

RESSALVA

Atendendo solicitação do(a) autor(a), o texto completo desta dissertação será disponibilizado somente a partir de 16/03/2017.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Dinâmica e Bifurcações de Campos Vetoriais Polinomiais em $\mathbb{R}^3$ com um Cilindro Invariante

Naiara Aparecida dos Santos Silva

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Messias

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Setembro de 2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Dinâmica e Bifurcações de Campos Vetoriais Polinomiais em $\mathbb{R}^3$ com um Cilindro Invariante

Naiara Aparecida dos Santos Silva

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Messias

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Setembro de 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

S581d Silva, Naiara Aparecida dos Santos.
Dinâmica e bifurcações de campos vetoriais polinomiais em R^3 com um cilindro invariante / Naiara Aparecida dos Santos Silva. - Presidente Prudente : [s.n.], 2016
79 f. : il.

Orientador: Marcelo Messias
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Superfície algébrica invariante. 2. Cilindro invariante. 3. Bifurcação de Hopf e ciclo limite. I. Messias, Marcelo. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: DINÂMICA E BIFURCAÇÕES DE CAMPOS VETORIAIS
POLINOMIAIS EM R^3 COM UM CILINDRO INVARIANTE**

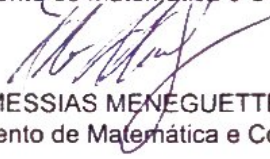
AUTORA: NAIARA APARECIDA DOS SANTOS SILVA

ORIENTADOR: MARCELO MESSIAS

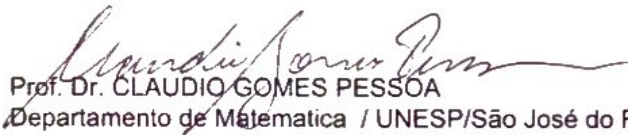
Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em MATEMÁTICA
APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. MARCELO MESSIAS

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente


Prof. Dr. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente


Prof. Dr. CLAUDIO GOMES PESSOA

Departamento de Matemática / UNESP/São José do Rio Preto

Presidente Prudente, 16 de setembro de 2016

Aos meus pais, Dilsa e Aparecido, e meu irmão, Fabiano, dedico.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por tudo.

Agradeço também a minha família, meus pais Dilsa e Aparecido e ao meu irmão Fabiano pelo incentivo e compreensão, que me permitiram chegar até aqui.

Agradeço a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para que eu pudesse progredir como pessoa e como acadêmica, seja compartilhando seus conhecimentos ou o riso.

Ao professor Marcelo Messias pela paciência e por todos os ensinamentos.

Por fim, aos funcionários da Seção de Pós-Graduação e Escritório de Pesquisa. E ainda, em especial agradeço a Vera, secretária da Direção, por sempre me atender com tanto carinho e o empenho em reservar um horário na apertada agenda do orientador.

Agradeço à FAPESP, processo nº 2014/14096-2, pelo auxílio financeiro.

“A parte mais difícil do final é o recomeço”.

Linkin Park

Resumo

Neste trabalho fazemos o estudo de uma classe de sistemas diferenciais polinomiais quadráticos definidos em $\mathbb{R}^3$ que possui um cilindro como superfície algébrica invariante. Mais especificamente, fizemos o estudo da estabilidade e das bifurcações locais dos pontos singulares, utilizando para isto a estrutura do espaço de fase, ou seja, a restrição geométrica dada pela existência do cilindro invariante. Provamos que ocorre uma bifurcação de Hopf sobre o cilindro, que leva a criação de um ciclo limite estável, para determinados valores dos parâmetros. Mostramos também a existência de órbitas homoclínicas, heteroclínicas e centros, contidos nestes cilindros. O estudo apresentado visa contribuir para o entendimento do complicado comportamento dinâmico dos sistemas diferenciais (ou campos vetoriais) polinomiais definidos em $\mathbb{R}^3$.

Palavras-Chave: *Superfície Algébrica Invariante, Cilindro Invariante, Estabilidade, Bifurcação de Hopf, Ciclo Limite.*

Abstract

In this work we study a class of quadratic polynomial differential systems defined in $\mathbb{R}^3$ which has a cylinder as invariant algebraic surface. More specifically, we study the stability and local bifurcations of singular points, using for this the structure of the phase space, that is, the geometric constraint provided by the existence of the invariant cylinder. We prove that there is a Hopf bifurcation on the cylinder, which leads to the creation of a stable limit cycle, for certain parameter values. We also show the existence of homoclinic orbits, heteroclinic orbits and centers, contained in these cylinders. These elements are key ingredients to understand the complicated dynamic behavior of small perturbations of these differential systems in $\mathbb{R}^3$.

Keywords: *Invariant Algebraic Surface, Invariant Cylinder, Stability, Hopf Bifurcation, Limit cycle.*

Lista de Figuras

3.1	Centro para $a = 0, c = 0, bd = -1$	27
3.2	Sela para $a = 0, c = 0, bd = 1$	27
3.3	Nó atrator para $a = -0.3, c = -3$	27
3.4	Nó repulsor para $a = 0.3, c = 3$	27
3.5	Espiral atratora para $a = -0.5, c = -0.5$	27
3.6	Espiral repulsora para $a = 0.5, c = 0.5$	27
3.7	Nó impróprio atrator para $a = -2, c = -2$	28
3.8	Nó impróprio repulsor para $a = 0.5, c = 2$	28
3.9	$a = 0, c=0$	29
3.10	$a = 0, c>0$	29
3.11	$a = 0, c<0$	29
3.12	Retrato de fase do sistema (7) mostrando dois focos instáveis com $a = 0, bd > \frac{-c^2z}{2}$ e $z > 0$	29
3.13	Centro no campo restrito para a carta positiva	30
3.14	Sela no campo restrito para a carta positiva	30
3.15	Nó atrator no campo restrito para a carta positiva.	30
3.16	Nó repulsor no campo restrito para a carta positiva.	31
3.17	Espiral atratora no campo restrito para a carta positiva.	31
3.18	Espiral repulsora no campo restrito para a carta positiva.	31
3.19	Retrato de fase do sistema (10) $tr(A) = 0, det(A) = -2bd < 0$	32
3.20	Retrato de fase do sistema (10) $tr(A) = 0, det(A) = -2bd > 0$	32
3.21	Retrato de fase do sistema (14) para os casos <i>i</i>) $\nu_1 \leq -2\sqrt{2rh + r^2}$, <i>ii</i>) $-2\sqrt{2rh + r^2} < \nu_1 < 0$ e <i>iii</i>) $0 < \nu_1 < 2\sqrt{2rh + r^2}$	34
3.22	Retrato de fase do sistema (14) para os casos <i>iv</i>) $\nu_1 = 0$, <i>v</i>) $\nu_1 > 2\sqrt{2rh + r^2}$	35
4.1	Bifurcação de Hopf Supercrítica	38
4.2	Bifurcação de Hopf Supercrítica no espaço (x_1, x_2, α)	39
4.3	Retrato de fase do sistema (6): a) Espiral estável para o valor de parâmetro $c = -0.5$; b) Espiral fracamente estável para o valor de parâmetro $c = -0.01$	59
4.4	Retrato de fase do sistema (6): a) Ciclo limite criado com a bifurcação de Hopf que ocorre quando c passa pelo valor crítico $c = 0$; b) Espiral instável para o valor $c = 0.05$	59
5.1	Orientação das cartas locais $U_i, i = 1, 2, 3$ nos pontos infinitos na direção positiva dos eixos coordenados x, y e z , usados para desenhar o retrato de fase do sistema (2) na esfera de Poincaré no infinito.	64
5.2	Carta U_1	65
5.3	Carta U_2	65
5.4	Carta U_3	65
5.5	Esfera de Poincaré	65

5.6	Retrato de fase do sistema (7) no infinito para valores de parâmetro $a > 0, c > 0$.	65
5.7	Carta U_1	66
5.8	Carta U_2	66
5.9	Carta U_3	66
5.10	Esfera de Poincaré	66
5.11	Retrato de fase do sistema (7) no infinito para valores de parâmetro $a > 0, c = 0$.	66
5.12	Carta U_1	67
5.13	Carta U_2	67
5.14	Carta U_3	68
5.15	Esfera de Poincaré	68
5.16	Retrato de fase do sistema (7) no infinito para valores de parâmetro $a > 0, c < 0$.	68
5.17	órbita homoclínica estável	68
5.18	órbita homoclínica	68
5.19	órbita homoclínica instável	68

Sumário

Resumo	5
Abstract	7
Lista de Figuras	8
Capítulos	
1 Introdução	13
2 Preliminares	15
2.1 Campos vetoriais	15
2.2 Conjuntos invariantes	16
2.3 Superfícies Algébricas Invariantes e Integrais primeiras	18
2.4 Formas Normais de campos vetoriais polinomiais de grau m com uma quádrlica invariante	20
3 Campos vetoriais quadráticos com um cilindro invariante	23
3.1 Dinâmica e bifurcações de uma subclasse do sistema (1)	25
3.2 Dinâmica do sistema restrito ao cilindro invariante	29
3.3 Exemplo: Estudo do Sistema de Rabinovich com um Cilindro Invariante	33
4 Bifurcação de Hopf	37
4.1 Caso Bidimensional	37
4.1.1 Teorema da Bifurcação de Hopf	39
4.2 Método da Projeção	48
4.3 Condição de Transversalidade	53
4.4 Bifurcação de Hopf em Uma Classe de Sistemas Quadráticos com um Cilindro Invariante	54
5 Análise no Infinito	61
5.1 Técnica de Compactificação de Poincaré	62
5.2 Cartas Locais	62
5.3 Análise do Sistema Compactificado	64
5.4 Órbitas e Bifurcação Homoclínica	67
6 Conclusão	69
Referências	69

Apêndices

A	Cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov	71
A.1	Cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov para valores de parâmetro $bd < 0$ para o valor de bifurcação $c = 0$	71
A.2	Cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov para valores $bd < 0$ para o valor de bifurcação $c = 0$	74

Introdução

A análise matemática dos fenômenos naturais envolvendo variações de grandezas físicas com o tempo leva ao estudo da derivada como taxa de variação e, conseqüentemente, ao estudo das equações diferenciais, que são comumente utilizadas na modelagem matemática de fenômenos naturais relacionados a diversas áreas do conhecimento. Neste contexto, o estudo de sistemas tridimensionais de equações diferenciais ordinárias, da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y, z) \\ \dot{y} &= Q(x, y, z) \\ \dot{z} &= R(x, y, z)\end{aligned}\tag{1}$$

onde P , Q e R são funções de classe C^k , $k \geq 1$, definidas em um aberto U do $\mathbb{R}^3$, nas variáveis x , y , e z é de extrema relevância, tanto do ponto de vista teórico quanto das aplicações de métodos matemáticos na modelagem e análise dos fenômenos naturais das ciências em geral. Note que, ao sistema diferencial (1) está naturalmente associado o campo vetorial

$$X(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),\tag{2}$$

ou simplesmente $X = (P, Q, R)$. No caso em que as funções P , Q e R são polinômios nas variáveis x , y e z o sistema (1) está definido para todo (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ e é chamado de *sistema diferencial polinomial de grau d* , onde $d = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q), \text{grau}(R)\}$.

Sistemas do tipo (1) aparecem frequentemente na literatura devido a sua importância teórica, bem como as suas aplicações matemáticas, uma vez que sistemas polinomiais são muito usados na modelagem de problemas naturais, aparecendo em Física, Química, Biologia e demais ciências, conforme pode ser visto em [10] e referências ali contidas.

Com isso, muitos pesquisadores têm estudado esse tipo de sistema, buscando descrever a dinâmica das soluções, que está longe de ser completamente entendida, mesmo no caso quadrático, ou seja, no caso $d = 2$. Isso ocorre pois a dinâmica gerada pelo fluxo do sistema (1) com grau $d \geq 2$ é, em geral, muito complexa e difícil de ser estudada. Além de pontos singulares, órbitas periódicas, órbitas homoclínicas e heteroclínicas que são geralmente encontrados no plano de fase de sistemas diferenciais (ou campos vetoriais) polinomiais no plano, sistemas tridimensionais do tipo (1) podem apresentar um comportamento dinâmico bem mais complexo, com a ocorrência de toros invariantes, órbitas quase periódicas, atratores estranhos ou caóticos, além de outros fenômenos dinâmicos.

Uma das ferramentas usadas para o estudo da dinâmica de sistemas diferenciais polinomiais é a determinação de superfícies algébricas de dimensão dois em $\mathbb{R}^3$, que são

invariantes pelo fluxo desses sistemas. Quando o sistema (1) apresenta uma superfície algébrica invariante, esse fato auxilia muito no estudo da dinâmica do sistema, conforme mostra os resultados apresentados em [7, 8].

Em [1], os autores fornecem as formas normais dos campos vetoriais ou sistemas diferenciais polinomiais (1) ou, equivalentemente dos campos vetoriais (2), que apresentam uma quádrlica como superfície algébrica invariante. As quádrlicas ali consideradas são: cone, cilindro elíptico, cilindro parabólico, cilindro hiperbólico, parabolóide elíptico, parabolóide hiperbólico, hiperbolóide de uma folha, hiperbolóide de duas folhas e esfera (ou elipsoide). O artigo (1) traz um estudo puramente algébrico, apresentando todas as formas normais dos sistemas diferenciais que tem estas quádrlicas invariantes, porém não apresenta nenhum estudo sobre a dinâmica de tais sistemas. Neste contexto, em [2], os autores fazem um estudo da dinâmica e integrabilidade dos campos vetoriais quadráticos definidos em $\mathbb{R}^3$ que apresentam um parabolóide invariante, utilizando a existência de tal superfície para mostrar a existência de ciclos limites, centros, órbitas homoclínicas e heteroclínicas, além de vários outros resultados sobre a dinâmica e integrabilidade dos sistemas considerados.

Neste trabalho, na linha do que foi feito em [2], consideramos sistemas diferenciais (ou campos vetoriais) quadráticos definidos em $\mathbb{R}^3$ que apresentam um cilindro como superfície algébrica invariante. Como esperado, a existência de tal superfície apresenta implicações interessantes no comportamento dinâmico global das soluções do sistema e, em particular, na existência de ciclos limites, órbitas homoclínicas e centros. Mais especificamente, para uma subclasse de tais sistemas, fizemos o estudo da estabilidade e das bifurcações locais dos pontos singulares, utilizando para isto a estrutura do espaço de fase, ou seja, a restrição geométrica dada pela existência do cilindro invariante. Provamos que ocorre uma bifurcação de Hopf sobre o cilindro, que leva a criação de um ciclo limite estável, para determinados valores dos parâmetros. Mostramos também a existência de órbitas homoclínicas, heteroclínicas e centros, contidos nestes cilindros. A constatação da existência desses tipos de elementos dinâmicos é importante e ajuda muito na compreensão do complicado comportamento dinâmico da classe de sistemas diferenciais polinomiais em $\mathbb{R}^3$ aqui considerada.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 2 são apresentados alguns conceitos básicos da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias. No Capítulo 3 apresentamos a análise da dinâmica de uma classe de sistemas diferenciais polinomiais quadráticos em $\mathbb{R}^3$ que apresenta um cilindro como superfície algébrica invariante. No Capítulo 4, apresentamos a teoria de Bifurcação de Hopf, utilizando-a para mostrar a ocorrência de tal tipo de bifurcação nos sistemas diferenciais com cilindro invariante, que leva a criação de um ciclo limite. No Capítulo 4 é apresentado a teoria da Compactificação de Poincaré, usada para estudar o comportamento global das soluções ilimitadas de campos vetoriais polinomiais, que não poderiam ser estudadas em regiões compactas do espaço de fase. Utilizamos tal teoria para fazer uma análise no infinito de uma classe de sistemas diferenciais quadráticos com um cilindro invariante. No capítulo 5 apresentamos algumas conclusões e comentários sobre o estudo desenvolvido e, por fim, no Apêndice A, são apresentados os cálculos relativos a bifurcação de Hopf no sistema estudado, elaborados com o software MAPLE.

Conclusão

O estudo e análise de uma classe de campos vetoriais ou sistemas diferenciais polinomiais definidos em $\mathbb{R}^3$ apresentando um cilindro como superfície algébrica invariante nos possibilitou determinar resultados interessantes acerca do comportamento dinâmico, como por exemplo a existência de integrais primeiras, órbitas homoclínicas e centros, contidos nestes cilindros, bem como a existência de uma bifurcação de Hopf quando variamos os parâmetros do sistema. Fizemos ainda os cálculos do primeiro coeficiente de Lyapunov com o auxílio do software Maple, também usado no desenvolvimento das simulações numéricas, que dão a descrição dos retratos de fase e que possibilitam comprovar a existência dos ciclos limites oriundo da bifurcação de Hopf.

Além disso, a análise do sistema via compactificação de Poincaré permitiu a análise global das soluções, inclusive das não limitadas e que tendem para o infinito e, com isso, observamos na carta compactificada U_2 a ocorrência de uma bifurcação homoclínica e de centros.

Portanto, a existência de um cilindro invariante, que determina uma restrição geométrica no espaço de fase, possibilitou o estudo de importantes propriedades dinâmicas do sistema estudado.

Referências

- [1] J. Llibre; M. Messias; A. C. Reinol. Normal Forms for Polynomial Differential Systems in $\mathbb{R}^3$ having an Invariant Quadric and a Darboux Invariant. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 25(1):16, 2015.
- [2] M. Messias; A. C. Reinol. Integrability and dynamics of quadratic three-dimensional differential systems having an invariant paraboloid. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 26(8):23, 2016.
- [3] A. Cima; J. Llibre. Bounded polynomial vector fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 318:557–579, 1990.
- [4] F. Dumortier; J. Llibre; J. C. Artés. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 2 edition, 2006.
- [5] M. C. Galindo. Comportamento Caótico em Sistemas Dinâmicos e Aplicação no Estudo da Evolução de Tumores de Câncer. Master's thesis, Universidade Estadual Paulista-FCT, 2012.
- [6] Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York, 2 edition, 1998.
- [7] J. Llibre; M. Messias; P. R. Silva. On the global dynamics of the Rabinovich system. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41(275210):21, 2008.
- [8] J. Llibre; M. Messias; P. R. Silva. Global dynamics of the Lorenz system with invariant algebraic surfaces. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 20:3137–3155, 2010.
- [9] J. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides, IMPA/CNPq, 1979.
- [10] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Westview Press, New York, 2001.
- [11] E. A. G. Velasco. Generic properties of polynomial vector fields at infinity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 143:201–222, 1969.
- [12] J. A. Vêrri. Estabilidade Global e Bifurcação de Hopf em um Modelo de HIV baseado em Sistemas do Tipo Lotka-Volterra. Master's thesis, Universidade Estadual Paulista-FCT, 2013.