

Flávia do Nascimento Cortes

ZEROS E PROPIEDADES
ASSINTÓTICAS DE POLINÔMIOS
ORTOGONAIS DE SOBOLEV





1910001278



unesp



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

**ZEROS E PROPRIEDADES
ASSINTÓTICAS DE POLINÔMIOS
ORTOGONAIS DE SOBOLEV**

Flávia do Nascimento Cortes

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP - 085

Rua Cristóvão Colombo, 2265
15054-000 - São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (017) 221-2444
Fax: (017) 221-2445



Zeros e propriedades assintóticas de polinômios ortogonais de Sobolev

Flávia do Nascimento Cortes

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientadora: Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali



1.278/04

São José do Rio Preto
Fevereiro de 2004



517.587
C828z

10104020

Cortes, Flávia do Nascimento.

Zeros e propriedades assintóticas de polinômios ortogonais de Sobolev / Flávia do Nascimento Cortes. – São José do Rio Preto : [s.n.], 2004

84 f. ; 30 cm.

Orientador: Cleonice Fátima Bracciali

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Análise numérica. 2. Polinômios ortogonais. 3. Polinômios ortogonais de Sobolev - Comportamento assintótico. 4. Sobolev, Espaço de. 5. Zero (Polinômios ortogonais) I. Bracciali, Cleonice Fátima. II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.587



“Não podes ensinar nada a um homem;
podes apenas ajudá-lo a encontrar
a resposta dentro dele mesmo.”

Galileu Galilei



*Aos meus pais, Célia e Vildo e
a minha irmã, Telma,
ofereço.*



Agradecimentos

A Profa. Dra. Cleonice Fátima Derociani, que tornou possível a realização deste e de outros trabalhos e que sempre esteve disposta a me ajudar com muita paciência e dedicação, pela amizade e companheirismo, desde a iniciação científica até a conclusão deste trabalho e por tudo que as palavras não foram capazes de expressar.

Ao Prof. Dr. Alencar de Sá Ilango, por todos os vezes que atendeu as minhas dúvidas, pelas discussões e contribuições, muito importantes para a realização deste trabalho.

A Profa. Dra. Mariana Xavier Lührs de Andrade, pelo apoio constante.

Aos meus pais que nutrem minha eterna gratidão pelo apoio, incentivo, amor que sempre me deram e por tudo o que fizeram para que eu chegasse até aqui.

A minha irmã Telma, que sempre me acompanhou e me incentivou.

Ao Adriano, a quem posso confiar todas as minhas preocupações, pela paciência, atenção, estímulo e persistência que sempre teve comigo, desde que nos conhecemos.

Especial a minha filha Beatriz, pelos momentos em que dei a ela o primeiro estímulo.

A todos os meus amigos de Pós-Graduação, especialmente ao César, Fernando, Roberto e Thais, pelo apoio e companheirismo.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

A FAPESP, pelo auxílio financeiro.

A Deus, por tudo.

*Ao meu esposo, Adriano
e a minha filha, Beatriz,
dedico.*

Agradecimentos

À Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali, que tornou possível a realização deste e de outros trabalhos e que sempre esteve disposta a me atender com muita paciência e dedicação, pela amizade e companheirismo, desde a iniciação científica até a concretização deste trabalho e por tudo que as palavras não foram capazes de expressar.

Ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, por todas as vezes que atendeu as minhas dúvidas, pelas discussões e contribuições, muito importantes para a realização deste trabalho.

À Profa. Dra. Eliana Xavier Linhares de Andrade, pelo apoio constante.

Aos meus pais que merecem minha eterna gratidão pelo apoio, incentivo, amor que sempre me deram e por tudo o que fizeram para que eu chegasse até aqui.

A minha irmã Telma, que sempre me acompanhou e me incentivou.

Ao Adriano, a quem pude confiar todas as minhas preocupações, pelo carinho, atenção, estímulo e paciência que sempre teve comigo, desde que nos conhecemos.

Em especial a minha filha Beatriz, pelos momentos em que deixei de lhe dar atenção.

A todos os meus amigos de Pós-Graduação, especialmente ao Cassius, Fernando, Roberto e Thais, pelo apoio e companheirismo.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.

A Deus, por tudo.



Resumo

O principal objetivo deste trabalho é estudar as propriedades dos zeros de polinômios ortogonais de Sobolev e o comportamento assintótico da razão entre estes polinômios e polinômios ortogonais relacionados. Estes estudos foram realizados para alguns exemplos de polinômios ortogonais de Sobolev associados aos produtos internos de Sobolev $\mathbb{S}_1$ e $\mathbb{S}_2$ dados por

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_1} = \langle f, g \rangle_{\psi_0} + \kappa_1 \langle f, g \rangle_{\phi_1} + \kappa_2 \langle f', g' \rangle_{\psi_1} \quad \text{e} \quad \langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_2} = \langle f, g \rangle_{\psi_0} + \kappa_1 \langle f', g' \rangle_{\phi_0} + \kappa_2 \langle f', g' \rangle_{\psi_1},$$

onde $\langle f, g \rangle_{\psi} = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\psi(x)$, κ_1 e κ_2 são constantes e todas as medidas envolvidas são simétricas. No caso do produto interno $\mathbb{S}_1$ as medidas $d\psi_0$ e $d\phi_1$ são relacionadas entre si da forma

$$d\psi_0(x) = (1 + qx^2)d\phi_1(x)$$

e no caso do produto interno $\mathbb{S}_2$ as medidas $d\phi_0$ e $d\psi_1$ são relacionadas por

$$d\psi_1(x) = \frac{1}{1 + qx^2}d\phi_0(x),$$

onde q é uma constante. Os exemplos considerados para os produtos internos de Sobolev $\mathbb{S}_1$ e $\mathbb{S}_2$ envolvem as medidas de Hermite e de Gegenbauer.

Palavras-chave: polinômios ortogonais, polinômios ortogonais de Sobolev, zeros de polinômios, comportamento assintótico.

Sumário

Abstract

The main purpose of this work is to study the properties of the zeros of Sobolev orthogonal polynomials and the asymptotic behaviour of the ratio between these polynomials and the related orthogonal polynomials. These studies are carried out for some examples of Sobolev orthogonal polynomials associated with the Sobolev inner products S_1 and S_2 given by

$$\langle f, g \rangle_{S_1} = \langle f, g \rangle_{\psi_0} + \kappa_1 \langle f, g \rangle_{\phi_1} + \kappa_2 \langle f', g' \rangle_{\psi_1} \quad \text{and} \quad \langle f, g \rangle_{S_2} = \langle f, g \rangle_{\psi_0} + \kappa_1 \langle f', g' \rangle_{\phi_0} + \kappa_2 \langle f', g' \rangle_{\psi_1},$$

where $\langle f, g \rangle_{\psi} = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\psi(x)$, κ_1 and κ_2 are real constants and the measures are symmetric. For the inner product S_1 the measures $d\psi_0$ and $d\phi_1$ are related as

$$d\psi_0(x) = (1 + qx^2)d\phi_1(x),$$

where q is a real constant. For the inner product S_2 the measures $d\phi_0$ and $d\psi_1$ are related as

$$d\psi_1(x) = \frac{1}{1 + qx^2}d\phi_0(x),$$

where q is a real constant. We consider examples for the Sobolev inner products S_1 and S_2 regarding the measures of Hermite and Gegenbauer.

Keywords: orthogonal polynomials, Sobolev orthogonal polynomials, zeros of polynomials, asymptotic behaviour.

Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminares	4
2.1	Polinômios ortogonais	4
2.1.1	Polinômios de Jacobi e de Gegenbauer	6
2.1.2	Polinômios de Laguerre	7
2.1.3	Polinômios de Hermite	7
2.1.4	Fórmulas de quadratura gaussianas	8
2.2	Polinômios ortogonais de Sobolev	8
2.2.1	Pares coerentes e pares simetricamente coerentes de medidas	9
3	Medidas simétricas relacionadas e polinômios ortogonais de Sobolev	12
3.1	Medidas simétricas relacionadas	12
3.2	Produto interno de Sobolev S_1	14
3.3	Produto interno de Sobolev S_2	20
4	Localização dos zeros	27
4.1	Produto interno de Sobolev S_1	27
4.1.1	Produto interno de Sobolev S_{1H} associado à medida $e^{-x^2}dx$	27
4.1.2	Produto interno de Sobolev S_{1G} associado à medida $(1 - x^2)^{\alpha-1/2}dx$	39
4.2	Produto interno de Sobolev S_2	45
4.2.1	Produto interno de Sobolev S_{2H} associado à medida $e^{-x^2}dx$	45
4.2.2	Produto interno de Sobolev S_{2G} associado à medida $(1 - x^2)^{\alpha-1/2}dx$	59
5	Propriedades assintóticas	62
5.1	Produto interno de Sobolev S_1	62
5.1.1	Produto interno de Sobolev S_{1H} associado à medida $e^{-x^2}dx$	63
5.1.2	Produto interno de Sobolev S_{1G} associado à medida $(1 - x^2)^{\alpha-1/2}dx$	69



5.2	Produto interno de Sobolev S_2	75
5.2.1	Produto interno de Sobolev S_{2H} associado à medida $e^{-x^2} dx$	75
5.2.2	Produto interno de Sobolev S_{2G} associado à medida $(1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx$	80

Referências Bibliográficas	83
-----------------------------------	-----------

Capítulo 1

Introdução

Chamamos de ponto de aumento de uma função real ψ , não decrescente e definida em um intervalo (a, b) , qualquer ponto $\xi \in (a, b)$ tal que ψ não é constante em qualquer intervalo $[\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$ com $\epsilon > 0$. Se ξ é um ponto de aumento isolado, então existe $\epsilon > 0$ tal que ψ é constante nos intervalos $(\xi - \epsilon, \xi)$ e $(\xi, \xi + \epsilon)$.

Seja $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não decrescente, com infinitos pontos de aumento em (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e tal que os momentos

$$\mu_n^\psi = \int_a^b x^n d\psi(x), \quad n = 0, 1, \dots,$$

existem e são finitos. Nestas condições $d\psi$ é chamada distribuição (medida positiva) em (a, b) . O suporte $E \subseteq (a, b)$ de $d\psi$ é o conjunto dos pontos de aumento de ψ .

Sejam $d\psi_k$, $k = 0, 1, \dots, N$, medidas positivas na reta real $\mathbb{R}$, tendo suporte limitado ou não. Se o espaço das funções diferenciáveis até ordem N em $\mathbb{R}$ satisfaz

$$\sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}} [f^{(k)}(x)]^2 d\psi_k(x) < \infty,$$

então esse espaço é chamado *espaço de Sobolev*.

A sequência de polinômios ortogonais $\{S_n\}_{n=0}^\infty$, é chamada *seqüência de polinômios ortogonais de Sobolev* se S_n é de grau exatamente n e

$$\langle S_n, S_m \rangle_S = \sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}} S_n^{(k)}(x) S_m^{(k)}(x) d\psi_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n, \\ \rho_n^S > 0, & \text{para } m = n. \end{cases}$$

Estudaremos estes polinômios no caso em que $N = 1$ e escreveremos o produto interno como

$$\langle f, g \rangle_S = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) d\psi_0(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x) d\psi_1(x),$$



onde $\lambda \geq 0$.

A motivação inicial para o estudo de polinômios ortogonais deste tipo surge na teoria de aproximação, mais precisamente no problema de aproximações por mínimos quadrados. Para se obter a melhor aproximação, é de grande interesse utilizar uma base de polinômios ortogonais de Sobolev. O problema de aproximação por mínimos quadrados aparece inicialmente em 1947 em um trabalho de Lewis [9].

Em trabalhos mais recentes sobre polinômios ortogonais de Sobolev associados ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$, supõe-se que as medidas formam um par coerente ou simetricamente coerente (definidos no Capítulo 2) pois, neste caso, obtém-se relações interessantes e simples. No trabalho de Berti e Sri Ranga [3], que será a base dos nossos estudos, foi feito um estudo dos polinômios ortogonais de Sobolev com uma nova abordagem, obtendo também resultados simples.

Muito já se conhece sobre o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev associados ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$, quando as medidas envolvidas formam um par coerente ou simetricamente coerente, veja [5, 7, 14, 16].

Estudos assintóticos sobre os polinômios ortogonais de Sobolev associados ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$, onde as medidas envolvidas formam um par coerente ou simetricamente coerente, foram realizados em [2, 11, 12, 17, 18, 19, 20] e [1, 10, 13], respectivamente.

Nosso objetivo neste trabalho é estudar o comportamento dos zeros e o comportamento assintótico dos polinômios ortogonais de Sobolev para alguns exemplos associados aos produtos internos

$$\langle f, g \rangle_{S_1} = \langle f, g \rangle_{\psi_0} + \kappa_1 \langle f, g \rangle_{\phi_1} + \kappa_2 \langle f', g' \rangle_{\psi_1}$$

e

$$\langle f, g \rangle_{S_2} = \langle f, g \rangle_{\psi_0} + \kappa_1 \langle f', g' \rangle_{\phi_0} + \kappa_2 \langle f', g' \rangle_{\psi_1},$$

definidos em [3], onde $d\psi_0$, $d\phi_1$ e $d\psi_1$ são medidas simétricas e $d\psi_0$ e $d\phi_1$ estão relacionadas da forma

$$d\psi_0(x) = (1 + qx^2)d\phi_1(x),$$

no caso do produto interno S_1 e onde $d\psi_0$, $d\phi_0$ e $d\psi_1$ são medidas simétricas e $d\psi_1$ e $d\phi_0$ estão relacionadas da forma

$$d\psi_1(x) = \frac{1}{1 + qx^2}d\phi_0(x),$$

no caso do produto interno S_2 , onde q pode ser qualquer valor real tal que $1 + qx^2$ é positivo no suporte $E \subseteq [-b, b]$.

No caso do produto interno S_1 , como primeiro exemplo consideraremos $d\phi_1(x) = d\psi_1(x) = e^{-x^2}dx$ e estudaremos o comportamento dos zeros e o comportamento assintótico dos polinô-



mios ortogonais de Sobolev S_n . E, como segundo exemplo, quando $d\phi_1(x) = (1 - x^2)^{\alpha-1/2}dx$ e $d\psi_1(x) = (1 - x^2)^{\alpha+1/2}dx$.

Estudaremos também o comportamento dos zeros e o comportamento assintótico dos polinômios ortogonais de Sobolev, no caso do produto interno $\mathbb{S}_2$ para $\kappa_1 = 0$, quando $d\phi_0(x) = d\psi_0(x) = e^{-x^2}dx$ e quando $d\psi_0(x) = (1 - x^2)^{\alpha-1/2}dx$ e $d\phi_0(x) = (1 - x^2)^{\alpha+1/2}dx$.

Procurando elaborar um trabalho contendo informações claras sobre o assunto, de forma a contribuir para possíveis trabalhos futuros, organizamos esta dissertação da seguinte forma.

No Capítulo 2, apresentamos definições e alguns resultados conhecidos sobre polinômios ortogonais e polinômios ortogonais de Sobolev, bem como a determinação de todos os pares simetricamente coerentes de medidas.

No Capítulo 3, apresentamos alguns resultados encontrados em [3], onde as medidas simétricas $d\psi_0$ e $d\phi_1$ estão relacionadas da forma

$$d\psi_0(x) = (1 + qx^2)d\phi_1(x).$$

Há uma relação entre os polinômios ortogonais de Sobolev, associados ao produto interno $\mathbb{S}_1$, e os polinômios ortogonais, $P_n^{\psi_0}$, associados à medida $d\psi_0$. A medida $d\psi_1$ é tal que $P_n^{\phi_1}(x) = nP_{n-1}^{\psi_1}(x)$, onde $P_n^{\phi_1}$ e $P_n^{\psi_1}$ são polinômios ortogonais associados às medidas $d\phi_1$ e $d\psi_1$, respectivamente. Do mesmo modo, considerando as medidas simétricas $d\psi_1$ e $d\phi_0$ relacionadas por

$$d\psi_1(x) = \frac{1}{1 + qx^2}d\phi_0(x),$$

existe uma relação entre os polinômios ortogonais de Sobolev, associados ao produto interno $\mathbb{S}_2$, e os polinômios ortogonais, $P_n^{\psi_0}$, associados à medida $d\psi_0$, onde $d\psi_0$ é tal que $P_n^{\psi_0}(x) = nP_{n-1}^{\phi_0}(x)$ e $P_n^{\phi_0}$ são os polinômios ortogonais associados à $d\phi_0$.

Baseando-nos nestes resultados fizemos um estudo, no Capítulo 4, do comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev relacionados aos produtos internos $\mathbb{S}_1$ e $\mathbb{S}_2$, para os exemplos citados anteriormente.

Finalmente, no Capítulo 5, estudamos o comportamento assintótico da razão entre os polinômios ortogonais de Sobolev, relacionados aos produtos internos $\mathbb{S}_1$ e $\mathbb{S}_2$, e os polinômios ortogonais associados a algumas das medidas envolvidas.



Capítulo 2

Preliminares

Daremos neste capítulo resultados e propriedades sobre polinômios ortogonais, cujas demonstrações podem ser encontradas nos textos clássicos de Chihara [6] e Szegő [21], e informações sobre polinômios ortogonais de Sobolev, encontradas em Iserles e outros [8], que serão necessárias posteriormente.

2.1 Polinômios ortogonais

Seja $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não decrescente, com infinitos pontos de aumento em (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e tal que os momentos

$$\mu_n^\psi = \int_a^b x^n d\psi(x), \quad n = 0, 1, \dots,$$

existem e são finitos. Nestas condições $d\psi$ é chamada distribuição (medida positiva) em (a, b) e, se $d\psi(x) = \omega(x)dx$, onde $\omega(x) \geq 0$ é uma função contínua em (a, b) e não identicamente nula, então $\omega(x)$ é chamada função peso. O suporte $E \subseteq (a, b)$ de $d\psi$ é o conjunto dos pontos de aumento de ψ .

Dizemos que a sequência de polinômios $\{P_n^\psi\}_{n=0}^\infty$ é ortogonal em relação à medida $d\psi$ se $P_n^\psi(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k$ é de grau exatamente n e

$$\langle P_n^\psi, P_m^\psi \rangle_\psi = \int_a^b P_n^\psi(x) P_m^\psi(x) d\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n, \\ \rho_n^\psi > 0, & \text{para } m = n. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Uma forma equivalente à definição acima é dada por

$$\int_a^b x^m P_n^\psi(x) d\psi(x) = 0, \quad \text{para } m = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.1.2)$$

Na forma mônica, isto é, $a_{n,n} = 1$, os polinômios P_n^ψ , $n \geq 0$, satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$P_{n+1}^\psi(x) = (x - \beta_{n+1}^\psi)P_n^\psi(x) - \alpha_{n+1}^\psi P_{n-1}^\psi(x), \quad n \geq 1, \quad (2.1.3)$$

com $P_0^\psi(x) = 1$ e $P_1^\psi(x) = x - \beta_1^\psi$. Os coeficientes α_{n+1}^ψ e β_n^ψ , $n \geq 1$, são todos reais e

$$\beta_{n+1}^\psi = \frac{\langle xP_n^\psi, P_n^\psi \rangle_\psi}{\langle P_n^\psi, P_n^\psi \rangle_\psi}, \quad n \geq 0, \quad \alpha_{n+1}^\psi = \frac{\langle P_n^\psi, P_n^\psi \rangle_\psi}{\langle P_{n-1}^\psi, P_{n-1}^\psi \rangle_\psi} > 0, \quad n \geq 1. \quad (2.1.4)$$

Os polinômios ortogonais mônicos P_n^ψ , satisfazem a seguinte propriedade

$$\langle P_n^\psi, P_n^\psi \rangle_\psi \leq \langle Q_n, Q_n \rangle_\psi,$$

onde Q_n é um polinômio mônico qualquer de grau n , isto é, dentre todos os polinômios de grau n , P_n^ψ é o polinômio que minimiza a norma induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$. Esta propriedade é conhecida como *propriedade extremal* e é facilmente provada escrevendo $Q_n(x) = P_n^\psi(x) + q_{n-1}(x)$, onde q_{n-1} é um polinômio de grau $n-1$, ou seja,

$$\langle Q_n, Q_n \rangle_\psi = \langle P_n^\psi + q_{n-1}, P_n^\psi + q_{n-1} \rangle_\psi = \langle P_n^\psi, P_n^\psi \rangle_\psi + \langle q_{n-1}, q_{n-1} \rangle_\psi \geq \langle P_n^\psi, P_n^\psi \rangle_\psi.$$

Se $0 < b \leq \infty$ e se $d\psi$ é uma medida simétrica em $[-b, b]$, isto é, $d\psi(x) = -d\psi(-x)$, então $\mu_{2n-1}^\psi = 0$ e $\beta_n^\psi = 0$, para $n \geq 1$.

Os zeros dos polinômios ortogonais P_n^ψ com relação à $d\psi$ são reais, distintos e estão em (a, b) . Além disso, entre dois zeros consecutivos do polinômio P_{n-1}^ψ , existe um zero de P_n^ψ , ou seja, os zeros de polinômios ortogonais de graus consecutivos se entrelaçam. Se esses polinômios são simétricos, isto é, $P_n^\psi(-x) = (-1)^n P_n^\psi(x)$, então os zeros positivos de P_{n-2}^ψ se entrelaçam com os zeros positivos de P_n^ψ .

As medidas que satisfazem a uma equação diferencial do tipo Pearson, da forma

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{ax+b}{\rho(x)}, \quad (2.1.5)$$

onde ρ é um polinômio de grau menor ou igual a dois, são chamadas *medidas clássicas* (veja [6, p. 152]). Os polinômios ortogonais cujas medidas satisfazem (2.1.5) são os polinômios de Hermite, de Laguerre e de Jacobi que são conhecidos como polinômios ortogonais clássicos.

Faremos agora um breve resumo sobre esses polinômios e sobre fórmulas de quadratura gaussianas, que serão utilizados posteriormente.



2.1.1 Polinômios de Jacobi e de Gegenbauer

Os polinômios de Jacobi são ortogonais com relação à medida $d\psi(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$, com $\alpha > -1$, $\beta > -1$ no intervalo $[-1, 1]$ e são dados explicitamente por

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \binom{2n + \alpha + \beta}{n}^{-1} \sum_{m=0}^n \binom{n + \alpha}{n - m} \binom{n + \beta}{m} (x - 1)^m (x + 1)^{n-m}.$$

A relação de recorrência de três termos satisfeita por estes polinômios na forma mônica é

$$P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) = \left(x + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(2n + \alpha + \beta + 2)(2n + \alpha + \beta)} \right) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - \frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)}{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta + 1)} P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x), \quad n \geq 1,$$

com $P_0^{(\alpha, \beta)}(x) = 1$ e $P_1^{(\alpha, \beta)}(x) = x + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta + 2}$, e ainda

$$\rho_n^{(\alpha, \beta)} = \langle P_n^{(\alpha, \beta)}, P_n^{(\alpha, \beta)} \rangle_\psi = \frac{2^{n+\alpha+\beta+1} n! \Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(2n + \alpha + \beta + 2) \Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)},$$

onde $\Gamma(x)$ é a função Gama definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x) > 0 \quad \text{ou} \quad x > 0.$$

Eles também satisfazem a relação diferencial

$$\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = n P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x).$$

Quando $\alpha = \beta = \tau - 1/2$, $\tau > -1/2$, tais polinômios são conhecidos por *Polinômios de Gegenbauer*, que denotaremos por $G_n^{(\tau)}$. Esses polinômios são ortogonais com relação à medida $d\psi(x) = (1 - x^2)^{\tau-1/2} dx$, $\tau > -1/2$ e a relação de recorrência para eles se torna

$$G_{n+1}^{(\tau)}(x) = x G_n^{(\tau)}(x) - \frac{n(n + 2\tau - 1)}{4(n + \tau)(n + \tau - 1)} G_{n-1}^{(\tau)}(x), \quad n \geq 1, \quad (2.1.6)$$

com $G_0^{(\tau)}(x) = 1$ e $G_1^{(\tau)}(x) = x$. Para os polinômios de Gegenbauer

$$\rho_n^{(\tau)} = \langle G_n^{(\tau)}, G_n^{(\tau)} \rangle_\psi = \pi 2^{1-2\tau-2n} \frac{n! \Gamma(n + 2\tau)}{\Gamma(n + \tau + 1) \Gamma(n + \tau)}$$

e

$$\frac{d}{dx} G_n^{(\tau)}(x) = n G_{n-1}^{(\tau+1)}(x). \quad (2.1.7)$$

2.1.2 Polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre são ortogonais com relação à medida $d\psi(x) = x^\alpha e^{-x} dx$, $\alpha > -1$, no intervalo $[0, \infty)$ e são dados explicitamente pela expressão

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n n! \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m!} \binom{n+\alpha}{n-m} x^m.$$

A relação de recorrência de três termos satisfeita por estes polinômios na forma mônica é

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = [x - (2n + \alpha + 1)]L_n^{(\alpha)}(x) - n(n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1,$$

com $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $L_1^{(\alpha)}(x) = x - \alpha - 1$. E ainda $\rho_n^{(L, \alpha)} = \langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle_\psi$ é dado por

$$\rho_n^{(L, \alpha)} = \Gamma(n + \alpha + 1)n!.$$

Os polinômios de Laguerre satisfazem a relação diferencial

$$\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = n L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x).$$

2.1.3 Polinômios de Hermite

Os polinômios de Hermite são ortogonais com relação à medida $d\psi(x) = e^{-x^2} dx$, no intervalo $(-\infty, \infty)$ e são dados explicitamente pela expressão

$$H_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m n! x^{n-2m}}{4^m m! (n-2m)!},$$

onde $\lfloor z \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a z .

A relação de recorrência de três termos satisfeita por estes polinômios na forma mônica é

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - \frac{n}{2}H_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (2.1.8)$$

com $H_0(x) = 1$ e $H_1(x) = x$. E ainda $\rho_n^\psi = \langle H_n, H_n \rangle_\psi$ é dado por

$$\rho_n^\psi = \frac{\sqrt{\pi} n!}{2^n}.$$

Esses polinômios satisfazem a relação diferencial

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = n H_{n-1}(x). \quad (2.1.9)$$

Os polinômios de Hermite e Laguerre estão relacionados da seguinte forma

$$H_{2n}(x) = (-1)^n n! L_n^{(-1/2)}(x^2) \quad \text{e} \quad H_{2n+1}(x) = (-1)^n n! x L_n^{(1/2)}(x^2).$$



Como uma consequência da fórmula de Perron (veja [21, p. 199]), dada por

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{x/2} (-x)^{-\alpha/2-1/4} n^{\alpha/2-1/4} e^{2\sqrt{-nx}} \{1 + O(n^{-1/2})\},$$

onde $z(n) = O(g(n))$ significa que a razão $\frac{z(n)}{g(n)}$ é limitada, e da relação entre os polinômios de Hermite e Laguerre, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nH_n(x)}{H_{n+2}(x)} = -2, \quad (2.1.10)$$

uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

2.1.4 Fórmulas de quadratura gaussianas

Considere

$$\int_a^b f(x) d\psi(x),$$

onde $d\psi$ é uma medida definida em $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e sejam $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$, n pontos distintos em $[a, b]$. A fórmula

$$\int_a^b f(x) d\psi(x) = \sum_{i=1}^n W_{n,i} f(x_{n,i}) + E_n(f), \quad (2.1.11)$$

é chamada de *Fórmula de Quadratura*, $W_{n,i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, são os *pesos*, $x_{n,i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ são os *nós* e $E_n(f)$ é o *erro* da fórmula de quadratura.

Se $x_{n,i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, são os zeros do polinômio ortogonal de grau n , P_n^ψ , com relação à medida $d\psi$ e $W_{n,i} = \frac{1}{P_n^{\prime\psi}(x_{n,i})} \int_a^b \frac{P_n^\psi(x)}{x - x_{n,i}} d\psi(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, então estas fórmulas têm precisão $2n - 1$, ou seja, são exatas para polinômios de grau menor ou igual a $2n - 1$, $E_n(f) = 0$ para $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$, onde $\mathbb{P}_{2n-1}$ é o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a $2n - 1$. Estas fórmulas são conhecidas como *Fórmulas de Quadratura Gaussianas* e os pesos $W_{n,i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, são positivos.

2.2 Polinômios ortogonais de Sobolev

Sejam $d\psi_k$, $k = 0, 1, \dots, N$, medidas positivas na reta real $\mathbb{R}$, tendo suporte limitado ou não. Consideremos o espaço $\mathbb{H}_N(\mathbb{R})$ das funções diferenciáveis até ordem N em $\mathbb{R}$ satisfazendo

$$\sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}} [f^{(k)}(x)]^2 d\psi_k(x) < \infty.$$



Tal espaço é chamado *espaço de Sobolev*. Suponhamos que estas medidas sejam tais que o espaço dos polinômios $\mathbb{P}$ é um subespaço de $\mathbb{H}_N(\mathbb{R})$. Consideremos o espaço $\mathbb{P}$ munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}} = \sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) d\psi_k(x), \quad f, g \in \mathbb{P}.$$

A sequência de polinômios ortogonais $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, é chamada *seqüência de polinômios ortogonais de Sobolev* se S_n é de grau exatamente n e

$$\langle S_n, S_m \rangle_{\mathbb{S}} = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n, \\ \rho_n^{\mathbb{S}} > 0, & \text{para } m = n. \end{cases}$$

A partir de agora consideraremos o caso em que $N = 1$. Neste caso é usual escrever

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}} = \langle f, g \rangle_{\psi_0} + \lambda \langle f', g' \rangle_{\psi_1} = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) d\psi_0(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} f'(x) g'(x) d\psi_1(x), \quad (2.2.1)$$

onde $\lambda \geq 0$.

Muito já se conhece sobre os polinômios ortogonais de Sobolev. Algumas das propriedades dos polinômios ortogonais também são válidas para os polinômios ortogonais de Sobolev, como por exemplo, a propriedade extremal, que dentre todos os polinômios de grau n , S_n é o polinômio que minimiza a norma induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{S}}$. Mas para os polinômios ortogonais de Sobolev de forma geral não existe uma relação de recorrência de três termos. Há relações entre os polinômios ortogonais de Sobolev com relação a (2.2.1) e os polinômios ortogonais associados à $d\psi_0$, quando $d\psi_0$ e $d\psi_1$ formam um par coerente de medidas, vejamos agora estas definições.

2.2.1 Pares coerentes e pares simetricamente coerentes de medidas

Sejam $\{P_n^{\psi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n^{\psi_1}\}_{n=0}^{\infty}$ as seqüências de polinômios ortogonais mônicos associados às medidas positivas $d\psi_0$ e $d\psi_1$, respectivamente, então $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ formam um *par coerente* de medidas se os polinômios associados estiverem relacionados da forma

$$P_n^{\psi_1}(x) = \frac{1}{n+1} \left[P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \sigma_n P_n^{\psi_0}(x) \right], \quad n \geq 0,$$

onde $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma seqüência de números reais não nulos. Esta definição foi primeiramente dada em [8].

No mesmo trabalho foi provado que vale a seguinte relação no caso de polinômios ortogonais mônicos

$$S_{n+1}(x) + a_n(\lambda) S_n(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \sigma_n P_n^{\psi_0}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.2.2)$$



onde

$$a_n(\lambda) = \frac{\rho_n^{\psi_0} \sigma_n}{\rho_n^S}, \quad n \geq 0.$$

Os coeficientes $a_n(\lambda)$ podem ser obtidos recursivamente por

$$a_n(\lambda) = \frac{\sigma_n \rho_n^{\psi_0}}{\rho_n^{\psi_0} + \lambda n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1} + \sigma_{n-1}^2 \rho_{n-1}^{\psi_0} - \sigma_{n-1} \rho_{n-1}^{\psi_0} a_{n-1}(\lambda)}, \quad n \geq 1,$$

com $a_0(\lambda) = \sigma_0$.

Para o caso de medidas simétricas, de modo semelhante, também foi dado em [8] o conceito de par simetricamente coerente.

Neste caso, duas medidas simétricas $d\psi_0$ e $d\psi_1$ formam um *par simetricamente coerente* de medidas se os polinômios mônicos associados estiverem relacionados da forma

$$P_n^{\psi_1}(x) = \frac{1}{n+1} \left[P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \sigma_{n-1} P_{n-1}^{\psi_0}(x) \right], \quad n \geq 1,$$

onde $\{\sigma_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de números reais não nulos.

Também para este caso são válidas propriedades semelhantes ao caso da coerência, entre elas a relação

$$S_{n+1}(x) + a_{n-1}(\lambda) S_{n-1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \sigma_{n-1} P_{n-1}^{\psi_0}(x), \quad n \geq 1, \quad (2.2.3)$$

onde

$$a_n(\lambda) = \frac{\rho_n^{\psi_0} \sigma_n}{\rho_n^S}, \quad n \geq 0.$$

Os coeficientes podem ser obtidos recursivamente pela expressão

$$a_n(\lambda) = \frac{\sigma_n \rho_n^{\psi_0}}{\rho_n^{\psi_0} + \lambda n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1} + \sigma_{n-2}^2 \rho_{n-2}^{\psi_0} - \sigma_{n-2} \rho_{n-2}^{\psi_0} a_{n-2}(\lambda)}, \quad n \geq 2,$$

com $a_0(\lambda) = \sigma_0$ e $a_1(\lambda) = \frac{\rho_1^{\psi_0} \sigma_1}{\rho_1^{\psi_0} + \lambda \rho_0^{\psi_1}}$. Neste caso os polinômios S_n também são simétricos.

Meijer [15] resolveu completamente o problema determinando todos os pares coerentes e simetricamente coerentes de medidas. Ele provou que necessariamente uma das medidas deve ser clássica, assim pares coerentes envolvem medidas de Jacobi ou de Laguerre e pares simetricamente coerentes envolvem medidas de Hermite ou de Gegenbauer. Apresentaremos aqui apenas os casos quando uma das medidas é de Hermite ou de Gegenbauer, que serão úteis para o nosso trabalho.

Caso Hermite

$$\{(x^2 + \xi^2)e^{-x^2} dx, e^{-x^2} dx\}, \quad (\text{tipo I})$$

$$\left\{ e^{-x^2} dx, \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \xi^2} dx \right\}, \quad \xi \neq 0. \quad (\text{tipo II})$$



Caso Gegenbauer

$$\{(x^2 + \xi^2)(1 - x^2)^{\alpha-1/2}dx, (1 - x^2)^{\alpha+1/2}dx\}, \quad (\text{tipo I})$$

$$\left\{ (1 - x^2)^{\alpha-1/2}dx, \frac{(1 - x^2)^{\alpha+1/2}}{x^2 + \xi^2}dx \right\}, \quad \xi \neq 0, \quad (\text{tipo II})$$

$$\left\{ (1 - x^2)^{\alpha-1/2}dx, \frac{(1 - x^2)^{\alpha+1/2}}{\xi^2 - x^2}dx + M(\delta(\xi) + \delta(-\xi)) \right\}, \quad |\xi| \geq 1, \quad M \geq 0, \quad (\text{tipo III})$$

$$\{(\xi^2 - x^2)(1 - x^2)^{\alpha-1/2}dx, (1 - x^2)^{\alpha+1/2}dx\}, \quad |\xi| > 1, \quad (\text{tipo IV})$$

$$\{dx + M(\delta(1) + \delta(-1)), dx\}, \quad M \geq 0, \quad (\text{tipo V})$$

onde $\alpha > -1/2$.

Depois dos trabalhos de Iserles e outros [8] e Meijer [15] sobre pares coerentes e pares simetricamente coerentes de medidas, muitos pesquisadores passaram a estudar os polinômios ortogonais de Sobolev associados a este tipo de par de medidas. Para citar como exemplo, em [5, 7, 14, 16] encontramos vários resultados sobre o comportamento dos zeros destes polinômios, além disso, os trabalhos [1], [10, 13], [2, 11, 17] e [18, 19, 20] apresentam estudos sobre propriedades assintóticas de polinômios ortogonais de Sobolev envolvendo as medidas de Hermite, Gegenbauer, Laguerre e Jacobi, respectivamente.

Nos capítulos 4 e 5 estudaremos as propriedades dos zeros de polinômios ortogonais de Sobolev e o comportamento assintótico da razão entre estes polinômios e polinômios ortogonais relacionados. Os exemplos a serem estudados envolvem os polinômios de Hermite e de Gegenbauer, onde utilizaremos resultados dos artigos [5, 7] e [1, 10, 13], respectivamente.



Capítulo 3

Medidas simétricas relacionadas e polinômios ortogonais de Sobolev

Neste capítulo apresentaremos os principais resultados do trabalho de Berti e Sri Ranga [3] que consideraram duas medidas simétricas relacionadas apresentando dois tipos especiais de produto interno de Sobolev e as relações entre os polinômios ortogonais associados às medidas simétricas e os polinômios ortogonais de Sobolev associados. Optamos por apresentar apenas as demonstrações mais relevantes ao nosso trabalho.

3.1 Medidas simétricas relacionadas

Sejam $d\psi_0$ e $d\phi_1$ duas medidas simétricas, definidas sobre o mesmo suporte $E \subseteq [-b, b]$, que satisfazem

$$d\phi_1(x) = \frac{1}{1+qx^2} d\psi_0(x). \quad (3.1.1)$$

Aqui, q pode ser qualquer valor real tal que $1+qx^2$ é positivo em E .

É possível relacionar os polinômios ortogonais associados à $d\psi_0$ e $d\phi_1$ que satisfazem (3.1.1). Expressando os polinômios mônicos simétricos, $P_n^{\phi_1}$, como combinação linear de $P_r^{\psi_0}$, $r = 0, 1, \dots, n$, também mônicos simétricos, da forma

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\psi_0}(x) + \sum_{r=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} d_{n-2r} P_{n-2r}^{\psi_0}(x),$$

temos, para $i = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$,

$$\langle P_n^{\phi_1}, P_{n-2i}^{\psi_0} \rangle_{\psi_0} = \langle P_n^{\psi_0} + \sum_{r=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} d_{n-2r} P_{n-2r}^{\psi_0}, P_{n-2i}^{\psi_0} \rangle_{\psi_0} = d_{n-2i} \langle P_{n-2i}^{\psi_0}, P_{n-2i}^{\psi_0} \rangle_{\psi_0}$$



$$\Rightarrow d_{n-2i} = \frac{\langle P_n^{\phi_1}, P_{n-2i}^{\psi_0} \rangle_{\psi_0}}{\langle P_{n-2i}^{\psi_0}, P_{n-2i}^{\psi_0} \rangle_{\psi_0}}, \quad i = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor.$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \langle P_n^{\phi_1}, P_{n-2i}^{\psi_0} \rangle_{\psi_0} &= \int_E P_n^{\phi_1}(x) P_{n-2i}^{\psi_0}(x) d\psi_0(x) = \int_E P_n^{\phi_1}(x) P_{n-2i}^{\psi_0}(x) (1 + qx^2) d\phi_1(x) \\ &= \int_E P_n^{\phi_1}(x) P_{n-2i}^{\psi_0}(x) d\phi_1(x) + q \int_E P_n^{\phi_1}(x) P_{n-2i}^{\psi_0}(x) x^2 d\phi_1(x) \\ &= q \langle P_n^{\phi_1}, x^2 P_{n-2i}^{\psi_0} \rangle_{\phi_1}, \end{aligned}$$

portanto, pela condição de ortogonalidade (2.1.2), $d_{n-2i} = 0$, para $i = 2, 3, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ e

$$d_{n-2} = \frac{q \langle P_n^{\phi_1}, x^2 P_{n-2}^{\psi_0} \rangle_{\phi_1}}{\rho_{n-2}^{\psi_0}} = \frac{q \rho_n^{\phi_1}}{\rho_{n-2}^{\psi_0}}.$$

Assim,

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\psi_0}(x) + d_{n-2} P_{n-2}^{\psi_0}(x), \quad (3.1.2)$$

onde

$$d_{n-2} = d_{n-2}(q) = \frac{q \rho_n^{\phi_1}}{\rho_{n-2}^{\psi_0}}, \quad n \geq 2. \quad (3.1.3)$$

Em [21, p. 30] encontramos a fórmula de Christoffel, que relaciona polinômios ortogonais associados à $d\psi$ e polinômios ortogonais associados à $\rho(x)d\psi$, onde ρ é um polinômio. Neste caso a fórmula de Christoffel para $P_n^{\psi_0}$ e $P_n^{\phi_1}$ é dada por

$$(1 + qx^2) P_n^{\psi_0}(x) = \frac{q}{P_n^{\phi_1}(\sqrt{-1/q})} \left[P_n^{\phi_1}(\sqrt{-1/q}) P_{n+2}^{\phi_1}(x) - P_{n+2}^{\phi_1}(\sqrt{-1/q}) P_n^{\phi_1}(x) \right], \quad (3.1.4)$$

e será necessária para obtermos alguns resultados importantes em nossos estudos.

Em [3] encontramos uma relação entre os coeficientes $\alpha_{n+1}^{\phi_1}$ e $\alpha_{n+1}^{\psi_0}$ das respectivas relações de recorrências dos polinômios ortogonais associados às medidas que satisfazem (3.1.1). Para duas medidas simétricas $d\psi_0$ e $d\phi_1$ relacionadas da forma (3.1.1), existe uma sequência de números reais $\{l_n = l_n(q)\}_{n=0}^{\infty}$ tal que

$$\alpha_{n+1}^{\phi_1} = \frac{1}{4q} (l_n - 1)(l_{n-1} + 1), \quad \alpha_{n+1}^{\psi_0} = \frac{1}{4q} (l_n - 1)(l_{n+1} + 1), \quad n \geq 1 \quad (3.1.5)$$

e

$$d_{n-1} = d_{n-1}(q) = \frac{1}{4q} (l_n - 1)(l_{n+1} - 1), \quad n \geq 1, \quad (3.1.6)$$

com $l_0 = 1$, $l_1 = 1 + 2q\alpha_2^{\phi_1}$, $l_2 = 1 + 2q\alpha_3^{\phi_1} \frac{\alpha_1^{\phi_1}}{\alpha_1^{\psi_0}}$ e

$$l_{n+1} = 1 + \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_n^{\psi_0}} (l_{n-1} - 1), \quad n \geq 2. \quad (3.1.7)$$



3.2 Produto interno de Sobolev $\mathbb{S}_1$

O seguinte teorema apresentado em [3], fornece uma maneira de explorar os polinômios ortogonais de Sobolev associados a pares de medidas simétricas.

Teorema 3.2.1 *Sejam $d\phi_1$ e $d\psi_1$ medidas clássicas simétricas definidas sobre o mesmo suporte $E \subseteq [-b, b]$ e tais que os polinômios ortogonais mônicos associados $P_n^{\phi_1}$ e $P_n^{\psi_1}$ satisfazem $P_n^{\phi_1}(x) = nP_{n-1}^{\psi_1}(x)$, $n \geq 1$. Seja a medida $d\psi_0$ dada por*

$$d\psi_0(x) = (1 + qx^2)d\phi_1(x),$$

então os polinômios ortogonais mônicos, S_n , associados ao produto interno $\mathbb{S}_1$ definido por

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_1} &= \langle f, g \rangle_{\psi_0 + \kappa_1 \phi_1} + \kappa_2 \langle f', g' \rangle_{\psi_1} \\ &= \int_E f(x)g(x)d\psi_0(x) + \kappa_1 \int_E f(x)g(x)d\phi_1(x) + \kappa_2 \int_E f'(x)g'(x)d\psi_1(x), \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

satisfazem $S_0(x) = P_0^{\psi_0}(x) = 1$, $S_1(x) = P_1^{\psi_0}(x) = x$ e

$$S_{n+1}(x) + a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2)S_{n-1}(x) = P_{n+1}^{\phi_1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x), \quad n \geq 1.$$

Aqui $d_{n-1}(0) = a_{n-1}(0, \kappa_1, \kappa_2) = 0$ para $n \geq 1$ e quando $q \neq 0$,

$$a_n(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{q\alpha_{n+2}^{\phi_1}\alpha_{n+3}^{\phi_1}d_n(q)}{q\alpha_{n+2}^{\phi_1}\alpha_{n+3}^{\phi_1} + d_n(q)[\kappa_1 + n^2(\rho_{n-1}^{\psi_1}/\rho_n^{\phi_1})\kappa_2 + qd_{n-2}(q) - qa_{n-2}(q, \kappa_1, \kappa_2)]},$$

$n \geq 2$, onde

$$a_0(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{q\alpha_2^{\phi_1}\alpha_3^{\phi_1}d_0(q)}{q\alpha_2^{\phi_1}\alpha_3^{\phi_1} + d_0(q)\kappa_1}, \quad a_1(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_4^{\phi_1}d_1(q)}{q\alpha_3^{\phi_1}\alpha_4^{\phi_1} + d_1(q)[\kappa_1 + (\rho_0^{\psi_1}/\rho_1^{\phi_1})\kappa_2]},$$

e $\alpha_{n+1}^{\phi_1}$ são os coeficientes da relação de recorrência (2.1.3) e que satisfazem (3.1.5). Os coeficientes $d_n(q)$ podem ser obtidos por

$$d_{n-1}(q) = \frac{\tilde{l}_n(q)\tilde{l}_{n+1}(q)}{q}, \quad n \geq 1,$$

onde

$$\tilde{l}_n(q) = -1 + \frac{q\alpha_n^{\psi_0}}{\tilde{l}_{n-1}(q)} = \frac{q\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\tilde{l}_{n-1}(q) + 1}, \quad n \geq 2 \quad \text{e} \quad \tilde{l}_1(q) = q\alpha_2^{\phi_1}.$$

Aqui, q, κ_1 e κ_2 são tais que $d\psi_0$ é uma medida positiva e tais que o produto interno $\mathbb{S}_1$ é definido positivo.



Demonstração: O produto interno de Sobolev $\mathbb{S}_1$ é dado por

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_1} = \langle f, g \rangle_{\psi_0 + \kappa_1 \phi_1} + \kappa_2 \langle f', g' \rangle_{\psi_1} = \langle f, g \rangle_{\psi_0} + \kappa_1 \langle f, g \rangle_{\phi_1} + \kappa_2 \langle f', g' \rangle_{\psi_1}.$$

Como os polinômios de Sobolev, S_n , $n \geq 0$, formam uma base para polinômios simétricos, podemos escrever

$$P_{n+1}^{\phi_1}(x) = S_{n+1}(x) + \sum_{r=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} a_{n-2r+1} S_{n-2r+1}(x).$$

Assim, para $i = 1, 2, \dots, \lfloor (n+1)/2 \rfloor$,

$$\langle P_{n+1}^{\phi_1}, S_{n-2i+1} \rangle_{\mathbb{S}_1} = \langle S_{n+1} + \sum_{r=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} a_{n-2r+1} S_{n-2r+1}, S_{n-2i+1} \rangle_{\mathbb{S}_1} = a_{n-2i+1} \langle S_{n-2i+1}, S_{n-2i+1} \rangle_{\mathbb{S}_1}.$$

Por outro lado, de (3.1.2) e pela hipótese do teorema temos, para $i = 1, 2, \dots, \lfloor (n+1)/2 \rfloor$,

$$\begin{aligned} \langle P_{n+1}^{\phi_1}, S_{n-2i+1} \rangle_{\mathbb{S}_1} &= \langle P_{n+1}^{\psi_0} + d_{n-1} P_{n-1}^{\psi_0}, S_{n-2i+1} \rangle_{\mathbb{S}_1} = \langle P_{n+1}^{\psi_0} + d_{n-1} P_{n-1}^{\psi_0}, S_{n-2i+1} \rangle_{\psi_0} \\ &\quad + \kappa_1 \langle P_{n+1}^{\phi_1}, S_{n-2i+1} \rangle_{\phi_1} + \kappa_2 \langle (n+1) P_n^{\psi_1}, S'_{n-2i+1} \rangle_{\psi_1} \\ &= d_{n-1} \langle P_{n-1}^{\psi_0}, S_{n-2i+1} \rangle_{\psi_0}. \end{aligned}$$

Como para $i = 1$, $\langle P_{n-1}^{\psi_0}, S_{n-1} \rangle_{\psi_0} = \langle P_{n-1}^{\psi_0}, P_{n-1}^{\psi_0} \rangle_{\psi_0}$, logo

$$a_{n-1} = \frac{d_{n-1} \langle P_{n-1}^{\psi_0}, P_{n-1}^{\psi_0} \rangle_{\psi_0}}{\langle S_{n-1}, S_{n-1} \rangle_{\mathbb{S}_1}} = \frac{d_{n-1} \rho_{n-1}^{\psi_0}}{\rho_{n-1}^{\mathbb{S}_1}}, \quad (3.2.2)$$

e para $i = 2, 3, \dots, \lfloor (n+1)/2 \rfloor$, $a_{n-2i+1} = 0$, e assim obtemos

$$S_{n+1}(x) + a_{n-1} S_{n-1}(x) = P_{n+1}^{\phi_1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1} P_{n-1}^{\psi_0}(x), \quad n \geq 1. \quad (3.2.3)$$

Usando a relação acima, obtemos ainda que

$$\langle S_n, S_n \rangle_{\mathbb{S}_1} = \langle P_n^{\psi_0} + d_{n-2} P_{n-2}^{\psi_0} - a_{n-2} S_{n-2}, S_n \rangle_{\mathbb{S}_1},$$

pela hipótese do teorema e por (3.1.2)

$$\langle S_n, S_n \rangle_{\mathbb{S}_1} = \langle P_n^{\psi_0} + d_{n-2} P_{n-2}^{\psi_0}, S_n \rangle_{\psi_0} + \kappa_1 \langle P_n^{\phi_1}, S_n \rangle_{\phi_1} + \kappa_2 \langle n P_{n-1}^{\psi_1}, S'_n \rangle_{\psi_1}.$$

Novamente pela relação (3.2.3), obtemos

$$\begin{aligned} \langle S_n, S_n \rangle_{\mathbb{S}_1} &= \langle P_n^{\psi_0} + d_{n-2} P_{n-2}^{\psi_0}, P_n^{\psi_0} + d_{n-2} P_{n-2}^{\psi_0} - a_{n-2} S_{n-2} \rangle_{\psi_0} \\ &\quad + \kappa_1 \langle P_n^{\phi_1}, P_n^{\psi_0} + d_{n-2} P_{n-2}^{\psi_0} - a_{n-2} S_{n-2} \rangle_{\phi_1} \\ &\quad + \kappa_2 \langle n P_{n-1}^{\psi_1}, n P_{n-1}^{\psi_1} - a_{n-2} S'_{n-2} \rangle_{\psi_1}. \end{aligned}$$



Utilizando (3.1.2) concluímos que

$$\rho_n^{\mathbb{S}_1} = \langle S_n, S_n \rangle_{\mathbb{S}_1} = \rho_n^{\psi_0} + d_{n-2}^2 \rho_{n-2}^{\psi_0} - d_{n-2} a_{n-2} \rho_{n-2}^{\psi_0} + \kappa_1 \rho_n^{\phi_1} + \kappa_2 n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1}.$$

De (3.1.3) sabemos que $\rho_{n-2}^{\psi_0} d_{n-2} = q \rho_n^{\phi_1}$, para $n \geq 2$, substituindo na relação acima temos de (3.2.2) que

$$a_n = \frac{d_n \rho_n^{\psi_0}}{\rho_n^{\mathbb{S}_1}} = \frac{d_n \rho_n^{\psi_0}}{\rho_n^{\psi_0} + q d_{n-2} \rho_n^{\phi_1} + \kappa_1 \rho_n^{\phi_1} + \kappa_2 n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1} - q \rho_n^{\phi_1} a_{n-2}}, \quad n \geq 2. \quad (3.2.4)$$

Sabemos de (2.1.4) que

$$\alpha_{n+1}^{\phi_1} = \frac{\rho_n^{\phi_1}}{\rho_{n-1}^{\phi_1}} \Rightarrow \rho_n^{\phi_1} = \frac{\rho_{n+2}^{\phi_1}}{\alpha_{n+2}^{\phi_1} \alpha_{n+3}^{\phi_1}}, \quad n \geq 0. \quad (3.2.5)$$

De (3.1.3) temos

$$\rho_n^{\psi_0} = \frac{q \rho_{n+2}^{\phi_1}}{d_n}, \quad n \geq 0,$$

logo, pela relação (3.2.5)

$$\frac{1}{\rho_n^{\psi_0}} = \frac{d_n}{q \rho_n^{\phi_1} \alpha_{n+2}^{\phi_1} \alpha_{n+3}^{\phi_1}} \quad n \geq 0,$$

assim,

$$\frac{q \rho_n^{\phi_1}}{\rho_n^{\psi_0}} = \frac{d_n}{\alpha_{n+2}^{\phi_1} \alpha_{n+3}^{\phi_1}}, \quad n \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\rho_{n-1}^{\psi_1}}{\rho_n^{\psi_0}} = \frac{\rho_{n-1}^{\psi_1} d_n}{q \rho_n^{\phi_1} \alpha_{n+2}^{\phi_1} \alpha_{n+3}^{\phi_1}}, \quad n \geq 1. \quad (3.2.6)$$

Dividindo o numerador e o denominador de (3.2.4) por $\rho_n^{\psi_0}$ e usando as relações (3.2.6), chegamos ao resultado para $a_n(q, \kappa_1, \kappa_2)$ com $n \geq 2$.

Para $n = 0$,

$$\rho_0^{\mathbb{S}_1} = \langle S_0, S_0 \rangle_{\mathbb{S}_1} = \langle 1, 1 \rangle_{\mathbb{S}_1} = \rho_0^{\psi_0} + \kappa_1 \rho_0^{\phi_1},$$

desse modo,

$$a_0(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{d_0(q) \rho_0^{\psi_0}}{\rho_0^{\psi_0} + \kappa_1 \rho_0^{\phi_1}} = \frac{q \rho_2^{\phi_1}}{\frac{q \rho_2^{\phi_1}}{d_0(q)} + \kappa_1 \frac{\rho_2^{\phi_1}}{\alpha_2^{\phi_1} \alpha_3^{\phi_1}}} = \frac{q \alpha_2^{\phi_1} \alpha_3^{\phi_1} d_0(q)}{q \alpha_2^{\phi_1} \alpha_3^{\phi_1} + \kappa_1 d_0(q)}.$$

Para $n = 1$,

$$\rho_1^{\mathbb{S}_1} = \langle S_1, S_1 \rangle_{\mathbb{S}_1} = \langle x, x \rangle_{\mathbb{S}_1} = \rho_1^{\psi_0} + \kappa_1 \rho_1^{\phi_1} + \kappa_2 \rho_0^{\psi_1},$$

logo,

$$\begin{aligned} a_1(q, \kappa_1, \kappa_2) &= \frac{d_1(q) \rho_1^{\psi_0}}{\rho_1^{\psi_0} + \kappa_1 \rho_1^{\phi_1} + \kappa_2 \rho_0^{\psi_1}} = \frac{q \rho_3^{\phi_1}}{\frac{q \rho_3^{\phi_1}}{d_1(q)} + \kappa_1 \rho_1^{\phi_1} + \kappa_2 \rho_0^{\psi_1}} \\ &= \frac{q \rho_1^{\phi_1} \alpha_3^{\phi_1} \alpha_4^{\phi_1}}{\frac{q \rho_1^{\phi_1} \alpha_3^{\phi_1} \alpha_4^{\phi_1}}{d_1(q)} + \kappa_1 \rho_1^{\phi_1} + \kappa_2 \rho_0^{\psi_1}} = \frac{q \alpha_3^{\phi_1} \alpha_4^{\phi_1} d_1(q)}{q \alpha_3^{\phi_1} \alpha_4^{\phi_1} + d_1(q) [\kappa_1 + (\rho_0^{\psi_1} / \rho_1^{\phi_1}) \kappa_2]}. \end{aligned}$$



De (3.1.6), temos que

$$d_{n-1}(q) = \frac{1}{4q}(l_n - 1)(l_{n+1} - 1) = \frac{\tilde{l}_n(q)\tilde{l}_{n+1}(q)}{q}, \quad n \geq 1,$$

onde $\tilde{l}_n(q) = \frac{l_n - 1}{2}$. E ainda,

$$l_1 = 1 + 2q\alpha_2^{\phi_1} \implies \tilde{l}_1(q) = q\alpha_2^{\phi_1}.$$

Além disso, de (3.1.5)

$$\alpha_{n+1}^{\phi_1} = \frac{1}{4q}(l_n - 1)(l_{n+1} + 1) \implies \tilde{l}_n(q) = \frac{q\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\frac{l_{n+1} + 1}{2}} = \frac{q\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\tilde{l}_{n+1}(q) + 1}, \quad n \geq 2$$

e

$$\alpha_{n+1}^{\psi_0} = \frac{1}{4q}(l_n - 1)(l_{n+1} + 1) \implies \alpha_{n+1}^{\psi_0} = \frac{1}{q}\tilde{l}_n(q)(\tilde{l}_{n+1}(q) + 1) \implies \tilde{l}_n(q) = -1 + \frac{q\alpha_n^{\psi_0}}{\tilde{l}_{n-1}(q)}, \quad n \geq 2,$$

o que demonstra a última parte do teorema. $\blacksquare$

Como um caso particular deste teorema temos os resultados associados à medida de Hermite, pois considerando $d\phi_1(x) = d\psi_1(x) = e^{-x^2}dx$, obtemos $P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\psi_1}(x) = H_n(x)$, que são os polinômios de Hermite na forma mônica. Como $H'_n(x) = nH_{n-1}(x)$ temos a hipótese do Teorema 3.2.1, $P'_n{}^{\phi_1}(x) = nP_{n-1}^{\psi_1}(x)$. Definimos ainda $d\psi_0(x) = (1 + qx^2)e^{-x^2}dx$, para $q \geq 0$. Observamos que $\alpha_{n+1}^{\phi_1} = \alpha_{n+1}^{\psi_1} = n/2$ (veja (2.1.8)). Assim consideramos o seguinte resultado (dado em [3]) que relaciona os polinômios de Hermite aos polinômios ortogonais de Sobolev com relação ao produto interno (3.2.1) da forma

$$\langle f, g \rangle_{S_{1H}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)(1 + \kappa_1 + qx^2)e^{-x^2}dx + \kappa_2 \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)e^{-x^2}dx.$$

Corolário 3.2.1 *Dado o produto interno*

$$\langle f, g \rangle_{S_{1H}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)(1 + \kappa_1 + qx^2)e^{-x^2}dx + \kappa_2 \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)e^{-x^2}dx, \quad (3.2.7)$$

onde $q \geq 0$, então os polinômios ortogonais associados, S_n , satisfazem $S_0(x) = 1$, $S_1(x) = x$ e para $n \geq 1$,

$$S_{n+1}(x) + a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2)S_{n-1}(x) = H_{n+1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x). \quad (3.2.8)$$

Aqui $d_{n-1}(0) = a_{n-1}(0, \kappa_1, \kappa_2) = 0$ para $n \geq 1$ e quando $q > 0$,

$$a_n(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{q(n+1)(n+2)d_n(q)}{q(n+1)(n+2) + 4d_n(q)[\kappa_1 + 2n\kappa_2 + qd_{n-2}(q) - qa_{n-2}(q, \kappa_1, \kappa_2)]}, \quad (3.2.9)$$



$n \geq 2$, onde

$$a_0(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{qd_0(q)}{q + 2d_0(q)\kappa_1}, \quad a_1(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{3qd_1(q)}{3q + 2d_1(q)[\kappa_1 + 2\kappa_2]}.$$

Os coeficientes $d_n(q)$ satisfazem

$$d_{n-1}(q) = \frac{\tilde{l}_n(q)\tilde{l}_{n+1}(q)}{q}, \quad n \geq 1, \quad (3.2.10)$$

onde

$$\tilde{l}_n(q) = \frac{qn/2}{1 - \tilde{l}_{n-1}(q)}, \quad n \geq 2 \quad e \quad \tilde{l}_1(q) = \frac{q}{2}.$$

Aqui, κ_1 e κ_2 são tais que $\kappa_2 \geq 0$ e, se $q > 0$, então $1 + \kappa_1 \geq 0$ e se $q = 0$, então $1 + \kappa_1 > 0$.

Para $q > 0$ podemos escrever o produto interno (3.2.7) da forma

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_{1H}} = q \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) \left(x^2 + \frac{1 + \kappa_1}{q} \right) e^{-x^2} dx + \frac{\kappa_2}{q} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x) e^{-x^2} dx \right\},$$

fazendo $\xi^2 = \frac{1 + \kappa_1}{q}$ e $\lambda = \frac{\kappa_2}{q}$, obtemos

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_{1H}} = q \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) (x^2 + \xi^2) e^{-x^2} dx + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x) e^{-x^2} dx \right\}.$$

Observe que neste caso $\{(x^2 + \xi^2)e^{-x^2} dx, e^{-x^2} dx\}$ é um par de medidas simetricamente coerente de Hermite do tipo I (veja seção 2.2.1).

Um outro caso particular do Teorema 3.2.1 está associado aos polinômios de Gegenbauer, $G_n^{(\tau)}$ e, a partir de agora consideraremos $\tau = \alpha$. Aqui, consideramos $d\psi_1(x) = (1 - x^2)^{\alpha+1/2} dx$ e $d\phi_1(x) = (1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx$, pois $P_n^{\phi_1}(x) = G_n^{(\alpha)}(x)$ são os polinômios de Gegenbauer mônicos de parâmetro α e $P_n^{\psi_1}(x) = G_n^{(\alpha+1)}(x)$ são os polinômios de Gegenbauer mônicos de parâmetro $\alpha + 1$. De (2.1.7) podemos ver que $G_n^{(\alpha)}(x) = nG_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$ e portanto temos a hipótese do Teorema 3.2.1, $P_n^{\phi_1}(x) = nP_{n-1}^{\psi_1}(x)$. Definimos $d\psi_0(x) = (1 + qx^2)(1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx$, para todo $q \geq -1$. Além disso, da relação de recorrência (2.1.6) observamos que $\alpha_{n+1}^{\phi_1} = \alpha_{n+1}^{(\alpha)} = \frac{n(n + 2\alpha - 1)}{4(n + \alpha)(n + \alpha - 1)}$. Assim consideramos o resultado abaixo (dado em [3]) que relaciona os polinômios de Gegenbauer aos polinômios ortogonais de Sobolev com relação ao produto interno (3.2.1) da forma

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_{1G}} = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1 + \kappa_1 + qx^2)(1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx + \kappa_2 \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)(1 - x^2)^{\alpha+1/2} dx.$$

Corolário 3.2.2 *Dado o produto interno*

$$\langle f, g \rangle_{S_1G} = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1 + \kappa_1 + qx^2)(1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx + \kappa_2 \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)(1 - x^2)^{\alpha+1/2} dx, \quad (3.2.11)$$

onde $q \geq -1$, então os polinômios ortogonais associados, S_n , satisfazem $S_0(x) = 1$, $S_1(x) = x$ e para $n \geq 1$,

$$S_{n+1}(x) + a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2)S_{n-1}(x) = G_{n+1}^{(\alpha)}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x). \quad (3.2.12)$$

Aqui $d_{n-1}(0) = a_{n-1}(0, \kappa_1, \kappa_2) = 0$ para $n \geq 1$ e quando $q \neq 0$,

$$a_n(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{q\alpha_{n+2}^{(\alpha)}\alpha_{n+3}^{(\alpha)}d_n(q)}{q\alpha_{n+2}^{(\alpha)}\alpha_{n+3}^{(\alpha)} + d_n(q)[\kappa_1 + n(n+2\alpha)\kappa_2 + qd_{n-2}(q) - qa_{n-2}(q, \kappa_1, \kappa_2)]}, \quad (3.2.13)$$

$n \geq 2$, onde

$$a_0(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{q\alpha_2^{(\alpha)}\alpha_3^{(\alpha)}d_0(q)}{q\alpha_2^{(\alpha)}\alpha_3^{(\alpha)} + d_0(q)\kappa_1}, \quad a_1(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{q\alpha_3^{(\alpha)}\alpha_4^{(\alpha)}d_1(q)}{q\alpha_3^{(\alpha)}\alpha_4^{(\alpha)} + d_1(q)[\kappa_1 + (2\alpha+1)\kappa_2]}.$$

Os coeficientes $d_n(q)$ podem ser obtidos por

$$d_{n-1}(q) = \frac{\tilde{l}_n(q)\tilde{l}_{n+1}(q)}{q}, \quad n \geq 1, \quad (3.2.14)$$

onde

$$\tilde{l}_n(q) = \frac{q\alpha_{n+1}^{(\alpha)}}{1 + \tilde{l}_{n-1}(q)}, \quad n \geq 2 \quad e \quad \tilde{l}_1(q) = q\alpha_2^{(\alpha)}. \quad (3.2.15)$$

Aqui, se $\kappa_1 = -1$, então $q > 0$ e $\kappa_2 \geq 0$ e, se $\kappa_1 \neq -1$, então $q/(1 + \kappa_1) \geq -1$ e $\kappa_2/(1 + \kappa_1) \geq 0$.

Observando (3.2.15) vemos que

$$\begin{aligned} \tilde{l}_1(-1) &= -\alpha_2^{(\alpha)} = -\frac{1}{2(1+\alpha)}, \\ \tilde{l}_2(-1) &= -\frac{\alpha_3^{(\alpha)}}{1 + \tilde{l}_1(-1)} = -\frac{2}{2(2+\alpha)}, \\ \tilde{l}_3(-1) &= -\frac{\alpha_4^{(\alpha)}}{1 + \tilde{l}_2(-1)} = -\frac{3}{2(3+\alpha)}. \end{aligned}$$

Supomos que $\tilde{l}_n(-1) = -\frac{n}{2(n+\alpha)}$. Vamos provar por indução matemática. Suponhamos que $\tilde{l}_{n-1}(-1) = -\frac{n-1}{2(n-1+\alpha)}$, para algum $n \geq 3$, então, substituindo os valores de $\alpha_{n+1}^{(\alpha)}$



e a hipótese de indução, chegamos que $\tilde{l}_n(-1) = -\frac{\alpha_{n+1}^{(\alpha)}}{1 + \tilde{l}_{n-1}(-1)} = -\frac{n}{2(n+\alpha)}$. Portanto, podemos calcular explicitamente $d_{n-1}(-1)$, ou seja,

$$d_{n-1}(-1) = -\frac{n(n+1)}{4(n+\alpha)(n+\alpha+1)}, \quad n \geq 1. \quad (3.2.16)$$

Fazendo $\xi^2 = \frac{1+\kappa_1}{q}$ e $\lambda = \frac{\kappa_2}{q}$ para $q \neq 0$, temos que o produto interno (3.2.11) pode ser escrito da forma

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_1 G} = q \left\{ \int_{-1}^1 f(x)g(x)(x^2 + \xi^2)(1-x^2)^{\alpha-1/2} dx + \lambda \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)(1-x^2)^{\alpha+1/2} dx \right\}.$$

Observe que $\{(x^2 + \xi^2)(1-x^2)^{\alpha-1/2} dx, (1-x^2)^{\alpha+1/2} dx\}$ é um par simetricamente coerente de Gegenbauer do tipo I.

3.3 Produto interno de Sobolev $\mathbb{S}_2$

O próximo resultado fornece um outro modo de estudar polinômios ortogonais de Sobolev associados a pares de medidas simétricas. Este resultado também se encontra em [3].

Teorema 3.3.1 *Sejam $d\phi_0$ e $d\psi_0$ medidas clássicas simétricas definidas sobre o mesmo suporte $E \subseteq [-b, b]$ e tais que os polinômios ortogonais mônicos associados $P_n^{\phi_0}$ e $P_n^{\psi_0}$ satisfazem $P_n^{\psi_0}(x) = nP_{n-1}^{\phi_0}(x)$, $n \geq 1$. Seja a medida $d\psi_1$ dada por*

$$d\psi_1(x) = \frac{1}{1+qx^2} d\phi_0(x),$$

então os polinômios ortogonais mônicos, S_n , associados ao produto interno $\mathbb{S}_2$ definido por

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_2} &= \langle f, g \rangle_{\psi_0} + \langle f', g' \rangle_{\kappa_1 \phi_0 + \kappa_2 \psi_1} \\ &= \int_E f(x)g(x)d\psi_0(x) + \kappa_1 \int_E f'(x)g'(x)d\phi_0(x) + \kappa_2 \int_E f'(x)g'(x)d\psi_1(x) \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

satisfazem $S_0(x) = P_0^{\psi_0}(x) = 1$, $S_1(x) = P_1^{\psi_0}(x) = x$, $S_2(x) = P_2^{\psi_0}(x)$ e

$$S_{n+1}(x) + a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2)S_{n-1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \tilde{d}_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x), \quad n \geq 2.$$

Aqui $\tilde{d}_{n-1}(0) = a_{n-1}(0, \kappa_1, \kappa_2) = 0$ para $n \geq 2$ e quando $q \neq 0$,

$$a_n(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{\nu_n(\kappa_1)\alpha_{n-1}^{\phi_0}\alpha_n^{\phi_0}\tilde{d}_n(q)}{\nu_n(\kappa_1)\alpha_{n-1}^{\phi_0}\alpha_n^{\phi_0} + \tilde{d}_{n-2}(q)\{[(n-1)^2 - 1]\frac{\kappa_2}{q} + \nu_{n-2}(\kappa_1)[\tilde{d}_{n-2}(q) - a_{n-2}(q, \kappa_1, \kappa_2)]\}},$$

$n \geq 3$, onde

$$a_1(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{\nu_1(\kappa_1)\tilde{d}_1(q)}{\nu_1(\kappa_1) + \kappa_2(\rho_0^{\psi_1}/\rho_0^{\phi_0})}, \quad a_2(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{\nu_2(\kappa_1)\tilde{d}_2(q)}{\nu_2(\kappa_1) + 4\kappa_2(\rho_1^{\psi_1}/\rho_1^{\phi_0})}$$

$\nu_n(\kappa_1) = n^2\kappa_1 + \rho_n^{\psi_0}/\rho_{n-1}^{\phi_0}$, $n \geq 1$ e $\alpha_{n+1}^{\phi_0}$ são os coeficientes da relação de recorrência (2.1.3) e que satisfazem (3.1.5). Os coeficientes $\tilde{d}_n(q)$ são tais que

$$\tilde{d}_{n-1}(q) = \frac{n+1}{n-1}d_{n-2}(q) = \frac{n+1}{n-1}\frac{\tilde{l}_{n-1}(q)\tilde{l}_n(q)}{q}, \quad n \geq 2, \quad (3.3.2)$$

onde

$$\tilde{l}_n(q) = -1 + \frac{q\alpha_n^{\phi_0}}{\tilde{l}_{n-1}(q)} = \frac{q\alpha_{n+1}^{\psi_1}}{\tilde{l}_{n-1}(q) + 1}, \quad n \geq 2 \quad \text{e} \quad \tilde{l}_1(q) = q\alpha_2^{\psi_1}.$$

Aqui, q, κ_1 e κ_2 são tais que a medida $d\psi_1$ é uma medida positiva e tais que o produto interno $\mathbb{S}_2$ é definido positivo.

Demonstração: Como $d\psi_1(x) = \frac{1}{1+qx^2}d\phi_0(x)$ e $P_n^{\psi_0}(x) = nP_{n-1}^{\phi_0}(x)$, $n \geq 1$, então

$$P_n^{\psi_1}(x) = P_n^{\phi_0}(x) + d_{n-2}(q)P_{n-2}^{\phi_0}(x) = \frac{1}{n+1}P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-2}(q)\frac{1}{n-1}P_{n-1}^{\psi_0}(x), \quad n \geq 2.$$

Logo,

$$P_n^{\psi_1}(x) = \frac{1}{n+1}[P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \tilde{d}_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x)], \quad n \geq 2,$$

com $\tilde{d}_{n-1}(q) = \frac{n+1}{n-1}d_{n-2}(q)$. A demonstração da última igualdade de (3.3.2) é análoga à demonstração do teorema anterior.

Consideremos os polinômios S_n ortogonais com relação ao produto interno de Sobolev $\mathbb{S}_2$ dado por

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_2} = \langle f, g \rangle_{\psi_0} + \langle f', g' \rangle_{\kappa_1\phi_0 + \kappa_2\psi_1} = \langle f, g \rangle_{\psi_0} + \kappa_1\langle f', g' \rangle_{\phi_0} + \kappa_2\langle f', g' \rangle_{\psi_1}.$$

Expandindo $R_{n+1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \tilde{d}_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x)$ como uma combinação linear de S_n da forma

$$R_{n+1}(x) = S_{n+1}(x) + \sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} a_{n-2i+1}S_{n-2i+1}(x), \quad n \geq 2,$$

analogamente ao Teorema 3.2.1, obtemos

$$a_{n-2i+1} = \frac{\langle R_{n+1}, S_{n-2i+1} \rangle_{\mathbb{S}_2}}{\langle S_{n-2i+1}, S_{n-2i+1} \rangle_{\mathbb{S}_2}}, \quad 1 \leq i \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor.$$

Como

$$\begin{aligned} \langle R_{n+1}, S_{n-2i+1} \rangle_{\mathbb{S}_2} &= \langle P_{n+1}^{\psi_0} + \tilde{d}_{n-1}P_{n-1}^{\psi_0}, S_{n-2i+1} \rangle_{\psi_0} + \kappa_1\langle (n+1)P_n^{\psi_1}, S'_{n-2i+1} \rangle_{\phi_0} \\ &\quad + \kappa_2\langle (n+1)P_n^{\psi_1}, S'_{n-2i+1} \rangle_{\psi_1} \\ &= \langle P_{n+1}^{\psi_0} + \tilde{d}_{n-1}P_{n-1}^{\psi_0}, S_{n-2i+1} \rangle_{\psi_0} + \kappa_1\langle (n+1)(P_n^{\phi_0} + d_{n-2}P_{n-2}^{\phi_0}), S'_{n-2i+1} \rangle_{\phi_0} \\ &\quad + \kappa_2\langle (n+1)P_n^{\psi_1}, S'_{n-2i+1} \rangle_{\psi_1}, \end{aligned}$$

temos que $\langle R_{n+1}, S_{n-2i+1} \rangle_{\mathbb{S}_2} = 0$, para $2 \leq i \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ e então

$$S_{n+1}(x) + a_{n-1}S_{n-1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \tilde{d}_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x).$$

Fazendo $i = 1$ obtemos

$$\begin{aligned} \langle R_{n+1}, S_{n-1} \rangle_{\mathbb{S}_2} &= \tilde{d}_{n-1}\rho_{n-1}^{\psi_0} + \kappa_1 \langle (n+1)d_{n-2}P_{n-2}^{\phi_0}, S'_{n-1} \rangle_{\phi_0} \\ &= \tilde{d}_{n-1}\rho_{n-1}^{\psi_0} + \kappa_1(n+1)d_{n-2} \langle P_{n-2}^{\phi_0}, P'_{n-1}^{\psi_0} + \tilde{d}_{n-3}P_{n-3}^{\psi_0} - a_{n-3}S'_{n-3} \rangle_{\phi_0} \\ &= \tilde{d}_{n-1}\rho_{n-1}^{\psi_0} + \kappa_1(n+1)d_{n-2} \langle P_{n-2}^{\phi_0}, (n-1)P_{n-2}^{\psi_1} - a_{n-3}S'_{n-3} \rangle_{\phi_0} \\ &= \tilde{d}_{n-1}\rho_{n-1}^{\psi_0} + \kappa_1(n+1)d_{n-2} \langle P_{n-2}^{\phi_0}, (n-1)(P_{n-2}^{\phi_0} + d_{n-4}P_{n-4}^{\phi_0}) - a_{n-3}S'_{n-3} \rangle_{\phi_0} \\ &= \tilde{d}_{n-1}\rho_{n-1}^{\psi_0} + \kappa_1(n-1)^2\tilde{d}_{n-1}\rho_{n-2}^{\phi_0}. \end{aligned}$$

Assim,

$$a_{n-1} = \frac{\tilde{d}_{n-1}(\rho_{n-1}^{\psi_0} + \kappa_1(n-1)^2\rho_{n-2}^{\phi_0})}{\rho_{n-1}^{\mathbb{S}_2}}, \quad n \geq 2. \quad (3.3.3)$$

Calculemos agora $\rho_n^{\mathbb{S}_2}$,

$$\begin{aligned} \rho_n^{\mathbb{S}_2} = \langle S_n, S_n \rangle_{\mathbb{S}_2} &= \langle P_n^{\psi_0} + \tilde{d}_{n-2}P_{n-2}^{\psi_0} - a_{n-2}S_{n-2}, S_n \rangle_{\mathbb{S}_2} \\ &= \langle P_n^{\psi_0} + \tilde{d}_{n-2}P_{n-2}^{\psi_0}, P_n^{\psi_0} + \tilde{d}_{n-2}P_{n-2}^{\psi_0} - a_{n-2}S_{n-2} \rangle_{\psi_0} \\ &\quad + \kappa_1 \langle n(P_{n-1}^{\phi_0} + d_{n-3}P_{n-3}^{\phi_0}), n(P_{n-1}^{\phi_0} + d_{n-3}P_{n-3}^{\phi_0}) - a_{n-2}S'_{n-2} \rangle_{\phi_0} \\ &\quad + \kappa_2 \langle nP_{n-1}^{\psi_1}, nP_{n-1}^{\psi_1} - a_{n-2}S'_{n-2} \rangle_{\psi_1} \\ &= \rho_n^{\psi_0} + \tilde{d}_{n-2}^2\rho_{n-2}^{\psi_0} - \tilde{d}_{n-2}a_{n-2}\rho_{n-2}^{\psi_0} + \kappa_1 n^2\rho_{n-1}^{\phi_0} + \kappa_1(n-2)^2\tilde{d}_{n-2}^2\rho_{n-3}^{\phi_0} \\ &\quad - \kappa_1 \langle (n-2)\tilde{d}_{n-2}P_{n-3}^{\phi_0}, a_{n-2}S'_{n-2} \rangle_{\phi_0} + \kappa_2 n^2\rho_{n-1}^{\psi_1}. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \langle (n-2)\tilde{d}_{n-2}P_{n-3}^{\phi_0}, a_{n-2}S'_{n-2} \rangle_{\phi_0} &= a_{n-2}(n-2)\tilde{d}_{n-2} \langle P_{n-3}^{\phi_0}, P'_{n-2}^{\psi_0} + \tilde{d}_{n-4}P_{n-4}^{\psi_0} - a_{n-4}S'_{n-4} \rangle_{\phi_0} \\ &= a_{n-2}(n-2)\tilde{d}_{n-2} \langle P_{n-3}^{\phi_0}, (n-2)P_{n-3}^{\psi_1} - a_{n-4}S'_{n-4} \rangle_{\phi_0} \\ &= a_{n-2}(n-2)\tilde{d}_{n-2} \langle P_{n-3}^{\phi_0}, (n-2)(P_{n-3}^{\phi_0} + d_{n-5}P_{n-5}^{\phi_0}) - a_{n-4}S'_{n-4} \rangle_{\phi_0} \\ &= a_{n-2}(n-2)^2\tilde{d}_{n-2}\rho_{n-3}^{\phi_0}. \end{aligned}$$

Logo,

$$a_n = \frac{\tilde{d}_n(\rho_n^{\psi_0} + \kappa_1 n^2\rho_{n-1}^{\phi_0})}{\rho_n^{\psi_0} + \tilde{d}_{n-2}^2\rho_{n-2}^{\psi_0} - \tilde{d}_{n-2}a_{n-2}\rho_{n-2}^{\psi_0} + \kappa_1 n^2\rho_{n-1}^{\phi_0} + \kappa_1(n-2)^2\tilde{d}_{n-2}^2\rho_{n-3}^{\phi_0} - \kappa_1 a_{n-2}(n-2)^2\tilde{d}_{n-2}\rho_{n-3}^{\phi_0} + \kappa_2 n^2\rho_{n-1}^{\psi_1}}.$$

Como $d_{n-3} = q \frac{\rho_{n-1}^{\psi_1}}{\rho_{n-3}^{\phi_0}}$ e $\tilde{d}_{n-2} = \frac{n}{n-2}d_{n-3}$, $n \geq 3$, temos que

$$n^2\rho_{n-1}^{\psi_1} = \frac{1}{q}[(n-1)^2 - 1]\tilde{d}_{n-2}\rho_{n-3}^{\phi_0}.$$

Substituindo na relação acima e dividindo o numerador e o denominador por $\rho_{n-1}^{\phi_0}$, obtemos

$$a_n = \frac{\tilde{d}_n \left[\frac{\rho_n^{\psi_0}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}} + \kappa_1 n^2 \right]}{\frac{\rho_n^{\psi_0}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}} + \kappa_1 n^2 + \tilde{d}_{n-2} \left\{ \tilde{d}_{n-2} \frac{\rho_{n-2}^{\psi_0}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}} - a_{n-2} \frac{\rho_{n-2}^{\psi_0}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}} + \kappa_1 (n-2)^2 \tilde{d}_{n-2} \frac{\rho_{n-3}^{\phi_0}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}} - \kappa_1 a_{n-2} (n-2)^2 \frac{\rho_{n-3}^{\phi_0}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}} + \frac{\kappa_2}{q} [(n-1)^2 - 1] \frac{\rho_{n-3}^{\phi_0}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}} \right\}}.$$

Além disso,

$$\alpha_{n-1}^{\phi_0} = \frac{\rho_{n-2}^{\phi_0}}{\rho_{n-3}^{\phi_0}} \Rightarrow \rho_{n-3}^{\phi_0} = \frac{\rho_{n-1}^{\phi_0}}{\alpha_{n-1}^{\phi_0} \alpha_n^{\phi_0}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\rho_{n-3}^{\phi_0}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}} = \frac{1}{\alpha_{n-1}^{\phi_0} \alpha_n^{\phi_0}} & \text{e} \\ \frac{\rho_{n-2}^{\psi_0}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}} = \frac{\rho_{n-2}^{\psi_0}}{\rho_{n-3}^{\phi_0} \alpha_{n-1}^{\phi_0} \alpha_n^{\phi_0}}. \end{cases}$$

Portanto,

$$a_n = \frac{\tilde{d}_n \left[\frac{\rho_n^{\psi_0}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}} + \kappa_1 n^2 \right]}{\frac{\rho_n^{\psi_0}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}} + \kappa_1 n^2 + \tilde{d}_{n-2} \left\{ (\tilde{d}_{n-2} - a_{n-2}) \left(\frac{\rho_{n-2}^{\psi_0}}{\rho_{n-3}^{\phi_0} \alpha_{n-1}^{\phi_0} \alpha_n^{\phi_0}} + \kappa_1 (n-2)^2 \frac{1}{\alpha_{n-1}^{\phi_0} \alpha_n^{\phi_0}} \right) + \frac{\kappa_2}{q} [(n-1)^2 - 1] \frac{1}{\alpha_{n-1}^{\phi_0} \alpha_n^{\phi_0}} \right\}},$$

ou seja,

$$a_n(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{\nu_n(\kappa_1) \alpha_{n-1}^{\phi_0} \alpha_n^{\phi_0} \tilde{d}_n(q)}{\nu_n(\kappa_1) \alpha_{n-1}^{\phi_0} \alpha_n^{\phi_0} + \tilde{d}_{n-2}(q) \{ [(n-1)^2 - 1] \frac{\kappa_2}{q} + \nu_{n-2}(\kappa_1) [\tilde{d}_{n-2}(q) - a_{n-2}(q, \kappa_1, \kappa_2)] \}},$$

$n \geq 3$, onde $\nu_n(\kappa_1) = n^2 \kappa_1 + \rho_n^{\psi_0} / \rho_{n-1}^{\phi_0}$, $n \geq 1$.

Quando $n = 1$,

$$\rho_1^{\mathbb{S}_2} = \langle S_1, S_1 \rangle_{\mathbb{S}_2} = \langle x, x \rangle_{\mathbb{S}_2} = \rho_1^{\psi_0} + \kappa_1 \rho_0^{\phi_0} + \kappa_2 \rho_0^{\psi_1}$$

e quando $n = 2$,

$$\rho_2^{\mathbb{S}_2} = \langle S_2, S_2 \rangle_{\mathbb{S}_2} = \langle P_2^{\psi_0}, P_2^{\psi_0} \rangle_{\mathbb{S}_2} = \rho_2^{\psi_0} + \kappa_1 \langle 2P_1^{\phi_0}, 2P_1^{\phi_0} \rangle_{\phi_0} + \kappa_2 \langle 2P_1^{\phi_0}, 2P_1^{\phi_0} \rangle_{\psi_1} = \rho_2^{\psi_0} + 4\kappa_1 \rho_1^{\phi_0} + 4\kappa_2 \rho_1^{\psi_1}$$

Portanto,

$$a_1(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{\tilde{d}_1[\rho_1^{\psi_0} + \kappa_1 \rho_0^{\phi_0}]}{\rho_1^{\psi_0} + \kappa_1 \rho_0^{\phi_0} + \kappa_2 \rho_0^{\psi_1}} = \frac{\nu_1(\kappa_1) \tilde{d}_1(q)}{\nu_1(\kappa_1) + \kappa_2(\rho_0^{\psi_1} / \rho_0^{\phi_0})}$$

e

$$a_2(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{\tilde{d}_2[\rho_2^{\psi_0} + 4\kappa_1 \rho_1^{\phi_0}]}{\rho_2^{\psi_0} + 4\kappa_1 \rho_1^{\phi_0} + 4\kappa_2 \rho_1^{\psi_1}} = \frac{\nu_2(\kappa_1) \tilde{d}_2(q)}{\nu_2(\kappa_1) + 4\kappa_2(\rho_1^{\psi_1} / \rho_1^{\phi_0})}.$$

■

Como um caso particular desse teorema temos também o associado aos polinômios de Hermite, pois tomando $d\phi_0(x) = d\psi_0(x) = e^{-x^2} dx$ obtemos $P_n^{\phi_0}(x) = P_n^{\psi_0}(x) = H_n(x)$, que são os polinômios de Hermite na forma mônica. Como $H'_n(x) = nH_{n-1}(x)$ a hipótese



do Teorema 3.3.1, de que $P'_n{}^{\psi_0}(x) = nP_{n-1}^{\phi_0}(x)$, está satisfeita. Definimos $d\psi_1(x) = (1 + qx^2)^{-1}e^{-x^2}dx$ para todo $q \geq 0$. Além disso, temos que $\alpha_{n+1}^{\phi_0} = \alpha_{n+1}^{\psi_0} = n/2$. Assim, obtemos o seguinte resultado (dado em [3]) relacionando os polinômios de Hermite aos polinômios ortogonais de Sobolev com relação ao produto interno (3.3.1).

Corolário 3.3.1 *Dado o produto interno*

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_{2H}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)\frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_1 qx^2}{1 + qx^2}e^{-x^2}dx, \quad (3.3.4)$$

$q \geq 0$, então os polinômios ortogonais associados, S_n , satisfazem $S_0(x) = H_0(x) = 1$, $S_1(x) = H_1(x) = x$, $S_2(x) = H_2(x)$ e

$$S_{n+1}(x) + a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2)S_{n-1}(x) = H_{n+1}(x) + \tilde{d}_{n-1}(q)H_{n-1}(x), \quad n \geq 2. \quad (3.3.5)$$

Aqui $\tilde{d}_{n-1}(0) = a_{n-1}(0, \kappa_1, \kappa_2) = 0$ para $n \geq 2$ e quando $q > 0$,

$$a_n(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{n(n-1)\nu_n(\kappa_1)\tilde{d}_n(q)}{n(n-1)\nu_n(\kappa_1) + 4\tilde{d}_{n-2}(q)\{2n\frac{\kappa_2}{q} + \nu_{n-2}(\kappa_1)[\tilde{d}_{n-2}(q) - a_{n-2}(q, \kappa_1, \kappa_2)]\}}, \quad (3.3.6)$$

$n \geq 3$, onde

$$a_1(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{\nu_1(\kappa_1)\tilde{d}_1(q)}{\nu_1(\kappa_1) + 2\kappa_2(\rho_0^{\psi_1}/\sqrt{\pi})}, \quad a_2(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{\nu_2(\kappa_1)\tilde{d}_2(q)}{\nu_2(\kappa_1) + 8\kappa_2(\rho_1^{\psi_1}/\sqrt{\pi})}$$

e $\nu_n(\kappa_1) = 1 + 2n\kappa_1$, $n \geq 1$. Os coeficientes $\tilde{d}_n(q)$ são tais que

$$\tilde{d}_{n-1}(q) = \frac{n+1}{n-1}d_{n-2}(q) = \frac{n+1}{n-1}\frac{\tilde{l}_{n-1}(q)\tilde{l}_n(q)}{q}, \quad n \geq 2, \quad (3.3.7)$$

onde

$$\tilde{l}_n(q) = -1 + \frac{(n-1)q}{2\tilde{l}_{n-1}(q)}, \quad n \geq 2 \quad \text{e} \quad \tilde{l}_1(q) = q\alpha_2^{\psi_1}.$$

Aqui, κ_1 e κ_2 são tais $\kappa_1 \geq 0$ e $\kappa_1 + \kappa_2 \geq 0$, de modo que o produto interno $\mathbb{S}_{2H}$ é definido positivo.

Note que no corolário acima qualquer avaliação direta envolvendo a medida $d\psi_1$ só aparece nas condições iniciais a_1 , a_2 e $\tilde{l}_1$.

Para $\kappa_1 = 0$ e $q > 0$, se $\xi^2 = \frac{1}{q} \neq 0$ e $\lambda = \frac{\kappa_2}{q}$, podemos escrever o produto interno (3.3.4) da forma

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_{2H}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)\frac{e^{-x^2}}{x^2 + \xi^2}dx.$$

Observe que $\left\{ e^{-x^2}, \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \xi^2} dx \right\}$ forma um par simetricamente coerente de Hermite do tipo II (veja seção 2.2.1).

Quando $\kappa_1 \neq 0$, as duas medidas envolvidas não formam um par simetricamente coerente.

Um outro caso particular do Teorema 3.3.1 é o associado aos polinômios de Gegenbauer, pois considerando $d\phi_0(x) = (1 - x^2)^{\alpha+1/2}dx$ e $d\psi_0(x) = (1 - x^2)^{\alpha-1/2}dx$ temos que $P_n^{\phi_0}(x) = G_n^{(\alpha+1)}(x)$ são os polinômios de Gegenbauer mônicos de parâmetro $\alpha + 1$ e $P_n^{\psi_0}(x) = G_n^{(\alpha)}(x)$ são os polinômios de Gegenbauer mônicos de parâmetro α . Como $G_n^{(\alpha)}(x) = nG_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$, então temos a hipótese do Teorema 3.3.1, $P_n^{\psi_0}(x) = nP_{n-1}^{\phi_0}(x)$. Definimos $d\psi_1(x) = \frac{(1 - x^2)^{\alpha+1/2}}{1 + qx^2}dx$, para $q \geq -1$. Então, como $\alpha_{n+1}^{\psi_0} = \alpha_{n+1}^{(\alpha)} = \frac{n(n + 2\alpha - 1)}{4(n + \alpha)(n + \alpha - 1)}$, obtemos o seguinte corolário (dado em [3]), que relaciona os polinômios de Gegenbauer aos polinômios ortogonais de Sobolev com relação ao produto interno (3.3.1).

Corolário 3.3.2 *Considere o produto interno*

$$\langle f, g \rangle_{S_{2G}} = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1 - x^2)^{\alpha-1/2}dx + \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)\frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_1 qx^2}{1 + qx^2}(1 - x^2)^{\alpha+1/2}dx, \quad (3.3.8)$$

para $q \geq -1$. Então os polinômios ortogonais associados S_n satisfazem $S_0(x) = G_0^{(\alpha)}(x) = 1$, $S_1(x) = G_1^{(\alpha)}(x) = x$, $S_2(x) = G_2^{(\alpha)}(x)$ e

$$S_{n+1}(x) + a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2)S_{n-1}(x) = G_{n+1}^{(\alpha)}(x) + \tilde{d}_{n-1}(q)G_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 2. \quad (3.3.9)$$

Aqui $\tilde{d}_{n-1}(0) = a_{n-1}(0, \kappa_1, \kappa_2) = 0$ para $n \geq 2$ e quando $q \neq 0$,

$$a_n(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{\nu_n(\kappa_1)\alpha_{n-1}^{(\alpha+1)}\alpha_n^{(\alpha+1)}\tilde{d}_n(q)}{\nu_n(\kappa_1)\alpha_{n-1}^{(\alpha+1)}\alpha_n^{(\alpha+1)} + \tilde{d}_{n-2}(q)\{[(n-1)^2 - 1]\frac{x_2}{q} + \nu_{n-2}(\kappa_1)[\tilde{d}_{n-2}(q) - a_{n-2}(q, \kappa_1, \kappa_2)]\}}, \quad (3.3.10)$$

$n \geq 3$, onde

$$a_1(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{\nu_1(\kappa_1)\tilde{d}_1(q)}{\nu_1(\kappa_1) + \kappa_2(\rho_0^{\psi_1}/\rho_0^{(\alpha+1)})}, \quad a_2(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{\nu_2(\kappa_1)\tilde{d}_2(q)}{\nu_2(\kappa_1) + 4\kappa_2(\rho_1^{\psi_1}/\rho_1^{(\alpha+1)})}$$

e $\nu_n(\kappa_1) = n^2\kappa_1 + \frac{n}{n + 2\alpha}$, $n \geq 1$. Os coeficientes $\tilde{d}_n(q)$ são tais que

$$\tilde{d}_{n-1}(q) = \frac{n+1}{n-1}d_{n-2}(q) = \frac{n+1}{n-1}q^{-1}\tilde{l}_{n-1}(q)\tilde{l}_n(q), \quad n \geq 2, \quad (3.3.11)$$

onde

$$\tilde{l}_n(q) = -1 + \frac{q\alpha_n^{(\alpha+1)}}{\tilde{l}_{n-1}(q)}, \quad n \geq 2 \quad \text{e} \quad \tilde{l}_1(q) = q\alpha_2^{\psi_1}.$$

Os parâmetros κ_1 e κ_2 são tais que, se $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$, então $\kappa_1 q \geq 0$ e se $\kappa_1 + \kappa_2 > 0$, então $\frac{\kappa_1 q}{\kappa_1 + \kappa_2} \geq -1$, de modo que o produto interno S_{2G} é definido positivo.



Novamente, notamos que, no Corolário 3.3.2, qualquer avaliação direta envolvendo a medida $d\psi_1$ só aparece nas condições iniciais a_1 , a_2 e $\tilde{l}_1$. Nestas condições iniciais $\rho_0^{\psi_1} = \mu_0^{\psi_1}$, $\rho_1^{\psi_1} = \mu_2^{\psi_1}$ e $\alpha_2^{\psi_1} = \mu_2^{\psi_1}/\mu_0^{\psi_1}$.

Fazendo $\xi^2 = \frac{1}{q} \neq 0$ e $\lambda = \frac{\kappa_2}{q}$, o produto interno (3.3.8), para $\kappa_1 = 0$ e $q \neq 0$, pode ser escrito da forma

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_{2G}} = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx + \lambda \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)\frac{(1-x^2)^{\alpha+1/2}}{x^2+\xi^2}dx,$$

e assim, $\left\{ (1-x^2)^{\alpha-1/2}dx, \frac{(1-x^2)^{\alpha+1/2}}{x^2+\xi^2}dx \right\}$ forma um par simetricamente coerente de Gegenbauer do tipo II.

Novamente para $\kappa_1 \neq 0$, as duas medidas envolvidas não formam um par simetricamente coerente.

Capítulo 4

Localização dos zeros

Neste capítulo faremos um estudo sobre a localização dos zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev com relação aos zeros de polinômios ortogonais associados, para os exemplos de Hermite e de Gegenbauer, que estão divididos em dois casos: produto interno de Sobolev S_1 e produto interno de Sobolev S_2 . Para isto utilizamos resultados análogos aos encontrados em de Bruin e outros [5] e Groenevelt [7], pois nestes trabalhos são estudados os comportamentos dos zeros destes polinômios quando as medidas envolvidas formam pares simetricamente coerentes de Hermite e de Gegenbauer, respectivamente.

4.1 Produto interno de Sobolev S_1

Para facilitar a leitura desta seção repetimos aqui algumas definições do capítulo 3, mais precisamente da seção 3.2.

Sejam $d\phi_1$ e $d\psi_1$ medidas simétricas clássicas tais que os polinômios ortogonais mônicos associados satisfazem $P'_n \phi_1(x) = nP_{n-1}^{\psi_1}(x)$, $n \geq 1$ e $d\psi_0$ tal que

$$d\psi_0(x) = (1 + qx^2)d\phi_1(x).$$

O produto interno de Sobolev S_1 é dado por

$$\langle f, g \rangle_{S_1} = \langle f, g \rangle_{\psi_0 + \kappa_1 \phi_1} + \kappa_2 \langle f', g' \rangle_{\psi_1}.$$

4.1.1 Produto interno de Sobolev S_{1H} associado à medida $e^{-x^2} dx$

Do Corolário 3.2.1 consideremos

$$d\phi_1(x) = d\psi_1(x) = e^{-x^2} dx \quad \text{e} \quad d\psi_0(x) = (1 + qx^2)e^{-x^2} dx,$$



para $q \geq 0$, onde $P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\psi_1}(x) = H_n(x)$ (polinômios de Hermite mônicos). O produto interno S_{1H}

$$\langle f, g \rangle_{S_{1H}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)(1 + \kappa_1 + qx^2)e^{-x^2} dx + \kappa_2 \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)e^{-x^2} dx,$$

para $q > 0$ também pode ser escrito na forma

$$\langle f, g \rangle_{S_{1H}} = q \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) \left(x^2 + \frac{1 + \kappa_1}{q} \right) e^{-x^2} dx + \frac{\kappa_2}{q} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)e^{-x^2} dx \right\}. \quad (4.1.1)$$

Lembramos que os polinômios ortogonais associados, S_n , satisfazem $S_0(x) = 1$, $S_1(x) = x$ e para $n \geq 1$,

$$S_{n+1}(x) + a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2)S_{n-1}(x) = H_{n+1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x), \quad (4.1.2)$$

onde $a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2) > 0$ e $d_{n-1}(q) > 0$ são definidos por (3.2.9) e (3.2.10), respectivamente.

Denotando $d\phi_0(x) = \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right) e^{-x^2} dx$, temos que o par de medidas $\{d\phi_0, d\psi_1\} = \left\{ \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right) e^{-x^2} dx, e^{-x^2} dx \right\}$ forma um par de medidas simetricamente coerente de Hermite do tipo I.

Assim, baseados nos resultados de [5], onde os autores fizeram um estudo dos zeros de polinômios ortogonais de Sobolev associados a pares simetricamente coerentes envolvendo a medida de Hermite, podemos encontrar resultados análogos.

Derivando a relação (4.1.2) e dividindo por $n + 1$, obtemos

$$H_n(x) = \frac{S'_{n+1}(x)}{n+1} + c_n \frac{S'_{n-1}(x)}{n-1}, \quad (4.1.3)$$

onde $c_n = c_n(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2) > 0$.

Para o estudo dos zeros dos polinômios S_n precisamos de alguns resultados preliminares que distinguiamos em dois casos: n par ou ímpar.

n=2r: Para $r \geq 1$ e $i \in \{-2, -1, \dots, r-1\}$ definimos

$$m_i^r = \int_{-\infty}^{\infty} S_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1 + \kappa_1}{q} \right)^{i+1} e^{-x^2} dx, \quad i = -1, \dots, r-1 \quad (4.1.4)$$

$$m_{-2}^r = 0.$$

O lema abaixo nos dá uma relação de recorrência para os coeficientes m_i^r .

Lema 4.1.1 Para $r \geq 2$ e $1 \leq i \leq r-1$ temos

$$m_i^r = -\frac{2\kappa_2 i}{q} \left\{ 2m_{i-1}^r - b_i m_{i-2}^r + 2(i-1) \frac{1 + \kappa_1}{q} m_{i-3}^r \right\},$$

onde $b_i = 2i - 1 + 2 \left(\frac{1+\kappa_1}{q} \right) > 0$.



Demonstração: Para $1 \leq i \leq r-1$, $\left\langle S_{2r}, \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}\right)^i \right\rangle_{\mathbb{S}_{1H}} = 0$. Logo,

$$q \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} S_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}\right)^{i+1} e^{-x^2} dx + \frac{2\kappa_2 i}{q} \int_{-\infty}^{\infty} x S'_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}\right)^{i-1} e^{-x^2} dx \right\} = 0.$$

De (4.1.4) temos que

$$m_i^r = -\frac{2\kappa_2 i}{q} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x S'_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}\right)^{i-1} e^{-x^2} dx}_I.$$

Integrando I por partes, com $u = x \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}\right)^{i-1} e^{-x^2}$ e $dv = S'_{2r}(x) dx$, obtemos

$$\begin{aligned} I &= - \int_{-\infty}^{\infty} S_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}\right)^{i-1} e^{-x^2} dx + 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_{2r}(x) x^2 \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}\right)^{i-1} e^{-x^2} dx \\ &\quad - 2(i-1) \int_{-\infty}^{\infty} S_{2r}(x) x^2 \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}\right)^{i-2} e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Fazendo $x^2 = x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} - \frac{1+\kappa_1}{q}$ nas duas últimas integrais acima

$$\begin{aligned} I &= - \int_{-\infty}^{\infty} S_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}\right)^{i-1} e^{-x^2} dx + 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}\right)^i e^{-x^2} dx \\ &\quad - 2 \frac{1+\kappa_1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} S_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}\right)^{i-1} e^{-x^2} dx \\ &\quad - 2(i-1) \int_{-\infty}^{\infty} S_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}\right)^{i-1} e^{-x^2} dx \\ &\quad + 2(i-1) \frac{1+\kappa_1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} S_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}\right)^{i-2} e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Usando (4.1.4) chegamos que

$$m_i^r = -\frac{2\kappa_2 i}{q} \left\{ 2m_{i-1}^r - \left[2i-1 + 2 \left(\frac{1+\kappa_1}{q} \right) \right] m_{i-2}^r + 2(i-1) \frac{1+\kappa_1}{q} m_{i-3}^r \right\}.$$

■

O próximo resultado avalia o sinal de m_i^r , que denotamos por $\text{sinal}(m_i^r)$.

Lema 4.1.2 Para $r \geq 2$ e $-1 \leq i \leq r-1$ temos

(i) $m_0^r = 0$

(ii) $\text{sinal}(m_i^r) = (-1)^{r+i-1}$, $i \neq 0$.



Demonstração: (i) Da equação $\langle S_{2r}, 1 \rangle_{S_{1H}} = 0$ e utilizando a definição (4.1.4), encontramos $m_0^r = 0$.

(ii) Usando o Lema 4.1.1 encontramos para $i = 1$

$$m_1^r = \frac{2\kappa_2}{q} b_1 m_{-1}^r \implies \text{sin}al(m_1^r) = \text{sin}al(m_{-1}^r).$$

Como $\langle S_{2r}, x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \rangle_{S_{1H}} = 0$, então

$$q \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} S_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right)^2 e^{-x^2} dx + \frac{2\kappa_2}{q} \int_{-\infty}^{\infty} x S'_{2r}(x) e^{-x^2} dx \right\} = 0.$$

Usando (4.1.4), obtemos

$$m_1^r = -\frac{2\kappa_2}{q} \int_{-\infty}^{\infty} x S'_{2r}(x) e^{-x^2} dx. \quad (4.1.5)$$

Portanto para conhecermos o sinal de m_1^r basta conhecermos o sinal da integral acima. De (4.1.3), temos que

$$H_{2r-1}(x) = \frac{S'_{2r}(x)}{2r} + c_{2r-1} \frac{S'_{2r-2}(x)}{2r-2}, \quad c_{2r-1} > 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} x H_{2r-1}(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{S'_{2r}(x)}{2r} e^{-x^2} dx + c_{2r-1} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{S'_{2r-2}(x)}{2r-2} e^{-x^2} dx \\ &\implies \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{S'_{2r}(x)}{2r} e^{-x^2} dx = -c_{2r-1} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{S'_{2r-2}(x)}{2r-2} e^{-x^2} dx \\ &\implies \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{S'_{2r}(x)}{2r} e^{-x^2} dx = (-1)^{r-1} c_{2r-1} c_{2r-3} \dots c_3 \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{S'_2(x)}{2} e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Mas,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{S'_2(x)}{2} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx > 0 \quad \text{e} \quad c_i > 0,$$

então

$$\text{sin}al \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{S'_{2r}(x)}{2r} e^{-x^2} dx \right) = (-1)^{r-1}. \quad (4.1.6)$$

De (4.1.5) e (4.1.6), obtemos $\text{sin}al(m_1^r) = (-1)^r$. Assim, $\text{sin}al(m_1^r) = \text{sin}al(m_{-1}^r) = (-1)^r$. Portanto, pelo Lema 4.1.1 e usando indução matemática, concluímos que $\text{sin}al(m_i^r) = (-1)^{r+i-1}$. ■

O lema abaixo avalia o sinal da integral I_1 que nos ajudará na localização dos zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev associados a (4.1.1).



Lema 4.1.3 Seja $r \geq 2$ e $\pi(x)$ um polinômio mônico par de grau $2k$, $1 \leq k \leq r$, tal que todos os zeros de $\pi(x)$ são reais, mas $\pi(x) \neq x^2$. Definimos

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{2r}(x) \pi(x) e^{-x^2} dx,$$

então $I_1 \neq 0$ e $\text{senal}(I_1) = (-1)^{r+k}$.

Demonstração: Sejam $x_1, \dots, x_k$ os zeros não negativos de $\pi(x)$. Para $i = 1, \dots, k$, fazemos $t_i^2 = x_i^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}$, então

$$\pi(x) = \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} - t_1^2\right) \dots \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} - t_k^2\right) = \sum_{i=0}^k \eta_i \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}\right)^i,$$

onde $\eta_k = 1$ e se $\eta_i \neq 0$, então $\text{senal}(\eta_i) = (-1)^{k-i}$. Logo, de (4.1.4)

$$I_1 = \sum_{i=0}^k \eta_i m_{i-1}^r.$$

Pelo Lema 4.1.2, se $\eta_i \neq 0$, então $\text{senal}(\eta_i m_{i-1}^r) = (-1)^{k+r-2} = (-1)^{k+r}$. Assim,

$$\text{senal}(I_1) = (-1)^{k+r}.$$

Se $\kappa_1 = -1$ isto não ocorre para $\pi(x) = x^2$, pois se $\pi(x) = x^2$,

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{2r}(x) x^2 e^{-x^2} dx = m_0^r = 0.$$

Portanto, $\pi(x) \neq x^2$. ■

Analisemos agora o caso em que n é ímpar.

$n=2r+1$: Para $r \geq 1$ e $i \in \{-2, -1, \dots, r-1\}$ definimos

$$\mu_i^r = \int_{-\infty}^{\infty} x S_{2r+1}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}\right)^{i+1} e^{-x^2} dx. \quad (4.1.7)$$

O próximo lema é sobre uma relação de recorrência para os coeficientes μ_i^r acima.

Lema 4.1.4 Para $r \geq 2$ e $1 \leq i \leq r-1$

$$\mu_i^r = -\frac{2\kappa_2}{q} \{ \alpha_i \mu_{i-1}^r - \beta_i \mu_{i-2}^r + (i-1) \gamma_i \mu_{i-3}^r \},$$

onde $\alpha_i = 2i+1 > 0$, $\beta_i = i \left(2i+1 + 2\frac{1+\kappa_1}{q}\right) > 0$ e $\gamma_i = 2i\frac{1+\kappa_1}{q} \geq 0$.



Demonstração: Para $1 \leq i \leq r-1$ temos que

$$\left\langle S_{2r+1}, x \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right)^i \right\rangle_{S_{1H}} = 0 \Rightarrow q \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x S_{2r+1}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right)^{i+1} e^{-x^2} dx + \frac{\kappa_2}{q} \int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) \left[\left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right)^i + 2ix^2 \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right)^{i-1} \right] e^{-x^2} dx \right\} = 0.$$

Pela definição (4.1.7)

$$\begin{aligned} \mu_i^r &= -\frac{\kappa_2}{q} \int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right)^i e^{-x^2} dx \\ &\quad - \frac{2\kappa_2 i}{q} \int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) x^2 \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right)^{i-1} e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Fazendo $x^2 = x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} - \frac{1+\kappa_1}{q}$ na última integral, obtemos

$$\begin{aligned} \mu_i^r &= -\frac{\kappa_2}{q} (2i+1) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right)^i e^{-x^2} dx}_{I_i} \\ &\quad + \frac{2\kappa_2 i}{q} \frac{1+\kappa_1}{q} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right)^{i-1} e^{-x^2} dx}_{I_{i-1}}. \end{aligned}$$

Integrando I_i por partes com $u = \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right)^i e^{-x^2}$ e $dv = S'_{2r+1}(x) dx$, obtemos

$$I_i = -2i\mu_{i-2}^r + 2\mu_{i-1}^r.$$

Assim,

$$\mu_i^r = -\frac{\kappa_2}{q} (2i+1) [-2i\mu_{i-2}^r + 2\mu_{i-1}^r] + \frac{2\kappa_2 i}{q} \frac{1+\kappa_1}{q} [-2(i-1)\mu_{i-3}^r + 2\mu_{i-2}^r],$$

ou seja,

$$\mu_i^r = -\frac{2\kappa_2}{q} \left\{ (2i+1)\mu_{i-1}^r - i \left(2i+1 + 2\frac{1+\kappa_1}{q} \right) \mu_{i-2}^r + (i-1)2i\frac{1+\kappa_1}{q} \mu_{i-3}^r \right\}.$$

■

Com o resultado abaixo podemos conhecer o sinal de μ_i^r .

Lema 4.1.5 Para $r \geq 1$ e $-1 \leq i \leq r-1$ temos

$$\text{sinal}(\mu_i^r) = (-1)^{r+i+1}.$$



Demonstração: Pela definição (4.1.7) temos para $i = -1$,

$$\mu_{-1}^r = \int_{-\infty}^{\infty} x S_{2r+1}(x) e^{-x^2} dx.$$

Integrando por partes com $u = S_{2r+1}(x)$ e $dv = x e^{-x^2} dx$, obtemos

$$\mu_{-1}^r = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) e^{-x^2} dx. \quad (4.1.8)$$

Avaliemos o sinal da integral acima. De (4.1.3),

$$H_{2r}(x) = \frac{S'_{2r+1}(x)}{2r+1} + c_{2r} \frac{S'_{2r-1}(x)}{2r-1}, \quad c_{2r} > 0,$$

então,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} H_{2r}(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S'_{2r+1}(x)}{2r+1} e^{-x^2} dx + c_{2r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S'_{2r-1}(x)}{2r-1} e^{-x^2} dx \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S'_{2r+1}(x)}{2r+1} e^{-x^2} dx &= -c_{2r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S'_{2r-1}(x)}{2r-1} e^{-x^2} dx \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S'_{2r+1}(x)}{2r+1} e^{-x^2} dx &= (-1)^r c_{2r} c_{2r-2} \dots c_2 \int_{-\infty}^{\infty} S'_1(x) e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Mas,

$$\int_{-\infty}^{\infty} S'_1(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx > 0 \quad \text{e} \quad c_i > 0,$$

então

$$\text{sinal} \left(\int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) e^{-x^2} dx \right) = (-1)^r \quad (4.1.9)$$

e portanto, de (4.1.8) e (4.1.9), $\text{sinal}(\mu_{-1}^r) = (-1)^r$. Fazendo $i = 0$ em (4.1.7), temos que

$$\mu_0^r = \int_{-\infty}^{\infty} x S_{2r+1}(x) \left(x^2 + \frac{1 + \kappa_1}{q} \right) e^{-x^2} dx.$$

Como $\langle S_{2r+1}, x \rangle_{\mathbb{S}_{1H}} = 0$, então

$$q \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x S_{2r+1}(x) \left(x^2 + \frac{1 + \kappa_1}{q} \right) e^{-x^2} dx + \frac{\kappa_2}{q} \int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) e^{-x^2} dx \right\} = 0.$$

Logo,

$$\mu_0^r = -\frac{\kappa_2}{q} \int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) e^{-x^2} dx$$

e por (4.1.9) temos que $\text{sinal}(\mu_0^r) = (-1)^{r+1}$. Portanto, pelo Lema 4.1.4 e por indução concluímos que $\text{sinal}(\mu_i^r) = (-1)^{r+i+1}$. ■

O seguinte lema nos ajudará na localização dos zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev associados a (4.1.1).



Lema 4.1.6 *Seja $r \geq 2$ e $\pi(x)$ um polinômio mônico par de grau $2k$, $0 \leq k \leq r$, tal que todos os zeros de $\pi(x)$ são reais. Definimos*

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x S_{2r+1}(x) \pi(x) e^{-x^2} dx,$$

então $I_2 \neq 0$ e $\text{senal}(I_2) = (-1)^{r+k}$.

A demonstração é análoga à demonstração do Lema 4.1.3.

O resultado abaixo fornece uma relação entre os zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev, S_n , associados a (4.1.1) e os zeros dos polinômios ortogonais de Hermite, H_n , mostrando assim que neste caso os zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev são reais e distintos.

Teorema 4.1.1 *Consideremos o produto interno (4.1.1). Seja $n \geq 3$, então S_n tem n zeros reais e distintos. Sejam $h_{n,1} < \dots < h_{n,r}$ os zeros positivos de H_n e $s_{n,1} < \dots < s_{n,r}$ os zeros positivos de S_n , então*

$$h_{n,1} < s_{n,1} < \dots < h_{n,r} < s_{n,r}.$$

Demonstração: Sabemos que $-h_{n,i}$, $i = 1, \dots, r$, também é um zero de H_n . Para $n = 2r$ fazemos

$$\pi(x) = \frac{H_{2r}(x)}{x^2 - h_{2r,i}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

e para $n = 2r + 1$ fazemos

$$\pi(x) = \frac{H_{2r+1}(x)}{x(x^2 - h_{2r+1,i}^2)}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Assim, em ambos os casos o polinômio $\pi(x)$ tem grau $2r - 2$. Usando o Lema 4.1.3 com $n = 2r$ e $k = r - 1$ e o Lema 4.1.6 com $n = 2r + 1$ e $k = r - 1$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_n(x) \frac{H_n(x)}{x^2 - h_{n,i}^2} e^{-x^2} dx < 0.$$

Aplicando a quadratura gaussiana sobre os zeros de H_n temos que a quadratura é exata e, como os pesos da quadratura gaussiana são positivos, obtemos

$$\frac{S_n(h_{n,i}) H'_n(h_{n,i})}{h_{n,i}} < 0.$$

Como $h_{n,i} > 0$, temos $\text{senal}(S_n(h_{n,i})) = -\text{senal}(H'_n(h_{n,i}))$ e como H'_n tem sinal oposto em dois zeros consecutivos de H_n , o mesmo ocorre para S_n . Portanto S_n tem um zero em cada



um dos intervalos $(h_{n,i}, h_{n,i+1})$ e $(-h_{n,i+1}, -h_{n,i})$, $i = 1, \dots, r-1$. Como $H'_n(h_{n,r}) > 0$, temos $S_n(h_{n,r}) < 0$ e como S_n é mônico, S_n tem um zero à direita de $h_{n,r}$ e portanto também um zero à esquerda de $-h_{n,r}$. Como $S_{2r+1}(0) = 0$, encontramos n zeros de S_n reais e distintos. ■

Com o próximo teorema podemos localizar os zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev através dos zeros dos polinômios ortogonais, $P_n^{\phi_0}$, associados à medida $d\phi_0$.

Teorema 4.1.2 *Consideremos o produto interno (4.1.1). Seja $\{P_n^{\phi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ a seqüência de polinômios ortogonais mônicos com relação a $d\phi_0$, onde $d\phi_0(x) = (x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q})e^{-x^2}dx$. Seja $n \geq 3$, $p_{n,1}^{\phi_0} < \dots < p_{n,r}^{\phi_0}$ denotam os zeros positivos de $P_n^{\phi_0}$ e $s_{n,1} < \dots < s_{n,r}$ denotam os zeros positivos de S_n , então*

$$s_{n,1} < p_{n,1}^{\phi_0} < \dots < s_{n,r} < p_{n,r}^{\phi_0}.$$

Demonstração: Para $n = 2r$ fazemos

$$\pi(x) = \frac{P_{2r}^{\phi_0}(x)}{x^2 - (p_{2r,i}^{\phi_0})^2} \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

e para $n = 2r + 1$ fazemos

$$\pi(x) = \frac{P_{2r+1}^{\phi_0}(x)}{x(x^2 - (p_{2r+1,i}^{\phi_0})^2)} \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Logo, $\pi(x)$ tem grau $2r$ e então usando o Lema 4.1.3 com $n = 2r$ e $k = r$ e o Lema 4.1.6 com $n = 2r + 1$ e $k = r$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_n(x) \frac{P_n^{\phi_0}(x)}{x^2 - (p_{n,i}^{\phi_0})^2} \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right) e^{-x^2} dx > 0.$$

Aplicando quadratura gaussiana sobre os zeros de $P_n^{\phi_0}$, obtemos

$$\frac{S_n(p_{n,i}^{\phi_0}) P_n^{\phi_0}(p_{n,i}^{\phi_0})}{p_{n,i}^{\phi_0}} > 0.$$

Como $p_{n,i}^{\phi_0} > 0$ então $\text{sign}(S_n(p_{n,i}^{\phi_0})) = \text{sign}(P_n^{\phi_0}(p_{n,i}^{\phi_0}))$. Além disso $P_n^{\phi_0}$ tem sinal oposto em dois zeros consecutivos de $P_n^{\phi_0}$, portanto o mesmo acontece com S_n . Logo, S_n tem um zero em cada um dos intervalos $(p_{n,i}^{\phi_0}, p_{n,i+1}^{\phi_0})$ e $(-p_{n,i+1}^{\phi_0}, -p_{n,i}^{\phi_0})$, $i = 1, \dots, r-1$. Como $S_{2r+1}(0) = 0$ encontramos $n - 2$ zeros de S_n .

Suponha que S_n tem dois zeros no intervalo $(p_{n,i}^{\phi_0}, p_{n,i+1}^{\phi_0})$, $i = 1, \dots, r-1$. Então, como $\text{sign}(S_n(p_{n,i}^{\phi_0})) = \text{sign}(P_n^{\phi_0}(p_{n,i}^{\phi_0}))$, S_n deve ter um número ímpar de zeros no intervalo $(p_{n,i}^{\phi_0}, p_{n,i+1}^{\phi_0})$. Suponha que tenha três zeros e então S_n teria $n + 2$ zeros, o que é um



absurdo. Logo, S_n tem apenas um zero em cada intervalo $(p_{n,i}^{\phi_0}, p_{n,i+1}^{\phi_0})$ e como S_n é mônico e $P_n^{\phi_0}(p_{n,r}^{\phi_0}) > 0$, S_n não pode ter um zero à direita de $p_{n,r}^{\phi_0}$, caso contrário S_n deveria ter um número par de zeros em $(p_{n,r}^{\phi_0}, \infty)$ e um número par de zeros em $(-\infty, -p_{n,r}^{\phi_0})$. Portanto, S_n possui um zero positivo à esquerda de $p_{n,1}^{\phi_0}$. ■

Teorema 4.1.3 *Consideremos o produto interno (4.1.1). Seja $\{P_n^{\psi_0}\}_{n=0}^\infty$ a seqüência de polinômios ortogonais mônicos com relação a $d\psi_0$, onde $d\psi_0(x) = (1 + qx^2)e^{-x^2}dx$. Seja $n \geq 3$, $p_{n,1}^{\psi_0} < \dots < p_{n,r}^{\psi_0}$ denotam os zeros positivos de $P_n^{\psi_0}$ e $s_{n,1} < \dots < s_{n,r}$ denotam os zeros positivos de S_n , então*

$$s_{n,1} < p_{n,1}^{\psi_0} < \dots < s_{n,r} < p_{n,r}^{\psi_0}.$$

A demonstração deste resultado é análoga à anterior.

O próximo resultado, encontrado em [4], será utilizado para encontrarmos a posição dos zeros dos polinômios ortogonais associados à medida $d\psi_0$ com relação aos zeros dos polinômios de Hermite.

Lema 4.1.7 *Sejam $Q_n(x)$ e $Q_{n-2}(x)$ polinômios pares (ímpares) com coeficientes de maior grau positivos e com todos os zeros reais tais que seus respectivos zeros positivos $x_{n,1} < \dots < x_{n,r}$ e $x_{n-2,1} < \dots < x_{n-2,r-1}$ se entrelaçam, isto é,*

$$x_{n,1} < x_{n-2,1} < \dots < x_{n-2,r-1} < x_{n,r}.$$

Então, para qualquer constante real c , o polinômio

$$Q(x) = Q_n(x) - cQ_{n-2}(x)$$

tem n zeros e seus zeros positivos $\xi_{n,1} < \dots < \xi_{n,r}$ se entrelaçam com os zeros positivos de $Q_n(x)$ e de $Q_{n-2}(x)$. Mais precisamente, se

(i) $c > 0$, então

$$x_{n,i} < \xi_{n,i} < x_{n-2,i}, \quad i = 1, \dots, r-1$$

$$x_{n,r} < \xi_{n,r},$$

(ii) $c < 0$, então

$$\xi_{n,1} < x_{n,1},$$

$$x_{n-2,i-1} < \xi_{n,i} < x_{n,i}, \quad i = 2, \dots, r.$$

Além disso, todo zero positivo $\xi_{n,i}$, para $i = 1, \dots, r$, é uma função crescente de c .



Teorema 4.1.4 *Seja $\{P_n^{\psi_0}\}_{n=0}^\infty$ a sequência de polinômios ortogonais mônicos com relação a $d\psi_0$, onde $d\psi_0(x) = (1+qx^2)e^{-x^2}dx$, para $q > 0$. Seja $n \geq 3$, $p_{n,1}^{\psi_0} < \dots < p_{n,r}^{\psi_0}$ denotam os zeros positivos de $P_n^{\psi_0}$ e $h_{n,1} < \dots < h_{n,r}$ denotam os zeros positivos de H_n , então*

$$h_{n,1} < p_{n,1}^{\psi_0} < \dots < h_{n,r} < p_{n,r}^{\psi_0}.$$

Demonstração: Pelos Teoremas 4.1.1 e 4.1.3 temos que

$$h_{n,i} < p_{n,i}^{\psi_0}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Mostremos então que $p_{n,i}^{\psi_0} < h_{n,i+1}$, $i = 1, \dots, r-1$. De (4.1.2) temos

$$H_n(x) = P_n^{\psi_0}(x) + d_{n-2}(q)P_{n-2}^{\psi_0}(x), \quad \text{onde } d_{n-2}(q) > 0.$$

Sejam $p_{n-2,1}^{\psi_0} < \dots < p_{n-2,r}^{\psi_0}$ os zeros positivos de $P_{n-2}^{\psi_0}$ e como

$$p_{n,1}^{\psi_0} < p_{n-2,1}^{\psi_0} < \dots < p_{n-2,r-1}^{\psi_0} < p_{n,r}^{\psi_0},$$

então do Lema 4.1.7, como $d_{n-2}(q) > 0$, obtemos $h_{n,1} < p_{n,1}^{\psi_0}$ e $p_{n,i-1}^{\psi_0} < p_{n-2,i-1}^{\psi_0} < h_{n,i} < p_{n,i}^{\psi_0}$, $i = 2, \dots, r$, ou seja, $p_{n,i-1}^{\psi_0} < h_{n,i} < p_{n,i}^{\psi_0}$, $i = 2, \dots, r$. ■

Teorema 4.1.5 *Consideremos o produto interno (4.1.1). Seja $n \geq 3$, então os zeros de S_n separam os zeros de H_{n+1} .*

Demonstração: Sejam $h_{n+1,1} < \dots < h_{n+1,r}$ os zeros positivos de H_{n+1} . Para $n = 2r$ fazemos

$$\pi(x) = \frac{xH_{2r+1}(x)}{x^2 - h_{2r+1,i}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

e para $n = 2r + 1$ fazemos

$$\pi(x) = \frac{H_{2r+2}(x)}{x^2 - h_{2r+2,i}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Usando o Lema 4.1.3 com $n = 2r$ e $k = r$ e o Lema 4.1.6 com $n = 2r + 1$ e $k = r$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} xS_n(x) \frac{H_{n+1}(x)}{x^2 - h_{n+1,i}^2} e^{-x^2} dx > 0.$$

Aplicando quadratura gaussiana sobre os zeros de H_{n+1} , obtemos

$$S_n(h_{n+1,i})H'_{n+1}(h_{n+1,i}) > 0 \implies \text{ sinal}(S_n(h_{n+1,i})) = \text{ sinal}(H'_{n+1}(h_{n+1,i})).$$

Como H'_{n+1} tem sinal oposto em dois zeros consecutivos de H_{n+1} , o mesmo ocorre com S_n . Portanto S_n tem um zero em cada um dos intervalos $(h_{n+1,i}, h_{n+1,i+1})$ e em cada um dos intervalos $(-h_{n+1,i+1}, -h_{n+1,i})$, $i = 1, \dots, r-1$.



Para n ímpar, mostramos que S_n tem pelo menos $n - 1$ zeros. Mas $S_n(0) = 0$, portanto S_n tem n zeros.

Para n par, mostramos que S_n tem pelo menos $n - 2$ zeros. O mesmo argumento utilizado no Teorema 4.1.2 para provar que S_n possui um zero à esquerda de $p_{n,1}^{\phi_0}$ pode ser utilizado para mostrar que S_n possui um zero positivo à esquerda de $h_{n+1,1}$.

Assim concluímos que os zeros de S_n , n par ou ímpar, se entrelaçam com os zeros de H_{n+1} . ■

Um resultado sobre os zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev, também importante, é que zeros de polinômios ortogonais de Sobolev de graus consecutivos se entrelaçam.

Teorema 4.1.6 *Consideremos o produto interno (4.1.1). Seja $n \geq 3$, então os zeros de S_{n-1} separam os zeros de S_n .*

Demonstração: Sejam $s_{n,1} < \dots < s_{n,r}$ os zeros positivos de S_n e $h_{n,1} < \dots < h_{n,r}$ os zeros positivos de H_n . Para $n = 2r$ ou $n = 2r + 1$ temos para $1 \leq i \leq r$

$$h_{n+2,i} < h_{n,i}. \quad (4.1.10)$$

Pelo Teorema 4.1.5, temos que

$$s_{2r-1,i} < h_{2r,i+1} \quad e \quad s_{2r,i} < h_{2r+1,i},$$

para $r \geq 2$ e $i = 1, \dots, r-1$. Usando os Teoremas 4.1.1, 4.1.5 e (4.1.10) obtemos para $n = 2r$, $r \geq 2$

$$s_{2r,i} < h_{2r+1,i} < h_{2r-1,i} < s_{2r-1,i} < h_{2r,i+1} < s_{2r,i+1}, \quad i = 1, \dots, r-1.$$

Portanto, $s_{2r,i} < s_{2r-1,i} < s_{2r,i+1}$, $i = 1, \dots, r-1$. E para $n = 2r + 1$ obtemos para $r \geq 2$

$$s_{2r+1,i} < h_{2r+2,i+1} < h_{2r,i+1} < s_{2r,i+1} < h_{2r+1,i+1} < s_{2r+1,i+1}, \quad i = 1, \dots, r-1.$$

Portanto, $s_{2r+1,i} < s_{2r,i+1} < s_{2r+1,i+1}$, $i = 1, \dots, r-1$. E

$$0 < s_{2r,1} < h_{2r+1,1} < s_{2r+1,1}.$$

Para mostrar que os zeros de S_2 separam os zeros de S_3 usamos

$$S_2(x) = P_2^{\phi_0}(x) = x^2 - (p_{2,1}^{\phi_0})^2,$$

onde $p_{2,1}^{\phi_0}$ é o zero positivo do polinômio $P_2^{\phi_0}$ associado a $d\phi_0(x) = (x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q})e^{-x^2}dx$. Como $\int_{-\infty}^{\infty} P_2^{\phi_0}(x)d\phi_0(x) = 0$, encontramos

$$s_{2,1} = p_{2,1}^{\phi_0} = \sqrt{\frac{\frac{1}{q^2} + \frac{3}{2}}{\frac{2}{q^2} + 1}}.$$



Para o zero positivo de H_3 temos $h_{3,1} = \sqrt{3/2} \geq s_{2,1}$ e pelo Teorema 4.1.1, $h_{3,1} < s_{3,1}$. Portanto,

$$s_{2,1} < s_{3,1}.$$

Os teoremas 4.1.1, 4.1.2, 4.1.5 e 4.1.6 são análogos a resultados que foram mostrados em [5].

4.1.2 Produto interno de Sobolev $\mathbb{S}_{1G}$ associado à medida $(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx$

Consideremos do Corolário 3.2.2 que

$$d\psi_1(x) = (1-x^2)^{\alpha+1/2}dx, \quad d\phi_1(x) = (1-x^2)^{\alpha-1/2}dx \quad \text{e} \quad d\psi_0(x) = (1+qx^2)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx,$$

para $q \geq -1$, $P_n^{\phi_1}(x) = G_n^{(\alpha)}(x)$ e $P_n^{\psi_1}(x) = G_n^{(\alpha+1)}(x)$. O produto interno de Sobolev $\mathbb{S}_{1G}$ é dado por

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_{1G}} = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1+\kappa_1+qx^2)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx + \kappa_2 \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)(1-x^2)^{\alpha+1/2}dx,$$

onde $q \geq -1$.

Aqui tomamos $q > 0$ e escrevemos o produto interno como

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_{1G}} = q \left\{ \int_{-1}^1 f(x)g(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right) (1-x^2)^{\alpha-1/2}dx + \frac{\kappa_2}{q} \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)(1-x^2)^{\alpha+1/2}dx \right\} \quad (4.1.11)$$

Neste caso, definindo $d\phi_0(x) = \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right) (1-x^2)^{\alpha-1/2}dx$, temos que $\{d\phi_0, d\psi_1\} = \left\{ \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right) (1-x^2)^{\alpha-1/2}dx, (1-x^2)^{\alpha+1/2}dx \right\}$ é um par de medidas simetricamente coerente de Gegenbauer do tipo I.

Por isso utilizamos resultados encontrados em [7], onde foi feito um estudo sobre os zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev associados a pares simetricamente coerentes envolvendo a medida de Gegenbauer, para estudar o comportamento dos zeros dos polinômios S_n associados a (4.1.11).

Lembramos que os polinômios ortogonais associados satisfazem $S_0(x) = 1$, $S_1(x) = x$ e para $n \geq 1$,

$$S_{n+1}(x) + a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2)S_{n-1}(x) = G_{n+1}^{(\alpha)}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1}(q)P_{n-1}^{\psi_0}(x), \quad (4.1.12)$$

onde $a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2) > 0$ e $d_{n-1}(q) > 0$ são dados, respectivamente, por (3.2.13) e (3.2.14).

Derivando a relação (4.1.12) e dividindo por $n+1$, obtemos

$$G_n^{(\alpha+1)}(x) = \frac{S'_{n+1}(x)}{n+1} + c_n \frac{S'_{n-1}(x)}{n-1}, \quad (4.1.13)$$



onde $c_n = c_n(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2) > 0$.

Como anteriormente, precisamos de alguns resultados preliminares para determinarmos a posição dos zeros de S_n com relação à posição dos zeros de polinômios associados. Novamente trabalharemos com os casos em que n é par ou ímpar.

n=2r: Para $r \geq 1$ e $i \in \{-2, -1, \dots, r-1\}$ definimos

$$\begin{aligned} m_i^r &= \int_{-1}^1 S_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right)^{i+1} (1-x^2)^{\alpha-1/2} dx, \quad i = -1, \dots, r-1 \\ m_{-2}^r &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

O próximo lema fornece uma relação de recorrência para os coeficientes m_i^r .

Lema 4.1.8 Para $r \geq 2$ e $1 \leq i \leq r-1$ temos

$$m_i^r = -\frac{2\kappa_2 i}{q} \{ e_i m_{i-1}^r - f_i m_{i-2}^r + (i-1) g_i m_{i-3}^r \},$$

onde $e_i = 2i+2\lambda > 0$, $f_i = 2i-1 + \frac{1+\kappa_1}{q}(4i+2\lambda-2) > 0$ e $g_i = 2\frac{1+\kappa_1}{q} \left(1 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right) \geq 0$.

Demonstração: Para $1 \leq i \leq r-1$, $\left\langle S_{2r}, \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right)^i \right\rangle_{S_1G} = 0$. Logo,

$$q \left\{ \int_{-1}^1 S_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right)^{i+1} (1-x^2)^{\alpha-1/2} dx + \frac{2\kappa_2 i}{q} \int_{-1}^1 x S'_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right)^{i-1} (1-x^2)^{\alpha+1/2} dx \right\} = 0.$$

De (4.1.14) temos que

$$m_i^r = -\frac{2\kappa_2 i}{q} \underbrace{\int_{-1}^1 x S'_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right)^{i-1} (1-x^2)^{\alpha+1/2} dx}_I.$$

Integrando I por partes, com $u = x \left(x^2 + \frac{1 + \kappa_1}{q} \right)^{i-1} (1-x^2)^{\alpha+1/2}$ e $dv = S'_{2r}(x)dx$, obtemos

$$\begin{aligned} I &= - \int_{-1}^1 S_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1 + \kappa_1}{q} \right)^{i-1} (1-x^2)^{\alpha+1/2} dx \\ &\quad - 2(i-1) \int_{-1}^1 S_{2r}(x) x^2 \left(x^2 + \frac{1 + \kappa_1}{q} \right)^{i-2} (1-x^2)^{\alpha+1/2} dx \\ &\quad + (2\lambda+1) \int_{-1}^1 S_{2r}(x) x^2 \left(x^2 + \frac{1 + \kappa_1}{q} \right)^{i-1} (1-x^2)^{\alpha-1/2} dx \\ &= - \int_{-1}^1 S_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1 + \kappa_1}{q} \right)^{i-1} (1-x^2)(1-x^2)^{\alpha-1/2} dx \\ &\quad - 2(i-1) \int_{-1}^1 S_{2r}(x) x^2 \left(x^2 + \frac{1 + \kappa_1}{q} \right)^{i-2} (1-x^2)(1-x^2)^{\alpha-1/2} dx \\ &\quad + (2\lambda+1) \int_{-1}^1 S_{2r}(x) x^2 \left(x^2 + \frac{1 + \kappa_1}{q} \right)^{i-1} (1-x^2)^{\alpha-1/2} dx \end{aligned}$$

Fazendo $x^2 = x^2 + \frac{1 + \kappa_1}{q} - \frac{1 + \kappa_1}{q}$ e usando (4.1.14), obtemos

$$I = (2i+2\lambda)m_{i-1}^r - \left[2i-1 + \frac{1 + \kappa_1}{q}(4i+2\lambda-2) \right] m_{i-2}^r + 2(i-1)\frac{1 + \kappa_1}{q} \left(1 + \frac{1 + \kappa_1}{q} \right) m_{i-3}^r.$$

Multiplicando I por $\frac{-2\kappa_2 i}{q}$ segue o resultado. $\blacksquare$

O lema seguinte avalia o sinal de m_i^r .

Lema 4.1.9 Para $r \geq 2$ e $-1 \leq i \leq r-1$ temos

(i) $m_0^r = 0$

(ii) $\text{ sinal}(m_i^r) = (-1)^{r+i+1}$, $i \neq 0$.

A demonstração é análoga à demonstração do Lema 4.1.2 substituindo a medida $e^{-x^2} dx$ por $(1-x^2)^{\alpha-1/2} dx$.

Conhecer o sinal da integral I_1 definida abaixo nos ajudará na localização dos zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev associados a (4.1.11).

Lema 4.1.10 Seja $r \geq 2$ e $\pi(x)$ um polinômio mônico par de grau $2k$, tal que todos os zeros de $\pi(x)$ são reais. Definimos

$$I_1 = \int_{-1}^1 S_{2r}(x) \pi(x) (1-x^2)^{\alpha-1/2} dx.$$

Se $1 \leq k \leq r$ e $\pi(x) \neq x^2$, então $\text{ sinal}(I_1) = (-1)^{r+k}$.

Demonstração: Sejam $x_1, \dots, x_k$ os zeros não negativos de $\pi(x)$. Para $i = 1, \dots, k$, fazemos $t_i^2 = x_i^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}$, então

$$\pi(x) = \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} - t_1^2\right) \dots \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q} - t_k^2\right) = \sum_{i=0}^k \eta_i \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}\right)^i,$$

onde $\eta_k = 1$ e se $\eta_i \neq 0$, então $\text{signal}(\eta_i) = (-1)^{k-i}$. Logo, de (4.1.14)

$$I_1 = \sum_{i=0}^k \eta_i m_{i-1}^r$$

e, pelo Lema 4.1.9, se $\eta_i \neq 0$, então $\text{signal}(\eta_i m_{i-1}^r) = (-1)^{k+r}$. Assim, $\text{signal}(I_1) = (-1)^{k+r}$. Se $\kappa_1 = -1$ e $\pi(x) = x^2$ então,

$$I_1 = \int_{-1}^1 S_{2r}(x) x^2 (1-x^2)^{\alpha-1/2} dx = m_0^r = 0.$$

■

n=2r+1: Para $r \geq 1$ e $i \in \{-2, -1, \dots, r-1\}$ definimos

$$\mu_i^r = \int_{-1}^1 x S_{2r+1}(x) \left(x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q}\right)^{i+1} (1-x^2)^{\alpha-1/2} dx. \quad (4.1.15)$$

Também obtemos uma relação de recorrência para μ_i^r , com demonstração análoga à do Lema 4.1.4.

Lema 4.1.11 Para $r \geq 2$ e $1 \leq i \leq r-1$ temos

$$\mu_i^r = -\frac{2\kappa_2}{q} \{ \alpha_i \mu_{i-1}^r - \beta_i \mu_{i-2}^r + (i-1) \gamma_i \mu_{i-3}^r \},$$

onde $\alpha_i = (2i+1)(i+\lambda+1/2) > 0$, $\beta_i = i \left[2i+1 + \frac{1+\kappa_1}{q} (4i+2\lambda) \right] > 0$ e $\gamma_i = 2i \frac{1+\kappa_1}{q} \left(1 + \frac{1+\kappa_1}{q} \right) \geq 0$.

Como no caso do produto interno de Sobolev associado à medida de Hermite, temos o resultado abaixo, que avalia o sinal de μ_i^r .

Lema 4.1.12 Para $r \geq 1$ e $-1 \leq i \leq r-1$ temos

$$\text{signal}(\mu_i^r) = (-1)^{r+i+1}.$$

O seguinte lema avalia o sinal da integral I_2 que também será útil na localização dos zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev associados a (4.1.11).



Lema 4.1.13 *Seja $r \geq 1$ e $\pi(x)$ um polinômio mônico par de grau $2k$, tal que todos os zeros de $\pi(x)$ são reais. Definimos*

$$I_2 = \int_{-1}^1 x S_{2r+1}(x) \pi(x) (1-x^2)^{\alpha-1/2} dx.$$

Se $0 \leq k \leq r$, então $\text{ sinal}(I_2) = (-1)^{r+k}$.

Provamos o lema acima com o mesmo argumento utilizado na prova do Lema 4.1.10.

O próximos resultados terão suas demonstrações omitidas por serem análogas às demonstrações dos teoremas vistos anteriormente, no caso do produto interno de Sobolev S_{1H} .

O teorema a seguir fornece uma relação entre os zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev, S_n , e os zeros dos polinômios ortogonais de Gegenbauer, $G_n^{(\alpha)}$, associados a (4.1.11).

Teorema 4.1.7 *Consideremos o produto interno (4.1.11). Seja $n \geq 3$, então S_n tem n zeros reais e distintos. Sejam $g_{n,1} < \dots < g_{n,r}$ os zeros positivos de $G_n^{(\alpha)}$ e $s_{n,1} < \dots < s_{n,r}$ os zeros positivos de S_n , então*

$$g_{n,1} < s_{n,1} < \dots < g_{n,r} < s_{n,r}.$$

Com o próximo teorema podemos localizar os zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev através dos zeros dos polinômios ortogonais associados à medida $d\phi_0$.

Teorema 4.1.8 *Consideremos o produto interno (4.1.11). Seja $\{P_n^{\phi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ a sequência de polinômios ortogonais mônicos com relação a $d\phi_0$, onde $d\phi_0(x) = (x^2 + \frac{1+\kappa_1}{q})(1-x^2)^{\alpha-1/2} dx$. Seja $n \geq 3$, $p_{n,1}^{\phi_0} < \dots < p_{n,r}^{\phi_0}$ denotam os zeros positivos de $P_n^{\phi_0}$ e $s_{n,1} < \dots < s_{n,r}$ denotam os zeros positivos de S_n , então*

$$s_{n,1} < p_{n,1}^{\phi_0} < \dots < s_{n,r} < p_{n,r}^{\phi_0}.$$

Também é possível encontrar a posição dos zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev com relação aos zeros dos polinômios ortogonais associados à medida $d\psi_0$.

Teorema 4.1.9 *Consideremos o produto interno (4.1.11). Seja $\{P_n^{\psi_0}\}_{n=0}^{\infty}$ a sequência de polinômios ortogonais mônicos com relação a $d\psi_0$, onde $d\psi_0(x) = (1+qx^2)(1-x^2)^{\alpha-1/2} dx$. Seja $n \geq 3$, $p_{n,1}^{\psi_0} < \dots < p_{n,r}^{\psi_0}$ denotam os zeros positivos de $P_n^{\psi_0}$ e $s_{n,1} < \dots < s_{n,r}$ denotam os zeros positivos de S_n , então*

$$s_{n,1} < p_{n,1}^{\psi_0} < \dots < s_{n,r} < p_{n,r}^{\psi_0}.$$



Teorema 4.1.10 *Seja $\{P_n^{\psi_0}\}_{n=0}^\infty$ a sequência de polinômios ortogonais mônicos com relação a $d\psi_0$, onde $d\psi_0(x) = (1 + qx^2)(1 - x^2)^{\alpha-1/2}dx$, para $q > 0$. Seja $n \geq 3$, $p_{n,1}^{\psi_0} < \dots < p_{n,r}^{\psi_0}$ denotam os zeros positivos de $P_n^{\psi_0}$ e $g_{n,1} < \dots < g_{n,r}$ denotam os zeros positivos de $G_n^{(\alpha)}$, então*

$$g_{n,1} < p_{n,1}^{\psi_0} < \dots < g_{n,r} < p_{n,r}^{\psi_0}.$$

Teorema 4.1.11 *Consideremos o produto interno (4.1.11). Seja $n \geq 3$, então os zeros de S_n separam os zeros de $G_{n+1}^{(\alpha)}$.*

Demonstração: Sejam $g_{n+1,1} < \dots < g_{n+1,r}$ os zeros positivos de $G_{n+1}^{(\alpha)}$. Para $n = 2r$ fazemos

$$\pi(x) = \frac{xG_{2r+1}^{(\alpha)}(x)}{x^2 - g_{2r+1,i}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

e para $n = 2r + 1$ fazemos

$$\pi(x) = \frac{G_{2r+2}^{(\alpha)}(x)}{x^2 - g_{2r+2,i}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Usando o Lema 4.1.10 com $n = 2r$ e $k = r$ e o Lema 4.1.13 com $n = 2r + 1$ e $k = r$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x S_n(x) \frac{G_{n+1}^{(\alpha)}(x)}{x^2 - g_{n+1,i}^2} (1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx > 0.$$

Aplicando quadratura gaussiana sobre os zeros de $G_{n+1}^{(\alpha)}$, obtemos

$$S_n(g_{n+1,i}) G_{n+1}'^{(\alpha)}(g_{n+1,i}) > 0 \implies \text{ sinal}(S_n(g_{n+1,i})) = \text{ sinal}(G_{n+1}'^{(\alpha)}(g_{n+1,i})).$$

Como $G_{n+1}'^{(\alpha)}$ tem sinal oposto em dois zeros consecutivos de $G_{n+1}^{(\alpha)}$, o mesmo ocorre com S_n . Portanto S_n tem um zero em cada um dos intervalos $(g_{n+1,i}, g_{n+1,i+1})$ e $(-g_{n+1,i+1}, -g_{n+1,i})$, $i = 1, \dots, r - 1$.

Para n ímpar, mostramos que S_n tem pelo menos $n - 1$ zeros. Mas $S_n(0) = 0$, portanto S_n tem n zeros.

Para n par, mostramos que S_n tem pelo menos $n - 2$ zeros. O mesmo argumento utilizado no Teorema 4.1.2 para provar que S_n possui um zero à esquerda de $p_{n,1}^{\psi_0}$ pode ser utilizado para mostrar que S_n possui um zero positivo à esquerda de $g_{n+1,1}$. Portanto, os zeros de S_n se entrelaçam com os zeros de $G_{n+1}^{(\alpha)}$. ■

Teorema 4.1.12 *Consideremos o produto interno (4.1.11). Seja $n \geq 3$, então os zeros de S_{n-1} separam os zeros de S_n .*

A demonstração é análoga à demonstração do Teorema 4.1.6.

Os teoremas 4.1.7 e 4.1.8 também são encontrados em [7].



4.2 Produto interno de Sobolev S_2

Repetimos a seguir algumas definições da seção 3.3 para facilitar a leitura desta seção.

Sejam $d\phi_0$ e $d\psi_0$ medidas clássicas simétricas e tais que os polinômios ortogonais mônicos associados $P_n^{\phi_0}$ e $P_n^{\psi_0}$ satisfazem $P_n^{\psi_0}(x) = nP_{n-1}^{\phi_0}(x)$, $n \geq 1$. Seja a medida $d\psi_1$ dada por

$$d\psi_1(x) = \frac{1}{1+qx^2} d\phi_0(x),$$

Além disso, o produto interno S_2 é dado por

$$\langle f, g \rangle_{S_2} = \langle f, g \rangle_{\psi_0} + \langle f', g' \rangle_{\kappa_1 \phi_0 + \kappa_2 \psi_1}.$$

4.2.1 Produto interno de Sobolev S_{2H} associado à medida $e^{-x^2} dx$

Consideremos, como no Corolário 3.3.1

$$d\phi_0(x) = d\psi_0(x) = e^{-x^2} dx \quad \text{e} \quad d\psi_1(x) = (1+qx^2)^{-1} e^{-x^2} dx$$

para $q \geq 0$, e $P_n^{\phi_0}(x) = P_n^{\psi_0}(x) = H_n(x)$. O produto interno S_{2H} é dado por

$$\langle f, g \rangle_{S_{2H}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x) \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_1 qx^2}{1+qx^2} e^{-x^2} dx, \quad (4.2.1)$$

onde $q \geq 0$. Lembramos que os polinômios ortogonais associados satisfazem $S_0(x) = 1$, $S_1(x) = x$, $S_2(x) = H_2(x)$ e para $n \geq 2$,

$$S_{n+1}(x) + a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2) S_{n-1}(x) = H_{n+1}(x) + \tilde{d}_{n-1}(q) H_{n-1}(x), \quad (4.2.2)$$

onde $a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2) > 0$ e $\tilde{d}_{n-1}(q) > 0$, para $q > 0$, são dados por (3.3.6) e (3.3.7), respectivamente.

Além disso,

$$P_n^{\psi_1}(x) = H_n(x) + d_{n-2}(q) H_{n-2}(x) = \frac{H'_{n+1}(x)}{n+1} + d_{n-2}(q) \frac{H'_{n-1}(x)}{n-1}.$$

e de (4.2.2), obtemos

$$P_n^{\psi_1}(x) = \frac{S'_{n+1}(x)}{n+1} + c_n \frac{S'_{n-1}(x)}{n-1}, \quad (4.2.3)$$

onde $c_n = c_n(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2) > 0$.

Considerando $q > 0$ e $\kappa_1 = 0$, podemos escrever o produto interno (4.2.1) como

$$\langle f, g \rangle_{S_{2H}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx + \frac{\kappa_2}{q} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx. \quad (4.2.4)$$



Denotando $d\phi_1(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx$, temos que $\{d\psi_0, d\phi_1\} = \left\{ e^{-x^2} dx, \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx \right\}$ é um par de medidas simetricamente coerente de Hermite do tipo II. Assim, obtemos resultados análogos aos encontrados em [5].

Antes de determinarmos a posição dos zeros dos polinômios S_n para $q > 0$ e $\kappa_1 = 0$, precisamos de alguns resultados preliminares. Como no caso do produto interno de Sobolev S_1 , distinguimos em dois casos: n par ou ímpar.

$n=2r$: Para $r \geq 1$ e $i \in \{-1, 0, \dots, r-1\}$ definimos agora

$$m_i^r = \int_{-\infty}^{\infty} S_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1}{q}\right)^i e^{-x^2} dx. \quad (4.2.5)$$

Lema 4.2.1 Para $r \geq 3$ e $2 \leq i \leq r-1$ temos

$$m_i^r = -\frac{2\kappa_2 i}{q} \left\{ 2m_{i-1}^r - b_i m_{i-2}^r + (i-2) \frac{2}{q} m_{i-3}^r \right\},$$

onde $b_i = 2i - 3 + \frac{2}{q} > 0$.

A demonstração é análoga à demonstração do Lema 4.1.1 com $\kappa_1 = 0$.

Lema 4.2.2 Para $r \geq 2$ e $0 \leq i \leq r-1$ temos

(i) $m_0^r = 0$

(ii) $\text{sin}(\text{al}(m_i^r)) = (-1)^{r+i+1}$, $i \neq 0$.

Demonstração: (i) Como $\langle S_{2r}, 1 \rangle_{S_{2H}} = 0$, então de (4.2.5) segue que $m_0^r = 0$.

(ii) Usando o Lema 4.2.1 encontramos para $i = 2$

$$m_2^r = -\frac{8\kappa_2}{q} m_1^r \implies \text{sin}(\text{al}(m_2^r)) = -\text{sin}(\text{al}(m_1^r)).$$

Como $\langle S_{2r}, x^2 + \frac{1}{q} \rangle_{S_{2H}} = 0$, usando (4.2.5),

$$m_1^r = -\frac{2\kappa_2}{q} \int_{-\infty}^{\infty} x S'_{2r}(x) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx. \quad (4.2.6)$$

Portanto, para conhecermos o sinal de m_1^r basta conhecermos o sinal da integral acima. De (4.2.3)

$$P_{2r-1}^{\psi_1}(x) = \frac{S'_{2r}(x)}{2r} + c_{2r-1} \frac{S'_{2r-2}(x)}{2r-2}, \quad c_{2r-1} > 0.$$



Logo,

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} x P_{2r-1}^{\psi_1}(x) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{S'_{2r}(x)}{2r} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx + c_{2r-1} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{S'_{2r-2}(x)}{2r-2} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{S'_{2r}(x)}{2r} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx = (-1)^{r-1} c_{2r-1} c_{2r-3} \dots c_3 \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{S'_2(x)}{2} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx.$$

Mas,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{S'_2(x)}{2} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx > 0 \quad e \quad c_i > 0,$$

então

$$\text{senal} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{S'_{2r}(x)}{2r} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx \right) = (-1)^{r-1}. \quad (4.2.7)$$

De (4.2.6) e (4.2.7), $\text{senal}(m_1^r) = (-1)^r$. Como $\text{senal}(m_2^r) = -\text{senal}(m_1^r)$, então $\text{senal}(m_2^r) = (-1)^{r+1}$ e portanto, pelo Lema 4.2.1 e por indução matemática concluímos que $\text{senal}(m_i^r) = (-1)^{r+i+1}$. ■

Com o resultado a seguir poderemos localizar os zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev associados a (4.2.4). A demonstração será omitida por ser análoga à demonstração do Lema 4.1.3 com $\kappa_1 = 0$.

Lema 4.2.3 *Seja $r \geq 2$ e $\pi(x)$ um polinômio mônico par de grau $2k$, $1 \leq k \leq r-1$, tal que todos os zeros de $\pi(x)$ são reais. Definimos*

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{2r}(x) \pi(x) e^{-x^2} dx,$$

então $I_1 \neq 0$ e $\text{senal}(I_1) = (-1)^{r+k+1}$.

n=2r+1: Para $r \geq 1$ e $i \in \{-1, 0, \dots, r-1\}$ definimos

$$\mu_i^r = \int_{-\infty}^{\infty} x S_{2r+1}(x) \left(x^2 + \frac{1}{q} \right)^i e^{-x^2} dx. \quad (4.2.8)$$

Lema 4.2.4 *Para $r \geq 3$ e $2 \leq i \leq r-1$ temos*

$$\mu_i^r = -\frac{2\kappa_2}{q} \{ \alpha_i \mu_{i-1}^r - \beta_i \mu_{i-2}^r + (i-2) \gamma_i \mu_{i-3}^r \},$$

onde $\alpha_i = 2i+1 > 0$, $\beta_i = (2i+1)(i-1) + \frac{2}{q} > 0$ e $\gamma_i = \frac{2i}{q} > 0$.



A demonstração é análoga à demonstração do Lema 4.1.4 com $\kappa_1 = 0$.

Lema 4.2.5 Para $r \geq 1$ e $0 \leq i \leq r-1$ temos

$$\text{senal}(\mu_i^r) = (-1)^{r+i+1}.$$

Demonstração: Temos que $\left\langle S_{2r+1}, x \left(x^2 + \frac{1}{q} \right) \right\rangle_{\mathbb{S}_{2H}} = 0$. Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{2r+1}(x) x \left(x^2 + \frac{1}{q} \right) e^{-x^2} dx = -\frac{\kappa_2}{q} \int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) \left(3x^2 + \frac{1}{q} \right) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx.$$

Usando (4.2.8), somando e subtraindo $\frac{2}{q}$ no termo $3x^2 + \frac{1}{q}$, obtemos

$$\mu_1^r = -\frac{3\kappa_2}{q} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) e^{-x^2} dx}_{A_1} + \frac{2\kappa_2}{q^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx}_{A_2}.$$

Integrando A_1 por partes com $u = e^{-x^2}$ e $dv = S'_{2r+1}(x)dx$, concluímos que $A_1 = 2\mu_0^r$. E de $\langle S_{2r+1}, x \rangle_{\mathbb{S}_{2H}} = 0$, obtemos

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} x S_{2r+1}(x) e^{-x^2} dx + \frac{\kappa_2}{q} \int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx.$$

Logo, de (4.2.8)

$$\mu_0^r = -\frac{\kappa_2}{q} \int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx, \quad (4.2.9)$$

ou seja, $A_2 = -\frac{q}{\kappa_2} \mu_0^r$. Portanto,

$$\mu_1^r = -\left(\frac{6\kappa_2}{q} + \frac{2}{q} \right) \mu_0^r \implies \text{senal}(\mu_1^r) = -\text{senal}(\mu_0^r).$$

Usando a relação (4.2.3), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P_{2r}^{\psi_1}(x) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx = 0 &\implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S'_{2r+1}(x)}{2r+1} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx = -c_{2r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S'_{2r-1}(x)}{2r-1} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx \\ &\implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S'_{2r+1}(x)}{2r+1} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx = (-1)^r c_{2r} c_{2r-2} \dots c_2 \int_{-\infty}^{\infty} S'_1(x) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx. \end{aligned}$$



Mas,

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_1'(x) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx > 0 \quad \text{e} \quad c_i > 0,$$

então

$$\text{sinal}(\mu_0^r) = (-1)^{r+1} \quad \text{e} \quad \text{sinal}(\mu_1^r) = (-1)^{r+2}.$$

Portanto pelo Lema 4.2.4 e por indução, obtemos $\text{sinal}(\mu_i^r) = (-1)^{r+i+1}$. ■

Lema 4.2.6 *Seja $r \geq 2$ e $\pi(x)$ um polinômio mônico par de grau $2k$, $0 \leq k \leq r-1$, tal que todos os zeros de $\pi(x)$ são reais. Definimos*

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x S_{2r+1}(x) \pi(x) e^{-x^2} dx,$$

então $I_2 \neq 0$ e $\text{sinal}(I_2) = (-1)^{r+k+1}$.

Para este caso também existe uma relação entre os zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev associados a (4.2.4) e os zeros dos polinômios de Hermite.

Teorema 4.2.1 *Consideremos o produto interno (4.2.4). Seja $n \geq 3$, então S_n tem no mínimo $(n-2)$ zeros reais e distintos. $h_{n,1} < \dots < h_{n,r}$ denotam os zeros positivos de H_n e $s_{n,2} < \dots < s_{n,r}$ denotam os $r-1$ maiores zeros positivos de S_n , então*

$$h_{n,1} < s_{n,2} < \dots < s_{n,r} < h_{n,r}.$$

Se S_n tem n zeros reais e distintos, e $s_{n,1}$ denota o menor zero positivo, então

$$s_{n,1} < h_{n,1}.$$

Demonstração: Sabemos que $-h_{n,i}$ também é um zero de H_n . Para $n = 2r$ fazemos

$$\pi(x) = \frac{H_{2r}(x)}{x^2 - h_{2r,i}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

e para $n = 2r + 1$ fazemos

$$\pi(x) = \frac{H_{2r+1}(x)}{x(x^2 - h_{2r+1,i}^2)}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Em ambos os casos o polinômio $\pi(x)$ tem grau $2r-2$. Usando o Lema 4.2.3 com $n = 2r$ e $k = r-1$ e o Lema 4.2.6 com $n = 2r+1$ e $k = r-1$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_n(x) \frac{H_n(x)}{x^2 - h_{n,i}^2} e^{-x^2} dx > 0.$$

Aplicando a quadratura gaussiana sobre os zeros de H_n temos que a quadratura é exata e como os pesos da quadratura gaussiana são positivos obtemos

$$\frac{S_n(h_{n,i})H'_n(h_{n,i})}{h_{n,i}} > 0. \quad (4.2.10)$$

Como $h_{n,i} > 0$, temos $\text{senal}(S_n(h_{n,i})) = \text{senal}(H'_n(h_{n,i}))$. E como H'_n tem sinal oposto em dois zeros consecutivos de H_n , o mesmo ocorre para S_n . Portanto S_n tem pelo menos um zero em cada um dos intervalos $(h_{n,i}, h_{n,i+1})$ e $(-h_{n,i+1}, -h_{n,i})$, $i = 1, \dots, r-1$. Como $S_{2r+1}(0) = 0$, encontramos $n-2$ zeros de S_n reais e distintos.

Com o mesmo argumento usado no Teorema 4.1.2 para mostrar que S_n possui um zero à esquerda de $p_{n,1}^{\phi_0}$, mostramos que se S_n tem n zeros reais e distintos, então $s_{n,1} < h_{n,1}$, onde $s_{n,1}$ é o menor zero positivo de S_n . ■

Teorema 4.2.2 Consideremos o produto interno (4.2.4). Seja $n \geq 4$, $h_{n-2,1} < \dots < h_{n-2,r}$ denotam os zeros positivos de H_{n-2} e $s_{n,2} < \dots < s_{n,r}$ denotam os maiores zeros positivos de S_n , então

$$h_{n-2,1} < s_{n,2} < \dots < h_{n-2,r-1} < s_{n,r}.$$

Se S_n tem n zeros reais distintos, $s_{n,1}$ denota o menor zero positivo e

$$s_{n,1} < h_{n-2,1}.$$

Demonstração: Para $n = 2r$ fazemos

$$\pi(x) = \frac{H_{2r-2}(x)}{x^2 - h_{2r-2,i}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1,$$

e para $n = 2r+1$ fazemos

$$\pi(x) = \frac{H_{2r-1}(x)}{x(x^2 - h_{2r-1,i}^2)}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1.$$

Logo, $\pi(x)$ tem grau $2r-4$. Usando o Lema 4.2.3 com $n = 2r$ e $k = r-2$ e o Lema 4.2.6 com $n = 2r+1$ e $k = r-2$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_n(x) \frac{H_{n-2}(x)}{x^2 - h_{n-2,i}^2} e^{-x^2} dx \leq 0.$$

Temos que esta integral é igual a zero somente para $n = 4$, pois

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_4(x) e^{-x^2} dx = m_0^2 = 0.$$



Aplicaremos agora quadratura gaussiana sobre os $n - 2$ zeros de H_{n-2} . Como o grau do integrando é $2n - 4$ a quadratura não é exata e neste caso o erro é $\rho_{n-2}^{\psi_0} > 0$. Portanto,

$$\frac{S_n(h_{n-2,i})H'_{n-2}(h_{n-2,i})}{h_{n-2,i}} < 0.$$

Como $h_{n-2,i} > 0$ então $\text{senal}(S_n(h_{n-2,i})) = -\text{senal}(H'_{n-2}(h_{n-2,i}))$. Além disso H'_{n-2} tem sinal oposto em dois zeros consecutivos de H_{n-2} , portanto o mesmo acontece com S_n . Logo, S_n tem um zero em cada um dos intervalos $(h_{n-2,i}, h_{n-2,i+1})$ e $(-h_{n-2,i+1}, -h_{n-2,i})$, $i = 1, \dots, r - 2$. Como S_n é mônico e $H'_{n-2}(h_{n-2,r}) > 0$, então $S_n(h_{n-2,r}) < 0$ e portanto S_n tem um zero à direita de $h_{n-2,r}$ e à esquerda de $-h_{n-2,r}$. Como $S_{2r+1}(0) = 0$ encontramos $n - 2$ zeros de S_n .

Como na demonstração do Teorema 4.1.2 provamos que S_n tem apenas um zero em cada intervalo $(h_{n-2,i}, h_{n-2,i+1})$ e $(-h_{n-2,i+1}, -h_{n-2,i})$, $i = 1, \dots, r - 2$ e também se S_n tem n zeros reais e distintos e $s_{n,1}$ é o menor zero positivo de S_n , então $s_{n,1} < h_{n-2,1}$. ■

Também podemos determinar a posição dos zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev, S_n , com relação a posição dos zeros dos polinômios ortogonais $P_{n-1}^{\phi_1}$ com relação à $d\phi_1(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx$. Para isso precisamos de alguns resultados preliminares envolvendo os zeros e os extremos (pontos onde a derivada se anula) dos polinômios relacionados.

Lema 4.2.7 *Seja $r \geq 1$, então S_{2r+1} tem $2r$ extremos. Sejam $\sigma_{2r+1,1} < \dots < \sigma_{2r+1,r}$ os extremos positivos de S_{2r+1} e $q_{2r,1} < \dots < q_{2r,r}$ os zeros positivos de $P_{2r}^{\phi_1}$, então*

$$q_{2r,1} < \sigma_{2r+1,1} < \dots < q_{2r,r} < \sigma_{2r+1,r}.$$

Demonstração: Para $r \geq 1$ e $0 \leq i \leq r$ considere a integral

$$I_i = \int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) \left(x^2 + \frac{1}{q}\right)^{i-1} e^{-x^2} dx.$$

Para $i = 0$ temos

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \langle S_{2r+1}, x \rangle_{S_{2H}} = 0 &\implies \int_{-\infty}^{\infty} x S_{2r+1}(x) e^{-x^2} dx + \frac{\kappa_2}{q} \int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx = 0 \\ &\implies I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx = -\frac{q}{\kappa_2} \mu_0^r. \end{aligned}$$



Assim, utilizando o Lema 4.2.5 com $i = 0$ obtemos

$$\text{sinal}(I_0) = (-1)^r. \quad (4.2.11)$$

Para $i = 1, \dots, r$,

$$I_i = \int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) \left(x^2 + \frac{1}{q}\right)^{i-1} e^{-x^2} dx.$$

Integrando por partes com $u = \left(x^2 + \frac{1}{q}\right)^{i-1} e^{-x^2}$ e $dv = S'_{2r+1}(x)dx$ e usando a definição (4.2.8), encontramos

$$I_i = 2\mu_{i-1}^r - 2(i-1)\mu_{i-2}^r. \quad (4.2.12)$$

Podemos observar que para $i = 1$ o segundo termo acima é zero. Portanto, pelo Lema 4.2.5, (4.2.11) e (4.2.12), para $i = 0, 1, \dots, r$, obtemos

$$\text{sinal}(I_i) = (-1)^{r+i}. \quad (4.2.13)$$

Seja $\pi(x)$ um polinômio mônico par de grau $2k$, $1 \leq k \leq r$ tal que todos os zeros de $\pi(x)$ são reais. Sejam $x_1, \dots, x_k$ os zeros não negativos de $\pi(x)$. Para $1 \leq i \leq k$, fazemos $t_i^2 = x_i^2 + \frac{1}{q}$, então

$$\pi(x) = \left(x^2 + \frac{1}{q} - t_1^2\right) \dots \left(x^2 + \frac{1}{q} - t_k^2\right) = \sum_{i=0}^k \eta_i \left(x^2 + \frac{1}{q}\right)^i,$$

onde $\eta_k = 1$ e $\text{sinal}(\eta_i) = (-1)^{k-i}$. Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) \pi(x) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx = \sum_{i=0}^k \eta_i I_i.$$

De (4.2.13), $\text{sinal}(\eta_i I_i) = (-1)^{k+r}$ e então

$$\text{sinal} \left(\int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) \pi(x) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx \right) = (-1)^{k+r}. \quad (4.2.14)$$

Fazendo

$$\pi(x) = \frac{P_{2r}^{\phi_1}(x)}{x^2 - q_{2r,i}^2},$$

como $\pi(x)$ tem grau $2r - 2$ então $k = r - 1$ e (4.2.14) resulta em

$$\int_{-\infty}^{\infty} S'_{2r+1}(x) \frac{P_{2r}^{\phi_1}(x)}{x^2 - q_{2r,i}^2} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx < 0.$$



Aplicando quadratura gaussiana nos zeros de $P_{2r}^{\phi_1}$, obtemos

$$\frac{S'_{2r+1}(q_{2r,i})P_{2r}^{\phi_1}(q_{2r,i})}{q_{2r,i}} < 0. \quad (4.2.15)$$

e como $q_{2r,i} > 0$ então $\text{sin}al(S'_{2r+1}(q_{2r,i})) = -\text{sin}al(P_{2r}^{\phi_1}(q_{2r,i}))$.

Sabemos que $\sigma_{2r+1,r} < s_{2r+1,r}$ e $S'_{2r+1}(\sigma_{2r+1,r}) = 0$ e portanto, para todo $y \in (\sigma_{2r+1,r}, \infty)$, $S'_{2r+1}(y) > 0$. Mas $S'_{2r+1}(q_{2r,r}) < 0$, pois $P_{2r}^{\phi_1}(q_{2r,r}) > 0$. Assim, $q_{2r,r} < \sigma_{2r+1,r}$.

Para $k = 1, \dots, r-1$, $\sigma_{2r+1,k} < s_{2r+1,k}$ e $S'_{2r+1}(\sigma_{2r+1,k}) = 0$. Portanto, para todo $y \in (\sigma_{2r+1,r-k}, \sigma_{2r+1,r+1-k})$, $\text{sin}al(S'_{2r+1}(y)) = (-1)^k$. Mas $\text{sin}al(S'_{2r+1}(q_{2r,r-k})) = (-1)^{k+1}$, pois $\text{sin}al(P_{2r}^{\phi_1}(q_{2r,r-k})) = (-1)^k$. Logo, $q_{2r,r-k} < \sigma_{2r+1,r-k}$, para $k = 0, 1, \dots, r-1$. ■

Lema 4.2.8 Consideremos o produto interno (4.2.4). Então S_{2r+1} tem $2r+1$ zeros reais e distintos.

Demonstração: De (4.2.15), usando $r = 2k$, podemos determinar o $\text{sin}al(S'_{4k+1}(q_{4k,1}))$ e $\text{sin}al(S'_{4k+1}(-q_{4k,1}))$, onde $q_{4k,1}$ é o menor zero positivo de $P_{4k}^{\phi_1}$.

$$\frac{S'_{4k+1}(q_{4k,1})P_{4k}^{\phi_1}(q_{4k,1})}{q_{4k,1}} < 0 \implies \text{sin}al(S'_{4k+1}(q_{4k,1})) = -\text{sin}al(P_{4k}^{\phi_1}(q_{4k,1}))$$

e

$$\frac{S'_{4k+1}(-q_{4k,1})P_{4k}^{\phi_1}(-q_{4k,1})}{-q_{4k,1}} < 0 \implies \text{sin}al(S'_{4k+1}(-q_{4k,1})) = \text{sin}al(P_{4k}^{\phi_1}(-q_{4k,1})).$$

Mas,

$$P_{4k}^{\phi_1}(q_{4k,1}) < 0 \implies S'_{4k+1}(q_{4k,1}) > 0$$

e

$$P_{4k}^{\phi_1}(-q_{4k,1}) > 0 \implies S'_{4k+1}(-q_{4k,1}) > 0.$$

De acordo com o Lema 4.2.7, S_{4k+1} não tem extremos no intervalo $(-q_{4k,1}, q_{4k,1})$, portanto $S'_{4k+1}(0) > 0$. De (4.2.10) determinamos o $\text{sin}al(S_{4k+1}(h_{4k+1,1}))$, onde $h_{4k+1,1}$ é o menor zero positivo de H_{4k+1} .

$$\frac{S_{4k+1}(h_{4k+1,1})H'_{4k+1}(h_{4k+1,1})}{h_{4k+1,1}} > 0 \implies \text{sin}al(S_{4k+1}(h_{4k+1,1})) = \text{sin}al(H'_{4k+1}(h_{4k+1,1})).$$

Mas, $H'_{4k+1}(h_{4k+1,1}) < 0$, portanto $S_{4k+1}(h_{4k+1,1}) < 0$. Como $S'_{4k+1}(0) > 0$, então S_{4k+1} tem um zero em $(0, h_{4k+1,1})$. Portanto, pelo Teorema 4.2.1 segue que S_{4k+1} tem $4k+1$ zeros reais e distintos.

Do mesmo modo, podemos provar que S_{4k+3} tem $4k+3$ zeros reais e distintos, o que demonstra que S_{2r+1} tem $2r+1$ zeros reais e distintos. ■



Lema 4.2.9 *Seja $r \geq 2$, então S_{2r} tem $2r - 1$ extremos. Seja $\sigma_{2r,1} < \dots < \sigma_{2r,r-1}$ os extremos positivos de S_{2r} e $q_{2r-1,1} < \dots < q_{2r-1,r-1}$ os zeros positivos de $P_{2r-1}^{\phi_1}$, então*

$$q_{2r-1,1} < \sigma_{2r,1} < \dots < q_{2r-1,r-1} < \sigma_{2r,r-1}.$$

A demonstração é análoga ao Lema 4.2.7.

Os polinômios ortogonais, $P_n^{\phi_1}$, associados à $d\phi_1(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx$, dependem não apenas de n , mas também do parâmetro q . Para distinguirmos dois polinômios $P_n^{\phi_1}$ com um parâmetro diferente q , usaremos a notação $P_n^{\phi_1(q)}$. Seja

$$P_n^{\phi_1(\infty)}(x) = \lim_{q \rightarrow \infty} P_n^{\phi_1(q)}(x).$$

Como $P_0^{\phi_1(q)}(x) = 1$, temos que $P_0^{\phi_1(\infty)}(x) = 1$. O seguinte lema mostra que $P_n^{\phi_1(\infty)}(x)$ existe para $n \geq 1$.

Lema 4.2.10 *Para $n \geq 1$ temos*

$$P_n^{\phi_1(\infty)}(x) = xH_{n-1}(x).$$

Demonstração: Sejam

$$a_{i,j} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{i+j} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx \quad \text{e} \quad b_{i,j} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{i+j} e^{-x^2} dx.$$

Observe que para $i + j \geq 2$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} a_{i,j} = \lim_{q \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{i+j} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^{i-1+j-1} e^{-x^2} dx = b_{i-1,j-1}. \quad (4.2.16)$$

Se $i + j$ for ímpar, temos que $a_{i,j} = b_{i,j} = 0$. Os polinômios $P_n^{\phi_1(q)}$ podem ser definidos por

$$P_n^{\phi_1(q)}(x) = \frac{\begin{vmatrix} a_{0,0} & 0 & \cdots & a_{0,n} \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{0,0} & 0 & \cdots & a_{0,n-1} \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{2,0} & 0 & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}} \quad (4.2.17)$$

(veja [6]) e os polinômios H_n podem ser definidos da mesma forma, substituindo $a_{i,j}$ por $b_{i,j}$.



Como $x^2 + \frac{1}{q} \leq \frac{e^{qx^2}}{q}$, então

$$a_{0,0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{e^{qx^2}}{q}} dx = q \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2(1+q)} dx.$$

Fazendo $t = x\sqrt{1+q}$

$$a_{0,0} \geq q \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{1}{\sqrt{1+q}} dt = \frac{q}{\sqrt{1+q}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{q\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+q}}.$$

Para $i \geq 1$, temos que

$$a_{0,2i} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2i} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx < \int_{-\infty}^{\infty} x^{2i-2} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} x^{2(i-1)} e^{-x^2} dx.$$

Fazendo $x^2 = t$, obtemos

$$a_{0,2i} < \int_0^{\infty} t^{\frac{2i-1}{2}-1} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{2i-1}{2}\right)$$

e portanto, para $i \geq 1$,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{a_{0,2i}}{a_{0,0}} = 0. \quad (4.2.18)$$

Então (4.2.17) após expansão através da primeira linha e dividindo numerador e denominador por $a_{0,0}$ resulta em

$$P_n^{\phi_1(\infty)}(x) = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix} + \frac{a_{0,2}}{a_{0,0}} \begin{vmatrix} 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix} + \cdots}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} + \frac{a_{0,2}}{a_{0,0}} \begin{vmatrix} 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{2,0} & 0 & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} + \cdots}.$$

Observe que todos os limites dos determinantes são finitos. Então com (4.2.16) e (4.2.18) encontramos para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} P_n^{\phi_1(\infty)}(x) &= x \begin{vmatrix} b_{0,0} & 0 & \cdots & b_{0,n-1} \\ 0 & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n-1} \\ b_{2,0} & 0 & \cdots & b_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2,0} & b_{n-2,1} & \cdots & b_{n-2,n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} \end{vmatrix} \bigg/ \begin{vmatrix} b_{0,0} & 0 & \cdots & b_{0,n-2} \\ 0 & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n-2} \\ b_{2,0} & 0 & \cdots & b_{2,n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2,0} & b_{n-2,1} & \cdots & b_{n-2,n-2} \end{vmatrix} \\ &= x H_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Lema 4.2.11 (i) Sejam $q_{2r,1} < \dots < q_{2r,r}$ os zeros positivos de $P_{2r}^{\phi_1(q)}$ e $h_{2r-1,1} < \dots < h_{2r-1,r-1}$ os zeros positivos de H_{2r-1} . Seja $r \geq 2$, então para $1 \leq i \leq r-1$,

$$h_{2r-1,i} < q_{2r,i+1}.$$

(ii) Sejam $q_{2r+1,1} < \dots < q_{2r+1,r}$ os zeros positivos de $P_{2r+1}^{\phi_1(q)}$ e $h_{2r,1} < \dots < h_{2r,r}$ os zeros positivos de H_{2r} . Seja $r \geq 1$, então para $1 \leq i \leq r$,

$$h_{2r,i} < q_{2r+1,i}.$$

Demonstração: (i) Temos que

$$\langle P_{2r}^{\phi_1(q)}, P_{2k}^{\phi_1(q)} \rangle_{\phi_1} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{2r}^{\phi_1(q)}(x) P_{2k}^{\phi_1(q)}(x) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx = 2 \int_0^{\infty} P_{2r}^{\phi_1(q)}(x) P_{2k}^{\phi_1(q)}(x) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx.$$

Fazendo $P_{2r}^{\phi_1(q)}(x) = \tilde{P}_r^{\phi_1(q)}(x^2)$ temos que

$$\langle P_{2r}^{\phi_1(q)}, P_{2k}^{\phi_1(q)} \rangle_{\phi_1} = 2 \int_0^{\infty} \tilde{P}_r^{\phi_1(q)}(x^2) \tilde{P}_k^{\phi_1(q)}(x^2) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{q}} dx,$$

e ainda fazendo $x^2 = t$, obtemos

$$\langle P_{2r}^{\phi_1(q)}, P_{2k}^{\phi_1(q)} \rangle_{\phi_1} = \int_0^{\infty} \tilde{P}_r^{\phi_1(q)}(t) \tilde{P}_k^{\phi_1(q)}(t) \frac{t^{-1/2} e^{-t}}{t + \frac{1}{q}} dt.$$

Portanto os polinômios $\tilde{P}_r^{\phi_1(q)}$ são ortogonais com relação a função peso

$$\tilde{\omega}_q(t) = \frac{t^{-1/2} e^{-t}}{t + \frac{1}{q}},$$

em $(0, \infty)$.

Seja $\epsilon > 0$, $\tilde{q}_{r,1}^q < \dots < \tilde{q}_{r,r}^q$ os zeros de $\tilde{P}_r^{\phi_1(q)}$ e $\tilde{q}_{r,1}^{q+\epsilon} < \dots < \tilde{q}_{r,r}^{q+\epsilon}$ os zeros de $\tilde{P}_r^{\phi_1(q+\epsilon)}$. Então, como

$$\frac{\tilde{\omega}_q(t)}{\tilde{\omega}_{q+\epsilon}(t)} = \frac{t + 1/(q + \epsilon)}{t + 1/q}$$

é uma função crescente em t , temos para $1 \leq i \leq r$, (veja [21, p.116]),

$$\tilde{q}_{r,i}^{q+\epsilon} < \tilde{q}_{r,i}^q. \quad (4.2.19)$$

Seja $q_{2r,1}^q < \dots < q_{2r,r}^q$ os zeros positivos de $P_{2r}^{\phi_1(q)}$ e $q_{2r,1}^{q+\epsilon} < \dots < q_{2r,r}^{q+\epsilon}$ os zeros positivos de $P_{2r}^{\phi_1(q+\epsilon)}$, isto é, $\tilde{q}_{r,i}^q = (q_{2r,i}^q)^2$ e $\tilde{q}_{r,i}^{q+\epsilon} = (q_{2r,i}^{q+\epsilon})^2$ e de (4.2.19), obtemos

$$q_{2r,i}^{q+\epsilon} < q_{2r,i}^q,$$



para $1 \leq i \leq r$.

Do Lema 4.2.10 sabemos que os zeros positivos de H_{2r-1} são também zeros positivos de $P_{2r}^{\phi_1(\infty)}$ (note que $P_{2r}^{\phi_1(\infty)}$ tem um zero de multiplicidade dois em $x = 0$). Portanto para $1 \leq i \leq r - 1$

$$h_{2r-1,i} = q_{2r,i}^{\infty} < q_{2r,i+1}^{\infty} < q_{2r,i+1}^q \implies h_{2r-1,i} < q_{2r,i+1}^q.$$

(ii) Análoga à demonstração do item (i). ■

Após estes resultados podemos encontrar a relação entre os zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev associados a (4.2.4) e os zeros dos polinômios ortogonais associados à medida $d\phi_1$.

Teorema 4.2.3 *Consideremos o produto interno (4.2.4). Seja $\{P_n^{\phi_1}\}_{n=0}^{\infty}$ a sequência de polinômios ortogonais mônicos com relação a $d\phi_1$, onde $d\phi_1(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^2+1} dx$. Seja $n \geq 3$, para $n = 2r + 1$, $q_{2r,1} < \dots < q_{2r,r}$ denotam os zeros positivos de $P_{2r}^{\phi_1}$ e $s_{2r+1,1} < \dots < s_{2r+1,r}$ denotam os zeros positivos de S_{2r+1} , então*

$$q_{2r,1} < s_{2r+1,1} < \dots < q_{2r,r} < s_{2r+1,r}.$$

Para $n = 2r$, $q_{2r-1,1} < \dots < q_{2r-1,r-1}$ denotam os zeros positivos de $P_{2r-1}^{\phi_1}$ e $s_{2r,2} < \dots < s_{2r,r}$ denotam os maiores zeros positivos de S_{2r} , então

$$q_{2r-1,1} < s_{2r,2} < \dots < q_{2r-1,r-1} < s_{2r,r}.$$

Se S_{2r} tem $2r$ zeros reais e distintos, $s_{2r,1}$ denota o menor zero positivo, então

$$s_{2r,1} < q_{2r-1,1}.$$

Demonstração: (i) Para $n = 2r + 1$: sejam $h_{2r-1,1} < \dots < h_{2r-1,r-1}$ os zeros positivos de H_{2r-1} . Do Teorema 4.2.2 temos para $r \geq 2$ e $1 \leq i \leq r - 1$

$$s_{2r+1,i} < h_{2r-1,i}. \quad (4.2.20)$$

Do item (i) do Lema 4.2.11 temos para $1 \leq i \leq r - 1$

$$h_{2r-1,i} < q_{2r,i+1}. \quad (4.2.21)$$

Sejam $\sigma_{2r+1,1} < \dots < \sigma_{2r+1,r}$ os extremos positivos de S_{2r+1} . Do Lema 4.2.7 obtemos para $1 \leq i \leq r$

$$q_{2r,i} < \sigma_{2r+1,i}. \quad (4.2.22)$$



Também temos para $1 \leq i \leq r$

$$\sigma_{2r+1,i} < s_{2r+1,i}. \quad (4.2.23)$$

A combinação de (4.2.20)-(4.2.23), para $1 \leq i \leq r-1$, resulta em

$$q_{2r,i} < s_{2r+1,i} < q_{2r,i+1}.$$

Mas de (4.2.22) e (4.2.23), $q_{2r,r} < \sigma_{2r+1,r} < s_{2r+1,r}$, portanto

$$q_{2r,1} < s_{2r+1,1} < \dots < q_{2r,r} < s_{2r+1,r}, \quad r \geq 2.$$

Para $r = 1$ obtemos do Lema 4.2.7 e (4.2.23) que $q_{2,1} < s_{3,1}$, o que completa a prova do teorema para $n = 2r + 1$.

(ii) Para $n = 2r$: sejam $h_{2r-2,1} < \dots < h_{2r-2,r-1}$ os zeros positivos de H_{2r-2} . Do Teorema 4.2.2, temos para $r \geq 3$ e $2 \leq i \leq r-1$, que

$$s_{2r,i} < h_{2r-2,i}. \quad (4.2.24)$$

Do Lema 4.2.11 (ii), temos, para $1 \leq i \leq r-1$, que

$$h_{2r-2,i} < q_{2r-1,i}. \quad (4.2.25)$$

Sejam $\sigma_{2r,1} < \dots < \sigma_{2r,r-1}$ os extremos positivos de S_{2r} . Do Lema 4.2.9 obtemos, para $2 \leq i \leq r$, que

$$q_{2r-1,i-1} < \sigma_{2r,i-1}. \quad (4.2.26)$$

Também temos para $2 \leq i \leq r$

$$\sigma_{2r,i-1} < s_{2r,i}. \quad (4.2.27)$$

A combinação de (4.2.24)-(4.2.27) fornece, para $2 \leq i \leq r-1$,

$$q_{2r-1,i-1} < s_{2r,i} < q_{2r-1,i}.$$

Como $q_{2r-1,r-1} < \sigma_{2r,r-1} < s_{2r,r}$ temos

$$q_{2r-1,1} < s_{2r,2} < \dots < q_{2r-1,r-1} < s_{2r,r}.$$

Se S_{2r} não tem zeros complexos, então, usando o Teorema 4.2.2 e o Lema 4.2.11 (ii), temos

$$s_{2r,1} < h_{2r-2,1} < q_{2r-1,1},$$

que prova o teorema para $n = 2r$. ■

4.2.2 Produto interno de Sobolev $\mathbb{S}_{2G}$ associado à medida $(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx$

Lembramos do Corolário 3.3.2 que

$$d\phi_0(x) = (1-x^2)^{\alpha+1/2}dx, \quad d\psi_0(x) = (1-x^2)^{\alpha-1/2}dx \quad \text{e} \quad d\psi_1(x) = \frac{(1-x^2)^{\alpha+1/2}}{1+qx^2}dx,$$

para $q \geq -1$, $P_n^{\phi_0}(x) = G_n^{(\alpha+1)}(x)$ e $P_n^{\psi_0}(x) = G_n^{(\alpha)}(x)$. O produto interno $\mathbb{S}_{2G}$ é dado por

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_{2G}} = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx + \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)\frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_1 qx^2}{1+qx^2}(1-x^2)^{\alpha+1/2}dx,$$

onde $q \geq -1$. Os polinômios ortogonais associados satisfazem $S_0(x) = 1$, $S_1(x) = x$, $S_2(x) = G_2^{(\alpha)}(x)$ e para $n \geq 2$,

$$S_{n+1}(x) + a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2)S_{n-1}(x) = G_{n+1}^{(\alpha)}(x) + \tilde{d}_{n-1}(q)G_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad (4.2.28)$$

onde $a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2) > 0$ e $\tilde{d}_{n-1}(q) > 0$, para $q > 0$, são dados por (3.3.10) e (3.3.11), respectivamente. Ainda temos que

$$P_n^{\psi_1}(x) = G_n^{(\alpha+1)}(x) + d_{n-2}(q)G_{n-2}^{(\alpha+1)}(x) = \frac{G_{n+1}^{(\alpha)}(x)}{n+1} + \tilde{d}_{n-1}(q)\frac{G_{n-1}^{(\alpha)}(x)}{n-1}$$

e portanto, derivando a relação (4.2.28) e dividindo por $n+1$, obtemos

$$P_n^{\psi_1}(x) = \frac{S'_{n+1}(x)}{n+1} + c_n \frac{S'_{n-1}(x)}{n-1}, \quad (4.2.29)$$

onde $c_n = c_n(q, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{n-1}{n+1}a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2) > 0$.

Tomando $\kappa_1 = 0$ e $q > 0$ podemos escrever o produto interno $\mathbb{S}_{2G}$ da forma

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_{2G}} = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx + \frac{\kappa_2}{q} \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)\frac{(1-x^2)^{\alpha+1/2}}{x^2 + 1/q}dx. \quad (4.2.30)$$

Definindo $d\phi_1(x) = \frac{(1-x^2)^{\alpha+1/2}}{x^2 + 1/q}dx$, temos que o par de medidas $\{d\psi_0, d\phi_1\} = \left\{ (1-x^2)^{\alpha-1/2}dx, \frac{(1-x^2)^{\alpha+1/2}}{x^2 + 1/q}dx \right\}$ é um par de medidas simetricamente coerente de Gegenbauer do tipo II. Por isso podemos encontrar resultados análogos aos encontrados em [7], onde os autores estudaram o comportamento dos zeros de polinômios ortogonais de Sobolev associados a par simetricamente coerente envolvendo a medida de Gegenbauer.

Inicialmente precisaremos de alguns resultados preliminares para determinarmos a posição dos zeros de S_n com relação aos zeros de Gegenbauer. Também trabalharemos com dois casos: n par ou n ímpar.

Os resultados a seguir terão suas demonstrações omitidas por serem análogas às anteriores e podem ser encontradas em [7].

n=2r: Para $r \geq 1$ e $i \in \{-1, 0, \dots, r-1\}$ definimos

$$\begin{aligned} m_i^r &= \int_{-1}^1 S_{2r}(x) \left(x^2 + \frac{1}{q}\right)^i (1-x^2)^{\alpha-1/2} dx, \quad i = 0, \dots, r-1 \\ m_{-1}^r &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

A relação de recorrência para os m_i^r é dada a seguir.

Lema 4.2.12 Para $r \geq 3$ e $2 \leq i \leq r-1$ temos

$$m_i^r = -\frac{2\kappa_2 i}{q} \{s_i m_{i-1}^r - t_i m_{i-2}^r + (i-2)u_i m_{i-3}^r\},$$

onde $s_i > 0$, $t_i > 0$ e $u_i \geq 0$.

Também podemos avaliar o sinal de m_i^r .

Lema 4.2.13 Para $r \geq 2$ e $1 \leq i \leq r-1$ temos

(i) $m_0^r = 0$

(ii) $\text{ sinal}(m_i^r) = (-1)^{r+i+1}$.

Lema 4.2.14 Seja $r \geq 2$ e $\pi(x)$ um polinômio mônico par de grau $2k$, tal que todos os zeros de $\pi(x)$ são reais. Definimos

$$I_1 = \int_{-1}^1 S_{2r}(x) \pi(x) (1-x^2)^{\alpha-1/2} dx.$$

Se $1 \leq k \leq r-1$, então $\text{ sinal}(I_1) = (-1)^{r+k+1}$.

n=2r+1: Para $r \geq 1$ e $i \in \{-1, 0, \dots, r-1\}$ definimos

$$\mu_i^r = \int_{-1}^1 x S_{2r+1}(x) \left(x^2 + \frac{1}{q}\right)^i (1-x^2)^{\alpha-1/2} dx. \quad (4.2.32)$$

A relação de recorrência de μ_i^r é dada por

Lema 4.2.15 Para $r \geq 3$ e $2 \leq i \leq r-1$ temos

$$\mu_i^r = -\frac{2\kappa_2}{q} \{\delta_i \mu_{i-1}^r - \epsilon_i \mu_{i-2}^r + (i-2)\theta_i \mu_{i-3}^r\},$$

onde $\delta_i > 0$, $\epsilon_i > 0$ e $\theta_i \geq 0$.

Também temos um resultado sobre o sinal de μ_i^r .



Lema 4.2.16 Para $r \geq 1$ e $0 \leq i \leq r-1$ temos

$$\text{senal}(\mu_i^r) = (-1)^{r+i+1}.$$

Lema 4.2.17 Seja $r \geq 1$ e $\pi(x)$ um polinômio mônico par de grau $2k$, tal que todos os zeros de $\pi(x)$ são reais. Definimos

$$I_2 = \int_{-1}^1 x S_{2r+1}(x) \pi(x) (1-x^2)^{\alpha-1/2} dx.$$

Se $0 \leq k \leq r-1$, então $\text{senal}(I_2) = (-1)^{r+k+1}$.

Com o resultado a seguir podemos encontrar a relação entre os zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev associados a (4.2.30) e os zeros dos polinômios ortogonais de Gegenbauer.

Teorema 4.2.4 Consideremos o produto interno (4.2.30). Seja $n \geq 3$, então S_n tem pelo menos $n-2$ zeros reais e distintos. Sejam $g_{n,1} < \dots < g_{n,r}$ os zeros positivos de $G_n^{(\alpha)}$ e $s_{n,2} < \dots < s_{n,r}$ os maiores zeros positivos de S_n , então

$$g_{n,1} < s_{n,2} < \dots < s_{n,r} < g_{n,r}.$$

Se S_n tem n zeros reais e distintos, então $s_{n,1}$ denota o menor zero positivo e

$$s_{n,1} < g_{n,1}.$$

Teorema 4.2.5 Consideremos o produto interno (4.2.30). Seja $r \geq 1$, então S_{2r+1} tem $2r$ extremos diferentes. $\{P_n^{\phi_1}\}_{n=0}^{\infty}$ denota a seqüência de polinômios ortogonais mônicos com relação a $d\phi_1$, onde $d\phi_1(x) = \frac{(1-x^2)^{\alpha+1/2}}{x^2+1/q} dx$, $q_{2r,1} < \dots < q_{2r,r}$ denotam os zeros positivos de $P_{2r}^{\phi_1}$ e $\sigma_{2r+1,1} < \dots < \sigma_{2r+1,r}$ denotam os extremos positivos de S_{2r+1} , então

$$q_{2r,1} < \sigma_{2r+1,1} < \dots < q_{2r,r} < \sigma_{2r+1,r}.$$

Teorema 4.2.6 Consideremos o produto interno (4.2.30). Seja $r \geq 0$, então S_{2r+1} tem $2r+1$ zeros reais e distintos.

Como continuidade deste trabalho, de maneira natural, sugere-se a investigação de resultados semelhantes quando $\kappa_1 \neq 0$.



Capítulo 5

Propriedades assintóticas

Neste capítulo estudaremos as propriedades assintóticas de polinômios ortogonais de Sobolev associados a certas medidas simétricas relacionadas, envolvendo os dois tipos de produtos internos apresentados no capítulo 3. Estes estudos foram baseados nos trabalhos de Alfaro e outros [1], Marcellán e outros [10] e Martínez-Finkelshtein e outros [13], onde as medidas envolvidas formam par simetricamente coerente do tipo Hermite [1] e do tipo Gegenbauer [10, 13].

5.1 Produto interno de Sobolev $\mathbb{S}_1$

Lembramos novamente algumas definições da seção 3.2.

Sejam $d\phi_1$ e $d\psi_1$ medidas simétricas clássicas tais que os polinômios ortogonais mônicos associados satisfazem $P'_n{}^{\phi_1}(x) = nP_{n-1}^{\psi_1}(x)$, $n \geq 1$ e $d\psi_0$ tal que

$$d\psi_0(x) = (1 + qx^2)d\phi_1(x).$$

O produto interno de Sobolev $\mathbb{S}_1$ é dado por

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_1} = \langle f, g \rangle_{\psi_0 + \kappa_1 \phi_1} + \kappa_2 \langle f', g' \rangle_{\psi_1}.$$

De (3.1.2) e (3.1.3) temos

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\psi_0}(x) + d_{n-2}(q)P_{n-2}^{\psi_0}(x),$$

onde

$$d_{n-2}(q) = q \frac{\rho_n^{\phi_1}}{\rho_{n-2}^{\psi_0}} = q \frac{\mu_0^{\phi_1} \alpha_2^{\phi_1} \alpha_3^{\phi_1} \dots \alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\mu_0^{\psi_0} \alpha_2^{\psi_0} \alpha_3^{\psi_0} \dots \alpha_{n-1}^{\psi_0}}, \quad n \geq 2.$$

Apresentamos a seguir resultados sobre o comportamento assintótico dos coeficientes $d_n(q)$ e $a_n(q, \kappa_1, \kappa_2)$ do Corolário 3.2.1, ou seja, no caso em que uma das medidas é a de Hermite.



5.1.1 Produto interno de Sobolev S_{1H} associado à medida $e^{-x^2}dx$

Consideremos neste caso

$$d\phi_1(x) = d\psi_1(x) = e^{-x^2}dx \quad \text{e} \quad d\psi_0(x) = (1 + qx^2)e^{-x^2}dx,$$

para $q \geq 0$, onde $P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\psi_1}(x) = H_n(x)$ e, como no Corolário 3.2.1,

$$\langle f, g \rangle_{S_{1H}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)(1 + \kappa_1 + qx^2)e^{-x^2}dx + \kappa_2 \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)e^{-x^2}dx. \quad (5.1.1)$$

Temos que

$$\mu_0^{\psi_0} = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + qx^2)e^{-x^2}dx \Rightarrow \frac{\mu_0^{\psi_0}}{q} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{q} + x^2\right)e^{-x^2}dx,$$

portanto,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\mu_0^{\psi_0}}{q} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_0(x) = \mu_0^{\nu_0},$$

onde $d\nu_0(x) = x^2 e^{-x^2}dx$.

Calculemos o valor de $\alpha_{n-1}^{\psi_0}$ quando $q \rightarrow \infty$. De (2.1.4)

$$\alpha_{n-1}^{\psi_0} = \frac{\rho_{n-2}^{\psi_0}}{\rho_{n-3}^{\psi_0}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (P_{n-2}^{\psi_0}(x))^2 (1 + qx^2)e^{-x^2}dx}{\int_{-\infty}^{\infty} (P_{n-3}^{\psi_0}(x))^2 (1 + qx^2)e^{-x^2}dx}, \quad n \geq 3.$$

Dividindo numerador e denominador da equação acima por q e aplicando o limite, obtemos

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \alpha_{n-1}^{\psi_0} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (P_{n-2}^{\nu_0}(x))^2 d\nu_0(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} (P_{n-3}^{\nu_0}(x))^2 d\nu_0(x)} = \frac{\rho_{n-2}^{\nu_0}}{\rho_{n-3}^{\nu_0}} = \alpha_{n-1}^{\nu_0}, \quad n \geq 3.$$

Assim, quando $q \rightarrow \infty$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} d_{n-2}(q) = d_{n-2}(\infty) = \frac{\mu_0^{\phi_1} \alpha_2^{\phi_1} \alpha_3^{\phi_1} \dots \alpha_{n+1}^{\phi_1}}{\mu_0^{\nu_0} \alpha_2^{\nu_0} \alpha_3^{\nu_0} \dots \alpha_{n-1}^{\nu_0}} = \frac{\rho_n^{\phi_1}}{\rho_{n-2}^{\nu_0}}, \quad n \geq 2. \quad (5.1.2)$$

Seja $\{P_n^{(\beta)}\}_{n=0}^{\infty}$ a sequência de polinômios ortogonais com relação à medida $x^\beta e^{-x^2}$ em $(-\infty, \infty)$, onde β é par, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n^{(\beta)}(x) P_m^{(\beta)}(x) x^\beta e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \rho_n^{(\beta)} > 0, & m = n. \end{cases}$$

Logo, para $m \neq n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{2n}^{(\beta)}(x) P_{2m}^{(\beta)}(x) x^\beta e^{-x^2} dx = 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} P_{2n}^{(\beta)}(x) P_{2m}^{(\beta)}(x) x^\beta e^{-x^2} dx = 0.$$



Fazendo $x^2 = y$, obtemos

$$\int_0^\infty P_{2n}^{(\beta)}(\sqrt{y}) P_{2m}^{(\beta)}(\sqrt{y}) y^{\beta/2} e^{-y} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = 0 \Rightarrow \int_0^\infty \tilde{P}_n^{(\beta)}(y) \tilde{P}_m^{(\beta)}(y) y^{\frac{\beta-1}{2}} e^{-y} dy = 0,$$

portanto,

$$\tilde{P}_n^{(\beta)}(y) = L_n^{(\frac{\beta-1}{2})}(y),$$

onde $L_n^{(\frac{\beta-1}{2})}$ são os polinômios de Laguerre de parâmetro $\frac{\beta-1}{2}$.

Analogamente, para $m \neq n$

$$\int_{-\infty}^\infty P_{2n+1}^{(\beta)}(x) P_{2m+1}^{(\beta)}(x) x^\beta e^{-x^2} dx = 0 \Rightarrow \int_0^\infty P_{2n+1}^{(\beta)}(x) P_{2m+1}^{(\beta)}(x) x^\beta e^{-x^2} dx = 0.$$

Fazendo $x^2 = y$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty P_{2n+1}^{(\beta)}(\sqrt{y}) P_{2m+1}^{(\beta)}(\sqrt{y}) y^{\beta/2} e^{-y} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy &= 0 \Rightarrow \int_0^\infty \frac{P_{2n+1}^{(\beta)}(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} \frac{P_{2m+1}^{(\beta)}(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} y^{\frac{\beta+1}{2}} e^{-y} dy = 0 \\ &\Rightarrow \int_0^\infty \hat{P}_n^{(\beta)}(y) \hat{P}_m^{(\beta)}(y) y^{\frac{\beta+1}{2}} e^{-y} dy = 0, \end{aligned}$$

portanto,

$$\hat{P}_n^{(\beta)}(y) = L_n^{(\frac{\beta+1}{2})}(y).$$

Além disso,

$$\rho_{2n}^{(\beta)} = \int_{-\infty}^\infty P_{2n}^{(\beta)}(x) P_{2n}^{(\beta)}(x) x^\beta e^{-x^2} dx = 2 \int_0^\infty P_{2n}^{(\beta)}(x) P_{2n}^{(\beta)}(x) x^\beta e^{-x^2} dx,$$

e fazendo $x^2 = y$, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_{2n}^{(\beta)} &= 2 \int_0^\infty P_{2n}^{(\beta)}(\sqrt{y}) P_{2n}^{(\beta)}(\sqrt{y}) y^{\beta/2} e^{-y} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \int_0^\infty \tilde{P}_n^{(\beta)}(y) \tilde{P}_n^{(\beta)}(y) y^{\frac{\beta-1}{2}} e^{-y} dy \\ &= \int_0^\infty L_n^{(\frac{\beta-1}{2})}(y) L_n^{(\frac{\beta-1}{2})}(y) y^{\frac{\beta-1}{2}} e^{-y} dy = \rho_n^{(L, \frac{\beta-1}{2})}, \end{aligned}$$

portanto,

$$\rho_{2n}^{(\beta)} = \rho_n^{(L, \frac{\beta-1}{2})},$$

e

$$\rho_{2n+1}^{(\beta)} = \int_{-\infty}^\infty P_{2n+1}^{(\beta)}(x) P_{2n+1}^{(\beta)}(x) x^\beta e^{-x^2} dx = 2 \int_0^\infty P_{2n+1}^{(\beta)}(x) P_{2n+1}^{(\beta)}(x) x^\beta e^{-x^2} dx.$$

Fazendo novamente $x^2 = y$,

$$\begin{aligned} \rho_{2n+1}^{(\beta)} &= 2 \int_0^\infty P_{2n+1}^{(\beta)}(\sqrt{y}) P_{2n+1}^{(\beta)}(\sqrt{y}) y^{\beta/2} e^{-y} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \int_0^\infty \frac{P_{2n+1}^{(\beta)}(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} \frac{P_{2n+1}^{(\beta)}(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} y^{\frac{\beta+1}{2}} e^{-y} dy \\ &= \int_0^\infty \hat{P}_n^{(\beta)}(y) \hat{P}_n^{(\beta)}(y) y^{\frac{\beta+1}{2}} e^{-y} dy = \int_0^\infty L_n^{(\frac{\beta+1}{2})}(y) L_n^{(\frac{\beta+1}{2})}(y) y^{\frac{\beta+1}{2}} e^{-y} dy = \rho_n^{(L, \frac{\beta+1}{2})}, \end{aligned}$$



temos então que

$$\rho_{2n+1}^{(\beta)} = \rho_n^{(L, \frac{\beta+1}{2})}.$$

Assim, de (5.1.2) concluimos que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} d_{2n-2}(q) = d_{2n-2}(\infty) = \frac{\rho_{2n}^{\phi_1}}{\rho_{2n-2}^{\psi_0}} = \frac{\rho_{2n}^{(0)}}{\rho_{2n-2}^{(2)}} = \frac{\rho_n^{(L, -1/2)}}{\rho_{n-1}^{(L, 1/2)}} = n, \quad n \geq 1, \quad (5.1.3)$$

e

$$\lim_{q \rightarrow \infty} d_{2n-1}(q) = d_{2n-1}(\infty) = \frac{\rho_{2n+1}^{\phi_1}}{\rho_{2n-1}^{\psi_0}} = \frac{\rho_{2n+1}^{(0)}}{\rho_{2n-1}^{(2)}} = \frac{\rho_n^{(L, 1/2)}}{\rho_{n-1}^{(L, 3/2)}} = n, \quad n \geq 1, \quad (5.1.4)$$

pois $\rho_n^{(L, \alpha)} = \Gamma(n + \alpha + 1)n!$ (veja seção 2.1.2).

Teorema 5.1.1 A seqüência $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{2a_n}{n+2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ é limitada por $\frac{1}{2\lambda+1}$ e converge para $b = \frac{1}{\varphi(2\lambda+1)}$, onde $a_n = a_n(q, \kappa_1, \kappa_2)$ é dado em (3.2.9), $\lambda = \frac{\kappa_2}{q}$ e $\varphi(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ com $\sqrt{x^2 - 1} > 0$ quando $x > 1$.

Demonstração: Das relações (3.1.3) e (3.2.2) temos que

$$a_n = q \frac{\rho_{n+2}^{\phi_1}}{\rho_n^{\mathbb{S}_{1H}}} \implies b_n = 2q \frac{\rho_{n+2}^{\phi_1}}{(n+2)\rho_n^{\mathbb{S}_{1H}}}.$$

Do produto interno $\mathbb{S}_{1H}$ e usando a propriedade extremal da norma de polinômios ortogonais, temos

$$\begin{aligned} \rho_n^{\mathbb{S}_{1H}} = \langle S_n, S_n \rangle_{\mathbb{S}_{1H}} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_n^2(x) d\psi_0(x) + \kappa_1 \int_{-\infty}^{\infty} S_n^2(x) d\phi_1(x) + \kappa_2 \int_{-\infty}^{\infty} S_n'^2(x) d\psi_1(x) \\ &\geq \int_{-\infty}^{\infty} (P_n^{\psi_0}(x))^2 d\psi_0(x) + \kappa_1 \int_{-\infty}^{\infty} (P_n^{\phi_1}(x))^2 d\phi_1(x) \\ &\quad + \kappa_2 n^2 \int_{-\infty}^{\infty} (P_{n-1}^{\phi_1}(x))^2 d\psi_1(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (P_n^{\psi_0}(x))^2 (1 + qx^2) d\phi_1(x) + \kappa_1 \rho_n^{\phi_1} + \kappa_2 n^2 \rho_{n-1}^{\phi_1} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (P_n^{\psi_0}(x))^2 d\phi_1(x) + q \int_{-\infty}^{\infty} (x P_n^{\psi_0}(x))^2 d\phi_1(x) + \kappa_1 \rho_n^{\phi_1} + \kappa_2 n^2 \rho_{n-1}^{\phi_1} \\ &\geq \rho_n^{\phi_1} + q \rho_{n+1}^{\phi_1} + \kappa_1 \rho_n^{\phi_1} + \kappa_2 n^2 \rho_{n-1}^{\phi_1} \end{aligned}$$

e portanto,

$$b_n \leq \frac{2q \rho_{n+2}^{\phi_1}}{(n+2)[q \rho_{n+1}^{\phi_1} + (1 + \kappa_1) \rho_n^{\phi_1} + \kappa_2 n^2 \rho_{n-1}^{\phi_1}]} = \frac{2 \rho_{n+2}^{\phi_1}}{(n+2)[\rho_{n+1}^{\phi_1} + \frac{1+\kappa_1}{q} \rho_n^{\phi_1} + \frac{\kappa_2}{q} n^2 \rho_{n-1}^{\phi_1}]}.$$



Fazendo agora $\lambda = \frac{\kappa_2}{q}$ e $\xi^2 = \frac{1 + \kappa_1}{q}$, obtemos

$$b_n \leq \frac{2\rho_{n+2}^{\phi_1}}{(n+2)[\rho_{n+1}^{\phi_1} + \xi^2 \rho_n^{\phi_1} + \lambda n^2 \rho_{n-1}^{\phi_1}]} \leq \frac{2\rho_{n+2}^{\phi_1}}{(n+2)[\rho_{n+1}^{\phi_1} + \lambda n^2 \rho_{n-1}^{\phi_1}]}.$$

Como $\rho_n^{\phi_1} = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n}$, chegamos que

$$b_n \leq \frac{n+1}{n+1+4\lambda n} = \frac{1}{1+4\lambda \frac{n}{n+1}} \leq \frac{1}{2\lambda+1}.$$

Portanto, $b_n \leq \frac{1}{2\lambda+1} < 1$, para todo $n \geq 1$.

Mostremos agora que $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para $b = \frac{1}{\varphi(2\lambda+1)}$. De (3.2.9) temos que

$$a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{\frac{(n+1)(n+2)}{d_n(q)} + 4\frac{\kappa_1}{q} + 8n\frac{\kappa_2}{q} + 4d_{n-2}(q) - 4a_{n-2}}, \quad n \geq 2.$$

Para n par, $\lambda = \frac{\kappa_2}{q}$ e $\xi^2 = \frac{1 + \kappa_1}{q}$, podemos escrever

$$a_{2n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{\frac{(2n+1)(2n+2)}{d_{2n}(q)} + 4\left(\xi^2 - \frac{1}{q}\right) + 16n\lambda + 4d_{2n-2}(q) - 4a_{2n-2}}, \quad n \geq 1,$$

fazendo $q \rightarrow \infty$ e usando (5.1.3) temos

$$a_{2n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2(2n+1) + 4\xi^2 + 16n\lambda + 4n - 4a_{2n-2}}, \quad n \geq 1. \quad (5.1.5)$$

Para n ímpar, $\lambda = \frac{\kappa_2}{q}$ e $\xi^2 = \frac{1 + \kappa_1}{q}$, podemos escrever

$$a_{2n+1} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{\frac{(2n+2)(2n+3)}{d_{2n+1}(q)} + 4\left(\xi^2 - \frac{1}{q}\right) + 8(2n+1)\lambda + 4d_{2n-1}(q) - 4a_{2n-1}}, \quad n \geq 1,$$

fazendo $q \rightarrow \infty$ e usando (5.1.4) temos

$$a_{2n+1} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{2(2n+3) + 4\xi^2 + 8(2n+1)\lambda + 4n - 4a_{2n-1}}, \quad n \geq 1. \quad (5.1.6)$$

De (5.1.5) e (5.1.6) podemos concluir que

$$a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2[2(2\lambda+1)n+1+2\xi^2] - 4a_{n-2}}, \quad n \geq 2.$$



Multiplicando os dois lados da igualdade acima por 2 e dividindo por $n + 2$, obtemos

$$b_n = \frac{n+1}{2(2\lambda+1)n+1+2\xi^2-nb_{n-2}}, \quad n \geq 2.$$

Suponhamos que $b_n \rightarrow b$, quando $n \rightarrow \infty$. Então, $b^2 - 2(2\lambda+1)b + 1 = 0 \Rightarrow b = 2\lambda + 1 \pm \sqrt{(2\lambda+1)^2 - 1}$. Como $b < 1$, temos que $b = 2\lambda + 1 - \sqrt{(2\lambda+1)^2 - 1}$, ou seja, $b = \frac{1}{\varphi(2\lambda+1)}$. Portanto, se $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ converge, temos que $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ converge para $b = \frac{1}{\varphi(2\lambda+1)}$. Mostremos então que $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ converge.

$$\begin{aligned} |b_n - b| &= \left| \frac{n+1 - b[2(2\lambda+1)n+1+2\xi^2-nb_{n-2}]}{2(2\lambda+1)n+1+2\xi^2-nb_{n-2}} \right| \\ &= \left| \frac{n+1 - b[2(2\lambda+1)n+1+2\xi^2] + nb[b_{n-2} - b] + nb^2}{2(2\lambda+1)n+1+2\xi^2-nb_{n-2}} \right| \\ &= \left| \frac{n[1 - 2(2\lambda+1)b + b^2] + 1 - b(1+2\xi^2) + nb[b_{n-2} - b]}{2(2\lambda+1)n+1+2\xi^2-nb_{n-2}} \right| \\ &\leq \left| \frac{n[b^2 - 2(2\lambda+1)b + 1] + 1 - b(1+2\xi^2)}{2(2\lambda+1)n+1+2\xi^2-nb_{n-2}} \right| + \frac{nb|b_{n-2} - b|}{|2(2\lambda+1)n+1+2\xi^2-nb_{n-2}|}. \end{aligned}$$

Temos que $b_{n-2} < 1$, para todo $n \geq 1$. Assim, $n+1+2\xi^2-nb_{n-2} > 2\xi^2+1 > 0$ e então, $(4\lambda+n)+n+1+2\xi^2-nb_{n-2} > 4\lambda+n$. Portanto,

$$|b_n - b| < \frac{|n[b^2 - 2(2\lambda+1)b + 1] + 1 - b(1+2\xi^2)|}{(4\lambda+1)n} + \frac{b|b_{n-2} - b|}{4\lambda+1},$$

o que implica

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |b_n - b| \leq \frac{b}{4\lambda+1} \limsup_{n \rightarrow \infty} |b_{n-2} - b| \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} |b_n - b| = 0$$

e o resultado segue. ■

O teorema a seguir mostra o comportamento assintótico da razão entre polinômios ortogonais de Sobolev associados a (5.1.1) e os polinômios ortogonais de Hermite.

Teorema 5.1.2 *Os polinômios ortogonais de Sobolev, S_n , com relação ao produto interno (5.1.1) satisfazem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{H_n(x)} = \frac{\varphi(2\lambda+1)}{\varphi(2\lambda+1)-1},$$

uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, onde $\lambda = \frac{\kappa_2}{q}$ e $\varphi(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.



Demonstração: Com a notação

$$f_n(x) = \frac{S_n(x)}{H_n(x)}, \quad c_n(x) = -a_n \frac{H_n(x)}{H_{n+2}(x)}$$

a fórmula (3.2.8) torna-se

$$f_{n+2}(x) = 1 + c_n(x)f_n(x), \quad (5.1.7)$$

onde f_n e c_n são funções analíticas em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e usando o Teorema 5.1.1 e o resultado (2.1.10)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} -a_n \frac{H_n(x)}{H_{n+2}(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(n+2)b_n H_n(x)}{2H_{n+2}(x)} = \frac{1}{\varphi(2\lambda+1)} = b,$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Se fizermos

$$g_n(x) = f_n(x) - \frac{1}{1-b},$$

então de (5.1.7)

$$g_{n+2}(x) = b \left(f_n(x) - \frac{1}{1-b} \right) + f_n(x)(c_n(x) - b) = bg_n(x) + \left(g_n(x) + \frac{1}{1-b} \right) (c_n(x) - b),$$

ou seja,

$$g_{n+2}(x) = bg_n(x) + \epsilon_n(x), \quad (5.1.8)$$

$$\text{com } \epsilon_n(x) = \left(g_n(x) + \frac{1}{1-b} \right) (c_n(x) - b).$$

De (5.1.7) temos

$$|f_{n+2}(x)| \leq 1 + |c_n(x)||f_n(x)|.$$

Como $c_n(x) \rightarrow b$ uniformemente e $0 < b < 1$ então, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $n > N$, $|c_n(x)| \leq m < 1$. Logo,

$$|f_{N+2}(x)| \leq 1 + m|f_N(x)|$$

$$|f_{N+4}(x)| \leq 1 + m|f_{N+2}(x)| \leq 1 + m + m^2|f_N(x)|$$

$$|f_{N+6}(x)| \leq 1 + m|f_{N+4}(x)| \leq 1 + m + m^2 + m^3|f_N(x)|$$

$\vdots$

$$|f_{N+2i}(x)| \leq 1 + m + m^2 + m^3 + \dots + m^{i-1} + m^i|f_N(x)| = \frac{1-m^i}{1-m} + m^i|f_N(x)|$$

$$< \frac{1}{1-m} + |f_N(x)| = M.$$

Portanto, $f_n(x)$ e, conseqüentemente, $g_n(x)$ são uniformemente limitadas em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Além disso, como $c_n(x) \rightarrow b$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n(x) = 0$ uniformemente em



subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e de (5.1.8) podemos ver o mesmo comportamento para $g_n(x)$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{1-b} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{H_n(x)} = \frac{\varphi(2\lambda+1)}{\varphi(2\lambda+1)-1}$$

uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. ■

Estes resultados são análogos aos resultados encontrados em [1], onde os autores estudaram as propriedades assintóticas de polinômios ortogonais de Sobolev associados a pares coerentes envolvendo medidas de Hermite.

5.1.2 Produto interno de Sobolev S_{1G} associado à medida $(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx$

Apresentaremos agora resultados sobre o comportamento dos coeficientes $d_n(q)$ e $a_n(q, \kappa_1, \kappa_2)$ do Corolário 3.2.2, no caso em que uma das medidas é a de Gegenbauer.

Para isto tomamos

$$d\phi_1(x) = (1-x^2)^{\alpha-1/2}dx, \quad d\psi_1(x) = (1-x^2)^{\alpha+1/2}dx \quad \text{e} \quad d\psi_0(x) = (1+qx^2)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx,$$

para $q \geq -1$, onde $P_n^{\phi_1}(x) = G_n^{(\alpha)}(x)$, $P_n^{\psi_1}(x) = G_n^{(\alpha+1)}(x)$ e

$$\langle f, g \rangle_{S_{1G}} = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1+\kappa_1+qx^2)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx + \kappa_2 \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)(1-x^2)^{\alpha+1/2}dx, \quad (5.1.9)$$

para $q \geq -1$. De (3.2.2) sabemos que

$$a_n = \frac{d_n \rho_n^{\psi_0}}{\rho_n^{S_{1G}}}.$$

Seja $\delta_0 = \psi_0 + \kappa_1\phi_1$, então

$$\rho_n^{S_{1G}} = \langle S_n, S_n \rangle_{S_{1G}} = \int_{-1}^1 S_n^2 d\delta_0 + \kappa_2 \int_{-1}^1 S_n'^2 d\psi_1 \geq \kappa_2 \int_{-1}^1 S_n'^2 d\psi_1.$$

Escrevendo os polinômios de Sobolev como combinação linear dos polinômios de Gegenbauer $G_n^{(\alpha)}$ e em seguida derivando, obtemos

$$\rho_n^{S_{1G}} \geq \kappa_2 n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1}.$$

Logo,

$$0 < \frac{\rho_n^{\psi_0}}{\rho_n^{S_{1G}}} \leq \frac{\rho_n^{\psi_0}}{\kappa_2 n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1}}.$$

Mas, para $q = -1$, temos que $d\psi_0 = d\psi_1$ e assim

$$\frac{\rho_n^{\psi_0}}{\rho_{n-1}^{\psi_1}} = \alpha_{n+1}^{\psi_1} = \frac{n(n+2\alpha+1)}{4(n+\alpha+1)(n+\alpha)} \longrightarrow \frac{1}{4}, \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty,$$



então $\frac{\rho_n^{\psi_0}}{\rho_n^{S_{1G}}} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

De (3.2.16), podemos observar que $d_{n-1}(-1) = -\frac{n(n+1)}{4(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \rightarrow -\frac{1}{4}$, para $n \rightarrow \infty$, portanto

$$a_n \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (5.1.10)$$

O próximo teorema fornece o comportamento assintótico da razão entre os polinômios ortogonais de Sobolev associados a (5.1.9) e os polinômios ortogonais de Gegenbauer de parâmetro α .

Teorema 5.1.3 *Os polinômios ortogonais de Sobolev, S_n , com relação ao produto interno (5.1.9) satisfazem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{G_n^{(\alpha)}(x)} = 1,$$

uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Demonstração: Usando a notação

$$f_n(x) = \frac{S_n(x)}{G_n^{(\alpha)}(x)}, \quad c_n(x) = -a_n \frac{G_n^{(\alpha)}(x)}{G_{n+2}^{(\alpha)}(x)}$$

a fórmula (3.2.12) torna-se

$$f_{n+2}(x) = 1 + c_n(x)f_n(x). \quad (5.1.11)$$

O comportamento assintótico de $G_n^{(\alpha)}(x)$ é bem conhecido e pode ser obtido de [21]

$$G_n^{(\alpha)}(x) = 2^{1-2\alpha} (x^2 - 1)^{-\alpha/2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^{2\alpha-1} (\varphi(x)/2)^{n+1/2} (1 + o(1)), \quad (5.1.12)$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, quando $n \rightarrow \infty$, onde $z(n) = o(g(n))$ significa que $\frac{z(n)}{g(n)} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Logo,

$$\frac{G_n^{(\alpha)}(x)}{G_{n+2}^{(\alpha)}(x)} \rightarrow \frac{4}{\varphi^2(x)}, \quad (5.1.13)$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, onde $\varphi(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$. Como $a_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(x) = 0$, uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, para $n > N$, $|c_n| \leq m < 1$. Assim,

de (5.1.11)

$$\begin{aligned}
 |f_{N+2}(x)| &\leq 1 + m|f_N(x)| \\
 |f_{N+4}(x)| &\leq 1 + m|f_{N+2}(x)| \leq 1 + m + m^2|f_N(x)| \\
 |f_{N+6}(x)| &\leq 1 + m|f_{N+4}(x)| \leq 1 + m + m^2 + m^3|f_N(x)| \\
 &\vdots \\
 |f_{N+2i}(x)| &\leq 1 + m + m^2 + m^3 + \dots + m^{i-1} + m^i|f_N(x)| = \frac{1 - m^{i+1}}{1 - m} + m^i|f_N(x)| \\
 &< \frac{1}{1 - m} + |f_N(x)| = M.
 \end{aligned}$$

Portanto, $f_n(x)$ é uniformemente limitada em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ e então, de (5.1.11)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{G_n^{(\alpha)}(x)} = 1,$$

uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. ■

Também podemos observar o comportamento assintótico da razão entre os polinômios ortogonais de Sobolev associados a (5.1.9) e os polinômios ortogonais de Gegenbauer de parâmetro $\alpha + 1$.

Teorema 5.1.4 *Os polinômios ortogonais de Sobolev, S_n , com relação ao produto interno (5.1.9) satisfazem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{G_n^{(\alpha+1)}(x)} = \frac{2}{\varphi'(x)},$$

uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, onde $\varphi(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

Demonstração: Temos que

$$\frac{S_n(x)}{G_n^{(\alpha+1)}(x)} = \frac{S_n(x)}{G_n^{(\alpha)}(x)} \frac{G_n^{(\alpha)}(x)}{G_n^{(\alpha+1)}(x)}.$$

De (5.1.12), obtemos

$$\frac{G_n^{(\alpha)}(x)}{G_n^{(\alpha+1)}(x)} \longrightarrow \frac{4\sqrt{x^2 - 1}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2} = \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2}{\varphi'(x)}, \quad (5.1.14)$$

para $n \rightarrow \infty$. Portanto, de (5.1.14) e do Teorema 5.1.3, obtemos

$$\frac{S_n(x)}{G_n^{(\alpha+1)}(x)} \longrightarrow \frac{2}{\varphi'(x)}, \quad \text{para } n \rightarrow \infty.$$

■

Os resultados apresentados acima são análogos aos resultados encontrados em [10] no estudo do comportamento assintótico da razão entre os polinômios ortogonais de Sobolev e os polinômios de Gegenbauer, envolvendo pares simetricamente coerentes de medidas. Além disso, em [10] foi provado que para todo par simetricamente coerente $\{d\mu_1, d\mu_2\}$, onde o suporte de $d\mu_1$ é $[-1, 1]$, vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{P_n^{\mu_2}(x)} = \frac{2}{\varphi'(x)},$$

onde $P_n^{\mu_2}$ são os polinômios ortogonais mônicos associados à $d\mu_2$.

Analisemos agora o comportamento assintótico dos coeficientes $d_n(q)$, quando $q > -1$, $q \neq 0$. Da relação de recorrência dos polinômios de Gegenbauer, obtemos

$$G_{n+1}^{(\alpha)}(x) + \alpha_{n+1}^{(\alpha)} G_{n-1}^{(\alpha)}(x) = x^2 G_{n-1}^{(\alpha)}(x) - \alpha_n^{(\alpha)} x G_{n-2}^{(\alpha)}(x).$$

Como

$$x G_{n-2}^{(\alpha)}(x) = G_{n-1}^{(\alpha)}(x) + \alpha_{n-1}^{(\alpha)} G_{n-3}^{(\alpha)}(x),$$

segue que

$$G_{n+1}^{(\alpha)}(x) = [x^2 - (\alpha_n^{(\alpha)} + \alpha_{n+1}^{(\alpha)})] G_{n-1}^{(\alpha)}(x) - \alpha_n^{(\alpha)} \alpha_{n-1}^{(\alpha)} G_{n-3}^{(\alpha)}(x). \quad (5.1.15)$$

De (3.1.2)

$$G_{n+1}^{(\alpha)}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1}(q) P_{n-1}^{\psi_0}(x) \quad (5.1.16)$$

e pela identidade de Christoffel (3.1.4),

$$\frac{1 + qx^2}{q} P_n^{\psi_0}(x) = G_{n+2}^{(\alpha)}(x) - \frac{G_{n+2}^{(\alpha)}(\gamma)}{G_n^{(\alpha)}(\gamma)} G_n^{(\alpha)}(x), \quad (5.1.17)$$

onde $\gamma = \sqrt{-1/q}$. Multiplicando (5.1.16) por $\frac{1 + qx^2}{q}$ e usando (5.1.17), obtemos

$$G_{n+3}^{(\alpha)}(x) = \left[x^2 + \frac{1}{q} - d_{n-1}(q) + \frac{G_{n+3}^{(\alpha)}(\gamma)}{G_{n+1}^{(\alpha)}(\gamma)} \right] G_{n+1}^{(\alpha)}(x) + d_{n-1}(q) \frac{G_{n+1}^{(\alpha)}(\gamma)}{G_{n-1}^{(\alpha)}(\gamma)} G_{n-1}^{(\alpha)}(x). \quad (5.1.18)$$

Comparando a equação acima com (5.1.15), concluímos que

$$d_{n-1}(q) \frac{G_{n+1}^{(\alpha)}(\gamma)}{G_{n-1}^{(\alpha)}(\gamma)} = -\alpha_{n+1}^{(\alpha)} \alpha_{n+2}^{(\alpha)}. \quad (5.1.19)$$

De (5.1.13),

$$\frac{G_n^{(\alpha)}(\gamma)}{G_{n+2}^{(\alpha)}(\gamma)} \longrightarrow \frac{4}{\varphi^2(\gamma)}, \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty$$



e como $\alpha_{n+1}^{(\alpha)} = \frac{n(n+2\alpha-1)}{4(n+\alpha)(n+\alpha-1)}$, temos que $\alpha_{n+1}^{(\alpha)} \rightarrow \frac{1}{4}$, quando $n \rightarrow \infty$, então

$$d_{n-1}(q) \rightarrow -\frac{1}{4\varphi^2(\gamma)}, \quad (5.1.20)$$

para $q > -1$ e $q \neq 0$, onde $\gamma = \sqrt{-1/q}$.

O resultado apresentado a seguir mostra o comportamento assintótico da razão entre os polinômios ortogonais de Sobolev e os polinômios ortogonais associados à medida $d\psi_0$.

Teorema 5.1.5 *Os polinômios ortogonais de Sobolev, S_n , com relação ao produto interno (5.1.9) satisfazem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{P_n^{\psi_0}(x)} = 1 - \frac{1}{\varphi^2(\gamma)\varphi^2(x)},$$

uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, para $q > -1$ e $q \neq 0$, onde $P_n^{\psi_0}$ são polinômios ortogonais com relação a $d\psi_0(x) = (1+qx^2)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx$, $\gamma = \sqrt{-1/q}$ e $\varphi(x) = x + \sqrt{x^2-1}$.

Demonstração: Substituindo a equação (5.1.16) na equação (5.1.17), obtemos também

$$P_{n+2}^{\psi_0}(x) = \left[x^2 + \frac{1}{q} - d_n(q) + \frac{G_{n+2}^{(\alpha)}(\gamma)}{G_n^{(\alpha)}(\gamma)} \right] P_n^{\psi_0}(x) + d_{n-2}(q) \frac{G_{n+2}^{(\alpha)}(\gamma)}{G_n^{(\alpha)}(\gamma)} P_{n-2}^{\psi_0}(x) \quad (5.1.21)$$

Como $d\psi_0$ é uma medida simétrica, os polinômios ortogonais associados $P_n^{\psi_0}$ satisfazem a relação

$$\begin{aligned} P_{n+2}^{\psi_0}(x) &= xP_{n+1}^{\psi_0}(x) - \alpha_{n+2}^{\psi_0}P_n^{\psi_0}(x) = x^2P_n^{\psi_0}(x) - \alpha_{n+1}^{\psi_0}xP_{n-1}^{\psi_0}(x) - \alpha_{n+2}^{\psi_0}P_n^{\psi_0}(x) \\ &= x^2P_n^{\psi_0}(x) - \alpha_{n+1}^{\psi_0}(P_n^{\psi_0}(x) + \alpha_n^{\psi_0}P_{n-2}^{\psi_0}(x)) - \alpha_{n+2}^{\psi_0}P_n^{\psi_0}(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$P_{n+2}^{\psi_0}(x) = [x^2 - (\alpha_{n+1}^{\psi_0} + \alpha_{n+2}^{\psi_0})]P_n^{\psi_0}(x) - \alpha_n^{\psi_0}\alpha_{n+1}^{\psi_0}P_{n-2}^{\psi_0}(x). \quad (5.1.22)$$

Comparando (5.1.21) e (5.1.22), obtemos

$$d_{n-2}(q) = -\alpha_n^{\psi_0}\alpha_{n+1}^{\psi_0} \frac{G_n^{(\alpha)}(\gamma)}{G_{n+2}^{(\alpha)}(\gamma)}.$$

Por outro lado, de (5.1.19), temos que

$$d_{n-2}(q) = -\alpha_n^{(\alpha)}\alpha_{n+1}^{(\alpha)} \frac{G_{n-2}^{(\alpha)}(\gamma)}{G_n^{(\alpha)}(\gamma)}.$$

Logo,

$$\alpha_n^{\psi_0} \alpha_{n+1}^{\psi_0} \frac{G_n^{(\alpha)}(\gamma)}{G_{n+2}^{(\alpha)}(\gamma)} = \alpha_n^{(\alpha)} \alpha_{n+1}^{(\alpha)} \frac{G_{n-2}^{(\alpha)}(\gamma)}{G_n^{(\alpha)}(\gamma)}.$$

Como $\alpha_n^{(\alpha)} \rightarrow \frac{1}{4}$ e $\frac{G_n^{(\alpha)}(x)}{G_{n+2}^{(\alpha)}(x)} \rightarrow \frac{4}{\varphi^2(x)}$, então

$$\alpha_n^{\psi_0} \alpha_{n+1}^{\psi_0} \rightarrow \frac{1}{16}.$$

Além disso, comparando novamente (5.1.21) e (5.1.22) e também (5.1.15) e (5.1.18) obtemos, respectivamente, as duas relações abaixo

$$\alpha_{n+1}^{\psi_0} + \alpha_{n+2}^{\psi_0} = d_n(q) - \frac{G_{n+2}^{(\alpha)}(\gamma)}{G_n^{(\alpha)}(\gamma)} - \frac{1}{q}$$

e

$$\alpha_{n+2}^{(\alpha)} + \alpha_{n+3}^{(\alpha)} = d_{n-1}(q) - \frac{G_{n+3}^{(\alpha)}(\gamma)}{G_{n+1}^{(\alpha)}(\gamma)} - \frac{1}{q},$$

logo,

$$\alpha_{n+1}^{\psi_0} + \alpha_{n+2}^{\psi_0} + \frac{G_{n+2}^{(\alpha)}(\gamma)}{G_n^{(\alpha)}(\gamma)} + \frac{1}{q} = \alpha_{n+3}^{(\alpha)} + \alpha_{n+4}^{(\alpha)} + \frac{G_{n+4}^{(\alpha)}(\gamma)}{G_{n+2}^{(\alpha)}(\gamma)} + \frac{1}{q}$$

e portanto,

$$\alpha_{n+1}^{\psi_0} + \alpha_{n+2}^{\psi_0} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Como os coeficientes $\alpha_n^{(\alpha)} \alpha_{n+1}^{(\alpha)} \rightarrow \frac{1}{16}$ e $\alpha_n^{\psi_0} \alpha_{n+1}^{\psi_0} \rightarrow \frac{1}{16}$ e ainda $\alpha_n^{(\alpha)} + \alpha_{n+1}^{(\alpha)} \rightarrow \frac{1}{2}$ e $\alpha_n^{\psi_0} + \alpha_{n+1}^{\psi_0} \rightarrow \frac{1}{2}$ temos que os polinômios $G_n^{(\alpha)}$ e $P_n^{\psi_0}$ também convergem para o mesmo valor (veja Van Assche [22]). Assim, como $\frac{G_n^{(\alpha)}(x)}{G_{n+2}^{(\alpha)}(x)} \rightarrow \frac{4}{\varphi^2(x)}$, então $\frac{P_n^{\psi_0}(x)}{P_{n+2}^{\psi_0}(x)} \rightarrow \frac{4}{\varphi^2(x)}$.

De (3.2.12) sabemos que

$$S_{n+1}(x) + a_{n-1}(q, \kappa_1, \kappa_2) S_{n-1}(x) = G_{n+1}^{(\alpha)}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + d_{n-1}(q) P_{n-1}^{\psi_0}(x),$$

dividindo a equação acima por $P_{n+1}^{\psi_0}(x)$ e aplicando o limite, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}(x)}{P_{n+1}^{\psi_0}(x)} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(d_{n-1}(q) \frac{P_{n-1}^{\psi_0}(x)}{P_{n+1}^{\psi_0}(x)} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_{n-1} \frac{S_{n-1}(x)}{P_{n+1}^{\psi_0}(x)} \right)$$

e de (5.1.10) e (5.1.20) segue o resultado desejado. $\blacksquare$

Note que para $q = 0$ temos que $d\psi_0(x) = d\phi_1(x) = (1-x^2)^{\alpha-1/2}$ e $P_n^{\psi_0}(x) = G_n^{(\alpha)}(x)$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{P_n^{\psi_0}(x)} = 1,$$

uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, como mostra o Teorema 5.1.3.

5.2 Produto interno de Sobolev $\mathbb{S}_2$

Sejam $d\phi_0$ e $d\psi_0$ medidas clássicas simétricas, tais que os polinômios ortogonais mônicos associados $P_n^{\phi_0}$ e $P_n^{\psi_0}$ satisfazem $P_n^{\psi_0}(x) = nP_{n-1}^{\phi_0}(x)$, $n \geq 1$ e a medida $d\psi_1$ dada por

$$d\psi_1(x) = \frac{1}{1+qx^2}d\phi_0(x).$$

O produto interno de Sobolev $\mathbb{S}_2$ é dado por

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_2} = \langle f, g \rangle_{\psi_0} + \langle f', g' \rangle_{\kappa_1\phi_0 + \kappa_2\psi_1}$$

e

$$\tilde{d}_{n-1}(q) = \frac{n+1}{n-1}d_{n-2}(q), \quad n \geq 2.$$

Como no caso anterior, encontramos resultados sobre o comportamento dos coeficientes $\tilde{d}_n(q)$ e $a_n(q, \kappa_1, \kappa_2)$ do Corolário 3.3.1 que serão importantes para obtermos o comportamento assintótico da razão entre os polinômios ortogonais de Hermite e Sobolev.

5.2.1 Produto interno de Sobolev $\mathbb{S}_{2H}$ associado à medida $e^{-x^2}dx$

Para estudarmos o comportamento assintótico da razão entre os polinômios ortogonais de Sobolev associados a $\mathbb{S}_{2H}$ e os polinômios de Hermite, utilizaremos os resultados do Corolário 3.3.1. Consideremos

$$d\phi_0(x) = d\psi_0(x) = e^{-x^2}dx, \quad d\psi_1(x) = \frac{1}{1+qx^2}e^{-x^2}dx,$$

para $q \geq 0$, então $P_n^{\phi_0}(x) = P_n^{\psi_0}(x) = H_n(x)$,

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_{2H}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)\frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_1qx^2}{1+qx^2}e^{-x^2}dx \quad (5.2.1)$$

e

$$\begin{aligned} P_n^{\psi_1}(x) &= \frac{1}{n+1}[H'_{n+1}(x) + \tilde{d}_{n-1}(q)H'_{n-1}(x)] \\ &= H_n(x) + d_{n-2}(q)H_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

com

$$d_{n-2}(q) = q \frac{\rho_n^{\psi_1}}{\rho_{n-2}^{\phi_0}}, \quad n \geq 2,$$

e portanto, como foi provado em [1], $\frac{2d_{n-1}(q)}{n}$ tende a 1, quando $n \rightarrow \infty$, para $\kappa_1 = 0$. Logo,

$$\frac{2\tilde{d}_n(q)}{n+2} \rightarrow 1, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (5.2.2)$$

para $q \geq 0$ e $\kappa_1 = 0$. Assim podemos provar o seguinte resultado.



Teorema 5.2.1 A sequência $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{2a_n}{n+2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ é limitada por $\frac{1+1/q}{1+1/q+2\lambda}$, com $q > 0$ e converge para $b = \frac{1}{\varphi(2\lambda+1)}$, quando $\kappa_1 = 0$, onde $a_n = a_n(q, \kappa_1, \kappa_2)$ é dado em (3.3.6), $\lambda = \frac{\kappa_2}{q}$ e $\varphi(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

Demonstração: De (3.3.3)

$$a_n = \frac{\tilde{d}_n(q)(\rho_n^{\psi_0} + \kappa_1 n^2 \rho_{n-1}^{\phi_0})}{\rho_n^{S_{2H}}}, \quad n \geq 1,$$

onde $\tilde{d}_n(q) = \frac{n+2}{n} d_{n-1}(q) = q \frac{(n+2)\rho_{n+1}^{\psi_1}}{n\rho_{n-1}^{\phi_0}}$. Mas, $d\phi_0(x) = d\psi_0(x) = e^{-x^2} dx$, logo

$$\rho_n^{\phi_0} = \rho_n^{\psi_0} = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n} \Rightarrow \rho_{n-1}^{\phi_0} = \frac{2\rho_n^{\phi_0}}{n},$$

e

$$b_n = \frac{2a_n}{n+2} = \frac{q\rho_{n+1}^{\psi_1}}{\rho_n^{\phi_0}} \frac{\rho_n^{\phi_0} + \kappa_1 n^2 \rho_{n-1}^{\phi_0}}{\rho_n^{S_{2H}}}, \quad n \geq 1.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\rho_n^{\phi_0}}{q} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+qx^2}{q} H_n^2(x) d\psi_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x^2 + \frac{1}{q}\right) H_n^2(x) d\psi_1(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[H_n(x) \left(x + \frac{1}{\sqrt{q}}\right) \right]^2 d\psi_1(x) \geq \rho_{n+1}^{\psi_1}, \end{aligned}$$

então $\frac{q\rho_{n+1}^{\psi_1}}{\rho_n^{\phi_0}} \leq 1$, e

$$b_n \leq \frac{\rho_n^{\phi_0} + \kappa_1 n^2 \rho_{n-1}^{\phi_0}}{\rho_n^{S_{2H}}}, \quad n \geq 1.$$

Mas, pela propriedade extremal

$$\rho_n^{S_{2H}} = \langle S_n, S_n \rangle_{S_{2H}} = \langle S_n, S_n \rangle_{\psi_0} + \kappa_1 \langle S'_n, S'_n \rangle_{\phi_0} + \kappa_2 \langle S'_n, S'_n \rangle_{\psi_1} \geq \rho_n^{\psi_0} + \kappa_1 n^2 \rho_{n-1}^{\phi_0} + \kappa_2 n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1},$$

logo,

$$b_n \leq \frac{\rho_n^{\phi_0} + \kappa_1 n^2 \rho_{n-1}^{\phi_0}}{\rho_n^{\psi_0} + \kappa_1 n^2 \rho_{n-1}^{\phi_0} + \kappa_2 n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1}} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa_2 n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1}}{\rho_n^{\phi_0} (1 + 2n\kappa_1)}}, \quad n \geq 1. \quad (5.2.3)$$

Como os polinômios $P_k^{\psi_1}$ são simétricos e formam uma base para polinômios simétricos, podemos escrever $(1+qx^2)H_n$ como combinação linear de $P_k^{\psi_1}$ da forma

$$(1+qx^2)H_n(x) = qP_{n+2}^{\psi_1}(x) + \sum_{j=0}^{[n/2]} c_{n-2j} P_{n-2j}^{\psi_1}(x).$$



Portanto, para $i = 0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + qx^2) H_n(x) P_{n-2i}^{\psi_1}(x) \frac{e^{-x^2}}{1 + qx^2} dx = c_{n-2i} \int_{-\infty}^{\infty} (P_{n-2i}^{\psi_1}(x))^2 \frac{e^{-x^2}}{1 + qx^2} dx,$$

logo $c_{n-2i} = 0$, para $i = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$. Assim, para $i = 0$, obtemos

$$c_n = \frac{\rho_n^{\phi_0}}{\rho_n^{\psi_1}}$$

e então,

$$(1 + qx^2) H_n(x) = q P_{n+2}^{\psi_1}(x) + \frac{\rho_n^{\phi_0}}{\rho_n^{\psi_1}} P_n^{\psi_1}(x).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + qx^2) H_n(x) H_n(x) e^{-x^2} dx &= q \int_{-\infty}^{\infty} P_{n+2}^{\psi_1}(x) H_n(x) e^{-x^2} dx + \frac{\rho_n^{\phi_0}}{\rho_n^{\psi_1}} \int_{-\infty}^{\infty} P_n^{\psi_1}(x) H_n(x) e^{-x^2} dx \\ \Rightarrow \rho_n^{\phi_0} + q \int_{-\infty}^{\infty} x^2 H_n^2(x) e^{-x^2} dx &= q \int_{-\infty}^{\infty} P_{n+2}^{\psi_1}(x) (1 + qx^2) H_n(x) \frac{e^{-x^2}}{1 + qx^2} dx + \frac{(\rho_n^{\phi_0})^2}{\rho_n^{\psi_1}}. \end{aligned}$$

Da relação de recorrência (2.1.8),

$$x H_n(x) = H_{n+1}(x) + \frac{n}{2} H_{n-1}(x).$$

Substituindo na relação acima,

$$\begin{aligned} \rho_n^{\phi_0} + q \int_{-\infty}^{\infty} x H_n(x) \left(H_{n+1}(x) + \frac{n}{2} H_{n-1}(x) \right) e^{-x^2} dx &= q^2 \int_{-\infty}^{\infty} P_{n+2}^{\psi_1}(x) x^2 H_n(x) d\psi_1(x) + \frac{(\rho_n^{\phi_0})^2}{\rho_n^{\psi_1}} \\ \Rightarrow \rho_n^{\phi_0} + q \left(\rho_{n+1}^{\phi_0} + \frac{n}{2} \rho_n^{\phi_0} \right) &= q^2 \rho_{n+2}^{\psi_1} + \frac{(\rho_n^{\phi_0})^2}{\rho_n^{\psi_1}}. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da igualdade acima por $\rho_n^{\phi_0}$, obtemos

$$\frac{\rho_n^{\phi_0}}{\rho_n^{\psi_1}} = 1 + q \left(n + \frac{1}{2} \right) - q^2 \frac{\rho_{n+2}^{\psi_1}}{\rho_n^{\phi_0}} < 1 + q \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

e então,

$$\frac{\rho_{n-1}^{\psi_1}}{\rho_{n-1}^{\phi_0}} = \frac{\rho_{n-1}^{\psi_1}}{\frac{2}{n} \rho_n^{\phi_0}} > \frac{1}{1 + q \left(n - \frac{1}{2} \right)}.$$

Assim,

$$\frac{\rho_{n-1}^{\psi_1}}{\rho_n^{\phi_0}} > \frac{2}{n + qn^2 - \frac{qn}{2}} \geq \frac{2}{n + qn^2} > \frac{2}{n^2(1 + q)},$$

ou seja,

$$\frac{\rho_{n-1}^{\psi_1}}{\rho_n^{\phi_0}} > \frac{2}{n^2(1 + q)}.$$

Substituindo em (5.2.3), temos que

$$b_n < \frac{1}{1 + \frac{2\kappa_2}{(1+q)(1+2n\kappa_1)}}. \quad n \geq 1.$$

Portanto, para $\kappa_1 = 0$,

$$b_n < \frac{1 + 1/q}{1 + 1/q + 2\lambda} < 1, \quad \text{para } n \geq 1.$$

De (3.3.6), obtemos

$$a_n = \frac{n(n-1)\tilde{d}_n(q)}{n(n-1) + 4\tilde{d}_{n-2}(q)\{2n\frac{\kappa_2}{q} + [\tilde{d}_{n-2}(q) - a_{n-2}]\}}, \quad n \geq 3,$$

para $\kappa_1 = 0$. Multiplicando ambos os lados da equação por $\frac{2}{n+2}$ e dividindo numerador e denominador por $n(n-1)$, obtemos

$$b_n = \frac{\frac{2\tilde{d}_n(q)}{n+2}}{1 + \frac{8\lambda\tilde{d}_{n-2}(q)}{n-1} + \frac{4\tilde{d}_{n-2}^2(q)}{n(n-1)} - \frac{2\tilde{d}_{n-2}(q)}{n-1}b_{n-2}}, \quad n \geq 3,$$

onde $\lambda = \frac{\kappa_2}{q}$.

Suponhamos que $b_n \rightarrow b$, quando $n \rightarrow \infty$. Então, $b^2 - 2(2\lambda + 1)b + 1 = 0$ e assim como $b_n < 1$, para todo $n \geq 1$, temos que $b = \frac{1}{\varphi(2\lambda + 1)}$.

Mostremos que $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para $\frac{1}{\varphi(2\lambda + 1)}$, quando $\kappa_1 = 0$.

Fazendo $\epsilon_n = \frac{2\tilde{d}_n(q)}{n+2}$, temos que

$$b_n = \frac{\epsilon_n}{1 + 4\lambda\epsilon_{n-2}\frac{n}{n-1} + \epsilon_{n-2}^2\frac{n}{n-1} - \epsilon_{n-2}\frac{n}{n-1}b_{n-2}},$$

logo

$$|b_n - b| = \left| \frac{\epsilon_n - b \left[1 + \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}^2 + 4\lambda\frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2} - \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}b_{n-2} \right]}{1 + \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}^2 + 4\lambda\frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2} - \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}b_{n-2}} \right|.$$



Somando e subtraindo o termo $n/(n-1)\epsilon_{n-2}b^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
 |b_n - b| &= \left| \frac{\epsilon_n - b \left[1 + \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}^2 + 4\lambda \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2} \right] + \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}b[b_{n-2} - b] + \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}b^2}{1 + \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}^2 + 4\lambda \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2} - \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}b_{n-2}} \right| \\
 &\leq \left| \frac{\epsilon_n - b \left[1 + \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}^2 + 4\lambda \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2} \right] + \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}b^2}{1 + \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}^2 + \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}(4\lambda - b_{n-2})} \right| \\
 &\quad + \frac{\frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}b|b_{n-2} - b|}{\left| 1 + \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}^2 + \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}(4\lambda - b_{n-2}) \right|}.
 \end{aligned}$$

Como $b_{n-2} < 1$ então $4\lambda - b_{n-2} > 4\lambda - 1$. Assim,

$$1 + \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}^2 + \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}(4\lambda - b_{n-2}) > \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2} \left(\epsilon_{n-2} + 4\lambda - 1 + \frac{n-1}{n\epsilon_{n-2}} \right) > 0$$

e portanto,

$$|b_n - b| < \frac{\left| \epsilon_n - b \left[1 + \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}^2 + 4\lambda \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2} \right] + \frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2}b^2 \right|}{\frac{n}{n-1}\epsilon_{n-2} \left(\epsilon_{n-2} + 4\lambda - 1 + \frac{n-1}{n\epsilon_{n-2}} \right)} + \frac{b|b_{n-2} - b|}{\epsilon_{n-2} + 4\lambda - 1 + \frac{n-1}{n\epsilon_{n-2}}}.$$

Usando (5.2.2) podemos concluir que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |b_n - b| \leq \frac{b}{4\lambda + 1} \limsup_{n \rightarrow \infty} |b_{n-2} - b|.$$

$$\text{Assim, } b_n \longrightarrow b = \frac{1}{\varphi(2\lambda + 1)}.$$

O teorema abaixo mostra o comportamento assintótico da razão entre os polinômios ortogonais de Sobolev associados a (5.2.1) e os polinômios de Hermite.

Teorema 5.2.2 *Os polinômios ortogonais de Sobolev, S_n , com relação ao produto interno (5.2.1) com $\kappa_1 = 0$ e $q > 0$, satisfazem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{H_n(x)} = 0,$$

uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.



Demonstração: Como no Teorema 5.1.3 usando a notação

$$g_n(x) = \frac{S_n(x)}{H_n(x)}, \quad e_n(x) = -a_n \frac{H_n(x)}{H_{n+2}(x)}$$

a fórmula (3.3.5) torna-se

$$g_{n+2}(x) = e_n(x)g_n(x) + p_n(x), \quad (5.2.4)$$

onde $p_n(x) = 1 + \tilde{d}_n(q) \frac{H_n(x)}{H_{n+2}(x)}$.

Como

$$\frac{2\tilde{d}_n(q)}{n+2} \longrightarrow 1, \quad \frac{2a_n}{n+2} \longrightarrow \frac{1}{\varphi(2\lambda+1)} \quad \text{e} \quad \frac{nH_n(x)}{H_{n+2}(x)} \longrightarrow -2, \quad n \longrightarrow \infty,$$

então

$$p_n(x) \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad e_n(x) \longrightarrow \frac{1}{\varphi(2\lambda+1)}, \quad n \longrightarrow \infty,$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, onde $\varphi(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

Como no Teorema 5.1.3, $f_n(x)$ é uniformemente limitada em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e então, de (5.2.4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{H_n(x)} = 0,$$

uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. ■

5.2.2 Produto interno de Sobolev $\mathbb{S}_{2G}$ associado à medida $(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx$

Apresentamos aqui, o comportamento assintótico dos coeficientes $a_n(q, \kappa_1, \kappa_2)$ do Corolário 3.3.2 e da razão entre os polinômios ortogonais de Sobolev e de Gegenbauer, apenas para o caso em que $\kappa_1 = 0$ e $q = -1$.

Para isto, consideramos

$$d\phi_0(x) = (1-x^2)^{\alpha+1/2}dx, \quad d\psi_0(x) = (1-x^2)^{\alpha-1/2}dx \quad \text{e} \quad d\psi_1(x) = \frac{(1-x^2)^{\alpha+1/2}}{1+qx^2}dx,$$

para $q \geq -1$, então $P_n^{\phi_0}(x) = G_n^{(\alpha+1)}(x)$, $P_n^{\psi_0}(x) = G_n^{(\alpha)}(x)$ e para $\kappa_1 = 0$ e $q = -1$

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_{2G}} = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx + \kappa_2 \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx. \quad (5.2.5)$$

De (3.3.3), para $\kappa_1 = 0$ e $q = -1$ temos que

$$a_n = \frac{\tilde{d}_n(-1)\rho_n^{\psi_0}}{\rho_n^{\mathbb{S}_{2G}}}, \quad n \geq 1.$$



Pela propriedade extremal,

$$\rho_n^{S_{2G}} = \langle S_n, S_n \rangle_{S_{2G}} = \int S_n^2 d\psi_0 + \kappa_2 \int (S'_n)^2 d\psi_1 \geq \kappa_2 \int (S'_n)^2 d\psi_1 \geq \kappa_2 n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1},$$

logo

$$a_n \leq \frac{\tilde{d}_n(-1) \rho_n^{\psi_0}}{\kappa_2 n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1}}, \quad n \geq 1.$$

Mas, para $\kappa_1 = 0$ e $q = -1$, temos que $d\psi_1 = d\psi_0 = (1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx$ e então $\frac{\rho_n^{\psi_0}}{\rho_{n-1}^{\psi_1}} = \alpha_{n+1}^{(\alpha)}$, assim

$$0 < a_n \leq \frac{\tilde{d}_n(-1) \alpha_{n+1}^{(\alpha)}}{\kappa_2 n^2},$$

onde $\alpha_{n+1}^{(\alpha)} = \frac{n(n+2\alpha-1)}{4(n+\alpha)(n+\alpha-1)} \rightarrow \frac{1}{4}$, $n \rightarrow \infty$. De (3.2.16), temos que

$$d_{n-1}(-1) = -\frac{n(n+1)}{4(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \rightarrow -\frac{1}{4}, \quad \text{para } n \rightarrow \infty$$

e portanto,

$$a_n \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (5.2.6)$$

para $\kappa_1 = 0$ e $q = -1$.

O próximo resultado descreve o comportamento assintótico da razão entre os polinômios ortogonais de Sobolev e os polinômios de Gegenbauer de parâmetro α , quando $\kappa_1 = 0$ e $q = -1$. Este resultado pode ser derivado de resultados encontrados em [10] e é dado também em [13].

Teorema 5.2.3 *Os polinômios ortogonais de Sobolev, S_n , com relação ao produto interno (5.2.5) satisfazem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{G_n^{(\alpha)}(x)} = \frac{2}{\varphi'(x)},$$

uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, quando $\kappa_1 = 0$ e $q = -1$, onde $\varphi(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

Demonstração: De (3.3.9) temos que

$$S_n(x) + a_{n-2} S_{n-2}(x) = G_n^{(\alpha)}(x) + \tilde{d}_{n-2}(q) G_{n-2}^{(\alpha)}(x).$$

Dividindo a relação acima por $G_n^{(\alpha)}(x)$, obtemos

$$\frac{S_n(x)}{G_n^{(\alpha)}(x)} = 1 + \tilde{d}_{n-2}(q) \frac{G_{n-2}^{(\alpha)}(x)}{G_n^{(\alpha)}(x)} - a_{n-2} \frac{S_{n-2}(x)}{G_{n-2}^{(\alpha)}(x)} \frac{G_{n-2}^{(\alpha)}(x)}{G_n^{(\alpha)}(x)}$$



De (5.1.13) temos que $\frac{G_{n-2}^{(\alpha)}(x)}{G_n^{(\alpha)}(x)} \rightarrow \frac{4}{\varphi^2(x)}$ e de (5.2.6), $a_n \rightarrow 0$, para $q = -1$ e $\kappa_1 = 0$. Além disso, de (3.2.16), temos que

$$d_{n-1}(-1) = -\frac{n(n+1)}{4(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \rightarrow -\frac{1}{4}, \quad \text{para } n \rightarrow \infty.$$

Portanto,

$$\frac{S_n(x)}{G_n^{(\alpha)}(x)} \rightarrow 1 - \frac{1}{\varphi^2(x)} = \frac{2(x^2 - 1 + x\sqrt{x^2 - 1})}{\varphi^2(x)} = \frac{2\sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\varphi^2(x)} = \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{\varphi(x)},$$

ou seja,

$$\frac{S_n(x)}{G_n^{(\alpha)}(x)} \rightarrow \frac{2}{\varphi'(x)}, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

■

Em trabalho futuro, estudos análogos podem ser feitos quando $\kappa_1 \neq 0$ e $q \neq -1$.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Alfaro, J.J. Moreno-Balcázar, T.E. Perez, M.A. Piñar, M.L. Rezola, Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for Hermite coherent pairs, *J. Comput. Appl. Math.*, 133, (2001) 141-150.
- [2] M. Alfaro, J.J. Moreno-Balcázar, M.L. Rezola, Laguerre-Sobolev orthogonal polynomials: asymptotics for coherent pairs of type II, *J. Approx. Theory*, 122, (2003) 79-96.
- [3] A.C. Berti, A. Sri Ranga, Companion orthogonal polynomials: some applications, *Appl. Num. Math.*, 39 (2001) 127-149.
- [4] C.F. Bracciali, D.K. Dimitrov, A. Sri Ranga, Chain sequences and symmetric generalized orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.*, 143 (2002) 95-106.
- [5] M.G. de Bruin, W.G.M. Groenevelt, H.G. Meijer, Zeros of Sobolev orthogonal polynomials of Hermite type, *Appl. Math. Comp.*, 132 (2002) 135-166.
- [6] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [7] W.G.M. Groenevelt, Zeros of Sobolev orthogonal polynomials of Gegenbauer type, *J. Approx. Theory*, 114 (2002) 115-140.
- [8] A. Iserles, P.E. Koch, S.P. Nørsett, J.M. Sanz-Serna, On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products, *J. Approx. Theory*, 65, (1991) 151-175.
- [9] D.C. Lewis, Polynomial least square approximations, *Amer. J. Math.*, 69, (1947) 273-278.
- [10] F. Marcellán, A. Martínez-Finkelshtein, J.J. Moreno-Balcázar, Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for symmetrically coherent pairs of measures with compact support, *J. Comput. Appl. Math.*, 81, (1997) 217-227.



-
- [11] F. Marcellán, H.G. Meijer, T.E. Pérez, M.A. Piñar, An asymptotic result for Laguerre-Sobolev orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.*, 87, (1997) 87-94.
 - [12] A. Martínez-Finkelshtein, J.J. Moreno-Balcázar, T.E. Pérez, M.A. Piñar, Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for coherent pairs of measures, *J. Approx. Theory*, 92, (1998) 280-293.
 - [13] A. Martínez-Finkelshtein, J.J. Moreno-Balcázar, H. Pijeira-Cabrera, Strong asymptotics for Gegenbauer-Sobolev orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.*, 81, (1997) 211-216.
 - [14] H.G. Meijer, Coherent pairs and zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials, *Indag. Math.*, 4 (1992) 163-176.
 - [15] H.G. Meijer, Determination of all coherent pairs, *J. Approx. Theory*, 89, (1997) 321-343.
 - [16] H.G. Meijer, M.G. de Bruin, Zeros of Sobolev orthogonal polynomials following from coherent pairs, *J. Comp. Appl. Math.*, 139 (2002) 253-274.
 - [17] H.G. Meijer, T.E. Pérez, M.A. Piñar, Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for coherent pairs of Laguerre type, *J. Math. Anal. Appl.*, 245, (2000) 528-546.
 - [18] H.G. Meijer, M.A. Piñar, Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for coherent pairs of Jacobi type, *J. Comput. Appl. Math.*, 108, (1999) 87-97.
 - [19] K. Pan, Asymptotics for Sobolev orthogonal polynomials with coherent pairs: the Jacobi case, type 1, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126, 8, (1998) 2377-2388.
 - [20] K. Pan, On Sobolev orthogonal polynomials with coherent pairs: the Jacobi case, *J. Comput. Appl. Math.*, 79, (1997) 249-262.
 - [21] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, 4th ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
 - [22] W. Van Assche, Asymptotic properties of orthogonal polynomials from their recurrence formula, I, *J. Approx. Theory*, 44, (1985) 258-276.



