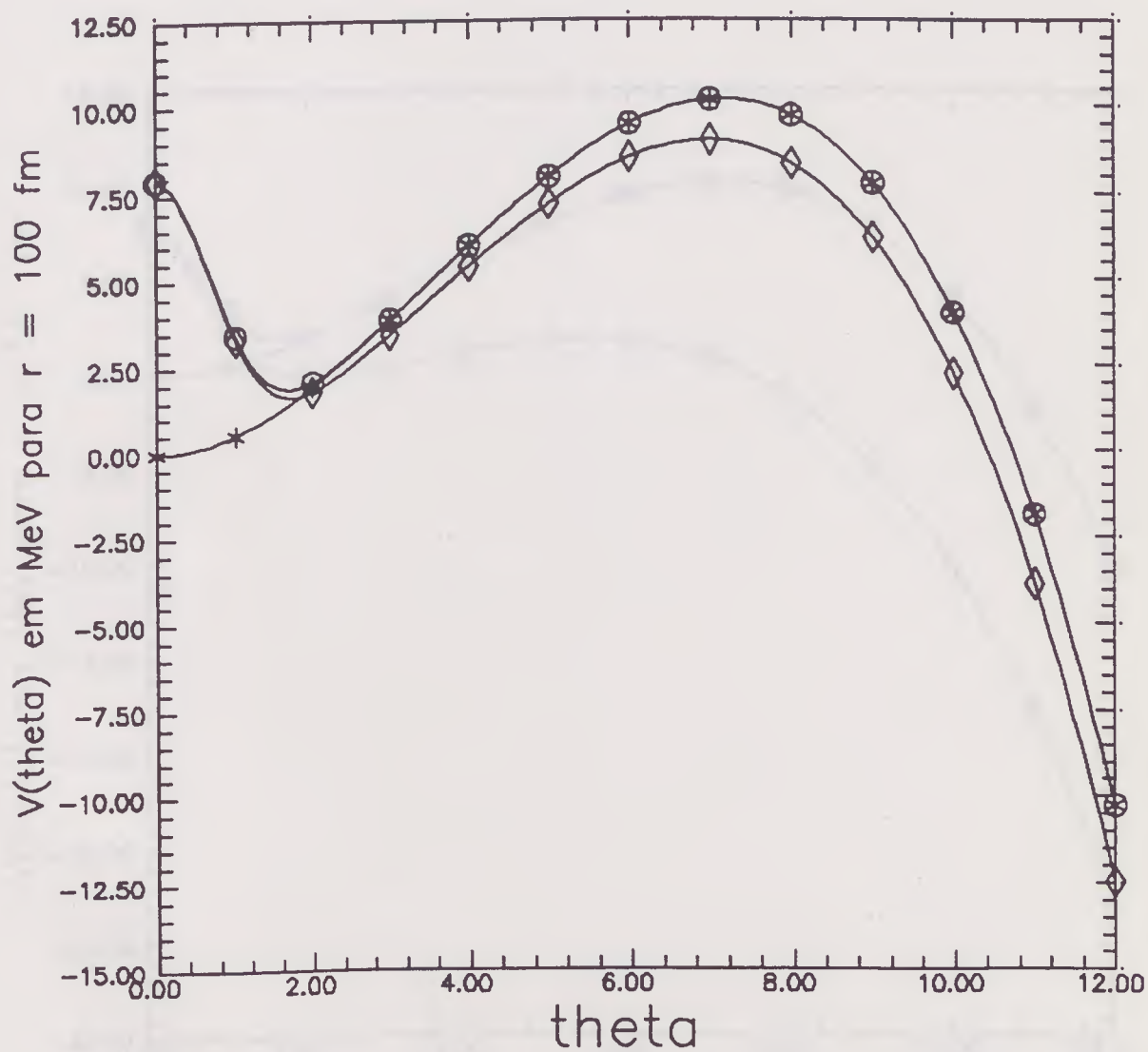


Figura II.6: Gráfico da barreira de potencial do ^{238}U descrita pelo modelo de gota líquida (*), mais termo de correção de camadas (o) e mais a interação coulombiana com o projétil ^{208}Pb a 100 fm (diamond).

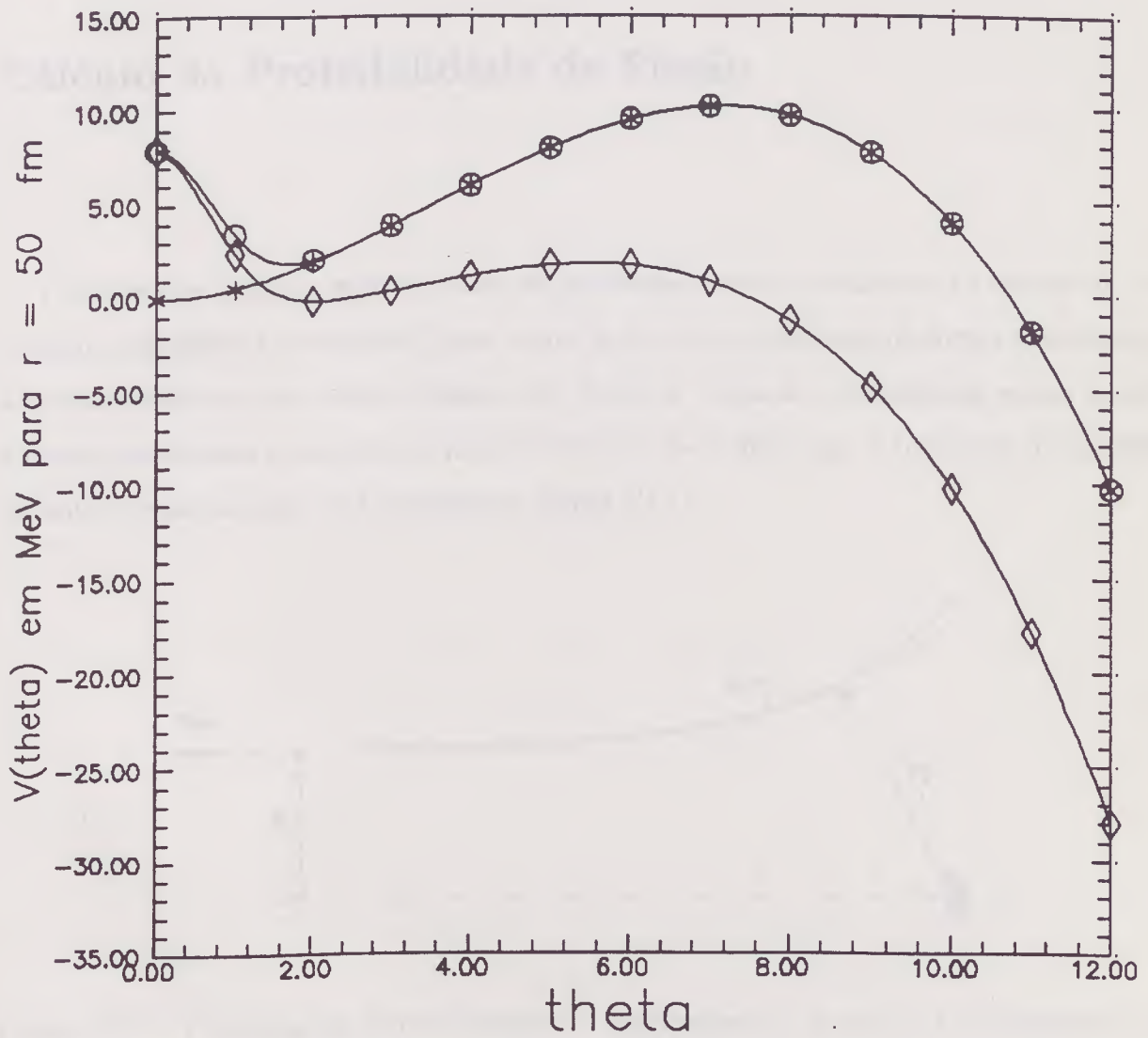


Figura II.7: Idem figura anterior, mas para o projétil ^{208}Pb a 50 fm .

Capítulo III

Cálculo da Probabilidade de Fissão

Considere-se agora a segunda parte do problema: como contabilizar os efeitos da interação coulombiana alvo-projétil que, como já foi dito, trabalham de forma a aumentar a probabilidade de que o núcleo fissione [5]. Sendo a interação coulombiana acima citada a única considerada e sem efeitos relativísticos, pode-se dizer que a trajetória do projétil durante o espalhamento será hiperbólica (figura III.1).

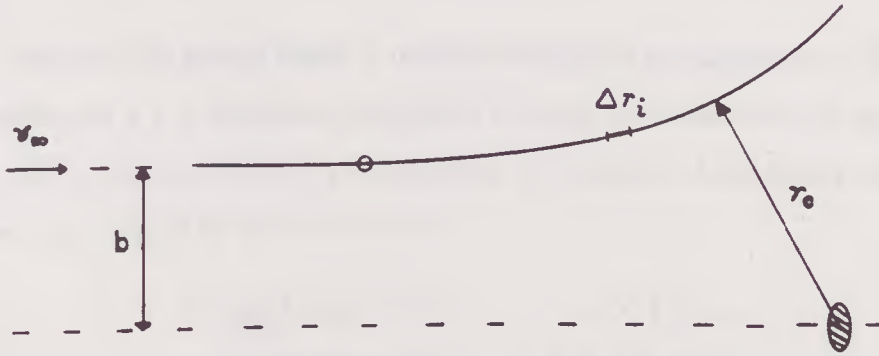


Figura III.1: Trajetória do projétil durante o espalhamento. Aqui v_∞ é a velocidade do projétil no infinito e b é o parâmetro de impacto.

Supõem-se que o sistema passe por estados discretos i , isto é, imagina-se que a trajetória do projétil está dividida em pedaços Δr_i , estando a cada pedaço associado um intervalo de tempo Δt_i , que é o tempo que o projétil leva para percorrer Δr_i (vide fig.III.1). Mais do que isso, durante um determinado Δt_i o alvo apresentará uma certa deformação, induzida pela

interação coulombiana com o projétil, e essa situação é que é chamada de estado discreto i . É razoável esperar que se for possível associar a cada estado i uma meia-vida induzida, τ_{ind} , então será possível definir a probabilidade de que o alvo fissione neste estado i como sendo

$$\Omega_i = \frac{\Delta t_i}{\tau_{ind}} \quad (\text{III.1})$$

desde que se $\Omega_i > 1$, faça-se $\Omega_i = 1$. Entretanto, para calcular a probabilidade de que o alvo fissione num dado estado i , deve-se considerar que ele não pode ter fissionado em nenhum dos j estados anteriores. Logo

$$P_i = \Omega_i \prod_{j(<i)=1}^{i-1} (1 - \Omega_j) \quad (\text{III.2})$$

e a probabilidade de fissão total, isto é, calculada sobre toda a trajetória, será

$$P_f = \sum_i P_i = \sum_i \Omega_i \prod_{j(<i)=1}^{i-1} (1 - \Omega_j) . \quad (\text{III.3})$$

É necessário então, escrever de maneira conveniente Δt_i e τ_{ind} ; considere-se primeiramente Δt_i .

Sejam t o intervalo de tempo desde o instante inicial do espalhamento até um instante qualquer considerado e r a distância percorrida durante este intervalo de tempo, medida desde o alvo até o projétil. Pode-se parametrizar a trajetória hiperbólica em t e r [11], escrevendo-os como função de um parâmetro τ

$$\begin{aligned} t &= \frac{r_c}{2v_\infty} (\varepsilon \sinh \tau + \tau) \quad , \quad -\infty < t < \infty \\ r &= \frac{r_c}{2} (\varepsilon \cosh \tau + 1) \quad , \quad 0 < r < \infty \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

onde $-\infty \leq \tau \leq \infty$

r_c : distância de máxima aproximação $= (2Z_1 Z_2 e^2) / (mv_\infty^2)$

v_∞ : velocidade do projétil no infinito

m : massa do projétil

ε : excentricidade da hipérbole $= \left[1 + \left(\frac{2b}{r_c} \right)^2 \right]^{1/2}$

b : parâmetro de impacto.

Eliminando τ das expressões (III.4) e escrevendo t como função de r

$$t = \frac{r_c}{2v_\infty} \left\{ \left[\left(\frac{2r}{r_c} - 1 \right)^2 - \varepsilon^2 \right]^{1/2} + \ln \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{2r}{r_c} - 1 + \left[\left(\frac{2r}{r_c} - 1 \right)^2 - \varepsilon^2 \right]^{1/2} \right] \right\} . \quad (\text{III.5})$$

Logo, para dois intervalos consecutivos

$$\begin{aligned} \Delta t_{21} = t_2 - t_1 = & \frac{r_c}{2v_\infty} \left\{ \left[\left(\frac{2r_2}{r_c} - 1 \right)^2 - \varepsilon^2 \right]^{1/2} - \left[\left(\frac{2r_1}{r_c} - 1 \right)^2 - \varepsilon^2 \right]^{1/2} + \right. \\ & \left. + \ln \frac{\left[\frac{2r_2}{r_c} - 1 + \left[\left(\frac{2r_2}{r_c} - 1 \right)^2 - \varepsilon^2 \right]^{1/2} \right]}{\left[\frac{2r_1}{r_c} - 1 + \left[\left(\frac{2r_1}{r_c} - 1 \right)^2 - \varepsilon^2 \right]^{1/2} \right]} \right\} . \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Usando $\Delta r = r_2 - r_1$ para reescrever (III.6) obtém-se, de forma geral

$$\begin{aligned} \Delta t_i = T_c \left\{ [(2y-1)^2 - \varepsilon^2 + 4(2y-1)\Delta y]^{1/2} - [(2y-1)^2 - \varepsilon^2]^{1/2} + \right. \\ \left. + \ln \frac{(2y-1) + [(2y-1)^2 - \varepsilon^2 + 4(2y-1)\Delta y]^{1/2} + 2\Delta y}{(2y-1) + [(2y-1)^2 - \varepsilon^2]^{1/2}} \right\} , \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

onde

$$\begin{aligned} y &= \frac{r}{r_c} , \\ T_c &= \frac{r_c}{2v_\infty} = \frac{r_c^{3/2}}{e} \left[\left(\frac{A_T A_P}{A_T + A_P} \right) \frac{m_n e^2}{8Z_1 Z_2 e^2} \right]^{1/2} , \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

A_T, A_P : número atômico do alvo e do projétil respectivamente,

m_n : massa do nucleon. Além disto, definindo Δr segundo o critério [5]

$$\frac{\tau_{ind}(y + \Delta y)}{\tau_{ind}(y)} \simeq e \quad (\text{III.9})$$

e considerando $\frac{\Delta r}{r_c} \ll 1$, podemos escrever uma expressão para Δy se conhecermos $\tau_{ind}(y)$.

Seja então o problema de escrever τ_{ind} . Para isto, será considerado um modelo idealizado por Hill e Wheeler [3], onde o padrão observado na figura (II.6) é aproximado por um potencial do tipo oscilador harmônico invertido (figura III.2) e descrito pela hamiltoniana

$$H = \frac{-\hbar^2}{2B} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{2} B \omega_b^2 \alpha^2 + E_{th} , \quad (\text{III.10})$$

onde B é a inércia associada a deformação do núcleo físsil considerado, E_{th} é a altura da barreira, $\hbar \omega_b$ é a frequência para este oscilador e α é a deformação.

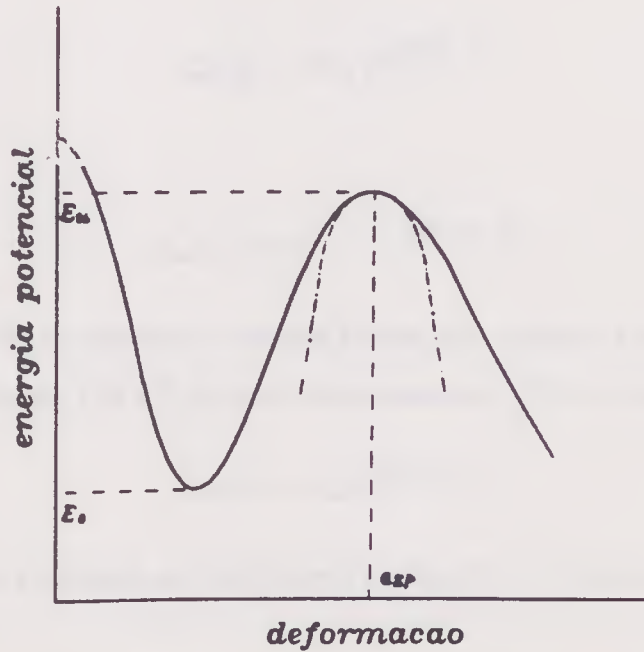


Figura III.2: Gráfico qualitativo onde pode-se ver a aproximação de potencial do tipo oscilador harmônico invertido para o padrão da figura (II.6).

A equação (III.10) é exatamente solúvel e fornece para a probabilidade de tunelamento da barreira o resultado [3]

$$P = \left\{ 1 + \exp \left[\frac{-2\pi}{\hbar\omega_b} (E - E_{th}) \right] \right\}^{-1}. \quad (\text{III.11})$$

(Vale notar que se esta expressão é válida, pode-se então definir a energia limite para a fissão, E_{th} , como sendo aquela onde $P = 1/2$, isto é, $E_{th} = E$). Sabendo (III.11), pode-se então escrever uma expressão para a meia-vida de um núcleo, no caso de fissão espontânea, como

$$\tau_{esp}^{-1} = 2\pi\omega P \simeq 2\pi\omega e^{\frac{-2\pi}{\hbar\omega_b} (E_{th} - E_0)}, \quad (\text{III.12})$$

onde $2\pi\omega$ é a frequência com que o núcleo tenta penetrar a barreira (de modo bastante simplificado, o núcleo pode ser imaginado como efetuando oscilações de forma na “tentativa de penetrar a barreira” e fissionar) e E_0 é a energia do estado fundamental (vide figura III.2). Assim, pode-se escrever a meia-vida do núcleo no caso em que há interação coulombiana

como

$$\tau_{ind}^{-1}(y) = 2\pi\omega e^{\frac{-2\pi}{\hbar\omega_b}(\bar{E}-E_0)} , \quad (\text{III.13})$$

ou

$$\tau_{ind}(y) = [2\pi\omega]^{-1} e^{\frac{2\pi}{\hbar\omega_b}(E_0-\bar{E})} , \quad (\text{III.14})$$

onde $\bar{E}(y)$ é a altura da barreira, a energia limite para a fissão, agora modificada por efeitos coulombianos. Usando (III.12) pode-se então escrever (III.14) como

$$\tau_{ind}(y) = \tau_{esp} e^{\frac{-2\pi}{\hbar\omega_b}(E_{th}-\bar{E})} , \quad (\text{III.15})$$

onde τ_{esp} é um valor tabelado na literatura e $2\pi/\hbar\omega_b \text{ MeV}^{-1}$ foi aqui ajustado (vide capítulo IV).

Voltando a (III.9) com (III.15) e $\Delta y \ll 1$, podemos escrever uma expressão para Δy como

$$\Delta y = \left[\alpha \frac{d}{dr} \bar{E}(y) \right]^{-1} , \quad (\text{III.16})$$

onde $\alpha = \frac{2\pi}{\hbar\omega_b} \text{ MeV}^{-1}$ é a largura da barreira de potencial (não confundir com α de III.10, que é um parâmetro de deformação) e r e y estão relacionados pela primeira das equações III.8.

Finalmente, com (III.7), (III.8) e (III.15) a probabilidade de fissão (III.3) está bem definida. Para escrever a secção de choque diferencial para a fissão basta então fazer

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{fis} = P_f \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{Rutherford} , \quad (\text{III.17})$$

onde $\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{Rutherford}$ é a secção de choque diferencial de Rutherford e P_f é dada por (III.3).

Capítulo IV

Aplicações

Serão agora descritas as aplicações feitas do modelo simplificado e os resultados obtidos serão comparados com os dados experimentais registrados na literatura [12]. O objeto de estudo escolhido foi o ^{238}U , um núcleo naturalmente fissil da região dos actínídeos. Em seguida, foi tomado um programa de computador [5] e feitas as adaptações necessária para que, fornecidas a carga, a massa, o ângulo de orientação e a altura da barreira de potencial efetiva (5.8MeV) [3] do ^{238}U , além da carga, da massa e da energia de incidência do projétil, fosse obtida, via modelo simplificado e cálculo da probabilidade de fissão discutidos na seção II.3 e capítulo III, a secção de choque total de fissão como função da energia do projétil e do ângulo de orientação do alvo, $\sigma_F(E, \theta')$. As curvas $\sigma_F(E, \theta') \times \theta'$ foram então parametrizadas e estes resultados usados no cálculo da média nos ângulos de orientação do alvo, fornecendo $\sigma_F(E)$. Este último cálculo foi feito segundo a expressão usual

$$\sigma_F(E) = \frac{\int_0^{\pi/4} \sigma_F(E, \theta') d\theta'}{\int_0^{\pi/2} d\theta'} \quad (\text{IV.1})$$

onde o limite superior da integral do numerador é $\pi/4$ pois, para ângulos maiores, a contribuição de $\sigma_F(E, \theta')$ para a integral é nula (vide figura II.1).

Testes iniciais dos resultados obtidos pelo programa, mostraram uma forte dependência de $\sigma_F(E)$ com o parâmetro de raio nuclear r_0 , com a deformação do ponto de sela a_{SP} , e com o parâmetro que regula a concavidade da barreira de potencial α , descrita no capítulo III por $(2\pi/\hbar\omega_b)\text{MeV}^{-1}$. (Vale notar que variações, por exemplo, de décimos de fermi em r_0 provocavam variações em $\sigma_F(E)$ de até dezenas de ordens de grandeza para baixas

energias). As referências [12, 13] corroboram esta conclusão.

Sendo assim, considerou-se o espalhamento $^{238}\text{U} - ^{208}\text{Pb}$ e foram feitos cálculos para diferentes valores de r_0 , a_{SP} e α , procurando definir por uma observação dos resultados, o conjunto de parâmetros que tornava os resultados do modelo simplificado mais próximos dos dados experimentais [12]. Os gráficos para os diferentes conjuntos de parâmetros encontram-se no apêndice C: são nove gráficos com os resultados do modelo simplificado para diferentes valores de r_0 ($r_0 = 1.2, 1.4, 1.6\text{fm}$), a_{SP} ($a_{SP} = 0.20, 0.18$) e α ($\alpha = 16.00, 16.25\text{MeV}^{-1}$).

Cabe aqui uma explicação sobre o método de ajuste dos parâmetros. Ao invés de utilizar-se um método quantitativo de ajuste, que fornecesse o melhor conjunto r_0 , a_{SP} e α com uma margem probabilística de erro entre outras coisas, optou-se por um processo qualitativo do tipo tentativa e erro, que consistiu em tentar ajustar-se o r_0 que mais aproximava os resultados do modelo simplificado dos dados experimentais, para o melhor r_0 conseguido, ajustava-se então a_{SP} e para o melhor ajuste de r_0 e a_{SP} , ajustava-se α , sempre pela comparação com os resultados experimentais. Esta escolha de método de ajuste fica aparentemente justificada pelo fato de que quando conseguía-se um ajuste razoável para r_0 , que fornecesse um comportamento médio da curva teórica análogo àquele dos pontos experimentais, mesmo que com valores duas ou três ordens de grandeza acima dos experimentais, este comportamento era destruído ao alterar-se os outros parâmetros na tentativa de diminuir a diferença entre os resultados teórico e experimental, indicando que a curva $\sigma_F(E) \times E$ devida ao modelo simplificado apresentava um crescimento mais abrupto do que os dados experimentais, atingindo a saturação em valores $\sigma_F(E)$ aproximadamente duas ordens de grandeza maiores que os pontos experimentais. Se este é um caráter inerente ao modelo simplificado, então um refinamento do método de ajuste não resolveria o problema, acarretando apenas maior complexidade dos cálculos.

A escolha do espalhamento $^{238}\text{U} - ^{208}\text{Pb}$ para a definição dos parâmetros é justificada pela própria referência de onde obteve-se os resultados experimentais: o experimento não diferencia entre a fissão induzida por transferência e a fissão coulombiana, de modo que os dados obtidos são um limite superior para a fissão coulombiana; pela comparação com os dados de outros experimentos, onde a porcentagem de fissão por transferência é bem co-

nhecida, obtém-se que, para $E = 0.80E_C$, por exemplo, tem-se 90% de fissão coulombiana. Visto a interação coulombiana alvo-projétil ser a única considerada no modelo simplificado, é de se esperar que os resultados obtidos por este modelo sejam melhores neste espalhamento do que em outros.

A energia da barreira é calculada pela fórmula usual

$$E_C = \frac{1.44}{r_0} \frac{Z_{alvo} Z_{proj}}{(A_{alvo}^{1/3} + A_{proj}^{1/3})} \quad (IV.2)$$

Vale considerar que as energias tomadas são valores inferiores àquela da barreira, pois a não-consideração de forças nucleares no modelo invalida a sua utilização para energias mais altas.

Também pode-se observar que mesmo para o conjunto de parâmetros que se acredita melhor aproximar os resultados de $\sigma_F(E)$ do modelo simplificado e experimental, $r_0 = 1.6 fm$, $a_{SP} = 0.20$, $\alpha = 16.25 MeV^{-1}$, ainda são obtidas diferenças de duas ordens de grandeza para algumas energias, o que se acredita ser uma característica intrínseca da curva $\sigma_F(E) \times E$ obtida via modelo simplificado, como já havia sido dito antes.

A figura (IV.1) ilustra a comparação entre todos os pontos experimentais com energias inferiores a da barreira coulombiana disponíveis [12] e os resultados obtidos via modelo simplificado para o ajuste escolhido como melhor, $r_0 = 1.6 fm$, $a_{SP} = 0.20$, $\alpha = 16.25 MeV^{-1}$.

Um outro ponto peculiar é a forte influência dos parâmetros r_0 e a_{SP} na carga mínima necessária a um projétil para que a interação coulombiana com o alvo anule a barreira de potencial obtida pelo modelo simplificado, não esquecendo que a largura da barreira, descrita pelo parâmetro α , não é relevante aqui por só aparecer no cálculo da probabilidade de fissão. A figura (IV.2) apresenta curvas da razão entre a barreira modificada pela interação coulombiana do ^{238}U com vários projéteis (à distância mínima possível, dada pela soma dos raios médios alvo-projétil) e a barreira original do ^{238}U , como função da carga dos vários projéteis, para diferentes pares r_0 , a_{SP} . Pode-se observar, por exemplo, que um aumento de $0.2 fm$ no valor de r_0 desloca a carga mínima para o projétil anular a barreira para um valor aproximadamente vinte unidades maior, o que vem reforçar a discussão da sensibilidade do modelo simplificado a estes parâmetros.

Outra vantagem da figura (IV.2) é que ela fornece uma orientação na escolha dos próximos projéteis cujos espalhamentos pelo ^{238}U forneçam resultados úteis à avaliação do modelo simplificado. Vê-se que para $r_0 = 1.6\text{fm}$ e $a_{SP} = 0.20$, projéteis com carga inferior à 38 não devem abaixar a barreira de potencial suficientemente para que o modelo simplificado nos forneça resultados significativos. Sendo assim, as opções de dados experimentais ficaram reduzidas ao espalhamento $^{238}\text{U} - ^{132}\text{Xe}$, visto este ser o único nestas condições que foi localizado numa pesquisa bibliográfica. Dados experimentais para espalhamentos de projéteis mais leves pelo ^{238}U estão disponíveis em diversas referências (vide [13, 15], por exemplo). No espalhamento $^{238}\text{U} - ^{132}\text{Xe}$ os resultados obtidos via modelo simplificado para os valores selecionados de r_0 , a_{SP} e α , assim como os dados experimentais para valores de energia inferiores àquela da barreira, estão no gráfico da figura (IV.3).

O que se observa nesta figura assemelha-se a uma catástrofe do modelo simplificado: a curva obtida para $\sigma_F(E) \times E$ pelo modelo simplificado para energias próximas à energia da barreira coulombiana (mas ainda inferiores a ela), possui um comportamento totalmente diferente do comportamento dos pontos experimentais.

Um primeiro argumento é fornecido por Oberacker [12]. Analogamente ao que foi discutido para o espalhamento $^{238}\text{U} - ^{208}\text{Pb}$, pode-se dizer que a porcentagem da secção de choque total de fissão obtida no experimento devida apenas a fissão coulombiana deve ser de não mais que 10 a 70% do valor total de $\sigma_F(E)$. Não deve ser esquecido que sendo a interação coulombiana alvo-projétil a única relevante no modelo simplificado, estes valores percentuais podem ser baixos para uma concordância maior do modelo com os valores experimentais.

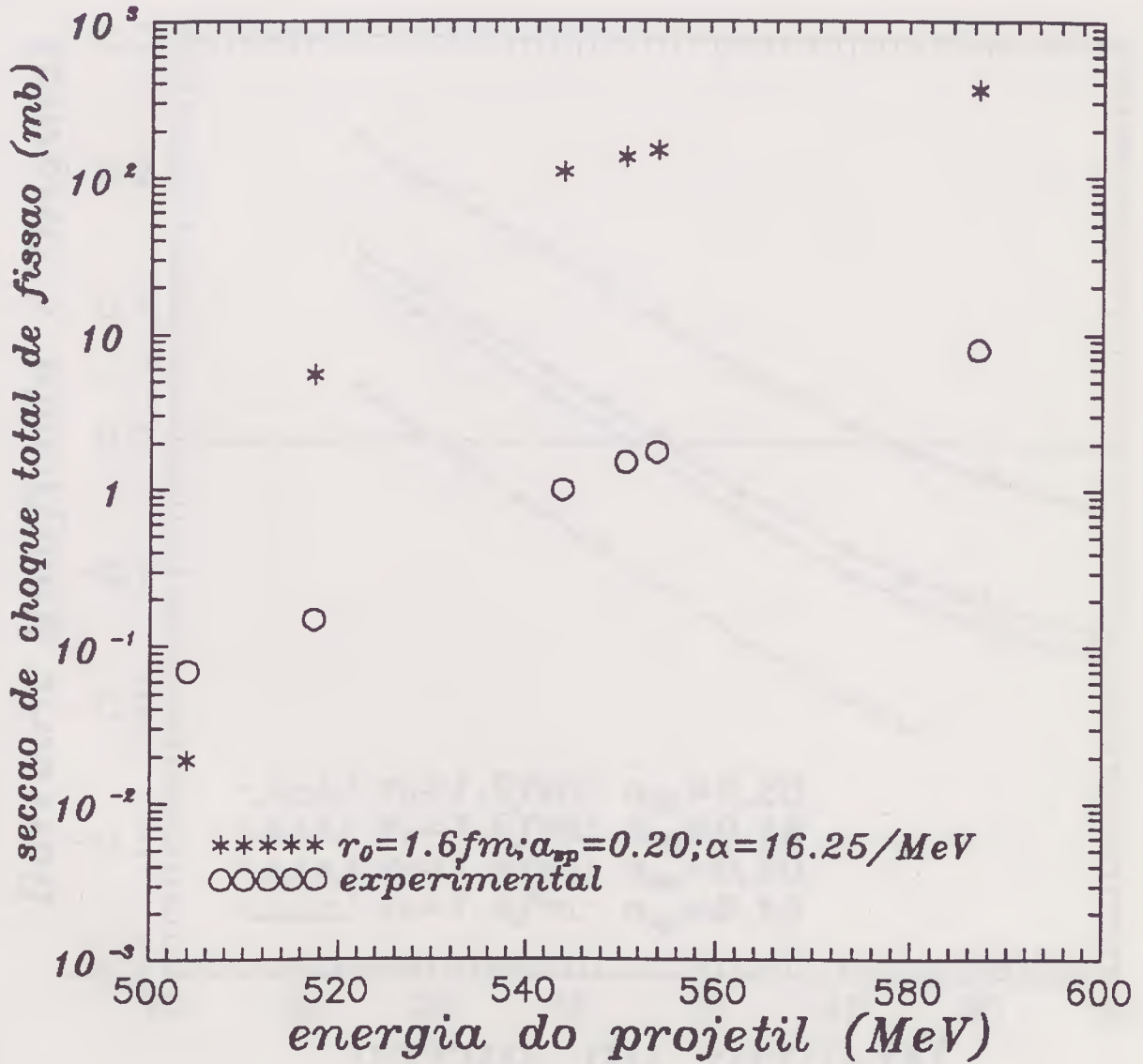


Figura IV.1: Secções de choque total de fissão (mb) como função da energia do projétil (MeV), para o espalhamento $^{238}\text{U}-^{208}\text{Pb}$, para $r_0 = 1.6\text{fm}$, $a_{SP} = 0.20$, $\alpha = 16.25\text{MeV}^{-1}$.

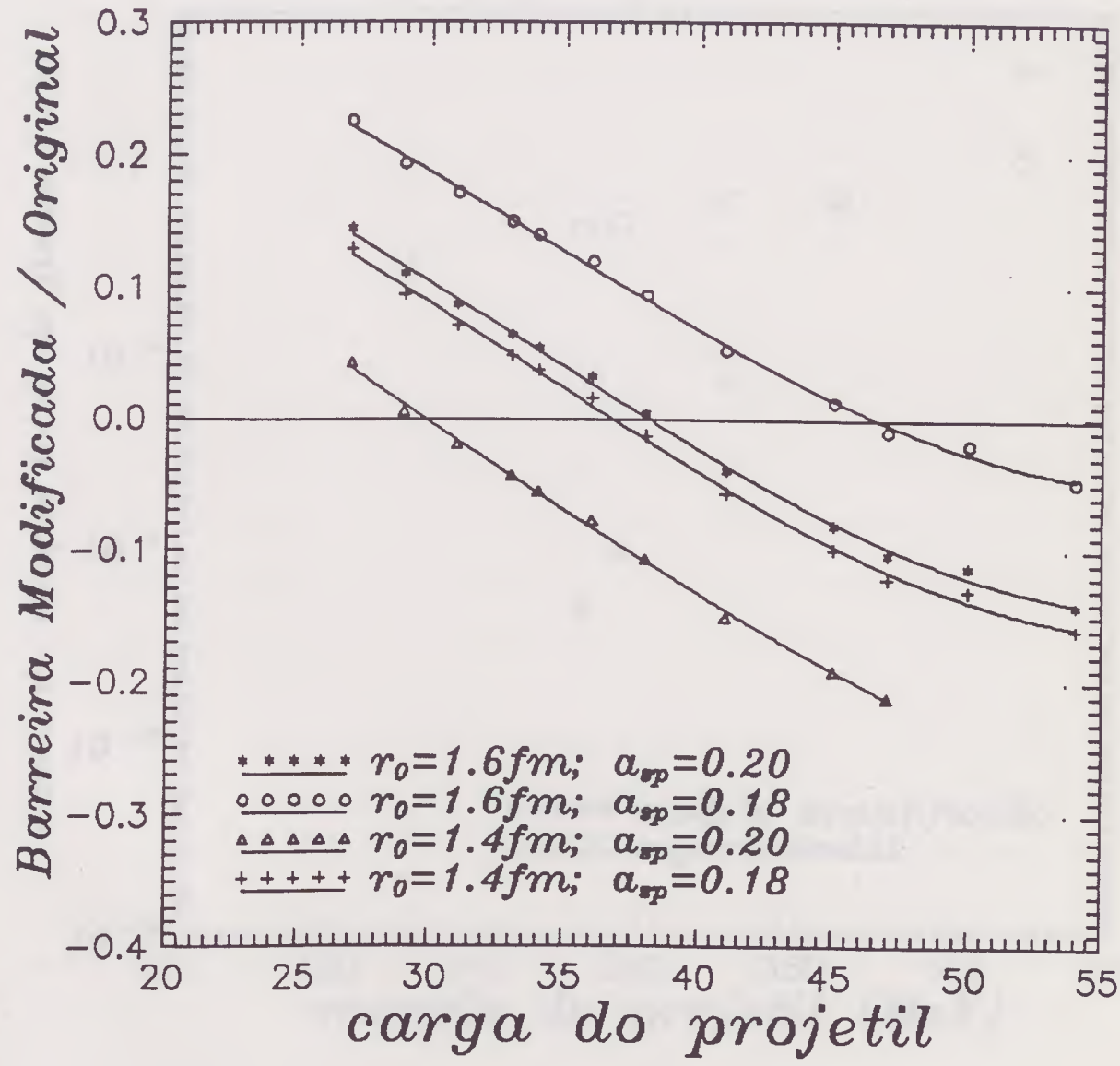


Figura IV.2: Razão entre a barreira modificada e a barreira original do ^{238}U como função da carga de diferentes projéteis, à distância de máxima aproximação.

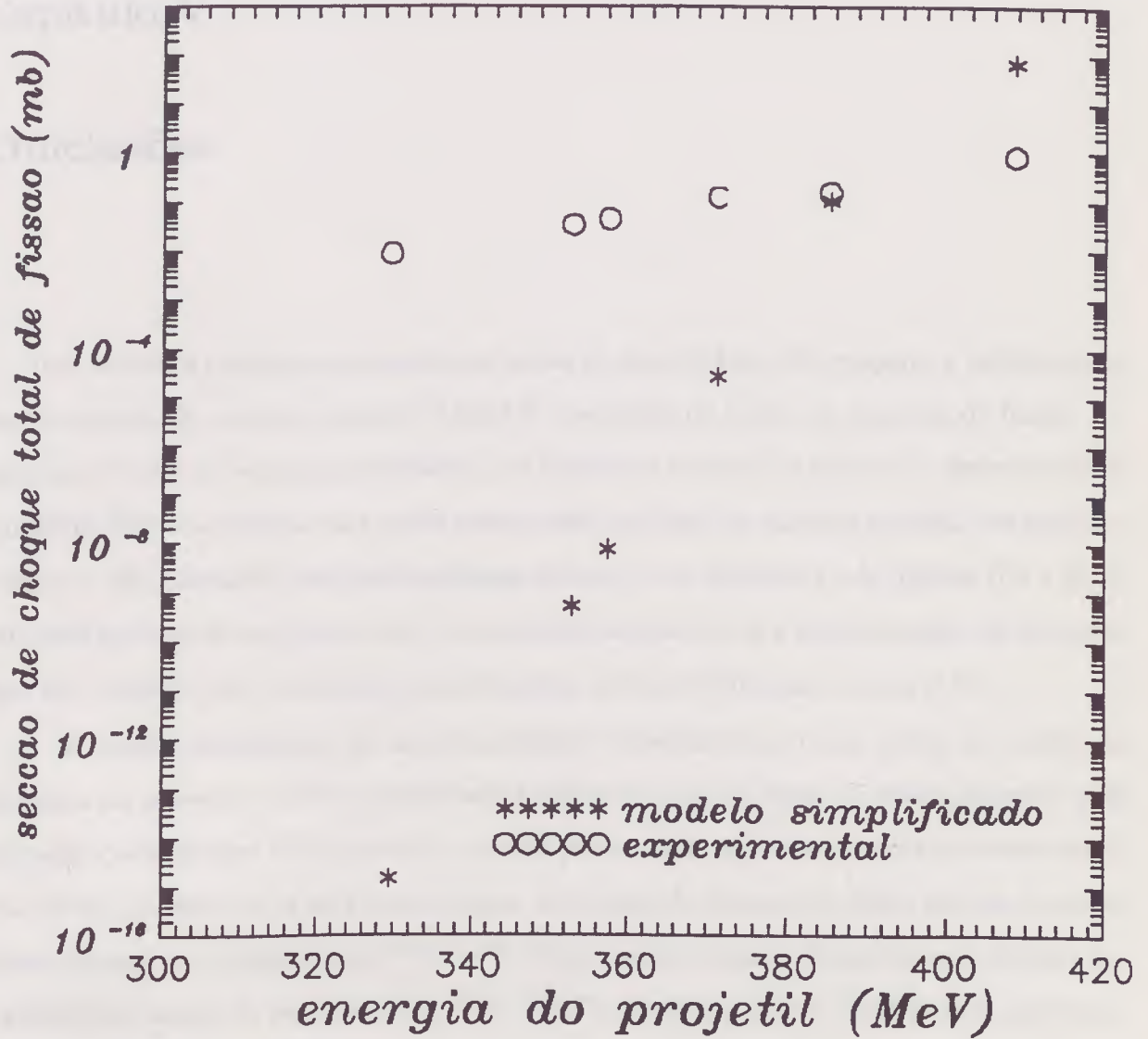


Figura IV.3: Secções de choque total de fissão (mb) como função da energia do projétil (MeV), para o espalhamento $^{238}\text{U}-^{132}\text{Xe}$, para $r_0 = 1.6\text{fm}$, $a_{SP} = 0.20$, $\alpha = 16.25\text{MeV}^{-1}$.

Capítulo V

Conclusões

Uma primeira conclusão que pode ser tirada do estudo feito, diz respeito à influência da fenomenologia de camadas segundo Myers & Swiatecki na forma da barreira de fissão. Ao contrário do que se pensava inicialmente, tal influência limita-se a deslocar a deformação de equilíbrio daquela esférica para outra deformada, no caso dos núcleos que não são duplos-mágicos, não causando nenhuma mudança na altura da barreira (vide figuras II.6 e II.7). Isto pode apresentar mudanças caso o tratamento adotado para a fenomenologia de camadas seja, por exemplo, um tratamento microscópico do tipo Strutinskĩ (seção II.2).

A já citada inexistência de mais resultados experimentais torna difícil a análise da eficiência do presente modelo simplificado na descrição do processo de fissão induzida pela interação coulombiana ^{238}U - projétil, quando poucas aplicações do modelo puderam ser de fato feitas. Entretanto, a alta porcentagem de secção de choque de fissão devida a efeitos coulombianos no espalhamento $^{238}\text{U} - ^{208}\text{Pb}$ e mesmo alguns elementos que podem ser extraídos do estudo do espalhamento $^{238}\text{U} - ^{132}\text{Xe}$, tornam possível a análise dos resultados obtidos via modelo simplificado.

Uma avaliação inicial da curva $\sigma_F(E) \times E$ obtida com o modelo simplificado mostra diferenças significativas em relação àquela dos dados experimentais. A curva teórica apresenta uma inclinação inicial mais abrupta do que os pontos experimentais e o patamar de saturação só é alcançado numa região ordens de grandeza acima do experimental. A figura (V.1) ilustra qualitativamente esta discussão.

Nas figuras (IV.1) e (IV.3) vê-se que o ponto de cruzamento das curvas do modelo

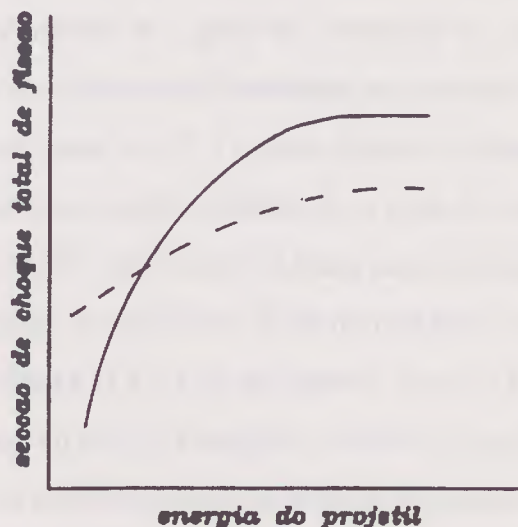


Figura V.1: Gráfico qualitativo da seção de choque total de fissão como função da energia de um projétil espalhado pelo ^{238}U . A curva descontínua representa aquela caracterizada pelos pontos experimentais; a curva contínua é aquela obtida via modelo simplificado.

simplificado e experimental, exemplificado na figura (V.1), pode estar tanto em regiões próximas àquela da energia da barreira coulombiana do ^{238}U , como acima deste ponto. A região de energias maiores que a da barreira coulombiana está fora do âmbito desta discussão devido à não-consideração de forças nucleares no modelo. Já na região de mais baixas energias, o modelo simplificado deve fornecer valores de $\sigma_F(E)$ bastante baixos em comparação com o experimental, o que pode ser justificado pelo argumento de que, nesta região, o projétil pode não ter energia para aproximar-se do ^{238}U o suficiente para abaixar significativamente a barreira de potencial e favorecer a fissão coulombiana (vide capítulo III). Conclui-se então, que a região mais adequada à análise dos resultados do modelo está entre energias já relativamente próximas à energia da barreira coulombiana e a própria barreira coulombiana ($0.70E_c \lesssim E \leq E_c$).

Pelo que pôde ser observado dos resultados do espalhamento $^{238}\text{U} - ^{208}\text{Pb}$ estudado no capítulo anterior, cujos dados experimentais deveriam ser bem descritos pelo modelo simplificado, para algumas energias os resultados são subestimados e para outras, superestimados pelo modelo. A causa para isto deve estar na simplicidade do modelo, visto existirem muitos efeitos não-considerados neste tratamento e uma eventual melhoria do mesmo deve levar em conta tais pontos.

Um destes pontos certamente é o grau de liberdade de rotação do alvo. Durante a aplicação do modelo aos espalhamentos estudados no capítulo anterior, pôde-se observar quão críticos eram os resultados $\sigma_F(E, \theta')$ como função do ângulo de orientação do alvo, θ' . Assim, é de se esperar que, sendo considerado o grau de liberdade de rotação do alvo durante a colisão com o projétil, os resultados finais para a secção de choque total de fissão devam ser diferentes daqueles do alvo fixo. Mais do que isso, visto $\sigma_F(E, \theta')$ diminuir com um aumento de θ' (vide figura II.1), é de se esperar que $\sigma_F(E)$ obtido considerando-se a rotação do alvo seja menor do que os resultados obtidos no capítulo anterior.

Outro ponto que não foi considerado são os estados excitados do alvo. Em todo momento o ^{238}U foi considerado como estando no seu estado fundamental. Isto é, com uma barreira de potencial efetiva, no início do espalhamento, de 5.8MeV . Entretanto, para um estado excitado do ^{238}U a barreira de potencial não seria mais essa, mas teria um valor menor, o que certamente aumentaria os valores de secção de choque de fissão.

O tratamento feito da barreira de potencial do ^{238}U também pode não ser o mais adequado. Primeiramente porque barreiras do tipo duplo mínimo são aqui aproximadas por uma barreira efetiva, o que, considerando-se quão críticos são os resultados com a largura e com o ponto de sela da barreira de potencial, pode não ser adequado. Neste caso, a fenomenologia de camadas deve ser mais corretamente descrita sob um ponto de vista microscópico como no modelo de Strutinskii. Além disso, a aproximação de oscilador harmônico invertido de Hill e Wheeler subestima a largura da barreira e consequentemente superestima a secção de choque de fissão. Uma aproximação mais adequada deve fornecer uma secção de choque de fissão menor.

Apêndice A

Parâmetros de Deformação

Listamos abaixo as expressões que relacionam os diferentes parâmetros de deformação [4, 7].

$$\beta^2 = \frac{4}{5}\pi\sigma^2 \left(1 - \frac{1}{7}\sigma \cos 3\gamma + \text{potências maiores de } \sigma \right) , \quad (\text{A.1})$$

$$\alpha^2 = \frac{5}{4\pi}\beta^2 , \quad (\text{A.2})$$

$$\alpha_0^2 = \frac{5a^2}{R_0^2} = \frac{5}{A^{2/3}} \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 , \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{a}{r_0} = 0.27 , \quad (\text{A.4})$$

$$\theta = \frac{\alpha}{\alpha_0} , \quad (\text{A.5})$$

$$\alpha = 0.023\eta , \quad (\text{A.6})$$

$$\eta = \frac{\delta}{\chi} \left[1 - \frac{4}{3}\delta^2 - \frac{16}{27}\delta^3 \right]^{-1/6} , \quad (\text{A.7})$$

$$\delta = \frac{3}{2}\alpha , \quad (\text{A.8})$$

onde χ é um parâmetro ajustável da hamiltoniana de partícula única do modelo de Nilsson (vide [16]),

$$\varepsilon = \delta + \frac{1}{6}\delta^2 + \mathcal{O}(\delta^3) , \quad (\text{A.9})$$

$$a_\lambda = \left(\frac{2\lambda + 1}{4\pi} \right)^{1/2} \alpha_{\lambda 0} \quad (\alpha \neq \alpha_{\lambda\mu}) , \quad (\text{A.10})$$

$$\beta^2 = \sum_{\lambda\mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 . \quad (\text{A.11})$$

Apêndice B

Cálculo das Integrais $I_{\alpha\beta}^n$

Na seção II.1 temos da equação (II.44)

$$I_{\alpha\beta}^n = \int \left(\sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^* \right)^n Y_{\alpha\beta} d\Omega . \quad (\text{B.1})$$

Considerando a simetria da distribuição que interessa para o problema, isto é, a axial, obtém-se $\beta = 0$. Logo

$$\begin{aligned} n = 1 \Rightarrow I_{\alpha 0}^1 &= \int d\Omega Y_{\alpha 0} \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^* = \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} \int d\Omega Y_{\alpha 0} Y_{\lambda\mu}^* \\ &= \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} \delta_{\alpha\lambda} \delta_{0\mu} = \alpha_{\alpha 0} . \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

(A penúltima passagem está justificada na referência [17], equação (3.6.30).)

$$\begin{aligned} n = 2 \Rightarrow I_{\alpha 0}^2 &= \int d\Omega Y_{\alpha 0} \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^* \sum_{\lambda'\mu'} \alpha_{\lambda'\mu'} Y_{\lambda'\mu'}^* \\ &= \sum_{\lambda\mu} \sum_{\lambda'\mu'} \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda'\mu'} \int d\Omega Y_{\alpha 0} Y_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda'\mu'}^* . \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Tem-se [17]

$$\begin{aligned} Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \phi) Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \phi) &= \frac{\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)}}{4\pi} \sum_{l'} \sum_{m'} \langle l_1 l_2, m_1 m_2 | l_1 l_2, l' m' \rangle \\ &\times \langle l_1 l_2, 0 0 | l_1 l_2, l' 0 \rangle \sqrt{\frac{4\pi}{2l'+1}} Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi) . \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

e também

$$Y_l^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m [Y_l^m(\theta, \phi)]^* , \quad (\text{B.5})$$

de modo que

$$\begin{aligned}
 [(-Y_{l_1})^{-m_1}]^* [(-Y_{l_2})^{-m_2}]^* &= \frac{\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)}}{4\pi} \sum_{l'm'} \langle l_1 l_2, m_1 m_2 | l_1 l_2, l' m' \rangle \\
 &\times \langle l_1 l_2, 0 0 | l_1 l_2, l' 0 \rangle \sqrt{\frac{4\pi}{2l'+1}} \\
 &\times [(-Y_{l'})^{-m'}]^* .
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Utilizando estas relações em (B.3) obtém-se

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha 0}^2 &= \sum_{\lambda\mu\lambda'\mu'} \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda'\mu'} \sqrt{\frac{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)}{4\pi(2\alpha+1)}} \langle \lambda\lambda', \mu\mu' | \lambda\lambda', \alpha 0 \rangle \\
 &\times \langle \lambda\lambda', 0 0 | \lambda\lambda', \alpha 0 \rangle .
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

Em [17] $\mu + \mu' = \mu'' = 0$; como $\beta = 0$ então $\mu = \mu' = 0$. Assim

$$I_{\alpha 0}^2 = \sum_{\lambda\lambda'} \alpha_{\lambda 0} \alpha_{\lambda' 0} \sqrt{\frac{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)}{4\pi(2\alpha+1)}} \langle \lambda\lambda', 0 0 | \lambda\lambda', \alpha 0 \rangle^2 . \tag{B.8}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
 n = 3 \Rightarrow I_{\alpha 0}^3 &= \int d\Omega \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^* \sum_{\lambda'\mu'} \alpha_{\lambda'\mu'} Y_{\lambda'\mu'}^* \sum_{\lambda''\mu''} \alpha_{\lambda''\mu''} Y_{\lambda''\mu''}^* \\
 &= \sum_{\lambda\mu} \sum_{\lambda'\mu'} \sum_{\lambda''\mu''} \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda'\mu'} \alpha_{\lambda''\mu''} \int d\Omega Y_{\alpha 0} Y_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda'\mu'}^* Y_{\lambda''\mu''}^* .
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Com (B.5) pode-se reescrever (B.9) como

$$I_{\alpha 0}^3 = \sum_{\lambda\mu} \sum_{\lambda'\mu'} \sum_{\lambda''\mu''} \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda'\mu'} \alpha_{\lambda''\mu''} \int d\Omega Y_{\alpha 0}^* Y_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda'\mu'}^* Y_{\lambda''\mu''}^* . \tag{B.10}$$

Usando ainda as equações (B.4) e (3.6.30) da referência [17], e o argumento de simetria $\beta = 0$ (como em B.8) obtém-se

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha 0}^3 &= \sum_{\lambda\lambda'\lambda''} \alpha_{\lambda 0} \alpha_{\lambda' 0} \alpha_{\lambda'' 0} \sum_L \frac{[(2\lambda+1)(2\lambda'+1)(2\lambda''+1)(2\alpha+1)]^{1/2}}{4\pi(2L+1)} \\
 &\times \langle \alpha\lambda, 0 0 | L 0 \rangle^2 \langle \lambda'\lambda'', 0 0 | L 0 \rangle^2 .
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Resumindo

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha 0}^1 &= \alpha_{\alpha 0} , \\
 I_{\alpha 0}^2 &= \sum_{\lambda \lambda'} \alpha_{\lambda 0} \alpha_{\lambda' 0} \sqrt{\frac{(2\lambda + 1)(2\lambda' + 1)}{4\pi(2\alpha + 1)}} \langle \lambda \lambda', 0 0 | \alpha 0 \rangle^2 , \\
 I_{\alpha 0}^3 &= \sum_{\lambda \lambda' \lambda''} \alpha_{\lambda 0} \alpha_{\lambda' 0} \alpha_{\lambda'' 0} \sum_L \frac{[(2\lambda + 1)(2\lambda' + 1)(2\lambda'' + 1)(2\alpha + 1)]^{1/2}}{4\pi(2L + 1)} \\
 &\quad \times \langle \alpha \lambda, 0 0 | L 0 \rangle^2 \langle \lambda' \lambda'', 0 0 | L 0 \rangle^2 .
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Apêndice C

Gráficos $^{238}\text{U} - ^{208}\text{Pb}$ para diferentes valores r_0 , a_{sp} e α

São apresentados a seguir os gráficos com as curvas experimentais [12] e com as curvas obtidas via modelo simplificado para diferentes valores de r_0 ($r_0 = 1.2, 1.4, 1.6\text{fm}$), a_{sp} ($a_{sp} = 0.18, 0.20$) e α ($\alpha = 16.00, 16.25\text{MeV}^{-1}$). Pode-se ver nestes gráficos as já citadas variações de diversas ordens de grandeza na secção de choque total de fissão devidas mesmo a pequenas variações nos parâmetros; vê-se que o conjunto $r_0 = 1.6\text{fm}$, $a_{sp} = 0.20$ e $\alpha = 16.25\text{MeV}^{-1}$ fornece os melhores resultados.

Vale observar que para este conjunto de parâmetros ainda são obtidas diferenças de duas ordens de grandeza para algumas energias, o que se acredita ser uma característica intrínseca da curva $\sigma_F(E) \times E$ obtida via modelo simplificado.

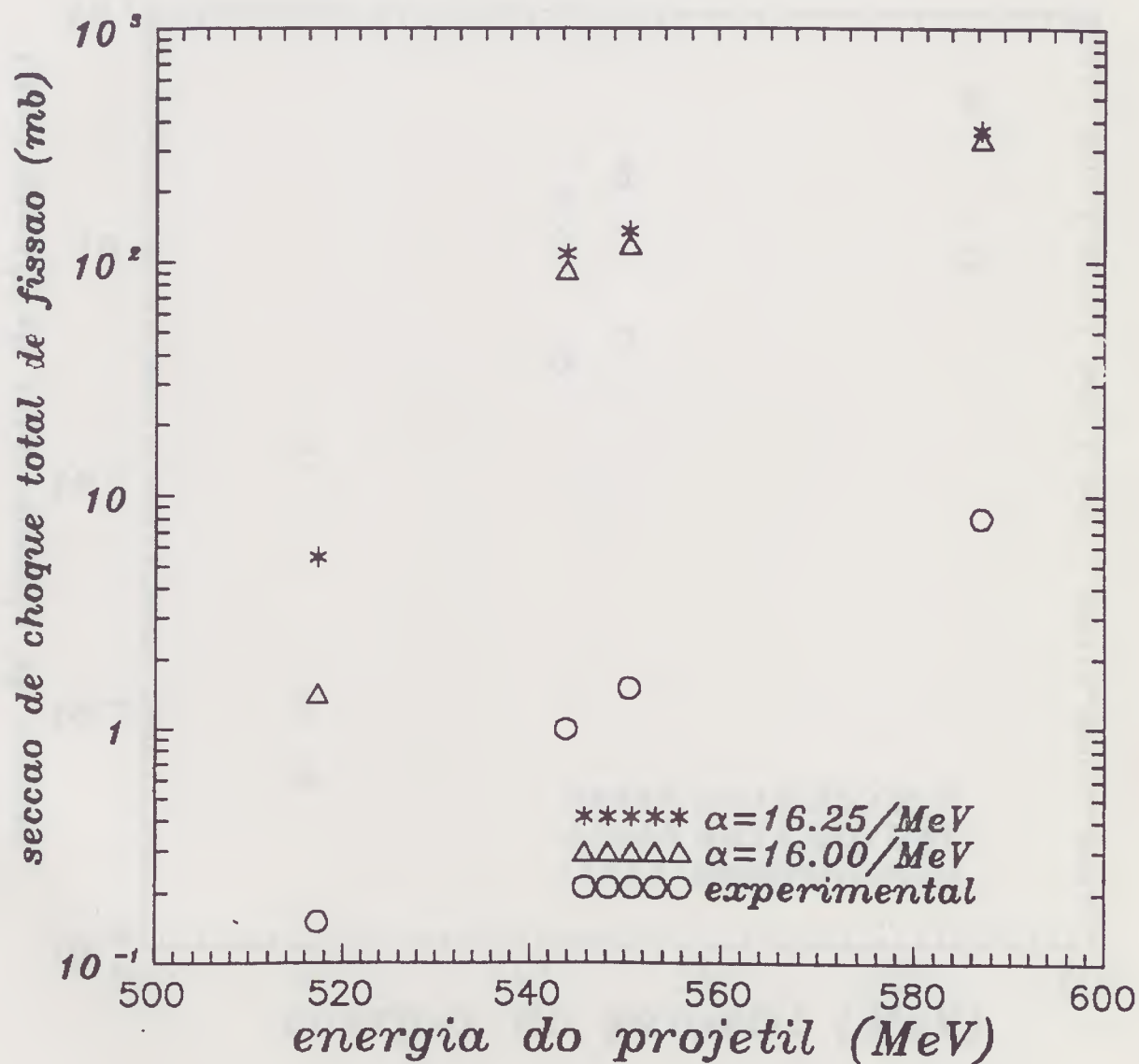


Figura C.1: Secções de choque total de fissão (mb) como função da energia do projétil (MeV) para $r_0 = 1.6\text{fm}$, $a_{sp} = 0.20$ e diferentes valores de α , para o espalhamento $^{238}\text{U} - ^{208}\text{Pb}$.

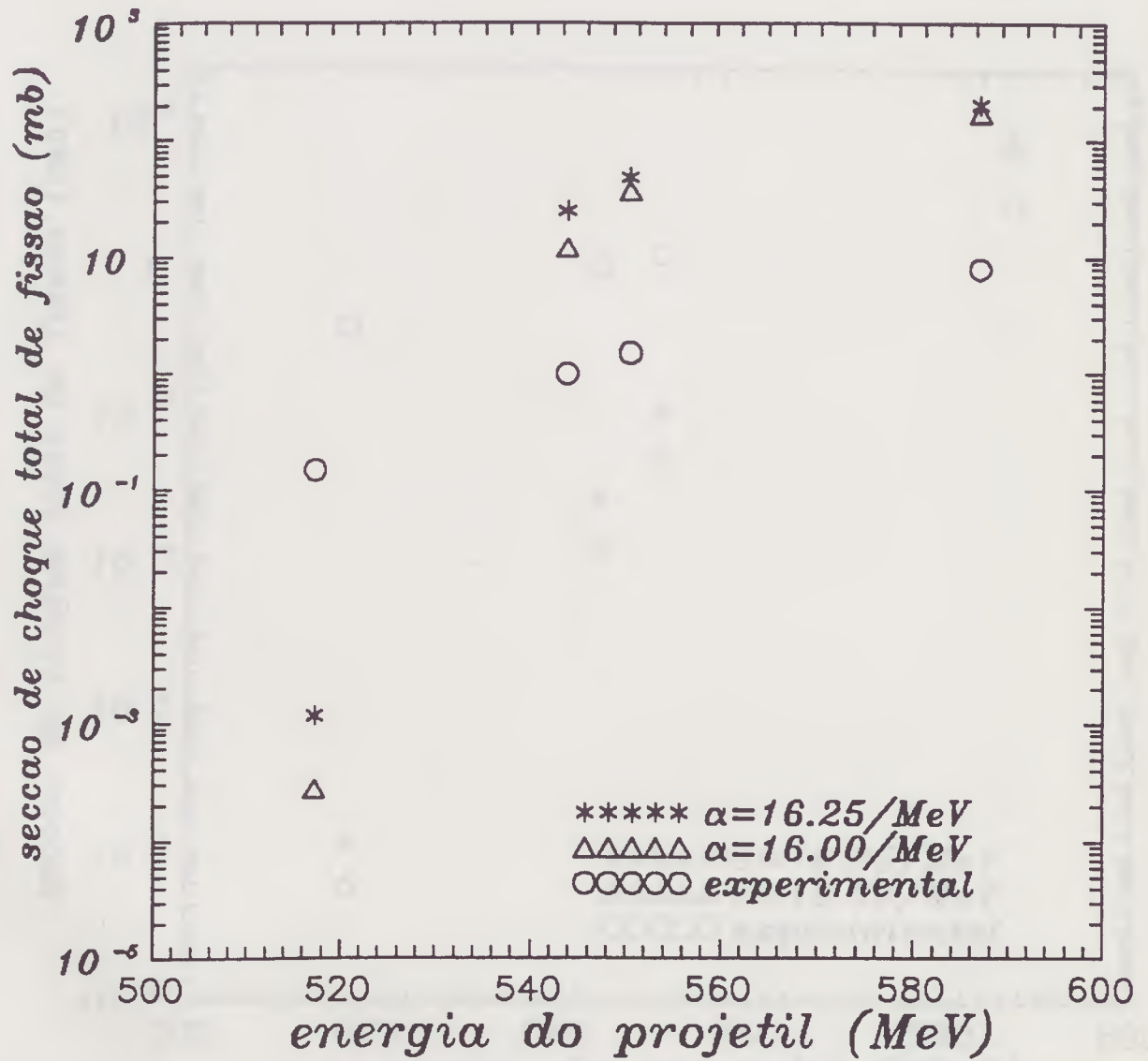


Figura C.2: Secções de choque total de fissão (mb) como função da energia do projétil (MeV) para $r_0 = 1.6\text{fm}$, $a_{sp} = 0.18$ e diferentes valores de α , para o espalhamento $^{238}\text{U} - ^{208}\text{Pb}$.

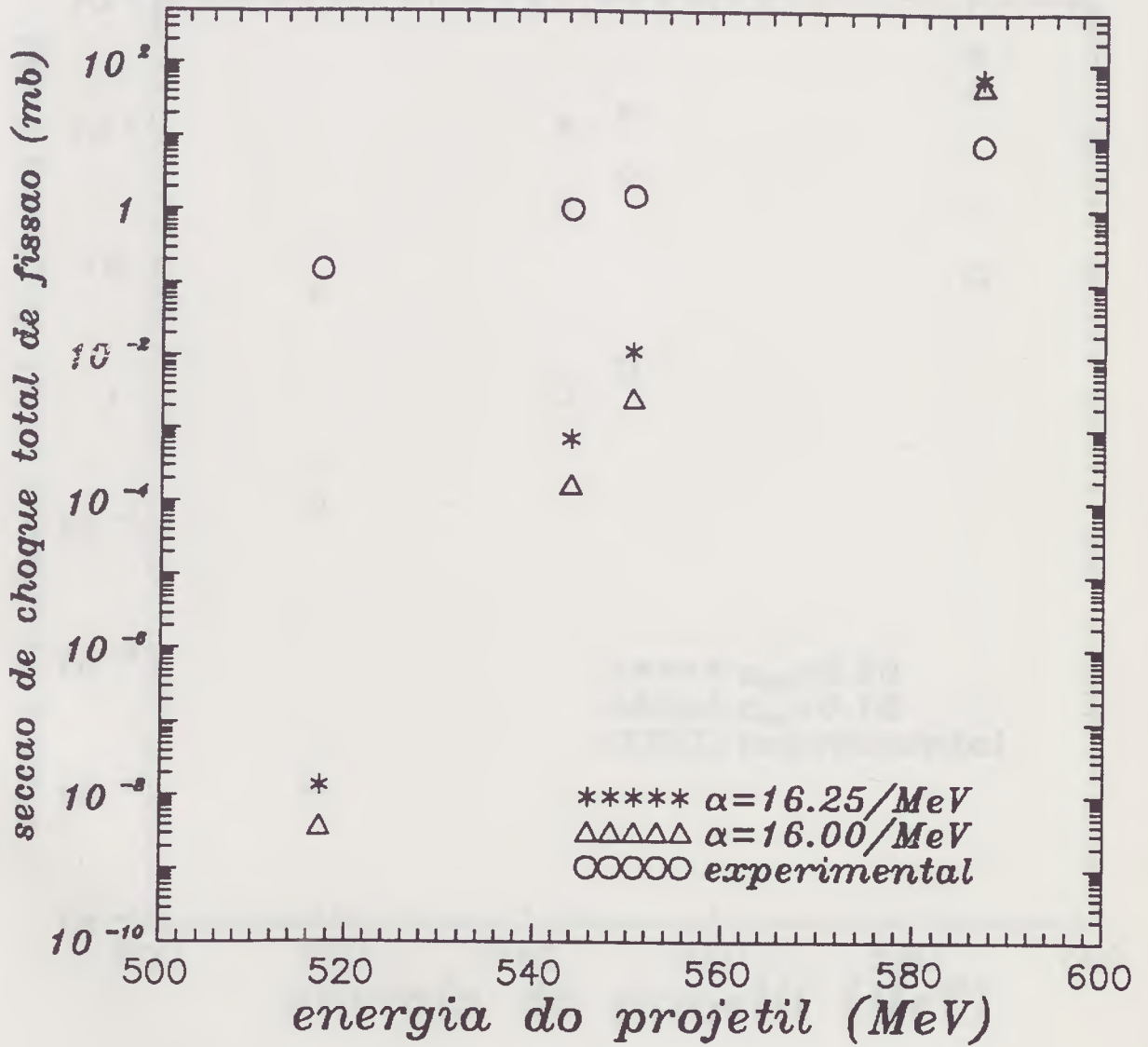


Figura C.3: Secções de choque total de fissão (mb) como função da energia do projétil (MeV) para $r_0 = 1.4\text{fm}$, $a_{sp} = 0.20$ e diferentes valores de α , para o espalhamento $^{238}\text{U} - ^{208}\text{Pb}$.

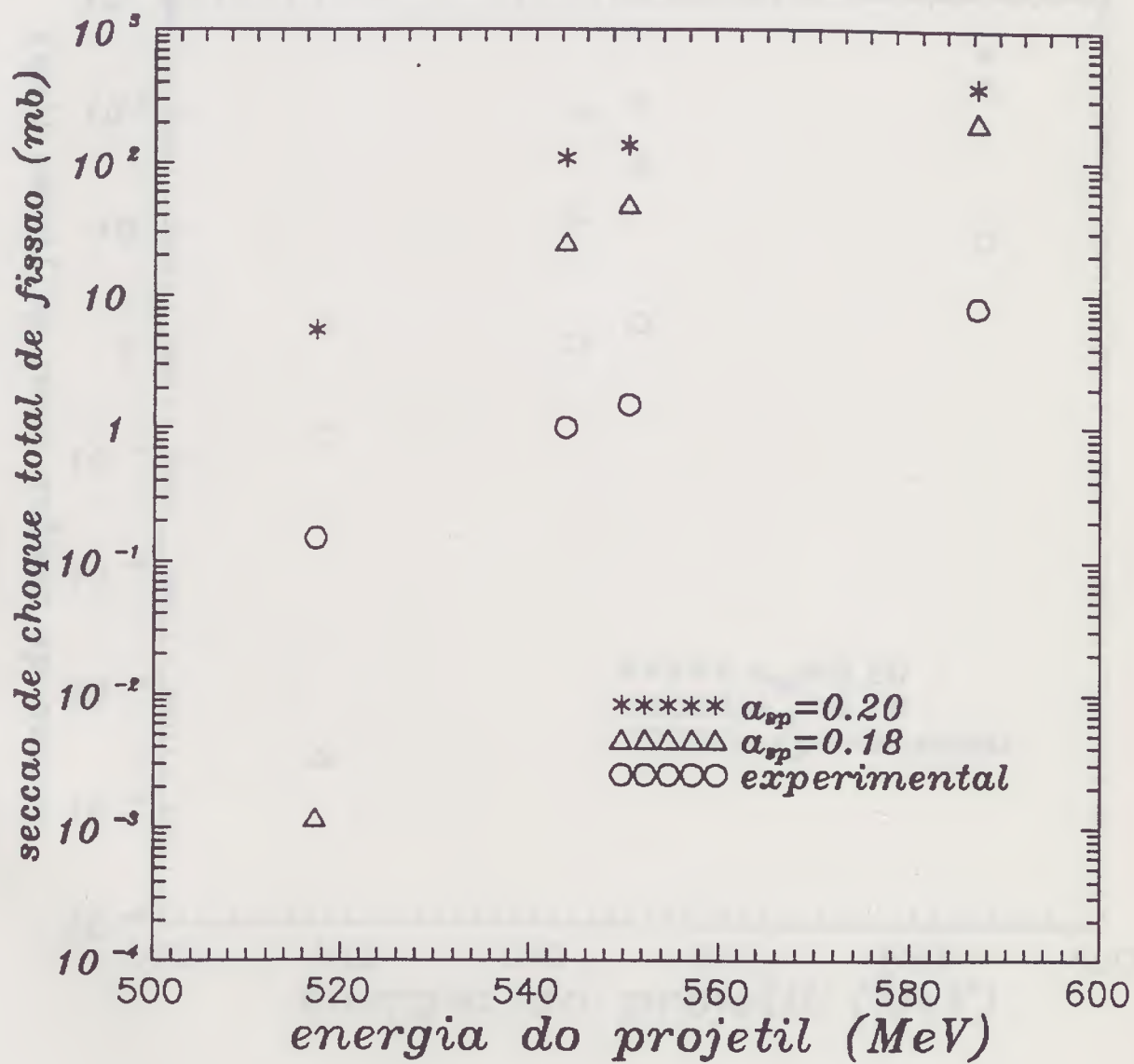


Figura C.4: Secções de choque total de fissão (mb) como função da energia do projétil (MeV) para $r_0 = 1.6\text{fm}$, $\alpha = 16.25\text{MeV}^{-1}$ e diferentes valores de a_{sp} , para o espalhamento $^{238}\text{U} - ^{208}\text{Pb}$.

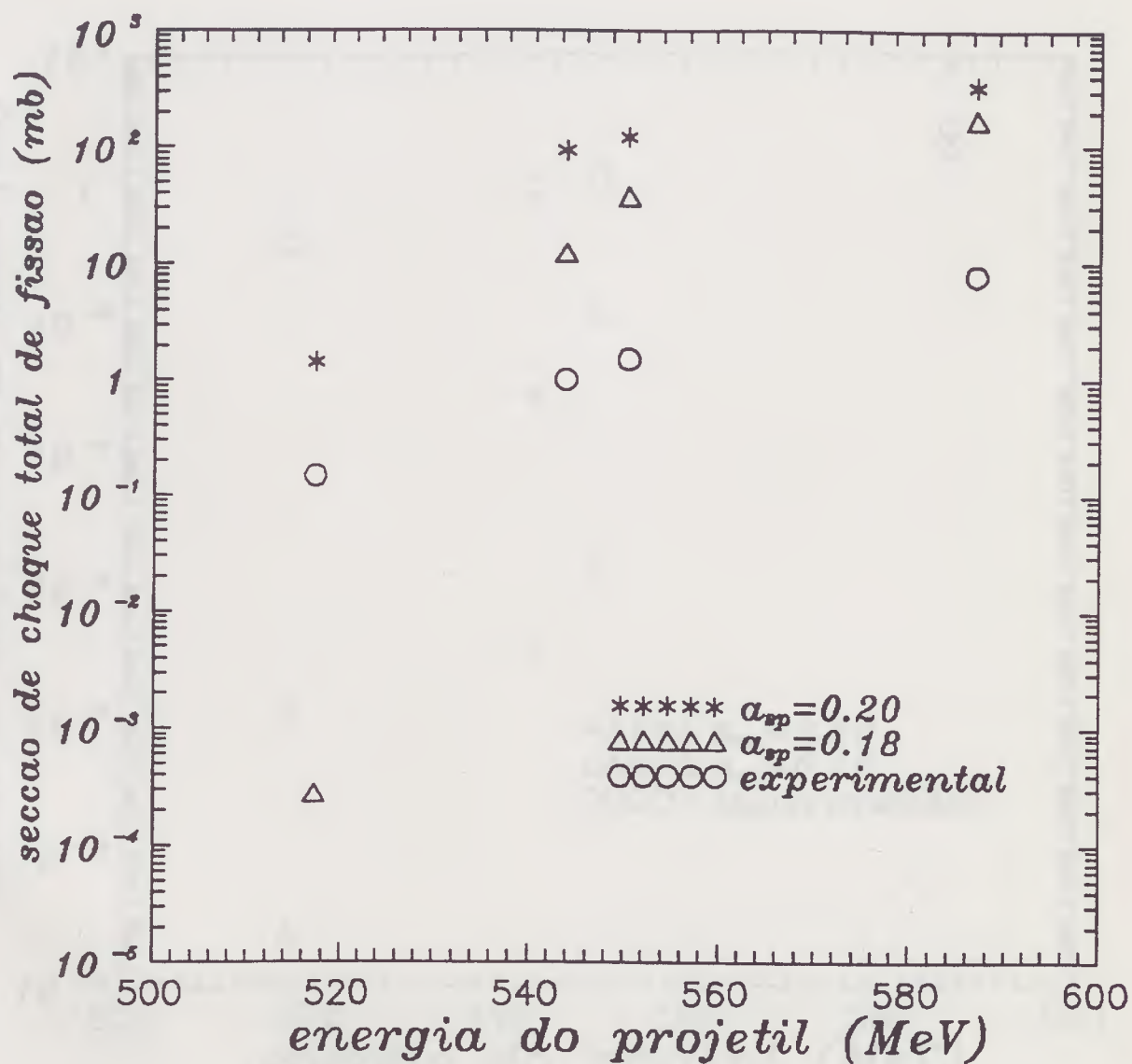


Figura C.5: Secções de choque total de fissão (mb) como função da energia do projétil (MeV) para $r_0 = 1.6\text{fm}$, $\alpha = 16.00\text{MeV}^{-1}$ e diferentes valores de a_{sp} , para o espalhamento $^{238}\text{U} - ^{208}\text{Pb}$.

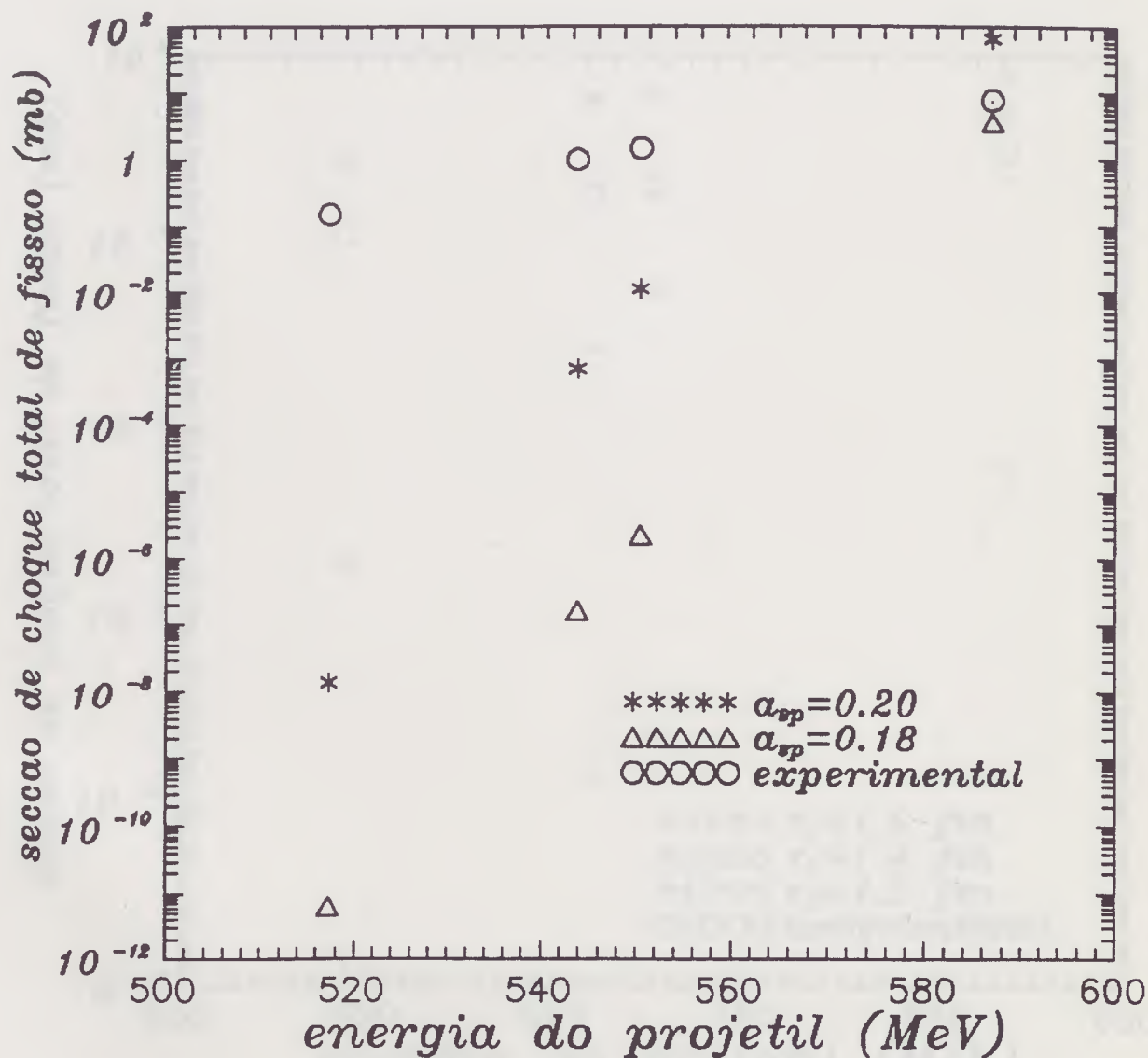


Figura C.6: Secções de choque total de fissão (mb) como função da energia do projétil (MeV) para $r_0 = 1.4\text{fm}$, $\alpha = 16.25\text{MeV}^{-1}$ e diferentes valores de a_{sp} , para o espalhamento $^{238}\text{U} - ^{208}\text{Pb}$.

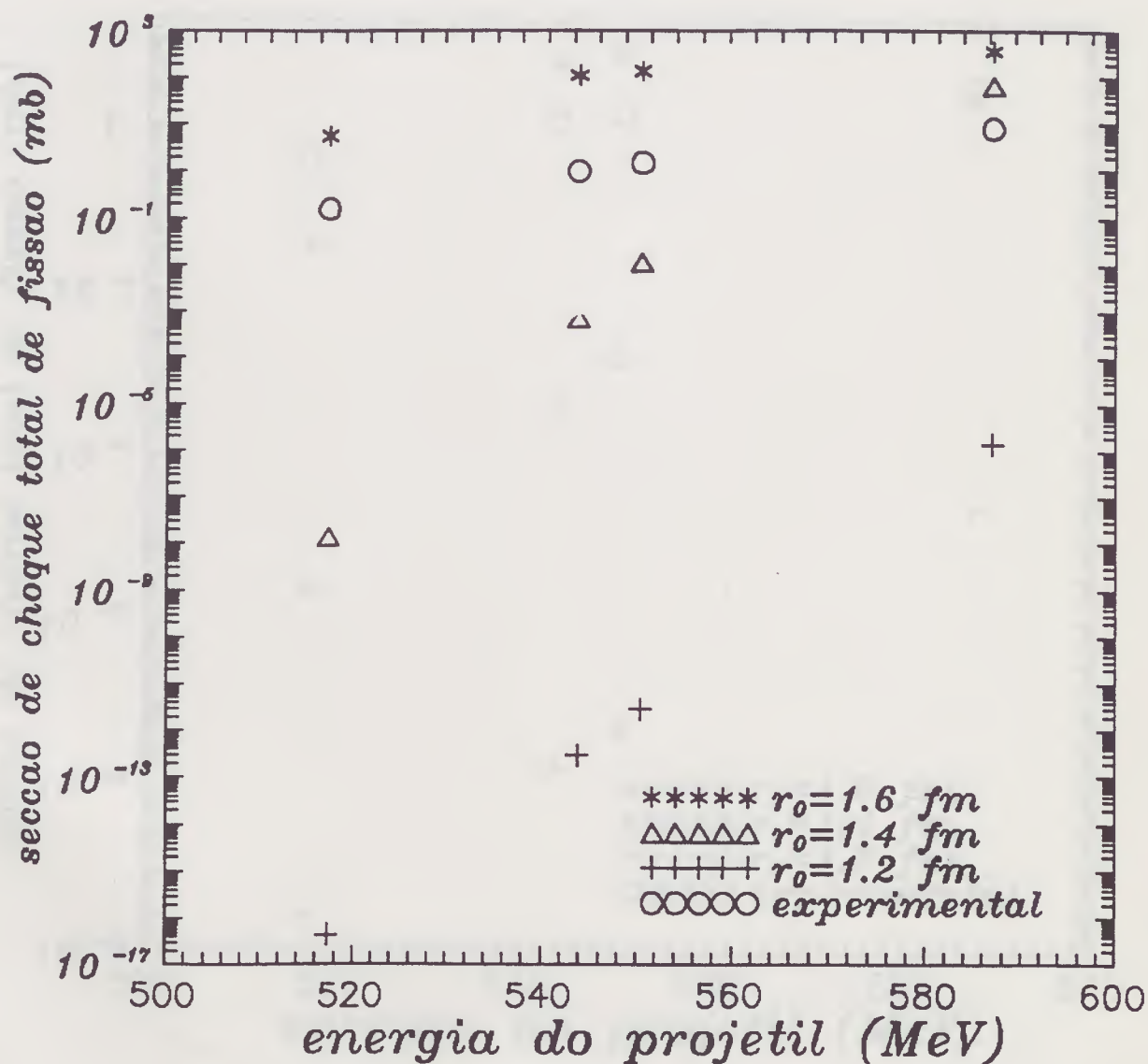


Figura C.7: Secções de choque total de fissão (mb) como função da energia do projétil (MeV) para $a_{sp} = 0.20$, $\alpha = 16.25 \text{ MeV}^{-1}$ e diferentes valores de r_0 , para o espalhamento $^{238}\text{U} - ^{208}\text{Pb}$.

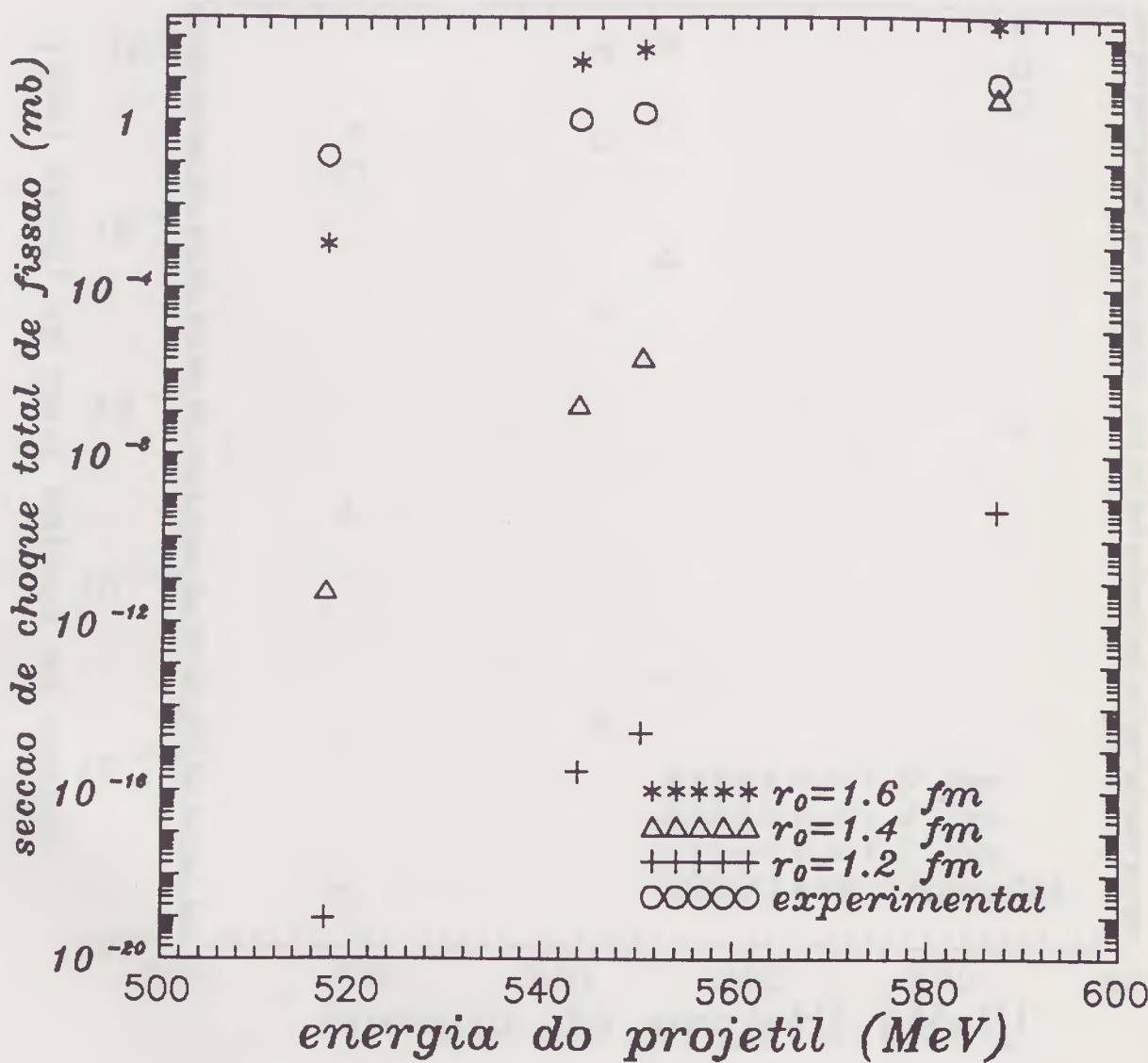


Figura C.8: Secções de choque total de fissão (mb) como função da energia do projétil (MeV) para $a_{sp} = 0.18$, $\alpha = 16.25 \text{ MeV}^{-1}$ e diferentes valores de r_0 , para o espalhamento $^{238}\text{U} - ^{208}\text{Pb}$.

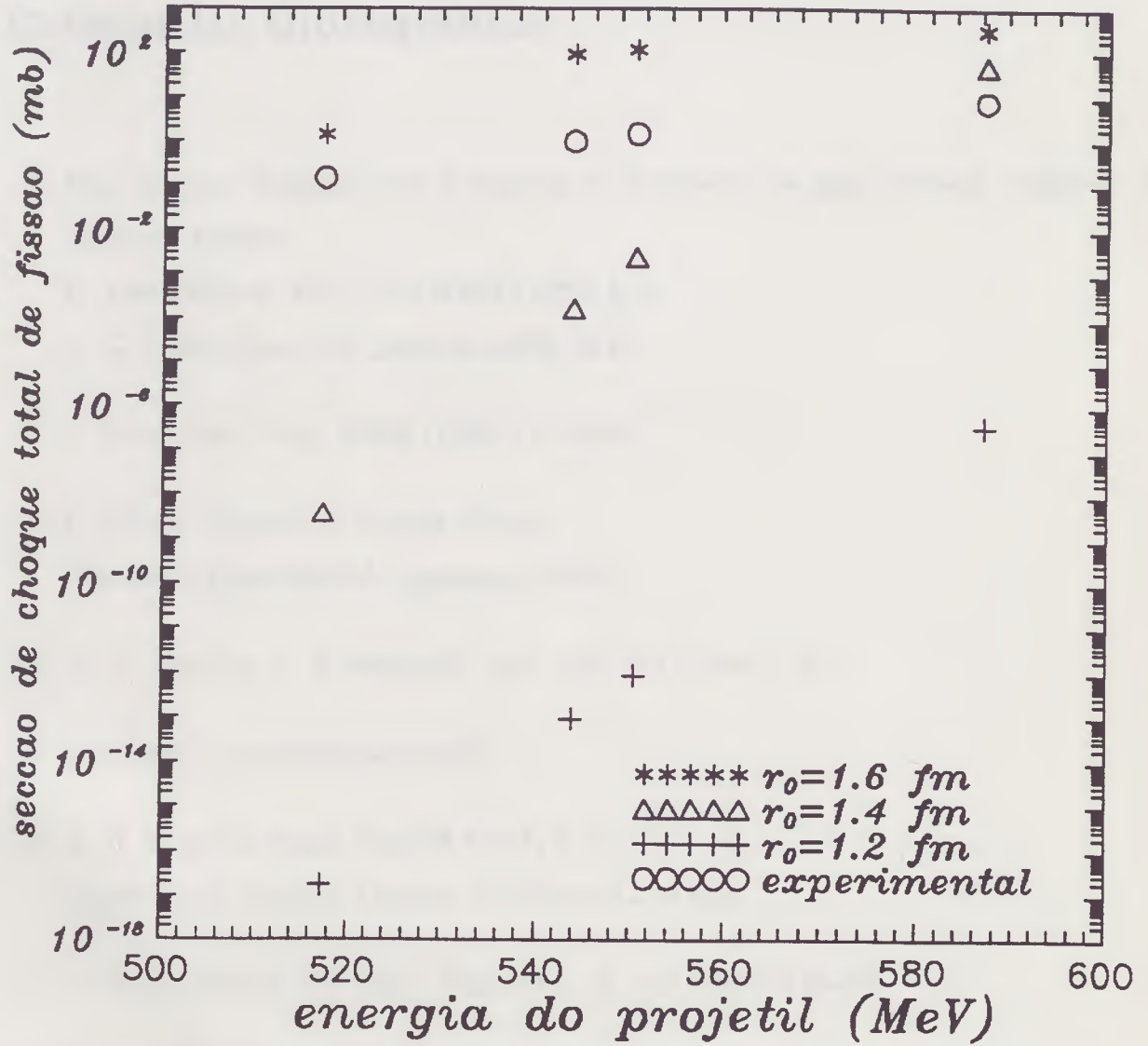


Figura C.9: Secções de choque total de fissão (mb) como função da energia do projétil (MeV) para $a_{sp} = 0.20$, $\alpha = 16.00 \text{ MeV}^{-1}$ e diferentes valores de r_0 , para o espalhamento $^{238}\text{U} - ^{208}\text{Pb}$.

Referências Bibliográficas

- [1] Para maiores detalhes sobre a história da descoberta da fissão nuclear, sugere-se os seguintes artigos:
R. Vandenbosch *Nucl. Phys.* **A502** (1989) 1c-2c
E. G. Segrè *Phys. Tod.* [julho de 1989] 38-43
- [2] J. Blons *Nucl. Phys.* **A502** (1989) 121c-140c
- [3] L. Wilets *Theories of Nuclear Fission*
Clarendon Press-Oxford, Inglaterra (1964)
- [4] W. D. Myers e W. J. Swiatecki *Nucl. Phys.* **81** (1966) 1-60
- [5] S. Mizrahi - comunicação pessoal
- [6] A. H. Wapstra *Hand. Phys* **38** (1958) 1-37
Sugere-se em especial a leitura da páginas 14,15 e 22.
- [7] V. M. Strutinskĩ *Sov. Jour. Nucl. Phys.* **3**, no.4 (1966) 449-457
- [8] P. Ring e P. Schuck *The Nuclear Many-Body Problem* 79-95
Springer Verlag, Berlim (1981)
- [9] A. Winther *Coulomb Excitation Lecture Notes*
Instituto de Física da USP (1966)
- [10] J. D. Jackson *Eletrodinâmica Clássica*
Ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 2a. edição (1983)

- [11] L. Landau e E. Lifchitz *Mécanique*
Éditions Mir, Moscow (1966)
- [12] V. E. Oberacker, W. T. Pinkston e H. G. W. Kruse *Rep. Prog. Phys.* **48** (1985) 327-374
- [13] L. Wilets, E. Guth e J. S. Tenn *Phys. Rev.* **156** (1967) 1349-1358
- [14] C. Y. Wong *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 766-769
- [15] E. V. Viola e T. Sikkeland *Phys. Rev.* **128**, no.2 (1962) 767-764
- [16] S. G. Nilsson *Dan. Mat. Fys. Medd.* **29**, no. 16 (1955)
- [17] J. J. Sakurai *Modern Quantum Mechanics*
Addison-Wesley Publishing Company, Inc., USA (1985)

