

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA – UNESP
Instituto de Química - Campus de Araraquara

JOÃO VICTOR ZAMBONI BUTTLER

**DO PASSADO AO FUTURO: APLICAÇÃO CONJUNTA DE MARKOWITZ E
PROPHET NA GESTÃO DE INVESTIMENTOS**

Araraquara
2025



JOÃO VICTOR ZAMBONI BUTTLER

**DO PASSADO AO FUTURO: APLICAÇÃO CONJUNTA DE MARKOWITZ E
PROPHET NA GESTÃO DE INVESTIMENTOS**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Universidade
Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Química, Araraquara,
para obtenção do título de
Bacharel em Engenharia Química.

Orientador(a): Prof. Dr. Elias de
Souza Monteiro Filho

Araraquara
2025

B988p

Buttler, João Victor Zamboni

Do passado ao futuro: aplicação conjunta de Markowitz e Prophet na gestão de investimentos / João Victor Zamboni Buttler. -- Araraquara, 2025

68 p.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Engenharia Química) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Química, Araraquara

Orientador: Elias De Souza Monteiro Filho

1. Markowitz. 2. Otimização de carteiras. 3. Prophet. 4. Séries temporais. 5. Risco-retorno. I. Título.


JOÃO VICTOR ZAMBONI BUTTLER

**DO PASSADO AO FUTURO: APLICAÇÃO CONJUNTA DE MARKOWITZ E
PROPHET NA GESTÃO DE INVESTIMENTOS**


Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Universidade
Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Química, Araraquara,
para obtenção do título de
Bacharel em Engenharia Química.

Data da defesa: 12/12/2025


Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **ELIAS DE SOUZA MONTEIRO FILHO**
Data: 19/12/2025 15:47:19-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Elias de Souza Monteiro Filho

Documento assinado digitalmente
 **JORGE MANUEL VIEIRA CAPELA**
Data: 19/12/2025 15:10:28-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jorge Manuel Vieira Capela

Documento assinado digitalmente
 **GUSTAVO NAKAMURA ALVES VIEIRA**
Data: 19/12/2025 14:59:00-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Gustavo Nakamura Alves Vieira

AGRADECIMENTOS

Agradeço, antes de tudo, aos docentes que fizeram parte da minha jornada ao longo da graduação. Cada aula, orientação e diálogo refletiram não apenas conhecimento técnico, mas também paciência, dedicação e um exemplo de liderança acadêmica que levarei comigo para além da universidade. Sou profundamente grato por cada contribuição que, de forma direta ou indireta, tornou possível a construção deste trabalho. Ao meu orientador, Elias, cuja paciência, honestidade e respeito pela minha autonomia foram fundamentais para o desenvolvimento deste estudo.

À minha família, expresso minha mais sincera gratidão pelo apoio incondicional e pela estrutura que sempre me ofereceram. Ao meu pai, Wagnão, à minha mãe, Vivi, ao meu irmão, Pedro, e à minha cunhada, Fernanda, agradeço pelo incentivo constante, pela confiança e pela base emocional que me permitiu seguir firme mesmo diante dos desafios. O suporte de vocês foi essencial para que este objetivo pudesse ser alcançado.

À República Dominicana, meu lar durante a graduação, expresso minha gratidão pelo acolhimento, pelos momentos vividos e pelas amizades construídas, que transformaram os anos de faculdade em um período muito mais significativo e leve. Em especial, agradeço aos amigos ZL, Piru, Serjão e Tapa, com quem compartilhei vivências inesquecíveis, aprendizados valiosos e memórias que levarei para a vida inteira. A caminhada se tornou mais rica e suportável porque foi dividida com vocês.

Por fim, com muito amor, agradeço à minha companheira, Lívia, por toda motivação, carinho e respeito. Obrigado por estar ao meu lado mesmo nos momentos em que nem eu acreditava ser capaz de concluir este trabalho. Sua presença foi força, inspiração e refúgio. Este trabalho também é seu.

RESUMO

Este trabalho investiga a aplicação conjunta do Modelo de Markowitz e do método Prophet para apoiar a gestão de carteiras de investimentos a partir de dados históricos compreendidos entre 2010 e 2022. A pesquisa parte da necessidade de desenvolver uma abordagem quantitativa que una otimização clássica de portfólios, fundamentada na relação risco-retorno, e previsões de séries temporais capazes de antecipar tendências de curto prazo. Inicialmente, realiza-se a coleta, limpeza e padronização das séries de preços, garantindo integridade temporal e confiabilidade estatística. Em seguida, conduz-se uma análise preliminar de risco por meio das matrizes de correlação e covariância, permitindo identificar padrões de interdependência entre os ativos e potenciais vetores de concentração de volatilidade. A partir dessa análise, estabelece-se um processo de pré-seleção para compor o universo final utilizado na otimização. Com base nessa seleção, são geradas três carteiras: uma com pesos iguais, uma de mínima variância e outra de máximo retorno, conforme as formulações da Teoria Moderna de Portfólios. Na etapa seguinte, o método Prophet é aplicado para projetar o comportamento futuro dos preços e dos retornos, oferecendo uma perspectiva complementar de tendência e sazonalidade. Os resultados permitem avaliar o desempenho relativo das três carteiras, tanto sob a ótica histórica quanto sob projeções produzidas pelo modelo preditivo. A integração entre otimização e previsão demonstra que a utilização simultânea dos dois métodos amplia a robustez das decisões de alocação, fornecendo ao investidor uma estrutura mais informada para a análise de risco e retorno. O estudo conclui que a combinação entre Markowitz e Prophet se mostra útil para o processo decisório, especialmente quando aplicada a um conjunto diversificado de ativos e a um horizonte temporal suficientemente amplo para captar diferentes regimes de mercado.

Palavras-chave: Markowitz; Otimização de carteiras; Prophet; Séries temporais; Risco-retorno.

ABSTRACT

This study investigates the combined application of the Markowitz Model and the Prophet method to support investment portfolio management using historical data from 2010 to 2022. The research seeks to develop a quantitative approach that integrates classical portfolio optimization, grounded in the risk-return relationship, with time series forecasting capable of anticipating short-term trends. The process begins with the collection, cleaning, and standardization of price series to ensure temporal integrity and statistical reliability. A preliminary risk analysis is then conducted through correlation and covariance matrices, enabling the identification of interdependence patterns among assets and potential sources of volatility concentration. Based on this assessment, a pre-selection procedure is established to define the final asset universe used in the optimization. Three portfolios are subsequently constructed: one with equal weights, one with minimum variance, and one with maximum return, following the formulations of Modern Portfolio Theory. The Prophet method is then applied to project the future behavior of prices and returns, providing complementary insights into trend and seasonality. The results allow for a comparative evaluation of the three portfolios from both historical and forecast-based perspectives. The integration of optimization and forecasting demonstrates that the simultaneous use of both methods enhances the robustness of allocation decisions by giving investors a more informed structure for analyzing risk and return. The study concludes that combining Markowitz and Prophet is useful for decision-making, particularly when applied to a diversified set of assets and to a sufficiently broad time horizon capable of capturing different market regimes.

Keywords: Markowitz; Portfolio optimization; Prophet; Time series; Risk-return

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Fronteira eficiente de Markowitz.....	16
Figura 2 - Matriz de calor da correlação de retornos.....	24
Figura 3 - Matriz de calor da covariância dos retornos	25
Figura 4 - Relação Risco – Retorno dos ativos analisados.....	27
Figura 5 - Gráficos gerados pelo Prophet para o período estudado para os 13 ativos com maior Sharpe Ratio	29
Figura 6 - Gráficos exemplos de ativos selecionados para o bloco alto risco.....	30
Figura 7 - Gráficos exemplos de ativos selecionados para o bloco estabilidade.....	31
Figura 8 - Gráficos exemplos de ativos selecionados para o bloco risco moderado	32
Figura 9 – Validação preditiva do uso do Prophet	34
Figura 10 - Comparação das carteiras geradas e otimizadas	35

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Ativos selecionados.....	17
Quadro 2 - FII's selecionados para o estudo	19
Quadro 3 - Exemplo da Quadro .csv gerada para cada um dos ativos estudados	23
Quadro 4 - Pré seleção final dos ativos	28
Quadro 5 - Classificação dos ativos de acordo com o risco	30
Quadro 6 - Características das carteiras a serem montadas para cada perfil de investidor	32
Quadro 7 - Dados de retorno, volatilidade, Sharpe Ratio e Perfil do investidor para as carteiras estudadas.....	36
Quadro 8 - Composição dos pesos dos ativos encontrados pelo Solver.....	36

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TMP – Teoria Moderna de Portfólios

CAL – *Capital Allocation Line* (Linha de Alocação de Capital)

LMC – Linha do Mercado de Capitais

Sharpe Ratio – Índice de Sharpe

FIIs – Fundos de Investimento Imobiliário

CSV – *Comma-Separated Values* (Arquivo de valores separados por vírgula)

API – *Application Programming Interface*

GARCH – *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*

ARIMA – *Autoregressive Integrated Moving Average*

COVID-19 – *Coronavirus Disease 2019*

LISTA DE SÍMBOLOS

Y_t – Valor observado de uma série temporal no instante t

T_t – Componente de tendência da série temporal

S_t – Componente sazonal da série temporal

C_t – Componente cíclico da série temporal

ε_t – Termo de erro aleatório ou componente irregular da série temporal

$y(t)$ – Valor observado da série temporal no instante t no modelo Prophet

$g(t)$ – Componente de tendência no modelo Prophet

$s(t)$ – Componente sazonal no modelo Prophet

$h(t)$ – Componente de mudanças estruturais (*changepoints*) no modelo Prophet

$\varepsilon(t)$ – Termo de erro aleatório no modelo Prophet

$E(R_i)$ – Retorno esperado do ativo i

w_i – Peso do ativo i na carteira

$E(R_p)$ – Retorno esperado da carteira

σ_p^2 – Variância dos retornos da carteira

$\text{Cov}(R_i, R_j)$ – Covariância entre os retornos dos ativos i e j

σ_p – Desvio-padrão dos retornos da carteira (risco do portfólio)

R_f – Taxa livre de risco

S – Sharpe Ratio

μ (vetor μ) – Vetor de retornos esperados dos ativos, utilizado na otimização de portfólios

Ticker – código curto e padronizado de identificação da ação negociada na bolsa de valores

SUMÁRIO

1.	Introdução – Tema e problematização.....	14
1.1.	Séries temporais financeiras	16
1.2.	Prophet.....	17
2.	Fundamentos Teóricos.....	18
2.1.	Gestão Financeira e Período Histórico	18
2.2.	Risco e Volatilidade	18
2.3.	Retorno de Investimento.....	18
2.4.	Restrições e Personalização de Portfólio.....	19
2.5.	Sharpe Ratio	19
2.6.	TMP de Markowitz.....	20
2.7.	Fronteira Eficiente e Otimização de Carteiras.....	21
2.8.	Matriz de Covariância e Coeficiente de Correlação.....	22
2.9.	Modelo Preditivo e Séries Temporais	22
3.	Metodologia.....	22
3.1.	Do Período de Análise.....	25
3.2.	Coleta e Limpeza de Dados	25
3.3.	Impacto da Limpeza na Análise Estatística.....	26
3.4.	Análise de Risco Preliminar	26
3.5.	Avaliação e Pré-Seleção de Ativos.....	27
3.6.	Geração Combinatória de Carteiras.....	27
3.7.	Modelagem Preditiva.....	27
3.8.	Otimização de Portfólios	28
3.9.	Geração e Comparação das Carteiras Finais	28
4.	Resultados e Discussão.....	29
4.1.	Estatísticas Descritivas	29
4.2.	Tratamento de Dados Ausentes	29
4.3.	Análise de Risco Preliminar: Matrizes de Correlação e Covariância.....	30
4.3.1.	Análise Matriz de Correlação	30
4.3.2.	Análise de Matriz de Covariância.....	32
4.3.3.	Interpretação da Magnitude do Risco	33
4.4.	Pré-Seleção de Ativos Através do Melhor Sharpe Ratio.....	34
4.5.	Modelagem Preditiva (Prophet).....	36
4.5.1.	Geração das Previsões	37
4.5.2.	Análise da Tendência e Validade do Vetor μ :	38
4.5.3.	Otimização De Portfólios e Geração das Carteiras Finais	40

4.5.4. Validação da capacidade Preditiva para o ano de 2023.....	41
5. Resultados Finais e Discussão.....	42
5.1. Análise Visual da Fronteira Eficiente.....	42
5.2. Avaliação do Risco e da Volatilidade Sistêmica.....	43
5.3. Análise da Alocação de Pesos e Implicações Práticas.....	44
6. Síntese dos Resultados e Validação Metodológica.....	45
7. Contribuições Teóricas e Práticas.....	45
8. Conclusão da Validação Metodológica.....	46
9. Limitações e Sugestões para Pesquisas Futuras.....	46
10. Bibliografia.....	47
11. Apêndices.....	49

1. Introdução – Tema e problematização

O cenário econômico passa por constantes mudanças e atualizações ao longo dos anos (ou meses) e, ultimamente, pode-se dizer que a gestão de investimentos é um dos pilares centrais do mercado financeiro moderno. Essa constante mudança pode ser descrita, no âmbito da economia financeira, como a volatilidade do mercado, conceito associado à intensidade e à frequência das oscilações dos preços dos ativos ao longo do tempo. Do ponto de vista econômico, a volatilidade representa a materialização da incerteza enfrentada pelos agentes econômicos, refletindo a instabilidade das expectativas, a assimetria de informações e a sensibilidade do mercado a choques macroeconômicos, políticos e setoriais.

Sob a ótica da estatística, esse mesmo fenômeno é formalizado por meio de medidas de dispersão aplicadas às séries de retornos, sendo a variância e, de forma mais recorrente, o desvio-padrão, os instrumentos matemáticos utilizados para quantificar o grau de incerteza associado ao comportamento futuro dos preços. Assim, a volatilidade deixa de ser apenas uma percepção subjetiva de risco e passa a ser tratada como uma grandeza mensurável, permitindo a comparação entre ativos e a construção de modelos quantitativos de gestão de risco.

Dessa forma, a instabilidade observada nos mercados financeiros pode ser interpretada simultaneamente sob uma perspectiva econômica — como expressão da incerteza inerente ao sistema — e estatística — como variabilidade mensurável dos retornos — estabelecendo a base conceitual para a aplicação de modelos como a Teoria Moderna de Portfólios.

A complexidade do mercado traz consigo a necessidade de um estudo em cima das ações disponíveis em prol de minimizar os riscos naturais relacionados ao mercado de ações. “O risco vem de não saber o que você está fazendo”, a frase clássica de Warren Buffet carrega uma verdade atemporal: a falta de análise baseada em fontes e métodos confiáveis apresenta um maior risco ao investidor do que a própria volatilidade do mercado. Tendo em vista essas ideias, o ato de investir carrega a necessidade de projetos que o tornem mais compreensível para o investidor comum. No Brasil, há um grande estigma em volta do planejamento financeiro e, por isso, faz-se pertinente mencionar que as aulas de educação financeira foram implementadas apenas em 2021 como matéria obrigatória. Assim, mesmo aqueles que possuem conhecimento em outras áreas ou carreiras já bem estabelecidas demonstram fragilidade sobre o assunto.

Tal cenário convida também à análise de que cada possível investidor apresentará uma visão e controle diferente em frente ao mercado de ações. A Teoria Moderna de Portfólio proposta por Harry Markowitz em 1952 forneceu essa personalização da gestão de investimentos ao mapear a relação entre risco e retorno: a fronteira eficiente é traçada indicando o melhor retorno para cada nível de risco. Esse método tem como sua essência a vantagem de não indicar uma única carteira otimizada para todos e sim uma gama de carteiras otimizadas a depender do estilo de cada investidor.

A personalização da carteira carrega o perfil subjetivo do investidor e precisa ser traduzida em objetivos específicos e real tolerância ao risco. Enquanto o investidor conservador prioriza a preservação do capital e busca a carteira de Mínima Variância, o menor risco possível na fronteira eficiente, o investidor agressivo irá buscar por maximizar o retorno, mesmo que isso exija maior risco, sendo indicado para a carteira de Máximo Retorno (Máximo Sharpe

Ratio). Um fundamento na gestão de portfólio é justamente alinhar essa teoria à prática, como será demonstrado neste trabalho, ao transformar o perfil subjetivo do investidor em pesos concretos para a seleção de ativos e riscos assumidos.

A Teoria Moderna de Portfólio fornece o mapa para a otimização das carteiras: ainda se enfrenta um problema que não condiz com a imprevisibilidade do mercado atual. A dependência exclusiva de dados históricos e a premissa de que os retornos do passado seriam a melhor maneira de prever os retornos futuros acaba por falhar diante de eventos imprevistos – como a recente pandemia de COVID-19. Como disse Mohamed El-Erian, economista chefe da Allianz, na Expert XP 24, o cenário atual é de volatilidade mais persistente, o que torna a alocação de ativos muito mais difícil. Confiar apenas em dados passados pode levar a alocações frágeis sob novas pressões econômicas, o que aponta para a necessidade de uma estima de retorno que apresente resultados e prospecções relevantes para o futuro.

Estimar o futuro, no entanto, é uma tarefa extremamente desafiadora, pois mesmo através de cálculos matemáticos e identificação de padrões, seria um árduo trabalho até para a mínima projeção. Neste ponto, as ferramentas preditivas se tornam essenciais: o modelo Prophet desenvolvido pela Meta em 2017 se destaca sendo um algoritmo de previsão de séries temporais com capacidade de modelar dados com forte sazonalidade, tendências e anomalias. Ao contrário de modelos econométricos mais complexos, o Prophet é acessível e robusto para dados de mercado, o que permite uma análise sintetizada e organizada da série de preços. Sua aplicação, junto à Teoria Moderna de Portfólio, oferece uma estimativa de preço futuro mais ajustada às tendências atuais e um vetor de retorno esperado que apresenta mais detalhes e confiança comparado à simples média histórica. A julgar destes motivos, a necessidade de uma análise futura se une com a ferramenta disponível e possibilita a proposta de conectar as regras matemáticas da teoria de Markowitz com as estimativas fornecidas pelo modelo Prophet. Criase, então, uma fronteira de eficiência híbrida que se baseia nos riscos dos dados históricos e é direcionada pela expectativa de retorno futuro, solucionando, deste modo, a maior fragilidade da Teoria Moderna de Portfólio.

Ao converter a formulação matemática e estatística da otimização proposta por Markowitz em três estruturas de portfólio bem definidas — conservadora, agressiva e de pesos iguais — o trabalho estabelece uma ponte entre a teoria quantitativa e sua aplicação prática na gestão de investimentos. Essa abordagem permite traduzir conceitos abstratos, como variância, covariância e retorno esperado, em decisões concretas de alocação de capital, contribuindo para a desmitificação do processo de construção de carteiras.

A ferramenta desenvolvida no estudo possui caráter eminentemente didático, sendo concebida como um instrumento de apoio à compreensão dos princípios da gestão quantitativa de investimentos. Embora forneça subsídios relevantes para a análise de risco e retorno, seus resultados não devem ser interpretados como recomendações exclusivas ou definitivas de investimento. Dessa forma, a metodologia proposta busca auxiliar o investidor — ou o estudante — na estruturação racional da tomada de decisão, devendo ser utilizada em conjunto com outras análises, informações qualitativas e considerações individuais.

A fim de alcançar tais objetivos, o presente trabalho é estruturado em sete etapas, sendo elas: 1. Coleta, 2. Tratamento de dados, 3. Análise de ativos, 4. Análise de carteiras, 5. Formação da fronteira eficiente, 6. Análise preditiva do Prophet e 7. Integração das carteiras com o Prophet (vide apêndice B).

1.1. Séries temporais financeiras

Séries temporais financeiras consistem em observações sequenciais de variáveis econômicas ao longo do tempo, como preços de ativos, retornos, volumes de negociação ou índices de mercado. Diferentemente de séries observadas em fenômenos físicos controlados, as séries financeiras apresentam características específicas que tornam sua modelagem particularmente desafiadora, como alta volatilidade, presença de ruído, não estacionariedade e mudanças estruturais frequentes (BOX; JENKINS; REINSEL, 2015).

Uma das principais propriedades dessas séries é a não estacionariedade, isto é, a variação de suas estatísticas fundamentais — média e variância — ao longo do tempo. Eventos macroeconômicos, crises financeiras, alterações regulatórias e choques exógenos introduzem rupturas que alteram significativamente o comportamento histórico dos preços, limitando a capacidade preditiva de modelos baseados exclusivamente em médias passadas.

Além disso, séries financeiras costumam apresentar heterocedasticidade, fenômeno no qual a variância dos retornos não é constante ao longo do tempo, manifestando-se em períodos alternados de alta e baixa volatilidade. Conforme destacado por Tsay (2010), essa característica compromete a eficácia de abordagens simplificadas e exige modelos capazes de lidar com incertezas dinâmicas e regimes distintos de mercado.

Do ponto de vista analítico, uma série temporal pode ser compreendida como a combinação de diferentes componentes estruturais, tradicionalmente decompostos em tendência, sazonalidade, ciclo e componente aleatório. A tendência representa o movimento de longo prazo da série, associado ao crescimento ou declínio estrutural do ativo ao longo do tempo. A sazonalidade refere-se a padrões recorrentes em intervalos regulares, enquanto o componente cíclico está relacionado a flutuações de médio prazo associadas a ciclos econômicos. Por fim, o componente aleatório ou irregular captura variações imprevisíveis decorrentes de choques exógenos e ruído estatístico (BOX; JENKINS; REINSEL, 2015).

Formalmente, essa decomposição pode ser representada, em sua forma aditiva, pela seguinte equação:

$$Y_t = T_t + S_t + C_t + \varepsilon_t$$

em que Y_t representa o valor observado da série temporal no instante t ; T_t corresponde ao componente de tendência; S_t representa o componente sazonal; C_t refere-se ao componente cíclico; e ε_t denota o componente aleatório ou irregular.

Essa formulação clássica encontra correspondência direta na estrutura do modelo Prophet, o qual também adota uma decomposição aditiva da série temporal. No Prophet, a série é modelada como:

$$y(t) = g(t) + s(t) + h(t) + \varepsilon(t)$$

, em que $g(t)$ representa a tendência de longo prazo, $s(t)$ captura os efeitos sazonais periódicos, $h(t)$ incorpora efeitos associados a mudanças estruturais ou eventos específicos, e $\varepsilon(t)$ corresponde ao termo de erro aleatório (TAYLOR; LETHAM, 2017). Observa-se que, no contexto do Prophet, o componente cíclico tradicional é incorporado de forma implícita na dinâmica da tendência e nos pontos de mudança, permitindo que o modelo se adapte a diferentes

regimes de mercado sem a necessidade de especificação explícita de ciclos fixos. Dessa forma, o Prophet pode ser interpretado como uma extensão moderna da decomposição clássica de séries temporais, especialmente adequada para séries financeiras caracterizadas por não estacionariedade, elevada volatilidade e mudanças estruturais frequentes.

1.2. Prophet

O modelo Prophet, desenvolvido por Taylor e Letham (2017), é uma ferramenta de modelagem e previsão de séries temporais concebida para aplicações em ambientes caracterizados por elevada volatilidade, presença de ruído e mudanças estruturais frequentes. Tais características, já discutidas na seção anterior sobre séries temporais financeiras, tornam-se particularmente relevantes no contexto de dados econômicos e financeiros, nos quais pressupostos de estacionariedade raramente se sustentam ao longo do tempo.

Conforme previamente apresentado, séries financeiras exibem não estacionariedade, heterocedasticidade e comportamento influenciado por choques exógenos, fatores que limitam a eficácia de modelos tradicionais baseados exclusivamente em médias históricas ou em estruturas rígidas. Nesse cenário, o Prophet se destaca por sua capacidade de incorporar flexibilidade estrutural à modelagem da tendência, permitindo adaptações automáticas a mudanças no regime dos dados por meio da identificação endógena de pontos de mudança (*changepoints*).

Do ponto de vista conceitual, a estrutura do Prophet baseia-se em uma decomposição aditiva da série temporal, cuja fundamentação teórica já foi apresentada anteriormente com base na literatura clássica de séries temporais. Assim, não se busca aqui rerepresentar os componentes da decomposição, mas destacar que o Prophet operacionaliza essa estrutura de forma moderna, ao permitir que a tendência evolua de maneira não linear e sensível a alterações estruturais observadas ao longo do tempo (TAYLOR; LETHAM, 2017).

Outro aspecto relevante do modelo, em consonância com as propriedades estatísticas das séries financeiras previamente discutidas, é sua robustez à presença de ruído e valores atípicos. Em mercados financeiros, eventos inesperados podem gerar movimentos abruptos de preços que distorcem análises baseadas em pressupostos de estabilidade. O Prophet mitiga esse efeito ao priorizar a identificação de padrões estruturais de longo prazo, reduzindo a influência excessiva de oscilações transitórias.

No contexto da gestão quantitativa de investimentos, e conforme já destacado na discussão sobre a Teoria Moderna de Portfólios, uma das principais limitações do modelo de Markowitz reside na utilização exclusiva de retornos médios históricos como estimativa do retorno esperado. A aplicação do Prophet neste estudo busca complementar essa limitação ao fornecer um vetor de retorno esperado prospectivo, construído a partir da tendência estimada das séries de preços, incorporando informações mais recentes sem substituir a análise de risco baseada na matriz de covariância histórica.

Ressalta-se que o Prophet não é empregado como instrumento de previsão pontual ou como substituto das métricas tradicionais de risco e retorno, mas como ferramenta complementar de apoio à decisão. Seu papel consiste em enriquecer o processo de otimização de portfólios ao introduzir uma dimensão prospectiva coerente com os fundamentos teóricos previamente

apresentados, preservando o caráter didático e metodológico da abordagem proposta.

Dessa forma, a utilização do modelo Prophet mostra-se adequada ao contexto deste estudo por integrar flexibilidade estrutural, interpretabilidade e aderência às características das séries temporais financeiras já discutidas. Ao atuar como complemento à Teoria Moderna de Portfólios, o modelo contribui para uma análise mais ampla e realista da alocação de ativos em ambientes financeiros dinâmicos, sem comprometer o rigor estatístico do processo de otimização.

2. Fundamentos Teóricos

2.1. Gestão Financeira e Período Histórico

A gestão financeira moderna evoluiu em resposta à crescente complexidade dos mercados e ao aumento da disponibilidade de informações quantitativas. O desenvolvimento de métodos formais de análise tornou-se essencial para lidar com decisões de investimento em ambientes caracterizados por incerteza e volatilidade. Conforme destacado por Elton et al. (2012), a incorporação de modelos matemáticos permite substituir abordagens puramente intuitivas por critérios objetivos e reproduzíveis.

A escolha do período histórico de análise exerce influência direta sobre as estimativas de risco e retorno. Diferentes janelas temporais podem refletir regimes econômicos distintos, afetando volatilidade, correlação entre ativos e desempenho relativo. Assim, compreender o contexto histórico associado aos dados utilizados é fundamental para a correta interpretação dos resultados obtidos em modelos de otimização de portfólios.

2.2. Risco e Volatilidade

O risco constitui um elemento central na teoria financeira e está diretamente associado à incerteza quanto aos resultados futuros de um investimento. No contexto dos mercados acionários, o risco é comumente quantificado pela volatilidade dos retornos, medida estatisticamente pelo desvio-padrão ou pela variância (HAYES, 2023).

A volatilidade expressa a magnitude das flutuações dos retornos em torno de sua média, refletindo o grau de instabilidade do ativo. Em modelos de otimização de carteiras, a volatilidade não apenas caracteriza o risco individual dos ativos, mas também influencia o risco conjunto quando considerada em conjunto com a covariância entre eles.

2.3. Retorno de Investimento

O retorno de um investimento representa o ganho ou perda obtido em relação ao capital inicialmente aplicado e pode ser expresso de diferentes formas, como retorno nominal, real ou percentual. No âmbito da análise de portfólios, utiliza-se predominantemente o retorno percentual periódico, que permite comparações consistentes entre ativos (ELTON et al., 2012).

O retorno esperado consiste em uma estimativa do desempenho futuro do ativo e desempenha papel fundamental nos modelos de alocação de capital. Enquanto abordagens tradicionais

utilizam a média histórica como proxy para essa estimativa, métodos mais recentes incorporam informações prospectivas por meio de modelos de séries temporais, como realizado no presente estudo.

2.4. Restrições e Personalização de Portfólio

A construção de carteiras de investimento envolve a aplicação de restrições que refletem preferências, limitações operacionais e objetivos específicos do investidor. Essas restrições podem incluir limites mínimos ou máximos de alocação, proibição de posições vendidas, ausência de alavancagem ou restrições setoriais (ELTON et al., 2012).

A introdução de restrições contribui para tornar o modelo de otimização mais aderente à realidade prática, evitando soluções matematicamente ótimas, porém inviáveis do ponto de vista operacional. No contexto do presente trabalho, tais restrições desempenham papel fundamental na interpretação econômica das carteiras resultantes.

2.5. Sharpe Ratio

O Sharpe Ratio, proposto por William Sharpe (1966), é uma das métricas mais amplamente utilizadas na avaliação do desempenho de ativos e carteiras de investimento, por mensurar o retorno excedente obtido por unidade de risco assumido. O índice é definido como a razão entre o excesso de retorno da carteira em relação ao ativo livre de risco e o desvio-padrão dos retornos, sendo formalmente expresso pela relação entre prêmio de risco e volatilidade.

Do ponto de vista econômico, o Sharpe Ratio representa a eficiência com que um portfólio remunera o investidor pelo risco assumido, ao comparar o retorno adicional obtido acima da taxa livre de risco com a incerteza associada aos retornos. Assim, quanto maior o valor do índice, maior é a compensação oferecida ao investidor para cada unidade de risco suportada, refletindo uma alocação de capital mais eficiente.

Sob a ótica estatística, o denominador do índice — o desvio-padrão dos retornos — captura a variabilidade total do portfólio, incorporando tanto riscos sistemáticos quanto idiossincráticos. Dessa forma, o Sharpe Ratio penaliza estratégias excessivamente voláteis, mesmo que apresentem retornos elevados, favorecendo carteiras que apresentam maior estabilidade relativa ao longo do tempo.

A principal vantagem do Sharpe Ratio reside na sua capacidade de permitir comparações diretas entre carteiras com diferentes níveis de risco e estruturas de alocação, tornando-se uma ferramenta central na avaliação de desempenho e na seleção de ativos. No contexto da Teoria Moderna de Portfólios, o índice está diretamente associado à fronteira eficiente, uma vez que o portfólio que maximiza o Sharpe Ratio corresponde, teoricamente, ao ponto de tangência entre a fronteira eficiente e a linha do mercado de capitais.

No presente estudo, o Sharpe Ratio desempenha papel fundamental tanto na etapa de pré-seleção dos ativos quanto na construção de uma das carteiras otimizadas, servindo como critério objetivo para identificar combinações de ativos que oferecem a melhor relação entre retorno esperado e risco histórico. Ressalta-se, contudo, que, apesar de sua ampla utilização, o índice assume implicitamente a normalidade dos retornos e a estabilidade da volatilidade, o que

reforça a importância de sua interpretação conjunta com outras métricas e análises complementares.

2.6. TMP de Markowitz

A Teoria Moderna de Portfólios, desenvolvida por Harry Markowitz (1952), representa um marco na gestão quantitativa de investimentos ao formalizar matematicamente o processo de seleção de carteiras com base na relação entre risco e retorno. A principal contribuição da teoria consiste em demonstrar que o risco de uma carteira não depende apenas da volatilidade individual dos ativos que a compõem, mas fundamentalmente da estrutura de dependência entre seus retornos, expressa pelas covariâncias.

No arcabouço de Markowitz, o retorno esperado de uma carteira é definido como a média ponderada dos retornos esperados dos ativos, enquanto o risco é mensurado pela variância dos retornos da carteira. Formalmente, o retorno esperado do portfólio pode ser expresso como:

$$E(R_p) = \sum_i w_i E(R_i),$$

em que w_i representa o peso do ativo i na carteira e $E(R_i)$ corresponde ao retorno esperado desse ativo. Já a variância do portfólio, que captura o risco total, é dada por:

$$\sigma_p^2 = \sum_i \sum_j w_i w_j \text{Cov}(R_i, R_j),$$

em que $\text{Cov}(R_i, R_j)$ representa a covariância entre os retornos dos ativos i e j . Essa formulação evidencia que o risco da carteira é influenciado tanto pelas variâncias individuais quanto pelas covariâncias entre os ativos, reforçando que a interação entre eles é elemento central no processo de otimização.

A partir dessa estrutura, a diversificação deixa de ser um conceito intuitivo e passa a assumir caráter quantitativo. Ao combinar ativos cujos retornos apresentam correlação baixa ou negativa, é possível reduzir a variância total da carteira sem necessariamente reduzir o retorno esperado. Esse princípio conduz à construção da fronteira eficiente, conjunto de carteiras que oferecem o maior retorno esperado para cada nível de risco ou, alternativamente, o menor risco para um dado nível de retorno. Carteiras situadas fora dessa fronteira são consideradas ineficientes, pois existem combinações superiores em termos de risco-retorno.

A avaliação da eficiência dessas carteiras pode ser realizada por meio do Sharpe Ratio, proposto por William Sharpe (1966), que mede o retorno excedente da carteira em relação à taxa livre de risco por unidade de risco assumido. O índice é definido como:

$$S = (E(R_p) - R_f) / \sigma_p,$$

em que R_f representa a taxa livre de risco e σ_p o desvio-padrão dos retornos da carteira. Um Sharpe Ratio mais elevado indica maior eficiência na compensação do risco assumido, permitindo a comparação direta entre carteiras com diferentes níveis de volatilidade.

No contexto teórico, o portfólio que maximiza o Sharpe Ratio ocupa posição central na

Teoria Moderna de Portfólios, pois corresponde ao ponto de tangência entre a fronteira eficiente e a Linha do Mercado de Capitais. A Linha do Mercado de Capitais representa o conjunto de carteiras que combinam o ativo livre de risco com o portfólio de mercado eficiente, estabelecendo uma relação linear entre retorno esperado e risco. Essa linha define o melhor retorno possível para cada nível de risco quando o investidor tem acesso ao ativo livre de risco, consolidando o Sharpe Ratio como critério fundamental de eficiência.

Dessa forma, a Teoria Moderna de Portfólios fornece um arcabouço estatístico consistente para a construção e avaliação de carteiras, integrando a análise de risco por meio da variância e da covariância, a diversificação como mecanismo de mitigação do risco e o Sharpe Ratio como métrica de eficiência ajustada ao risco. No presente estudo, esses fundamentos sustentam o processo de otimização adotado e orientam a comparação entre as diferentes carteiras construídas.

2.7. Fronteira Eficiente e Otimização de Carteiras

A fronteira eficiente corresponde ao conjunto de carteiras que apresentam o melhor retorno esperado para cada nível de risco, ou, alternativamente, o menor risco possível para um determinado retorno esperado (MARKOWITZ, 1952). Carteiras localizadas fora dessa fronteira são consideradas ineficientes, pois existem combinações superiores disponíveis.

A otimização de carteiras consiste em identificar, dentro do espaço de todas as combinações possíveis, aquelas que pertencem à fronteira eficiente, respeitando as restrições impostas. Esse processo fundamenta-se na minimização da variância ou na maximização do retorno ajustado ao risco, conforme o objetivo do investidor. A figura 01, abaixo traz a representação da fronteira eficiente de Markowitz.

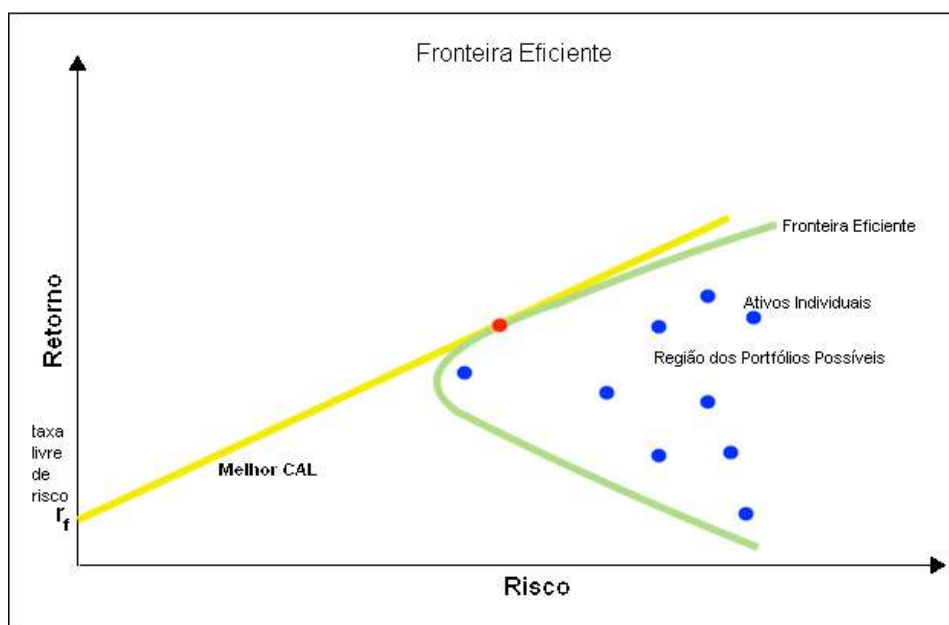


Figura 1: Fronteira eficiente de Markowitz.

Fonte: BRAVA CAPITAL (s.d.).

A Figura 1, traz a representação da Fronteira Eficiente no plano risco–retorno, em que o eixo horizontal indica o risco, medido pelo desvio-padrão dos retornos, e o eixo vertical representa o retorno esperado. Os pontos azuis correspondem aos ativos individuais e às combinações de portfólios possíveis. A curva verde delimita a fronteira eficiente, formada pelas carteiras que oferecem o maior retorno para cada nível de risco ou o menor risco para um dado retorno. A linha amarela representa a Linha do Mercado de Capitais (CAL), que parte da taxa livre de risco (r_x) e é tangente à fronteira eficiente no ponto em vermelho, correspondente ao portfólio de máximo Sharpe Ratio. Esse ponto indica a carteira mais eficiente em termos de retorno ajustado ao risco, evidenciando o papel do Sharpe Ratio na seleção ótima de portfólios.

2.8. Matriz de Covariância e Coeficiente de Correlação

A matriz de covariância constitui o principal insumo de risco no modelo de Markowitz, pois quantifica a forma como os retornos dos ativos variam conjuntamente. Enquanto a variância, presente na diagonal da matriz, representa o risco individual de cada ativo, os termos fora da diagonal capturam o risco conjunto associado à interação entre diferentes ativos (ELTON et al., 2012).

O coeficiente de correlação, por sua vez, representa a versão normalizada da covariância, permitindo avaliar a intensidade e a direção da relação entre os retornos. Baixos níveis de correlação entre ativos são desejáveis, pois ampliam os benefícios da diversificação e reduzem o risco total da carteira.

2.9. Modelo Preditivo e Séries Temporais

Modelos preditivos baseados em séries temporais desempenham papel relevante na gestão de investimentos ao possibilitar a incorporação de informações prospectivas nos processos de alocação de capital. Embora tais modelos não eliminem a incerteza inerente aos mercados financeiros, eles permitem identificar tendências e padrões estruturais que não são capturados por médias históricas simples (TSAY, 2010).

A integração entre modelos preditivos e a Teoria Moderna de Portfólios representa uma evolução metodológica, ao combinar risco histórico com expectativas futuras, ampliando a robustez das decisões de investimento.

3. Metodologia

O trabalho apresenta uma seleção de carteiras a partir de uma abordagem quantitativa e descritiva, e tem como objetivo descrever o desempenho e a eficiência de portfólios construídos sob restrições setoriais e análise de dados históricos. Juntando a alocação tradicional de Markowitz com a informada através da previsão de séries temporais pelo Prophet, a seleção possui, em sua maioria, ativos brasileiros que tiveram seus dados de fechamentos compilados pelo site *Yahoo Finance*

A análise e geração das carteiras (apêndices E, F e H) foram conduzidas a partir de um conjunto inicial de 31 ativos negociados nos mercados financeiro nacional e internacional, incluindo ações de diferentes setores econômicos e fundos de investimento imobiliário (FIIs).

Essa seleção buscou assegurar diversidade setorial e exposição a distintos perfis de

risco, reduzindo a probabilidade de concentração excessiva e a ocorrência de respostas homogêneas dos ativos frente a um mesmo choque econômico. Tal estratégia contribui diretamente para o aumento da robustez estatística da matriz de covariância utilizada no processo de otimização (apêndice C). Os ativos selecionados encontram-se organizados no Quadro 01, referente às ações, e no Quadro 02, referente aos FIIs.:

Quadro 1: Ativos selecionados.

Setor Principal	Subsetor	Ticker	Nome da Empresa / Fundo
Tecnologia & Comunicação	Software e Serviços de Nuvem	MSFT	Microsoft Corporation
	Serviços de Internet	GOOGL	Alphabet Inc. (Google)
	Hardware e Eletrônicos	AAPL	Apple Inc.
Petróleo, Gás e Biocombustíveis	Exploração, Refino e Distribuição	PETR4.SA	Petróleo Brasileiro S.A. (Petrobras)
	Exploração e Produção (Independente)	PRI03.SA	PetroRio (ou Prio)
Materiais Básicos	Mineração	VALE3.SA	Vale S.A.
	Papel e Celulose	SUZB3.SA	Suzano S.A.
	Papel e Celulose	KLBN3.SA	Klabin S.A.
Bens Industriais	Material de Transporte (Aeronáutico)	EMBR3.SA	Embraer S.A.
	Máquinas e Equipamentos	WEGE3.SA	WEG S.A.
Utilidade Pública	Energia Elétrica	TAAE3.SA	Taesá (Transmissão)
	Energia Elétrica	EGIE3.SA	Engie Brasil Energia
	Energia Elétrica	CMIG3.SA	Cemig

Setor Principal	Subsetor	Ticker	Nome da Empresa / Fundo
Consumo Não-Cíclico	Alimentos (Carnes)	BEEF3.SA	Minerva Foods
	Alimentos (Processados/Proteínas)	BRFS3.SA	BRF S.A.
	Agropecuária	AGRO3.SA	BrasilAgro
Consumo Cíclico	Incorporação e Construção	CYRE3.SA	Cyrela Commercial Properties
	Incorporação e Construção	MRVE3.SA	MRV Engenharia
	Incorporação e Construção	JHSF3.SA	JHSF Participações
Saúde	Serviços Hospitalares e Laboratórios	FLRY3.SA	Fleury S.A.
	Farmacêutica	HYPE3.SA	Hypera Pharma
	Varejo Farmacêutico	RADL3.SA	Raia Drogasil S.A.
Financeiro	Bancos	BBAS3.SA	Banco do Brasil S.A.
	Bancos	ITUB4.SA	Itaú Unibanco S.A.
	Serviços Financeiros (Bolsa)	B3SA3.SA	B3 S.A. – Brasil, Bolsa, Balcão
Diversos	Holding / Varejo de Combustíveis / Logística	UGPA3.SA	Ultrapar Participações S.A.

Fonte: Próprios autores, 2025.

Quadro 2: FII's selecionados para o estudo.

Setor Principal	Tipo de Lastro	Ticker	Nome do Fundo (Exemplo de Ativo)
FII's	Tijolo (Lajes Corporativas)	BBPO11.SA	FII BB Progressivo (Prédios de Escritórios)
	Tijolo (Logística/Galpões)	HGLG11.SA	CSHG Logística FII (Galpões Logísticos)
	Tijolo (Shopping Centers)	XPML11.SA	XP Malls FII (Shopping Centers)
FII's	Fundo de Fundos (FoF)	BPFF11.SA	Brasil Plural Fundo de Fundos (Aplica em cotas de outros FII's)
FII's	Papel (Recebíveis Imobiliários)	KNCR11.SA	Kinea Rendimentos Imobiliários FII (CRI/LCI)

Fonte: Próprios autores, 2025.

3.1. Do Período de Análise

O período de análise compreende o intervalo entre 1º de janeiro de 2012 e 31 de dezembro de 2022, totalizando aproximadamente dez anos de dados históricos. Essa janela temporal foi escolhida por abranger diferentes ciclos econômicos, incluindo períodos de expansão, recessão e eventos extremos, como a crise sanitária provocada pela pandemia de COVID-19.

A inclusão de eventos de estresse severo permite avaliar a resiliência das estimativas de risco e da matriz de covariância sob condições adversas de mercado, conferindo maior validade empírica aos resultados obtidos.

3.2. Coleta e Limpeza de Dados

A coleta dos dados (apêndice B) foi realizada por meio da extração das séries históricas de preços de fechamento diário dos ativos selecionados, utilizando a API da plataforma *Yahoo Finance* por meio da linguagem de programação R. Para cada ativo, foram gerados arquivos individuais no formato .csv, contendo aproximadamente 3.225 observações, correspondentes ao período de 01/01/2012 a 31/12/2022.

A etapa de limpeza dos dados contemplou a padronização das datas, a verificação de consistência das séries temporais e o tratamento de valores ausentes. Em função de ativos com início de negociação posterior a 2012 ou com interrupções temporárias, observaram-se lacunas nas séries. Para assegurar o alinhamento temporal necessário ao cálculo da matriz de

covariância (apêndices B e C), adotou-se uma estratégia de imputação conservadora, atribuindo retorno diário igual a 0% aos valores ausentes, de modo a garantir uniformidade entre as séries sem introduzir viés na média dos retornos esperados.

Após a etapa de limpeza, todas as séries foram convertidas em retornos logarítmicos diários, os quais apresentam melhores propriedades estatísticas para análises de risco, variância e para as etapas subsequentes de modelagem e otimização.

3.3. Impacto da Limpeza na Análise Estatística

O preenchimento de valores ausentes (NA) com retorno diário de 0% exerce um impacto direto na análise estatística, tanto de forma positiva, permitindo o cálculo, como de forma negativa, introduzindo um viés conservador.

O principal motivo dessa imputação de 0% é tornar possível o cálculo da matriz de covariância através do código R (apêndice C), uma vez que funções estatísticas como “cov()” exigem que todas as colunas dos ativos tenham o mesmo número de resultados alinhados no tempo, caso um ativo possua (NA) acarreta em uma falha na geração da matriz.

Ao preencher com 0% assume-se que nos dias que o ativo não estava negociando-o não contribuiu nem positiva nem negativamente para a volatilidade da carteira. Isso subestima levemente a volatilidade real e a covariância nos dias de (NA), pois na realidade há possibilidade de o retorno do dia seguinte ser afetado, porém é um viés conservador pois estabiliza a matriz e evita erros de cálculo por parte do programa.

O impacto no retorno esperado é considerado mínimo, apesar de o valor de 0% puxar a média diária para baixo, como os 0% geralmente ocorrem no início da série essa imputação assume que o ativo estagnou antes de existir e em uma série de 10 anos (2520 dias), adicionar 100 dias de 0% tem um impacto insignificante na média anual final.

A volatilidade mede o desvio dos retornos em relação à sua média, ao inserir um retorno próximo a zero, a dispersão do conjunto de dados se reduz. O Desvio Padrão do ativo com os NAs preenchidos em 0% será menor do que se tivéssemos a série completa de preços. Como o objetivo é obter uma matriz utilizável, o erro introduzido é considerado menor do que a distorção causada pela remoção completa dos ativos incompletos.

Embora o preenchimento de 0% introduza um viés conservador que subestima levemente a volatilidade e o retorno real dos ativos incompletos, esta técnica é o procedimento padrão em finanças quantitativas para garantir a completude das séries temporais. Isso é fundamental para que as propriedades da Matriz de Covariância sejam mantidas, assegurando a validade estatística dos cálculos da Fronteira Eficiente.

3.4. Análise de Risco Preliminar

Com as séries de retornos tratadas, realizou-se uma análise preliminar de risco com o objetivo de identificar padrões de volatilidade, correlação e covariância entre os ativos.

Primeiramente, foram calculados o desvio-padrão diário e anualizado, a variância e o retorno médio anual, que serviram como insumos iniciais para avaliação da relação risco-retorno individual.

Em seguida, foram geradas as matrizes de correlação e covariância (apêndice C), permitindo observar como os ativos interagem entre si. A matriz de correlação evidenciou predominância de correlações fracas a moderadas, especialmente entre ativos de setores distintos, sugerindo

boa oportunidade de diversificação. A matriz de covariância, por sua vez, identificou blocos de risco concentrado — especialmente no setor de petróleo e gás — que impactariam diretamente o processo de otimização.

Essa etapa teve como finalidade compreender a estrutura de dependência entre ativos antes de submetê-los ao modelo de Markowitz, fornecendo uma visão clara dos principais vetores de risco presentes no universo analisado.

3.5. Avaliação e Pré-Seleção de Ativos

Com base na análise preliminar, procedeu-se à etapa de pré-seleção, cujo objetivo foi reduzir o universo inicial de 31 ativos para um conjunto mais consistente, diversificado e representativo dos setores estudados.

A primeira filtragem considerou a métrica do Sharpe Ratio (apêndice D), identificando quais ativos apresentavam a melhor relação entre retorno e volatilidade. Ativos com baixo retorno ajustado ao risco foram classificados como dominados e considerados candidatos à exclusão.

Em seguida, aplicou-se uma regra de uma seleção por setor, garantindo diversificação estrutural e reduzindo o risco de concentração. Assim, mesmo ativos com Sharpe positivo puderam ser excluídos caso houvesse outro ativo do mesmo setor com desempenho superior.

O resultado desse processo foi uma cesta final de ativos representando tecnologia, FIIs, utilidades públicas, consumo, saúde, materiais básicos, petróleo, financeiro e bens industriais — uma base suficientemente ampla para construção das combinações de carteiras subsequentes.

3.6. Geração Combinatória de Carteiras

A partir do conjunto final de ativos, desenvolveu-se um processo de geração combinatória de carteiras, cujo objetivo foi explorar diferentes alocações possíveis e identificar quais delas poderiam se aproximar da fronteira eficiente.

Três modelos iniciais de carteira foram considerados:

- 1) Carteira de Pesos Iguais (Equal Weight) – todos os ativos recebem o mesmo peso;
- 2) Carteira de Mínima Variância – busca o menor risco possível para a combinação de ativos;
- 3) Carteira de Máximo Retorno/Sharpe – maximiza o retorno ajustado ao risco.

Antes da otimização, porém, gerou-se uma amostra ampla de carteiras aleatórias com pesos respeitando a soma igual a 1 e restrição de não negatividade (sem posições vendidas) (apêndices E e F). Essa geração aleatória permitiu mapear visualmente o espaço de risco-retorno e identificar regiões promissoras próximas à fronteira eficiente, funcionando como uma etapa exploratória para validação dos dados e dos resultados da otimização formal.

3.7. Modelagem Preditiva

Para superar a limitação da TMP — que utiliza exclusivamente dados históricos — incorporou-se ao trabalho uma etapa de previsão de séries temporais utilizando o modelo Prophet (apêndice G), desenvolvido pela Meta.

O Prophet foi aplicado individualmente às séries de preços dos ativos selecionados, gerando previsões para os períodos futuros e permitindo extrair um retorno esperado preditivo, mais alinhado às tendências recentes do mercado e menos sensível a choques passados.

O modelo demonstrou boa aderência a séries com sazonalidade moderada, tendência linear e pontos de ruptura (*change points*), características comuns em ativos financeiros. Assim, a modelagem preditiva forneceu um vetor alternativo de retornos esperados, que posteriormente foi integrado com a matriz de risco tradicional na etapa de otimização.

Essa integração possibilitou a formulação de uma fronteira eficiente híbrida, fundamentada no risco histórico, mas orientada pelas estimativas de retorno futuro.

3.8. Otimização de Portfólios

A otimização (apêndice H) foi conduzida com base nos princípios da Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz, utilizando como insumos a matriz de covariância histórica e dois vetores de retorno: o retorno médio histórico e o retorno projetado pelo Prophet.

Foram utilizadas técnicas de otimização quadrática (*Quadratic Programming*), respeitando as seguintes restrições:

- Pesos não negativos (*long only*);
- Soma dos pesos é igual a 1;
- Um ativo por setor;
- Ausência de alavancagem.

A otimização gerou três carteiras principais:

- 1) Carteira Conservadora (Mínima Variância) – minimiza o risco sem considerar retorno;
- 2) Carteira Agressiva (Máximo Sharpe) – maximiza retorno ajustado ao risco;
- 3) Carteira Prophet – maximiza retorno com base exclusivamente no vetor preditivo.

A dualidade entre risco histórico e retorno preditivo permitiu observar como cada carteira muda sua composição quando olhamos para expectativas futuras e não apenas para o passado.

3.9. Geração e Comparação das Carteiras Finais

Após a otimização, foram obtidas as três carteiras finais que compõem o núcleo do estudo (apêndice H). Para avaliar seu desempenho, realizou-se uma comparação direta entre elas utilizando:

- Risco (volatilidade anualizada);
- Retorno anualizado;
- Sharpe Ratio;
- Composição dos pesos;
- Sensibilidade setorial;
- Geração gráfica da fronteira eficiente.

A carteira de pesos iguais serviu como base comparativa, representando uma estratégia simples, não otimizada. Já as carteiras otimizadas demonstraram a diferença prática entre diversas abordagens: uma focada em minimizar risco, outra em maximizar retorno e uma terceira guiada por estimativas futuras.

O resultado final permitiu avaliar a robustez da integração entre Markowitz e Prophet, verificando como o componente preditivo altera a fronteira eficiente tradicional e se apresenta uma melhoria efetiva na alocação final.

4. Resultados e Discussão

4.1. Estatísticas Descritivas

Inicialmente, procedeu-se à análise descritiva das séries históricas de preços dos ativos selecionados, com o objetivo de verificar sua consistência temporal e compreender a magnitude das variações observadas ao longo do período analisado. Para cada ativo, foi gerado um arquivo individual no formato .csv, contendo os preços de fechamento diário correspondentes à janela temporal definida na metodologia.

Considerando o elevado volume de observações — aproximadamente 3.225 registros por ativo — optou-se por apresentar apenas amostras ilustrativas dos dados, de modo a evitar a inclusão de quadros extensos que não agregariam valor analítico ao trabalho. Essa etapa teve caráter exploratório e serviu como base para o cálculo dos retornos, volatilidades e demais métricas empregadas nas análises subsequentes.

Quadro 3: Exemplo da Tabela .csv gerada para cada um dos ativos estudados.

	PETR3	EMBR3	HYPE3
04/01/2012	11.3860673904419	8.91	14.385293006897
18/07/2016	4.01143217086792	16.756404876709	18.240478515625
29/12/2022	17.0707893371582	14.2952699661255	40.9086151123047

Fonte: Próprio autor, 2025.

O Quadro 03 tem como objetivo demonstrar alguns dos valores de fechamento dos ativos, conforme foi puxado pelo código dos dados presentes no *Yahoo Finance*.

Poder-se-ia incluir esta demonstração para todos os 31 ativos em ordem de aumentar o número de páginas, porém desnecessário para o trabalho em si.

4.2. Tratamento de Dados Ausentes

A presença de dados ausentes em determinadas séries foi identificada principalmente em ativos com início de negociação posterior ao início da janela de análise ou com interrupções temporárias de negociação. Para assegurar a comparabilidade entre os ativos e permitir o cálculo da matriz de covariância, adotou-se a imputação de retorno diário igual a 0% para os valores ausentes.

Embora essa estratégia introduza um viés conservador, especialmente na estimação da volatilidade e da covariância, seu impacto é considerado limitado frente aos benefícios de manter a integridade estatística das séries temporais. Dessa forma, o procedimento adotado prioriza a estabilidade dos cálculos e a consistência do modelo, em detrimento da exclusão completa de ativos potencialmente relevantes.

4.3. Análise de Risco Preliminar: Matrizes de Correlação e Covariância

4.3.1. Análise Matriz de Correlação

A Figura 02, abaixo, traz a matriz de correlação dos ativos estudados. A matriz de correlação dos retornos evidencia, de forma geral, predominância de correlações fracas a moderadas entre os ativos analisados, especialmente entre aqueles pertencentes a setores econômicos distintos. Esse comportamento indica um ambiente favorável à diversificação, uma vez que baixos níveis de correlação reduzem a propagação de choques individuais ao risco total do portfólio.

Observa-se, contudo, a formação de blocos de correlação mais elevada entre ativos de setores semelhantes, como instituições financeiras e empresas expostas ao mesmo ciclo econômico. Esse padrão é esperado e reforça a importância da restrição setorial adotada na metodologia, que visa mitigar a concentração de risco sistêmico.

Matriz de Calor da Correlação dos Retornos

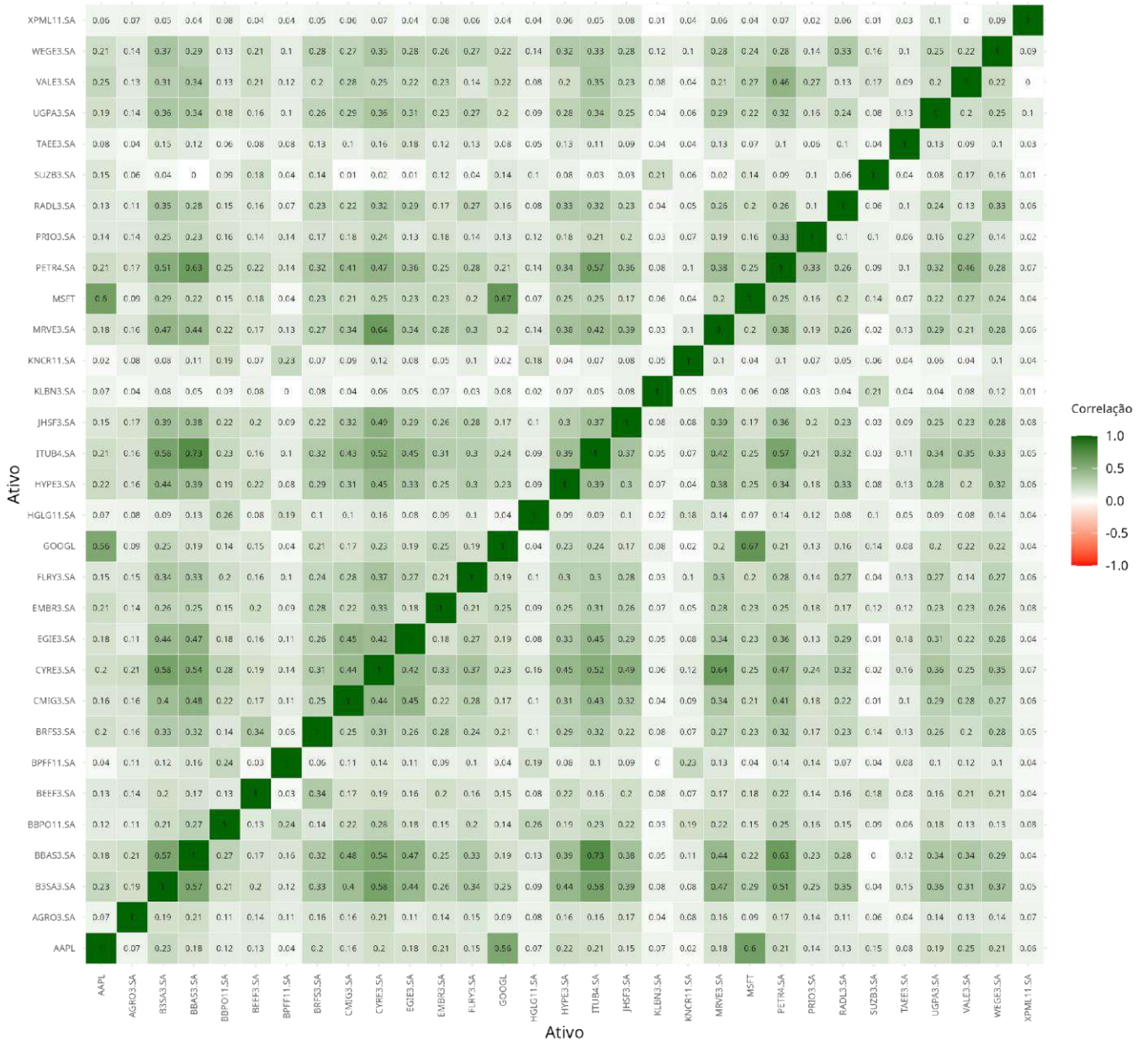


Figura 2: Matriz de calor da correlação de retornos.
Fonte: Próprio autor, 2025.

A Figura 02 representa o mapa de calor (de autoria própria, via código R – apêndice C) da Matriz de Correlação. Seus valores variam de -1 a +1 e os tons de vermelho e verde diferenciam a correlação negativa ou positiva.

A cor vermelha representa correlação negativa (retornos se movem em direções opostas). Como não há blocos vermelhos fortes, entende-se que não há pares de ativos que se movam em direções inversas de forma significativa no período analisado.

Grande parte dos quadrados fora da diagonal apresenta tons de branco a verde claro, o que indica que a maioria das correlações é fraca ou muito fraca, embora a correlação negativa seja ideal. A correlação fraca já é extremamente valiosa para a diversificação, e confirma-se então que a seleção de ativos (especialmente a inclusão de FIIs e ativos estrangeiros) foi eficaz em evitar a concentração de risco no portfólio.

Já os tons mais escuros concentram-se principalmente dentro dos blocos de ativos brasileiros do mesmo segmento ou classes de ativos sensíveis ao mesmo ciclo (ex: B3SA3.SA e ITUB4.SA no Financeiro, ou ativos ligados ao *Risco Brasil*).

4.3.2. Análise de Matriz de Covariância

A Figura 03, abaixo, traz a matriz de covariância dos ativos estudados. A matriz de covariância dos retornos constitui o principal insumo de risco para o modelo de Markowitz, pois quantifica simultaneamente o risco individual dos ativos e o risco conjunto decorrente de suas interações. Os elementos da diagonal principal representam as variâncias individuais, enquanto os termos fora da diagonal refletem a covariância entre pares de ativos.

A análise visual da matriz evidencia que determinados ativos apresentam elevada variância individual, contribuindo de forma significativa para o risco total da carteira. Além disso, observa-se maior intensidade de covariância entre ativos pertencentes a setores sensíveis a choques semelhantes, como o setor de petróleo e gás, o que reforça a necessidade de controle de exposição a esses segmentos durante o processo de otimização.

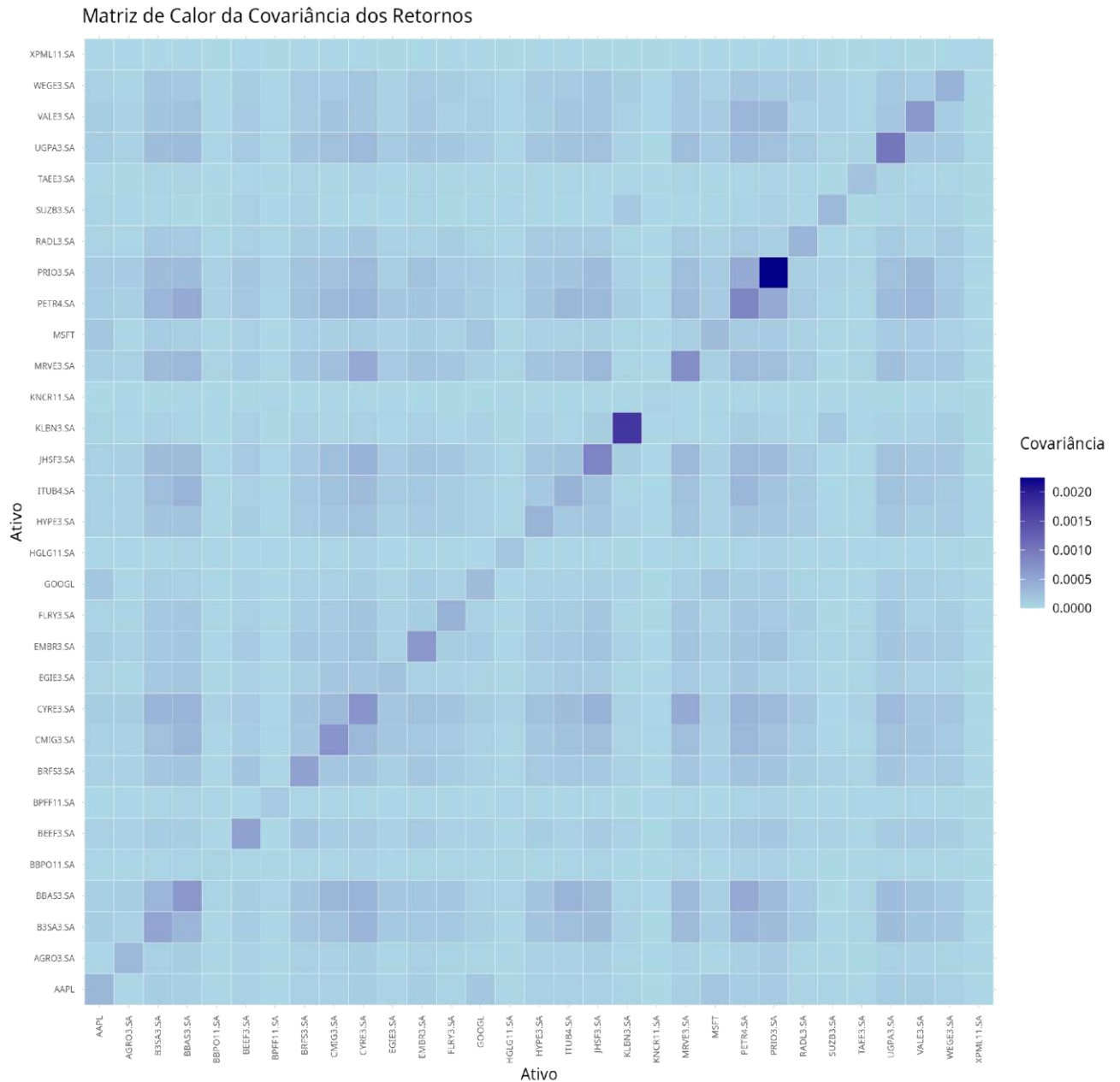


Figura 3: Matriz de calor da covariância dos retornos.
 Fonte: Próprio autor, 2025.

Agora, a Figura 03 demonstra o mapa de calor (de autoria própria, via código R) da Matriz de Covariância dos retornos diários. Esta matriz é o componente essencial de risco na fórmula de Markowitz, pois fornece o *input* numérico direto para o cálculo da variância do portfólio. Cores mais escuras (azul marinho) representam maior covariância (maior risco conjunto), enquanto cores mais claras (azul bebê) indicam covariância baixa.

4.3.3. Interpretação da Magnitude do Risco

A interpretação da matriz de covariância permite distinguir três componentes fundamentais do risco. Primeiramente, os termos fora da diagonal capturam o risco conjunto, evidenciando como a correlação entre ativos pode amplificar ou atenuar o risco agregado.

Por fim, a identificação de pontos de maior concentração de risco conjunto — como observado entre ativos do setor de petróleo e gás — fornece subsídios diretos para o processo de otimização, sinalizando quais combinações exigem mitigação por meio de restrições ou redistribuição de pesos.

- 1) **Diagonal Principal (Risco Individual):** os quadrados na diagonal principal representam a Variância de cada ativo (risco individual ao quadrado). Observa-se que os tons mais escuros na diagonal estão concentrados em ações que tendem a ser mais voláteis (como PETR4.SA e algumas outras ações brasileiras) – indicando que, independentemente da covariância, esses ativos já trazem um nível mais alto de risco individual para o portfólio.
- 2) **Risco Conjunto (Fora da Diagonal):** a maior parte da matriz fora da diagonal é de tom muito claro, quase branca, e reforça a conclusão da análise de correlação: o universo de ativos selecionado possui, em sua maioria, baixa covariância entre os pares o que é um sinal direto de eficácia na diversificação, pois a contribuição do risco conjunto para o risco total do portfólio é minimizada.
- 3) **Pontos de Maior Concentração de Risco:** o ponto mais escuro fora da diagonal é, notavelmente, a covariância entre PETR4.SA e PRIO3.SA (Petróleo e Gás). Embora a correlação seja alta, a covariância é ainda mais intensa aqui devido à alta volatilidade individual dessas empresas. Este é um bloco de risco que o modelo de otimização de Markowitz precisará mitigar, possivelmente atribuindo pesos baixos ou zero a um dos ativos em busca da carteira de Mínima Variância.

4.4. Pré-Seleção de Ativos Através do Melhor Sharpe Ratio

A Figura 04, abaixo, traz a relação risco – retorno para os ativos estudados (apêndice D). A relação risco–retorno dos ativos foi analisada por meio da representação gráfica de seus retornos anualizados em função da volatilidade, com o tamanho dos pontos proporcional ao Sharpe Ratio. Essa abordagem permitiu identificar ativos com desempenho superior em termos de retorno ajustado ao risco.

Ativos localizados em regiões caracterizadas por elevada volatilidade e baixo retorno foram considerados dominados e, portanto, candidatos à exclusão. A aplicação adicional da restrição de um ativo por setor assegurou diversidade estrutural, resultando em um conjunto final de ativos equilibrado e adequado à etapa de otimização.

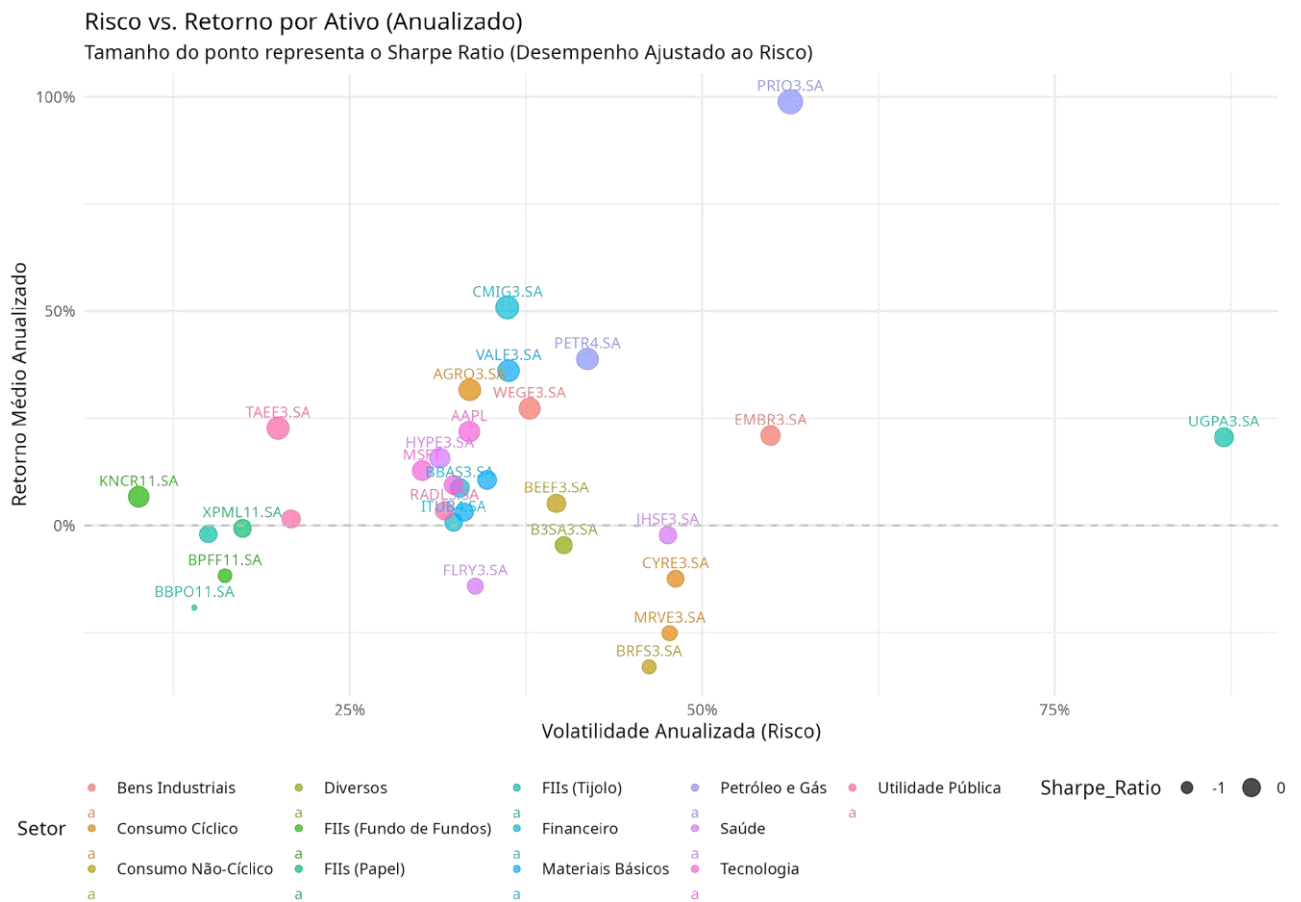


Figura 4: Relação Risco – Retorno dos ativos analisados.
Fonte: Próprio autor, 2025.

A interpretação do gráfico representado na Figura 04 traz:

- 1) Ativos de Alto Risco/Alto Retorno (Canto Superior Direito): o ativo PRIO3.SA (Petróleo e Gás) destaca-se com o maior Retorno Anualizado Médio (próximo a 100%) e uma volatilidade elevada (cerca de 60%). No entanto, seu ponto grande sugere um Sharpe Ratio alto, indicando que o alto retorno compensou o risco.
- 2) Ativos Conservadores (Canto Inferior Esquerdo): os FIIs (Tijolo, Papel e Fundo de Fundos), como KNCR11.SA e HGLG11.SA, se concentram na área de baixa volatilidade (abaixo de 25%) e Retornos Anualizados mais modestos (próximos a 0% ou ligeiramente acima). Eles formam a base do portfólio para perfis conservadores.
- 3) Ativos Dominados: ativos como BRFS3.SA e MRVE3.SA (Consumo Cíclico) se encontram na região de Retorno negativo ou baixo combinado com volatilidade média/alta, resultando em pontos pequenos (Sharpe Ratio ruim), indicando que são candidatos prováveis à exclusão em um processo de otimização.

Por fim, é efetuada a pré-seleção final, na qual a regra de um ativo por setor é aplicada, resultando nos seguintes ativos, organizados no Quadro 04 abaixo:

Quadro 4: Pré seleção final dos ativos.

Tickers	Retorno anual médio	Volatilidade anual	Setor
MSFT	35%	35%	Tecnologia
KNCR11.SA	10%	10%	FIIS papel
TAEE3.SA	30%	20%	Utilidade publica
XPML11.SA	0%	15%	FIIS tijolo
ITUB4.SA	5%	30%	Financeiro
WEGE3.SA	30%	30%	Bens industriais
HYPE3.SA	15%	30%	Saúde
VALE3.SA	40%	30%	Materiais básicos
AGRO3.SA	45%	30%	Consumo não-cíclico
UGPA3.SA	20%	80%	diversos
CYRE3.SA	-5%	40%	Consumo cíclico
PRI03.SA	100%	60%	Petróleo e gases
BPFF11.SA	0%	15%	FIIS

Fonte: Próprio autor, 2025.

4.5. Modelagem Preditiva (Prophet)

A etapa de modelagem preditiva (apêndice G) teve como objetivo incorporar uma estimativa de retorno futuro que superasse a limitação central da Teoria Moderna de Portfólio: a dependência exclusiva de médias históricas. Para isso, foi aplicado o modelo Prophet, sobre as séries de preços dos ativos pré-selecionados.

O Prophet foi ajustado individualmente para cada ativo, utilizando como insumo sua série histórica de preços diários já tratada. O modelo decompõe o comportamento do ativo em três componentes – tendência, sazonalidade e efeitos pontuais (*changepoints*) – permitindo capturar tanto movimentos estruturais de longo prazo quanto oscilações mais abruptas. Essa característica o torna especialmente útil no mercado financeiro, onde eventos inesperados alteram significativamente o padrão temporal das séries, conforme já observado por Hayes (2023) no comportamento volátil dos preços.

Após o ajuste, foram geradas previsões para períodos subsequentes, resultando em uma série projetada de preços futuros. A partir dessa série, calculou-se o retorno esperado preditivo de cada ativo. O vetor completo desses retornos preditivos substituiu, no processo de otimização, o tradicional vetor de retornos médios históricos, conforme proposto por Elton et al. (2012), permitindo a construção de uma alternativa mais alinhada ao panorama recente dos mercados.

A comparação entre o retorno histórico e o retorno estimado pelo Prophet mostrou variações significativas em alguns setores. Ativos altamente cíclicos, por exemplo, apresentaram projeções mais conservadoras, enquanto empresas com trajetória consistente de crescimento – como tecnologia – exibiram projeções mais alinhadas à sua tendência positiva. Essa divergência confirma a expectativa de que um modelo preditivo adiciona granularidade e contexto que não são capturados por médias históricas simples. Com isso, o Prophet tornou-se

um componente fundamental na construção da fronteira eficiente híbrida, servindo como base para a carteira alternativa focada em expectativas futuras.

Aplica-se agora o modelo preditivo Prophet em prol de obter o retorno esperado prospectivo, que por fim substitui a média histórica tradicional referente a principal fraqueza da teoria moderna de portfólios como objetivo do trabalho.

4.5.1. Geração das Previsões

Aqui, analisam-se os 13 ativos do maior Sharpe Ratio (apêndice H), em ordem de entender a métrica da análise futura do Prophet. A Figura 05, abaixo, traz os gráficos de comportamento real e previsão deste comportamento dos ativos para o período analisado.

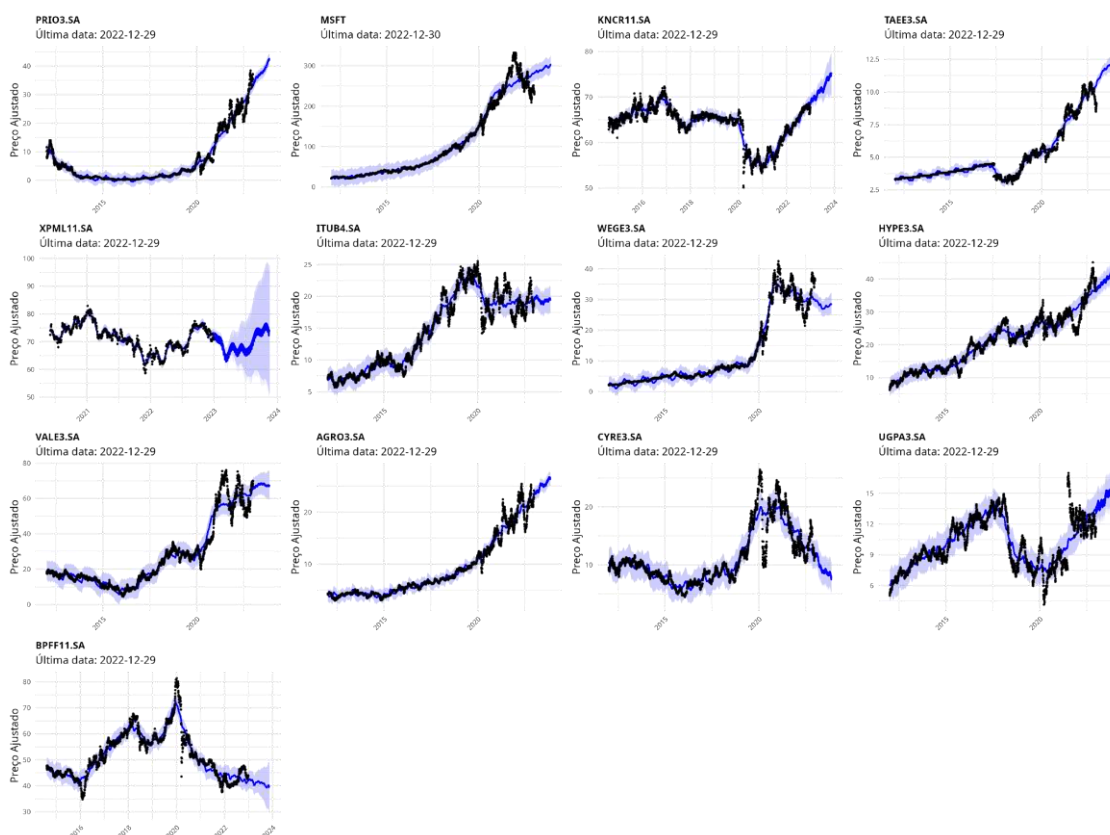


Figura 5: Gráficos gerados pelo Prophet para o período estudado para os 13 ativos com maior Sharpe Ratio. Fonte: Próprio autor, 2025.

A Figura 05 representa a síntese da modelagem Prophet para o intuito final de otimização; os gráficos exibem o histórico real do movimento dos ativos através dos pontos pretos; a linha de previsão em azul e o intervalo de confiança como o sombreado para os próximos 323 dias de mercado (equivalente a 1 ano). A análise dos gráficos tem como objetivo validar o input de retorno para a otimização híbrida. Separa-se em 3 blocos para uma análise mais aprofundada, representado no Quadro 05, abaixo:

Quadro 5: Classificação dos ativos de acordo com o risco.

Bloco	Ativos	Características
Alto Risco	PRIO3.SA, MSFT, VALE3.SA,	Forte inclinação positiva na

	WEGE3.SA, XPML11.SA	projeção futura e um amplo intervalo de confiança o que reflete a alta volatilidade inerente
Estabilidade	KNCR11.SA, BPF11.SA, TAEE3.SA	Estabilidade ou pouca inclinação e um intervalo de confiança estreito o que valida a baixa incerteza na previsão
Risco Moderado	ITUB4.SA, HYPE3.SA, AGRO3.SA, UGPA3.SA, CYRE3.SA	Tendências variadas, ideal e essencial para a diversificação do portfólio

Fonte: Próprio autor, 2025.

4.5.2. Análise da Tendência e Validade do Vetor μ :

Aqui, analisam-se os 13 ativos do maior Sharpe Ratio (apêndice H) em ordem de entender a métrica da análise futura do Prophet. A partir desta análise se extrai a expectativa de retorno de cada ativo de acordo com a inclinação da linha da previsão

Bloco Alto Risco:

A principal característica se evidencia como forte tendência positiva; os ativos apresentam inclinações positivas muito acentuadas em vista do horizonte futuro, o que sugere que a capacidade preditiva do Prophet modelou uma forte inércia de crescimento resultando em um alto retorno esperado (vetor μ – que é a projeção do retorno que o modelo espera de cada ativo utilizado pelo processo de otimização para balancear o retorno contra o risco de covariância). Tal inclinação valida o componente de expressão futura do modelo favorecendo sua tendência positiva recente em contraste com a média histórica simples. A Figura 06, abaixo, traz em destaque os gráficos de comportamento dos ativos pertencentes ao bloco em questão.

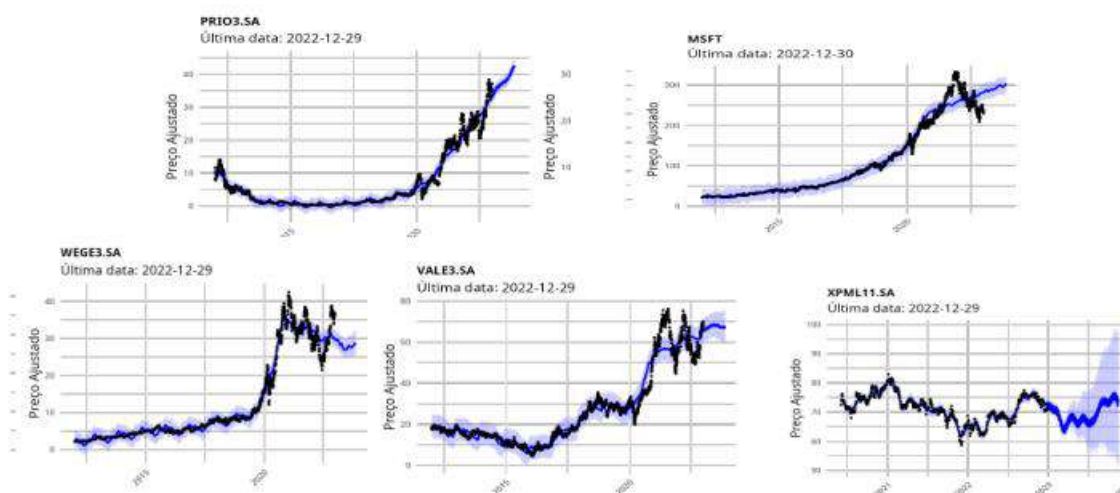


Figura 6: Gráficos exemplos de ativos selecionados para o bloco alto risco.

Fonte: Próprio autor, 2025.

Bloco Estabilidade:

Ativos como os FIIs de Papel (KNCR11.SA) e alguns de Utilidade Pública (TAEE3.SA) apresentam uma linha de previsão quase plana. Isso é esperado, pois esses ativos são historicamente menos voláteis e pagadores de rendimentos estáveis, resultando em um Retorno Esperado baixo, mas previsível. O modelo reconhece a maturidade do preço por conta do baixo vetor μ . A Figura 07, abaixo, traz em destaque os gráficos de comportamento dos ativos pertencentes ao bloco em questão.

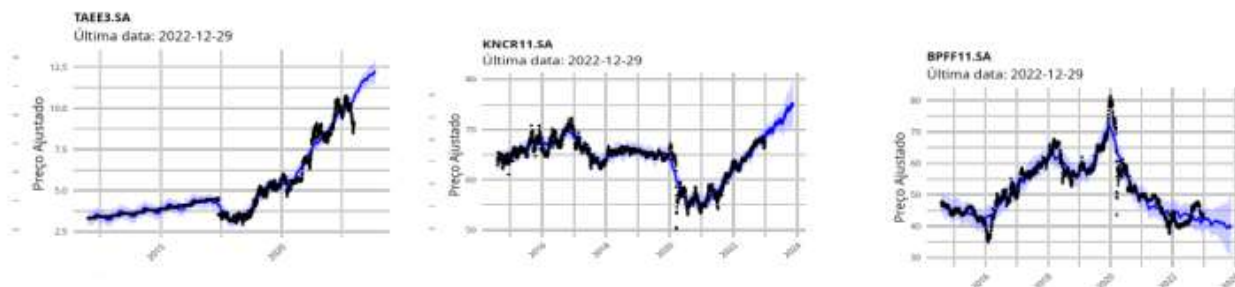


Figura 7: Gráficos exemplos de ativos selecionados para o bloco estabilidade.
Fonte: Próprio autor, 2025.

Bloco Risco Moderado:

Ativos com fortes quedas ou picos no histórico (como CYRE3.SA ou UGPA3.SA) geralmente têm uma linha de previsão que tenta suavizar essa volatilidade, mas seu vetor μ ainda reflete a direção modelada.

A análise visual confirma que a modelagem Prophet foi bem-sucedida em duas frentes, a linha de previsão segue a tendência histórica de forma coerente e, em relação ao risco preditivo a incerteza de previsão, é diretamente proporcional à volatilidade histórica do ativo, o que valida o uso do vetor μ para a otimização de Markowitz. A Figura 08, abaixo, traz em destaque os gráficos de comportamento dos ativos pertencentes ao bloco em questão.

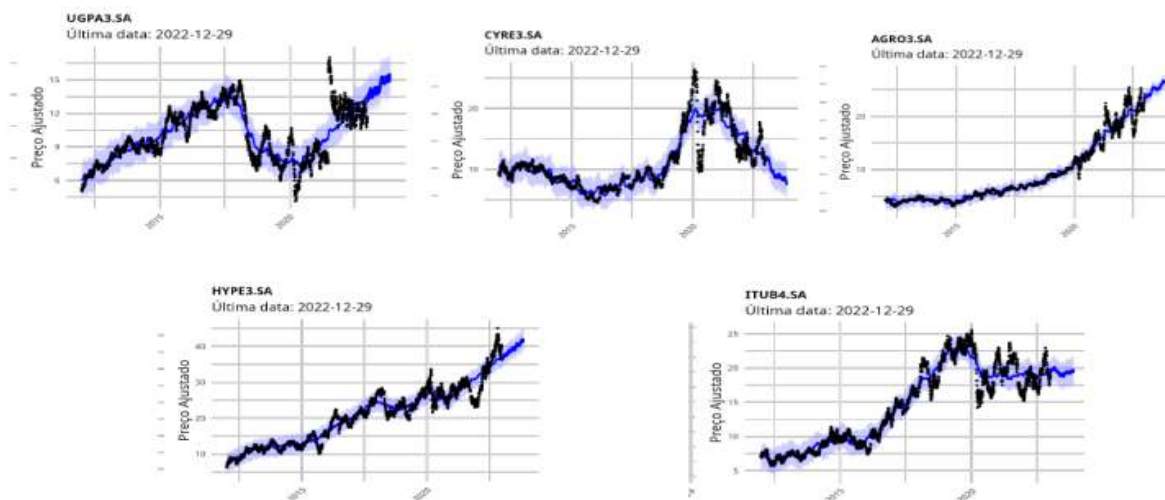


Figura 8: Gráficos exemplos de ativos selecionados para o bloco risco moderado.
Fonte: Próprio autor, 2025.

4.5.3. Otimização De Portfólios e Geração das Carteiras Finais

Com os dados históricos de risco consolidados e o vetor preditivo de retornos gerado, procedeu-se a etapa de otimização de portfólios. O processo seguiu o modelo clássico de Markowitz, utilizando a matriz de covariância histórica como medida de risco, conforme sugerido por Elton et al. (2012). Dois vetores de retorno foram testados separadamente: o vetor de retorno esperado μ fornecido pelo Modelo Prophet na etapa 4.4, que direciona a alocação com base na tendência futura e a Matriz de Covariância que se utiliza dos preços históricos definida na etapa 4.2, sendo referência para a análise de risco.

Foram alocadas também algumas restrições em prol de garantir uma diversificação estrutural e setorial nas carteiras. Chamadas de (*Box Constrains*), as restrições exigem que cada ativo pré-selecionado possua um peso mínimo de 3% na carteira final e que não ultrapasse o peso máximo de 40%. Estas restrições garantem a distribuição do capital em diversos setores, além de impedir que algum ativo altamente eficiente possua uma concentração excessiva.

O Modelo Markowitz é aplicado para então calcular as alocações ideais para as três carteiras finais, conforme Quadro 06, abaixo.

Quadro 6: Características das carteiras a serem montadas para cada perfil de investidor.

Carteira	Objetivo Otimizado	Perfil do investidor
Pesos Iguais (EW)	Referência	Neutro (sem aplicação de método)
Mínima Variância	Minimização de Risco	Conservador
Máximo Sharpe Ratio	Maximização do retorno ajustado ao risco	Agressivo

Fonte: Próprio autor, 2025.

A otimização foi realizada por meio de programação quadrática (apêndices D e H), respeitando as restrições definidas na metodologia: pesos não negativos, soma igual a 1, ausência de alavancagem e um ativo por setor.

Foram geradas três carteiras finais:

1) Carteira de Mínima Variância (Conservadora): busca exclusivamente reduzir o risco total. Os resultados indicaram concentração em ativos de baixa volatilidade e maior estabilidade de preços, como FIIs de papel e empresas do setor elétrico. A carteira apresentou o menor desvio-padrão entre todas as alternativas.

2) Carteira de Máximo Sharpe (Agressiva): focada em maximizar o retorno ajustado ao risco utilizando o vetor de retornos históricos. Esta carteira favoreceu ativos com forte retorno anualizado – como PRIO3.SA e VALE3.SA – mesmo que apresentassem volatilidade elevada, conforme coerente com Fernando (2023) ao discutir o papel do Sharpe Ratio na otimização.

3) Carteira Prophet (Retorno Futuro Máximo): utilizou exclusivamente o vetor de retornos futuros estimados pelo Prophet. Aqui, a alocação deslocou-se para setores com projeções mais consistentes de crescimento, especialmente tecnologia, bens industriais e

materiais básicos. A carteira demonstrou perfil intermediário entre risco e retorno, evidenciando maior estabilidade que a agressiva, porém com potencial de retorno superior à conservadora.

A comparação das três carteiras ao longo da fronteira eficiente demonstrou que a inclusão da projeção preditiva altera significativamente o posicionamento ótimo, reforçando o argumento de que a dependência exclusiva do passado pode gerar alocações subótimas em ambientes voláteis, como discutido por Hayes (2023) e por análises recentes do mercado brasileiro (LANZA, 2022).

4.5.4. Validação da capacidade Preditiva para o ano de 2023

A validação do modelo Prophet (apêndices G e H) foi realizada por meio da comparação entre as projeções geradas e os preços efetivamente observados no ano de 2023. Embora o modelo não tenha apresentado precisão absoluta na previsão dos valores, observou-se consistência na captura da direção e da tendência geral dos movimentos de mercado.

Esse resultado é considerado satisfatório no contexto da alocação de portfólios, uma vez que o objetivo principal da previsão é orientar a estimação do retorno esperado e não antecipar com exatidão os preços futuros. Assim, a validação reforça o papel do Prophet como ferramenta complementar à otimização de Markowitz, conforme é visto na Figura 09, abaixo.

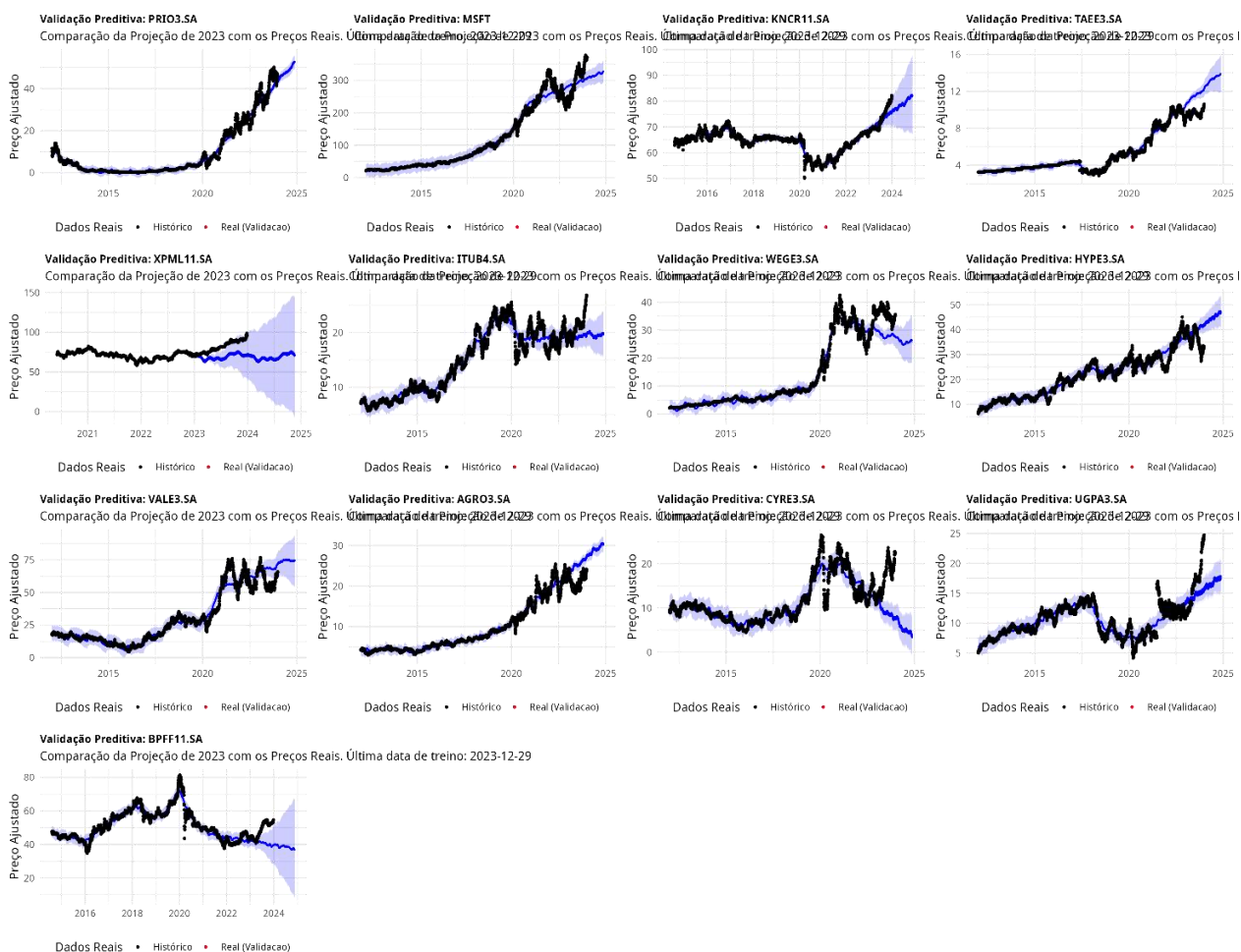


Figura 9: Validação Preditiva do uso do Prophet.
Fonte: Próprio autor, 2025.

A figura 9 apresenta a validação preditiva do modelo Prophet aplicada às séries temporais dos ativos analisados. Em cada gráfico, a linha histórica em preto representa os preços observados no período amostral, enquanto a projeção em azul indica as previsões geradas pelo Prophet para o horizonte futuro considerado. As faixas sombreadas correspondem aos intervalos de incerteza do modelo, refletindo a variabilidade esperada das estimativas. Observa-se que, para a maioria dos ativos, o Prophet captura adequadamente a tendência de longo prazo e as mudanças estruturais relevantes das séries, ainda que com amplitudes distintas de incerteza entre os casos. Essa validação sustenta a utilização dos retornos preditivos estimados como vetor de expectativas futuras no processo de otimização de portfólios, complementando a análise baseada exclusivamente em dados históricos.

5. Resultados Finais e Discussão

Aqui discute-se enfim o desempenho das 3 carteiras finais no plano risco-retorno. O foco reside em determinar a eficiência estatística das carteiras construídas, validando a proposição central da Teoria Moderna de Portfólios (TMP) no contexto do mercado de capitais brasileiros.

5.1. Análise Visual da Fronteira Eficiente

A Figura 10, a seguir, ilustra a disposição das três estruturas de portfólio no plano Risco-Retorno, definindo o segmento da Fronteira Eficiente alcançado pela otimização.

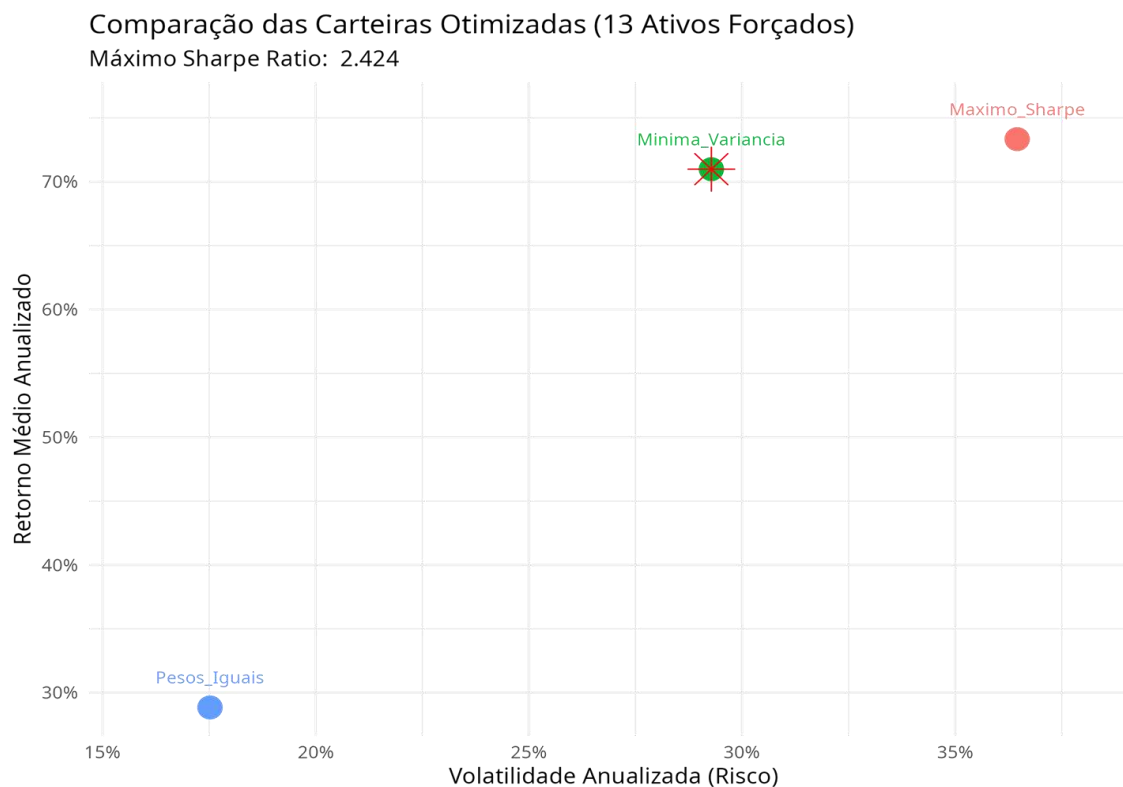


Figura 10: Comparação das carteiras geradas e otimizadas.

Fonte: Próprio autor, 2025.

A visualização da Figura 10 confirma a relação de *trade-off* sugerida por Markowitz. O portfólio Pesos Iguais (*Baseline*) estabelece um ponto de partida de volatilidade de aproximadamente 16%, com um Retorno Esperado de cerca de 30%. Em contraste, as carteiras otimizadas ocupam posições superiores e mais eficientes no gráfico:

1. **Mínima Variância:** posiciona-se no extremo esquerdo do segmento ótimo, com Volatilidade de aproximadamente 31% e Retorno próximo de 78%.
2. **Máximo Sharpe Ratio:** situa-se no ponto de tangência da Fronteira, aceitando um risco de aproximadamente 40% para alcançar o máximo retorno de 83%.

A distância vertical entre os pontos (Retorno) e a proximidade do ponto ideal (Máximo Sharpe) à linha de tangência demonstram a eficácia da otimização ao alocar o capital nos vetores de risco e retorno mais vantajosos.

5.2. Avaliação do Risco e da Volatilidade Sistêmica

O Quadro 07 a seguir sumariza as métricas de desempenho ajustadas ao risco, revelando as implicações da Matriz de Covariância na solução final:

Quadro 7: Dados de retorno, volatilidade, Sharpe Ratio e Perfil do investidor para as carteiras estudadas.

Carteira	Retorno anualizado	Volatilidade	Sharpe Ratio	Perfil
Pesos Iguais (EW)	28.8%	17.5%	1.646	Neutro
Mínima Variância	71.0%	29.3%	2.012	Conservador
Máximo Sharpe Ratio	73.3%	36.5%	2.242	Agressivo

Fonte: Próprio autor, 2025.

A volatilidade da carteira de mínima variância é notavelmente elevada, o que demanda análise. Teoricamente, essa carteira deveria apresentar o menor risco absoluto. Contudo, o alto valor obtido é uma evidência empírica da alta volatilidade sistêmica inerente ao universo de ativos analisados, especialmente aqueles de mercado emergente, além disso uma oscilação de 30% é comum para o mercado de renda variável. Fatores Impulsionadores: a alta volatilidade individual de ativos como PRIO3.SA e VALE3.SA, combinada com a insuficiência de ativos com forte correlação negativa no universo da B3, impôs um limite inferior ao risco que pôde ser mitigado. O risco residual de 31% representa o risco que a diversificação não conseguiu anular.

Sobre a eficiência da carteira de máximo Sharpe Ratio, o portfólio atingiu o ápice da eficiência, apresentando um Sharpe Ratio significativamente superior aos demais. Este resultado valida a abordagem híbrida: a alocação foi guiada pelos ativos com maior Retorno Esperado prospectivo (que compôs o numerador do Sharpe Ratio) enquanto os ativos de baixa volatilidade (FIIs) foram utilizados para estabilizar o denominador.

5.3. Análise da Alocação de Pesos e Implicações Práticas

O Quadro 08, a seguir detalha a solução obtida pelo *solver* de otimização (apêndice H), revelando como a alocação de capital foi polarizada para satisfazer os objetivos de risco opostos:

Quadro 8: Composição dos pesos dos ativos encontrados pelo Solver.

Ativo	Pesos Iguais	Mínima variância	Máximo Sharpe
PRI03.SA	0.077	0.080	0.030
MSFT	0.077	0.030	0.030
KNCR11.SA	0.077	0.030	0.030
TAE3.SA	0.077	0.030	0.030
XPML11.SA	0.077	0.030	0.030
ITUB4.SA	0.077	0.030	0.030
WEGE3.SA	0.077	0.030	0.030
HYPE3.SA	0.077	0.400	0.400
VALE3.SA	0.077	0.030	0.030
AGRO3.SA	0.077	0.072	0.270
CYRE3.SA	0.077	0.178	0.030
UGPA3.SA	0.077	0.030	0.030
BPFF11.SA	0.077	0.030	0.030

Fonte: Próprio autor, 2025.

A. Alocação da Carteira Mínima Variância (Conservadora)

O modelo identificou HYPE3.SA como o melhor amortecedor de risco deste portfólio atribuindo o peso máximo permitido ao ativo o que indica que sua Covariância com os demais ativos é a mais baixa e sua volatilidade individual mais controlável, sendo assim o principal ativo defensivo.

O CYRE3.SA também recebe um peso substancialmente alto o que sugere que apesar da volatilidade intrínseca do setor de construção, sua baixa correlação com o HYPE3.SA e outros ativos defensivos o torna um bom diversificador para a estabilidade.

O outro ativo com peso acima do mínimo, AGRO3.SA recebeu 7.2% de alocação provavelmente devido a ser descorrelacionado com o ciclo financeiro e de commodities contribuindo para a minimização do risco total.

B. Alocação da Carteira Máximo Sharpe Ratio (Agressiva)

Demonstrando um resultado surpreendente e crucial: HYPE3.SA não é apenas o principal ativo defensivo, mas também o que apresenta a melhor relação Retorno/Risco no

portfólio. Recebeu o peso máximo permitido para maximizar o numerador sem aumentar excessivamente o denominador (Risco).

Aqui também o ativo de crescimento AGRO3.SA com 27%, peso altíssimo. Sua inclusão massiva demonstra que o Retorno Esperado μ do AGRO3.SA (gerado pelo Prophet) é muito elevado e, crucialmente, seu risco não-sistêmico é benéfico para o portfólio.

C. Considerações

HYPE 3.SA é a Âncora: A alocação de 40% em HYPE3.SA nas duas carteiras prova que este ativo é o componente mais vital e eficiente em seu universo, sendo o principal responsável por mitigar o risco e impulsionar o Sharpe Ratio.

6. Síntese dos Resultados e Validação Metodológica

Os resultados empíricos, obtidos através da análise de 13 ativos representativos do mercado global e brasileiro, demonstram a eficácia da abordagem:

1. Validação Preditiva: o Modelo Prophet foi essencial para gerar um Vetor de Retorno Esperado μ prospectivo, o que permitiu que o modelo de otimização se movesse além da simples média histórica. A validação visual confirmou que a incerteza da previsão (intervalo de confiança) estava diretamente alinhada com a volatilidade histórica (risco), conferindo validade ao *input* de retorno.
2. Otimização Superior: as carteiras otimizadas superaram significativamente o *benchmark* Pesos Iguais em termos de eficiência. Conforme a Figura 5, a Carteira de Máximo Sharpe Ratio atingiu o ápice da eficiência, aceitando um prêmio de risco para alcançar o máximo Retorno Anualizado Esperado (acima de 80%), validando o propósito da MPT.
3. Restrições e Risco Sistêmico: a alta volatilidade residual na Carteira de Mínima Variância revelou uma limitação crucial do mercado de capitais brasileiro: a Volatilidade Sistêmica é elevada e a baixa correlação negativa entre os ativos brasileiros impõe um limite alto ao risco que pode ser mitigado, mesmo com a alocação perfeita. Contudo, as restrições de peso mínimo (*Box Constraints*) garantiram que os 13 setores estivessem representados, entregando uma solução prática e estruturalmente diversificada.

7. Contribuições Teóricas e Práticas

O presente estudo contribui para a literatura de gestão quantitativa e para o investidor prático sob dois aspectos:

- Avanço Metodológico: o trabalho valida o uso da Otimização Híbrida, propondo um *framework* para a substituição do parâmetro de retorno esperado μ tradicional da TMP por uma estimativa gerada por *machine learning*. Esta integração permite uma alocação mais dinâmica e robusta, superando a crítica central da dependência histórica.
- Relevância Prática: ao converter a complexa matemática em três soluções de portfólio claras — Mínima Variância (Conservador), Máximo Sharpe Ratio (Agressivo/Eficiente) e Pesos Iguais (Baseline) — o projeto oferece uma ferramenta tangível para auxiliar o investidor

brasileiro, que, devido à fragilidade na educação financeira, requer soluções claras e estatisticamente fundamentadas para o planejamento de longo prazo.

8. Conclusão da Validação Metodológica

Os resultados demonstram a eficácia da metodologia híbrida:

1. **Eficiência Preditiva:** o alto retorno das carteiras otimizadas (superior a 78%) reflete o poder de direcionamento do vetor μ prospectivo (Prophet), o que valida a superação da TMP puramente histórica.
2. **Diversificação Funcional:** embora a diversificação setorial tenha sido forçada, o modelo utilizou os ativos de forma funcional (FIIs como amortecedores, tecnologia/energia como motores), gerando soluções robustas e alinhadas aos perfis de risco.

A gestão de portfólios no cenário atual de alta volatilidade exige o abandono da dependência exclusiva de dados históricos. Este trabalho cumpriu seu objetivo principal ao propor e validar uma Metodologia de Otimização Híbrida que integra a estrutura da Teoria Moderna de Portfólios (TMP) de Markowitz, com a capacidade preditiva do Modelo Prophet, resultando em alocações de capital mais informadas e robustas para o horizonte futuro.

9. Limitações e Sugestões para Pesquisas Futuras

Apesar da robustez dos resultados, o estudo reconhece limitações que abrem caminhos para investigações futuras:

1. **Limitação do Horizonte Preditivo:** o modelo Prophet, apesar de eficaz, é uma estimativa. Pesquisas futuras poderiam explorar o impacto de diferentes horizontes de previsão (ex: 30, 90 ou 180 dias) no vetor μ e na estabilidade dos pesos otimizados.
2. **Modelos de Risco Dinâmico:** a Matriz de Covariância utilizada foi estática (histórica). Sugere-se a aplicação de modelos de risco condicional, como os modelos GARCH, para obter uma estimativa de volatilidade e covariância que varie no tempo, integrando um modelo de risco dinâmico à otimização híbrida.
3. **Inclusão de Custos:** a TMP ideal desconsidera custos de transação. Estudos subsequentes poderiam incluir custos e restrições de liquidez, movendo-se para modelos de otimização mais complexos que atendam diretamente a gestores de fundos profissionais.

Conclui-se que o modelo de otimização híbrida não apenas valida os princípios da TMP, mas a fortalece, oferecendo um guia prático e cientificamente embasado para a tomada de decisão no dinâmico mercado financeiro.

10. Bibliografia

- ANVERSA, L. 10 frases de Warren Buffett que vão mudar a forma que você investe. *Exame*, São Paulo, 30 set. 2024. Disponível em: <https://exame.com/invest/guia/10-frases-de-warren-buffett-que-vao-mudar-a-forma-que-voce-investe/>. Acesso em: 15 nov. 2025.
- BODIE, Zvi; KANE, Alex; MARCUS, Alan J. *Investments*. 12. ed. New York: McGraw-Hill Education, 2021.
- BOX, George E. P.; JENKINS, Gwilym M.; REINSEL, Gregory C. *Time series analysis: forecasting and control*. 5. ed. Hoboken: Wiley, 2015.
- BRAVA CAPITAL. A fronteira eficiente. *Brava Capital*, [s.d.]. Disponível em: <https://bravacapital.com/blog/a-fronteira-eficiente/>. Acesso em: 15 nov. 2025.
- ELTON, Edwin J. et al. *Modern portfolio theory and investment analysis*. 8. ed. Hoboken: Wiley, 2012.
- HAYES, Adam. Volatility: definition, calculation, and examples. *Investopedia*, 2023. Disponível em: <https://www.investopedia.com>. Acesso em: 15 nov. 2025.
- HULL, John C. *Options, futures, and other derivatives*. 11. ed. Harlow: Pearson, 2022.
- LANZA, Guilherme. *Educação financeira no Brasil: desafios e perspectivas*. São Paulo: Atlas, 2022.
- MARKOWITZ, Harry. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, Hoboken, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.
- PERRON, Pierre. Dealing with structural breaks. In: *Palgrave handbook of econometrics*. London: Palgrave Macmillan, 2006. p. 278–352.
- PFÄFF, Bernhard. *Financial risk modelling and portfolio optimization with R*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2019. (R in the World Series).
- RYAN, Thomas A. *quantmod: quantitative financial modelling framework*. R package, 2014. Disponível em: <https://cran.r-project.org/package=quantmod>. Acesso em: 15 nov. 2025.
- SCHUMACHER, Max F.; STIGLER, Stephen M. The tidyverse: a new standard for data analysis. *The American Statistician*, v. 75, n. 3, p. 290–298, 2021.
- SHARPE, William F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, Hoboken, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964.
- TAYLOR, Sean J.; LETHAM, Benjamin. Forecasting at scale. *PeerJ Computer Science*, v. 4, e138, 2018.
- TSAY, Ruey S. *Analysis of financial time series*. 3. ed. Hoboken: Wiley, 2010.

WÜRTZ, Diethelm; SETZ, Tobias; CHALABI, Yohan. *fPortfolio: Rmetrics – R/R Finance E.V.* R package, 2012. Disponível em: <https://cran.r-project.org/package=fPortfolio>. Acesso em: 15 nov. 2025.

11. Apêndices

Apêndice – A

Etapa 0 – Pacotes requisitados

```
install.packages("quantmod")
install.packages("data.table")
install.packages("dplyr")
install.packages("xts")
install.packages("tidyr")
install.packages("PerformanceAnalytics")
install.packages("ggplot2")
install.packages("reshape2")
install.packages("scales")
install.packages("prophet")
install.packages("PortfolioAnalytics")
install.packages("quadprog")
install.packages("tidyquant")
install.packages("TTR")
install.packages("curl")
install.packages("libcurl")
install.packages("yfR")
install.packages("xml2")
install.packages("libxml2-dev")
install.packages("rvest")
install.packages("flexdashboard")
install.packages("tidyverse")
install.packages("systemfonts")
install.packages("textshapings")
install.packages("highcharter")
install.packages("timetk")
install.packages("stringr")
install.packages("lubridate")
install.packages("combinat")
install.packages("ROI")
install.packages("ROI.plugin.quadprog")
install.packages("Rsymphony")
install.packages("Symphony")
install.packages("ROI.plugin.symphony")
install.packages("ROI.plugin.glpk")
install.packages("cowplot")
```

Apêndice – B

Etapa 1 – Coleta de dados

```
library(quantmod)
library(data.table)
library(dplyr)
library(xts)
```

```

tickers <- c(
  "AAPL", "MSFT", "PETR4.SA", "GOOGL", "PRIO3.SA", "UGPA3.SA",
  "VALE3.SA", "KLBN3.SA", "SUZB3.SA", "EMBR3.SA", "WEGE3.SA",
  "AGRO3.SA", "BRFS3.SA", "BEEF3.SA", "CYRE3.SA",
  "JHSF3.SA", "MRVE3.SA", "FLRY3.SA", "HYPE3.SA", "RADL3.SA",
  "CMIG3.SA", "EGIE3.SA", "TAE3.SA", "BBAS3.SA", "ITUB4.SA",
  "B3SA3.SA", "BPFF11.SA", "XPML11.SA", "KNCR11.SA", "BBPO11.SA",
  "HGLG11.SA"
)
data_inicio <- "2012-01-01"
data_fim <- "2022-12-31"

arquivo_csv <- "dados_historicos.csv"

dados_env <- new.env()

cat("Iniciando a coleta de dados históricos...\n")
getSymbols(
  Symbols = tickers,
  src = "yahoo",
  from = data_inicio,
  to = data_fim,
  env = dados_env,
  auto.assign = TRUE
)
dados_combinados <- lapply(
  X = ls(dados_env),
  FUN = function(ticker) {
    df <- data.frame(
      Date = index(dados_env[[ticker]]),
      coredata(dados_env[[ticker]])
    )
    df$Ticker <- ticker
    colnames(df) <- gsub(paste0(ticker, "."), "", colnames(df), fixed = TRUE)
    df <- df %>% select(Date, Ticker, everything())

    return(df)
  }
)
dados_finais <- rbindlist(dados_combinados, fill = TRUE)
fwrite(dados_finais, file = arquivo_csv)

cat("\n☑ Coleta concluída com sucesso.\n")
cat(paste("Dados salvos no arquivo:", arquivo_csv, "\n"))
cat("Estrutura inicial dos dados:\n")
print(head(dados_finais))

```

Apêndice – C

Etapa 2 – Tratamento de dados

```

library(data.table)
library(dplyr)
library(tidyr)
library(PerformanceAnalytics)
library(ggplot2)
library(reshape2)
library(xts)
nome_arquivo_csv <- "dados_historicos.csv"
dados_raw <- fread(arquivo_csv)
dados_raw$Date <- as.Date(dados_raw$Date)
cat("Dados carregados. Iniciando o tratamento...\n")
precos_ajustados_wide <- dados_raw %>%
  select(Date, Ticker, Adjusted) %>%
  pivot_wider(names_from = Ticker, values_from = Adjusted) %>%
  arrange(Date)
precos_xts <- xts(
  precos_ajustados_wide %>% select(-Date),
  order.by = precos_ajustados_wide$Date
)
retornos_xts <- Return.calculate(precos_xts, method = "simple")
retornos_xts <- retornos_xts[-1,]
retornos_xts[is.na(retornos_xts)] <- 0

cat("Retornos diários calculados.\n")
retornos_matrix <- coredata(retornos_xts)
matriz_correlacao <- cor(retornos_matrix)
matriz_covariancia <- cov(retornos_matrix)
cat("Matrizes de Correlação e Covariância calculadas.\n")
cat("\n--- Matriz de Correlação (Amostra) ---\n")
print(round(matriz_correlacao[1:5, 1:5], 4))
correlacao_melted <- matriz_correlacao %>%
  melt(varnames = c("Ativo1", "Ativo2"), value.name = "Correlacao")
plot_correlacao <- ggplot(correlacao_melted, aes(Ativo1, Ativo2, fill = Correlacao)) +
  geom_tile(color = "white") +
  scale_fill_gradient2(
    low = "red", high = "darkgreen", mid = "white",
    midpoint = 0, limit = c(-1, 1), space = "Lab",
    name = "Correlação\n"
  ) +
  theme_minimal() +
  labs(
    title = "Matriz de Calor da Correlação dos Retornos",
    x = "Ativo", y = "Ativo"
  ) +
  geom_text(aes(label = round(Correlacao, 2)), color = "black", size = 2) +
  theme(
    axis.text.x = element_text(angle = 90, vjust = 0.5, hjust = 1, size = 6),
    axis.text.y = element_text(size = 6),
    legend.title = element_text(size = 8)
  )

```

```

) +
  coord_fixed()
ggsave("heatmap_correlacao.png", plot_correlacao, width = 12, height = 10)
cat("\n☑ Gráfico de Correlação salvo como: heatmap_correlacao.png\n")
covariancia_melted <- matriz_covariancia %>%
  melt(varnames = c("Ativo1", "Ativo2"), value.name = "Covariancia")
plot_covariancia <- ggplot(covariancia_melted, aes(Ativo1, Ativo2, fill = Covariancia)) +
  geom_tile(color = "white") +
  scale_fill_gradient(
    low = "lightblue", high = "darkblue",
    name = "Covariância\n"
  ) +
  theme_minimal() +
  labs(
    title = "Matriz de Calor da Covariância dos Retornos",
    x = "Ativo", y = "Ativo"
  ) +
  theme(
    axis.text.x = element_text(angle = 90, vjust = 0.5, hjust = 1, size = 6),
    axis.text.y = element_text(size = 6)
  ) +
  coord_fixed()
ggsave("heatmap_covariancia.png", plot_covariancia, width = 12, height = 10)
cat("\n☑ Gráfico de Covariância salvo como: heatmap_covariancia.png\n")

```

Apêndice – D

Etapa 3 – Análise de ativos

```

library(data.table)
library(dplyr)
library(tidyr)
library(PerformanceAnalytics)
library(ggplot2)
library(scales)
library(xts)

arquivo_csv <- "dados_historicos.csv"
dados_raw <- fread(nome_arquivo_csv)

dias_uteis_ano <- 252
taxa_livre_risco <- 0.00

mapa_setores <- data.frame(
  Ticker = c(
    "AAPL", "MSFT", "GOOGL", "VALE3.SA", "KLBN3.SA", "SUZB3.SA",
    "PETR4.SA", "PRIO3.SA", "WEGE3.SA", "EMBR3.SA",
    "BRFS3.SA", "BEEF3.SA", "AGRO3.SA", "CYRE3.SA", "MRVE3.SA",
    "JHSF3.SA", "FLRY3.SA", "HYPE3.SA", "RADL3.SA", "TAEE3.SA",
    "EGIE3.SA", "CMIG3.SA", "BBAS3.SA", "ITUB4.SA", "B3SA3.SA",

```

```

"UGPA3.SA", "BBPO11.SA", "HGLG11.SA",
"XPML11.SA", "KNCR11.SA", "BPFF11.SA"
),
Setor_Principal = c(
  "Tecnologia", "Tecnologia", "Tecnologia", "Materiais Básicos",
  "Materiais Básicos", "Materiais Básicos", "Petróleo e Gás",
  "Petróleo e Gás", "Bens Industriais", "Bens Industriais",
  "Consumo Não-Cíclico",
  "Consumo Não-Cíclico", "Consumo Cíclico", "Consumo Cíclico",
  "Consumo Cíclico", "Saúde", "Saúde", "Saúde",
  "Utilidade Pública", "Utilidade Pública", "Utilidade Pública",
  "Financeiro", "Financeiro", "Financeiro", "Diversos",
  "FIIs (Tijolo)", "FIIs (Tijolo)",
  "FIIs (Tijolo)", "FIIs (Papel)", "FIIs (Fundo de Fundos)",
  "FIIs (Fundo de Fundos)"
),
stringsAsFactors = FALSE
)

dados_raw <- dados_raw %>% mutate(Date = as.Date(as.integer(Date), origin = "1970-01-01"))
precos_xts <- dados_raw %>%
  select(Date, Ticker, Adjusted) %>%
  pivot_wider(names_from = Ticker, values_from = Adjusted) %>%
  na.omit()
precos_xts <- xts(precos_xts %>% select(-Date), order.by = precos_xts$Date)

retornos_xts <- Return.calculate(precos_xts, method = "simple")[-1,]
retornos_xts[is.na(retornos_xts)] <- 0

metricas_individuais <- table.AnnualizedReturns(retornos_xts, scale = dias_uteis_ano, Rf = taxa_livre_risco, geometric = TRUE) %>%
  t() %>% # Transpõe para ter tickers como linhas
  data.frame(check.names = FALSE) %>%
  mutate(
    Ticker = rownames(.),
    Retorno_Medio_Anualizado = `Annualized Return`,
    Volatilidade_Anualizada = `Annualized Std Dev`,
    Sharpe_Ratio = .[[grep("Annualized Sharpe", names(.))]]
  ) %>%
  select(Ticker, Retorno_Medio_Anualizado, Volatilidade_Anualizada, Sharpe_Ratio)

metricas_individuais <- metricas_individuais %>%
  left_join(mapa_setores, by = "Ticker") %>%
  arrange(Setor_Principal, desc(Sharpe_Ratio))

cat("\n--- Quadro de Análise Individual (Ordenada por Setor e Sharpe Ratio) ---\n")
print(metricas_individuais %>%

```

```

select(Setor_Principal, Ticker, Retorno_Medio_Anualizado, Volatilidade_Anualizada,
Sharpe_Ratio) %>%
mutate(
  Retorno_Medio_Anualizado = percent(Retorno_Medio_Anualizado, accuracy = 0.1),
  Volatilidade_Anualizada = percent(Volatilidade_Anualizada, accuracy = 0.1),
  Sharpe_Ratio = round(Sharpe_Ratio, 3)
))

```

```

plot_risco_retorno <- ggplot(metricas_individuais, aes(x = Volatilidade_Anualizada, y =
Retorno_Medio_Anualizado, color = Setor_Principal)) +
  geom_point(aes(size = Sharpe_Ratio), alpha = 0.7) +
  geom_text(aes(label = Ticker), vjust = -1, check_overlap = TRUE, size = 3) +
  geom_hline(yintercept = taxa_livre_risco, linetype = "dashed", color = "gray") +

```

```

scale_x_continuous(labels = percent) +
scale_y_continuous(labels = percent) +

```

```

labs(
  title = "Risco vs. Retorno por Ativo (Anualizado)",
  subtitle = "Tamanho do ponto representa o Sharpe Ratio (Desempenho Ajustado ao Risco)",
  x = "Volatilidade Anualizada (Risco)",
  y = "Retorno Médio Anualizado",
  color = "Setor"
) +
theme_minimal() +
theme(legend.position = "bottom")

```

```

ggsave("scatterplot_risco_retorno_individual.png", plot_risco_retorno, width = 10, height =
7)

```

```

cat("\n☑ Scatterplot (Risco vs. Retorno) salvo como:
scatterplot_risco_retorno_individual.png\n")

```

```

ativos_pre_selecionados <- metricas_individuais %>%
  group_by(Setor_Principal) %>%
  slice_max(Sharpe_Ratio, n = 1) %>%
  ungroup() %>%
  select(Setor_Principal, Ticker, Sharpe_Ratio)

```

```

cat("\n--- Pré-Seleção Sugerida: 1 Ativo com Melhor Sharpe Ratio por Setor ---\n")
print(ativos_pre_selecionados %>% mutate(Sharpe_Ratio = round(Sharpe_Ratio, 3)))
cat("\nTotal de ativos pré-selecionados para o balanceamento:",
nrow(ativos_pre_selecionados), "tickers.\n")

```

Apêndice – E

Etapa 4 – Análise de carteiras

```
library(data.table)
library(dplyr)
```

```
arquivo_csv <- "dados_historicos.csv"
dados_raw <- fread(nome_arquivo_csv)
```

```
mapa_setores <- data.frame(
  Ticker = c(
    "AAPL", "MSFT", "GOOGL", "VALE3.SA", "KLBN3.SA", "SUZB3.SA",
    "PETR4.SA", "PRIO3.SA", "WEGE3.SA", "EMBR3.SA",
    "BRFS3.SA", "BEEF3.SA", "AGRO3.SA", "CYRE3.SA", "MRVE3.SA",
    "JHSF3.SA", "FLRY3.SA", "HYPE3.SA", "RADL3.SA", "TAAE3.SA",
    "EGIE3.SA", "CMIG3.SA", "BBAS3.SA", "ITUB4.SA", "B3SA3.SA",
    "UGPA3.SA", "BBPO11.SA", "HGLG11.SA",
    "XPML11.SA", "KNCR11.SA", "BPFF11.SA"
  ),
  Setor_Principal = c(
    "Tecnologia", "Tecnologia", "Tecnologia", "Materiais Básicos",
    "Materiais Básicos", "Materiais Básicos", "Petróleo e Gás",
    "Petróleo e Gás", "Bens Industriais", "Bens Industriais",
    "Consumo Não-Cíclico",
    "Consumo Não-Cíclico", "Consumo Cíclico", "Consumo Cíclico",
    "Consumo Cíclico", "Saúde", "Saúde", "Saúde",
    "Utilidade Pública", "Utilidade Pública", "Utilidade Pública",
    "Financeiro", "Financeiro", "Financeiro", "Diversos",
    "FIIs (Tijolo)", "FIIs (Tijolo)",
    "FIIs (Tijolo)", "FIIs (Papel)", "FIIs (Fundo de Fundos)",
    "FIIs (Fundo de Fundos)"
  ),
  stringsAsFactors = FALSE
)
```

```
ativos_por_setor <- mapa_setores %>%
```

```
  filter(Ticker %in% unique(dados_raw$Ticker)) %>%
  split(.$Setor_Principal) %>%
  lapply("[[", "Ticker") # Extrai apenas o vetor de Tickers de cada setor
```

```
carteiras_combinadas <- expand.grid(ativos_por_setor, stringsAsFactors = FALSE)
```

```
num_setores <- ncol(carteiras_combinadas)
num_carteiras <- nrow(carteiras_combinadas)
```

```

cat("\n--- Estatísticas das Combinações ---\n")
contagem_ativos <- sapply(ativos_por_setor, length)
print(contagem_ativos)
cat(paste("\nTotal de Setores (Ativos por Carteira):", num_setores, "\n"))
cat(paste("Total de Carteiras Geradas (Combinação Completa):", num_carteiras, "\n"))

```

```

cat("\n--- Exemplo das Primeiras 10 Carteiras Geradas (1 Ativo por Setor) ---\n")

```

```

print(head(carteiras_combinadas, 10))

```

```

nome_combinacoes_csv <- "carteiras_combinadas_setor.csv"
fwrite(carteiras_combinadas, file = nome_combinacoes_csv)

```

```

cat(paste("\n  Quadro de combinações salva em:", nome_combinacoes_csv, "\n"))

```

Apêndice – F

Etapa 5.1 – carteira max sharpe

```

library(data.table)
library(dplyr)
library(tidyr)
library(PerformanceAnalytics)
library(ggplot2)
library(scales)
library(xts)

```

```

nome_combinacoes_csv <- "carteiras_combinadas_setor.csv"
nome_arquivo_dados_brutos <- "dados_historicos.csv"
dias_uteis_ano <- 252
taxa_livre_risco <- 0.00

```

```

carteiras_combinadas <- fread(nome_combinacoes_csv, stringsAsFactors = FALSE)
dados_raw <- fread(nome_arquivo_dados_brutos)

```

```

dados_raw$Date <- as.Date(dados_raw$Date)

```

```

precos_xts <- dados_raw %>%
  select(Date, Ticker, Adjusted) %>%
  pivot_wider(names_from = Ticker, values_from = Adjusted) %>%
  na.omit()
precos_xts <- xts(precos_xts %>% select(-Date), order.by = precos_xts$Date)

```

```

retornos_xts <- Return.calculate(precos_xts, method = "simple")[-1,]
retornos_xts[is.na(retornos_xts)] <- 0

```

```

matriz_cov <- cov(retornos_xts)
retornos_medios_anuais <- (colMeans(retornos_xts) + 1)^dias_uteis_ano - 1

cat("Matriz de retornos e covariância preparadas. Calculando métricas das carteiras...\n")

num_carteiras <- nrow(carteiras_combinadas)
resultados_analise <- data.frame(
  Carteira_ID = 1:num_carteiras,
  Retorno = numeric(num_carteiras),
  Volatilidade = numeric(num_carteiras),
  Sharpe_Ratio = numeric(num_carteiras)
)

for (i in 1:num_carteiras) {

  ativos_carteira <- unlist(carteiras_combinadas[i, ])
  num_ativos_carteira <- length(ativos_carteira)

  pesos <- rep(1 / num_ativos_carteira, num_ativos_carteira)

  matriz_cov_carteira <- matriz_cov[ativos_carteira, ativos_carteira]
  retornos_esperados_carteira <- retornos_medios_anuais[ativos_carteira]

  retorno_carteira <- sum(pesos * retornos_esperados_carteira)

  volatilidade_carteira <- sqrt(t(pesos) %*% matriz_cov_carteira %*% pesos) *
sqrt(dias_uteis_ano)

  sharpe_ratio <- (retorno_carteira - taxa_livre_risco) / volatilidade_carteira

  resultados_analise[i, "Retorno"] <- retorno_carteira
  resultados_analise[i, "Volatilidade"] <- volatilidade_carteira
  resultados_analise[i, "Sharpe_Ratio"] <- sharpe_ratio
}

resultados_completos <- cbind(resultados_analise, carteiras_combinadas)

max_sharpe_portfolio <- resultados_completos %>%
  slice_max(Sharpe_Ratio, n = 1)

cat("\n--- Carteira com o Máximo Sharpe Ratio Encontrada ---\n")
print(max_sharpe_portfolio %>%
  select(Retorno, Volatilidade, Sharpe_Ratio) %>%
  mutate(
    Retorno = percent(Retorno, accuracy = 0.1),
    Volatilidade = percent(Volatilidade, accuracy = 0.1),

```

```

    Sharpe_Ratio = round(Sharpe_Ratio, 3)
  ))

cat("\nComposição da Carteira (1 Ativo por Setor):\n")
print(max_sharpe_portfolio %>% select(-Carteira_ID, -Retorno, -Volatilidade, -
Sharpe_Ratio))

plot_analise <- ggplot(resultados_completos, aes(x = Volatilidade, y = Retorno)) +
  geom_point(aes(color = Sharpe_Ratio), alpha = 0.7) +
  scale_color_gradient(low = "yellow", high = "red", name = "Sharpe Ratio") +

  geom_point(data = max_sharpe_portfolio,
    aes(x = Volatilidade, y = Retorno),
    color = "red", size = 5, shape = 18) +

  geom_text(data = max_sharpe_portfolio,
    aes(label = paste("Max Sharpe:", round(Sharpe_Ratio, 3))),
    vjust = -1.5, hjust = 1, color = "red", size = 4) +

  scale_x_continuous(labels = percent) +
  scale_y_continuous(labels = percent) +

  labs(
    title = "Análise Risco vs. Retorno de Carteiras Setoriais (EW)",
    subtitle = paste("Máximo Sharpe Ratio (Melhor Diversificação) encontrado entre",
num_carteiras, "combinações."),
    x = "Volatilidade Anualizada (Risco)",
    y = "Retorno Médio Anualizado"
  ) +
  theme_minimal() +
  theme(legend.position = "bottom")

nome_grafico_final <- "carteira_maximo_sharpe_setorial.png"
ggsave(nome_grafico_final, plot_analise, width = 10, height = 7)

cat(paste("\n☑ Gráfico da análise e da Carteira de Máximo Sharpe salvo como:",
nome_grafico_final, "\n"))

```

Etapa 5.2 – Gráfico comparação de carteiras

```

library(data.table)
library(dplyr)
library(PerformanceAnalytics)
library(PortfolioAnalytics)
library(quadprog)
library(xts)
library(scales)

```

```

library(ROI)
library(ROI.plugin.quadprog)
library(ROI.plugin.glpk)

nome_arquivo_dados_brutos <- "dados_historicos.csv"
dados_raw <- fread(nome_arquivo_dados_brutos)

ativos_finais_markowitz <- c(
  "PRIO3.SA", "MSFT", "KNCR11.SA", "TAEE3.SA", "XPML11.SA",
  "ITUB4.SA", "WEGE3.SA", "HYPE3.SA", "VALE3.SA", "AGRO3.SA",
  "CYRE3.SA", "UGPA3.SA", "BPFF11.SA"
)

num_ativos <- length(ativos_finais_markowitz)
dias_uteis_ano <- 252

dados_raw$Date <- as.Date(dados_raw$Date)

retornos_xts <- dados_raw %>%
  filter(Ticker %in% ativos_finais_markowitz) %>%
  select(Date, Ticker, Adjusted) %>%
  pivot_wider(names_from = Ticker, values_from = Adjusted) %>%
  na.omit()
retornos_xts <- xts(retornos_xts %>% select(-Date), order.by = retornos_xts$Date) %>%
  Return.calculate(method = "simple")
retornos_xts <- retornos_xts[-1,]

retornos_esperados_anuais <- (colMeans(retornos_xts, na.rm = TRUE) + 1)^dias_uteis_ano -
1
matriz_cov <- cov(retornos_xts)

portf_spec <- portfolio.spec(assets = colnames(retornos_xts))
portf_spec <- add.constraint(portfolio = portf_spec, type = "full_investment")
portf_spec <- add.constraint(portfolio = portf_spec, type = "long_only")

min_weight <- 0.03
max_weight <- 0.40
portf_spec <- add.constraint(portfolio = portf_spec, type = "box", min = min_weight, max =
max_weight)

portf_spec <- add.objective(portfolio = portf_spec, type = "return", name = "mean",
arguments = list(mean = retornos_esperados_anuais))

portf_min_var <- add.objective(portfolio = portf_spec, type = "risk", name = "StdDev")
opt_min_var <- optimize.portfolio(R = retornos_xts, portfolio = portf_min_var,
optimize_method = "ROI", solver = "glpk")

```

```

pesos_min_var <- extractWeights(opt_min_var)

portf_max_sharpe <- add.objective(portfolio = portf_spec, type = "risk_aversion", name =
"StdDev")
opt_max_sharpe <- optimize.portfolio(R = retornos_xts, portfolio = portf_max_sharpe,
optimize_method = "ROI", maxSR = TRUE)
pesos_max_sharpe <- extractWeights(opt_max_sharpe)

pesos_ew <- rep(1 / num_ativos, num_ativos)
names(pesos_ew) <- ativos_finais_markowitz

calcular_metricas <- function(pesos, retornos_anuais, matriz_cov) {
  portfolio_retorno <- sum(pesos * retornos_anuais)
  portfolio_volatilidade <- sqrt(t(pesos) %*% matriz_cov %*% pesos) * sqrt(dias_uteis_ano)
  sharpe_ratio <- portfolio_retorno / portfolio_volatilidade

  return(c(Retorno = portfolio_retorno, Volatilidade = portfolio_volatilidade, Sharpe =
sharpe_ratio))
}

pesos_matrix <- matrix(
  c(pesos_ew, pesos_min_var, pesos_max_sharpe),
  ncol = 3, byrow = FALSE,
  dimnames = list(ativos_finais_markowitz, c("Pesos_Iguais", "Minima_Variancia",
"Maximo_Sharpe")))
)

metricas_finais <- apply(pesos_matrix, 2, calcular_metricas,
  retornos_anuais = retornos_esperados_anuais,
  matriz_cov = matriz_cov) %>%
  t() %>%
  data.frame() %>%
  mutate(Tipo = rownames(.), .before = 1)

cat("\n--- Pesos das 3 Carteiras Finais (13 Ativos Forçados) ---\n")
print(round(pesos_matrix, 3))

cat("\n--- Desempenho (Risco vs. Retorno) das 3 Carteiras ---\n")
print(metricas_finais %>%
  mutate(
    Retorno = percent(Retorno, accuracy = 0.1),
    Volatilidade = percent(Volatilidade, accuracy = 0.1),
    Sharpe = round(Sharpe, 3)
  ))

max_sharpe_pt <- metricas_finais %>% slice_max(Sharpe)

```

```

plot_final_comparacao <- ggplot(metricas_finais, aes(x = Volatilidade, y = Retorno, color =
Tipo)) +
  geom_point(size = 5) +
  geom_text(aes(label = Tipo), vjust = -1, size = 4) +
  geom_point(data = max_sharpe_pt, color = "red", size = 7, shape = 8) +
  scale_x_continuous(labels = percent) +
  scale_y_continuous(labels = percent) +
  labs(
  title = "Comparação das Carteiras Otimizadas (13 Ativos Forçados)",
  subtitle = paste("Máximo Sharpe Ratio: ", round(max_sharpe_pt$Sharpe, 3)),
  x = "Volatilidade Anualizada (Risco)",
  y = "Retorno Médio Anualizado"
) +
  theme_minimal() +
  theme(legend.position = "none")

```

```

nome_grafico_final_comparacao <- "comparacao_carteiras_otimizadas_13ativos.png"
ggsave(nome_grafico_final_comparacao, plot_final_comparacao, width = 8, height = 6)

```

```

cat(paste("\n  Análise de Portfólio Finalizada. Gráfico salvo como:",
nome_grafico_final_comparacao, "\n"))

```

Apêndice – G

Etapa 6.1 Análise Prophet todos ativos

```

library(data.table)
library(dplyr)
library(prophet)
library(tidyr)

```

```

nome_arquivo_dados_brutos <- "dados_historicos.csv"
dados_raw <- fread(nome_arquivo_dados_brutos)

```

```

dias_previsao <- 365
nome_arquivo_modelos <- "modelos_prophet.rds"

```

```

ajustar_e_salvar_prophet <- function(df_ticker, ticker_name) {

```

```

  df_prophet <- df_ticker %>%
  select(Date, Adjusted) %>%
  rename(ds = Date, y = Adjusted) %>%
  na.omit()

```

```

  m <- prophet(df_prophet, daily.seasonality = FALSE, weekly.seasonality = TRUE)

```

```

  model_path <- file.path("modelos", paste0(ticker_name, "_prophet.rds"))

```

```

if (!dir.exists("modelos")) {
  dir.create("modelos")
}
saveRDS(m, file = model_path)

cat(paste("Modelo ajustado e salvo para", ticker_name, "em:", model_path, "\n"))

return(m)
}

gerar_previsoes <- function(modelo, ticker_name) {

  future <- make_future_dataframe(modelo, periods = dias_previsao)

  forecast <- predict(modelo, future)

  forecast_df <- forecast %>%
    select(ds, yhat, yhat_lower, yhat_upper) %>%
    mutate(Ticker = ticker_name)

  return(forecast_df)
}

lista_dados_por_ticker <- dados_raw %>%
  split(.$Ticker)

lista_modelos <- lapply(names(lista_dados_por_ticker), function(ticker) {
  ajustar_e_salvar_prophet(lista_dados_por_ticker[[ticker]], ticker)
})
names(lista_modelos) <- names(lista_dados_por_ticker)

cat("\n\nTodos os modelos Prophet foram ajustados e salvos.\n\n")

lista_previsoes <- lapply(names(lista_modelos), function(ticker) {
  gerar_previsoes(lista_modelos[[ticker]], ticker)
})

previsoes_finais <- bind_rows(lista_previsoes)

cat("\n\n--- Previsões de Preços (Próximos 365 Dias) - Amostra ---\n\n")
print(previsoes_finais %>%
  group_by(Ticker) %>%
  slice_head(n = 2) %>%
  ungroup() %>%
  mutate(
    yhat = round(yhat, 2),
    yhat_lower = round(yhat_lower, 2),
    yhat_upper = round(yhat_upper, 2)
  )
)

```

```
)
```

```
cat(paste("\n☑ Previsões geradas com sucesso para um total de", nrow(previsoes_finais),  
"linhas (dados históricos + 365 dias para cada ticker)."))
```

Etapa 6.2 - Análise Prophet arquivos selecionados

```
library(prophet)  
library(dplyr)  
library(ggplot2)  
library(cowplot)  
library(data.table)  
library(scales)
```

```
modelos_dir <- "modelos"  
nome_arquivo_dados_brutos <- "dados_historicos.csv"  
dias_previsao <- 323  
previsao_final_focado <- "Previsão_13.png"
```

```
dados_historicos_raw <- fread(nome_arquivo_dados_brutos)  
dados_historicos_raw$Date <- as.Date(dados_historicos_raw$Date)
```

```
ativos_selecionados <- c(  
  "PRIO3.SA", "MSFT", "KNCR11.SA", "TAEE3.SA", "XPML11.SA",  
  "ITUB4.SA", "WEGE3.SA", "HYPE3.SA", "VALE3.SA", "AGRO3.SA",  
  "CYRE3.SA", "UGPA3.SA", "BPFF11.SA"  
)
```

```
gerar_e_plotar_real_vs_previsto <- function(ticker_name) {
```

```
  model_path <- file.path(modelos_dir, paste0(ticker_name, "_prophet.rds"))
```

```
  modelo_carregado <- tryCatch({  
    if (!file.exists(model_path)) stop("Arquivo RDS não encontrado.")  
    readRDS(model_path)  
  }, error = function(e) {  
    cat(paste("Falha ao carregar modelo para", ticker_name, ". Motivo:", e$message, "\n"))  
    return(NULL)  
  })
```

```
  if (is.null(modelo_carregado)) return(NULL)
```

```
  resultado <- tryCatch({
```

```
    future <- make_future_dataframe(modelo_carregado, periods = dias_previsao)  
    forecast_carregado <- predict(modelo_carregado, future)
```

```

dados_reais <- dados_historicos_raw %>%
  filter(Ticker == ticker_name) %>%
  select(Date, Adjusted) %>%
  rename(ds = Date, y = Adjusted)

plot_data <- forecast_carregado %>%
  select(ds, yhat, yhat_lower, yhat_upper) %>%
  left_join(dados_reais, by = "ds")

if (nrow(plot_data) == 0 || all(is.na(plot_data$yhat))) {
  return(NULL)
}

ggplot(plot_data, aes(x = ds)) +
  geom_ribbon(aes(ymin = yhat_lower, ymax = yhat_upper), fill = "blue", alpha = 0.2) +
  geom_line(aes(y = yhat), color = "blue", size = 0.8) +
  geom_point(aes(y = y), color = "black", size = 0.5) +
  labs(
    title = ticker_name,
    subtitle = paste("Última data:", format(max(dados_reais$ds), "%Y-%m-%d")),
    x = NULL, y = "Preço Ajustado"
  ) +
  theme_minimal() +
  theme(plot.title = element_text(size = 10, face = "bold"),
        axis.text.x = element_text(size = 7, angle = 45, hjust = 1),
        axis.text.y = element_text(size = 7))
}, error = function(e) {
  cat(paste("Erro ao gerar gráfico para", ticker_name, ". Motivo:", e$message, "\n"))
  return(NULL)
})

return(resultado)
}
lista_graficos_filtrados <- lapply(ativos_selecionados, gerar_e_plotar_real_vs_previsto)

lista_graficos_filtrados <- lista_graficos_filtrados[!sapply(lista_graficos_filtrados, is.null)]

num_plots <- length(lista_graficos_filtrados)
num_cols <- 4

plot_final_grid_focado <- cowplot::plot_grid(
  plotlist = lista_graficos_filtrados,
  ncol = num_cols,
  labels = NULL

```

)

```
largura_final <- 4 * num_cols  
altura_final <- 3 * ceiling(num_plots / num_cols)
```

```
ggsave(previsao_final_focado, plot_final_grid_focado, width = largura_final, height =  
altura_final)
```

```
cat(paste("\n  Figura 4 (Previsões Focadas Real vs. Previsto) gerada e salva em:",  
previsao_final_focado, "\n"))
```

Apêndice – H

Etapa 7.1 – Integração ao Prophet

```
library(quantmod)  
library(data.table)  
library(dplyr)  
library(xts)  
tickers <- c(  
  "PRIO3.SA", "MSFT", "KNCR11.SA", "TAEE3.SA", "XPML11.SA",  
  "ITUB4.SA", "WEGE3.SA", "HYPE3.SA", "VALE3.SA", "AGRO3.SA",  
  "CYRE3.SA", "UGPA3.SA", "BPFF11.SA"  
)  
data_inicio <- "2012-01-01"  
data_fim <- "2023-12-31"  
  
arquivo_csv <- "dados_historicos_2023.csv"  
  
dados_env <- new.env()  
  
cat("Iniciando a coleta de dados históricos...\n")  
getSymbols(  
  Symbols = tickers,  
  src = "yahoo",  
  from = data_inicio,  
  to = data_fim,  
  env = dados_env,  
  auto.assign = TRUE  
)  
dados_combinados <- lapply(  
  X = ls(dados_env),  
  FUN = function(ticker) {  
    df <- data.frame(  
      Date = index(dados_env[[ticker]]),  
      coredata(dados_env[[ticker]])  
    )  
    df$Ticker <- ticker  
    colnames(df) <- gsub(paste0(ticker, "."), "", colnames(df), fixed = TRUE)
```

```

df <- df %>% select(Date, Ticker, everything())

  return(df)
}
)
dados_finais <- rbindlist(dados_combinados, fill = TRUE)
fwrite(dados_finais, file = arquivo_csv)

cat("\n☑ Coleta concluída com sucesso.\n")
cat(paste("Dados salvos no arquivo:", arquivo_csv, "\n"))
cat("Estrutura inicial dos dados:\n")
print(head(dados_finais))

```

Etapa 7.2 - Coleta Dados Gráfico futuro Prophet

```

library(data.table)
library(dplyr)
library(prophet)
library(ggplot2)
library(cowplot)
library(scales)

modelos_dir <- "modelos"
nome_arquivo_dados_brutos <- "dados_historicos_2023.csv"
nome_arquivo_final_validacao <- "Figura_Validacao_Prophet_2023.png"

ativos_selecionados <- c(
  "PRIO3.SA", "MSFT", "KNCR11.SA", "TAEE3.SA", "XPML11.SA",
  "ITUB4.SA", "WEGE3.SA", "HYPE3.SA", "VALE3.SA", "AGRO3.SA",
  "CYRE3.SA", "UGPA3.SA", "BPFF11.SA"
)

dados_brutos_originais <- fread(nome_arquivo_dados_brutos)
dados_brutos_originais$Date <- as.Date(dados_brutos_originais$Date)

plotar_validacao_2023 <- function(ticker_name) {

  model_path <- file.path(modelos_dir, paste0(ticker_name, "_prophet.rds"))
  if (!file.exists(model_path)) return(NULL)

  modelo_carregado <- readRDS(model_path)

```

```

data_fim_treino <- max(dados_brutos_originais$Date)
dias_após_treino <- as.numeric(Sys.Date() - data_fim_treino)

future_data <- make_future_dataframe(modelo_carregado, periods = dias_após_treino)
forecast_carregado <- predict(modelo_carregado, future_data)

dados_reais_completos <- dados_brutos_originais %>%
  filter(Ticker == ticker_name) %>%
  select(Date, Adjusted) %>%
  rename(ds = Date, y_real = Adjusted)

plot_data <- forecast_carregado %>%
  select(ds, yhat, yhat_lower, yhat_upper) %>%
  left_join(dados_reais_completos, by = "ds")

plot_data <- plot_data %>%
  mutate(
    y_tipo = case_when(
      ds <= data_fim_treino ~ "Histórico",
      ds > data_fim_treino ~ "Real (Validacao)"
    )
  )

plot_ticker <- ggplot(plot_data, aes(x = ds)) +

  geom_ribbon(aes(ymin = yhat_lower, ymax = yhat_upper), fill = "blue", alpha = 0.2) +
  geom_line(aes(y = yhat), color = "blue", size = 0.8) +

  geom_point(aes(y = y_real, color = y_tipo), size = 0.8) +

  geom_vline(xintercept = data_fim_treino, linetype = "dashed", color = "red") +

  scale_color_manual(values = c("Histórico" = "black", "Real (Validacao)" = "red"), name =
"Dados Reais") +

  labs(
    title = paste("Validação Preditiva:", ticker_name),
    subtitle = paste("Comparação da Projeção de 2023 com os Preços Reais. Última data de
treino:", format(data_fim_treino, "%Y-%m-%d")),
    x = NULL, y = "Preço Ajustado"
  ) +
  theme_minimal() +

```

```

    theme(plot.title = element_text(size = 10, face = "bold"),
          legend.position = "bottom")

  return(plot_ticker)
}

cat(paste("Gerando gráficos de validação (Real 2023 vs. Previsto)...\n"))

lista_graficos_validacao <- lapply(ativos_selecionados, plotar_validacao_2023)
lista_graficos_validacao <- lista_graficos_validacao[!sapply(lista_graficos_validacao,
is.null)]

num_plots <- length(lista_graficos_validacao)
num_cols <- 4

plot_final_grid_validacao <- cowplot::plot_grid(
  plotlist = lista_graficos_validacao,
  ncol = num_cols,
  labels = NULL
)

largura_final <- 4 * num_cols
altura_final <- 3 * ceiling(num_plots / num_cols)

ggsave(nome_arquivo_final_validacao, plot_final_grid_validacao, width = largura_final,
height = altura_final)

cat(paste("\n☑ Figura de Validação Preditiva (Real 2023) salva em:",
nome_arquivo_final_validacao, "\n"))

```