



Valdiane Sales Araújo

Hiperbolicidade Seccional em Dimensões Arbitrárias

São José do Rio Preto
2015

Valdiane Sales Araújo

Hiperbolicidade Seccional em Dimensões Arbitrárias

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

São José do Rio Preto
2015

Araújo, Valdiane Sales.

Hiperbolicidade seccional em dimensões arbitrárias / Valdiane Sales
Araújo. -- São José do Rio Preto, 2015
53 f. : il.

Orientador: Vanderlei Minori Horita

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de
Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Sistemas dinâmicos diferenciais. 3. Espaços
hiperbólicos. 4. Fluxos de Anosov. I. Horita, Vanderlei Minori.
II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de
Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.938

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Valdiane Sales Araújo

Hiperbolicidade Seccional em Dimensões Arbitrárias

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita
UNESP – Rio Claro
Orientador

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva
UNESP – Rio Preto

Prof. Dr. Serafin Bautista Diaz
Universidad Nacional de Colômbia

Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva
UNESP – Bauru

Prof. Dr. Nivaldo Costa Muniz
UFMA – São Luis

São José do Rio Preto
27 de agosto de 2015

RESUMO

Este trabalho lida com o conceito de hiperbolicidade seccional em dimensões arbitrárias e a extensão, para este contexto, de uma versão do Anosov Connecting Lemma, previamente estabelecido por Bautista e Morales para fluxos singulares hiperbólicos em dimensão 3. Apresentamos ainda algumas condições suficientes para que um conjunto Lyapunov estável seja um atrator.

Palavras-chave: Hiperbolicidade seccional. Connecting Lemma, Conjuntos Lyapunov estáveis.

ABSTRACT

This work deals with the concept of sectional hyperbolicity in higher dimensions and the extension to this setting of a version of the Anosov Connecting Lemma, previously established by Bautista and Morales, for singular hyperbolic 3-flows. Furthermore, we present some sufficient conditions to a Lyapunov stable set to be an attractor.

Keywords: Sectional hyperbolicity. Anosov Connecting Lemma. Lyapunov stable sets..

Tese de Doutorado

**HIPERBOLICIDADE SECCIONAL EM DIMENSÕES
ARBITRÁRIAS**

Valdiane Sales Araújo

**São José do Rio Preto
2015**

Valdiane Sales Araújo

**HIPERBOLICIDADE SECCIONAL EM DIMENSÕES
ARBITRÁRIAS**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Biologia, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Vanderlei Minori Horita

São José do Rio Preto
agosto de 2015

Introdução	1
1 Preliminaries	4
1.1 Fluxo Linear de Poincaré	7
1.2 Conjuntos Seccionais-Hiperbólicos	8
1.3 Propriedades básicas dos conjuntos seccionais-hiperbólicos	9
1.3.1 Conjunto seccional-hiperbólico e suas singularidades . .	10
1.4 Seção transversal em dimensão superior	13
1.5 Folheação estável sobre seções transversais	14
1.5.1 Campos de Cones e Partições Singulares	15
1.6 Seção Transversal adaptada	20
2 Um Lema de Conexão para Fluxos Seccionais-Anosov	25
2.0.1 Prova do Teorema A	36
3 Atratores Seccionais-hiperbólicos	41
3.1 Atratores Seccionais-hiperbólicos e Conjuntos Lyapunov estáveis	41
Referências	44

Introdução

Este trabalho lida com a extensão, para dimensões arbitrárias, de resultados existentes no contexto de hiperbolicidade seccional, especificamente tratando dos conceitos de fluxos Seccionais-Anosov e de conjuntos Lyapunov estáveis.

O conceito de **hiperbolicidade seccional**, ou mais precisamente, de um **conjunto seccional-hiperbólico**, grosso modo, envolve um conjunto (não-trivial) onde se coadunam a presença de pontos regulares com a presença de singularidades (hiperbólicas).

No que concerne aos **fluxos Seccionais-Anosov**, como o nome indica, tratamos com uma generalização do conceito de fluxos Anosov, ou seja, fluxos para os quais existe uma estrutura hiperbólica bem definida em toda a variedade.

Dada a importância da classe dos fluxos Anosov, ao longo dos tempos, diversos autores, partindo de diversas motivações distintas, construíram generalizações e adaptações desse conceito, como os fluxos pseudo-Anosov e os fluxos projetivamente-Anosov.

A direção que nos interessa seguir é aquela introduzida em [24], que apresenta a noção de campo seccional-Anosov como aquele em que o conjunto invariante maximal é seccional-hiperbólico e o fluxo é transversal à fronteira da variedade M , quando esta é não-vazia.

A classe de sistemas seccionais-Anosov é bem ampla e engloba, por exemplo: fluxos Anosov, atratores hiperbólicos, atrator de Lorenz Geométrico e multidimensional, entre outros.

Muitos estudiosos têm trabalhado no sentido de entender o comportamento assintótico desses fluxos e estender ou verificar as propriedades dos

sistemas Anosov aos sistemas seccionais-Anosov. Muito já se sabe em variedades de dimensão 3. Em dimensão maior que 3, muito ainda há para ser feito.

Os primeiros estudos dos fluxos seccionais-Anosov datam de 1963 quando E. Lorenz, ao analisar numericamente a equação

$$\begin{cases} x' &= -10x + 10y \\ y' &= 28x - y - xz \\ z' &= -\frac{8}{3}z + xy \end{cases}$$

verificou que esta equação definia um conjunto com certas características de atração (**attracting set**, ou conjunto atrativo) contendo um ponto de equilíbrio, o qual era sensível às condições iniciais.

Mais tarde, Smale estabeleceu o conceito de conjuntos hiperbólicos e o desenvolvimento da Teoria Hiperbólica, que acabou incluindo, como um dos seus pilares, o estudo dos sistemas Anosov, com suas ricas propriedades.

Um dos resultados centrais e mais úteis da teoria dos fluxos Anosov é o

Anosov Connecting Lemma [8]: *Seja X um fluxo Anosov sobre uma variedade compacta M e sejam os pontos $p, q \in M$ tais que para todo $\epsilon > 0$ existe uma trajetória de um ponto ϵ -próximo a p a um ponto ϵ -próximo a q . Então existe um ponto $x \in M$ cujo α -limite coincide com $\alpha(p)$ e cujo ω -limite coincide com $\omega(q)$.*

Um dos objetivos desse trabalho é estender esse resultado para fluxos seccionais-Anosov em variedades de dimensão qualquer.

Teorema A. *Seja X um campo seccional-Anosov sobre uma variedade M compacta de dimensão $n \geq 3$. Suponha que X tem codimensão 1 e seja $M(X)$ o connunto invariante maximal de X . Considere pontos $p, q \in M(X)$, satisfazendo*

(C) *Para todo $\epsilon > 0$ existe uma trajetória de um ponto ϵ -próximo a p a um ponto ϵ -próximo a q*

e assuma que o conjunto α -limite de p é não-singular. Nessas condições, existe um ponto $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ e $\omega(x) = \omega(q)$ ou $\omega(x)$ é uma singularidade.

Em [8], Bautista e Morales provaram uma versão do teorema acima para fluxos seccionais-Anosov em variedades compactas de dimensão 3, usando a versão para Fluxos Anosov, Lema 1.4, e uma caracterização para o conjunto omega-limite de pontos em uma variedade M de dimensão 3 para fluxos seccionais Anosov. Esta caracterização não é válida em variedades de dimensão maior, então o argumento de Morales e Bautista não pode ser utilizado em nossa prova. Nosso desafio, nesse sentido, é o de sobrepujar as limitações do argumento à dimensão 3.

Outro foco deste trabalho diz respeito a dois conceitos cuja relação muito tem intrigado especialistas da área: os conceitos de conjunto Lyapunov-estável e atrator. Em certo sentido, ambos os conceitos tentam capturar a ideia de um conjunto que atrai órbitas próximas. Já é conhecida uma rica teoria que lida com as propriedades dinâmicas, geométricas, topológicas e ergódicas desses objetos. Entretanto, alguns exemplos importantes não são englobados por essa teoria. É o caso dos atratores geométricos de Lorenz e o atrator de Henón.

No Capítulo 3, estudamos atratores seccionais-hiperbólicos. Alguns resultados são extensões de resultados provados em [25] para variedades de dimensão 3. O Teorema 3.7 é um resultado inédito.

CAPÍTULO 1

Preliminaries

Nesse texto M será sempre uma variedade Riemanniana compacta sem bordo, conexa de dimensão finita n . Fixemos em M uma métrica Riemanniana que induz uma distância sobre M e define uma forma de volume a qual chamaremos **medida de Lebesgue** ou simplesmente volume. Para qualquer subconjunto A de M denotaremos o fecho (topológico) de A por $\overline{A}$.

Um campo de vetores X sobre M é uma correspondência que associa a cada ponto x de M um vetor $X(x)$ em $T_x M$, o espaço de vetores tangentes a M no ponto x .

Denotaremos por $\mathcal{X}^r(M)$ o espaço dos campos de vetores de classe C^r , $r \geq 1$ definidos em M e consideraremos o fluxo global associado $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Como X é definido na variedade toda, que é compacta, X é limitado e X_t está definido para todo $t \in \mathbb{R}$.

O fluxo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é uma família de difeomorfismos a um parâmetro que satisfaz a propriedade de grupo:

1. $X_0 = Id$, onde $Id : M \rightarrow M$ é a aplicação identidade;
2. $X_t \circ X_s = X_{t+s}$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções, para cada campo $X \in \mathcal{X}^1(M)$, existe um único fluxo X_t associado a X tal que

$$\frac{d}{dt} X_t(x)|_{t=t_0} = X(X_{t_0}(x)), \quad \forall x \in M, \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

Dado $X \in \mathcal{X}^r(M)$ e $x \in M$ denotaremos a derivada de X_t por $D_x X_t = DX_t(x)$ com respeito a variável ambiente x . Quando não houver risco de confusão, escreveremos simplesmente DX_t . De maneira análoga $D_x X$ representará a derivada do campo X com relação a variável ambiente x . Quando não houver risco de confusão escreveremos DX . Um **ponto de equilíbrio** ou uma **singularidade** de X é um ponto $\sigma \in M$ tal que $X_t(\sigma) = \sigma$ para todo $t \in \mathbb{R}$, isto é, σ é um ponto fixo para o fluxo de X o que corresponde a um zero de X , $X(\sigma) = 0$. Denotaremos por $Sing(X)$ o conjunto das singularidades de X . Um ponto $x \in M$ que não é uma singularidade é chamado ponto **regular** de X .

Uma **órbita** de X é um conjunto

$$\mathcal{O}(q) = \mathcal{O}_X(q) = \{X_t(q) : t \in \mathbb{R}\}$$

para $q \in M$.

Um ponto $p \in M$ é chamado **periódico**, para X_t , se existir um número real $T > 0$, que chamaremos período de p , tal que $X_T(p) = p$ e $X_t(p) \neq p$ para $0 \leq t < T$. Dizemos, nesse caso, que a órbita de p é **fechada**. Usaremos a notação $Per(X)$ para denotar o conjunto dos pontos periódicos do fluxo de X .

Uma órbita de X é **crítica** se é fechada ou uma singularidade. Denotaremos $Crit(X) := Per(X) \cup Sing(X)$ ao conjunto de todas as órbitas críticas de X em M .

Dizemos que $x \in M$ é **não-errante** para X se para todo $T > 0$ e toda vizinhança U de x existe $t > T$ tal que $X^t(U) \cap U \neq \emptyset$.

O conjunto dos pontos não-errantes de X será denotado por $\Omega(X)$,

O conjunto **ômega-limite**, $\omega_X(x)$, de um ponto x é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita de x por X_t , ou seja,

$$\omega_X(x) = \{y \in M; \exists t_k \rightarrow +\infty; \lim_{k \rightarrow +\infty} X_{t_k}(x) = y\}$$

Definimos o conjunto **alfa-limite**, $\alpha_X(x)$, do ponto x por $\alpha_X(x) = \omega_{-X}(x)$, onde $-X$ é o campo reverso, isto é, satisfazendo $(-X)(x) = -(X(x))$ para todo $x \in M$.

É imediato que $\alpha_X(x) \cup \omega_X(x) \subset \Omega(X)$ para todo $x \in M$.

Dizemos que um conjunto Λ é **invariante** para o fluxo de X , ou simplesmente, **X -invariante** se $X_t(\Lambda) = \Lambda$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Os conjuntos $\alpha_X(x)$, $\omega_X(x)$ e $\Omega(X)$ são X -invariantes.

Considere um conjunto Λ compacto e invariante para o campo X sobre uma variedade n -dimensional M , com $n \geq 3$. Se existir uma vizinhança U de Λ tal que

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} X_t(U)$$

com $X_t(U) \subset U$ para todo $t \geq 0$, então Λ é um **sumidouro** (ou **attracting set**) de X . Um conjunto $\Lambda \subset M$ é **transitivo** se $\Lambda = \omega_X(x)$ para algum $x \in \Lambda$. Um **atrator** de X é um sumidouro transitivo de X . Assim, um atrator tem a propriedade de atrair órbitas de pontos próximos a ele. Um **repulsor** é um atrator para $-X$.

Vale lembrar que um conjunto L é **Lyapunov estável** para $X \in \mathcal{X}^1(M)$ se para toda vizinhança U de L existe uma vizinhança $V \subset U$ de L tal que $X_t(V) \subset U$, para todo $t \geq 0$.

Note-se que todo conjunto atrator é Lyapunov estável e transitivo, mas a recíproca não é verdadeira.

Para todo subconjunto Λ compacto e invariante para X definimos o **conjunto estável** de Λ como

$$W_X^s(\Lambda) = \{q \in M : \omega_X(q) \subset \Lambda\}.$$

analogamente, define-se o **conjunto instável**:

$$W_X^u(\Lambda) = \{q \in M : \alpha_X(q) \subset \Lambda\}.$$

Dizemos que um conjunto Λ é **transitivo** para X se existe um ponto $x \in M$ cuja órbita é densa em Λ .

Definição 1.1 (Conjunto Hiperbólico). Um conjunto compacto invariante Λ é **hiperbólico** para X se existem constantes $C > 0$, $\lambda > 0$ e uma decomposição contínua, DX_t -invariante, do fibrado tangente de M sobre Λ

$$T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^u$$

e uma métrica riemanniana $\langle *, * \rangle$ tais que para todo $x \in \Lambda$ e $t \geq 0$,

- $\|DX_t(x)v\| \leq Ce^{-\lambda t}\|v\|$ para todo $v \in E_x^s$;
- $E_x^X = \langle X(x) \rangle$;
- $\|DX_t(x)w\| \leq C^{-1}e^{\lambda t}\|w\|$ para todo $w \in E_s^u$.

Note que E_x^X é 0-dimensional se x é uma singularidade e 1-dimensional se x é um ponto regular.

Dizemos que σ é uma **singularidade hiperbólica** se os autovalores de $DX(\sigma)$ têm a parte real diferente de zero. Em particular, poços e fontes são exemplos de singularidades hiperbólicas. A órbita de um ponto periódico p , que denotaremos $O(p)$, ou $O_X(p)$ se houver necessidade de explicitar o campo, é hiperbólica se é um conjunto hiperbólico.

Nesses últimos casos, ou seja, quando temos um elemento crítico hiperbólico, seus conjuntos estável e instável têm uma estrutura de variedade invariante C^r mergulhadas em M , e são chamadas **variedade estável forte** e **variedade instável forte**, e podem ser definidas assim:

$$W_X^{ss}(p) = \{q \in M : d(X_t(q), X_t(p)) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty\}$$

e

$$W_X^{uu}(p) = \{q \in M : d(X_t(q), X_t(p)) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty\}$$

respectivamente.

A partir desses objetos, definimos a **variedade estável** $W_X^s(p)$ e a **variedade instável** de p como:

$$W_X^s(p) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W_X^{ss}(X_t(p))$$

e

$$W_X^u(p) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W_X^{uu}(X_t(p))$$

Segue-se, dessas definições, que $W_X^s(p)$ é tangente a $E_p^s \oplus E_p^X$ e $W_X^u(p)$ é tangente a $E_p^X \oplus E_p^u$.

Dizemos que um conjunto Λ é invariante para o fluxo X se satisfaz $X_t(\Lambda) = \Lambda$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Chamamos **conjunto maximal invariante** de X ao conjunto $M(X) := \bigcap_{t \geq 0} X_t(M)$. Se M é uma variedade compacta sem bordo então $M(X) = M$.

1.1 Fluxo Linear de Poincaré

Seja $x \in M$ um ponto regular de X , isto é, $X(x) \neq 0$, denotemos por

$$N_x = \{v \in T_x M : v \cdot X(x) = 0\}$$

o complemento ortogonal de $X(x)$ em $T_x M$. Denote por $O_x : T_x M \rightarrow N_x$ a projeção ortogonal de $T_x M$ sobre N_x . Para todo $t \in \mathbb{R}$ defina

$$P_x^t : N_x \rightarrow N_{X_t(x)} \text{ por } P_x^t = O_{X_t(x)} \circ DX_t(x).$$

A família $P = \{P_x^t : t \in \mathbb{R}, X(x) \neq 0\}$ é chamado Fluxo Linear de Poincaré de X e satisfaz $P_x^{s+t} = P_{X^t(x)}^s \circ P_x^t$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$

Um fato bem conhecido sobre conjuntos hiperbólicos para campos de vetores é o seguinte

Teorema 1.2. [15] *Seja Λ um subconjunto sem singularidades, invariante e compacto para $X \in \mathcal{X}(M)$. Então Λ é hiperbólico se, e somente se, o Fluxo Linear de Poincaré é hiperbólico sobre Λ .*

Demonstração. Veja o Teorema 2.27 de [6]. □

A relação entre a decomposição hiperbólica $E^s \oplus E^X \oplus E^u$ sobre $T_\Lambda M$ e a decomposição $N^s \oplus N^u$ é dada por: $N_x^s = O_x(E_x^s)$ e $N_x^u = O_x(E_x^u)$ para todo $x \in \Lambda$.

1.2 Conjuntos Seccionais-Hiperbólicos

A dificuldade de se estudar sistemas com singularidades levou alguns estudiosos a definirem sistemas com propriedades de expansão menos rígidas que aquela definida para os sistemas hiperbólicos. É o caso dos sistemas seccionais-Anosov.

Esses sistemas foram bem estudados por Morales, Pacífico, Bautista e outros em variedades de dimensão 3. O exemplo mais conhecido é o Atrator de Lorenz geométrico introduzido por Guckenheimer, Williams em [16].

Dizemos que um subfibrado E_Λ é seccional expansor quando a derivada de X_t restrita aos subespaços de dimensão 2, $L_x \subset E_\Lambda$ expande áreas, isto é,

$$|Det(DX_t(x)|_{L_x})| \geq K e^{\lambda t}$$

para todo $K, t > 0$.

Definição 1.3 (Conjunto seccional-hiperbólico). Um conjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$ é seccional-hiperbólico para X se cada singularidade em Λ é hiperbólica e existe uma decomposição contínua, DX_t -invariante, do fibrado tangente $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$, constantes positivas C e λ e uma métrica riemanniana $\langle *, * \rangle$ tais que para todo $x \in \Lambda$ e $t \geq 0$,

- $\|DX_t(x)v\| \leq Ce^{-\lambda t}\|v\|$ para todo $v \in E_x^s$;
- $\|DX_t(x)v\| \cdot \|w\| \leq Ce^{-\lambda t}\|DX_t(x)w\| \cdot \|v\|$ para todo $(v, w) \in E_x^s \times E_x^c$;
- $\|DX_t(x)w_1, DX_t(x)w_2\|_{X_t(x)} \leq C^{-1}e^{\lambda t}\|w_1, w_2\|_x$ para todo $w_1, w_2 \in E_x^c$

onde $E_x^c = E_x^X \oplus E_x^u$.

Na definição acima a primeira condição nos diz que o subfibrado E_x^s é uniformemente contrator, a segunda nos diz que o subfibrado central domina o subfibrado contrator e a terceira condição nos diz que o subfibrado central, E_x^c , é seccional expansor.

Um campo X é seccional-Anosov se o conjunto invariante maximal de X , $M(X)$, é seccional-hiperbólico.

1.3 Propriedades básicas dos conjuntos seccionais-hiperbólicos

Enumeraremos agora mais algumas propriedades dos conjuntos seccionais hiperbólicos e também propriedades dos fluxos seccionais-Anosov. Embora alguns desses resultados não sejam utilizados em nossas demonstrações, eles trazem informações que ajudam a compreender um pouco mais a dinâmica desses fluxos.

Em toda a teoria com que estamos envolvidos aqui, dos fluxos seccionais-hiperbólicos, um resultado que pode ser considerado básico, se não já clássico na teoria, é o chamado Lema Hiperbólico:

Lema 1.4. [Lema Hiperbólico] *Se Λ é um conjunto compacto, invariante, seccional-hiperbólico para X tal que $\Lambda \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$, então Λ é uniformemente hiperbólico.*

Demonstração. Veja o Lema 3, p. 3397 de [28], ou ainda, o Lema 2.7, p. 67 do livro [10]. Note que os argumentos não são válidos em qualquer dimensão. $\square$

Uma consequência imediata do Lema Hiperbólico, por exemplo, é a hiperbolicidade de qualquer órbita periódica em um conjunto seccional-hiperbólico. No caso de um campo seccional-Anosov sobre uma variedade compacta, todas as órbitas periódicas do fluxo são hiperbólicas e existe uma quantidade enumerável de tais órbitas.

Em cada ponto x , não singular, de um conjunto seccional-hiperbólico, não é difícil ver que a direção do campo $X(x)$ não pode estar na fibra estável $E^s(x)$. Mais que isso, o teorema básico abaixo, estabelece que a direção do campo, nesses casos, sempre está na fibra central.

Teorema 1.5. *Seja Λ um conjunto compacto X -invariante, seccional-hiperbólico, não-trivial. Então, na decomposição $T_x M = E_x^s \oplus E_x^c$ a direção do fluxo, $\mathbb{R}X$, está contido em E_x^c para todo $x \in \Lambda \setminus \text{Sing}(X)$.*

Demonstração. Veja os Lema 2.1 e 2.2 de [10]. □

1.3.1 Conjunto seccional-hiperbólico e suas singularidades

Introduzimos agora as importantes noções de singularidades tipo-Lorenz e fluxo de codimensão um.

Definição 1.6. Uma singularidade σ de X é tipo-Lorenz se σ é tipo sela hiperbólica com pelo menos um autovalor com parte real negativa, pelo menos um autovalor real λ de multiplicidade 1, e a parte real dos demais autovalores estão fora do intervalo $[\lambda, -\lambda]$

Definição 1.7. Um campo seccional-Anosov é de codimensão 1 se seu subfibrado central E^c tem dimensão 2, isto é,

$$\dim(E_x^c) = 2 \quad \forall x \in M(X)$$

Toda singularidade tipo-Lorenz é hiperbólica, logo as variedades invariantes $W^u(\sigma)$ e $W^s(\sigma)$ estão bem definidas. A variedade estável $W^s(\sigma)$ possui uma subvariedade $W^{ss}(\sigma)$ a qual chamaremos **variedade estável forte** de σ , e que se relaciona com $W^s(\sigma)$ da seguinte forma:

$W^s(\sigma)$ é tangente, em σ , ao auto-espço associado ao conjunto dos autovalores com parte real negativa e $W^{ss}(\sigma)$ é tangente em σ ao auto-espço associado aos autovalores cuja parte real é menor que λ . Portanto $W^{ss}(\sigma)$ é uma subvariedade de codimensão 1 de $W^s(\sigma)$, logo $W^{ss}(\sigma)$ separa $W^s(\sigma)$ em duas componentes conexas.

Em resumo, existem duas possibilidades para as dimensões das variedades estáveis associadas às singularidades de um conjunto seccional-hiperbólico:

1. $\dim(W_X^{ss}(\sigma)) = \dim(W_X^s(\sigma))$, e nesse caso teremos $W_X^{ss}(\sigma) = W_X^s(\sigma)$,

2. $\dim(W_X^s(\sigma)) = \dim(W_X^{ss}(\sigma)) + 1$, nesse caso, as singularidades são tipo-Lorenz.

Se $\Lambda \subset M$ é um conjunto seccional-hiperbólico **transitivo**, todas as singularidade de X em Λ são tipo-Lorenz. Quando Λ não é transitivo, isso pode não acontecer. Em [22] e [7] os autores dão um exemplo de um conjunto seccional-hiperbólico no qual nenhuma singularidade é tipo-Lorenz.

A seguir enunciaremos alguns resultados que serão usados para provar os teoremas principais desse texto. Aqui M é sempre uma variedade compacta de dimensão $n \geq 3$.

Lema 1.8. *Seja X um campo seccional-Anosov definido em M , então $M(X) \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$ para toda singularidade $\sigma \in \text{Sing}(X)$.*

Demonstração. Suponha que existe $x_0 \neq \sigma$ com $x_0 \in M(X) \cap W^{ss}(\sigma)$. Note que necessariamente x_0 é um ponto regular. Considerando a invariância de $W^{ss}(\sigma)$, vemos que $X_t(x_0) \in W^{ss}(\sigma)$ e, desse modo, $X(x_0)$ é tangente a essa variedade, o que nos conduz, também, a $X(x_0) \in E_{x_0}^s$. Por outro lado, pelo Teorema 1.5, temos que $X(x_0) \in E_{x_0}^c$ e assim, $X(x_0) \in E_{x_0}^s \cap E_{x_0}^c$. Entretanto, a soma $T_{x_0}M = E_{x_0}^s \oplus E_{x_0}^c$ é uma soma direta então $X(x_0) = 0$ contrariando o fato de esse é um ponto regular. Isto prova o resultado. $\square$

Dizemos que Λ é um **conjunto isolado** se possui uma vizinhança compacta U , chamada **bloco isolante**, tal que $\Lambda = \Lambda_X(U)$ onde

$$\Lambda_X(U) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(U)$$

é o conjunto invariante maximal de X_t em U .

Teorema 1.9. *Seja σ uma singularidade de um campo seccional-Anosov X e seja U um bloco isolante do conjunto maximal invariante $M(X)$. Se $x \in U \setminus W_X^{ss}(\sigma)$ é tal que $\sigma \in \omega_X(x)$, então σ é tipo-Lorenz.*

Demonstração. Ver prova do Teorema 4 de [9]. Os argumentos são independentes de dimensão. $\square$

O resultado a seguir nos dá uma condição suficiente para uma singularidade de um campo seccional-Anosov ser tipo-Lorenz.

Teorema 1.10. *Toda singularidade no fecho da variedade instável de uma órbita periódica de um fluxo seccional-Anosov sobre uma variedade compacta n -dimensional é tipo-Lorenz.*

Demonstração. Seja X um campo seccional-Anosov sobre uma variedade M , compacta de dimensão n , e seja O uma órbita periódica de X . Fixemos $\sigma \in Cl(W^u(O))$. Se σ não é tipo-Lorenz, então $W_X^s(\sigma) = W_X^{ss}(\sigma)$ e tem dimensão $(n - 1)$. Como $\sigma \in Cl(W^u(O))$ mas $\sigma \notin O$ temos que $Cl(W^u(O))$ também contém $W^s(\sigma)$. Mas, pelo Lema 1.8, sabemos que $M(X) \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$, logo $W^{ss}(\sigma) = W^s(\sigma)$ não está contido em $M(X) = M$ que é um absurdo. Portanto, σ é tipo-Lorenz e o resultado está provado. $\square$

Um interessante fato sobre (a ausência de) variedades estáveis fortes em conjuntos seccionais-hiperbólicos:

Teorema 1.11. *Seja M uma variedade compacta e $X \in \mathcal{X}^1(M)$. Se $q \in M$ é tal que $\omega_X(q)$ é um conjunto seccional-hiperbólico, com singularidades, então $\omega_X(q)$ não pode conter qualquer variedade estável local forte.*

Demonstração. (Veja o Lema 2.9 de [10]). A prova é feita por contradição supondo-se que $\omega(q) = \Lambda$ possui uma variedade estável forte local $W_\epsilon^{ss}(x)$ de algum ponto x em Λ . O conjunto

$$H = \{y \in M; \exists z_n \in W_{\epsilon^*}^{ss}(x), \exists t_n \rightarrow -\infty, \text{ com } y = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(z_n)\}$$

é um compacto contido em Λ .

Supondo que H possui alguma singularidade, chega-se a $\Lambda \cap W_\delta^{ss}(\sigma) = W_\delta^{ss}(\sigma)$ para algum $\delta > 0$, o que contradiz o fato de que $\Lambda \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$.

Supondo que H é não-singular, então H é hiperbólico. Daí conclui-se que $q \in H$ e portanto $\Lambda = H$ o que se configura como um absurdo, pois Λ contém singularidades. $\square$

Como consequência desse teorema, citamos dois corolários, o primeiro nos dá informação sobre os conjuntos transitivos isolados contendo uma variedade estável forte local $W_\epsilon^{ss}(x)$ e o segundo nos fala sobre as propriedades topológicas de um conjunto transitivo próprio, ou seja, que não é toda a variedade.

Corolário 1.12. *Um conjunto seccional-hiperbólico transitivo e isolado contendo uma variedade estável forte local de um campo de vetores sobre uma variedade compacta é um repulsor hiperbólico tipo sela.*

Recordemos que um subconjunto Λ de uma variedade M é **próprio** se $\Lambda \neq M$.

Corolário 1.13. *Um conjunto transitivo, próprio, seccional-hiperbólico de um campo de vetores sobre uma variedade compacta tem interior vazio.*

1.4 Seção transversal em dimensão superior

Uma **seção transversal** a um fluxo X , em uma variedade compacta M de dimensão n , é uma subvariedade compacta Σ de dimensão $n - 1$ para a qual existe uma subvariedade M_0 de M com $\Sigma \subset \text{int}(M_0)$ tal que X é transversal a $\text{int}(M_0)$.

Em dimensão $n \geq 3$, a seção Σ é difeomorfa a um hipercubo $I^k = [-1, 1]^k$ de dimensão $k = n - 1$, ou seja, existe um difeomorfismo $f : I^k \rightarrow \Sigma$.

Mais precisamente, seja σ uma singularidade tipo-Lorenz, denotaremos $\dim(W_X^{ss}(\sigma)) = s$, $\dim(W_X^u(\sigma)) = u$ e $\dim(W_X^s(\sigma)) = s + 1$. Além disso, como já vimos, $W_X^{ss}(\sigma)$ separa $W_{loc}^s(\sigma)$ em duas componentes conexas que denotaremos por $W_{loc}^{s,+}(\sigma)$ e $W_{loc}^{s,-}(\sigma)$ respectivamente.

Assim, podemos considerar a bola de raio 1 centrada em zero contida em $\mathbb{R}^u$, $B^u[0, 1] \approx I^u$, onde $u = \dim(W^u(\sigma))$. Da mesma forma, consideraremos $B^{ss}[0, 1] \approx I^{ss}$, a bola de raio 1 centrada em zero contida em $\mathbb{R}^s$ onde $s = \dim(W^{ss}(\sigma))$.

Definição 1.14. Uma **seção transversal singular** associada a uma singularidade tipo-Lorenz σ é um par de subvariedades Σ^+, Σ^- respectivamente transversais a $W_{loc}^{s,+}(\sigma)$ e $W_{loc}^{s,-}(\sigma)$.

Toda seção transversal singular possui um par de subvariedades l^+, l^- definidas como a intersecção das variedades estáveis locais de σ com Σ^+ e Σ^- . Além disso, $\dim(l^*) = \dim(W^{ss}(\sigma))$ ($*$ = +, -). Esses objetos serão referidos como **subvariedades singulares** de Σ^* . Escreveremos l para denotar a subvariedade singular $l^+ \cup l^-$ ou l_Σ quando houver necessidade de especificar a seção transversal e l_σ para especificar a singularidade.

Assim, uma seção transversal singular Σ^* será uma subvariedade difeomorfa a um hipercubo de dimensão $(n - 1)$, ou equivalentemente, difeomorfa a $B^u[-1, 1] \times B^{ss}[-1, 1]$. Seja $f : B^u[-1, 1] \times B^{ss}[-1, 1] \rightarrow \Sigma^*$ o difeomorfismo tal que

$$f(\{0\} \times B^{ss}[-1, 1]) = l^*$$

onde $\{0\} = \{(0, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^u\}$.

Denotaremos a fronteira de Σ^* por $\partial\Sigma^* = \partial^h\Sigma^* \cup \partial^v\Sigma^*$, onde:

$\partial^h\Sigma^* = \{\text{a união das subvariedades fronteiras que são transversais a } l^*\}$

$\partial^v\Sigma^* = \{\text{a união das subvariedades fronteiras que são paralelas a } l^*\}$

1.5 Folheação estável sobre seções transversais

Consideremos $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$ uma decomposição seccional-hiperbólica sobre um conjunto $\Lambda \subset M$. Como $\dim(M) = n$, temos

1. $\dim(E_x^s) = k < n$ para todo $x \in \Lambda$
2. $\dim(E_x^c) = n - k$ para todo $x \in \Lambda$ e
3. $X(x) \in E_x^c$ para todo $x \in \Lambda$

A estrutura parcialmente hiperbólica permite estender E_Λ^s continuamente a um subfibrado E_U^s definido sobre uma vizinhança U de Λ . Além disso, E_U^s é tangente a uma folheação contínua $\mathcal{F}^s$ definida em U , ou seja, para cada $x \in U$, $\mathcal{F}_x^s$ denota uma folha de $\mathcal{F}^s$ tal que $T_x\mathcal{F}_x^s = E_x^s$.

Se $\Sigma \subset U$ é uma seção transversal de X projetamos, como em [9], $\mathcal{F}^s$ sobre Σ e obtemos uma folheação k -dimensional $\mathcal{F}_\Sigma^s = \mathcal{F}^s \cap \Sigma$ cujas folhas são componentes conexas das folhas de $\mathcal{F}^s$ em Σ .

Note que as subvariedades singulares l^* correspondem precisamente às folhas de $\mathcal{F}_\Sigma^s$ obtidas a partir de $\mathcal{F}(\sigma)$, intersectando com a seção transversal.

Uma subvariedade de Σ será chamada **vertical** (**horizontal**) se for **paralela** (**transversal**) à folha estável singular l .

Definição 1.15. Dizemos que uma subvariedade S de Σ é uma k -superfície se ela é a imagem de uma aplicação injetiva C^1 , $S : \text{Dom}(S) \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \Sigma$. Aqui, $k \leq n - 1$ e usaremos S para representar a imagem dessa aplicação em Σ . Uma k -superfície S é **vertical** se ela representa o gráfico de uma aplicação C^1 , $h : I^{n-k-1} \rightarrow I^k$. Assim, $S = \{(h(x), x); x \in I^{n-k-1}\} \subset \Sigma$.

Definição 1.16. Uma folheação contínua $\mathcal{F}$ sobre Σ é vertical (folheação vertical) se suas folhas são s -superfícies verticais e $\partial^v \Sigma \subset \mathcal{F}$. Aqui, $s = \dim B^{ss}[0, 1]$.

Segue da definição acima que as folhas de uma folheação vertical são s -superfícies diferenciáveis.

Observação 1.17. Se $\dim(W_\sigma^u) = 1$, cada folha estável $\mathcal{F}_x^s$ é uma variedade de dimensão $n - 1$, para $x \in W^u(\sigma)$. E o espaço de folhas estáveis $\mathcal{F}^s$ pode ser associado a um intervalo compacto $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Assim, podemos definir (localmente) uma ordem natural “ $<$ ” em $\mathcal{F}^s$.

1.5.1 Campos de Cones e Partições Singulares

Usaremos a folheação estável $\mathcal{F}$ para construir um refinamento de uma seção transversal singular Σ de Λ .

Como já vimos, uma seção transversal associada a uma singularidade $\sigma \in \text{Sing}(X)$ é um par $\Sigma = \{\Sigma_\sigma^+, \Sigma_\sigma^-\}$ e $l = \{l_\sigma^+, l_\sigma^-\}$ é a respectiva subvariedade singular de Σ .

Por construção l divide $\Sigma_\sigma^\pm$ em componentes conexas.

Escolhendo duas folhas $L^1, L^2 \in \mathcal{F}$ tais que:

1. $L^1 < l_\sigma^+ < L^2$ e
2. $L_{\Sigma^+}^1 = L^1 \cap \Sigma_\sigma^+ \neq \emptyset$, $L_{\Sigma^+}^2 = L^2 \cap \Sigma_\sigma^+ \neq \emptyset$

definimos a seção transversal singular $\Sigma_{L^1, L^2}^+ \subset \Sigma^+$ da seguinte forma:

$$\partial^v \Sigma_{L^1, L^2}^+ = L_{\Sigma^+}^1 \cup L_{\Sigma^+}^2 \quad e \quad \partial^h \Sigma_{L^1, L^2}^+ \subset \partial^h \Sigma^+.$$

Da mesma forma definimos Σ_{L^1, L^2}^- .

O conjunto de todas as seções transversais singulares $\Sigma_{L^i, L^j}^\pm$ com $L^i, L^j \in \mathcal{F}$ formam um refinamento de Σ .

Definição 1.18. Dizemos que a aplicação $F : \text{Dom}(F) \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$ preserva a folheação $\mathcal{F}$ sobre Σ se para toda folha $L \in \mathcal{F}$, com $L \subset \text{Dom}(F)$, existe uma folha $f(L)$ em $\mathcal{F}$ tal que

$$F(L) \subset f(L)$$

e a aplicação restrita $F|_L : L \rightarrow f(L)$ é contínua.

Se $\mathcal{F}$ é uma folheação sobre Σ , um subconjunto $B \subset \Sigma$ é saturado por $\mathcal{F}$ se ele é uma união de folhas de $\mathcal{F}$. Nesse caso, dizemos que B é $\mathcal{F}$ -saturado.

■ Campos de Cones

Fixemos uma vizinhança U de Λ tal que a extensão da decomposição $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$ esteja definida. E seja $\Sigma \subset U$ uma seção transversal a X associada a uma singularidade tipo-Lorenz $\sigma \in \Lambda$. Podemos assumir, tomando a seção suficientemente próxima da singularidade, que E_Σ^c também está definido em Σ . Isso nos permite definir um fibrado F_Σ da seguinte forma:

Para todo $x \in \Sigma$ considere

$$F_x = T_x \Sigma \cap E_x^c \quad e \quad F_\Sigma = \bigcup_{x \in \Sigma} F_x$$

Assim, o fibrado F_Σ é transversal a folheação estável $\mathcal{F}_\Sigma$. Além disso, esse fibrado induz um **campo de cones** em Σ da seguinte forma:

Fixado $\alpha > 0$, para todo $x \in \Sigma$ definimos o cone

$$C_\alpha(x) = \{v_x \in T_x \Sigma \mid \angle(v_x, F_x) \leq \alpha\}.$$

onde $\angle(v_x, F_x)$ denota o ângulo entre o vetor $v_x \in T_x \Sigma$ e o subespaço linear F_x .

A aplicação

$$C_\alpha : x \in \Sigma \mapsto C_\alpha(x)$$

define um campo de cones com inclinação α em Σ , centrado em F_x , $x \in \Sigma$.

Um campo de cones C_α é chamado **transversal** a uma folheação $\mathcal{F}$ sobre uma seção transversal Σ se $T_x L$ não estiver contido em $C_\alpha(x)$ para todo $x \in L$ onde $L \in \mathcal{F}$.

Uma **curva diferenciável** em Σ é uma aplicação diferenciável $\gamma : \text{Dom}(\gamma) \subset \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ cujo domínio de γ é um intervalo compacto. Também denotaremos por γ a imagem de γ .

Dizemos que γ é tangente ao campo de cones C_α se $\gamma'(t) \in C_\alpha(\gamma(t))$ para todo $t \in \text{Dom}(\gamma)$.

Se C_α é um campo de cones definido em uma seção transversal Σ então C_α está definido em toda seção $\Sigma_{L', L''} \subset \Sigma$ por restrição, onde $L', L'' \in \mathcal{F}$.

Dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar Σ_ϵ tal que, se γ é uma curva tangente a C_α em Σ_ϵ e γ liga duas componentes conexas de $\partial^v \Sigma_\epsilon$, então $|\gamma'| \leq \epsilon$. Daí, o comprimento de γ satisfaz

$$(1 - \epsilon)d \leq \ell(\gamma) \leq (1 + \epsilon)d \tag{1.1}$$

onde d mede a distância, na métrica usual de M , entre as componentes conexas de $\partial^v \Sigma_\epsilon$ e $\ell(\gamma)$ é o comprimento de γ .

■ Aplicação de Retorno

Agora introduziremos a **aplicação de retorno** Π_Σ associada à seção transversal Σ e ao campo X .

Seu domínio é definido por

$$Dom(\Pi_\Sigma) = \{x \in \Sigma; X_t(x) \in \Sigma \text{ para algum } t > 0\}$$

Definiremos o tempo de retorno

$$t_\Sigma : Dom(\Pi_\Sigma) \rightarrow (0, \infty) ; t_\Sigma(x) = \inf\{t > 0; X_t(x) \in \Sigma\}$$

e a aplicação de retorno

$$\Pi_\Sigma : Dom(\Pi_\Sigma) \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$$

$$\Pi_\Sigma(x) = X_{t_\Sigma(x)}(x)$$

O lema a seguir nos diz que, se X_t não possui órbita periódica em Λ e Σ é uma seção transversal singular, então $Dom(\Pi_\Sigma) = \Sigma \setminus l$.

Lema 1.19. *Seja X seccional-Anosov sobre M e Σ uma seção transversal singular próxima a uma singularidade tipo-Lorenz $\sigma \in \Lambda = M(X)$. Se X_t não possui órbitas periódicas em Λ , então*

$$Dom(\Pi) = \Sigma \setminus l$$

onde $\Pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é a aplicação de retorno e l é a folha singular de $\mathcal{F}$ associada a singularidade σ .

Demonstração. Pela definição da aplicação de retorno já temos que $Dom(\Pi) \subset \Sigma \setminus l$.

Provaremos a inclusão inversa.

Fixemos $x \in \Sigma \setminus l$ e U , um bloco isolante de $\Lambda = M(X)$ tal que $\Sigma \subset U$. Afirmamos que $\omega(x) \cap Sing(X) \neq \emptyset$. Suponha por contradição que $\omega(x) \cap Sing(X) = \emptyset$. Então $\omega(x)$ é hiperbólico e pelo Lema do Sombreamento para fluxos [21], podemos encontrar uma órbita periódica O de X_t próximo a $\omega(x)$. Desse modo, temos $O \subset U$ e assim existe órbita periódica em Λ

(lembre-se que Λ é o maximal invariante em U). Esse fato contraria a hipótese do lema. Portanto temos $\omega(x) \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset$.

Seja então uma singularidade $\sigma \in \omega(x) \cap \text{Sing}(X)$. Afirmamos que σ é tipo-Lorenz.

De fato, se σ não é tipo-Lorenz temos $W_X^s(\sigma) = W_X^{ss}(\sigma)$. Além disso, $x \in \Sigma \setminus l \subset U$ então, $x \in U \setminus W^s(\sigma) = U \setminus W^{ss}(\sigma)$ e, pelo Teorema 1.9, temos que σ é tipo-Lorenz, chegando a uma contradição. Portanto a órbita positiva de x , $O^+(x)$ não deixa U nem se acumula em σ .

Assim $O^+(x)$ intersecta Σ em algum tempo $t(x) > 0$. Isso implica $x \in \text{Dom}(\Pi)$. Como x foi tomado arbitrariamente em $\Sigma \setminus l$ temos $\text{Dom}(\Pi) = \Sigma \setminus l$. $\square$

Denotaremos Π_{ij} a aplicação de retorno induzida por X em Σ_{L^i, L^j}

$$\Pi_{L^i, L^j} : \text{Dom}(\Pi_{L^i, L^j}) \subset \Sigma_{L^i, L^j} \rightarrow \Sigma_{L^i, L^j}$$

onde L^i, L^j pertencem à da folheação induzida $\mathcal{F}_\Sigma$ e Σ_{L^i, L^j} é um refinamento de Σ .

O lema a seguir lista algumas propriedades da aplicação de retorno Π_Σ associada ao refinamento Σ_{ij} de Σ .

Dizemos que um subconjunto $B \subset \Sigma$ é $\mathcal{F}_\Sigma$ -invariante se toda folha de $\mathcal{F}_\Sigma$ que intersecta B está contida em B .

Lema 1.20. *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto seccional-hiperbólico, U uma vizinhança de Λ e $\Sigma \subset U$ uma seção transversal singular associada a uma singularidade tipo-Lorenz σ de X , $\sigma \in \Lambda$, tal que*

$$\Lambda \cap \partial^h \Sigma = \emptyset$$

e $\{\Sigma_{ij}\}$ um refinamento de Σ . Então a aplicação de retorno satisfaz as seguintes propriedades:

1. *$\text{Dom}(\Pi_{ij})$ é $\mathcal{F}_\Sigma$ -invariante;*
2. *para toda folha L de $\mathcal{F}_\Sigma$ contida em $\text{Dom}(\Pi_{ij})$ existe uma única folha L' de $\mathcal{F}_\Sigma$ tal que $\Pi_{ij}(L) \subset L'$ e $\Pi_{ij}|_L : L \rightarrow L'$ é contínua.*

Demonstração. Veja Lema 3 de [8], p. 283. $\square$

■ Existência de partições singulares

O conceito de **partição singular** é uma generalização do conceito de seção transversal incluindo conjuntos com singularidades. Se $\mathcal{S} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_k\}$ é uma coleção de seções transversais, denotaremos também por $\mathcal{S}$ a união desses elementos. Denotaremos ainda

$$\partial\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^k \partial\Sigma_i \quad e \quad Int(\mathcal{S}) = \bigcup_{i=1}^k Int(\Sigma_i)$$

Definição 1.21. Uma **partição singular** de um conjunto invariante Λ de um campo de vetores X é uma coleção disjunta finita $\mathcal{S}$ de seções transversais de X tal que $\Lambda \cap \partial\mathcal{S} = \emptyset$ e $\Lambda \cap Sing(X) = \{y \in \Lambda : X_t(y) \notin \mathcal{S}, \forall t \in \mathbb{R}\}$

O **diâmetro** de $\mathcal{S}$ é a soma dos diâmetros de seus elementos.

A Proposição 2 de [4] prova a existência geral dessas partições.

Proposição 1.22. [4] *Seja Λ um conjunto invariante compacto cujas singularidades são todas hiperbólicas de um campo de vetores X . Se, para todo $\delta > 0$ e $z \in \Lambda \setminus Sing(X)$ existe uma seção transversal Σ_z com diâmetro de tamanho no máximo δ tal que*

$$z \in Int(\Sigma_z) \quad e \quad \Lambda \cap \partial\Sigma_z = \emptyset$$

então Λ tem partições de diâmetros arbitrariamente pequeno.

Demonstração. Como toda singularidade de Λ é hiperbólica podemos escolher $\beta > 0$ tal que

$$\Lambda \cap Sing(X) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t \left(\bigcup_{\sigma \in \Lambda \cap Sing(X)} B_\beta(\sigma) \right). \quad (1.2)$$

Reduzindo β , se necessário, podemos supor que

$$H = \Lambda \setminus \left(\bigcup_{\sigma \in \Lambda \cap Sing(X)} B_\beta(\sigma) \right)$$

não é vazio, pois caso contrário, (1.2) implicaria $\Lambda = \Lambda \cap Sing(X)$, e nesse caso a prova estaria completa.

Claramente $H \subset \Lambda$ e $H \cap Sing(X) = \emptyset$ então existe Σ_z , como no enunciado, para todo $z \in H$.

Para cada z podemos definir

$$V_z = \bigcup_{t \in (-1,1)} X_t(Int(\Sigma_z)).$$

É óbvio que $z \in V_z$ e então $\{V_z : z \in H\}$ é uma cobertura aberta de H que é um conjunto compacto. Então, existe um subconjunto finito $\{z_1, \dots, z_r\} \in H$ tal que

$$H \subset \bigcup_{i=1}^r V_{z_i}.$$

Movendo as seções transversais ao longo do fluxo, podemos assumir que a coleção $\mathcal{S} = \{\Sigma_{z_1}, \dots, \Sigma_{z_r}\}$ é dois a dois disjunta. Além disso, como $\Lambda \cap \partial \Sigma_z = \emptyset$ temos $\Lambda \cap \partial \mathcal{S} = \emptyset$.

Se $z \in \Lambda \setminus \text{Sing}(X)$, então por (1.2) existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$X_t(z) \notin \bigcup_{\sigma \in \Lambda \cap \text{Sing}(X)} B_\beta(\sigma).$$

Mas $X_t(z) \in \Lambda$ pois $z \in \Lambda$ portanto $X_t(z) \in V_{z_i}$ para algum i e então a órbita de z intersecta Σ_{z_i} pela definição de V_{z_i} . Isto prova que

$$\Lambda \cap \text{Sing}(X) = \{z \in \Lambda : X_t(z) \notin \mathcal{S} \ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

o que prova o resultado. □

1.6 Seção Transversal adaptada

Nesta secção discutiremos a existência de seções transversais adaptadas para fluxos seccionais-Anosov em variedades compactas, conexas de dimensão n .

Como já vimos nas seções anteriores, a aplicação de retorno associada ao fluxo X e à seção transversal Σ é definida por

$$\Pi_\Sigma : \text{Dom}(\Pi_\Sigma) \subset \Sigma \rightarrow \Sigma ; \ \Pi_\Sigma(x) = X_{t_{\Sigma}(x)}(x)$$

cujo domínio é dado por $\text{Dom}(\Pi_\Sigma) = \{x \in \Sigma | X_t(x) \in \Sigma \text{ para algum } t > 0\}$ e o tempo de retorno $t_\Sigma : \text{Dom}(\Pi_\Sigma) \rightarrow (0, \infty) ; \ t_\Sigma(x) = \inf\{t > 0 | X_t(x) \in \Sigma\}$

Uma generalização dessas ideias nos conduz à definição de **aplicação holonomia** $\Pi_{D,R}$ de um subconjunto $D \subset M$ em um subconjunto $R \subset \Sigma$. Seu domínio é dado por

$$\text{Dom}(\Pi_{D,R}) = \{x \in D \mid X_t(x) \in R \text{ para algum } t > 0\}$$

o tempo de alcance é

$$t_{D,R} : \text{Dom}(\Pi_{D,R}) \rightarrow (0, \infty); \ t_{D,R}(x) = \inf\{t > 0 | X_t(x) \in R\}$$

e a aplicação holonomia é

$$\Pi_{D,R} : \text{Dom}(\Pi_{D,R}) \subset D \rightarrow R ; \Pi_{D,R}(x) = X_{t_{D,R}(x)}(x).$$

A aplicação holonomia pode ser descontínua para trajetórias positivas de pontos $x \in \text{Dom}(\Pi_{D,\Sigma})$ e a imagem do ponto x , $\Pi_{D,\Sigma}(x)$, pode tocar o bordo da seção transversal $\partial\Sigma$ em um ponto intermediário z . Para evitar que isso aconteça utilizaremos as chamadas **seções transversais adaptadas** que introduziremos a seguir.

Definição 1.23. Seja Σ uma seção transversal de X . Dado $R \subset \Sigma$ dizemos que Σ é *R -adaptada* se a órbita positiva de todo ponto $z \in R$ não intersecta $\Sigma \setminus R$. Em outras palavras, $X_t(z) \notin \Sigma \setminus R$ para todo $(z, t) \in R \times (0, \infty)$.

Quando R é a fronteira $\partial\Sigma$ da seção transversal dizemos que Σ é *∂ -adaptada*.

O lema a seguir nos dá condições suficientes para a continuidade da aplicação holonomia.

Lema 1.24. [8, Lema 3.2] *Seja R um subconjunto fechado de uma seção transversal Σ R -adaptada. Se $D \subset M$ é disjunto de Σ , então $\text{Dom}(\Pi_{D,\Sigma \setminus R})$ é aberto em D e $\Pi_{D,\Sigma \setminus R}$ é contínua.*

Demonstração. A prova é a mesma apresenta em [8] para variedades de dimensão 3. $\square$

Os resultados a seguir nos dão informações sobre a existência de seções transversais adaptadas de um fluxo X sobre uma variedade compacta de dimensão n . As provas apresentadas em [23] valem em dimensão qualquer.

Lema 1.25. [23, Lema 3.8] *Seja M uma variedade compacta de dimensão n e $\Lambda \subset M$ um subconjunto seccional hiperbólico. Considere as seções transversais Σ, Σ_0 tais que $\Sigma_0 \subset \Sigma$ e $\partial^h \Sigma \cap \Lambda = \emptyset$. Se a aplicação de retorno $\Pi|_{\Sigma_0}$ satisfaz*

$$\partial^v(\Sigma_0) \cap \Pi_{\Sigma_0}^{-1}(\text{Int}(\Sigma_0)) = \emptyset$$

Então Σ_0 é uma seção transversal ∂ -adaptada, de X .

Lema 1.26. [23, Teorema 3.9] *Seja L_0 uma folha de $\mathcal{F}$, a folheação estável de X em Σ . Se $L_0 \cap \overline{\text{Per}(X)} = \emptyset$, então existe uma seção adaptada, $\Sigma_0 \subset \Sigma$, arbitrariamente próxima a L_0 com $L_0 \subset \Sigma_0$.*

O próximo resultado estende o Teorema B em [8] para variedades de dimensão $n \geq 3$. Na prova do teorema escreveremos $\Sigma_{[A,B]}$, para representar uma seção transversal cuja fronteira vertical são as variedades A e B, e $\Sigma_{(A,B)}$ para representar uma seção transversal menos a fronteira vertical, isto é, $\Sigma_{(A,B)} = \Sigma_{[A,B]} \setminus (A \cup B)$.

Teorema 1.27. *Toda seção transversal singular Σ próxima a $M(X)$, tal que $\partial^h \Sigma \cap \Lambda = \emptyset$, possui uma seção transversal ∂ -adaptada contendo a folha singular estável $l = l_\Sigma$.*

Demonstração. Fixemos U vizinhança de $\Lambda = M(X)$ tal que a decomposição $T_U M = E_U^s \oplus E_U^c$ é uma extensão contínua da decomposição $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$.

Seja $\Sigma \subset U$ uma seção transversal de X próxima a Λ , satisfazendo $\partial^h \Sigma \cap \Lambda = \emptyset$, e Σ_0 um elemento de um refinamento de Σ .

Como $\partial^h \Sigma_0 \subset \partial^h \Sigma$ temos que $\partial^h \Sigma_0 \cap \Lambda = \emptyset$ e assim voltaremos nossa atenção ao estudo da fronteira vertical $\partial^v \Sigma$ e $\partial^v \Sigma_0$.

Vamos assumir que a folha singular l de Σ e Σ_0 é acumulada por órbitas periódicas. Caso contrário, o resultado segue dos Lemas 1.25 e 1.26 fazendo $L_0 = l$.

Definiremos $\Sigma_0 = \Sigma_{L^-, L^+} \subset \Sigma$, onde L^+, L^- são folhas da folheação estável $\mathcal{F}_\Sigma^s$ induzida por $\mathcal{F}$ em Σ e $L^- < l < L^+$ obedecem a ordem natural do espaço de folhas estáveis $\mathcal{F}$, com L^-, L^+ equidistantes de l .

Devemos provar que

$$\partial^v \Sigma_0 \cap \Pi_{\Sigma_0}^{-1}(\text{int}(\Sigma_0)) = \emptyset \quad (1.3)$$

No que segue, escreveremos $\mathcal{F}^s$ em lugar de $\mathcal{F}_\Sigma^s$ para denotar a folheação estável induzida sobre Σ .

Como l é acumulada por órbitas periódicas podemos tomar uma folha $L_0 \in \mathcal{F}^s$ contendo uma órbita periódica de X e $L_0 \subset \text{Int}(\Sigma_0)$.

Note que $L_0 \subset \text{Dom}(\Pi_{\Sigma_0})$ e, pelo Lema 1.20, sabemos que $\text{Dom}(\Pi_{\Sigma_0})$ é $\mathcal{F}^s$ -invariante. Desse modo, existe um conjunto finito de folhas $B = \{L_1, \dots, L_k\} \subset \text{Dom}(\Pi_{\Sigma_0})$ tal que $\Pi_{\Sigma_0}^i(L_0) = L_i$ para $i = 1, \dots, k$.

Certamente $L_0 \neq l$ e assim devemos ter $L_0 < l$ ou $L_0 > l$, segundo a ordem no espaço de folhas estáveis.

Sem perda de generalidade, assumiremos $L_0 < l$, já que o outro caso pode ser tratado de forma similar.

Temos aqui as seguintes possibilidades:

1. $L_i < l$ para todo $i = 1, \dots, k$;
2. existe $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $L_j > l$.

No caso (2), consideremos as folhas $L_i, L_j \in B$ satisfazendo que realizam $L_i < l < L_j$ e tais que não existe índice m para o qual $L_i < L_m < l$ ou $l < L_m < L_j$. Assim, a seção Σ_{L_i, L_j} com bordo $L_i \cup L_j$ satisfaz (1.3) e a conclusão do teorema.

Agora, consideremos o caso (1): $L_i < l$ para todo $i = 1, \dots, k$.

Seja $L^* \in B$ tal que L^* realiza a distância mínima a l . Tomemos uma folha $L^+ \in \mathcal{F}^s$, com $L^* < l < L^+$, tal que

$$L^* \cap \Pi_{[L^*, L^+]}^{-1}(\text{Int}(\Sigma_{L^*, L^+})) = \emptyset$$

Temos três situações a considerar:

1. $L^+ \cap \text{Dom}(\Pi_{[L^*, L^+]}) = \emptyset$
2. $L^+ \subset \text{Dom}(\Pi_{[L^*, L^+]})$ e $\Pi_{[L^*, L^+]}(L^+) \subset L^* \cup L^+$
3. $L^+ \subset \text{Dom}(\Pi_{[L^*, L^+]})$ e $\Pi(L^+) \subset \text{Int}(\Sigma_{L^*, L^+})$

Se (1) ou (2) ocorre, então a seção transversal Σ_{L^*, L^+} é adaptada e satisfaz (1.3) e o teorema está provado.

Agora, suponha que $L^+ \subset \text{Dom}(\Pi_{[L^*, L^+]})$ e $\Pi(L^+) \subset \text{Int}(\Sigma_{L^*, L^+})$.

Então podemos selecionar uma folha $L^{**} \in \text{Int}(\Sigma_{L^*, L^+})$ tal que a seção $\Sigma_{(L^{**}, L^+]} \subset \text{Dom}(\Pi_{[L^*, L^+]})$ e a aplicação $\Pi_{[L^*, L^+]}$ restrito a $\Sigma_{(L^{**}, L^+]}$ é C^1 e além disso, $\Sigma_{(L^{**}, L^+]}$ é maximal com essa propriedade (ou seja L^{**} está o mais distante possível de L^+). Assim devemos ter $l < L^{**}$.

Novamente temos 3 situações a considerar. Dessa vez, com L^{**} em lugar de L^+ :

Se $L^{**} \cap \text{Dom}(\Pi_{[L^*, L^+]}) = \emptyset$ ou $L^{**} \subset \text{Dom}(\Pi_{[L^*, L^+]})$ e $\Pi_{[L^*, L^+]}(L^{**}) \subset L^*$, a seção transversal $\Sigma_{L^*, L^{**}}$ satisfaz o teorema.

Agora, suponha que $L^{**} \subset \text{Dom}(\Pi_{[L^*, L^+]})$ mas $\Pi_{[L^*, L^+]}(L^{**})$ não pertence a $\text{Int}(\Sigma_{L^*, L^+})$. Como $\Sigma_{(L^{**}, L^+]}$ é a seção maximal C^1 em Σ , então só podemos ter

$$L^{**} \subset \text{Dom}(\Pi_{[L^*, L^+]}) \text{ e } \Pi_{[L^*, L^+]}(L^{**}) \subset L^+$$

Como $\Pi_{[L^*, L^+]}(L^+) \subset \text{Int}(\Sigma_{L^*, L^+})$ implica que a aplicação $\Pi_{[L^*, L^+]}$ restrita a seção $\Sigma_{(L^*, L^+]}$ inverte a orientação. Assim, $\Pi_{[L^*, L^+]}$ possui um ponto fixo

em $\Sigma_{(L^{**}, L^+)}$, que denotaremos L_f . Então a seção transversal $\Sigma_0 = \Sigma_{[L^*, L_f]}$ é uma seção transversal ∂ –adaptada. $\square$

CAPÍTULO 2

Um Lema de Conexão para Fluxos Seccionais-Anosov

Neste capítulo provaremos o Teorema A, enunciado na Introdução, o qual estabelece que o resultado de Morales e Bautista é verdadeiro para fluxos seccionais-Anosov de codimensão 1 em variedades de dimensão qualquer. Para benefício do leitor, reenunciamos aqui o resultado.

Teorema 2.1 (Teorema A). *Seja X um campo Seccional-Anosov sobre uma variedade M compacta de dimensão $n \geq 3$. Suponha que X tem codimensão 1. Considere os pontos $p, q \in M(X)$, com o conjunto α -limite de p não-singular, satisfazendo a seguinte propriedade:*

(C) *Para todo $\epsilon > 0$ existe uma trajetória de um ponto ϵ -próximo a p a um ponto ϵ -próximo a q*

Nessas condições, existe um ponto $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ e $\omega(x) = \omega(q)$ ou $\omega(x)$ é uma singularidade.

Começamos lembrando o conceito de singularidade tipo-Lorenz. Em cada singularidade σ desse tipo, o fibrado tangente se decompõe como

$$T_\sigma M = E_\sigma^s \oplus E_\sigma^u$$

onde $E_\sigma^s \neq \emptyset$ e $E_\sigma^u \neq \emptyset$ com $\dim(E_\sigma^u) = 1$. Além disso, se x é um ponto regular então

$$T_x M = E_x^s \oplus E_x^X \oplus E_x^u = E_x^s \oplus E_x^c$$

ou seja, o fibrado central $E^c(x)$ possui dimensão dois. Lembre-se que E^X representa a direção do campo.

A prova do Teorema A será estabelecida a partir da prova de um caso particular mais simples: quando o ponto p é periódico. Precisamos antes, no entanto, de alguns resultados técnicos auxiliares.

Lema 2.2. *Sejam X um fluxo seccional-Anosov em uma variedade M de dimensão $n \geq 3$ e $\mathcal{S}$ uma partição singular de Λ , o conjunto maximal invariante de X . Seja Π a aplicação de retorno associada a X e $\mathcal{S}$. Então existe uma vizinhança O de $\Lambda \cap \mathcal{S}$ tal que, se um subconjunto $B \subset O$ satisfaz*

$$\Pi^i(B) \subset \text{Dom}(\Pi)$$

para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, então

$$\Pi^n(B) \setminus \text{Dom}(\Pi) \subset l$$

onde l é a subvariedade singular de $\mathcal{S}$ conforme as seções 1.4 e 1.5.

Demonstração. Dos fatos sobre partições singulares do capítulo anterior, sabemos que $(\Lambda \cap \mathcal{S}) \setminus l \subset \text{Dom}(\Pi)$ e $\Pi(\Lambda \cap \mathcal{S}) \setminus l \subset \text{int}(\mathcal{S})$.

Suponha que Λ possui k singularidades então para $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ existem secções transversais S_i^* da partição $\mathcal{S}$ e $V_i^* \subset \text{int}(S_i^*)$, onde $*$ = +, −, de modo que:

- $l \cap V_i^*$ é uma folha de $\mathcal{F}_{V_i^*}^s$.
- $l \cap \partial^v(V_i^*) = \emptyset$
- $V_i^* \setminus l \subset \text{Dom}(\Pi)$

Definamos

$$\Lambda_0 = (\Lambda \cap \mathcal{S}) \setminus \bigcup_{i \in \{1, \dots, k\}} \text{int}(V_i^*), \quad * = +, -.$$

Temos que Λ_0 é um subconjunto compacto de $(\Lambda \cap \mathcal{S}) \setminus l$. Assim,

$$\Pi(\Lambda_0) \subset \Pi(\Lambda \setminus l) \subset \text{int}(\mathcal{S}).$$

Como $\Lambda_0 \cap \partial \mathcal{S} = \emptyset$ o Teorema do Fluxo Tubular [29] implica que para todo $x \in \Lambda_0$ existe uma vizinhança $V_x \subset \text{int}(\mathcal{S})$ de x tal que $V_x \subset \text{Dom}(\Pi)$ e $\Pi(V_x) \subset \text{int}(\mathcal{S})$.

A família $\{V_x : x \in \Lambda_0\}$ é uma cobertura aberta de Λ_0 . Por compacidade Λ_0 possui uma subcobertura finita $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_r}\}$.

Agora definamos

$$O_0 = \left(\bigcup_{j=1}^r V_{x_j} \right) \bigcup \left(\bigcup \{ \text{int}(V_i^*) \} : i \in \{1, \dots, k\}^* = +, - \right).$$

Então, O_0 é uma vizinhança de $\Lambda \cap \mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$ satisfazendo $O_0 \setminus l \subset \text{Dom}(\Pi)$. Observe que

$$O_0 \setminus \text{Dom}(\Pi) = \{(O_0 \setminus l) \cup l\} \setminus \text{Dom}(\Pi) \quad (2.1)$$

$$= \{(O_0 \setminus l) \setminus \text{Dom}(\Pi)\} \cup \{l \setminus \text{Dom}(\Pi)\} \quad (2.2)$$

$$\subset \{\text{Dom}(\Pi) \setminus \text{Dom}(\Pi)\} \cup \{l \setminus \text{Dom}(\Pi)\} = l \quad (2.3)$$

Assim, $O_0 \setminus \text{Dom}(\Pi) \subset l$. Como X é seccional-Anosov e Λ é invariante maximal temos que Λ é Lyapunov estável. Assim, existe uma vizinhança $O \subset O_0$ de $\Lambda \cap \mathcal{S}$ tal que, se $x \in O$ e $t > 0$ satisfaz $X_t(x) \in \mathcal{S}$ então $X_t(x) \in O_0$.

Vamos provar que O satisfaz as propriedades desejadas.

Tomemos $B \subset O$, $n \in \mathbb{N}$ tais que

$$B, \Pi(B), \Pi^2(B), \dots, \Pi^{n-1}(B) \subset \text{Dom}(\Pi)$$

e exista $y \in \Pi^n(B) \setminus \text{Dom}(\Pi)$.

Segue que $y = \Pi^n(x)$ para algum $x \in B$. Denotamos $t(\cdot)$ o tempo de retorno. Temos

$$\Pi^n(x) = X_{t(x) + t(\Pi(x)) + \dots + t(\Pi^{n-1}(x))}(x).$$

Concluimos então que $y \in O_0$ pois $T = t(x) + t(\Pi(x)) + \dots + t(\Pi^{n-1}(x)) > 0$. Como $y \notin \text{Dom}(\Pi)$, chegamos ao fato de que $y \in O_0 \setminus \text{Dom}(\Pi)$. Assim, $\Pi^n(B) \setminus \text{Dom}(\Pi) \subset O_0 \setminus \text{Dom}(\Pi) \subset l$, como queríamos. □

Lema 2.3. *Seja X um campo seccional-Anosov sobre uma variedade compacta M n -dimensional. Então para todo $\alpha \in (0, 1]$ existe uma vizinhança $U_\alpha \subset U(\Lambda)$ de $\Lambda = M(X)$ e constantes positivas $T_\alpha, K_\alpha, \lambda_\alpha$ tais que:*

1. se $x \in U_\alpha$ e $t \geq T_\alpha$, então

$$DX_t(x)(C_\alpha(E_x^c)) \subset C_{\alpha/2}(E_{X_t(x)}^c)$$

2. se $x \in U_\alpha$ é regular, $X(x) \in C_\alpha(E_x^c)$, $t \geq T_\alpha$ e $v_x \in C_\alpha(E_x) \cap N_x$, então

$$\|P_x^t(v_x)\| \|X(X_t(x))\| \geq K_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \|v_x\| \|X(x)\|.$$

onde P_x^t é o fluxo linear de Poincaré.

Demonstração. A demonstração é a mesma do Lema 6.5 de [25] substituindo a hipótese “Lyapunov estável” por “ Λ isolado”, que funciona analogamente. $\square$

Considere a partição singular $\mathcal{S} = \{\Sigma_i\}$ em $\Lambda = M(X)$.

Lema 2.4. *Seja X um campo seccional-Anosov em uma variedade compacta n -dimensional M . Então o conjunto maximal invariante de X , $M(X)$, admite uma partição singular $\mathcal{S}$ e constantes positivas α, ϵ tais que:*

1. se $x \in \text{Dom}(\Pi)$, então

$$D\Pi(x)(C_\alpha(E_x^c) \cap T\Sigma_x) \subset \text{int}(C_{\alpha/2}(E_{\Pi(x)}^c \cap T\Sigma_{\Pi(x)}))$$

2. se $x \in \text{Dom}(\Pi)$ e $v_x \in C_\alpha(E_x^c) \cap T\Sigma_x$, então

$$\|D\Pi(x)(v_x)\| \geq \epsilon^{-1} \|v_x\|$$

3. $\inf\{\angle(v_x, E_x^s) : x \in \mathcal{S}, v_x \in C_\alpha(E_x^c) \cap T\Sigma_x\} > 0$

Demonstração. Seja $\Lambda = M(X)$ o conjunto maximal invariante de X e $\epsilon > 0$ fixado mas arbitrário. Como já vimos, a decomposição $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$ pode ser estendida continuamente a $T_{U(\Lambda)} M = E_{U(\Lambda)}^s \oplus E_{U(\Lambda)}^c$, onde $U(\Lambda)$ é uma vizinhança de Λ .

Sempre temos $\angle(v_x, E_x^s) > 0$ para $v_x \in E_x^c$, $x \in \Lambda$ por causa da decomposição seccional-hiperbólica $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$, o mesmo vale se $x \in U(\Lambda)$.

Podemos escolher $\alpha \in (0, 1]$ tal que $v_x \in C_\alpha(E_x^c) \cap T\Sigma_x$. Tal α existe porque a decomposição $T_{U(\Lambda)} M = E_{U(\Lambda)}^s \oplus E_{U(\Lambda)}^c$ é uma extensão contínua de $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$. Assim temos

$$\inf\{\angle(v_x, E_x^s) : x \in U(\Lambda), v_x \in C_\alpha(E_x^c) \cap T\Sigma_x\} > 0.$$

provando o item (3) do lema.

Seja $U_\alpha \subset U(\Lambda)$ e $T_\alpha, K_\alpha, \lambda_\alpha > 0$ dados pelo Lema 2.3.

Pelo Teorema 1.5 temos $X(x) \subset C_\alpha(E_x^c)$ e pelo Teorema 1.27 para cada singularidade $\sigma \in \Lambda$ existe uma seção transversal singular $\Sigma_\sigma = \Sigma_\sigma^+ \cup \Sigma_\sigma^- \subset U(\Lambda)$ satisfazendo

$$\Lambda \cap (\partial^h \Sigma_\sigma^+ \cup \partial^h \Sigma_\sigma^-) = \emptyset.$$

Vamos representar a partição singular da seguinte forma

$$\mathcal{S}^1 = \{\Sigma_i^{+,1}, \Sigma_i^{-,1}\}_{i=1,\dots,k}$$

onde k é o número de singularidades de X em Λ .

Denotaremos as folhas singulares estáveis de $\Sigma_i^{+,1}$ e $\Sigma_i^{-,1}$ por $l_i^{+,1}$ e $l_i^{-,1}$ respectivamente.

Por simplicidade assumiremos que

$$T\Sigma_x^1 = N_x \quad \forall x \in \mathcal{S}^1$$

onde N_x é o complemento ortogonal de $X(x)$ em $T_x M$, veja Seção 1.1.

Seja D positivo, dependendo somente de $\mathcal{S}^1$, tal que

$$\frac{\|X(x)\|}{\|X(y)\|} \geq D \quad (2.4)$$

para todo $x, y \in \mathcal{S}^1$.

Escolha $T_\epsilon > T_\alpha$ suficientemente grande de modo que

$$K_\alpha e^{\lambda_\alpha t} D > \epsilon^{-1} \quad \forall t \geq T_\epsilon \quad (2.5)$$

Consideremos agora seções transversais $\Sigma_i^{*,\delta} \subset \Sigma_i^{*,1}$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, onde cada $\Sigma_i^{*,\delta}$ contém $l_i^{*,1}$ com $\text{diam}(\Sigma_i^{*,\delta}) \leq 2\delta$ e, além disso

$$l_i^{*,1} \cap \partial^v(\Sigma_i^{*,\delta}) = \emptyset$$

para todo i e δ suficientemente pequeno.

Como $\Lambda \cap (\partial \Sigma_i^{+, \delta} \cup \partial \Sigma_i^{-, \delta}) = \emptyset$, pelo Teorema 1.27 as seções transversais $\Sigma_i^{*,\delta}$ são seções adaptadas. Em particular, $\Lambda \cap \mathcal{S}^\delta = \emptyset$, onde $\mathcal{S}^\delta = \bigcup_i (\Sigma_i^{*,\delta})$. Portanto $\mathcal{S} = \mathcal{S}^\delta$ é uma partição singular de Λ .

Agora, provaremos que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, a família

$$C = \{C_\alpha(E_x^c) \cap T\Sigma_x : \Sigma_x \in \mathcal{S} = \mathcal{S}^\delta\}$$

verifica (1), (2) e (3) do lema.

Fazendo $T\mathcal{S}_x^1 = N_x$ para todo $x \in \mathcal{S}^1$ temos

$$D\Pi(x) = P_x^{t_\delta(x)} \quad \forall x \in \text{Dom}(\Pi) \quad (2.6)$$

onde Π é a aplicação de retorno em $\mathcal{S}^\delta$, $t_\delta(x)$ é o tempo de retorno de $x \in \text{Dom}(\Pi)$ e P^t é o fluxo linear de Poincaré definida na Seção 1.1.

Observe que $t_\delta(x) \rightarrow \infty$ com $\delta \rightarrow 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que $t_\delta(x) \geq T_\epsilon$, para todo $x \in \text{Dom}(\Pi)$. Por 2.6 temos

$$D\Pi(x)(C_\alpha(E_x^c) \cap T\Sigma_x) = P_x^{t_\delta(x)}(C_\alpha(E_x^c) \cap N_x)$$

pelo Lema 2.3 item (1), tem-se

$$D\Pi(x)(C_\alpha(E_x^c) \cap T\Sigma_x) \subset C_{\alpha/2}(E_{\Pi(x)}^c) \cap T\Sigma_{\Pi(x)}$$

para todo $x \in \text{Dom}(\Pi)$ porque $t_{\delta(x)} \geq T_\epsilon > T_\alpha$. Isso prova (1).

Agora, provaremos (2). De (2.6) temos que $D\Pi(x) = P_x^{t_\delta(x)}$ para $x \in \text{Dom}(\Pi)$, pelo Lema 2.3, (2.4), (2.5) e a definição de T_ϵ temos

$$\|D\Pi(x)(v_x)\| = \|P_x^\mu(v_x)\| \quad (\mu = t_\delta(x)) \quad (2.7)$$

$$= \|P_x^\mu(v_x)\| \|X(X_\mu(x))\| \|X(X_\mu(x))\|^{-1} \quad (2.8)$$

$$\geq K_\alpha e^{\lambda_\alpha \mu} \frac{\|X(x)\|}{\|X(X_\mu(x))\|} \|v_x\| \quad (2.9)$$

$$\geq K_\alpha e^{\lambda_\alpha \mu} D \|v_x\| \geq \epsilon^{-1} \|v_x\| \quad (2.10)$$

para $x \in \text{Dom}(\Pi)$ e $v_x \in C_\alpha(E_x^c) \cap T_x \mathcal{S}$ pois $X(x) \in C_\alpha(E_x^c)$ para todo $x \in \mathcal{S}^1$ e $t_\delta(x) > T_\alpha$ e $x \in \text{Dom}(\Pi)$. Isso prova a propriedade (2) do Lema. $\square$

Já vimos que dado um conjunto seccional-hiperbólico Λ uma seção transversal singular Σ é formada por duas seções transversais Σ^+ e Σ^- que intersectam a variedade estável da singularidade $W^s(\sigma)$. Do Lema 1.8 e do Teorema 1.27 dada uma seção transversal singular Σ , existem seções transversais singulares ∂ -adaptadas $\Sigma_1^\pm$ contidas em Σ tais que:

$$1. \Sigma_1^+ \subset \Sigma^+ \text{ e } \Sigma_1^- \subset \Sigma^-$$

$$2. \text{ a fronteira } \partial\Sigma_1 \text{ de } \Sigma_1 \text{ é definida por:}$$

$$\partial\Sigma_1 = \partial^s \Sigma_1^\pm \cup \partial^c \Sigma_1^\pm \text{ onde } \partial^s \Sigma_1^\pm \subset \mathcal{F}^s \text{ e } \partial^c \Sigma_1^\pm \text{ é tangente a } E^c|_{\Sigma_1^\pm}, \text{ e } \partial^c \Sigma_1^\pm \cap \Lambda = \emptyset.$$

3. $\Sigma_1^+ \cap \mathcal{F}^s = l^+$ e $\Sigma_1^- \cap \mathcal{F}^s = l^-$ com folha singular $l = l^+ \cup l^- = \mathcal{F}^s \cap (\Sigma_1^+ \cup \Sigma_1^-)$.

Identificamos $\Sigma_1^\pm$ com um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{n-1}$. Então cada componente conexa $\Sigma_1^\pm$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n-1}$. A folha estável $\mathcal{F}_x^s$ de cada ponto regular x é uma subvariedade de dimensão $(n-1)$ e a folha singular $l_\Sigma = l_{\Sigma_1^+} \cup l_{\Sigma_1^-}$ é uma subvariedade de dimensão $(n-2)$.

Proposição 2.5. *Seja X um campo seccional-Anosov de codimensão 1 sobre uma n -variedade compacta e conexa M . Se um ponto periódico p e uma singularidade σ de X satisfazem a propriedade (C), então existe $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ e $\omega(x)$ é uma singularidade.*

Demonstração. O primeiro passo é mostrar que σ é uma singularidade tipo-Lorenz. Para tanto, sejam U e V vizinhanças arbitrárias disjuntas de p e σ respectivamente. Como p e σ satisfazem a propriedade (C), considere $t > 0$ tal que $X_t(U) \cap V \neq \emptyset$. Escolhendo U suficientemente pequena em torno de p , podemos concluir que $X_{-t}(X_t(U) \cap V)$ contém algum ponto z cuja variedade estável forte (que existe pois X é seccional-Anosov) intersecta $W^u(O) = W^u(O(p))$ em algum ponto z' . Considerando ainda que $\sigma \notin O(p)$, o tempo t pode ser considerado arbitrariamente alto. Como z e z' estão na mesma variedade estável, podemos supor $X_t(z)$ e $X_t(z')$ arbitrariamente próximos. O fato que $X_t(z) \in V$ nos permite também supor que $X_t(z') \in V$. Por outro lado, $z' \in W^u(O)$ que é invariante, portanto $X_t(z') \in W^u(O)$ e assim temos $W^u(O) \cap V \neq \emptyset$. Como V foi tomado arbitrariamente, concluimos que $\sigma \in Cl(W^u(O))$. Segue do Teorema 1.10 que σ é tipo-Lorenz.

Para terminar a prova da Proposição 2.5 é suficiente mostrar que

$$W^s(\sigma) \cap W^u(p) \neq \emptyset$$

assim vai existir um ponto x em M tal que $\alpha(p) = \alpha(x)$ e $\omega(x)$ é uma singularidade.

Neste contexto temos que $W_X^{ss}(\sigma)$ divide $W_{loc}^s(\sigma)$ em duas componentes conexas. Denotaremos essas componentes conexas por $W_X^{s,+}(\sigma)$ e $W_X^{s,-}(\sigma)$.

Como a órbita de p é periódica e, portanto, não possui singularidades, o conjunto $O(p) = \{X_t(p); t \in \mathbb{R}\}$ é hiperbólico, logo cada ponto $x \in O(p)$ possui variedade instável forte $W^{uu}(x)$ bem definida.

Em particular, podemos escolher $\Sigma_1^\pm$ suficientemente próximo à singularidade σ de modo que $O(p) \cap \Sigma_1^\pm = \emptyset$. Em seguida, escolhemos um domínio

fundamental D^u de $W^{uu}(p)$ arbitrariamente próximo de p e disjunto de $\Sigma_1^\pm$. Como $\dim(W^{uu}(p)) = 1$ podemos identificar D^u com um intervalo compacto $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Agora, definimos a aplicação holonomia $\Pi_{D^u, Int(\Sigma_1)}$ de D^u em $Int(\Sigma_1) = Int(\Sigma_1^+) \cup Int(\Sigma_1^-)$.

Denotaremos Π em lugar de $\Pi_{D^u, Int(\Sigma_1)}$ para simplificar a notação. Pelo Lema 1.24 aplicado a D^u e $Int(\Sigma_1)$ temos que o domínio de Π é aberto em $[a, b]$, e Π é contínua.

A partir do fato de ser σ do tipo-Lorenz, uma análise local em torno de σ (via Grobman-Hartman, por exemplo) garante de que toda órbita que passa perto de σ , necessariamente cruza a seção Σ_1 , desde que esta seção seja tomada suficientemente próxima da singularidade em questão. No nosso caso, estabelecemos que $W^u(O)$ se acumula em σ . Estas considerações, por seu turno, nos permitem afirmar que $W^u(O)$ se acumula em algum ponto da subvariedade singular l_{Σ_1} . Ademais, ajustando a construção de D^u , podemos considerar que a está no domínio da holonomia Π .

Considerando que $\Pi(a) \in Int(\Sigma_1)$ e $Dom(\Pi)$ é aberto, fixamos $s > a$ de modo que $\Pi([a, s]) \subset Int(\Sigma_1)$. Assim, temos uma curva $c = \Pi([a, s])$ transversal a E^s , contida no interior de Σ_1 . Como Σ_1 é ∂ -adaptada, temos ainda que c não toca a fronteira de Σ_1 .

Claramente, se $c \cap l_{\Sigma_1} \neq \emptyset$ a proposição fica automaticamente provada. Portanto, podemos supor que $c \cap l_{\Sigma_1} = \emptyset$.

Agora, considere a aplicação de retorno $\Pi_{\Sigma_1} : (Dom(\Pi_{\Sigma_1})) \subset \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$ e defina a composição

$$\Pi = \Pi_{\Sigma_1} \circ \Pi_{D^u, Int(\Sigma_1)} : Dom(\Pi) \rightarrow \Sigma_1.$$

Observe que Π é uma aplicação de retorno com domínio e imagem contidos em Σ_1 . Como Σ_1 é ∂ -adaptada, então a imagem de $\Pi_{\Sigma_1}|_{(\Sigma_1 \setminus \partial(\Sigma_1))} \subset Int(\Sigma_1)$, ou seja, $Im(\Pi_{\Sigma_1}|_{(\Sigma_1 \setminus \partial(\Sigma_1))})$ não toca a fronteira de Σ_1 .

Vamos adotar a seguinte notação:

$$c_0 = \Pi_0([a, s]), c_1 = \Pi(c_0), c_2 = \Pi(c_1), \dots, c_k = \Pi(c_{k-1}), \dots$$

Lembre-se que $c_0 \cap l_{\Sigma_1} = \emptyset$. Nosso desafio é mostrar que chegaremos a algum índice n tal que $c_n \cap l_{\Sigma_1} \neq \emptyset$.

O fato crucial para nossa análise é aquele estabelecido pelo Lema 2.4: existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\|D\Pi(x) \cdot v_x\| \geq \epsilon^{-1} \|v_x\| \quad (2.11)$$

para todo $v_x \in C_\alpha(E_x^c) \cap \Sigma_1$, onde $x \in \Sigma_1$.

Nossa construção seria óbvia se inicialmente tivéssemos toda a curva c_0 “dentro” do campo de cones. Mas não podemos assumir isso. Por outro lado, fixado $x \in c_0$, note que a fibra estável E_x tem codimensão um em $T_x \Sigma_1$. Daí, podemos decompor o vetor tangente à curva c_0 nesse ponto, o qual denotaremos por $T_x(c_0)$ da seguinte maneira:

$$T_x(c_0) = v_s(x) + v_c(x)$$

onde $v_s(x) \in E_x^s$ e $v_c(x) \in E^c(x)$ são determinados de modo único.

Agora, se $y = \Pi(x)$, então temos, respectivamente,

$$T_y(c_1) = v_s(y) + v_c(y)$$

e vê-se que

$$v_s(y) = D\Pi(x) \cdot v_s(x) \quad v_c(y) = D\Pi(x) \cdot v_c(x)$$

Note, agora, que $v_s(y) \ll v_s(x)$, porque $v_s(x)$ é tangente a uma folha contrativa. Além disso, por (2.11), temos que $v_c(y) \gg v_c(x)$. Levando em conta a compacidade de c_0 , existe um tempo mínimo uniforme entre os retornos à secção transversal Σ_1 . Repetindo o argumento, podemos ver que existe um índice, digamos k , tal que a curva c_k é realmente tangente ao campo de cones.

A partir daí, o crescimento imposto por (2.11), o fato de que as curvas c_j são afastadas do bordo de Σ_1 e o diâmetro finito desta seção, nos permitem concluir que, para algum $n \geq 1$, temos $c_n \cap l_{\Sigma_1} \neq \emptyset$. Lembrando que $c_n \subset W^u(p)$ e $l_{\Sigma_1} \subset W^s(\sigma)$, segue-se a conclusão esperada: $W^u(p) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$.

Isto finaliza a prova da proposição. □

Para a demonstração do Teorema A precisaremos de alguns resultados adicionais.

Proposição 2.6. *Seja X um campo seccional-Anosov sobre uma n -variedade compacta M . Se $p \in M(X)$ e $q = \sigma \in \text{Sing}(X)$ satisfazem a propriedade (C) com $\alpha(p)$ não-singular, então existe $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ e $\omega(x)$ é uma singularidade.*

Demonstração. Como $\alpha(p)$ é não singular, segue do Lema Hiperbólico que $\alpha(p)$ é hiperbólico. Além disso, dado $y \in \alpha(p)$ existem sequências de tempos positivos tais que $X_{-t_n}(p) \rightarrow y$ quando $t_n \rightarrow \infty$.

Como a órbita negativa de p permanece próxima a $\alpha(p)$ podemos utilizar a técnica da transformada do gráfico [21] para obter $\epsilon > 0$ e uma sequência de intervalos abertos (lembre-se que W^{uu} é unidimensional)

$$I_n = (X_{t_n}(p) - \epsilon, X_{t_n}(p) + \epsilon) \subset W^{uu}(X_{-t_n}(p))$$

convergindo para o intervalo aberto

$$I = (y - \epsilon, y + \epsilon) \subset W^{uu}(y)$$

Agora, aplicamos o Lema do Sombreamento para fluxos à órbita negativa de p . Mais precisamente, cada trecho de órbita de $X_{t_{n+1}}(p)$ a $X_{t_n}(p)$ pode ser sombreado por uma órbita periódica p_n (Lembre-se que esse trecho pode ser assumido como estando suficientemente próximo do conjunto hiperbólico $\alpha(p)$). Veja a Figura 2.1.

Essa sequência de órbitas periódicas cumpre $p_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$ e, além disso, podemos assumir que a variedade instável (forte) de cada p_n possui tamanho uniformemente grande, por continuidade e proximidade com y . (Veja ainda o Remark 2.7 de [13]). Podemos tomar, ainda, para cada n , um intervalo $J_n \subset W^{uu}(p_n)$ de modo que $J_n \rightarrow I$ com $n \rightarrow \infty$.

Assim, J_n e I_n tendem ao mesmo intervalo I .

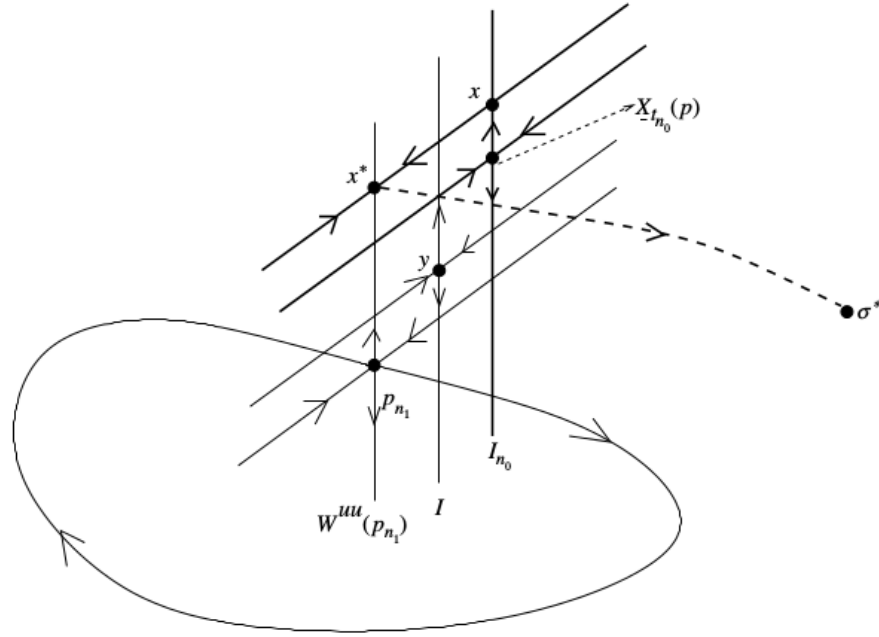
Agora, podemos fixar inteiros positivos n_0, n_1 tais que vale o seguinte:

- (*) a variedade estável de todo ponto próximo a $X_{-t_{n_0}}(p)$ intersecta $W^{uu}(p_{n_1})$ e, reciprocamente, a variedade estável de todo ponto próximo a p_{n_1} intersecta I_{n_0} .

Pela propriedade (C), a órbita positiva de $X_{-t_{n_0}}(p)$ passa ϵ -próximo a q , logo existem sequências $z_n \rightarrow X_{-t_{n_0}}(p)$ e $t_m > 0$ tal que $X_{t_m}(z_m) \rightarrow q$.

Como n_0, n_1 foram escolhidos satisfazendo (*), conseguimos uma sequência $z'_m \in W^{uu}(p_{n_1})$ na variedade instável de z_m cumprindo, também, $X_{t_m}(z_m) \rightarrow q$. Dessa maneira, temos que p_{n_1} e q satisfazem a propriedade (C). Mas p_{n_1} é periódico e então, pela Proposição 2.5, existe x^* tal que $\alpha(p) = \alpha(x^*)$ e $\omega(x^*)$ é uma singularidade σ^* .

Tomando a órbita de x^* no tempo passado, podemos assumir que x^* está próximo de p_{n_1} . Então, usando novamente (*), temos que a variedade estável de x^* intersecta I_{n_0} em algum ponto x . Ora, esse ponto cumpre $\alpha(x) = \alpha(p)$, pois $I_{n_0} \subset W^{uu}(p)$, e, por outro lado, $\omega(x) = \omega(x^*) = \sigma^*$ já que x e x^* estão na mesma variedade estável. Isso finaliza a prova do resultado. $\square$

Figura 2.1: A sequência p_n

O próximo Teorema traz um caso clássico bem conhecido.

Teorema 2.7. *[Anosov Connecting Lema] Seja X um fluxo Anosov sobre uma variedade fechada M e $p, q \in M$ satisfazendo a propriedade (C). Então existe $x \in M$ tal que $\alpha(p) = \alpha(x)$ e $\omega(x) = \omega(q)$.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ pequeno, $\delta > 0$ e U uma vizinhança de Λ como no Lema do Sombreamento para fluxos [21] para $\Lambda = M$.

Se q pertence a órbita positiva de p então $x = p$ satisfaz a conclusão do teorema.

Vamos supor que q não pertence a órbita positiva de p . Assim, podemos usar a órbita negativa de p , a órbita positiva de q e a trajetória de um ponto que passa próximo a p a um ponto próximo a q . Dessa forma, construímos uma δ -órbita, $\gamma(t)$, de X em U . Pelo Lema do Sombreamento essa δ -órbita pode ser ϵ -sombreada pela órbita de algum ponto $x \in M$. Em particular, a órbita negativa (resp. positiva) de x permanece ϵ -próximo a órbita de p (resp. a órbita de q), portanto $x \in W^u(p)$ (resp. $x \in W^s(q)$) de onde temos $\alpha(p) = \alpha(x)$ (resp. $\omega(x) = \omega(q)$). $\square$

2.0.1 Prova do Teorema A

Prova do Teorema A. Seja X um campo seccional Anosov sobre uma variedade compacta M e $p, q \in \Lambda = M(X)$ com $\alpha(p)$ não-singular. Suponha que o par $(p, q) \in M \times M$ satisfaz a propriedade C , isto é, para toda vizinhança U de p e V de q existe $x \in U$ e $t > 0$ tal que $X_t(x) \in V$. Provaremos que existe $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ e $\omega(q) = \omega(x)$ ou $\omega(x)$ é uma singularidade.

Há dois casos triviais, em que tomar $x = p$ estabelece a tese do teorema: se q está na órbita positiva de p ou se $\omega(p)$ é uma singularidade. Podemos assumir, então, que q não pertence à órbita positiva de p e que $\omega(p)$ não é uma singularidade.

Se $\omega(p)$ ou $\omega(q)$ possuir uma singularidade σ , então a continuidade do fluxo implica que o par (p, σ) satisfaz a propriedade (C) e, nesse caso, temos o resultado pela Proposição 2.6.

Se $\alpha(q)$ contém uma singularidade σ , então a continuidade do fluxo e o fato de q não está na órbita positiva de p implicam que o par (p, σ) satisfaz a propriedade (C) e, nesse caso, temos novamente o resultado pela Proposição 2.6.

Vamos supor que os conjuntos limite acima mencionados são todos livres de singularidades.

Como Λ é maximal invariante e $p, q \in \Lambda$, então $\alpha(*), \omega(*) \subset \Lambda$ com $* = p, q$.

Seja U um bloco isolante de Λ positivamente invariante, isto é, $\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(U)$ e $X_t(U) \subset U$ para todo $t > 0$.

Assumindo $\alpha(*)$ e $\omega(*)$ não-singular para $* = p, q$, podemos definir o conjunto H_1 , com $p, q \in H_1$, como segue

$$H_1 = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(U \setminus B_{\delta_1}(\text{Sing}(X)))$$

com $\delta_1 > 0$ escolhido de forma que H_1 seja hiperbólico. Aqui, $B_\delta(A) = \bigcup_{x \in A} B_\delta(x)$ onde $B_\delta(x)$ é a bola aberta centrada em x de raio δ .

Sendo H_1 hiperbólico e $p \in H_1$ temos que $W^{uu}(p)$ está bem definida e é uma variedade invariante de dimensão 1.

Por hipótese, o par (p, q) satisfaz a propriedade (C), ou seja, existem sequências $z_n \rightarrow p$ e $t_n > 0$ tais que $X_{t_n}(z_n) \rightarrow q$. Podemos tomar $t_n \rightarrow \infty$ pois q não pertence à órbita positiva de p .

Além disso, a variedade estável forte $W^{ss}(z_n)$ existe, para cada n , tem tamanho limitado acima de zero e dimensão $(n - 2)$. Então, para cada $W^{ss}(z_n)$ tomemos um ponto $y_n \in W^{ss}(z_n) \cap W^{uu}(p)$ de forma que a sequência $y_n \rightarrow p$ e $X_{t_n}(y_n) \rightarrow q$ com $t_n \rightarrow \infty$.

Suponha que

$$Cl\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} O^+(y_n)\right) \cap Sing(X) \neq \emptyset$$

Seja $\sigma \in Cl\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} O^+(y_n)\right)$. Como $y_n \rightarrow p$ então o par (p, σ) satisfaz a propriedade (C) e assim o resultado segue pela Proposição 2.6.

Agora, vamos assumir que existem $k_0 \in \mathbb{N}$ e $0 < \delta_2 < \delta_1$ tais que

$$\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} O^+(y_n)\right) \cap B_{\delta_2}(Sing(X)) = \emptyset$$

para todo $k \geq k_0$.

Temos que, $O^+(y_n) \subset U$ pois U é invariante positivamente. Daí

$$O^+(y_n) \subset U \setminus B_{\delta_2}(Sing(X))$$

para todo $n \geq k_0$. Além disso, para todo n , $y_n \in W^{uu}(p)$ então $\alpha(y_n)$ é não singular pois $\alpha(y_n) = \alpha(p)$.

Como $y_n \rightarrow p$, podemos tomar δ_3 com $0 < \delta_3 < \delta_2$ tal que

$$O^-(y_n) \subset U \setminus B_{\delta_3}(Sing(X))$$

para todo $n \geq k_0$. Onde $O^-(y_n)$ representa a órbita negativa de y_n .

Consequentemente, cada y_n , com $n \geq k_0$, p e q pertencem a

$$H = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(U \setminus B_{\delta_3}(Sing(X)))$$

que é hiperbólico, pois é um conjunto não-singular contido em Λ seccional-hiperbólico. Então, pela Proposição 2.7(Caso Hiperbólico), existe x tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ e $\omega(x) = \omega(q)$, finalizando a prova do Teorema. □

O Teorema A é falso sem a hipótese de que $\alpha(p)$ é não-singular. O exemplo abaixo, devido a Bautista, Morales e Pacífico, mostra que essa condição é necessária.

Exemplo 2.8. Considere M uma variedade compacta de dimensão 3 e X um campo seccional-Anosov transitivo definido em M . Suponha que X possui uma única singularidade σ , com $\dim(W^u(\sigma)) = 1$ e $W^u(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ possuindo dois ramos conexos, ambos densos, em $M(X)$.

Façamos $p = \sigma$ e q um ponto periódico de X . Como X é transitivo p e q satisfazem quase todas as hipóteses do Teorema A, excetuando-se o fato de que $\alpha(p)$ é singular. Se existe $x \in M(X)$ com $\alpha(x) = \alpha(p)$, então $x \in W^u(\sigma)$. Então temos as seguintes possibilidades:

1. $x = \sigma$. Nesse caso teremos $\omega(x) \neq \omega(q)$
2. $x \neq \sigma$. Nesse caso, x pertence a um dos ramos instáveis de $W^u(\sigma)$, então $\omega(x) = M(X)$ e assim $\omega(x) \neq \omega(q)$.

Em qualquer caso não existe $x \in M$ que satisfaça a conclusão do Teorema.

Lembre-se que dado um conjunto invariante $\Lambda \subset M$ definimos sua variedade instável por $W^u(\Lambda) = \{x \in M : \alpha(x) \subset \Lambda\}$.

Enunciamos agora algumas consequências do Teorema A.

Corolário 2.9. *Seja Λ é um subconjunto compacto, invariante, sem singularidades de X , um campo seccional-Anosov sobre a variedade compacta n -dimensional M . Então $Cl(W^u(\Lambda)) \cap Sing(X) \neq \emptyset$ se, e somente se, tivermos $W^u(\Lambda) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$ para alguma singularidade $\sigma \in Sing(X)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja x_n uma sequência contida em $W^u(\Lambda)$ tal que $x_n \rightarrow \sigma \in Sing(X)$ e $\alpha(x_n) \subset \Lambda$ para todo n .

Seja $p \in Cl(\cup_n \alpha(x_n))$. Assim, p e σ satisfazem as hipóteses do Teorema A. Então existe $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ e $\omega(x) = \sigma$.

De $\omega(x) = \sigma$ segue que $x \in W^s(\sigma)$ e como Λ é compacto segue que $\alpha(x) = \alpha(p) \subset \Lambda$, logo $x \in W^u(\Lambda)$. Portanto $x \in W^u(\Lambda) \cap W^s(\sigma)$.

A outra implicação é imediata. □

Corolário 2.10. *Se O é uma órbita periódica de um campo seccional-Anosov X sobre uma variedade compacta n -dimensional M , satisfazendo a condição $Cl(W^u(O)) \cap Sing(X) \neq \emptyset$, então existe $\sigma \in Sing(X)$ tal que $W^u(O) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Considerando que qualquer ponto na órbita periódica, $p \in O$, tem $\alpha(p)$ não-singular, o resultado segue como consequência do Corolário anterior. □

Definição 2.11. Uma singularidade tipo-Lorenz σ , em um conjunto seccional-hiperbólico Λ , é do **tipo fronteira** se Λ intersecta somente uma componente conexa de $W^s(\sigma) \setminus W^{ss}(\sigma)$.

Corolário 2.12. *Se X_t é um campo seccional-Anosov de codimensão 1, com uma única singularidade σ , e esta é do tipo fronteira, então X_t possui uma infinidade de órbitas periódicas.*

Antes de provarmos o Corolário acima vamos relembrar um resultado provado em [30].

Dizemos que um campo seccional-Anosov X satisfaz a propriedade H se para toda órbita periódica O e toda singularidade tipo-Lorenz σ de X temos

$$Cl(W^u(O)) \cap W_*^s(\sigma) \neq \emptyset \Rightarrow W^u(O) \cap W_*^s(\sigma) \neq \emptyset$$

$*$ $\in \{-, +\}$.

Teorema 2.13. [30] *Seja X_t campo seccional-Anosov de codimensão 1 em variedades compactas satisfazendo a propriedade H . Então X_t possui uma infinidade de órbitas periódicas.*

O Corolário 2.12 foi provado em [30] para variedades compactas de dimensão 3. A mesma prova vale para variedades de dimensão qualquer desde que o Connecting Lemma Seccional-Anosov seja válido .

Prova do corolário 2.12. Seja M uma variedade compacta e X_t um campo seccional-Anosov com uma única singularidade do tipo fronteira, σ e Λ o conjunto invariante maximal de X_t . Pelo Teorema 2.13 basta mostrar que X_t satisfaz a propriedade H .

Seja σ tipo fronteira. Vamos supor, sem perda de generalidade, que

$$W_+^s(\sigma) \cap \Lambda \neq \emptyset \text{ e } W_-^s(\sigma) \cap \Lambda = \emptyset$$

De [3] temos que X_t possui órbitas periódicas. Seja O uma órbita periódica de X_t em Λ , pelo Teorema A existe $x^* \in M$ tal que $\alpha(x^*) = O$ e $\omega_X(x^*) = \sigma$. Como Λ é fechado a órbita de x^* está contida em Λ então

$$Cl(W^u(O)) \cap W_+^s(\sigma) \neq \emptyset \quad (2.12)$$

Como $W^u(O) \subset \Lambda$, então

$$Cl(W^u(O)) \subset Cl(\Lambda) = \Lambda \quad (2.13)$$

De (2.12) e (2.13) temos que $W_+^s(\sigma) \cap \Lambda \neq \emptyset$. Além disso, por (2.12) σ é um ponto de acumulação de $W^u(O)$.

Pelo Connecting Lemma Seccional-Anosov existe $x \in M$ tal que $\alpha(x) = O$ e $\omega(x) = \sigma$. Isso significa que existe $y \in O(x)$ tal que $y \in W^u(O) \cap W^s(\sigma)$. Como σ é do tipo fronteira temos que $W_-^s(\sigma) \cap \Lambda = \emptyset$. Portanto $W^u(O) \cap W_+^s(\sigma) \neq \emptyset$. $\square$

Atratores Seccionais-hiperbólicos

3.1 Atratores Seccionais-hiperbólicos e Conjuntos Lyapunov estáveis

Os lemas a seguir listam algumas das propriedades dos conjuntos Lyapunov estáveis que utilizaremos nesse capítulo. As provas desses resultados podem ser encontradas em [14] para variedades de dimensão arbitrária.

Lema 3.1. *Seja L um conjunto Lyapunov estável de X . Então,*

1. *Se $x_n \in M$ e $t_n \geq 0$ satisfaz $x_n \rightarrow x \in L$ e $X_{t_n}(x_n) \rightarrow y$, então $y \in L$;*
2. $W_X^u(L) \subset L$
3. *Se Γ é um conjunto transitivo de X e $\Gamma \cap L \neq \emptyset$, então $\Gamma \subset L$.*

Lema 3.2. *Um conjunto Lyapunov estável L de um campo de vetores X é um atrator de X se, e somente se, existe uma vizinhança U de Λ tal que $\omega_X(x) \subset \Lambda$, para todo $x \in U$.*

Considere $\mathcal{X}^1(M)$ o conjunto dos fluxos suaves munido da topologia C^1 . Dizemos que uma propriedade P é **genérica** em $\mathcal{X}^1(M)$ se existir uma quantidade enumerável de conjuntos abertos e densos $\Gamma_n \subset \mathcal{X}^1(M)$ tal que qualquer fluxo $Y \in \mathcal{R} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ possui a propriedade P .

Dizemos que um conjunto Λ possui ramos singulares instáveis densos se para cada singularidade σ de X em Λ tem-se, $\Lambda = \omega_X(q)$ para todo q em $W_X^u(\sigma) \setminus \{\sigma\}$.

Em [25][Teorema D], provou-se que :

Todo conjunto singular hiperbólico $\Lambda \subset M^3$, Lyapunov estável com ramos singulares instáveis densos de $X \in \mathcal{X}^1(M)$ é um atrator.

Provaremos que esse resultado é verdadeiro para variedades de dimensão $n \geq 3$. Apresentaremos ainda, um resultado inédito, relacionado a este.

Antes, porém, vale notar que a hipótese exigida, de que Λ possua ramos singulares instáveis densos é bem razoável: essa propriedade é genérica em $\mathcal{X}^1(M)$, pelo menos em variedades de dimensão 3.

Teorema 3.3. [25] *Existe um subconjunto residual em $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}^1(M)$, onde $\dim M = 3$, tal que, todo conjunto Λ transitivo, Lyapunov estável com singularidades, tal que*

$$\dim W_X^u(\sigma) = 1 \quad \forall \sigma \in \text{Sing}_X(\Lambda)$$

possui ramos singulares instáveis densos.

Lema 3.4. [25] *Seja M uma variedade compacta conexa de dimensão $n \geq 3$ e $\Lambda \subset M$ um conjunto Lyapunov estável, seccional hiperbólico de codimensão 1, com ramos singulares instáveis densos de $X \in \mathcal{X}^1(M)$. Se Λ exibe uma seção transversal Σ satisfazendo*

$$\text{int}(\Sigma) \cap W_x^s \cap \Lambda \neq \emptyset \quad (3.1)$$

para todo $x \in \text{int}(\Sigma)$, então Λ é um atrator.

Demonstração. Nas condições acima, para provar que Λ é um atrator basta provar que: se $x_n \in M$ é uma sequência convergindo a $p \in \Lambda$, para n suficientemente grande $\omega_X(x_n) \subset \Lambda$.

Para $\omega_X(p)$ consideraremos dois casos:

1. $\omega_X(p) \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$

Então pelo Lema Hiperbólico 1.4 $\omega_X(p)$ é um conjunto hiperbólico tipo sela, assim para $y \in \omega_X(p)$ regular, $W^u(y)$ está bem definida e tem dimensão 2. Como Λ é Lyapunov estável então $W^u(y) \subset \Lambda$.

Seja Σ uma seção transversal de X contendo y . Escolhendo Σ suficientemente pequena, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in V = X_{(0,\epsilon)}(\Sigma)$ existe $z \in W^u(y) \subset \Lambda$ tal que $x \in W^s(z)$.

Como $y \in \omega_X(p)$ a órbita positiva de p intersecta V . Isso implica que a órbita positiva de x_n também intersecta V para n suficientemente grande pois $x_n \rightarrow p$. Em particular, para todo n suficientemente grande existe $z_n \in \Lambda$ tal que $x_n \in W^s(z_n)$. Assim, $\omega_X(x_n) = \omega_X(z_n) \subset \Lambda$.

2. $\omega_X(p) \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset$.

Vamos supor, por absurdo que, para n suficientemente grande $\omega_X(x_n)$ não está contido em Λ .

Como $\omega_X(p) \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset$ existe uma singularidade $\sigma \in \omega_X(p)$ e como $p \in \Lambda$ temos que $\sigma \in \Lambda$.

Como Λ é transitivo, pois possui ramos instáveis densos, então σ é tipo-Lorenz. Além disso, a codimensão 1 de X implica que $\dim(W^u(\sigma)) = 1$. Como $x_n \rightarrow p$ e $\omega_X(x_n)$ não está contido em Λ para n grande, então existe $q \in W^u(\sigma) \setminus \sigma$ (possivelmente um q em cada componente conexa de $W^u(\sigma)$) tal que a órbita positiva de x_n passa próxima a q para n grande.

Como Λ possui ramos singulares instáveis densos temos que $\Lambda = \omega_X(q)$ então a órbita positiva de q intersecta $\text{int}(\Sigma)$. Como Σ é uma seção transversal de X satisfazendo (3.1) concluímos que pra todo n suficientemente grande existe $z_n \in \Lambda$ tal que $x_n \in W^s(z_n)$. Isso contradiz a hipótese de que $\omega_X(x_n)$ não está contida em Λ para todo n grande. A prova está completa.

□

Proposição 3.5. *Seja Λ um conjunto Lyapunov estável, seccional hiperbólico para um fluxo de $X \in \mathcal{X}^1(M)$ de codimensão 1 com ramos singulares instáveis densos sobre uma variedade compacta M . Se existe $q \in \Lambda$ tal que $\omega_X(q)$ não tem singularidade então Λ é um atrator de X .*

Demonstração. A prova é análoga ao item 1 da prova do teorema anterior.

□

O próximo resultado é uma generalização do Teorema D de [25], para variedades de dimensão arbitrária. Mas, com a restrição de codimensão 1

para o fluxo, ou seja, mantemos $\dim(W^u(\sigma)) = 1$ para toda singularidade de X em Λ .

Teorema 3.6. *Seja $\Lambda \subset M^n$, $n \geq 3$, um conjunto seccional hiperbólico, Lyapunov estável para um fluxo X de codimensão 1, com ramos singulares instáveis densos. Então Λ é um atrator de X .*

Demonstração. Recentemente foi provado em [3] que sob as hipótese acima, Λ possui classe homoclinica não trivial H . Então existe um ponto periódico $q \in \Lambda$ tal que $\omega_X(q)$ não possui singularidades. O resultado segue da Proposição 3.5. $\square$

Teorema 3.7. *Existe um conjunto residual $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}^1(M)$ tal que se $X \in \mathcal{R}$, $\Lambda \subset M^n$ é transitivo, seccional-hiperbólico para X e além disso, toda singularidade $\sigma \in \Lambda$ é tal que $W^u(\sigma) \subset \Lambda$ e $\dim(W^u(\sigma)) = 1$, então Λ é um atrator.*

Antes de provarmos o teorema 3.7 vamos lembrar alguns resultados que serão necessários à demonstração.

Proposição 3.8. [14] *Seja M uma variedade compacta conexa de dimensão n . Existe um residual $\mathcal{R}_1$ de $\mathcal{X}^1(M)$ tal que se $X \in \mathcal{R}$ e $\sigma \in \text{Sing}(X)$, então o conjunto*

$$\{ p \in W_X^u(\sigma) : Cl(\mathcal{O}_X^+(p)) \text{ é Lyapunov estável para } X \}$$

é residual em $W_X^u(\sigma)$.

Lema 3.9. [14] *Se $X \in \mathcal{X}^1(M)$ e $p \in M$, então $Cl(\mathcal{O}_X^+(p))$ é Lyapunov estável para X se, e somente se $\omega_X(p)$ é Lyapunov estável.*

Demonstração. [Prova do Teorema 3.7]

Seja $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1$, o residual da Proposição 3.8. Provaremos que, sob as hipóteses do teorema, Λ possui ramos singulares instáveis densos.

Fixada uma singularidade σ de X , por hipótese $W^u(\sigma) \subset \Lambda$ e pela invariância de Λ , temos $\omega_X(q) \subset \Lambda$ para todo $q \in W^u(\sigma)$. Pela Proposição 3.8 podemos supor que $\omega_X(q)$ é Lyapunov estável, pois o conjunto dos pontos de $W^u(\sigma)$ com essa propriedade é residual em $W^u(\sigma)$. Além disso, quaisquer dois pontos contidos na mesma componente conexa de $W^u(\sigma)$, está contido numa mesma trajetória, pois $\dim(W^u(\sigma)) = 1$.

Como Λ é transitivo, segue do Lema [3.1], que $\Lambda \subset \omega_X(q)$ e assim $\Lambda = \omega_X(q)$. Portanto Λ possui ramos singulares instáveis densos.

Assim, Λ é seccional hiperbólico, Lyapunov estável e possui ramos singulares instáveis densos. Então, pelo Teorema 3.6, Λ é um atrator. $\square$

Referências

- [1] Araujo, V., Arbieto, A. Salgado, L. S. *Dominated splittings for flows with singularities*. Nonlinearity 26, 2391–2407 (2013).
- [2] Arbieto, A. *Sectional Lyapunov Exponents*. Proceedings of the American Mathematical Society, 138, 9, 371-378 (2010).
- [3] Arbieto, Morales, C. A., Lopez, A. M. *Homoclinic classes for sectional-hyperbolic sets*. Preprint arXiv:14083947v1.(2014).
- [4] Arbieto, A., Morales, C. A., Senos, L. *On the Sensitivity of sectional Anosov flows*. Mathm. Zeitschrift 37D30 (2000).
- [5] Arbieto, A., Morales, C. *A Dichotomy for Higher Dimensional Flows*. 2011
- [6] Araujo, V., Pacifico, M. J. *Three Dimensional Flows*. Springer-Verlag. Berlin (2010).
- [7] Bautista, s. *Sobre Conjuntos Singulares Hiperbólicos* Thesis UFRJ (2005).
- [8] Bautista, S., Morales, C. *A sectional-Anosov connecting lemma*. Ergodic Theory and Dynamical System, 30 (2010).
- [9] Bautista, S., Morales, C. *Existence of periodic orbits for singular hyperbolic sets* .Moscow Mathematical Journal, 6 (2006).
- [10] Bautista, S., Morales, C. *Lectures on Sectional-Anosov Flows*. (2009).

- [11] Bautista, S., Morales, C., Pacifico, M. J. *On the intersection of homoclinic classes on sectional hyperbolic sets*. Discrete Contin. Dyn. Syst., 19(4) (2007).
- [12] Bonatti, C., Pumariño, A., Viana, M. *Lorenz attractors with arbitrary expanding dimension*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 325, no. 8, 883-888. (1997).
- [13] Carballo, C.M., Morales, C. *Omega-limit sets close to sectional-hyperbolic attractors*. Illinois J. Math. 48 (2004), 645-663.
- [14] Carballo, C.M., Morales, C., Pacífico, M. J. *Maximal transitive sets with singularities for generic C^1 vector fields*. Bol. Soc. Bras. Mat. 31, 287-303 (2000).
- [15] Doering, C.I. *Persistently transitive vector fields on three-dimensional manifolds* Dynamical Systems and Bifurcation Theory, Pitman Research Notes in Mathematics Series 160, 59-89, (1979)
- [16] Guckenheimer, J., Williams, R.F. *Structural stability of Lorenz attractors* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 50, (1979)
- [17] Lopez, A., M., Finiteness of attractors and repellers on sectional hyperbolic sets, <http://arxiv.org/abs/1309.5558vi> (2013).
- [18] Lopez, A., M., Sectional-Anosov flows in higher dimensions, <http://arxiv.org/abs/1308.6597vi> (2013).
- [19] Gan, S., Li, M., Wen, L., *Robustly transitive singular sets via approach of an extended linear Poincaré flow* Discrete Contin. Dyn. Syst. 13 , no. 2, (2005).
- [20] Hirsch, M., Pugh, C., and Shub, M., *Invariant Manifolds (Lectures Notes in Mathematics, 583)*. Springer, Berlin, 1977.
- [21] Katok, A., Hasselblatt, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 54, Cambridge University Press, Cambridge, (1995)
- [22] Morales, C. *Example of singular-hyperbolic attracting sets*. Dyn. Syst. 22 (2007).

- [23] Morales, C.A *Singular-hyperbolic Closing Lemma*.Michigan Math. J., 56 (2008).
- [24] Metzger, R., Morales, C.*Sectional-hyperbolic systems*.Ergodic Theory and Dynamical System, 28 (2008).
- [25] Morales, C., Pacífico, M. J. *A dichotomy for three-dimensional vector fields* Ergodic Theory and Dynam. Systems, 23, no5, 1575-1600 (2003).
- [26] Morales, C., Pacífico, M. J. *Mixing attractors for 3-flows* Nonlinearity 14 , 359-378 (2001).
- [27] Morales, C., Pacífico, M. J., Pujals, H.. *Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers* Annals of Mathematics, 160,375-432 (2004).
- [28] Morales, C., Pacífico, M. J., Pujals, H.. *Singular-hiperbolic Systems* Proc. Amer. Math. Soc., 127,3393-3401 (1999).
- [29] Palis, J., de Melo, W.. *Geometric theory of dynamical systems* Springer-Verlag New York Inc. (1982).
- [30] Reis, J. *Existence of infinitely many periodic orbits for sectional-Anosov flows, Thesis UFRJ (2011)*.