



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Leonardo Tambellini

**Sistemas Dinâmicos Finitos: Paciência Búlgara
(Shift em Partições e Composições cíclicas)**

São José do Rio Preto

2013

Leonardo Tambellini

Sistemas Dinâmicos Finitos: Paciência Búlgara
(Shift em Partições e Composições cíclicas)

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

São José do Rio Preto

2013

Tambellini, Leonardo.

Sistemas dinâmicos finitos : paciência búlgara (Shift em partições e composições cíclicas) / Leonardo Tambellini. - São José do Rio Preto : [s.n.], 2013.

80 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Vanderlei Minori Horita

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Teoria dos números. 3. Partições (Matemática) 4. Paciência búlgara. I. Horita, Vanderlei Minori. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

Leonardo Tambellini

Sistemas Dinâmicos Finitos: Paciência Búlgara
(Shift em Partições e Composições cíclicas)

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

Orientador

UNESP - IBILCE

Prof. Dr. Carlos Gustavo T. de A. Moreira

IMPA - RJ

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzzi

UNESP - IBILCE

São José do Rio Preto

26 de junho de 2013

À minha família.
Dedico.

AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho, deixo meus sinceros agradecimentos:

Aos meus pais, Domingos e Angélica, e à minha irmã Natália, por todo o apoio.

À minha companheira de longa data, Jeanne, pelo amor, paciência e motivação durante todos esses anos.

À todos os agregados, moradores e frequentadores da república Kurupi, pelos bons momentos que passamos nos inúmeros churrascos, almoços, cervejadas...

Aos meus amigos e colegas de trabalho do Departamento de Matemática do IBILCE.

Aos professores que fizeram parte da banca examinadora, Vanderlei, Claudio Buzzi e Gugu.

Aos meus amigos de graduação e pós-graduação.

À CNPq, pelo auxílio financeiro.

E à todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

“A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.”

(Galileo Galilei)

Resumo

Neste trabalho abordamos um tema introdutório na interseção de duas áreas da Matemáticas, Sistemas Dinâmicos e Teoria dos Números. Através de um jogo aparentemente ingênuo, a Paciência Búlgara, estudamos dinâmicas em conjuntos finitos. Devido à finitude do domínio, todos os pontos do sistema convergem para uma órbita periódica, mas interessante é saber quantas órbitas distintas o sistema apresenta em função da quantidade de elementos do domínio. Outra pergunta natural é sobre o tempo de convergência a estas órbitas. Estudamos também uma variação deste jogo, a Paciência Carolina.

Palavras-chave: Paciência Búlgara. Partições de Inteiros. Aplicação Shift. Paciência Carolina.

Abstract

This work refers to a introductory topic in the intersection of two areas in Mathematics, Dynamical Systems and Number Theory. Motivated to a game seemingly naive, Bulgarian Solitaire, we study dynamics in finite sets. Due to the finiteness of the domain, all points of the system converge to a periodic orbit, but it is interesting to know how many distinct orbits the system displays depending on the size of the domain. Another natural question is about the convergence time of these orbits. We also study a variation of this game, Carolina Solitaire.

Keywords: Bulgarian Solitaire. Integer Partitions. Shift application. Carolina Solitaire.

Sumário

Introdução	10
1 Conceitos Iniciais	13
2 Paciência Búlgara	15
2.1 Partições e aplicação $\mathcal{B}$ -shift	15
2.2 Partições cíclicas, $d_{\mathcal{B}}(\lambda)$ e $D_{\mathcal{B}}(n)$	18
2.3 Plotando diagramas através do software “Wolfram Mathematica”	20
2.4 Caracterização das Partições Cíclicas	23
2.5 Quantidade de Ciclos	30
2.6 Partição raiz, gerada, pré-cíclica e caracterizações	34
2.7 Cálculo de $D_{\mathcal{B}}(n)$ para números triangulares	38
2.8 Cálculo de Limites de $D_{\mathcal{B}}(n)$ para números não triangulares	49
2.9 Conjectura	59
3 Paciência Carolina: Uma variação da Paciência Búlgara	60
3.1 Composições e aplicação $\mathcal{C}$ -shift	60
3.2 Composições cíclicas, $d_{\mathcal{C}}(\lambda)$ e $D_{\mathcal{C}}(n)$	62
3.3 Caracterização das Composições Cíclicas	64
3.4 Cálculo de $D_{\mathcal{C}}(n)$ para números triangulares	68
3.5 Cálculo de Limites de $D_{\mathcal{C}}(n)$ para números não triangulares	70
3.6 Conjectura	79

Introdução

Antes de começarmos com a matemática, vamos a um breve histórico do surgimento do problema que será estudado.

Em meados de 1980, em uma viagem de trem de Moscou à São Petersburgo:

— Olá, para você que é um matemático deixe-me mostrar uma coisa interessante - disse o estranho sem nome no trem.

Mas eu estou tentando trabalhar na minha palestra, pensei. Enquanto o trem percorria os trilhos, o homem sentado à minha frente me olhava ansioso. *OK, vamos acabar logo com isso.*

— Aqui temos 15 cartas de um baralho, divida-as em quantas pilhas quiser, e em cada pilha coloque quantas cartas quiser.

E eu as dividi em pilhas de tamanho 3, 1, 4, 1, 6.

— Agora retire uma carta de cada pilha e forme uma nova pilha com estas cartas.

A operação me deixou com pilhas de $3 - 1 = 2$ cartas, $4 - 1 = 3$ cartas, $6 - 1 = 5$ cartas, duas pilhas vazias e uma nova pilha de 5 cartas. Eu percebi que a ordem das pilhas não importava, então por convenção, as coloquei em ordem não crescente, 5, 5, 3, 2.

— Agora repita isso de novo e de novo. Eu sei o que vai acontecer — e assim o homem olhou para o outro lado, onde não estavam as cartas.

Ele já conseguiu pensar através das iterações? Quanto tempo isso levará? Eu estava curioso agora. Assim obtive a seguinte sequência do tamanho das pilhas:

$(6, 4, 3, 1, 1) \rightarrow (5, 5, 3, 2) \rightarrow (4, 4, 4, 2, 1) \rightarrow (5, 3, 3, 3, 1) \rightarrow (5, 4, 2, 2, 2) \rightarrow$
 $\rightarrow (5, 4, 3, 1, 1, 1) \rightarrow (6, 4, 3, 2)$

Nossa! É quase como eu comecei. Quando isso irá terminar? E então, de repente, terminou: $(6, 4, 3, 2) \rightarrow (5, 4, 3, 2, 1) \rightarrow (5, 4, 3, 2, 1)$ de novo.

— Hmm — eu disse.

— Você terminou com uma pilha com 5 cartas, outra com 4 cartas, outra com 3 cartas, outra com 2 cartas e por fim uma com 1 carta, não foi? — e assim o homem voltou os olhos para as cartas.

– Isso é o que sempre ocorre. Tente novamente!

Eu comecei com uma única pilha com 15 cartas. Levou mais movimentos, mas chegou no padrão 5,4,3,2,1. Então eu comecei com 3 pilhas de 5 cartas. Demorou um pouco mais, mas novamente chegou na mesma configuração.

Três exemplos não é uma prova, mas o fato é razoável. *Sempre será alcançada a mesma configuração? Quanto tempo demora para alcançar a configuração padrão? O que acontece com outro números de cartas?*

– Isso é interessante – admiti.

Esse “quebra-cabeça” foi popularizado por Martin Gardner em 1983 [3], com um nome peculiar “*Paciência Búlgara*”.

Antes de Gardner:

Por volta de 1980, Kostantin Oskolkov do *Steklov Mathematical Institute* de Moscou viajou em um trem para dar uma palestra em *Leningrad*, agora São Petersburgo. Um homem no trem lhe explicou sobre o problema, no entanto os detalhes do diálogo acima é fictício, Oskolkov compartilhou isso com seus colegas no instituto. Dizem que quando um matemático da área de teoria dos números soube sobre o problema, “o seu rosto assumiu uma expressão satânica, correu para seu escritório, trancou a porta e não saiu de lá até resolver o problema”.

O “quebra-cabeça” chegou a Victor Gutenmacher, editor do jornal *Kvant*. O problema apareceu por lá em 1980, no contexto de pilhas de livros. Andrei Toom, um cientista na Universidade Estadual de Moscou, publicou uma solução em 1981. O material foi também incluído em um livro de olimpíadas de matemática em 1981 no qual os autores incluem Gutenmacher e Toom.

No fim de 1980, Anatolii Alexeevich Karatsuba viajou de Steklov para o Instituto de Matemática da Academia de Ciências da Bulgária em Sofia. Depois de uma palestra de teoria de aproximação, ele compartilhou a história de Oskolkov e do quebra-cabeça. Novamente, ele capturou a atenção de muitos matemáticos, e Milko Petkov o publicou na seção de “competição de problemas” de um jornal de uma escola de nível médio em 1980, no contexto de monte de bolas. Nenhum estudante conseguiu resolver o problema, e então a solução de Borislav Bojanov, colega do instituto de Petkov, foi publicada em 1981.

Gert Almkvist da Universidade Lund, estava visitando a cidade de Sofia enquanto Karatsuba estava lá. Quando Almkvist retornou para a Suécia, ele compartilhou o quebra-cabeça com seus colegas, incluindo Henrik Eriksson da KTH Royal Institute of Technology, que publicou uma solução também em 1981, com o nome “Bulgarisk patiens”, no contexto de pilha de cartas.

Jørgen Brandt, terminou seu mestrado na Universidade de Aarhus, e de algum modo aprendeu o quebra-cabeça também (sem nenhum nome). “O problema pareceu tão puro, que eu não pensei muito de onde ele possa ter vindo”, explicou recentemente. Sua solução, no cenário de partições de inteiros, foi submetida para *Proceedings of the American Mathematical Society* em 1981 e publicada em 1982.

Enquanto isso, Eriksson viajou de Estocolmo para a Califórnia, onde ele chamou o quebra-cabeça de Bulgarian Solitaire, na tradução literal, Paciência Búlgara. Ele explicou recentemente, “O nome bobo foi minha invenção, bobo porque não é nem Búlgaro e nem é jogo de paciência”. Donald Knuth começou em 1982 seminários de programação e solução problema com a Paciência Búlgara. Ron Graham passou isso à Gardner que em 1983 popularizou com o mesmo nome dado por Eriksson, que até hoje perdurou.

Após isso, outras variações da Paciência Búlgara foram criadas. O intuito deste trabalho é estudar a versão original e uma variação chamada Paciência Carolina [4]. Vamos transformar a Paciência Búlgara no cenário de Sistemas Dinâmicos, trocando cartas por números inteiros positivos, o conjunto de pilhas por partição desses números e o movimento do jogo por uma aplicação shift bem definida no conjunto das partições.

Capítulo 1

Conceitos Iniciais

Um **sistema dinâmico** é uma função f definida em um certo conjunto X , ou seja,

$$f : X \longrightarrow X$$

A dinâmica, isto é, a passagem do tempo, é visto como sendo a iteração dessa função. Desta forma, se começamos com um ponto $x \in X$ (que corresponde ao instante zero) depois ele estará em $f(x)$ (instante 1), depois $f(f(x))$ (instante 2) e assim sucessivamente. Para evitarmos escrever expressões como

$$f(f(f(f(f(x))))) \tag{1.1}$$

usaremos a seguinte convenção, padrão nessa área:

$$f^0(x) := x \quad f^1(x) := f(x) \quad f^n(x) := f(f^{n-1}(x)) \text{ para } n \geq 1$$

Desta maneira a expressão (1.1) pode ser reescrita simplesmente $f^5(x)$ significando que f foi iterada 5 vezes. Não se deve confundir isso com elevar $f(x)$ a potência 5, até porque essa operação algébrica pode não fazer o menor sentido no conjunto X . Nessa nova notação, então, o que se pretende estudar é a evolução do tempo de um ponto x , ou seja, $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots$. Este conjunto é conhecido como a **órbita do ponto** x :

$$O(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(x)$$

.

Dizemos que x é um **ponto periódico** ou **cíclico** de período p se p é o menor inteiro tal que $f^p(x) = x$. Quando $p = 1$, ou seja, temos $f(x) = x$, então dizemos simplesmente que x é um **ponto fixo** para f .

Quando x é periódico então sua órbita $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^{p-1}(x)$ é um conjunto finito conhecido como **órbita periódica** ou **cíclica**.

Definição 1.0.1 *Seja n um inteiro positivo, dizemos que n é um **número triangular** se $n = 1 + 2 + \dots + k = T_k = \frac{(k)(k+1)}{2}$ para algum $k \in \mathbb{Z}^+$.*

Exemplo 1.0.1 *Os números 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 são os 7 primeiros números triangulares.*

Definição 1.0.2 *Seja x um número natural, a função **totiente**, às vezes chamada de **totiente**, ou **função ϕ** de Euler, representada por $\varphi(x)$, é definida como sendo igual à quantidade de números naturais menores ou iguais à x coprimos com respeito à ele, ou seja,*

$$\varphi(x) = \#\{n \in \mathbb{N} \mid (n \leq x) \wedge (\text{mdc}(n, x) = 1)\}$$

Exemplo 1.0.2 $\varphi(8) = 4$, uma vez que os números 1, 3, 5 e 7 são coprimos de 8. $\varphi(1) = 1$, já que $\text{mdc}(1, 1) = 1$.

Capítulo 2

Paciência Búlgara

2.1 Partições e aplicação $\mathcal{B}$ -shift

Definição 2.1.1 (Partição) *Seja n um inteiro positivo, dizemos que $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{Z}^s$, $s = 1, \dots, n$, é uma **partição** de n , e escrevemos $\lambda \vdash n$, se $\lambda_i > 0$, $\forall i = 1, \dots, s$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s$ e $\sum_{i=1}^s \lambda_i = n$. Nesse caso chamamos cada λ_i , $i = 1, \dots, s$ de i -ésima **parte** da partição. O número de partes da partição definimos como sendo o seu comprimento (tamanho), e escrevemos $|\lambda| = s$.*

Exemplo 2.1.1 $\lambda = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ e $\mu = (4, 2)$ são partições do número 6. λ possui 6 partes iguais, ou seja, $|\lambda| = 6$ e μ possui 2 partes distintas, $|\mu| = 2$.

Definição 2.1.2 *Seja n um inteiro positivo, definimos $\Lambda_n = \{\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ o conjunto de todas as partições de n .*

Em Teoria dos Números, a cardinalidade de Λ_n ($\#\Lambda_n$) é a **Função Partição** $p(n)$ que calcula a quantidade de partições possíveis de n . Quando precisarmos calcular a quantidade de partições de um determinado inteiro n , utilizaremos o comando “Lenght[IntegerPartitions[n]]” do software “Wolfram Mathematica”.

Exemplo 2.1.2 *Seja $n = 4$. No software “Wolfram Mathematica” utilizando o comando “IntegerPartitions[4]” obtemos as partições de 4, que são: $(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)$. Utilizando o comando “Lenght[IntegerPartitions[4]]” obtemos o valor 5 que é a quantidade de partições de 4 que, em teoria dos números, é $p(4)$, e pela definição anterior é também a cardinalidade de Λ_4 ($\#\Lambda_4 = 5$).*

Definição 2.1.3 *Sejam n um inteiro positivo e $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \vdash n$. Definimos por $\mathcal{B}$ -shift a aplicação, $\mathcal{B} : \Lambda_n \longrightarrow \Lambda_n$, que associa λ à uma nova partição de n denotada por $\mathcal{B}(\lambda)$, obtida da seguinte maneira:*

- 1) *diminui-se uma unidade de cada parte λ_i , $i = 1, \dots, s$.*
- 2) *Descarta(m)-se a(s) parte(s) nula(s), caso houver.*
- 3) *Insera-se uma parte de tamanho s de forma que $\mathcal{B}(\lambda)$ seja uma partição de n .*

Observação 2.1.1 *Se $|\lambda| = s$ então, pela definição, $|\mathcal{B}(\lambda)| \leq s + 1$.*

Exemplo 2.1.3 *Sejam $\lambda = (2, 2, 2, 1, 1)$, $\theta = (7, 1)$ e $\gamma = (2, 2, 2, 2)$ partições de 8. $\mathcal{B}(\lambda) = (5, 1, 1, 1)$, $\mathcal{B}(\theta) = (6, 2)$ e $\mathcal{B}(\gamma) = (4, 1, 1, 1, 1)$.*

Geometricamente podemos ver a aplicação $\mathcal{B}$ -shift da seguinte maneira:

Suponha que o número inteiro dado seja uma quantidade de blocos, como ilustrado na Figura 2.1.

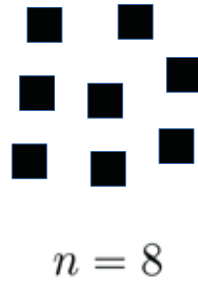


Figura 2.1: 8 blocos

Uma partição desse número pode ser representada por uma pilha desses blocos dispostos de maneira não crescente. Por exemplo a partição $\lambda = (2, 2, 2, 1, 1)$ é representada como mostra a Figura 2.2.

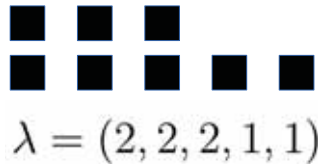


Figura 2.2: Uma partição de $n = 8$

A aplicação $\mathcal{B}$ -shift retira um bloco de cada pilha (por convenção pode-se supor que o bloco retirado é o do topo da pilha), e com esses blocos retirados forma-se uma nova pilha que é colocada de maneira que os blocos continuem organizados de forma não crescente, conforme a Figura 2.3.

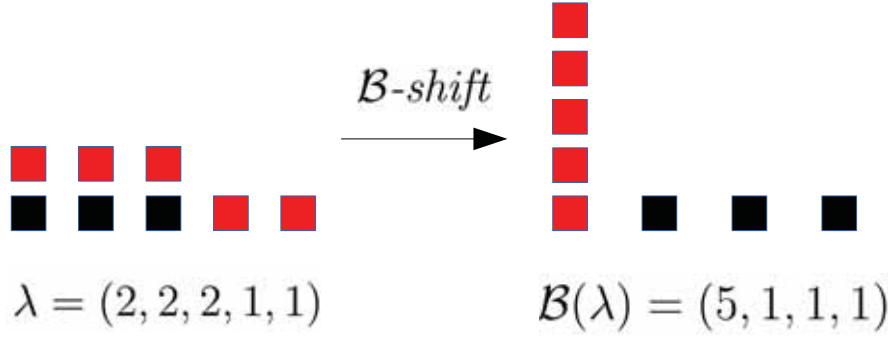


Figura 2.3: $\mathcal{B}$ -shift

Com base nos conceitos do Capítulo 1, dado n um inteiro positivo vamos estudar a dinâmica do conjunto Λ_n pela aplicação $\mathcal{B}$ -shift.

Definição 2.1.4 Dada uma partição λ de um inteiro positivo n , descrevemos a “Paciência Búlgara” de λ como sendo a sequência:

$$\lambda, \mathcal{B}(\lambda), \mathcal{B}^{(2)}(\lambda), \dots$$

tal que $\mathcal{B}^{(i)}(\lambda)$, $i \in \mathbb{Z}^+$, representa a partição de n , obtida através de sucessivas aplicações de $\mathcal{B}$ -shift em λ , no total de i vezes. Nesse caso dizemos que $\mathcal{B}^{(i)}(\lambda)$ é a i -ésima iterada de λ pela aplicação $\mathcal{B}$ -shift.

Ou seja, a “Paciência Búlgara” de uma partição $\lambda \vdash n$, pensando como um sistema dinâmico no conjunto Λ_n com a aplicação $\mathcal{B}$ -shift, nada mais é do que a sua órbita.

Observação 2.1.2 Como o número de partições de um número inteiro é finito, então as partições da sequência da Paciência Búlgara começam a repetir em algum momento.

Exemplo 2.1.4 Seja $\lambda = (2, 1, 1, 1, 1) \vdash 6$, então temos $\mathcal{B}(\lambda) = (5, 1)$, $\mathcal{B}^{(2)}(\lambda) = (4, 2)$, $\mathcal{B}^{(3)}(\lambda) = (3, 2, 1)$, $\mathcal{B}^{(4)}(\lambda) = (3, 2, 1)$, $\dots$

$$(2, 1, 1, 1, 1) \xrightarrow{\mathcal{B}} (5, 1) \xrightarrow{\mathcal{B}} (4, 2) \xrightarrow{\mathcal{B}} (3, 2, 1) \xrightarrow{\mathcal{B}} (3, 2, 1) \longrightarrow \dots$$

Figura 2.4:

$$(6, 1) \xrightarrow{\mathcal{B}} (5, 2) \xrightarrow{\mathcal{B}} (4, 2, 1) \xrightarrow{\mathcal{B}} (3, 3, 1) \xrightarrow{\mathcal{B}} (3, 2, 2) \xrightarrow{\mathcal{B}} (3, 2, 1, 1) \xrightarrow{\mathcal{B}} (4, 2, 1)$$

Figura 2.5:

Exemplo 2.1.5 *Seja $\mu = (6, 1) \vdash 7$, assim temos $\mathcal{B}(\mu) = (5, 2)$, $\mathcal{B}^{(2)}(\mu) = (4, 2, 1)$, $\mathcal{B}^{(3)}(\mu) = (3, 3, 1)$, $\mathcal{B}^{(4)}(\mu) = (3, 2, 2)$, $\mathcal{B}^{(5)}(\mu) = (3, 2, 1, 1)$, $\mathcal{B}^{(6)}(\mu) = (4, 2, 1)$, $\mathcal{B}^{(7)}(\mu) = (3, 3, 1)$, $\dots$.*

Observe que no Exemplo 2.1.4 após 4 iterações de $\mathcal{B}$ em λ chegamos em uma partição que não se modifica através de $\mathcal{B}$. Já no Exemplo 2.1.5, as partições começaram a se repetir após 6 iterações de $\mathcal{B}$ em μ .

2.2 Partições cíclicas, $d_{\mathcal{B}}(\lambda)$ e $D_{\mathcal{B}}(n)$

Sejam n um inteiro positivo, $\lambda \vdash n$ e $\mathcal{B} : \Lambda_n \longrightarrow \Lambda_n$.

Definição 2.2.1 *Dizemos que λ é $\mathcal{B}$ -cíclica, ou simplesmente cíclica, de período i , se i é o menor inteiro positivo tal que $\mathcal{B}^{(i)}(\lambda) = \lambda$. Assim o conjunto $\mathcal{O}(\lambda) = \{\lambda, \mathcal{B}(\lambda), \mathcal{B}^{(2)}(\lambda), \dots, \mathcal{B}^{(i-1)}(\lambda)\}$ é a sua órbita periódica, ou ciclo, e o seu período é i . Nesse caso também podemos dizer que λ é periódica de período i .*

Observação 2.2.1 (1) *Se $i = 1$ dizemos que λ é uma partição fixa.*

(2) *Se λ é cíclica de período i , então $\mathcal{O}(\lambda) = \mathcal{O}(\mathcal{B}(\lambda)) = \dots = \mathcal{O}(\mathcal{B}^{(i-1)}(\lambda))$*

No Exemplo 2.1.4, a partição $(3, 2, 1)$ é uma partição fixa, ou seja, uma partição $\mathcal{B}$ -cíclica de período 1, enquanto no Exemplo 2.1.5 as partições $(4, 2, 1)$, $(3, 3, 1)$, $(3, 2, 2)$, $(3, 2, 1, 1)$ também são periódicas, todas de período 4.

Definição 2.2.2 *Definimos $d_{\mathcal{B}}(\lambda)$ como sendo o menor inteiro $i \geq 0$ tal que $\mathcal{B}^{(i)}(\lambda)$ é $\mathcal{B}$ -cíclica e $D_{\mathcal{B}}(n) := \max\{d_{\mathcal{B}}(\lambda) \mid \lambda \vdash n\}$.*

Observação 2.2.2 Nesse caso i é o menor tempo necessário (número de iteradas) para a partição λ alcançar um ciclo. Pode-se falar também que λ levou i iteradas para alcançar um ciclo ou uma partição $\mathcal{B}$ -cíclica. $D_{\mathcal{B}}(n)$ é o maior valor de $d_{\mathcal{B}}(\lambda)$, $\lambda \vdash n$.

Exemplo 2.2.1 Seja $\lambda = (4, 1) \vdash 5$. Fazendo as iterações em λ obtemos:

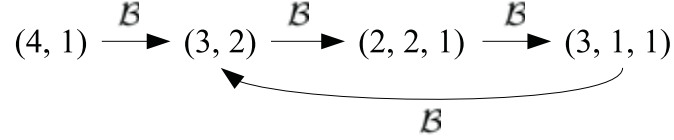


Figura 2.6:

Assim $d_{\mathcal{B}}(\lambda) = 1$ pois a partição $\mu = \mathcal{B}(\lambda) = (3, 2)$ é $\mathcal{B}$ -cíclica, já que $\mathcal{B}^{(3)}(\mu) = \mu$.

Exemplo 2.2.2 $D_{\mathcal{B}}(4) = 2$, pois as partições de 4 são $\lambda = (1, 1, 1, 1)$, $\alpha = (4)$, $\gamma = (3, 1)$, $\delta = (2, 2)$, $\beta = (2, 1, 1)$ e, $d_{\mathcal{B}}(\lambda) = 2$, $d_{\mathcal{B}}(\alpha) = 1$, $d_{\mathcal{B}}(\gamma) = d_{\mathcal{B}}(\delta) = d_{\mathcal{B}}(\beta) = 0$.

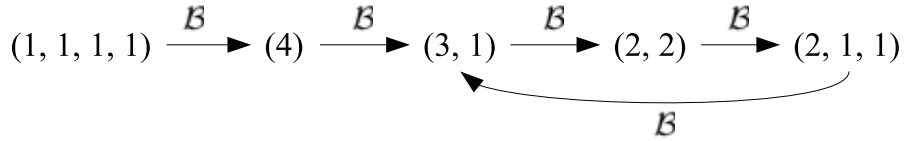


Figura 2.7:

Os valores de $D_{\mathcal{B}}(n)$, $4 \leq n \leq 36$, são mostrados na tabela a seguir, calculados computacionalmente. A representação de n é da forma $n = 1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + r$, $1 \leq r \leq k$.

Um dos objetivos principais deste trabalho é encontrarmos o valor de $D_{\mathcal{B}}(n)$ e para isso precisaremos introduzir vários conceitos, para assim termos ferramentas necessárias para determiná-lo. Para n triangular $D_{\mathcal{B}}(n)$ é um valor exato, quando n não for triangular vamos encontrar um limite superior e um limite inferior, que é conjecturado como sendo o valor exato.

Tabela 2.1: Valores de $D_{\mathcal{B}}(n)$, $n = 4, \dots, 36$

	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
$r = 1$	$D_{\mathcal{B}}(4) = 2$	$D_{\mathcal{B}}(7) = 4$	$D_{\mathcal{B}}(11) = 8$	$D_{\mathcal{B}}(16) = 15$	$D_{\mathcal{B}}(22) = 24$	$D_{\mathcal{B}}(29) = 35$
$r = 2$	$D_{\mathcal{B}}(5) = 3$	$D_{\mathcal{B}}(8) = 5$	$D_{\mathcal{B}}(12) = 8$	$D_{\mathcal{B}}(17) = 12$	$D_{\mathcal{B}}(23) = 18$	$D_{\mathcal{B}}(30) = 28$
$r = 3$	$D_{\mathcal{B}}(6) = 6$	$D_{\mathcal{B}}(9) = 7$	$D_{\mathcal{B}}(13) = 9$	$D_{\mathcal{B}}(18) = 13$	$D_{\mathcal{B}}(24) = 18$	$D_{\mathcal{B}}(31) = 24$
$r = 4$		$D_{\mathcal{B}}(10) = 12$	$D_{\mathcal{B}}(14) = 14$	$D_{\mathcal{B}}(19) = 16$	$D_{\mathcal{B}}(25) = 19$	$D_{\mathcal{B}}(32) = 25$
$r = 5$			$D_{\mathcal{B}}(15) = 20$	$D_{\mathcal{B}}(20) = 23$	$D_{\mathcal{B}}(26) = 26$	$D_{\mathcal{B}}(33) = 29$
$r = 6$				$D_{\mathcal{B}}(21) = 30$	$D_{\mathcal{B}}(27) = 34$	$D_{\mathcal{B}}(34) = 38$
$r = 7$					$D_{\mathcal{B}}(28) = 42$	$D_{\mathcal{B}}(35) = 47$
$r = 8$						$D_{\mathcal{B}}(36) = 56$

2.3 Plotando diagramas através do software “Wolfram Mathematica”

O software “*Wolfram Mathematica*” será muito útil neste trabalho pois dado n um inteiro positivo, é possível plotar a “Paciência Búlgara”, ou seja, um diagrama contendo a dinâmica de todas as suas partições através da aplicação $\mathcal{B}$ -shift, o qual daremos o nome de **Diagrama $\mathcal{B}$ -shift de n** . Nesse diagrama os símbolos “•” representam as partições de n e as flechas, representam as aplicações $\mathcal{B}$ -shift. As partições cíclicas em especial, serão coloridas em vermelho. A única diferença de notação é que no texto definimos as partições entre parênteses “()” e nos diagramas as partições aparecem entre chaves “{ }”

O diagrama nos ajudará a entender melhor as definições deste trabalho, assim como nos ajudará no entendimento de demonstrações de resultados.

O código utilizado, feito por Ken Levasseur, disponibilizado em seu blog:

<http://applieddiscretestructures.blogspot.com.br/2011/01/bulgarian-solitaire-follow-up.html>, é composto de 3 linhas, onde a primeira linha define a iteração que usamos, a segunda linha é usada para definir a plotagem do diagrama e a terceira linha é para executar o comando:

1ª Linha: `Bulgaria[pile_List] := Sort[Select[Prepend[pile -1, Length[pile]], # > 0 &], #1 > #2 &]`

2ª Linha: `BulgariaGraphLabeled[n_] := Graph[Map[# -> Bulgaria[#] &, IntegerPartitions[n]], VertexLabels -> “Name”, PlotRange -> All, VertexSize -> Nor-`

mal, PlotRangePadding -> 1, ImagePadding -> 1, GraphStyle -> “BasicBlack”,
GraphLayout -> “SpringElectricalEmbedding”]

3ª Linha: BulgariaGraphLabeled[n]

onde n é um inteiro positivo.

Na 2ª linha é possível fazer várias alterações, como por exemplo, caso não for interessante a rotulação da partição basta trocar *VertexLabels* -> “Name” por *VertexLabels* -> *None*. É importante observar que neste software há o chamado *Case sensitive* que é a diferenciação de letra maiúscula de minúscula.

Se for interessante também é possível rotular a partição com o respectivo tamanho, bastando substituir na segunda linha, *VertexLabels* -> “Name” por *VertexLabels* -> *Map[# -> Length[#] &, IntegerPartitions[n]]*.

Há várias opções para *GraphStyle* (Cores) e *GraphLayout* (Estilo de disposição das partições) que estão elencadas no próprio *Help* do software.

Exemplo 2.3.1 A Figura 2.8 representa a dinâmica das partições de $n = 7$. Pelo diagrama conseguimos encontrar o valor de $d_{\mathcal{B}}(\lambda)$ para qualquer λ partição de n , assim como o valor de $D_{\mathcal{B}}(n)$.

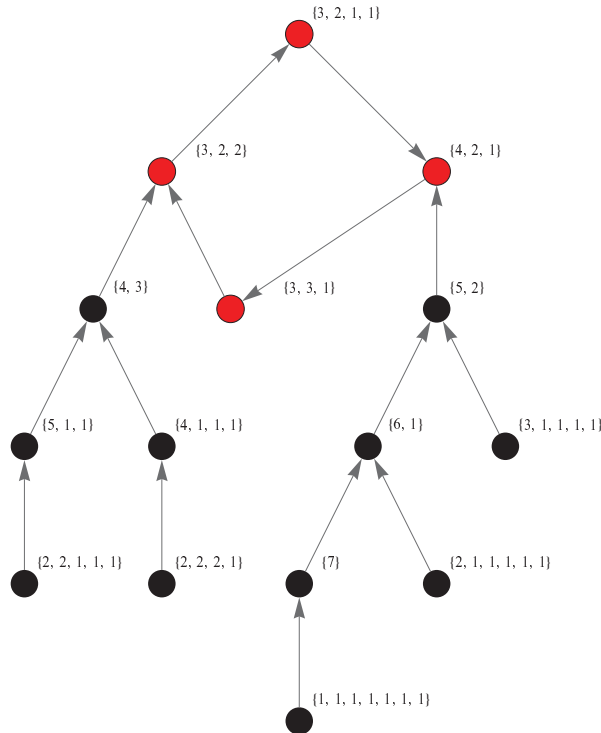


Figura 2.8: Diagrama $\mathcal{B}$ -shift de $n = 7$, estilo LayeredDrawing

A Figura 2.9 também representa a dinâmica das partições de $n = 7$, a diferença é apenas o GraphLayout.

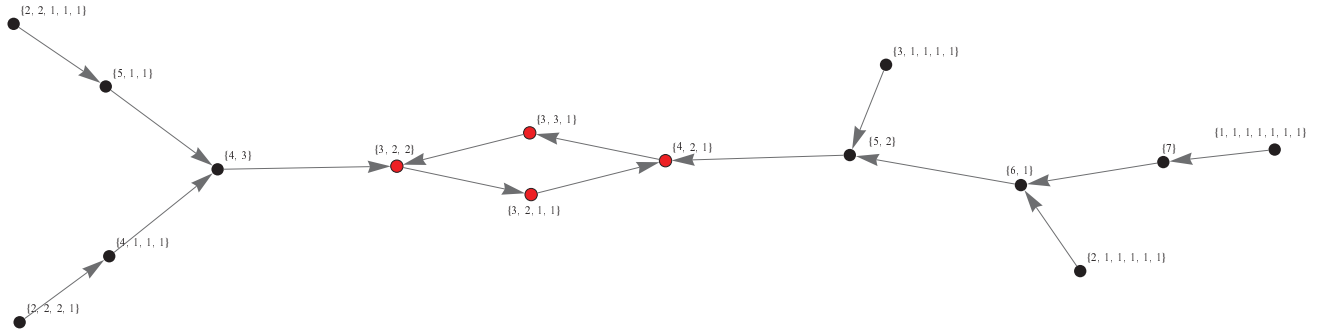


Figura 2.9: Diagrama $\mathcal{B}$ -shift de $n=7$, estilo SpringElectricalEmbedding

2.4 Caracterização das Partições Cíclicas

Nesta seção introduziremos alguns elementos e conceitos para encontrar uma caracterização para partições cíclicas.

A princípio vamos definir uma matriz formada apenas por entradas com valores 0 ou 1 que represente uma dada partição, afim de conseguirmos encontrar um padrão de comportamento desses 0's e 1's ao longo das iteradas da aplicação $\mathcal{B}$ em λ . Veremos que podemos obter $\mathcal{B}(\lambda)$, $\mathcal{B}^{(2)}(\lambda), \dots$ a partir de um certo processo de shift nas entradas da matriz.

Definição 2.4.1 *Dada uma partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \vdash n$ definimos por M_λ a sua **matriz associada**, de forma que:*

$$M_\lambda = [m_{ij}]_{i,j=1}^\infty, \text{ onde } m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } j \leq s \text{ e } i \leq \lambda_j; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Exemplo 2.4.1 *Seja $\lambda = (5, 3, 2, 1, 1) \vdash 12$, então:*

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ou seja, o número de 1's de cada coluna corresponde à respectiva parte da partição.

Vamos mostrar que $M_{\mathcal{B}(\lambda)}$ pode ser obtida a partir de M_λ através de um processo de “shifting” ou “deslocamento” dos 0's e 1's da matriz. Com isso obtemos as partições $\mathcal{B}(\lambda)$, $\mathcal{B}^2(\lambda)$, $\mathcal{B}^3(\lambda)$, $\dots$ a partir da matriz.

Definição 2.4.2 *Dada uma matriz $M = [m_{ij}]$ definimos, para cada $w \in \mathbb{Z}^+$, como a w -ésima diagonal, ou diagonal w de M , como sendo a w -upla formada pelas entradas m_{ij} tal que $i + j - 1 = w$, ou seja, a diagonal w é dada por:*

$$\mathcal{D}_M(w) = \underbrace{(m_{w,1}, m_{w-1,2}, m_{w-2,3}, \dots, m_{w-i,i+1}, \dots, m_{2,w-1}, m_{1,w})}_{w \text{ elementos}}$$

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & \cdots \\ m_{31} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

1ª diagonal
2ª diagonal
3ª diagonal

Figura 2.10: Diagonais de M_λ

Exemplo 2.4.2 *Sejam λ uma partição e $M_\lambda = [m_{ij}]$ a sua matriz associada. Assim, a 1ª diagonal consiste apenas da entrada m_{11} , a 2ª diagonal é formada pelas entradas m_{12} e m_{21} , já a 3ª diagonal é formada pelas entradas m_{31} , m_{22} e m_{13} . Logo, $\mathcal{D}_{M_\lambda}(1) = (m_{11})$, $\mathcal{D}_{M_\lambda}(2) = (m_{12}, m_{21})$ e $\mathcal{D}_{M_\lambda}(3) = (m_{31}, m_{22}, m_{13})$, conforme ilustra a Figura 2.10.*

Definição 2.4.3 (Processo $\mathcal{B}$ -shifting) *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \vdash n$ e $M_\lambda = [m_{ij}]$ a sua matriz associada. O processo de obtenção de $M_{\mathcal{B}(\lambda)}$ a partir de M_λ , chamado de Processo $\mathcal{B}$ -shifting é composto de no máximo 2 passos:*

Passo 1: Shifting Circular Diagonal: *Nesse passo vamos criar uma matriz $M'_\lambda = [m'_{ij}]$ tal que $m'_{i,j} = m_{i+1,j-1}$ se $j \geq 2$ e $m'_{i,j} = m_{j,i}$ se $j = 1$, ou seja, para cada diagonal de M_λ , por exemplo, $\mathcal{D}_{M_\lambda}(w) = (v_1, v_2, \dots, v_w)$, reordenamos as suas entradas e escrevemos $\mathcal{D}_{M'_\lambda}(w) = (v_w, v_1, v_2, \dots, v_{w-1})$. Note que o número de 1's nas colunas de M'_λ são $s, \lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_s - 1, 0, 0, 0, \dots$*

Se $s \geq \lambda_1 - 1$, ou seja, se houver mais 1's na primeira coluna do que na segunda coluna, então $M'_\lambda = M_{\mathcal{B}(\lambda)}$. Se $s < \lambda_1 - 1$ então precisamos de um passo a mais para obter $M_{\mathcal{B}(\lambda)}$.

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & v_w & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & v_{w-1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & v_3 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & v_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

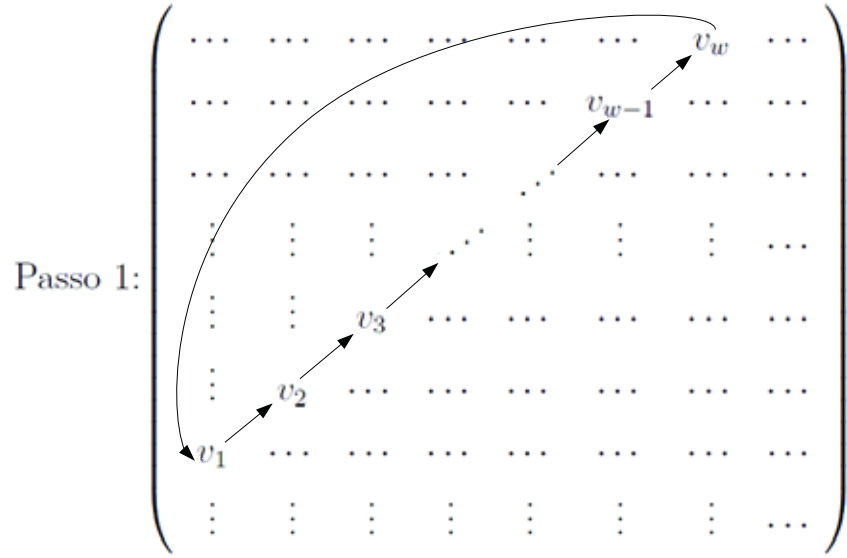


Figura 2.11: Representação do Passo 1

$$M'_\lambda = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & v_{w-1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & v_{w-2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & v_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & v_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_w & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

Passo 2: Shifting pela esquerda: Removemos todas as entradas nulas da primeira coluna da matriz M'_λ e deslocamos cada entrada da posição (i, j) tal que $i \geq s + 1$ e $j \geq 2$ para a posição $(i, j - 1)$. A nova matriz é a matriz $M_{\mathcal{B}(\lambda)}$.

$$M'_\lambda = \begin{pmatrix} m'_{11} & m'_{12} & m'_{13} & m'_{14} & \dots \\ m'_{21} & m'_{22} & m'_{23} & m'_{24} & \dots \\ 0 & m'_{32} & m'_{33} & m'_{34} & \dots \\ 0 & m'_{42} & m'_{43} & m'_{44} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Passo 2}} M_{\mathcal{B}(\lambda)} = \begin{pmatrix} m'_{11} & m'_{12} & m'_{13} & m'_{14} & \dots \\ m'_{21} & m'_{22} & m'_{23} & m'_{24} & \dots \\ m'_{32} & m'_{33} & m'_{34} & m'_{35} & \dots \\ m'_{42} & m'_{43} & m'_{44} & m'_{45} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Observação 2.4.1 Note que o Passo 1 do processo faz com as colunas de M_λ o equivalente com o que a definição da aplicação $\mathcal{B}$ -shift faz com as partes da partição, a menos de ordem.

Por isso as vezes é necessário o Passo 2, para poder manter a ordem não crescente das partes da partição (respectivamente colunas da matriz).

Observação 2.4.2 Com a definição do processo $\mathcal{B}$ -shifting, a partir de M_λ obtemos $M_{\mathcal{B}^{(k)}(\lambda)}$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ e portanto, obtemos a partição $\mathcal{B}^{(k)}(\lambda)$. Ou seja, sempre que conveniente, ao invés de trabalharmos com a **aplicação** $\mathcal{B}$ -shift em λ , iremos trabalhar com o **processo** $\mathcal{B}$ -shifting em M_λ .

Exemplo 2.4.3 Seja $\lambda = (2, 2, 1, 1)$. Pela definição da aplicação $\mathcal{B}$ -shift sabe-se que $\mathcal{B}(\lambda) = (4, 1, 1)$. Aplicando o processo $\mathcal{B}$ -shifting em M_λ obtemos:

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Passo1}} M'_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Como há mais 1's na primeira coluna de M'_λ do que na segunda então $M'_\lambda = M_{\mathcal{B}(\lambda)}$.

Exemplo 2.4.4 Seja $\lambda = (4, 2)$, então aplicando o processo $\mathcal{B}$ -shifting:

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Passo1}} M'_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Passo2}} M_{\mathcal{B}(\lambda)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Agora temos as ferramentas necessárias para encontrar a característica de uma partição $\mathcal{B}$ -cíclica.

Teorema 2.4.1 Seja $n = 1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + r$, $1 \leq r \leq k$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

$\lambda \vdash n$ é $\mathcal{B}$ -cíclica se, e somente se, λ tem a forma, chamada de forma cíclica:

$$(k-1 + \delta_{k-1}, k-2 + \delta_{k-2}, \dots, 2 + \delta_2, 1 + \delta_1, \delta_0)$$

tal que $\delta_i \in \{0, 1\}$, para todo $i = 0, \dots, k-1$, e $\sum_{i=0}^{k-1} \delta_i = r$.

Demonstração:

($\Leftarrow$) Suponha que $\lambda = (k - 1 + \delta_{k-1}, k - 2 + \delta_{k-2}, \dots, 2 + \delta_2, 1 + \delta_1, \delta_0)$, tal que $\delta_i \in \{0, 1\}$, para todo $i = 0, \dots, k - 1$, e $\sum_{i=0}^{k-1} \delta_i = r$. A matriz associada de λ , M_λ , é formada apenas de 1's nas $(k - 1)$ primeiras diagonais, a diagonal k é formada por $(\delta_{k-1}, \delta_{k-2}, \dots, \delta_2, \delta_1, \delta_0)$, ou seja, $\mathcal{D}_{M_\lambda}(k) = (\delta_{k-1}, \delta_{k-2}, \dots, \delta_2, \delta_1, \delta_0)$, e as diagonais abaixo da diagonal k são formadas apenas de 0's.

Desta forma a cada aplicação do processo $\mathcal{B}$ -shifting em M_λ , apenas a diagonal k é alterada. Como $\mathcal{D}_{M_\lambda}(k)$ possui k elementos, depois de utilizados k vezes o processo $\mathcal{B}$ -shifting, a matriz $M_{\mathcal{B}^{(k)}(\lambda)} = M_\lambda$. Logo, $\mathcal{B}^{(k)}(\lambda) = \lambda$ e, portanto, λ é $\mathcal{B}$ -cíclica.

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{1^{\text{a}} \text{linha}} \\ \xrightarrow{2^{\text{a}} \text{linha}} \\ \vdots \\ \xrightarrow{k-2^{\text{a}} \text{linha}} \\ \xrightarrow{k-1^{\text{a}} \text{linha}} \\ \xrightarrow{k^{\text{a}} \text{linha}} \end{array} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \delta_0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \delta_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 1 & 1 & \delta_{k-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & \delta_{k-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta_{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{array} \right) = M_\lambda$$

($\Rightarrow$) No processo $\mathcal{B}$ -shifting, notamos que o Passo 1 mantém todas as entradas da matriz na mesma diagonal, enquanto que o Passo 2 sempre traz a entrada 1 da posição $(s + 1, 2)$ para uma diagonal de índice menor. Assim, para qualquer partição μ que é $\mathcal{B}$ -cíclica o processo de obtenção de $M_{\mathcal{B}(\mu)}$ através de M_μ pelo processo $\mathcal{B}$ -shifting, deve envolver apenas o Passo 1.

Sejam λ uma partição $\mathcal{B}$ -cíclica e M_λ a sua matriz associada. Suponha que λ não possua a forma cíclica. Então para algum $w \in \mathbb{Z}^+$, há um 0 na w -ésima diagonal e um 1 na $(w + 1)$ -ésima diagonal da matriz M_λ . Como a série de processos $\mathcal{B}$ -shifting de M_λ para $M_{\mathcal{B}(\lambda)}$ para $M_{\mathcal{B}^{(2)}(\lambda)}$, e assim por diante, apenas envolve o Passo 1 (Shifting Circular Diagonal) então iremos chegar em uma matriz M_μ em que a entrada $(1, w)$ é 0 e a entrada $(w + 1, 1)$ é 1. Assim o processo $\mathcal{B}$ -shifting de M_μ para $M_{\mathcal{B}(\mu)}$ envolve o Passo 2, o que é uma contradição.

Demonstração: Seja $\lambda \vdash n$ uma partição $\mathcal{B}$ -cíclica, assim pelo Teorema 2.4.1

Exemplo 2.4.6 Já para $n = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, pelo Corolário 2.4.1, $(4, 3, 2, 1)$ é a única partição $\mathcal{B}$ -cíclica, como mostra a Figura 2.13.

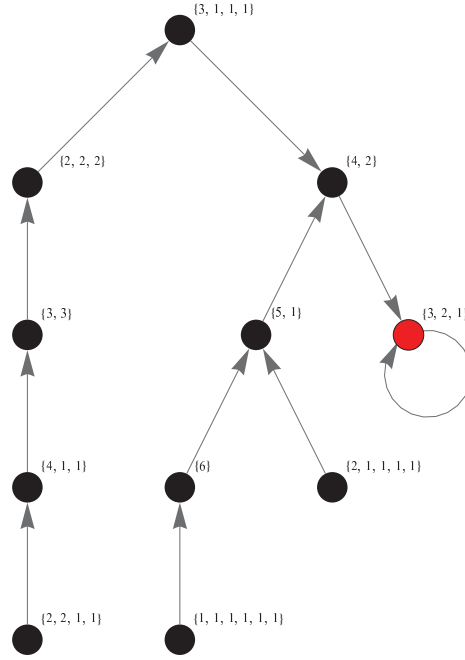


Figura 2.12: Diagrama $\mathcal{B}$ -shift de $n=6$, estilo LayeredDrawing

Observação 2.4.3 Dado $n = 1 + 2 + \dots + (k - 1) + r = T_{k-1} + r$, $1 \leq r \leq k$, com a forma de uma partição $\lambda \vdash n$, $\mathcal{B}$ -cíclica já caracterizada, teremos também uma caracterização de sua matriz associada M_λ , que é de que as suas diagonais de 1 a $(k - 1)$ são sempre formadas apenas de 1's e as diagonais abaixo da diagonal k são todas nulas, ou seja, quando aplicarmos sucessivamente o processo $\mathcal{B}$ -shifting em M_λ apenas a diagonal k se modifica e assim sempre será utilizado apenas o Passo 1 do processo (Shifting Circular Diagonal).

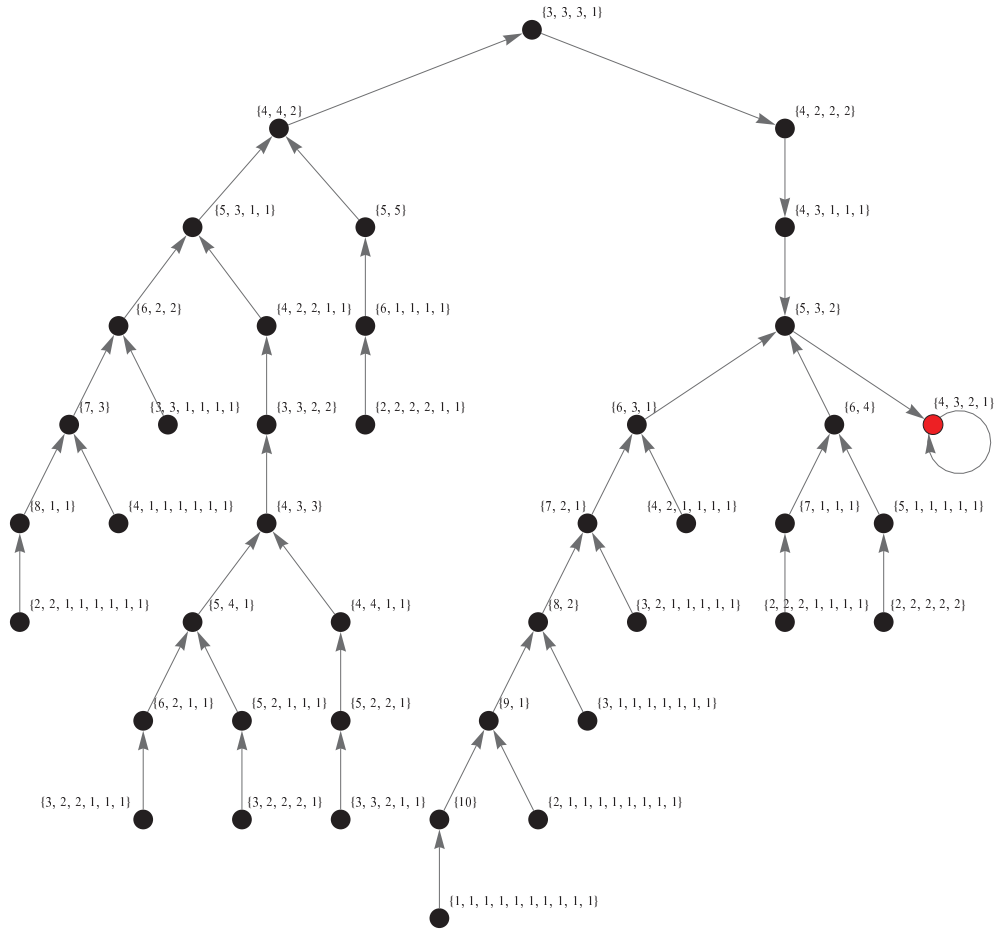


Figura 2.13: Diagrama $\mathcal{B}$ -shift de $n=10$, estilo LayerredDrawing

2.5 Quantidade de Ciclos

Dado $n = 1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1) + r$, $1 \leq r \leq k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, podemos ver pelo Teorema 2.4.1 que se $r = k, k - 1$ ou 1 , começando por qualquer partição de n , após repetidas aplicações de $\mathcal{B}$ -shift sempre chegamos em um único ciclo de partições de n . Se $2 \leq r \leq k - 2$ dependendo da partição de n podemos chegar em diferentes ciclos.

Exemplo 2.5.1 Para $n = 1 + 2 + 2 = 5$, qualquer que seja a partição de 5 sempre chegaremos em um único ciclo conforme mostra a Figura 2.14. Note que esse ciclo tem período 3.

Exemplo 2.5.2 Para $n = 1 + 2 + 3 + 2 = 8$ podemos chegar nos ciclos conforme a Figura 2.15. Note que o ciclo da esquerda, na Figura 2.15, tem período 4 e que o ciclo da direita tem período 2.

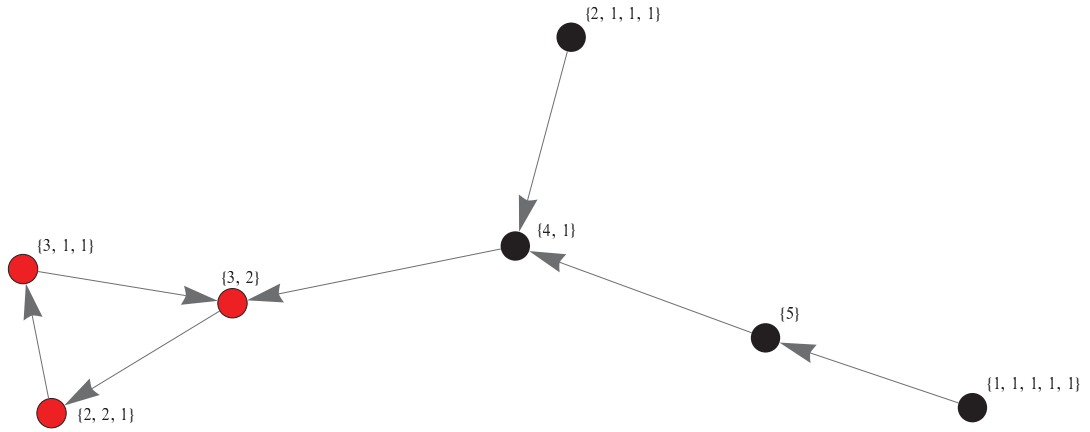


Figura 2.14: Diagrama $\mathcal{B}$ -shift de $n=5$, estilo SpringElectricalEmbedding

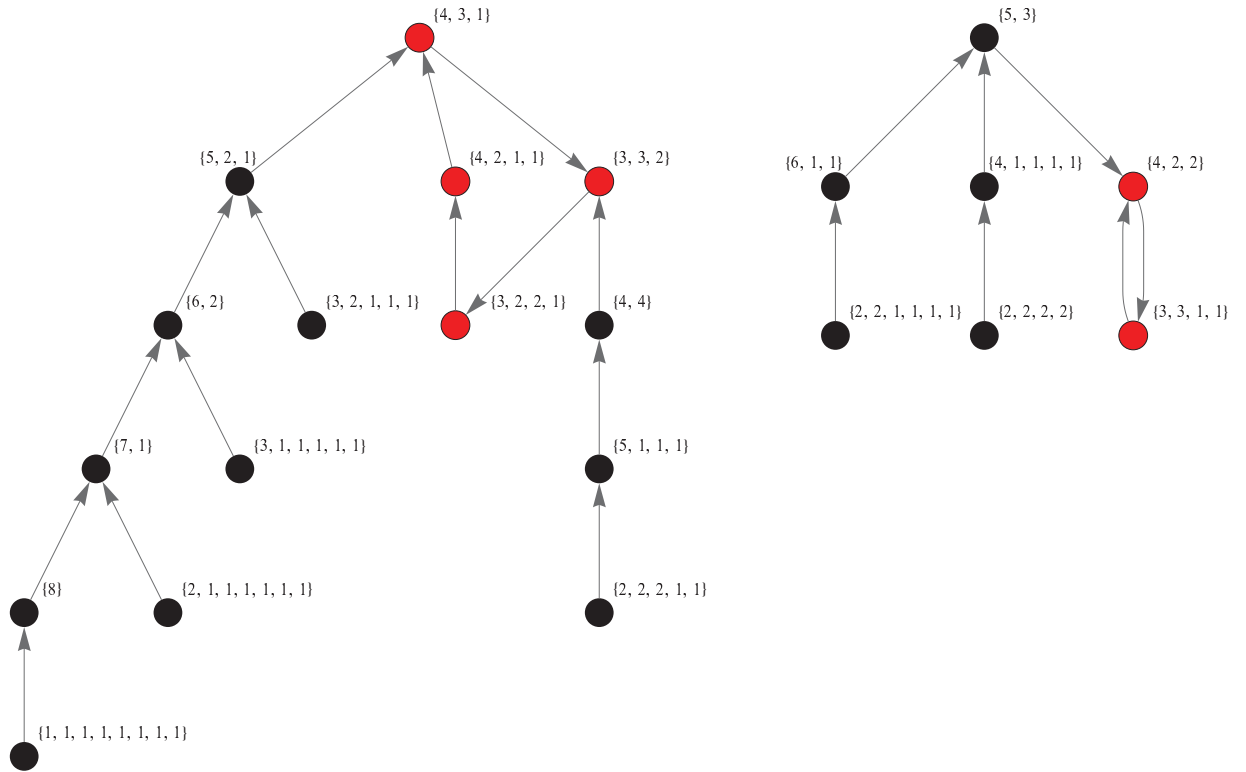


Figura 2.15: Diagrama $\mathcal{B}$ -shift de $n=8$, estilo LayeredDrawing

Assim para a contagem de ciclos na “Paciência Búlgara”, ou seja, o número de órbitas, temos o seguinte Teorema, demonstrado em [2] e [1].

Teorema 2.5.1 *Seja $n = 1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1) + r$, $1 \leq r \leq k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, então o número*

de ciclos para a Paciência Búlgara é $\mathfrak{C}_{\mathcal{B}}(n) = \frac{1}{k} \sum_{d \mid \text{mdc}(k,r)} \varphi(d) \binom{k/d}{r/d}$, onde $\varphi(d)$ é a função totiente de Euler.

Exemplo 2.5.3 Seja $n = 18$. Pela notação do Teorema 2.5.1 escrevemos

$n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 3 = 18$ e assim temos $k = 6$ e $r = 3$. Logo o número de ciclos para a Paciência Búlgara quando $n = 18$ é:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\mathcal{B}}(18) &= \frac{1}{6} \sum_{d \mid \text{mdc}(6,3)} \varphi(d) \binom{6/d}{3/d} = \frac{1}{6} \sum_{d \mid 3} \varphi(d) \binom{6/d}{3/d} = \\ &= \frac{1}{6} \varphi(1) \binom{6}{3} + \frac{1}{6} \varphi(3) \binom{2}{1} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} + \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} = \frac{20}{6} + \frac{4}{6} = \frac{24}{6} = 4 \end{aligned}$$

A Figura 2.16 mostra o Diagrama $\mathcal{B}$ -shift de $n=18$ sem os rótulos das partições e também sem as flechas. Nessa figura podemos observar a quantidade de ciclos que calculamos.

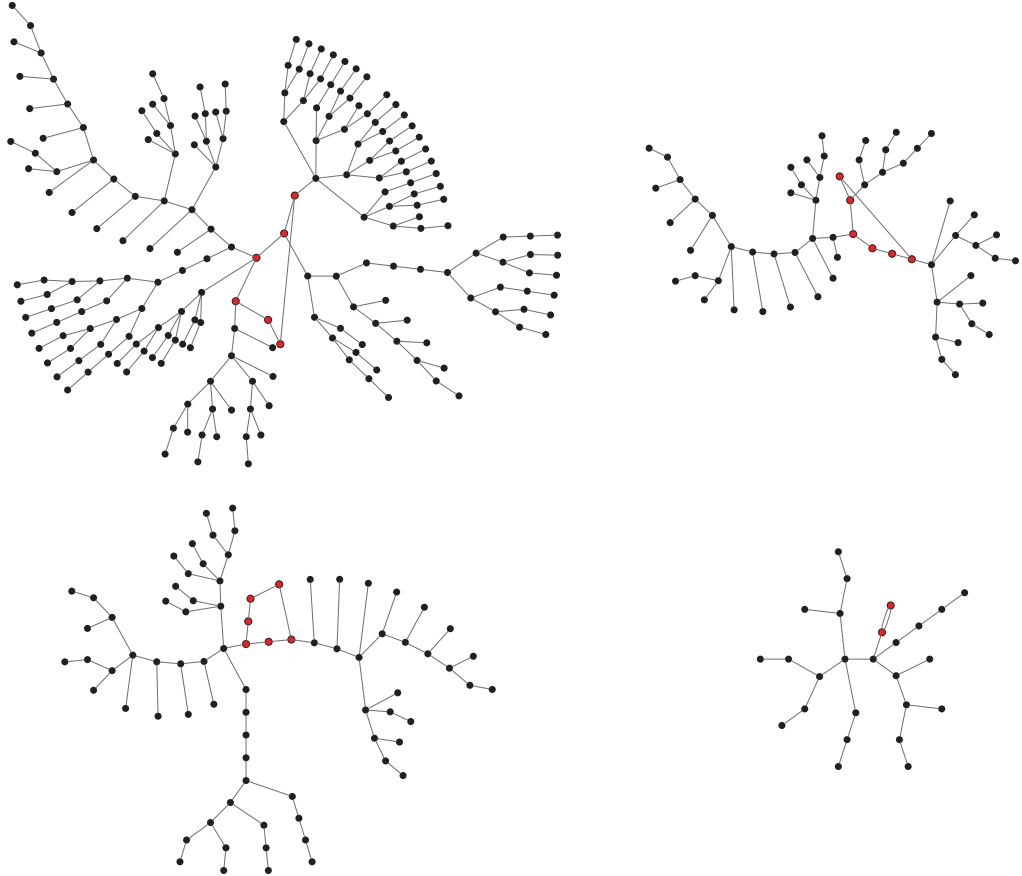


Figura 2.16: Diagrama $\mathcal{B}$ -shift de $n=18$, estilo RadialDrawing

Quanto maior o natural n mais interessante fica o seu Diagrama $\mathcal{B}$ -shift.

Exemplo 2.5.4 A Figura 2.17 mostra o Diagrama $\mathcal{B}$ -shift de $n=32$ com o estilo *SpringElectricalEmbedding*, sem os rótulos das partições e sem as flechas. Por questão de zoom fica difícil de ver os períodos de cada ciclo porém a figura mostra claramente a quantidade de ciclos, que coincide com a quantidade de “redes” de partições distintas.



Figura 2.17: Diagrama $\mathcal{B}$ -shift de $n=32$, estilo *SpringElectricalEmbedding*

2.6 Partição raiz, gerada, pré-cíclica e caracterizações

Observação 2.6.1 $\mathcal{B}$ -shift não é uma aplicação injetora pois dados $\lambda = (4, 3, 1, 1, 1)$ e $\theta = (6, 3, 1)$ partições de 10, temos $\mathcal{B}(\lambda) = \mathcal{B}(\theta) = (5, 3, 2)$. $\mathcal{B}$ -shift também não é sobrejetora pois se $\lambda = (1, 1, 1, 1, 1) \vdash 5$, não existe $\theta \vdash 5$, tal que $\mathcal{B}(\theta) = \lambda$.

Com a Observação 2.6.1 foi motivada a seguinte proposição:

Proposição 2.6.1 Sejam n um inteiro positivo e $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \vdash n$:

- (i) Se $\lambda_i < s - 1$, $\forall i = 1, \dots, s$, então não existe $\mu \vdash n$ tal que $\mathcal{B}(\mu) = \lambda$. Nesse caso dizemos que λ é uma **partição raiz**.
- (ii) Se para algum i , $i = 1, \dots, s$, $\lambda_i \geq s - 1$, então existe $\theta \vdash n$ tal que $\mathcal{B}(\theta) = \lambda$. Nesse caso dizemos que λ é uma **partição gerada** por θ , e nesse caso θ é a **geratriz** de λ .

Demonstração: (i) Suponha que existe $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) \vdash n$ tal que $\mathcal{B}(\mu) = \lambda$, logo μ possui pelo menos $s - 1$ partes (ver Observação 2.1.1) e assim para algum i , $i = 1, \dots, s$, $\lambda_i \geq s - 1$, o que é um absurdo.

(ii) Segue direto da definição da aplicação $\mathcal{B}$ -shift.

Observação 2.6.2 Em [7] a partição raiz é chamada de partição “Garden of Eden” na tradução literal “Jardim do Éden”, que provém da terminologia de autômatos celulares e teoria combinatoria de jogos. Também em [7] foi provado a quantidade dessas partições, dado um inteiro positivo.

Exemplo 2.6.1 $\lambda = (3, 2, 2, 1, 1, 1)$ é uma partição raiz.

Exemplo 2.6.2 $\alpha = (4, 2, 1) \vdash 7$ é uma partição gerada por $\mu = (3, 2, 1, 1) \vdash 7$ e $\theta = (5, 2) \vdash 7$ pois $\mathcal{B}(\mu) = \mathcal{B}(\theta) = (4, 2, 1)$, ou seja, as geratrizes de uma partição não são únicas e isso ocorre pelo fato da aplicação $\mathcal{B}$ -shift não ser injetora.

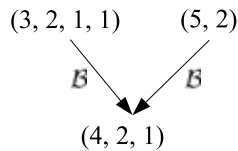


Figura 2.18:

Definição 2.6.1 Dizemos que λ é uma **partição pré-cíclica** se λ não é cíclica e $\mathcal{B}(\lambda)$ é cíclica, ou seja, λ é uma geratriz não cíclica de uma partição cíclica.

Exemplo 2.6.3 Seja $n = 18$ e $\lambda = (7, 6, 3, 2)$. Então λ é uma partição pré-cíclica pois λ não é cíclica já que não tem a forma cíclica do Teorema 2.4.1 e $\mathcal{B}(\lambda) = (6, 5, 4, 2, 1)$ que é cíclica.

Lema 2.6.1 Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \vdash n$ uma partição gerada. Se λ possui l partes distintas maiores ou iguais a $(s - 1)$, então λ possui l geratrizes distintas.

Demonstração: Seja λ_i para algum $i = 1, \dots, s$ uma parte de λ tal que $\lambda_i \geq s - 1$. Pela definição de $\mathcal{B}$ -shift, existe $\mu \vdash n$, $|\mu| = \lambda_i$, $\mu \neq \lambda$, tal que $\mathcal{B}(\mu) = \lambda$, a saber:

$$\mu = (\underbrace{\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_{i-1} + 1, \lambda_{i+1} + 1, \dots, \lambda_s + 1}_{\lambda_i}, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{\lambda_i - (s-1)})$$

Portanto, como λ possui l partes distintas maiores ou iguais a $(s - 1)$, então conseguimos determinar l geratrizes distintas para λ . ■

Questão: Qual a caracterização das partições pré-cíclicas?

Seja n um inteiro positivo, $n = T_{k-1} + r$, $1 \leq r \leq k$.

Se $\lambda \vdash n$ é uma partição $\mathcal{B}$ -cíclica, então λ tem a forma cíclica dada no Teorema 2.4.1:

$$(k - 1 + \delta_{k-1}, k - 2 + \delta_{k-2}, k - 3 + \delta_{k-3}, \dots, 3 + \delta_3, 2 + \delta_2, 1 + \delta_1, \delta_0)$$

tal que $\delta_i = 1$ ou 0 e $\sum_{i=0}^{k-1} \delta_i = r$.

Se n é triangular, ou seja, $r = k$, então pelo Corolário 2.4.1:

$$\lambda = (k, k - 1, k - 2, \dots, 3, 2, 1)$$

e assim λ possui k partes, ou seja $|\lambda| = k$. Logo possui 2 partes, $\lambda_1 = k$ e $\lambda_2 = k - 1$ tal que $\lambda_1, \lambda_2 \geq k - 1$ e assim, pelo Lema 2.6.1, λ possui 2 geratrizes distintas, κ^1 e κ^2 .

- Seja κ^1 a geratriz com k partes, logo, pela definição de $\mathcal{B}$ -shift, $\kappa^1 = \lambda$ que é cíclica.

- Seja κ^2 a geratriz com $k - 1$ partes, logo, pela definição de $\mathcal{B}$ -shift:

$$\kappa^2 = (\underbrace{k + 1, k - 1, k - 2, \dots, 4, 3, 2}_{k-1}) \tag{2.1}$$

que não é cíclica.

Portanto, para n triangular, as partições pré-cíclicas são da forma dada em (2.1).

Se n é não triangular, ou seja, $1 \leq r < k$ então:

• Se $\delta_0 = 1$ então λ possui k partes, ou seja, $|\lambda| = k$. Logo possui 2 partes, a saber, $\lambda_1 = k - 1 + \delta_{k-1}$ e $\lambda_2 = k - 2 + \delta_{k-2}$, com $\delta_{k-2} = 1$, tal que $\lambda_1, \lambda_2 \geq k - 1$ e assim, pelo Lema 2.6.1, λ possui 2 geratrizes μ^1 e μ^2 com $\mu^1 \neq \mu^2$.

- Seja μ^1 a geratriz com $(k - 1) + \delta_{k-1}$ partes, logo, pela definição de $\mathcal{B}$ -shift:

$$\mu^1 = \underbrace{(k - 1 + \delta_{k-2}, k - 2 + \delta_{k-3}, \dots, 3 + \delta_2, 2 + \delta_1, 1 + \delta_0, \delta_{k-1})}_{(k-1)+\delta_{k-1}}$$

que é cíclica.

- Seja μ^2 a geratriz com $(k - 2) + \delta_{k-2}$ partes, $\delta_{k-2} = 1$, logo, pela definição de $\mathcal{B}$ -shift:

$$\mu^2 = \underbrace{(k + \delta_{k-1}, k - 2 + \delta_{k-3}, k - 3 + \delta_{k-4}, \dots, 3 + \delta_2, 2 + \delta_1, \delta_{k-2} + \delta_0)}_{(k-2)+\delta_{k-2}}$$

Se $\delta_{k-1} = 0$ então μ^2 é cíclica.

Se $\delta_{k-1} = 1$ então μ^2 não é cíclica.

• Se $\delta_0 = 0$ então λ possui $(k - 1)$ partes, ou seja, $|\lambda| = k - 1$, logo possui 3 partes, a saber $\lambda_1 = k - 1 + \delta_{k-1}$, $\lambda_2 = k - 2 + \delta_{k-2}$ e $\lambda_3 = k - 3 + \delta_{k-3}$, com $\delta_{k-3} = 1$, tal que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq k - 1$ e assim, pelo Lema 2.6.1, λ possui 3 geratrizes distintas θ^1 , θ^2 e θ^3 .

- Seja θ^1 a geratriz com $(k - 1) + \delta_{k-1}$ partes, então $\theta^1 = \mu^1$.

- Seja θ^2 a geratriz com $(k - 2) + \delta_{k-2}$ partes, então $\theta^2 = \mu^2$.

Se $\delta_{k-2} = 1$ então:

se $\delta_{k-1} = 0$, então θ^2 é cíclica.

se $\delta_{k-1} = 1$, então θ^2 não é cíclica.

Se $\delta_{k-2} = 0$ então θ^2 não é cíclica.

- Seja θ^3 a geratriz com $(k - 3) + \delta_{k-3}$ partes, $\delta_{k-3} = 1$, logo, pela definição de $\mathcal{B}$ -shift:

$$\theta^3 = \underbrace{(k + \delta_{k-1}, k - 1 + \delta_{k-2}, k - 3 + \delta_{k-4}, \dots, 3 + \delta_2, 2 + \delta_1)}_{(k-3)+\delta_{k-3}}$$

que não é cíclica.

Portanto, se n é não triangular, então as partições pré-cíclicas são da forma:

$$\zeta = (k + \delta_{k-1}, k - 2 + \delta_{k-3}, k - 3 + \delta_{k-4}, \dots, 3 + \delta_2, 2 + \delta_1, \delta_{k-2} + \delta_0) \quad (2.2)$$

com $\delta_0 \leq \delta_{k-2}$ e $(\delta_{k-1}, \delta_{k-2}) \neq (0, 1)$

ou

$$\vartheta = (k + \delta_{k-1}, k - 1 + \delta_{k-2}, k - 3 + \delta_{k-4}, \dots, 3 + \delta_2, 2 + \delta_1) \quad (2.3)$$

com $\delta_0 = 0$ e $\delta_{k-3} = 1$.

No caso em que $\delta_{k-2} = \delta_0 = 0$ e $\delta_{k-3} = 1$ temos $\zeta = \vartheta$.

Exemplo 2.6.4 *Seja $n = T_4 + 2 = 12$. As partições cíclicas de 12 são da forma:*

$$(4 + \delta_4, 3 + \delta_3, 2 + \delta_2, 1 + \delta_1, \delta_0)$$

tal que $\delta_i = 1$ ou 0, para $i = 0, \dots, 4$, e $\sum_{i=0}^4 \delta_i = 2$.

Logo as partições pré-cíclicas são da forma:

$(5 + \delta_4, 3 + \delta_2, 2 + \delta_1, \delta_3 + \delta_0)$ com $\delta_0 \leq \delta_3$ e $(\delta_4, \delta_3) \neq (0, 1)$

ou

$(5 + \delta_4, 4 + \delta_3, 2 + \delta_1)$ com $\delta_0 = 0$ e $\delta_2 = 1$.

E as possibilidades são: $(6, 4, 2)$, $(6, 3, 3)$, $(5, 4, 3)$, $(6, 3, 2, 1)$ e $(5, 5, 2)$, como mostra a Figura 2.19.

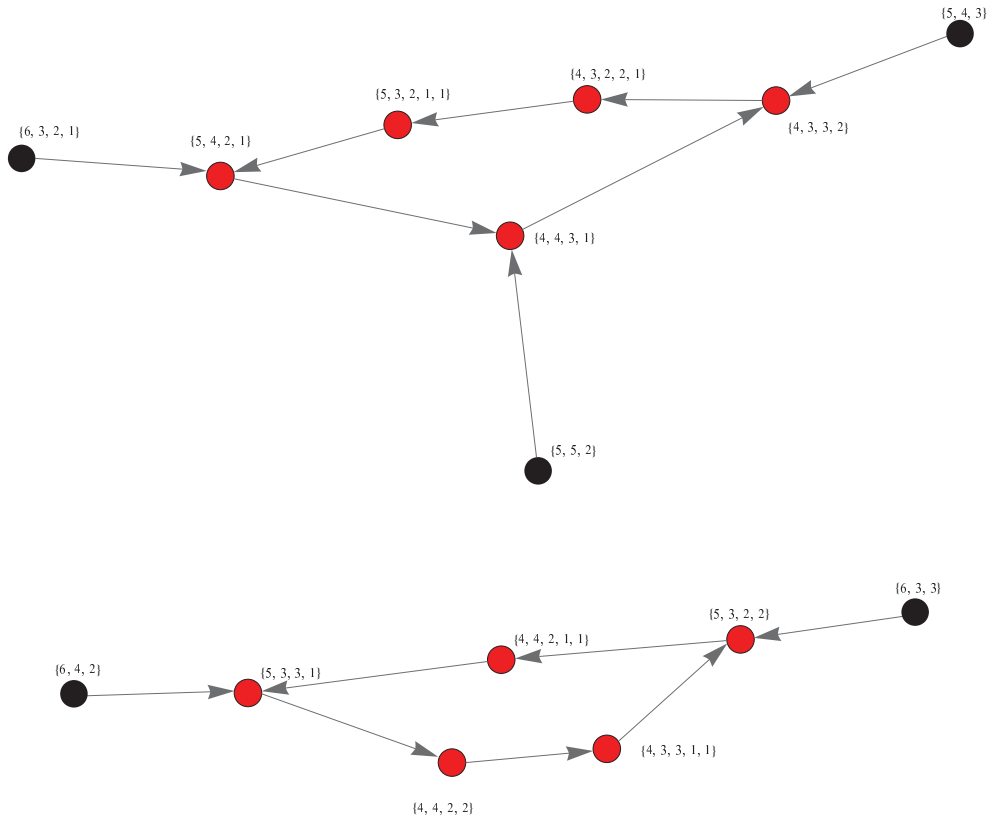


Figura 2.19:

2.7 Cálculo de $D_{\mathcal{B}}(n)$ para números triangulares

Na Seção 2.2 definimos $D_{\mathcal{B}}(n)$ e nesta seção vamos encontrar o valor de $D_{\mathcal{B}}(n)$ para números triangulares.

Teorema 2.7.1 *Se $n = T_k = 1 + 2 + \dots + k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, então $D_{\mathcal{B}}(n) \geq k^2 - k$.*

Demonstração: É suficiente mostrar que existe $\lambda \vdash n$ tal que $d_{\mathcal{B}}(\lambda) = k^2 - k$ já que $D_{\mathcal{B}}(n) := \max\{d_{\mathcal{B}}(\lambda) \mid \lambda \vdash n\}$. Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1})$, tal que $\lambda_1 = k - 1$, $\lambda_i = k - i + 1$ para $i = 1, \dots, k$, e $\lambda_{k+1} = 1$. Assim $\lambda = (k - 1, k - 1, k - 2, k - 3, \dots, 3, 2, 1, 1)$. Fazendo a matriz associada M_{λ} temos que as diagonais de 1 a $(k - 1)$ são formada apenas por 1's, a diagonal k é da forma $(0, 1, 1, \dots, 1, 1)$, a diagonal $k + 1$ é da forma $(0, 0, 0, \dots, 0, 0, 1)$ e as diagonais abaixo da diagonal $k + 1$ são formadas apenas de 0's.

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{k-1^{\text{a}} \text{linha}} \\ \xrightarrow{k^{\text{a}} \text{linha}} \\ \xrightarrow{k+1^{\text{a}} \text{linha}} \end{array} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{array} \right) = M_{\lambda}$$

Com a forma da matriz M_{λ} definida, ao aplicar k vezes o processo $\mathcal{B}$ -shifting em M_{λ} , apenas $\mathcal{D}_{M_{\lambda}}(k + 1)$ é alterada, pois as outras diagonais são formadas apenas por 1's ou são formadas apenas por 0's e a diagonal k permanece a mesma também pois possui k elementos. Note que nessas k vezes foi preciso apenas utilizar o Passo 1 (Shifting Circular Diagonal) por causa da configuração de M_{λ} . Assim as diagonais $\mathcal{D}_{M_{\lambda}}(k)$ e $\mathcal{D}_{M_{\lambda}}(k + 1)$ se comportam da seguinte maneira:

Vamos começar com um exemplo para para um natural $n = 15$. O número 15 possui 176 partições. Como 15 é um número triangular escrito na forma $n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = T_5$, pelo Corolário 2.4.1, sabemos que a partir de qualquer partição de 15, sempre alcançamos a partição $(5, 4, 3, 2, 1)$ em um certo número de iteradas.

As 176 partições do número 15 podem ser agrupadas em uma árvore, ilustrada na Figura 2.20, cujo os vértices correspondem ao número de partes da respectiva partição e a ligação de cada vértice, lendo de cima para baixo, representa a aplicação $\mathcal{B}$ -shift.

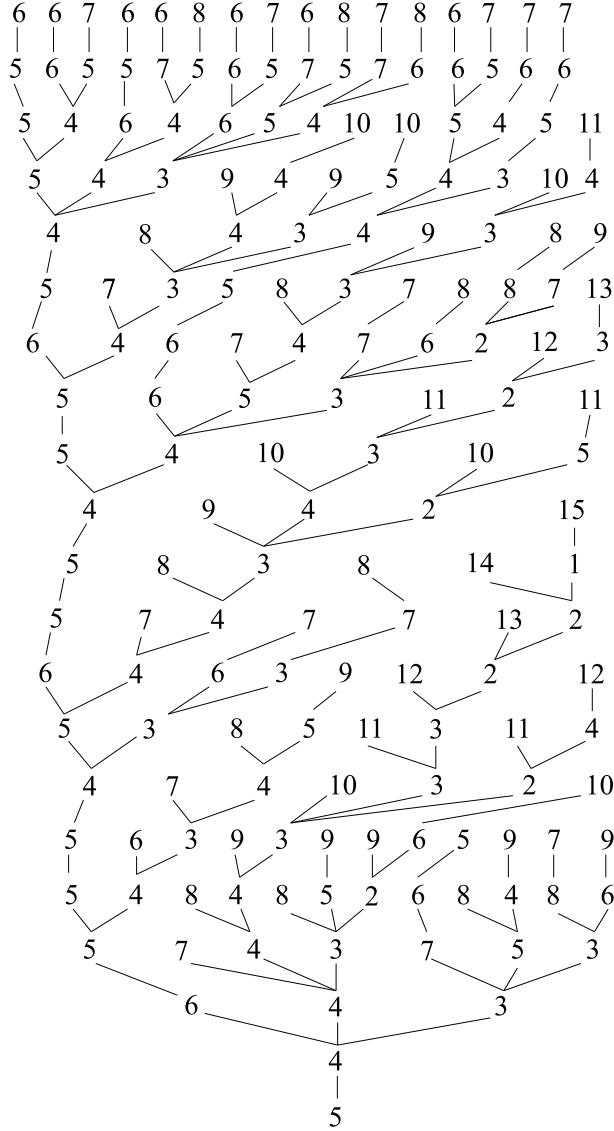


Figura 2.20: Representação dos tamanhos das 176 partições do número 15

Por exemplo, o número 5 na base da árvore representa a partição $(5, 4, 3, 2, 1)$ que possui 5 partes. O número 4 que vem logo acima desse 5 representa a partição $(6, 4, 3, 2)$ que possui 4

partes.

Definição 2.7.1 Seja $\lambda \vdash n$, associamos a λ a sequência $seq_{\mathcal{B}}(\lambda) = \langle c_1, c_2, \dots \rangle$, tal que $c_i = |\mathcal{B}^{(i-1)}(\lambda)|$, $i \in \mathbb{Z}^+$, ou seja, c_i é o tamanho da partição $\mathcal{B}^{(i-1)}(\lambda)$.

Exemplo 2.7.1 Na Figura 2.20, o vértice no topo e mais à esquerda, corresponde à partição $\lambda = (4, 4, 3, 2, 1, 1) \vdash 15$. Logo ela possui a sequência associada:
 $seq_{\mathcal{B}}(\lambda) = \langle 6, 5, 5, 5, \underline{4, 5, 6}, 5, 5, \underline{4, 5, 5, 6}, 5, \underline{4, 5, 5, 5, 6}, 4, 5, 5, 5, 5, \dots \rangle$.

Dado n um inteiro positivo, podemos também plotar através do software “*Wolfram Mathematica*” um diagrama semelhante ao **Diagrama $\mathcal{B}$ -shift** de n , de tal forma que os vértices agora são rotulados com o tamanho das respectivas partições. Chamaremos esse diagrama de **Árvore $\mathcal{B}$ -shift** de n .

Exemplo 2.7.2 A Figura 2.21 representa a Árvore $\mathcal{B}$ -shift de 10. Comparando com a Figura (2.13) é possível ver a associação entre a partição e o respectivo tamanho.

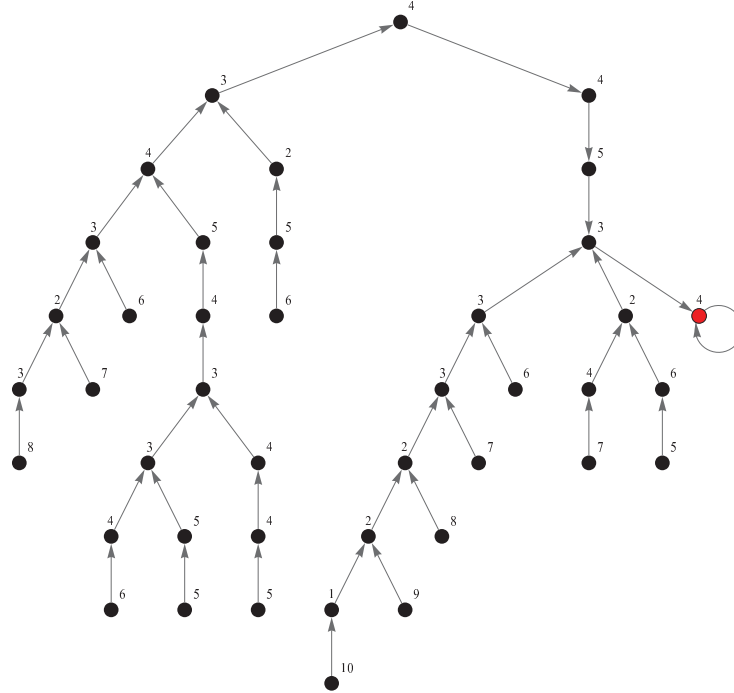


Figura 2.21: Árvore $\mathcal{B}$ -shift de 10

Na Figura 2.20, observamos que o padrão “ $\underline{x-1, x, x, \dots, x, x, x+1}$ ” aparece com grande frequência nas sequências associadas. Esse padrão é fundamental para o cálculo preciso de $D_{\mathcal{B}}(n)$. Para estudarmos esse padrão, associamos um diagrama para cada partição.

Definição 2.7.2 Dada uma partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \vdash n$, seja $\text{seq}_{\mathcal{B}}(\lambda) = \langle c_1, c_2, \dots \rangle$ a sua sequência associada. O $\text{diagrama}_{\mathcal{B}}(\lambda)$ é definido como o diagrama mostrado na Tabela 2.2, tal que cada coluna rotulada por $\boxed{\lambda_i}$ (respc., $\textcircled{c_i}$) possui λ_i (respec., c_i) 1's a partir do topo e em sequência, e infinitos 0's em todas as outras entradas. Os símbolos $/$ no $\text{diagrama}_{\mathcal{B}}(\lambda)$ são ignorados.

Tabela 2.2: $\text{diagrama}_{\mathcal{B}}(\lambda)$

$/$	$/$	$/$	$/$	$\boxed{\lambda_1}$	$\boxed{\lambda_2}$	$\dots$	$\boxed{\lambda_s}$
$/$	$/$	$/$	$\textcircled{c_1}$			$\dots$	
$/$	$/$	$\textcircled{c_2}$				$\dots$	
$/$	$\textcircled{c_3}$					$\dots$	
$\ddots$						$\dots$	
$\vdots$						$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$

Exemplo 2.7.3 Se $\lambda = (4, 2, 2, 2)$ então o $\text{diagrama}_{\mathcal{B}}(\lambda)$ é:

$/$	$/$	$/$	$/$	$/$	$/$	$/$	$/$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$
$/$	$/$	$/$	$/$	$/$	$/$	$/$	$\textcircled{4}$	1	1	1	1
$/$	$/$	$/$	$/$	$/$	$/$	$\textcircled{5}$	1	1	1	1	1
$/$	$/$	$/$	$/$	$/$	$\textcircled{3}$	1	1	1	0	0	0
$/$	$/$	$/$	$/$	$\textcircled{4}$	1	1	1	1	0	0	0
$/$	$/$	$/$	$\textcircled{4}$	1	1	1	1	0	0	0	0
$/$	$/$	$\textcircled{4}$	1	1	1	1	0	0	0	0	0
$/$	$\textcircled{4}$	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
$\textcircled{4}$	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Observação 2.7.1 1) Pela definição do $\text{diagrama}_{\mathcal{B}}(\lambda)$ há c_i 1's na coluna de $\textcircled{c_i}$, $i \in \mathbb{Z}^+$. Temos também o mesmo número de 1's na linha de $\textcircled{c_i}$, isso pelo fato da própria definição de $\text{seq}_{\mathcal{B}}(\lambda)$ e $\text{diagrama}_{\mathcal{B}}(\lambda)$. O que difere os 1's das colunas e das linhas de $\textcircled{c_i}$ é que nas colunas os 1's são consecutivos e na linhas os 1's não necessariamente são.

2) Além disso o $\text{diagrama}_{\mathcal{B}}(\lambda)$ pode ser considerado como um “lembrete” para a operação $\mathcal{B}$ -shift em λ , já que podemos obter facilmente $\mathcal{B}^{(i)}(\lambda)$ a partir do $\text{diagrama}_{\mathcal{B}}(\lambda)$ para qualquer natural i . Às vezes precisaremos reorganizar as colunas. Por exemplo, o retângulo formado abaixo de $c_2 = \textcircled{5}$ e à direita de $c_3 = \textcircled{3}$ nos mostra, ignorando os zeros, $\mathcal{B}^{(2)}(\lambda) = (5, 3, 2)$ e o retângulo abaixo de $c_7 = \textcircled{4}$ e à direita de $c_8 = \textcircled{4}$ resulta, ignorando os zeros, em $\mathcal{B}^{(7)}(\lambda) = (4, 3, 2, 1)$.

Proposição 2.7.1 Sejam $\lambda \vdash n$ e $\text{seq}_{\mathcal{B}}(\lambda) = \langle c_1, c_2, \dots \rangle$. Então:

- (1) $c_{i+1} \leq c_i + 1$ para $i \geq 1$.
- (2) Para $n = 1 + 2 + \dots + (k-1) + r$, onde $1 \leq r \leq k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, a soma de quaisquer k termos consecutivos da $\text{seq}_{\mathcal{B}}(\lambda)$ é no máximo $k(k-1) + r$.
- (3) (Propriedade do Sanduíche) Sejam $i, j, x \in \mathbb{N}^*$. Se $i < j$ e $c_i < x < c_j$, então existem inteiros p e q tal que $i \leq p < q \leq j$, $q \geq p + 2$, e $(c_p, c_{p+1}, \dots, c_q) = (x-1, x, x, \dots, x, x+1)$.

Demonstração: (1) Seja $\lambda \vdash n$ uma partição cujo número de partes é c_i . Logo, pela definição de $\text{seq}_{\mathcal{B}}(\lambda)$, c_{i+1} é o número de partes da partição $\mathcal{B}(\lambda)$ e, pela definição da aplicação $\mathcal{B}$ -shift, apenas um dos seguintes casos pode acontecer:

- i) $c_{i+1} = c_i$, se uma das partes de λ for igual a 1 e as outras partes maiores que 1.
- ii) $c_{i+1} < c_i$, se duas ou mais partes de λ forem iguais a 1.
- iii) $c_{i+1} = c_i + 1$, se nenhuma das partes de λ for igual a 1.

Portanto, $c_{i+1} \leq c_i + 1$.

(2) Observe no $\text{diagrama}_{\mathcal{B}}(\lambda)$ que para $i > 0$, $c_{i+1} + c_{i+2} + \dots + c_{i+k}$ é o número de 1's nas k linhas rotuladas por $c_{i+1} + c_{i+2} + \dots + c_{i+k}$. O retângulo formado abaixo de c_i e à direita de c_{i+1} nos mostra, ignorando os zeros, a partição $\mathcal{B}^{(i)}(\lambda)$, ou seja, há n 1's nesse retângulo. Olhando verticalmente ao lado esquerdo desse retângulo, como estamos somando k termos consecutivos, temos $(k-1) + (k-2) + \dots + 2 + 1$ casas para serem completadas por 0 ou 1. Essa soma terá valor máximo quando todas as casas forem completadas por 1. Assim $c_{i+1} + c_{i+2} + \dots + c_{i+k} \leq n + 1 + 2 + \dots + (k-1) = (k-1)k + r$.

(3) Escolha p o maior inteiro possível tal que $i \leq p < j$ e $c_p = x-1$. Como escolhemos o maior p tal que vale essa condição então $c_{p+1} = x$, pois se $c_{p+1} \geq x+1$ chegaríamos em um absurdo

por (1), e se $c_{p+1} \leq x - 1$, então não teríamos escolhido o maior p . Temos que $c_{p+2} = x$ ou $x + 1$, pois se $c_{p+2} \geq x + 2$ ou $c_{p+2} \leq x - 1$, chegaríamos nos mesmos absurdos do caso anterior. Se $c_{p+2} = x + 1$ então (3) é satisfeita, se $c_{p+2} = x$ então raciocinando da mesma forma $c_{p+3} = x$ ou $x + 1 \dots$. Assim para um determinado q com $p < q \leq j$, $c_q = x + 1$ e teremos a condição (3) satisfeita. ■

Precisaremos agora de uma série de lemas que relacionam a Proposição 2.7.1 e o $\text{diagrama}_{\mathcal{B}}(\lambda)$.

Definição 2.7.3 *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \vdash n$, $\text{seq}_{\mathcal{B}}(\lambda) = \langle c_1, c_2, \dots \rangle$ e $i, j \in \mathbb{Z}^+$. Para $i > j$, denotamos por $e_{i,j}$ a entrada da linha $(\textcircled{c}_i)$ com a coluna $(\textcircled{c}_j)$ do $\text{diagrama}_{\mathcal{B}}(\lambda)$. Para $j \in \{1, \dots, s\}$, denotamos por $f_{i,j}$ a entrada da linha $(\textcircled{c}_i)$ com a coluna $[\lambda_j]$.*

/	/	/	/	$[\lambda_1]$	$[\lambda_2]$	$\dots$	$[\lambda_s]$
/	/	/	$(\textcircled{c}_1)$	$f_{1,1}$	$f_{1,2}$	$\dots$	$f_{1,s}$
/	/	$(\textcircled{c}_2)$	$e_{2,1}$	$f_{2,1}$	$f_{2,2}$	$\dots$	$f_{2,s}$
/	$(\textcircled{c}_3)$	$e_{3,2}$	$e_{3,1}$	$f_{3,1}$	$f_{3,2}$	$\dots$	$f_{3,s}$
$\dots$	$e_{4,3}$	$e_{4,2}$	$e_{4,1}$	$f_{4,1}$	$f_{4,2}$	$\dots$	$f_{4,s}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$

Observação 2.7.2 *Sejam $i, j \in \mathbb{Z}^+$, $i \geq 2$. Segue das definições:*

- 1) $e_{i,i-1} = 1$
- 2) Se $e_{i,j} = 1$, então $c_j \geq i - j$. Se ainda $e_{i+1,j} = 0$ então $c_j = i - j$
- 3) Por outro lado, se $e_{i,j} = 1$, então $e_{i-1,j} = e_{i-2,j} = \dots = 1$.
- 4) Se $e_{i,j} = 0$ então $e_{i+1,j} = e_{i+2,j} = \dots = 0$. Se ainda $e_{i+1,j+1} = 1$ então $c_{j+1} = c_j + 1$.
- 5) Dados $i, k \in \mathbb{Z}^+$, se $c_i = k$ e $c_{i+1} = c_i + 1$ e, sem perda de generalidade, as k primeiras entradas da linha de c_i forem 1's então as $k+1$ primeiras entradas da linha de c_{i+1} são também formadas por 1's.

Lema 2.7.1 *Seja $\lambda \vdash n = 1 + 2 + \dots + k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, e $\text{seq}_{\mathcal{B}}(\lambda) = \langle c_1, c_2, \dots \rangle$. Então*

- (1) $d_{\mathcal{B}}(\lambda) = t$, com $\text{seq}_{\mathcal{B}}(\lambda) = \langle c_1, \dots, c_{t-1}, c_t, c_{t+1}, c_{t+2}, \dots \rangle = \langle c_1, \dots, c_{t-1}, k-1, k, k, \dots \rangle$.
- (2) Se $d_{\mathcal{B}}(\lambda) = t$, com $t \geq k+1$, então pelo menos uma das seguintes condições é satisfeita:
 - (i) $(c_p, c_{p+1}, c_{p+2}, \dots, c_{q-1}, c_q) = (k-1, k, k, \dots, k, k+1)$ para inteiros positivos p, q com $t - k \leq p < q \leq t - 1$ e $q \geq p + 2$;
 - (ii) $(c_p, c_{p+1}, c_{p+2}, \dots, c_{q-1}, c_q) = (k-2, k-1, k-1, \dots, k-1, k)$ para inteiros positivos p, q com $t - k + 1 \leq p < q \leq t + 1$ e $q \geq p + 2$.

Demonstração: (1) Como $d_{\mathcal{B}}(\lambda) = t$, por definição $\mathcal{B}^{(t)}(\lambda)$ é $\mathcal{B}$ -cíclica. Pelo Corolário 3.3.1, $\mathcal{B}^{(t)}(\lambda) = (k, k-1, \dots, 2, 1)$, já que $n = 1 + 2 + \dots + k$. Assim, por definição, $c_{t+1} = k$. Pela definição da aplicação $\mathcal{B}$ -shift temos $\mathcal{B}^{(t)}(\lambda) = \mathcal{B}^{(t+1)}(\lambda) = \mathcal{B}^{(t+2)}(\lambda) = \dots$, logo $c_{t+1} = c_{t+2} = c_{t+3} = \dots$. Assim, $\text{seq}_{\mathcal{B}}(\lambda) = \langle c_1, \dots, c_t, k, k, \dots \rangle$.

Falta provarmos que $c_t = k-1$. Para isso, sejam μ e γ as partições de tamanhos c_t e c_{t+1} respectivamente, então $\mu \neq \gamma$ pois se $\mu = \gamma$, então $d_{\mathcal{B}}(\lambda) < t$, o que é um absurdo.

Pelo Corolário 3.3.1, $\gamma = (k, k-1, \dots, 2, 1)$. Se $c_t = k$, então pela definição de $\mathcal{B}$ -shift, $\mu = (k, k-1, \dots, 2, 1)$, o que é um absurdo. Assim $c_t \neq k$.

Se $c_t \geq k+1$, então $c_t + c_{t+1} + \dots + c_{t+k} \geq k+1 + (k-1)k = k^2 + 1$, o que é um absurdo pela Proposição 2.7.1(2).

Se $c_t \leq k-2$, então $c_{t+1} > c_t + 1$, o que é um absurdo pela Proposição 2.7.1(1).

Logo, $c_t = k-1$ e portanto $\text{seq}_{\mathcal{B}}(\lambda) = \langle c_1, \dots, c_{t-1}, k-1, k, k, \dots \rangle$.

(2) Pela Observação 2.7.2, temos $e_{t,t-1} = 1$. Como $c_t = k-1$, seque que $e_{t,i} = 0$ para algum i , $t-k \leq i \leq t-2$. Escolhemos tal i como sendo o maior possível.

Assim $e_{t,i+1} = 1$, e, como $c_{t+1} = k = c_t + 1$, pelo item 5) da Observação 2.7.2, temos $e_{t+1,i+1} = 1$. A Proposição 2.7.1(1) nos dá $c_i \geq c_{i+1} - 1$, o que força $e_{t-1,i} = 1$. Logo, temos $e_{t-1,i} = 1$ e $e_{t,i} = 0$ e pelo item 2) da Observação 2.7.2 segue que $c_i = t - i - 1$.

Como $e_{t,i} = 0$ e $e_{t+1,i+1} = 1$, pelo item 4) da Observação 2.7.2 segue que $c_{i+1} = c_i + 1$ e assim temos $c_{i+1} = t - i$.

Se $t-k+1 \leq i \leq t-2$ então, $c_i \leq k-2$ e assim (ii) vale pela propriedade do sanduíche, pois temos $c_i = k-2$ quando $i = t-k+1$, $c_i < k-1 < c_j = k$, com $j = t+1$, logo existem inteiros p e q tal que $i = t-k+1 \leq p < q \leq j = t+1$ com $(c_p, c_{p+1}, c_{p+2}, \dots, c_{q-1}, c_q) = (k-2, k-1, k-1, \dots, k-1, k)$.

Se $i = t-k$ então $c_{t-k} = k-1$ e $c_{t-k+1} = k$. Se $c_j \leq k-2$ para algum j , $t-k+2 \leq j \leq t-1$, então (ii) vale pela propriedade do sanduíche pela mesma justificativa anterior. Se $c_j \geq k+1$ para algum j , $t-k+2 \leq j \leq t-1$, então (i) vale pela propriedade do sanduíche, pois $c_i = k-1$ com $i = t-k$, $c_i + 1 = k$ e $c_j \leq k+1$, $t-k+2 \leq j \leq t-1$, ou seja, temos $c_i < k < c_j$, logo existem p e q tal que $i \leq p < q \leq j$ e $(c_p, c_{p+1}, c_{p+2}, \dots, c_{q-1}, c_q) = (k-1, k, k, \dots, k, k+1)$.

Suponha por absurdo que $k-1 \leq c_j \leq k$ para $j = t-k+2, t-k+3, \dots, t-1$, pois caso isso ocorrer (i) ou (ii) não vale. Como $i = t-k$, a linha de c_t consiste em $k-1$ 1's consecutivos, seguidos por 0's. A linha c_{t+1} é formada de k 1's consecutivos, seguidos por 0's. Há k 1's no topo das colunas $c_{t+1}, c_{t+2}, \dots$

Assim no retângulo formado abaixo de c_{t-1} e à direita de c_t temos $k-1$ 1's na primeira linha e $k-j+1$ 1's nas linhas j , $2 \leq j \leq k$. Nas linhas abaixo, tudo é zero. No total temos

$n - 1$ 1's nesse retângulo, o que é uma contradição, já que esse retângulo representa, depois de reordenadas as colunas se necessário, a partição $\mathcal{B}^{(t-1)}(\lambda)$ de n . ■

Lema 2.7.2 *Sejam $\lambda \vdash n$ e $\text{seq}_{\mathcal{B}}(\lambda) = \langle c_1, c_2, \dots \rangle$. Se para inteiros p e k ,*

$$(c_p, c_{p+1}, c_{p+2}, \dots, c_{p+k-1}, c_{p+k}) = (k-2, k-1, k-1, \dots, k-1, k),$$

então $p + k \leq n + 1$.

Demonstração: Temos que $e_{p+k-2,p} = 1$ e $e_{p+k-1,p} = 0$, já que $c_p = k - 2$. Pela condição dada na hipótese, na linha c_{p+k} também temos $e_{p+k,j} = 1$ para $j = p + 1, p + 2, \dots, p + k - 1$. Note que a soma dessas entradas resulta em $k - 1$, e, portanto, ainda falta completar uma entrada com 1 no $\text{diagrama}_{\mathcal{B}}(\lambda)$ na linha de c_{p+k} , já que $c_{p+k} = k$. Esse 1 que falta em uma dessas entradas no $\text{diagrama}_{\mathcal{B}}(\lambda)$, ou vem da coluna de algum λ_j , $1 \leq j \leq s$, ou vem da coluna de algum c_j , $1 \leq j \leq p - 1$.

Se acontecer o primeiro caso então temos $p + k \leq \lambda_j \leq n$ e $j = 1$, pois se $2 \leq j \leq s$, como $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ então $\lambda_{j-1} = 1$ e aí haveriam $k + 1$ 1's na linha de c_{p+k} , absurdo.

Se acontecer o segundo caso então $p + k \leq c_j \leq n + 1$ e $j = 1$, pois se $p - 1 \leq j \leq 2$ teremos $e_{p+k,j-1} = 0$ e como $c_{p+k} = k = c_{p+k-1} + 1$, comparando as linhas c_{p+k} e c_{p+k-1} no $\text{diagrama}_{\mathcal{B}}(\lambda)$ também teremos $e_{p+k-1,j-1} = 0$. Analogamente, como $c_{p+k-1} = c_{p+k-2}$, $e_{p+k-2,p} = 1$ e $e_{p+k-1,p} = 0$, comparando as linhas c_{p+k-1} e c_{p+k-2} no $\text{diagrama}_{\mathcal{B}}(\lambda)$ teremos $e_{p+k-2,j-1} = 0$. Assim $c_j > c_{j-1} + 1$, o que é uma contradição pela Proposição 2.7.1(1). ■

Lema 2.7.3 *Sejam $\lambda \vdash n$ e $\text{seq}_{\mathcal{B}}(\lambda) = \langle c_1, c_2, \dots \rangle$. Se para inteiros x , p e q , com $q \geq p + 3$ e*

$$(c_p, c_{p+1}, c_{p+2}, \dots, c_{q-1}, c_q) = (x-1, x, x, \dots, x, x+1),$$

então ou $p \leq x$ ou

$$(c_{p'}, c_{p'+1}, c_{p'+2}, \dots, c_{q'-1}, c_{q'}) = (x' - 1, x', x', \dots, x', x' + 1),$$

para inteiros x' , p' e q' , com $x' \leq x$, $2 \leq q' - p' < q - p$, e $p - x \leq p' < q' \leq p + 1$.

Demonstração: Vamos assumir $p \geq x + 1$ e provar a existência de p' , q' e x' . Como $c_p = x - 1$ então temos que $e_{p,p'} = 0$ para algum p' , $p - x \leq p' \leq p - 2$. Escolhemos o maior p' possível que satisfaça essa condição. Assim $e_{p,j} = 1$ para $j = p' + 1, p' + 2, \dots, p - 1$, e, como $c_{p+1} = x = c_p + 1$, comparando as linhas de c_p e c_{p+1} no $\text{diagrama}_{\mathcal{B}}(\lambda)$, também temos $e_{p+1,j} = 1$ para $j = p' + 1, p' + 2, \dots, p$. A coluna abaixo de $c_{p'+1}$ possui 1's até pelo menos no

cruzamento com a linha c_{p+1} . A Proposição 2.7.1(1) nos diz que $c_{p'} \geq c_{p'+1} + 1$, o que força todas as entradas, acima de 0 em $e_{p,p'}$, e serem 1. Assim $c_{p'} = p - p' - 1$, pois $e_{p-1,p'} = 1$ então $c_{p'} \geq p - 1 - p'$ e também $e_{p,p'} = 0$. Também temos $c_{p'+1} = p - p'$, pois $e_{p+1,p'+1} = 1$ então $c_{p'+1} \geq p + 1 - p' - 1 = p - p'$ e também $e_{p+2,p'+1} = 0$, pois se $e_{p+2,p'+1} = 1$ então $c_{p'+1} > c_{p'} + 1$, absurdo.

Como $c_{p+2} = x = c_{p+1}$, comparando as linhas de c_{p+2} e c_{p+1} no $diagrama_{\mathcal{B}}(\lambda)$ temos $e_{p+2,j} = 1$ para $j = p' + 2, p' + 3, \dots, p + 1$. Se $e_{p+3,p'+2} = 1$ então $c_{p'+2} \geq p + 3 - p' - 2 = p - p' + 1$ e como $e_{p+4,p'+2} = 0$ então $c_{p'+2} = p - p' + 1$ e assim terminamos. Assim podemos assumir que $e_{p+3,p'+2} = 0$ e $c_{p'+2} = p - p'$.

Como $c_{p+3} = x = c_{p+2}$, comparando as linhas de c_{p+3} e c_{p+2} no $diagrama_{\mathcal{B}}(\lambda)$ temos $e_{p+3,j} = 1$ para $j = p' + 3, p' + 4, \dots, p + 2$. Se $e_{p+4,p'+3} = 1$ então $c_{p'+3} \geq p + 4 - p' - 3 = p - p' + 1$ e como $e_{p+5,p'+3} = 0$ então $c_{p'+3} = p - p' + 1$ e assim terminamos. Assim podemos assumir que $e_{p+4,p'+3} = 0$ e $c_{p'+3} = p - p'$. Continuando esse processo...

Podemos assumir que $e_{q-1,p'+q-p-2} = 0$, $c_{p'+q-p-2} = p - p'$, e $e_{q-1,j} = 1$ para $j = p' + q - p - 1, p' + q - p, \dots, q - 2$. Como $c_q = x + 1 = c_{q-1} + 1$, comparando as linhas de c_q e c_{q-1} no $diagrama_{\mathcal{B}}(\lambda)$, temos $e_{q,p'+q-p-1} = p - p' + 1$. E assim completamos a prova do teorema. ■

Lema 2.7.4 *Sejam $\lambda \vdash n$ e $seq_{\mathcal{B}}(\lambda) = \langle c_1, c_2, \dots \rangle$. Se*

$$(c_p, c_{p+1}, c_{p+2}) = (x - 1, x, x + 1)$$

então $p \leq x$.

Demonstração: Vamos supor que $p > x$. Então $c_p = x - 1 < p - 1$ que implica $e_{p,i} = 0$ para algum i , $1 \leq i \leq p - 2$. Escolha o maior i possível que satisfaça essa condição, e assim $e_{p,i+1} = 1$. Como $c_{p+1} = x = c_p + 1$ e $c_{p+2} = x + 1 = c_{p+1} + 1$, comparando as linhas de c_p , c_{p+1} e c_{p+2} no $diagrama_{\mathcal{B}}(\lambda)$, temos também $e_{p+2,i+1} = e_{p+1,i+1} = 1$. Assim $c_{i+1} > c_i + 1$, o que é uma contradição pela Proposição 2.7.1(1). ■

Agora temos condições de provar o próximo teorema.

Teorema 2.7.2 *Se $n = T_k = 1 + 2 + \dots + k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, então*

$$D_{\mathcal{B}}(n) = k^2 - k.$$

Demonstração: Provamos no Teorema 2.4.1 que $D_{\mathcal{B}}(n) \geq k^2 - k$. Basta agora provarmos que $D_{\mathcal{B}}(n) \leq k^2 - k$.

Seja $\lambda \vdash n$, é suficiente mostrar que $d_{\mathcal{B}}(\lambda) \leq k^2 - k$. Vamos assumir que $k \geq 3$, pois quando $k \leq 2$, $d_{\mathcal{B}}(\lambda) \leq k^2 - k$, já que para $k = 1$, (1) é a única partição de 1 e quando $k = 2$ temos $n = 3$, e as partições de 3 são (2, 1), (3), (1, 1, 1). Além disso, assumimos que $d_{\mathcal{B}}(\lambda) \geq k + 1$, pois se $d_{\mathcal{B}}(\lambda) \leq k$, como $k \geq 3$, então $d_{\mathcal{B}}(\lambda) \leq k < k^2 - k$.

Seja $seq_{\mathcal{B}}(\lambda) = \langle c_1, c_2, \dots \rangle$ onde $\langle c_t, c_{t+1}, c_{t+2}, \dots \rangle = \langle k-1, k, k, \dots \rangle$. Assim $d_{\mathcal{B}}(\lambda) = t$ e pelo menos (i) ou (ii) do Lema 2.7.1 vale.

Se (ii) vale com $q = p + k$ (que é o valor máximo para q), então temos $p = t - k + 1$ e $q = t + 1$. Note que o Lema 2.7.2 nos dá $p + k \leq n + 1$. Então $d_{\mathcal{B}}(\lambda) = t = p + k - 1 \leq n \leq k^2 - k$, já que $k \geq 3$.

Se não, (i) ou (ii) vale e $q \leq p + k - 1$. Utilizando os Lemas 2.7.3 e 2.7.4, a $seq_{\mathcal{B}}(\lambda)$ tem no máximo $\underbrace{(k-1)}_{\#k-1} + \underbrace{(3+4+\dots+(k-2)+(k-1))}_{\#3} + \underbrace{((k-3)+(k-4)+\dots+2+1)}_{\#k-3} = k^2 - 2k - 1$ termos antes do termo c_p :

$$seq_{\mathcal{B}}(\lambda) = \langle \underbrace{c_1, \dots, c_{k-1}}_{\#k-1}, \underbrace{c_k, c_{k+1}, c_{k+2}}_{\#3}, \underbrace{c_{k+3}, \dots, c_{2k-1}}_{\#k-3}, \underbrace{c_{2k}, c_{2k+1}, c_{2k+2}, c_{2k+3}}_{\#4}, \underbrace{c_{2k+4}, \dots, c_{3k-1}}_{\#k-4}, \dots, \underbrace{c_{p-2k}, \dots, c_{p-k-3}}_{\#k-2}, \underbrace{c_{p-k-2}, c_{p-k-1}}_{\#2}, \underbrace{c_{p-k}, \dots, c_{p-2}}_{\#k-1}, \underbrace{c_{p-1}}_{\#1}, \underbrace{c_p, \dots, c_{p+k-1}}_{\#k} \rangle$$

Assim $d_{\mathcal{B}}(\lambda) = t \leq (p-1) + k + 1 \leq (k^2 - 2k - 1) + k + 1 \leq k^2 - k$. ■

Definição 2.7.4 *Seja $\lambda \vdash n$, $n = 1 + 2 + \dots + k$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Se $d_{\mathcal{B}}(\lambda) = k^2 - k$ então chamamos λ de **partição extrema**.*

Observamos que para $k = 2$ (resp. $k = 3$), $\lambda = (1, 1, 1)$ (resp., $\lambda = (2, 2, 1, 1)$) é a única partição de $n = 1 + 2 + \dots + k$ tal que $d_{\mathcal{B}}(\lambda) = k^2 - k$. Para $k \geq 4$, temos:

Teorema 2.7.3 *Sejam $k \geq 4$ e $n = 1 + 2 + \dots + k$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Se $\lambda \vdash n$, com $d_{\mathcal{B}}(\lambda) = k^2 - k$, então a sua matriz associada $M_{\lambda} = [m_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ satisfaz as seguintes condições:*

- (1) $m_{ij} = 1$ para $j \leq k + 3 - 2i$,
- (2) $m_{ij} = 0$ para $j \geq 2k + 1 - 2i$, e
- (3) $|\{(i, j) : j = k + 4 - 2i, m_{ij} = 0\}| \leq 2$.

Demonstração: Se $k \geq 4$ e $d_{\mathcal{B}}(\lambda) = k^2 - k$, a demonstração do Teorema 2.7.2 implica que (i) do Lema 2.7.1 vale e $q = p + k - 1$. Portanto, temos $seq_{\mathcal{B}}(\lambda) = \langle c_1, c_2, \dots \rangle$ onde $(c_k, c_{k+1}, c_{k+2}) = (k-1, k, k+1)$ e $(c_{2k}, c_{2k+1}, c_{2k+2}, c_{2k+3}) = (k-1, k, k, k+1)$. Nessas condições temos no $diagrama_{\mathcal{B}}(\lambda)$ que $e_{k+2, k+1} = 1$ e $e_{k+2, k} = 1$. Também temos $e_{k+2, i} = 1$ para $i = 1, 2, \dots, k-1$, pois caso contrário escolhemos o maior i possível tal que $1 \leq i \leq k-1$ e $e_{k+2, i} = 0$, comparando as linhas de c_{k+2} , c_{k+1} e c_k no $diagrama_{\mathcal{B}}(\lambda)$, teremos $e_{k, i} = e_{k+1, i} = 0$ o que implica $c_{i+1} > c_i + 1$, o que é um absurdo. Portanto, $c_i \geq k + 2 - i$ para $i = 1, 2, \dots, k + 2$, e assim a Condição (1)

vale.

Temos também $e_{2k,i} = 1$ para $i = k + 1, k + 2, \dots, 2k - 1$, pois caso contrário escolhemos o maior i possível tal que $k + 3 \leq i \leq 2k - 2$ e $e_{2k,i} = 0$. Logo $e_{2k,i+1} = 1$. Note que $e_{2k+1,k+1} = 1$ e $e_{2k+2,k+1} = 0$, já que $c_{k+1} = k$. Comparando as linhas c_{2k} , c_{2k+1} e c_{2k+2} no *diagrama* $_{\mathcal{B}}(\lambda)$, temos $e_{2k+2,i+1} = e_{2k+1,i+1} = 1$ e assim $c_{i+1} > c_i + 1$, o que é um absurdo. Portanto, $e_{2k,i} = 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$ e a Condição (2) vale.

Como $e_{2k,k+3} = 1$, comparando as linhas c_{2k} , c_{2k+1} , c_{2k+2} e c_{2k+3} no *diagrama* $_{\mathcal{B}}(\lambda)$, temos $e_{2k+3,k+3} = e_{2k+2,k+3}$, $e_{2k+1,k+3} = 1$, e assim $c_{k+3} \geq k$. Portanto, temos $\sum_{j=1}^{k+2} e_{k+3,j} \geq k$, e assim a Condição (3) vale. ■

Computacionalmente foi checado que a recíproca do teorema é válida para $k = 4, 5, 6, 7$, em particular a recíproca com a condição (3) removida também é válida para $k = 4, 5, 6$. Quando $k = 8$, existem 1.276 partições de k satisfazendo as 3 condições do Teorema 2.7.3, mas 9 dessas partições tem $d_{\mathcal{B}}(\lambda) \neq 20 = k^2 - k$, são elas:

- (1) (7, 7, 6, 6, 3, 3, 2, 1, 1)
- (2) (7, 7, 6, 6, 3, 2, 2, 2, 1)
- (3) (7, 7, 6, 6, 3, 2, 2, 1, 1, 1)
- (4) (7, 7, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
- (5) (7, 7, 4, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
- (6) (7, 7, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
- (7) (5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1)
- (8) (5, 4, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1)
- (9) (5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1)

Portanto as três condições do Teorema 2.7.3 são necessárias mas não são suficientes para a matriz associada das partições extremas.

2.8 Cálculo de Limites de $D_{\mathcal{B}}(n)$ para números não triangulares

Para qualquer número não triangular n , podemos escrevê-lo como $n = 1 + 2 + \dots + (k-1) + r$, tal que $1 \leq r < k$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Nesta seção primeiramente vamos provar que $D_{\mathcal{B}}(n) \leq k^2 - k$ baseado no Teorema 2.7.2 e depois vamos melhorar esse limite para $k^2 - 2k - 1$ para $k \geq 4$. Também apresentaremos um

limite inferior.

Seja $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i$, onde Λ_i denota o conjunto que contém todas as partições de i , conforme definido em 2.1.2.

Definição 2.8.1 Para $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ e $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots) \in \Lambda$, definimos uma ordem parcial, ou seja, reflexiva, antissimétrica e transitiva por:

$$\lambda \leq \mu \iff \lambda_i \leq \mu_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots$$

Lema 2.8.1 Sejam $x_1, x_2, \dots$ e $y_1, y_2, \dots$ (não necessariamente em ordem não crescente) as partes das partições x e y , $x, y \in \Lambda$, respectivamente. Se $x_i \leq y_i$, para $i \geq 1$, então $x \leq y$.

Demonstração: Sem perda de generalidade assumimos que $x_1, x_2, \dots$ estão em ordem não crescente. Se $y_1 < y_2$, trocamos y_1 e y_2 e $x_i \leq y_i$, para $i \geq 1$, continua valendo. Se $y_2 < y_3$, trocamos y_2 e y_3 e assim $x_i \leq y_i$, para $i \geq 1$, continua valendo. Continuando com esse processo, podemos rearranjar todos os y'_i s em ordem não-crescente e $x_i \leq y_i$, para $i \geq 1$, e assim $x \leq y$. ■

Teorema 2.8.1 Se $\lambda, \mu \in \Lambda$ e $\lambda \leq \mu$ então $\mathcal{B}(\lambda) \leq \mathcal{B}(\mu)$.

Demonstração: Seja $\lambda, \mu \in \Lambda$ então para algum $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \Lambda_n$ e para algum $m \in \mathbb{N}^*$, $\mu \in \Lambda_m$. Sem perda de generalidade suponha que $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \vdash n$ e que $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t) \vdash m$.

Então as partes de $\mathcal{B}(\lambda)$ são $x_1 = s$, $x_2 = \lambda_1 - 1$, $x_3 = \lambda_2 - 1, \dots$, $x_{s+1} = \lambda_s - 1$. Analogamente as partes de $\mathcal{B}(\mu)$ são $y_1 = t$, $y_2 = \mu_1 - 1$, $y_3 = \mu_2 - 1, \dots$, $y_{t+1} = \mu_t - 1$.

Como $x_i \leq y_i$, para $i \geq 1$, pelo Lema 2.8.1, temos $\mathcal{B}(\lambda) \leq \mathcal{B}(\mu)$. ■

Combinando o Teorema 2.8.1 com o Teorema 2.7.2, podemos mostrar o próximo Teorema.

Teorema 2.8.2 Seja $n = 1 + 2 + \dots + (k-1) + r$, $1 \leq r < k$. Então:

$$D_{\mathcal{B}}(n) \leq k^2 - k$$

Demonstração: Seja $\lambda \vdash n$. É suficiente mostrar que $d_{\mathcal{B}}(\lambda) \leq k^2 - k$. Escolha μ e ν tal que $\mu \vdash (1 + 2 + \dots + (k-1))$, $\nu \vdash (1 + 2 + \dots + k)$ e $\mu \leq \lambda \leq \nu$. Pelo Teorema 2.8.1, temos que $\mathcal{B}^{(k^2-k)}(\mu) \leq \mathcal{B}^{(k^2-k)}(\lambda) \leq \mathcal{B}^{(k^2-k)}(\nu)$. Note que o Teorema 2.7.2 nos dá $\mathcal{B}^{(k^2-k)}(\mu) = (k-1, k-2, \dots, 2, 1)$ e $\mathcal{B}^{(k^2-k)}(\nu) = (k, k-1, \dots, 2, 1)$. Portanto $\mathcal{B}^{(k^2-k)}(\lambda)$ tem a forma cíclica do Teorema 2.4.1 e assim $d_{\mathcal{B}}(\lambda) \leq k^2 - k$. ■

Vamos provar um lema análogo ao Lema 2.7.1, mas agora para números não triangulares. Aplicando esse Lema junto com os Lemas 2.7.2, 2.7.3 e 2.7.4, vamos melhorar o limite superior de $D_{\mathcal{B}}(n)$ para números não triangulares.

Lema 2.8.2 *Sejam $n = 1 + 2 + \dots + (k - 1) + r$, $1 \leq r < k$, $\lambda \vdash n$ e $\text{seq}_{\mathcal{B}}(\lambda) = \langle c_1, c_2, \dots \rangle$.*

(1) Se $(c_t, \dots, c_{t+k-1}) = (c_{t+k}, \dots, c_{t+2k-1}) = \dots$, ou seja, $c_{t+i} = c_{t+i+k}$ para $i \geq 0$, então $d_{\mathcal{B}}(\lambda) \leq t - 1$. (Assim podemos encontrar $d_{\mathcal{B}}(\lambda)$ escolhendo tal t como sendo o menor possível.)

(2) Se $c_t = k - 1$, $c_{t+1} = k$, $c_{t+i} = c_{t+i+k}$ para $i \geq 0$, $d_{\mathcal{B}}(\lambda) \geq k + 1$ e $(c_{t-k}, \dots, c_{t-1}) \neq (c_t, \dots, c_{t+k-1})$, então pelo menos (i) ou (ii) do Lema 2.7.1 vale.

Demonstração: (1) Se $c_{t+i} = c_{t+i+k}$ para $i \geq 0$, então cada c_{t+i} é o número de partes de alguma partição $\mathcal{B}$ -cíclica de n , e assim o Teorema 2.4.1 nos garante que $k - 1 \leq c_{t+i} \leq k$ para $i \geq 0$. Em particular, note que cada linha de $c_t, c_{t+1}, \dots, c_{t+k-1}$, no $\text{diagrama}_{\mathcal{B}}(\lambda)$, consiste em $k - 1$ ou k 1's.

Pela Observação 2.7.1 item 2), temos que o retângulo formado abaixo de c_{t-1} e à direita de c_t , ignorando os zeros e, se necessário, reorganizando as colunas, nos dá $\mathcal{B}^{(t-1)}(\lambda)$. Observe que se $c_{t+i} = k - 1$ para todo $i = 0, \dots, k - 1$, então haverá $1 + 2 + \dots + (k - 1)$ 1's nesse retângulo, o que seria uma absurdo, pois ele representa $\mathcal{B}^{(t-1)}(\lambda)$. Assim $c_{t+i} = k$ para pelo menos algum $i = 0, \dots, k - 1$.

Também não podemos ter $c_{t+i} = k$ para $i = 0, \dots, k - 1$, pois chegaríamos no mesmo absurdo do caso anterior e assim temos que ter $c_{t+i} = k - 1$ para algum $i = 0, \dots, k - 1$. (Ver Exemplo abaixo com $n = 13$).

Logo a partição $\mathcal{B}^{(t-1)}(\lambda)$ possui a forma cíclica do Teorema 2.4.1 e assim é uma partição $\mathcal{B}$ -cíclica, e portanto $d_{\mathcal{B}}(\lambda) \leq t - 1$.

/	/	/	/	/	/	/	...	...	...	...
/	/	/	/	/	/	c_{t-1}	...	...	...	...
/	/	/	/	/	c_t	1	1	1	1	1
/	/	/	/	c_{t+1}	1	1	1	1	1	0
/	/	/	c_{t+2}	1	1	1	1	1	0	0
/	/	c_{t+3}	1	1	1	1	1	1	0	0
/	c_{t+4}	1	1	1	1	0	0	0	0	0
...	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:

Exemplo: $n = 13$, ou seja, $k = 5$ e $r = 3$

(2) A demonstração é análoga à do Lema 2.7.1(2). No último caso, vamos supor por absurdo que $c_{t-k} = k - 1$, $c_{t-k+1} = k$, e $k - 1 \leq c_j \leq k$, para $j = t - k + 2, t - k + 3, \dots, t - 1$. Análoga

à demonstração de (1) o retângulo abaixo de c_{t-k-1} e à direita de c_{t-k} no $diagrama_{\mathcal{B}}(\lambda)$, nos mostra que $\mathcal{B}^{(t-k-1)}(\lambda)$ é $\mathcal{B}$ -cíclica. Assim, pelo Teorema 2.4.1, $\mathcal{B}^{(t-k-1+i)}(\lambda) = \mathcal{B}^{(t-1+i)}(\lambda)$ para $i \geq 0$. Contando o número de partes de cada partição, temos $(c_{t-k}, \dots, c_{t-1}) = (c_t, \dots, c_{t+k-1})$, o que contradiz a hipótese.. $\blacksquare$

Teorema 2.8.3 *Seja n um número não triangular, $n = 1 + 2 + \dots + (k-1) + r$, $1 \leq r < k$. Então:*

- (1) $D_{\mathcal{B}}(n) \leq k^2 - 2k - 1$ para $k \geq 4$.
- (2) A igualdade vale quando $k \geq 4$ e $r = k - 1$

Demonstração: (1) Se $k = 4$ temos que r pode assumir os valores de 1, 2 ou 3 e assim n pode assumir os valores de 7, 8 ou 9. $D_{\mathcal{B}}(7) = 4$ pela Figura 2.8, $D_{\mathcal{B}}(8) = 5$ pela Figura 2.15 e $D_{\mathcal{B}}(9) = 7$ pela Figura 2.22. Portanto $D_{\mathcal{B}}(n) \leq 7$ para $k = 4$, e assim podemos assumir que $k \geq 5$.

Sejam $\lambda \vdash n$ e $seq_{\mathcal{B}}(\lambda) = \langle c_1, c_2, \dots \rangle$. É suficiente mostrar que $d_{\mathcal{B}}(\lambda) \leq k^2 - 2k - 1$. Seja $\mathcal{B}^{(t-1)}(\lambda)$ uma partição $\mathcal{B}$ -cíclica para algum $t \geq 1$. Logo o Teorema 2.4.1 nos dá $c_{t+i} = c_{t+i+k}$ e $k-1 \leq c_{t+i} \leq k$ para $i \geq 0$, e assim pelo Lema 2.8.2(1), $d_{\mathcal{B}}(\lambda) \leq t-1$. Também podemos assumir $c_t = k-1$ e $c_{t+1} = k$, já que $r \neq k$, e escolhemos tal t como o menor possível.

Se $t \leq k$, então $d_{\mathcal{B}}(\lambda) \leq t-1 \leq k-1 < k^2 - 2k - 1$, já que $k \geq 5$.

Logo, assumimos $t \geq k+1$ e $(c_{t-k}, \dots, c_{t-1}) \neq (c_t, \dots, c_{t+k-1})$, já que escolhemos o menor t possível. Assim, pelo Lema 2.8.2(ii), pelo menos (i) ou (ii) do Lema 2.7.1 vale.

Se (ii) vale com $q = p+k$, temos $(p, q) = (t-k+1, t+1)$. Note que o Lema 2.7.2 nos dá $p+k \leq n+1$. Assim, $d_{\mathcal{B}}(\lambda) \leq t-1 = p+k-2 \leq n-1 < k^2 - 2k - 1$ já que $k \geq 5$.

Se não, (i) ou (ii) vale e $q \leq p+k-2$, pelos Lemas 2.7.3 e 2.7.4, a $seq_{\mathcal{B}}(\lambda)$ tem no máximo $k^2 - 3k - 1$ termos antes do termo c_p . Logo, $d_{\mathcal{B}}(\lambda) \leq t-1 \leq (p-1) + k \leq (k^2 - 3k - 1) + k = k^2 - 2k - 1$.

Se não, suponha por absurdo que (i) ou (ii) vale com $q = p+k-1$: se (i) vale com $q = p+k-1$, temos que $(p, q) = (t-k, t-1)$ e $c_{t-1} = k+1$, o que é uma contradição, pois teremos $(c_p, \dots, c_q) = (\overbrace{c_{t-k}, \dots, c_{t-1}}^{k \text{ elementos}}) = (k-1, k, \dots, k, k+1)$. Fazendo a soma desses k elementos $c_p + \dots + c_q = (k-1) + (k-2)k + k+1 = (k-1)k + k$ e pela Proposição 2.7.1(2) essa soma é no máximo $(k-1)k + r$, $1 \leq r < k$. Se não (ii) vale com $q = p+k-1$ e temos $(p, q) = (t-k+2, t+1)$ e $c_{t-k+2} = k-2$, o que é uma contradição, já que, comparando as linhas de c_{t+1} e c_t no $diagrama_{\mathcal{B}}(\lambda)$, temos que $c_{t-k+2} \neq k-2$.

(2) Suponha $k \geq 4$ e $r = k-1$. Por (1), é suficiente exibir $\lambda \vdash n$ tal que $d_{\mathcal{B}}(\lambda) = k^2 - 2k - 1$. Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1})$, onde $\lambda_1 = k-1$, $\lambda_2 = k-2$, $\lambda_i = k-i+1$ para $i = 3, 4, \dots, k$

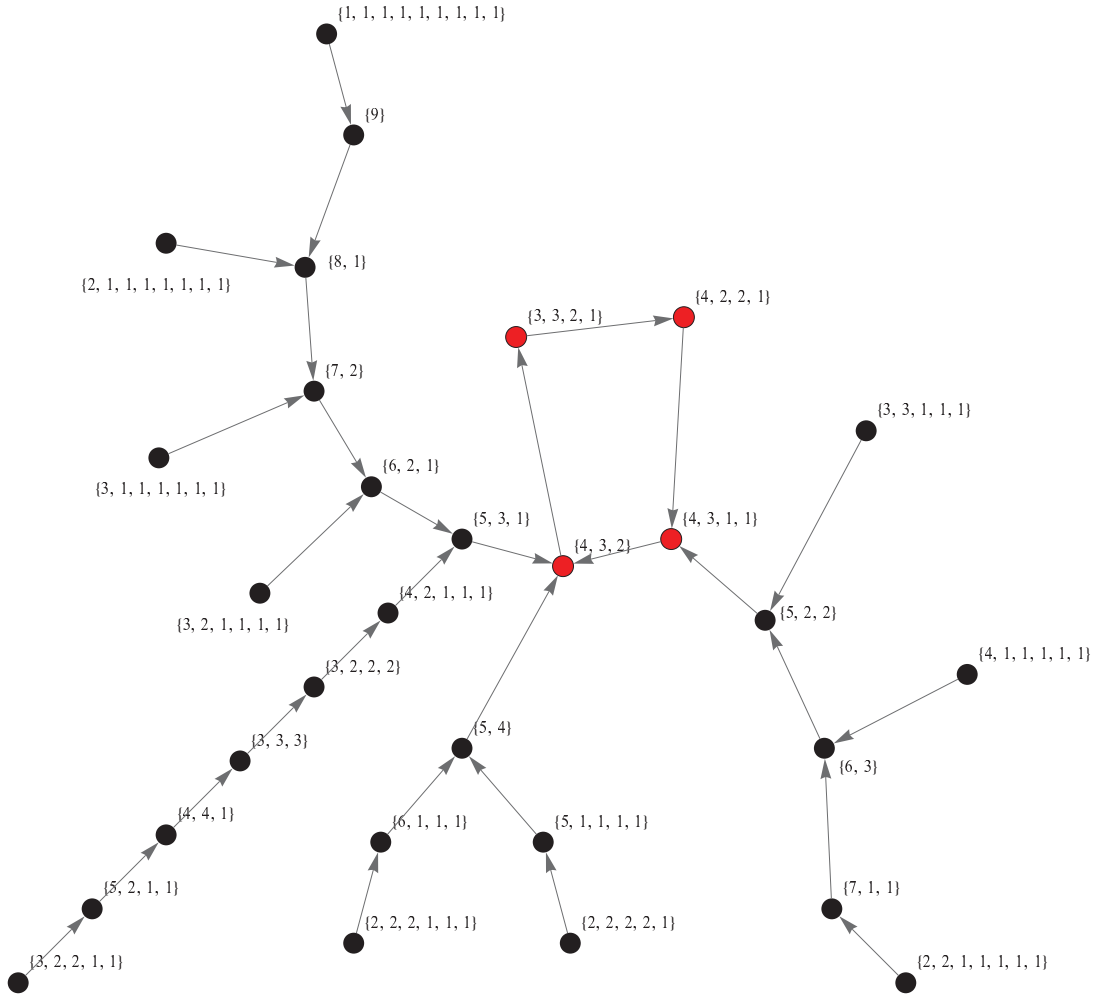


Figura 2.22: Diagrama $\mathcal{B}$ -shift de $n=9$, estilo RadialDrawing

e $\lambda_{k+1} = 1$. Assim $\lambda = (k-1, k-2, k-2, k-3, k-4, \dots, 3, 2, 1, 1)$. Fazendo a matriz associada M_λ temos que as diagonais de 1 a $(k-1)$ são formada apenas por 1's, a diagonal k é da forma $(0, 0, 1, \dots, 1, 1)$, a diagonal $k+1$ é da forma $(0, 0, 0, \dots, 0, 0, 1)$ e as diagonais abaixo da diagonal $k+1$ são formadas apenas de 0's.

$$\begin{matrix} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ k-1 \xrightarrow{\text{linha}} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} & = M_\lambda \\ k \xrightarrow{\text{linha}} & & & & & & & & \\ k+1 \xrightarrow{\text{linha}} & & & & & & & & \end{matrix}$$

Com a forma da matriz M_λ definida, ao aplicar k vezes o processo $\mathcal{B}$ -shifting em M_λ , apenas $\mathcal{D}_{M_\lambda}(k+1)$ é alterada, pois as outras diagonais são formadas apenas por 1's ou são formadas apenas por 0's e a diagonal k permanece a mesma também pois possui k elementos. Note que nessas k vezes foi preciso apenas utilizar o Passo 1 do processo (Shift Circular Diagonal) por causa da configuração de M_λ . Assim, as diagonais $\mathcal{D}_{M_\lambda}(k+1)$ e $\mathcal{D}_{M_\lambda}(k)$ se comportam da seguinte maneira:

# Processo $\mathcal{B}$ -shifting em M_λ (Passo 1)	$\mathcal{D}_{M_\lambda}(k)$	$\mathcal{D}_{M_\lambda}(k+1)$
k	$\underbrace{(0, 0, 1, \dots, 1, 1, 1)}_k$	$\underbrace{(0, 0, 0, \dots, 0, 0, 1, 0)}_{k+1}$
$2k$	$\underbrace{(0, 0, 1, \dots, 1, 1, 1)}_k$	$\underbrace{(0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0)}_{k+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(k-3)k$	$\underbrace{(0, 0, 1, \dots, 1, 1, 1)}_k$	$\underbrace{(0, 0, 1, 0 \dots, 0, 0, 0)}_{k+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(k-3)k + (k-1)$	$\underbrace{(0, 1, 1, \dots, 1, 1, 0)}_k$	$\underbrace{(0, 1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0)}_{k+1}$

Assim depois de aplicados $(k-3)k + (k-1) = k^2 - 2k - 1$ vezes o Passo 1 do processo $\mathcal{B}$ -shifting em M_λ , chegamos em uma matriz M_θ com a seguinte configuração:

[illegible]

Há mais 1's na segunda coluna do que na primeira, logo precisamos aplicar o Passo 2 do processo $\mathcal{B}$ -shifting em M_θ e assim obtemos a matriz $M_{\mathcal{B}^{(k^2-2k-1)}(\lambda)}$ que é a matriz associada da partição $\mathcal{B}^{(k^2-2k-1)}(\lambda)$. Logo $\mathcal{B}^{(k^2-2k-1)}(\lambda) = (k, k-1, k-2, \dots, 3, 2)$ e portanto $d_{\mathcal{B}}(\lambda) = k^2 - 2k - 1$.

$$\begin{array}{l}
k-1 \xrightarrow{\text{a}linha} \\
k \xrightarrow{\text{a}linha} \\
k+1 \xrightarrow{\text{a}linha}
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots
\end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}^{(k^2-2k-1)}(\lambda)}$$

Até agora obtemos um limite superior para $D_{\mathcal{B}}(n)$ no Teorema 2.8.3. A seguir iremos determinar um limite inferior para $D_{\mathcal{B}}(n)$ que é conjecturado como o valor exato.

Teorema 2.8.4 [*Limite Inferior*] Para $n \geq 3$ e $n = 1 + 2 + \dots + (k-1) + r$, $1 \leq r \leq k$,

$$D_B(n) \geq \begin{cases} (k-3-r)k+r+2 & \text{para } 1 \leq r < \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor \\ n-k+1 & \text{para } r = \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor \text{ ou } \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \\ (r-2)k+r & \text{para } \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor < r \leq k \end{cases}$$

Demonstração: É suficiente exibir $\lambda \vdash n$ tal que $d_{\mathcal{B}}(\lambda)$ é o valor do respectivo limite inferior para $D_{\mathcal{B}}(n)$.

Vamos considerar três casos:

Caso (1) $1 \leq r < \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$: Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ tal que $\lambda_1 = k - 2$, $\lambda_i = k - i$ para $i = 2, 3, \dots, k - r - 1$, e $\lambda_j = k - j + 1$ para $j = k - r, k - r + 1, \dots, k$. Seja M_λ a sua matriz associada. Assim as diagonais de 1 a $(k - 2)$ são todas compostas de 1's, $\mathcal{D}_{M_\lambda}(k - 1) =$

$(\underbrace{0, 1, 1, \dots, 1}_{k-1})$ e $\mathcal{D}_{M_\lambda}(k) = (\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_k, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{r+1})$, e as diagonais abaixo de $\mathcal{D}_{M_\lambda}(k)$ são todas nulas. Com essa configuração dada, ao aplicar $(k-1)$ vezes o processo $\mathcal{B}$ -shifting em M_λ , sendo necessário apenas o Passo 1, somente $\mathcal{D}_{M_\lambda}(k)$ se altera. Logo temos o seguinte comportamento na matriz M_λ :

# Processo $\mathcal{B}$ -shifting em M_λ (Passo 1)	$\mathcal{D}_{M_\lambda}(k-1)$	$\mathcal{D}_{M_\lambda}(k)$
$(k-1)$	$(\underbrace{0, 1, 1, \dots, 1}_{k-1}, 1, 1, 1)$	$(\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_k, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{r+1})$
$2(k-1)$	$(\underbrace{0, 1, 1, \dots, 1}_{k-1}, 1, 1, 1)$	$(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{r+1}, 0, 0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(k-r-2)(k-1)$	$(\underbrace{0, 1, 1, \dots, 1}_{k-1}, 1, 1, 1)$	$(\underbrace{0, 1, 1, \dots, 1}_k, \dots, 0, 0, 0)$

Assim depois de aplicados $(k-r-2)(k-1)$ vezes o Passo 1 do processo $\mathcal{B}$ -shifting em M_λ , chegamos em uma matriz M_θ e análogo à demonstração do Teorema 2.8.3, usando o Passo 2 do processo $\mathcal{B}$ -shifting, obtemos a matriz $M_{\mathcal{B}^{(k-r-2)(k-1)}(\lambda)}$ que é a matriz associada da partição $\mathcal{B}^{(k-r-2)(k-1)}(\lambda) = (k-1, k-2, k-3, \dots, 3, 2, 1) + (0, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_r, 0, \dots, 0)$ que por sua vez é $\mathcal{B}$ -cíclica e, portanto, $d_{\mathcal{B}}(\lambda) = (k-r-2)(k-1) = k^2 - k - kr + r - 2k + 2 = (k-3-r)k + r + 2$.

Caso (2) $r = \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ ou $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$: Seja $\lambda = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n)$.

Vamos provar primeiramente através de indução sobre i que:

$$\mathcal{B}^{(1+1+2+3+\dots+i)}(\lambda) = (n - (1 + 2 + \dots, i), i, i-1, i-2, \dots, 2, 1) \quad (2.4)$$

para $i = 1, \dots, k-2$.

Por definição da aplicação $\mathcal{B}$ -shift, $\mathcal{B}(\lambda) = (n)$ e $\mathcal{B}^{(2)}(\lambda) = (n-1, 1)$. Assim, (2.4) vale para $i = 1$.

Agora suponha que (2.4) vale para $i = k-3$ e vamos provar que vale para $i = k-2$. Assim, seja $z = 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (k-3)$, temos:

$$\mathcal{B}^{(z)}(\lambda) = (n - (1 + 2 + \dots + (k-3)), k-3, k-4, \dots, 2, 1) = ((k-2) + (k-1) + r, k-3, k-4, \dots, 2, 1)$$

e assim a sua matriz associada $M_{\mathcal{B}^{(z)}}(\lambda)$ é da forma:

$$M_{\mathcal{B}(z)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

As diagonais de 1 a $(k-2)$ de $M_{\mathcal{B}(z)}$ são formadas apenas por 1's. Portanto a cada vez aplicado o processo $\mathcal{B}$ -shifting em $M_{\mathcal{B}(z)}$ apenas as diagonais com índices maiores que $(k-2)$ são alteradas. Note que a coluna 1 possui $(k-2) + (k-1) + r$ 1's e a coluna 2 possui $(k-3)$ 1's. Sendo assim aplicando o Passo 1 do processo $\mathcal{B}$ -shifting em $M_{\mathcal{B}(z)}$ a coluna 2 fica maior que a coluna 1 e portanto precisamos aplicar o Passo 2 para encontrarmos $M_{\mathcal{B}(z+1)}$. Aplicando o Passo 2 a diagonal $(k-1)$ recebe um novo 1 que é o mesmo 1 que a coluna 1 perde.

Assim, ao aplicar o processo, aumentou-se um 1 na diagonal $(k-1)$ e diminui-se um 1 na coluna 1. Seguindo com o raciocínio temos:

# Processo $\mathcal{B}$ -shifting em $M_{\mathcal{B}(z)}$	$\mathcal{D}_{M_\lambda}(k-1)$	Quantidade de 1's na coluna 1
0	$(1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-2})$	$(k-2) + (k-1) + r$
1	$(1, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-3})$	$(k-3) + (k-1) + r$
2	$(1, 1, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-4})$	$(k-4) + (k-1) + r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(k-3)$	$(1, 1, \dots, \underbrace{1, 1, 0}_{k-2})$	$(1) + (k-1) + r$
$(k-2)$	$(1, 1, \dots, \underbrace{1, 1, 1}_{k-1})$	$(k-1) + r$

Logo, as diagonais de 1 a $(k-1)$ de $M_{\mathcal{B}(z+(k-2))}$ são formadas por 1's e a coluna 1 possui $(k-1) + r$ 1's. Sendo assim $M_{\mathcal{B}(z+(k-2))}$ é a matriz associada da composição $\mathcal{B}^{(z+(k-2))}(\lambda) = \mathcal{B}^{(1+1+2+3+\dots+(k-2))} = ((k-1) + r, k-2, k-3, \dots, 2, 1)$ e assim terminamos a demonstração da indução.

Seja $y = z + (k-2) = (1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (k-2))$, logo, como demonstrado acima as $(k-1)$ primeiras diagonais da matriz $M_{\mathcal{B}(y)}$ são formadas apenas por 1's, e assim utilizando o mesmo raciocínio utilizado, a cada aplicação do processo $\mathcal{B}$ -shift em $M_{\mathcal{B}(y)}$ apenas as diagonais de índice maiores que $(k-1)$ são alteradas e assim:

# Processo $\mathcal{B}$ -shifting em $M_{\mathcal{B}(y)}$	$\mathcal{D}_{M_\lambda}(k)$	Quantidade de 1's na coluna 1
0	$\underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_k$	$(k-1) + r$
1	$\underbrace{(1, 1, 0, \dots, 0)}_k$	$(k-1) + r - 1$
2	$\underbrace{(1, 1, 1, 0, \dots, 0)}_k$	$(k-1) + r - 2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(r-2)$	$\underbrace{(1, 1, \dots, 1, 0)}_{\substack{r-1 \\ k}}$	$(k-1) + 2$
$(r-1)$	$\underbrace{(1, 1, 1, \dots, 1, 0)}_r$	$(k-1) + 1$

Assim, as diagonais de 1 a $(k-1)$ de $M_{\mathcal{B}(y+(r-1))}$ são formada por 1's e a coluna 1 possui $(k-1) + 1$ 1's. Sendo assim $M_{\mathcal{B}(y+(r-1))}$ é matriz associada da partição $\mathcal{B}^{(y+(r-1))}(\lambda) = ((k-1) + 1, (k-2) + 1, \dots, (k-r) + 1, \dots, 3, 2, 1)$ que é $\mathcal{B}$ -cíclica e portanto $d_{\mathcal{B}}(\lambda) = y + (r-1) = 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (k-2) + (r-1) = n - k + 1$.

Caso (3) $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor < r \leq k$: Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1})$ onde $\lambda_i = k-i$ para $i = 1, 2, \dots, k-r+1$, $\lambda_j = k-j+1$ para $j = k-r+2, k-r+3, \dots, k$ e $\lambda_{k+1} = 1$. Seja M_λ a sua matriz associada. Assim as diagonais de 1 a $(k-1)$ são todas compostas de 1's, $\mathcal{D}_{M_\lambda}(k) = (0, 0, \dots, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{\substack{r-1 \\ k}})$ e $\mathcal{D}_{M_\lambda}(k+1) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k+1}, 1)$. Logo temos o seguinte comportamento na matriz M_λ :

‡ Processo $\mathcal{B}$ -shifting em M_λ (Passo 1)	$\mathcal{D}_{M_\lambda}(k)$	$\mathcal{D}_{M_\lambda}(k+1)$
k	$(\underbrace{0, 0, \dots, 1, 1, \dots, 1}_{k}^{r-1})$	$(\underbrace{0, 0, \dots, 0, 1, 0}_{k+1})$
$2k$	$(\underbrace{0, 0, \dots, 1, 1, \dots, 1}_{k}^{r-1})$	$(\underbrace{0, 0, \dots, 1, 0, 0}_{k+1})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(r-2)k$	$(\underbrace{0, 0, \dots, 1, 1, \dots, 1}_{k}^{r-1})$	$(\underbrace{0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0}_{k+1}^{r-1})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(r-2)k + (r-1)$	$(\underbrace{1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0}_{k}^{r-1})$	$(\underbrace{1, 0, \dots, 0, 0}_{k+1})$
$(r-2)k + (r)$	$(\underbrace{0, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0}_{k}^{r-1})$	$(\underbrace{0, 1, 0, \dots, 0, 0}_{k+1})$

Assim depois de aplicados $(r-2)k + (r)$ vezes o Passo 1 do processo $\mathcal{B}$ -shifting em M_λ , chegamos em uma matriz M_θ e análogo à demonstração do Teorema 2.8.3, usando o Passo 2 do processo $\mathcal{B}$ -shifting, obtemos a matriz $M_{\mathcal{B}^{(r-2)k+(r)}(\lambda)}$ que é a matriz associada da partição $\mathcal{B}^{(r-2)k+(r)}(\lambda) = ((k-1)+1, (k-2)+1, (k-3)+1, \dots, (k-r)+1, (k-r+1), (k-r+2), \dots, 3, 2, 1)$ que por sua vez é $\mathcal{B}$ -cíclica e, portanto, $d_{\mathcal{B}}(\lambda) = (r-2)k + (r)$.

2.9 Conjectura

Em [4] foi lançada a seguinte conjectura, que até o presente trabalho não se tem notícia de que foi provada.

Conjectura 2.9.1 *No Teorema 2.8.4, “ $D_{\mathcal{B}}(n) \geq$ ” pode ser substituído por “ $D_{\mathcal{B}}(n) =$ ”.*

A conjectura foi confirmada quando $r = k - 1$, k e para $n = 3, 4, \dots, 36$, ver Tabela 2.1. ■

Capítulo 3

Paciência Carolina: Uma variação da Paciência Búlgara

Vamos neste capítulo definir formalmente a Paciência Carolina, criada por Andrey Andreev e os elementos usados para mostrar as relações com a Paciência Búlgara e também demonstrar alguns resultados análogos ao da Paciência Búlgara.

3.1 Composições e aplicação $\mathcal{C}$ -shift

Definição 3.1.1 (Composição) *Seja n um inteiro positivo, dizemos que*

*$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{Z}^s$, $s = 1, \dots, n$, é uma **composição** de n , e escrevemos $\lambda \models n$, se $\lambda_i > 0$, $\forall i = 1, \dots, s$ e $\sum_{i=1}^s \lambda_i = n$. Assim como na partição, λ_i , $i = 1, \dots, s$ é i -ésima **parte** da composição e também o seu comprimento (tamanho) é $|\lambda| = s$.*

A diferença entre composição e partição de um número, é que na composição não necessariamente as partes tem que estar em ordem não crescente e se estiver a composição coincide com a partição.

Exemplo 3.1.1 $\lambda = (6, 1, 6)$ é uma composição do número 13 e possui 3 partes, $|\lambda| = 3$. $\mu = (1, 1, 1, 1, 5, 3, 8)$ é uma composição do número 20 e possui 7 partes, $|\mu| = 7$.

Definição 3.1.2 *Seja n um inteiro positivo, definimos $\Gamma_n = \{\lambda \mid \lambda \models n\}$ o conjunto de todas as composições de n .*

Análogo às partições de um inteiro n , vamos definir uma aplicação de Γ_n em Γ_n e posteriormente a “Paciência Carolina”.

Definição 3.1.3 Dado um inteiro positivo n e $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \models n$. Definimos por **$\mathcal{C}$ -shift** a aplicação, $\mathcal{C} : \Gamma_n \longrightarrow \Gamma_n$, que associa λ à uma nova composição de n denotada por $\mathcal{C}(\lambda)$, obtida da seguinte maneira:

- i) diminui-se uma unidade de cada parte λ_i , $i = 1, \dots, s$. $i = 1, \dots, s$.
- ii) Descarta(m) se a(s) parte(s) nula(s), caso houver.
- iii) Cria-se uma nova parte de tamanho s , colocando-a como primeira parte.

Observação 3.1.1 Assim como na aplicação **$\mathcal{B}$ -shift**, se $\lambda \models n$ possui s partes então $\mathcal{C}(\lambda)$ possui no máximo $s + 1$ partes.

Exemplo 3.1.2 Seja $\lambda = (1, 5, 1, 7) \models 14$, logo $\mathcal{C}(\lambda) = (4, 4, 6)$. Se $\mu = (2, 3, 1, 4) \models 10$, então $\mathcal{C}(\mu) = (4, 1, 2, 3)$.

Utilizando a mesma ideias de blocos, podemos ver geometricamente o comportamento de $\mathcal{C}$ -shift, conforme ilustra a Figura 3.1

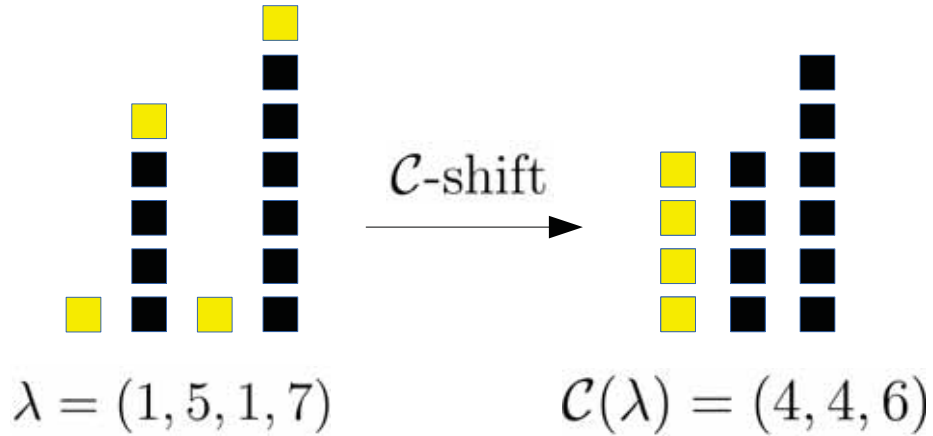


Figura 3.1:

Definição 3.1.4 (Paciência Carolina) Dada uma composição λ de um inteiro positivo n , descrevemos a “Paciência Carolina” de λ como sendo a sequência:

$$\lambda, \mathcal{C}(\lambda), \mathcal{C}^{(2)}(\lambda), \dots$$

onde $\mathcal{C}^{(i)}(\lambda)$, $i \in \mathbb{Z}^+$, representa a composição de n , obtida através de sucessivas aplicações de $\mathcal{C}$ -shift em λ , no total de i vezes. Nesse caso dizemos que $\mathcal{C}^{(i)}(\lambda)$ é a i -ésima iterada de λ pela aplicação $\mathcal{C}$ -shift.

Ou seja, a “Paciência Carolina” de uma composição $\lambda \models n$, pensando como um sistema dinâmico no conjunto Γ_n com a aplicação $\mathcal{C}$ -shift, nada mais é do que a sua órbita.

Exemplo 3.1.3 *Seja $\lambda = (2, 1, 1, 1, 1) \models 6$, então temos $\mathcal{C}(\lambda) = (5, 1)$, $\mathcal{C}^{(2)}(\lambda) = (2, 4)$, $\mathcal{C}^{(3)}(\lambda) = (2, 1, 3)$, $\mathcal{C}^{(4)}(\lambda) = (3, 1, 2)$, $\mathcal{C}^{(5)}(\lambda) = (3, 2, 1)$, $\mathcal{C}^{(6)}(\lambda) = (3, 2, 1)$, $\dots$.*

Exemplo 3.1.4 *Seja $\mu = (6, 1) \models 7$, assim temos $\mathcal{C}(\mu) = (2, 5)$, $\mathcal{C}^{(2)}(\mu) = (2, 1, 4)$, $\mathcal{C}^{(3)}(\mu) = (3, 1, 3)$, $\mathcal{C}^{(4)}(\mu) = (3, 2, 2)$, $\mathcal{C}^{(5)}(\mu) = (3, 2, 1, 1)$, $\mathcal{C}^{(6)}(\mu) = (4, 2, 1)$, $\mathcal{C}^{(7)}(\mu) = (3, 3, 1)$, $\mathcal{C}^{(8)}(\mu) = (3, 2, 2)$, $\mathcal{C}^{(9)}(\mu) = (3, 2, 1, 1)$, $\mathcal{C}^{(10)}(\mu) = (4, 2, 1)$, $\dots$.*

Observe que no Exemplo 3.1.3 após 5 iteradas de $\mathcal{C}$ em λ chegamos em uma composição que não se modifica mais através de $\mathcal{C}$. Já no Exemplo 3.1.4, após 4 iteradas de $\mathcal{C}$ em μ chegamos em uma composição que se repete ao longo da sequência de iteradas.

Definição 3.1.5 *Dizemos que uma composição $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s) \models n$ é uma **permutação** da composição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \models n$, se as partes μ_i de μ são permutações das partes λ_i de λ , $i = 1, \dots, s$.*

Exemplo 3.1.5 *A composição $\mu = (2, 1, 2, 4) \models 9$ é uma permutação da composição $\lambda = (1, 4, 2, 2) \models 9$.*

Pela definição, podemos observar que dada uma composição $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s) \models n$ ela é sempre uma permutação de uma única partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \vdash n$. Por exemplo, seja $\mu = (2, 1, 4, 5) \models 12$, organizando suas partes em ordem não crescente, temos que μ é uma permutação da partição $\lambda = (5, 4, 2, 1) \vdash 12$.

Observação 3.1.2 *Um fato interessante e importante que será utilizado em demonstrações é que se $\mu \models n$ é uma permutação de $\lambda \vdash n$, então $\forall i > 0$, $\mathcal{C}^{(i)}(\mu) \models n$ é também uma permutação de $\mathcal{B}^{(i)}(\lambda) \vdash n$. Isso vem direto das definições de $\mathcal{B}$ -shift e $\mathcal{C}$ -shift já que ambas as aplicações fazem exatamente o mesmo a menos de ordem das partes. Assim no mesmo “nível” i de iteração sempre teremos a permutação entre a composição e a partição.*

3.2 Composições cíclicas, $d_{\mathcal{C}}(\lambda)$ e $D_{\mathcal{C}}(n)$

Analogamente para uma partição $\mu \vdash n$ $\mathcal{B}$ -cíclica, $d_{\mathcal{B}}(\mu)$ e $D_{\mathcal{B}}(n)$ na Paciência Búlgara, podemos definir uma composição $\lambda \models n$ $\mathcal{C}$ -cíclica, $d_{\mathcal{C}}(\lambda)$ e $D_{\mathcal{C}}(n)$ na Paciência Carolina.

Sejam n um inteiro positivo, $\lambda \models n$ e $\mathcal{C} : \Gamma_n \longrightarrow \Gamma_n$.

Definição 3.2.1 Dizemos que λ é $\mathcal{C}$ -cíclica, ou simplesmente cíclica, de período i , se i é o menor inteiro positivo tal que $\mathcal{C}^{(i)}(\lambda) = \lambda$. Assim o conjunto $\mathcal{O}(\lambda) = \{\lambda, \mathcal{C}(\lambda), \mathcal{C}^{(2)}(\lambda), \dots, \mathcal{C}^{(i-1)}(\lambda)\}$ é a sua órbita periódica, ou ciclo, e o seu período é i . Nesse caso também podemos dizer que λ é periódica de período i .

Observação 3.2.1 (1) Se $i = 1$ dizemos que λ é uma composição fixa.

(2) Se a composição λ é cíclica de período i , então $\mathcal{O}(\lambda) = \mathcal{O}(\mathcal{C}(\lambda)) = \dots = \mathcal{O}(\mathcal{C}^{(i-1)}(\lambda))$

No Exemplo 3.1.3 $(3, 2, 1)$ é uma composição fixa, enquanto no Exemplo 3.1.4 $(3, 2, 2)$ é uma composição $\mathcal{C}$ -cíclica, de período 4.

Definição 3.2.2 Definimos $d_{\mathcal{C}}(\lambda)$ como sendo o menor inteiro $i \geq 0$ tal que $\mathcal{C}^{(i)}(\lambda)$ é $\mathcal{C}$ -cíclica e $D_{\mathcal{C}}(n) := \max\{d_{\mathcal{C}}(\lambda) \mid \lambda \models n\}$.

Analogamente, vale também a mesma interpretação da Observação 2.2.2.

Exemplo 3.2.1 $\lambda = (4, 1) \models 5$. Fazendo as iterações em λ obtemos:

$$(4, 1) \xrightarrow{\mathcal{C}} (2, 3) \xrightarrow{\mathcal{C}} (2, 1, 2) \xrightarrow{\mathcal{C}} (3, 1, 1) \xrightarrow{\mathcal{C}} (3, 2) \xrightarrow{\mathcal{C}} (2, 2, 1) \xrightarrow{\mathcal{C}} (3, 1, 1) \xrightarrow{\mathcal{C}} \dots$$

Assim $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = 3$ pois a composição $\mu = \mathcal{C}^{(3)}(\lambda) = (3, 1, 1)$ é $\mathcal{C}$ -cíclica, já que $\mathcal{C}^{(3)}(\mu) = \mu$.

Exemplo 3.2.2 $D_{\mathcal{C}}(4) = 3$, pois as composições de 4 são: $(1, 1, 1, 1), (3, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2), (4)$, e:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & & & & (1, 1, 2) & \\ & & & & & & & & & \downarrow_{\mathcal{C}} & \\ (1, 1, 1, 1) & \xrightarrow{\mathcal{C}} & (4) & \xrightarrow{\mathcal{C}} & (1, 3) & \xrightarrow{\mathcal{C}} & (2, 2) & \xrightarrow{\mathcal{C}} & (2, 1, 1) & \xrightarrow{\mathcal{C}} & (3, 1) & \xrightarrow{\mathcal{C}} & (2, 2) & \xrightarrow{\mathcal{C}} & (2, 1, 1) & \dots \\ & & & & & & & & & \uparrow_{\mathcal{C}} & \\ & & & & & & & & & (1, 2, 1) & \end{array}$$

Pelo diagrama acima $d_{\mathcal{C}}(1, 1, 1, 1) = 3$, $d_{\mathcal{C}}(3, 1) = 0$, $d_{\mathcal{C}}(1, 3) = 1$, $d_{\mathcal{C}}(2, 2) = 0$, $d_{\mathcal{C}}(2, 1, 1) = 0$, $d_{\mathcal{C}}(1, 2, 1) = 1$, $d_{\mathcal{C}}(1, 1, 2) = 1$, $d_{\mathcal{C}}(4) = 1$.

Os valores de $D_{\mathcal{C}}(n)$, $4 \leq n \leq 36$, são mostrados na Tabela a seguir, calculados computacionalmente. A representação de n é da forma $n = 1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1) + r$, $1 \leq r \leq k$.

Tabela 3.1: Valores de $D_C(n)$, $n = 4, \dots, 36$

	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
$r = 1$	$D_C(4) = 3$	$D_C(7) = 6$	$D_C(11) = 11$	$D_C(16) = 19$	$D_C(22) = 29$	$D_C(29) = 41$
$r = 2$	$D_C(5) = 5$	$D_C(8) = 8$	$D_C(12) = 12$	$D_C(17) = 17$	$D_C(23) = 23$	$D_C(30) = 34$
$r = 3$	$D_C(6) = 8$	$D_C(9) = 10$	$D_C(13) = 13$	$D_C(18) = 18$	$D_C(24) = 24$	$D_C(31) = 31$
$r = 4$		$D_C(10) = 15$	$D_C(14) = 18$	$D_C(19) = 21$	$D_C(25) = 25$	$D_C(32) = 32$
$r = 5$			$D_C(15) = 24$	$D_C(20) = 28$	$D_C(26) = 32$	$D_C(33) = 36$
$r = 6$				$D_C(21) = 35$	$D_C(27) = 40$	$D_C(34) = 45$
$r = 7$					$D_C(28) = 48$	$D_C(35) = 54$
$r = 8$						$D_C(36) = 63$

3.3 Caracterização das Composições Cíclicas

Vamos traçar o mesmo caminho que foi feito para a “Paciência Búlgara” para encontrarmos a caracterização das composições cíclicas e assim vamos definir uma matriz formada apenas por 0’s e 1’s que represente uma composição.

Definição 3.3.1 *Dada uma composição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \models n$ definimos por M_λ a sua matriz associada, se forma que:*

$$M_\lambda = [m_{ij}]_{i,j=1}^\infty, \text{ onde } m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } j \leq s \text{ e } i \leq \lambda_j; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Portanto, a matriz associada é a mesma usada para partições.

Exemplo 3.3.1 *Seja $\lambda = (2, 5, 3, 2, 4) \models 16$, então:*

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ou seja, o número de 1’s de cada coluna corresponde à respectiva parte da composição.

Análogo ao processo $\mathcal{B}$ -shifting para partições μ , vamos definir o processo $\mathcal{C}$ -shifting para composições λ , para obtermos $M_{\mathcal{C}(\lambda)}$, $M_{\mathcal{C}^{(2)}(\lambda)}$, $\dots$, a partir de M_λ somente deslocando 0's e 1's das diagonais da matriz associada.

Definição 3.3.2 (*Processo $\mathcal{C}$ -shifting*) *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \models n$ e $M_\lambda = [m_{ij}]$ a sua matriz associada. O processo de obtenção de $M_{\mathcal{C}(\lambda)}$ a partir de M_λ , chamado de Processo $\mathcal{C}$ -shifting, é composto de no máximo 2 passos:*

Passo 1: *Shifting Circular Diagonal*: *É o mesmo Passo 1 do processo $\mathcal{B}$ -shifting para partições, descrito na seção 2.4. Após esse passo, obtemos uma nova matriz, denotada por M'_λ . Note que a quantidade de 1's nas colunas de M'_λ são $s, \lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_s - 1, 0, 0, \dots$*

Se $\lambda_i - 1 = 0$ e $\lambda_{i+1} - 1 > 0$ para algum i , $i = 1, \dots, s$, ou seja, se tivermos uma coluna de M'_λ toda nula e a coluna posterior não nula, então precisamos de um passo extra para obtermos $M_{\mathcal{C}(\lambda)}$. Caso contrário, $M'_\lambda = M_{\mathcal{C}(\lambda)}$.

Passo 2. *Shifting pela Esquerda*: *Sempre que para algum inteiro positivo j tal que a coluna j de M'_λ for toda nula e a coluna $(j + 1)$ de M'_λ não for, removemos a coluna j e deslocamos cada coluna com índice maior para à esquerda. Repetimos esses deslocamentos até não existir tal inteiro j . A nova matriz é $M_{\mathcal{C}(\lambda)}$.*

Observação 3.3.1 *Note que o Passo 1 do processo faz com as colunas de M_λ o equivalente com o que a definição da aplicação $\mathcal{C}$ -shift faz com as partes da composição. As vezes é necessário o Passo 2, pois quando uma coluna é toda nula e a posterior não, isso quer dizer que há uma parte nula na composição e a posterior não nula e assim há a necessidade de eliminação dessa coluna da matriz (respect. parte da partição)*

Observação 3.3.2 *Com a definição do processo $\mathcal{C}$ -shifting, a partir de M_λ obtemos $M_{\mathcal{C}^{(k)}(\lambda)}$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ e portanto, obtemos a composição $\mathcal{C}^{(k)}(\lambda)$. Ou seja, sempre que conveniente, ao invés de trabalharmos com a **aplicação $\mathcal{C}$ -shift** em λ , iremos trabalhar com o **processo $\mathcal{C}$ -shifting** em M_λ .*

Exemplo 3.3.2 *Sejam $\lambda = (3, 2, 4) \models 9$ e M_λ a sua matriz associada. Pela definição da aplicação $\mathcal{C}$ -shift, sabe-se que $\mathcal{C}(\lambda) = (3, 2, 1, 3)$. Aplicando o processo $\mathcal{C}$ -shifting em M_λ obtemos:*

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Passo1}} M'_\lambda = M_{\mathcal{C}(\lambda)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.3.3 Para $\lambda = (1, 3) \models 4$ temos:

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Passo1}} M'_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Passo2}} M_{\mathcal{C}(\lambda)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Foi necessário a utilização do Passo 2 pois ao aplicar o Passo 1 a coluna 2 de M'_λ ficou toda nula.

Vamos demonstrar o próximo resultado que caracteriza as composições $\mathcal{C}$ -cíclica.

Teorema 3.3.1 Seja $n = 1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + r$, $1 \leq r \leq k$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

$\lambda \models n$ é $\mathcal{C}$ -cíclica se, e somente se, λ tem a forma cíclica:

$$(k-1 + \delta_{k-1}, k-2 + \delta_{k-2}, \dots, 2 + \delta_2, 1 + \delta_1, \delta_0)$$

onde cada δ_i é 0 ou 1, $i = 0, \dots, k-1$, e $\sum_{i=0}^{k-1} \delta_i = r$.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Análoga à demonstração do Teorema 2.4.1($\Leftarrow$), trocando $\mathcal{B}$ -shifting por $\mathcal{C}$ -shifting.

$$\begin{matrix} \xrightarrow{1^{\text{a}} \text{linha}} \\ \xrightarrow{2^{\text{a}} \text{linha}} \\ \\ \xrightarrow{k-2^{\text{a}} \text{linha}} \\ \xrightarrow{k-1^{\text{a}} \text{linha}} \\ \xrightarrow{k^{\text{a}} \text{linha}} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \delta_0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \delta_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 1 & 1 & \delta_{k-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & \delta_{k-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta_{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} = M_\lambda$$

($\Rightarrow$) No processo $\mathcal{C}$ -shifting, notamos que o Passo 1 sempre mantém as entradas da matriz associada na mesma diagonal, enquanto que no Passo 2 sempre deslocamos algumas entradas da matriz para diagonais de índice menor. Assim para qualquer composição $\mathcal{C}$ -cíclica μ , devemos usar apenas o Passo 1 no processo de obtenção da matriz $M_{\mathcal{C}(\mu)}$.

Sejam $\lambda \models n$ uma composição $\mathcal{C}$ -cíclica e M_λ a sua matriz associada. Suponha que λ não possui a forma cíclica. Assim para algum $w \in \mathbb{N}^*$, há um 0 na w -ésima diagonal e um 1 na $(w+1)$ -ésima diagonal na matriz M_λ , ou seja, $D_{M_\lambda}(w) = (\underbrace{\dots, 0, \dots}_w)$ e $D_{M_\lambda}(w+1) = (\underbrace{\dots, 1, \dots}_{w+1})$.

Como a série de processos $\mathcal{C}$ -shifting de M_λ para $M_{\mathcal{C}(\lambda)}$, para $M_{\mathcal{C}^{(2)}(\lambda)}$ e assim por diante envolve apenas o Passo 1, em algum momento chegaremos em uma matriz M_θ cuja entradas $(2, w-1)$ e $(3, w-1)$ são iguais a 0.

Assim o processo $\mathcal{C}$ -shifting de M_θ para $M_{\mathcal{C}(\theta)}$ envolve o Passo 2, o que é um absurdo.

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{w^{\text{linha}}} \\
 \xrightarrow{w+1^{\text{linha}}}
 \end{array}
 \left(\begin{array}{cccccccc}
 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots
 \end{array} \right) = M_\lambda$$

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{w^{\text{linha}}} \\
 \xrightarrow{w+1^{\text{linha}}}
 \end{array}
 \left(\begin{array}{cccccccc}
 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\
 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots
 \end{array} \right) = M_\theta$$

■

Corolário 3.3.1 *Seja $n = T_k = 1 + 2 + 3 + \dots + k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, então $(k, k-1, \dots, 2, 1)$ é a única composição de n que é $\mathcal{C}$ -cíclica.*

Demonstração: Seja $\lambda \models n$ uma composição $\mathcal{C}$ -cíclica, assim pelo Teorema 3.3.1 $\lambda = (k-1 + \delta_{k-1}, k-2 + \delta_{k-2}, \dots, 2 + \delta_2, 1 + \delta_1, \delta_0)$, onde cada δ_i é 0 ou 1, $i = 0, \dots, k-1$, e $\sum_{i=0}^{k-1} \delta_i = k$. Logo $\delta_i = 1 \forall i, i = 1, \dots, k-1$, e portanto, λ é escrita de maneira única. ■

Portanto, a caracterização das composições cíclicas é a mesma das partições cíclicas.

3.4 Cálculo de $D_{\mathcal{C}}(n)$ para números triangulares

Pelos Teoremas 2.4.1 e 3.3.1 temos que $\lambda \models n$ é $\mathcal{C}$ -cíclica se e somente se $\lambda \vdash n$ é $\mathcal{B}$ -cíclica. Portanto, o número de ciclos para a Paciência Carolina é o mesmo que na Paciência Búlgara.

A seguir veremos alguns resultados que envolvem a relação entre Paciência Búlgara e Paciência Carolina que serão fundamentais para o cálculo de $D_{\mathcal{C}}(n)$.

Proposição 3.4.1 *Sejam $n = 1 + 2 + \dots + k$ e $\lambda \models n$. Então λ é uma permutação de $(k, k-1, \dots, 2, 1)$ se, e somente se, $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \leq k-1$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $\lambda \models n$ uma permutação de $(k, k-1, \dots, 2, 1)$. Assim $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ tal que $\lambda_i \in \{k, k-1, \dots, 2, 1\}$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, k$. Se $\lambda_1 = k$, $\lambda_2 = k-1$, $\dots$, $\lambda_{k-1} = 2$ e $\lambda_k = 1$ então $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = 0 \leq k-1$.

Se não, pela definição de $\mathcal{C}$ -shift temos que $\mathcal{C}(\lambda) = (k, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{k-1})$ tal que $\lambda'_i \in \{k-1, k-2, \dots, 2, 1\}$ e $\lambda'_i \neq \lambda'_j$ se $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, k-1$. Se $\lambda'_1 = k-1$, $\lambda'_2 = k-2, \dots$, $\lambda'_{k-2} = 2$, e $\lambda'_{k-1} = 1$ então $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = 1 \leq k-1$.

Se não, pela definição de $\mathcal{C}$ -shift temos que $\mathcal{C}^{(2)}(\lambda) = (k, k-1, \lambda''_1, \lambda''_2, \dots, \lambda''_{k-2})$ tal que $\lambda''_i \in \{k-2, k-3, \dots, 2, 1\}$ e $\lambda''_i \neq \lambda''_j$ se $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, k-2$. Se $\lambda''_1 = k-2$, $\lambda''_2 = k-3, \dots$, $\lambda''_{k-3} = 2$, e $\lambda''_{k-2} = 1$ então $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = 2 \leq k-1$.

Se não, continuando com raciocínio, temos que $\mathcal{C}^{(k-2)}(\lambda) = (k, k-1, k-2, \dots, 3, \lambda'''_1, \lambda'''_2)$ tal que $\lambda'''_i \in \{2, 1\}$, $i = 1, 2$ e $\lambda'''_1 \neq \lambda'''_2$. Se $\lambda'''_1 = 2$ e $\lambda'''_2 = 1$ então $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = k-2 \leq k-1$.

Se não, $\mathcal{C}^{(k-1)}(\lambda) = (k, k-1, k-2, \dots, 2, 1)$ e assim $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = k-1$.

($\Leftarrow$) Suponha que λ não é uma permutação de $(k, k-1, \dots, 2, 1)$. Logo λ é uma permutação de alguma partição $\lambda' \vdash n$, tal que $\lambda' \neq (k, k-1, \dots, 2, 1)$. Como n é um número triangular então pelo Teorema 2.4.1 $\exists i > 0$ tal que $\mathcal{B}^{(i)}(\lambda') = (k, k-1, \dots, 2, 1)$ e $\mathcal{B}^{(i-1)}(\lambda') = (k+1, k-1, k-2, \dots, 4, 3, 2)$.

Como λ é uma permutação de λ' então $\mathcal{C}^{(i-1)}(\lambda) = \mu$ é uma permutação de $\mathcal{B}^{(i-1)}(\lambda') = (k+1, k-1, k-2, \dots, 4, 3, 2)$. Logo $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1})$ com $\mu_i \in \{k+1, k-1, k-2, \dots, 4, 3, 2\}$ e $\mu_i \neq \mu_j$ se $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, k-1$.

Assim pela definição de $\mathcal{C}$ -shift, $\mathcal{C}(\mu) = (k-1, \mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_{k-1})$ com $\mu'_i \in \{k, k-2, k-3, \dots, 3, 2, 1\}$ e $\mu'_i \neq \mu'_j$ se $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, k-1$.

Seguindo o raciocínio temos que $\mathcal{C}^{(k-1)}(\mu) = (k, k-1, \dots, 3, 1, 2)$, que não é $\mathcal{C}$ -cíclica.

Logo $d_{\mathcal{C}}(\mu) \geq k$ e portanto $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \geq k$, o que é um absurdo. ■

Combinando a Proposição 3.4.1 com o Teorema 2.4.1, temos o seguinte corolário que descreve a relação entre a Paciência Carolina e a Paciência Búlgara, quando n é um número triangular.

Corolário 3.4.1 *Sejam $n = 1 + 2 + \dots + k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, e $\lambda \models n$ uma permutação de $\lambda' \vdash n$.*

(1) $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \leq k-1 \Leftrightarrow d_{\mathcal{B}}(\lambda') = 0$

(2) Se $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \geq k$ então $d_{\mathcal{C}}(\lambda) - d_{\mathcal{B}}(\lambda') = k-1$

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ Se $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \leq k-1$ então pela Proposição 3.4.1 λ é uma permutação de $(k, k-1, \dots, 2, 1)$. Como λ é permutação de $\lambda' \vdash n$, então $\lambda' = (k, k-1, \dots, 2, 1)$ e portanto $d_{\mathcal{B}}(\lambda') = 0$.

($\Leftarrow$) Se $d_{\mathcal{B}}(\lambda') = 0$ então $\lambda' = (k, k-1, \dots, 2, 1)$, pois como n é triangular, pelo Corolário 2.4.1, $(k, k-1, \dots, 2, 1)$ é a única partição $\mathcal{B}$ -cíclica. Como λ é permutação de λ' então pela Proposição 3.4.1 temos que $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \leq k-1$

(2) Se $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \geq k$ então pela Proposição 3.4.1, λ não é uma permutação de $(k, k-1, \dots, 2, 1)$, logo $\lambda' \neq (k, k-1, \dots, 2, 1)$. Como n é triangular $\exists i > 0$, tal que $\mathcal{B}^{(i)}(\lambda') = (k, k-1, \dots, 2, 1)$ e $\mathcal{B}^{(i-1)}(\lambda') = (k+1, k-1, \dots, 3, 2)$ e assim $d_{\mathcal{B}}(\lambda') = i$. Como λ é permutação de λ' então $\mathcal{C}^{(i-1)}(\lambda) = \mu$ é uma permutação de $\mathcal{B}^{(i-1)}(\lambda') = (k+1, k-1, \dots, 3, 2)$. Assim $\mathcal{C}(\mu) = (k-1, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1})$ com $\mu_i \in \{k, k-2, k-3, \dots, 2, 1\}$ e $\mu_i \neq \mu_j$ para $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, k-1$. Aplicando repetidamente $\mathcal{C}$ -shift em $\mathcal{C}(\mu)$ temos $\mathcal{C}^{(k-2)}(\mathcal{C}(\mu)) = \mathcal{C}^{(k-1)}(\mu) = (k, k-1, k-2, \dots, 3, 1, 2)$ e assim $\mathcal{C}^{(k)}(\mu) = \mathcal{C}^{(k)}(\mathcal{C}^{(i-1)}(\lambda)) = (k, k-1, k-2, \dots, 3, 2, 1)$. Logo $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = k+i-1$ e portanto $d_{\mathcal{C}}(\lambda) - d_{\mathcal{B}}(\lambda') = k+i-1-i = k-1$. ■

Combinando o Corolário 3.4.1 com o Teorema 2.7.2 podemos provar o próximo teorema.

Teorema 3.4.1 *Se $n = 1 + 2 + \dots + k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, então $D_{\mathcal{C}}(n) = k^2 - 1$.*

Demonstração: Vamos mostrar que $D_{\mathcal{C}}(n) \geq k^2 - 1$ e depois que $D_{\mathcal{C}}(n) \leq k^2 - 1$ e assim provamos o teorema.

Para mostrar que $D_{\mathcal{C}}(n) \geq k^2 - 1$ basta exibirmos $\lambda \models n$ tal que $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = k^2 - 1$, já que $D_{\mathcal{C}}(n) := \max\{d_{\mathcal{C}}(\lambda); \lambda \models n\}$. Seja $\lambda \models n$ uma permutação de $\lambda' \vdash n$, tal que $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{k+1})$, onde $\lambda'_1 = k-1$, $\lambda'_i = k-i+1$, $i = 2, \dots, k$ e $\lambda'_{k+1} = 1$. Pela Proposição 3.4.1 $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \geq k$, já que λ não é uma permutação de $(k, k-1, \dots, 2, 1)$. Pelo Corolário 3.4.1(2) temos

que $d_{\mathcal{C}}(\lambda) - d_{\mathcal{B}}(\lambda') = k - 1$ e pela demonstração do Teorema 2.7.1 sabemos que $d_{\mathcal{B}}(\lambda') = k^2 - k$ e portanto $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = k^2 - 1$.

Para mostrarmos que $D_{\mathcal{C}}(n) \leq k^2 - 1$ temos que mostrar que $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \leq k^2 - 1$, $\forall \lambda \models n$. Seja $\lambda \models n$, se λ for uma permutação de $\lambda' = (k, k - 1, \dots, 2, 1)$, como $d_{\mathcal{B}}(\lambda') = 0$, pelo Corolário 3.4.1 temos $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \leq k - 1 \leq k^2 - 1$.

Se λ não for uma permutação de λ' , então pela Proposição 3.4.1 $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \geq k$ e pelo Corolário 3.4.1:

$$d_{\mathcal{C}}(\lambda) - d_{\mathcal{B}}(\lambda') = k - 1 \Rightarrow d_{\mathcal{C}}(\lambda) = k - 1 + d_{\mathcal{B}}(\lambda') \leq k^2 - 1$$

pois pelo Teorema 2.7.2, $d_{\mathcal{B}}(\lambda') \leq k^2 - k$. ■

3.5 Cálculo de Limites de $D_{\mathcal{C}}(n)$ para números não triangulares

Proposição 3.5.1 *Seja $\lambda \models n$ e $n = 1 + 2 + \dots + (k - 1) + r$, $1 \leq r < k$.*

(1) *Se λ é uma permutação de alguma composição $\mathcal{C}$ -cíclica de n , então $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \leq k - 1$*

(2) *Se λ não é uma permutação de alguma composição $\mathcal{C}$ -cíclica, de n , então $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \geq k - 1$.*

Demonstração: (1) Seja μ uma composição $\mathcal{C}$ -cíclica, dada na forma cíclica do Teorema 3.3.1. Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ uma permutação de μ .

Se $\lambda_1 = k - 1 + \delta_{k-1}$, $\lambda_2 = k - 2 + \delta_{k-2}, \dots, \lambda_{k-1} = 1 + \delta_1$ e $\lambda_k = \delta_0$ então λ tem a forma cíclica e assim $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = 0 \leq k - 1$.

Se não, pela definição de $\mathcal{C}$ -shift, temos

$$\mathcal{C}(\lambda) = (k - 1 + \delta_0, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{k-1})$$

tal que $(\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{k-1})$ é permutação de $(k - 2 + \delta_{k-1}, k - 3 + \delta_{k-2}, \dots, 2 + \delta_3, 1 + \delta_2, \delta_1)$. Se $\lambda'_1 = k - 2 + \delta_{k-1}$, $\lambda'_2 = k - 3 + \delta_{k-2}, \dots, \lambda'_{k-2} = 1 + \delta_2$ e $\lambda'_{k-1} = \delta_1$, então $\mathcal{C}(\lambda)$ tem a forma cíclica e assim $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = 1 \leq k - 1$.

Se não, temos

$$\mathcal{C}^{(2)}(\lambda) = (k - 1 + \delta_1, k - 2 + \delta_0, \lambda''_1, \lambda''_2, \dots, \lambda''_{k-2})$$

tal que $(\lambda''_1, \lambda''_2, \dots, \lambda''_{k-2})$ é permutação de $(k - 3 + \delta_{k-1}, k - 4 + \delta_{k-2}, \dots, 2 + \delta_4, 1 + \delta_3, \delta_2)$. Se $\lambda''_1 = k - 3 + \delta_{k-1}$, $\lambda''_2 = k - 4 + \delta_{k-2}, \dots, \lambda''_{k-3} = 1 + \delta_3$ e $\lambda''_{k-2} = \delta_2$, então $\mathcal{C}^{(2)}(\lambda)$ tem a forma cíclica e assim $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = 2 \leq k - 1$.

Se não, continuando com o raciocínio

$$\mathcal{C}^{(k-1)}(\lambda) = (k-1+\delta_{k-2}, k-2+\delta_{k-3}, \dots, 1+\delta_0, \delta_{k-1})$$

que possui a forma cíclica e portanto $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = k-1$.

(2) É fácil verificar que a afirmação é válida para $k \leq 3$. Logo, vamos assumir que $k \geq 4$. Se λ não é uma permutação de alguma composição $\mathcal{C}$ -cíclica de n , então existe $\mu = \mathcal{C}^{(i)}(\lambda)$, para algum $i \geq 0$, tal que μ não é uma permutação de alguma composição $\mathcal{C}$ -cíclica e $\mathcal{C}(\mu)$ é permutação de alguma composição $\mathcal{C}$ -cíclica. Desse modo, μ é permutação de uma partição pré-cíclica, vistas na Seção 2.6, ou seja, μ é uma permutação de:

$$\zeta = (k+\delta_{k-1}, k-2+\delta_{k-3}, k-3+\delta_{k-4}, \dots, 3+\delta_2, 2+\delta_1, \delta_{k-2}+\delta_0)$$

com $\delta_0 \leq \delta_{k-2}$ e $(\delta_{k-1}, \delta_{k-2}) \neq (0, 1)$

ou

$$\vartheta = (k+\delta_{k-1}, k-1+\delta_{k-2}, k-3+\delta_{k-4}, \dots, 3+\delta_2, 2+\delta_1)$$

com $\delta_0 = 0$ e $\delta_{k-3} = 1$.

Utilizando o mesmo raciocínio da demonstração de (1) temos:

$$\mathcal{C}^{(k-2)}(\zeta) = (k-1+\delta_{k-4}, k-2+\delta_{k-5}, \dots, 3+\delta_0, 1+\delta_{k-2}, \zeta_1, \zeta_2)$$

tal que $\zeta_i \in \{2+\delta_{k-1}, \delta_{k-3}\}$, $i = 1, 2$, que não é cíclica.

$$\mathcal{C}^{(k-2)}(\vartheta) = (k-1+\delta_{k-4}, k-2+\delta_{k-5}, \dots, 3+\delta_0, \delta_{k-3}, \vartheta_1, \vartheta_2)$$

tal que $\vartheta_i \in \{2+\delta_{k-1}, 1+\delta_{k-2}\}$, $i = 1, 2$, que não é cíclica.

Assim $\mathcal{C}^{(k-2)}(\mu)$ não possui a forma cíclica. Logo $d_{\mathcal{C}}(\mu) \geq k-1$ o que implica $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \geq k-1$.

■

Notemos que a partir da condição “ $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = k-1$ ”, não podemos determinar quando λ é uma permutação de alguma composição $\mathcal{C}$ -cíclica de n .

Por exemplo, quando $k = 4$, $\lambda = (3, 2, 4) \models 9$ com $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = 3$ é uma permutação da composição $\mathcal{C}$ -cíclica $(4, 3, 2)$. No entanto, $\mu = (5, 4) \models 9$ com $d_{\mathcal{C}}(\mu) = 3$ não é uma permutação de qualquer composição $\mathcal{C}$ -cíclica.

Análogo ao Corolário 3.4.1 para números triangulares, temos o seguinte corolário que descreve a relação entre a Paciência Carolina e a Paciência Búlgara, quando n não é triangular.

Corolário 3.5.1 *Sejam $n = 1 + 2 + \dots + (k - 1) + r$, $1 \leq r < k$ e $\lambda \models n$ uma permutação de $\lambda' \vdash n$.*

- (1) *Se $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \leq k - 2$ então $d_{\mathcal{B}}(\lambda') = 0$.*
- (2) *Se $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \geq k - 1$ então $d_{\mathcal{C}}(\lambda) - d_{\mathcal{B}}(\lambda') = k - 2$ ou $k - 1$.*

Demonstração: (1) Suponha que $d_{\mathcal{B}}(\lambda') \neq 0$, assim λ' não é uma partição $\mathcal{B}$ -cíclica. Logo λ não é uma permutação de uma partição $\mathcal{B}$ -cíclica, e, pela Proposição 3.5.1(2) $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \geq k - 1$, o que é absurdo pela hipótese.

(2) Vamos mostrar o resultado através de indução sobre $d_{\mathcal{C}}(\lambda)$. Como base de indução vamos provar que se $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = k - 1$ então $d_{\mathcal{C}}(\lambda) - d_{\mathcal{B}}(\lambda') = k - 1$ ou $k - 2$.

Se $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = k - 1$ então, se λ' for cíclica segue $d_{\mathcal{B}}(\lambda') = 0$ e assim $d_{\mathcal{C}}(\lambda) - d_{\mathcal{B}}(\lambda') = k - 1$.

Se λ' não for cíclica então como $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = k - 1$ implica $d_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(\lambda)) = k - 2$. Como λ é permutação de λ' , pela Observação 3.1.2, $\mathcal{B}(\lambda')$ é permutação de $\mathcal{C}(\lambda)$ e pelo item (1) temos então que $d_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}(\lambda')) = 0$ e assim $d_{\mathcal{B}}(\lambda') = 1$. Logo $d_{\mathcal{C}}(\lambda) - d_{\mathcal{B}}(\lambda') = k - 2$.

Vamos usar como hipótese de indução que se $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = x$, $x > k - 1$, então $d_{\mathcal{C}}(\lambda) - d_{\mathcal{B}}(\lambda') = k - 1$ ou $k - 2$ e vamos provar que a mesma implicação vale se $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = x + 1$.

Se $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = x + 1$ então $d_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(\lambda)) = x$. Pela hipótese de indução $d_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}(\lambda')) = x - k + 1$ ou $x - k + 2$, assim $d_{\mathcal{B}}(\lambda') = x - k + 2$ ou $x - k + 3$ e portanto $d_{\mathcal{C}}(\lambda) - d_{\mathcal{B}}(\lambda') = k - 1$ ou $k - 2$. ■

Temos o suficiente para prova o próximo Teorema.

Teorema 3.5.1 *Seja n um inteiro não triangular, $n = 1 + 2 + \dots + (k - 1) + r$, $1 \leq r < k$. Então:*

- (1) *$D_{\mathcal{C}}(n) \leq k^2 - k - 2$ para $k \geq 4$.*
- (2) *No entanto, a igualdade vale quando $k \geq 4$ e $r = k - 1$.*

Demonstração: (1) Devemos mostrar que $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \leq k^2 - k - 2$, $\forall \lambda \models n$. Sendo assim, seja $\lambda \models n$. Se λ for permutação de alguma composição $\mathcal{C}$ -cíclica de n então pela Proposição 3.5.1(1) temos $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \leq k - 1 < k^2 - k - 2$ já que $k \geq 4$.

Se λ não for uma permutação de qualquer composição $\mathcal{C}$ -cíclica de n então pela Proposição 3.5.1(2) $d_{\mathcal{C}}(\lambda) \geq k - 1$. Seja λ' a partição na qual λ é permutação, pelo Corolário 3.5.1(2) temos $d_{\mathcal{C}}(\lambda) - d_{\mathcal{B}}(\lambda') = k - 1$ ou $k - 2$.

Se $d_{\mathcal{C}}(\lambda) - d_{\mathcal{B}}(\lambda') = k - 1$ então:

$$d_{\mathcal{C}}(\lambda) = k - 1 + d_{\mathcal{B}}(\lambda') \leq k - 1 + k^2 - 2k - 1 = k^2 - k - 2$$

já que pelo Teorema 2.8.3 $d_{\mathcal{B}}(\lambda')$ é no máximo $k^2 - 2k - 1$.

Se $d_{\mathcal{C}}(\lambda) - d_{\mathcal{B}}(\lambda') = k - 2$ então:

$$d_{\mathcal{C}}(\lambda) = k - 2 + d_{\mathcal{B}}(\lambda') \leq k - 2 + k^2 - 2k - 1 = k^2 - k - 3 < k^2 - k - 2$$

(2) É suficiente exibir $\lambda \models n$ tal que $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = k^2 - k - 2$. Sejam $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1})$, tal que $\lambda_1 = k - 1$, $\lambda_2 = k - 2$, $\lambda_i = k - i + 1$, $i = 3 \dots, k$ e $\lambda_{k+1} = 1$, e M_{λ} a sua matriz associada.

Assim as $(k - 1)$ primeiras diagonais de M_{λ} são formada por 1's, as diagonais abaixo da diagonal $(k + 1)$ são todas nulas e as diagonais k e $k + 1$ são da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{M_{\lambda}}(k) &= \underbrace{(0, 0, 1, 1, \dots, 1)}_{k-2} \\ \mathcal{D}_{M_{\lambda}}(k+1) &= \underbrace{(0, 0, 0, 0, \dots, 0, 1)}_{k+1} \end{aligned}$$

Assim ao aplicar k vezes o processo $\mathcal{C}$ -shifting em M_{λ} , sendo necessário apenas o Passo 1, apenas $\mathcal{D}_{M_{\lambda}}(k+1)$ é alterada, pois as outras diagonais são formadas apenas por 1's ou por 0's e $\mathcal{D}_{M_{\lambda}}(k)$ possui k elementos. Assim o comportamento das diagonais são:

# Processo $\mathcal{C}$ -shifting em M_{λ} (Passo 1)	$\mathcal{D}_{M_{\lambda}}(k)$	$\mathcal{D}_{M_{\lambda}}(k+1)$
k	$(0, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-2})$	$(\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0}_{k+1})$
$2k$	$(0, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-2})$	$(\underbrace{0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0}_{k+1})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(k-2)k$	$(0, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-2})$	$(\underbrace{0, 0, 1, 0 \dots, 0, 0}_{k+1})$
$(k-2)k+1$	$(1, 0, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-3})$	$(\underbrace{0, 0, 0, 1, 0 \dots, 0}_{k+1})$
$(k-2)k+2$	$(1, 1, 0, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-4})$	$(\underbrace{0, 0, 0, 0, 1, 0 \dots, 0}_{k+1})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(k-2)k+(k-2)$	$(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-2}, \mathbf{0}, 0)$	$(\underbrace{0, 0, 0, 0, \dots, 0}_{k+1}, \mathbf{0}, 1)$

Assim depois de aplicado $(k-2)k+(k-2)$ vezes o Passo 1 do processo $\mathcal{C}$ -shifting em M_{λ} chegamos em uma matriz M_{θ} que possui a k -ésima coluna toda nula e $(k+1)$ -ésima coluna

não nula e assim utilizando o Passo 2 obtemos $M_{\mathcal{C}((k-2)k+(k-2))(\lambda)}$ que é a matriz associada da composição $\mathcal{C}((k-2)k+(k-2))(\lambda) = (k, k-1, \dots, 4, 3, 1, 1)$, que por sua vez é $\mathcal{C}$ -cíclica e portanto $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = (k-2)k + (k-2) = k^2 - k - 2$. ■

Análogo ao Teorema 2.8.4 para $D_{\mathcal{B}}(n)$, temos o seguinte Limitante inferior para $D_{\mathcal{B}}(n)$.

Teorema 3.5.2 [*Limite Inferior*] Para $n \geq 3$ e $n = 1 + 2 + \dots + (k-1) + r$, $1 \leq r \leq k$, $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$D_{\mathcal{C}}(n) \geq \begin{cases} (k-2-r)k+r & \text{para } 1 \leq r < \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor \\ n-1 & \text{para } \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor \leq r \leq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \text{ e } r=1 \\ n & \text{para } \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor \leq r \leq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \text{ e } r \geq 2 \\ (r-1)k+r-1 & \text{para } \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor < r \leq k \end{cases}$$

Demonstração: É suficiente exibir $\lambda \models n$ tal que $d_{\mathcal{C}}(\lambda)$ é o valor do respectivo limite inferior de $D_{\mathcal{C}}(\lambda)$ para cada caso. Vamos considerar 4 casos.

Caso (1) $1 \leq r < \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$. Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \models n$ tal que $\lambda_1 = k-2$, $\lambda_i = k-i$ para $i = 2, 3, \dots, k-r-1$ e $\lambda_j = k-j+1$, para $j = k-r, k-r+1, \dots, k$, e M_{λ} a sua matriz associada, ou seja, $\lambda \models n$ é igual à partição dada na demonstração do Caso (1) do Teorema 3.5.2, e assim M_{λ} é também a mesma. Logo temos o seguinte comportamento em M_{λ} :

‡ Processo $\mathcal{C}$ -shifting em M_λ (Passo 1)	$\mathcal{D}_{M_\lambda}(k-1)$	$\mathcal{D}_{M_\lambda}(k)$
$(k-1)$	$(\underbrace{0, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, 1}_{k-1})$	$(\underbrace{0, 0, 0, \dots, 1, 1, \dots, 1}_{k}, \overbrace{0}^{r+1})$
$2(k-1)$	$(\underbrace{0, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, 1}_{k-1})$	$(\underbrace{0, 0, \dots, 1, 1, \dots, 1}_{k}, \overbrace{0, 0}^{r+1})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(k-r-2)(k-1)$	$(\underbrace{0, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, 1}_{k-1})$	$(\underbrace{0, 1, 1, \dots, 1, \dots, 0, 0, 0}_{k}, \overbrace{0}^{r+1})$
$(k-r-2)(k-1) + 1$	$(\underbrace{1, 0, 1, 1, \dots, 1, 1, 1}_{k-1})$	$(\underbrace{0, 0, 1, 1, \dots, 1, \dots, 0, 0}_{k}, \overbrace{0}^{r+1})$
$(k-r-2)(k-1) + 2$	$(\underbrace{1, 1, 0, 1, 1, \dots, 1, 1}_{k-1})$	$(\underbrace{0, 0, 0, 1, 1, \dots, 1, \dots, 0}_{k}, \overbrace{0}^{r+1})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(k-r-2)(k-1) + (k-3)$	$(\underbrace{1, 1, 1, 1, \dots, 1, 0, 1}_{k-1})$	$(\underbrace{1, 1, \dots, 1, 0, 1, 1}_{k}, \overbrace{0}^{r-1})$
$(k-r-2)(k-1) + (k-3) + 1$	$(\underbrace{1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, \mathbf{0}}_{k-1})$	$(\underbrace{1, 1, 1, \dots, 1, 0, \mathbf{0}, 1}_{k}, \overbrace{0}^r)$

Assim depois de aplicado $(k-r-2)(k-1) + (k-3) + 1 = (k-2-r)k + r$ vezes o Passo 1 do processo $\mathcal{C}$ -shifting em M_λ chegamos em uma matriz M_θ que possui a $(k-1)$ -ésima coluna toda nula e (k) -ésima coluna não nula e assim utilizando o Passo 2 obtemos $M_{\mathcal{C}((k-2-r)k+r)}(\lambda)$ que é a matriz associada da composição

$$\mathcal{C}((k-2-r)k+r)(\lambda) = ((k-1) + 1, (k-2) + 1, \dots, (k-r) + 1, (k-r+1), (k-r+2), \dots, 3, 2, 1),$$

que por sua vez é $\mathcal{C}$ -cíclica e portanto $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = (k-2-r)k + r$.

Caso (2) $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor \leq r \leq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ e $r = 1$

Caso (3) $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor \leq r \leq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ e $r \geq 2$

Para os casos (2) e (3) seja $\lambda = \underbrace{(1, 1, 1, \dots, 1, 1)}_n \models n$. Vamos provar primeiramente através de indução sobre i que:

$$\mathcal{C}^{(1+1+2+3+\dots+i)}(\lambda) = (i, i-1, i-2, \dots, 2, 1, n - (1 + 2 + \dots, i)) \quad (3.1)$$

para $i = 1, \dots, k - 2$.

Por definição da aplicação $\mathcal{C}$ -shift, $\mathcal{C}(\lambda) = (n)$ e $\mathcal{C}^{(2)}(\lambda) = (1, n - 1)$. Assim, (3.1) vale para $i = 1$.

Agora suponha que (3.1) vale para $i = k - 3$ e vamos provar que vale para $i = k - 2$. Assim, seja $z = 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (k - 3)$, temos:

$$\mathcal{C}^{(z)}(\lambda) = (k-3, k-4, \dots, 2, 1, n-(1+2+\dots+(k-3))) = (k-3, k-4, \dots, 2, 1, (k-2)+(k-1)+r)$$

e assim a sua matriz associada $M_{\mathcal{C}^{(z)}}(\lambda)$ é da forma:

$$M_{\mathcal{C}^{(z)}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

As diagonais de 1 a $(k - 3)$ de $M_{\mathcal{C}^{(z)}}$ são formadas apenas por 1's. Portanto a cada vez aplicado o processo $\mathcal{C}$ -shifting em $M_{\mathcal{C}^{(z)}}$ apenas as diagonais com índices maiores que $(k - 3)$ são alteradas. Observe que $\mathcal{C}^{(z)}(\lambda)$ possui $(k - 2)$ partes, ou seja, $M_{\mathcal{C}^{(z)}}$ possui $(k - 2)$ colunas não totalmente nulas. Em particular, a coluna $(k - 2)$ possui $(k - 2) + (k - 1) + r$ 1's e a coluna $(k - 1)$ possui apenas um único 1. Sendo assim aplicando o Passo 1 do processo $\mathcal{C}$ -shifting em $M_{\mathcal{C}^{(z)}}$ a primeira coluna recebe um novo 1, a coluna $(k - 1)$ passa a ter $(k - 2) + (k - 1) + r - 1$ 1's e assim a coluna $(k - 2)$ fica toda nula e portanto precisamos aplicar o Passo 2 para encontrarmos $M_{\mathcal{C}^{(z+1)}}$ e a coluna $(k - 2)$ passa a ficar com $(k - 2) + (k - 1) + r - 1$ e a coluna $(k - 1)$ torna-se nula.

Ou seja ao aplicar o processo, aumentou-se um 1 na diagonal $(k - 2)$ e diminui-se um 1 na coluna $(k - 2)$. Seguindo com o raciocínio temos:

# Processo $\mathcal{C}$ -shifting em $M_{\mathcal{C}(z)}$	$\mathcal{D}_{M_\lambda}(k-2)$	Quantidade de 1's na coluna $(k-2)$
0	$(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-3}, 1)$	$(k-2) + (k-1) + r$
1	$(1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-4}, 1)$	$(k-3) + (k-1) + r$
2	$(1, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-5}, 1)$	$(k-4) + (k-1) + r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(k-4)$	$(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-2}, 0, 1)$	$(2) + (k-1) + r$
$(k-3)$	$(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-2}, 1, 1)$	$(1) + (k-1) + r$
$(k-2)$	$(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-2}, 1, 1)$	1

Logo, as diagonais de 1 a $(k-2)$ de $M_{\mathcal{C}(z+(k-2))}$ são formadas por 1's e a coluna $(k-1)$ possui $(k-1) + r$ 1's. Sendo assim $M_{\mathcal{C}(z+(k-2))}$ é a matriz associada da composição $\mathcal{C}^{(z+(k-2))}(\lambda) = \mathcal{C}^{(1+1+2+3+\dots+(k-2))} = (k-2, k-3, \dots, 2, 1, (k-1) + r)$ e assim terminamos a demonstração da indução.

Seja $y = z + (k-2) = (1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (k-2))$, logo, como demonstrado acima as $(k-2)$ primeiras diagonais da matriz $M_{\mathcal{C}(y)}$ são formadas apenas por 1's, e assim utilizando o mesmo raciocínio utilizado, a cada aplicação do processo $\mathcal{C}$ -shift em $M_{\mathcal{C}(y)}$ apenas as diagonais de índice maiores que $(k-2)$ são alteradas e assim:

# Processo $\mathcal{C}$ -shifting em $M_{\mathcal{C}(y)}$	$\mathcal{D}_{M_\lambda}(k-1)$	Quantidade de 1's na coluna $(k-1)$
0	$(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-2}, 1)$	$(k-1) + r$
1	$(1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-3}, 1)$	$(k-2) + r$
2	$(1, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-4}, 1)$	$(k-1) + r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(k-3)$	$(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-1}, 0, 1)$	$(2) + r$
$(k-2)$	$(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-1}, 1, 1)$	$(1) + r$

Assim, as diagonais de 1 a $(k-2)$ de $M_{\mathcal{C}(y+(k-2))}$ são formada por 1's e a coluna $(k-1)$ possui $(1) + r$. Sendo assim $M_{\mathcal{C}(y+(k-2))}$ é matriz associada da composição $\mathcal{C}^{(y+(k-2))}(\lambda) =$

$$(k-1, k-2, \dots, 3, 2, (1) + r)$$

Se $r = 1$ então

$$\mathcal{C}^{(y+(k-2))}(\lambda) = \mathcal{C}^{(1+1+2+\dots+(k-2)+(k-2))}(\lambda) = (k-1, k-2, \dots, 3, 2, 2)$$

que é $\mathcal{C}$ -cíclica e assim:

$$d_{\mathcal{C}}(\lambda) = 1 + 1 + 2 + \dots + (k-2) + (k-2) = 1 + 2 + \dots + (k-2) + (k-1) = n-1$$

Se $r \geq 2$ então $\mathcal{C}^{(1+1+2+\dots+(k-1))}(\lambda) = (k-1, k-2, \dots, 2, 1, r)$ e assim

$$\mathcal{C}^{(r-1)}(\mathcal{C}^{(1+1+2+\dots+(k-1))}(\lambda)) = (k-1+1, k-2+1, \dots, k-(r-1)+1, k-r, k-(r+1), \dots, 2, 1, 1)$$

que é $\mathcal{C}$ -cíclica e assim $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = 1 + 1 + 2 + \dots + (k-1) + r-1 = n$

Caso (4) $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor < r \leq k$. Sejam $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}) \models n$ tal que $\lambda_i = k-i$, para $i = 1, 2, \dots, k-r+1$, $\lambda_j = k-j+1$, para $j = k-r+2, k-r+3, \dots, k$ e $\lambda_{k+1} = 1$ e M_λ a sua matriz associada, ou seja, $\lambda \models n$ é igual à partição dada na demonstração do Caso (3) do Teorema 3.5.2, e assim M_λ é igual também. Logo temos o seguinte comportamento em M_λ :

‡ Processo $\mathcal{C}$ -shifting em M_λ (Passo 1)	$\mathcal{D}_{M_\lambda}(k)$	$\mathcal{D}_{M_\lambda}(k+1)$
k	$(0, 0, \dots, 0, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{r-1})$ k	$(0, 0, \dots, 0, 1, 0)$ $k+1$
$2k$	$(0, 0, \dots, 0, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{r-1})$ k	$(0, 0, \dots, 1, 0, 0)$ $k+1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(r-1)k$	$(0, 0, \dots, 0, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{r-1})$ k	$(0, 0, \dots, 0, \overbrace{1, 0, \dots, 0}^r, 0)$ $k+1$
$(r-1)k+1$	$(1, 0, \dots, 0, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{r-2})$ k	$(0, 0, \dots, 0, \overbrace{1, 0, \dots, 0}^{r-1}, 0)$ $k+1$
$(r-1)k+2$	$(1, 1, 0, \dots, 0, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{r-3})$ k	$(0, 0, \dots, 0, \overbrace{1, 0, \dots, 0}^{r-2}, 0)$ $k+1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(r-1)k+(r-2)$	$(\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{r-2}, 0, \dots, 0, 1)$ k	$(0, 0, \dots, 0, 1, 0)$ $k+1$
$(r-1)k+(r-1)$	$(\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{r-1}, 0, \dots, 0, \mathbf{0})$ k	$(0, 0, \dots, 0, \mathbf{0}, 1)$ $k+1$

Assim depois de aplicado $(r-1)k + (r-1)$ vezes o Passo 1 do processo $\mathcal{C}$ -shifting em M_λ chegamos em uma matriz M_θ que possui a (k) -ésima coluna toda nula e $(k+1)$ -ésima coluna não nula e assim utilizando o Passo 2 obtemos $M_{\mathcal{C}^{(r-1)k+(r-1)}(\lambda)}$ que é a matriz associada da composição $\mathcal{C}^{(r-1)k+(r-1)}(\lambda) = ((k-1)+1, (k-2)+1, \dots, k-(r-1)+1, k-r, k-r+1, \dots, 3, 2, 1)$, que por sua vez é $\mathcal{C}$ -cíclica e portanto $d_{\mathcal{C}}(\lambda) = (r-1)k + (r-1)$. ■

3.6 Conjectura

Em [4] foi lançada uma outra conjectura, que até o presente trabalho não se tem notícia de que foi provada.

Conjectura 3.6.1 *No Teorema 3.5.2, “ $D_{\mathcal{C}}(n) \geq$ ” pode ser substituído por “ $D_{\mathcal{C}}(n) =$ ”.*

A conjectura foi confirmada quando $r = k-1$, k e para $n = 3, 4, \dots, 36$, ver Tabela 2.1.

Referências Bibliográficas

- [1] AKIN, E.; DAVIS, M. **Bulgarian Solitaire**. The American Mathematical Monthly, Vol. 92, No. 4 (Apr., 1985), pp. 237-250, disponível em [http : //dx.doi.org/10.2307/2323643](http://dx.doi.org/10.2307/2323643)
- [2] BRANDT, J. **Cycles of partitions**. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 85, No. 3 (Jul., 1982), pp. 483-486, disponível em [http : //dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-1982-0656129-5](http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-1982-0656129-5)
- [3] GARDNER, M. **Mathematical games**, Scientific American 249 (1983), 12-21.
- [4] GRIGGS, J.R.; HO, C.-C. **The cycling of partitions and compositions under repeated shifts**. Advances in Applied Mathematics Volume 21 Issue 2, Aug. 1998, Pages 205-227, disponível em [http : //dx.doi.org/10.1006/aama.1998.0597](http://dx.doi.org/10.1006/aama.1998.0597)
- [5] HOPKINS, B.; JONES, M. **Shift-Induced Dynamical Systems on Partitions and Compositions**, Electr. J. Comb.13 (2006) R80 19 pp.
- [6] HOPKINS, B. **30 Years of Bulgarian Solitaire**, The College Mathematics Journal, 2012 , 43(2) : 135-140.
- [7] HOPKINS, B. ; SELLERS, J. **Exact Enumeration of Garden of Eden Partitions**, Integers 7(2) (2007) A19.
- [8] IGUSA, K. **Solution of the Bulgarian solitaire conjecture**. Mathematics Magazine, Vol. 58, No. 5 (Nov., 1985), pp. 259-271