



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Superfícies Quádricas. Transformação das Coordenadas.

Juliana Mauri Correia

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Departamento de Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. João Peres Vieira

2010

512.5 Correia, Juliana Mauri
C824s Superfícies Quádricas. Transformação das Coordena-
das./ Juliana Mauri Correia - Rio Claro: [s.n.], 2010.
89 f. : il., figs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Pau-
lista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: João Peres Vieira

1. Álgebra Linear. 2. Estudo da equação geral de
uma quádrlica. 3. Movimentos rígidos. 4. Geometria
Analítica. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Juliana Mauri Correia

SUPERFÍCIES QUÁDRICAS. TRANSFORMAÇÃO DAS COORDENADAS.

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. João Peres Vieira
Orientador

Prof. Dr. Wladimir Seixas
UFSCar - Sorocaba

Prof^ª. Dr^a. Rita de Cássia Pavani Lamas
Departamento de Matemática
Unesp - São José do Rio Preto

Rio Claro, 18 de Junho de 2010

Aos meus pais, meus irmãos e meu esposo.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida, por minha família, pelos momentos difíceis superados e por todas as oportunidades que me tem concedido.

Aos meus pais, Hidielse e Maria José, por tudo o que proporcionaram em minha vida, pela criação que me deram, pelo exemplo que são, por todo amparo que me deram nos estudos, pela força e segurança no dia a dia, pelas vezes que me acompanharam nas viagens até Rio Claro para que eu pudesse participar de todas as aulas deste mestrado e pelo carinho e amor que sempre me proporcionaram.

Aos meus queridos irmãos, Flávio, Bruno e Tássio, pelos exemplos de determinação e coragem, pela força concedida nos momentos difíceis e principalmente pelo companheirismo, amor e amizade.

Agradeço também ao meu amado esposo, Heretiano, por me apoiar sempre, por me acompanhar nas viagens até Rio Claro para que eu pudesse dar andamento a esta dissertação, pela compreensão durante todo o período em que não pude estar ao seu lado para fazer o presente trabalho, pela dedicação com que me auxiliou quando necessário, pelo companheirismo, segurança e amor de sempre.

A todos os meus amigos e parentes, pelo encorajamento e apoio.

Ao professor Dr. João Peres Vieira pela orientação, amizade e principalmente, pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

Aos membros da banca de qualificação Wladimir Seixas e Eliris Cristina Rizziolli, pelo apoio, interesse e principalmente pelas orientações, críticas e idéias proporcionadas.

Aos participantes da Banca Examinadora pela competência de ocuparem este lugar.

Aos professores do Departamento de Matemática pelos seus ensinamentos e aos funcionários do curso, que durante esses anos, contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional.

À professora Dra. Rita de Cássia Pavani Lamas e ao professor Dr. Geraldo Garcia Duarte Junior(*in memoriam*), que tanto contribuíram para meu crescimento intelectual e pessoal.

Aos colegas de trabalho e do curso de Mestrado Profissional, pelos momentos, críticas e apoio concedidos no decorrer de todo o curso.

Resumo

O objetivo desta dissertação é sugerir duas formas de apresentação do estudo da equação geral de uma quádrlica. Uma delas, quando seu público alvo é formado por alunos ingressantes (do primeiro ano de um curso da Área de Ciências Exatas e da Terra) e a outra quando seu público alvo tem noções de Álgebra Linear.

Palavras-chave: Álgebra Linear, Estudo da equação geral de uma quádrlica, Movimentos rígidos, Geometria Analítica.

Abstract

In this work we present two ways to study the general equation of a quadric. One of them when the public is formed by beginners students and the other one when the public is formed by students with notions of Linear Algebra.

Keywords: Linear Algebra, The study of general equation of a quadric, Rigid motions, Analytic Geometry.

Lista de Figuras

2.1	Quádrlica $3z^2 + 2xy + x - 1 = 0$.	35
2.2	Quádrlica $3z_1^2 + 2x_1y_1 - 1 = 0$.	35
2.3	Quádrlica $x_2^2 + 3y_2^2 - z_2^2 = 1$.	36
2.4	Quádrlica $\frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + yz + 3x - 5\sqrt{2}y + \sqrt{2}z - 7 = 0$.	37
2.5	Quádrlica $x_1^2 + 2y_1^2 + 6x_1 + 4y_1 - 3z_1 - 7 = 0$.	38
2.6	Quádrlica $\frac{x_2^2}{3} + \frac{y_2^2}{\frac{3}{2}} = z_2$.	38
2.7	Quádrlica $xy + xz + yz = 0$.	39
2.8	Quádrlica $\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}y_1^2 - z_1^2 = 0$.	40
2.9	Quádrlica $xy + x + y = 0$.	40
2.10	Quádrlica $\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} + \sqrt{2}x_1 = 0$.	41
2.11	Quádrlica $\frac{x_2^2}{2} - \frac{y_2^2}{2} = 1$.	42
2.12	Quádrlica $xy + x + y + 1 = 0$.	43
2.13	Quádrlica $\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} + \sqrt{2}x_1 + 1 = 0$.	44
2.14	Quádrlica $\frac{x_2^2}{2} - \frac{y_2^2}{2} = 0$.	45
3.1	Elipsóide.	58
3.2	Hiperbolóide de uma folha.	58
3.3	Hiperbolóide de duas folhas.	58
3.4	Parabolóide elíptico.	59
3.5	Parabolóide hiperbólico.	59
3.6	Cone duplo.	59
3.7	Cilindro elíptico.	60
3.8	Cilindro hiperbólico.	60
3.9	Cilindro parabólico.	60
3.10	Dois planos paralelos.	61
3.11	Dois planos que se interceptam.	61
3.12	Quádrlica $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$.	69
3.13	Quádrlica $\frac{x_1^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} + \frac{y_1^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} + \frac{z_1^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2} = 1$.	70
3.14	Quádrlica $3z^2 + 2xy + x + 1 = 0$.	70

3.15	Quádrlica $x_1^2 + 3y_1^2 - z_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}z_1 + 1 = 0$.	71
3.16	Quádrlica $-x_2^2 - 3y_2^2 + z_2^2 = 1$.	72
3.17	Quádrlica $2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$.	72
3.18	Quádrlica $2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$ vista de cima.	72
3.19	Quádrlica $-(x_1 + 4\sqrt{2})^2 + (y_1 + \sqrt{2})^2 + (z_1 - 1) = 0$.	73
3.20	Quádrlica $-(x_1 + 4\sqrt{2})^2 + (y_1 + \sqrt{2})^2 + (z_1 - 1) = 0$ vista de cima.	74
3.21	Quádrlica $x_2^2 - y_2^2 = z_2$.	74
3.22	Quádrlica $x_2^2 - y_2^2 = z_2$ vista de cima.	74
3.23	Quádrlica $x^2 + 4xy + 4y^2 + 9z^2 - 6xz - 12yz + x + 3y - z = 0$.	75
3.24	Quádrlica $14x_1^2 + \frac{5\sqrt{14}}{7}x_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}y_1 + \frac{8\sqrt{70}}{35}z_1 = 0$.	76
3.25	Quádrlica $14x_2^2 + \frac{\sqrt{5}}{5}y_2 + \frac{8\sqrt{70}}{35}z_2 - \frac{25}{14^2} = 0$.	76
3.26	Quádrlica $14x_3^2 + \frac{3\sqrt{21}}{7}y_3 - \frac{25}{196} = 0$.	77
3.27	Quádrlica $\frac{14\sqrt{21}}{9}x_4^2 + y_4 = 0$.	78
3.28	Quádrlica $\frac{14\sqrt{21}}{9}x_5^2 = y_5$.	78
3.29	Quádrlica $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + x + y + z - 1 = 0$.	79
3.30	Quádrlica $3x_1^2 + \sqrt{3}x_1 - 1 = 0$.	80
3.31	Quádrlica $x_2^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}\right)^2$.	80
4.1	Quádrlica $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 - xy - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2z + 1 = 0$.	83
4.2	Quádrlica $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 + 2y_1 + 1 = 0$ (obtida após uma rotação).	86
4.3	Quádrlica $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 + 2y_1 + 1 = 0$ vista de cima.	86
4.4	Quádrlica $x_2^2 + y_2^2 = 1$ (obtida após uma translação).	87
4.5	Quádrlica $x_2^2 + y_2^2 = 1$ vista de cima.	87

Lista de Tabelas

2.1	Redução da equação geral de uma quádrlica via Geometria Analítica . .	34
3.1	Redução da equação geral de uma quádrlica via Álgebra Linear	68

Sumário

1	Introdução	17
2	O estudo de superfícies Quádricas via Geometria Analítica	19
2.1	Preliminares	19
2.1.1	Equações de translação e rotação no espaço	19
2.1.2	Exercícios	22
2.2	Aplicação das translações e rotações do espaço ao estudo da equação de uma quádrlica	26
2.2.1	Simplificação da equação de uma superfície quádrlica por meio de uma translação	26
2.2.2	Redução de uma Quádrlica Central à sua expressão mais simples.	28
2.2.3	Redução da equação de uma quádrlica à sua expressão mais simples para o caso em que $\delta = 0$	32
2.3	Aplicações	35
3	O estudo de superfícies Quádricas via Álgebra Linear	47
3.1	Preliminares	47
3.1.1	Definições	47
3.1.2	Resultados	52
3.2	O Teorema de classificação das quádrlicas	57
3.3	Aplicações	69
4	Conclusão	83
4.1	Solução segundo a versão de Geometria Analítica	83
4.2	Solução segundo a versão de Álgebra Linear	85
	Referências	89

1 Introdução

Tanto em um curso regular de Geometria Analítica quanto em um curso regular de Álgebra Linear, em geral, não é feito o estudo do caso geral de superfícies quádricas. Pretendemos, com este trabalho, fazer um estudo detalhado destas superfícies.

Para isso, nosso objetivo é confeccionar um texto didático para alunos de graduação na área de Ciências Exatas e da Terra, concernente ao estudo das superfícies quádricas, objetivando classificar estas superfícies, isto é, obter todas as possíveis quádricas do espaço tridimensional.

Em um primeiro momento, será dado um tratamento supostamente adequado para alunos ingressantes, isto é, estudaremos as Superfícies Quádricas dentro de um contexto apropriado para um curso de Geometria Analítica. Em um segundo momento, daremos um tratamento para alunos que já tenham feito um curso introdutório de Álgebra Linear, isto é, estudaremos as Superfícies Quádricas dentro de um contexto apropriado para um curso de Álgebra Linear.

2 O estudo de superfícies Quádricas via Geometria Analítica

2.1 Preliminares

Nesta seção deduzimos as equações de translação e rotação no espaço bem como resolvemos alguns exercícios necessários para o desenvolvimento da próxima seção.

2.1.1 Equações de translação e rotação no espaço

Definição 2.1.1. Por um *sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço*, Σ , entendemos o par (O, B) onde O é a origem do sistema e B é uma base ortonormal.

Frequentemente em problemas de Geometria Analítica somos levados a passar de um sistema de coordenadas ortogonais no espaço $\Sigma = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ para outro $\Sigma' = (O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ mais conveniente.

Sendo $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $B' = \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$, considere $\Sigma = (O, B)$ e $\Sigma' = (O', B')$ dois sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço.

Denotemos $\left[\overrightarrow{OX}\right]_B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ as coordenadas de um ponto X qualquer do espaço

relativamente ao sistema Σ , $\left[\overrightarrow{OO'}\right]_B = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ as coordenadas de O' relativamente ao

sistema Σ e $\left[\overrightarrow{O'X}\right]_{B'} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ as coordenadas de X relativamente ao sistema Σ' .

Sabemos da Geometria analítica (vide [1], p.49) que

$$\left[\overrightarrow{O'X}\right]_B = M_B^{B'} \left[\overrightarrow{O'X}\right]_{B'} \quad (2.1)$$

onde $M_B^{B'}$ é a matriz de mudança da base B para a base B' .

Desde que $\overrightarrow{O'X} = -\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OX}$, segue que $\left[\overrightarrow{O'X}\right]_B = -\left[\overrightarrow{OO'}\right]_B + \left[\overrightarrow{OX}\right]_B$.

$$\text{Logo } \left[\overrightarrow{O'X} \right]_B = \begin{bmatrix} -x_0 \\ -y_0 \\ -z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, segue de (2.1) que

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = M_B^{B'} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Definição 2.1.2. Por uma *translação* entendemos uma transformação do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço que permite deslocar a origem do sistema de coordenadas, ficando inalterada a base.

Nosso objetivo agora é estabelecer as fórmulas de uma translação. Neste caso, devemos passar do sistema de coordenadas ortogonais $\Sigma = (O, B)$ para o sistema $\Sigma' = (O', B)$.

De (2.2) temos:

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = M_B^B \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix},$$

onde I denota a matriz identidade de ordem 3. Logo,

$$\begin{cases} x = x_1 + x_0 \\ y = y_1 + y_0 \\ z = z_1 + z_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

As equações (2.3) são chamadas *Equações de Translação*.

Definição 2.1.3. Por uma *rotação* entendemos uma transformação do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço que permite movimentar a base do sistema de coordenadas (preservando a ortonormalidade), ficando inalterada a origem.

Nosso objetivo agora é estabelecer as fórmulas de uma rotação. Neste caso, devemos passar do sistema de coordenadas ortogonais $\Sigma = (O, B)$ para o sistema $\Sigma' = (O, B')$.

Para isso consideramos como conhecidos os ângulos que formam cada um dos vetores $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ com os vetores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, a saber

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}'$	α_1	β_1	γ_1
$\vec{j}'$	α_2	β_2	γ_2
$\vec{k}'$	α_3	β_3	γ_3

Como B é uma base temos $\vec{i}' = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$, onde α , β e γ são univocamente determinados.

Para encontrar α , sendo B uma base ortonormal, basta calcularmos o produto escalar $\vec{i}' \cdot \vec{i}$, pois

$$\begin{aligned}\vec{i}' \cdot \vec{i} &= (\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}) \cdot \vec{i} \\ &= \alpha\vec{i} \cdot \vec{i} + \beta\vec{j} \cdot \vec{i} + \gamma\vec{k} \cdot \vec{i} \\ &= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 \\ &= \alpha.\end{aligned}$$

De modo análogo temos $\vec{i}' \cdot \vec{j} = \beta$ e $\vec{i}' \cdot \vec{k} = \gamma$.

Mas $\vec{i}' \cdot \vec{i} = \cos \alpha_1$, $\vec{i}' \cdot \vec{j} = \cos \beta_1$ e $\vec{i}' \cdot \vec{k} = \cos \gamma_1$. Portanto

$$\vec{i}' = \cos \alpha_1 \vec{i} + \cos \beta_1 \vec{j} + \cos \gamma_1 \vec{k}.$$

Da mesma forma também obtemos:

$$\vec{j}' = \cos \alpha_2 \vec{i} + \cos \beta_2 \vec{j} + \cos \gamma_2 \vec{k}$$

e

$$\vec{k}' = \cos \alpha_3 \vec{i} + \cos \beta_3 \vec{j} + \cos \gamma_3 \vec{k}.$$

$$\text{Assim } M_B^{B'} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{bmatrix}.$$

Logo, segue de (2.1) que:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$\begin{cases} x = \cos \alpha_1 x_1 + \cos \alpha_2 y_1 + \cos \alpha_3 z_1 \\ y = \cos \beta_1 x_1 + \cos \beta_2 y_1 + \cos \beta_3 z_1 \\ z = \cos \gamma_1 x_1 + \cos \gamma_2 y_1 + \cos \gamma_3 z_1 \end{cases} \quad (2.4)$$

As equações (2.4) são chamadas *Equações de Rotação*.

Definição 2.1.4. Se A denota uma matriz real de ordem 3, por uma *equação característica de A na variável x* entendemos o polinômio de grau 3 dado por $\det(A - xI)$, onde I denota a matriz identidade de ordem 3.

Sabemos que para todo polinômio na variável x com coeficientes reais, se w for uma raiz complexa deste polinômio então $\bar{w}$ também é uma raiz complexa deste polinômio, onde $\bar{w}$ denota o conjugado do número complexo w . Assim, as raízes complexas de um polinômio na variável x com coeficientes reais, aparecem aos pares.

Observação 2.1.1. Se A é uma matriz real de ordem 3, a equação característica de A na variável x possui pelo menos uma raiz real. De fato, como a equação característica é um polinômio na variável x com coeficientes reais, de grau 3, ela possui uma ou três raízes reais.

2.1.2 Exercícios

Para os exercícios a seguir denotamos “.” para o produto escalar e “ $\wedge$ ” para o produto vetorial. Ainda observamos que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ e que a projeção de $\vec{u}$ na direção de $\vec{v}$ é dada por $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$.

Exercício 2.1.1. Seja A uma matriz real simétrica de ordem 3.

a) Mostre que existe $\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tal que $\|\vec{c}_1\| = 1$ e $A\vec{c}_1 = \lambda_1 \vec{c}_1$ para algum λ_1 real.

b) Supondo $x_0 \neq 0$, considere $P = \begin{bmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \vec{c}_3 \end{bmatrix}$ onde $\vec{c}_1$ é dado no item a), $\vec{c}_2 = \begin{bmatrix} -y_0 \\ x_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\vec{c}_3 = \vec{c}_1 \wedge \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} -x_0 z_0 \\ -y_0 z_0 \\ x_0^2 + y_0^2 \end{bmatrix}$. Mostre que P é inversível, $P^t P$ é da

forma $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$ com $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ e $P^t A P$ é da forma $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & w & z \\ 0 & z & y \end{bmatrix}$ onde

P^t denota a matriz transposta de P , w, y, z são reais e λ_1 é o encontrado no item a).

c) Mostre que $\det(A - xI) = 0$ se, e somente se, $\det(P^t A P - xP^t P) = 0$ e conclua que λ é raiz da equação característica de A na variável x se, e somente se, λ é raiz do polinômio $\det(P^t A P - xP^t P)$.

d) Mostre que todas as raízes do polinômio $\det(P^t A P - xP^t P)$ são reais e conclua portanto que todas as raízes da equação característica de A na variável x são reais.

Solução: a) Pela Observação 2.1.1 a equação característica de A na variável x possui pelo menos uma raiz real, digamos λ_1 . Assim, $\det(A - \lambda_1 I) = 0$ e $A - \lambda_1 I$ não é inversível. Portanto o sistema $(A - \lambda_1 I)X = 0$ possui pelo menos uma solução real $X_1 \neq 0$. Logo $\vec{0} \neq \vec{c}_1 = X_1/\|X_1\|$ também é uma solução do sistema $(A - \lambda_1 I)X = 0$, ou seja, $A\vec{c}_1 = \lambda_1 \vec{c}_1$ e $\|\vec{c}_1\| = 1$.

b) Suponha $\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ com digamos, $x_0 \neq 0$ e considere

$$P = \begin{bmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \vec{c}_3 \end{bmatrix} \text{ onde } \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} -y_0 \\ x_0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \vec{c}_3 = \vec{c}_1 \wedge \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} -x_0 z_0 \\ -y_0 z_0 \\ x_0^2 + y_0^2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Logo } P = \begin{bmatrix} x_0 & -y_0 & -x_0 z_0 \\ y_0 & x_0 & -z_0 y_0 \\ z_0 & 0 & x_0^2 + y_0^2 \end{bmatrix} \text{ com } \det P = (x_0^2 + y_0^2)(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = x_0^2 + y_0^2 \neq 0.$$

Portanto P é inversível.

$$\text{Também, } P^t P = \begin{bmatrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \\ \vec{c}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \vec{c}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 & \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 & \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_3 \\ \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 & \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_2 & \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_3 \\ \vec{c}_3 \cdot \vec{c}_1 & \vec{c}_3 \cdot \vec{c}_2 & \vec{c}_3 \cdot \vec{c}_3 \end{bmatrix}. \text{ Mas } \vec{c}_1, \vec{c}_2 \text{ e}$$

$$\vec{c}_3 \text{ são ortogonais dois a dois e } \|\vec{c}_1\| = 1. \text{ Logo } P^t P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \text{ com } \alpha = \|\vec{c}_2\|^2 > 0$$

e $\beta = \|\vec{c}_3\|^2 > 0$.

Além disso,

$$\begin{aligned} P^t A P &= \begin{bmatrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \\ \vec{c}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A\vec{c}_1 & A\vec{c}_2 & A\vec{c}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \\ \vec{c}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \vec{c}_1 & A\vec{c}_2 & A\vec{c}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 & \vec{c}_1 \cdot A\vec{c}_2 & \vec{c}_1 \cdot A\vec{c}_3 \\ \lambda_1 \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 & \vec{c}_2 \cdot A\vec{c}_2 & \vec{c}_2 \cdot A\vec{c}_3 \\ \lambda_1 \vec{c}_3 \cdot \vec{c}_1 & \vec{c}_3 \cdot A\vec{c}_2 & \vec{c}_3 \cdot A\vec{c}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \vec{c}_1 \cdot A\vec{c}_2 & \vec{c}_1 \cdot A\vec{c}_3 \\ 0 & \vec{c}_2 \cdot A\vec{c}_2 & \vec{c}_2 \cdot A\vec{c}_3 \\ 0 & \vec{c}_3 \cdot A\vec{c}_2 & \vec{c}_3 \cdot A\vec{c}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mas A é uma matriz simétrica e portanto $P^t A P$ também é uma matriz simétrica, uma vez que $(P^t A P)^t = P^t A^t P = P^t A P$.

Assim

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \vec{c}_1 \cdot A\vec{c}_2 & \vec{c}_1 \cdot A\vec{c}_3 \\ 0 & \vec{c}_2 \cdot A\vec{c}_2 & \vec{c}_2 \cdot A\vec{c}_3 \\ 0 & \vec{c}_3 \cdot A\vec{c}_2 & \vec{c}_3 \cdot A\vec{c}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vec{c}_1 \cdot A\vec{c}_2 & \vec{c}_2 \cdot A\vec{c}_2 & \vec{c}_3 \cdot A\vec{c}_2 \\ \vec{c}_1 \cdot A\vec{c}_3 & \vec{c}_2 \cdot A\vec{c}_3 & \vec{c}_3 \cdot A\vec{c}_3 \end{bmatrix},$$

donde segue $\vec{c}_1 \cdot A\vec{c}_2 = \vec{c}_1 \cdot A\vec{c}_3 = 0$ e $\vec{c}_2 \cdot A\vec{c}_3 = \vec{c}_3 \cdot A\vec{c}_2$.

Portanto

$$P^t A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & w & z \\ 0 & z & y \end{bmatrix},$$

com $w = \vec{c}_2 \cdot A\vec{c}_2$, $y = \vec{c}_3 \cdot A\vec{c}_3$ e $z = \vec{c}_2 \cdot A\vec{c}_3 = \vec{c}_3 \cdot A\vec{c}_2$ números reais.

c) Observamos que $\det(P^t A P - x P^t P) = \det(P^t A P - x P^t I P) = \det(P^t(A - xI)P) = \det(P^t) \det(A - xI) \det(P) = \det(P) \det(A - xI) \det(P)$ com $\det(P) > 0$ e assim $\det(A - xI) = 0$ se, e somente se, $\det(P^t(A - xI)P) = 0$.

Logo, λ é raiz da equação característica de A na variável x se, e somente se, λ é raiz do polinômio $\det (P^t AP - xP^t P)$.

d) Temos

$$P^t AP - \lambda P^t P = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & w - \lambda\alpha & z \\ 0 & z & y - \lambda\beta \end{bmatrix}.$$

Assim, $\det (P^t AP - \lambda P^t P) = 0$ se, e somente se, $\det \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & w - \lambda\alpha & z \\ 0 & z & y - \lambda\beta \end{bmatrix} = 0$.

Mas $\det \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & w - \lambda\alpha & z \\ 0 & z & y - \lambda\beta \end{bmatrix} = (\lambda_1 - \lambda) \det \begin{bmatrix} w - \lambda\alpha & z \\ z & y - \lambda\beta \end{bmatrix}$ e $\det \begin{bmatrix} w - \lambda\alpha & z \\ z & y - \lambda\beta \end{bmatrix} = (\alpha\beta)\lambda^2 - (\beta w + \alpha y)\lambda + (wy - z^2)$. Portanto, $\det (P^t AP - \lambda P^t P) = 0$ se, e somente se, $(\lambda_1 - \lambda)[(\alpha\beta)\lambda^2 - (\beta w + \alpha y)\lambda + (wy - z^2)] = 0$, ou equivalentemente, $\lambda = \lambda_1$ ou $(\alpha\beta)\lambda^2 - (\beta w + \alpha y)\lambda + (wy - z^2) = 0$. Mas como o discriminante desta equação de segundo grau é $\Delta = (\beta w + \alpha y)^2 - 4\alpha\beta(wy - z^2)$ com $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ temos que $\Delta \geq 0$ e portanto esta equação de segundo grau possui duas raízes reais.

Assim $\det (P^t AP - \lambda P^t P) = 0$ possui três raízes reais e consequentemente $\det(A - \lambda I) = 0$ também possui três raízes reais, como queríamos demonstrar.

Exercício 2.1.2. Sejam A uma matriz real simétrica de ordem 3 e $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ dois vetores quaisquer.

- Mostre que $A\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = \vec{p}_1 \cdot A\vec{p}_2$.
- Conclua que se $A\vec{p}_1 = \lambda_1\vec{p}_1$ e $A\vec{p}_2 = \lambda_2\vec{p}_2$, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$ números reais, então $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = 0$.

Solução: a) De fato, tomando $A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$, com a, b, c, d, e e f reais, $\vec{p}_1 =$

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} \text{ e } \vec{p}_2 = \begin{bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{bmatrix}, \text{ temos}$$

$$\begin{aligned} A\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 &= \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} al_1 + dm_1 + en_1 \\ dl_1 + bm_1 + fn_1 \\ el_1 + fm_1 + cn_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} \\ &= al_1l_2 + dm_1l_2 + en_1l_2 + dl_1m_2 + bm_1m_2 + fn_1m_2 + el_1n_2 + fm_1n_2 \\ &\quad + cn_1n_2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 \cdot A\vec{p}_2 &= \begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} al_2 + dm_2 + en_2 \\ dl_2 + bm_2 + fn_2 \\ el_2 + fm_2 + cn_2 \end{bmatrix} \\ &= al_1l_2 + dl_1m_2 + el_1n_2 + dm_1l_2 + bm_1m_2 + fm_1n_2 + en_1l_2 + fn_1m_2 \\ &\quad + cn_1n_2. \end{aligned}$$

Assim, $A\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = \vec{p}_1 \cdot A\vec{p}_2$, como queríamos demonstrar.

b) Pelo item a) temos que $A\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = \vec{p}_1 \cdot A\vec{p}_2$. Como $A\vec{p}_1 = \lambda_1\vec{p}_1$ e $A\vec{p}_2 = \lambda_2\vec{p}_2$, segue que, $(\lambda_1\vec{p}_1) \cdot \vec{p}_2 = \vec{p}_1 \cdot (\lambda_2\vec{p}_2) \Rightarrow \lambda_1(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) = \lambda_2(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)$ e portanto $(\lambda_1 - \lambda_2)(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) = 0$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = 0$.

Exercício 2.1.3. (Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt) Dada a base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, ache uma base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, tal que $\vec{e}_1 // \vec{f}_1$, $\vec{e}_2$ seja combinação linear de $\vec{e}_1$ e $\vec{f}_2$ e $\vec{e}_3$ seja combinação linear de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ e $\vec{f}_3$.

Solução: Seja $\vec{g}_1 = \vec{f}_1$ e considere $\vec{g}_2 = \vec{f}_2 - \frac{\vec{f}_2 \cdot \vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|^2} \vec{f}_1$. Então

$$\vec{g}_2 \cdot \vec{g}_1 = \left(\vec{f}_2 - \frac{\vec{f}_2 \cdot \vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|^2} \vec{f}_1 \right) \cdot \vec{f}_1 = \vec{f}_2 \cdot \vec{f}_1 - \frac{\vec{f}_2 \cdot \vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|^2} (\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_1) = \vec{f}_2 \cdot \vec{f}_1 - \vec{f}_2 \cdot \vec{f}_1 = 0$$

e assim $\vec{g}_2$ é ortogonal a $\vec{g}_1$.

$$\text{Consideramos } \vec{g}_3 = \vec{f}_3 - \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|^2} \vec{g}_1 - \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{g}_2}{\|\vec{g}_2\|^2} \vec{g}_2.$$

Então temos:

$$\begin{aligned}
 \vec{g}_3 \cdot \vec{g}_1 &= \left(\vec{f}_3 - \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|^2} \vec{g}_1 - \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{g}_2}{\|\vec{g}_2\|^2} \vec{g}_2 \right) \cdot \vec{g}_1 \\
 &= \vec{f}_3 \cdot \vec{g}_1 - \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|^2} (\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_1) - \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{g}_2}{\|\vec{g}_2\|^2} (\vec{g}_2 \cdot \vec{g}_1) \\
 &= \vec{f}_3 \cdot \vec{g}_1 - \vec{f}_3 \cdot \vec{g}_1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{g}_3 \cdot \vec{g}_2 &= \left(\vec{f}_3 - \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|^2} \vec{g}_1 - \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{g}_2}{\|\vec{g}_2\|^2} \vec{g}_2 \right) \cdot \vec{g}_2 \\
 &= \vec{f}_3 \cdot \vec{g}_2 - \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|^2} (\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2) - \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{g}_2}{\|\vec{g}_2\|^2} (\vec{g}_2 \cdot \vec{g}_2) \\
 &= \vec{f}_3 \cdot \vec{g}_2 - \vec{f}_3 \cdot \vec{g}_2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

e assim $\vec{g}_3$ é ortogonal a $\vec{g}_1$ e $\vec{g}_2$.

Considerando $\vec{e}_i = \frac{\vec{g}_i}{\|\vec{g}_i\|}$, $i=1,2,3$, temos que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é uma base ortonormal tal que $\vec{e}_1 // \vec{f}_1$, $\vec{e}_2$ é combinação linear de $\vec{e}_1$ e $\vec{f}_2$ e $\vec{e}_3$ é combinação linear de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ e $\vec{f}_3$.

2.2 Aplicação das translações e rotações do espaço ao estudo da equação de uma quádrica

Definição 2.2.1. Uma *quádrica* é um subconjunto de pontos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ definido por uma equação da forma:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0 \quad (2.5)$$

onde a, b, c, d, e, f, g, h e i são números reais não todos nulos.

Nas subseções a seguir, vamos fazer algumas reduções na equação (2.5).

2.2.1 Simplificação da equação de uma superfície quádrica por meio de uma translação

Consiste em descobrir o ponto $O' = (x_0, y_0, z_0)$ para o qual se deve transladar o sistema ortogonal $\Sigma = (O, B)$, onde $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, para o sistema ortogonal $\Sigma' = (O', B)$, de modo que a equação (2.5) se transforme em uma equação da forma:

$$a_1x_1^2 + b_1y_1^2 + c_1z_1^2 + d_1x_1y_1 + e_1x_1z_1 + f_1y_1z_1 + j_1 = 0 \quad (2.6)$$

Substituindo as Equações de Translação (2.3) na equação (2.5), obtemos:

$$a(x_1 + x_0)^2 + b(y_1 + y_0)^2 + c(z_1 + z_0)^2 + d(x_1 + x_0)(y_1 + y_0) + e(x_1 + x_0)(z_1 + z_0)$$

$$+f(y_1 + y_0)(z_1 + z_0) + g(x_1 + x_0) + h(y_1 + y_0) + i(z_1 + z_0) + j = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + dx_1y_1 + ex_1z_1 + fy_1z_1 + (2ax_0 + dy_0 + ez_0 + g)x_1 + (dx_0 + 2by_0 \\ + fz_0 + h)y_1 + (ex_0 + fy_0 + 2cz_0 + i)z_1 + (ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 + dx_0y_0 + ex_0z_0 + fy_0z_0 \\ + gx_0 + hy_0 + iz_0 + j) = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Assim, devemos encontrar x_0, y_0, z_0 de modo que:

$$\begin{cases} 2ax_0 + dy_0 + ez_0 + g = 0 \\ dx_0 + 2by_0 + fz_0 + h = 0 \\ ex_0 + fy_0 + 2cz_0 + i = 0 \end{cases} ,$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} ax_0 + \frac{d}{2}y_0 + \frac{e}{2}z_0 + \frac{g}{2} = 0 \\ \frac{d}{2}x_0 + by_0 + \frac{f}{2}z_0 + \frac{h}{2} = 0 \\ \frac{e}{2}x_0 + \frac{f}{2}y_0 + cz_0 + \frac{i}{2} = 0 \end{cases} ,$$

ou ainda, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g/2 \\ -h/2 \\ -i/2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Definição 2.2.2. Chamaremos de *discriminante* δ , da equação (2.5), o determinante

$$\text{da matriz } A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}, \text{ ou seja, } \delta = \begin{vmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{vmatrix}.$$

Se $\delta \neq 0$, temos um sistema compatível e determinado, ou seja, o sistema possui uma única solução. Neste caso temos uma Quádrlica Central.

Se $\delta = 0$, temos um sistema indeterminado (com infinitas soluções) ou incompatível (que não possui solução). Neste caso é impossível “eliminar os termos do 1º grau por meio de uma translação”.

Observamos agora a equação (2.7). Os coeficientes dos termos de 2º grau são os mesmos (a, b, c, d, e, f) que na equação (2.5). Portanto translações não afetam os coeficientes dos termos de 2º grau. Dizemos, neste caso, que os termos de 2º grau são **invariantes por translação**.

Além disso, chamando de $Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j$, vemos que o termo independente da equação (2.7) é $Q(x_0, y_0, z_0)$. Estas considerações serão necessárias para a obtenção da equação (2.6).

Portanto, se o sistema for compatível determinado, sempre será possível encontrar (x_0, y_0, z_0) de modo que a equação (2.5) se reduza à equação (2.6) com $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$, $d_1 = d$, $e_1 = e$, $f_1 = f$ e $j_1 = Q(x_0, y_0, z_0)$, ou seja, à uma equação da forma

$$ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + dx_1y_1 + ex_1z_1 + fy_1z_1 + j_1 = 0,$$

onde $j_1 = Q(x_0, y_0, z_0)$, que referiremos como sendo a equação de uma Quádrica Central.

2.2.2 Redução de uma Quádrica Central à sua expressão mais simples.

Neste caso a equação (2.5) já está simplificada à forma

$$ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + dx_1y_1 + ex_1z_1 + fy_1z_1 + j_1 = 0 \quad (2.9)$$

que é a equação de uma Quádrica Central.

Reduziremos a equação (2.9) a sua expressão mais simples fazendo os eixos de coordenadas sofrer uma rotação em torno da origem fixa. Necessitaremos do seguinte:

Teorema 2.2.1. *Pontos médios de cordas paralelas de uma Quádrica Central encontram-se em um mesmo plano.*

Demonstração. Seja $\vec{p} = (l, m, n)$ um vetor não nulo e consideremos todas as cordas paralelas de uma Quádrica Central tendo direção $\vec{p}$.

Tomando $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ extremidades de uma corda qualquer, seu ponto médio $P = (x, y, z)$ é tal que

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{e} \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (2.10)$$

Como $\overrightarrow{M_1M_2}$ é paralelo ao vetor $\vec{p}$, segue que $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = t(l, m, n)$, $t \neq 0$. Portanto

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = tl \\ y_2 - y_1 = tm \\ z_2 - z_1 = tn \end{cases} \quad (2.11)$$

Como M_1 e M_2 pertencem à Quádrica Central de equação (2.9), temos

$$ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + dx_1y_1 + ex_1z_1 + fy_1z_1 + j_1 = 0 \quad (2.12)$$

e

$$ax_2^2 + by_2^2 + cz_2^2 + dx_2y_2 + ex_2z_2 + fy_2z_2 + j_1 = 0 \quad (2.13)$$

Subtraindo (2.12) de (2.13), obtemos

$$\begin{aligned} a(x_2^2 - x_1^2) + b(y_2^2 - y_1^2) + c(z_2^2 - z_1^2) + d(x_2y_2 - x_1y_1) + e(x_2z_2 - x_1z_1) \\ + f(y_2z_2 - y_1z_1) = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Em virtude de (2.10), (2.11) e do fato que $(x_2^2 - x_1^2) = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$, obtemos

$$(x_2^2 - x_1^2) = 2xtl \quad (2.15)$$

Analogamente,

$$(y_2^2 - y_1^2) = 2ytm \quad (2.16)$$

$$(z_2^2 - z_1^2) = 2ztn \quad (2.17)$$

Além disso,

$$x_2y_2 - x_1y_1 = \frac{(x_2 + x_1)(y_2 - y_1) + (x_2 - x_1)(y_2 + y_1)}{2} = \frac{2x_1tm + 2y_1tl}{2} = x_1tm + y_1tl,$$

ou seja,

$$x_2y_2 - x_1y_1 = xtm + ytl \quad (2.18)$$

Do mesmo modo,

$$x_2z_2 - x_1z_1 = xnt + zlt \quad (2.19)$$

$$y_2z_2 - y_1z_1 = ynt + zmt \quad (2.20)$$

Substituindo as equações de (2.15) a (2.20) na equação (2.14), obtemos

$$a2x_1tl + b2y_1tm + c2z_1tn + d(xtm + tly) + e(xnt + zlt) + f(ynt + zmt) = 0,$$

ou equivalentemente, dividindo por $2t$,

$$alx + bmy + cnz + \frac{d}{2}mx + \frac{d}{2}ly + \frac{e}{2}nx + \frac{e}{2}lz + \frac{f}{2}ny + \frac{f}{2}mz = 0,$$

ou ainda,

$$\left(al + \frac{d}{2}m + \frac{e}{2}n\right)x + \left(\frac{d}{2}l + bm + \frac{f}{2}n\right)y + \left(\frac{e}{2}l + \frac{f}{2}m + cn\right)z = 0 \quad (2.21)$$

Para concluirmos nossa demonstração, basta verificarmos que (2.21) é a equação geral de um plano.

Para isso devemos mostrar que os coeficientes de x, y e z não se anulam simultaneamente.

Suponha que se anulem simultaneamente, isto é,

$$\begin{cases} al + \frac{d}{2}m + \frac{e}{2}n = 0 \\ \frac{d}{2}l + bm + \frac{f}{2}n = 0 \\ \frac{e}{2}l + \frac{f}{2}m + cn = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Como a quádrlica é Central, $\delta \neq 0$ e portanto $\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, o que é um absurdo,

pois $\vec{p} = (l, m, n)$ é não nulo.

Assim, (2.21) representa a equação de um plano. □

Definição 2.2.3. O plano ao qual pertencem os pontos médios das cordas de uma Quádrica Central é chamado de *plano diametral* conjugado a estas cordas.

Definição 2.2.4. A direção de cordas paralelas perpendiculares ao plano diametral que lhes é conjugado, é chamada *direção principal* em relação à quádrica.

Segue da definição acima que o vetor $\vec{p} = (l, m, n)$ é de direção principal se for perpendicular ao plano diametral (2.21), isto é, o vetor $\vec{p}$ é paralelo ao vetor normal $\vec{n} = \left(al + \frac{d}{2}m + \frac{e}{2}n, \frac{d}{2}l + bm + \frac{f}{2}n, \frac{e}{2}l + \frac{f}{2}m + cn \right)$.

Logo, $\vec{n} = \lambda \vec{p}$, ou equivalentemente,

$$\begin{cases} al + \frac{d}{2}m + \frac{e}{2}n = \lambda l \\ \frac{d}{2}l + bm + \frac{f}{2}n = \lambda m \\ \frac{e}{2}l + \frac{f}{2}m + cn = \lambda n \end{cases},$$

ou ainda,

$$\begin{cases} (a - \lambda)l + \frac{d}{2}m + \frac{e}{2}n = 0 \\ \frac{d}{2}l + (b - \lambda)m + \frac{f}{2}n = 0 \\ \frac{e}{2}l + \frac{f}{2}m + (c - \lambda)n = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Para que (2.23) tenha solução não trivial, devemos ter

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b - \lambda & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

que é chamada de equação característica de (2.5) e nos permitirá determinar os valores admissíveis de λ .

Desenvolvendo o determinante vemos que esta equação é do 3º grau e portanto tem três raízes. Chamamos de λ_1, λ_2 e λ_3 as raízes da equação característica. É mais do que evidente que todos os coeficientes da equação (2.24) são reais e portanto pelo menos uma raiz desta equação deve ser real. De fato as três raízes são reais, como vimos anteriormente na seção de exercícios.

Substituindo $\lambda = \lambda_1$ na equação (2.23) e escolhendo uma solução não trivial, obtemos um vetor não nulo $\vec{p}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ para a direção principal correspondente a raiz λ_1 .

Da mesma forma obtemos $\vec{p}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ e $\vec{p}_3 = (l_3, m_3, n_3)$ direções principais correspondentes as raízes λ_2 e λ_3 , respectivamente.

Sabemos também que se todas as raízes forem diferentes teremos três direções principais perpendiculares duas a duas, caso contrário, devemos escolher vetores que satisfaçam a condição de perpendicularidade, como foi mostrado na seção de exercícios.

Levando a base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ do sistema de coordenadas $\Sigma' = (O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sobre a base $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ do sistema de coordenadas $\Sigma'' = (O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, onde $\vec{i}' = \frac{\vec{p}_1}{\|\vec{p}_1\|}$, $\vec{j}' = \frac{\vec{p}_2}{\|\vec{p}_2\|}$ e

$\vec{k} = \frac{\vec{p}_3}{\|\vec{p}_3\|}$, com $\|\vec{p}_i\| = \sqrt{l_i^2 + m_i^2 + n_i^2}$, $i = 1, 2, 3$, obteremos as fórmulas da equação de rotação, necessária, para reduzir a equação (2.9) a sua forma mais simples, como segue:

Temos:

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \left(\frac{l_1}{\|\vec{p}_1\|}, \frac{m_1}{\|\vec{p}_1\|}, \frac{n_1}{\|\vec{p}_1\|} \right); \\ \vec{j} &= \left(\frac{l_2}{\|\vec{p}_2\|}, \frac{m_2}{\|\vec{p}_2\|}, \frac{n_2}{\|\vec{p}_2\|} \right); \\ \vec{k} &= \left(\frac{l_3}{\|\vec{p}_3\|}, \frac{m_3}{\|\vec{p}_3\|}, \frac{n_3}{\|\vec{p}_3\|} \right).\end{aligned}$$

Fazendo $\cos \alpha_i = \frac{l_i}{\|\vec{p}_i\|}$, $\cos \beta_i = \frac{m_i}{\|\vec{p}_i\|}$ e $\cos \gamma_i = \frac{n_i}{\|\vec{p}_i\|}$ para $i = 1, 2, 3$, a equação de rotação (2.4) toma a seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l_1}{\|\vec{p}_1\|}x_2 + \frac{l_2}{\|\vec{p}_2\|}y_2 + \frac{l_3}{\|\vec{p}_3\|}z_2 \\ y_1 = \frac{m_1}{\|\vec{p}_1\|}x_2 + \frac{m_2}{\|\vec{p}_2\|}y_2 + \frac{m_3}{\|\vec{p}_3\|}z_2 \\ z_1 = \frac{n_1}{\|\vec{p}_1\|}x_2 + \frac{n_2}{\|\vec{p}_2\|}y_2 + \frac{n_3}{\|\vec{p}_3\|}z_2 \end{cases} \quad (2.25)$$

Substituindo (2.25) em (2.9), obtemos:

$$\begin{aligned} & a \left(\frac{l_1}{\|\vec{p}_1\|}x_2 + \frac{l_2}{\|\vec{p}_2\|}y_2 + \frac{l_3}{\|\vec{p}_3\|}z_2 \right)^2 + b \left(\frac{m_1}{\|\vec{p}_1\|}x_2 + \frac{m_2}{\|\vec{p}_2\|}y_2 + \frac{m_3}{\|\vec{p}_3\|}z_2 \right)^2 + c \left(\frac{n_1}{\|\vec{p}_1\|}x_2 + \frac{n_2}{\|\vec{p}_2\|}y_2 + \frac{n_3}{\|\vec{p}_3\|}z_2 \right)^2 \\ & + d \left(\frac{l_1}{\|\vec{p}_1\|}x_2 + \frac{l_2}{\|\vec{p}_2\|}y_2 + \frac{l_3}{\|\vec{p}_3\|}z_2 \right) \left(\frac{m_1}{\|\vec{p}_1\|}x_2 + \frac{m_2}{\|\vec{p}_2\|}y_2 + \frac{m_3}{\|\vec{p}_3\|}z_2 \right) \\ & + e \left(\frac{l_1}{\|\vec{p}_1\|}x_2 + \frac{l_2}{\|\vec{p}_2\|}y_2 + \frac{l_3}{\|\vec{p}_3\|}z_2 \right) \left(\frac{n_1}{\|\vec{p}_1\|}x_2 + \frac{n_2}{\|\vec{p}_2\|}y_2 + \frac{n_3}{\|\vec{p}_3\|}z_2 \right) \\ & + f \left(\frac{m_1}{\|\vec{p}_1\|}x_2 + \frac{m_2}{\|\vec{p}_2\|}y_2 + \frac{m_3}{\|\vec{p}_3\|}z_2 \right) \left(\frac{n_1}{\|\vec{p}_1\|}x_2 + \frac{n_2}{\|\vec{p}_2\|}y_2 + \frac{n_3}{\|\vec{p}_3\|}z_2 \right) + j_1 = 0, \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$a_1x_2^2 + b_1y_2^2 + c_1z_2^2 + d_1x_2y_2 + e_1x_2z_2 + f_1y_2z_2 + j_1 = 0 \quad (2.26)$$

onde

$$\begin{aligned} a_1 &= a \left(\frac{l_1}{\|\vec{p}_1\|} \right)^2 + b \left(\frac{m_1}{\|\vec{p}_1\|} \right)^2 + c \left(\frac{n_1}{\|\vec{p}_1\|} \right)^2 + d \left(\frac{l_1m_1}{\|\vec{p}_1\|^2} \right) + e \left(\frac{l_1n_1}{\|\vec{p}_1\|^2} \right) + f \left(\frac{m_1n_1}{\|\vec{p}_1\|^2} \right); \\ b_1 &= a \left(\frac{l_2}{\|\vec{p}_2\|} \right)^2 + b \left(\frac{m_2}{\|\vec{p}_2\|} \right)^2 + c \left(\frac{n_2}{\|\vec{p}_2\|} \right)^2 + d \left(\frac{l_2m_2}{\|\vec{p}_2\|^2} \right) + e \left(\frac{l_2n_2}{\|\vec{p}_2\|^2} \right) + f \left(\frac{m_2n_2}{\|\vec{p}_2\|^2} \right); \\ c_1 &= a \left(\frac{l_3}{\|\vec{p}_3\|} \right)^2 + b \left(\frac{m_3}{\|\vec{p}_3\|} \right)^2 + c \left(\frac{n_3}{\|\vec{p}_3\|} \right)^2 + d \left(\frac{l_3m_3}{\|\vec{p}_3\|^2} \right) + e \left(\frac{l_3n_3}{\|\vec{p}_3\|^2} \right) + f \left(\frac{m_3n_3}{\|\vec{p}_3\|^2} \right); \\ d_1 &= a \left(\frac{2l_1l_2}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_2\|} \right) + b \left(\frac{2m_1m_2}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_2\|} \right) + c \left(\frac{2n_1n_2}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_2\|} \right) + d \left(\frac{l_1m_2}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_2\|} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{l_2 m_1}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_2\|} \Big) + e \left(\frac{l_1 n_2}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_2\|} + \frac{l_2 n_1}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_2\|} \right) + f \left(\frac{m_1 n_2}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_2\|} + \frac{m_2 n_1}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_2\|} \right); \\
e_1 = & a \left(\frac{2l_1 l_3}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_3\|} \right) + b \left(\frac{2m_1 m_3}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_3\|} \right) + c \left(\frac{2n_1 n_3}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_3\|} \right) + d \left(\frac{l_1 m_3}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_3\|} \right. \\
& \left. + \frac{l_3 m_1}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_3\|} \right) + e \left(\frac{l_1 n_3}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_3\|} + \frac{l_3 n_1}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_3\|} \right) + f \left(\frac{m_1 n_3}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_3\|} + \frac{m_3 n_1}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_3\|} \right); \\
f_1 = & a \left(\frac{2l_2 l_3}{\|\vec{p}_2\| \|\vec{p}_3\|} \right) + b \left(\frac{2m_2 m_3}{\|\vec{p}_2\| \|\vec{p}_3\|} \right) + c \left(\frac{2n_2 n_3}{\|\vec{p}_2\| \|\vec{p}_3\|} \right) + d \left(\frac{l_2 m_3}{\|\vec{p}_2\| \|\vec{p}_3\|} \right. \\
& \left. + \frac{l_3 m_2}{\|\vec{p}_2\| \|\vec{p}_3\|} \right) + e \left(\frac{l_2 n_3}{\|\vec{p}_2\| \|\vec{p}_3\|} + \frac{l_3 n_2}{\|\vec{p}_2\| \|\vec{p}_3\|} \right) + f \left(\frac{m_2 n_3}{\|\vec{p}_2\| \|\vec{p}_3\|} + \frac{m_3 n_2}{\|\vec{p}_2\| \|\vec{p}_3\|} \right).
\end{aligned}$$

Escrevendo o sistema (2.23) correspondente a equação (2.26), obtemos

$$\begin{cases} (a_1 - \tilde{\lambda})\tilde{l} + \frac{d_1}{2}\tilde{m} + \frac{e_1}{2}\tilde{n} = 0 \\ \frac{d_1}{2}\tilde{l} + (b_1 - \tilde{\lambda})\tilde{m} + \frac{f_1}{2}\tilde{n} = 0 \\ \frac{e_1}{2}\tilde{l} + \frac{f_1}{2}\tilde{m} + (c_1 - \tilde{\lambda})\tilde{n} = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Como o eixo $O'z_2$ é direção principal correspondente a $\tilde{\lambda} = \lambda_3$ o sistema (2.27) deve ter uma solução $\tilde{l} = 0$, $\tilde{m} = 0$ e $\tilde{n} \neq 0$. Assim $e_1 = 0$, $f_1 = 0$ e $c_1 = \tilde{\lambda} = \lambda_3$.

Da mesma forma com os eixos $O'y_2$ e $O'x_2$ concluímos que $d_1 = 0$, $b_1 = \tilde{\lambda} = \lambda_2$ e $f_1 = 0$ e $a_1 = \tilde{\lambda} = \lambda_1$, $d_1 = 0$ e $e_1 = 0$, respectivamente.

Portanto, a equação (2.26) reduz a

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 + j_1 = 0 \quad (2.28)$$

Esta é a equação na forma mais simples.

2.2.3 Redução da equação de uma quádrlica à sua expressão mais simples para o caso em que $\delta = 0$

Se $\delta = 0$, o sistema de equações (2.8), que define o centro, será incompatível ou indeterminado. No caso em que o sistema é incompatível, a superfície quádrlica não tem centro e, portanto é impossível reduzir sua equação por meio de uma translação. Neste caso efetuaremos uma rotação dos eixos coordenados (ficando imóvel a origem), de modo a eliminar os termos mistos do 2º grau.

$$\text{Sendo nulo o discriminante da equação (2.5), ou seja, } \delta = \begin{vmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{vmatrix} = 0,$$

então a equação (2.24), que é a equação característica de (2.5), possui solução $\lambda = 0$.

Como a equação característica de (2.5) é o determinante de uma matriz simétrica real igualado a zero, sempre teremos três raízes reais. Chamamos de λ_1 , λ_2 e $\lambda_3 = 0$ as raízes reais da equação característica de (2.5).

Substituindo $\lambda = \lambda_1$ no sistema (2.23) e escolhendo uma solução não trivial, obtemos o vetor não nulo $\vec{p}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, correspondente a raiz λ_1 .

Da mesma forma obtemos $\vec{p}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ e $\vec{p}_3 = (l_3, m_3, n_3)$ vetores não triviais correspondentes às raízes λ_2 e λ_3 , respectivamente.

Como vimos na seção de exercícios, se todas as raízes forem diferentes, teremos três vetores que satisfazem a condição de perpendicularidade por meio do Teorema de Gram-Schmidt.

Agora, fazemos:

$$\vec{i}' = \frac{\vec{p}_1}{\|\vec{p}_1\|}, \vec{j}' = \frac{\vec{p}_2}{\|\vec{p}_2\|} \quad e \quad \vec{k}' = \frac{\vec{p}_3}{\|\vec{p}_3\|}$$

e efetuamos uma rotação dos eixos coordenados (ficando imóvel a origem) de modo que o sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ seja levado no sistema $\Sigma' = (O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ através da transformação dada pela equação de rotação (2.4):

$$\begin{cases} x = \frac{l_1}{\|\vec{p}_1\|}x_1 + \frac{l_2}{\|\vec{p}_2\|}y_1 + \frac{l_3}{\|\vec{p}_3\|}z_1 \\ y = \frac{m_1}{\|\vec{p}_1\|}x_1 + \frac{m_2}{\|\vec{p}_2\|}y_1 + \frac{m_3}{\|\vec{p}_3\|}z_1 \\ z = \frac{n_1}{\|\vec{p}_1\|}x_1 + \frac{n_2}{\|\vec{p}_2\|}y_1 + \frac{n_3}{\|\vec{p}_3\|}z_1 \end{cases} \quad (2.29)$$

Substituindo (2.29) na equação (2.5) obtemos

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + g_1 x_1 + h_1 y_1 + i_1 z_1 + j = 0 \quad (2.30)$$

Por meio do completamento de quadrados e efetuando a translação

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{g_1}{2\lambda_1} \\ y_2 = y_1 + \frac{h_1}{2\lambda_2} \\ z_2 = z_1 + \frac{j - \frac{g_1^2}{4\lambda_1} - \frac{h_1^2}{4\lambda_2}}{i_1} \end{cases},$$

reduzimos a equação (2.30) à uma equação do tipo:

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + i_1 z_2 = 0 \quad (2.31)$$

Esta é a equação na forma mais simples.

No caso indeterminado, teremos infinitos centros. Inicialmente, escolhemos um centro para reduzirmos a equação (2.5) na forma $ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + dx_1y_1 + ex_1z_1 + fy_1z_1 + j_1 = 0$ com $\delta = 0$.

Para finalizar, procedemos como acima para reduzir a equação à forma (2.31).

Esta discussão pode ser resumida do seguinte modo:

Redução da equação geral de uma quádrlica via Geometria Analítica	
1°	Dada a equação $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$, calcule seu discriminante δ, isto é, $\delta = \begin{vmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{vmatrix}$.
2°	Para $\delta = 0$: Encontre as raízes λ_1, λ_2 e $\lambda_3 = 0$ da equação característica, ou seja, os valores admissíveis para λ em $\begin{vmatrix} a - \lambda & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b - \lambda & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c - \lambda \end{vmatrix} = 0.$ Para $\delta \neq 0$: Temos uma quádrlica central. Neste caso, efetue uma translação para $O' = (x_0, y_0, z_0)$, de modo que: $\begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g/2 \\ -h/2 \\ -i/2 \end{bmatrix}.$
3°	Substitua $\lambda = \lambda_1$ no sistema $\begin{cases} (a - \lambda)l + \frac{d}{2}m + \frac{e}{2}n = 0 \\ \frac{d}{2}l + (b - \lambda)m + \frac{f}{2}n = 0 \\ \frac{e}{2}l + \frac{f}{2}m + (c - \lambda)n = 0 \end{cases}$ para obter $\vec{p}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, direção principal correspondente à raiz λ_1. Repita este processo com as raízes λ_2 e $\lambda_3 = 0$ para obter $\vec{p}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ e $\vec{p}_3 = (l_3, m_3, n_3)$. Denotando $Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j$, calcule $Q(x_0, y_0, z_0)$, para obter a equação $ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + dx_1y_1 + ex_1z_1 + fy_1z_1 + j_1 = 0, \text{ onde } j_1 = Q(x_0, y_0, z_0).$
4°	Determine a nova base $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ do sistema de coordenadas fazendo $\vec{i}' = \left(\frac{l_1}{\ \vec{p}_1\ }, \frac{m_1}{\ \vec{p}_1\ }, \frac{n_1}{\ \vec{p}_1\ } \right)$ $\vec{j}' = \left(\frac{l_2}{\ \vec{p}_2\ }, \frac{m_2}{\ \vec{p}_2\ }, \frac{n_2}{\ \vec{p}_2\ } \right)$ $\vec{k}' = \left(\frac{l_3}{\ \vec{p}_3\ }, \frac{m_3}{\ \vec{p}_3\ }, \frac{n_3}{\ \vec{p}_3\ } \right)$ Encontre as raízes λ_1, λ_2 e λ_3 da equação característica, ou seja, os valores admissíveis para λ em $\begin{vmatrix} a - \lambda & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b - \lambda & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$.
5°	Substitua os valores de x, y e z dados pela rotação abaixo $\begin{cases} x = \frac{l_1}{\ \vec{p}_1\ }x_1 + \frac{l_2}{\ \vec{p}_2\ }y_1 + \frac{l_3}{\ \vec{p}_3\ }z_1 \\ y = \frac{m_1}{\ \vec{p}_1\ }x_1 + \frac{m_2}{\ \vec{p}_2\ }y_1 + \frac{m_3}{\ \vec{p}_3\ }z_1 \\ z = \frac{n_1}{\ \vec{p}_1\ }x_1 + \frac{n_2}{\ \vec{p}_2\ }y_1 + \frac{n_3}{\ \vec{p}_3\ }z_1 \end{cases}$ na equação inicial e reagrupe para obter a equação na forma: $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + g_1 x_1 + h_1 y_1 + i_1 z_1 + j = 0.$ Finalize com a rotação $\begin{cases} x_1 = \frac{l_1}{\ \vec{p}_1\ }x_2 + \frac{l_2}{\ \vec{p}_2\ }y_2 + \frac{l_3}{\ \vec{p}_3\ }z_2 \\ y_1 = \frac{m_1}{\ \vec{p}_1\ }x_2 + \frac{m_2}{\ \vec{p}_2\ }y_2 + \frac{m_3}{\ \vec{p}_3\ }z_2 \\ z_1 = \frac{n_1}{\ \vec{p}_1\ }x_2 + \frac{n_2}{\ \vec{p}_2\ }y_2 + \frac{n_3}{\ \vec{p}_3\ }z_2 \end{cases}$ através dos passos 3°, 4° e 5° da coluna ao lado para obter a equação na forma: $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 + j_1 = 0.$
6°	Por meio do completamento de quadrados, efetue a translação $\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{g_1}{2\lambda_1} \\ y_2 = y_1 + \frac{h_1}{2\lambda_2} \\ z_2 = z_1 + \frac{j - \frac{g_1^2}{4\lambda_1} - \frac{h_1^2}{4\lambda_2}}{i_1} \end{cases}$ para obter a equação na forma: $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + i_1 z_2 = 0.$

Tabela 2.1: Redução da equação geral de uma quádrlica via Geometria Analítica

2.3 Aplicações

Nesta seção faremos uso da teoria desenvolvida na seção 2.2 para identificar algumas quádricas e observamos que as figuras inseridas nos exemplos foram feitas utilizando-se o software Maple.

Exemplo 2.3.1. Identifique a quádrica $3z^2 + 2xy + x - 1 = 0$.

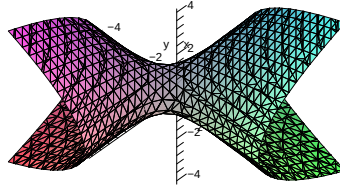


Figura 2.1: Quádrica $3z^2 + 2xy + x - 1 = 0$.

Como o discriminante da equação desta quádrica é $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, esta superfície quádrica representa uma quádrica central. Assim, devemos eliminar primeiro os termos do 1º grau por meio de uma translação.

Para isso, devemos encontrar a nova origem $O' = (x_0, y_0, z_0)$, de modo que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nestas condições, obtemos $O' = (0, -1/2, 0)$ e além disso, sendo $Q(x, y, z) = 3z^2 + 2xy + x - 1$, temos $Q(0, -1/2, 0) = -1$. Desta maneira, a quádrica fica reduzida à forma: $3z_1^2 + 2x_1y_1 - 1 = 0$.

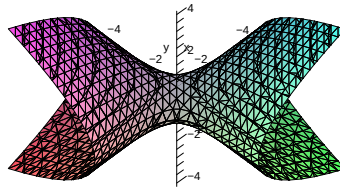


Figura 2.2: Quádrica $3z_1^2 + 2x_1y_1 - 1 = 0$.

Devemos então efetuar uma rotação nos eixos coordenados, de modo a eliminar os termos mistos do 2º grau.

Para isso, calculamos as raízes da equação característica desta quádrlica, por meio da equação

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ obtendo } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3 \text{ e } \lambda_3 = -1.$$

Sendo assim, encontramos o vetor $(1, 1, 0)$ como direção principal correspondente à raiz $\lambda_1 = 1$, $(0, 0, 1)$ como direção principal correspondente à raiz $\lambda_2 = 3$ e o vetor $(1, -1, 0)$ como direção principal correspondente à raiz $\lambda_3 = -1$.

Sendo $\|(1, 1, 0)\| = \sqrt{2}$, $\|(0, 0, 1)\| = 1$ e $\|(1, -1, 0)\| = \sqrt{2}$, temos:

$$\vec{i}' = \left(\frac{1}{\|(1, 1, 0)\|}, \frac{1}{\|(1, 1, 0)\|}, \frac{0}{\|(1, 1, 0)\|} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right);$$

$$\vec{j}' = \left(\frac{0}{\|(0, 0, 1)\|}, \frac{0}{\|(0, 0, 1)\|}, \frac{1}{\|(0, 0, 1)\|} \right) = (0, 0, 1);$$

$$\vec{k}' = \left(\frac{1}{\|(1, -1, 0)\|}, \frac{-1}{\|(1, -1, 0)\|}, \frac{0}{\|(1, -1, 0)\|} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right).$$

Neste caso, a equação de rotação (2.4) é dada por:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 0y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}z_2 \\ y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 0y_2 + -\frac{\sqrt{2}}{2}z_2 \\ z_1 = 0x_2 + y_2 + 0z_2 \end{cases}.$$

Substituindo esses valores de x_1 , y_1 e z_1 na equação $3z_1^2 + 2x_1y_1 - 1 = 0$ e reagrupando, obtemos

$$x_2^2 + 3y_2^2 - z_2^2 = 1,$$

que é a equação de um Hiperbolóide de uma folha.

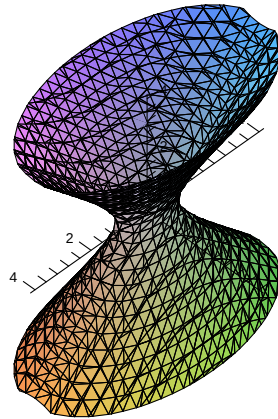


Figura 2.3: Quádrica $x_2^2 + 3y_2^2 - z_2^2 = 1$.

Portanto, a quádrlica $3z^2 + 2xy + x - 1 = 0$, após uma translação seguida de uma rotação, é o Hiperbolóide de uma folha dado pela figura 2.3.

Exemplo 2.3.2. Identifique a quádrlica $\frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + yz + 3x - 5\sqrt{2}y + \sqrt{2}z - 7 = 0$.

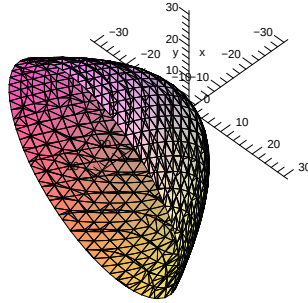


Figura 2.4: Quádrlica $\frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + yz + 3x - 5\sqrt{2}y + \sqrt{2}z - 7 = 0$.

Como o discriminante da equação desta quádrlica é $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 \end{vmatrix} = 0$, não é possível eliminarmos primeiro os termos do 1º grau por meio de uma translação. Neste caso devemos efetuar uma rotação nos eixos coordenados, de modo a eliminar os termos mistos do 2º grau.

Para isso, calculamos as raízes da equação característica desta quádrlica, por meio da equação $\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 - \lambda & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$, obtendo $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 0$.

Sendo assim, encontramos o vetor $(0, -1, 1)$ como direção principal correspondente à raiz $\lambda_1 = 1$, $(0, -1, -1)$ como direção principal correspondente à raiz $\lambda_2 = 2$ e o vetor $(-1, 0, 0)$ como direção principal correspondente à raiz $\lambda_3 = 0$.

Sendo $\|(0, -1, 1)\| = \sqrt{2}$, $\|(0, -1, -1)\| = \sqrt{2}$ e $\|(-1, 0, 0)\| = 1$, temos:

$$\vec{i}' = \left(\frac{0}{\|(0, -1, 1)\|}, \frac{-1}{\|(0, -1, 1)\|}, \frac{1}{\|(0, -1, 1)\|} \right) = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right);$$

$$\vec{j}' = \left(\frac{0}{\|(0, -1, -1)\|}, \frac{-1}{\|(0, -1, -1)\|}, \frac{-1}{\|(0, -1, -1)\|} \right) = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right);$$

$$\vec{k}' = \left(\frac{-1}{\|(-1, 0, 0)\|}, \frac{0}{\|(-1, 0, 0)\|}, \frac{0}{\|(-1, 0, 0)\|} \right) = (-1, 0, 0).$$

Neste caso, a equação de rotação (2.4) toma a seguinte forma:

$$\begin{cases} x = 0x_1 + 0y_1 + -1z_1 \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + -\frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + 0z_1 \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + -\frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + 0z_1 \end{cases}.$$

Substituindo esses valores de x , y e z na equação inicial e reagrupando, obtemos

$$x_1^2 + 2y_1^2 + 6x_1 + 4y_1 - 3z_1 - 7 = 0.$$

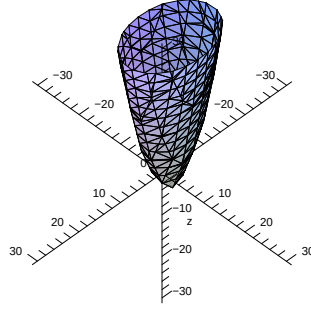


Figura 2.5: Quádrica $x_1^2 + 2y_1^2 + 6x_1 + 4y_1 - 3z_1 - 7 = 0$.

Completando-se quadrados obtemos

$$(x_1 + 3)^2 - 9 + 2(y_1 + 1)^2 - 2 - 3z_1 - 7 = 0,$$

ou equivalentemente,

$$(x_1 + 3)^2 + 2(y_1 + 1)^2 - 3(z_1 + 6) = 0.$$

Efetutando-se a translação

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 3 \\ y_2 = y_1 + 1 \\ z_2 = z_1 + 6 \end{cases},$$

obtemos

$$x_2^2 + 2y_2^2 - 3z_2 = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{x_2^2}{3} + \frac{y_2^2}{\frac{3}{2}} = z_2,$$

que é a equação de um Parabolóide elíptico.

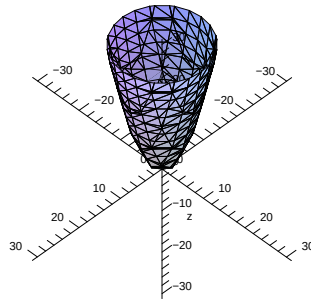


Figura 2.6: Quádrica $\frac{x_2^2}{3} + \frac{y_2^2}{\frac{3}{2}} = z_2$.

Portanto, a quádrica $\frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + yz + 3x - 5\sqrt{2}y + \sqrt{2}z - 7 = 0$, após uma rotação seguida de uma translação, é o Parabolóide elíptico dado pela figura 2.6.

Exemplo 2.3.3. Identifique a quádrlica $xy + xz + yz = 0$.

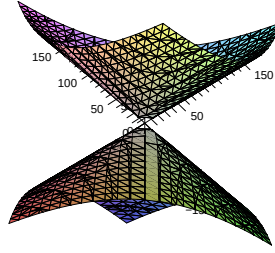


Figura 2.7: Quádrica $xy + xz + yz = 0$.

Como o discriminante da equação desta quádrlica é $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} = 1/4 \neq$

0, esta superfície quádrlica representa uma quádrlica central. Como a equação não possui termos do 1º grau, iniciamos efetuando uma rotação nos eixos coordenados, de modo a eliminar os termos mistos do 2º grau.

Para isso, calculamos as raízes da equação característica desta quádrlica, por meio da equação $\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 - \lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$, obtendo $\lambda_1 = \lambda_2 = -1/2$ e $\lambda_3 = 1$.

Sendo assim, encontramos os vetores ortonormais (pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ como direções principais correspondentes à raíz $\lambda_1 = \lambda_2 = -1/2$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ como direção principal correspondente à raíz $\lambda_3 = 1$.

Neste caso, a equação de rotação (2.4) é dada por:

$$\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{6}}{6}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}z_1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{6}}{6}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}z_1 \\ z = 0x_1 + \frac{\sqrt{6}}{3}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}z_1 \end{cases}.$$

Substituindo esses valores de x , y e z na equação $xy + xz + yz = 0$ e reagrupando, obtemos

$$\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}y_1^2 - z_1^2 = 0,$$

que é a equação de um Cone duplo.

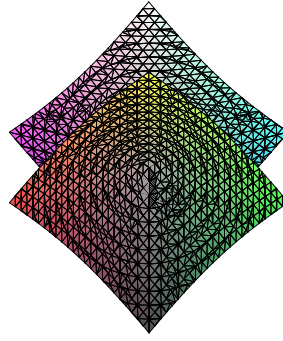


Figura 2.8: Quádrica $\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}y_1^2 - z_1^2 = 0$.

Portanto, a quádrica $xy + xz + yz = 0$, após uma rotação, é o Cone duplo dado pela figura 2.8.

Exemplo 2.3.4. Identifique a quádrica $xy + x + y = 0$.

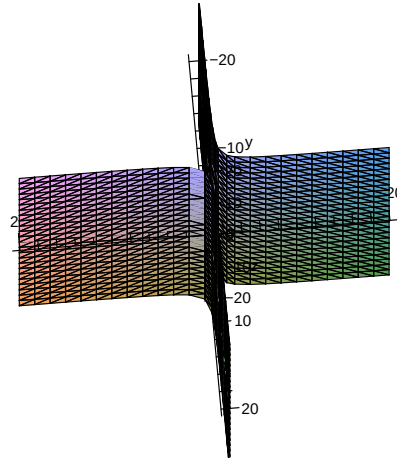


Figura 2.9: Quádrica $xy + x + y = 0$.

Como o discriminante da equação desta quádrica é $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, não é possível eliminarmos primeiro os termos do 1º grau por meio de uma translação. Neste caso devemos efetuar uma rotação nos eixos coordenados, de modo a eliminar os termos mistos do 2º grau.

Para isso, calculamos as raízes da equação característica desta quádrica, por meio da equação $\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$, obtendo $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_3 = 0$.

Sendo assim, encontramos o vetor $(1, -1, 0)$ como direção principal correspondente à raiz $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $(1, 1, 0)$ como direção principal correspondente à raiz $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ e o vetor $(0, 0, 1)$ como direção principal correspondente à raiz $\lambda_3 = 0$.

Sendo $\|(1, -1, 0)\| = \sqrt{2}$, $\|(1, 1, 0)\| = \sqrt{2}$ e $\|(0, 0, 1)\| = 1$, temos:

$$\vec{i}' = \left(\frac{1}{\|(1, -1, 0)\|}, \frac{-1}{\|(1, -1, 0)\|}, \frac{0}{\|(1, -1, 0)\|} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right);$$

$$\vec{j}' = \left(\frac{1}{\|(1, 1, 0)\|}, \frac{1}{\|(1, 1, 0)\|}, \frac{0}{\|(1, 1, 0)\|} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right);$$

$$\vec{k}' = \left(\frac{0}{\|(0, 0, 1)\|}, \frac{0}{\|(0, 0, 1)\|}, \frac{1}{\|(0, 0, 1)\|} \right) = (0, 0, 1);$$

Neste caso, a equação de rotação (2.4) toma a seguinte forma:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + 0z_1 \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + 0z_1 \\ z = 0x_1 + 0y_1 + 1z_1 \end{cases}.$$

Substituindo esses valores de x , y e z na equação inicial e reagrupando, obtemos

$$\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} + \sqrt{2}x_1 = 0.$$

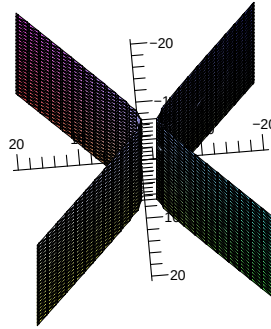


Figura 2.10: Quádrica $\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} + \sqrt{2}x_1 = 0$.

Completando-se quadrados obtemos

$$\frac{1}{2} \left[\left(x_1 + \sqrt{2} \right)^2 - 2 \right] - \frac{y_1^2}{2} = 0.$$

Efetuando-se a translação

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \sqrt{2} \\ y_2 = y_1 \\ z_2 = z_1 \end{cases},$$

obtemos

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{y_2^2}{2} = 1,$$

que é a equação de um Cilindro hiperbólico.

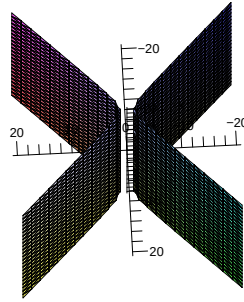


Figura 2.11: Quádrica $\frac{x_2^2}{2} - \frac{y_2^2}{2} = 1$.

Portanto, a quádrica $xy + x + y = 0$, após uma rotação seguida de uma translação, é o Cilindro hiperbólico dado pela figura 2.11.

Exemplo 2.3.5. Identifique a quádrica $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 6xz - 12yz = 0$.

Como o discriminante da equação desta quádrica é $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{vmatrix} = 0$,

devemos efetuar uma rotação nos eixos coordenados, de modo a eliminar os termos mistos do 2º grau.

Para isso, calculamos as raízes da equação característica desta quádrica, por meio da equação $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & -3 \\ 2 & 4 - \lambda & -6 \\ -3 & -6 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = 0$, obtendo $\lambda_1 = 14$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Sendo assim, encontramos os vetores ortonormais (pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt) $\left(\frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{2\sqrt{14}}{14}, \frac{-3\sqrt{14}}{14} \right)$ como direção principal correspondente à raiz $\lambda_1 = 14$ e $\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0 \right)$ e $\left(\frac{3\sqrt{70}}{70}, \frac{6\sqrt{70}}{70}, \frac{5\sqrt{70}}{70} \right)$ como direções principais correspondentes às raízes $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Neste caso, a equação de rotação (2.4) é dada por:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{14}}{14}x_1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}y_1 + \frac{3\sqrt{70}}{70}z_1 \\ y = \frac{2\sqrt{14}}{14}x_1 - \frac{\sqrt{5}}{5}y_1 + \frac{6\sqrt{70}}{70}z_1 \\ z = \frac{-3\sqrt{14}}{14}x_1 + 0y_1 + \frac{5\sqrt{70}}{70}z_1 \end{cases}.$$

Substituindo esses valores de x , y e z na equação $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 6xz - 12yz = 0$ e reagrupando, obtemos

$$14x_1^2 = 0,$$

ou equivalentemente,

$$x_1 = 0,$$

que é a equação de um Plano.

Portanto, a quádrlica $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 6xz - 12yz = 0$, após uma rotação, é o Plano $x_1 = 0$.

Exemplo 2.3.6. Identifique a quádrlica $xy + x + y + 1 = 0$.

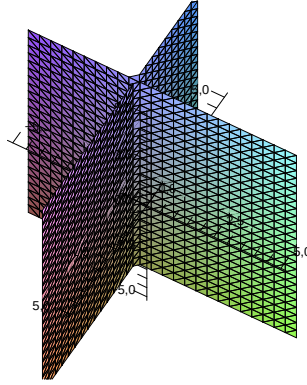


Figura 2.12: Quádrlica $xy + x + y + 1 = 0$.

Como o discriminante da equação desta quádrlica é $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, não é

possível eliminarmos primeiro os termos do 1º grau por meio de uma translação. Neste caso devemos efetuar uma rotação nos eixos coordenados, de modo a eliminar os termos mistos do 2º grau.

Para isso, calculamos as raízes da equação característica desta quádrlica, por meio da equação $\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$, obtendo $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_3 = 0$.

Sendo assim, encontramos o vetor $(1, -1, 0)$ como direção principal correspondente à raiz $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $(1, 1, 0)$ como direção principal correspondente à raiz $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ e o vetor $(0, 0, 1)$ como direção principal correspondente à raiz $\lambda_3 = 0$.

Sendo $\|(1, -1, 0)\| = \sqrt{2}$, $\|(1, 1, 0)\| = \sqrt{2}$ e $\|(0, 0, 1)\| = 1$, temos:

$$\vec{i}' = \left(\frac{1}{\|(1, -1, 0)\|}, \frac{-1}{\|(1, -1, 0)\|}, \frac{0}{\|(1, -1, 0)\|} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right);$$

$$\vec{j}' = \left(\frac{1}{\|(1, 1, 0)\|}, \frac{1}{\|(1, 1, 0)\|}, \frac{0}{\|(1, 1, 0)\|} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right);$$

$$\vec{k}' = \left(\frac{0}{\|(0, 0, 1)\|}, \frac{0}{\|(0, 0, 1)\|}, \frac{1}{\|(0, 0, 1)\|} \right) = (0, 0, 1).$$

Neste caso, a equação de rotação (2.4) toma a seguinte forma:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + 0z_1 \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + 0z_1 \\ z = 0x_1 + 0y_1 + 1z_1 \end{cases}.$$

Substituindo esses valores de x , y e z na equação inicial e reagrupando, obtemos

$$\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} + \sqrt{2}x_1 + 1 = 0.$$

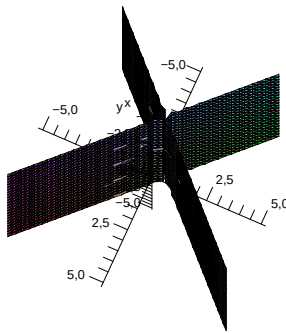


Figura 2.13: Quádrica $\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} + \sqrt{2}x_1 + 1 = 0$.

Completando-se quadrados obtemos

$$\frac{1}{2} \left[(x_1 + \sqrt{2})^2 - 2 \right] - \frac{y_1^2}{2} + 1 = 0.$$

Efetuando-se a translação

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \sqrt{2} \\ y_2 = y_1 \\ z_2 = z_1 \end{cases},$$

obtemos

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{y_2^2}{2} = 0,$$

que é a equação de dois planos que se intersectam.

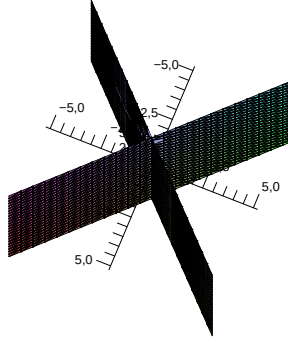


Figura 2.14: Quádrica $\frac{x_2^2}{2} - \frac{y_2^2}{2} = 0$.

Portanto, a quádrica $xy + x + y + 1 = 0$ representa dois planos que se intersectam, dada pela figura 2.14.

Exemplo 2.3.7. Identifique a quádrica $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz = 0$.

Como o discriminante da equação desta quádrica é $\delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 32 \neq 0$,

esta superfície quádrica representa uma quádrica central. Como a equação não possui termos do 1º grau, iniciamos efetuando uma rotação nos eixos coordenados, de modo a eliminar os termos mistos do 2º grau.

Para isso, calculamos as raízes da equação característica desta quádrica, por meio da equação $\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$, obtendo $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 8$.

Sendo assim, encontramos os vetores ortonormais (pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ como direções principais correspondentes às raízes $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ como direção principal correspondente à raiz $\lambda_3 = 8$.

Neste caso, a equação de rotação (2.4) é dada por:

$$\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{6}}{6}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}z_1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{6}}{6}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}z_1 \\ z = 0x_1 + \frac{\sqrt{6}}{3}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}z_1 \end{cases}.$$

Substituindo esses valores de x , y e z na equação inicial e reagrupando, obtemos

$$2x_1^2 + 2y_1^2 + 8z_1^2 = 0,$$

que é a equação de um ponto, a saber, $(0, 0, 0)$.

Portanto, $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz = 0$ representa um Ponto.

3 O estudo de superfícies Quádricas via Álgebra Linear

3.1 Preliminares

3.1.1 Definições

Definição 3.1.1. Seja K um conjunto com as operações $+$: $K \times K \rightarrow K$ e $\cdot$: $K \times K \rightarrow K$ definidas, respectivamente, por $+$: $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$ e $\cdot$: $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$, satisfazendo:

- 1) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \forall \alpha, \beta, \gamma \in K$;
- 2) $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \forall \alpha, \beta \in K$;
- 3) $\forall \alpha \in K, \exists 0 \in K \mid \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$;
- 4) $\forall \alpha \in K, \exists \alpha' \in K \mid \alpha + \alpha' = 0 = \alpha' + \alpha$;
- 5) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma), \forall \alpha, \beta, \gamma \in K$;
- 6) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha, \forall \alpha, \beta \in K$;
- 7) $\forall \alpha \in K, \exists 1 \in K - \{0\} \mid \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$;
- 8) $\forall \alpha \in K - \{0\}, \exists \beta \in K \mid \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = 1$;
- 9) $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$ e $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma, \forall \alpha, \beta, \gamma \in K$.

Nestas condições dizemos que $(K, +, \cdot)$ é um *corpo comutativo*.

Definição 3.1.2. Dizemos que um conjunto $V \neq \emptyset$ é um *espaço vetorial sobre o corpo comutativo K* se, e somente se,

I - Existe uma adição $+$: $V \times V \rightarrow V$ dada por $(u, v) \mapsto u + v$, com as seguintes propriedades:

- a) $u + v = v + u, \forall u, v \in V$;

- b) $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in V$;
- c) $\exists 0 \in V \mid u + 0 = u, \forall u \in V$;
- d) $\forall u \in V, \exists (-u) \in V \mid u + (-u) = 0$.

II - Existe uma multiplicação $\cdot : K \times V \rightarrow V$ dada por $(\alpha, u) \mapsto \alpha u$, com as seguintes propriedades:

- a) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, \forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in V$;
- b) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in V$;
- c) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \forall \alpha \in K, \forall u \in V$;
- d) $1u = u, \forall u \in V$.

Para as definições a seguir V denota um espaço vetorial sobre o corpo comutativo K .

Definição 3.1.3. Um *subespaço vetorial* de V é um subconjunto $\emptyset \neq W \subset V$, tal que:

- a) $0 \in W$;
- b) $\forall u, v \in W, u + v \in W$;
- c) $\forall \alpha \in K, \forall u \in W, \alpha u \in W$.

Definição 3.1.4. Sejam U e W subespaços vetoriais de V . Indicamos por $U + W$ e definimos como a *soma de U com W* o seguinte subespaço de V :

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Se $U \cap W = \{0\}$ dizemos que $U + W$ é a *soma direta de U e W* e denotamos por $U \oplus W$.

Definição 3.1.5. Seja $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um subconjunto de V . Dizemos que $x \in V$ é *combinação linear* de $x_1, x_2, \dots, x_n$ se existem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ tais que

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n.$$

Indicamos por $[S]$, o subespaço de V gerado por S , a saber:

$$[S] = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K\}.$$

Definição 3.1.6. Dizemos que V é *finitamente gerado* se existe $S \subset V$, S finito, de modo que $V = [S]$.

Definição 3.1.7. Dizemos que um conjunto $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V$ é *linearmente independente* (L.I.), ou que, os vetores $x_1, x_2, \dots, x_n$ são L.I. se, e somente se,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

Definição 3.1.8. Dizemos que um conjunto $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V$ é *linearmente dependente* (L.D.), ou que, os vetores $x_1, x_2, \dots, x_n$ são L.D. se, e somente se, S não for L.I., ou seja, for possível termos a igualdade

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0,$$

sem que os escalares $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ sejam todos iguais a zero.

Definição 3.1.9. Seja V finitamente gerado. Uma *base* de V é um subconjunto finito $B \subset V$ para o qual as seguintes condições se verificam:

- a) $[B] = V$;
- b) B é L.I..

Definição 3.1.10. Seja V finitamente gerado. Denomina-se *dimensão* de V ($\dim V$) o número de vetores de uma qualquer de suas bases. Diz-se também, neste caso, que V é um *espaço vetorial de dimensão finita*.

Definição 3.1.11. Sejam U e V espaços vetoriais sobre o corpo comutativo K . Uma aplicação $T : U \rightarrow V$ é chamada *transformação linear de U em V* se, e somente se,

- a) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2), \forall u_1, u_2 \in U$;
- b) $T(\alpha u) = \alpha T(u), \forall \alpha \in K, \forall u \in U$.

No caso em que $U = V$, uma transformação linear $T : U \rightarrow U$ é chamada de *operador linear*.

Definição 3.1.12. Sejam U e V espaços vetoriais sobre o corpo comutativo K . Definimos $L(U, V)$ o espaço vetorial sobre o corpo comutativo K de todas as transformações lineares de U em V e chamamos de *espaço das transformações lineares de U em V* . No caso em que $U = V$ denotamos por $L(U)$ e chamamos de *espaço dos operadores lineares sobre U* .

Definição 3.1.13. Sejam U e V espaços vetoriais sobre o corpo comutativo K e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Indica-se por $\text{Ker}(T)$ e denomina-se *núcleo* de T o seguinte subespaço de U : $\text{Ker}(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0\}$.

Definição 3.1.14. Seja K o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos e seja V um espaço vetorial sobre o corpo K . Um *produto interno* sobre V é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$ dada por $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ satisfazendo:

- a) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in V$;
- b) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle, \forall \alpha \in K, \forall u \in V$;
- c) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}, \forall u, v \in V$, onde a barra indica conjugação complexa;

d) $\langle u, u \rangle > 0$ se $u \neq 0$.

Deve-se observar que as condições a), b) e c) implicam que

e) $\langle u, \alpha v + w \rangle = \bar{\alpha} \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle, \forall \alpha \in K, \forall u, v, w \in V$.

Definição 3.1.15. Um *espaço com produto interno* é um espaço vetorial real ou complexo, munido de produto interno especificado sobre aquele espaço.

Definição 3.1.16. Uma função $\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *norma* se, e somente se, satisfaz

a) $\| u \| \geq 0, \forall u \in V$ e $\| u \| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

b) $\| \alpha u \| = |\alpha| \| u \|, \forall \alpha \in K, \forall u \in V$;

c) $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$.

Observamos que sendo V um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, a função

$$\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\| u \| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

define uma norma e para quaisquer vetores $u, v \in V$ vale $|\langle u, v \rangle| \leq \| u \| \| v \|$.

Definição 3.1.17. Sejam u e v vetores num espaço V com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dizemos que u é *ortogonal* a v se $\langle u, v \rangle = 0$; com isso implica que v é ortogonal a u e dizemos simplesmente que u e v são ortogonais. Se S é um conjunto de vetores de V , dizemos que S é um *conjunto ortogonal* se $S = \{0\}$ ou S é um conjunto com a propriedade de que quaisquer dois vetores distintos em S são ortogonais.

Definição 3.1.18. Se S é um conjunto de vetores de V , dizemos que S é um *conjunto ortonormal* se $S = \{u\}$ com $\| u \| = 1$ ou S é um conjunto ortogonal com a propriedade adicional de que $\| u \| = 1$ para todo $u \in S$.

Definição 3.1.19. Seja V um espaço de dimensão finita. Se o conjunto $B = \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ for uma base de V e simultaneamente um conjunto ortogonal, dizemos que B é uma *base ortogonal*.

Definição 3.1.20. Seja V um espaço de dimensão finita. Se o conjunto $B = \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ for uma base de V e simultaneamente um conjunto ortonormal, dizemos que B é uma *base ortonormal*.

Definição 3.1.21. Sejam V um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e U um subespaço vetorial de V . Denominamos *complemento ortogonal* de U , o subespaço vetorial de V definido por $U^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in U\}$.

Definição 3.1.22. Seja V um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Denominamos (caso exista) *adjunto de um operador linear* T sobre V , e indicamos por T^* , o operador linear $T^* : V \longrightarrow V$ tal que $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle, \forall u, v \in V$. Se $T = T^*$, dizemos que T é *autoadjunto*.

Definição 3.1.23. Seja W um subespaço de V e $T \in L(V, W)$. Dizemos que T é uma *transformação linear idempotente de V sobre W* se $T^2 = T$, onde $T^2 = T \circ T$.

Definição 3.1.24. Seja V um espaço vetorial sobre K e $T \in L(V)$. Se existir $v \in V$, com $v \neq 0$ e $\lambda \in K$, tal que $T(v) = \lambda v$, dizemos que λ é *autovalor de T* e v é *autovetor de T associado ao autovalor λ* .

Definição 3.1.25. Sejam W um subespaço de V e $T \in L(V)$. Dizemos que W é *invariante sob T* se $T(W) \subset W$, isto é, $\forall w \in W, T(w) \in W$.

Definição 3.1.26. Sejam $m \geq 1$ e $n \geq 1$ dois números inteiros. Denotamos $M_{m \times n}(K)$, o espaço vetorial sobre K das matrizes do tipo $m \times n$ com elementos em K . Se $m = n$, utilizamos a notação $M_n(K)$ para o espaço vetorial sobre K das matrizes quadradas de ordem n , com elementos em K .

Definição 3.1.27. Uma matriz quadrada A de ordem n é *invertível* se, e somente se, existe uma matriz B , também de ordem n , de modo que $AB = BA = I$.

Definição 3.1.28. Uma matriz quadrada A de ordem n é dita uma *matriz simétrica* se $A^t = A$.

Definição 3.1.29. Uma matriz quadrada A de ordem n é dita *ortogonal* se $A^t A = I$.

Definição 3.1.30. Seja A uma matriz quadrada sobre K . Um *autovalor de A em K* é um escalar $\lambda \in K$ tal que a matriz $A - \lambda I$ não é invertível.

Definição 3.1.31. O polinômio $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é chamado de *polinômio característico de A* . Observe então que λ é autovalor de T se, e somente se, $p_A(\lambda) = \det(T - \lambda I) = 0$.

Definição 3.1.32. Sejam V um espaço vetorial sobre K e $T \in L(V)$. Dizemos que T é *diagonalizável* se existe uma base de V formada por autovetores.

Princípio da Indução Finita

Muitas vezes, para provarmos que uma relação é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, empregamos o princípio da indução finita (P.I.F.), cujo enunciado é o seguinte:

Uma proposição $P(n)$, aplicável aos números naturais n , é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, quando:

- 1º) $P(n_0)$ é verdadeira, isto é, a propriedade é válida para $n = n_0$, e
- 2º) Se $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$ e $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ também é verdadeira.

3.1.2 Resultados

Nesta subseção veremos alguns resultados da Álgebra Linear necessários para o desenvolvimento da próxima seção.

Em toda esta subseção K denota o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ ou o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, $M_{m \times n}(K)$ denota o espaço das matrizes do tipo $m \times n$ sobre K , V denota um espaço vetorial sobre o corpo K munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $L(V)$ denota o espaço dos operadores lineares sobre V .

Teorema 3.1.1. *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo K munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja W um subespaço de V de dimensão finita n . Considere $P : V \rightarrow W$ a projeção ortogonal de V em W definida por $P(v) = \sum_{k=1}^n \langle v, v_k \rangle v_k, \forall v \in V$, onde $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal de W . Então P é uma transformação linear idempotente de V sobre W , $\text{Ker} P = W^\perp$ e $W \oplus W^\perp = V$.*

Demonstração. Sendo $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal de W temos que P é uma transformação linear pois se $u_1, u_2 \in V$ e $\alpha \in K$, então

$$\begin{aligned} P(\alpha u_1 + u_2) &= \sum_{k=1}^n \langle \alpha u_1 + u_2, v_k \rangle v_k \\ &= \sum_{k=1}^n (\langle \alpha u_1, v_k \rangle + \langle u_2, v_k \rangle) v_k \\ &= \sum_{k=1}^n (\alpha \langle u_1, v_k \rangle + \langle u_2, v_k \rangle) v_k \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha \langle u_1, v_k \rangle v_k + \sum_{k=1}^n \langle u_2, v_k \rangle v_k \\ &= \alpha \sum_{k=1}^n \langle u_1, v_k \rangle v_k + \sum_{k=1}^n \langle u_2, v_k \rangle v_k \\ &= \alpha P(u_1) + P(u_2). \end{aligned}$$

Além disso, se $v \in V$ então

$$P^2(v) = P(P(v)) = P\left(\sum_{k=1}^n \langle v, v_k \rangle v_k\right) = \sum_{k=1}^n \langle v, v_k \rangle P(v_k).$$

Mas

$$P(v_k) = \sum_{j=1}^n \langle v_k, v_j \rangle v_j = v_k \quad (I)$$

desde que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é base ortonormal de W .

Logo, $\forall v \in V$, $P^2(v) = \sum_{k=1}^n \langle v, v_k \rangle P(v_k) = \sum_{k=1}^n \langle v, v_k \rangle v_k = P(v)$ e assim, P é idempotente.

Para verificar que $\text{Ker} P = W^\perp$, basta mostrar que $\text{Ker} P \subset W^\perp$ e $\text{Ker} P \supset W^\perp$. De fato,

(a) $\text{Ker} P \subset W^\perp$ pois se $v \in \text{Ker} P$ então

$$P(v) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \langle v, v_j \rangle v_j = 0 \Rightarrow \langle v, v_j \rangle = 0, \forall j = 1, 2, \dots, n,$$

pois $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de W . Além disso, $\forall w \in W$, $w = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$ e portanto $\langle v, w \rangle = \left\langle v, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} \langle v, v_j \rangle = 0$. Logo $v \in W^\perp$.

- (b) $\text{Ker}P \supset W^\perp$ pois se $v \in W^\perp$, $\langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W$ e como $v_k \in W, \forall k = 1, \dots, n$, segue que $P(v) = \sum_{k=1}^n \langle v, v_k \rangle v_k = 0$. Logo $v \in \text{Ker}P$.

Portanto, de (a) e (b), temos que $\text{Ker}P = W^\perp$.

Mostremos que $\text{Im}P = W$, pois desta forma, para mostrar que $W \oplus W^\perp = V$, basta provar que $\text{Im}P \oplus \text{Ker}P = V$.

Para mostrar que $\text{Im}P = W$, basta provar que $\text{Im}P \supset W$ pois como $P : V \rightarrow W$, $\text{Im}P \subset W$.

De fato, se $w \in W$, temos que $w = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$.

Logo, $P(w) = \sum_{j=1}^n \alpha_j P(v_j) \stackrel{(I)}{=} \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = w$ e portanto $w \in \text{Im}P$.

Assim, $\text{Im}P = W$.

Para finalizar, provemos que $\text{Im}P \oplus \text{Ker}P = V$, ou seja, $\text{Im}P + \text{Ker}P = V$ e $\text{Im}P \cap \text{Ker}P = \{0\}$.

Para provar que $\text{Im}P + \text{Ker}P = V$, basta provar que $V \subset \text{Im}P + \text{Ker}P$. De fato, se $v \in V$, então $v = P(v) + (v - P(v))$. Mas $P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0$, ou seja, $v - P(v) \in \text{Ker}P$ e como $P(v) \in \text{Im}P$ segue que $v \in \text{Im}P + \text{Ker}P$. Assim $V \subset \text{Im}P + \text{Ker}P$ e portanto $\text{Im}P + \text{Ker}P = V$.

Para verificar que $\text{Im}P \cap \text{Ker}P = \{0\}$, basta mostrar que $\text{Im}P \cap \text{Ker}P \subset \{0\}$. De fato, $v \in \text{Im}P \cap \text{Ker}P \Rightarrow v \in \text{Im}P$ e $v \in \text{Ker}P \Rightarrow v = P(w)$, para algum $w \in V$ e $P(v) = 0$. Logo, $0 = P(v) = P^2(w) = P(w) = v$. Então, $\text{Im}P \cap \text{Ker}P \subset \{0\}$ e portanto $\text{Im}P \cap \text{Ker}P = \{0\}$. $\square$

Teorema 3.1.2. *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo K de dimensão finita $n \geq 1$ munido de um produto interno e $T \in L(V)$ autoadjunto. Então T possui um autovetor associado a um autovalor real.*

Demonstração. Sejam $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base ortonormal de V e $A = [T]_\beta$ a matriz de T em relação a base β . Como $T = T^*$ segue que $A = A^*$, onde $A^* = \overline{A}^t$.

Se $K = \mathbb{C}$, considere $W = M_{n \times 1}(\mathbb{C})$ com o produto interno $\langle X, Y \rangle = Y^* X$. Então $U : W \rightarrow W$ definido por $U(X) = AX$, define um operador linear autoadjunto sobre W , pois $\langle U(X), Y \rangle = \langle AX, Y \rangle = Y^* AX = Y^* A^* X = (AY)^* X = \langle X, AY \rangle = \langle X, U(Y) \rangle$ e portanto $U^* = U$.

Consideramos o polinômio característico de U , $P_U(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Como $P_U(\lambda)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$ sobre $\mathbb{C}$, então $P_U(\lambda)$ possui pelo menos uma raiz $c \in \mathbb{C}$.

Logo, $\det(A - cI) = 0$ e portanto c é um autovalor de U . Logo $\exists X \neq 0$ autovetor de U associado a c , isto é, $U(X) = AX = cX$.

Observamos de fato, que como U é autoadjunto, $c \in \mathbb{R}$. Com efeito, temos $\langle U(X), X \rangle = \langle X, U(X) \rangle \Leftrightarrow \langle cX, X \rangle = \langle X, cX \rangle \Leftrightarrow c \langle X, X \rangle = \bar{c} \langle X, X \rangle \Leftrightarrow (c - \bar{c}) \langle X, X \rangle = 0 \Leftrightarrow c - \bar{c} = 0 \Leftrightarrow c = \bar{c} \Leftrightarrow c \in \mathbb{R}$.

Se $K = \mathbb{R}$, podemos tomar $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ e como A e $A - cI$ tem elementos reais, existe $x = X^t \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $Tx = cx$, ou seja, T possui um autovetor associado ao autovalor real c . $\square$

Corolário 3.1.1. *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo K de dimensão finita $n \geq 1$ munido de um produto interno e $T \in L(V)$ autoadjunto. Então autovetores de T associados a autovalores reais distintos são ortogonais.*

Demonstração. Se v_1 e v_2 são autovetores de T associados, respectivamente, aos autovalores reais λ_1 e λ_2 , com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $Av_1 = \lambda_1 v_1$ e $Av_2 = \lambda_2 v_2$ onde $A = [T]_\beta$ com β uma base ortonormal fixada de V . Como por hipótese $T = T^*$, segue que $A = A^*$, pois $A^* = [T^*]_\beta$. Assim, $\langle Av_1, v_2 \rangle = \langle v_1, Av_2 \rangle$ pois $A^* = A$. Mas $\langle Av_1, v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$ e $\langle v_1, Av_2 \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$

Sendo assim, $\langle Av_1, v_2 \rangle = \langle v_1, Av_2 \rangle \Rightarrow \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$, pois $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Portanto, v_1 é ortogonal a v_2 . $\square$

Teorema 3.1.3. *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo K de dimensão $n \geq 1$ munido de um produto interno e $T \in L(V)$ autoadjunto. Se W é um subespaço de V invariante sob T , então $W^\perp$ é um subespaço de V invariante sob T .*

Demonstração. Queremos provar que $T(W^\perp) \subset W^\perp$.

De fato, se $x \in T(W^\perp)$ então $x = T(y)$ com $y \in W^\perp$. Assim, $\forall w \in W$, $\langle x, w \rangle = \langle T(y), w \rangle = \langle y, T(w) \rangle$, pois T é autoadjunto.

Como $T(W) \subset W$ segue que $T(w) \in W$. Mas $y \in W^\perp$, logo $\langle y, T(w) \rangle = 0$. Portanto $\langle x, w \rangle = 0, \forall w \in W$ e assim $x \in W^\perp$. $\square$

Teorema 3.1.4. *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo K de dimensão finita $n \geq 1$ munido de um produto interno e $T \in L(V)$ autoadjunto. Então existe β base ortonormal de V formada por autovetores de T associados a autovalores reais.*

Demonstração. Fazemos a prova por indução sobre a $\dim V = n \geq 1$.

Se $n = 1$, pelo Teorema 3.1.2, T possui autovetor $v \neq 0$ associado a um autovalor $c_1 \in \mathbb{R}$, isto é, $T(v) = c_1 v$. Logo, $\beta = \left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\}$ é uma base ortonormal de V e como $T\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \frac{1}{\|v\|} T(v) = \frac{1}{\|v\|} c_1 v = c_1 \frac{v}{\|v\|}$, segue que β é uma base ortonormal constituída de um autovetor de T associado ao autovalor $c_1 \in \mathbb{R}$.

Suponhamos que o teorema seja válido para espaços de dimensão $n - 1$.

Seja $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$ e $W = [v_1]$. Como v_1 é autovetor de T , temos que W é invariante por T , pois $x \in T(W) \Rightarrow x = T(w)$ para algum $w \in W \Rightarrow x = T(\alpha v_1) \Rightarrow x = \alpha T(v_1) \Rightarrow x = \alpha(c_1 v_1) \Rightarrow x = (\alpha c_1) v_1 \Rightarrow x \in [v_1] = W$.

Como T é autoadjunto, pelo Teorema 3.1.3, $T(W^\perp) \subset W^\perp$.

Temos que $W^\perp$ com o produto interno de V é um espaço com produto interno de dimensão $n - 1$, pois pelo Teorema 3.1.1, $W \oplus W^\perp = V$ e assim $\dim W + \dim W^\perp = \dim V = n$ o que implica $\dim W^\perp = n - 1$.

Seja $U : W^\perp \longrightarrow W^\perp$ dado por $U(w) = T(w)$. Então $\forall x, y \in W^\perp$, como T é autoadjunto, $\langle U(x), y \rangle = \langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle = \langle x, U(y) \rangle$ e portanto U é autoadjunto.

Pela hipótese de indução, existe $\gamma = \{v_2, v_3, \dots, v_n\}$ base ortonormal de $W^\perp$ formada de autovetores de U , isto é, $Uv_j = c_j v_j$, $j = 2, 3, \dots, n$, com $c_j \in \mathbb{R}$.

Logo, v_j , $j = 2, 3, \dots, n$ são autovetores de T , pois $T(v_j) = U(v_j) = c_j v_j$, com $c_j \in \mathbb{R}$.

Como $W \oplus W^\perp = V$, então $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V formada por autovetores de T , pois como $v_1 \in W$ e $v_j \in W^\perp$, $j = 2, 3, \dots, n$, temos que $\langle v_j, v_1 \rangle = 0$, $j = 2, 3, \dots, n$. $\square$

Corolário 3.1.2. *Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é simétrica, então existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonal (i.e. $P^t P = I$) tal que $\det P = 1$ e $P^t A P$ é uma matriz diagonal.*

Demonstração. Seja $V = \mathbb{R}^n$ com o produto interno canônico dado por $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e seja $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

onde A é simétrica. Portanto, T é autoadjunto, e assim, pelo Teorema 3.1.4, existe $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base ortonormal ordenada de V tal que

$$T(v_j) = c_j v_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

e $c_j \in \mathbb{R}$.

Se $D = [T]_\beta$, então D é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são os c_j , $j = 1, 2, \dots, n$, mais explicitamente,

$$D = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}.$$

Seja P a matriz cujas colunas são $v_1, v_2, \dots, v_n$ e escrevamos

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}.$$

Então P^t é a matriz cujas linhas são $v_1, v_2, \dots, v_n$, e temos

$$P^t = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 P^t P &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \langle v_n, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix} \\
 &= [\langle v_i, v_j \rangle]_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} \\
 &= [\delta_{ij}]_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}},
 \end{aligned}$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Assim,

$$P^t P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Desta forma, $P \in M_n(\mathbb{R})$ é ortogonal e além disso podemos tomar P tal que $\det P = 1$, pois, $P^t P = I \Rightarrow \det(P^t P) = \det(I) \Rightarrow \det P^t \cdot \det P = \det I \Rightarrow \det P^2 = I \Rightarrow \det P = 1$ ou $\det P = -1$. Se $\det P = -1$, basta tomarmos a base $\bar{\beta} = \{v_2, v_1, v_3, \dots, v_n\}$ que obtemos $\det P = 1$.

Também,

$$P^t A P = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A v_1 & A v_2 & \cdots & A v_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{3.1,3.2}{=} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 v_1 & c_2 v_2 & \cdots & c_n v_n \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} c_1 \langle v_1, v_1 \rangle & c_2 \langle v_1, v_2 \rangle & \cdots & c_n \langle v_1, v_n \rangle \\ c_1 \langle v_2, v_1 \rangle & c_2 \langle v_2, v_2 \rangle & \cdots & c_n \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 \langle v_n, v_1 \rangle & c_2 \langle v_n, v_2 \rangle & \cdots & c_n \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} c_{1.1} & c_{2.0} & \cdots & c_{n.0} \\ c_{1.0} & c_{2.1} & \cdots & c_{n.0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1.0} & c_{2.0} & \cdots & c_{n.1} \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \\
& = D.
\end{aligned}$$

Portanto, $P^t A P$ é uma matriz diagonal. $\square$

3.2 O Teorema de classificação das quádricas

Nesta seção estudamos as superfícies que têm equações cartesianas dadas por expressões quadráticas em x , y e z . Temos as seguintes definições:

Definição 3.2.1. Uma *quádrica* é um subconjunto de pontos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ definido por uma equação da forma:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0 \quad (3.3)$$

onde a, b, c, d, e, f, g, h e i são números reais não todos nulos.

Definição 3.2.2. Por um *movimento rígido* de $\mathbb{R}^3$ entendemos uma aplicação $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $M = T \circ R$, onde R é uma rotação em torno da origem e T é uma translação.

Com base nestas definições e nos preliminares da seção anterior, provaremos o seguinte

Teorema 3.2.1. *A equação geral de uma quádrica, por meio de um movimento rígido em $\mathbb{R}^3$, pode ser transformada em uma das equações cartesianas seguintes (em cada caso, k, l e m são constantes não nulas):*

(1) *Elipsóide:* $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} + \frac{z^2}{m^2} = 1;$

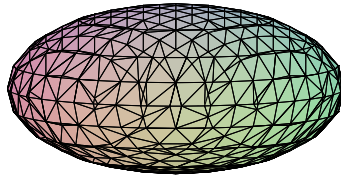


Figura 3.1: Elipsóide.

(2) *Hiperbolóide de uma folha:* $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} - \frac{z^2}{m^2} = 1;$

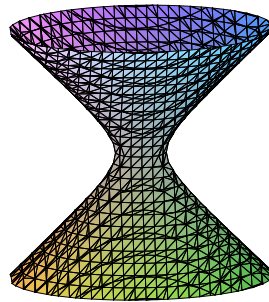


Figura 3.2: Hiperbolóide de uma folha.

(3) *Hiperbolóide de duas folhas:* $-\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{l^2} + \frac{z^2}{m^2} = 1;$

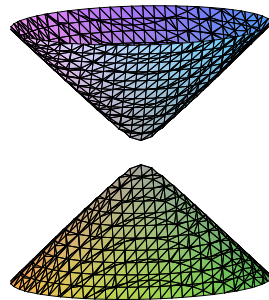


Figura 3.3: Hiperbolóide de duas folhas.

(4) *Parabolóide Elíptico:* $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = z;$

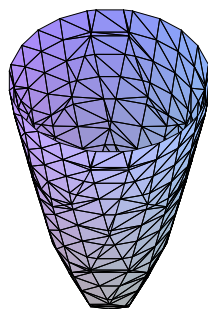


Figura 3.4: Parabolóide elíptico.

(5) *Parabolóide Hiperbólico*: $\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{l^2} = z$;

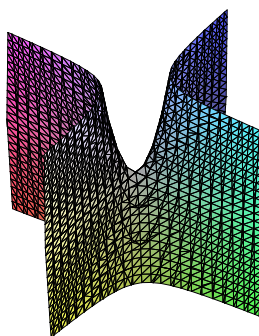


Figura 3.5: Parabolóide hiperbólico.

(6) *Cone duplo*: $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} - \frac{z^2}{m^2} = 0$;

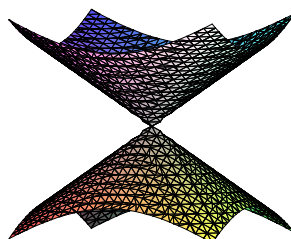


Figura 3.6: Cone duplo.

(7) *Cilindro elíptico*: $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$;

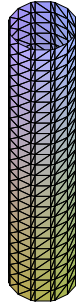


Figura 3.7: Cilindro elíptico.

(8) *Cilindro hiperbólico*: $\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{l^2} = 1$;

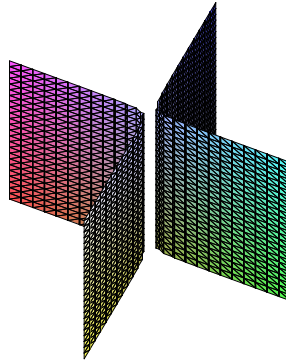


Figura 3.8: Cilindro hiperbólico.

(9) *Cilindro parabólico*: $\frac{x^2}{k^2} = y$;

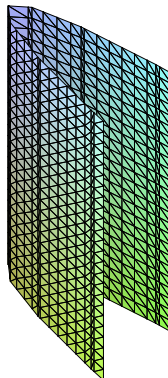


Figura 3.9: Cilindro parabólico.

(10) *Plano*: $x = 0$;

(11) *Dois planos paralelos:* $x^2 = k^2$;

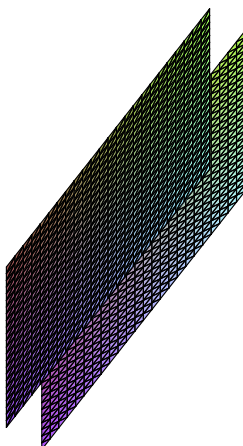


Figura 3.10: Dois planos paralelos.

(12) *Dois planos que se interceptam:* $\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{l^2} = 0$;

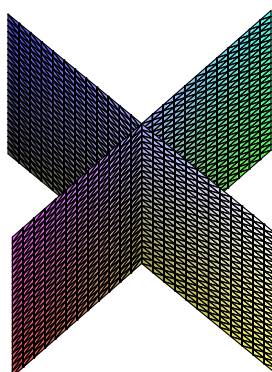


Figura 3.11: Dois planos que se interceptam.

(13) *Reta:* $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 0$;

(14) *Ponto:* $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} + \frac{z^2}{m^2} = 0$;

(15) *Vazio:* $x^2 + k^2 = 0$.

Demonstração. Podemos escrever a quádrica (3.3) matricialmente, na forma

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [j] = 0,$$

com A uma matriz simétrica de ordem 3.

De fato, para determinar a matriz A basta fazer

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [j] =$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j.$$

Portanto,

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + gx + hy + iz + j =$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j.$$

Logo, $a_{11} = a, a_{22} = b, a_{33} = c, a_{12} = \frac{d}{2}, a_{13} = \frac{e}{2}$ e $a_{23} = \frac{f}{2}$, ou seja:

$$A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}.$$

Assim, a quádrlica (3.3) pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [j] = 0 \quad (3.4)$$

Porém, como vimos pelo Corolário 3.1.2, como A é simétrica, existe uma matriz ortogonal P tal que

$$P^t P = I \quad (3.5)$$

$$\det P = 1 \quad (3.6)$$

e

$$A' = P^t A P \quad (3.7)$$

é uma matriz diagonal, de modo que os elementos na diagonal de A' são os autovalores de A e as colunas de P são os autovetores de A . Observe que os vetores de P são ortogonais e assim para ortonormalizá-los basta dividir cada vetor pela sua norma.

Definamos:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} P \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} P \quad (3.9)$$

Da equação (3.7) segue que $(P^{-1})^t A' P^{-1} = A$. Como $P^{-1} = P^t$ então $(P^t)^t A' P^t = A$ e portanto $PA'P^t = A$.

Substituindo $A = PA'P^t$ na equação (3.4) e utilizando a equação (3.5), temos:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} PA'P^t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} PP^t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [j] = 0.$$

Das equações (3.8) e (3.9) seguem que

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} A' \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + [j] = 0, \text{ onde } A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

com λ_1, λ_2 e λ_3 autovalores da matriz $A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}$.

Desta maneira, a expressão inicial da quádrica fica reduzida à forma

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + g_1 x_1 + h_1 y_1 + i_1 z_1 + j = 0 \quad (3.10)$$

Neste caso, se $\lambda_1 \neq 0$, completando-se quadrados obtemos

$$\lambda_1 x_1^2 + g_1 x_1 = \lambda_1 \left[\left(x_1 + \frac{g_1}{2\lambda_1} \right)^2 - \left(\frac{g_1}{2\lambda_1} \right)^2 \right] = \lambda_1 \left(x_1 + \frac{g_1}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{g_1^2}{4\lambda_1}.$$

Fazendo $x_2 = x_1 + \frac{g_1}{2\lambda_1}$, temos que $\lambda_1 x_1^2 + g_1 x_1 = \lambda_1 x_2^2 - \frac{g_1^2}{4\lambda_1}$.

Substituindo esta expressão na equação (3.10) obtemos

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + h_1 y_1 + i_1 z_1 + j_1 = 0,$$

com $j_1 = j - \frac{g_1^2}{4\lambda_1}$.

Isso mostra que quando $\lambda_1 \neq 0$, podemos supor $g_1 = 0$ na equação (3.10), isto é, eliminamos a variável x_1 . O mesmo processo mostra que podemos, na equação 3.10, supor $h_1 = 0$, se $\lambda_2 \neq 0$, fazendo $y_2 = y_1 + \frac{h_1}{2\lambda_2}$ ou ainda supor $i_1 = 0$, se $\lambda_3 \neq 0$, fazendo $z_2 = z_1 + \frac{i_1}{2\lambda_3}$.

Temos assim que analisar apenas quatro casos:

1º Caso: Quando todos os autovalores de A são diferentes de zero, isto é, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$.

Neste caso, na equação (3.10), fazendo $x_2 = x_1 + \frac{g_1}{2\lambda_1}$, $y_2 = y_1 + \frac{h_1}{2\lambda_2}$ e $z_2 = z_1 + \frac{i_1}{2\lambda_3}$, obtemos a expressão

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 + j_1 = 0,$$

$$\text{com } j_1 = j - \frac{g_1^2}{4\lambda_1} - \frac{h_1^2}{4\lambda_2} - \frac{i_1^2}{4\lambda_3}.$$

De acordo com os sinais de λ_1 , λ_2 e λ_3 temos:

Se $j_1 = 0$, obtemos as equações (6) ou (14). A equação (6) é obtida quando dois dos autovalores de A têm o mesmo sinal e o outro tem sinal contrário e a equação (14) é obtida quando todos os autovalores de A têm o mesmo sinal.

Se $j_1 \neq 0$, obtemos as equações (1), (2) ou (3). A equação (1) é obtida quando todos os autovalores têm sinal contrário ao de j_1 , a equação (2) é obtida quando apenas um autovalor tem o mesmo sinal de j_1 e a equação (3) é obtida quando apenas um autovalor tem sinal contrário ao de j_1 .

2º Caso: Quando apenas um dos autovalores de A é igual a zero.

Suponha que $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_3 = 0$.

Neste caso, na equação (3.10), fazendo $x_2 = x_1 + \frac{g_1}{2\lambda_1}$, $y_2 = y_1 + \frac{h_1}{2\lambda_2}$ e $z_2 = z_1$ obtemos a expressão

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + i_1 z_2 + j_1 = 0,$$

$$\text{com } j_1 = j - \frac{g_1^2}{4\lambda_1} - \frac{h_1^2}{4\lambda_2}.$$

Assim:

Se $i_1 = 0$, obtemos $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + j_1 = 0$.

Sendo assim, de acordo com os sinais de λ_1 e λ_2 temos que:

Se $j_1 = 0$, obtemos as equações (12) ou (13). A equação (12) é obtida quando $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ e a equação (13) é obtida quando $\lambda_1 \lambda_2 > 0$.

Se $j_1 \neq 0$, dividindo a equação $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + j_1 = 0$ por $-j_1$, obtemos as equações (7) ou (8). A equação (7) é obtida quando λ_1 e λ_2 têm sinais contrários ao de j_1 e a equação (8) é obtida quando λ_1 e λ_2 têm sinais opostos (independentemente do sinal de j_1).

Se $i_1 \neq 0$, observamos que

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + i_1 z_2 + j_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + i_1 \left(z_2 + \frac{j_1}{i_1} \right) = 0.$$

Fazendo $x_3 = x_2$, $y_3 = y_2$ e $z_3 = z_2 + \frac{j_1}{i_1}$, obtemos

$$\lambda_1 x_3^2 + \lambda_2 y_3^2 + i_1 z_3 = 0 \tag{3.11}$$

Como $i_1 \neq 0$, podemos dividir a equação (3.11) por i_1 e supor que o coeficiente i_1 de z_3 seja igual a 1, obtendo assim uma equação do tipo: $\lambda_1' x_3^2 + \lambda_2' y_3^2 + z_3 = 0$ onde $\lambda_j' = \frac{\lambda_j}{i_1}$, para $j = 1, 2$.

Neste caso, se $\lambda'_1, \lambda'_2 < 0$, obtemos a equação (4); se $\lambda'_1, \lambda'_2 > 0$, efetuando-se uma rotação de 180° em torno do eixo Ox_3 , ou seja, fazendo

$$\begin{bmatrix} x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

também obtemos a equação (4) e se $\lambda'_1 \lambda'_2 < 0$ obtemos a equação (5) (observamos que para o caso onde $\lambda'_1 > 0$ e $\lambda'_2 < 0$, basta efetuarmos uma rotação de 180° em torno do eixo Ox_3).

3º Caso: Quando apenas um dos autovalores de A é diferente de zero.

Suponha $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Neste caso, na equação (3.10), fazendo $x_2 = x_1 + \frac{g_1}{2\lambda_1}$, $y_2 = y_1$ e $z_2 = z_1$ obtemos a expressão

$$\lambda_1 x_2^2 + h_1 y_2 + i_1 z_2 + j_1 = 0 \quad (3.12)$$

com $j_1 = j - \frac{g_1^2}{4\lambda_1}$.

Assim:

Se $h_1 = i_1 = 0$, temos $\lambda_1 x_2^2 + j_1 = 0$.

Portanto, se $j_1 = 0$, obtemos a equação (10) e se $j_1 \neq 0$, obtemos as equações (11) ou (15). A equação (11) é obtida quando $\lambda_1 j_1 < 0$ e a equação (15) é obtida quando $\lambda_1 j_1 > 0$.

Se apenas um deles (h_1 ou i_1) é diferente de zero, digamos que $h_1 \neq 0$ e $i_1 = 0$, então temos que

$$\lambda_1 x_2^2 + h_1 y_2 + j_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 x_2^2 + h_1 \left(y_2 + \frac{j_1}{h_1} \right) = 0.$$

Fazendo $x_3 = x_2$, $y_3 = y_2 + \frac{j_1}{h_1}$ e $z_3 = z_2$, obtemos

$$\lambda_1 x_3^2 + h_1 y_3 = 0 \quad (3.13)$$

Como $h_1 \neq 0$, podemos dividir a equação (3.13) por h_1 e supor que o coeficiente h_1 de y_3 seja igual a 1, obtendo assim uma equação do tipo: $\tilde{\lambda}_1 x_3^2 + y_3 = 0$ onde $\tilde{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1}{h_1}$

Neste caso, se $\tilde{\lambda}_1 < 0$, obtemos a equação (9). Se $\tilde{\lambda}_1 > 0$, fazendo uma rotação de 180° em torno do eixo Oz_3 , ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

também obtemos a equação (9).

Se $h_1, i_1 \neq 0$, consideramos a equação (3.12), a saber

$$\lambda_1 x_2^2 + h_1 y_2 + i_1 z_2 + j_1 = 0.$$

Efetuada-se uma rotação do plano Oy_2z_2 de modo que o eixo Oy_2 fique paralelo ao vetor (h_1, i_1) , ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} & -\frac{i_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} \\ 0 & \frac{i_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} & \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} \end{bmatrix},$$

obtemos

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ y_2 = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} y_3 - \frac{i_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} z_3 \\ z_2 = \frac{i_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} y_3 + \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} z_3 \end{cases} \quad (3.14)$$

Substituindo x_2, y_2 e z_2 em (3.12) obtemos que

$$\lambda_1 x_3^2 + h_1 \left(\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} y_3 - \frac{i_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} z_3 \right) + i_1 \left(\frac{i_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} y_3 + \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} z_3 \right) + j_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 x_3^2 + \frac{(h_1^2 + i_1^2)}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} y_3 + j_1 = 0$$

e assim reduzimos ao caso onde o coeficiente de y_3 , a saber, $\frac{(h_1^2 + i_1^2)}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} \neq 0$ e o coeficiente de z_3 é zero, que conforme já estudamos se reduz à equação (9).

4º Caso: Quando todos os autovalores de A são iguais a zero, ou seja, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 0$.

Neste caso, a equação (3.10) fica reduzida à forma $g_1 x_1 + h_1 y_1 + i_1 z_1 + j = 0$, com g_1, h_1 e i_1 não são simultaneamente nulos e portanto é a equação de um plano, que após um movimento rígido se reduz à equação (10). De fato:

a) Se apenas um dos coeficientes g_1, h_1 ou i_1 é diferente de zero. Supondo $g_1 \neq 0, h_1 = 0$ e $i_1 = 0$, temos:

$$g_1 x_1 + j = 0 \Rightarrow g_1 \left(x_1 + \frac{j}{g_1} \right) = 0.$$

Fazendo $x_2 = x_1 + \frac{j}{g_1}$, obtemos $g_1 x_2 = 0$ ou, equivalentemente, $x_2 = 0$ que é a equação (10).

b) Se apenas um dos coeficientes g_1 , h_1 ou i_1 é igual de zero. Supondo $g_1 = 0$, $h_1 \neq 0$ e $i_1 \neq 0$, temos:

$$h_1 y_1 + i_1 z_1 + j = 0 \Rightarrow h_1 y_1 + i_1 \left(z_1 + \frac{j}{i_1} \right) = 0.$$

Fazendo $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ e $z_2 = z_1 + \frac{j}{i_1}$, obtemos $h_1 y_2 + i_1 z_2 = 0$. Neste caso, efetuando-se a rotação (3.14) do plano $Oy_2 z_2$ de modo que o eixo Oy_2 fique paralelo ao vetor (h_1, i_1) , ou seja,

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ y_2 = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} y_3 - \frac{i_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} z_3 \\ z_2 = \frac{i_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} y_3 + \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} z_3 \end{cases}.$$

Obtemos $\left(\frac{h_1^2 + i_1^2}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} \right) y_3 = 0$, ou equivalentemente, $y_3 = 0$, que é a equação (10).

c) Se todos os coeficientes g_1 , h_1 e i_1 são diferentes de zero, ou seja, $g_1 \neq 0$, $h_1 \neq 0$ e $i_1 \neq 0$, temos:

$$g_1 x_1 + h_1 y_1 + i_1 z_1 + j = 0 \Rightarrow g_1 x_1 + h_1 y_1 + i_1 \left(z_1 + \frac{j}{i_1} \right) = 0$$

Fazendo $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ e $z_2 = z_1 + \frac{j}{i_1}$, obtemos $g_1 x_2 + h_1 y_2 + i_1 z_2 = 0$. Assim, efetuando-se a rotação (3.14) do plano $Oy_2 z_2$ de modo que o eixo Oy_2 fique paralelo ao vetor (h_1, i_1) , ou seja,

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ y_2 = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} y_3 - \frac{i_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} z_3 \\ z_2 = \frac{i_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} y_3 + \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} z_3 \end{cases},$$

obtemos $g_1 x_3 + \left(\frac{h_1^2 + i_1^2}{\sqrt{h_1^2 + i_1^2}} \right) y_3 = 0$ que é uma equação como a do item b), que como já vimos, pode ser reduzida à equação (10). $\square$

A tabela da próxima página apresenta os passos que simplificam a equação geral de uma quádrica:

Redução da equação geral de uma quádrica via Álgebra Linear				
1°	Dada a equação $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$, considere $A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}$.			
2°	Resolva a equação $\det(A - \lambda I) = 0$ e encontre λ_1, λ_2 e λ_3 , os autovalores da matriz A .			
3°	Determine os respectivos autovetores associados aos autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 de A .			
4°	Considere as matrizes A' e P , onde A' uma matriz diagonal, cujos elementos de sua diagonal são os autovalores de A e P é a matriz cujas colunas são os respectivos autovetores de A .			
5°	Defina $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} P$ e $\begin{bmatrix} g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} P$ para reduzir a expressão inicial da quádrica à forma $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + g_1 x_1 + h_1 y_1 + i_1 z_1 + j = 0$ e siga os passos do caso em que a equação se enquadra:			
	1° Caso: Quando todos os autovalores de A são diferentes de zero, isto é, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$.	2° Caso: Quando apenas um dos autovalores de A é igual a zero, digamos $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_3 = 0$.	3° Caso: Quando apenas um dos autovalores de A é diferente de zero, digamos $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.	4° Caso: Quando todos os autovalores de A são iguais a zero, ou seja, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
6°	Efetue a translação: $\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{g_1}{2\lambda_1} \\ y_2 = y_1 + \frac{h_1}{2\lambda_2} \\ z_2 = z_1 + \frac{i_1}{2\lambda_3} \end{cases}$	Efetue a translação: $\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{g_1}{2\lambda_1} \\ y_2 = y_1 + \frac{h_1}{2\lambda_2} \\ z_2 = z_1 \end{cases}$	Efetue a translação: $\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{g_1}{2\lambda_1} \\ y_2 = y_1 \\ z_2 = z_1 \end{cases}$	Temos um plano. Efetue translação e se necessário rotação análogas às do 3° caso no 7° passo para obter (10).*
7°	Reagrupe a equação e obtenha (1), (2), (3), (6) ou (14).*	Se na equação obtida $i_1 = 0$, obtenha (7), (8), (12) ou (13).* Se $i_1 \neq 0$, efetue: $\begin{cases} x_3 = x_2 \\ y_3 = y_2 \\ z_3 = z_2 + \frac{j_1}{i_1} \end{cases}$ e obtenha (4) ou (5)* (se necessário, efetue a rotação $x_4 = x_3$ $y_4 = -y_3$ e $z_4 = -z_3$).	Se na equação obtida $h_1 = i_1 = 0$, obtenha (10), (11) ou (15).* Se h_1 ou i_1 é diferente de zero, efetue translação (se necessário também rotação) como as do 2° caso no 7° passo para obter (9).* Se $h_1, i_1 \neq 0$, faça a rotação (3.14) para reduzir a equação ao caso em que h_1 ou i_1 é diferente de zero, obtendo (9).*	
* As enumerações de (1) até (15) são as mesmas do Teorema de Classificação das Quádricas.				

Tabela 3.1: Redução da equação geral de uma quádrica via Álgebra Linear

3.3 Aplicações

Para finalizar esse capítulo, faremos nesta seção algumas aplicações do Teorema de Classificação das Quádricas, transformando uma quádrica de $\mathbb{R}^3$, em uma outra, cuja equação é uma das 15 descritas no Teorema 3.2.1 e também observamos que as figuras inseridas nos exemplos foram feitas utilizando-se o software Maple.

Exemplo 3.3.1. Identifique a quádrica $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$.

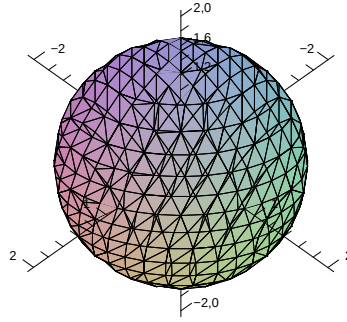


Figura 3.12: Quádrica $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$.

Temos que $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Para diagonalizar a matriz A , resolvemos a equação $\det(A - \lambda I) = 0$, encontrando $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 8$ os autovalores da matriz A , $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ os autovetores unitários de A associados aos autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ o autovetor unitário de A associado ao autovalor $\lambda_3 = 8$. Sendo assim, temos que

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad e \quad P = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

Definamos:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} P$$

e

$$\begin{bmatrix} g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desta maneira, a expressão inicial da quádrica fica reduzida à forma

$$2x_1^2 + 2y_1^2 + 8z_1^2 - 3 = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{x_1^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} + \frac{y_1^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} + \frac{z_1^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2} = 1,$$

que é a equação de um Elipsóide.

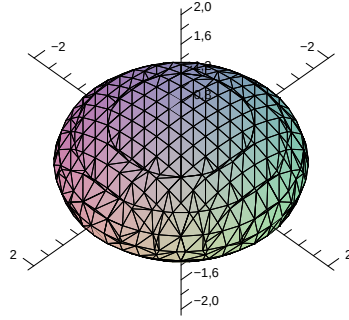


Figura 3.13: Quádrica $\frac{x_1^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} + \frac{y_1^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} + \frac{z_1^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2} = 1$.

Portanto, a quádrica $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$, após uma rotação, é o Elipsóide dado pela figura 3.13.

Exemplo 3.3.2. Identifique a quádrica $3z^2 + 2xy + x + 1 = 0$.

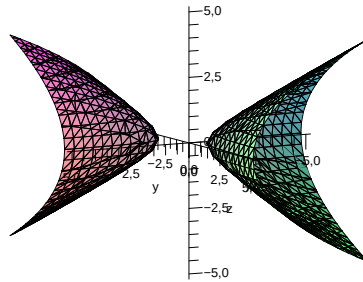


Figura 3.14: Quádrica $3z^2 + 2xy + x + 1 = 0$.

Temos que $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Para diagonalizar a matriz A , resolvemos a equação $\det(A - \lambda I) = 0$, encontrando $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -1$, os autovalores da matriz A e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ o autovetor unitário de A associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$, $(0, 0, 1)$ o autovetor unitário de A associado

ao autovalor $\lambda_2 = 3$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ o autovetor unitário de A associado ao autovalor $\lambda_3 = -1$. Sendo assim, temos que

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definamos:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} P$$

e

$$\begin{bmatrix} g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Desta maneira, a expressão inicial da quádrlica fica reduzida à forma

$$x_1^2 + 3y_1^2 - z_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}z_1 + 1 = 0.$$

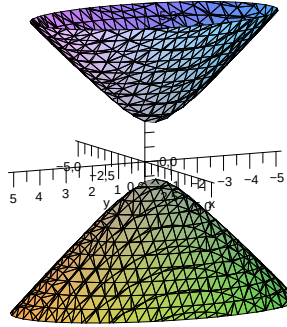


Figura 3.15: Quádrlica $x_1^2 + 3y_1^2 - z_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}z_1 + 1 = 0$.

Neste caso, completando-se quadrados obtemos

$$\left(x_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} + 3y_1^2 - \left[\left(z_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}\right] + 1 = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\left(x_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 3y_1^2 - \left(z_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = -1.$$

Fazendo $x_2 = x_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}$, $y_2 = y_1$ e $z_2 = z_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}$ obtemos

$$x_2^2 + 3y_2^2 - z_2^2 = -1,$$

ou ainda,

$$-x_2^2 - 3y_2^2 + z_2^2 = 1,$$

que é a equação de um Hiperbolóide de duas folhas.

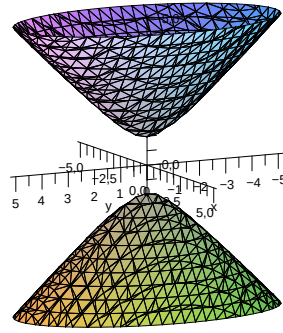


Figura 3.16: Quádrica $-x_2^2 - 3y_2^2 + z_2^2 = 1$.

Portanto, a quádrica $3z^2 + 2xy + x + 1 = 0$, após uma rotação seguida de uma translação, é o Hiperbolóide de duas folhas dado pela figura 3.16.

Exemplo 3.3.3. Identifique a quádrica $2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$.

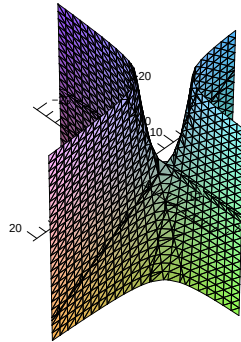


Figura 3.17: Quádrica $2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$.

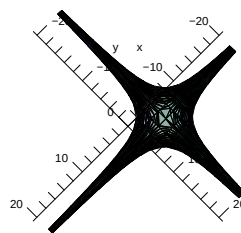


Figura 3.18: Quádrica $2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$ vista de cima.

Temos que $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Para diagonalizar a matriz A , resolvemos a equação $\det(A - \lambda I) = 0$, encontrando $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 0$, os autovalores da matriz A e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ o autovetor

unitário de A associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ o autovetor unitário de A associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$ e $(0, 0, 1)$ o autovetor unitário de A associado ao autovalor $\lambda_3 = 0$. Sendo assim, temos que

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definamos:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} P$$

e

$$\begin{bmatrix} g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} -6 & 10 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} -8\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Desta maneira, a expressão inicial da quádrlica fica reduzida à forma

$$-x_1^2 + y_1^2 - 8\sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}y_1 + z_1 - 31 = 0.$$

Neste caso, completando-se quadrados obtemos

$$-\left[(x_1 + 4\sqrt{2})^2 - 32\right] + (y_1 + \sqrt{2})^2 - 2 + z_1 - 31 = 0,$$

ou equivalentemente,

$$-\left(x_1 + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y_1 + \sqrt{2}\right)^2 + (z_1 - 1) = 0.$$

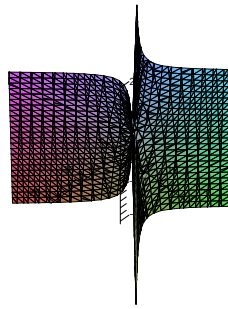


Figura 3.19: Quádrlica $-\left(x_1 + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y_1 + \sqrt{2}\right)^2 + (z_1 - 1) = 0$.

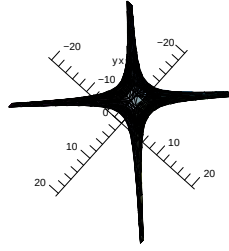


Figura 3.20: Quádrica $-(x_1 + 4\sqrt{2})^2 + (y_1 + \sqrt{2})^2 + (z_1 - 1) = 0$ vista de cima.

Fazendo $x_2 = x_1 + 4\sqrt{2}$, $y_2 = y_1 + \sqrt{2}$ e $z_2 = z_1 - 1$ obtemos

$$-x_2^2 + y_2^2 + z_2 = 0,$$

ou ainda,

$$x_2^2 - y_2^2 = z_2,$$

que é a equação de um Parabolóide hiperbólico.

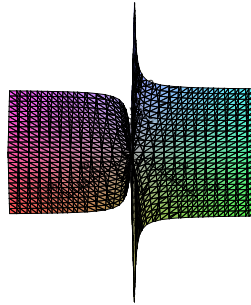


Figura 3.21: Quádrica $x_2^2 - y_2^2 = z_2$.

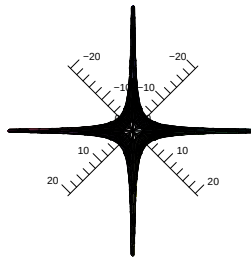


Figura 3.22: Quádrica $x_2^2 - y_2^2 = z_2$ vista de cima.

Portanto, a quádrica $2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$, após uma rotação seguida de uma translação, é o Parabolóide hiperbólico dado pela figura 3.21.

Exemplo 3.3.4. Identifique a quádrlica $x^2 + 4xy + 4y^2 + 9z^2 - 6xz - 12yz + x + 3y - z = 0$.

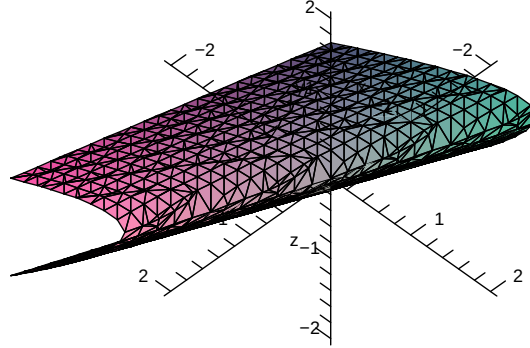


Figura 3.23: Quádrlica $x^2 + 4xy + 4y^2 + 9z^2 - 6xz - 12yz + x + 3y - z = 0$.

Temos que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$.

Para diagonalizar a matriz A , resolvemos a equação $\det(A - \lambda I) = 0$, encontrando $\lambda_1 = 14$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ os autovalores da matriz A , $\left(\frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{2\sqrt{14}}{14}, \frac{-3\sqrt{14}}{14}\right)$ o autovetor unitário de A associado ao autovalor $\lambda_1 = 14$ e $\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)$ e $\left(\frac{3\sqrt{70}}{70}, \frac{6\sqrt{70}}{70}, \frac{5\sqrt{70}}{70}\right)$ os autovetores unitários de A associado aos autovalores $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Sendo assim, temos que

$$A' = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{14}}{14} & \frac{-2\sqrt{5}}{5} & \frac{3\sqrt{70}}{70} \\ \frac{2\sqrt{14}}{14} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{6\sqrt{70}}{70} \\ \frac{-3\sqrt{14}}{14} & 0 & \frac{5\sqrt{70}}{70} \end{bmatrix}.$$

Definamos:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} P$$

e

$$\begin{bmatrix} g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{14}}{7} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{8\sqrt{70}}{35} \end{bmatrix}.$$

Desta maneira, a expressão inicial da quádrlica fica reduzida à forma

$$14x_1^2 + \frac{5\sqrt{14}}{7}x_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}y_1 + \frac{8\sqrt{70}}{35}z_1 = 0.$$

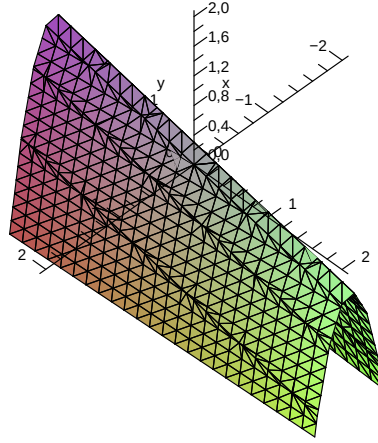


Figura 3.24: Quádrica $14x_1^2 + \frac{5\sqrt{14}}{7}x_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}y_1 + \frac{8\sqrt{70}}{35}z_1 = 0$.

Neste caso, completando-se quadrados obtemos

$$14 \left[\left(x_1 + \frac{5\sqrt{14}}{14^2} \right)^2 - \frac{25}{14^3} \right] + \frac{\sqrt{5}}{5}y_1 + \frac{8\sqrt{70}}{35}z_1 = 0,$$

ou equivalentemente,

$$14 \left(x_1 + \frac{5\sqrt{14}}{14^2} \right)^2 + \frac{\sqrt{5}}{5}y_1 + \frac{8\sqrt{70}}{35}z_1 - \frac{25}{14^2} = 0.$$

Fazendo $x_2 = x_1 + \frac{5\sqrt{14}}{14^2}$, $y_2 = y_1$ e $z_2 = z_1$ obtemos

$$14x_2^2 + \frac{\sqrt{5}}{5}y_2 + \frac{8\sqrt{70}}{35}z_2 - \frac{25}{14^2} = 0 \quad (3.15)$$

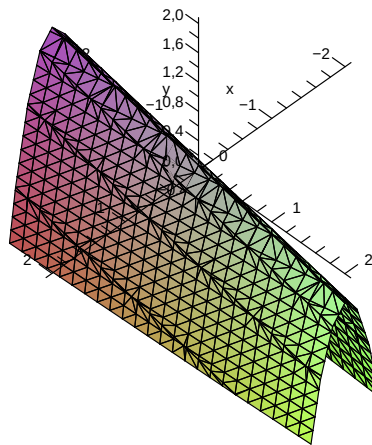


Figura 3.25: Quádrica $14x_2^2 + \frac{\sqrt{5}}{5}y_2 + \frac{8\sqrt{70}}{35}z_2 - \frac{25}{14^2} = 0$.

Efetuada-se a rotação do plano Ox_2y_2 de modo que o eixo Oy_2 fique paralelo ao vetor $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{8\sqrt{70}}{35}\right)$, obtemos (conforme a equação (3.14) vista na prova do 3º caso do Teorema 3.2.1):

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ y_2 = \frac{\sqrt{105}}{45}y_3 - \frac{8\sqrt{30}}{45}z_3 \\ z_2 = \frac{8\sqrt{30}}{45}y_3 + \frac{\sqrt{105}}{45}z_3 \end{cases}.$$

Substituindo x_2, y_2 e z_2 em (3.15) obtemos

$$14x_3^2 + \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{\sqrt{105}}{45}y_3 - \frac{8\sqrt{30}}{45}z_3 \right) + \frac{8\sqrt{70}}{35} \left(\frac{8\sqrt{30}}{45}y_3 + \frac{\sqrt{105}}{45}z_3 \right) - \frac{25}{14^2} = 0,$$

ou equivalentemente,

$$14x_3^2 + \frac{3\sqrt{21}}{7}y_3 - \frac{25}{196} = 0,$$

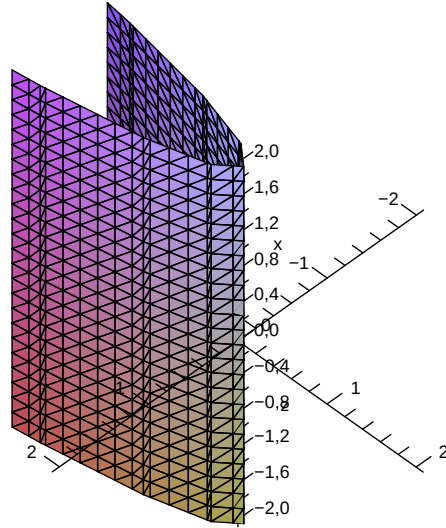


Figura 3.26: Quádrica $14x_3^2 + \frac{3\sqrt{21}}{7}y_3 - \frac{25}{196} = 0$.

e assim

$$14x_3^2 + \frac{3\sqrt{21}}{7} \left(y_3 - \frac{25\sqrt{21}}{1764} \right) = 0.$$

Com as mudanças $x_4 = x_3$, $y_4 = y_3 - \frac{25\sqrt{21}}{1764}$ e $z_4 = z_3$ chegamos à equação

$$14x_4^2 + \frac{3\sqrt{21}}{7}y_4 = 0,$$

ou seja,

$$\frac{14\sqrt{21}}{9}x_4^2 + y_4 = 0.$$

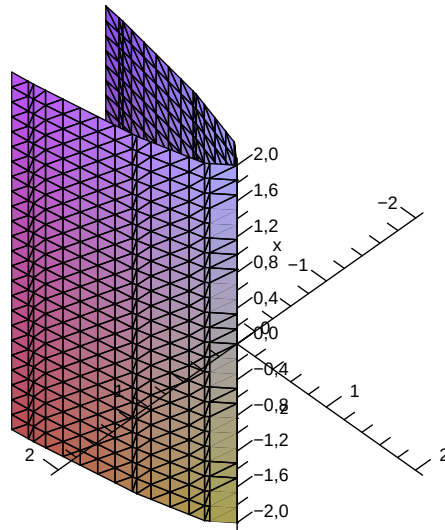


Figura 3.27: Quádrica $\frac{14\sqrt{21}}{9}x_4^2 + y_4 = 0$.

Efetuando-se uma rotação de 180° em torno do eixo Oz_4 , isto é, fazendo $x_5 = -x_4$, $y_5 = -y_4$ e $z_5 = z_4$, então a equação reduz-se à

$$\frac{14\sqrt{21}}{9}x_5^2 = y_5,$$

que é a equação de um Cilindro Parabólico.

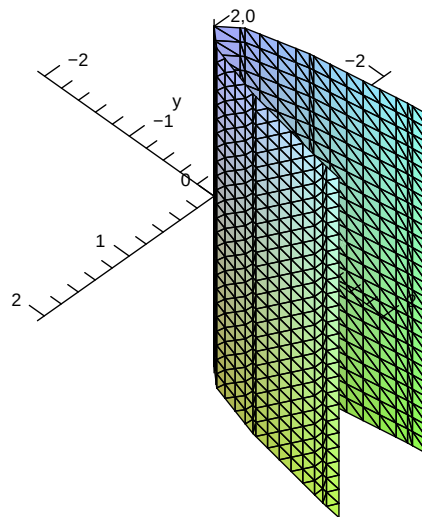


Figura 3.28: Quádrica $\frac{14\sqrt{21}}{9}x_5^2 = y_5$.

Portanto, a quádrica $x^2 + 4xy + 4y^2 + 9z^2 - 6xz - 12yz + x + 3y - z = 0$, após alguns movimentos rígidos, representa o Cilindro Parabólico dado pela figura 3.28.

Exemplo 3.3.5. Identifique a quádrlica $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + x + y + z - 1 = 0$.

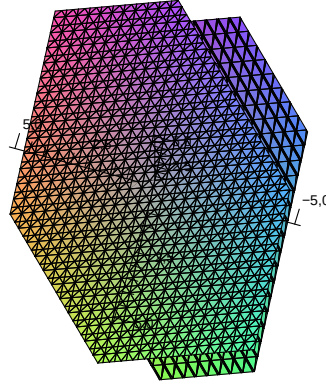


Figura 3.29: Quádrlica $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + x + y + z - 1 = 0$.

Temos que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Para diagonalizar a matriz A , resolvemos a equação $\det(A - \lambda I) = 0$, encontrando $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ os autovalores da matriz A , $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ o autovetor unitário de A associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$ e $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ os autovetores unitários de A associados aos autovalores $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Sendo assim, temos que

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Definamos:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} P$$

e

$$\begin{bmatrix} g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desta maneira, a expressão inicial da quádrlica fica reduzida à forma

$$3x_1^2 + \sqrt{3}x_1 - 1 = 0.$$

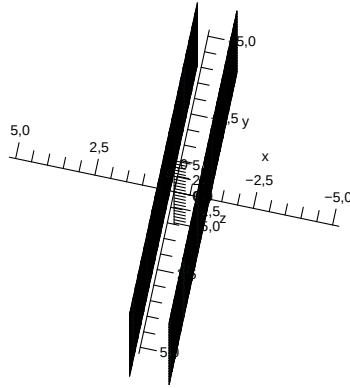


Figura 3.30: Quádrica $3x_1^2 + \sqrt{3}x_1 - 1 = 0$.

Neste caso, completando-se quadrados obtemos

$$3 \left[\left(x_1 + \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 - \frac{1}{12} \right] - 1 = 0,$$

ou equivalentemente,

$$3 \left(x_1 + \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 - \frac{5}{4} = 0.$$

Fazendo $x_2 = x_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}$, $y_2 = y_1$ e $z_2 = z_1$ obtemos

$$x_2^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}} \right)^2,$$

que é a equação de dois planos paralelos.

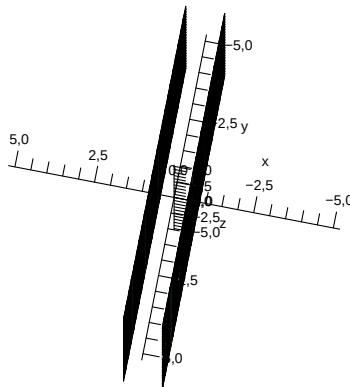


Figura 3.31: Quádrica $x_2^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}} \right)^2$.

Portanto, a quádrica $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + x + y + z - 1 = 0$, após uma rotação seguida de uma translação, representa dois planos paralelos conforme a figura 3.31.

Exemplo 3.3.6. Identifique a quádrlica $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 - xy - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2z + 2 = 0$.

Temos que $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Para diagonalizar a matriz A , resolvemos a equação $\det(A - \lambda I) = 0$, encontrando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 0$ os autovalores da matriz A , $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $(0, 0, 1)$ os autovetores unitários de A associados aos autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ o autovetor unitário de A associado ao autovalor $\lambda_3 = 0$. Sendo assim, temos que

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad P = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definamos:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} P$$

e

$$\begin{bmatrix} g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desta maneira, a expressão inicial da quádrlica fica reduzida à forma

$$x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 + 2y_1 + 2 = 0.$$

Neste caso, completando-se quadrados obtemos

$$(x_1 + 1)^2 - 1 + (y_1 + 1)^2 - 1 + 2 = 0,$$

ou equivalentemente,

$$(x_1 + 1)^2 + (y_1 + 1)^2 = 0.$$

Fazendo $x_2 = x_1 + 1$, $y_2 = y_1 + 1$ e $z_2 = z_1$ obtemos

$$x_2^2 + y_2^2 = 0,$$

que é a equação de uma Reta.

Portanto, a quádrlica $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 - xy - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2z + 2 = 0$ representa uma Reta.

Exemplo 3.3.7. Identifique a quádrlica $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + x + y + z + 1 = 0$.

Temos que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Para diagonalizar a matriz A , resolvemos a equação $\det(A - \lambda I) = 0$, encontrando $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ os autovalores da matriz A , $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ o autovetor unitário de A associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$ e $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ os autovetores unitários de A associados aos autovalores $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Sendo assim, temos que

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Definamos:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} P$$

e

$$\begin{bmatrix} g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desta maneira, a expressão inicial da quádrlica fica reduzida à forma

$$3x_1^2 + \sqrt{3}x_1 + 1 = 0.$$

Neste caso, completando-se quadrados obtemos

$$3 \left[\left(x_1 + \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 - \frac{1}{12} \right] + 1 = 0,$$

ou equivalentemente,

$$3 \left(x_1 + \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \frac{3}{4} = 0.$$

Fazendo $x_2 = x_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}$, $y_2 = y_1$ e $z_2 = z_1$ obtemos

$$x_2^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 0,$$

que é o vazio.

Portanto, a quádrlica $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + x + y + z + 1 = 0$ representa o vazio.

4 Conclusão

Para finalizar, exemplificamos a redução da equação geral de uma mesma quádrlica segundo as duas versões apresentadas nos capítulos anteriores e também observamos que a figura inserida no exemplo foi feita utilizando-se o software Maple.

Exemplo 4.0.8. Identifique a quádrlica $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 - xy - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2z + 1 = 0$.

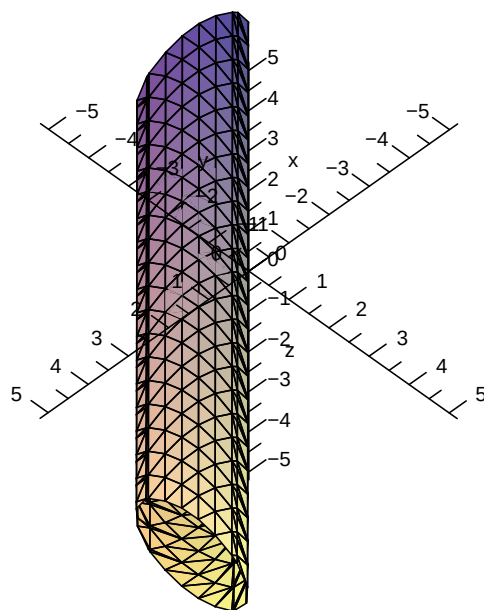


Figura 4.1: Quádrlica $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 - xy - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2z + 1 = 0$.

4.1 Solução segundo a versão de Geometria Analítica

Como o discriminante da equação desta quádrlica é $\delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, não

é possível eliminarmos os termos de 1º grau por meio de uma translação. Neste caso devemos efetuar uma rotação nos eixos coordenados, de modo a eliminar os termos mistos do 2º grau.

Para isso, calculamos as raízes da equação característica desta quádrlica, por meio da equação

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ obtendo } \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ e } \lambda_3 = 0.$$

Sendo assim, encontramos os vetores $(-1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ como direções principais correspondentes às raízes $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e o vetor $(1, 1, 0)$ como direção principal correspondente à raiz $\lambda_3 = 0$.

Sendo $\|(-1, 1, 0)\| = \sqrt{2}$, $\|(0, 0, 1)\| = 1$ e $\|(1, 1, 0)\| = \sqrt{2}$, temos:

$$\vec{i}' = \left(\frac{-1}{\|(-1, 1, 0)\|}, \frac{1}{\|(-1, 1, 0)\|}, \frac{0}{\|(-1, 1, 0)\|} \right) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right);$$

$$\vec{j}' = \left(\frac{0}{\|(0, 0, 1)\|}, \frac{0}{\|(0, 0, 1)\|}, \frac{1}{\|(0, 0, 1)\|} \right) = (0, 0, 1);$$

$$\vec{k}' = \left(\frac{1}{\|(1, 1, 0)\|}, \frac{1}{\|(1, 1, 0)\|}, \frac{0}{\|(1, 1, 0)\|} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right).$$

Neste caso, a equação de rotação (2.4) toma a seguinte forma:

$$\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + 0y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}z_1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + 0y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}z_1 \\ z = 0x_1 + y_1 + 0z_1 \end{cases}.$$

Substituindo esses valores de x , y e z na equação inicial e reagrupando, obtemos

$$x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 + 2y_1 + 1 = 0.$$

Completando-se quadrados obtemos

$$(x_1 + 1)^2 - 1 + (y_1 + 1)^2 = 0,$$

ou equivalentemente,

$$(x_1 + 1)^2 + (y_1 + 1)^2 = 1.$$

Efetuando-se a translação

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 1 \\ y_2 = y_1 + 1 \\ z_2 = z_1 \end{cases},$$

obtemos

$$x_2^2 + y_2^2 = 1,$$

que é a equação de um Cilindro Elíptico.

Portanto, $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 - xy - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2z + 1 = 0$ representa um Cilindro Elíptico.

4.2 Solução segundo a versão de Álgebra Linear

Temos que $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Para diagonalizar a matriz A , resolvemos a equação $\det(A - \lambda I) = 0$, encontrando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 0$ os autovalores da matriz A , $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $(0, 0, 1)$ os autovetores unitários de A associados aos autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ o autovetor unitário de A associado ao autovalor $\lambda_3 = 0$. Sendo assim, temos que

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad P = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definamos:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} P$$

e

$$\begin{bmatrix} g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desta maneira, a expressão inicial da quádrlica fica reduzida à forma

$$x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 + 2y_1 + 1 = 0.$$

Neste caso, completando-se quadrados obtemos

$$(x_1 + 1)^2 - 1 + (y_1 + 1)^2 = 0,$$

ou equivalentemente,

$$(x_1 + 1)^2 + (y_1 + 1)^2 = 1.$$

Fazendo $x_2 = x_1 + 1$, $y_2 = y_1 + 1$ e $z_2 = z_1$ obtemos

$$x_2^2 + y_2^2 = 1,$$

que é a equação de um Cilindro Elíptico.

Portanto, a quádrlica $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 - xy - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2z + 1 = 0$, após uma rotação seguida de uma translação, representa a equação de um Cilindro Elíptico.

As figuras a seguir, mostram todas as transformações de coordenadas que fizemos neste exemplo.

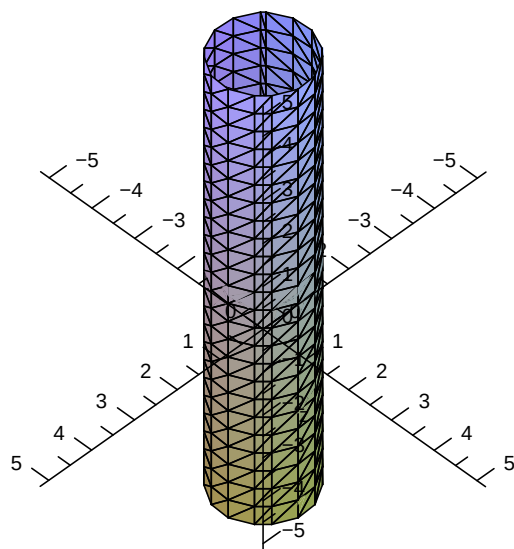


Figura 4.2: Quádrica $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 + 2y_1 + 1 = 0$ (obtida após uma rotação).

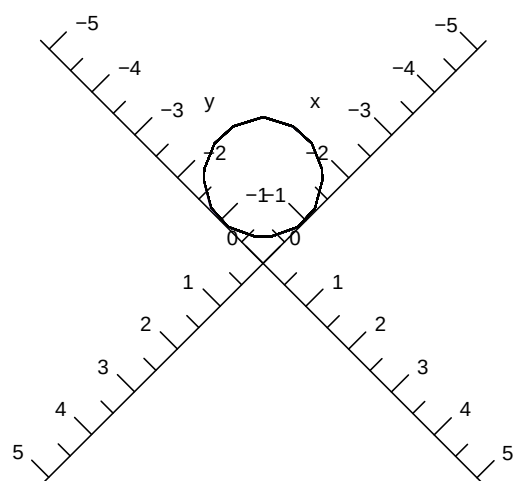


Figura 4.3: Quádrica $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 + 2y_1 + 1 = 0$ vista de cima.

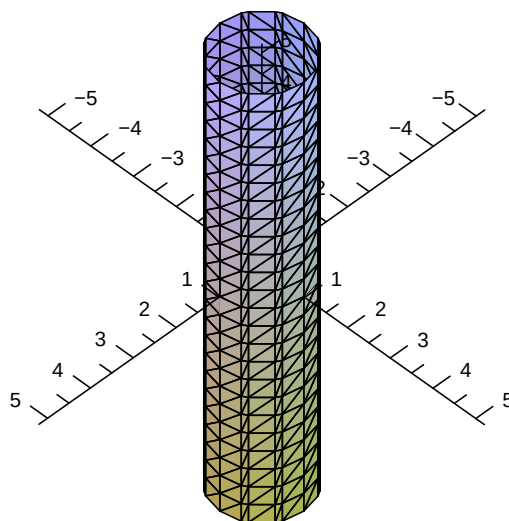


Figura 4.4: Quádrica $x_2^2 + y_2^2 = 1$ (obtida após uma translação).

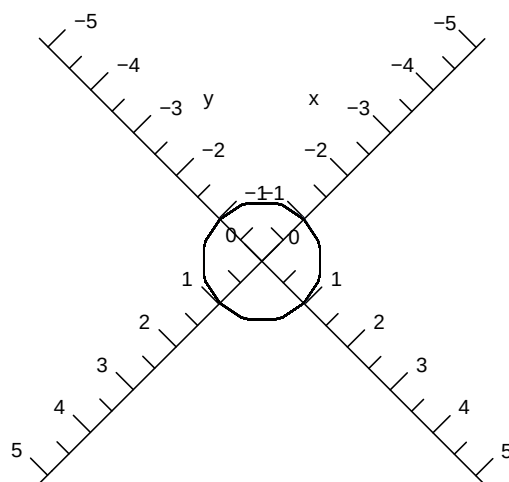


Figura 4.5: Quádrica $x_2^2 + y_2^2 = 1$ vista de cima.

Referências

- [1] BOULOS, P.; CAMARGO, I. *Geometria Analítica*. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- [2] PRESSLEY, A. *Elementary Differential Geometry*. London Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
- [3] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1979.
- [4] LIMA, E. L. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [5] LIBARDI, A. K. M.; PENTEADO, D.; OLIVEIRA, E. *Geometria das Quádricas*. 1. ed. Rio Claro: Textos de Matemática - Departamento de Matemática - IGCE - UNESP, 1998.
- [6] PERISSINOTO JR, A.; VIEIRA, J. P. *Formas Elementares: Diagonal, Triangular e de Jordan*. 2. ed. Rio Claro: Textos de Matemática - Departamento de Matemática - IGCE - UNESP, 2003.