

**OTIMIZAÇÃO APLICADA AO RISCO BANCÁRIO UTILIZANDO
UM MODELO MATEMÁTICO EPIDEMIOLÓGICO**

Hugo Luiz Zanotto Alves

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” para obtenção do título de Mestre em Biometria.

**BOTUCATU, SP - BRASIL
FEVEREIRO DE 2020**

**OTIMIZAÇÃO APLICADA AO RISCO BANCÁRIO UTILIZANDO
UM MODELO MATEMÁTICO EPIDEMIOLÓGICO**

Hugo Luiz Zanotto Alves

Orientadora: **Prof. Dra. Daniela Renata Cantane**

Co-Orientadora: **Prof. Dra. Camila de Lima**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” para obtenção do título de Mestre em Biometria.

BOTUCATU, SP - BRASIL

FEVEREIRO DE 2020

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA SEÇÃO TÉC. AQUIS. TRATAMENTO DA INFORM.
DIVISÃO TÉCNICA DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - CÂMPUS DE BOTUCATU - UNESP
BIBLIOTECÁRIA RESPONSÁVEL: ROSANGELA APARECIDA LOBO-CRB 8/7500

Alves, Hugo Luiz Zanotto.

Otimização aplicada ao risco bancário utilizando um modelo epidemiológico / Hugo Luiz Zanotto Alves. - Botucatu, 2020

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências de Botucatu

Orientador: Daniela Renata Cantane

Coorientador: Camila de Lima

Capes: 40601005

1. Crises financeiras. 2. Programação heurística. 3. Otimização. 4. Epidemiologia - Modelos matemáticos. 5. Bancos centrais.

Palavras-chave: Busca em vizinhança variável; Controle ótimo; Crise bancária; Metaheurística; SIR.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE HUGO LUIZ ZANOTTO ALVES, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA, DO INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS - CÂMPUS DE BOTUCATU.

Aos 20 dias do mês de fevereiro do ano de 2020, às 14:30 horas, no(a) Departamento de Bioestatística, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Profa. Dra. DANIELA RENATA CANTANE - Orientador(a) do(a) Departamento de Bioestatística / Instituto de Biociências de Botucatu - UNESP, Prof. Dr. FERNANDO LUIZ PIO DOS SANTOS do(a) Departamento de Bioestatística / Instituto de Biociências de Botucatu - UNESP, Prof. Dr. ANGELO ALIANO FILHO do(a) UTFPR / Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Apucarana, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de HUGO LUIZ ZANOTTO ALVES, intitulada **Otimização Aplicada ao Risco Bancário Utilizando um Modelo Matemático Epidemiológico**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: aprovado. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Profa. Dra. DANIELA RENATA CANTANE

Prof. Dr. FERNANDO LUIZ PIO DOS SANTOS

Prof. Dr. ANGELO ALIANO FILHO

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais Luiz Carlos e Maria Tereza; minhas filhas Isabela e Laura; e minha esposa Patrícia, pela compreensão, carinho, amor e amizade, sem isso, esse trabalho não se tornaria realidade.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem Ele, não seria possível estar aqui, desfrutando destes momentos que nos são tão importantes.

Agradeço a minha orientadora Daniela pelo incentivo e motivação, por estar sempre disposta a tirar dúvidas e orientar, pelas inúmeras correções, por sempre me guiar para que tudo ficasse dentro dos prazos estabelecidos, pelas reuniões, sem as quais não teria concluído este trabalho.

Agradeço a minha co-orientadora Camila pela dedicação e empenho em me auxiliar neste trabalho todas as vezes que precisei de ajuda e orientação.

Agradeço a todos os amigos da Biometria pelo companherismo ao longo deste mestrado, principalmente ao Felipe Telles pelo auxílio com as apresentações, conselhos e conversas, ao Eduardo Ribeiro Pinto pela ajuda com a programação e ao Renato F. Cruz com a contribuição para o desenvolvimento com o Latex e discussões nas disciplinas.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Sumário

	Página
LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	x
RESUMO	xi
SUMMARY	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
2 REVISÃO DA LITERATURA	5
2.1 Contágio bancário	8
2.2 Risco sistêmico	9
2.3 O modelo matemático epidemiológico SIR	10
2.4 Otimização	11
3 MODELOS MATEMÁTICOS APLICADOS AO RISCO BANCÁRIO	14
3.1 Introdução	14
3.2 Modelo de otimização aplicado ao risco bancário	17
4 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO	21
4.1 A metaheurística Busca em Vizinhança Variável	21
4.2 A metaheurística Busca em Vizinhança Variável aplicada ao problema do risco bancário	23

5 RESULTADOS OBTIDOS	25
5.1 Parâmetros e condições iniciais utilizados	25
5.1.1 Cenário europeu	25
5.1.2 Cenário mundial	26
5.2 Simulações computacionais do modelo SIR sem a utilização do controle .	29
5.3 Simulações computacionais do modelo de otimização com controle constante	36
5.4 Simulações computacionais do modelo de otimização com controle variável	41
5.5 Resultados referentes à função objetivo	49
5.6 Análise da eficácia da metodologia proposta	52
6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	53
REFERÊNCIAS	55

Lista de Figuras

	Página
1 Fluxograma mostrando os passos do Método SIR.	11
2 Dinâmica do cenário europeu sem controle - 100 dias.	30
3 Dinâmica do cenário europeu sem controle até o fim da crise.	31
4 Dinâmica do cenário mundial sem controle - Grupo 1.	33
5 Dinâmica do cenário mundial sem controle - Grupo 2.	34
6 Dinâmica do cenário mundial sem controle - Grupo 3.	35
7 Dinâmica do cenário mundial sem controle - Grupo 4.	36
8 Dinâmica do cenário europeu com controle constante.	37
9 Dinâmica do cenário mundial com controle constante - Grupo 1.	39
10 Dinâmica do cenário mundial com controle constante - Grupo 2.	40
11 Dinâmica do cenário mundial com controle constante - Grupo 3.	41
12 Dinâmica do cenário europeu com controle ótimo - Portugal.	42
13 Dinâmica do cenário europeu com controle ótimo - Espanha.	42
14 Dinâmica do cenário europeu com controle ótimo - Reino Unido.	43
15 Dinâmica do cenário europeu com controle ótimo - Portugal 30 dias.	44
16 Dinâmica do cenário mundial com controle ótimo - Grupo 1: Portugal.	45
17 Dinâmica do cenário mundial com controle ótimo - Grupo 1: Espanha.	45
18 Dinâmica do cenário mundial com controle ótimo - Grupo 1: Itália.	46
19 Dinâmica do cenário mundial com controle ótimo - Grupo 1: Reino Unido.	46
20 Dinâmica do cenário mundial com controle ótimo - Grupo 1: Japão.	47
21 Dinâmica do cenário mundial com controle ótimo - Grupo 2: França.	47

22	Dinâmica do cenário mundial com controle ótimo - Grupo 2: Bélgica. . .	48
23	Dinâmica do cenário mundial com controle ótimo - Grupo 3: EUA. . . .	49
24	Dinâmica do cenário mundial com controle ótimo - Grupo 3: Reino Unido.	49

Lista de Tabelas

	Página
1	Parâmetros utilizados nas simulações do cenário europeu. 26
2	Parâmetros utilizados nas simulações do cenário mundial 27
3	Grupos utilizados nas simulações computacionais. 28
4	Valores de função objetivo e tempo de processamento para o controle variável para o cenário europeu. 50
5	Valores de função objetivo e tempo de processamento para o controle variável para o cenário mundial. 51
6	Análise de eficácia - controle constante. 52

OTIMIZAÇÃO APLICADA AO RISCO BANCÁRIO UTILIZANDO UM MODELO MATEMÁTICO EPIDEMIOLÓGICO

Autor: HUGO LUIZ ZANOTTO ALVES

Orientadora: Prof. Dra. DANIELA RENATA CANTANE

Co-Orientadora: Prof. Dra. CAMILA DE LIMA

RESUMO

Este trabalho utiliza um modelo epidemiológico para analisar o comportamento de crises bancárias que possuem origem em um determinado país e são propagadas para outros países atingindo proporções mundiais. O modelo matemático epidemiológico Suscetíveis, Infectados e Recuperados (SIR) empregado permite simular a dinâmica da crise separando os países em três estados: suscetíveis, infectados e recuperados, em cada instante de tempo, além de prever a extensão da crise. Os parâmetros do modelo são obtidos da literatura para cada país envolvido e a crise segue uma dinâmica diferente dependendo do país de origem. Uma breve descrição da importância dos bancos em nível macroeconômico e suas funções básicas são apresentadas. Também são apresentadas algumas definições desta crise, denominada crise sistêmica, bem como os canais de transmissão de como um banco com problemas

financeiros, denominado infectado, transmite esta condição para outro. Considerada a possibilidade de uma crise sistêmica, o Banco Central deve intervir nos bancos com problemas. Esta tarefa pode ser modelada como um problema de controle ótimo inserindo uma variável de controle no modelo SIR, que representa a intervenção do Banco Central, e uma função objetivo, em que o custo dessa intervenção deve ser minimizado. O objetivo deste trabalho é investigar um modelo de otimização aplicado ao risco bancário e propor o método heurístico *Variable Neighbourhood Search* (VNS) para resolução do problema de controle ótimo proposto. Vários cenários foram simulados e os resultados computacionais indicam que o modelo de otimização considerado e o método de resolução proposto são boas ferramentas para analisar a propagação de uma crise assim como melhor orientar a forma de ação do Banco Central para o controle da mesma.

Palavras-chaves: Controle ótimo; Crise bancária; Crise sistêmica; Metaheurística; Busca em vizinhança variável; Modelo SIR.

OPTIMIZATION APPLIED TO BANK RISK USING AN MATHEMATICAL EPIDEMIOLOGICAL MODEL

Author: HUGO LUIZ ZANOTTO ALVES

Adviser: Prof. Dra. DANIELA RENATA CANTANE

Co-adviser: Prof. Dra. CAMILA DE LIMA

SUMMARY

This work uses an epidemiological model to analyze the behavior of bank crises that originate in a given country and are propagated to other countries reaching worldwide proportions. The epidemiological mathematical model Susceptible, Infected and Recovered (SIR) used allows to simulate the dynamics of the crisis separating the countries in three states: susceptible, infected and recovered, in each instant of time, in addition to predicting the extent of the crisis. The model parameters are obtained from the literature for each country involved and the crisis follows a different dynamic depending on the country of origin. A brief description of the importance of banks at the macroeconomic level and their basic functions is presented. Some definitions of this crisis, called systemic crisis, are also presented, as well as the transmission channels of how a bank with financial problems, called infected, transmits this condition to another. Considering the possibility of a systemic crisis, the Central Bank must intervene in troubled banks. This task can be

modeled as an optimal control problem by inserting a control variable in the SIR model, which represents Central Bank intervention, and an objective function involving the cost of this intervention and must be minimized. The objective of this work is to investigate an optimization model applied to banking risk and propose the Variable Neighborhood Search (VNS) heuristic method to solve the proposed optimal control problem. Several scenarios were simulated and the computational results indicate that the considered optimization model and the proposed resolution method are good tools to analyze the propagation of a crisis as well as to better guide Central Bank's form of action to control it.

Keywords: Optimal control; Bank crisis; Systemic crisis; Metaheuristic; Variable neighborhood search; SIR model.

1 INTRODUÇÃO

Os bancos são os principais integrantes do Sistema Financeiro Nacional que canalizam recursos financeiros dos poupadores para os investidores com o objetivo de gerar crescimento e desenvolvimento econômico para um país. Esta função é denominada intermediação financeira (Neto, 2002).

Os conceitos de crescimento e desenvolvimento econômico são semelhantes e muitas vezes utilizados como se fossem o mesmo, entretanto o primeiro é um termo mais restrito (Neto, 2001). Crescimento econômico refere-se ao aumento da capacidade produtiva de um país, e está ligado ao conceito de Produto Interno Bruto (PIB), que mede a quantidade de bens e serviços produzidos por um país durante um determinado período de tempo (trimestral, semestral, anual, etc.). O PIB é calculado pelo somatório do produto da quantidade de um bem ou serviço pelo seu valor. Se este valor calculado para o PIB aumentou de um ano para outro, descontada a taxa de inflação, diz-se que houve crescimento econômico ou aumento do PIB real. Já o conceito de desenvolvimento econômico engloba o conceito de crescimento econômico e outras variáveis como renda per-capta, saúde, educação, dentre outras, que buscam medir as condições de vida da população. Por ser um conceito mais complexo, é difícil obter uma definição precisa.

Ao desenvolverem a atividade de intermediação, os bancos obtêm lucro pagando uma taxa de juros menor aos poupadores (poupança) que a cobrada dos investidores, a diferença é denominada *spread* bancário. Além da intermediação financeira, a outra atividade básica de um banco é promover mecanismos de pagamentos tais como cheques, movimentações eletrônicas, dentre outros (Neto, 2001).

Outro aspecto da atividade bancária que a diferencia das demais instituições,

e que pode ser incluída na própria definição de banco, é a criação de moeda. Dos recursos captados, apenas um pequeno percentual é mantido em caixa para as necessidades eventuais de saque. O restante do depósito é aplicado pelo banco sob a forma de empréstimo a um tomador de recursos. A partir deste momento, passa a existir na economia além do depósito original, o empréstimo realizado pelo banco. Por sua vez, o mesmo acontece com o tomador e o ciclo se repete até a soma do percentual mantido em caixa atingir o valor do depósito inicial (Blanchard, 2004).

O volume de fundos captados que podem ser aplicados é definido pelo nível de reservas voluntárias dos bancos e por regulamentações das autoridades monetárias. Pela experiência, os bancos observaram que é remota a probabilidade de que os depositários venham a realizar saques simultâneos e portanto podem emprestar estes recursos à tomadores. Por meio de reservas mantidas muito inferiores ao valor dos depósitos, os bancos contribuem em muito para o aumento dos meios de pagamento em função da quantidade de papel moeda emitida pelo Banco Central. Esta função de aumento é denominada multiplicador monetário. Desta maneira, do ponto de vista macroeconômico, os bancos são fatores importantes de política monetária (Blanchard, 2004).

O balanço patrimonial de um banco é composto por empréstimos (ativos) e depósitos (passivos) que diferenciam-se pelo prazo. Em geral, ativos são mais longos que passivos. Além disso, um banco será mais sólido quanto maior forem seus ativos em relação aos passivos (Patrimônio Líquido) (Neto, 2002).

A atividade bancária convive com dois tipos de riscos: liquidez e solvência (Neto, 2002). O risco de liquidez é a possibilidade de um banco não ter os recursos necessários para suprir um saque quando demandado por um depositário (saque de conta corrente, resgate de aplicação de curto prazo, dentre outros). Os bancos tendem a iliquidez quando aumentam os empréstimos para aumentar os lucros diminuindo as reservas para saques. O risco de solvência, por sua vez, é a incapacidade de uma instituição não cumprir uma obrigação de longo prazo tais como: depósitos interfinanceiros, depósitos a prazo, captações no mercado aberto, letras imobiliárias,

hipotecárias, de crédito, empréstimos no exterior, dentre outras. Isto ocorre quando o valor de seus ativos é menor que o valor de seus passivos, caso fossem negociados no mercado.

Os bancos operam em uma rede complexa pois estão interligados por empréstimos, empréstimos de curtíssimo prazo (1 dia) e operações comerciais. Esta interligação faz com que as dificuldades enfrentadas por um banco possam afetar os demais, caso não haja intervenção do Banco Central. Um banco estará mais exposto quanto mais empréstimos tiver realizado e menores montantes mantiver em caixa disponível para os saques diários de seus clientes.

Uma vez que um banco decreta falência, outros bancos que estejam interligados a ele por operações comerciais e empréstimos também estarão sujeitos à falência. E assim, uma sucessão de falências pode ocorrer, provocando um colapso no sistema financeiro, atingindo todas as suas instituições e gerando uma crise sistêmica. Dessa forma, estudos vêm sendo desenvolvidos nesta área com o intuito de analisar a propagação de crises financeiras, e maneiras para tentar reduzi-las e prevê-las, tais como Takami & Tabak (2007), Garas et al. (2010) e Toivanen (2013).

Nesse contexto, uma das estratégias utilizadas para análise do processo de transmissão de crises financeiras presente na literatura é a investigação por meio de modelos epidemiológicos via equações diferenciais ordinárias. Esta classe de modelos normalmente é utilizada no estudo de propagação de doenças, previsão do comportamento de uma epidemia, mecanismos de contágio, entre outras situações. Além disso, esses modelos utilizam os estados da doença para representar a dinâmica do processo investigado como infecção, recuperação, morte e imunidade.

Dentre as pesquisas encontradas na literatura que exploram esse modelo, podemos destacar Kostylenko et al. (2018a), que utiliza modelo matemático epidemiológico SIR para a representação da dinâmica de transmissão de crises financeiras entre bancos. Esse modelo consiste em um sistema de equações diferenciais ordinárias, em que cada equação representa o estado de um banco: suscetível, infectado ou recuperado. Os autores apresentam dois modelos: o primeiro sem e o segundo

com controle, que se dá pela interferência do Banco Central. Ambos os modelos são resolvidos utilizando dados reais do cenário de propagação de contágio entre bancos europeus. Para resolução do modelo com controle apresentado pelos autores, foi realizada uma aproximação do problema pelo *software* de controle ótimo BOCOP (um sistema de otimização dinâmica composto por equações diferenciais) para um problema de programação não-linear utilizando uma discretização de tempo.

Dessa forma, o objetivo desse trabalho é investigar os modelos propostos por Kostylenko et al. (2018a) propondo uma alteração na função objetivo, e uma nova metodologia de resolução que utiliza a formulação do problema inicial. Esta metodologia consiste na utilização da heurística *Variable Neighbourhood Search* (VNS) pois pela característica do problema, empregar métodos exatos requer técnicas específicas que utilizariam muito esforço computacional. O sistema de equações diferenciais ordinárias envolvido no modelo é resolvido utilizando o método numérico Runge-Kutta de quarta ordem que permite a resolução de problemas de controle ótimo em que as restrições não podem ser resolvidas analiticamente. A capacidade de processamento computacional exigida é baixa.

O presente trabalho apresenta a seguinte estrutura. O Capítulo 2 apresenta algumas definições de crise sistêmica, especificando os canais de contágio e os modelos epidemiológicos aplicado ao risco bancário. No Capítulo 3 são definidos os modelos SIR sem controle e com controle utilizados neste trabalho. O Capítulo 4 apresenta técnicas heurísticas de otimização utilizadas para a resolução dos modelos apresentados. Os resultados obtidos a partir da implementação computacional dos modelos investigados, bem como a discussão acerca destes, são apresentados no Capítulo 5. As considerações finais e perspectivas futuras são apresentadas no Capítulo 6.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Historicamente, a primeira crise bancária ocorreu em Portugal em 1876. Na segunda metade do século XIX, os bancos portugueses demonstraram interesse em títulos de dívida do governo espanhol. Uma grave crise econômica na Espanha depreciou o valor dos títulos gerando uma desconfiança generalizada na população e levando à falência alguns bancos. Conseqüentemente, houve uma corrida generalizada aos bancos para retirada de depósitos, levando os bancos a uma falta de liquidez. A solução encontrada pelo governo português foi a obtenção de empréstimos junto a Londres para suprir as necessidades financeiras dos bancos com problemas (Antunes, 2013).

Dentre muitos exemplos, apresenta-se dois eventos recentes de elevada importância: as crises bancárias pós Plano Real e a crise dos *subprimes* deflagrada por bancos americanos, sendo esta última com grandes reflexos na economia mundial.

Nos anos que antecederam o Plano Real, o sistema financeiro tinha como principal função financiar os déficits dos governos federais e estaduais. Este fato gerou incentivos aos bancos para investimentos em títulos governamentais que geravam alto rendimento a baixo risco, visto que estes títulos são considerados os mais seguros. Além disso, altas taxas de inflação geravam receitas bancárias com a corrosão do valor real de depósitos (Borges, 2014).

Após anos de altas taxas de inflação, os bancos estavam despreparados para atuar em ambientes de baixa inflação gerados pelo advento do plano real em 1994. O investimento em títulos governamentais fez com que os bancos não obtivessem a experiência necessária em gerenciamento de risco, sendo esta a principal atividade de qualquer banco em uma economia estabilizada (Abreu, 2014).

O inicial aumento da demanda agregada, motivada pelo crescimento da confiança dos agentes privados na economia estabilizada, incentivou a expansão do crédito por parte dos bancos como uma maneira de enfrentar as dificuldades com o fim da receita inflacionária. Porém medidas de reversão desta demanda excessiva aumentaram a taxa de inadimplência e encontraram bancos e famílias desprevidos. Como consequência, o nível de inadimplência dos bancos brasileiros, no período de 1994 a 1995, atingiu 85,9% (Abreu, 2014).

Os bancos que realizaram apostas em operações de crédito mais arriscadas foram os primeiros a sentirem os efeitos da política monetária restritiva. A desconfiança generalizada se instalou após o Banco Central intervir no Banco Econômico e, posteriormente, nos bancos Nacional e Bamerindus.

Desde a implantação do Plano Real, a taxa de câmbio operava sob o sistema de banda de flutuação, isto é, poderia operar entre um piso e um teto. O Banco Central intervia no mercado de câmbio vendendo ou comprando para manter a cotação dentro da banda. A partir de 1999, a política econômica abandonou este sistema e adotou o câmbio flutuante em que as forças de mercado determinam o valor da moeda. Este sistema permanece até hoje.

Nos dias que antecederam a mudança de regime, os bancos Marka e Fonte-Cindam, ocupavam posições vendidas em dólar na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BMF), uma aposta contrária à posição dos demais bancos do Sistema Financeiro e de todo o mercado. Era esperada uma valorização da moeda estrangeira para R\$1,55 enquanto a banda era de R\$1,20 a R\$1,32. A posição vendida, no jargão do mercado, significa a venda de um ativo a preço pré-determinado sem ter o ativo. Portanto, deveria-se comprar dólar ao preço vigente (R\$1,55) e vendê-lo ao preço pré-determinado (R\$1,32) (Borges, 2014).

O Banco Central interviu no mercado para prover ajuda aos dois bancos sob pesadas críticas e se justificou pela possibilidade de crise sistêmica. Segundo o Banco Central, uma inadimplência de alcance imprevisível certamente destruiria a confiança na efetividade deste seguro, causando sentimento de pânico e fuga de capitais, além

disso impossibilitaria a defesa do regime cambial e colocaria o país a beira de um colapso econômico de dimensões imprevisíveis.

O segundo evento de relevância foi a crise do *subprime* em 2008, nos Estados Unidos. Esta é reconhecida como a pior crise financeira desde a grande depressão de 1929. A partir de 2003 com a valorização dos imóveis e falta de novos tomadores de empréstimos, o acesso ao créditos foi facilitado para famílias e indivíduos sem histórico de crédito ou histórico ruim sem renda ou emprego. Estes empréstimos só eram quitados pela tomada de novos empréstimos. Com a valorização dos imóveis, novos empréstimos eram tomados com valores sempre maiores tendo como garantia o mesmo imóvel que se valorizava.

Quando as taxas de juros caíram e, conseqüentemente, os imóveis desvalorizaram, não havendo mais a possibilidade de tomada de novos empréstimos, ocorreu inadimplência em massa e diversos bancos se tornaram insolventes.

Os bancos então operaram uma estratégia de agrupar estes títulos, padronizá-los e negociá-los nos mercados futuros como derivativos. Estes títulos foram classificados por instituições avaliadoras de risco, até então tidas como inquestionáveis, como títulos AAA - a classificação máxima que pode ser atribuída a um título, sendo a mesma conferida a títulos do tesouro americano e, inclusive, superior aos títulos de dívida brasileiros.

Com essa classificação, os títulos passaram a ser disputados por investidores do mundo inteiro. A partir de julho de 2007 a crise do crédito hipotecário provocou uma crise de confiança geral no sistema financeiro causando falta de liquidez no bancos. Como consequência ocorre o pedido de concordata do Banco Lehman Brothers e o Banco Central americano é forçado a fazer injeção de recursos financeiros no sistema bancário.

Para Kostylenko et al. (2018b) que estuda o contágio do risco bancário e a intervenção financeira pelas autoridades, o fato da crise de 2008 ter atingido proporções mundiais é resultado de um mercado global sem barreiras protecionistas ao fluxo de mercadorias e serviços, capital, migração de pessoas e troca de informações

e tecnologias - um processo chamado de globalização.

A crise de 2008 mostrou que mesmo países fracamente conectados em momentos de estabilidade, em momentos de crise movem-se de maneira sincronizada com os demais. Isto se deve ao fato de que um país em crise pode gerar crise em outro. (Kostylenko et al., 2019).

As Seções 2.1 e 2.2 apresentam como o funcionamento de um banco pode afetar um outro através de suas interligações por transações e, assim, gerar até mesmo uma crise sistêmica.

2.1 Contágio bancário

Para Santomero (1977), um banco abre falência quando sofre uma perda, o não recebimento de um empréstimo ou de uma série de empréstimos, grande o suficiente que o impossibilita de saldar suas obrigações com credores. Quando isto ocorre geralmente a instituição reguladora (Banco Central) intervém.

O contágio entre os bancos podem ocorrer por meio de três canais (Borges, 2014). O primeiro canal já mencionado decorre dos depósitos fracionários que são as reservas mantidas em caixa para eventuais saques de depositários, fato que é próprio da atividade bancária. Uma instituição ou pessoa deposita o valor no banco. O banco supõe que o valor não será sacado integralmente à vista, então mantém uma parcela deste para as necessidades diárias de saques (por exemplo 10%). O restante pode ser emprestado à longo prazo para financiar o setor produtivo.

Se todos os depositários resolverem sacar seus depósitos, os bancos não terão liquidez para pagar. Naturalmente isto não ocorre, a não ser que um simples boato ou percepção que um banco está em dificuldade pode gerar uma corrida bancária de depositários ansiosos para sacarem seus saldos, culminando na falência do banco. Como a confiança é o elemento essencial que permeia todo o sistema financeiro, é possível que a fragilidade de um banco espalhe-se para todas as instituições do sistema financeiro.

O segundo canal de contágio é o mercado de depósitos interbancários (DI)

de curtíssimo prazo (um dia). A legislação bancária exige que, ao final do dia, todas as posições devedoras sejam zeradas através deste tipo de empréstimo. A taxa de juros deste varia de acordo com o risco do banco tomador. Alguns bancos, principalmente os pequenos, dependem desse mercado para não ficarem expostos ao risco de insolvência.

O terceiro canal de transmissão decorre do sistema pagamentos. Como praticamente todas as transações econômicas são feitas monetariamente, os pagamentos são feitos por transferências de reservas bancárias. Falhas nestas transferências pode propagar uma série de danos pelo sistema bancário.

2.2 Risco sistêmico

Diversas definições têm sido propostas para a crise sistêmica. Para Lastra (2006), crise sistêmica (ou risco sistêmico) pode ser definida como o risco que uma dificuldade financeira em um ou mais bancos se espalhe para um grande número de bancos ou mesmo para todo o sistema financeiro.

Para Schwarcz (2008) o risco sistêmico é o risco de que um choque econômico como uma falha de mercado ou institucional dispara (através de pânico ou outra maneira) uma cadeia de perdas significantes para as instituições financeiras; resultando em um aumento no custo de capital ou diminuição na sua disponibilidade, frequentemente evidenciado pela substancial volatilidade dos preços do mercado financeiro.

Ainda de acordo com Schwarcz (2008), o risco sistêmico pode provocar impactos macroeconômicos como aumento da taxa de juros de empréstimos, relutância dos bancos em emprestar e maior volatilidade nos preços do mercado financeiro.

Reinhart & Rogoff (2009) concluíram que tais eventos:

- assolam economias avançadas e emergentes com frequência e magnitude semelhantes;
- inflam a dívida pública nos anos seguintes à sua instalação a um percentual médio de 86%;

- reduzem as taxas de arrecadação do governo por um período médio de três anos;
- afetam negativamente o crescimento econômico, especialmente no período de até um ano após a sua ocorrência.

Na próxima seção apresentamos o modelo epidemiológico SIR que será utilizado para simular crises sistêmicas.

2.3 O modelo matemático epidemiológico SIR

O modelo matemático epidemiológico utilizado neste trabalho segue o modelo mais simples para doenças da literatura: Suscetíveis, Infectados e Recuperados (SIR) (Figura 1). Este é um sistema de três equações diferenciais que determina a proporção de indivíduos a cada período de tempo, em cada um dos estados da população: suscetíveis, infectados ou recuperados (Keeling & Rohani, 2007). Tal modelo é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t) \\ (S(t), I(t), R(t), t) \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

em que:

- $S(t)$: proporção de indivíduos suscetíveis (não infectados) no tempo t ;
- $I(t)$: proporção de indivíduos infectados no tempo t ;
- $R(t)$: proporção de indivíduos recuperados no tempo t ;
- β : taxa de infecção de indivíduos;

- γ : taxa de recuperação de indivíduos.

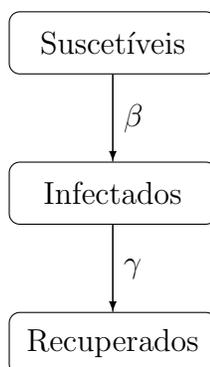


Figura 1: Fluxograma mostrando os passos do Método SIR.

A dinâmica do sistema (1) segue os seguintes passos: indivíduos suscetíveis, são infectados e posteriormente recuperados, adquirindo imunidade. Para haver epidemia, nas condições iniciais, deve haver pelo menos um indivíduo infectado. Se todos os indivíduos são suscetíveis ou recuperados, não há epidemia, o sistema está em equilíbrio.

2.4 Otimização

Nesta seção apresenta-se uma breve introdução aos conceitos básicos de otimização matemática. O objetivo é apresentar ao leitor alguns conceitos necessários ao entendimento da metodologia utilizada neste trabalho. Caso seja necessário informações aprofundadas sobre o tema, são indicadas as referências Arenales et al. (2007) e Taha (2008).

A otimização é o ramo da matemática que visa minimizar ou maximizar uma função de modo a atender concomitantemente um conjunto de restrições. A teoria de otimização é muito ampla, englobando técnicas de modelagem, diversos métodos de resolução, estudo de convergência de algoritmos computacionais dentre outros.

A modelagem na teoria de otimização exige conhecimento do problema para identificar o objetivo a ser atingido (maximizar ou minimizar uma função), as res-

trições impostas pelo problema e as variáveis de decisão. O próximo passo é a codificação destes em elementos equações e inequações matemáticas. O produto resultante da modelagem é chamado modelo de otimização ou problema de otimização. O modelo geral de otimização pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a } g(x) = 0 \\ &x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$, é o vetor que contém as variáveis de decisão, a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada função objetivo; as restrições $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ formam o espaço de soluções do problema e p é o número de restrições.

A função objetivo pode também ser de maximização e as restrições podem ser de desigualdade. De acordo com a forma de $f(x)$ e $g(x)$, o problema pode ser classificado como:

- Problema de Programação Linear (PPL): se $f(x)$ ou $g(x)$ forem lineares;
- Problema de Programação Não Linear (PPNL): se $f(x)$ e/ou $g(x)$ forem não lineares;
- Problema de Programação Linear Inteira (PPLI): se $f(x)$ e $g(x)$ forem lineares e x_i for inteiro para todo i , $i = 1, 2, \dots, n$;
- Problema de Programação Linear Inteira Mista (PPLIM): se $f(x)$ e $g(x)$ forem lineares e x_i for inteiro para algum i , $i = 1, 2, \dots, n$;
- Problema de Programação Não Linear Inteira: (PPNLI): se $f(x)$ e/ou $g(x)$ forem não lineares e x_i for inteiro para todo i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Uma solução é chamada *solução factível* ou *solução viável* se atende todas as restrições do problema. Uma solução factível que otimiza (maximiza ou minimiza) a função objetivo é chamada *solução ótima*.

Em problemas de controle ótimo, geralmente tem-se um período de planejamento de um tempo inicial $t = 0$ até um tempo final $t = T$. Em qualquer instante de tempo $t \in [0, T]$, teremos que escolher o valor das n variáveis de controle $u(t)$, que afetará o valor de m variáveis de estado $y(t)$ por meio de uma equação ou sistema de equações diferenciais e estas variáveis afetarão o valor da função objetivo (Rachah & Torres, 2015),(Chiang & Wainwright, 2006).

Assim, o problema geral de controle ótimo é dado por:

$$\text{minimizar} \quad \int_0^T F(t, y, u) dt \quad (2)$$

$$\text{sujeito a} \quad \frac{dy}{dt} = h(t, y, u) \quad (3)$$

$$y(0) = y_0. \quad (4)$$

A Função (2) é denominada funcional, isto é, uma regra que associa a cada função de uma classe ω , em que ω é o domínio do funcional, um único número real. Nesta equação $F(t, y, u)$ é uma função das variáveis de estado y , das variáveis de controle u e do tempo t . A Equação (3) refere-se a um sistema de equações diferenciais ordinárias também funções de t, y, u . A Equação (4) indica que todas as equações de (3) possuem um valor inicial $y_0 \in \mathbb{R}$, com $y_0 \geq 0$.

Como estamos trabalhando com um modelo matemático SIR em que, cada variável tem um valor no tempo t , a variável de controle u também deve ter um valor a cada t . Além disso, uma vez que estamos considerando um período de tempo definido, a função objetivo surge como uma integral definida da função das variáveis do modelo.

Neste trabalho, (2) representa o dispêndio financeiro no período 0 a T para controlar os infectados e a crise. Queremos encontrar o valor de u em cada t que obtém estes resultados com menor dispêndio possível. Tanto F quanto h são definidas de acordo com o objetivo que se quer alcançar e com o conhecimento do problema.

No Capítulo 3, um modelo de otimização é apresentado baseando-se no problema (2)-(4) para o modelo matemático SIR aplicado ao risco bancário.

3 MODELOS MATEMÁTICOS APLICADOS AO RISCO BANCÁRIO

Neste capítulo, são apresentados alguns modelos matemáticos de otimização de sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) aplicados ao risco bancário encontrados na literatura e considerados neste trabalho.

A Seção 3.1 descreve uma breve revisão de literatura envolvendo o uso de modelos matemáticos epidemiológicos aplicados ao risco bancário. A Seção 3.2 apresenta o modelo matemático SIR aplicado ao risco bancário e o problema de otimização envolvendo a intervenção do Banco Central em sua formulação.

3.1 Introdução

Takami & Tabak (2007) empregaram novos métodos estatísticos para medir e monitorar o risco no setor bancário brasileiro. Eles provaram que a medida de risco baseada em *opções*¹ é negativamente relacionada com taxa de juros. Além disso, compararam esta metodologia com uma baseada no mercado de ações da Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA), em que se mede o risco pelo inverso do resíduo do modelo *Capital Asset Price Model* (CAPM), que estima variação de uma ação de acordo com a variação do índice de ações da BOVESPA, o IBOVESPA.

¹O comprador de uma *opção de compra* adquire o direito de comprar, de um vendedor de *opção*, certa quantidade de ações, até uma data determinada, a um preço previamente estabelecido (o preço atual por exemplo). O comprador aposta na valorização da ação, dessa forma, quando isso acontecer, dentro do prazo estabelecido, ele pode comprar a ação ao preço acordado e vendê-la ao preço atual. Se o preço da ação cair o comprador da *opção* não exerce seu direito, e o vendedor da *opção* fica com o valor pago pela *opção*.

As duas metodologias se mostraram úteis para administrar e regulamentar o risco, especialmente em crises. Entretanto, a metodologia baseada em opções se mostrou preferível em classificar os bancos por níveis de risco em situações complexa.

Garas et al. (2010) modelaram a disseminação de uma crise econômica global utilizando um modelo matemático SIR com probabilidade variável de infecção e uma rede teórica econômica global. A probabilidade de infecção depende do poder econômico do país contaminado e do poder econômico do país suscetível com o qual tem relações econômicas. Espera-se que um país com um maior PIB tenha maior poder de infecção, como o caso dos Estados Unidos na crise recente de 2008. Surpreendentemente, países com menor PIB, também estão aptos a disseminar crises globais. Os países mais inter-relacionados são os que têm maior poder de disseminação. Dentre os 12 países mais inter-relacionados, 6 têm um PIB de pequeno a médio.

Toivanen (2013) utiliza uma nova metodologia para modelar o processo de contágio em uma crise bancária. Com dados de bancos europeus de diversos países, o autor utiliza um modelo matemático epidemiológico SIR aplicado a um contexto de redes teóricas do tipo BA, em que a probabilidade de um novo banco se ligar a outro é proporcional à quantidade de conexões. A análise dos resultados mostrou que, quanto maior e mais conectado o banco que inicia a crise, maior será a dimensão desta. Entretanto, o alto agrupamento do sistema bancário, o alto grau de conectividade e o tamanho dos empréstimos tem um peso maior que o tamanho do banco. Desta forma, o autor propõe o paradigma “conectado-demais-para-quebrar”.

Philippas et al. (2015) calcularam a probabilidade de contágio e recuperação de diferentes bancos para onze países da União Européia. Estes autores utilizaram o fato de que a rede bancária pode ser modelada por uma rede complexa do tipo BA nomeada em referência a seus autores (Barabasi & Albert, 1999). Este tipo de rede complexa possui duas características: constantemente entram na rede novos participantes (nós) e estes novos participantes têm probabilidades maiores de fazer arestas com os nós que já possuem mais arestas. A rede aumenta continuamente.

Os autores selecionaram os 11 maiores bancos para construir uma rede BA aleatória de 169 bancos (nós).

Para o cálculo da probabilidade de contágio estes autores utilizaram dados de exposição - a quantidade de empréstimos em relação ao total de empréstimos da rede, a relação dívida de um país em relação ao seu Produto Interno Bruto (PIB) e a razão *Core Tier 1 Capital Ratios (CT1CR)*, uma medida de força financeira de um banco estabelecida por um acordo do *Basel Committee on Banking Supervision* um comitê internacional formado para desenvolver padrões de regulação bancária. Para a probabilidade de recuperação foi utilizada a razão Patrimônio Líquido/Ativos.

Foi observado que bancos maiores, medidos pela quantidade de seus ativos, têm probabilidade maior de contagiar outros bancos e que bancos menores têm probabilidade pequena de contagiar bancos grandes.

Kostylenko et al. (2018a) construíram um modelo matemático epidemiológico SIR, com os dados obtidos por Philippas et al. (2015), para três cenários: Portugal, Espanha e Reino Unido. Baseados nesse modelo, propuseram um problema de otimização que busca definir a melhor forma de intervenção do Banco Central para conter a crise bancária.

Em um estudo mais recente, Kostylenko et al. (2018b) analisaram a dinâmica de uma crise financeira internacional deflagrada por bancos que vieram a falir em algum país e contagiaram o sistema financeiro de outros países. Esta análise leva em consideração o cenário mundial. Para tanto, analisaram uma amostra de 13 países e utilizaram uma metodologia diferente para cálculo dos parâmetros baseada na taxa de exposição (proporção de empréstimos realizados) e a avaliação da qualidade dos créditos e dos ativos.

Com o intuito de analisar a consistência dos resultados obtidos na literatura com o modelo matemático SIR, Kostylenko et al. (2019) construíram uma rede complexa entre países em que todos os países estavam conectados entre si e, utilizando os parâmetros β e γ obtidos em Kostylenko et al. (2018b), observaram a evolução dos suscetíveis, infectados e recuperados na rede, a cada tempo t . Os resultados

coincidiram com os obtidos com o modelo SIR.

3.2 Modelo de otimização aplicado ao risco bancário

O modelo matemático epidemiológico SIR aplicado ao risco bancário é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t) \\ (S(t), I(t), R(t), t) \geq 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \end{array}$$

em que:

- $S(t)$: proporção de bancos suscetíveis (não infectados) no tempo t ;
- $I(t)$: proporção de bancos infectados no tempo t ;
- $R(t)$: proporção de bancos recuperados no tempo t ;
- $\beta > 0$: taxa de infecção;
- $\gamma > 0$: taxa de recuperação.

O modelo de otimização, proposto por Kostylenko et al. (2018a), é descrito por (9)-(13). Estes modificaram o Modelo (5)-(8), que simula uma crise bancária sem intervenção, para um problema de controle ótimo. Para tanto, inseriram a função objetivo (9) e a variável de controle $u(t)$. O modelo é dado por:

$$\text{minimizar} \quad I(T) + \int_0^T bu^2(t)dt \quad (9)$$

$$\text{sujeito a } \frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t) \quad (10)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - u(t)I(t) \quad (11)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t) + u(t)I(t) \quad (12)$$

$$(S(t), I(t), R(t), t) \geq 0, \quad (13)$$

com as condições iniciais: $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$ e $R(0) = R_0$.

O termo $I(T)$, em (9), reflete o fato de que, ao final do período T , a quantidade de bancos infectados deve ser zero (ou muito próximo à zero) pois a função é de minimização. A variável $u(t)$ representa a ajuda do Banco Central aos bancos com problemas e pertence ao intervalo $[0,1]$, sendo zero nenhuma ajuda prestada às necessidades financeiras dos bancos e, um, ajuda total prestada as necessidades dos bancos. Como é o custo do Banco Central que queremos minimizar no período 0 a T , $u(t)$ está inserida na integral. O valor de b se refere a um peso associado ao custo da medida de controle. Os parâmetros β e γ são os mesmos das equações (5)-(8).

A variável $u(t)$ também aparece nas equações (11) e (12). Note que quanto maior for o valor de $u(t)$ menos bancos serão infectados e mais bancos serão recuperados, assim como maior será a despesa do Banco Central. O bancos recuperados, por sua vez, tornam-se imunes a novas falências, pelo menos durante um certo período de tempo.

Os autores Kostylenko et al. (2018a), Kostylenko et al. (2018b) e Kostylenko et al. (2019) não conseguiram resolver o Modelo (9)-(13), denominado formato Bolza e o reescreveram no formato Mayer² de modo a resolver utilizando o *software* BOCOP.

O BOCOP é uma ferramenta de código aberto para resolver problemas de controle ótimo, construído com colaboração acadêmica e industrial (Bonnans et al., 2015),(Commands, 2017). A primeira versão utilizava um método de otimização

²Para maiores informações sobre o formato Mayer sugere-se Chiang (1999).

local discretizando o modelo e aproximando o problema de controle ótimo por um problema de otimização de dimensão finita e aproximando um problema não-linear (PNL) por um problema linear. A segunda versão utiliza um método de otimização global em dois passos: primeiro é resolvida a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, depois simula-se a trajetória ótima de qualquer condição inicial. O esforço computacional concentra-se no primeiro passo.

O modelo discretizado é dado por:

$$\text{minimizar} \quad N - S(T) - R(T) + Y(T) \quad (14)$$

$$\text{sujeito a } \frac{dS}{dt} = \beta S^2(t) + \beta S(t)(R(t) - N) \quad (15)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma(N - S(t) - R(t)) + u(t)(N - S(t) - R(t)) \quad (16)$$

$$\frac{dY}{dt} = bu^2(t) \quad (17)$$

$$S(0) = S_0, R(0) = 0, Y(0) = 0 \quad (18)$$

$$u(t) \in [0, 1], \quad (19)$$

em que Y é crescente com u , e representa o gasto acumulado do Banco Central, que deve ser minimizado no final do período T .

Neste trabalho, a proposta é resolver o modelo (10) - (13), substituindo a função objetivo (9) pela função objetivo (20), apresentada a seguir, a fim de minimizar a quantidade de bancos infectados a cada tempo t :

$$\text{minimizar} \quad J(u) = \int_0^T aI(t) + bu^2(t)dt. \quad (20)$$

O problema de controle ótimo encontra o valor de $u(t)$ para cada tempo $t \in [0, T]$ que minimiza a função objetivo. Por sua vez, a função objetivo (20) considera pesos a e b referentes a cada parcela considerada. Ressalta-se ainda que, alterações em u afetam o valor de I em cada instante de tempo. Desta forma, busca-se determinar o controle $u(t)$ que minimize a função objetivo (20), mantendo a epidemia controlada, em níveis baixos, num tempo pré-determinado.

É importante ressaltar a diferença entre a função objetivo (20), proposta neste trabalho, e aquela proposta por Kostylenko et al. (2018a), descrita na Equação (9). Os autores consideram o custo de se aplicar o controle em todos os períodos t ($u(t)$), e o custo de infectados apenas no período final ($I(T)$). Neste trabalho, a proposta é minimizar o custo de infectados em todos os períodos t , e não somente no período final, ou seja, $I(t)$. Dessa forma, espera-se que a curva de infectados seja reduzida, mesmo que isso implique num custo maior, o qual deve ser otimizado.

Neste contexto, propõe-se resolver o problema:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimizar} && \int_0^T aI(t) + bu^2(t)dt \\
 \text{sujeito a} & \frac{dS}{dt} &= & -\beta S(t)I(t) \\
 & \frac{dI}{dt} &= & \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - u(t)I(t) \\
 & \frac{dR}{dt} &= & \gamma I(t) + u(t)I(t) \\
 & & & (S(t), I(t), R(t), t) \geq 0,
 \end{aligned} \tag{21}$$

Uma outra abordagem que pode ser investigada é a proposta por Kirk (2004), em que se define um valor para as variáveis de estado no final do período T . Para isto, inserimos um termo extra na função fora da integral, como na equação (22):

$$\text{minimizar} \quad \bar{J}(u) = (C - I(T)) + \int_0^T (I(t) + bu^2(t))dt, \tag{22}$$

em que C é uma constante qualquer maior ou igual a zero. Neste trabalho não foi utilizada esta abordagem.

No próximo capítulo é apresentado o método Busca em Vizinhança Variável, o qual será utilizado para resolver o problema de controle ótimo (21).

4 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Neste capítulo é apresentado o método de resolução utilizado neste trabalho para resolver o problema de otimização (21). A Seção 4.1 apresenta uma breve introdução do método heurístico considerado para a resolução do modelo e a Seção 4.2 apresenta a meta-heurística Busca em Vizinhança Variável (VNS) aplicada ao problema do risco bancário.

4.1 A metaheurística Busca em Vizinhança Variável

Os métodos de resolução de problemas de otimização dividem-se em métodos exatos e heurísticos. O primeiro encontra uma solução ótima global, entretanto a sua utilização é limitada em problemas de análise combinatorial, com muitas variáveis e restrições e ainda, com características específicas tais como sistema de equações diferenciais, que é o enfoque deste trabalho. A capacidade de processamento computacional exigida, nestes casos, é muito alta mesmo com os avanços recentes.

Para a solução destes problemas foram criados os métodos heurísticos que, apesar de não obterem a solução exata, obtém uma solução de qualidade com esforço computacional substancialmente menor. O método heurístico tem ainda a vantagem de poder oferecer soluções muito próximas à ótima, ampliando a possibilidade de decisão.

Neste trabalho será utilizado o algoritmo de otimização metaheurístico denominado *Variable Neighborhood Search* (VNS) (Hansen & Mladenovic, 1999). Primeiramente são definidas, aleatoriamente, soluções iniciais. A partir destas, são definidos conjuntos de vizinhanças das soluções em que cada vizinho é a variação em

uma coordenada da solução anterior. A busca é feita em cada vizinhança gerando soluções aleatórias até um limite predeterminado e selecionando a melhor solução.

Encontrada a melhor solução em uma determinada vizinhança, parte-se para a próxima. O resultado do algoritmo é a melhor solução dentre todas as vizinhanças (Hansen & Mladenovic, 1999).

O Algoritmo 1 refere-se ao VNS geral. O Algoritmo 2 refere-se a busca do ótimo local em uma vizinhança.

Estrutura da vizinhança: Considere u' uma solução factível para o problema de otimização (21) e as vizinhanças N_1 e N_2 da solução u' , definidas por: $N_1(u') = \{u | u > u'\}$ e $N_2(u') = \{u | u < u'\}$.

Algoritmo 1: METAHEURÍSTICA BUSCA EM VIZINHANÇA VARIÁVEL

início

$N_k, k = 1, \dots, k_{max}$ estruturas de vizinhanças definidas;

$u_0 \leftarrow$ vetor aleatório inicial do controle;

$u^* \leftarrow u_0$, u^* é o ótimo atual;

$k \leftarrow 1$

Gere um vizinho qualquer $u' \in N_i(u^*)$

$u'' \leftarrow$ Busca Local (u');

se $J(u'') < J(u^*)$ **então**

$u^* \leftarrow u''$;

$k \leftarrow 1$;

senão

$k \leftarrow k + 1$;

fim

fim

retorne u^* e $J(u^*)$;

fim

Algoritmo 2: BUSCA LOCAL (u')

```

início
  |
  |  $l = 0$ ; enquanto  $l < l_{max}$  faça
  |   |
  |   | Gere  $u'' \in N_i(u')$ ;
  |   |
  |   | se  $J(u'') < J(u')$  então
  |   |   |  $u' \leftarrow u''$ ;
  |   |
  |   | fim
  |   |  $l \leftarrow l + 1$ ;
  |   |
  |   | fim
  | fim
fim

```

4.2 A metaheurística Busca em Vizinhança Variável aplicada ao problema do risco bancário

Para um sistema de equações diferenciais que são inviáveis ou não possam ser resolvidos analiticamente faz-se o uso do método numérico Runge-Kutta. Os resultados obtidos são utilizados para mensurar a função objetivo. Isto permite fazer uso da metaheurística VNS (Ruggiero & Lopes, 2000).

Esta seção apresenta a resolução do problema de controle ótimo proposto seguindo o pseudocódigo da seção anterior. A seguir, especifica-se os passos da estratégia de avaliação da função objetivo e da obtenção da vizinhança do algoritmo VNS.

1. Determine um período de tempo T para o fim da crise, um tamanho do passo h , que neste trabalho foi utilizado 0,01 e um tempo inicial $tn = 0$. Com estes valores calcule a quantidade de passos: $numero_passos = \frac{T - tn}{h}$, em que tn é o contador, $tn = 0; 0, 1; 0, 2; \dots T$;
2. Gere um vetor aleatório inicial u de tamanho $numero_passos$, em que cada coordenada pertence ao intervalo $[0, 1]$;

3. Use o algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem para resolver o sistema de equações diferenciais do problema (21) com quantidade de iterações igual a *numero_passos* e a cada iteração use o valor equivalente do vetor inicial u ;
4. Calcule o valor da função objetivo do problema (21) pelo método do Trapézio;
5. Calcule o vizinho: é sorteada uma coordenada do vetor u ao qual pode ser somado ou subtraído um valor aleatório. Este é o vizinho u' de u ;
6. Avalie u' (Passos 3 a 4);
7. Gere um vizinho u'' de u' (Passo 5);
8. Avalie u'' (Passo 3 e 4);
9. Se a avaliação de u'' for menor que u' então u' recebe u'' ;
10. O processo se repete a partir do Passo 7 até a quantidade estabelecida $l_{max} = 300$.
11. Se u' for menor que u , então u recebe u' e $k = 1$ senão $k = k + 1$ até uma quantidade estabelecida $k_{max} = 5$.

Em um primeiro momento, para a solução do problema de otimização (21) foi considerado um controle constante. Posteriormente, utilizou-se um vetor de $u(t)$, em que cada coordenada varia de acordo com o tempo, ou seja, um controle variável.

5 RESULTADOS OBTIDOS

Os programas utilizados para obtenção dos resultados foram implementados em linguagem C, e editados e compilados no *software* livre Code Blocks, nos computadores do Laboratório Científico de Matemática do Departamento de Bioestatística do IBB/UNESP com as seguintes configurações: sistema operacional Linux, processador Intel Core i5-7400, 7.7 GB de memória e 170 GB de disco rígido.

5.1 Parâmetros e condições iniciais utilizados

Os parâmetros e as condições iniciais do modelo matemático SIR obtidos na literatura foram adaptados para refletir a proporção de bancos em cada estado. Os resultados foram obtidos para dois cenários: europeu (Kostylenko et al., 2018a) e mundial (Kostylenko et al., 2018b). O horizonte de planejamento T varia a cada caso pois há diferentes extensões de crise, os parâmetros da função objetivo tem os valores $a = 1$ e $b = 1,5$. Os valores iniciais do SIR são: $S(0) = \frac{N-1}{N}$, $I(0) = \frac{1}{N}$ e $R(0) = 0$, em que N é a quantidade de bancos/países.

5.1.1 Cenário europeu

Os valores de β e γ constam na Tabela 1 e foram obtidos na literatura por Philippas et al. (2015). A simulação é realizada para 3 situações, a crise se iniciando em: Portugal, Espanha e Reino Unido (Kostylenko et al., 2018a).

Países	Parâmetros	
	β	γ
Portugal	0,845	0,042
Espanha	0,845	0,013
Reino Unido	0,338	0,0035

Tabela 1: Parâmetros utilizados nas simulações do cenário europeu.

Para os três países considerados, o número total de bancos é 169. Dessa forma, assumimos que apenas um banco foi inicialmente infectado. Neste trabalho, as condições iniciais são: $S(0) = 0,994$, $I(0) = 0,0059$ e $R(0) = 0$.

5.1.2 Cenário mundial

Os parâmetros para o cenário mundial (Tabela 2) foram obtidos da literatura Kostylenko et al. (2018b) em um trabalho motivado pela já citada crise do *subprime* em 2008. O interesse nesta crise se deve a magnitude de sua propagação e as suas consequências econômicas negativas em nível mundial.

Países	Parâmetros	
	β	γ
Austria	0,1872	0,2
Bélgica	0,3744	0,0769
Canada	0,403	0,5
França	0,9698	0,0909
Alemanha	1,2558	1
Irlanda	0,3692	0,0322
Itália	0,6409	0,0243
Portugal	0,1638	0,0175
Espanha	0,3796	0,0256
Suécia	0,1352	0,5
Reino Unido	2,0657	0,1667
EUA	5,2065	0,25
Japão	0,8424	0,0434

Tabela 2: Parâmetros utilizados nas simulações do cenário mundial

Para o cenário mundial, a quantidade de países estudados é 13, e a quantidade de países infectados é 1, dessa forma as condições iniciais são: $S(0) = 0,923$, $I(0) = 0,0769$ e $R(0) = 0$.

Os países são divididos em quatro grupos de acordo com γ e \mathfrak{R}_0 , em que $\mathfrak{R}_0 = \beta/\gamma$ é a taxa de reprodução que, se for maior que 1, um país infectado espalha a contaminação para pelo menos 1 país. Por outro lado, se menor que 1, a epidemia não ocorre pois um país não consegue contaminar outro e não há necessidade de intervenção. A determinação de \mathfrak{R}_0 é demonstrada a seguir.

Para haver epidemia no sistema SIR sem controle, considerando a Equação (6), é necessário que:

$$\frac{dI}{dt} > 0.$$

Então, dividindo-a por γ :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) > 0 \\ \frac{\beta S(t)I(t) - \gamma I(t)}{\gamma} &> 0 \\ \frac{\beta S(t)I(t)}{\gamma} &> I(t) \\ \frac{\beta}{\gamma} &> \frac{1}{S(t)}. \end{aligned} \tag{23}$$

Substituindo $S(t)$ por seu valor inicial, tem-se:

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta}{\gamma} > 1. \tag{24}$$

Considerando o sistema SIR com controle do problema (21), de forma análoga ao desenvolvimento dos cálculos referentes às Equações (23) e (24), para saber se haverá ou não epidemia, também tem-se um \mathfrak{R}_0 nos casos com intervenção que é dado por:

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta}{\gamma + u}$$

Para a análise de resultados, os países foram divididos em quatro grupos, de acordo com os valores de γ e \mathfrak{R}_0 próximos, conforme descrito na Tabela 3.

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
$\gamma < 0,05$	$0,05 \leq \gamma < 0,1$	$0,1 < \gamma < 1$	$0,1 < \gamma \leq 1$
$\mathfrak{R}_0 > 1$	$\mathfrak{R}_0 > 1$	$\mathfrak{R}_0 > 1$	$\mathfrak{R}_0 < 1$
Portugal			Canada
Itália	França	EUA	Austria
Espanha	Bélgica	Reino Unido	Suécia
Irlanda			Alemanha
Japão			

Tabela 3: Grupos utilizados nas simulações computacionais.

5.2 Simulações computacionais do modelo SIR sem a utilização do controle

Nesta seção são apresentados os resultados computacionais, não havendo otimização. A extensão e intensidade da crise varia de acordo com os parâmetros de cada caso, ou seja, o modelo SIR (5)-(8).

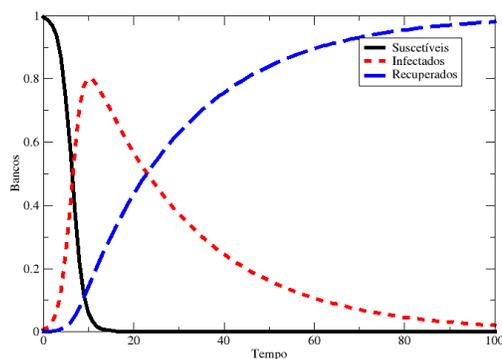
I. Cenário europeu

Quando se analisa a dinâmica de evolução de uma crise bancária com os parâmetros de um país, supõe-se que a crise internacional se iniciou neste país e que são infectados bancos de outros países de acordo com estes parâmetros, uma vez que os bancos estão interligados por empréstimos internacionais. Consequentemente, os compartimentos do modelo matemático SIR possuem bancos de diversos países. No caso deste trabalho, 169 bancos de Portugal, Espanha e Reino Unido: veja Figura 2.

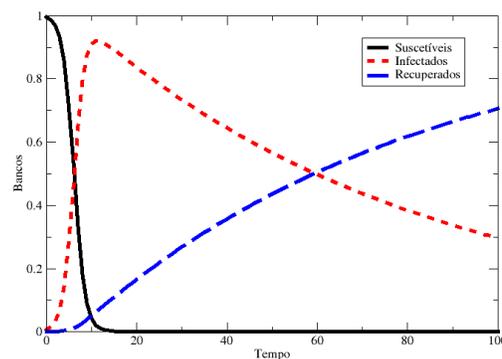
Em Portugal o contágio se espalha rapidamente, em um curto período de tempo (15 dias) a infecção atinge um pico de 80% e cai de forma rápida (Figura 2(a)) quando comparado aos casos em que a crise se inicia com os bancos de Espanha (Figura 2(b)) e Reino Unido (Figura 2(c)). O processo de recuperação bancária também é rápido como pode ser observado pela curva de recuperados na Figura 2(a).

Na Espanha, o processo de contaminação é rápido, em 15 dias atinge um pico 90% de infectados que decresce lentamente assim como o processo de recuperação é lento devido a um γ baixo.

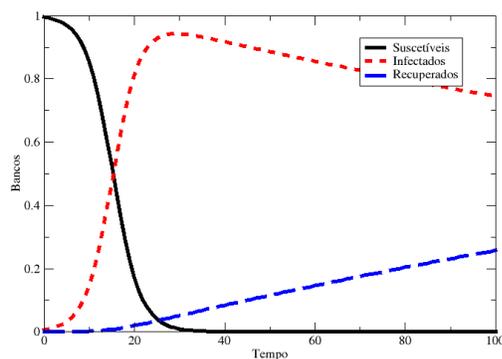
No Reino Unido o contágio leva mais tempo para atingir o pico, (25 dias) dias, chegando a 90% e os processos de queda de infectados e recuperação são os o mais lentos entre os três países.



(a) Portugal



(b) Espanha

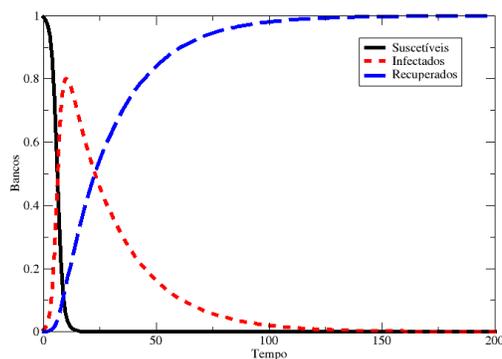


(c) Reino Unido

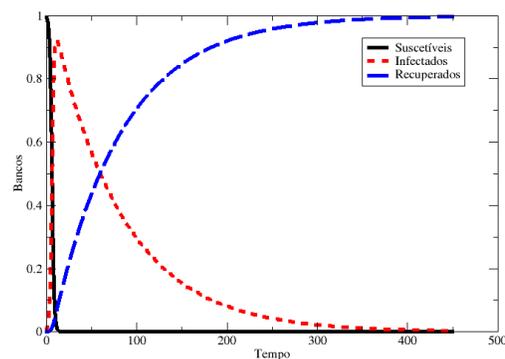
Figura 2: Dinâmica do cenário europeu sem controle - 100 dias.

Observando a Figura 3(a), podemos verificar que em Portugal a contaminação termina ($I(T) = 0$) em aproximadamente 100 dias. A partir de então, o sistema atinge seu equilíbrio e todos os bancos que são infectados, são posteriormente recuperados.

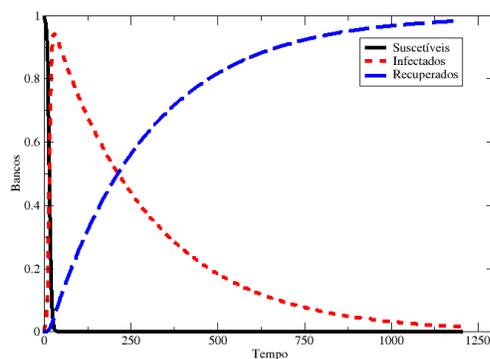
O mesmo processo ocorre na Espanha e no Reino Unido, com o sistema atingindo equilíbrio, em 450 e 1200 dias, respectivamente.



(a) Portugal



(b) Espanha



(c) Reino Unido

Figura 3: Dinâmica do cenário europeu sem controle até o fim da crise.

A razão destas diferenças encontradas se deve à importância do sistema bancário de origem da crise em relação ao sistema bancário global. Um banco causará uma crise mais severa quanto maior o grau de conexão (quantidade de conexão com outros bancos) e quanto maior seu tamanho (valor de seus ativos) (Toivanen, 2013). Então, se o banco que origina a crise pertencer ao Reino Unido, a crise será mais severa e os efeitos negativos persistirão por mais tempo. Por outro lado, Portugal tem a menor influência econômica em nível europeu e uma crise originada neste país terá menores efeitos na economia (Kostylenko et al., 2018a).

II. Cenário mundial

Neste cenário são apresentadas simulações de crises bancárias mundiais também dependendo do país de origem de acordo com cada grupo considerado.

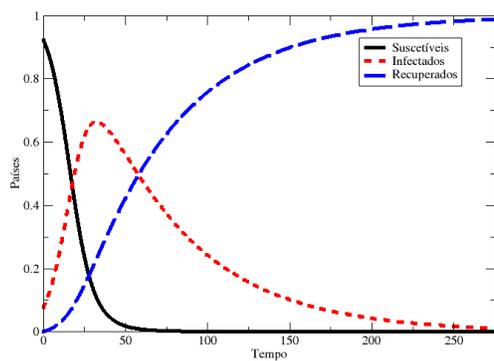
Grupo 1 - ($\gamma < 0,05$ e $\mathfrak{R}_0 > 1$)

O Grupo 1 é composto pelos países Portugal, Itália, Espanha, Irlanda e Japão. O país escolhido como país de origem da crise foi Portugal.

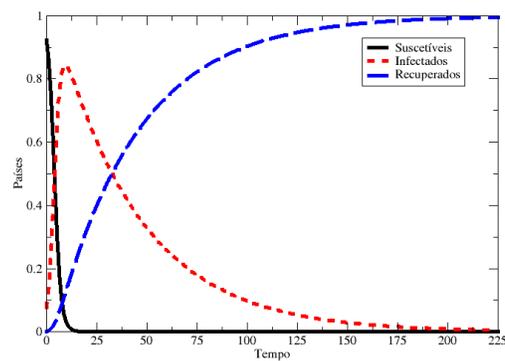
Quando uma crise é deflagrada em Portugal ela segue os parâmetros de Portugal para contágio dos bancos de outros países do estudo, assim como ocorre em I, para o cenário europeu. Observando então a Figura 4(a) de Portugal analisamos a dinâmica da crise mundial.

A dinâmica do modelo segue um rápido aumento da quantidade de infectados, atingindo um pico antes dos 50 dias, seguida de um lento declínio, se extinguindo próximo à 250 dias. A quantidade de recuperados também apresenta uma dinâmica lenta de elevação.

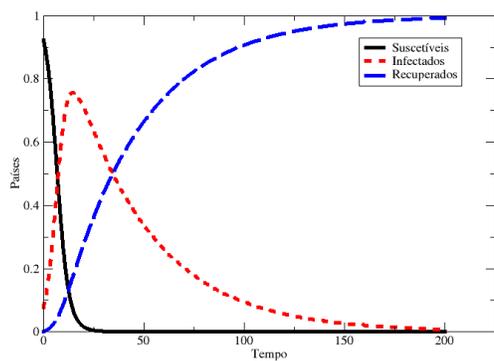
O grupo segue um comportamento homogêneo, o pico de infecção ocorre antes dos 25 dias para os demais países do grupo, conforme Figuras 4(b) a 4(e). O fim da disseminação do contágio também é longo: para Itália e Espanha, próximo aos 250 dias e para Irlanda e Japão, 175 e 125 dias, respectivamente. Em todos os casos apresentados neste grupo a evolução dos recuperados é lenta.



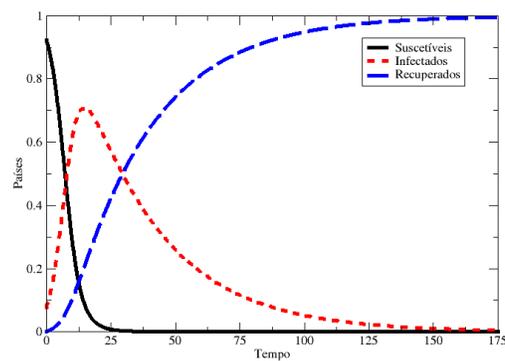
(a) Portugal



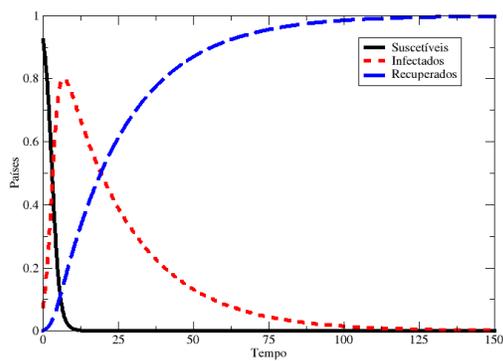
(b) Itália



(c) Espanha



(d) Irlanda



(e) Japão

Figura 4: Dinâmica do cenário mundial sem controle - Grupo 1.

Grupo 2 - ($0,05 \leq \gamma < 0,1$ e $\mathfrak{R}_0 > 1$)

O Grupo 2 é formado pelos países França e Bélgica e neste caso a crise é deflagrada na França (Figura 5).

A França possui uma probabilidade de infecção maior que Portugal (França $\beta = 0,9698$ e Portugal $\beta = 0,1638$), mas tendo uma taxa de recuperação significativamente maior também (França $\gamma = 0,0909$ e Portugal $\gamma = 0,0175$), atinge os estado de equilíbrio livre de infecção em um quinto do tempo em relação à Portugal. Na França, a infecção atinge de 70% em 10 dias e o fim do processo de contágio ocorre em 50 dias, como pode ser conferido na Figura 5(a).

A Figura 5(b), com o contágio iniciando na Bélgica apresenta um comportamento semelhante ao da França, o pico de infectados ocorre em 15 dias atingindo 50%, o fim do processo de contágio ocorre em 80 dias.

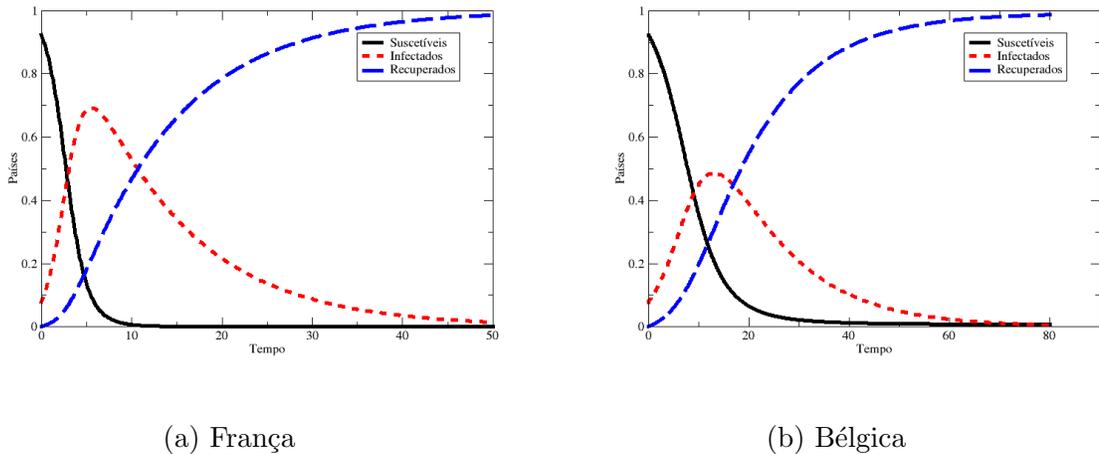
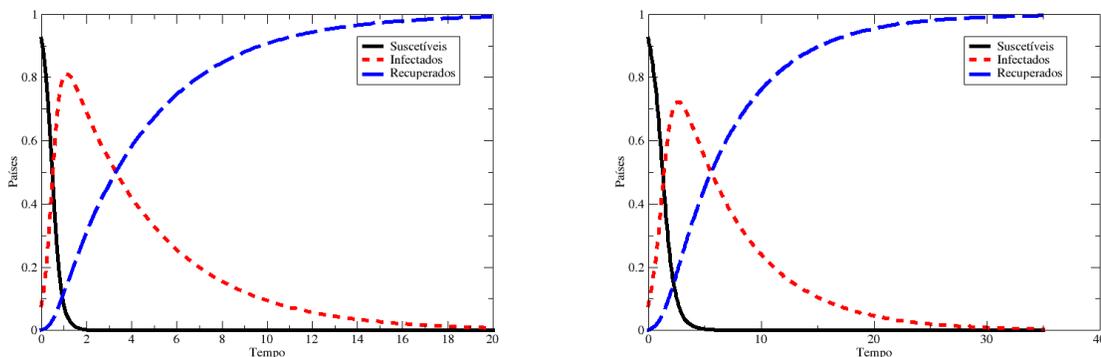


Figura 5: Dinâmica do cenário mundial sem controle - Grupo 2.

Grupo 3 - ($0,1 < \gamma < 1$ e $\mathfrak{R}_0 > 1$)

O Grupo 3 é formado pelos países Estados Unidos e Reino Unido. Nos Estados Unidos (Figura 6(a)), em que o parâmetro β é significativamente maior que o parâmetro γ (5,2065 e 0,25, respectivamente), ou seja uma taxa de reprodução \mathfrak{R}_0 alta, tem-se o menor período de tempo, dentre todos os grupos, em que o pico de

infecção é alcançado: menos de 2 dias, sendo o valor deste pico 80% países infectados.



(a) EUA

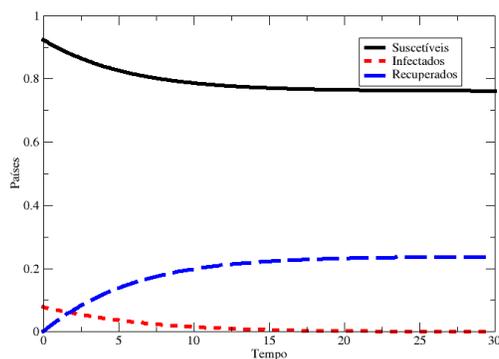
(b) Reino Unido

Figura 6: Dinâmica do cenário mundial sem controle - Grupo 3.

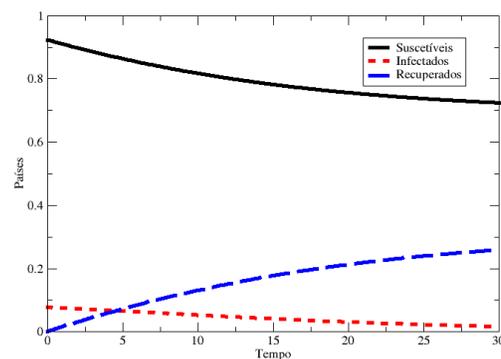
No Reino Unido (Figura 6(b)), o pico de países contaminados ocorre em menos de 5 dias alcançando aproximadamente 70% países infectados. A crise termina em menos de 30 dias.

Grupo 4 - ($0, 1 < \gamma \leq 1$ e $\mathfrak{R}_0 < 1$)

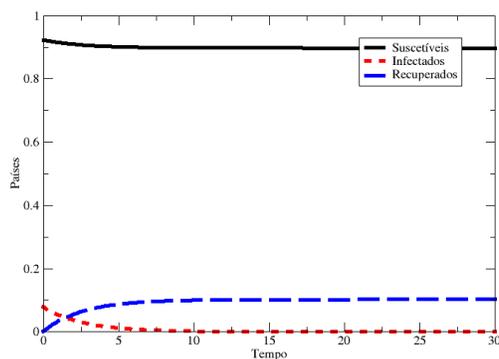
O Grupo 4 é formado pelos países Canadá, Austria, Suécia e Alemanha e não apresenta uma situação de risco sistêmico visto que $\mathfrak{R}_0 < 1$. (Figura 7). O processo de contágio se estabiliza em poucos dias e a quantidade de infectados é mínima. Por esta razão os países deste grupo não serão considerados para aplicação do controle ótimo. Pode-se verificar que nos demais países, em que $\mathfrak{R}_0 > 1$, levando os infectados a atingirem um pico antes de começarem a diminuir e todos os suscetíveis foram infectados ao final da crise.



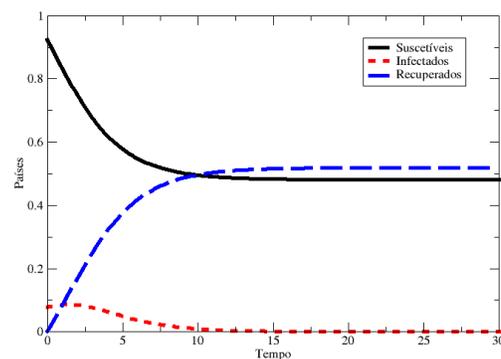
(a) Canadá



(b) Austria



(c) Suécia



(d) Alemanha

Figura 7: Dinâmica do cenário mundial sem controle - Grupo 4.

5.3 Simulações computacionais do modelo de otimização com controle constante

Nesta seção é utilizado o modelo de otimização (21), sendo o controle constante durante o tempo considerado.

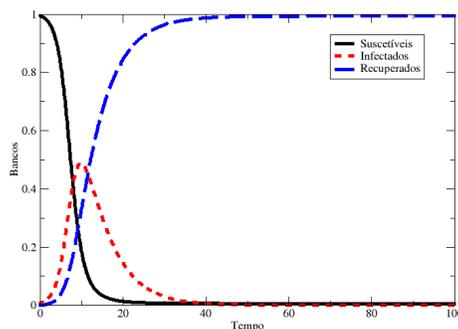
I. Cenário europeu

Analisando a Figura 8(a) observamos que a crise bancária de Portugal termina

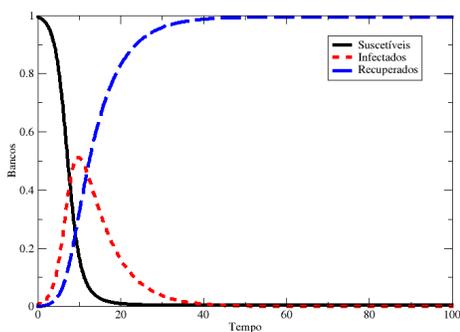
em 40 dias e atinge um pico de 50% de bancos infectados. No final da crise, todos os bancos são recuperados. O valor de u é 0,1233 durante todo período.

Para Espanha, Figura 8(b), o valor do controle é 0,1084. Os resultados são graficamente semelhantes pois os parâmetros são muito próximos, os dois países possuem o mesmo $\beta = 0,845$ e o γ de Portugal é 0,042 e enquanto o γ da Espanha é 0,013 .

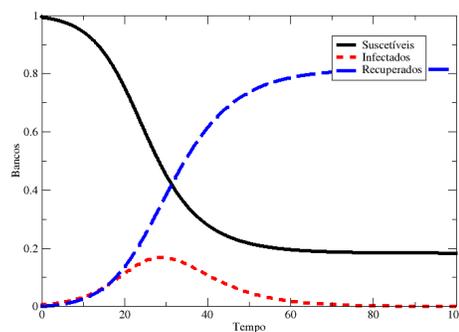
Já para o Reino Unido, a crise dura 60 dias, o máximo de bancos infectados é de 20% e ocorre em 30 dias. Aproximadamente 80% dos bancos são recuperados e o controle para este caso é 0,1570.



(a) Portugal com controle $u = 0,1233$



(b) Espanha com controle $u = 0,1084$



(c) Reino Unido com controle $u = 0,1570$

Figura 8: Dinâmica do cenário europeu com controle constante.

II. Cenário mundial

Grupo 1 - ($\gamma < 0,05$ e $\mathfrak{R}_0 > 1$):

Neste grupo, a crise bancária apresenta um comportamento semelhante para quatro países: Espanha, Itália, Irlanda e Japão. Estes países geraram uma crise que infectou outros países onde o pico de infectados ficou abaixo de 40%, seguida de uma diminuição suave. Nem todos os países foram infectados. A exceção é Portugal, em que a intervenção do controle fez com que a crise tenha uma trajetória descendente sem atingir um pico. Com a intervenção constante, Portugal teve uma dinâmica como a de países com $\mathfrak{R}_0 < 1$. Os controles constantes para cada caso encontram-se na Figura 9.

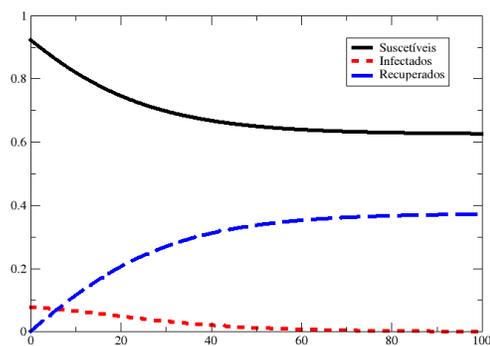
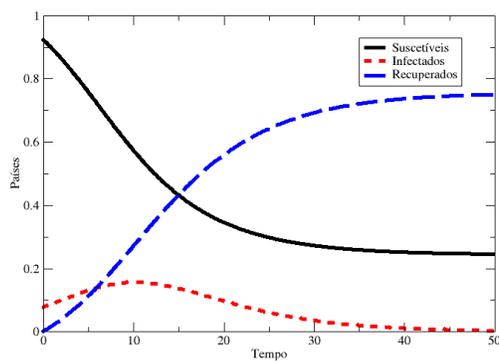
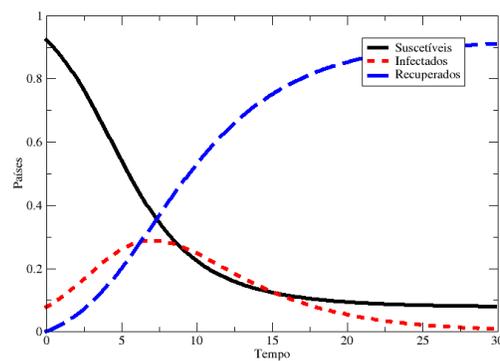
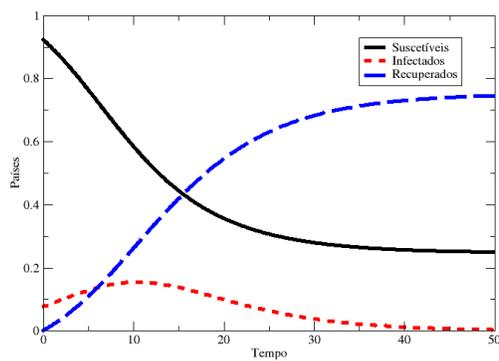
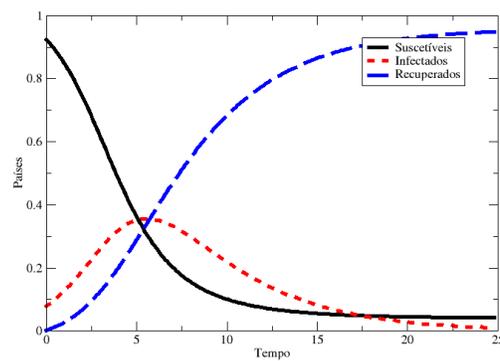
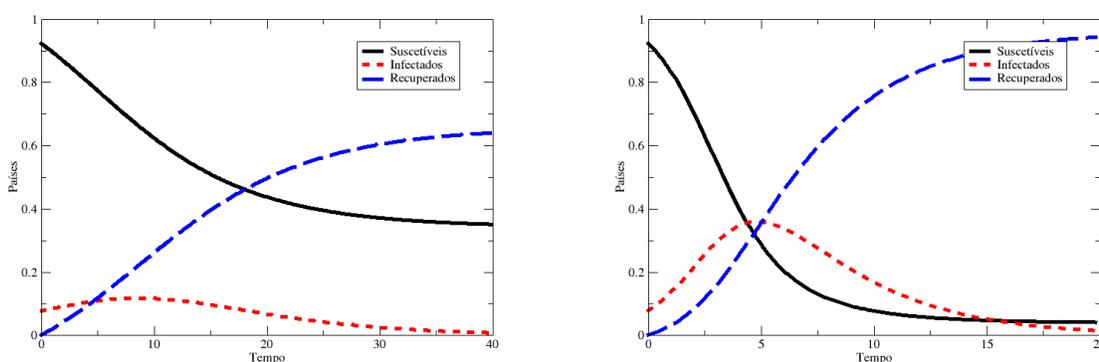
(a) Portugal com controle $u = 0$, 1401(b) Espanha com controle $u = 0$, 1898(c) Itália com controle $u = 0$, 2149(d) Irlanda com controle $u = 0$, 1788(e) Japão com controle $u = 0$, 2114

Figura 9: Dinâmica do cenário mundial com controle constante - Grupo 1.

Grupo 2 - ($0,05 \leq \gamma < 0,1$ e $\mathfrak{R}_0 > 1$)

Neste grupo a Bélgica iniciou uma crise cuja a quantidade de países infectados foi de 60%. O auge da infecção ocorre no décimo dia com 10% dos países que fazem parte do estudo infectados. A crise encerra-se em 40 dias.

A crise iniciada na França atinge 40% dos países do estudo no quinto dia. Praticamente todos os países foram infectados e a crise encerra-se em aproximadamente 20 dias. Os controles constantes para cada caso encontram-se na Figura 10.



(a) Bélgica com controle $u = 0,1714$

(b) França com controle $u = 0,2036$

Figura 10: Dinâmica do cenário mundial com controle constante - Grupo 2.

Grupo 3 - ($0,1 < \gamma < 1$ e $\mathfrak{R}_0 > 1$)

No Grupo 3, uma crise iniciada nos EUA, contamina 70% dos países do estudo em menos de 2 dias. A partir de então, cai rapidamente, encerrando a crise em aproximadamente 10 dias. Todos os países são infectados.

A crise iniciada no Reino Unido é semelhante à iniciada nos EUA. Em 2 dias a quantidade de países infectados atinge 50%, a partir de então cai rapidamente, encerrando a crise em 15 dias. Todos os países do estudo são infectados. Os controles constantes para cada caso encontram-se na Figura 11.

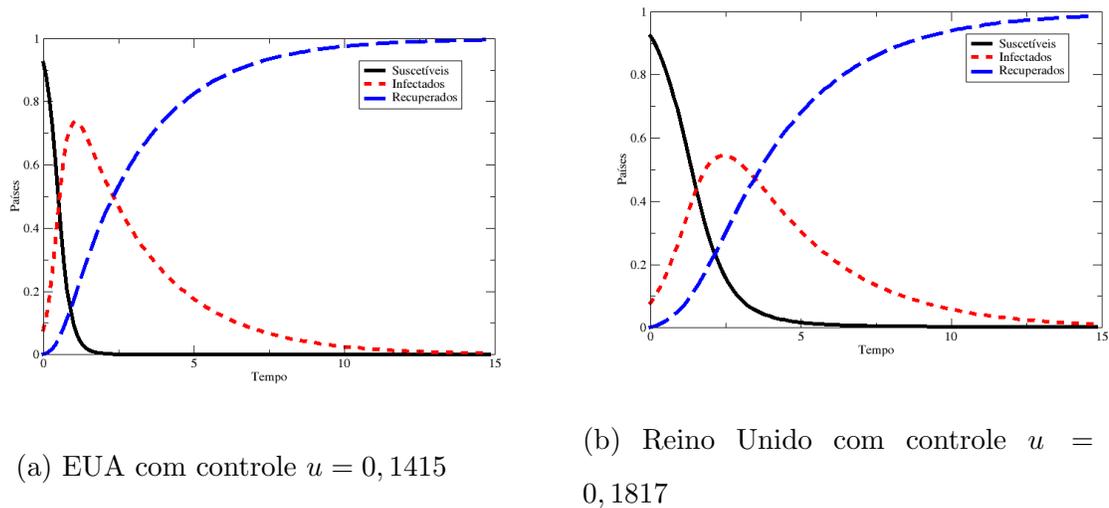


Figura 11: Dinâmica do cenário mundial com controle constante - Grupo 3.

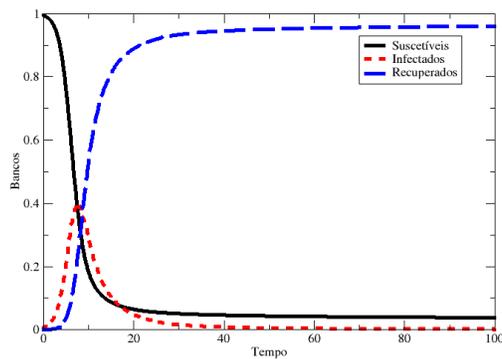
5.4 Simulações computacionais do modelo de otimização com controle variável

São apresentados nesta seção os resultados obtidos para o problema de otimização (21) utilizando a metodologia proposta.

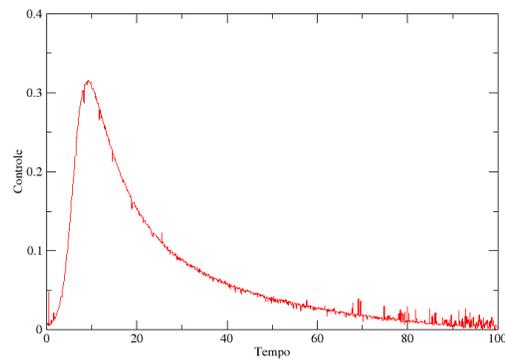
I. Cenário europeu

É feita uma análise do método proposto para resolver o problema de controle ótimo para o cenário europeu. O tomador de decisão pode escolher qualquer período de tempo T . Observando as Figuras 12, 13 e 14 nota-se que o período escolhido T de 100 dias é muito longo, pois a quantidade de bancos infectados aproxima-se de zero e o controle continua por muitos dias até o centésimo dia. Entretanto estes valores são desprezíveis tanto para o valor do controle quanto para a quantidade de bancos infectados por serem muito baixos. Observando a dinâmica de Portugal com 100 dias, Figura 12(b), no tempo igual a 30 dias, o controle está em 10%, enquanto na dinâmica de 30 dias na Figura 15(b) este valor é zero. A curva de controle,

no primeiro caso, apresenta um pico inicial exigindo uma intervenção mais ativa do Banco Central no início da crise e quanto maior o tempo de planejamento de controle, a curva vai sendo alongada.

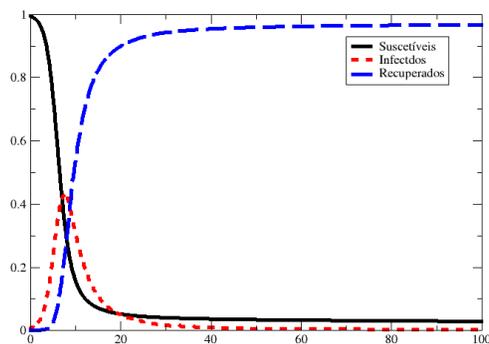


(a) Portugal, com controle ótimo

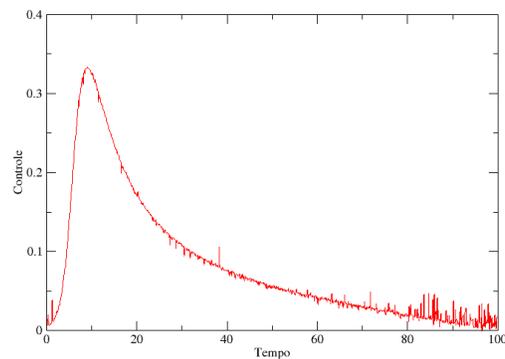


(b) Controle

Figura 12: Dinâmica do cenário europeu com controle ótimo - Portugal.

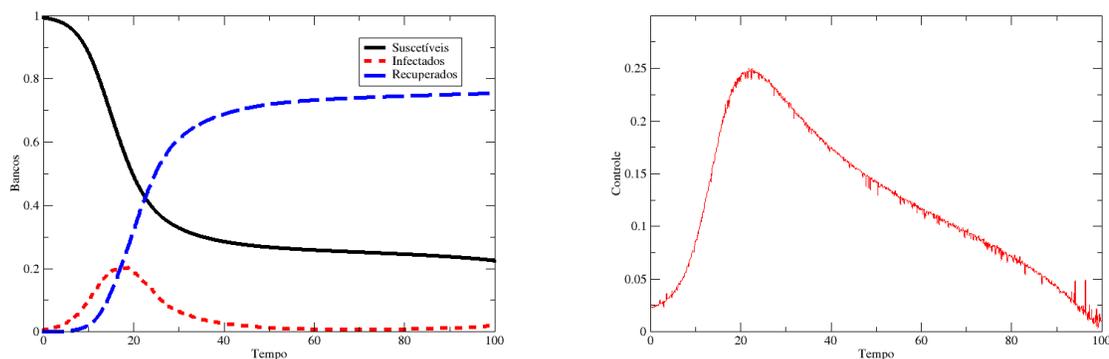


(a) Espanha, com controle ótimo



(b) Controle

Figura 13: Dinâmica do cenário europeu com controle ótimo - Espanha.



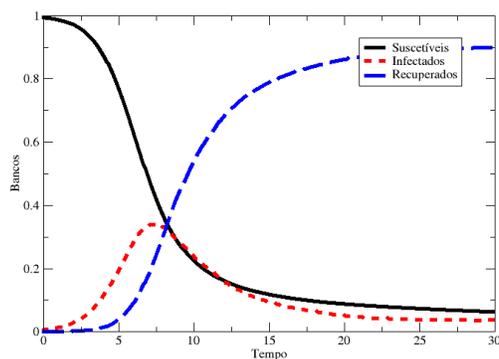
(a) Reino Unido, com controle ótimo

(b) Controle

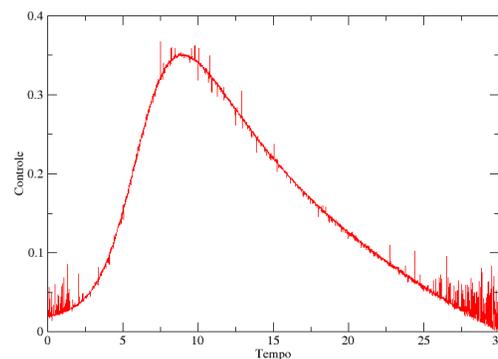
Figura 14: Dinâmica do cenário europeu com controle ótimo - Reino Unido.

Na Figura 15, o tempo T escolhido foi de 30 dias. O fim da crise coincidiu com o fim do controle. Cada tempo T tem seu respectivo custo e intervenção ótima. A tomada de decisão avalia o tempo e o valor a intervenção.

Comparando o cenário com e sem intervenção para Portugal, vemos que sem controle a crise durou 100 dias e os infectados atingiram 80% no pico. Com intervenção constante, foram 40 dias e 50% de infectados, no máximo. Com controle variável a crise durou pouco menos de 40 dias e atingiu um pico de infecção de 40%.



(a) Portugal, com controle ótimo



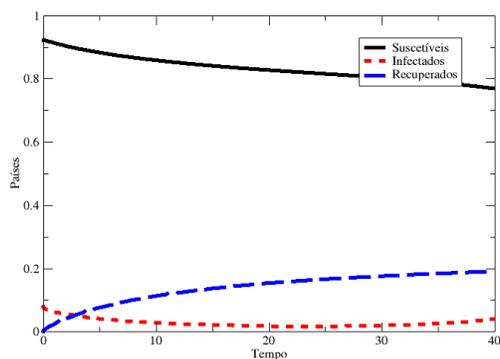
(b) Controle

Figura 15: Dinâmica do cenário europeu com controle ótimo - Portugal 30 dias.

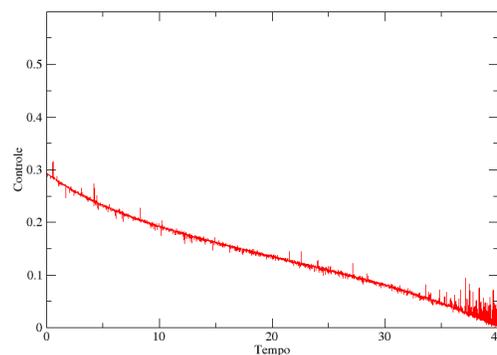
II. Cenário mundial

Grupo 1 - ($\gamma < 0,05$ e $\mathfrak{R}_0 > 1$)

No Grupo 1, Portugal se destaca dos demais. Com a intervenção do Banco Central, assume um comportamento de $\mathfrak{R}_0 < 1$, em que não ocorre epidemia. Dessa forma, a curva de infectados não atinge um pico, pois nenhum país será capaz de infectar outro. O controle ótimo diminui de 30% a 0 em 40 dias.



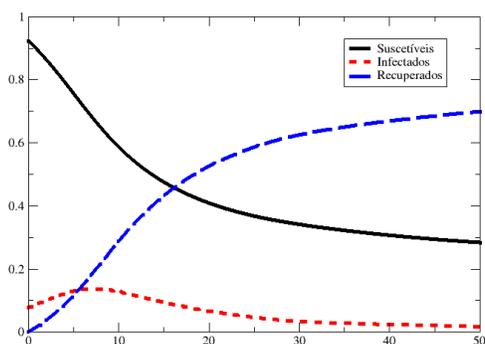
(a) Portugal, com controle ótimo



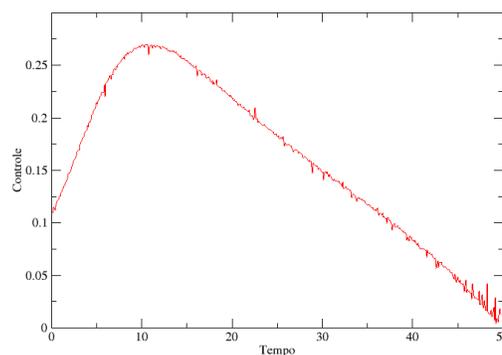
(b) Controle

Figura 16: Dinâmica do cenário mundial com controle ótimo - Grupo 1: Portugal.

A Espanha tem um pico de infectados por volta do oitavo dia, com a crise terminando em 50 dias. O controle parte de 10% alcança um pico de menos de 50% próximo ao décimo dia e cai a zero por volta de 40 dias. Este comportamento do controle ótimo - atingindo um pico rápido seguido de uma queda lenta, aparece nos demais países do grupo. Observou-se que a trajetória de infectados segue a mesma dinâmica. Nem todos os países são infectados.

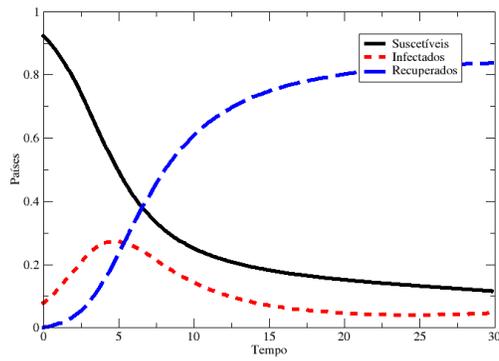


(a) Espanha, com controle ótimo

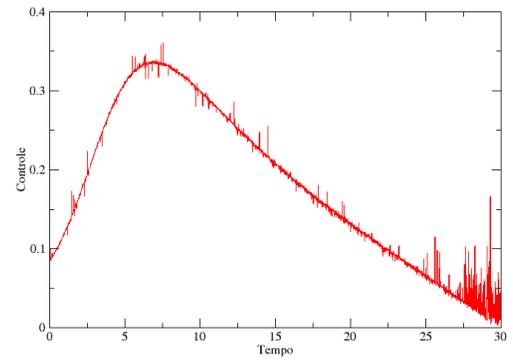


(b) Controle

Figura 17: Dinâmica do cenário mundial com controle ótimo - Grupo 1: Espanha.

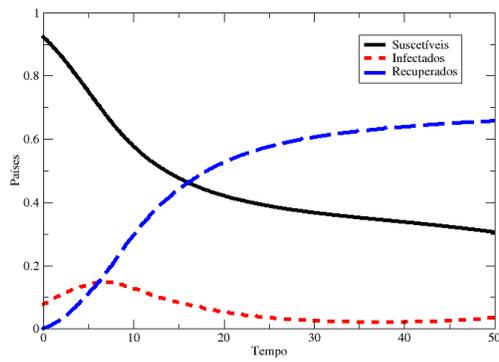


(a) Itália, com controle ótimo

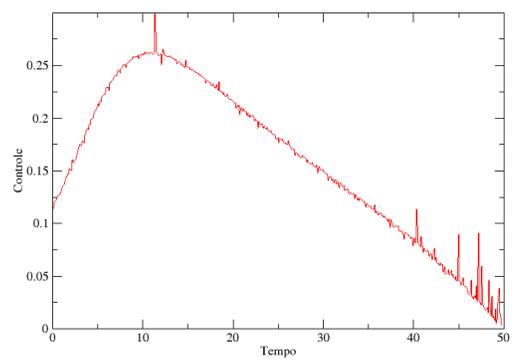


(b) Controle

Figura 18: Dinâmica do cenário mundial com controle ótimo - Grupo 1: Itália.

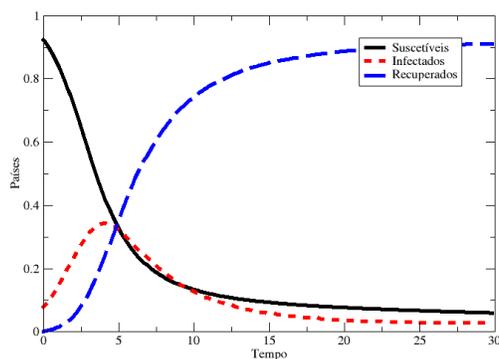


(a) Irlanda, com controle ótimo

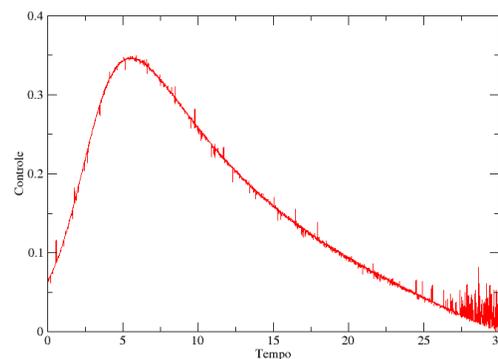


(b) Controle

Figura 19: Dinâmica do cenário mundial com controle ótimo - Grupo 1: Reino Unido.



(a) Japão, com controle ótimo

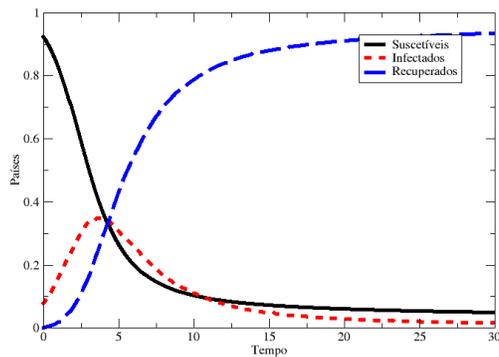


(b) Controle

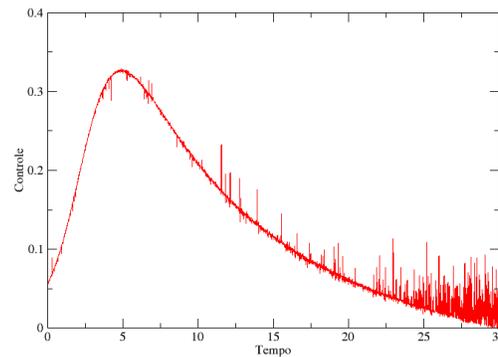
Figura 20: Dinâmica do cenário mundial com controle ótimo - Grupo 1: Japão.

Grupo 2 - ($0,05 \leq \gamma < 0,1$ e $\mathfrak{R}_0 > 1$)

No Grupo 2, observa-se que a França (Figura 21(a)) segue um padrão semelhante ao Grupo 1 na dinâmica SIR com controle ótimo, entretanto o pico de infecção é um pouco maior devido a um β maior e a extensão da crise é menor devido a um γ maior. A dinâmica do controle segue o padrão de rápido crescimento, atingindo o pico e reduzindo mais lentamente.



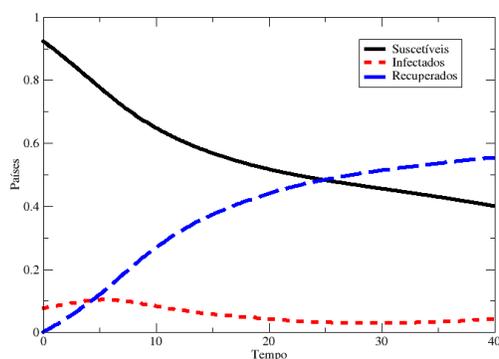
(a) França, com controle ótimo



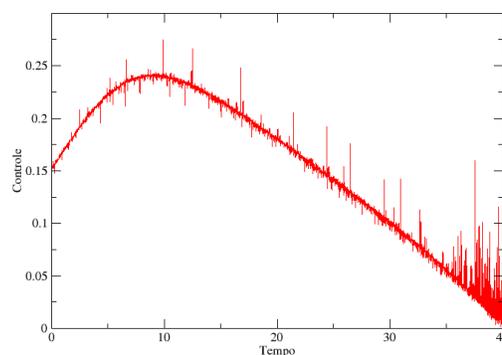
(b) Controle

Figura 21: Dinâmica do cenário mundial com controle ótimo - Grupo 2: França.

Na Figura 22(a), observa-se que a curva dos infectados é baixa comparada à França, resultado de um β menor e um γ próximo entre os dois países. A dinâmica do controle (Figura 22(b)) começa com um pequeno crescimento, até atingir um pico, e então segue uma trajetória descendente.



(a) Bélgica, com controle ótimo

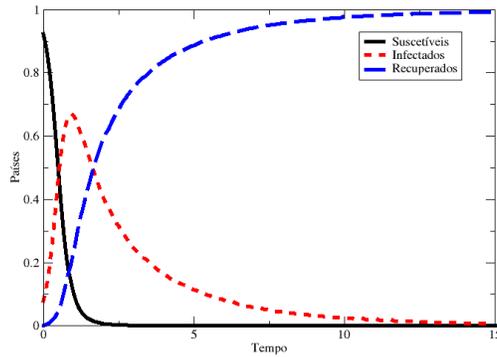


(b) Controle

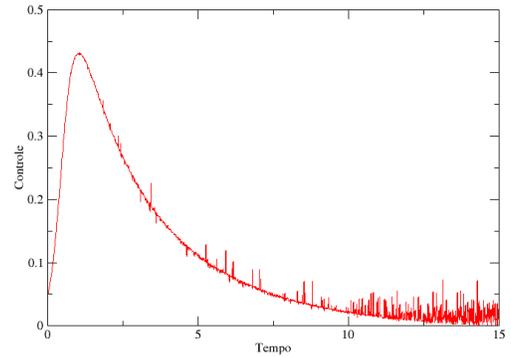
Figura 22: Dinâmica do cenário mundial com controle ótimo - Grupo 2: Bélgica.

Grupo 3 - ($0, 1 < \gamma < 1$ e $\mathfrak{R}_0 > 1$)

O Grupo 3 é marcado por crises rápidas e com picos altos, reflexo de valores elevados de β e γ , respectivamente. São os que apresentam os maiores valores para estes parâmetros. A dinâmica do controle é semelhante aos outros grupos. Neste grupo encontra-se o maior pico de bancos infectados, entre 65% e 70% para os EUA e em torno de 50% para o Reino Unido.

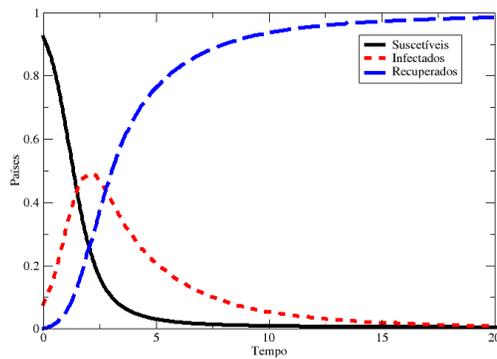


(a) EUA, com controle ótimo

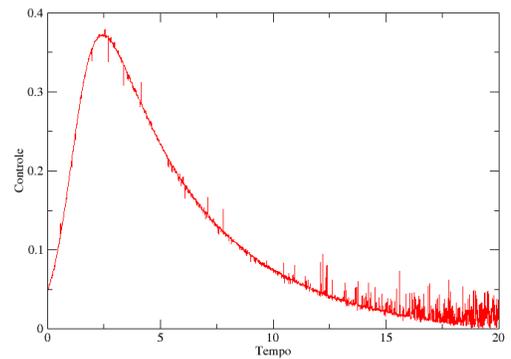


(b) Controle

Figura 23: Dinâmica do cenário mundial com controle ótimo - Grupo 3: EUA.



(a) Reino Unido, com controle ótimo



(b) Controle

Figura 24: Dinâmica do cenário mundial com controle ótimo - Grupo 3: Reino Unido.

5.5 Resultados referentes à função objetivo

Nesta seção apresenta-se os valores obtidos para a função objetivo (21) para as três situações, sem controle, com controle constante e com controle ótimo considerando os dois cenários, europeu e mundial. O período de tempo utilizado foi de 30 dias ($T = 30$) por ser um tamanho de crise muito utilizado neste trabalho.

Além disso, apresenta-se também, nas tabelas, o tempo de processamento para o controle ótimo. Para a simulação sem controle e com controle constante, o tempo médio de processamento foi de 1 de segundo.

I. Cenário europeu

Na Tabela 4 encontram-se os valores da função objetivo (20) sem controle, com controle constante e com controle variável e o tempo de processamento em segundos para a execução do problema de otimização com controle variável, considerando o cenário europeu.

Países	Sem controle	Controle constante	Controle variável	Tempo CPU controle variável
Portugal	22,7398	5,7298	4,883	43,079
Espanha	20,3253	6,2735	5,3019	45,637
Reino Unido	14,082	3,2346	2,9336	26,123

Tabela 4: Valores de função objetivo e tempo de processamento para o controle variável para o cenário europeu.

Neste cenário obtém-se uma redução na função objetivo de aproximadamente 79%, para Portugal e Reino Unido, comparando uma situação sem controle e com uma com controle ótimo. Para a Espanha a redução foi de aproximadamente 74%.

Comparando uma situação sem controle e uma com controle constante, os resultados obtidos foram uma redução na função objetivo, para Portugal, Espanha e Reino Unido, de aproximadamente 75%, 69% e 77%, respectivamente.

Finalmente, comparando as situações de controle constante e controle ótimo, as reduções do primeiro para o segundo foram de aproximadamente 15% para Portugal, 15% para a Espanha e 9% para o Reino Unido.

II. Cenário mundial

Na Tabela 5 encontram-se os valores da função objetivo (20) sem controle, com controle constante e com controle variável, e o tempo de processamento em segundos para a execução do problema de otimização com controle variável, considerando o cenário mundial.

Neste cenário Portugal obteve a maior redução em sua função objetivo utilizando o controle ótimo: 81%. Em relação ao controle constante, a redução foi de 78%. E, ainda, a redução da função objetivo utilizando controle constante em relação ao controle ótimo foi de 14%.

O EUA que obteve uma redução de 36% comparando a utilização de controle variável em relação a não utilização de controle e, ainda, uma redução de 23% comparando o controle constante com o variável.

Países	Sem controle	Controle Constante	Controle variável	Tempo de CPU controle variável
Bélgica	9,9815	3,7827	3,3781	36,216
França	10,0248	5,0216	4,2421	51,64
Irlanda	15,615	4,4739	4,089	27,163
Itália	19,0299	5,8715	5,1623	36,989
Portugal	11,4094	2,5013	2,149	41,996
Espanha	16,9467	4,7241	4,2944	33,533
Reino Unido	5,9456	4,1235	3,2711	47,982
EUA	3,9970	3,3041	2,5548	68,322
Japão	15,7403	5,7455	4,892	36,406

Tabela 5: Valores de função objetivo e tempo de processamento para o controle variável para o cenário mundial.

De uma forma geral, podemos verificar que a utilização do controle variável reduz o custo da intervenção do Banco Central em relação ao controle fixo em até 23%, incluindo a quantidade de países infectados durante o mesmo período de tempo

e ainda sem a intervenção do Banco Central temos uma redução de até 81% em relação à função objetivo.

5.6 Análise da eficácia da metodologia proposta

Os resultados obtidos nesta seção são referentes a função objetivo (20) para Portugal, no cenário europeu, e Itália, França e EUA para o cenário mundial com controle constante e com controle ótimo. A eficiência do método é discutida realizando 50 repetições do algoritmo e são apresentadas a média, o desvio padrão e o coeficiente de variação. Os dados foram obtidos com valores iniciais de u aleatórios.

A Tabela 6 apresenta os cálculos de média, desvio padrão e coeficiente de variação da função objetivo após 50 repetições do programa, utilizando controle constante para um representante do cenário europeu e um representante de cada grupo do cenário mundial.

Países	Média	Desvio padrão	Coeficiente de variação
Portugal - cenário europeu	5,7551	0,1621	0,0281
Itália - cenário mundial	5,8738	0,0107	0,0018
França - cenário mundial	4,4891	0,2555	0,0569
EUA - cenário mundial	2,9944	0,0345	0,0115

Tabela 6: Análise de eficácia - controle constante.

Observando os dados da Tabela 6 podemos concluir que a variação dos valores da função objetivo é aceitável pois o valor do coeficiente de variação é inferior à 2% em todos os casos.

Os coeficientes de variação das funções objetivo para o controle ótimo foram próximas à 0, no caso dos EUA por exemplo, foi de 0,000114. Todos os demais países obtiveram coeficiente de variação com as 3 primeiras casas decimais igual à 0. Portanto, concluímos que a metodologia proposta é robusta.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Os bancos desempenham a importante função econômica de prover recursos para o setor produtivo e assim gerar crescimento econômico.

Neste trabalho foi utilizado um modelo matemático epidemiológico SIR para descrever a dinâmica de uma crise bancária internacional utilizando parâmetros da literatura. A utilização de um modelo matemático epidemiológico se justifica pela constatação de que um banco que abre falência pode causar a falência de vários outros e, com mercados financeiros globalizados, pode causar uma crise mundial.

Analisando as simulações do modelo SIR para o cenário mundial e europeu, foi constatado que, quanto maior a taxa de contágio β em relação à taxa de recuperação γ , menos tempo levará para que a quantidade máxima de bancos infectados seja atingida pois maior será \mathcal{R}_0 . Este fato pode ser observado nas figuras apresentadas que representam o grupo dos Estados Unidos e Reino Unido no cenário mundial.

Além disso, analisando os resultados do modelo SIR para os casos em que $\mathcal{R}_0 < 1$, no cenário mundial, conclui-se que estes países não necessitam de intervenção externa, visto que a quantidade de infectados é mínima e não causam crise sistêmica. Neste grupo estão Canadá, Austria, Suécia e Alemanha.

Dada a possibilidade de uma crise sistêmica, o Banco Central tem a importante função de intervir financeiramente nos bancos com problemas para prevenir que a crise tome proporções maiores. Desta forma, o problema de controle ótimo aplicado ao modelo SIR orienta a ação do Banco Central.

Os artigos na literatura Kostylenko et al. (2018a), Kostylenko et al. (2018b), Kostylenko et al. (2019) e Rachah & Torres (2015) propuseram um modelo de otimização utilizando o modelo SIR mas não resolveram o problema na sua formulação

original. Ao invés, modificam o problema e utilizam um *software* para resolução. No presente trabalho, o problema de controle ótimo foi resolvido em sua formulação original utilizando a metaheurística Busca em Vizinhança Variável - VNS.

Utilizando a metodologia proposta também foi exposta a possibilidade de valores fixos finais para a variável de estado I e, como consequência, o custo da intervenção do Banco Central aumenta. Assim, a metodologia proposta é uma ferramenta para auxiliar o gestor na tomada de decisão. O método é robusto pois ao simular o algoritmo diversas vezes os valores da função objetivo variam pouco (duas casas decimais).

Das três dinâmicas contidas neste trabalho sem controle, com controle constante e com controle variável, em um mesmo período de tempo, o controle variável obtém um melhor valor para a função objetivo. O controle variável aumenta razoavelmente rápido para impedir que os infectados iniciais espalhem a crise. No caso de controle constante, não ocorre este pico no controle, fazendo com que os infectados se mantenham em um nível maior durante um o período.

Como perspectivas futuras propõe-se desenvolver parâmetros para o Brasil e países da América Latina e testar outras heurísticas para a resolução do modelo de otimização.

REFERÊNCIAS

- ABREU, M. P. **A ordem do progresso**. 2. ed. Elsevier Editora Ltda, 2014.
- ANTUNES, J. C. S. J. A bolsa de valores de Lisboa e a crise bancária de 1876, 2013. Dissertação (Mestrado) - .
- ARENALES, M.; ARMENTANO, A.; MORABITO, R.; YANASSE, H. **Pesquisa Operacional**. 2. ed. Elsevier, 2007.
- BARABASI, A.; ALBERT, R. Emergence of scaling in random networks. **American Association for for the advancement os science**, v.286, n.5439, p.509–512, 1999.
- BLANCHARD, O. **Macroeconomia**. 3. ed. Pearson Prentice Hall, 2004.
- BONNANS, F.; MARTINON, P.; GIORGI, D.; GREARD, V.; MAINDRAULT, S.; TISSOT, O. BOCOP 2.0.4 user guide. **Inria-Saclay**, 2015.
- BORGES, C. S. Banco Centra e a administração de crises bancárias, 2014. Dissertação (Mestrado) - .
- CHIANG, A. C. **Elements of Dynamic Optimization**. 1. ed. São Paulo: Waveland Press, Inc, 1999. 327p.
- CHIANG, A. C.; WAINWRIGHT, K. **Matemática para economistas**. 4. ed. Elsevier, 2006.
- COMMANDS, T. BOCOP: an open source toolbox for optimal control. <http://bocop.org>, v.Inria Saclay, 2017.

GARAS, A.; ARGYRAKIS, P.; ROZENBLAT, C.; TOMASSINI, M.; HAVLIN, S. WorldWide spreading of economics crisis. **New Journal of Physics**, v.12, 2010.

HANSEN, P.; MLADENOVIC, N. Variable neighborhood search: principles and applications. **European journal of operational research**, , n.130, p.449–467, 1999.

KEELING, M. J.; ROHANI, P. **Modeling infectious diseases in humans and animals**. Isbn9781400841035 ed. Princeton University Press, 2007.

KOSTYLENKO, O.; RODRIGUES, H. S.; TORRES, D. F. M. Banking risk as an epidemiological model: An optimal control approach. **In: Vaz, A., Almeida J., Oliveira J., Pinto A. (eds) Operational Research. APDIO 2017, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics**, , n.223, Springer, Cham, p.165–176, 2018a.

KOSTYLENKO, O.; RODRIGUES, H. S.; TORRES, D. F. M. The risk of contagion spreading and its optimal control in the economy. **Statistics, Optimization Information Computing**, v.7, 2018b.

KOSTYLENKO, O.; RODRIGUES, H. S.; TORRES, D. F. M. The spread of a financial virus through Europe and beyond. **AIMS Mathematics**, v.4, n.1, 2019.

LASTRA, R. M. Legal Foundation of International Monetary Stability. **Oxford University Press**, 2006.

NETO, A. A. **Mercado financeiro**. 4. ed. Atlas, 2001.

NETO, A. A. **Estrutura e análise de balanços**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

PHILIPPAS, D.; KOUTELIDAKIS, Y.; LEONTITSIS, A. Insights into European interbank network contagion. **Managerial Finance**, v.41, n.8, p.754–772–16, 2015.

RACHAH, A.; TORRES, D. F. M. Mathematical modelling, simulation, and optimal control of the 2014 ebola outbreak in west africa. **Discrete dynamics in nature e society**, v.2015, 2015.

REINHART, C. M.; ROGOFF, K. S. This time is different: a panoramic view of eight centuries of financial crises. **National Bureau of Economic Research**, , n.13882, 2009a, p.www.nber.org/papers/w13882, 2009.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2000.

SANTOMERO, A. M. Estimate de probability of failure for commercial banks and the banks system. **Journal of Banks and Finances**, , n.1, p.185–205, 1977.

SCHWARCZ, S. L. Systemic Risk. **The Georgetown Law Journal**, v.97, p.193–249, 2008.

TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional**. 8. ed. Cengage Learning Editores, 2008.

TAKAMI, M. Y.; TABAK, B. M. Evaluation of Default Risk for the Brazilian Banking Sector. **Working Paper Series - Banco Central do Brasil**, , n.135, 2007.

TOIVANEN, M. Contagion in the Interbank Network: an Epidemiological Approach. **Bank of Finland Research Discussion Papers**, v.19, 2013.