

UNESP
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

Guaratinguetá

1996



*“Estudo Analítico do Equilíbrio
MHD e Cálculo da Corrente de
Reforço em Tokamaks de Baixa
Razão de Aspecto”*

ELSON DE CAMPOS

52

UNESP - UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Campus de Guaratinguetá

ELSON DE CAMPOS

**“ESTUDO ANALÍTICO DO EQUILÍBRIO MHD E
CÁLCULO DA CORRENTE DE REFORÇO EM
TOKAMAKS DE BAIXA RAZÃO DE ASPECTO”**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-
Graduação da Universidade Estadual Paulista,
Campus de Guaratinguetá, como parte dos requisitos
para a obtenção do título de “MESTRE EM FÍSICA”

UNESP - Guaratinguetá

Abril de 1996



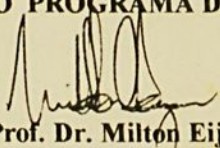
"ESTUDO ANALÍTICO DO EQUILÍBRIO MHD E CÁLCULO DA CORRENTE DE
REFORÇO EM TOKAMAKS DE BAIXA RAZÃO DE ASPECTO"

ELSON DE CAMPOS

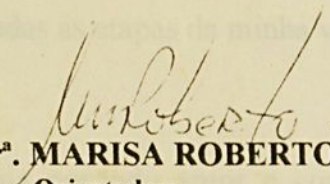
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM FÍSICA"

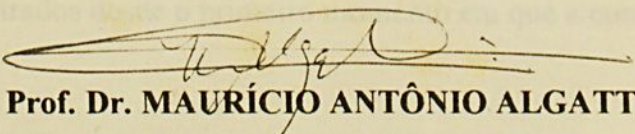
ESPECIALIDADE: FÍSICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: FÍSICA DE PLASMAS

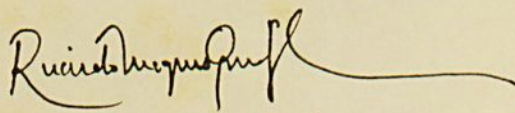
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Milton Eiji Kayama
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. MARISA ROBERTO
Orientadora


Prof. Dr. MAURÍCIO ANTÔNIO ALGATTI


Prof. Dr. RICARDO MAGNUS OSÓRIO GALVÃO

539.9...16
C 198e

303

Abril de 1996

000303

CARO LEITOR NÃO
RISQUE O LIVRO

II

FACULDADE DE ENGENHARIA
DE GUARATINGUETÁ
BIBLIOTECA

AGRADECIMENTOS

Devo expressar meus agradecimentos à profa. Dra. Maria Roberto, por sua orientação sempre cuidadosa e incansável, sem a qual seria impossível a realização deste trabalho.

Meus agradecimentos ao
durante este período

Aos meus pais, grandes incentivadores do meu trabalho,
sempre presentes em todas as etapas da minha vida.

Agradecimentos à CAPES

À minha querida Rovânia, por todo amor e compreensão demonstrados desde o primeiro momento em que a conheci.

1. INTRODUÇÃO

1.1 Fusão Termociclizar Controlada 01
1.2 Tokamaks - Confinamento 02
1.3 Tokamaks - Operação 09

AGRADECIMENTOS

2. EQUILIBRIO: TEORIA

2.1 Equação de Grad-Shafranov 12

Desejo expressar meus sinceros agradecimentos à Profa. Dra. Marisa Roberto, por sua orientação sempre cuidadosa e incentivadora, sem a qual seria impossível a realização deste trabalho.

2.2 Equilíbrio: Resultados 23

Meus agradecimentos ao Departamento de Física, pelo apoio e amizade demonstrado durante este período.

3.1 Introdução 40

Agradecimentos à CAPES pelo apoio financeiro.

4. CONCLUSÕES

Conclusões 34

APÊNDICE A

A.1 Derivação das Equações que Determinam o Perfil do Plasma 36

Referências 37



Conteúdo

1. INTRODUÇÃO

1.1 Fusão Termonuclear Controlada.....	01
1.2 Tokamaks - Confinamento	03
1.3 Tokamaks - Operação	09

2. EQUILÍBRIO: TEORIA

2.1 Equação de Grad-Shafranov.	12
2.2 Modelo Analítico Para o Equilíbrio MHD usando a Solução de Maschke na Equação de Grad-Shafranov	18
2.3 Equilíbrio: Resultados.	28

3. CORRENTE DE REFORÇO

3.1 Introdução	40
3.2 Cálculo da Corrente de Reforço	42

4. CONCLUSÕES

Conclusões	54
------------------	----

APÊNDICE A

A.1 Dedução das Equações que Determinam a Posição do Eixo

Magnético.....	56
----------------	----



A.2 Equações que determinam a Posição do Eixo Magnético

Para o Caso Especial da Solução de Maschke 59

APÊNDICE B

Dedução da Expressão Para o Fator de Segurança 62

APÊNDICE C

Dedução da Expressão Para a Corrente de Plasma I_p 68

APÊNDICE D

Resultados Obtidos Para Valores de $\eta < 0$ 70

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 73



LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Os campos magnéticos toroidal e poloidal que compõe o princípio de funcionamento de um tokamak	04
Figura 1.2 Geração da corrente de plasma ($I_p = I_\phi$)	05
Figura 1.3 Representação esquemática de um tokamak, apresentando as espiras externas paralelas ao plano do toróide, situadas acima e abaixo do mesmo	09
Figura 1.4 Seção de um toróide, mostrando os princípios básicos de um possível reator a fusão, utilizando deutério-trítio	11
Figura 2.1 Sistema de coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z) e seus versores ortonormais	12
Figura 2.2 Topologia das superfícies magnéticas	16
Figura 2.3 Seção transversal retangular para o plasma	21
Figura 2.4 Perfis de pressão, densidade de corrente, fator de segurança (q), campos toroidal e poloidal, para $d = 0.6, \eta = 0.0, b = 1.0, \kappa = 1.67$ e $\beta_m = 0.20$	29
Figura 2.5 Perfis de pressão, densidade de corrente, fator de segurança (q), campos toroidal e poloidal, para $d = 0.6, \eta = 0.0, b = 1.0, \kappa = 1.67$ e $\beta_m = 0.32$	30
Figura 2.6 Perfis de pressão, densidade de corrente, fator de segurança (q), campos toroidal e poloidal, para $d = 0.6, \eta = 0.0, b = 1.0, \kappa = 1.67$ e $\beta_m = 0.45$	31
Figura 2.7 Perfis de pressão, densidade de corrente, fator de segurança (q), campos toroidal e poloidal, para $d = 0.6, \eta = 0.01, b = 1.0, \kappa = 1.67$ e $\beta_m = 0.20$	33
Figura 2.8 Perfis de pressão, densidade de corrente, fator de segurança (q), campos toroidal e poloidal, para $d = 0.6, \eta = 0.1, b = 1.0, \kappa = 1.67$ e $\beta_m = 0.20$	34
Figura 2.9 Perfis de pressão, densidade de corrente, fator de segurança (q), campos toroidal e poloidal, para $d = 0.6, \eta = 0.5, b = 1.0, \kappa = 1.67$ e $\beta_m = 0.20$	35



Figura 2.10 Variação da corrente de plasma (I_p) em função do inverso da razão de aspecto (d) para $\kappa= 1.0$ e 1.5	36
Figura 2.11 Variação do fator de segurança no eixo magnético (q_m) em função do inverso da razão de aspecto (d) para $\kappa= 1.0$ e 1.5	36
Figura 2.12 Variação de β_t em função do inverso da razão de aspecto (d) para $\kappa= 1.0$ e 1.5	37
Figura 2.13 Variação de β_p em função do inverso da razão de aspecto (d) para $\kappa= 1.0$ e 1.5	37
Figura 2.14 Superfícies ψ =constante e B =constante no Plano R,z , para $d=0.6$ e $\kappa=1.67$	38
Figura 3.1 Órbita banana de um íon.....	41
Figura 3.2 O parâmetro x em função do inverso da razão de aspecto, para os modelos de Maschke, Soloviev e Hirshman	50
Figura 3.3 Curvas da razão entre a corrente de reforço e a corrente de plasma para vários valores da razão de aspecto, para $\kappa = 1.0$ e $\kappa = 1.5$	52
Figura 3.4 Curva da razão entre a corrente de reforço e a corrente de plasma para vários valores da razão de aspecto, para o modelo de Maschke, $\kappa = 1.0$ e $\kappa = 1.5$, e modelo de Soloviev, $\kappa = 1.0$ e $\kappa = 1.5$	52
Figura 3.5 Curvas da razão entre a corrente de reforço e a corrente de plasma para vários valores de alongação, para $d = 0.67$ ($A=1.2$)	53
Figura D.1 Perfis de pressão, densidade de corrente, fator de segurança (q), campos toroidal e poloidal, para $d = 0.6$, $\eta = -0.1$, $b = 1.0$, $\kappa = 1.67$ e $\beta_m = 0.20$	71
Figura D.2 Perfis de pressão, densidade de corrente, fator de segurança (q), campos toroidal e poloidal, para $d = 0.6$, $\eta = -0.5$, $b = 1.0$, $\kappa = 1.67$ e $\beta_m = 0.20$	72



LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 Variação de q_m e $\langle\beta_t\rangle$ com β_m	31
Tabela 2.1 Variação de q_m e $\langle\beta_t\rangle$ com η	35
Tabela 2.3 Parâmetros do START	39

Um estudo das espécies relevantes de equilíbrio está associado ao reforço em tokamaks de baixa razão de aspecto é feito usando o método de equilíbrio de Mischnick, que produz solução analítica e exata de equações de força. Entretanto, o perfil de corrente no modelo de Mischnick é parabólico, que representa bem as observações experimentais. Os resultados são comparados com o método de equilíbrio de Solovév, que tem perfil de corrente quase plano. Mostra-se que a natureza do reforço depende do parâmetro geométrico da coluna do plasma, que é a elongação. A natureza do reforço aumenta com o inverso da razão de aspecto para uma seção transversal constante da coluna do plasma.



RESUMO

Um estudo dos aspectos relevantes do equilíbrio e da corrente de reforço em tokamaks de baixa razão de aspecto é feito usando o modelo de equilíbrio de Maschke, que produz solução analítica e exata da equação de Grad-Shafranov. O perfil da corrente no modelo de Maschke é parabólico, que representa uma boa aproximação das observações experimentais. Os resultados são comparados com o modelo de equilíbrio de Soloviev, que tem perfil de corrente quase plano. Mostra-se que a corrente de reforço depende do parâmetro geométrico da coluna de plasma, que é a alongação. A corrente de reforço aumenta com o inverso da razão de aspecto para uma seção transversal alongada da coluna de plasma.



ABSTRACT

A study of relevant aspects of equilibrium and bootstrap current in low-aspect-ratio tokamaks is made using the Maschke equilibrium model, which provides analytic and exact solution of the Grad-Shafranov equation. The current profile in the Maschke model is parabolic, which is a good approximation for actual experimentally observed ones. The results are compared with the Soloviev equilibrium model, that has the current profile almost flat. It is shown that the bootstrap current depends on the geometrical parameter of the plasma column, that is, elongation. The bootstrap current increases with the inverse aspect ratio for elongated cross-section of the plasma column.



CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

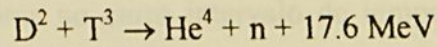
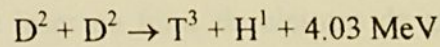
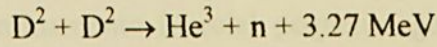
1.1 - Fusão Termonuclear Controlada

Próximos do final do século XX, devido ao crescimento populacional e a melhora nos padrões de vida, a humanidade se depara com a necessidade cada vez maior de energia. Os combustíveis convencionais, como os fósseis, além dos problemas ecológicos que geram, e o fato de suas reservas não estarem distribuídas geograficamente de modo uniforme, estão obviamente se esgotando. Portanto, nas últimas décadas, os pesquisadores de todo o mundo estão procurando novas fontes de energia tais como geotérmica, eólica, solar e nuclear. A pesquisa com relação a energia nuclear tem recebido um enorme destaque, com a obtenção de energia elétrica através de fissão nuclear, que já vem sendo utilizada desde a década de 1950 com o desenvolvimento de diversos reatores. Em 1988 cerca de 15% da eletricidade consumida no mundo era produzida por usinas nucleares a fissão (Fiedler-Ferrari N. & Nascimento I.C, 1988). Porém, sabemos que estes reatores não estão livres de acidentes, como o de Tchernobyl, produzindo, além disso, resíduos radioativos que precisam ser armazenados por centenas de anos.

Uma alternativa para estes problemas seria a obtenção de energia através da fusão termonuclear controlada, que é hoje estudada em diversos países. É necessário, para tanto, aquecer um gás composto de átomos leves à uma temperatura elevada, e confiná-lo por um tempo suficientemente longo de forma a se conseguir uma quantidade de energia maior que a consumida nos processos de confinamento e aquecimento. Como é preciso uma alta



temperatura este gás é altamente ionizado, e sob *determinadas condições* é chamado de plasma. Existem várias reações nucleares que podem ser utilizadas nos reatores de fusão, como as que se seguem (Bickerton, R.J., 1993):



onde n é um neutron e D e T são os átomos de deutério (H^2) e trítio (H^3).

A reação nuclear D-T é a que tem se mostrado mais viável, por possuir uma seção de choque elevada e considerável ganho de energia por reação.

Para garantir que a energia produzida por fusão seja maior do que a energia gasta para aquecer o plasma e a perda por radiação, a reação deve ter uma temperatura mínima e obedecer ao chamado critério de Lawson, estabelecido pela primeira vez em 1957 pelo pesquisador inglês J. D. Lawson. Este critério apresenta uma desigualdade para o produto $n\tau_e$, onde n é a densidade do plasma e τ_e o tempo de confinamento. Assim, para uma reação D-T, onde 20% da energia produzida está nas partículas carregadas α , com a temperatura do plasma (T) de aproximadamente 20 keV (2×10^8 K) (Bickerton, R.J., 1993), para que ocorra a ignição é necessário:

$$n\tau_e \approx 2 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s}$$

Portanto para que se realize fusão, é necessário um processo de aquecimento do plasma até que núcleos leves atinjam uma velocidade suficiente para que possam vencer as forças de repulsão coulombianas.



Para que haja aquecimento a temperaturas altas é necessário que se isole o plasma do contato com o meio. O plasma deve estar limitado a uma região do espaço, e sem contato com outros objetos materiais. Este processo denomina-se confinamento. Os dois métodos mais utilizados para se confinar o plasma são: o confinamento magnético e o confinamento inercial. No processo de confinamento inercial pequenas gotas de combustível (D-T) são bombardeadas por pulsos de laser ou feixe de elétrons de grande intensidade, provocando altas densidades e temperaturas no curto intervalo de tempo que dura o confinamento. A pesquisa no confinamento magnético utiliza campos magnéticos apropriados para manter o plasma confinado, com vários equipamentos experimentais construídos com diferentes geometrias.

A fim de se evitar perdas por radiação, é necessário que se obtenha um plasma de maior pureza possível. Sabe-se que as perdas por radiação crescem rapidamente com o número atômico Z (Stacey JR, W.M., 1981).

A medida de grandezas que definem o estado do plasma (densidade , temperatura, pressão, etc...) constitui um campo denominado diagnóstico do plasma, e que inclui uma série de métodos e instrumentos.

1.2 - Tokamaks - Confinamento

As máquinas de confinamento com geometria toroidal tem se mostrado mais convenientes que as de geometria linear, uma vez que as primeiras não possuem extremidades, por onde as partículas poderiam escapar.

Os tokamaks se constituem hoje no principal esforço mundial na obtenção da fusão termonuclear controlada. Desenvolvido inicialmente na antiga URSS, por L. A. Artsimovich e sua equipe, um tokamak (do russo “*toroidalnaja kamera magnitnaja katusha*” - Câmara



Magnética Toroidal) é um sistema fechado de confinamento magnético, no qual o plasma de fusão é confinado por um campo magnético poloidal B_θ gerado por uma corrente toroidal I_ϕ que flui no plasma. Superposto a este campo existe um intenso campo magnético toroidal B_ϕ induzido pela corrente poloidal I_θ . Na Figura 1.1, são mostrados esses campos e o sistema de coordenadas adotado (sistema "cilíndrico"). Para facilitar o estudo, deve-se considerar a seguinte correspondência de variáveis $(r, \theta, \phi) \rightarrow (r, \theta, z = \phi R)$, de modo que os parâmetros de equilíbrio tornam-se independentes de z ; esse sistema é chamado de pseudo toroidal.

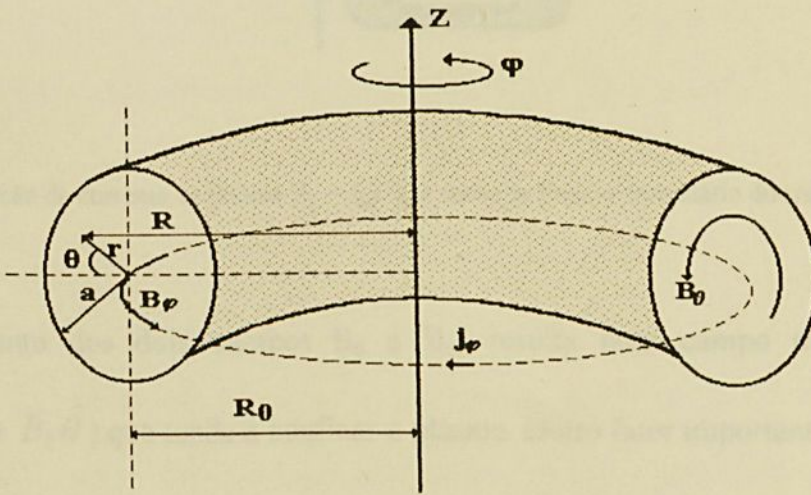


Fig. 1.1 - Os campos magnéticos toroidal e poloidal compõe o princípio de funcionamento de um tokamak.

A geometria do toróide é determinada pelo raio maior R_0 e raio menor a . O quociente entre o raio maior e o raio menor é chamado de razão de aspecto (A):

$$A = \frac{R_0}{a} \quad (1.1)$$

Tokamaks com $A < 2$ são chamados tokamaks de baixa razão de aspecto ou tokamaks esféricos. A corrente toroidal I_ϕ também chamada de corrente de plasma I_p , é criada pela

variação do fluxo magnético induzido por um transformador elétrico, gerando, por sua vez um campo magnético poloidal B_θ (Figura 1.2).

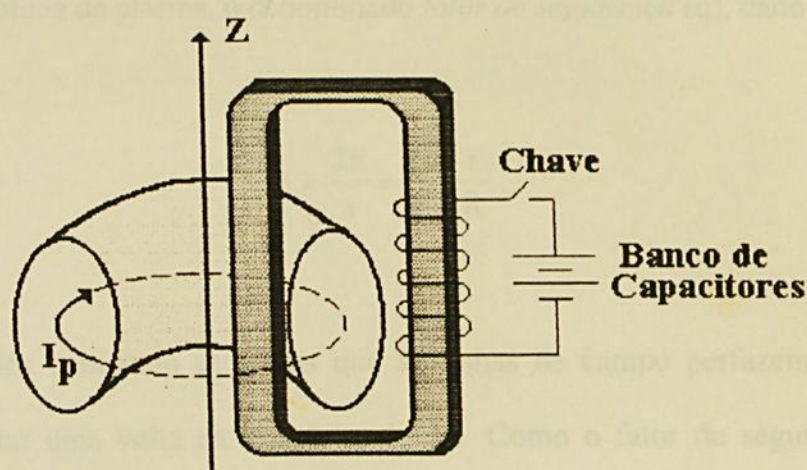


Fig. 1.2 - Geração da corrente de plasma ($I_p = I_\phi$). I_p é como se fosse o secundário do transformador.

O acoplamento dos dois campos B_θ e B_ϕ , resulta num campo magnético helicoidal ($\vec{B} = B_\phi \hat{\phi} + B_\theta \hat{\theta}$) que tende a confinar o plasma. Outro fator importante no confinamento é a transformada rotacional ι (iota), que indica o ângulo descrito na direção poloidal durante uma volta das linhas de campo em torno do eixo maior, sendo que ι não pode exceder a 2π . Isto significa que a corrente não pode ser aumentada indefinidamente na tentativa de alcançar temperaturas altas.

$$\iota \neq 2n\pi \quad (1.2)$$

A razão na qual uma linha de força dá voltas ao redor do eixo maior é proporcional a B_ϕ/R , e a razão na qual ela dá voltas no eixo menor é proporcional a B_θ/r . A transformada rotacional é portanto proporcional a $B_\theta R/B_\phi r$.

Neste ponto é necessário se definir um parâmetro de grande utilidade, responsável pela estabilidade da coluna de plasma, o denominado *fator de segurança* (q), dado por:

$$q = \frac{2\pi}{\iota} = \frac{B_\phi}{B_\theta} \frac{r}{R} \quad (1.3)$$

Assim o fator q indica o número de voltas que as linhas de campo perfazem na direção toroidal, até completar uma volta na direção poloidal. Como o fator de segurança q está relacionado a ι , pode-se combinar as equações (1.2) e (1.3), obtendo:

$$q(r) > 1 \quad (0 < r < a); \quad (1.4)$$

este critério é chamado de *limite de Kruskal-Shafranov* (Chen, F.F., 1974). Estudos mais aprofundados mostram que a condição de K-S deve ser reescrita como (Dolan, T.J., 1982.):

$$q(a) > 3, \quad (1.5)$$

onde $q(a)$ é o valor do fator de segurança na superfície expresso por

$$q(a) = \frac{B_\phi(R=R_0)}{B_\theta(r=a)} \frac{a}{R_0} \quad (1.6)$$

Observa-se que $q(a) \propto a/R_0$, que é o inverso da razão de aspecto. Desta forma é interessante salientar que para B_ϕ e B_θ fixos, a estabilidade será melhor quanto menor for a

razão de aspecto; assim os tokamaks de baixa razão de aspecto são preferíveis aos tokamaks de grande razão de aspecto.

Um fator que caracteriza o equilíbrio e de grande interesse prático é o parâmetro β , definido pela razão entre a pressão do plasma e a pressão do campo magnético:

$$\beta = \frac{p}{\frac{B_s^2}{2\mu_0}}, \quad (1.7)$$

onde

$$p = nk(T_i + T_e) \quad (1.8)$$

B_s é o campo total na superfície do plasma e T_i e T_e são as temperaturas de íons e elétrons, respectivamente.

Uma condição de equilíbrio no tokamak, é que o campo magnético poloidal seja grande o suficiente para suportar uma parte da pressão proveniente da expansão térmica. Podemos assim definir, da mesma maneira, o parâmetro β_{poloidal} :

$$\beta_{\text{poloidal}} = \beta_p = \frac{p}{\frac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0}} \quad (1.9)$$

Para a condição de equilíbrio ser mantida devemos ter (Dolan, T.J., 1982):

$$\frac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0} > \left(\frac{a}{R_0}\right)p \quad (1.10)$$



Note que para $R_0 \rightarrow \infty$ (plasma cilíndrico), $a/R_0 \rightarrow 0$; neste caso nenhum campo poloidal é necessário para manter o equilíbrio. No entanto, à medida que a curvatura das linhas de campo aumentam, R_0 diminui, exigindo um campo B_θ cada vez maior para superar a pressão cinética.

Assim, substituindo a Eq (1.10) na Eq.(1.9), tem-se a condição

$$\beta_{\text{poloidal}} < \frac{R_0}{a} . \quad (1.11)$$

Podemos então dizer que β_{poloidal} mede a eficiência do campo B_θ no confinamento do plasma, e por extensão, β mede a eficiência do campo total. Contudo, B_θ não pode aumentar indefinidamente, pois é sabido que um aumento de pressão magnética implica no aumento do custo do projeto; assim, procuramos um \bar{B} mínimo, ou seja, um β máximo que preserve a estabilidade.

Com os dois campos poloidal e toroidal o plasma tende a se expandir em direção às paredes externas do toróide. Essa tendência é compensada pela adição de um campo magnético vertical paralelo ao eixo maior do toróide. Esse campo é produzido por espiras externas colocadas simetricamente e paralelas ao plano definido pelo toróide, conforme Figura.1.3; também é possível conseguir o campo vertical envolvendo o plasma com uma superfície condutora.

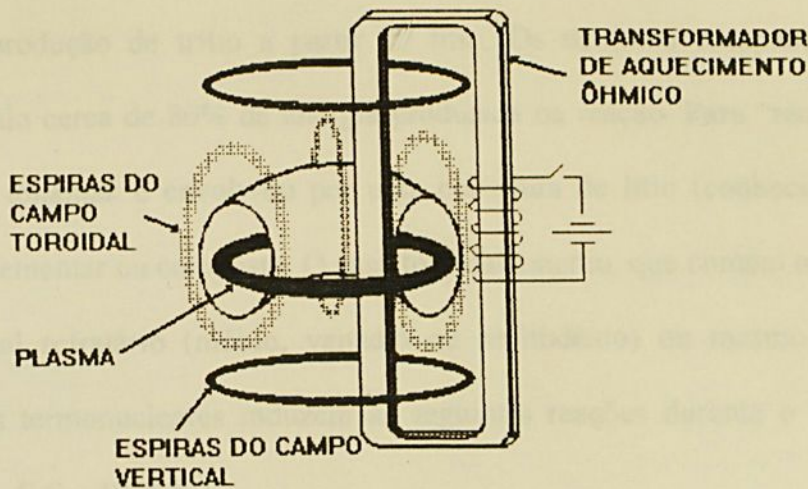
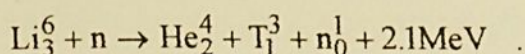
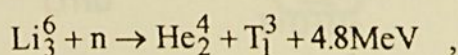


Fig 1.3. Representação esquemática de um *tokamak*, apresentando as espiras externas paralelas ao plano do toróide, situadas acima e abaixo do mesmo.

1.3 - Tokamaks - Operação

A operação de um tokamak geralmente envolve as seguintes etapas: a pré-ionização do gás no recipiente pela passagem de uma descarga de alta tensão (radiofrequência); a indução, via transformador, da corrente toroidal (corrente de plasma) que, além de produzir o campo poloidal, aquece o plasma (aquecimento ôhmico ou resistivo). Ao fim deste processo, o plasma estará aquecido e confinado. Entretanto, o aquecimento ôhmico é insuficiente, uma vez que as perdas de energia por condução e radiação aumentam com a temperatura. Por essa razão outras formas de aquecimento adicional estão sendo estudadas tais como: injeção de partículas neutras, ondas eletromagnéticas de alta frequência e compressão adiabática.

A maioria dos reatores planejados utilizam a reação Deutério-Trítio (D-T), onde os nêutrons emergentes desta reação desempenham o papel central, além de serem necessários para a produção de trítio a partir do lítio. Os nêutrons escapam do plasma confinado, carregando cerca de 80% da energia produzida na reação. Para “recolher” estes nêutrons, o vaso do tokamak é envolvido por uma cobertura de lítio (conhecido como “blanket”), na forma elementar ou composto. O vaso toroidal externo, que contém o lítio, pode ser feito com um metal refratário (nióbio, vanádio ou molibdênio) ou mesmo de aço inoxidável. Os nêutrons termonucleares induzem as seguintes reações durante o freiamento na cobertura (Góes, L.C.S., 1978):



O trítio produzido na cobertura é removido como gás retornando para a câmara de reação. Ao mesmo tempo, os nêutrons depositam sua energia no lítio, que é aquecido até temperaturas da ordem de 1100^0C . A cobertura de lítio é externamente envolvida por um isolante térmico que serve para absorver nêutrons remanescentes. Finalmente, na parte mais externa, ficam as espiras responsáveis pelo confinamento magnético.

O calor depositado na cobertura de lítio pelos nêutrons pode ser daí retirado por um trocador de calor. A partir desse ponto, o processo é convencional. Esse calor é suficiente para produzir vapor de água que pode ser utilizado em uma turbina para gerar energia elétrica. Na figura 1.4 é apresentada a seção de um toróide, mostrando os princípios básicos de um possível reator a fusão, utilizando deutério-trítio (esquemático) (Bickerton, R.J., 1993; Fiedler-Ferrari & N; Nascimento I.C., 1988).



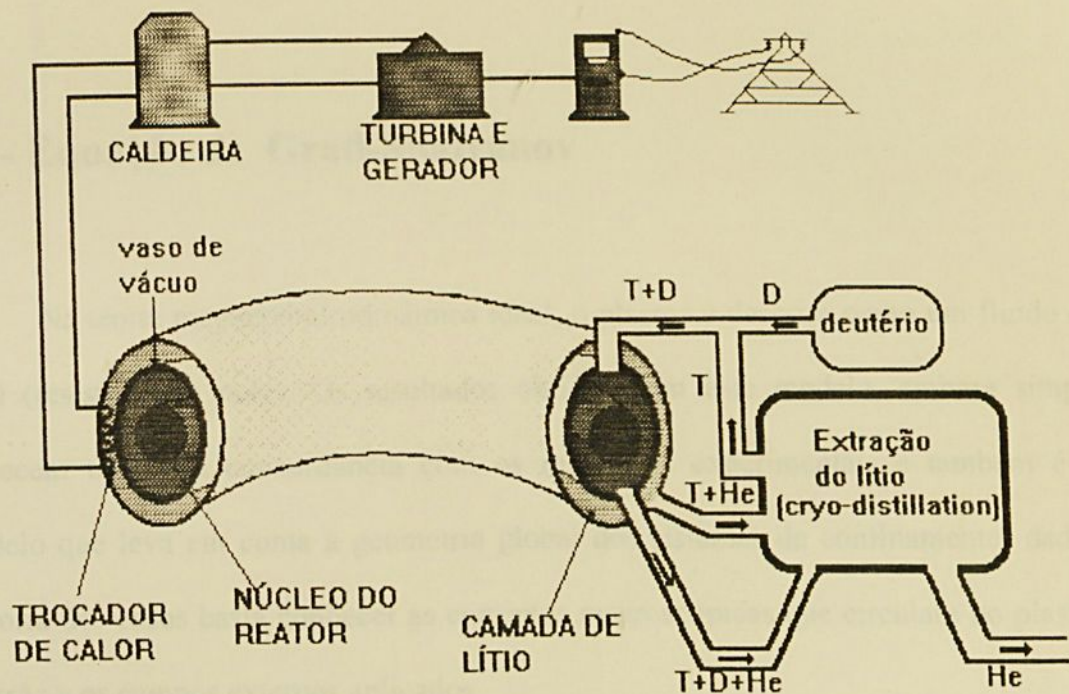


Fig. 1.4. Seção de um toróide, mostrando os princípios básicos de um possível reator a fusão, utilizando deutério-trítio.

A seguir será descrito o modelo teórico utilizado neste trabalho, para obtenção da solução da equação de Grad-Shafranov.



CAPÍTULO 2 - EQUILÍBRIO: TEORIA

2.1 - Equação de Grad-Shafranov

Na teoria magnetohidrodinâmica ideal, o plasma é descrito como um fluido condutor ideal (resistividade nula). Os resultados obtidos com este modelo, embora simplificado, fornecem uma boa concordância com os resultados experimentais e também é o único modelo que leva em conta a geometria global dos sistemas de confinamento, dado que na maioria dos casos basta conhecer as correntes macroscópicas que circulam no plasma, a sua pressão e os campos externos aplicados.

A partir do conjunto de equações básicas que descrevem o plasma como um fluido MHD ideal (Galvão, R. M. O.; 1979; Freidberg, J., 1987), utilizando o sistema de coordenadas da Figura 2.1, define-se uma grandeza importante, a *função escalar*

$$I(R, z) = RB_{\phi}(R, z) \quad (2.1)$$

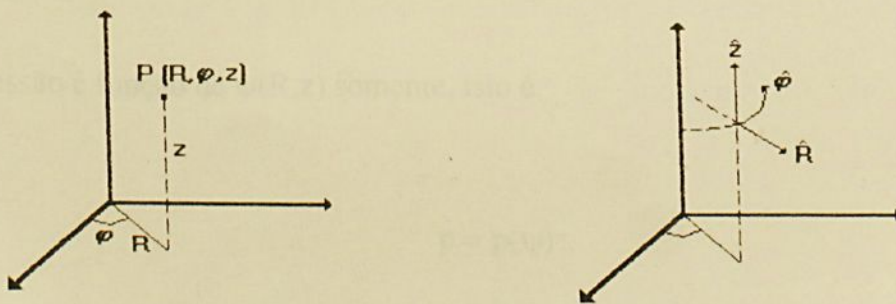


Fig. 2.1 - Sistema de coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z) e seus versores ortonormais $(\hat{R}, \hat{\phi}, \hat{z})$

Pode ser observado que numa configuração axissimétrica, a equação $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ é satisfeita se introduzirmos uma *função fluxo escalar* ψ , tal que o campo \vec{B} pode ser escrito como:

$$\vec{B} = \frac{\hat{\phi} \times \vec{\nabla} \psi}{R} + B_{\phi} \hat{\phi} \quad (2.2)$$

e usando a Eq. (2.1), tiramos o valor de B_{ϕ} , encontrando uma nova expressão para \vec{B} , tal que:

$$\vec{B} = \frac{1}{R} (\hat{\phi} \times \vec{\nabla} \psi + I \hat{\phi}) \quad (2.3)$$

Desta forma, tem-se para as componentes do campo magnético:

$$B_R = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.4a)$$

$$B_{\phi} = \frac{I}{R} \quad (2.4b)$$

$$B_z = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad (2.4c)$$

A pressão é função de $\psi(R,z)$ somente, isto é,

$$p = p(\psi) \quad (2.5)$$

da mesma maneira, como $I(R,z)$ é função de $\psi(R,z)$, tem-se (Maurer, W.A., 1968)

$$I = I(\psi) \quad (2.6)$$

Adotando o operador

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.7)$$

encontra-se finalmente a equação

$$\Delta^2 \psi = -\mu_0 R^2 \frac{dp}{d\psi} - \frac{1}{2} \frac{dl^2}{d\psi} \quad (2.8)$$

Esta é denominada *Equação de Grad-Shafranov* para o equilíbrio de sistemas de confinamento magnético com simetria axial, a qual relaciona os três perfis envolvidos na equação de equilíbrio: \vec{j} , \vec{B} e p . Para resolver esta equação diferencial temos que especificar as funções $p(\psi)$ e $I(\psi)$. Neste sentido o objetivo deste trabalho se concentra em apresentar perfis de $p(\psi)$ e $I(\psi)$, segundo o modelo de Maschke (Maschke, E.K., 1973). Uma vez resolvida a Eq. (2.8) para $\psi(R,z)$ podemos obter $p(R,z)$ e $\vec{B}(R,z)$ através das Eqs. (2.5) e (2.3), respectivamente. A escolha das funções $p(\psi)$ e $I(\psi)$ determina a escolha do perfil da densidade de corrente toroidal j_ϕ . Isto pode ser verificado recorrendo-se a componente ϕ da equação $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, utilizando as Eqs. (2.4a) e (2.4c) substituindo-as na Eq. (2.8). O resultado é

$$j_\phi = - \left[R \frac{dp}{d\psi} + \frac{1}{2\mu_0 R} \frac{dl^2}{d\psi} \right] \quad (2.9)$$



Portanto, quando arbitramos $p(\psi)$ e $l(\psi)$, estamos escolhendo diretamente, a priori j_ϕ , que naturalmente deve ser próximo do resultado experimental. Assim, a Equação de Grad-Shafranov pode ser escrita

$$\Delta^2 \psi = \mu_0 R j_\phi \quad (2.10)$$

Notamos que o termo $\Delta^2 \psi$ do lado direito desta equação representa a parte do confinamento proveniente da corrente toroidal, gerada pelo campo poloidal, enquanto o termo do lado direito da Eq. (2.8) representa a parte do confinamento da corrente poloidal gerada pelo campo poloidal. Também deve ser notado que a Eq.(2.8) se torna não-linear para qualquer escolha das funções $p(\psi)$ e $l^2(\psi)$ diferente de um polinômio de 2ª ordem. Portanto, na maioria dos casos de interesse prático, a Equação de Grad-Shafranov só pode ser resolvida numericamente.

Das equações de equilíbrio MHD podemos escrever imediatamente que $\vec{j} \cdot \vec{\nabla} p = 0$ e $\vec{B} \cdot \vec{\nabla} p = 0$, donde se conclui que as linhas de força do campo magnético e as linhas de fluxo de corrente tem que estar sobre superfícies $p=\text{constante}$. Por esse motivo essas superfícies recebem o nome de *superfícies magnéticas*. À superfície na qual a pressão é máxima, recebe o nome de *eixo magnético*, dado que esta superfície reduz-se a uma linha, conforme é mostrado na Figura 2.2 (Galvão, R.M.O., 1979).

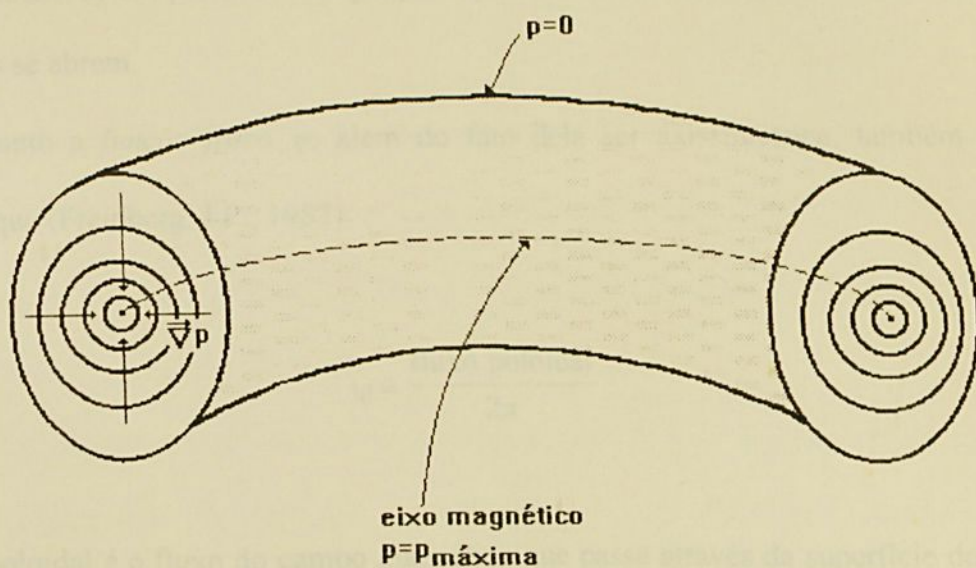


Fig. 2.2 - Topologia das superfícies magnéticas

As equações que determinam a posição do eixo magnético são (ver apêndice A.1)

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial R} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{\text{eixo magnético}} = 0 \quad (2.11a)$$

e

$$\Delta = \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial R \partial z} \right)^2 \right|_{\text{eixo magnético}} > 0 \quad (2.11b)$$

Notamos que pela Eq.(2.11b) o eixo magnético é um ponto de estagnação elíptico, ou seja, as superfícies magnéticas fecham-se sobre si mesmas, ao passo que se a desigualdade (2.11b) for invertida, obtém-se um ponto de estagnação hiperbólico, isto é, um ponto onde as superfícies magnéticas se abrem.

Quanto a *função fluxo* ψ , além do fato dela ser axissimétrica, também pode ser mostrado que (Freidberg, J.P., 1987)

$$\psi = \frac{\text{fluxo poloidal}}{2\pi} \quad (2.12)$$

O fluxo poloidal é o fluxo do campo magnético que passa através da superfície de uma “fita toroidal”, compreendida entre o eixo magnético e uma superfície $\psi = \text{constante}$.

A expressão para $q(\psi)$ (fator de segurança), válida para uma seção transversal genérica, que caracteriza a inclinação média das linhas de força magnética, pode ser escrita como (ver apêndice B)

$$q(\psi) = \frac{I(\psi)}{2\pi} \oint_{\psi=\text{cte.}} \frac{dz}{R \frac{\partial \psi}{\partial R}} \quad (2.13)$$

Assim, uma vez conhecida a função fluxo ψ , obtida da equação de Grad-Shafranov é possível determinar as componentes do campo magnético, o fator de segurança e a posição do eixo magnético, entre outras grandezas. A seguir será apresentada a solução analítica para o equilíbrio usando o modelo de Maschke (Maschke, E.K., 1973).

2.2 - Modelo Analítico Para o Equilíbrio MHD Usando a Solução de Maschke na Equação de Grad-Shafranov

A solução de Maschke representa uma classe de soluções analíticas das equações de equilíbrio MHD ideal, para um plasma toroidal axissimétrico, com $p(\psi)$ e $I^2(\psi)$ na forma quadrática. Esta solução é dada em termos das funções de onda de Coulomb, usando uma fronteira fixa de formato retangular.

A equação de Grad-Shafranov para o equilíbrio MHD de sistemas de confinamento magnético com simetria axial, não normalizada, é escrita como (substituindo a eq. 2.7 na eq.2.8)

$$R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\mu_0 R^2 \frac{dp}{d\psi} - \frac{1}{2} \frac{dI^2}{d\psi} \quad (2.14)$$

O modelo de Maschke (Maschke, E.K., 1973) impõe que os perfis de pressão e corrente sejam dados por:

$$p = p_1 + \frac{P\psi^2}{2\mu_0 R_0^4}, \quad (2.15)$$

$$I^2 = C_2 + \frac{M}{R_0^2} \psi^2, \quad (2.16)$$

onde p_1, P, C_2, M são constantes a serem determinadas e R_0 é a posição do eixo geométrico.



Assim:

$$\frac{dp}{d\psi} = \frac{P\psi}{\mu_0 R_0^4}, \quad (2.17)$$

e

$$\frac{dl^2}{d\psi} = 2 \frac{M}{R_0^2} \psi. \quad (2.18)$$

Assim, a Eq.(2.14) pode ser escrita como

$$R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = - \frac{1}{R_0^2} \left(\frac{R^2 P}{R_0^2} + M \right) \psi. \quad (2.19)$$

Estamos procurando soluções desta equação que sejam simétricas com respeito ao plano $z=0$. Assim, impõe-se soluções na forma

$$\psi(R, z) = G(R) \cos\left(\frac{kz}{R_0}\right). \quad (2.20)$$

Substituindo a Eq.(2.20) na Eq.(2.19) e definindo novas variáveis

$$\rho = \frac{\sqrt{P}}{2} \frac{R^2}{R_0^2} \quad (2.21)$$

e

$$\eta = \frac{k^2 - M}{4\sqrt{P}}, \quad (2.22)$$

obtemos como solução a seguinte equação diferencial para $G(R)$:

$$\frac{d^2G}{d\rho^2} + \left(1 - \frac{2\eta}{\rho}\right)G = 0 \quad (2.23)$$

A equação acima tem como solução as funções de onda de Coulomb, para a parte radial (Maschke, E.K., 1973; Abramowitz, M. & Stegun I.A., 1970)

$$\Phi(R) = C_\alpha F_0(\eta, \rho) + C_\beta G_0(\eta, \rho) \quad (2.24)$$

e, para a parte referente à coordenada z , escolhem-se soluções que são simétricas ao plano $z=0$, isto é,

$$Z(z) = C_\gamma \cos\left(\frac{kz}{R_0}\right) \quad (2.25)$$

Portanto, a função fluxo, obtida da solução da Eq (2.14) pode ser escrita como

$$\psi(R, z) = C_4 \left[F_0(\eta, \rho) + \gamma G_0(\eta, \rho) \right] \cos\left(\frac{kz}{R_0}\right), \quad (2.26)$$

onde

$$C_\alpha C_\gamma = C_4 \quad \text{e} \quad \frac{C_\beta}{C_\alpha} = \gamma$$



A determinação das constantes P , C_2 , M , k , C_4 e γ se faz através da aplicação de certas condições de contorno, proveniente do modelo de Maschke, que supõe uma seção transversal retangular para o plasma, conforme é mostrado na Figura 2.3.

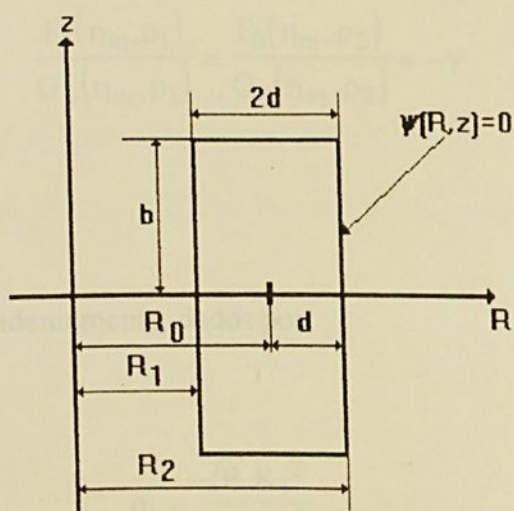


Fig2.3- Seção transversal retangular para o plasma

As condições de contorno são as seguintes:

- a) $\psi(R_0 + d, z) = 0$;
- b) $\psi(R_0 - d, z) = 0$;
- c) $\psi(R, b) = 0$.

As condições que determinam a posição do eixo magnético são:

$$\psi(R_m, 0) = \psi_m ,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{R_m, 0} = 0 .$$

A constante p_1 está sendo considerada nula, dado que $p=p(\psi)$, e além disso, estamos impondo ψ nulo no contorno. As condições (a) e (b) conduzem aos autovalores de η_m ($m=0,1,2,\dots$), e ao valor de γ , dados pela equação:

$$\frac{F_0(\eta_m, \rho_1)}{G_0(\eta_m, \rho_1)} = \frac{F_0(\eta_m, \rho_2)}{G_0(\eta_m, \rho_2)} = -\gamma. \quad (2.27)$$

Na equação (2.27) ρ_1 e ρ_2 são, evidentemente, dados por

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{P} R_1^2}{2 R_0^2} \quad (2.28a)$$

e

$$\rho_2 = \frac{\sqrt{P} R_2^2}{2 R_0^2}. \quad (2.28b)$$

No entanto, a única solução que interessa é aquela em que $m = 0$, desde que só para este caso, $\psi(R,z)$ não se anula dentro do contorno. Notamos que os valores de ρ_1 e ρ_2 , usando o fato de que $R_1 = R_0 - d$ e $R_2 = R_0 + d$, ficam relacionados pela equação

$$\rho_2 = \left(\frac{R_0 + d}{R_0 - d} \right)^2 \rho_1. \quad (2.29)$$

Portanto, especificando d e η , encontra-se ρ_1 através da equação de autovalor (2.27), com ρ_2 dado por (2.28), o parâmetro γ é calculado através da equação (2.27) e P através da



equação (2.21), no ponto $\rho = \rho_1$ ou $\rho = \rho_2$. Usando a condição (c), determinam-se os possíveis autovalores de k , que são:

$$k_n = (2n+1) \frac{\pi R_0}{2b} \quad (2.30)$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$. Novamente, a solução de interesse impõe $n = 0$, pois neste caso $\psi(R, z)$ não se anula dentro do contorno. A condição (e) determina a posição do eixo magnético $(R_m, 0)$, (ver apêndice A2).

$$\left. \frac{\partial F_0(\eta, \rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho_m, 0} + \gamma \left. \frac{\partial G_0(\eta, \rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho_m, 0} = 0 \quad (2.31)$$

e, finalmente usando (d), tem-se

$$C_4 = \frac{\Psi_m}{F_0(\eta, \rho_m) + \gamma G_0(\eta, \rho_m)} \quad (2.32)$$

É conveniente ressaltar que o índice m é reservado para as grandezas no eixo magnético e o índice 0 para as grandezas no eixo geométrico. Resta agora determinar a constante C_2 . Da equação (2.16), tem-se

$$\left(R_0 B_{\varphi_0}^y \right)^2 = C_2 + \frac{M}{R_0^2} \psi^2(R_0, 0), \quad (2.33)$$



dado que $I = RB_{\varphi}$, onde $B_{\varphi 0}^v$ é o campo magnético toroidal no eixo geométrico e no vácuo. O segundo membro do lado direito da equação (2.33) é nulo dado que, no vácuo $p(\psi) = 0$. Desta forma

$$C_2 = (R_0 B_{\varphi 0}^v)^2 \quad (2.34)$$

Portanto, a equação (2.16) pode ser reescrita como

$$I^2(R, z) = (R_0 B_{\varphi 0}^v)^2 + \frac{M}{R_0^2} \psi^2(R, z) \quad (2.35)$$

Neste ponto é conveniente normalizar as quantidades de interesse, escrevendo a equação (2.14) na forma adimensional. Assim tem-se:

$$\bar{R} = \frac{R}{R_0}; \quad \bar{z} = \frac{z}{R_0}; \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0}; \quad \bar{I} = \frac{I}{R_0 B_{\varphi 0}^v}; \quad \bar{B} = \frac{B}{B_{\varphi 0}^v}; \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{\psi_m}$$

Retirando o traço sobre as quantidades, no intuito de simplificar a notação, tem-se:

$$I^2 = 1 + M\alpha^2 \psi^2 \quad (2.36)$$

e

$$p = \psi^2 \quad (2.37)$$

onde o parâmetro alfa é dado por

$$\alpha^2 = \frac{\psi_m^2}{(R_0 B_{\phi_0}^v)^2} \frac{1}{R_0^2} = \frac{\beta_0}{P}, \quad (2.38)$$

com

$$\beta_0 = \frac{2\mu_0 p_0}{B_{\phi_0}^v{}^2} \quad (2.39)$$

e

$$\psi_m^2 = \frac{2\mu_0 R_0^4 p_0}{P}. \quad (2.40)$$

A função fluxo normalizada é escrita como

$$\psi(R, z) = \frac{[F_0(\eta, \rho) + \gamma G_0(\eta, \rho)] \cos(kz)}{\psi_m}; \quad (2.41)$$

a densidade de corrente toroidal normalizada em relação a $j_0 = \psi_m / (2\mu_0 R_0^3)$, lembrando que $\bar{j}_\phi = j_\phi / j_0$, é dada por:

$$j_\phi = -2 \left(PR + \frac{M}{R} \right) \psi, \quad (2.42)$$

e a corrente de plasma normalizada (Apêndice C.), em relação a $I_0 = 2\psi_m / (\mu_0 R_0)$, é dada por

$$I_p = -\sqrt{P} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(1 + \frac{M}{2\rho\sqrt{P}} \right) d\rho \int_0^b \psi(R, z) dz. \quad (2.43)$$

As grandezas β_p (Galvão, R.M.O., 1991) e $\langle \beta_t \rangle$ (Troyon, F. et alli) são dadas por:

$$\beta_p = \frac{8\pi S \langle p \rangle}{\mu_0 I_p^2}, \quad (2.44)$$

$$\langle \beta_t \rangle = \frac{2\mu_0 \int p dV}{\int B_0^2 dV}. \quad (2.45)$$

Para o modelo proposto, tem-se

$$\beta_p = \frac{\pi P S}{2I_p^2} \frac{\int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\frac{F_0 + \gamma G_0}{F_{0m} + \gamma G_{0m}} \right)^2 \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}}}{\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1}}, \quad (2.46)$$

$$\langle \beta_t \rangle = \frac{2\sqrt{P}\alpha^2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\frac{F_0 + \gamma G_0}{F_{0m} + \gamma G_{0m}} \right)^2 \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}}}{4\left(\frac{1}{\sqrt{\rho_1}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_2}}\right) + M\alpha^2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\frac{F_0 + \gamma G_0}{F_{0m} + \gamma G_{0m}} \right)^2 \frac{d\rho}{\rho^{3/2}}}, \quad (2.47)$$

Para a condição de estabilidade $q(\psi)$, encontra-se:

$$q(\psi) = -\frac{I(\psi)}{2\pi k\alpha} \int_{\rho_{\max}}^{\rho_{\min}} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\left(\frac{F_0 + \gamma G_0}{F_{0m} + \gamma G_{0m}} \right)^2 - \psi^2}}, \quad (2.48)$$

onde ρ_{\max} e ρ_{\min} se referem aos limites de integração para uma dada superfície de fluxo

$\psi = \text{constante}$, escolhida.

O fator de segurança no eixo magnético, o qual é dado por $q_m = I(\psi_m)/2\rho_m\sqrt{\Delta}$, neste modelo é escrito como

$$q_m \cong \frac{I(\psi_m)}{2\rho_m k \alpha \left(1 - \frac{2\eta}{\rho_m}\right)^{1/2}}, \quad (2.49)$$

com $I(\psi_m) = \sqrt{1 + M\alpha^2}$. Assim, se a meia altura for o parâmetro de entrada, isto é, se k é conhecido, a equação (2.47) permite obter q_m . Por outro lado, se q_m for dado

$$k^2 = \frac{4\sqrt{P}\eta\alpha^2 - 1}{\alpha^2 \left[1 - 4q_m^2\rho_m^2 \left(1 - \frac{2\eta}{\rho_m}\right)\right]}. \quad (2.50)$$

O campo magnético toroidal é escrito da seguinte forma

$$B_\phi = \frac{I}{R}, \quad (2.51)$$

e as componentes do campo poloidal são dadas por

$$B_z = -\sqrt{P}\alpha \frac{\partial\psi}{\partial\rho}, \quad (2.52)$$

$$B_R = \frac{1}{R}\alpha \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad (2.53)$$

com $B_p = \sqrt{B_R^2 + B_z^2}$.

2.3 - Equilíbrio: Resultados

O programa numérico desenvolvido apresenta quatro parâmetros de entrada, a saber:

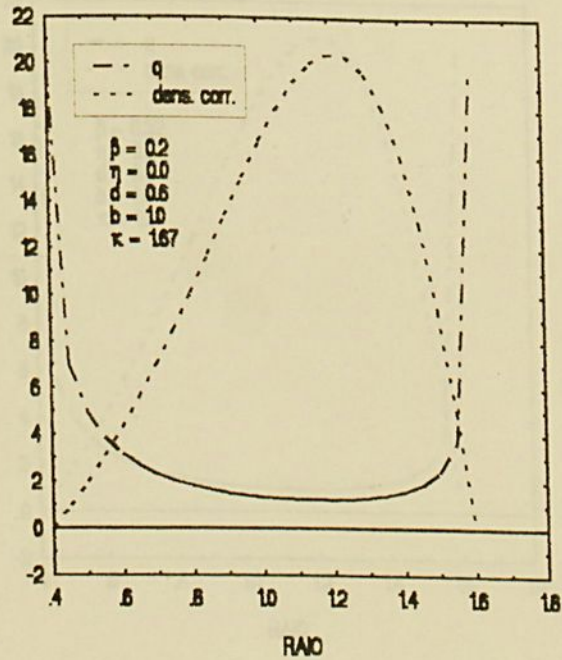
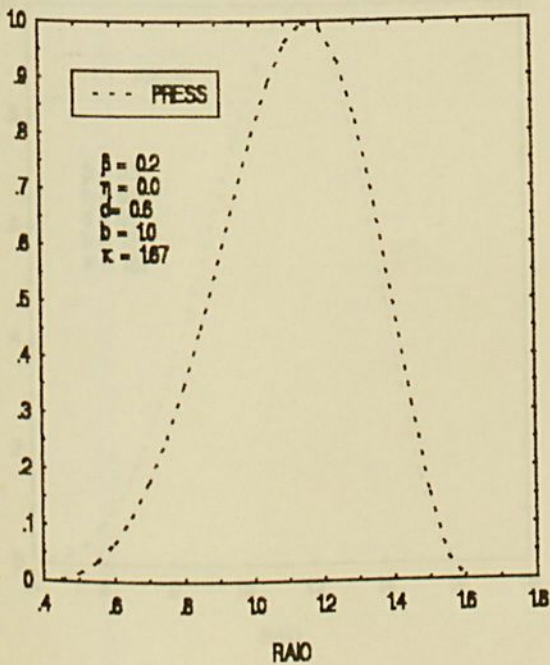
η = parâmetro das funções de onda de Coulomb, que controla o caráter mais ou menos acentuado do efeito paramagnético do plasma, dado que $M = k^2 - 4\sqrt{P}\eta$ e B_ϕ depende de M .

d = meia largura da seção transversal

β_m = valor de β no eixo magnético

b = meia altura da seção transversal, ou o fator de segurança no eixo magnético (q_m).

As figuras 2.4, 2.5 e 2.6 mostram os perfis de pressão, densidade de corrente, fator de segurança e campos poloidal, toroidal (no plasma e no vácuo), para $d=0.6$, $b=1.0$, $\eta=0.0$, com $\beta_m = 0.20, 0.32$ e 0.45 .



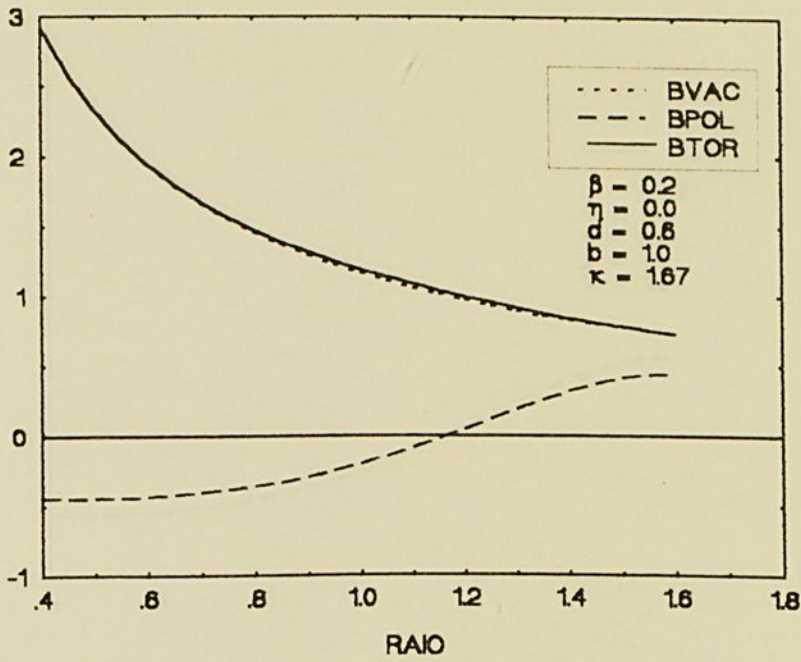
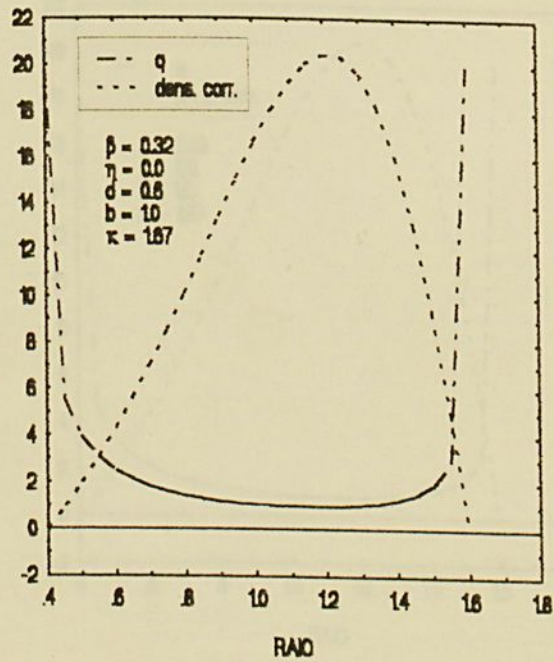
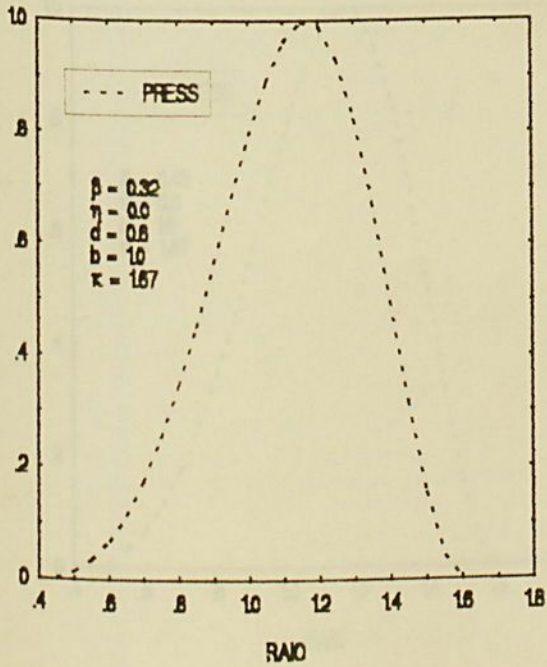


Fig. 2.4 - Perfis normalizados de pressão (p/p_0), densidade de corrente (j/j_0), fator de segurança (q), campos poloidal e toroidal (no plasma e no vácuo) ($B/B\phi_0^v$), para $d=0.6$, $\eta=0.0$, $b=1.0$, $\kappa=1.67$ e $\beta_m=0.20$, onde $R_1 = 0.4$ e $R_2 = 1.6$.



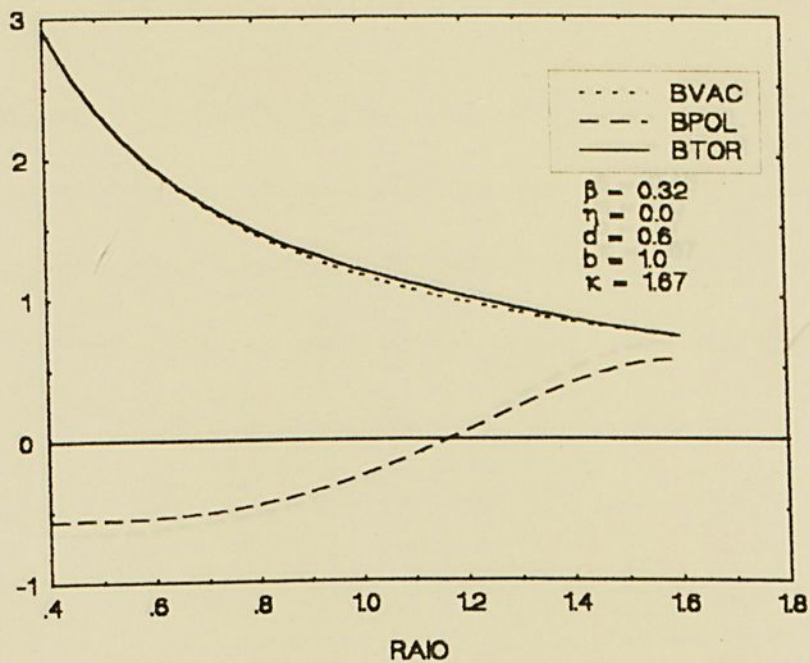
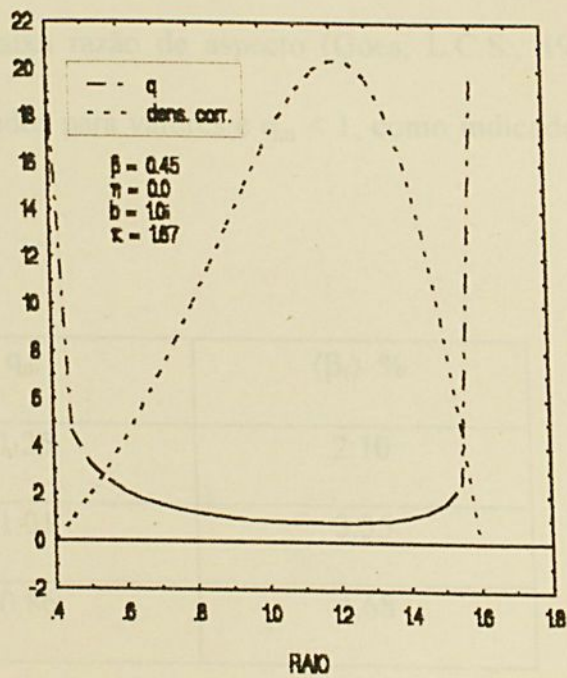
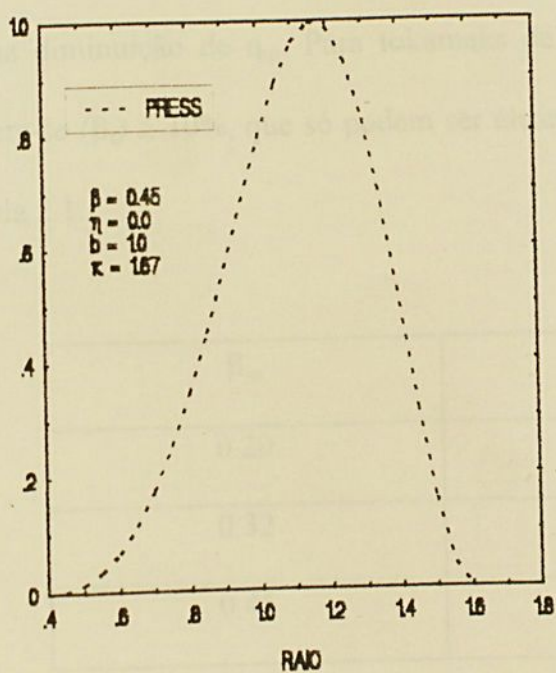


Fig 2.5 - Perfis normalizados de pressão (p/p_0), densidade de corrente (i/i_0), fator de segurança (q), campos poloidal e toroidal (no plasma e no vácuo) ($B/B\phi_0^*$), para $d=0.6$, $\eta=0.0$, $b=1.0$, $\kappa=1.67$ e $\beta_m=0.32$, onde $R_1=0.4$ e $R_2=1.6$.



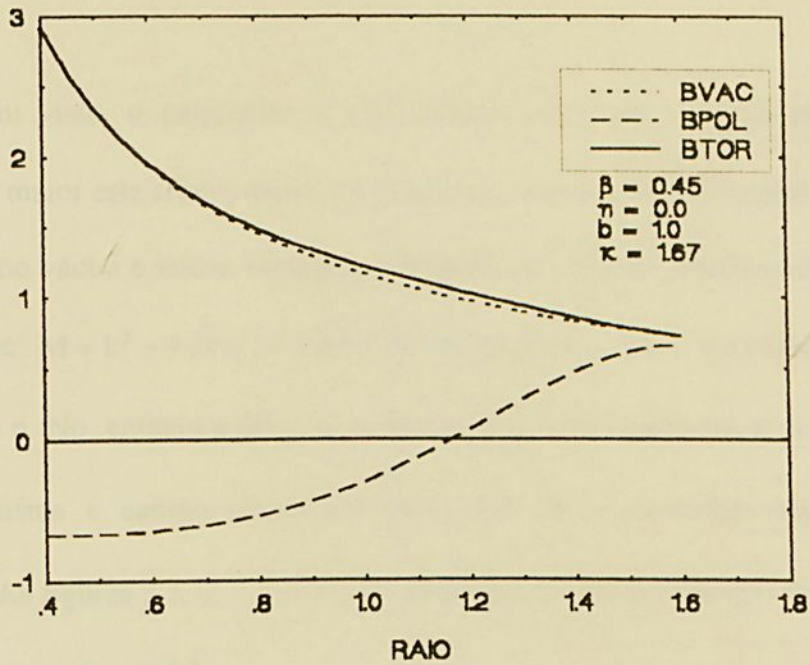


Fig. 2.6 - Perfis normalizados de pressão (p/p_0), densidade de corrente (j/j_0), fator de segurança (q), campos poloidal e toroidal (no plasma e no vácuo) ($B/B\phi_0^y$), para $d=0.6$, $\eta=0.0$, $b=1.0$, $\kappa=1.67$ e $\beta_m=0.45$, onde $R_1 = 0.4$ e $R_2 = 1.6$.

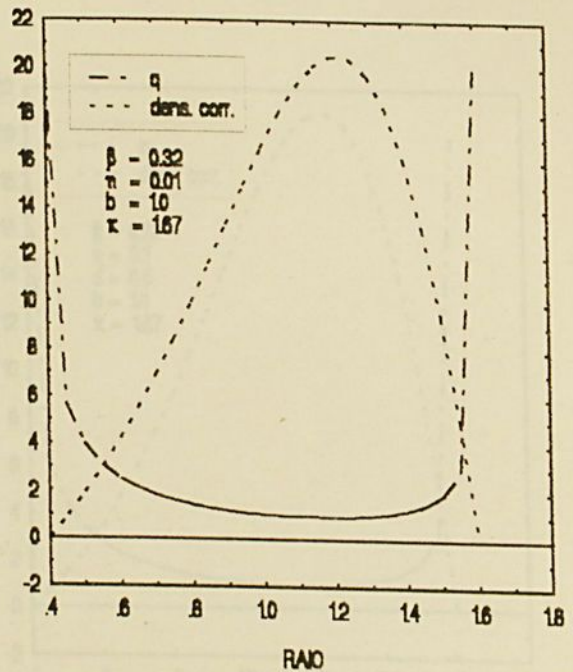
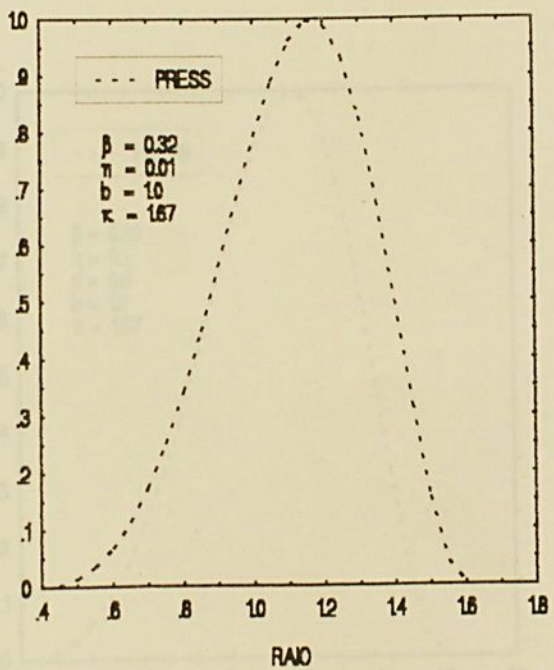
Observa-se que o aumento de β_m , com d , b , e η fixos, se traduz num aumento de $\langle\beta_t\rangle$ e numa diminuição de q_m . Para tokamaks de baixa razão de aspecto (Góes, L.C.S., 1978) espera-se $\langle\beta_t\rangle \cong 10\%$, que só podem ser alcançados para valores e $q_m < 1$, como indicado na tabela 2.1.

β_m	q_m	$\langle\beta_t\rangle$ %
0.20	1.25	2.10
0.32	1.01	3.35
0.45	0.86	4.68

Tabela 2.1 - Variação de q_m e $\langle\beta_t\rangle$ com β_m .



Como foi visto, o parâmetro η está relacionado com o efeito paramagnético do plasma. Quanto maior este efeito, maior é a diferença entre o campo toroidal no plasma e este mesmo campo no vácuo e isso é vantajoso do ponto de vista de confinamento (Roberto, M. 1992). Dado que $M = k^2 - 4\sqrt{P}\eta$, o efeito paramagnético é mais acentuado quanto menor for o parâmetro η . No entanto a diferença observada é muito pequena, e os resultados para a corrente de plasma e campo magnético para $\eta < 0$ não apresentam significados físicos (Apêndice D). As figuras 2.5, 2.7, 2.8 e 2.9, mostram os perfis para $\eta = 0.0, 0.01, 0.1$ e 0.5 , para $d = 0.6, b = 1.0$ e $\beta_m = 0.32$.



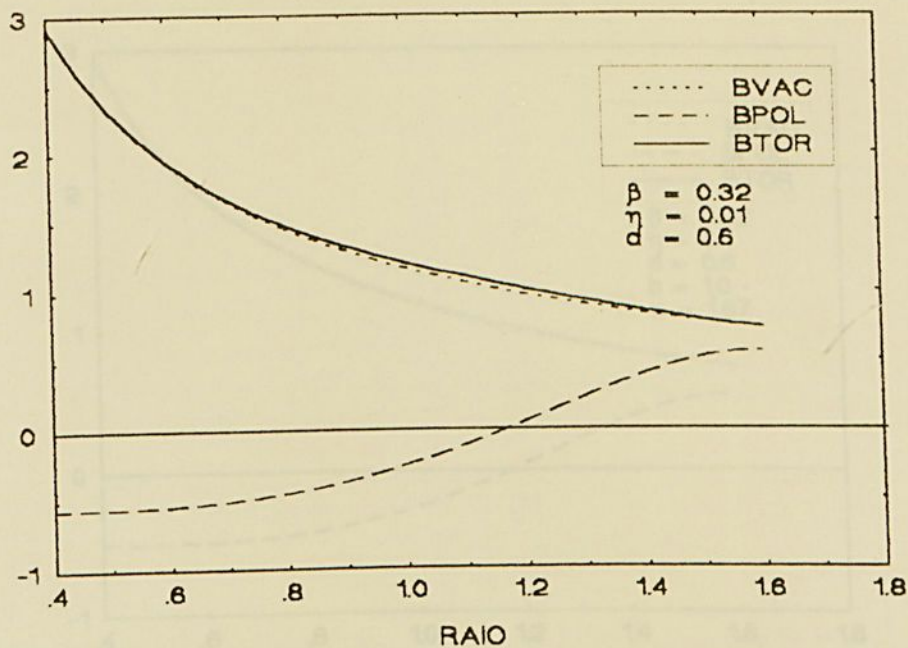
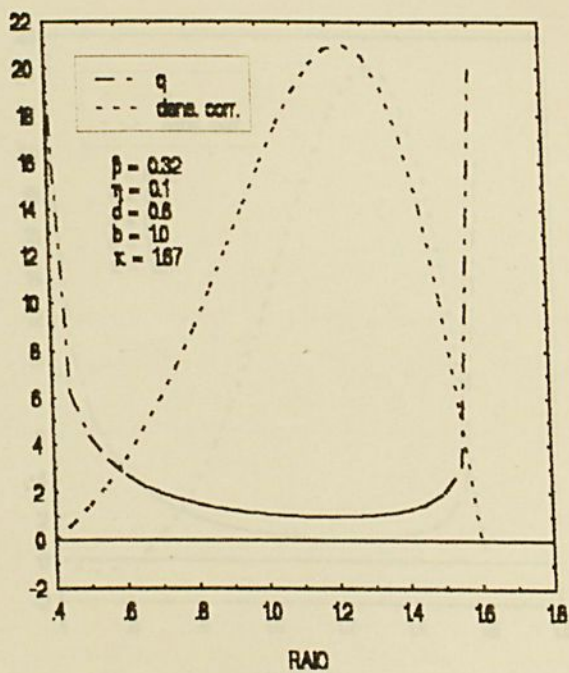
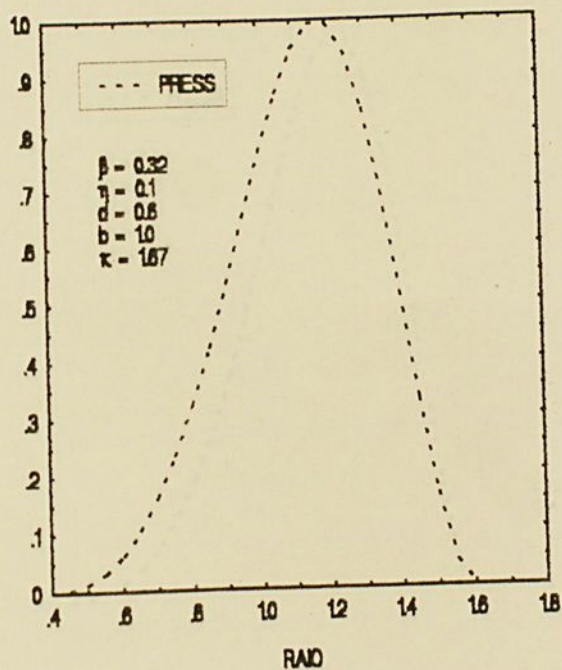


Fig. 2.7 - Perfis normalizados de pressão (p/p_0), densidade de corrente (j/j_0), fator de segurança (q), campos poloidal e toroidal (no plasma e no vácuo) ($B/B\phi_0^v$), para $d=0.6$, $\eta=0.01$, $b=1.0$, $\kappa=1.67$ e $\beta_m=0.32$, onde $R_1=0.4$ e $R_2=1.6$.



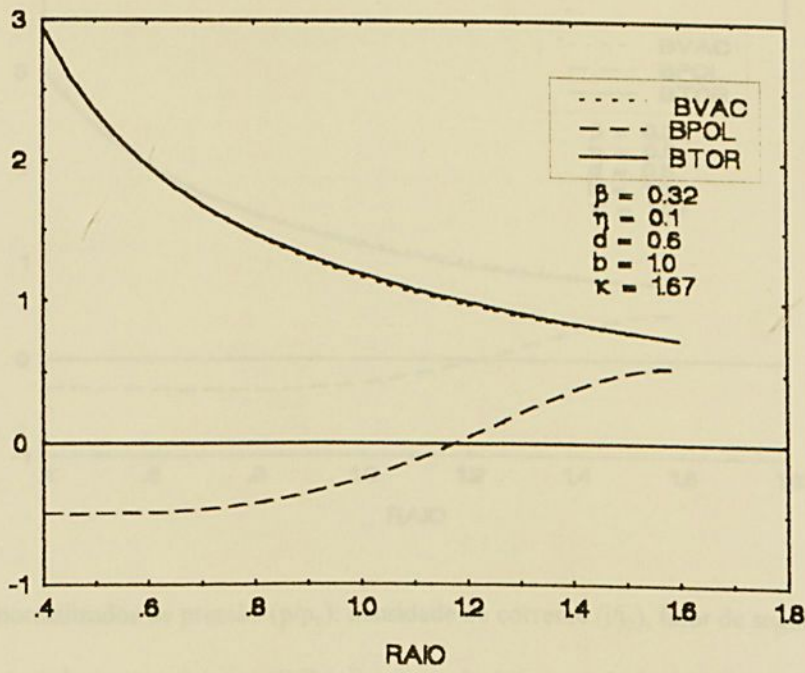
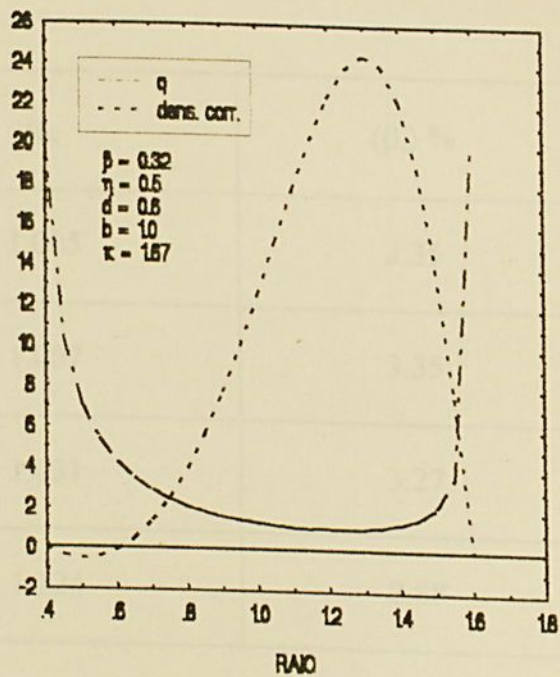
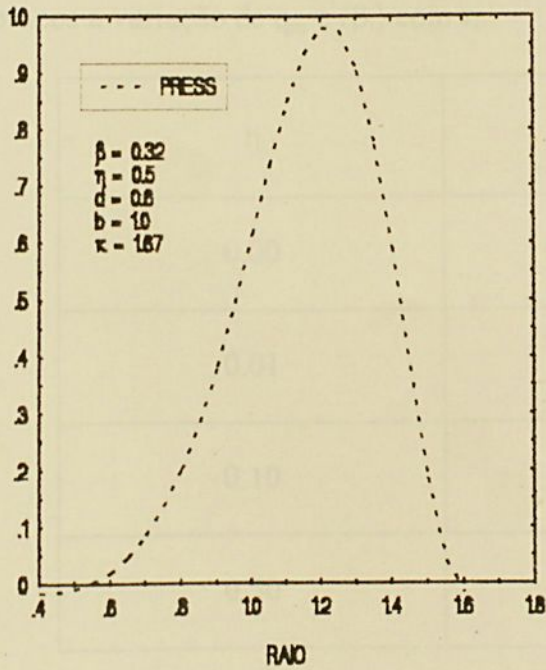


Fig. 2.8 - Perfis normalizados de pressão (p/p_0), densidade de corrente (j/j_0), fator de segurança (q), campos poloidal e toroidal (no plasma e no vácuo) ($B/B\phi_0$), para $d=0.6$, $\eta=0.1$, $b=1.0$, $\kappa=1.67$ e $\beta_m=0.32$, onde $R_1 = 0.4$ e $R_2 = 1.6$.



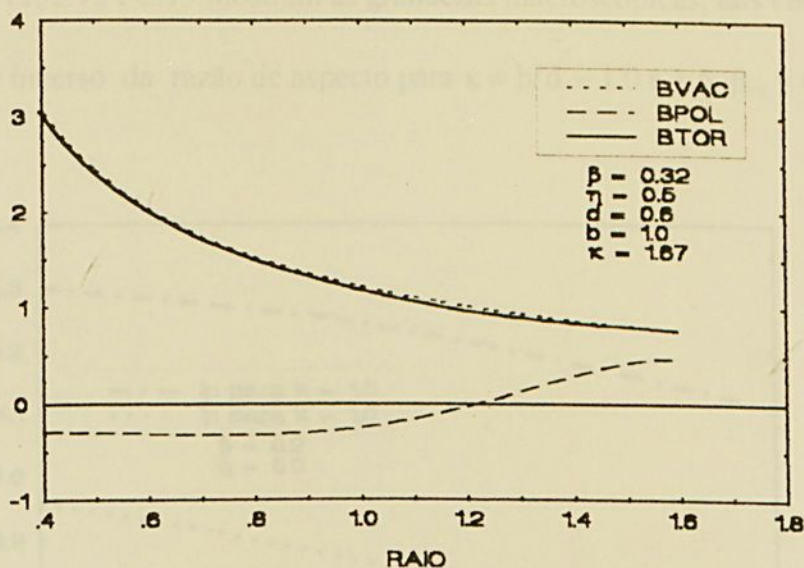


Fig. 2.9 - Perfis normalizados de pressão (p/p_0), densidade de corrente (j/j_0), fator de segurança (q), campos poloidal e toroidal (no plasma e no vácuo) (B/B_{ϕ_0}), para $d=0.6$, $\eta=0.5$, $b=1.0$, $\kappa=1.67$ e $\beta_m=0.20$, onde $R_1 = 0.4$ e $R_2 = 1.6$.

Assim η deve ficar no intervalo $0 \leq \eta \leq 0.1$, pois acima desse valor o perfil da densidade de corrente toroidal passa a ter uma parte negativa, não reproduzindo significado físico. Além disso o perfil do campo poloidal não se anula no eixo magnético. A tabela 2.2 fornece a variação de q_m e $\langle \beta_t \rangle$ com η .

η	q_m	$\langle \beta_t \rangle$ %
0.00	1.005	3.35
0.01	1.007	3.35
0.10	1.031	3.27
0.50	1.124	2.88

Tabela 2.2 - Variação de q_m e $\langle \beta_t \rangle$ com η .



As figuras 2.10, 2.11, 2.12 e 2.13 mostram as grandezas macroscópicas, tais como I_p , q_m , $\langle \beta_r \rangle$ e β_p em função do inverso da razão de aspecto para $\kappa = b/d = 1.0$ e 1.5 , $\beta_m = 0.20$ e $\eta = 0$.

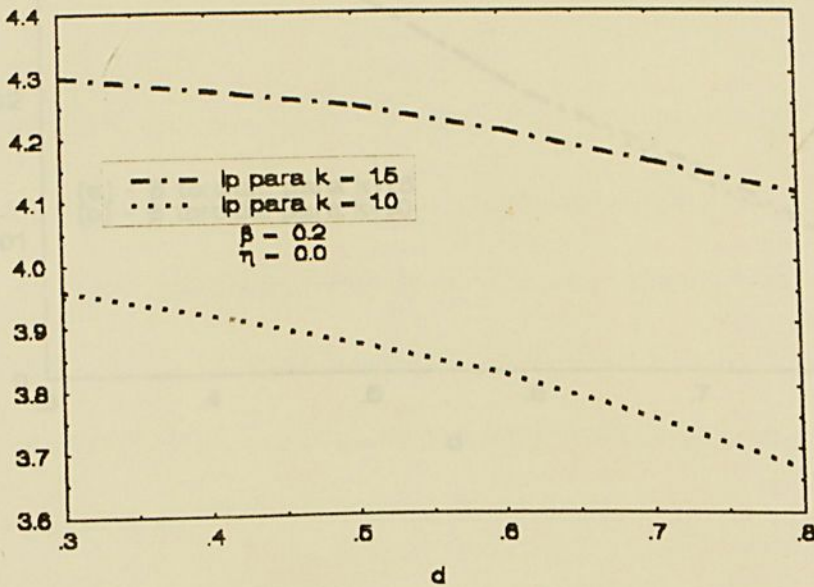


Fig. 2.10 - Variação da corrente de plasma ($I_p = I_p/I_0$) em função do inverso da razão de aspecto (d) para $\kappa=1.0$ e 1.5 .

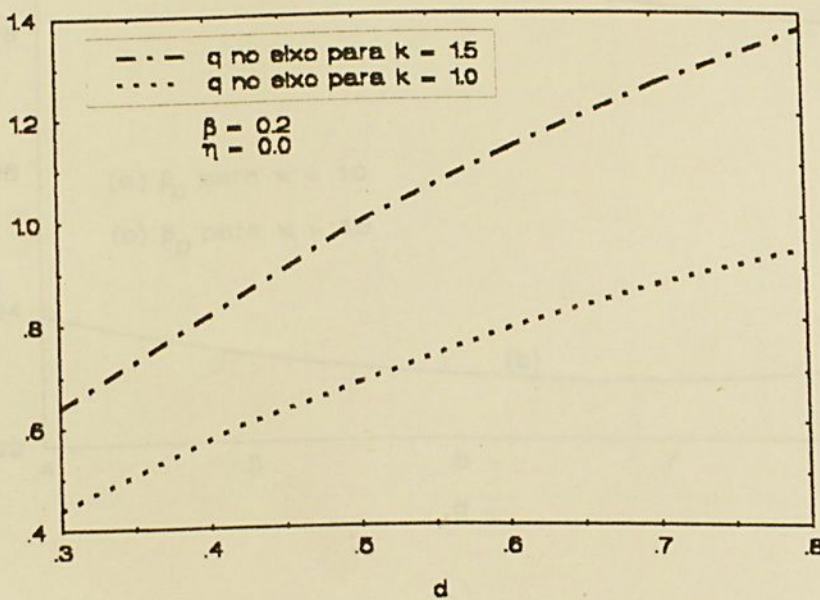


Fig. 2.11 - Variação do fator de segurança no eixo magnético (q_m) em função do inverso da razão de aspecto (d) para $\kappa=1.0$ e 1.5



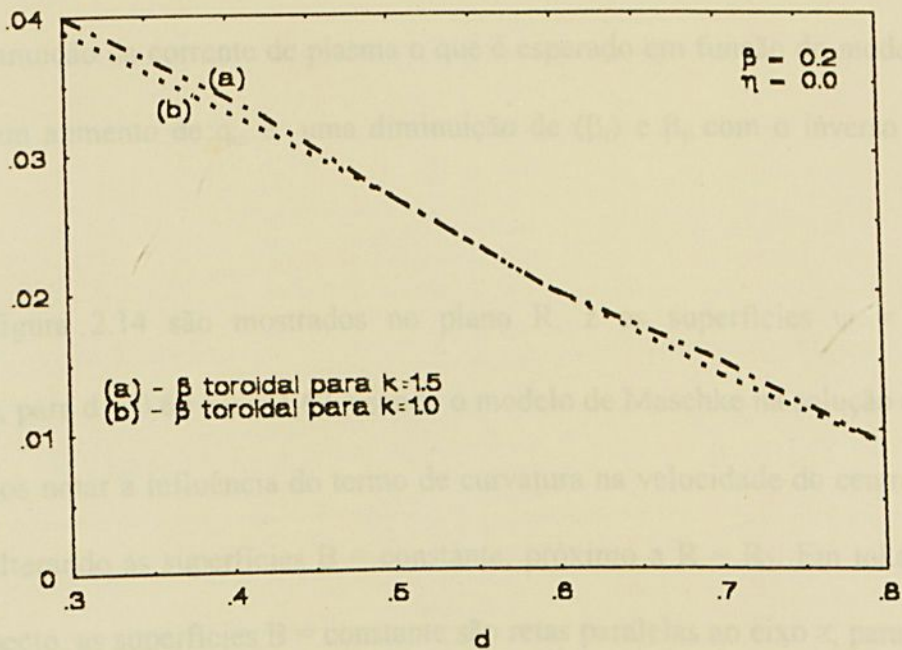


Fig 2.12 - Variação de β_t em função do inverso da razão de aspecto (d) para $\kappa=1.0$ e 1.5 .

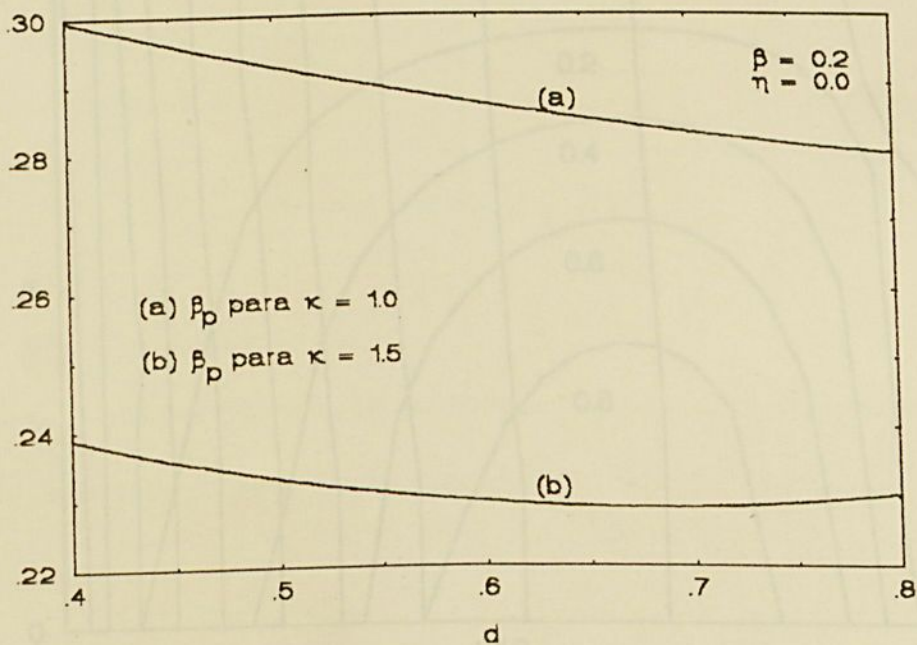


Fig 2.13 - Variação de β_p em função do inverso da razão de aspecto (d) para $\kappa=1.0$ (a) e 1.5 (b).

Podemos observar que com o aumento do inverso da razão de aspecto (d), ocorre uma pequena diminuição da corrente de plasma o que é esperado em função do modelo proposto. Observa-se um aumento de q_m e uma diminuição de $\langle \beta_i \rangle$ e β_p com o inverso da razão de aspecto.

Na figura 2.14 são mostrados no plano R, z as superfícies $\psi = \text{constante}$ e $B = \text{constante}$, para $d = 0.60$ e $\kappa = 1.67$, usando o modelo de Maschke na solução de equilíbrio, onde podemos notar a influência do termo de curvatura na velocidade do centro de guia das partículas, alterando as superfícies $B = \text{constante}$, próximo a $R = R_2$. Em tokamaks de alta razão de aspecto, as superfícies $B = \text{constante}$ são retas paralelas ao eixo z , para todo R , dado que o termo de gradiente domina sobre o termo de curvatura.

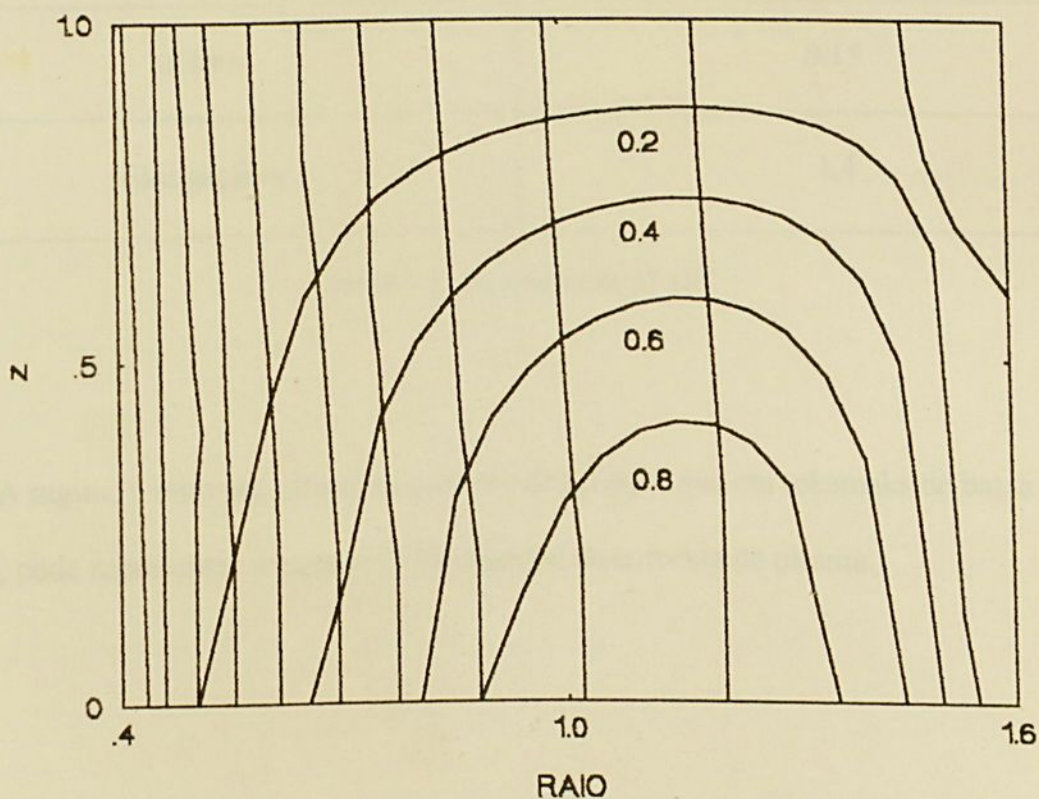


Figura 2.14 - Superfícies $\psi = \text{constante}$ e $B = \text{constante}$ no plano R, Z , para $d = 0.60$, $\kappa = 1.67$, $\eta = 0.0$ e $\beta_m = 0.32$.

Atualmente encontra-se em operação o START, um tokamak de baixa razão de aspecto ($A=1.33$), montado no Laboratório de Culham, na Inglaterra. Abaixo temos alguns dados (Sykes, A. et alli; Colchim, R.J. et alli) referentes a este tokamak:

Parâmetros	Valores Experimentais
densidade (m^{-3})	0.5×10^{20}
Corrente de Plasma I_p (KA)	110
Campo B (T)	0.48
R (m)	0.2
a (m)	0.15
Elongação κ	1,4

Tabela 2.3 - Parâmetros do START

A seguir, é feito um estudo da corrente de reforço, que em tokamaks de baixa razão de aspecto, pode representar uma parcela substancial da corrente de plasma.



CAPÍTULO 3 - CORRENTE DE REFORÇO

3.1 - Introdução

A teoria de transporte neoclássica em configurações com simetria axial mostra que a corrente de reforço é gerada pelas colisões de partículas aprisionadas em órbitas banana com as partículas circulantes (Hinton, F.L. & Hazeltine, R.D., 1976). Como existe um gradiente de densidade nessas configurações, um maior número de partículas se encontram nas órbitas bananas mais internas do que externas. Devido a esse gradiente, os elétrons aprisionados colidindo com os passantes e com os íons, produzem uma velocidade de deriva dos elétrons passantes, o qual produz uma corrente na direção toroidal, que é chamada corrente de reforço (Myamoto, 1976).

As partículas carregadas dentro de um toróide sofrem a influência dos campos magnéticos toroidal e poloidal, que possuem termos de gradiente e curvatura. Algumas das partículas existentes na região de campo magnético fraco ($B \propto 1/R$), que compreende a região mais externa do toróide, podem ficar aprisionadas, se possuírem uma velocidade paralela ao campo magnético suficientemente pequena, de modo que as mesmas não escapam dessa região. Isso é análogo ao que acontece no espelho magnético, onde partículas também ficam aprisionadas, dependendo de sua velocidade paralela.

A partícula aprisionada dentro do campo magnético do toróide executa um movimento cujo centro de guia descreve uma trajetória que lembra a forma de uma "banana"; daí as órbitas dessas partículas chamarem-se órbitas banana. Na figura 3.1 é mostrada uma



representação qualitativa da projeção no plano R,z da órbita banana de um íon, supondo um plasma com seção transversal circular (Myamoto, 1976).

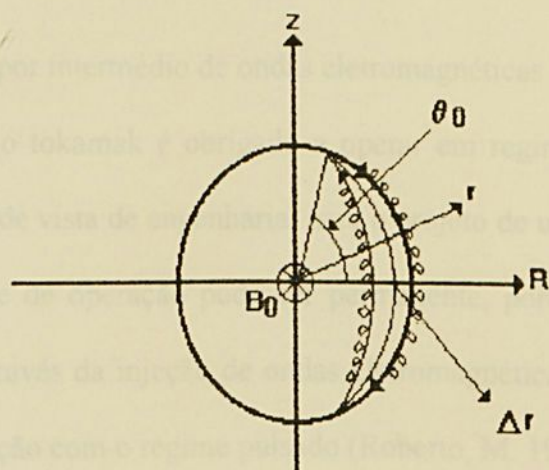


Fig. 3.1 - Órbita de um íon, onde Δr é a largura da órbita, B_0 é o campo magnético no eixo geométrico e θ_0 é o ângulo no qual $v_{\text{paralela}} = 0$

Observa-se que a razão de aspecto tem forte influência tanto na largura como no comprimento das órbitas, isto é, tokamaks de grande razão de aspecto apresentam órbitas pequenas e largas em comparação com os de pequena razão de aspecto, que apresentam órbitas longas e finas, para uma dada energia. A razão dessa modificação está na alteração das superfícies $B = \text{constante}$, quando ocorre variação na razão de aspecto. Para altos valores de $A=R_0/d$, o campo total cai essencialmente com $1/R$, desprezando-se com isso o efeito de curvatura das linhas de campo na equação para a velocidade do centro de guia das partículas, levando em conta basicamente efeitos de gradiente do campo. Isto não pode ser feito à medida que A diminui, onde as superfícies $\psi = \text{constante}$ são quase paralelas a $B = \text{constante}$; assim sendo o efeito de curvatura do campo é dominante, tornando a órbita estreita e longa (Rome, J. A. & Peng, Y-K.M., 1979.; Roberto, M., 1994).

Existem duas maneiras para gerar corrente na coluna toroidal do plasma, mantendo-a em equilíbrio (Roberto, M. 1992):

- 1) o método convencional, baseado na geração indutiva de corrente através da ação de um transformador.
- 2) geração de corrente por intermédio de ondas eletromagnéticas.

No processo 1 o tokamak é obrigado a operar em regime pulsado, que apresenta a desvantagem do ponto de vista de engenharia, para o projeto de um reator comercial de fusão. No método 2 o regime de operação pode ser permanente, porém os resultados obtidos na geração de corrente através da injeção de ondas eletromagnéticas tem se mostrado de baixa eficiência em comparação com o regime pulsado (Roberto, M. 1992).

Por este motivo a importância da inclusão da corrente de reforço, como uma parte da corrente toroidal necessária ao confinamento pode tornar viável a operação de tais dispositivos em regime permanente. A determinação experimental do perfil de corrente em tokamaks é uma medida extremamente difícil e ainda imprecisa. Por isso a corrente de reforço não pode ainda ser observada de forma direta. Desta forma análises por simulação numérica da evolução da descarga em grandes e pequenos tokamaks sugerem fortemente que uma parcela grande da corrente toroidal é obtida pelo efeito "bootstrap" (Kikuchi, 1990; Connor, J.W.O, 1987).

3.2 - Cálculo da Corrente de Reforço

Para este cálculo será utilizada a expressão para corrente de reforço no regime de baixa colisionalidade e razão de aspecto arbitrária obtida por Hirshman. A expressão para a



corrente foi obtida da solução das equações de balanço de momento e fluxo de calor para elétrons e íons, com resultado dado por (Hirshman, S.P. 1988)

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{B} \rangle = L_{31} \left[A_1^e + \frac{1}{Z_i} \frac{T_i}{T_e} (A_1^i + \Lambda A_2^i) \right] + L_{32} A_2^e \quad (3.1)$$

onde os coeficientes de transporte são dados por:

$$L_{31} = \frac{j_0 x \left[0.754 + 2.21 Z_i + Z_i^2 + x (0.348 + 1.243 Z_i + Z_i^2) \right]}{D(x)} \quad (3.2)$$

$$L_{32} = -j_0 x \left[\frac{(0.884 + 2.074 Z_i)}{D(x)} \right] \quad (3.3)$$

$$\Lambda = -1.172 / (1 + 0.465x) \quad (3.4)$$

$$D(x) = 1.414 Z_i + Z_i^2 + x (0.754 + 2.657 Z_i + 2 Z_i^2) + x^2 (0.348 + 1.243 Z_i + Z_i^2) \quad (3.5)$$

A variável x representa a fração das partículas aprisionadas e circulantes no espaço de velocidades, isto é, $x = f_i / f_c$.

- a notação $\langle \chi \rangle$ significa a média feita sobre uma superfície de fluxo, dado por:

$$\langle \chi \rangle = \frac{\oint \left[\frac{\chi dl}{B_p} \right]}{\oint \left[\frac{dl}{B_p} \right]} \quad (3.6)$$

onde B_p é o campo magnético poloidal.

- A_1^α e A_2^α são as forças termodinâmicas, para elétrons (índice e) e íons (índice i),

dadas por:

$$A_1^\alpha = \frac{\partial p_\alpha}{\partial \psi} \frac{1}{p_\alpha} \quad (3.7)$$

e

$$A_2^\alpha = \frac{\partial T_\alpha}{\partial \psi} \frac{1}{T_\alpha} \quad (3.8)$$

onde p_α e T_α são pressão e temperatura, respectivamente.

O termo j_0 é escrito como:

$$j_0 = -\frac{2\pi I}{\chi} cpe \quad (3.9)$$

sendo $I = RB_\phi$, $\chi' = 2\pi RB_p / |\vec{\nabla}\psi|$ e c a velocidade da luz (Hirshman, S.P. & Sigmar, D. J., 1981).

Os perfis de pressão e temperatura estão sendo supostos iguais, de tal forma que $T_\alpha = p_\alpha = p$. Dessa forma a expressão (3.1) fica reduzida a:

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{B} \rangle = -2\pi I c \frac{dp}{d\psi} x \left[A(x) + \frac{A(x)}{Z} + \frac{\Lambda(x)A(x)}{Z} - B(x) \right], \quad (3.10)$$

onde $A(x) = L_{31}/j_0 x$ e $B(x) = -L_{32}/j_0 x$.



A fração das partículas circulantes obtida da teoria de transporte neoclássica é dada por (Hirshman, S.P., 1988; Hirshman, S.P. & Sigmar, D. J., 1981)

$$f_c = \frac{3}{4} \frac{\langle B^2 \rangle}{B_{\text{máx}}^2} \int_0^1 \frac{\lambda d\lambda}{\left\langle \sqrt{1 - \frac{\lambda B}{B_{\text{máx}}}} \right\rangle}; \quad (3.11)$$

considerando o modelo de Maschke, tem-se:

$$\left\langle \sqrt{1 - \frac{\lambda B}{B_{\text{máx}}}} \right\rangle = \frac{\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{dl(\rho)}{B_p(\rho)} \sqrt{1 - \frac{\lambda B}{B_{\text{máx}}}}}{\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{dl(\rho)}{B_p(\rho)}}. \quad (3.12)$$

A variável de integração λ na equação (3.11) é o *pitch angle*, ou seja, o momento magnético μ dividido pela energia total das partículas E , isto é, $\lambda = \mu/E$. A velocidade paralela ao campo magnético escrita em termos de λ é dada por $v_{\parallel} = \pm v \sqrt{1 - \lambda B}$. Assim, as partículas aprisionadas se encontram na região onde

$$\frac{1}{B_{\text{máx}}} < \lambda < \frac{1}{B_m}$$

e as partículas circulantes na região $0 < \lambda < 1/B_{\text{máx}}$, daí o extremo de integração na equação (3.11) ir de zero a um (Robeto M., 1992).

Primeiro vamos calcular o valor de $B_{\text{máx}}$, para o modelo de Maschke, usando para isso uma superfície ψ escolhida, onde os limites ρ_- e ρ_+ se referem a esta superfície. Para $\eta=0$, $\psi = \left[(\sin \rho + \gamma \cos \rho) \cos(kz) \right] / \psi_m$. Para o cálculo dos limites ρ_- e ρ_+ , faz-se $z=0$, com

$$\rho = \arcsen u \quad (3.13)$$

onde:

$$u = \frac{2Y \pm \sqrt{4Y^2 - 4(\gamma^2 + 1)(Y^2 - \gamma^2)}}{2(\gamma^2 + 1)}, \quad (3.14)$$

com $Y = \psi(\rho, 0)\psi_m$. As raízes da equação (3.14) fornecem os valores de ρ_- e ρ_+ .

A fim de encontrar o valor máximo de B faz-se $B(\rho, 0)$ para uma dada superfície ψ

com $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$ e $\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \cos \rho - \gamma \sin \rho$, ficando

$$B_{\text{máx.}} = \left\{ \frac{1}{R^2} (1 + M\alpha^2 \psi^2) + \alpha^2 P \left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.15)$$

Para o cálculo de $\langle B^2 \rangle$, utiliza-se a expressão (3.6), que fornece:

$$\langle B^2 \rangle = \frac{\int \frac{dl B^2}{B_p}}{\int \frac{dl}{B_p}}. \quad (3.16)$$

A expressão dl é dada por

$$dl = \sqrt{dR^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dz}{dR} \right)^2 + 1} dR, \quad (3.17)$$

com $z = z(\rho)$ escrito como

$$z(\rho) = \cos^{-1} \left[\frac{\psi \psi_m}{F_0 + \gamma G_0} \right] \frac{1}{k} \quad (3.18)$$

e

$$\frac{dz}{d\rho} = \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\psi \psi_m}{F_0 + \gamma G_0} \right)^2}} \frac{(\psi \psi_m) F_0' + \gamma G_0'}{(F_0 + \gamma G_0)^2}. \quad (3.19)$$

Mas $dR/d\rho = P^{-1/4}/(2\rho)^{1/2}$; fazendo $dF_0/d\rho = F_0'$ e $dG_0/d\rho = G_0'$, para simplificar a notação, pode-se escrever a expressão para dl na forma

$$dl = \sqrt{1 + \frac{2\rho}{P^{-1/2}} \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2} \frac{P^{-1/4}}{(2\rho)^{1/2}} d\rho. \quad (3.20)$$

Partindo das equações para os campos magnéticos poloidal e toroidal, tem-se:

$$B_p^2 = B_z^2 + B_R^2, \quad (3.21)$$

com

$$B_p = \alpha \left[P \left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.22)$$

Sendo

$$B^2 = B_\phi^2 + B_p^2 \quad (3.23)$$

tem-se

$$B^2 = \left\{ \frac{1}{R^2} (1 + M\alpha^2 \psi^2) + \alpha^2 \left[P \left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 \right] \right\}. \quad (3.24)$$

Substituindo (3.24) na expressão (3.16) encontra-se:

$$\langle B^2 \rangle = \frac{\int_{\rho_-}^{\rho_+} \sqrt{1 + \frac{2\rho\sqrt{P}}{k^2} \left[1 - \left(\frac{\psi\psi_m}{F_0 + \gamma G_0} \right)^2 \right] \left[\frac{\psi\psi_m(F_0' + \gamma G_0')}{(F_0 + \gamma G_0)^2} \right]^2} \frac{P^{1/4}}{(2\rho)^{1/2}} B^2 d\rho}{\alpha \left[P \left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (3.25)$$

Como está se considerando $\eta=0$, tem-se

$$F_0 = \text{sen } \rho$$

$$G_0 = \text{cos } \rho$$

$$F_0' = \text{cos } \rho$$

$$G_0' = -\text{sen } \rho$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = (\text{cos } \rho - \gamma \text{sen } \rho) \text{cos}(kz)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = -k(\text{sen } \rho + \gamma \text{cos } \rho) \text{sen}(kz).$$



Adotando $z = 0$, teremos finalmente, para uma superfície ψ escolhida:

$$\langle B^2 \rangle = \frac{\int_{\rho_-}^{\rho_+} \sqrt{1 + \frac{2\rho\sqrt{P}}{k^2} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\psi\psi_m}{\text{sen } \rho + \gamma \text{cos } \rho}\right)^2\right]}} \left[\frac{\psi\psi_m(\text{cos } \rho - \gamma \text{sen } \rho)}{(\text{sen } \rho + \gamma \text{cos } \rho)^2} \right]^2 \frac{P^{1/4}}{(2\rho)^{1/2}} B^2_{\text{es}} d\rho}{\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{P^{1/4}}{(2\rho)^{1/2}} d\rho} \frac{\alpha [P(\text{cos } \rho - \gamma \text{sen } \rho)]^{1/2}}{\alpha [P(\text{cos } \rho - \gamma \text{sen } \rho)]^{1/2}}$$

para

$$B^2_{\text{es}} = \left\{ \frac{\sqrt{P}}{2\rho} (1 + M\alpha^2 \psi^2) + \alpha^2 [P(\text{cos } \rho - \gamma \text{sen } \rho)] \right\} \quad (3.26)$$

Desta forma é possível calcular o valor de x , pois $x = f_1/f_c$, onde $f_1 = 1 - f_c$. A Figura 3.2 apresenta o parâmetro x calculado usando os modelos de Soloviev (Roberto, M., 1992), Maschke (Maschke, E.K. 1973) e os resultados obtidos por Hirshman (Hirshman, S.P., 1988; Hirshman, S.P. & Sigmar, D. J., 1981).

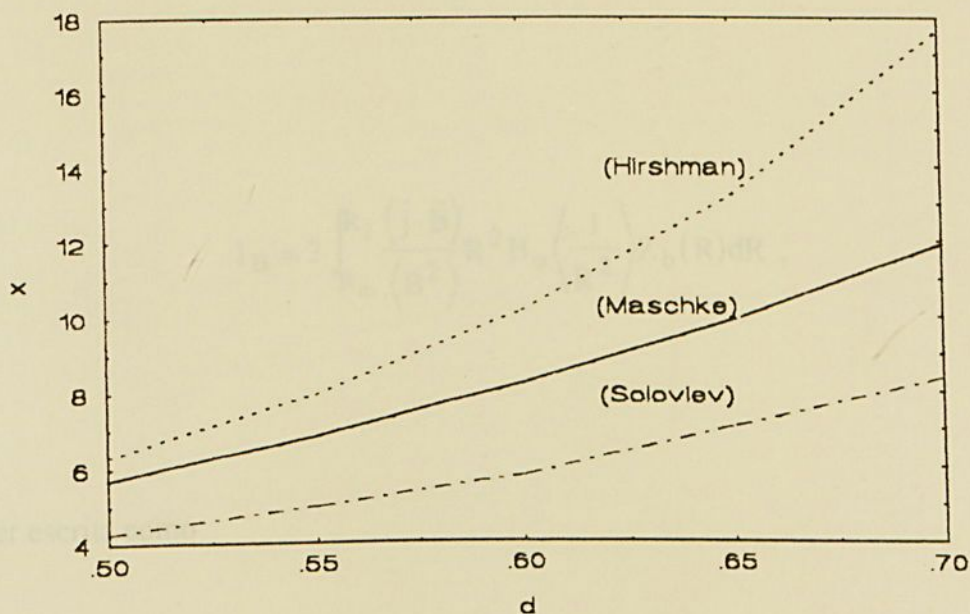


Fig. 3.2 -O parâmetro x em função do inverso da razão de aspecto, para os modelos de Maschke, Soloviev e Hirshman.

Passando a expressão (3.10) para o sistema MKS e normalizando-a com relação a $\psi_m B_{\phi 0}^v / 2\mu_0 R_0^3$, encontra-se:

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{B} \rangle = -I(\psi) \frac{dp}{d\psi} P_x \left[A(x) + \frac{A(x)}{Z} + \frac{\Lambda(x)A(x)}{Z} - B(x) \right] \quad (3.27)$$

onde $I(\psi) = RB\phi$. Impurezas não estão sendo levadas em considerações tal que $Z = 1$.

Finalmente a corrente de reforço é obtida através da expressão (Sakanaka, P. H; & Tokuda, S, 1991.)

$$I_B = \frac{1}{2\pi} \int_v \frac{\langle \vec{j} \cdot \vec{B} \rangle}{\langle B^2 \rangle} I \left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle dV \quad (3.28)$$

com $dV = 2\pi R dR dz$.

Assim,

$$I_B = 2 \int_{R_m}^{R_2} \frac{\langle \bar{j} \cdot \bar{B} \rangle}{\langle B^2 \rangle} R^2 B_\phi \left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle Z_b(R) dR, \quad (3.29)$$

que pode ser escrita como

$$I_B = 2 \int_{\rho_m}^{\rho_2} \frac{\langle \bar{j} \cdot \bar{B} \rangle}{\langle B^2 \rangle} \frac{2\rho}{\sqrt{P}} B_\phi \left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle b d\rho. \quad (3.30)$$

A Figura 3.3 mostra os resultados obtidos para a fração da corrente de reforço em comparação com a corrente de plasma, para o modelo de Maschke, segundo o código numérico desenvolvido a partir das expressões apresentadas. Esta figura mostra que para alongação maior do que zero a fração da corrente aumenta de 12% ($\kappa=1.0$) para 24%. ($\kappa=1.5$). Pode ser observado que existe um aumento da corrente com a diminuição da razão de aspecto, dado que no limite de grande razão de aspecto, a corrente bootstrap é proporcional a $\sqrt{d}\beta_p$, e para o Modelo de Maschke β_p é aproximadamente constante, com d .



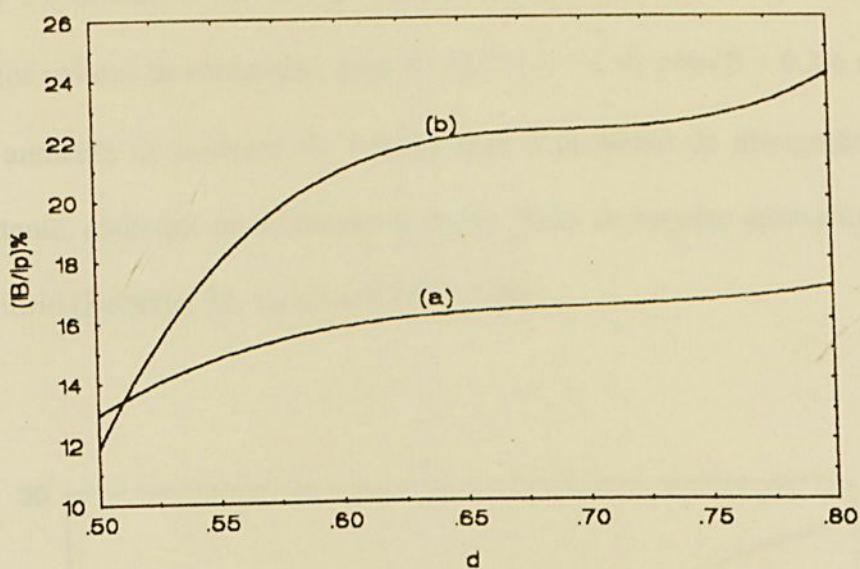


Fig. 3.3 Curvas da razão entre a corrente bootstrap e a corrente de plasma para vários valores da razão de aspecto, para $\kappa = 1.0$ (a) e $\kappa = 1.5$ (b).

Na Figura 3.4 é apresentado uma comparação dos resultados da corrente de reforço para o modelo de Maschke e o de Soloviev. Pode ser observado um patamar entre $d \cong 0.55$ e $d = 0.7$, que se apresenta como uma região favorável para a construção de tokamaks de baixa razão de aspecto.

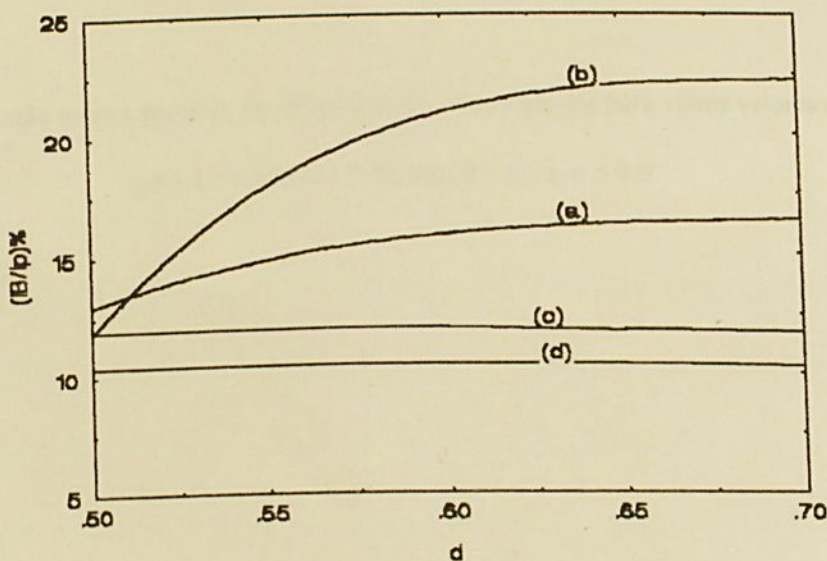


Fig. 3.4 Curvas da razão entre a corrente de reforço e a corrente de plasma para vários valores da razão de aspecto, para o modelo de Maschke, $\kappa = 1.0$ (a) e $\kappa = 1.5$ (b), e modelo de Soloviev, $\kappa = 1.0$ (d) e $\kappa = 1.5$ (c).



A Figura 3.5 mostra o gráfico da razão entre corrente de reforço e a corrente de plasma para vários valores de alongação, para $d = 0.67$ ($A = 1.5$), com $\beta = 0.2$ e $\eta = 0.0$, onde se observa um aumento da corrente de reforço com o aumento da alongação. Este é um resultado importante, dado que os tokamaks de baixa razão de aspecto apresentam alongação natural no equilíbrio (Roberto, M; Galvão, R.M.O. 1992).

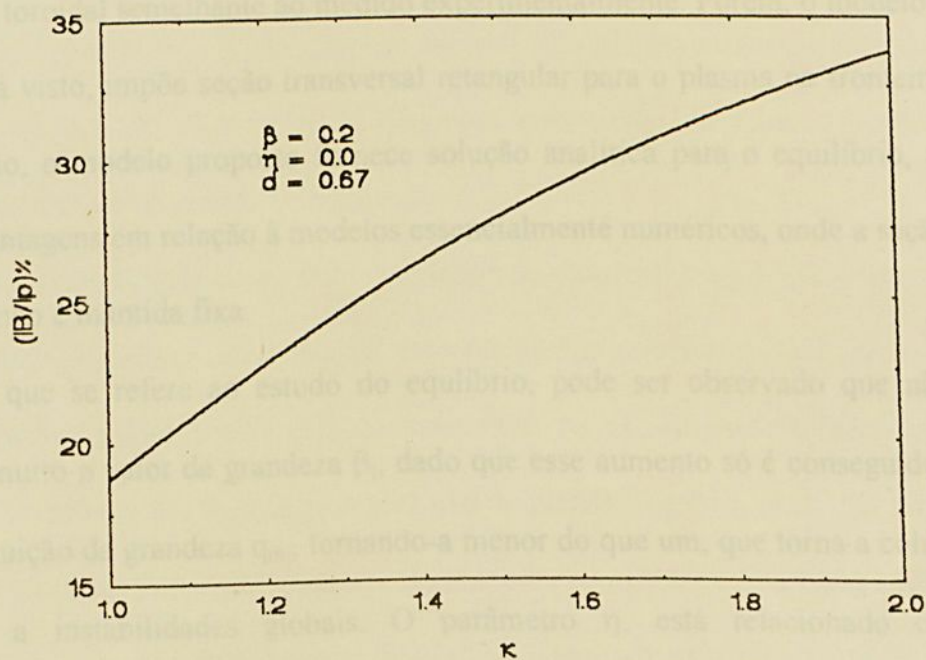


Fig. 3.5 - Curva da razão entre a corrente de reforço e a corrente de plasma para vários valores de alongação (κ), para $d = 0.67$ ($A = 1.5$), com $\beta = 0.2$ e $\eta = 0.0$.

CAPÍTULO 4- CONCLUSÕES

O trabalho aqui desenvolvido tornou possível a obtenção das grandezas macroscópicas que definem o equilíbrio MHD, adotando o modelo de Maschke na solução da equação de Grad-Shafranov. Com este modelo foi obtida a solução analítica para o equilíbrio, com perfil de corrente toroidal semelhante ao medido experimentalmente. Porém, o modelo de Maschke conforme já visto, impõe seção transversal retangular para o plasma na fronteira. Apesar de tal limitação, o modelo proposto fornece solução analítica para o equilíbrio, apresentando algumas vantagens em relação à modelos essencialmente numéricos, onde a seção transversal do plasma não é mantida fixa.

No que se refere ao estudo do equilíbrio, pode ser observado que não é possível aumentar muito o valor da grandeza β_i , dado que esse aumento só é conseguido às custas de uma diminuição da grandeza q_m , tornando-a menor do que um, que torna a coluna de plasma suscetível a instabilidades globais. O parâmetro η , está relacionado com o efeito paramagnético, isto é, $B_{\text{plasma}} > B_{\text{vácuo}}$. Neste modelo quanto menor o valor de η mais acentuado é o efeito paramagnético. No entanto valores negativos de η não produzem resultados com significado físico, devendo η ficar no intervalo entre 0.0 e 0.1.

Neste trabalho foi desenvolvido também o cálculo da corrente de reforço, importante no estudo sobre o aquecimento nos tokamaks. Se esta corrente representar uma parcela significativa da corrente de plasma é possível a operação dos reatores em regime permanente. Com a diminuição da razão de aspecto há um aumento no número de partículas aprisionadas descrevendo órbitas bananas, assim espera-se um aumento da corrente de reforço. Para o modelo de Masckhe a corrente de reforço apresentou valores que variam de 12 % a 24 %,



com o aumento da elongação. Estes valores foram comparados com os obtidos pelo modelo de Soloviev, que apresenta uma seção transversal que permite incluir o efeito de triangularidade, porém com perfil de corrente linear, portanto mais distante dos resultados experimentais.

Uma das conclusões mais importantes deste trabalho foi a comparação entre os dois modelos onde se observou uma região na qual a corrente de reforço manteve-se aproximadamente constante com o inverso da razão de aspecto. Acima de um determinado valor de d observa-se que a corrente de reforço não sofre aumento significativo. Dada a dificuldade prática de construção de tokamaks com razão de aspecto muito pequena, o patamar observado é de grande importância.

Como continuação deste trabalho sugere-se uma comparação dos resultados obtidos para a corrente de reforço com códigos essencialmente numéricos, onde talvez seja possível encontrar valores maiores para esta corrente. Seria ainda interessante fazer uma análise do cálculo do invariante adiabático J , o qual está relacionado com a condição de estabilização dos modos de partículas aprisionadas. Tais modos dependem da configuração do campo poloidal, o que é gerado pela corrente de plasma. Com isso seria possível investigar qual tipo de configuração é estável a tais modos.



APÊNDICE A

A.1-Dedução das Equações que Determinam a Posição do Eixo Magnético

Visto que $p=p(\psi)$ e como $\psi=\psi(R,z)$, $p=p(R,z)$. Tem-se que a condição para que uma função $F(x,y)$ tenha um extremo (máximo ou mínimo) em (x_0,y_0) é:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0,y_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0,y_0} = 0$$

Sabe-se ainda que,

$$\Delta = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]_{x_0,y_0}$$

onde a condição de extremo é dada por $\Delta > 0$. Por outro lado:

se $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_0,y_0} < 0$, o extremo é um máximo,

e se $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_0, y_0} > 0$, o extremo é um mínimo.

Aplicando essas condições à pressão usando o fato de que p é máximo no eixo magnético (R_0, z_0), tem-se

$$\left. \frac{\partial p}{\partial R} \right|_{R_0, z_0} = \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{R_0, z_0} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\Delta = \left[\frac{\partial^2 p}{\partial R^2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial R \partial z} \right)^2 \right]_{R_0, z_0} > 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial R \partial z} \right|_{R_0, z_0} < 0 \quad (\text{A.3})$$

De (A.1), tira-se

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \frac{dp}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0 \quad \text{e,} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

Como $\frac{dp}{d\psi} \neq 0$, devemos ter

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial R} \right|_{R_0, z_0} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{R_0, z_0} = 0 \quad (\text{A.5})$$

o que demonstra a Eq. (2.11a). O cálculo de $\left. \frac{\partial^2 p}{\partial R^2} \right|_{R_0, z_0}$ fornece

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial R^2} &= \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial p}{\partial R} \right) = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{dp}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \frac{dp}{d\psi} + \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{dp}{d\psi} \right) \\ \frac{\partial^2 p}{\partial R^2} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \frac{dp}{d\psi} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \right)^2 \frac{d^2 p}{d\psi^2} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Analogamente para $\left. \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right|_{R_0, z_0}$, tem-se

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{dp}{d\psi} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \frac{d^2 p}{d\psi^2} \quad (\text{A.7})$$

também

$$\frac{\partial^2 p}{\partial R \partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial R \partial z} \frac{dp}{d\psi} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) \frac{d^2 p}{d\psi^2} \equiv \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial R} \quad (\text{A.8})$$

Substituindo as Eqs. (A.6), (A.7) e (A.8) na Eq.(A.2) e usando a condição de máximo (Eq. A.5), tem-se

$$\left(\frac{dp}{d\psi} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \Bigg|_{R_0, z_0} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial R \partial z} \right)^2 \left(\frac{dp}{d\psi} \right)^2 \Bigg|_{R_0, z_0} > 0,$$

portanto, conclui-se que:

$$\Delta = \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial R \partial z} \right)^2 \right]_{R_0, z_0} > 0 \quad (\text{A.9})$$

que é a mesma equação (2.11b).

A.2- Equações Que Determinam a Posição do Eixo Magnético Para o Caso Especial da Solução de Maschke

Vamos supor, a princípio, um caso geral da solução de Maschke da Eq. de Grad-Shafranov, envolvendo a superposição linear de duas soluções, e com o auxílio das equações (2.11a e 2.11b), calcular a posição do eixo magnético. Assim, com $\psi(R, z)$ dado por

$$\psi(R, z) = [F_0(\eta_a, \rho) + \gamma_a G_0(\eta_a, \rho)] \cos(k_a z) + \alpha [F_0(\eta_b, \rho) + \gamma_b G_0(\eta_b, \rho)] \cos(k_b z) \quad (\text{A.10})$$

com $\alpha = \text{constante}$, pode-se determinar a posição do eixo magnético. Fazendo

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial R} \right|_{\text{eixo magnético}} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{\text{eixo magnético}} = 0$$



observando que no eixo magnético $z=0$, pode-se escrever

$$\left(\frac{\partial F_0(\eta_a, \rho)}{\partial \rho} + \gamma_a \frac{\partial G_0(\eta_a, \rho)}{\partial \rho} \right) + \alpha \left(\frac{\partial F_0(\eta_b, \rho)}{\partial \rho} + \gamma_b \frac{\partial G_0(\eta_b, \rho)}{\partial \rho} \right) = 0.$$

Esta equação determina a posição do eixo magnético, cuja solução é o ponto ρ_m .

Falta considerar a equação (2.11b), que impõe que o ponto de estagnação $(\rho_m, 0)$ seja do tipo elíptico. Logo tem-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \begin{cases} F_0(\eta, \rho) \\ G_0(\eta, \rho) \end{cases} = - \left(1 - \frac{2\eta}{\rho} \right) \begin{cases} F_0(\eta, \rho) \\ G_0(\eta, \rho) \end{cases}$$

Assim, calculando as derivadas $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2}$ e $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ e notando que $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z} = 0$, dado que no

eixo magnético $z=0$, chega-se a seguinte expressão para Δ :

$$\begin{aligned} \Delta_{0, \rho_m} = & k_a^2 \left(1 - \frac{2\eta_a}{\rho} \right) \left[F_0(\eta_a, \rho) + \gamma_a G_0(\eta_a, \rho) \right]^2 + \alpha^2 k_b^2 \left(1 - \frac{2\eta_b}{\rho} \right) \\ & \cdot \left[F_0(\eta_b, \rho) + \gamma_b G_0(\eta_b, \rho) \right]^2 + \alpha \left[k_b^2 \left(1 - \frac{2\eta_a}{\rho} \right) + k_a^2 \left(1 - \frac{2\eta_b}{\rho} \right) \right] \\ & \cdot \left[F_0(\eta_a, \rho) + \gamma_a G_0(\eta_a, \rho) \right] \left[F_0(\eta_b, \rho) + \gamma_b G_0(\eta_b, \rho) \right] \Big|_{\rho=\rho_m} \end{aligned}$$

a qual deve ser uma quantidade positiva ($\Delta > 0$).



Para a solução particular proposta (seção transversal do plasma retangular e portanto $\alpha=0$), a equação que determina a posição do eixo magnético é

$$\left. \frac{\partial F_0(\eta, \rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho_m, 0} + \gamma \left. \frac{\partial G_0(\eta, \rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho_m, 0} = 0 \quad (\text{A.11})$$

e a condição $\Delta_{0, \rho_m} > 0$, torna-se

$$\Delta_{0, \rho_m} = k^2 \left(1 - \frac{2\eta}{\rho_m} \right) \psi_m^2 \quad (\text{A.12})$$

onde

$$\psi_m = \psi(\rho_m, 0).$$

APÊNDICE B

DEDUÇÃO DA EXPRESSÃO PARA O FATOR DE SEGURANÇA

Vamos determinar as métricas do sistema (ψ, ϕ, χ) . Utilizando-se os índices para o novo sistema de coordenadas e usando a definição de fluxo magnético, tem-se

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{s_{\text{poloidal}}} B_{\chi} ds_{\chi} \quad (\text{B.1})$$

de onde

$$d\psi = \frac{B_{\chi} ds_{\chi}}{2\pi} \quad (\text{B.2})$$

Um elemento de área de superfície poloidal de espessura dl_{ψ} localizada em R é dado por

$$ds_{\chi} = 2\pi R dl_{\psi} \quad (\text{B.3})$$

Substituindo esta última na Eq.(B.2)

$$d\psi = B_{\chi} R dl_{\psi},$$

onde se conclui que

$$dl_{\psi} = \frac{1}{RB_{\chi}} d\psi. \quad (\text{B.4})$$

Usando a definição de métrica

$$dl_{\psi} = h_{\psi} d\psi,$$

tem-se

$$h_{\psi} = \frac{1}{RB_{\chi}}. \quad (\text{B.5})$$

Para a coordenada φ , teremos

$$dl_{\varphi} = R d\varphi, \quad (\text{B.6})$$

logo

$$h_{\varphi} = R. \quad (\text{B.7})$$

A métrica da coordenada χ não pode ser determinada explicitamente sem que se saiba a equação exata das curvas $\psi=\text{constante}$ e $\varphi=\text{constante}$. No entanto, podemos escrever a fórmula da métrica lembrando que o elemento de volume é dado por

$$dV = dx dy dz = J d\psi d\chi d\varphi = dl_{\psi} dl_{\chi} dl_{\varphi} \quad (\text{B.8})$$



onde J é o jacobiano da transformação (x, y, z) para (ψ, χ, φ) . Assim

$$dl_\chi = JB_\chi d\chi, \quad (\text{B.9})$$

e com isso

$$h_\chi = JB_\chi. \quad (\text{B.10})$$

A *inclinação local* das linhas de força é definida como

$$\nu(\psi, \chi) \equiv \left. \frac{d\varphi}{d\chi} \right|_{\text{ao longo de uma linha de força}} \quad (\text{B.11})$$

e *inclinação média* das linhas de força numa superfície magnética é dada por

$$q(\psi) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\psi=\text{cte.}} \nu d\chi. \quad (\text{B.12})$$

Com o auxílio da equação das linhas de força

$$\frac{h_\varphi d\varphi}{B_\varphi} = \frac{h_\chi d\chi}{B_\chi},$$

pode-se obter a expressão para $d\varphi$ escrita como

$$d\varphi = \frac{h_\chi B_\varphi}{h_\varphi B_\chi} d\chi. \quad (\text{B.13})$$

Substituindo a Eq.(B.11) na Eq.(B.12) e usando a Eq.(B.13), tem-se

$$q(\psi) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\psi=\text{cte.}} \frac{h_\chi B_\phi}{h_\phi B_\chi} d\chi. \quad (\text{B.14})$$

Portanto

$$q(\psi) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\psi=\text{cte.}} \frac{J}{R} B_\phi d\chi. \quad (\text{B.15})$$

Como $I(\psi) = RB_\phi$, teremos

$$q(\psi) = \frac{I(\psi)}{2\pi} \oint_{\psi=\text{cte.}} \frac{J}{R^2} d\chi, \quad (\text{B.16})$$

onde tiramos $I(\psi)$ para fora da integral, pois a mesma é avaliada sobre um circuito de $\psi=\text{constante}$.

Escrevendo explicitamente a expressão para o Jacobiano, tem-se

$$\frac{R}{J} = \frac{\partial(\psi, \chi, \phi)}{\partial(R, \phi, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial R} & \frac{\partial\psi}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial\chi}{\partial R} & \frac{\partial\chi}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial\psi}{\partial R} \frac{\partial\chi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial\chi}{\partial R}. \quad (\text{B.17})$$

Desde que ψ e χ são coordenadas ortogonais

$$\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\chi = 0,$$

implicando que

$$\frac{\partial \chi}{\partial R} = - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial z}}{\frac{\partial \psi}{\partial R}} \quad (\text{B.18})$$

Substituindo a Eq. (B.16) na Eq.(B.17), encontra-se:

$$J = \frac{R \frac{\partial \psi}{\partial R}}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2} \frac{1}{\frac{\partial \chi}{\partial z}} \quad (\text{B.19})$$

Mas

$$d\chi = \frac{\partial \chi}{\partial R} dR + \frac{\partial \chi}{\partial z} dz ,$$

usando a Eq. (B.18)

$$d\chi = \left[- \frac{\frac{\partial \psi}{\partial z}}{\frac{\partial \psi}{\partial R}} dR + dz \right] \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad (\text{B.20})$$

Lembrando que sobre uma superfície $\psi=\text{constante}$, tem-se

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial R} dR + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0 ,$$

pode-se escrever para $d\chi$

$$d\chi|_{\psi=\text{cte}} = \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial R} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\frac{\partial\chi}{\partial z}}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial R} \right)^2} dz \quad (\text{B.21})$$

Portanto, substituindo a Eq. (B.21) na Eq. (B.19), obtém-se

$$Jd\chi = \frac{Rdz}{\frac{\partial\psi}{\partial R}}, \quad (\text{B.22})$$

e finalmente substituindo a Eq.(B.22) na Eq.(A.16), pode-se escrever

$$q(\psi) = \frac{I(\psi)}{2\pi} \int_{\psi=\text{cte}} \frac{dz}{R \frac{\partial\psi}{\partial R}} \quad (\text{B.23a})$$

Uma expressão equivalente pode ser encontrada, fazendo a integração em R, de modo análogo. Assim

$$q(\psi) = \frac{I(\psi)}{2\pi} \int_{\psi=\text{cte}} \frac{dR}{R \frac{\partial\psi}{\partial z}} \quad (\text{B.23b})$$

APÊNDICE C

DEDUÇÃO DA EXPRESSÃO PARA A CORRENTE DE PLASMA I_p .

A expressão para a densidade de corrente toroidal j_ϕ , é dado por

$$j_\phi = - \left[R \frac{dp}{d\psi} + \frac{1}{2\mu_0 R} \frac{dl^2}{d\psi} \right]. \quad (C.1)$$

Portanto, a corrente toroidal I_ϕ , também chamada de corrente de plasma I_p , pode ser escrita como:

$$I_p = 2 \int_{R_1}^{R_2} dR \int_0^{\psi(R,z)=0} j_\phi dz \quad (C.2)$$

Como as equações devem estar normalizadas, vamos definir $\bar{j}_\phi = j_\phi/j_0$ e $\bar{I}_p = I_p/I_0$; onde

$j_0 = \psi_m / (2\mu_0 R_0^3)$ e $I_0 = 2\psi_m / (\mu_0 R_0)$. Assim:

$$I_0 \bar{I}_p = -2 \int_{R_1}^{\bar{R}_2} d(R_0 \bar{R}) \int_0^{\bar{\psi}(\bar{R}, \bar{z})=0} J_0 \bar{j}_\phi d(R_0 \bar{z}). \quad (C.3)$$



Tirando os traços sobre as quantidades normalizadas e fazendo as devidas substituições, teremos:

$$I_p \left(\frac{2\psi_m}{\mu_0 R_0} \right) = - \frac{2\psi_m}{\mu_0 R_0} \int_{R_1}^{R_2} \left(PR + \frac{M}{R} \right) dR \int_0^{\psi(R,z)=0} \psi(R,z) dz . \quad (C.4)$$

Logo

$$I_p = - \int_{R_1}^{R_2} \left(PR + \frac{M}{R} \right) dR \int_0^{\psi(R,z)=0} \psi(R,z) dz \quad (C.5)$$

Usando o fato de que $\rho = \sqrt{P} R^2 / 2R_0^2$, pode-se escrever, após normalizar ρ

$$I_p = -\sqrt{P} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(1 + \frac{M}{2\rho\sqrt{P}} \right) d\rho \int_0^{\psi(\rho,z)=0} \psi(\rho,z) dz , \quad (C.6)$$

onde b é solução para $\psi(\rho,z)=0$, portanto:

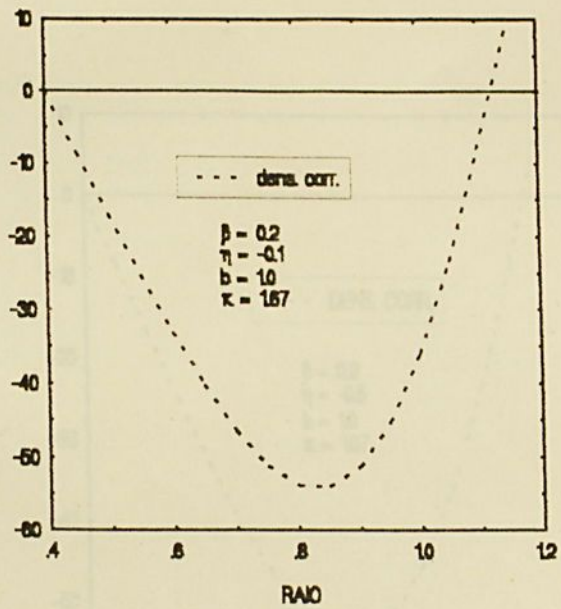
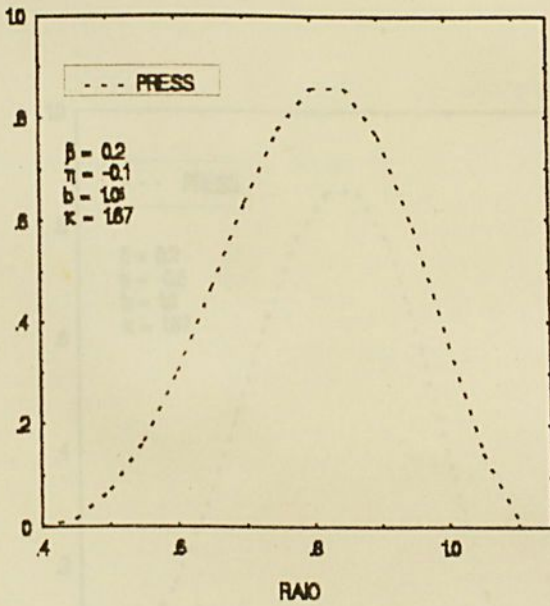
$$I_p = -\sqrt{P} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(1 + \frac{M}{2\rho\sqrt{P}} \right) d\rho \int_0^b \psi(\rho,z) dz . \quad (C.7)$$



APÊNDICE D

RESULTADOS OBTIDOS PARA VALORES DE $\eta < 0$.

Para se verificar o efeito e a viabilidade do uso de valores de $\eta < 0$, foram obtidos os gráficos abaixo para $\beta_m = 0.2$, $\eta = -0.1$ e -0.5 , $b = 1.0$, $d = 0.6$ e $\kappa = 1.67$.



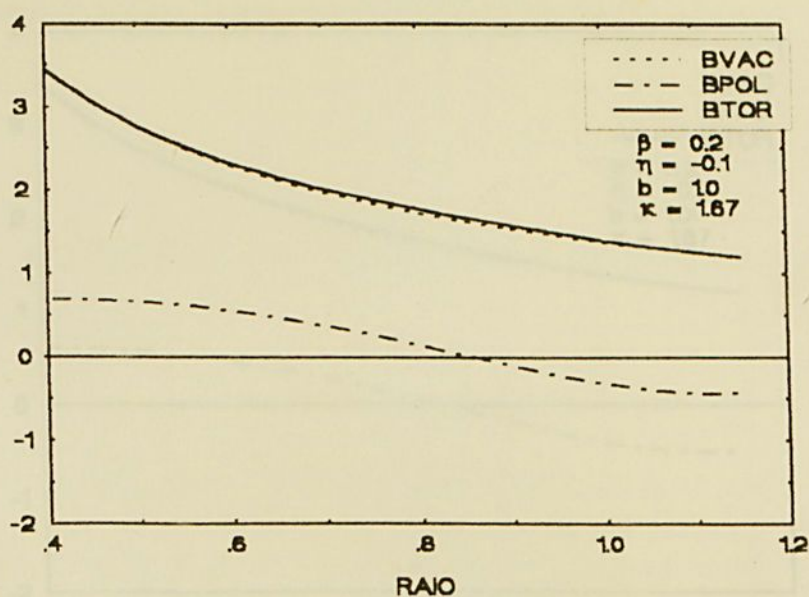
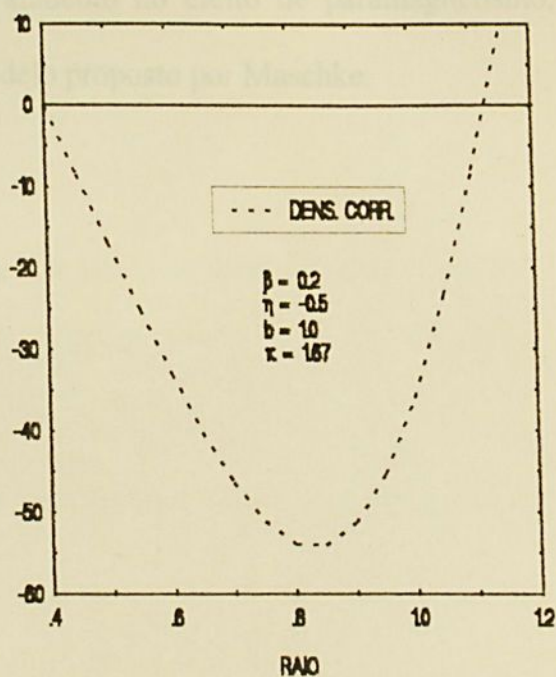
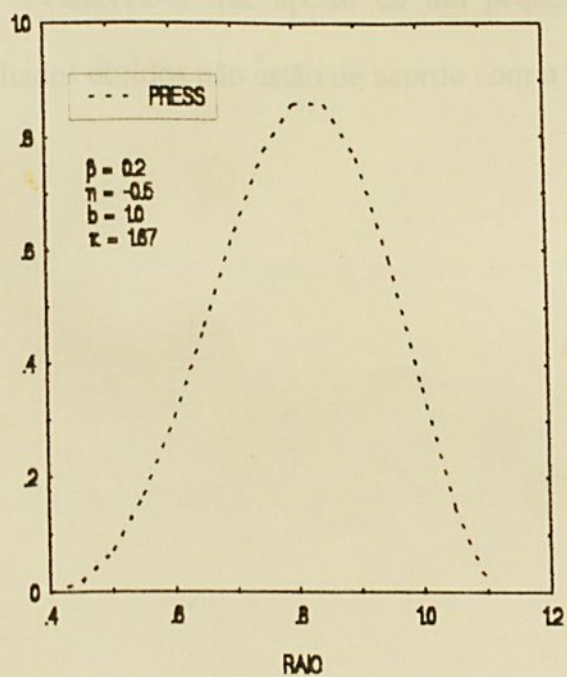


Fig D.1 - Perfis normalizados de pressão (p/p_0), densidade de corrente (j/j_0) e campos poloidal e toroidal (no plasma e no vácuo) ($B/B_{\phi_0}^v$), para $\beta_m = 0.2$, $\eta = -0.1$, $b = 1.0$, $d = 0.6$ e $\kappa = 1.67$, onde $R_1 = 0.4$ e $R_2 = 1.6$.



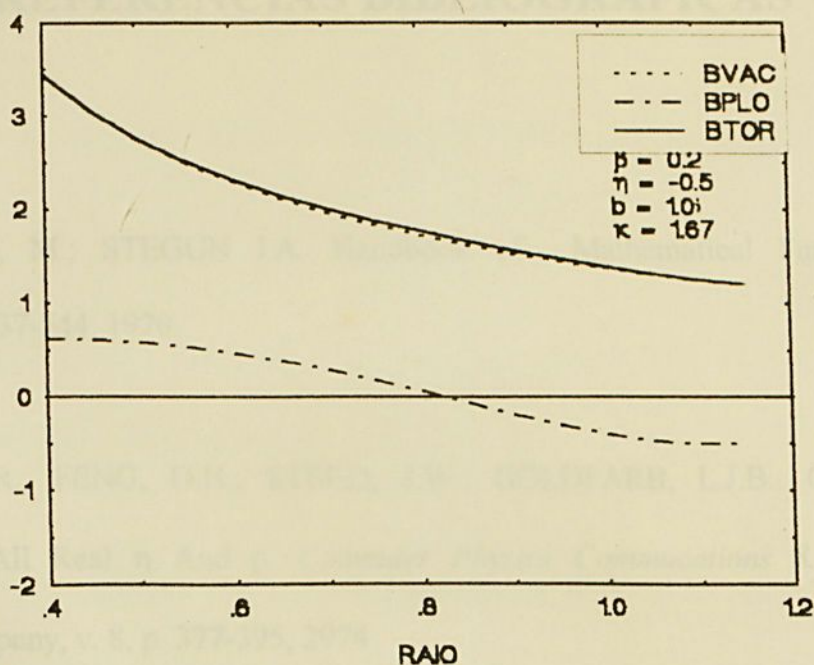


Fig D.2 - Perfis normalizados de pressão (p/p_0), densidade de corrente (j/j_0) e campos poloidal e toroidal (no plasma e no vácuo) ($B/B_{\phi 0}^v$), para $\beta_m = 0.2$, $\eta = -0.5$, $b = 1.0$, $d = 0.6$ e $\kappa = 1.67$, onde $R_1 = 0.4$ e $R_2 = 1.6$.

Observa-se que apesar de um pequeno aumento no efeito de paramagnetismo, os resultados obtidos não estão de acordo com o modelo proposto por Maschke.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN I.A. Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, p.537-544. 1970.

BARNETT, A.R.; FENG, D.H.; STEED, J.W.; GOLDFARB, L.J.B.. Coulomb Wave Functions for All Real η And ρ . *Computer Physics Commucations* 8. North-Holland Publishing Company, v. 8, p. 377-395, 2974

BICKERTON, R.J. The purpose, status and future of fusion research, *Plasma Phys. Control. Fusion*. 35, p. B3-B21. 1993.

CHEN,F.F. *Introduction to Plasma Physics*.Plenum Press, 1974.

COLCHIM, R.J., et alli. *Phys. Fluids B* 5, v.7, p. 2481, 1993

CONNOR, J.W.On Transport and the Bootstrap Current in toroidal plasmas. *Comments on Plasma Physics and Controlled Fusion*, v. 11, n. 1, p. 37-45, 1987.

DOLAN, T.J. *Fusion Research Principles, Experiments and Technology*. Pergamon Press, 1982.

FIEDLER-FERRARI, N; NASCIMENTO I.C. Fusão Termonuclear Controlada, *Ciência Hoje*. V.7, n.41, p.44-56. Abril 1988.



FREIDBERG, J.P. *Ideal Magnetohydrodynamics*, Plenum Press. p.6-39. 1987.

GALVÃO, R.M.O.. Equilíbrio MHD em Física dos Plasmas. Chian, A.L. e Reusch, M. UFF, 1979.

GALVÃO, R.M.O; et alli. *The TBR-E Project-Basic Engineering Design*, Report IFUSP-INPE-UNICAMP, 1991, a ser publicado.

GALVÃO, R. M. O. *Equilíbrio Magnetohidrodinâmico*, Instituto de Física "Gleb Wataghin" - Universidade Estadual de Campinas. p. G1-H30.

GÓES, L.C.S. Estudo Analítico do Equilíbrio Quase-Estacionário de Plasmas Toroidais à Secção não Circular Tipo Tokamak. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Dissertação (Mestrado em Física) - Centro Técnico Aeroespacial. 1978.

HINTON, F.L.; HAZELTINE, R.D. Theory of Plasma Transport in Toroidal Confinement Systems. *Rev. of Modern Physics*, V. 48(2) Part I; 239-308, 1976..

HIRSHMAN, S.P. Finite-aspect-ratio effects on the bootstrap current in tokamaks, *The Physics of Fluids*, v. 31, n.10, p. 3150-3152. 1988.

HIRSHMAN, S.P.; SIGMAR, D. J. Neoclassical Transport of impurities in tokamak plasmas *Nuclear Fusion*, v. 21, n. 9, p. 1079-1201. 1981.



KIKUCHI, M. Steady State tokamak reactor based on the bootstrap current. *Nuclear Fusion*, v. 30, n. 2, p. 265-276, 1990.

MASCHKE, E.K. Exact Solution of the MHD Equilibrium Equation for a Toroidal Plasma, *Plasma Physics*, v. 15, p. 535-541, 1973.

MAURER, W.A. *Cálculo Diferencial Integral*. 1968.

MYAMOTO, K. *Plasma Physics for Nuclear Fusion*. The MIT Press. Capítulos 3 e 8, 1976.

ROBERTO, M. Considerações Sobre o Equilíbrio, Estabilidade e Transporte em Tokamaks de Pequena Razão de Aspecto. Dissertação (Doutorado em Física) Instituto Tecnológico de Aeronáutica -Centro Técnico Aeroespacial. 1992.

ROBERTO, M.; GALVÃO, R. M. O. Considerations about the orbits of trapped particles in low-aspect ratio tokamaks. *Brazilian Journal of Physics*, v 24, n. 3, p. 693-698, 1994.

ROBERTO, M.; GALVÃO, R.M.O. Natural Elongation of Spherical Tokamaks. *Nuclear Fusion*, v. 32, n. 9, p. 1666, 1992

ROME, J. A.; PENG, Y-K.M. The Topology of Tokamak orbits. *Nuclear Fusion*, v.19, n. 9, p. 1193-1205, 1979.



SAKANA, P. H.; TOKUDA, S. β -Limit and Bootstrap Current for Small Aspect Ratio Tokamak Equilibria. *Proceedings of IAEA-TCM on Research Using small Tokamaks*. Hafei, China, 1991.

SOLOVIEV, L.S. The Theory of hydromagnetic stability of toroidal plasma. *Soviet Physics JETP*. v. 26, n. 2, p. 400-407, 1968.

STACEY JR, W.M. *Fusion Plasma Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1981.

SYKES, A.; et alli. *Plasma Physics and Control Fusion*. v. 35, p. 1051, 1992

TOKUDA, S., TAKEDA, T, OKAMOTO, M. Neoclassical MHD equilibria with ohmic current. *Journal of the Physical. Society of Japan*. v. 58, n. 3, p. 871-886, 1989.

TROYON, F.; GRUBER, R.; SAURENMANN, H.; SEMENZATO, S.; SUCCI, S. MHD-Limits to plasma confinement. *Plasma Physics and Controlled Fusion*. v. 26 (1A), p. 209-215, 1984





unesp

