

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

RONALDO CÉSAR DE PAIVA

Perturbações em soluções do tipo buraco negro obtidas por desacoplamento gravitacional

Guaratinguetá

2022

Ronaldo César de Paiva

Perturbações em soluções do tipo buraco negro obtidas por desacoplamento gravitacional

Dissertação de Mestrado apresentada ao Conselho do Programa de Pós-Graduação em Física da Faculdade de Engenharia e Ciências do Câmpus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Mestre em Física.

Orientador: Profº Dr. Rogério Teixeira Cavalcanti

Guaratinguetá

2022

P149p	Paiva, Ronaldo César de Perturbações em soluções do tipo buraco negro obtidas por desacoplamento gravitacional / Ronaldo César de Paiva – Guaratinguetá, 2022. 60 f : il. Bibliografia: f. 58-60 Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2022. Orientador: Prof. Dr. Rogério Teixeira Cavalcanti 1. Relatividade geral (Física). 2. Gravitação. 3. Buracos negros (Astronomia). 4. Campos gravitacionais. I. Título. CDU 530.12(043)
-------	---

RONALDO CÉSAR DE PAIVA

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRADO EM FÍSICA”**

**PROGRAMA: FÍSICA
CURSO: MESTRADO**

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. ROGÉRIO TEIXEIRA CAVALCANTI
Orientador - UNESP
participou por videoconferência


Prof. Dr. SAULO HENRIQUE PEREIRA
UNESP
participou por videoconferência


Prof. Dr. ROLDÃO DA ROCHA JÚNIOR
Universidade Federal do ABC
participou por videoconferência

Julho de 2022

DADOS CURRICULARES

RONALDO CÉSAR DE PAIVA

NASCIMENTO 05 de setembro de 1997 - São José do Rio Preto / SP

FILIAÇÃO José Soares de Paiva
Claudia Maura Nogueira de Paiva

2016 / 2019 Licenciatura em Física
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

2020 / 2022 Mestrado em Física
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Faculdade de Engenharia e Ciências do Câmpus de Guaratinguetá

Dedico este trabalho ao meu avô, Afonso.

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas foram muito importantes para o desenvolvimento deste trabalho, de maneiras diferentes. Gostaria de agradecer profundamente a todas elas. Algumas dessas pessoas devido apoio especial gostaria de agradecer também de maneira especial.

A minha família, que sempre me incentivou a continuar meus estudos e me deu condições para que sempre pudesse me dedicar integralmente a minha vida acadêmica.

Ao professor Rogério Teixeira Cavalcanti, que aceitou me orientar ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Os seus conselhos e sugestões foram muitos importantes para os resultados apresentados aqui.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, que forneceu apoio financeiro ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Aos amigos que fiz ao ingressar no programa de pós-graduação, como os integrantes do grupo de pesquisa que integro e aos meus companheiros de república.

Este trabalho contou com o apoio da seguinte entidade:

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior - código de financiamento 001.

*“Black holes have no hair.”
(John Archibald Wheeler)*

RESUMO

Neste trabalho, é estudado um método de obtenção de soluções que descrevem buracos negros com cabelos, o desacoplamento gravitacional. Esse método é usado para separar as equações de Einstein para n tensores energia-momento acoplados. A partir da solução obtida por esse método, o algoritmo de Newman-Janis foi aplicado para obter uma métrica que descreve um buraco negro com cabelos em rotação. Além disso, a métrica obtida por desacoplamento gravitacional foi utilizada para estudar o comportamento desse tipo de buraco negro diante de perturbações escalares. Os resultados mostraram assinaturas particulares dos buracos negros com cabelos obtidos por desacoplamento gravitacional com potencial aplicação na física de buraco negros.

PALAVRAS-CHAVE: Relatividade geral. Desacoplamento gravitacional. Buraco negro com cabelos.

ABSTRACT

In this work, a procedure for deriving solutions that describe hairy black holes, the gravitational decoupling, is studied. This method has the purpose to separate Einstein's equations for n coupled energy-momentum tensors. Using the solution obtained from this procedure, the Newman-Janis algorithm was applied to obtain a metric that describes a rotating hairy black hole. Furthermore, the metric obtained by gravitational decoupling was used to study the behavior of this type of black hole in the face of scalar perturbations. The results showed particular signatures of hairy black holes obtained by gravitational decoupling with potential application in black hole physics.

KEYWORDS: General relativity. Gravitational decoupling. Hairy black holes.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Potencial efetivo expresso na Equação (12) para diferentes valores do parâmetro α . Potencial efetivo, em coordenadas de tartaruga, para $l = 1$, no caso extremo ($\ell = 2M/e^2$), com α variando. O caso em que $\alpha = 0$ se trata da solução de Schwarzschild.	41
Figura 2	Esse gráfico corresponde a $\alpha = 0.2$, ele retrata a alta precisão da série truncada para dr_*/dr . O comportamento próximo ao horizonte, localizado em $2M$ no caso extremo, é o principal interesse aqui.	46
Figura 3	Gráfico da função r_* em relação a r , para $0 \leq \alpha \leq 0.6$. O comportamento próximo ao horizonte, localizado em $2M$ no caso extremo, é o principal interesse aqui.	47
Figura 4	Os perfis de onda, soluções da Equação (42), em função da coordenada do cone de luz v , para diversos valores do parâmetro α .	48
Figura 5	Valores absolutos dos perfis de onda, soluções da Equação (42), em função da coordenada do cone de luz v . A imagem à esquerda está em escala logarítmica.	49

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Frequências quase normais de perturbações escalares de um buraco com cabelos	
calculadas pelo Método Mashhoon, ω em unidades de $(2M)^{-1}$	54
Tabela 2 – Frequências quase normais de perturbações escalares de um buraco com cabelos	
calculadas pela aproximação WKB de terceira ordem, ω em unidades de $(2M)^{-1}$.	55

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DG	Desacoplamento Gravitacional
EMT	Equação Master de Teukolsky
FEG	Faculdade de Engenharia e Ciências
LLT	Transformações de Lorentz Locais
RG	Relatividade Geral
UNESP	Universidade Estadual Paulista
WKB	Wentzel–Kramers–Brillouin

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Notação e convenções	15
2	DESACOPLAMENTO GRAVITACIONAL E BURACOS NEGROS COM	
	CABELOS	17
2.1	Desacoplamento gravitacional e buracos negros com cabelos	17
3	FORMALISMO DE NEWMAN-PENROSE	22
3.1	Tetradas	22
3.2	Formalismo de Newman-Penrose	24
3.2.1	Classificação de Petrov	27
4	ALGORITMO DE NEWMAN-JANIS	29
4.1	Prescrição de Newman-Janis	29
4.2	Prescrição de Giampieri	32
4.3	Regras de complexificação	33
4.4	Exemplos	34
4.4.1	Métrica de Kerr	34
4.4.2	Buraco negro com cabelos em rotação	35
5	TEORIA DE PERTURBAÇÃO DE BURACOS NEGROS	39
5.1	Perturbações escalares	40
5.1.1	O método Mashhoon e o potencial de Pöschl-Teller	42
5.1.2	Aproximação WKB	43
5.1.3	Modos quase normais de buracos negros com cabelos obtidos por desacopla-	
	mento gravitacional: resultados numéricos	45
5.2	Equação master de Teukolsky	50
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS	56
	REFERÊNCIAS	58

1 INTRODUÇÃO

Os métodos de desacoplamento gravitacional (DG) compreendem protocolos bem estabelecidos para obtenção de soluções analíticas das equações de campo de Einstein, com variadas aplicações relevantes na física e astronomia (OVALLE, 2017; OVALLE, 2019). O desacoplamento gravitacional e algumas extensões são estudadas em (CASADIO; OVALLE, 2014; OVALLE; CASADIO; SOTO-MAYOR, 2017) e tem sido aplicadas para construir novas soluções a partir das soluções já conhecidas da relatividade geral (RG). Inclusive soluções que descrevem de maneira apropriada distribuições anisotrópicas como em estrelas (ROCHA, 2020; SHARIF; SABA, 2018). Os métodos de DG são capazes de produzir a partir de uma dada fonte gravitacional isotrópica compacta, fontes gravitacionais anisotrópicas compactas, que estão fracamente acopladas. Por exemplo, um fluido perfeito pode ser acoplado, a partir do seu tensor energia-momento, a outros tipos mais elaborados de tensores energia-momento. O resultado disso será uma configuração mais próxima das encontradas na realidade (CONTRERAS; OVALLE; CASADIO, 2021; MAURYA; TELLO-ORTIZ, 2020). Em particular, o caso de DG envolvendo soluções com cabelos tem sido explorado com surpreendentes e relevantes ramificações (OVALLE; CONTRERAS; STUHLIK, 2021; OVALLE et al., 2021). Buracos negros com cabelos apresentam graus de liberdade adicionais de natureza macroscópica. Esses graus de liberdade não estão associados com quantidade conservadas quasilocais que podem ser computadas no nível do horizonte de eventos do buraco negro com cabelos obtido a partir de DG. A maneira como se apresenta a descrição microscópica de buracos negros com graus de liberdade adicionais, correspondentes aos cabelos, aponta para um procedimento efetivo para obtenção de soluções analíticas. Portanto, quantidades termodinâmicas dos buracos negros obtidos por DG podem ser estudadas. Com as primeiras observações de ondas gravitacionais pelo LIGO/Virgo, buracos negros com cabelos obtidos por DG podem ser propostos e investigados no cenário das ondas gravitacionais, explorando aspectos de gravidade em regime não-linear forte e comparando qualquer desvio da configuração da RG. Nos últimos anos, a relatividade numérica tem se consolidado como uma ferramenta essencial no regime totalmente linear da RG, corroborando resultados importantes também decorrentes do regime pós-newtoniano e da teoria de perturbação de buracos negros (BARRETO et al., 2005). Apesar do enorme progresso no campo, a RG não é uma teoria completa (KRASNOV, 2020). Existem questões persistentes em seus fundamentos, como o significado físico de singularidades e a falta de uma teoria quântica de gravidade. Essas questões também motivaram um número considerável de teorias alternativas focadas em abordá-las. O espectro de extensões dos buracos negros da RG, juntamente com a melhor sensibilidade das futuras antenas capazes de captar ondas gravitacionais, podem constituir um conjunto de testes inéditos dos fundamentos da própria gravidade. Desde os trabalhos de Regge e Wheeler (REGGE; WHEELER, 1957; CHANDRASEKHAR; CHANDRASEKHAR, 1998), a teoria de perturbação de buracos negros tem desempenhado um papel fundamental na investigação de problemas no regime de campo forte da RG, assim como em aspectos astrofísicos, física de altas energias e aspectos da interação gravitacional (PANI, 2013; CARDOSO; PANI, 2019; BARACK et al., 2019). Com o aumento no interesse em ondas gravitacionais, a teoria de perturbação de buracos negros

volta à tona. Os avanços nessa teoria constituem uma ferramenta valiosa para física gravitacional, tanto teórica quanto observacionalmente. Dentre os principais resultados, os modos quase normais quantificam o comportamento do buraco negro após uma perturbação externa. Modos quase normais podem indicar a estabilidade do espaço-tempo de fundo diante perturbações. Eles consistem em modos dissipativos de energia de campos com diferentes spins no espaço-tempo de fundo do buraco negro. Formalmente derivadas das equações linearizadas da GR, restringindo as perturbações ao redor de uma solução que descreve um buraco negro. Eles são de fato governados por equações diferenciais parciais de segunda ordem lineares associadas a condições de contorno adequadas no horizonte de eventos do buraco negro e no infinito espacial. Os modos quase normais calculados utilizando a aproximação linear apresentam total conformidade com aqueles determinados a partir de um sistema acoplado não-linear de equações de Einstein, em um tempo suficientemente tardio. Além disso, modos quase normais podem trazer elementos que nos levam a identificação de buracos negros com cabelos obtidos por GD (CARDOSO; PANI, 2019). Para obter informações substanciais dos detectores de ondas gravitacionais, deve-se conhecer cuidadosamente as principais aspectos e comportamento dos modos quase normais destes buracos negros com cabelos. Uma característica relevante desse sistema é o fato de que o horizonte de evento emula uma membrana para campos clássicos, produzindo um problema de valor de contorno não-hermitiano com frequências complexas (CAVALCANTI; PAIVA; ROCHA, 2022). A parte imaginária das frequências carrega a escala de tempo de decaimento da perturbação do buraco negro e quantifica a energia perdida pelo buraco negro. Buracos negros perturbados são inerentemente dissipativos, devido aos efeitos do horizonte de eventos, portanto modos quase normais são características universais na física dos buracos negros. Um aspecto perceptível sobre modos quase normais é que eles dependem somente dos parâmetros do buraco negro que estão associados. Nesse sentido, o espectro de objetos compactos em extensões da GR podem revelar possíveis assinaturas observacionais de teorias alternativas de gravitação (BARACK et al., 2019), como a configuração da GD. As frequências quase normais são independentes da maneira que o buraco negro ou qualquer campo em suas redondezas são perturbados, sendo suficiente e exclusivamente caracterizados pelos parâmetros do buraco negro. O principal objetivo desse trabalho é obter o espectro de frequências quase normais de buracos negros obtidos a partir de GD, analisando os desvios das soluções padrão da GR.

1.1 NOTAÇÃO E CONVENÇÕES

A Teoria da Relatividade Geral é uma teoria geométrica de gravitação proposta por Albert Einstein que se contrapõe a teoria newtoniana, vigente na época de sua publicação. A teoria descreve o espaço-tempo como um variedade lorentziana munida de métrica $g_{\mu\nu}$. Neste trabalho, são utilizadas bases coordenadas e não-coordenadas, dependendo do contexto e necessidade. Além disso, adota-se a assinatura da métrica $(- + + +)$ para $g_{\mu\nu}$. Os termos $g^{\mu\nu}$ podem ser vistos como entradas de uma matriz 4×4 , logo descer os índices, por exemplo, é o mesmo que calcular os componentes da matriz inversa. Quanto a diferenciação, o operador ∇_μ refere-se derivada covariante e ∂_μ , a derivada parcial. Além

disso, o operador de d'Alembert é definido por:

$$\square = \nabla^\mu \nabla_\mu. \quad (1)$$

Diferente da teoria newtoniana, a Teoria da Relatividade Geral considera que energia e momento também influenciam na gravidade, ou seja, influenciam na curvatura do espaço-tempo. As equações de Einstein são as responsáveis por expressar o comportamento da métrica que caracteriza o espaço-tempo em resposta a presença de energia e momento:

$$\mu\nu = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2)$$

Ao lado direito, tem-se o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$. Enquanto ao lado esquerdo, o tensor de Einstein dado por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}. \quad (3)$$

Dentre suas propriedades, destaca-se que o tensor de Einstein é simétrico e que

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0. \quad (4)$$

O tensor de Einstein é definido a partir do tensor de Ricci $R^{\mu\nu}$ e escalar de curvatura de Ricci R . O tensor de Ricci é o traço do tensor de curvatura de Riemann $R^\alpha_{\mu\beta\nu}$, isto é,

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}. \quad (5)$$

e o traço do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ é conhecido como escalar de Ricci R .

A parte sem traço do tensor de Riemann é conhecida como tensor de Weyl $C_{\alpha\mu\beta\nu}$, dado por:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\mu\beta\nu} = & R_{\alpha\mu\beta\nu} + \frac{1}{2}(R_{\alpha\nu}g_{\mu\beta} - R_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + R_{\mu\beta}g_{\alpha\nu} - R_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}) \\ & + \frac{1}{6}R(g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}). \end{aligned} \quad (6)$$

Não é raro encontrar as equações de Einstein escritas com um termo adicional ao tensor de Einstein relacionado a constante cosmológica Λ . Porém, neste trabalho as equações de Einstein possuem o termo da constante cosmológica igual zero. Além disso, é utilizado unidades naturais neste trabalho, isto é, as equações são escritas assumindo que a velocidade da luz e a constante de gravitação universal sejam unitárias, ou seja, $c = G = 1$. É pertinente apresentar a notação que foi utilizada para a parte real e a parte imaginária de um número complexo. Um número complexo z pode ser escrito pela soma:

$$z = \Re(z) + i\Im(z), \quad (7)$$

onde $\Re(z)$ é a parte real e $\Im(z)$ a parte imaginária do número complexo z .

2 DESACOPLAMENTO GRAVITACIONAL E BURACOS NEGROS COM CABELOS

O teorema *no-hair* estabelece que soluções de vácuo de um sistema de Einstein-Maxwell são caracterizadas por três parâmetros clássicos: massa, momento angular e carga elétrica. Entretanto, sabe-se que buracos negros podem ser caracterizados por outros parâmetros associados a simetrias de calibre e campos, além da existência de cabelos quânticos. Esses parâmetros não clássicos são chamados de cabelos em contraposição ao teorema. Ao longo dos anos, estudaram-se maneiras de se contornar o teorema *no-hair* e com isso, estudar soluções que descrevem buracos negros com cabelos (OVALLE et al., 2021). Nesse capítulo é discutido o método de desacoplamento gravitacional (DG). O método é utilizado quando o tensor energia-momento que descreve as propriedades de uma região do espaço-tempo pode ser escrito como a soma de n tensores associados a fontes gravitacionais. Os tensores adicionais podem ser utilizados para descrever configurações mais próximas da realidade. O DG pode ser utilizado para obter novas soluções além das tradicionais da Relatividade Geral, como buraco negros com cabelos. Aplicando o DG é possível desacoplar o sistema de equações de Einstein em outros n sistemas de equações mais simples que o original. Mais do que isso, o DG é capaz de produzir modificações em soluções cosmológicas bem conhecidas, como a métrica de Friedmann-Robertson-Walker. Modificações que em cosmologia podem ser úteis para resolver problemas como a planicidade espacial do Universo, matéria escura e energia escura (CEDENO; CONTRERAS, 2020). Nesse capítulo, é discutido o processo de obtenção de uma solução obtida por DG que descreve um buraco negro com cabelos presente em (OVALLE et al., 2021). Essa solução é um dos objetos de estudo deste trabalho. No Capítulo 4, com o auxílio do algoritmo de Newman-Janis, ela é utilizada para obter uma métrica associado a um buraco negro com cabelos em rotação. Já no Capítulo 5, as perturbações escalares em um espaço-tempo descrito pela solução obtida por DG são objeto de estudo.

2.1 DESACOPLAMENTO GRAVITACIONAL E BURACOS NEGROS COM CABELOS

O algoritmo do DG pode ser implementado quando se toma as soluções das equações de campo de Einstein para separar um dado tensor energia-momento em partes computacionalmente mais tratáveis (MEERT; ROCHA, 2022; CASADIO et al., 2019). As equações de Einstein são dadas por:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\hat{T}_{\mu\nu}, \quad (1)$$

onde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein e o tensor energia-momento pode ser escrito como

$$\hat{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \alpha\Theta_{\mu\nu}. \quad (2)$$

A Equação (2) remete a uma solução da GR usual para $T_{\mu\nu}$, enquanto $\Theta_{\mu\nu}$ está associado a uma fonte gravitacional adicional com α como um parâmetro de DG. O tensor $\Theta_{\mu\nu}$ representa propriedades geométricas ou físicas de um termo adicional qualquer que pode surgir da presença de interações extras, como aquelas geradas pela presença de algum tipo de campo ou por alguma teoria alternativa

de gravitação (BURIKHAM; HARKO; LAKE, 2016).

Além disso, a equação de conservação $\nabla_\mu \hat{T}^{\mu\nu}$ continua válida, de maneira geral. Uma métrica arbitrária estática e de simetria esférica dada por:

$$ds^2 = -e^{\gamma(r)} dt^2 + e^{\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3)$$

pode ser usada na Equação (1). O sistema de equações torna-se:

$$8\pi (T_0^0 + \alpha \Theta_0^0) = -\frac{1}{r^2} + e^{-\beta} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\beta'}{r} \right) \quad (4)$$

$$8\pi (T_1^1 + \alpha \Theta_1^1) = -\frac{1}{r^2} + e^{-\beta} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\gamma'}{r} \right) \quad (5)$$

$$8\pi (T_2^2 + \alpha \Theta_2^2) = \frac{e^{-\beta}}{4} \left(2\gamma'' + \gamma'^2 - \beta'\gamma' + \frac{1}{r} (\gamma' - \beta') \right) \quad (6)$$

O sistema de Equações (4)-(6) está relacionado a densidade:

$$\hat{\rho} = \rho + \alpha \Theta_0^0 \quad (7)$$

e as pressões tangencial e radial

$$\hat{p}_t = p - \alpha \Theta_2^2, \quad (8)$$

$$\hat{p}_r = p - \alpha \Theta_1^1. \quad (9)$$

Com essas quantidades definidas, a anisotropia do sistema é dada por:

$$\Delta = \hat{p}_r - \hat{p}_t. \quad (10)$$

Uma solução para o sistema de Equações (4)-(6) para $\alpha = 0$, isto é, para a fonte descrita por $\hat{T}_{\mu\nu}$ é (MEERT; ROCHA, 2022; CASADIO et al., 2019)

$$ds^2 = -e^{\kappa(r)} dt^2 + e^{\xi(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (11)$$

onde

$$e^{-\xi(r)} = 1 - \frac{8\pi}{r} \int_0^r r'^2 T_0^0(r') dr' = 1 - \frac{2m(r)}{r} \quad (12)$$

é a massa de Misner-Sharp, massa quase local dentro de uma esfera de raio r , em um determinado tempo próprio ¹. A massa de Misner-Sharp nos fornece uma prescrição quase local da energia acomodada no buraco negro que produz a curvatura no espaço-tempo. A fonte adicional $\Theta_{\mu\nu}$ induz o desacoplamento gravitacional da métrica raiz expressa na Equação (11), a solução usual das equações da RG, feito a partir das funções

$$\kappa(r) \rightarrow \gamma(r) = \kappa(r) + \alpha f_2(r) \quad (13)$$

¹ A massa de Misner-Sharp é uma massa quase local significativa de um campo gravitacional, isto é, definida em um limite de uma dada região do espaço-tempo (HU; ZHANG, 2015).

$$e^{\xi(r)} \rightarrow e^{-\beta(r)} = e^{\xi(r)} + \alpha f_1(r), \quad (14)$$

onde f_1 e f_2 são as componentes temporal e radial, respectivamente. Utilizando as Equações (13)-(14) podemos desacoplar as Equações de Einstein em dois sistemas. O primeiro sistema envolve o sistema para o tensor $T_{\mu\nu}$, cuja solução é dada por (11). O segundo sistema está associado ao tensor $\Theta_{\mu\nu}$:

$$8\pi\Theta^0_0 = \alpha \left(\frac{f_1}{r^2} + \frac{f'_1}{r} \right), \quad (15)$$

$$8\pi\Theta^1_1 = \alpha \left[\frac{e^\xi f'_2}{r} + f_1 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\gamma'}{r} \right) \right], \quad (16)$$

$$8\pi\Theta^2_2 = \alpha \left[f_1 \left(2\gamma'' + \gamma'^2 + \frac{2\gamma'}{r} \right) + \frac{f'_1}{4} \left(\gamma' + \frac{2}{r} \right) + Z(r) \right], \quad (17)$$

onde

$$Z(r) = e^{-\xi} \left(2f''_2 + f'^2_2 + \frac{2f'_2}{r} + 2\kappa' f'_2 - \xi' f'_2 \right). \quad (18)$$

O tensor-vácuo, definido quando $\Theta_{\mu\nu} \neq 0$ e $T_{\mu\nu} = 0$ simultaneamente, fornece buracos negros com cabelos por desacoplamento gravitacional. Analisando o sistema (4)-(6), percebe-se que a pressão radial assume valores negativos

$$\hat{p}_r = -\hat{\rho}, \quad (19)$$

e associado a solução de Schwarzschild, obtêm-se:

$$\alpha f_1(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) (e^{\alpha f_2(r)} - 1), \quad (20)$$

com isso a solução do sistema original expressa na Equação (3) torna-se

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) e^{\alpha f_2(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} e^{-\alpha f_2(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (21)$$

Para $r \geq 2M$, o tensor-vácuo é dado expressando $\Theta_{\mu\nu}$ pela combinação linear mais genérica das componentes radial e tangencial do tensor energia-momento:

$$\Theta^0_0 = a\Theta^1_1 + b\Theta^2_2. \quad (22)$$

O sistema (15)-(17) nos fornece

$$rbh''(r - 2M) + 2h'[r(b + a - 1) + 2M(1 - a)] + 2(a - 1)(h - 1) = 0, \quad (23)$$

onde

$$h(r) = e^{\alpha f_2(r)}. \quad (24)$$

De forma trivial, a solução de Schwarzschild pode ser obtida quando $a = 1$. A solução da Equação

(23) é

$$h(r) = 1 + \frac{1}{r - 2M} \left[\ell_0 + r \left(\frac{\ell_0}{r} \right)^m \right], \quad (25)$$

onde $\ell_0 = \alpha\ell$ é uma carga “cabeluda” primária² e

$$m = \frac{2}{b}(a - 1), \quad (26)$$

com $m > 1$ para satisfazer a condição de planicidade assintótica. Por outro lado, a condição de energia dominante implica

$$\hat{\rho} \geq |\hat{p}_t|, \quad (27)$$

$$\hat{\rho} \geq |\hat{p}_t|, \quad (28)$$

fornecendo $m \leq 2$. Portanto, restringindo os parâmetros a e b pelas Equações (22)-(26). Além disso, a condição de energia forte implica

$$\hat{\rho} + 2\hat{p}_t + \hat{p}_r \geq 0, \quad (29)$$

$$\hat{p}_r + \hat{\rho} \geq 0, \quad (30)$$

$$\hat{p}_t + \hat{\rho} \geq 0, \quad (31)$$

com isso a Equação (19) ser lida como

$$-\Theta^0_0 \leq \Theta^2_2 \leq 0. \quad (32)$$

Ao impor as condições de energia a um tensor energia-momento evita-se fontes de matéria exótica ou configurações não-físicas. Considerando o sistema (15)-(17), a Equação (32) pode ser reformulada como

$$G_1(r) := h''(r - 2M) + 2h' \geq 0, \quad (33)$$

$$G_2(r) := h''(r - 2M)r + 4h'M - 2h + 2 \geq 0. \quad (34)$$

A transformação

$$h(r) \rightarrow h(r) - \frac{\ell_0}{r - 2M} \quad (35)$$

torna $G_1(r)$ e $G_2(r)$ invariantes. Soluções com um horizonte próprio em $r \sim M$ e que se aproximam da solução de Schwarzschild padrão no regime de $r \gg 2M$, implicam em $G_1(r) = 0$. Logo, a solução da Equação (33) é dada por:

$$h(r) = d - \alpha \frac{\ell - re^{-r/M}}{r - 2M}, \quad (36)$$

onde d é uma constante de integração. Porém, é importante ressaltar que $h(r)$ também depende da

² O termo carga não remete necessariamente a carga elétrica de um sistema auto-gravitante. Como consequência do teorema *no-hair*, uma solução do tipo buraco negro não carregaria outras “cargas” além da massa, momento angular e carga elétrica. Nesse sentido, uma carga pode ser entendida como um parâmetro característico do buraco negro. As cargas ou parâmetros não clássicos podem ser chamados de cabelos em contraposição ao mesmo teorema. Logo, uma carga “cabeluda” seria uma carga não clássica (OVALLE et al., 2021).

desigualdade expressa em (34). Substituir a expressão de $h(r)$ na Equação (21) implica na métrica

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (37)$$

onde

$$f(r) = 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} + \alpha e^{-\frac{r}{(\mathcal{M} - \frac{\alpha\ell}{2})}}, \quad (38)$$

com horizonte em $r_H = 2M$. A métrica (37) é utilizada ao longo de todo o trabalho. Ela descreve um buraco negro com cabelos. Conforme já citado, o teorema *no-hair* estabelece que a estrutura de um buraco negro é determinada unicamente por sua massa, carga elétrica e momento angular (THORNE; MISNER; WHEELER, 2000). Entretanto, a solução obtida depende de outros parâmetros para uma completa caracterização, o que a faz ser conhecida como um buraco negro com cabelos. No Capítulo 5, o comportamento desta métrica diante de perturbações escalares é estudado. Ao estabelecer $\alpha = 0$, a solução acima se reduz a métrica de Schwarzschild, é realizada a comparação entre essas métricas. A análise feita procura avaliar quais os efeitos e desvios causados pelo parâmetro α na métrica de Schwarzschild. Além disso, a métrica apresentada nesse capítulo é utilizada para obter um tipo de buraco negro com cabelos de simetria axial no Capítulo 4.

3 FORMALISMO DE NEWMAN-PENROSE

O formalismo de Newman-Penrose é extremamente útil na Relatividade Geral. Ele é utilizado, por exemplo, no estudo da teoria perturbativa de buracos negros, através da equação master de Teukolsky, e na classificação de Petrov de um espaço-tempo que nos permite identificar o tipo de campo gravitacional em determinada região (NEROZZI, 2011). Nesse capítulo é apresentado o formalismo de tétrada e em seguida, um caso especial, o formalismo de Newman-Penrose. Essa discussão será pertinente nos capítulos seguintes. O uso do formalismo de Newman-Penrose é essencial na discussão da equação master de Teukolsky, usada para estudar perturbações em espaços-tempo. Além disso, no Capítulo 3 é apresentado o algoritmo de Newman-Janis, onde as tétradas nulas e sua relação com a métrica do espaço-tempo são exploradas para obter soluções de simetria axial a partir de métricas esféricas e estáticas. Na última seção deste capítulo, é apresentada a classificação de Petrov de um espaço-tempo como um exemplo de aplicação do formalismo de Newman-Penrose. Além disso, em muitos momentos ao longo deste trabalho, o tipo de Petrov de um espaço-tempo é referido. Algumas relações são válidas somente para determinado tipo. Sendo assim, uma discussão, mesmo que breve, dos tipos de Petrov com um método de obter a classificação de um espaço-tempo é válida.

3.1 TETRADAS

Nessa seção é feita uma breve discussão sobre tétradas, o texto é baseado no apresentado em (CARROLL, 2003). Quando é necessário uma base para o espaço tangente à uma variedade em um ponto p , por exemplo, recorre-se ao fato de que ela pode ser dada pelas derivadas parciais em relação às coordenadas naquela ponto, isto é, $\hat{e}_{(\mu)} = \partial_\mu$. Além disso, existe uma outra opção, utilizar outra base qualquer para o espaço tangente, desde que o conjunto de vetores da base seja linearmente independente e gere o espaço tangente. Sendo assim, considere que em cada ponto p da variedade exista um o conjunto de vetores que foram uma base $\{\hat{e}_{(a)}\}$. A partir daqui, os índices latinos serão usados como uma forma de simbolizar que tais índices não estão relacionados a nenhum sistema de coordenadas. Como já dito anteriormente, desde que o conjunto de vetores seja base, pode-se escolher qualquer conjunto com quaisquer características. Sendo assim, seja a base $\{\hat{e}_{(a)}\}$ um conjunto ortonormal de vetores, considerando o produto interno ou forma bilinear definidos. Denomina-se a forma canônica da métrica por η_{ab} e se estabelece uma relação para os vetores que compõem a base:

$$g(\hat{e}_{(a)}, \hat{e}_{(b)}) = \eta_{ab}, \quad (1)$$

onde g é o tensor métrico usual. Em um espaço-tempo lorentziano, η_{ab} é a métrica de Minkowski (CARROLL, 2003). O conjunto de vetores que compõem uma base ortonormal é chamado tétrada. Logo, a base de vetores $\{\hat{e}_{(a)}\}$ é uma tétrada. Por se tratar de uma base, a tétrada pode ser utilizada para expressar os vetores da base antiga $\{\hat{e}_{(\mu)}\}$ e vice-versa, como

$$\partial_\mu = e_\mu^a \hat{e}_{(a)}, \quad (2)$$

$$\hat{e}_{(a)} = e^\mu_a \partial_\mu, \quad (3)$$

onde e_μ^a e e^μ_a satisfazem:

$$e^\mu_a e^\nu_a = \delta^\mu_\nu, \quad (4)$$

$$e_\mu^a e^\mu_b = \delta^a_b. \quad (5)$$

Conforme pode-se observar, e_μ^a e e^μ_a são as componentes dos vetores em cada uma das bases. Assim como define-se um conjunto de vetores como base para o espaço-tempo, pode-se definir uma base para as 1-formas da variedade. Portanto, suponha que exista um conjunto de 1-formas ortonormal $\hat{e}^{(a)} = dx^a$, que seja base das 1-formas da variedade. Com isso, escreve-se as 1-formas da base coordenada na nova base utilizando as componentes e_μ^a e e^μ_a definidas anteriormente e vice-versa:

$$dx^\mu = e^\mu_a dx^a, \quad (6)$$

$$dx^a = e^\mu_a dx^\mu. \quad (7)$$

Posto isto, é plausível expandir a interpretação das, até então, componentes dos vetores da tétrada e_μ^a e e^μ_a . As componentes e_μ^a e e^μ_a são também componentes da base ortonormal de 1-formas na base coordenada e componentes da base coordenada de 1-formas na base ortonormal, quando se diz base ortonormal remete-se à tétrada. A vantagem de definir uma base para o espaço tangente naquele ponto da variedade, é que, naquele ponto, qualquer vetor ou 1-forma, quando for o caso, pode ser escrito como combinação linear dos vetores que compõem essa base. Na seção (3.2), é discutido o formalismo de Newman-Penrose. Com ele são apresentadas as tétradas nulas, bases para o espaço-tempo. O fato da tétrada ser base do espaço tangente em um ponto qualquer da variedade torna possível que um tensor arbitrário possa ser escrito a partir dela naquele mesmo ponto. O que é utilizado para determinar os escalares de Weyl, relacionados com as componentes do tensor de curvatura de Weyl. A partir do que foi apresentado até agora, é possível escrever os vetores da base coordenada na nova base, tétrada, e vice-versa. Consequentemente, podemos escrever qualquer vetor em qualquer uma das bases sem dificuldades. Inicialmente, considere um vetor qualquer V escrito em cada uma das bases como

$$V = V^\mu \partial_\mu = V^a \partial_a. \quad (8)$$

Sabe-se que $\partial_a = e^\mu_a \partial_\mu$, o que permite relacionar as componentes de V em cada uma bases:

$$V^\mu \partial_\mu = V^a e^\mu_a \partial_\mu \Rightarrow V^\mu = e^\mu_a V^a. \quad (9)$$

Continuando a discussão a respeito de mudanças de base. Desta vez, considere uma tétrada $\hat{e}_{(a)}$ a qual deve-se aplicar alguma transformação a fim de obter uma nova base para o espaço-tempo que preserve a ortonormalidade do conjunto. Considere as mudanças de base da forma:

$$\hat{e}_{(a)} \rightarrow \hat{e}_{(a')} = \Lambda^a_{a'}(x) \hat{e}_{(a)}. \quad (10)$$

As mudanças de base estão representadas pelas matrizes $\Lambda^a_{a'}(x)$ são transformações dependentes

somente da posição e que satisfazem:

$$\Lambda^a_{a'} \Lambda^b_{b'} \eta_{ab} = \eta_{a'b'}, \quad (11)$$

ou seja, não alteram a forma canônica da métrica. Essas transformações são chamadas transformações de Lorentz locais (LLTs). A mudança de tetradas é importante, pois a necessidade de adaptar a base ao problema de estudo é algo natural. Outro aspecto das tetradas que merece atenção especial é a diferenciação. Quando trata-se de tensores, a derivada covariante usual é dada pela derivada parcial e por termos de correção envolvendo o próprio tensor e símbolos de conexão, os símbolos de Christoffel. Em uma tetrada, o procedimento se assemelha, porém os símbolos de Christoffel $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ são substituídos pelos coeficientes spin $\omega_\mu^a{}_b$. Logo, a derivada covariante de um tensor T^a_b na base de tetrada é (CARROLL, 2003):

$$\nabla_\mu T^a_b = \partial_\mu T^a_b + \omega_\mu^a{}_c T^c_b - \omega_\mu^c{}_b T^a_c, \quad (12)$$

onde $\omega_\mu^a{}_b = e_\nu^a e^\lambda_b \Gamma^\nu_{\mu\lambda} - e^\lambda_b \partial_\mu e_\lambda^a$.

3.2 FORMALISMO DE NEWMAN-PENROSE

O formalismo de Newman-Penrose é um caso especial do formalismo de tetradas. Um referencial de Newman-Penrose é estabelecido em uma variedade lorentziana quadridimensional de métrica $g_{\mu\nu}$ a partir de quatro vetores nulos complexos $\{l_\mu, n_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu\}$ que satisfazem:

$$l^\mu m_\mu = l^\mu \bar{m}_\mu = n^\mu m_\mu = n^\mu \bar{m}_\mu = 0, \quad (13)$$

$$l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = m^\mu m_\mu = \bar{m}^\mu \bar{m}_\mu = 0, \quad (14)$$

$$l^\mu n_\mu = -1 \quad m^\mu \bar{m}_\mu = 1, \quad (15)$$

$$g_{\mu\nu} = -l_\mu n_\nu - n_\mu l_\nu + m_\mu \bar{m}_\nu + \bar{m}_\mu m_\nu. \quad (16)$$

Com isso, a métrica do espaço tangente, a métrica de Minkowski η_{ab} é:

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Foi discutido brevemente as mudanças na derivada covariante quando apresentado o formalismo de tetradas. No formalismo de Newman-Penrose, a derivada covariante é expressa utilizando quatro símbolos diferentes. Todos os símbolos representam a derivada covariante na direção de cada elemento da tetrada:

$$D = l^\mu \nabla_\mu, \quad (18)$$

$$\Delta = n^\mu \nabla_\mu, \quad (19)$$

$$\delta = m^\mu \nabla_\mu, \quad (20)$$

$$\bar{\delta} = \bar{m}^\mu \nabla_\mu. \quad (21)$$

Conforme discutido anteriormente, os símbolos de Christoffel serão substituídos por seus equivalentes, os coeficientes spin. Ambos símbolos são equivalente, já que ambos carregam as mesmas informações. No formalismo de Newman-Penrose existem 12 coeficientes spin complexos. Nesse caso, cada um dos coeficientes spin recebem nomes especiais, são eles (COMPÈRE; FIORUCCI, 2018; CAMPBELL; WAINWRIGHT, 1977):

$$\begin{aligned} \kappa &= -m^\mu l^\nu \nabla_\nu l_\mu, & \lambda &= -n^\mu \bar{m}^\nu \nabla_\nu \bar{m}_\mu, & \alpha &= -\frac{1}{2} (n^\mu \bar{m}^\nu \nabla_\nu l_\mu + m^\mu \bar{m}^\nu \nabla_\nu \bar{m}_\mu), \\ \rho &= -m^\mu \bar{m}^\nu \nabla_\nu l_\mu, & \nu &= -n^\mu n^\nu \nabla_\nu \bar{m}_\mu, & \beta &= -\frac{1}{2} (n^\mu m^\nu \nabla_\nu l_\mu + m^\mu m^\nu \nabla_\nu \bar{m}_\mu), \\ \sigma &= -m^\mu m^\nu \nabla_\nu l_\mu, & \mu &= -n^\mu m^\nu \nabla_\nu \bar{m}_\mu, & \gamma &= -\frac{1}{2} (n^\mu n^\nu \nabla_\nu l_\mu + m^\mu n^\nu \nabla_\nu \bar{m}_\mu), \\ \tau &= -m^\mu n^\nu \nabla_\nu l_\mu, & \omega &= -n^\mu l^\nu \nabla_\nu \bar{m}_\mu, & \epsilon &= -\frac{1}{2} (n^\mu l^\nu \nabla_\nu l_\mu + m^\mu l^\nu \nabla_\nu \bar{m}_\mu). \end{aligned} \quad (22)$$

Um próximo assunto relevante a este trabalho é a discussão do tratamento da curvatura dado pelo formalismo de Newman-Penrose. Em uma variedade quadrimensional, o tensor de Riemann possui vinte componentes reais independentes, enquanto o tensor de Ricci, dez componentes reais. O tensor de Ricci contém o traço tensor de Riemann, porém nesse trabalho é mais interessante estudar a parte sem traço do tensor de Riemann, o tensor de Weyl $C_{\mu\nu\rho\sigma}$. Feitas as considerações, o tensor de Weyl possui dez componentes reais ou cinco componentes complexas. No formalismo de Newman-Penrose, define-se os escalares de Weyl Ψ_i como o conjunto de cinco escalares complexos capazes de caracterizar um tensor de Weyl arbitrário(CAMPBELL; WAINWRIGHT, 1977):

$$\Psi_0 = C_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu m^\nu l^\rho m^\sigma, \quad (23)$$

$$\Psi_1 = C_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu n^\nu l^\rho m^\sigma, \quad (24)$$

$$\Psi_2 = C_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu m^\nu \bar{m}^\rho n^\sigma, \quad (25)$$

$$\Psi_3 = C_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu n^\nu \bar{m}^\rho n^\sigma, \quad (26)$$

$$\Psi_4 = C_{\mu\nu\rho\sigma} n^\mu \bar{m}^\nu n^\rho \bar{m}^\sigma. \quad (27)$$

Observa-se a partir da definições que os escalares de Weyl não são invariantes, pois dependem da tétrada escolhida como base. De acordo com o que foi apresentado anteriormente, se for realizada uma transformações de Lorentz locais na tétrada o resultado será novas bases ortonormais para a variedade em questão. Com isso, pode-se determinar qual será o resultado dessas transformações nos escalares de Weyl. A mudança de tétrada é algo natural que surge durante a resolução de problemas. Realiza-se essa mudança aplicando transformações de Lorentz locais, que mantém as propriedades da base. Inicialmente, considere uma transformação em que l^μ se mantenha inalterado. Em seguida, determine $n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu$ de forma a simplificar os coeficientes spin, por exemplo. A transformação manterá l^μ inalterado e m^μ será reescrito como uma soma entre m^μ e um múltiplo de l^μ a fim de

modificá-lo (O'NEILL, 2014), isto é,

$$m^\mu \mapsto m^\mu + z l^\mu, \quad (28)$$

onde $z \in \mathbb{C}$. Estabelecido isso, determina-se os outros elementos da tétrada, n^μ e $\bar{m}^\mu$. No caso de $\bar{m}$, basta determinar o complexo conjugado de m^μ , logo:

$$\bar{m}^\mu \mapsto \bar{m}^\mu + \bar{z} l^\mu. \quad (29)$$

Considere que n^ν se transforma como uma combinação linear de elementos da tétrada antiga, ou seja,

$$n^\mu \mapsto a l^\mu + b n^\mu + c m^\mu + d \bar{m}^\mu. \quad (30)$$

Agora, existe outro problema. É preciso determinar os coeficientes a, b, c, d para que seja possível ter a relação que traz como n^μ se transforma nesse processo. Considerando as propriedades expressas nas Equações (13)-(15):

$$l^\mu n_\nu = -1 \Rightarrow b l^\mu n_\nu = -1 \Rightarrow b = 1, \quad (31)$$

$$n^\mu m_\mu = 0 \Rightarrow z n^\mu l_\nu + d \bar{m}^\mu m_\nu = 0 \Rightarrow -z + d \bar{m}^\mu m_\nu = 0 \Rightarrow d = z, \quad (32)$$

$$n^\mu \bar{m}_\mu = 0 \Rightarrow \bar{z} n^\mu l_\nu + c m^\mu \bar{m}_\nu = 0 \Rightarrow -\bar{z} + c m^\mu \bar{m}_\nu = 0 \Rightarrow c = \bar{z}, \quad (33)$$

$$n^\mu n_\nu = 0 \Rightarrow -2a + 2z\bar{z} = 0 \Rightarrow a = z\bar{z}. \quad (34)$$

Com isso, a nova tétrada após a transformação é caracterizada. Ainda, existe a possibilidade de propor uma transformação semelhante com n^μ assumindo o papel de l^μ e os resultados obtidos serão semelhantes. Caracterizadas as transformações, pode-se estabelecer os seus efeitos nos escalares de Weyl. Com o objetivo de categorizar tais transformações, agrupa-se todas as possíveis transformações de Lorentz locais em três classes de acordo com suas características (COMPÈRE; FIORUCCI, 2018):

- Classe I: rotações em que l^μ se mantém inalterado. Seja $z \in \mathbb{C}$, então:

$$\begin{aligned} l^\mu &\mapsto l^\mu, \\ n^\mu &\mapsto z \bar{z} l^\mu + n^\mu + \bar{z} m^\mu + z \bar{m}^\mu, \\ m^\mu &\mapsto m^\mu + z l^\mu, \\ \bar{m}^\mu &\mapsto \bar{m}^\mu + \bar{z} l^\mu. \end{aligned} \quad (35)$$

Com isso, os escalares de Weyl transformam-se conforme:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &\mapsto \Psi_0, \\ \Psi_1 &\mapsto \bar{z} \Psi_0 + \Psi_1, \\ \Psi_2 &\mapsto \bar{z}^2 \Psi_0 + 2\bar{z} \Psi_1 + \Psi_2, \\ \Psi_3 &\mapsto \bar{z}^3 \Psi_0 + 3\bar{z}^2 \Psi_1 + 3\bar{z} \Psi_2 + \Psi_3, \\ \Psi_4 &\mapsto \bar{z}^4 \Psi_0 + 4\bar{z}^3 \Psi_1 + 6\bar{z}^2 \Psi_2 + \Psi_3 \bar{z} + \Psi_4. \end{aligned} \quad (36)$$

- Classe II: rotações em que n^μ se mantém inalterado. Seja $z \in \mathbb{C}$, então:

$$\begin{aligned} l^\mu &\mapsto l^\mu + z\bar{z}n^\mu + \bar{z}m^\mu + z\bar{m}^\mu, \\ n^\mu &\mapsto n^\mu, \\ m^\mu &\mapsto m^\mu + zl^\mu, \\ \bar{m}^\mu &\mapsto \bar{m}^\mu + \bar{z}l^\mu. \end{aligned} \tag{37}$$

Com isso, os escalares de Weyl transformam-se conforme:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &\mapsto \Psi_0 + 4z\Psi_1 + 6z^2\Psi_2 + 4z^3\Psi_3 + z^4\Psi_4, \\ \Psi_1 &\mapsto \Psi_1 + 3z\Psi_2 + 3z^2\Psi_3 + z^3\Psi_4, \\ \Psi_2 &\mapsto \Psi_2 + 2z\Psi_3 + z^2\Psi_4, \\ \Psi_3 &\mapsto \Psi_3 + z\Psi_4, \\ \Psi_4 &\mapsto \Psi_4. \end{aligned} \tag{38}$$

- Classe III: nas transformações de Classe III mantemos as direções de l^μ e n^μ inalteradas, isto é, são feitos *boosts* nesses elementos da tétrada. Além disso, rotaciona-se m , consequentemente $\bar{m}$, no plano $m\bar{m}$. Sejam $a, \theta \in \mathbb{R}$, então:

$$\begin{aligned} l^\mu &\mapsto al^\mu, \\ n^\mu &\mapsto a^{-1}n^\mu, \\ m^\mu &\mapsto e^{i\theta}m^\mu, \\ \bar{m}^\mu &\mapsto e^{-i\theta}\bar{m}^\mu. \end{aligned} \tag{39}$$

Com isso, os escalares de Weyl transformam-se conforme:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &\mapsto a^2e^{2i\theta}\Psi_0, \\ \Psi_1 &\mapsto a^{-1}e^{i\theta}\Psi_1, \\ \Psi_2 &\mapsto \Psi_2, \\ \Psi_3 &\mapsto ae^{-i\theta}\Psi_3, \\ \Psi_4 &\mapsto a^2e^{-2i\theta}\Psi_4. \end{aligned} \tag{40}$$

3.2.1 Classificação de Petrov

Uma das aplicações do formalismo de Newman-Penrose é classificar campos gravitacionais a partir da classificação de Petrov. A classificação de Petrov de um espaço-tempo pode ser dada determinando as diferentes maneiras em que Ψ_0 é nulo sob uma transformação de Classe II. Considere um referencial de Newman-Penrose $\{l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu\}$ no qual pode-se determinar os escalares de Weyl Ψ_i com $\Psi_4 \neq 0$. Porém, se Ψ_4 for nulo, existe a possibilidade de realizar uma transformação de Classe I que resolveria este problema (COMPÈRE; FIORUCCI, 2018). Em transformações dessa classe, Ψ_4 transforma-se de acordo com uma lei que depende de todos os escalares de Weyl e ao menos que

todos os escalares de Weyl sejam nulos, transformações de Classe I sempre nos fornecerão $\Psi_4 \neq 0$. Todos os escalares de Weyl são nulos, se a variedade considerada for assintoticamente plana. Sob uma transformação de Classe II, Ψ_0 transforma-se conforme:

$$\Psi_0 \mapsto \Psi_0 + 4z\Psi_1 + 6z^2\Psi_2 + 4z^3\Psi_3 + z^4\Psi_4. \quad (41)$$

É evidente que se $\Psi_0 = 0$, a equação acima é de quarto grau em z . Para descobrir de quantas diferentes maneiras Ψ_0 é nulo, basta encontrar as raízes desta equação:

$$\Psi_0 + 4z\Psi_1 + 6z^2\Psi_2 + 4z^3\Psi_3 + z^4\Psi_4 = 0. \quad (42)$$

Pelo teorema fundamental da álgebra, esta equação admite até quatro soluções não necessariamente distintas. O tipo de Petrov de um espaço-tempo pode ser determinado pelo número de raízes distintas da Equação (42) (OWEN; YUNES; WITEK, 2021). Para cada valor de z , l^μ mudará, conforme descrito nas transformações de Classe II. Os diferentes l^μ são chamados de direções nulas principais. Assim, determina-se o tipo de Petrov do espaço-tempo (COMPÈRE; FIORUCCI, 2018; O'NEILL, 2014):

- Tipo I: quatro direções nulas principais simples (1,1,1,1) - todos os valores de z são distintos;
- Tipo II: uma direção nula principal dupla e duas direções nulas principais simples (2,1,1) - três valores de b distintos com duas raízes iguais.
- Tipo D: duas direções nulas principais duplas (2,2) - dois valores de z distintos com as quatro raízes formando dois pares distintos.
- Tipo III: uma direção principal tripla e uma direção nula principal simples (3,1) - dois valores de b distintos com três raízes iguais.
- Tipo N: uma direção nula principal quádrupla (4) - todos os valores de z são iguais.
- Tipo O: o tensor de Weyl é nulo.

Conforme dito anteriormente, a classificação de Petrov é vista como uma classificação de campos gravitacionais. Na seção 5.2 é derivada a equação master de Teukolsky. Ela é obtida adicionando termos relacionadas a perturbação aos escalares de Weyl relevantes ao problema. A equação master de Teukolsky é utilizada para estudar perturbações de diferentes tipos em buracos negros em rotação, como é o caso descrito pela métrica de Kerr. De maneira geral, as relações apresentadas na seção 5.2 são válidas para espaços-tempo do tipo D, como é o caso do espaço-tempo de Kerr e de Schwarzschild.

4 ALGORITMO DE NEWMAN-JANIS

O algoritmo de Newman-Janis é um método de obtenção de soluções das Equações de campo. A partir do algoritmo é possível obter métricas com rotação a partir de métricas estáticas. Inicialmente, foi o método original para a obtenção da solução de Kerr-Newman (JUNIOR et al., 2020). O algoritmo utiliza do processo de complexificação de coordenadas associado a uma transformação complexa das coordenadas para obter uma nova solução a partir de uma métrica semente já existente. Originalmente, o algoritmo utilizava o formalismo de Newman-Penrose, apresentado no capítulo anterior, utilizando o fato de que nele a métrica do espaço-tempo pode ser escrita a partir da base de tétrada nula. O procedimento consiste em escrever a base de tétrada nula em relação a semente, aplicar uma complexificação associada a uma transformação de coordenadas para obter uma nova base de tétradas para por fim, utilizá-la para escrever a nova métrica. A descrição com mais detalhes do algoritmo de Newman-Janis é feita nesse capítulo. Na seção 4.1, é apresentada a prescrição de Newman-Janis, onde o formalismo de tétrada discutido anteriormente é necessário. Na seção seguinte, uma prescrição alternativa é apresentada, nela o formalismo de tétrada pode ser abandonado, o que torna o algoritmo menos trabalhoso. Ambas prescrições são equivalentes e fornecem os mesmos resultados. Na última seção deste capítulo são apresentados exemplos de aplicação do algoritmo de Newman-Janis, nessa seção é obtido o elemento de linha da métrica de Kerr, a partir da métrica de Schwarzschild. Além disso, a métrica obtida no Capítulo 2, que descreve um buraco negro com cabelos, é utilizada como uma semente e ao aplicar o algoritmo de Newman-Janis, é obtida uma solução que descreve buraco negros com cabelos em rotação. Esse resultado é de especial interesse, pois é possível derivar a equação master de Teukolsky, apresentada no Capítulo 5, para a métrica obtida e estudar perturbações em um espaço-tempo descrito por ela.

4.1 PRESCRIÇÃO DE NEWMAN-JANIS

A prescrição de Newman-Janis foi a originalmente proposta. Considere uma métrica que representa um espaço-tempo de simetria esférica com elemento de linha:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + h(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1)$$

A métrica expressa na Equação (1) será a semente. Reescreva a semente de maneira que o componente g_{rr} seja nulo (ERBIN, 2017; BAMBI; MODESTO, 2013). Portanto, reescreva a semente em coordenadas de Eddington-Finkelstein introduzindo,

$$du = dt - f(r)^{-1}dr. \quad (2)$$

Obtendo assim,

$$ds^2 = -f(r)du^2 - 2dudr + h(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3)$$

Em seguida, em relação a inversa da semente,

$$\partial_s^2 = -2\partial_u\partial_r + f(r)\partial_r^2 + h(r)^{-1} [\partial_\theta^2 + \csc^2\theta\partial_\phi^2] \quad (4)$$

tem-se a tétrada complexa nula composta pelo vetores $l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu$, conforme apresentado no Capítulo 4. Neste mesmo capítulo foi estabelecida uma relação entre a tétrada e a métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo. A inversa da semente deve ser escrita como

$$g^{\mu\nu} = -l^\mu n^\nu - l^\nu n^\mu + m^\mu \bar{m}^\nu + m^\nu \bar{m}^\mu. \quad (5)$$

Assim é possível de determinar os componentes da tétrada nula (ERBIN, 2017; BAMBI; MODESTO, 2013):

$$l^\mu = \delta_r^\mu, \quad (6)$$

$$n^\mu = \delta_u^\mu - \frac{f(r)}{2}\delta_r^\mu, \quad (7)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2h(r)}} \left(\delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\delta_\phi^\mu \right). \quad (8)$$

A verificação é facilmente realizada. Observa-se que os componentes não nulos são:

$$\begin{aligned} g^{ur} &= g^{ru} = -1, \\ g^{rr} &= f(r), \\ g^{\theta\theta} &= h(r)^{-1}, \\ g^{\phi\phi} &= (h(r)\sin^2\theta)^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Em seguida, realize a transformação de coordenadas (ERBIN, 2017; BAMBI; MODESTO, 2013):

$$r = r' - ia \cos\theta, \quad (10)$$

$$u = u' + ia \cos\theta, \quad (11)$$

onde a é um parâmetro com dimensão de momento angular por unidade de massa. Na métrica original, a semente, r e u assumiam valores reais. Porém, a transformação expressa em (10-11) mostra que, sendo r e u reais, então r' e u' devem ser complexos, o que já não corresponde a semente. Reciprocamente, se r' e u' são reais, r e u devem ser complexos. Associada a transformação de coordenadas, realize a complexificação das funções $f(r)$ e $h(r)$ (ERBIN, 2017; BAMBI; MODESTO, 2013). Em um primeiro momento, não será discutido qual complexificação seria aplicada a cada uma das funções. Chamaremos as novas funções, após a complexificação, de $\tilde{f}(r')$ e $\tilde{h}(r')$, funções reais de domínio complexo. O processo de complexificação das funções da métrica é um dos problemas do algoritmo de Newman-Janis, pois carrega consigo uma arbitrariedade na escolha da complexificação dentre as várias possíveis (ERBIN, 2017). Dando continuidade ao procedimento, aplique a transformação de coordenadas na tétrada, obtendo os vetores componentes dados por (ERBIN, 2017; BAMBI;

MODESTO, 2013):

$$l'^\mu = \delta_{r'}^\mu, \quad (12)$$

$$n'^\mu = \delta_{u'}^\mu - \frac{\tilde{f}(r')}{2} \delta_{r'}^\mu, \quad (13)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{h}(r')}} \left(\delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_\phi^\mu - ia \sin \theta (\delta_{u'}^\mu - \delta_{r'}^\mu) \right). \quad (14)$$

Conforme já apresentado, no formalismo de Newman-Penrose a métrica do espaço-tempo pode ser expressa como um produto dos vetores que compõem uma tétrada nula, conforme expresso na Equação (5), os componentes não nulos são (JUNIOR et al., 2020):

$$\begin{aligned} g^{uu} &= a^2 \sin^2 \theta \tilde{h}(r')^{-1}, \\ g^{ur} &= g^{ru} = -1 + a^2 \sin^2 \theta \tilde{h}(r')^{-1}, \\ g^{u\phi} &= g^{\phi u} = a \tilde{h}(r')^{-1}, \\ g^{rr} &= \tilde{f}(r') + a^2 \sin^2 \theta \tilde{h}(r')^{-1}, \\ g^{r\phi} &= g^{\phi r} = -a \tilde{h}(r')^{-1}, \\ g^{\theta\theta} &= \tilde{h}(r')^{-1}, \\ g^{\phi\phi} &= (\tilde{h}(r') \sin^2 \theta)^{-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Por fim, utilizando a Equação (15), o novo elemento de linha ds'^2 em coordenadas nulas avançadas é dado por (BAMBI; MODESTO, 2013):

$$\begin{aligned} ds'^2 &= -\tilde{f}(r') du'^2 - 2du' dr' + \tilde{h}(r') d\theta^2 - 2a \sin^2 \theta \left[1 - \tilde{f}(r') \right] du' d\phi \\ &\quad + 2a \sin^2 \theta dr' d\phi + \sin^2 \theta \left[\tilde{h}(r') + a^2 \sin^2 \theta \left(2 - \tilde{f}(r') \right) \right] d\phi^2, \end{aligned} \quad (16)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} ds'^2 &= -\tilde{f}(du' - a \sin^2 \theta d\phi)^2 - 2(du' - a \sin^2 \theta d\phi)(dr' + a \sin^2 \theta d\phi) \\ &\quad + \tilde{h}(r') (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (17)$$

Claramente, a métrica acima difere da semente. A Equação (16) expressa a métrica obtida após a aplicação do algoritmo de Newman-Janis. Seria pertinente adicionar dois passos opcionais ao algoritmo de Newman-Janis (ERBIN, 2017; JUNIOR et al., 2020):

- reescrever o elemento de linha obtido em coordenadas de Boyer-Lindquist, o que nem sempre será possível;
- verificar se a métrica satisfaz as equações de campo de Einstein, pois o algoritmo produz métricas não necessariamente *on-shell*.

4.2 PRESCRIÇÃO DE GIAMPIERI

O desenvolvimento da prescrição de Giampieri feito nessa seção foi desenvolvido a partir de (ERBIN, 2017). Inicialmente, foi discutida a prescrição original do algoritmo feita por Newman-Janis. Esta prescrição pode ser muitas vezes trabalhosa, por isso é interessante apresentar uma versão alternativa em que as etapas mais trabalhosas possam ser evitadas. Na prescrição de Giampieri, descarta-se a necessidade do formalismo de Newman-Penrose com as tétradas nulas, o que por si só torna o procedimento mais simples (ERBIN, 2017). Embora a formulação não seja a original, os resultados obtidos são equivalentes. A seguir, é discutida a prescrição de Giampieri e a sua construção. Considere uma métrica semente que representa um espaço-tempo de simetria esférica com elemento de linha:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + h(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (18)$$

Inicialmente, escreva o elemento de linha em coordenadas de Eddington-Finkelstein. Obtendo assim,

$$ds^2 = -f(r)du^2 - 2dudr + h(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (19)$$

Em seguida, realize a transformação de coordenadas (ERBIN, 2017):

$$r = r' - ia \cos \theta, \quad u = u' + ia \cos \theta. \quad (20)$$

Associada a transformação de coordenadas, realize a complexificação das funções da métrica (ERBIN, 2017). A mesma notação utilizada na prescrição anterior para a complexificação das funções $f(r)$ e $h(r)$ é adotada. Novamente, não é apresentado qual complexificação será utilizada. Com isso, a semente é reescrita como

$$ds'^2 = -\tilde{f}(r')du^2 - 2dudr + \tilde{h}(r')(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (21)$$

As funções $\tilde{f}(r')$ e $\tilde{h}(r')$ são funções de valores reais que substituem as funções $f(r)$ e $h(r)$. A partir desse ponto, as prescrições começam a se diferenciar. A relação a seguir, norteará o desenvolvimento desta prescrição. Assuma que (ERBIN, 2017):

$$id\theta = \sin\theta d\phi. \quad (22)$$

Em relação à transformação de coordenadas expressa na Equação (20), tem-se:

$$dr = dr' + ia \sin\theta d\theta, \quad (23)$$

$$du = du' - a \sin^2\theta d\theta. \quad (24)$$

Ao substituir os resultados das Equações (23) e (24) na semente em coordenadas de Eddington-Finkelstein expressa na Equação (21), o elemento de linha pode ser reescrito como (ERBIN, 2017):

$$ds'^2 = -\tilde{f}(du' - a \sin^2 \theta d\phi)^2 - 2(du' - a \sin^2 \theta d\phi)(dr' + a \sin^2 \theta d\phi) + \tilde{h}(r') (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (25)$$

O resultado acima é exatamente o mesmo resultado obtido pela prescrição original, a prescrição de Newman-Janis. Pode-se observar que o resultado é obtido abrindo mão de muitos passos da prescrição original, principalmente evitando o uso das tétradas.

4.3 REGRAS DE COMPLEXIFICAÇÃO

Durante a descrição das prescrições não foram apresentadas as regras de complexificação das funções da métrica. A seguir, são introduzidas algumas regras empíricas para a complexificação das funções da métrica presentes em (ERBIN, 2017). Esse processo é um dos principais pontos fracos do algoritmo de Newman-Janis, já que carrega arbitrariedade nas escolhas, ou seja, as escolhas não são justificáveis.

$$r \mapsto \frac{1}{2}(r + \bar{r}) = \Re(r), \quad (26)$$

$$\frac{1}{r} \mapsto \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} \right) = \frac{\Re(r)}{|r|^2}, \quad (27)$$

$$r^2 \mapsto |r|^2. \quad (28)$$

Outras função que, eventualmente, apareçam na métrica podem ser escrita como uma combinação das funções apresentadas acima, utilizando assim as apropriadas combinações para obter a complexificação. Todas as configurações conhecidas que não envolvem uma carga magnética, uma carga NUT, campos escalares complexos ou potências superiores maiores que a quadrática de r podem ser derivadas com essas regras.

Ao aplicar as regras acima, pode-se escrever o elemento de linha obtido pelo algoritmo em coordenadas de Boyer-Lindquist aplicando a transformação (BAMBI; MODESTO, 2013):

$$du' = dt' - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr', \quad (29)$$

$$d\phi = d\varphi - \frac{a}{\Delta} dr', \quad (30)$$

com

$$\Delta = \tilde{f}(r')\rho^2 + a^2 \sin^2 \theta. \quad (31)$$

Com a apresentação das regras de complexificação, todas as etapas para a aplicação do algoritmo de Newman-Janis foram apresentadas.

4.4 EXEMPLOS

A seguir, serão apresentados exemplos para ilustrar o uso do algoritmo de Newman-Janis. Como último exemplo é apresentado o buraco negro com cabelos em rotação, obtido aplicando o algoritmo de Newman-Janis a solução obtida no Capítulo 2. Os resultados apresentados nessa seção foram obtidos utilizando o software SageMath e a extensão SageManifolds.

4.4.1 Métrica de Kerr

Considere a métrica de Schwarzschild, dada pelo elemento de linha:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (32)$$

Inicialmente, escreva o elemento de linha ds^2 em coordenadas de Eddington-Finkelstein:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (33)$$

Em seguida, considere a tétrada composta pelos vetores:

$$l^\mu = \delta_r^\mu, \quad (34)$$

$$n^\mu = \delta_u^\mu + \left(\frac{2M - r}{2r}\right) \delta_r^\mu, \quad (35)$$

$$m^\mu = \frac{\sqrt{2}}{2r} \delta_\theta^\mu + \frac{i\sqrt{2} \sin \theta}{2r} \delta_\phi^\mu, \quad (36)$$

$$\bar{m}^\mu = \frac{\sqrt{2}}{2r} \delta_\theta^\mu - \frac{i\sqrt{2} \sin \theta}{2r} \delta_\phi^\mu. \quad (37)$$

Com a tétrada definida, complexifique as funções da métrica, conforme as regras apresentadas:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \mapsto \left(1 - \frac{2M\Re(r)}{|r|^2}\right), \quad (38)$$

$$r^2 \mapsto |r|^2. \quad (39)$$

Associada à complexificação das funções da métrica, realize a mudança de coordenadas expressa nas Equações (10-11). Permita que r e u assumam valores complexos para que r' e u' sejam reais. Com isso, as Equações (38, 39) podem ser reescritas como:

$$\left(1 - \frac{2M\Re(r)}{|r|^2}\right) \mapsto \left(1 - \frac{2Mr'}{\rho^2}\right), \quad (40)$$

$$|r|^2 \mapsto \rho^2, \quad (41)$$

onde $\rho^2 = r'^2 + a^2 \cos^2 \theta$. Aplicando a mudança de coordenadas expressa na equação (10) na tétrada utilizada, os vetores que a compõem se tornam:

$$l'^\mu = \delta_{r'}^\mu, \quad (42)$$

$$n'^\mu = \delta_{u'}^\mu - \left(\frac{\rho^2 - 2Mr'}{2\rho^2} \right) \delta_{r'}^\mu, \quad (43)$$

$$m'^\mu = \frac{ia\sqrt{2}\sin\theta}{2} \frac{1}{\rho} (\delta_{u'}^\mu - \delta_{r'}^\mu) + \frac{\sqrt{2}}{2\rho} \left(\delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin\theta} \delta_\phi^\mu \right), \quad (44)$$

$$\bar{m}'^\mu = \frac{ia\sqrt{2}\sin\theta}{2} \frac{1}{\rho} (\partial_{r'} - \partial_{u'}) + \frac{\sqrt{2}}{2\rho} \left(\partial_\theta - \frac{i}{\sin\theta} \partial_\phi \right). \quad (45)$$

Recorrendo à Equação (5), o novo elemento de linha ds'^2 obtido a partir do algoritmo de Newman-Janis será:

$$\begin{aligned} ds'^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr'}{\rho^2} \right) du'^2 - 2du'dr' - \frac{4Mar'\sin^2\theta}{\rho^2} du'd\phi + 2a\sin^2\theta dr'd\phi \\ & + \rho^2 d\theta^2 + \frac{(a^2 + r'^2)^2 \sin^2\theta - (a^4 - 2Ma^2r' + a^2r') \sin^4\theta}{\rho^2} d\phi^2. \end{aligned} \quad (46)$$

O elemento de linha acima pode ser escrito em coordenadas de Boyer-Lindquist, realizando a mudança de coordenadas:

$$du' = dt' - \frac{r'^2 + a^2}{\Delta} dr', \quad (47)$$

$$d\phi = d\varphi - \frac{a}{\Delta} dr', \quad (48)$$

onde

$$\Delta = \left(1 - \frac{2Mr'}{\rho^2} \right) \rho^2 + a^2 \sin^2\theta. \quad (49)$$

Finalmente, o elemento de linha ds'^2 , em coordenadas de Boyer-Lindquist:

$$\begin{aligned} ds'^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr'}{\rho^2} \right) dt'^2 - \frac{4Mar'\sin^2\theta}{\rho^2} dt'd\varphi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr'^2 \\ & + \rho^2 d\theta^2 + \frac{(a^2 + r'^2)^2 \sin^2\theta - (a^4 - 2Ma^2r' + a^2r') \sin^4\theta}{\rho^2} d\varphi^2. \end{aligned} \quad (50)$$

O elemento de linha acima representa a métrica de Kerr. A métrica de Kerr-Newman pode ser obtida de maneira análoga.

4.4.2 Buraco negro com cabelos em rotação

Nessa subseção é apresentada uma métrica que descreve um buraco negro com cabelos, obtida a partir da aplicação do algoritmo de Newman-Janis. Considere a métrica obtida no capítulo anterior que descreve um buraco negro com cabelos obtida por DG:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (51)$$

onde

$$f(r) = \left[1 - \frac{1}{r} (2M + \alpha\ell + \alpha r e^{-\frac{r}{M}}) \right]. \quad (52)$$

O elemento de linha pode ser escrito em coordenadas de Eddington-Finkelstein:

$$ds^2 = -f(r) - 2dudr + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (53)$$

Além disso, seja a tétrada composta por $l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu$ dada por:

$$l^\mu = \delta_r^\mu, \quad (54)$$

$$n^\mu = \delta_u^\mu + \frac{f(r)}{2} \delta_r^\mu, \quad (55)$$

$$m^\mu = \frac{1}{r\sqrt{2}} \left(\delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_\phi^\mu \right), \quad (56)$$

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{r\sqrt{2}} \left(\delta_\theta^\mu - \frac{i}{\sin \theta} \delta_\phi^\mu \right). \quad (57)$$

Em seguida, aplica-se a transformação de coordenadas

$$r = r' - ia \cos \theta, \quad (58)$$

$$u = u' + ia \cos \theta. \quad (59)$$

As funções da métrica se transformam conforme as regras de complexificação como:

$$1 - \frac{1}{r} (2M + \alpha\ell + \alpha r e^{-\frac{r}{M}}) \mapsto 1 - \frac{r'}{\rho^2} (2M + \alpha\ell + \alpha r' e^{-\frac{r'}{M}}), \quad (60)$$

$$r^2 \mapsto \rho^2, \quad (61)$$

onde $\rho^2 = r'^2 + a^2 \cos^2 \theta$. Os componentes da tétrada definidos anteriormente transformam-se em

$$l^\mu = \delta_{r'}^\mu, \quad (62)$$

$$n^\mu = \delta_{u'}^\mu + \frac{\tilde{f}(r')}{2} \delta_{r'}^\mu, \quad (63)$$

$$m^\mu = \frac{i\sqrt{2}a \sin \theta}{2\rho} \delta_{u'}^\mu - \frac{i\sqrt{2}a \sin \theta}{2\rho} \delta_{r'}^\mu + \frac{\sqrt{2}}{2\rho} \delta_\theta^\mu + \frac{i\sqrt{2}}{2\rho \sin \theta} \delta_\phi^\mu, \quad (64)$$

$$\bar{m}^\mu = -\frac{i\sqrt{2}a \sin \theta}{2\rho} \delta_{u'}^\mu + \frac{i\sqrt{2}a \sin \theta}{2\rho} \delta_{r'}^\mu + \frac{\sqrt{2}}{2\rho} \delta_\theta^\mu - \frac{i\sqrt{2}}{2\rho \sin \theta} \delta_\phi^\mu. \quad (65)$$

onde

$$\tilde{f}(r') = 1 - \frac{r'}{\rho^2} (2M + \alpha\ell + \alpha r' e^{-\frac{r'}{M}}). \quad (66)$$

Com a transformação de coordenadas aplicada e feitas as complexificações das funções da métrica, usa-se a Equação (5) que relaciona o novo elemento de linha e a tétrada após a transformações de

coordenadas e das funções da métrica. Os termos não nulos são:

$$\begin{aligned}
 g^{u'u'} &= a^2 \sin^2 \theta \rho^{-2}, \\
 g^{u'r'} &= g^{r'u'} = -(a^2 \sin^2 \theta + \rho^2) \rho^{-2}, \\
 g^{u'\phi} &= g^{\phi u'} = a \rho^{-2}, \\
 g^{r'r'} &= a^2 \sin^2 \theta \rho^{-2} + \tilde{f}(r'), \\
 g^{r'\phi} &= g^{\phi r'} = -a \rho^{-2}, \\
 g^{\theta\theta} &= \rho^{-2}, \\
 g^{\phi\phi} &= \sin^{-2} \theta \rho^{-2}.
 \end{aligned} \tag{67}$$

Com isso, o novo elemento de linha, em coordenadas avançadas nulas, é dado por:

$$\begin{aligned}
 ds'^2 &= -\tilde{f}(r') du'^2 - 2du' dr' + 2a \sin^2 \theta (\tilde{f}(r') - 1) du' d\phi + 2a \sin^2 \theta dr' d\phi \\
 &\quad + \rho^2 d\theta^2 + \left[2a^2 \sin^4 \theta - a^2 \sin^4 \theta \tilde{f}(r') + \sin^2 \theta \rho^2 \right] d\phi^2.
 \end{aligned} \tag{68}$$

Aplicando a transformação expressa nas Equações (29)-(30), onde

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \left(1 - \frac{r'}{\rho^2} \left(2M + \alpha \ell + \alpha r' e^{-\frac{r'}{M}} \right) \right) \rho^2 + a^2 \sin^2 \theta, \\
 &= r'^2 + a^2 - r' \left(2M + \alpha \ell + \alpha r' e^{-\frac{r'}{M}} \right),
 \end{aligned} \tag{69}$$

o novo elemento de linha que representa a métrica de um buraco negro com cabelos obtido por GD em rotação, em coordenadas de Boyer-Lindquist, pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 ds'^2 &= - \left[1 - \frac{r'}{\rho^2} \left(2M + \alpha \ell + \alpha r' e^{-\frac{r'}{M}} \right) \right] dt'^2 \\
 &\quad - \frac{2ar' \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(2M + \alpha \ell + \alpha r' e^{-\frac{r'}{M}} \right) dt' d\varphi \\
 &\quad + \frac{\rho^2}{\Delta} dr'^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{(r'^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta d\varphi^2.
 \end{aligned} \tag{70}$$

O elemento de linha expresso acima se reduz a solução de Kerr, obtida na subseção 4.4.1, quando o parâmetro α é nulo. Além disso, o resultado obtido é equivalente ao resultado obtido em (CONTRERAS; OVALLE; CASADIO, 2021), onde os autores apresentam um algoritmo para o desacoplamento das equações de Einstein para um sistema de simetria axial. O algoritmo apresentado pelos autores envolve a determinação da função $m(r)$ e substituí-la na métrica de Gurses-Gursey, uma extensão genérica da métrica de Kerr (CONTRERAS; OVALLE; CASADIO, 2021):

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2r\tilde{m}(r)}{\tilde{\rho}^2} \right] dt^2 - \frac{4\tilde{a}r\tilde{m}(r) \sin^2 \theta}{\tilde{\rho}^2} dt d\phi + \frac{\tilde{\rho}^2}{\tilde{\Delta}} dr^2 + \tilde{\rho}^2 d\theta^2 + \frac{\tilde{\Sigma}}{\tilde{\rho}^2} \sin^2 \theta d\phi^2, \tag{71}$$

onde

$$\tilde{\rho} = r^2 + \tilde{a}^2 \cos^2 \theta, \tag{72}$$

$$\tilde{\Delta} = r^2 - 2r\tilde{m}(r) + \tilde{a}^2, \quad (73)$$

$$\tilde{\Sigma} = (r^2 + \tilde{a}^2)^2 - \tilde{a}^2 \Delta \sin^2 \theta, \quad (74)$$

$$\tilde{a} = \tilde{J}\tilde{M}^{-1}, \quad (75)$$

com $\tilde{J}$, o momento angular, e $\tilde{M}$, a massa total do sistema. O método é relativamente simples, pois é possível obter a nova solução resolvendo as equações de Einstein para os n tensores acoplados, porém sem necessidade de considerar a simetria axial do problema. Já que pelo algoritmo apresentado, é somente necessário determinar a função $m(r)$, soma das funções $m_i(r)$ obtidas resolvendo as equações de Einstein para os n tensores acoplados, pode-se estabelecer que o parâmetro associado ao momento angular do buraco negro é nulo e resolver as equações de campo de Einstein para o caso de simetria esférica. Com isso, já é possível determinar as funções $m_i(r)$ e substituí-las na métrica de Gurses-Gursey (CONTRERAS; OVALLE; CASADIO, 2021). Considerando que basta resolver o sistema para o caso de simetria esférica, uma interpretação alternativa para este novo método é que ele é capaz de gerar métricas de simetria axial a partir de métricas de simetria esférica e estáticas, assim como o algoritmo de Newman-Janis. Porém, sem a necessidade de complexificação das funções da métrica, ponto fraco do algoritmo de Newman-Janis. Como os resultados obtidos aplicando os dois métodos são os mesmos, pode-se dizer que eles são equivalentes.

5 TEORIA DE PERTURBAÇÃO DE BURACOS NEGROS

Dentre as previsões da teoria da relatividade, uma das mais intrigantes é a existência de buracos negros. Um buraco negro em equilíbrio é descrito somente por seus parâmetros: massa, momento angular e carga. Porém, na natureza buracos negros dificilmente encontram-se em equilíbrio, pois sofrem os efeitos de sua interação com suas vizinhanças. Um buraco negro real, que está sob o efeito de perturbações, pode ser descrito pela métrica :

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + \delta g_{\mu\nu}. \quad (1)$$

O termo $g_{\mu\nu}^0$ é a métrica do espaço-tempo sem perturbação, o que chamamos de espaço-tempo de fundo, exemplos simples são a métrica de Kerr ou Schwarzschild. Enquanto o termo $\delta g_{\mu\nu}$ refere-se a perturbação. Um buraco negro responde a uma perturbação emitindo ondas gravitacionais. Os pioneiros no estudo do problema de estabilidade de buracos negros foram Regge e Wheeler. Eles investigaram perturbações lineares no exterior do espaço-tempo de Schwarzschild, isto é, se a métrica de Schwarzschild era estável sob uma perturbação como a descrita na Equação (1) (SANTOS; FABRIS; PACHECO, 2019). Um espaço-tempo de simetria esférica e estático pode ser descrito pela métrica¹

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (2)$$

O principal resultado obtido por Regge e Wheeler mostra que ao aplicar a separação de variáveis

$$\Psi(t, r, \theta, \phi) = e^{i\omega t} \mathcal{R}(r) \mathcal{S}(\theta, \phi) \quad (3)$$

na equação que descreve uma perturbação em um buraco negro desse tipo, obtém-se uma expressão semelhante à equação de Schrödinger (REGGE; WHEELER, 1957):

$$\frac{d^2 \mathcal{R}(r)}{dr_*^2} + [\omega^2 - V(r)] \mathcal{R}(r) = 0, \quad (4)$$

onde r_* é a coordenada de tartaruga e $\mathcal{S}(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos. O potencial efetivo $V(r)$ depende da solução e do tipo de perturbação, que pode ser axial ou polar (SANTOS; FABRIS; PACHECO, 2019). Teoricamente, as perturbações no espaço-tempo nas vizinhanças de um buraco negro podem ser geradas adicionando campos ao espaço-tempo ou perturbando a métrica da região (KONOPLYA; ZHIDENKO, 2011). Em uma aproximação linear, as perturbações causadas adicionando campos ao espaço-tempo se reduzem ao estudo da propagação desses campos pelo espaço-tempo de fundo do buraco negro. A partir disso, surge a necessidade de estudar os modos quase normais e qual sua relação com a resposta dada por buracos negros a uma perturbação externa. Em tempos suficientemente tardios, a resposta a essas perturbações é geralmente dominada por oscilações amortecidas. Tais

¹ Essa afirmação é válida somente no contexto da Relatividade Geral. Esse formato pode não ser o mais geral em teorias alternativas de gravitação.

oscilações são características intrínsecas ao buraco negro e podem, em princípio, ser usadas para identificar o buraco negro (KONOPLYA; ZHIDENKO, 2011). Perturbações externas podem excitar os modos quase normais de um buraco negro com cabelos, por exemplo, aparentando oscilações amortecidas como resposta do buraco negro. Essas vibrações são características inerentes à geometria externa, identificando unicamente o buraco negro com cabelos. Para estudar os modos quase normais analiticamente, nesse trabalho utiliza-se a aproximação WKB e uma relação entre eles e estados ligados do potencial inverso de buracos negros. Nesse capítulo será feita a comparação, tanto qualitativamente quanto quantitativamente, do espectro de perturbações escalares da métrica que descreve o buraco negro com cabelos obtida no capítulo anterior e o já bem conhecido buraco negro de Schwarzschild, procurando por possíveis assinaturas do primeiro. Os resultados apresentados nesse capítulo foram obtidos utilizando o software SageMath e a extensão SageManifolds.

5.1 PERTURBAÇÕES ESCALARES

Nessa seção, são determinados os modos quase normais de um buraco negro sob influência de perturbações escalares. Os resultados aqui apresentados estão reunidos em (CAVALCANTI; PAIVA; ROCHA, 2022). Conforme já dito, ao considerar uma aproximação linear, perturbações causadas ao adicionar campos ao espaço-tempo de fundo do buraco negro se reduzem ao estudo da propagação desses campos pelo espaço-tempo de fundo buraco negro. Considere a métrica dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (5)$$

onde

$$f(r) = \left[1 - \frac{1}{r} \left(2M + \alpha\ell + \alpha r e^{-\frac{r}{M}} \right) \right]. \quad (6)$$

e um campo escalar Φ não-massivo propagando nesse espaço-tempo de fundo. A propagação de um campo escalar é descrita pela equação de Klein-Gordon

$$\square\Phi = 0. \quad (7)$$

As soluções da Equação (7) são compostas pelos modos de frequência ω , números orbital $j \in \mathbb{N}$ e azimutal $m \in \mathbb{Z}$, com $-j \leq m \leq j$, com o ansatz

$$\Phi_{\omega lm}(t, r, \theta, \phi) = \exp(i\omega t - im\phi) \frac{\Psi_{\omega l}(r)}{r} S_{lm}(\theta), \quad (8)$$

onde $S_{lm}(\theta)$ simboliza os harmônicos esféricos escalares. Como de costume, as coordenadas de tartaruga são usadas,

$$\frac{dr_*}{dr} = \left(1 - \frac{\alpha\ell + 2M}{r} + \alpha e^{-\frac{r}{M}} \right). \quad (9)$$

O resultado da separação de variáveis é dado na forma da equação de Schrödinger por (BEYER, 1999):

$$\Psi''_{\omega l}(r_*) + [\omega^2 - V_l(r_*, \alpha, \ell)] \Psi_{\omega l}(r_*) = 0, \quad (10)$$

com o potencial efetivo do buraco negro com cabelos dado por

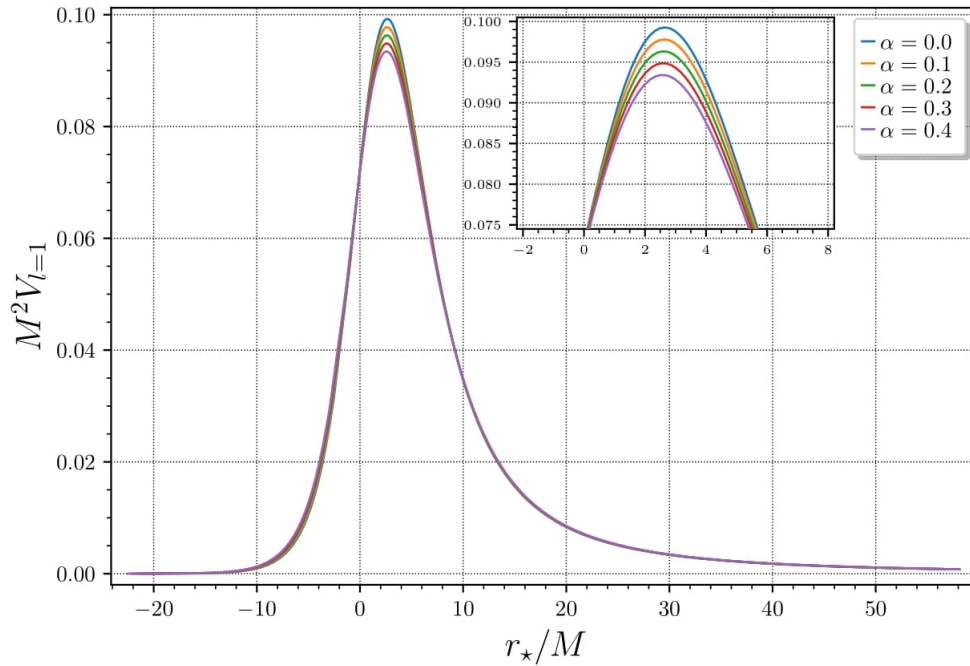
$$V_l(r, \alpha, \ell) = \left[1 - \frac{2M}{r} \right] \left[\frac{(l+1)l}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] + \frac{\alpha}{r} \left[\frac{l(l+1)+2}{r} e^{-\frac{r}{M}} - \frac{e^{-\frac{r}{M}}}{M} - \frac{4M\ell}{r^3} - \frac{\ell l(l+1) - 2Me^{-\frac{r}{M}} - \ell}{r^2} \right] + \frac{\alpha^2}{r} \left[\frac{\ell e^{-\frac{r}{M}}}{r^2} + \frac{\ell e^{-\frac{r}{M}}}{Mr} - \frac{e^{-\frac{2r}{M}}}{M} - \frac{\ell^2}{r^3} \right]. \quad (11)$$

Note que, assim como as equações de campo do DG, o potencial pode ser escrito como um polinômio do parâmetro α . O termo de ordem zero é simplesmente o potencial de Schwarzschild e as correções dependem do parâmetro ℓ obtido por DG. Para o caso extremo ($\ell = 2M/e^2$):

$$V_l(r, \alpha) = \left[1 - \frac{2M}{r} \right] \left[\frac{(l+1)l}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] + \frac{\alpha}{r} \left[\frac{l(l+1)+2}{r} e^{-\frac{r}{M}} - \frac{e^{-\frac{r}{M}}}{M} - \frac{8M^2 e^{-2}}{r^3} - \frac{2Me^{-2} \left(l(l+1) - 1 - e^{\frac{2M-r}{2M}} \right)}{r^2} \right] + \frac{\alpha^2}{r} \left[\frac{2Me^{-\frac{r+2M}{M}}}{r^2} + \frac{2e^{-\frac{r+2M}{M}}}{r} - \frac{e^{-\frac{2r}{M}}}{M} - \frac{4M^2 e^{-4}}{r^3} \right]. \quad (12)$$

Quanto maior o valor do parâmetro α , menor é o pico do potencial efetivo. O DG atenua a influência

Figura 1 – Potencial efetivo expresso na Equação (12) para diferentes valores do parâmetro α . Potencial efetivo, em coordenadas de tartaruga, para $l = 1$, no caso extremo ($\ell = 2M/e^2$), com α variando. O caso em que $\alpha = 0$ se trata da solução de Schwarzschild.



fonte: Produção do próprio autor

do potencial efetivo. Para $\alpha = 0.6$, o pico do potencial efetivo é 10% menor que o potencial do caso

de Schwarzschild. Além disso, numericamente verifica-se que o pico do potencial efetivo depende de α , para $l = 1$, como

$$M^2 V_{pico}(\alpha) = 0.02222\alpha^3 - 0.01726\alpha^2 - 0.01045\alpha + 0.09865, \quad (13)$$

com erro de 0.001%. Percebe-se também que quanto maior o valor do parâmetro α , mais suave é a curva do potencial efetivo.

5.1.1 O método Mashhoon e o potencial de Pöschl-Teller

A solução exata dos modos quase normais não é simples de ser obtida analiticamente, por isso aproximações podem ser aplicadas (KONOPLYA; ZHIDENKO, 2011). Devido a sua simplicidade e resultados razoáveis, o método Mashhoon foi considerado. A maioria das dificuldades em calcular os modos quase normais de buracos negros vem do potencial efetivo ter um decaimento lento quando se aproxima assintoticamente do infinito radial. O método Mashhoon contorna essas dificuldades e soluções exatas podem ser obtidas quando um potencial de Pöschl-Teller que decai exponencialmente no limite $r \rightarrow \infty$ for usado. Além disso, o potencial de Pöschl-Teller carrega consigo muitas características do potencial efetivo de Schwarzschild (BEYER, 1999). As condições de contorno para resolver a equação de onda produz uma função de onda escalar infinitesimal na fronteira. O que implicar em calcular os modos quase normais como se calcula estados ligados para um potencial inverso, $V \rightarrow -V$, existindo um intervalo adequadamente aproximado por um potencial de Pöschl-Teller dado por (FERRARI; MASHHOON, 1984):

$$V_{PT}(r) = \frac{V_0}{\cosh^2[\beta(r - r_0)]}, \quad (14)$$

com as frequências quase normais dadas por

$$\omega = \omega_0 + i\Gamma, \quad (15)$$

onde

$$\omega_0 = \sqrt{V_0 - \frac{\beta^2}{4}}, \quad (16)$$

$$\Gamma = \beta \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (17)$$

onde $n \in \mathbb{N}$ é o número do harmônico e β está associado à curvatura do potencial no pico:

$$\beta^2 = - \frac{1}{2V_0} \frac{d^2 V}{dr_*^2} \Big|_{r_0}, \quad (18)$$

com V_0 é o valor máximo do potencial e $V_0 = V(r_0)$. O método Mashhoon produz bons resultados para algumas soluções do tipo buraco negro bem conhecidas. Por exemplo, no caso de perturbações gravitacionais em um buraco negro de Schwarzschild quadridimensional, o erro dos valores obtidos não excedem 2% (KONOPLYA; ZHIDENKO, 2011). A Tabela 1 apresenta as frequências quase

normais calculadas utilizando o método, para vários valores de l e n , no caso extremo ($\ell = 2M/e^2$)^[2]. Observa-se que fixando um valor arbitrário do parâmetro α , observa-se que quanto maior o valor de l , maior é a parte real da frequência. Por outro lado, fixando l , e portanto fixando os valores da parte real da frequência dos modos quase normal, quanto maior o número do harmônico, maior é a parte imaginária da frequência. Se fixados l e α , quanto maior o valor do parâmetro α , menor são as partes reais e imaginárias das frequências quase normais.

5.1.2 Aproximação WKB

O desenvolvimento feito subseção é baseado naquele feito em (SCHUTZ; WILL, 1985). Considere uma equação de onda na forma

$$\frac{d^2\Psi(r_*)}{dr_*^2} + Q(r_*)\Psi(r_*) = 0, \quad (19)$$

onde Ψ é a parte radial da função que descreve a perturbação e r_* é a coordenada de tartaruga. A função $-Q(r_*)$ é uma constante quando $r_* \rightarrow \pm\infty$ e assume o seu máximo nas proximidades de $r_* = 0$. Como $Q(x)$ tende a uma constante, pode-se escrever

$$\Psi \sim e^{\pm i\alpha r_*} \quad \text{quando} \quad r_* \rightarrow \pm\infty, \quad (20)$$

com $\Re(\alpha) > 0$. Além disso, se $Q(r_*) \rightarrow 0$, $\omega = \alpha$. Iremos analisar a função $Q(r_*)$, dividindo-a em três regiões:

- região I: à esquerda do ponto de virada, onde $Q(r_*^{(I)}) = 0$,
- região II: região com $r_*^{(I)} < r_* < r_*^{(II)}$,
- região III: à direita do ponto de virada, onde $Q(r_*^{(III)}) = 0$

Nas regiões I e II, utilizando a aproximação WKB tem-se

$$\Psi_{(I)} \sim Q^{-\frac{1}{4}} \exp \left\{ \pm i \int_{r_*^{(2)}}^{r_*} [Q(t)]^{\frac{1}{2}} dt \right\}, \quad (21)$$

$$\Psi_{(III)} \sim Q^{-\frac{1}{4}} \exp \left\{ \pm i \int_{r_*}^{r_*^{(1)}} [Q(t)]^{\frac{1}{2}} dt \right\}. \quad (22)$$

Em seguida, as soluções para regiões I e III precisam estar relacionadas na região intermediária, ou seja, a região II. Expandindo $Q(r_*)$ na região II,

$$Q(r_*) = Q_0 + \frac{Q_0''}{2} (r_* - r_*^{(0)})^2 + \mathcal{O} (r_* - r_*^{(0)})^3. \quad (23)$$

² A Tabela [1] está presente na página 54.

Aplicando a mudança de variáveis dada por

$$t = (4k)^{\frac{1}{4}} (r_* - r_*^{(0)}) \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \quad (24)$$

com $k \equiv \frac{Q_0''}{2}$, a equação (19) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \left[-\frac{iQ_0}{(2Q_0'')^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4}t^2 \right] \Psi = 0, \quad (25)$$

Considere um novo parâmetro ν tal que

$$\nu \equiv -\frac{iQ_0}{(2Q_0'')^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}. \quad (26)$$

Portanto, a Equação (25) transforma-se em:

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \left[\nu - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2} \right] \Psi = 0, \quad (27)$$

A solução na região II é composta por uma superposição de funções cilíndricas parabólicas $D_\nu(z)$ (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1972; BENDER; ORSZAG; ORSZAG, 1999):

$$\Psi = AD_\nu(z) + BD_{-\nu-1}(iz); \quad z \equiv (2Q_0'')^{\frac{1}{4}} (r_* - \bar{r}_*) \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right). \quad (28)$$

Utilizando o comportamento assintótico das funções cilíndricas parabólicas e condição que estabelece ondas de saída no infinito espacial, Ψ no horizonte pode-se escrita como

$$\Psi \sim Ae^{i\pi\nu} z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} - i\sqrt{2}A [\Gamma(-\nu)]^{-1} e^{\frac{5i\pi}{4}} z^{-\nu-1} e^{\frac{z^2}{4}}. \quad (29)$$

As condições de contorno para modos quase normais exigem que o termo de saída seja nulo, ou seja, o termo que aparece multiplicado por $e^{\frac{z^2}{4}}$ desapareça. Logo $[\Gamma(-\nu)]^{-1} = 0$ ou $\nu \in \mathbb{N}$. Logo, a aproximação WKB de primeira ordem define as frequências quase normais como (SCHUTZ; WILL, 1985):

$$\frac{Q_0}{\sqrt{2Q_0''}} = i \left(n + \frac{1}{2} \right); \quad n \in \mathbb{N}. \quad (30)$$

Ao comparar as Equações (19) e (10), é evidente que

$$Q(r_*) = \omega^2 - V_l(r, \alpha, \ell). \quad (31)$$

Portanto, é possível determinar as frequências quase normais. Existem correções de maiores ordens para essa aproximação. A aproximação WKB de terceira ordem para as frequências quase normais é dada por (SANTOS; FABRIS; PACHECO, 2019):

$$\omega^2 = \left[V_0 + (-2V_0'')^{\frac{1}{2}} \tilde{\Lambda}(n) \right] - i\alpha (-2V_0'')^{\frac{1}{2}} \left[1 + \tilde{\Omega}(r) \right], \quad (32)$$

onde

$$\alpha = \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (33)$$

$$\tilde{\Lambda}(n) = \frac{1}{\sqrt{2V_0''}} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right) \left(\frac{1}{4} + \alpha^2 \right) - \frac{1}{288} \left(\frac{V_0'''}{V_0''} \right)^2 (7 + 60\alpha^2) \right], \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(n) = & \frac{1}{\sqrt{2V_0''}} \left[\frac{5}{6912} \left(\frac{V_0'''}{V_0''} \right)^4 (77 + 188\alpha^2) - \frac{1}{384} \frac{V_0'''^2 V_0^{(4)}}{V_0''^3} \right] \\ & + \frac{1}{2304} \left(\frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right)^2 (67 + 68\alpha^2) + \frac{1}{288} \frac{V_0'' V_0^{(5)}}{V_0''^2} (19 + 28\alpha^2) \\ & - \frac{1}{288} \frac{V_0^{(6)}}{V_0''} (5 + 4\alpha^2). \end{aligned} \quad (35)$$

Nas expressões acima $V^{(n)}$ simboliza a n -ésima derivada do potencial efetivo, enquanto o 0 subscrito remete ao valor da função em r_0 dado por $V_{\max} = V(r_0)$. A Tabela 2 apresenta as frequências quase normais para o potencial expresso na Equação (12)³. Em relação ao comportamento das partes real e imaginária das frequências quase normais, observa-se o mesmo que trazido anteriormente. Porém, diferente do método Mashhoon para um mesmo valor de l , a parte real da frequência não é a mesma, mas sim diminui conforme n aumenta. Isso já era esperado, pois diferente do método Mashhoon, na aproximação WKB a parte real da frequência quase normal também depende do número n .

5.1.3 Modos quase normais de buracos negros com cabelos obtidos por desacoplamento gravitacional: resultados numéricos

Nesta subseção, a equação de onda da perturbação escalar de um buraco negro com cabelos, no caso extremo, foi resolvida numericamente. Isso permite uma análise precisa da evolução dos modos quase normais para uma faixa confiável do parâmetro α . Pode-se ver que, apesar do desvio significativo das frequências quase normais quando α aumenta, o desvio da onda do caso de Schwarzschild é relativamente pequeno, embora indique claramente uma assinatura de soluções com cabelos do DG. Antes de resolver a equação de onda, como não existe solução analítica para a Equação (9), o membro direito da equação pode ser expandido até a termo de segunda ordem de α , correspondendo a mesma ordem do potencial efetivo:

$$\frac{dr_*}{dr} = -\frac{r}{2M - r} + \alpha \frac{(2Me^{-2} - re^{-\frac{r}{M}})r}{(2M - r)^2} - \alpha^2 \frac{(2Me^{-2} - re^{-\frac{r}{M}})^2 r}{(2M - r)^3} + \mathcal{O}(\alpha^3). \quad (36)$$

³ A Tabela 2 está presente na página 55.

A expansão expressa em (36) pode ser integrada analiticamente, fornecendo:

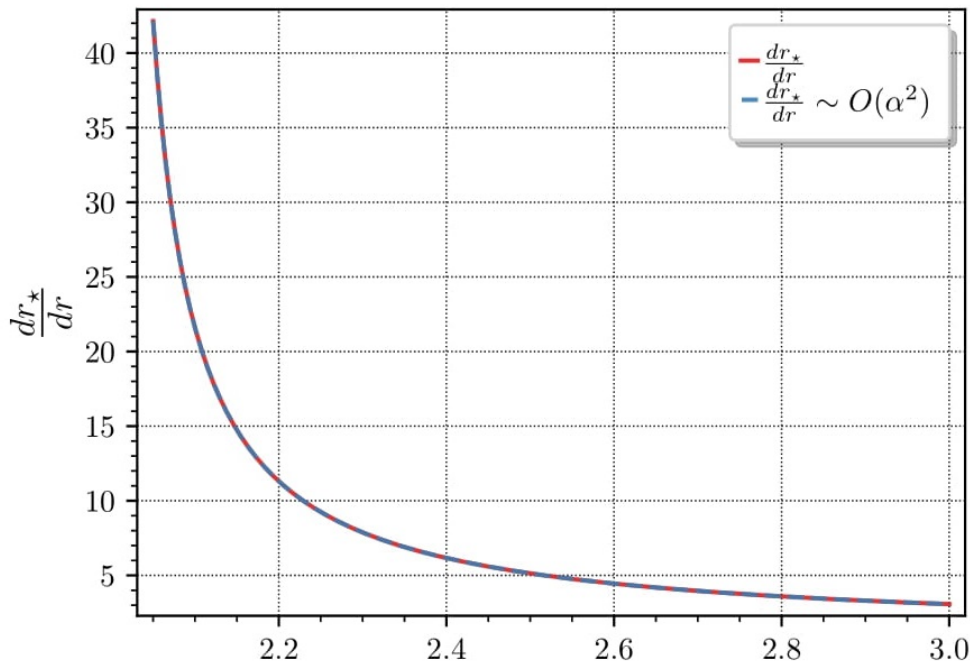
$$\begin{aligned}
 r_* \approx & 2M \log(-2M + r) + r \\
 & + \alpha \left[2Me^{-2} \log(-2M + r) + \frac{4M^2e^{-2}}{2M - r} - \frac{4M^3e^{-\frac{r}{M}} - Mr^2e^{-\frac{r}{M}}}{4M^2 - 4Mr + r^2} \right] \\
 & + \alpha^2 \left[4M \operatorname{Ei}\left(-\frac{r}{M} + 2\right) e^{-4} - 2M \operatorname{Ei}\left(-\frac{2r}{M} + 4\right) e^{-4} + \frac{4M^2e^{-4}}{2M - r} \right. \\
 & \left. - \frac{8M^3e^{-4} + 16M^3e^{-\frac{r-2}{M}} - 16M^2re^{-\frac{r-2}{M}} - 4M^3e^{-\frac{2r}{M}} + 4M^2re^{-\frac{2r}{M}} + Mr^2e^{-\frac{2r}{M}}}{2(4M^2 - 4Mr + r^2)} \right],
 \end{aligned} \tag{37}$$

onde $\operatorname{Ei}(z)$ simboliza a integral exponencial:

$$\operatorname{Ei}(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^u}{u} du. \tag{38}$$

Truncar a expansão até o termo $\mathcal{O}(\alpha^3)$ não afeta os resultados, já que o erro nessa aproximação é de cerca de 0.00198%. A Figura 2 demonstra isso, assumir tal aproximação é um método confiável para obter os modos quase normais do buraco negro com cabelos. O gráfico a seguir mostra

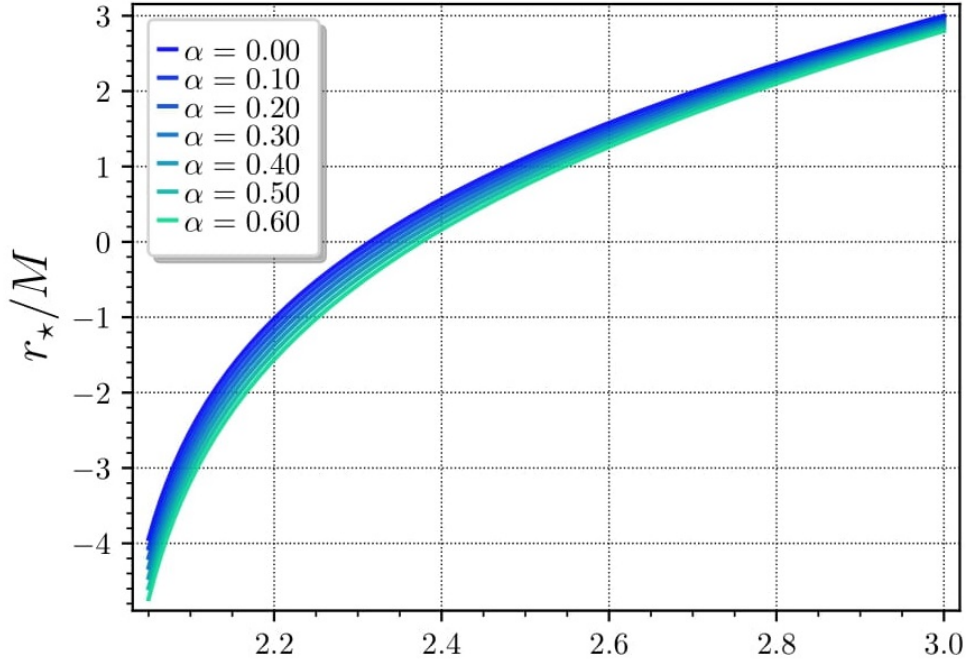
Figura 2 – Esse gráfico corresponde a $\alpha = 0.2$, ele retrata a alta precisão da série truncada para dr_*/dr . O comportamento próximo ao horizonte, localizado em $2M$ no caso extremo, é o principal interesse aqui.



fonte: Produção do próprio autor

que o parâmetro α força a coordenada de tartaruga a atingir um valor mais alto, para valores fixos da coordenada radial r . Para todos os valores de α , a coordenada r_* ainda é uma função monotonamente crescente de r . Finalmente, o método pode ser propriamente aplicado. Ao invés de aplicar o ansatz da Equação (8), somente a parte angular da equação de Klein-Gordon é separada. A equação de onda,

Figura 3 – Gráfico da função r_* em relação a r , para $0 \leq \alpha \leq 0.6$. O comportamento próximo ao horizonte, localizado em $2M$ no caso extremo, é o principal interesse aqui.



fonte: Produção do próprio autor

para o caso extremo, é dada por

$$\frac{\partial \Psi_l}{\partial t^2} - \frac{\partial \Psi_l}{\partial r^2} + V_l(r, \alpha) \Psi_l = 0, \quad (39)$$

onde $V_l(r, \alpha)$ é o mesmo potencial efetivo expresso na Equação (12). Essa equação pode ser escrita em coordenadas do cone de luz

$$du = dt - dr_*, \quad (40)$$

$$dv = dt + dr_*, \quad (41)$$

fornecendo

$$4 \frac{\partial^2 \Psi_l}{\partial u \partial v} + V_l(r, \alpha) \Psi_l = 0. \quad (42)$$

A equação anterior pode ser resolvida numericamente, expressando:

$$\Psi(N) = \Psi(E) + \Psi(W) - \Psi(S) - \frac{h^2}{8} V_l(S) [\Psi(W) + \Psi(E)]. \quad (43)$$

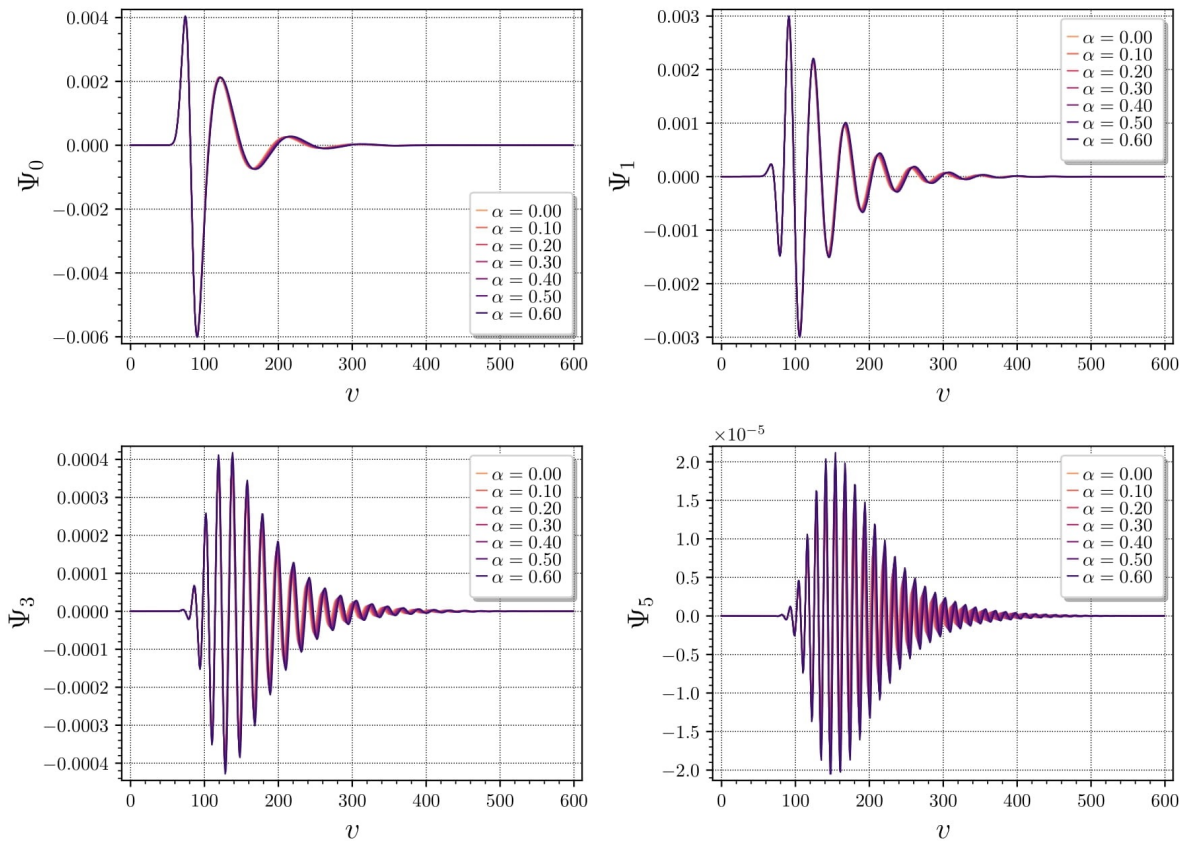
Os pontos $N = (u + h, v + h)$, $S = (u, v)$, $E = (u, v + h)$ e $W = (u + h, v)$ formam um retângulo nulo com posição relativa e h é uma escala de grade geral. Para aplicar a Equação (43), uma onda gaussiana será aplicada como condição de contorno, tal que

$$\Psi_l(v, -50) = A \exp \left(-\frac{(v - B)^2}{C^2} \right) \quad (44)$$

$$\Psi_l(-50, u) = A \exp\left(-\frac{B^2}{C^2}\right) \quad (45)$$

com $A = 0.01$, $B = 30$ e $C = 3$. Os resultados são mostrados nas Figuras a seguir, onde os perfis das ondas são encontrados numericamente como solução da Equação (42), em uma grade de $10^3 \times 10^3$, para vários valores de j . Apesar de pequenos desvios, o comportamento qualitativo remete ao caso de Schwarzschild, novamente representado por $\alpha = 0$. No entanto, os buracos negros com cabelos obtidos por DG têm uma assinatura única, em relação aos modos quase normais, codificados no parâmetro α .

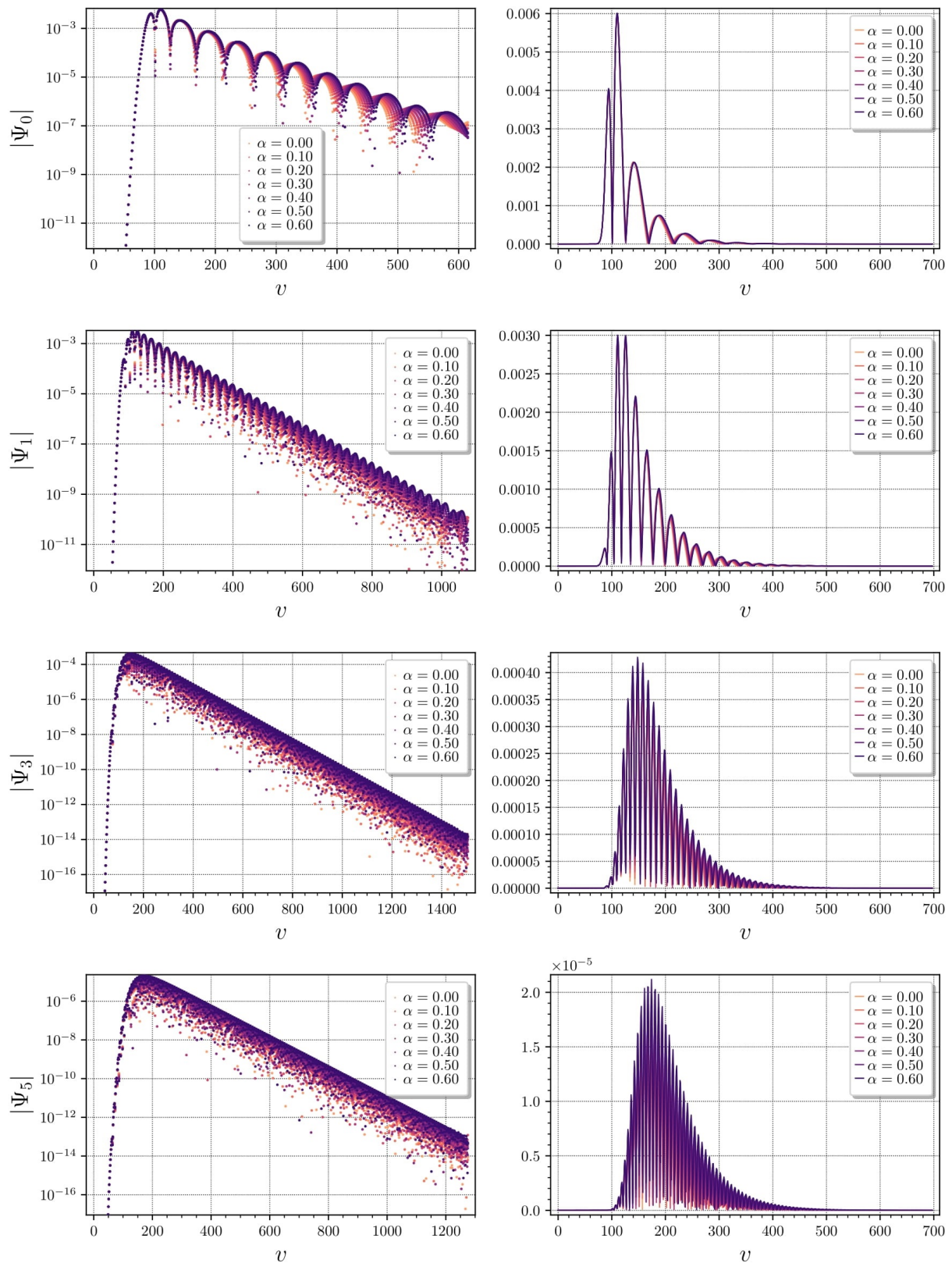
Figura 4 – Os perfis de onda, soluções da Equação (42), em função da coordenada do cone de luz v , para diversos valores do parâmetro α .



fonte: Produção do próprio autor

A Figura [Figura 4](#) mostra que o parâmetro α diminui a taxa de amortecimento dos modos, independentemente do valor l . Portanto, esse buraco negro com cabelos se comporta como um melhor oscilador, quando comparado ao caso de Schwarzschild padrão, correspondente a $\alpha = 0$. Além disso, para cada valor fixo do parâmetro de DG α , quanto mais alto o valor da coordenadas do cone de luz v , mais rápido a amplitude da onda desaparece, mais concentrado é o pacote de onda e mais baixa a amplitude é. Também observa-se que para altos valores da coordenada do cone de luz v , a amplitude da onda oscila mais rápido para o valor do parâmetro α . É um comportamento geral do modo de onda, independentemente do valor de l . A Figura [Figura 5](#) mostra o valor absoluto para a função de onda encontrada numericamente como solução da Equação (42) para $l = 0, 1, 3, 5$, em uma grade de $10^3 \times 10^3$.

Figura 5 – Valores absolutos dos perfis de onda, soluções da Equação (42), em função da coordenada do cone de luz v . A imagem à esquerda está em escala logarítmica.



fonte: Produção do próprio autor

Apesar da dispersão para diferentes valores de α , o comportamento qualitativo se assemelha ao caso de Schwarzschild, representado por $\alpha = 0$. O parâmetro α faz com que a taxa de amortecimento

dos modos quase normais diminua, independentemente l . Embora os aspectos qualitativos dos buracos negros com cabelos obtidos por DG se assemelhem aos de Schwarzschild, pelo menos no que diz respeito às perturbações escalares. Do ponto de vista quantitativo os principais resultados aqui mostram que existem assinaturas físicas categóricas que são intrínsecas aos buracos negros com cabelos obtidos por GD e inequivocamente diferentes do caso de Schwarzschild.

5.2 EQUAÇÃO MASTER DE TEUKOLSKY

A equação master de Teukolsky (EMT) é utilizada para descrever perturbações em buracos negros em rotação. A EMT foi originalmente obtida por Teukolsky em (TEUKOLSKY, 1973), o desenvolvimento presente nesse trabalho é feito de maneira semelhante. Durante essa seção, é apresentado o método de obtenção da EMT para o espaço-tempo de Kerr e Schwarzschild, como espaço-tempos de fundo. Para isso, o formalismo de Newman-Penrose, apresentado anteriormente, é de suma importância. É importante ressaltar que a classificação de Petrov tanto da métrica de Kerr quanto da métrica de Schwarzschild é a mesma, são do tipo D. Considere uma tétrada de Newman-Penrose $\{e_{(a)}\}$, definida anteriormente no Capítulo 3:

$$\{e_{(a)}\} = \{l^\mu, n^\nu, m^\mu, \bar{m}^\mu\}. \quad (46)$$

A notação para os coeficientes spin e os escalares de Weyl é a mesma apresentada no Capítulo 3. O conjunto $\{e_{(a)}\}$ é tal que todos os escalares de Weyl são nulos, exceto Ψ_2 . Considere perturbações de primeira ordem nas quantidades definidas no formalismo de Newman-Penrose representadas pelos termos linhas:

$$\Psi_i \rightarrow \Psi_i + \varepsilon \Psi'_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (47)$$

$$D \rightarrow D + \varepsilon D', \quad (48)$$

$$\Delta \rightarrow \Delta + \varepsilon \Delta', \quad (49)$$

$$\delta \rightarrow \delta + \varepsilon \delta', \quad (50)$$

$$\kappa \rightarrow \kappa + \varepsilon \kappa', \quad (51)$$

considerando tal transformação em todos os coeficientes spin, como para κ . Os escalares de Weyl Ψ_i são nulos para $0 \leq n \leq 4$ e $\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0$ para espaços-tempo do tipo D (TEUKOLSKY, 1973; LIMA, 2019). Seja ε pequeno e mantenha somente os termos de primeira ordem de ε . Para espaços-tempo do tipo D, temos as identidades (LIMA, 2019):

$$D\Psi_2 = 3\rho\Psi_2, \quad (52)$$

$$\delta\Psi_2 = 3\tau\Psi_2, \quad (53)$$

$$[D - (\mathbf{p} + 1)\epsilon + \bar{\epsilon} + \mathbf{q}\rho - \bar{\rho}](\delta - \mathbf{p}\beta + \mathbf{q}\tau) - [\beta - (\mathbf{p} + 1)\beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} + \mathbf{q}\tau](D - \mathbf{p}\epsilon + \mathbf{q}\rho) = 0, \quad (54)$$

com $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ são constantes quaisquer. Conforme dito anteriormente, em uma aproximação linear, o estudo de uma perturbação resume-se a propagação de campos pelo espaço-tempo espaço-tempo de fundo. Por isso para obter a EMT, deve-se considerar cada tipo de perturbação. Aqui é apresentado o

procedimento para o caso de uma perturbação vetorial de spin 1, descrita pelas equações de Maxwell. No formalismo de Newman-Penrose o tensor de Maxwell F é dado por três escalares complexos (LIMA, 2019):

$$\phi_0 = F_{ij}l^i m^j, \quad (55)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2}F_{ij}(l^i n^j + \bar{m}^i m^j), \quad (56)$$

$$\phi_2 = F_{ij}\bar{m}^i n^j. \quad (57)$$

Além disso, as equações de Maxwell são dadas por (LIMA, 2019):

$$F_{[ij|k]} = 0, \quad (58)$$

$$\eta^{lm}F_{il|m} = 0, \quad (59)$$

onde $F_{a|b} = e_a^\mu (\nabla_\nu F_\mu) e_b^\nu$. Então, escreve-se:

$$(D - 2\rho)\psi_1 - (\bar{\delta} + \pi - 2\alpha)\psi_0 = 2\pi J_l, \quad (60)$$

$$(\delta - 2\tau)\phi_1 - (\Delta + \mu - 2\gamma)\psi_0 = 2\pi J_m, \quad (61)$$

$$(D - \rho + 2\epsilon)\psi_2 - (\hat{\delta} + 2\pi)\psi_1 = 2\pi J_{\bar{m}}, \quad (62)$$

$$(\delta - \tau + 2\beta)\psi_2 - (\Delta + 2\mu)\psi_1 = 2\pi J_n, \quad (63)$$

onde índice inferiores em J simboliza a contração da quadricorrente J_μ e o respectivo elemento da tétrada. Depois de algumas manipulações, têm-se as equações desacopladas (TEUKOLSKY, 1973; LIMA, 2019):

$$[(D - \epsilon + \bar{\epsilon} - 2\rho + \bar{\rho})(\Delta + \mu - 2\gamma) - (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})(\bar{\delta} + \pi - 2\alpha)]\phi_0 = 2\pi J_0, \quad (64)$$

$$[(\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})(D - \rho + 2\epsilon) - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})(\delta - \bar{\tau} + 2\beta)]\phi_2 = 2\pi J_2. \quad (65)$$

As equações apresentadas até agora foram obtidas para um espaço-tempo espaço-tempo de fundo do tipo D e para tétrada não específica. Agora, considere a métrica de Kerr dada pelo elemento de linha (TEUKOLSKY, 1973):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) d\phi^2, \quad (66)$$

onde $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ e $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$. Considere a base dada por um conjunto $\{e_{(a)}\}$ composto por quatro vetores nulos definidos em cada ponto do espaço-tempo de fundo, ou seja, o espaço-tempo de Kerr. O conjunto dado pelos vetores (TEUKOLSKY, 1973):

$$l^\mu = \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)\delta_t^\mu + \Delta\delta_r^\mu + a\delta_\phi^\mu] \quad (67)$$

$$n^\mu = \frac{1}{2\Sigma} [(r^2 + a^2)\delta_t^\mu - \Delta\delta_r^\mu + a\delta_\phi^\mu] \quad (68)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia\sin\theta)} \left(ia\sin\theta\delta_t^\mu + \delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\delta_\phi^\mu \right) \quad (69)$$

que satisfazem as condições apresentadas no Capítulo 3. Os escalares de Weyl são nulos, exceto (TEUKOLSKY, 1973):

$$\Psi_2 = M\rho^3. \quad (70)$$

Além disso, é possível determinar os coeficientes spin não-nulos (TEUKOLSKY, 1973):

$$\rho = -\frac{1}{(r - ia\cos\theta)}, \quad (71)$$

$$\beta = -\bar{\rho}\frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}}, \quad (72)$$

$$\pi = ia\rho^2\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}, \quad (73)$$

$$\tau = ia\rho\bar{\rho}\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}, \quad (74)$$

$$\mu = \rho^2\bar{\rho}\frac{\Delta}{2}, \quad (75)$$

$$\gamma = \mu + \rho\bar{\rho}\frac{(r - M)}{2}, \quad (76)$$

$$\alpha = \pi - \hat{\beta}. \quad (77)$$

A Equação (64) é separável e a Equação (65) torna-se separável, se $\phi_2 = \psi\rho^{-2}$ (TEUKOLSKY, 1973; LIMA, 2019). Um procedimento semelhante pode ser feito para perturbações gravitacionais. Por fim, é possível escrever a equação master de Teukolsky para o espaço-tempo de Kerr, em coordenadas de Boyer-Lindquist (TEUKOLSKY, 1973):

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2\sin^2\theta \right] \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial\phi} + \left[\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2\theta} \right] \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta^{s+1} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) \\ & - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) - 2s \left[\frac{a(r - M)}{\Delta} + \frac{i\cos\theta}{\sin^2\theta} \right] \frac{\partial\psi}{\partial\phi} - 2s \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia\cos\theta \right] \frac{\partial\psi}{\partial t} \\ & + (s^2\cot^2\theta - s)\psi = 4\pi\Sigma T, \end{aligned} \quad (78)$$

onde s é o spin do campo que descreve a perturbação e T é termo da fonte. Considere $T = 0$, ou seja, o caso em que não exista fonte. A Equação (78) pode ser separada usando:

$$\psi = e^{i\omega t} e^{im\phi} S(\theta) R(r). \quad (79)$$

As equações para $R(r)$ e $S(\theta)$ são (TEUKOLSKY, 1973; LIMA, 2019), respectivamente,

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left(\Delta^{s+1} \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\Delta} + 4is\omega r - {}_s\lambda_{lm} \right) R = 0, \quad (80)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) \\ & + \left(a^2 \omega^2 \cos^2 \theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - 2a\omega s \cos \theta - \frac{2ms \cos \theta}{\sin^2 \theta} - s^2 \cot^2 \theta + s + {}_sA_{lm} \right) S = 0, \end{aligned} \quad (81)$$

onde $K \equiv (r^2 + a^2)\omega - am$, ${}_sA_{lm}$ é a constante de separação e $\lambda \equiv {}_sA_{lm} + a^2\omega^2 - 2am\omega$. A equação radial pode ser resolvida para certos valores complexos das auto-frequências ω . Esses valores são os modos quase normais do buraco negro de Kerr. Ainda é possível, estabelecer $a = 0$ na Equação (78). Assim, obtendo a equação master de Teukolsky para o espaço-tempo de Schwarzschild (ANDERSON; CREIGHTON, 2012):

$$\begin{aligned} & \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \phi} - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta^{s+1} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\ & - 2s \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - 2s \left[\frac{Mr^2}{\Delta} - r \right] \frac{\partial \psi}{\partial t} + (s^2 \cot^2 \theta - s) \psi = 4\pi \Sigma T, \end{aligned} \quad (82)$$

onde $\Delta \equiv r^2 - 2Mr$. No Capítulo 4, a partir da métrica obtida por DG, que descreve o espaço-tempo no exterior de um buraco negro com cabelos, foi obtida a métrica para um buraco negro em rotação. A equação master de Teukolsky pode ser utilizada para estudar perturbações que se propagam pelo espaço-tempo descrito por ela.

Tabela 1 – Frequências quase normais de perturbações escalares de um buraco com cabelos calculadas pelo Método Mashhoon, ω em unidades de $(2M)^{-1}$.

l	n	$\alpha = 0.0$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.4$
0	0	0.2296 + 0.2296 <i>i</i>	0.2284 + 0.2254 <i>i</i>	0.2271 + 0.2212 <i>i</i>	0.2258 + 0.2169 <i>i</i>	0.2245 + 0.2126 <i>i</i>
1	0	0.5971 + 0.2013 <i>i</i>	0.5933 + 0.1980 <i>i</i>	0.5894 + 0.1947 <i>i</i>	0.5855 + 0.1914 <i>i</i>	0.5816 + 0.1881 <i>i</i>
1	1	0.5971 + 0.6039 <i>i</i>	0.5933 + 0.5940 <i>i</i>	0.5894 + 0.5841 <i>i</i>	0.5855 + 0.5742 <i>i</i>	0.5816 + 0.5643 <i>i</i>
2	0	0.9747 + 0.1958 <i>i</i>	0.9687 + 0.1928 <i>i</i>	0.9625 + 0.1898 <i>i</i>	0.9564 + 0.1867 <i>i</i>	0.9502 + 0.1837 <i>i</i>
2	1	0.9747 + 0.5874 <i>i</i>	0.9687 + 0.5784 <i>i</i>	0.9625 + 0.5693 <i>i</i>	0.9564 + 0.5602 <i>i</i>	0.9502 + 0.5512 <i>i</i>
2	2	0.9747 + 0.9790 <i>i</i>	0.9687 + 0.9639 <i>i</i>	0.9625 + 0.9488 <i>i</i>	0.9564 + 0.9337 <i>i</i>	0.9502 + 0.9187 <i>i</i>
3	0	1.356 + 0.1942 <i>i</i>	1.348 + 0.1912 <i>i</i>	1.339 + 0.1883 <i>i</i>	1.331 + 0.1854 <i>i</i>	1.322 + 0.1824 <i>i</i>
3	1	1.356 + 0.5825 <i>i</i>	1.348 + 0.5737 <i>i</i>	1.339 + 0.5649 <i>i</i>	1.331 + 0.5561 <i>i</i>	1.322 + 0.5473 <i>i</i>
3	2	1.356 + 0.9709 <i>i</i>	1.348 + 0.9562 <i>i</i>	1.339 + 0.9415 <i>i</i>	1.331 + 0.9269 <i>i</i>	1.322 + 0.9122 <i>i</i>
3	3	1.356 + 1.359 <i>i</i>	1.348 + 1.339 <i>i</i>	1.339 + 1.318 <i>i</i>	1.331 + 1.298 <i>i</i>	1.322 + 1.277 <i>i</i>

fonte: Produção do próprio autor

Tabela 2 – Frequências quase normais de perturbações escalares de um buraco com cabelos calculadas pela aproximação WKB de terceira ordem, ω em unidades de $(2M)^{-1}$.

l	n	$\alpha = 0.0$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.4$
0	0	0.2093 + 0.2304 <i>i</i>	0.2071 + 0.2251 <i>i</i>	0.2049 + 0.2197 <i>i</i>	0.2028 + 0.2143 <i>i</i>	0.2007 + 0.2089 <i>i</i>
1	0	0.5822 + 0.1960 <i>i</i>	0.5791 + 0.1930 <i>i</i>	0.5759 + 0.1899 <i>i</i>	0.5727 + 0.1869 <i>i</i>	0.5695 + 0.1839 <i>i</i>
1	1	0.5244 + 0.6149 <i>i</i>	0.5229 + 0.6041 <i>i</i>	0.5214 + 0.5934 <i>i</i>	0.5199 + 0.5828 <i>i</i>	0.5186 + 0.5722 <i>i</i>
2	0	0.9664 + 0.1936 <i>i</i>	0.9607 + 0.1907 <i>i</i>	0.9549 + 0.1878 <i>i</i>	0.9491 + 0.1849 <i>i</i>	0.9433 + 0.1820 <i>i</i>
2	1	0.9264 + 0.5916 <i>i</i>	0.9220 + 0.5823 <i>i</i>	0.9176 + 0.5730 <i>i</i>	0.9132 + 0.5637 <i>i</i>	0.9088 + 0.5545 <i>i</i>
2	2	0.8633 + 1.007 <i>i</i>	0.8607 + 0.9903 <i>i</i>	0.8580 + 0.9738 <i>i</i>	0.8555 + 0.9574 <i>i</i>	0.8528 + 0.9409 <i>i</i>
3	0	1.350 + 0.1930 <i>i</i>	1.342 + 0.1901 <i>i</i>	1.334 + 0.1873 <i>i</i>	1.326 + 0.1844 <i>i</i>	1.318 + 0.1815 <i>i</i>
3	1	1.321 + 0.5847 <i>i</i>	1.314 + 0.5758 <i>i</i>	1.307 + 0.5668 <i>i</i>	1.299 + 0.5580 <i>i</i>	1.292 + 0.5491 <i>i</i>
3	2	1.270 + 0.9882 <i>i</i>	1.264 + 0.9727 <i>i</i>	1.259 + 0.9571 <i>i</i>	1.253 + 0.9416 <i>i</i>	1.247 + 0.9262 <i>i</i>
3	3	1.204 + 1.402 <i>i</i>	1.201 + 1.380 <i>i</i>	1.197 + 1.357 <i>i</i>	1.193 + 1.334 <i>i</i>	1.189 + 1.312 <i>i</i>

fonte: Produção do próprio autor

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Nesse trabalho foram estudadas perturbações escalares em soluções que descrevem buracos negros obtidas por desacoplamento gravitacional. No Capítulo 2, foi discutido o método de desacoplamento gravitacional e a obtenção da métrica que descreve um buraco negro com cabelos utilizando tal método. A métrica obtida se reduz a métrica de Schwarzschild quando o parâmetro de DG α é nulo. A solução obtida foi explorada ao longo deste trabalho. No Capítulo 4, a solução foi utilizada como um semente pelo algoritmo de Newman-Janis para gerar uma métrica que descreve um buraco negro com cabelos em rotação. O resultado condiz com o obtido em (CONTRERAS; OVALLE; CASADIO, 2021) e conforme esperado, se reduz a métrica de Kerr, quando o parâmetro α , advindo do DG, é nulo.

No Capítulo 5, o comportamento da métrica do buraco negro com cabelos obtida no Capítulo 2 diante perturbações escalares é estudado. Devido ao fato da métrica se reduzir a solução de Schwarzschild quando o parâmetro α é nulo, foram feitas comparações entre as soluções no caso extremo. Com isso, tentava-se encontrar possíveis desvios da solução clássica da relatividade e a nova obtida por DG. Além de prever possíveis assinaturas dos buracos negros com cabelos. Os modos quase normais causados pelas perturbações escalares de buraco negro com cabelos no caso extremo foram obtidos e discutidos, caracterizando e estabelecendo o comportamento tardio do campo escalar. Os picos do potencial efetivo também se mostraram influenciados pelo parâmetro α . No que diz respeito aos desvios no potencial efetivo causados pelo parâmetro α , observou-se que quanto maior o valor de α , menor foi o pico do potencial efetivo, além desse pico tornar-se cada vez mais suave.

Em seguida, o método Mashhoon e a aproximação WKB de terceira ordem foram aplicados para determinar as frequências quase normais e sua dependência dos parâmetros adicionais obtidos por GD. Observou-se que ao fixar um valor arbitrário do parâmetro α , quando o valor de l aumenta, a parte real da frequência associada a frequência real de oscilação do buraco negro também aumenta. Por outro lado, se fixado um valor de l e α , aumentar os valores de α , implica em menores partes reais e imaginárias das frequências quase normais. No que diz respeito aos métodos, houve uma discordância entre os valores encontrados para as frequências quase normais. No método Mashhoon a parte real da frequência quase normal é constante para o mesmo valor l , pois depende somente dele, ou seja, o número n não influencia na parte real dessa grandeza. Porém na aproximação WKB de terceira ordem, tanto a parte real quanto a parte imaginária das frequências quase normais dependem dos números l e n , o que faz a parte real não ser constante para um mesmo l . A maior causa de diferença deve residir nesse fato, já que para os termos em que $n = 0$, ou seja, a parte real tem dependência somente de l , os valores da parte real das frequências quase normais calculadas pelos dois métodos possuem discrepâncias menores do que para $n \neq 0$. Além disso, foram observadas assinaturas particulares dos buracos negros com cabelos descritos pela solução, passíveis de distingui-los da solução clássica.

Dentre as perspectivas, ressalta-se o estudo da métrica obtida no Capítulo 4, que descreve um buraco negro com cabelos em rotação. Utilizando a equação de Teukolsky seria possível determinar os modos quase normais e obter possíveis assinaturas desse tipo de buraco negro. Além disso, a própria solução obtida no Capítulo 2, ainda pode ser fonte de estudos. Nesse trabalho é obtido os modos quase

normais e possíveis assinaturas que caracterizam um buraco negro com cabelos estacionário obtido por DG diante perturbações escalares. Porém, o estudo do comportamento desse tipo de buraco negro diante outros tipos de perturbações, como gravitacionais e eletromagnéticas, pode fornecer outras características passíveis de serem detectadas.

REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. In: **Appl.** [S.l.: s.n.], 1972.
- ANDERSON, W. G.; CREIGHTON, J. D. **Gravitational-wave physics and astronomy: An introduction to theory, experiment and data analysis.** [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.
- BAMBI, C.; MODESTO, L. Rotating regular black holes. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 721, n. 4-5, p. 329–334, 2013.
- BARACK, L. et al. Black holes, gravitational waves and fundamental physics: a roadmap. **Classical and Quantum Gravity**, v. 36, n. 14, p. 143001, 2019.
- BARRETO, W. et al. Three-dimensional einstein-klein-gordon system in characteristic numerical relativity. **Physical Review D**, APS, v. 71, n. 6, p. 064028, 2005.
- BENDER, C. M.; ORSZAG, S.; ORSZAG, S. A. **Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory.** [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1999. v. 1.
- BEYER, H. R. On the completeness of the quasinormal modes of the pöschl–teller potential. **Communications in mathematical physics**, Springer, v. 204, n. 2, p. 397–423, 1999.
- BURIKHAM, P.; HARKO, T.; LAKE, M. J. Mass bounds for compact spherically symmetric objects in generalized gravity theories. **Physical Review D**, v. 94, n. 6, p. 064070, 2016.
- CAMPBELL, S.; WAINWRIGHT, J. Algebraic computing and the newman-penrose formalism in general relativity. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 8, n. 12, p. 987–1001, 1977.
- CARDOSO, V.; PANI, P. Testing the nature of dark compact objects: a status report. **Living Reviews in Relativity**, Springer, v. 22, n. 1, p. 1–104, 2019.
- CARROLL, S. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity.** Benjamin Cummings, 2003. ISBN 0805387323. Disponível em: <http://www.amazon.com/Spacetime-Geometry-Introduction-General-Relativity/dp/0805387323>.
- CASADIO, R. et al. Isotropization and change of complexity by gravitational decoupling. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 79, n. 10, p. 1–8, 2019.
- CASADIO, R.; OVALLE, J. Brane-world stars from minimal geometric deformation, and black holes. **Gen. Rel. Grav.**, v. 46, p. 1669, 2014.
- CAVALCANTI, R. T.; PAIVA, R. C. de; ROCHA, R. da. Echoes of the gravitational decoupling: scalar perturbations and quasinormal modes of hairy black holes. 3 2022.
- CEDEÑO, F. X. L.; CONTRERAS, E. Gravitational decoupling in cosmology. **Physics of the Dark Universe**, v. 28, p. 100543, 2020.
- CHANDRASEKHAR, S.; CHANDRASEKHAR, S. **The mathematical theory of black holes.** [S.l.]: Oxford university press, 1998. v. 69.
- CHANDRASEKHAR, S.; DETWEILER, S. L. The quasi-normal modes of the Schwarzschild black hole. **Proceedings of The Royal Society A**, v. 344, p. 441–452, 1975.

COMPÈRE, G.; FIORUCCI, A. **Advanced Lectures on General Relativity**. arXiv, 2018. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1801.07064>.

CONTRERAS, E.; OVALLE, J.; CASADIO, R. Gravitational decoupling for axially symmetric systems and rotating black holes. **Physical Review D**, APS, v. 103, n. 4, p. 044020, 2021.

ERBIN, H. Janis–Newman Algorithm: Generating Rotating and NUT Charged Black Holes. **Universe**, v. 3, n. 1, 2017. ISSN 2218-1997. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2218-1997/3/1/19>.

FERRARI, V.; MASHHOON, B. New approach to the quasinormal modes of a black hole. **Physical Review D**, APS, v. 30, n. 2, p. 295, 1984.

GOURGOULHON, E.; BEJGER, M.; MANCINI, M. Tensor calculus with open-source software: the SageManifolds project. **Journal of Physics: Conference Series**, IOP Publishing, v. 600, p. 012002, apr 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/600/1/012002>.

GOURGOULHON, E.; MANCINI, M. Symbolic tensor calculus on manifolds: a SageMath implementation. **Les cours du CIRM**, CIRM, v. 6, n. 1, 2018. Talk:1. Disponível em: <https://ccirm.centre-mersenne.org/articles/10.5802/ccirm.26/>.

HU, Y.-P.; ZHANG, H. Misner–Sharp Mass and the Unified First Law in Massive Gravity. **Physical Review D**, v. 92, n. 2, p. 024006, 2015.

JUNIOR, H. C. D. L. et al. Spinning black holes with a separable Hamilton–Jacobi equation from a modified Newman–Janis algorithm. **The European Physical Journal C**, v. 80, n. 11, p. 1036, 2020.

KONOPLYA, R.; ZHIDENKO, A. Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 83, n. 3, p. 793, 2011.

KRASNOV, K. **Formulations of general relativity: Gravity, spinors and differential forms**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2020.

LIMA, M. C. d. **Perturbations in the Kerr spacetime**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2019.

MAURYA, S.; TELLO-ORTIZ, F. Charged anisotropic compact star in $f(R, T)$ gravity: A minimal geometric deformation gravitational decoupling approach. **Physics of the Dark Universe**, v. 27, p. 100442, 2020.

MEERT, P.; ROCHA, R. da. Gravitational decoupling, hairy black holes and conformal anomalies. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 82, n. 2, p. 1–8, 2022.

NEROZZI, A. **A new approach to the Newman–Penrose formalism**. 2011.

O’NEILL, B. **The geometry of Kerr black holes**. [S.l.]: Courier Corporation, 2014.

OVALLE, J. Decoupling gravitational sources in general relativity: from perfect to anisotropic fluids. **Physical Review D**, D95, n. 10, p. 104019, 2017.

OVALLE, J. Decoupling gravitational sources in general relativity: the extended case. **Physics Letters B**, B788, p. 213–218, 2019.

OVALLE, J. et al. Hairy black holes by gravitational decoupling. **Physics of the Dark Universe**, v. 31, p. 100744, 2021.

OVALLE, J.; CASADIO, R.; SOTOMAYOR, A. The Minimal Geometric Deformation Approach: a brief introduction. **Advances in High Energy Physics**, v. 2017, p. 9756914, 2017.

- OVALLE, J.; CONTRERAS, E.; STUHLIK, Z. Kerr–de Sitter black hole revisited. **Physical Review D**, v. 103, n. 8, p. 084016, 2021.
- OWEN, C. B.; YUNES, N.; WITEK, H. Petrov type, principal null directions, and Killing tensors of slowly rotating black holes in quadratic gravity. **Physical Review D**, v. 103, n. 12, p. 124057, 2021.
- PANI, P. Advanced Methods in Black-Hole Perturbation Theory. **International Journal of Modern Physics A**, v. 28, p. 1340018, 2013.
- REGGE, T.; WHEELER, J. A. Stability of a Schwarzschild singularity. **Physical Review**, v. 108, p. 1063–1069, 1957.
- ROCHA, R. da. MGD Dirac stars. **Symmetry**, v. 12, n. 4, p. 508, 2020.
- SANTOS, E. C.; FABRIS, J. C.; PACHECO, J. A. de F. Quasi-normal modes of black holes and naked singularities: revisiting the WKB method. 3 2019.
- SCHUTZ, B. F.; WILL, C. M. Black hole normal modes: a semianalytic approach. **The Astrophysical Journal**, v. 291, p. L33–L36, 1985.
- SHARIF, M.; SABA, S. Gravitational decoupled anisotropic solutions in $f(\mathcal{G})$ gravity. **Eur. Phys. J.**, C78, n. 11, p. 921, 2018.
- TEUKOLSKY, S. A. Perturbations of a rotating black hole. i. fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations. **The Astrophysical Journal**, v. 185, p. 635–648, 1973.
- The Sage Developers. **SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version x.y.z)**. [S.l.], YYYY. <https://www.sagemath.org>.
- THORNE, K. S.; MISNER, C. W.; WHEELER, J. A. **Gravitation**. [S.l.]: Freeman San Francisco, CA, 2000.