

Juliana Conceição Precioso

Soluções Fundamentais e o
Teorema de Malgrange e Ehrenpreis



*

1910000982



Universidade Estadual Paulista
Câmpus de São José do Rio Preto
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

**Soluções Fundamentais e o
Teorema de Malgrange e Ehrenpreis**

Juliana Conceição Precioso

Orientador
Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática / Ibilce /
Unesp como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre
em Ciências Matemáticas - Área de Concentração: Matemática.

São José do Rio Preto - SP
Maio - 2001

T982/01



“A vida só pode ser compreendida
olhando-se para trás; mas só pode ser
vivida olhando-se para frente.”

(Kierkegaard)



À minha família,
Dedico

Agradecimentos

Deixo aqui, meus sinceros agradecimentos a todos que me apoiaram e que de forma direta ou indireta contribuíram para que este trabalho pudesse tornar-se realidade:

Ao Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos, pela orientação deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática da Unesp - S. J. do Rio Preto, em especial, ao Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares e ao Prof. Hermes Antônio Pedroso.

Aos meus pais que me deram a oportunidade de chegar até aqui.

Aos amigos Flávia, Julio e Vânia pelos momentos agradáveis que passamos juntos.

À todos os colegas da Pós-Graduação.

À Capes pelo auxílio financeiro.

À Deus.



Resumo

Solução fundamental de um operador diferencial parcial

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{C}$$

onde $D^\alpha = \left((2\pi i)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, (2\pi i)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^\alpha$, é uma distribuição k tal que

$$Lk = \delta$$

onde δ é o Delta de Dirac concentrado na origem.

Neste trabalho demonstramos o Teorema de Malgrange e Ehrenpreis, que estabelece a existência de solução fundamental para todo operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes.

Palavras-chave: Teorema de Paley-Wiener, Solução Fundamental, Teorema de Malgrange e Ehrenpreis, Operadores Hipoeĺpticos, Operador de Laplace.

Abstract

Fundamental solution of a partial differential operator

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{C}$$

where $D^\alpha = \left((2\pi i)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, (2\pi i)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^\alpha$, is a distribution k such that

$$Lk = \delta$$

where δ is the Dirac Delta located at the origin.

In this work we demonstrate the Malgrange and Ehrenpreis Theorem, which establishes the existence of fundamental solution for any linear partial differential operator with constant coefficients.

Keywords: Paley-Wiener Theorem, Fundamental Solution , Malgrange and Ehrenpreis Theorem, Hypoelliptic Operators, Laplace Operator.

Índice

Introdução	1
1 Alguns conceitos fundamentais	4
1.1 Notações e definições básicas	4
1.2 Convoluções	6
1.3 Transformada de Fourier	9
1.4 Teorema de Paley-Wiener	10
1.5 Função Gama	19
2 Operadores Diferenciais com Coeficientes Constantes	21
2.1 Considerações Iniciais	21
2.2 O Teorema de Malgrange e Ehrenpreis	22
2.3 Propriedade de Regularidade de Operadores Diferenciais	35
3 O Operador de Laplace	38
3.1 Solução Fundamental	38
3.2 O Problema de Dirichlet	44
Apêndice	49
Bibliografia	53

Introdução

Seja $L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$ um operador diferencial parcial com coeficientes constantes. Chamamos de solução fundamental ou solução elementar do operador diferencial L , a distribuição k que satisfaz

$$Lk = \delta$$

onde δ é o Delta de Dirac concentrado na origem.

Consideremos um caso particular, onde o operador L é dado por:

$$L = a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y}$$

onde $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Tal operador tem solução fundamental dada por:

$$E_a : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \int_0^\infty \varphi(ta) dt.$$

Desta forma, tomando $a = (1, -1)$ e $a = (1, 1)$, podemos ver que $E_{(1,-1)}$ e $E_{(1,1)}$ são respectivamente, soluções fundamentais dos operadores

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{e} \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

Se definirmos $E = E_{(1,-1)} * E_{(1,1)}$, um simples cálculo utilizando propriedades de convoluções mostra que E é solução fundamental do operador



$$L_1.L_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \square,$$

conhecido como operador da onda. Com mais alguns cálculos, podemos obter a seguinte fórmula explícita para a distribuição E :

$$E = \frac{1}{2}Y(x-y)Y(x+y)$$

onde Y é a função de Heaviside, ou seja, a função característica em $[0, \infty)$.

A grande vantagem do conhecimento prévio da solução fundamental de um operador diferencial L é a resolução de uma equação da forma

$$Lu = f.$$

Se E é solução fundamental de L então a distribuição $E * f$ satisfaz a equação $Lu = f$.

Assim a equação

$$\square u = f$$

tem solução dada explicitamente por

$$u = E_{(1,-1)} * E_{(1,1)} * f.$$

Até aqui, comentamos solubilidade de um operador particular mas, um resultado mais geral, conhecido como Teorema de Malgrange e Ehrenpreis nos garante a existência de solução fundamental para quaisquer operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes. A demonstração clássica deste teorema repousa no Teorema de Hahn-Banach.



Em 1959, Louis Nirenberg [7] fez uma demonstração construtiva deste resultado. Nirenberg não usa o Teorema de Hahn-Banach, porém utiliza de forma decisiva o Teorema de Paley-Wiener. O objetivo deste nosso trabalho é estudar a demonstração de Nirenberg para o Teorema de Malgrange e Ehrenpreis.

Agora, façamos uma breve descrição do trabalho:

No Capítulo 1, fizemos um apanhado das definições, resultados básicos e ferramentas importantes que serão utilizadas nos capítulos posteriores. O resultado mais importante deste capítulo é o Teorema de Paley-Wiener.

O Capítulo 2 é dedicado ao Teorema de Malgrange e Ehrenpreis. Terminamos este capítulo estudando regularidade de operadores diferenciais.

Por fim, no Capítulo 3, construímos a solução fundamental para um dos operadores mais importantes da teoria de equações diferenciais parciais que é o operador de Laplace.



Capítulo 1

Alguns conceitos fundamentais

Neste capítulo veremos algumas definições, notações e resultados básicos que faremos uso nos demais capítulos. Entre outros tópicos destacamos o Teorema de Paley-Wiener para função, que é demonstrado em detalhes na Seção 1.4.

1.1 Notações e definições básicas

Seja Ω um subconjunto Lebesgue mensurável do $\mathbb{R}^n$. Por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, denota-se a coleção de funções f , Lebesgue mensuráveis tais que $\int_{\Omega} |f|^p dx$ é finito, isto é,

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ mensurável ; } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty\}.$$

$$\|f\|_p^p = \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \text{ é a norma em } L^p(\Omega).$$

O conjunto de todas as funções Lebesgue mensuráveis essencialmente limitadas em Ω é representado por $L^\infty(\Omega)$. Para toda $f \in L^\infty(\Omega)$ define-se a norma da f por $\|f\|_\infty = \sup \text{ess} |f|$.

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço das funções teste em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ou seja, o conjunto das funções de valores complexos, infinitamente diferenciáveis com suporte



compacto em Ω . Denomina-se suporte de f ao fecho do conjunto dos pontos de Ω onde f é não nula. Representa-se o suporte de f por $\text{supp}(f)$.

Se f é uma função complexa, Lebesgue mensurável, definida em Ω , tal que para cada compacto $K \subset \Omega$, $\int_K |f(x)|dx < \infty$, dizemos que f é localmente integrável e escrevemos $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Um funcional linear contínuo $u : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, é dito uma distribuição em Ω . Denota-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço das distribuições em Ω e por $\mathcal{E}'(\Omega)$ o espaço das distribuições com suporte compacto em Ω . O valor de $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ na função teste $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ será denotado por $\langle u, \phi \rangle$. Se $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$,

$$\langle u, \phi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\phi(x)dx.$$

O suporte de uma distribuição é o complementar do maior conjunto aberto onde a distribuição é identicamente nula. O suporte singular de uma distribuição $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é definido como o complementar do maior conjunto aberto no qual f é uma função infinitamente derivável e será denotado por $\text{sing supp}(f)$.

Seja $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de distribuições em um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$. Dizemos que ela converge em $\mathcal{D}'(\Omega)$ para uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ denota-se o espaço das funções infinitamente deriváveis em $\mathbb{R}^n$ e de decrescimento rápido no infinito. Mais precisamente, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ está em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se as funções $x^\alpha \partial^\beta f$ são limitadas em $\mathbb{R}^n$ para cada par α, β de multi-índices. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denominado espaço de Schwarz. Claramente $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Um funcional linear contínuo em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é dito uma distribuição temperada. O

conjunto das distribuições temperadas é denotado $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Observemos que todo elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ define por restrição a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição em $\mathbb{R}^n$.

Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $T_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ para todo j , dizemos que a seqüência $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge para T em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1.2 Convoluções

Introduziremos agora uma importante e útil operação com funções que pode ser estendida à classe das distribuições. Alguns resultados terão suas demonstrações omitidas, ou por serem longas ou por serem demasiadamente técnicas.

Definição 1.2.1 *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A função $f * g$ definida por $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt$ é chamada convolução de f e g .*

Teorema 1.2.1 *Seja $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx = a$. Seja $g_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}g\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ para $\epsilon > 0$. Então:*

- (i) *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p < \infty$, $f * g_\epsilon$ converge para af em L^p quando $\epsilon \rightarrow 0$.*
- (ii) *Se f é limitada e contínua, então $f * g_\epsilon$ converge para af uniformemente em qualquer conjunto compacto, quando $\epsilon \rightarrow 0$.*

Demonstração: Ver [3], página 16. ■

Definição 1.2.2 *Seja $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. A convolução de T e ϕ é a função $T * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida por $(T * \phi)(x) = \langle T, \phi(x - \cdot) \rangle$. Colocando*



$(\tau_x \phi)(y) = \phi(y - x)$ e $\bar{\phi}(y) = \phi(-y)$, podemos escrever $(T * \phi)(x) = T(\tau_x \bar{\phi})$. Em particular temos $(T * \phi)(0) = T(\tau_0 \bar{\phi}) = \langle T, \bar{\phi} \rangle$.

Esta definição pode ser estendida para $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ contando que T tenha suporte compacto, isto é, se $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definimos, $(T * \psi)(x) = T(\tau_x \bar{\psi}) = \langle T, \psi(x - \cdot) \rangle$.

Agora, se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definiremos $\tau_x T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ por $(\tau_x T)(\phi) = T(\tau_{-x} \phi)$ para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.2.2 *Seja $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então*

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \tau_x(T * \phi) = (\tau_x T) * \phi = (T * \tau_x \phi)$.
- (ii) *se α é um multi-índice, $D^\alpha(T * \phi) = (D^\alpha T) * \phi = T * (D^\alpha \phi)$. Em particular, $T * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Ver [6], página 23. ■

O Teorema 1.2.2 continua válido para $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.2.3 *Sejam $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que pelo menos uma tenha suporte compacto. A convolução de T e S , denotada por $T * S$ é a única distribuição caracterizada pelas seguintes condições equivalentes:*

$$(T * S) * \phi = T * (S * \phi), \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$(T * S)(\phi) = (T * (S * \bar{\phi}))(0).$$

Sejam S e T duas distribuições, uma com suporte compacto. Valem:

- (i) $S * T = T * S$
- (ii) Se $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ temos $(S * T) * U = S * (T * U)$

(iii) $\text{supp}(S * T) \subset \text{supp}(S) + \text{supp}(T) = \{x \in \mathbb{R}^n; x = y + z, y \in \text{supp}(S), z \in \text{supp}(T)\}.$

Teorema 1.2.3 *Sejam T_1, T_2 distribuições em $\mathbb{R}^n$. Se α é um multi-índice, $D^\alpha(T_1 * T_2) = D^\alpha T_1 * T_2 = T_1 * D^\alpha T_2$.*

Demonstração: Como $T_1 * T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema 1.2.2 temos $D^\alpha(T_1 * T_2) * \phi = (T_1 * T_2) * D^\alpha \phi = T_1 * (T_2 * D^\alpha \phi).$

Novamente, pelo Teorema 1.2.2 temos $T_1 * (T_2 * D^\alpha \phi) = T_1 * (D^\alpha T_2 * \phi) = (T_1 * D^\alpha T_2) * \phi.$

Portanto, podemos concluir que $D^\alpha(T_1 * T_2) = T_1 * D^\alpha T_2.$

A outra igualdade segue analogamente. ■

Proposição 1.2.1 *Seja $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e δ o Delta de Dirac. Então $T = \delta * T = T * \delta$. Mais geralmente, para todo multi-índice α , $D^\alpha T = (D^\alpha \delta) * T$.*

Demonstração: Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então

$$(\delta * \phi)(x) = \delta(\tau_x \bar{\phi}) = (\tau_x \bar{\phi})(0) = \bar{\phi}(-x) = \phi(x).$$

Agora, $(\delta * T) * \phi = (T * \delta) * \phi = T * (\delta * \phi) = T * \phi$. Ou seja, $(\delta * T - T) * \phi = 0, \forall \phi.$

Portanto $T = \delta * T$.

Se α é um multi-índice, então pelo resultado acima e pelo Teorema 1.2.3 segue

$$D^\alpha T = D^\alpha T * \delta = T * D^\alpha \delta = (D^\alpha \delta) * T.$$

Portanto $D^\alpha T = (D^\alpha \delta) * T$. ■

Proposição 1.2.2 *Seja $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que f é C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Então $\text{sing supp}(f * g) \subset \text{supp}(g)$.*

Demonstração: Iremos mostrar que $(\text{sing supp}(f * g))^c \supset (\text{supp}(g))^c$.

Suponhamos $x \notin \text{supp}(g)$. Mostraremos que $f * g$ é C^∞ numa vizinhança de x . Uma vez que $x \notin \text{supp}(g)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \cap \text{supp}(g) = \emptyset$. Escolha $\phi \in C_0^\infty(B(0, \frac{\epsilon}{2}))$ tal que $\phi \equiv 1$ na bola $B(0, \frac{\epsilon}{4})$. Observe que, $f * g = (\phi f) * g + (1 - \phi)f * g$.

Como $g \in \mathcal{E}'$ e $(1 - \phi)f \in C^\infty$ então $(1 - \phi)f * g \in C^\infty$. Observe também que

$$\text{supp}(\phi f * g) \subset \text{supp}(\phi f) + \text{supp}(g) \subset \left\{ |x| \leq \frac{\epsilon}{2} \right\} + \text{supp}(g) = \left\{ y : d(y, \text{supp}(g)) \leq \frac{\epsilon}{2} \right\}.$$

Uma vez que $\{y : d(y, \text{supp}(g)) \leq \frac{\epsilon}{2}\} \cap B(x, \frac{\epsilon}{2}) = \emptyset$, $\phi f * g$ será nula em $B(x, \frac{\epsilon}{2})$.

Logo $f * g = (1 - \phi)f * g$ que é C^∞ e portanto $x \notin \text{sing supp}(f * g)$, o que conclui a prova. ■

1.3 Transformada de Fourier

Daremos agora, uma rápida introdução da teoria da transformada de Fourier.

Definição 1.3.1 *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier da função f , denotada por $\hat{f}$, é definida por*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Observe que $\hat{f}$ está bem definida, pois $|e^{-2\pi i x \xi}| = 1$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.3.1 *Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos*

(i) $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\partial^\beta \hat{f} = \hat{g}$ onde $g(x) = (-2\pi i x)^\beta f(x)$

(ii) $\widehat{(\partial^\beta f)}(\xi) = (2\pi i \xi)^\beta \hat{f}(\xi)$.

Demonstração: Ver [3], página 21. ■

Teorema 1.3.1 *Seja $f(x) = e^{-\pi a|x|^2}$, $\operatorname{Re}(a) > 0$. Então $\hat{f}(\xi) = a^{-\frac{n}{2}} e^{-a^{-1}\pi|\xi|^2}$.*

Demonstração: Ver [3], página 21. ■

Definição 1.3.2 *A fórmula da inversão de Fourier para a classe $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é dada por*

$$\check{f}(\xi) = \int e^{2\pi i x \xi} f(x) dx = \hat{f}(-\xi).$$

Teorema 1.3.2 *Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $(\check{\check{f}}) = f$.*

Demonstração: Ver [6], página 41. ■

Definição 1.3.3 *Seja T uma distribuição temperada, a transformada de Fourier de T , denotada $\hat{T}$, é definida por $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Teorema 1.3.3 *Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e α é um multi-índice, então $D^\alpha \hat{T} = (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{(x^\alpha T)}$ e $\widehat{(D^\alpha T)} = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{T}$.*

Demonstração: Ver [6], página 44. ■

1.4 Teorema de Paley-Wiener

Este resultado será de grande importância na prova do resultado principal deste trabalho, o teorema de Malgrange e Ehrenpreis, que será apresentado no próximo capítulo. Começemos com um resultado técnico:



Proposição 1.4.1 *Seja U um aberto do $\mathbb{R}^n$, V um aberto de $\mathbb{R}^m$ e*

$$\begin{aligned} F : U \times V &\rightarrow K \\ (x, y) &\mapsto F(x, y) \end{aligned}$$

uma função tal que para todo $y \in V$ a aplicação parcial

$$\begin{aligned} F_y : U &\rightarrow K \\ x &\mapsto F(x, y) \end{aligned}$$

admite derivadas parciais contínuas até a ordem m . Suponhamos que para todo $x_0 \in U$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leq m$ existem $\delta > 0$, $c > 0$ e $\varphi \in L^1(V)$ tais que

$$|D_x^\alpha F(x, y)| \leq c|\varphi(y)|, \quad \forall x; |x - x_0| < \delta, \forall y \in V. \quad (1.1)$$

Então a função $f(x) = \int_V F(x, y)dy$, $x \in U$, admite derivadas parciais contínuas até ordem m e $D^\alpha f(x) = \int_V D_x^\alpha F(x, y)dy$, $x \in U$, $|\alpha| \leq m$.

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos considerar f real.

Caso 1: ($m = 0$)

Seja $x_0 \in U$ e (x_j) uma seqüência de U convergindo para x_0 , então $\lim_{j \rightarrow \infty} F(x_j, y) = \lim_{j \rightarrow \infty} F_y(x_j) = F_y(x_0) = F(x_0, y)$, $\forall y \in V$.

Assim, temos $\lim_{j \rightarrow \infty} F(x_j, y) = F(x_0, y)$. Por hipótese, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $j \geq j_0$, $|F(x_j, y)| \leq c|\varphi(y)|$ com $\varphi \in L^1(V)$ uma vez que $m = 0$. Então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Ver [1], página 135)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_V F(x_j, y)dy = \int_V F(x_0, y)dy,$$

isto é, $\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j) = f(x_0)$.

Logo, f é contínua em x_0 , onde x_0 é um ponto arbitrário de U .

Caso 2: ($m = 1$)

Seja $x_0 \in U$ e (h_j) uma seqüência de números reais positivos convergindo para 0. Seja $\psi_j(y) = \frac{1}{h_j} [F(x_0 + h_j e_i, y) - F(x_0, y)]$, $y \in V$, então $\lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j(y) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, y)$, $\forall y \in V$.

Pelo Teorema do Valor Médio, para todo j , existe $\bar{h}_j$ com $|\bar{h}_j| \leq |h_j|$ tal que

$$F(x_0 + h_j e_i, y) - F(x_0, y) = |h_j| \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0 + \bar{h}_j e_i, y).$$

Portanto $\psi_j(y) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0 + \bar{h}_j e_i, y)$.

Usando (1.1) para $\alpha = e_i \in \mathbb{N}^n$, concluímos que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq j_0$ implica $|\psi_j(y)| \leq c|\varphi(y)|$.

Dessa forma temos: $\lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j(y) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, y)$ e $|\psi_j(y)| \leq c|\varphi(y)|$ com $\varphi \in L^1(V)$.

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_V \psi_j(y) dy = \int_V \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, y) dy.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_V \psi_j(y) dy &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{h_j} \left[\int_V F(x_0 + h_j e_i, y) dy - \int_V F(x_0, y) dy \right] = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{h_j} [f(x_0 + h_j e_i) - f(x_0)]. \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{h_j} [f(x_0 + h_j e_i) - f(x_0)] = \int_V \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, y) dy$.

Portanto, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \int_V \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, y) dy$

A continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é consequência do caso $m = 0$.

O caso geral é obtido por indução. Suponhamos que o resultado seja válido para $m \geq 1$. Seja $F : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que para todo $y \in V$, F_y admite derivadas parciais contínuas até a ordem $m + 1$, satisfazendo (1.1) para todo $|\alpha| \leq m + 1$.

Pela hipótese de indução, f admite derivadas parciais contínuas até a ordem m e

$$D^\beta f(x) = \int_V D_x^\beta F(x, y) dy, \quad |\beta| \leq m, x \in U. \quad (1.2)$$

Seja $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| = m + 1$, então existe $i = 1, \dots, n$ tal que $\alpha_i > 0$. Seja $\beta = \alpha - e_i \in \mathbb{N}^n$. Logo $|\beta| = m$.

Assim, a expressão (1.2) é verdadeira para este β . Faça $G(x, y) = D_x^\beta F(x, y)$. Então G existe e é contínua, $\frac{\partial G}{\partial x_i}(x, y) = D_x^\alpha F(x, y)$, que por hipótese é dominada em uma vizinhança de cada $x_0 \in U$ por uma função $\varphi \in L^1(V)$, isto é,

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x_i}(x, y) \right| \leq c|\varphi(y)|.$$

Logo, pelo caso $m = 1$

$$D_x^\beta f(x) = \int_V G(x, y) dy = \int_V D_x^\beta F(x, y) dy$$

admite derivadas parciais contínuas de ordem 1 e

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} D_x^\beta f(x) = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} G(x, y) dy = \int_V D_x^\alpha F(x, y) dy.$$

Agora, pelo caso $m = 0$, temos que $D^\alpha f$ é uma função contínua, o que conclui a demonstração. ■

Teorema 1.4.1 (*Teorema de Paley-Wiener para funções*) *Sejam $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua e $r > 0$. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) *Existe $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{supp}(u) \subset B(0, \frac{r}{2\pi})$ e $f = \hat{u}$,*
- (ii) *f é uma função inteira e para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $c_m > 0$ tal que $|f(z)| \leq c_m(1 + |z|)^{-m} e^{r|Imz|}$, $z \in \mathbb{C}^n$.*

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Seja $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{supp}(u) \subset B(0, \frac{r}{2\pi})$ e $f = \hat{u}$. Então a função de x dada por $\int e^{-2\pi i x \xi} u(\xi) d\xi$ é inteira.

Observando que

$$(-1)^{|\alpha|} D_\eta^\alpha (e^{-2\pi i z \eta}) = (-1)^{|\alpha|} (-2\pi i z)^\alpha e^{-2\pi i z \eta} = (2\pi i z)^\alpha e^{-2\pi i z \eta}$$

e usando integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i z \eta} D_\eta^\alpha u(\eta) d\eta &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} D_\eta^\alpha (e^{-2\pi i z \eta}) u(\eta) d\eta = \\ &= (2\pi i z)^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i z \eta} u(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$(2\pi i z)^\alpha f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i z \eta} D_\eta^\alpha u(\eta) d\eta, \quad z \in \mathbb{C}^n, \alpha \in \mathbb{N}^n. \quad (1.3)$$

Seja $w_n = \int_{|\eta| \leq 1} d\eta$. Uma vez que $D^\alpha u(\eta) = 0$ se $|\eta| \geq \frac{r}{2\pi}$ e $|e^{-2\pi i z \eta}| = |e^{2\pi(\text{Im} z)\eta}| \leq e^{|\text{Im} z||2\pi\eta|} \leq e^{|\text{Im} z|r}$ se $|\eta| \leq \frac{r}{2\pi}$ de 1.3 obtemos:

$$\begin{aligned} |(2\pi i z)^\alpha| |f(z)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i z \eta} D_\eta^\alpha u(\eta)| d\eta \leq \int_{B(0, \frac{r}{2\pi})} e^{r|\text{Im} z|} |D_\eta^\alpha u(\eta)| d\eta \leq \\ &\leq e^{r|\text{Im} z|} \sup_{\eta \in B(0, \frac{r}{2\pi})} |D_\eta^\alpha u(\eta)| \int_{B(0, \frac{r}{2\pi})} d\eta = \\ &= e^{r|\text{Im} z|} \sup_{\eta \in B(0, \frac{r}{2\pi})} |D_\eta^\alpha u(\eta)| \left(\frac{r}{2\pi}\right)^n w_n, \end{aligned}$$

$z \in \mathbb{C}^n, \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Portanto,

$$|(2\pi z)^\alpha| |f(z)| \leq \sup_{\eta \in B(0, \frac{r}{2\pi})} |D_\eta^\alpha u(\eta)| \left(\frac{r}{2\pi}\right)^n w_n e^{r|\text{Im} z|}. \quad (1.4)$$

Dado $m \in \mathbb{N}$, seja $\alpha = me_j$, $j = 1, \dots, n$.

Observe que

$$\sup_{\eta \in B(0, \frac{r}{2\pi})} |D_\eta^\alpha u(\eta)| \leq \sup_{|\beta| \leq m} \sup_{\eta \in B(0, \frac{r}{2\pi})} |D_\eta^\beta u(\eta)|$$

$$\text{e } |(2\pi z)^{e_j m}| = |(2\pi)^m z_j^m| = |2\pi z_j|^m.$$

Então,

$$|z_j|^m |f(z)| \leq |(2\pi z_j)|^m |f(z)| \leq \sup_{|\beta| \leq m} \sup_{\eta \in B(0, \frac{r}{2\pi})} |D_\eta^\beta u(\eta)| e^{r|\text{Im}z|} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^n w_n, \quad (1.5)$$

$$z \in \mathbb{C}^n, \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Note que para $|z| \geq 1$, $(1 + |z|)^m \leq (2|z|)^m$ e $(1 + |z|^m) \geq |z|^m$, e portanto, $\frac{(1 + |z|)^m}{1 + |z|^m} \leq 2^m$. Para $|z| < 1$, $(1 + |z|)^m \leq 2^m$ e $(1 + |z|^m) \geq 1$ e assim $\frac{(1 + |z|)^m}{1 + |z|^m} \leq 2^m$.

$$\text{Desta forma, } (1 + |z|)^m \leq 2^m (1 + |z|^m).$$

Fazendo $\alpha = (0, \dots, 0)$ em (1.4) obtemos:

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq e^{r|\text{Im}z|} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^n w_n \sup_{\eta \in B(0, \frac{r}{2\pi})} |u(\eta)| \leq \\ &\leq e^{r|\text{Im}z|} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^n w_n \sup_{|\beta| \leq m} \sup_{\eta \in B(0, \frac{r}{2\pi})} |D_\eta^\beta u(\eta)|. \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\text{Uma vez que } |z| \leq \sqrt{n} \max\{|z_1|, \dots, |z_n|\},$$

$$\begin{aligned} (1 + |z|)^m |f(z)| &\leq 2^m (1 + |z|^m) |f(z)| \leq \\ &\leq 2^m (1 + (\sqrt{n})^m (\max\{|z_1|^m, \dots, |z_n|^m\})) |f(z)| \leq \\ &\leq 2^m (\sqrt{n})^m (1 + |z_j|^m) |f(z)|, \text{ onde } |z_j|^m = \max\{|z_1|^m, \dots, |z_n|^m\}. \end{aligned}$$

De (1.5) e (1.6) temos

$$(2\sqrt{n})^m(1 + |z_j|^m)|f(z)| \leq 2(2\sqrt{n})^m e^{r|\operatorname{Im} z|} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^n w_n \sup_{|\beta| \leq m} \sup_{\eta \in B(0, \frac{r}{2\pi})} |D_\eta^\beta u(\eta)|.$$

Portanto, $|f(z)| \leq c_m(1 + |z|)^{-m} e^{r|\operatorname{Im} z|}$, onde

$$c_m = 2^{m+1}(\sqrt{n})^m \left(\frac{r}{2\pi}\right)^n w_n \sup_{|\beta| \leq m} \sup_{\eta \in B(0, \frac{r}{2\pi})} |D_\eta^\beta u(\eta)| > 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$, seja $f_\alpha(x) = x^\alpha f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Usando a hipótese e observando que $|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|}$ temos:

$$|f_\alpha(x)| = |x^\alpha f(x)| \leq |x|^{|\alpha|} |f(x)| \leq (1 + |x|)^{|\alpha|} |f(x)| \leq$$

$$\leq (1 + |x|)^{|\alpha|} c_{m+|\alpha|} (1 + |x|)^{-(m+|\alpha|)} = \frac{c_{m+|\alpha|}}{(1 + |x|)^m}, x \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{N}.$$

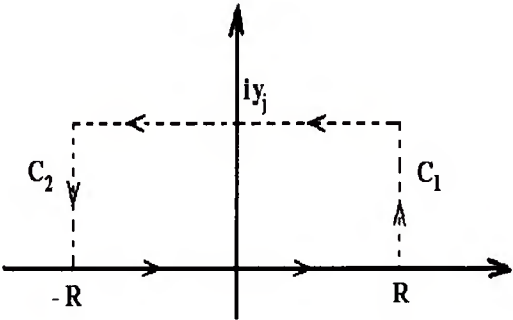
Daí, pelo Lema 1 (ver Apêndice) concluímos que $f_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para m conveniente.

Seja $F(\eta, x) = e^{2\pi i x \eta} f(x)$ e $\varphi(x) = c_{m+|\alpha|} (1 + |x|)^{-m}$.

$$|D_\eta^\alpha F(\eta, x)| = |D_\eta^\alpha (e^{2\pi i x \eta} f(x))| = |(2\pi i)^{|\alpha|} |x^\alpha f(x)| \leq c |\varphi(x)|.$$

Logo, pela Proposição 1.4.1 a função de $\eta \in \mathbb{R}^n$ dada por $\check{f}(\eta) = u(\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \eta} f(x) dx$, é um elemento de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Dados $\eta \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, seja Γ_j a fronteira do retângulo em $\mathbb{C}$ com vértices nos pontos $-R$, R , $R + iy_j$, $-R + iy_j$



Sendo a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto e^{2\pi i \eta z} f(z) \end{aligned}$$

uma função inteira no interior do retângulo, temos $\int_{\Gamma_j} e^{2\pi i \eta z} f(z) dz_j = 0$.

Considere η^ν como sendo o vetor η destacando-se uma posição. Portanto, pelo Teorema de Cauchy

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{-R}^R e^{2\pi i \eta^\nu z^\nu} e^{2\pi i \eta_j (x_j - i0)} f(z_1, \dots, x_j + i0, z_j) dx_j - \right. \\ \left. - \int_{-R}^R e^{2\pi i \eta^\nu z^\nu} e^{2\pi i \eta_j (x_j - iy_j)} f(z_1, \dots, x_j + iy_j, \dots, z_n) dx_j \right) = 0, \end{aligned}$$

uma vez que nas verticais do referido retângulo se tem

$$\begin{aligned} |e^{2\pi i \eta^\nu z^\nu} e^{2\pi i \eta_j (x_j - iy_j)} f(z_1, \dots, z_j, \dots, z_n)| &\leq \\ &\leq k |e^{2\pi i \eta_j x_j}| |e^{2\pi i \eta_j y_j}| c_m e^{r|\text{Im}z|} (1 + |\text{Re}z|)^{-m}, \end{aligned}$$

onde $k = |e^{2\pi i \eta^\nu z^\nu}|$, e o lado direito desta desigualdade tende à zero quando R tende a $+\infty$. Assim,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \eta^\nu z^\nu} e^{2\pi i \eta_j x_j} f(z_1, \dots, x_j, \dots, z_j) dx_j = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \eta^\nu z^\nu} e^{2\pi i \eta_j (x_j - iy_j)} f(z_1, \dots, z_n) dx_j, \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$u(\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \eta x} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \eta (x+iy)} f(x+iy) dx. \quad (1.7)$$

Uma vez que $|e^{2\pi i \eta (x+iy)}| = e^{-2\pi \eta y}$, por hipótese e por (1.7) obtemos a existência de $c > 0$ tal que $|u(\eta)| \leq ce^{r|y|-2\pi \eta y}$, $y, \eta \in \mathbb{R}^n$.

De fato;

$$\begin{aligned} |u(\eta)| & \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{2\pi i \eta (x+iy)}| |f(x+iy)| dx \leq \\ & \leq e^{r|y|-2\pi \eta y} c_m \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x+iy|)^{-m} dx \leq \\ & \leq e^{r|y|-2\pi \eta y} c_m \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-m} dx = ce^{r|y|-2\pi \eta y}, \end{aligned}$$

uma vez que pelo Lema 1 (Ver Apêndice), a última integral converge.

Dado $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\eta \neq 0$, seja $y = \frac{\lambda \eta}{|\eta|}$, $\lambda > 0$. Então $|u(\eta)| \leq ce^{r|y|-2\pi \eta y} = ce^{(r-2\pi|\eta|)\lambda}$.

Fazendo λ tender ao infinito, concluimos que $u(\eta) = 0$ se $|\eta| > \frac{r}{2\pi}$. Portanto $\text{supp}(u) \subset B(0, \frac{r}{2\pi}) = \left\{ \eta \in \mathbb{R}^n : |\eta| < \frac{r}{2\pi} \right\}$.

Provaremos agora que $f = \hat{u}$.

Dado $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}^n$, sejam $g(x) = f(x + iy_0)$ e $v(\eta) = e^{2\pi y_0 \eta} u(\eta)$, $x, \eta \in \mathbb{R}^n$.

De (1.7) obtemos:

$$v(\eta) = e^{2\pi y_0 \eta} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \eta(x + iy_0)} f(x + iy_0) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \eta x} g(x) dx = \check{g}(\eta), \eta \in \mathbb{C}^n.$$

Assim, $v(\eta) = \check{g}(\eta)$, isto é, g tem transformada de Fourier inversa e v por sua vez, terá transformada de Fourier. Daí,

$$\begin{aligned} f(z_0) &= f(x_0 + iy_0) = g(x_0) = \hat{v}(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x_0 \eta} v(\eta) d\eta = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x_0 \eta + iy_0 \eta)} u(\eta) d\eta = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i z_0 \eta} u(\eta) d\eta = \hat{u}(z_0). \blacksquare \end{aligned}$$

1.5 Função Gama

Daremos nesta seção algumas propriedades da função gama utilizadas no decorrer deste trabalho.

Definição 1.5.1 A função Γ definida por $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$, $\operatorname{Re}(x) > 0$, é chamada de função Gama.

Propriedades:

- (1) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$
- (2) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- (3) $\int_0^\infty e^{-rt} t^{\alpha-1} dt = r^{-\alpha} \Gamma(\alpha)$, $r > 0, \alpha > 0$.

Definição 1.5.2 A função $F(x)$ é dita radial, se existe uma função f de uma variável tal que $F(x) = f(|x|)$.

Quando F é radial e $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x) dx = \int_0^\infty \int_{|x|=1} f(r) r^{n-1} d\sigma(x) dr.$$

onde $d\sigma(x)$ é um elemento de medida da superfície $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Portanto, $\int_{\mathbb{R}^n} F(x)dx = w_n \int_0^\infty f(r)r^{n-1}dr$, onde w_n é a área da esfera S^{n-1} .

A função gama se faz importante no cálculo da área da esfera S^{n-1} como mostramos a seguir:

Temos $\int e^{-\pi|x|^2}dx = 1$. Mas, $\int e^{-\pi|x|^2}dx = w_n \int_0^\infty e^{-\pi r^2}r^{n-1}dr$.

Fazendo $\pi r^2 = s$, obtemos

$$w_n \int_0^\infty e^{-\pi r^2}r^{n-1}dr = \frac{w_n}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-s}s^{\frac{n}{2}-1}ds = w_n \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}.$$

Portanto $w_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.

Capítulo 2

Operadores Diferenciais com Coeficientes Constantes

O principal resultado deste capítulo nos garante que todo operador diferencial com coeficientes constantes admite solução fundamental. Tal resultado é devido a Malgrange e Ehrenpreis e é de grande importância na teoria geral de equações diferenciais parciais. Aqui estudaremos a demonstração dada por L. Nirenberg (Ver [7]).

2.1 Considerações Iniciais

Seja $D = (D_1, \dots, D_n)$ onde $D_j = (2\pi i)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}$; $j = 1, \dots, n$ e seja α o multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Então

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} = (2\pi i)^{-\alpha_1} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots (2\pi i)^{-\alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = (2\pi i)^{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Agora denotando $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ e $\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ temos $D^\alpha = (2\pi i)^{-|\alpha|} \partial^\alpha$. Desta forma

$$\widehat{(D^\alpha f)}(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi). \quad (2.1)$$

Definição 2.1.1 Um operador diferencial parcial L com coeficientes constantes é definido por $L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha$; $a_\alpha \in \mathbb{C}$.

Se $\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha| \neq 0$ então diremos que o operador L é de ordem K . O símbolo do operador L é o polinômio $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \xi^\alpha$ da variável $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. (Aqui $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$). Logo, formalmente temos $L = P(D)$.

Seja $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Das propriedades da transformada de Fourier temos:

$$\begin{aligned} (\widehat{P(D)u})(\xi) &= \int e^{-2\pi i x \xi} \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha u(x) dx = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \int e^{-2\pi i x \xi} D^\alpha u(x) dx = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \widehat{(D^\alpha u)}(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \xi^\alpha \hat{u}(\xi) = P(\xi) \hat{u}(\xi), \end{aligned}$$

ou seja,

$$[\widehat{P(D)u}](\xi) = P(\xi) \hat{u}(\xi). \quad (2.2)$$

A igualdade acima destaca a importância do símbolo $P(\xi)$ e transforma o problema de resolver uma equação diferencial num problema algébrico.

2.2 O Teorema de Malgrange e Ehrenpreis

Consideremos o seguinte problema:

Dado $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, encontrar uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $P(D)u = f$.

Este problema é resolvido por completo no seguinte:

Teorema 2.2.1 Seja $L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha$ um operador diferencial com coeficientes constantes. Se $f \in C_0^\infty$, existe uma função $u \in C^\infty$ satisfazendo $Lu = f$ em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Tomemos a transformada de Fourier da equação $Lu = P(D)u = f$.

De (2.2) temos $\hat{f}(\xi) = (\widehat{P(D)u})(\xi) = P(\xi)\hat{u}(\xi)$.

Portanto, é natural tentarmos definir u via transformada inversa, isto é,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} d\xi,$$

uma vez que $\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)}$.

Mas, P poderá ter muitos zeros e então teremos problemas na aplicação da transformada inversa de $\frac{\hat{f}}{P}$.

O que faremos é encontrar uma forma de contornar este problema. Para isto consideraremos a integral acima em $\mathbb{C}^n$ ao longo de um contorno que não inclui os zeros de P .

Observe que $\frac{\hat{f}}{P}$ é um quociente de funções analíticas já que P é polinomial e $\hat{f}$ é inteira, pelo Teorema de Paley-Wiener.

Seja η um vetor unitário tal que $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \eta^\alpha \neq 0$. Podemos fazer uma rotação de coordenadas e assumir sem problemas que $\eta = (0, \dots, 0, 1)$. Através da multiplicação por uma constante podemos também assumir que $a_{\alpha_0} = 1$ onde $\alpha_0 = (0, \dots, 0, k)$. Então

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \xi^\alpha = \xi_n^k + (\text{termos de menor grau em } \xi_n)$$

Denotaremos ξ por (ξ', ξ_n) onde $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ em $\mathbb{R}^{n-1}$. Para cada ξ' em $\mathbb{R}^{n-1}$ consideraremos $P(\xi) = P(\xi', \xi_n)$ como um polinômio na variável ξ_n e com coeficientes dependendo de ξ' .

Sejam $\lambda_1(\xi'), \dots, \lambda_k(\xi')$ as raízes de $P(\xi', \xi_n) = 0$, fatorando $P(\xi)$ obtemos

$$P(\xi) = c \prod_{j=1}^k (\xi_n - \lambda_j(\xi')).$$

As raízes de $P(\xi)$ dependem continuamente dos coeficientes que por sua vez dependem continuamente de ξ' . Assim as funções

$$\mathbb{R}^{n-1} \ni \xi' \mapsto \lambda_j(\xi') \in \mathbb{C}$$

$$\mathbb{R}^{n-1} \ni \xi' \mapsto (\operatorname{Im} \lambda_j)(\xi') = \operatorname{Im}(\lambda_j(\xi')) \in \mathbb{R}$$

são contínuas em $\mathbb{R}^{n-1}$.

Considere o intervalo $[-k-1, k+1]$ e a decomposição do mesmo, em $k+1$ subintervalos de comprimento 2:

$$[-k-1, k+1] = [-k-1, -k+1] \cup [-k+1, -k+3] \cup \dots \cup [k-1, k+1].$$

Para cada $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ existe pelo menos um subintervalo que contém nenhum dos reais

$$\operatorname{Im} \lambda_1(\xi'), \dots, \operatorname{Im} \lambda_k(\xi')$$

(pois o número de subintervalos é $k+1$). Entre estes escolha aquele de menor extremidade esquerda e chame de $\phi(\xi')$ o ponto médio deste intervalo. Temos assim definido uma função

$$\phi : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow [-k-1, k+1]$$

que é do tipo escada e que para cada $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ vale

$$\min_{1 \leq j \leq k} \{|\phi(\xi') - \operatorname{Im} \lambda_j(\xi')|\} \geq 1.$$

A função ϕ é mensurável. De fato, seja $c = m-1 \in [m-2, m]$. Basta verificar que $\phi^{-1}(c)$ é mensurável, já que ϕ é função escada. Observe que, da definição de ϕ temos, $\xi' \in \phi^{-1}(c) = \phi^{-1}(m-1)$ se, e somente se, valem:



(i) para todo $j = 1, \dots, k$ se tem

$$\operatorname{Im}\lambda_j(\xi') > m \text{ ou } \operatorname{Im}\lambda_j(\xi') < m - 2$$

(ii) cada um dos subintervalos

$$[-k - 1, k + 1] \dots [m - 4, m - 2]$$

contém algum $\operatorname{Im}\lambda_j(\xi')$.

Ou ainda, $\xi' \in \phi^{-1}(m - 1)$ se, e somente se,

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \xi' \in \bigcap_{j=1}^k [\{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}; \operatorname{Im}\lambda_j(\xi') > m\} \cup \{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}; \operatorname{Im}\lambda_j(\xi') < m - 2\}] \\ (ii) \xi' \in \bigcup_{j=1}^k [(\operatorname{Im}\lambda_j)^{-1}([-k - 1, -k + 1])] \dots \xi' \in \bigcup_{j=1}^k [(\operatorname{Im}\lambda_j)^{-1}([m - 4, m - 2])] \end{array} \right.$$

Agora lembrando que $\xi' \mapsto \operatorname{Im}\lambda_j(\xi')$ é contínua segue a mensurabilidade de $\phi^{-1}(m - 1)$ e portanto de ϕ .

Para cada ξ' fixo considere a reta $\operatorname{Im}\xi_n = \phi(\xi')$ no plano complexo da variável ξ_n . Em $\operatorname{Im}\xi_n = \phi(\xi')$ temos

$$\begin{aligned} |P(\xi)| &= \left| c \prod_{j=1}^k (\xi_n - \lambda_j(\xi')) \right| \geq |c| \left| \prod_{j=1}^k (\operatorname{Im}\xi_n - \operatorname{Im}\lambda_j(\xi')) \right| \\ &\geq |c| \left(\min_{1 \leq j \leq k} \{|\operatorname{Im}\xi_n - \operatorname{Im}\lambda_j(\xi')|\} \right)^k \geq |c|. \end{aligned}$$

Consideremos agora a expressão

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\phi(\xi')=\operatorname{Im}\xi_n} e^{2\pi i x \xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} d\xi_n \right) d\xi'$$

onde $\hat{f}$ é a extensão inteira da transformada de Fourier de f fornecida pelo Teorema de Paley-Wiener. Ainda do Teorema de Paley-Wiener temos:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq c_m(1 + |\xi|)^{-m} e^{r|\operatorname{Im}\xi|}; \xi \in \mathbb{C}^n, m = 1, 2, \dots$$

Observe que se $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi_n \in \mathbb{C}$ e $\xi = (\xi', \xi_n)$ então

$$\begin{aligned} |\xi| &= \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 + (\operatorname{Re}\xi_n)^2 + (\operatorname{Im}\xi_n)^2} \geq \\ &\geq \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 + (\operatorname{Re}\xi_n)^2} \end{aligned}$$

e $|\operatorname{Im}\xi| = |\operatorname{Im}\xi_n|$. Logo, sobre $\operatorname{Im}\xi_n = \phi(\xi')$ vale

$$|\hat{f}(\xi', \xi_n)| \leq \frac{c_m e^{r|\phi(\xi')|}}{(1 + |\operatorname{Re}\xi|)^m} = \frac{c_m k}{(1 + |\operatorname{Re}\xi|)^m}$$

onde k é uma cota superior para $e^{r|\phi(\xi')|}$ já que por definição $|\phi(\xi')| \leq k + 1$.

Seja $\xi_n = a + bi$, assim em $\operatorname{Im}\xi_n = \phi(\xi')$, $\xi_n = a + i\phi(\xi')$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\operatorname{Im}\xi_n = \phi(\xi')} e^{2\pi i x \xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} d\xi_n \right) d\xi' = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x(\xi', a + i\phi(\xi'))} \frac{\hat{f}(\xi', a + i\phi(\xi'))}{P(\xi', a + i\phi(\xi'))} da d\xi' \end{aligned}$$

uma vez que $d\xi_n = da + i db = da + i 0 = da$.

Chamando a de ξ_n

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))} \frac{\hat{f}(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))}{P(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))} d\xi_n d\xi'$$

onde ξ_n agora pertence a $\mathbb{R}$. Assim,

$$|u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{2\pi i x \xi'} e^{-2\pi x_n \phi(\xi')}| \frac{|\hat{f}(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))|}{|P(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))|} d\xi_n d\xi' \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi x_n \phi(\xi')} |c|^{-1} \frac{c_m k}{(1 + \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 + \xi_n^2})^m} d\xi_n d\xi' \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi x_n \phi(\xi')} \frac{|c|^{-1} c_m k}{(1 + |\xi|)^m} d\xi_n d\xi' < \infty
\end{aligned}$$

se m é suficientemente grande, pelo Lema 1 (ver Apêndice). Assim u está bem definida.

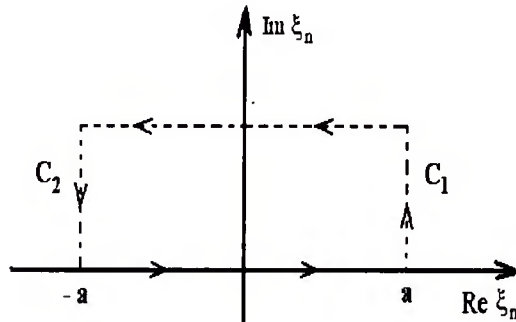
Além disso, quando derivamos em relação a $x = (x_1, \dots, x_n)$ dentro da integral, estamos derivando apenas $e^{2\pi i x \xi}$ e ganhando um multiplicador $q(\xi)$, onde q é um polinômio em ξ . O mesmo tipo de argumento verifica que a integral resultante é absolutamente convergente. Logo u é uma função C^∞ .

Verifiquemos agora que u satisfaz a equação $P(D)u = f$.

$$\begin{aligned}
(P(D)u)(x) &= \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha u(x) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\text{Im} \xi_n = \phi(\xi')} \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha (2\pi i)^{-|\alpha|} \partial^\alpha (e^{2\pi i x \xi}) \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} d\xi_n d\xi' = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\text{Im} \xi_n = \phi(\xi')} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \xi^\alpha \right) e^{2\pi i x \xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} d\xi_n d\xi' = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\text{Im} \xi_n = \phi(\xi')} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi_n d\xi'.
\end{aligned}$$

Agora, observemos que para ξ' fixado teremos $|\hat{f}(\xi', \xi_n)| \leq \frac{c_m k}{(1 + |\text{Re} \xi_n|)^m}$,

isto é, $(\hat{f}(\xi', \xi_n)) \rightarrow 0$ quando $\text{Re} \xi_n \rightarrow 0$.



Seja C o contorno do retângulo na figura acima. Pelo Teorema de Cauchy

$$\begin{aligned} \int_C e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi_n &= \int_{\text{Im} \xi_n = \phi(\xi'), -a < \text{Re} \xi_n < a} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi_n - \int_{-a}^a e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi_n + \\ &+ \int_{C_1} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi_n + \int_{C_2} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi_n = 0. \end{aligned}$$

Fazendo $a \rightarrow \infty$ teremos:

$$\int_{\text{Im} \xi_n = \phi(\xi')} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi_n.$$

Logo, integrando mais uma vez, em $\mathbb{R}^{n-1}$, obtemos

$$(P(D)u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi = f(x)$$

conforme queríamos demonstrar. ■

Iremos agora considerar a solubilidade local de $L = P(D)$ no caso em que f é uma distribuição com suporte compacto. Será suficiente considerar o caso onde $f = \delta$ (δ de Dirac).

De fato, se k é uma distribuição que satisfaz $P(D)k = \delta$ então para toda $f \in \mathcal{E}'$, $k * f$ é bem definida e

$$\begin{aligned} P(D)(k * f) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha (k * f) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (D^\alpha k * f) = \\ &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha k \right) * f = P(D)k * f = \delta * f = f. \end{aligned}$$

Definição 2.2.1 *Uma distribuição k satisfazendo $P(D)k = \delta$ é chamada de solução fundamental do operador diferencial $L = P(D)$.*

Vamos agora estudar o resultado mais importante deste capítulo; o Teorema de Malgrange e Ehrenpreis, cuja prova é uma extensão do argumento usado na demonstração do teorema anterior.

Teorema 2.2.2 *(Teorema de Malgrange e Ehrenpreis) Todo operador diferencial $P(D)$ com coeficientes constantes possui solução fundamental.*

Demonstração: Como no Teorema 2.2.1, tentaremos definir k pela expressão:

$$k(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\text{Im} \xi_n = \phi(\xi')} e^{2\pi i x \xi} (P(\xi))^{-1} d\xi_n d\xi'.$$

A motivação para tal definição é a seguinte; $1 = \hat{\delta} = (\widehat{P(D)k})(\xi) = P(\xi)\hat{k}(\xi)$ e portanto $\hat{k}(\xi) = (P(\xi))^{-1}$ formalmente. No entanto, a integral acima pode divergir no infinito. Para contornar este problema, consideraremos um polinômio auxiliar dado por:

$$P_m(\xi) = P(\xi) \left(1 + 4\pi^2 \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \right)^m,$$

onde m é um inteiro positivo suficientemente grande, a ser escolhido posteriormente.

Seja

$$k_m(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\text{Im}\xi_n = \phi(\xi')} e^{2\pi i x \xi} (P_m(\xi))^{-1} d\xi_n d\xi'.$$

onde ϕ é escolhida apropriadamente para o polinômio P_m , como veremos agora.

Observe que se ξ_n é raiz da equação $1 + 4\pi^2 \sum_{j=1}^n \xi_j^2 = 0$ então $\xi_n = \pm \frac{i\sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2}}{2\pi}$,

e portanto, $|\text{Im}\xi_n| \geq \frac{1}{2\pi} > \frac{1}{2(\pi + \epsilon)}$, para algum $\epsilon > 0$ fixado.

Usando o mesmo raciocínio da construção de ϕ no Teorema 2.2.1 podemos construir $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \left[-\frac{1}{2(\pi + \epsilon)}, \frac{1}{2(\pi + \epsilon)} \right]$ tal que para cada ξ' a distância de $\phi(\xi')$ até a parte imaginária de qualquer raiz de $P(\xi', \xi_n)$ é pelo menos $\frac{1}{2(k+1)(\pi + \epsilon)}$.

Uma vez construída a ϕ , sobre a reta $\text{Im}\xi_n = \phi(\xi')$ temos:

$$\begin{aligned} |P(\xi)| &= \left| c \prod_{j=1}^k (\xi_n - \lambda_j(\xi')) \right| \geq |c| \prod_{j=1}^k |\text{Im}\xi_n - \text{Im}\lambda_j(\xi')| \geq \\ &\geq |c| \left(\min_{1 \leq j \leq k} |\text{Im}\xi_n - \text{Im}\lambda_j(\xi')| \right)^k \geq \\ &\geq |c| \left(\frac{1}{2(k+1)(\pi + \epsilon)} \right)^k = c_1 \end{aligned}$$

Assim, $|P_m(\xi)| = |P(\xi)| |1 + 4\pi^2 \sum_{j=1}^n \xi_j^2|^m \geq c_1 |1 + 4\pi^2 \sum_{j=1}^n \xi_j^2|^m$ em $\text{Im}\xi_n = \phi(\xi')$.

Seja $\xi_n = a + bi$. Em $\text{Im}\xi_n = \phi(\xi')$, $\xi_n = a + i\phi(\xi')$. Logo,

$$\begin{aligned} k_m(x) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\text{Im}\xi_n = \phi(\xi')} e^{2\pi i x \xi} (P_m(\xi', \xi_n))^{-1} d\xi_n d\xi' = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x(\xi', a + i\phi(\xi'))} (P_m(\xi', a + i\phi(\xi')))^{-1} da d\xi'. \end{aligned}$$

Chamando a de ξ_n , escrevemos

$$k_m(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))} (P_m(\xi', \xi_n + i\phi(\xi')))^{-1} d\xi_n d\xi'.$$

e observamos que nesta última integral, $\xi = (\xi', \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} |P_m(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))| &\geq c_1 |1 + 4\pi^2(|\xi'|^2 + (\xi_n + (i\phi(\xi'))^2)|^m = \\ &= c_1 |1 + 4\pi^2|\xi'|^2 + 4\pi^2(\xi_n + (i\phi(\xi'))^2)|^m. \end{aligned}$$

Mas;

$$\begin{aligned} |1 + 4\pi^2|\xi'|^2 + 4\pi^2(\xi_n + (i\phi(\xi'))^2)| &= \\ = |1 + 4\pi^2|\xi|^2 - 4\pi^2(\phi(\xi'))^2 + 8\pi^2\xi_n\phi(\xi')i| &\geq \\ \geq |1 + 4\pi^2|\xi|^2 - 4\pi^2(\phi(\xi'))^2|, \end{aligned}$$

onde na última passagem usamos $|z| \geq |\operatorname{Re} z|$. Logo, como $(\phi(\xi'))^2 \leq \frac{1}{4(\pi + \epsilon)^2}$ temos:

$$1 - 4\pi^2(\phi(\xi'))^2 \geq 1 - \frac{\pi^2}{(\pi + \epsilon)^2} = \lambda > 0.$$

Portanto, $|1 + 4\pi^2|\xi|^2 - 4\pi^2(\phi(\xi'))^2| \geq \lambda(1 + |\xi|^2)$.

Assim, $|P_m(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))| \geq c_1 \lambda^m (1 + |\xi|^2)^m$ e

$$\begin{aligned} |k_m(x)| &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{2\pi i x(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))}| |P_m(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))|^{-1} d\xi_n d\xi' \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi x_n \phi(\xi')}}{c_1 \lambda^m (1 + |\xi|^2)^m} d\xi < \infty \end{aligned}$$

se $m > \frac{n}{2}$.

Observe que na última integral x_n está fixo e $\phi(\xi')$ é limitada e portanto pelo Lema 1 Apêndice, a integral converge absolutamente se $m > \frac{n}{2}$.

Derivando dentro da integral com relação a x obtemos um polinômio em $\xi_1, \dots, \xi_n$ com coeficientes dependendo de $\phi(\xi')$. Uma vez que $\phi(\xi')$ é limitada, os coeficientes do polinômio serão limitados.

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha e^{2\pi i x(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))}| &= (2\pi i)^{|\alpha|} |(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))^\alpha| e^{2\pi x_n \phi(\xi')} = \\ &= (2\pi i)^{|\alpha|} |(\xi')^{\alpha'}| |(\xi_n + i\phi(\xi'))^{\alpha_n}| e^{2\pi x_n \phi(\xi')} = \\ &= (2\pi i)^{|\alpha|} |(\xi')^{\alpha'}| \left| \sum_{k=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_n}{k} \xi_n^k (i\phi(\xi'))^{\alpha_n-k} \right| e^{2\pi x_n \phi(\xi')} \end{aligned}$$

onde $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$.

Portanto,

$$|D_x^\alpha e^{2\pi i x(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))}| = c_2 |(\xi')^{\alpha'}| \left| \sum_{k=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_n}{k} \xi_n^k (i\phi(\xi'))^{\alpha_n-k} \right| e^{2\pi x_n \phi(\xi')}$$

onde $c_2 = (2\pi i)^{|\alpha|}$.

Fazendo $c_2 \binom{\alpha_n}{k} |i\phi(\xi')|^{\alpha_n-k} \leq c_{\alpha_n}$

$$\begin{aligned} c_2 |(\xi')^{\alpha'}| \left| \sum_{k=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_n}{k} \xi_n^k (i\phi(\xi'))^{\alpha_n-k} \right| e^{2\pi x_n \phi(\xi')} &\leq \left(|(\xi')^{\alpha'}| \sum_{k=0}^{\alpha_n} c_{\alpha_n} |\xi_n|^k \right) e^{2\pi x_n \phi(\xi')} \leq \\ &\leq c_{\alpha_n} e^{2\pi x_n \phi(\xi')} \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} |\xi^\beta| \leq c_{\alpha_n} e^{2\pi x_n \phi(\xi')} \sum_{|\beta| \leq 2|\alpha|} |\xi^\beta|. \end{aligned}$$

Mas $\sum_{|\beta| \leq 2|\alpha|} |\xi^\beta| \leq c_3 (1 + |\xi|^2)^{|\alpha|}$.

Assim $|D_x^\alpha e^{2\pi i x(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))}| \leq c_4 e^{2\pi x_n \phi(\xi')} (1 + |\xi|^2)^{|\alpha|}$ onde $c_4 = c_3 c_{\alpha_n}$.

Derivando sob o sinal de integração temos

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha k_m(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} c_4 e^{2\pi x_n \phi(\xi')} \frac{(1 + |\xi|^2)^{|\alpha|}}{|P_m(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))|} d\xi_n d\xi' \leq \\ &\leq c_5 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi x_n \phi(\xi')} (1 + |\xi|^2)^{-(m-|\alpha|)} d\xi_n d\xi' \end{aligned}$$

onde $c_5 = c_4 c_1^{-1} \lambda^{-m}$.

Pelo Lema 1 (ver Apêndice), se $m > |\alpha| + \frac{n}{2}$ a integral definida por k_m converge absolutamente. Portanto $k_m \in C^{(m-1)-\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$.

Mostraremos agora que $P_m(D)k_m = \delta$.

Tome $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Observe que o transposto de $P_m(D)$ é $P_m(-D)$. Então:

$$\begin{aligned} \langle P_m(D)k_m, \varphi \rangle &= \langle k_m, P_m(-D)\varphi \rangle = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))} \frac{(P_m(-D)\varphi)(x)}{P_m(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))} d\xi_n d\xi' dx. \end{aligned}$$

Observe também que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))} \frac{(P_m(-D)\varphi)(x)}{P_m(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))} d\xi_n d\xi' dx \right| &\leq \\ &\leq c_1^{-1} \lambda^{-m} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi x_n \phi(\xi')} \frac{|P_m(-D)\varphi(x)|}{(1 + |\xi|^2)^m} d\xi dx < \infty. \end{aligned}$$

Aplicando então o Teorema de Fubini teremos

$$\begin{aligned} \langle P_m(D)k_m, \varphi \rangle &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{P_m(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))} P_m(-D)\varphi(x) dx \right) d\xi_n d\xi' = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{P_m(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))} \left(\int_{\mathbb{R}^n} P_m(D) e^{2\pi i x(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))} \varphi(x) dx \right) d\xi_n d\xi'. \end{aligned}$$

Mas $P_m(D)e^{2\pi i x(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))} = e^{2\pi i x(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))} P_m(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))$.

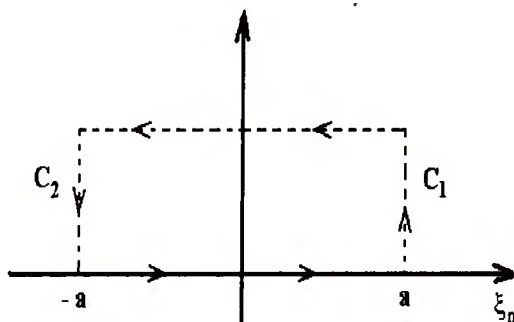
Assim,

$$\begin{aligned} \langle P_m(D)k_m, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))} \varphi(x) dx d\xi_n d\xi' = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))} \varphi(-x) dx d\xi_n d\xi'. \end{aligned}$$

Seja $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(x) = \varphi(-x)$. Do Teorema de Paley-Wiener, a extensão de $\hat{\psi}$ a $\mathbb{C}^n$ é inteira e satisfaz

$$|\hat{\psi}(z)| \leq c_m(1 + |z|)^{-m} e^{r|\operatorname{Im} z|} \leq c_m(1 + |\operatorname{Re} z_n|)^{-m} e^{r|\operatorname{Im} z|}.$$

Portanto, $|\hat{\psi}(\xi', \xi_n + i\phi(\xi'))| \rightarrow 0$ quando $|\xi_n| \rightarrow \infty$. Agora considere o contorno C abaixo:



Usando o Teorema de Cauchy no cálculo de $\int_C \hat{\psi}(\xi', \xi_n) d\xi$ obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\xi', \xi_n + i\phi(\xi')) d\xi_n = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\xi', \xi_n) d\xi_n.$$

Portanto

$$\langle P_m(D)k_m, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\xi', \xi_n + i\phi(\xi')) d\xi_n d\xi' =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(-\xi) d\xi = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Isto é, $P_m(D)k_m = \delta$.

Assim,

$$\begin{aligned} \delta &= P(D)[1 + 4\pi^2 \sum_{j=1}^n D_j^2]^m k_m = \\ &= P(D) \left[1 + 4\pi^2 (2\pi i)^{-2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) \right]^m k_m = \\ &= P(D)[1 - \Delta]^m k_m. \end{aligned}$$

Portanto, $\delta = P(D)(1 - \Delta)^m k_m$. Se colocarmos $k = (1 - \Delta)^m k_m$ teremos $P(D)k = \delta$. Então k é a solução fundamental de $P(D)$. ■

2.3 Propriedade de Regularidade de Operadores Diferenciais

Definição 2.3.1 Seja $L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha$ um operador diferencial onde $a_\alpha \in C^\infty$.

L é dito **hipoelíptico** se, e somente se, para todo $u \in \mathcal{D}'$, $\text{sing supp}(u) \subset \text{sing supp}(Lu)$. Isto é, L é hipoelíptico se, e somente se, para todo conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e toda $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $Lu \in C^\infty(\Omega)$ implica $u \in C^\infty(\Omega)$.

Exemplo 2.3.1 Seja $L = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ em $\mathbb{R}^2$. A solução geral da equação $Lu = 0$ é dada por $u(x, y) = f(x) + g(y)$, onde f e g são funções C^1 arbitrárias. Portanto L não é hipoelíptico.

O operador $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ é hipoelíptico. Isto será demonstrado no próximo capítulo.



Observemos que se L é hipoelíptico então toda solução fundamental de L   uma função C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Veremos a seguir, que no caso de operadores diferenciais parciais com coeficientes constantes, isto será suficiente para hipoelipticidade.

Teorema 2.3.1 *Seja L um operador diferencial parcial com coeficientes constantes. Se alguma solução fundamental de L   de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ então L   hipoelíptico.*

Demonstração: Seja k uma solução fundamental de L tal que k   C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Suponha que $u \in \mathcal{D}'$ e $Lu \in C^\infty(\Omega)$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto.

Para $x \in \Omega$, escolha $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\bar{B}(x, \epsilon) \subset \Omega$. Escolha $\phi \in C_0^\infty(B(x, \epsilon))$ tal que $\phi \equiv 1$ em $B(x, \frac{\epsilon}{2})$. Assim, usando a fórmula de Leibniz (Ver [8], página 4) temos:

$$\begin{aligned} L(\phi u) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha(\phi u) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (2\pi i)^{-|\alpha|} \partial^\alpha(\phi u) = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (2\pi i)^{-|\alpha|} \left(\phi \partial^\alpha u + \sum_{\beta, \beta \neq 0} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta \phi) (\partial^{\alpha-\beta} u) \right) = \\ &= \phi \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (2\pi i)^{-|\alpha|} \partial^\alpha u + \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (2\pi i)^{-|\alpha|} \left(\sum_{\beta, \beta \neq 0} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta \phi) (\partial^{\alpha-\beta} u) \right) = \phi Lu + v, \end{aligned}$$

onde $v = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (2\pi i)^{-|\alpha|} \sum_{\beta \neq 0} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta \phi) (\partial^{\alpha-\beta} u)$.

Observemos que $v = 0$ na bola $B(x, \frac{\epsilon}{2})$ uma vez que $\phi \equiv 1$ em $B(x, \frac{\epsilon}{2})$ e as derivadas de ϕ que aparecem na expressão de v , são todas de ordem maior ou igual a 1. Assim podemos escrever

$$k * L(\phi u) = k * (\phi Lu + v) = k * \phi Lu + k * v.$$

Agora, ϕLu é uma função $C_0^\infty(\Omega)$. Logo $k * \phi Lu$ é C^∞ . Também, $k * v$ é C^∞ na bola $B(x, \frac{\epsilon}{2})$. De fato, pela Proposição 1.2.2, $\text{sing supp}(k * v) \subset \text{supp}(v)$. Como $v = 0$ em $B(x, \frac{\epsilon}{2})$, $B(x, \frac{\epsilon}{2}) \cap \text{supp}(v) = \emptyset$. Assim o suporte singular de $k * v$ não intercepta $B(x, \frac{\epsilon}{2})$, isto é, $k * v$ é C^∞ em $B(x, \frac{\epsilon}{2})$.

Desta forma, $k * L(\phi u)$ é C^∞ na bola $B(x, \frac{\epsilon}{2})$.

Mas $k * L(\phi u) = Lk * \phi u = \delta * \phi u = \phi u$. Logo, ϕu é C^∞ em $B(x, \frac{\epsilon}{2})$.

Uma vez que $\phi \equiv 1$ em $B(x, \frac{\epsilon}{2})$, u é uma função C^∞ em $B(x, \frac{\epsilon}{2})$. Como x foi tomado arbitrariamente em Ω segue que $u \in C^\infty(\Omega)$. Portanto L é hipoelíptico. ■.



Capítulo 3

O Operador de Laplace

Neste capítulo veremos algumas propriedades e encontraremos soluções fundamentais de um dos mais importantes operadores diferenciais, o operador de Laplace ou Laplaciano Δ em $\mathbb{R}^n$, definido por, $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. Terminaremos com o estudo do problema de Dirichlet para a equação de Laplace quando Ω é um semi-espaço.

3.1 Solução Fundamental

Nosso objetivo é encontrar a solução fundamental de Δ , isto é, queremos encontrar a distribuição k tal que $\Delta k = \delta$. Começamos examinando o Laplaciano de uma função radial. Seja $F(x) = f(r)$, onde $r = |x|$ e f é uma função de uma variável real suficientemente derivável.

Observando que $\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r}$ temos

$$\begin{aligned}\Delta F(x) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(r) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(f'(r) \cdot \frac{x_j}{r} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(f''(r) \frac{x_j^2}{r^2} + \frac{f'(r)}{r} - \frac{f'(r)}{r^3} x_j^2 \right) = f''(r) + (n-1) \frac{f'(r)}{r}.\end{aligned}$$



Agora, seja $k(x) = f(r)$. Se k fosse solução fundamental de Δ teríamos que ter $f''(r) + \frac{(n-1)}{r}f'(r) = 0$ em $(0, \infty)$.

Logo, $f''(r) = -\frac{(n-1)}{r}f'(r)$, isto é, $\frac{f''(r)}{f'(r)} = -\frac{(n-1)}{r}$.

Integrando temos,

$$\int \frac{f''(r)}{f'(r)} dr = \int -\frac{(n-1)}{r} dr.$$

Assim, $f'(r) = c_0 r^{1-n}$ onde c_0 é uma constante. Integrando uma vez mais, teremos

$$f(r) = \begin{cases} c_1 r^{2-n} + c_2; & n \neq 2 \\ c_1 \log r + c_2; & n = 2. \end{cases}$$

Uma vez que constantes são soluções da equação de Laplace homogênea, assumiremos que $c_2 = 0$.

Assim, se $F(x) = |x|^{2-n}$ ($n \neq 2$) ou $F(x) = \log |x|$ ($n = 2$) esperamos que $\Delta F = c\delta$ para algum $c \neq 0$. Desta forma, $k = c^{-1}F$ será a solução fundamental procurada.

Teorema 3.1.1 *Se $F(x) = |x|^{2-n}$ em $\mathbb{R}^n$, $n \neq 2$, então $\Delta F = (2-n)w_n\delta$, onde w_n é a área da esfera unitária no $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Para $\epsilon > 0$ defina $F_\epsilon(x) = (\epsilon^2 + |x|^2)^{\frac{2-n}{2}}$. Observe que F_ϵ é uma função $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso, se $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $F_\epsilon\phi \rightarrow F\phi$ (pontualmente) quando $\epsilon \rightarrow 0$ e $|F_\epsilon\phi| \leq \text{const.}|\phi| \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Ver [1], página 135), temos

$$\int F_\epsilon\phi \rightarrow \int F\phi,$$

isto é, $\langle F_\epsilon, \phi \rangle \rightarrow \langle F, \phi \rangle, \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Assim, $F_\epsilon \rightarrow F$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ no sentido de distribuições. Ainda,

$$\langle \Delta F_\epsilon, \phi \rangle = \langle F_\epsilon, \Delta \phi \rangle \rightarrow \langle F, \Delta \phi \rangle = \langle \Delta F, \phi \rangle.$$

Portanto, $\Delta F_\epsilon \rightarrow \Delta F$ no sentido de distribuições. Calculemos agora ΔF_ϵ .

$$\begin{aligned} \Delta F_\epsilon(x) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon^2 + |x|^2)^{\frac{2-n}{2}} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} ((2-n)(\epsilon^2 + |x|^2)^{-\frac{n}{2}} x_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n (2-n) [-n(\epsilon^2 + |x|^2)^{-\frac{n}{2}-1} x_j^2 + (\epsilon^2 + |x|^2)^{-\frac{n}{2}}] = \\ &= (2-n)(\epsilon^2 + |x|^2)^{-\frac{n}{2}-1} n\epsilon^2. \end{aligned}$$

Observe que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta F_\epsilon(x)| dx = |2-n| n \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|x|^2 + \epsilon^2)^{\frac{n}{2}+1}} dx < \infty.$$

Portanto $\Delta F_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Note que,

$$\Delta F_1 \left(\frac{x}{\epsilon} \right) = (2-n) \left(\left| \frac{x}{\epsilon} \right|^2 + 1 \right)^{-\frac{n}{2}-1} n$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta F_\epsilon(x) &= (2-n)(|x|^2 + \epsilon^2)^{-\frac{n}{2}-1} n\epsilon^2 = \\ &= (2-n) \left(\left| \frac{x}{\epsilon} \right|^2 + 1 \right)^{-\frac{n}{2}-1} n\epsilon^{-n} = \epsilon^{-n} \Delta F_1 \left(\frac{x}{\epsilon} \right), \end{aligned}$$

isto é, $\Delta F_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \Delta F_1 \left(\frac{x}{\epsilon} \right)$.

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\begin{aligned} \langle \Delta F_\epsilon, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \epsilon^{-n} \Delta F_1 \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \varphi(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \epsilon^{-n} \Delta F_1 \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \bar{\varphi}(0-x) dx = (\Delta F_\epsilon * \bar{\varphi})(0). \end{aligned}$$

Como ΔF_1 é limitada e contínua, segue do Teorema (1.2.1) que

$$\langle \Delta F_\epsilon, \varphi \rangle \rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Delta F_1(x) dx \right) \bar{\varphi}(0),$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Mas $\bar{\varphi}(0) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$, logo $\Delta F_\epsilon \rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Delta F_1(x) dx \right) \delta$ no sentido de distribuições.

Portanto, $\Delta F = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Delta F_1(x) dx \right) \delta$.

Desta forma, resta calcularmos $\int_{\mathbb{R}^n} \Delta F_1(x) dx$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta F_1(x) dx &= n(2-n) \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-\frac{n}{2}-1} dx = \\ &= n(2-n) w_n \int_0^\infty (1+r^2)^{-\frac{n}{2}-1} r^{n-1} dr. \end{aligned}$$

Fazendo $r^2 + 1 = s$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta F_1(x) dx &= \frac{n(2-n)}{2} w_n \int_1^\infty s^{-\frac{n}{2}-1} (s-1)^{\frac{n-2}{2}} ds = \\ &= \frac{1}{2} n(2-n) w_n \int_1^\infty s^{-2} \left(1 - \frac{1}{s} \right)^{\frac{n}{2}-1} ds. \end{aligned}$$

Agora, façamos $\frac{1}{s} = \sigma$ para obtermos,



$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta F_1(x) dx = \frac{1}{2} n(2-n) w_n \int_0^1 (1-\sigma)^{\frac{n}{2}-1} d\sigma = (2-n) w_n.$$

Portanto $\Delta F = (2-n) w_n \delta$ como queríamos demonstrar. ■

Teorema 3.1.2 Se $F(x) = \log |x|$, $x \in \mathbb{R}^2$, então $\Delta F = 2\pi\delta$.

Demonstração: A função $\log |x|$ é integrável numa vizinhança da origem e portanto, ela define uma distribuição em $\mathbb{R}^2$.

Calculemos a distribuição ΔF definida por;

$$\langle \Delta F, \phi \rangle = \langle F, \Delta \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} F \Delta \phi dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} F \Delta \phi dx.$$

Faremos uma mudança para coordenadas polares. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{|x| > \epsilon} F(x) \Delta \phi(x) dx &= \int_{|x| > \epsilon} \log |x| \Delta \phi(x) dx = \\ &= \int_{\epsilon}^{\infty} r \log r \int_0^{2\pi} \Delta \phi(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta dr. \end{aligned}$$

Usando a fórmula do Laplaciano em coordenadas polares, temos,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \Delta \phi(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) d\theta = \\ &= \frac{1}{r} dr \left(r \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} \phi(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta \right). \end{aligned}$$

Uma vez que a função $\phi(r \cos \theta, r \sin \theta)$ é periódica

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} d\theta = \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(r, 0) - \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(r, 0) = 0,$$

Assim;

$$\begin{aligned}\int_{|x|>\epsilon} F(x)\Delta\phi(x)dx &= \int_{\epsilon}^{\infty} r \log r \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} \phi(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta \right) dr = \\ &= -\epsilon \log \epsilon \frac{d}{dr} \left(\int_0^{2\pi} \phi(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta \right) \Big|_{r=\epsilon} + \int_0^{2\pi} \phi(\epsilon \cos \theta, \epsilon \sin \theta) d\theta.\end{aligned}$$

Aplicando o limite, quando $\epsilon \rightarrow 0$, temos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x|>\epsilon} F(x)\Delta\phi(x)dx = 0 + \phi(0) \int_0^{2\pi} d\theta,$$

ou seja,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x|>\epsilon} F(x)\Delta\phi(x)dx = 2\pi\phi(0).$$

Portanto, $\langle \Delta F, \phi \rangle = 2\pi\phi(0)$ e $\Delta F = 2\pi\delta$. ■.

Resumindo, os dois últimos teoremas afirmam:

Corolário 3.1.1 *Seja*

$$k(x) = \begin{cases} \frac{|x|^{2-n}}{(2-n)w_n} & \text{se } n \neq 2 \\ \frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

Então k é uma solução fundamental do Laplaciano.

Demonstração:

$$\Delta k = \frac{1}{(2-n)w_n} (2-n)w_n \delta = \delta \quad \text{para } n \neq 2$$

e

$$\Delta k = \frac{1}{2\pi} 2\pi \delta = \delta \quad \text{para } n = 2. \blacksquare$$

Corolário 3.1.2 Δ é hipoelíptico.

Demonstração: Segue do Teorema 2.3.1, já que k é uma solução fundamental de Δ que é C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. ■

3.2 O Problema de Dirichlet

Nesta seção veremos o problema de valor de fronteira para a equação de Laplace, conhecido como problema de Dirichlet.

Dado $f \in \partial\Omega$, o problema consiste em encontrar uma função u tal que $\Delta u = 0$ em Ω e $u = f$ em $\partial\Omega$.

Quando Ω é limitado e $f \in C(\partial\Omega)$ a unicidade da solução (se existir), é uma consequência do princípio do máximo (Ver [3], página 93). Não é uma tarefa fácil provar a existência de solução do problema de Dirichlet. O que faremos é resolver um caso especial, isto é, quando Ω é um semi-espaço.

Consideraremos as seguintes notações:

Substituiremos $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{R}^{n+1}$ com coordenadas $(x_1, \dots, x_n, t)$. Nosso Laplaciano em $\mathbb{R}^{n+1}$ será denotado por $\partial_t^2 + \Delta$ onde $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ e $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

Assim, o problema de Dirichlet é o seguinte:

Dado f em $\mathbb{R}^n$, encontrar uma função u tal que

$$(\partial_t^2 + \Delta)u(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x); \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Afim de resolvermos o problema de Dirichlet, aplicaremos a transformada de Fourier na variável x , denotando-a por $\tilde{u}(\xi, t)$, ou seja,

$$\tilde{u}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} u(x, t) dx.$$



Se aplicarmos a transformada de Fourier no Problema de Dirichlet obtemos

$$\begin{aligned} ((\partial_t^2 + \Delta)u)(\xi, t) &= 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \tilde{u}(\xi, 0) &= \hat{f}(\xi); & \text{em } \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (3.1)$$

A solução geral de $(\partial_t^2 - 4\pi^2|\xi|^2)\tilde{u}(\xi, t) = 0$ é $\tilde{u}(\xi, t) = a(\xi)e^{-2\pi|\xi|t} + b(\xi)e^{2\pi|\xi|t}$.
Impondo a condição inicial temos $a(\xi) + b(\xi) = \hat{f}(\xi)$.

Observe que $\tilde{u}$ define uma distribuição temperada em ξ se $|a(\xi)|$ crescer no máximo polinomialmente quando $|\xi| \rightarrow \infty$ e $|b(\xi)|$ decrescer mais rápido do que exponencialmente.

Por ser esta exigência em b um tanto forte, assumiremos que $b \equiv 0$ e teremos portanto

$$\begin{cases} \tilde{u}(\xi, t) = a(\xi)e^{-2\pi|\xi|t} \\ \hat{f}(\xi) = a(\xi), \end{cases}$$

ou seja, $\tilde{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi)e^{-2\pi|\xi|t}$.

Agora, usando propriedades da transformada de Fourier temos

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi, t) &= \hat{f}(\xi)[(e^{-2\pi|\cdot|t})^\vee](\xi) = \\ &= [f * (e^{-2\pi|\cdot|t})^\vee](\xi), \end{aligned}$$

e tomando a transformada inversa obtemos $u(x, t) = (f * [e^{-2\pi|\cdot|t}]^\vee)(x)$.

Definindo $P_t(x) = [e^{-2\pi|\cdot|t}]^\vee(x)$ temos $u(x, t) = (f * P_t)(x)$.

A função P_t é chamada Núcleo de Poisson para a região $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$.

No que segue, calcularemos P_t explicitamente.

$$P_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} e^{-2\pi|\xi|t} d\xi.$$

Tomando $\beta = 2\pi|\xi|t$ no Lema 2 (Ver Apêndice) obtemos:

$$e^{-2\pi|\xi|t} = \int_0^\infty \frac{e^{-s} e^{-\frac{4\pi^2|\xi|^2 t^2}{4s}}}{\sqrt{\pi s}} ds.$$

Assim;

$$\begin{aligned} P_t(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} \int_0^\infty \frac{e^{-s} e^{-\frac{4\pi^2|\xi|^2 t^2}{4s}}}{\sqrt{\pi s}} ds d\xi = \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} (e^{-\pi(\frac{\pi t^2}{s})^2 |\cdot|^2})(x) ds. \end{aligned}$$

Agora, usando o Teorema 1.3.1 e a propriedade $\check{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$ obtemos

$$P_t(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} \left(\frac{\pi t^2}{s} \right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{s|x|^2}{t^2}} ds = \pi^{-\frac{n+1}{2}} t^{-n} \int_0^\infty e^{-s\left(1+\frac{|x|^2}{t^2}\right)} s^{\frac{n+1}{2}-1} ds.$$

Pela propriedade (3) da Seção 1.5,

$$\begin{aligned} P_t(x) &= \pi^{-\frac{n+1}{2}} t^{-n} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \left(\frac{1+|x|^2}{t^2}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = \\ &= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \pi^{-\frac{n+1}{2}} \frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \end{aligned}$$

Portanto, $P_t(x) = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \pi^{-\frac{n+1}{2}} \frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$. Observe que

$$\left| \frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \right| \leq \frac{1}{t^{n+1} \left(1 + \left|\frac{x}{t}\right|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

e pelo Lema 1 (ver Apêndice)

$$\frac{1}{t^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1 + \left|\frac{x}{t}\right|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} dx < \infty.$$

Assim, $P_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e além disso $P_t \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, pois $\left| \frac{1}{t^{n+1}(1 + \left|\frac{x}{t}\right|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \right| \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$ e é contínuo na variável $x \in \mathbb{R}^n$.

Portanto $P_t \in L^1 \cap L^\infty$, de modo que $f * P_t$ está bem definida se por exemplo, $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$.

Segue da construção de P_t ou de um cálculo direto que $[(\Delta + \partial_t^2)P_t](x) = 0$, logo P_t satisfaz $(\Delta + \partial_t^2)P_t = 0$ em $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.

Assim, $(\Delta + \partial_t^2)(f * P_t) = f * (\Delta + \partial_t^2)P_t = 0$ para qualquer f . Além disso;

$$P_t(x) = t^{-n} P_1\left(\frac{x}{t}\right) \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n} P_1(x) dx = \hat{P}_1(0) = e^{-2\pi t|0|} = 1.$$

Logo, quando $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ o Teorema 1.2.1 garante que

$$f * P_t \longrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n} P_1(x) dx \right) f = f$$

quando $t \rightarrow 0$, na norma do L^p ; e quando f é limitada e contínua, $f * P_t \rightarrow f$ uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ quando $t \rightarrow 0$.

Desta forma,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (f * P_t)(x) = f(x),$$

seja em $L^p(\mathbb{R}^n)$ ou uniforme em compactos de $\mathbb{R}^n$. Isto representa a condição de fronteira $u(x, 0) = f(x)$ sendo satisfeita em ambos os casos.

Resumindo, a função $u(x, t) = (f * P_t)(x)$ é a solução do Problema de Dirichlet para o semi-espaco. ■

Observemos ainda que o Núcleo de Poisson P_t está intimamente relacionado com a solução fundamental k_{n+1} do laplaciano em $\mathbb{R}^{n+1}$. De fato,

$$k_{n+1}(x, t) = \frac{1}{(1-n)w_{n+1}}(|x|^2 + t^2)^{-\frac{(n-1)}{2}}$$

e assim, $P_t(x) = 2\partial_t k_{n+1}(x, t)$.



Apêndice

Neste apêndice apresentamos e demonstramos dois lemas técnicos, que se fazem necessários para o desenvolvimento e entendimento deste trabalho.

Lema 1 *As integrais $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-s} dx$ e $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-\frac{s}{2}} dx$ são convergentes se, e somente se, $s > n$. Em particular,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} dx \leq \pi^n.$$

Demonstração: Note que:

$$\begin{aligned} (1 + |x|)^{-s} &= (1 + 2|x| + |x|^2)^{-\frac{s}{2}} \leq (1 + |x|^2)^{-\frac{s}{2}} = \\ &= (1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{s}{2}} \leq (1 + \max_{1 \leq j \leq n} x_j^2)^{-\frac{s}{2}} \leq \\ &\leq (1 + x_1^2)^{-\frac{s}{2n}} \dots (1 + x_n^2)^{-\frac{s}{2n}}. \end{aligned}$$

E o resultado segue do caso unidimensional.

Em particular, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + x_j^2)^{-1} dx_j &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R (1 + x_j^2)^{-1} dx_j = \lim_{R \rightarrow \infty} (\arctan x_j)_R^R = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \arctan(R) - \arctan(-R) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \end{aligned}$$



Para $s = 2n$, ou seja, $\frac{s}{2} = n$ temos:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} dx &\leq \int \dots \int (1 + x_1^2)^{-1} \dots (1 + x_n^2)^{-1} dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int (1 + x_n^2)^{-1} \dots \int (1 + x_1^2)^{-1} dx_1 \dots dx_n = \pi^n.\end{aligned}$$

Portanto, $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} dx \leq \pi^n$ como queríamos demonstrar. ■

Lema 2 Quando $\beta > 0$, $e^{-\beta} = \int_0^\infty \frac{e^{-s} e^{-\frac{\beta^2}{4s}}}{\sqrt{\pi s}} ds$.

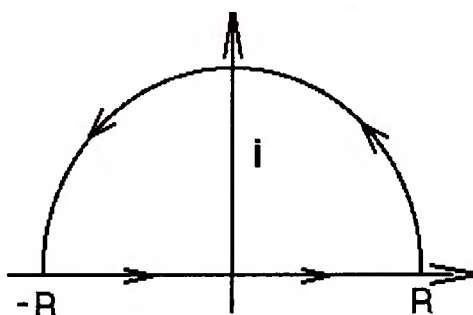
Demonstração: Primeiro observe que $e^{-\beta} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\beta\sigma}}{\sigma^2 + 1} d\sigma$.

De fato,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\beta\sigma}}{\sigma^2 + 1} d\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{i\beta z}}{z^2 + 1} dz.$$

O integrando, $f(z) = \frac{e^{i\beta z}}{z^2 + 1} = \frac{e^{i\beta z}}{(z + i)(z - i)}$ possui pólos simples nos pontos $z = \pm i$.

Seja C_R o semi-círculo do semi-plano $\text{Im} z \geq 0$, de raio R e centro na origem.



Supondo $R > 1$, o contorno formado pelo segmento $[-R, R]$, seguido de C_R contém o polo $z = i$, onde o resíduo de f é:

$$\text{Res}f(i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^{i\beta z}}{(z + i)(z - i)} = \frac{e^{-\beta}}{2i}.$$

Pelo Teorema do Resíduo temos:

$$\int_{-R}^R \frac{e^{i\beta z}}{z^2 + 1} dz = \int_{C_R} \frac{e^{i\beta z}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-\beta}}{2i} = \pi e^{-\beta}. \quad (3.2)$$

Por outro lado, é fácil ver que $|f(z)| \leq \frac{1}{|z^2 - 1|}$. De fato,

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{i\beta z}}{z^2 + 1} \right| = \frac{|\cos \beta z + i \sin \beta z|}{|z^2 + 1|} = \frac{\sqrt{\cos^2 \beta z + \sin^2 \beta z}}{|z^2 + 1|} = \frac{1}{|z^2 + 1|} \leq \frac{1}{|z^2| + 1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{e^{i\beta z}}{z^2 + 1} dz \right| &\leq \int_{C_R} \left| \frac{e^{i\beta z}}{z^2 + 1} \right| |dz| = \int_{C_R} \frac{1}{|z^2 + 1|} |dz| \leq \\ &\leq \int_{C_R} \frac{1}{|z^2| - 1} |dz| = \frac{1}{R^2 - 1} \int_{C_R} |dz| = \frac{\pi R}{R^2 - 1} = \frac{\pi}{R - \frac{1}{R}}. \end{aligned}$$

Isto mostra que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i\beta z}}{z^2 + 1} dz = 0$ pois $\frac{\pi}{R - \frac{1}{R}} \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$.

Logo passando o limite em (3.2), obtemos:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{i\beta z}}{z^2 + 1} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta z}}{z^2 + 1} dz = \pi e^{-\beta}.$$

Agora,

$$\int_0^{\infty} e^{-(\sigma^2 + 1)s} ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-(\sigma^2 + 1)s} ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-(\sigma^2 + 1)s}}{-(\sigma^2 + 1)} \right)_0^R = \frac{1}{\sigma^2 + 1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e^{-\beta} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta\sigma} \frac{1}{\sigma^2 + 1} d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma^2+1)s} ds d\sigma = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta\sigma} e^{-(\sigma^2+1)s} d\sigma ds. \end{aligned}$$

Fazendo $\sigma = 2\pi\kappa$ obtemos

$$\begin{aligned} e^{-\beta} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta 2\pi\kappa} e^{-(4\pi^2\kappa^2+1)s} 2\pi d\kappa ds = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-s} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\kappa\beta} e^{-\pi(4\pi s)\kappa^2} d\kappa ds = 2 \int_0^{+\infty} e^{-s} (e^{-\pi(4\pi s(\cdot)^2)})^\vee(\beta) ds. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.3.2 temos

$$2 \int_0^{+\infty} e^{-s} (e^{-\pi(4\pi s(\cdot)^2)})^\vee(\beta) ds = 2 \int_0^{+\infty} e^{-s} (4\pi s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4\pi s}\pi\beta^2} ds = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s} e^{-\frac{\beta^2}{4s}}}{\sqrt{\pi s}} ds.$$

Portanto, $e^{-\beta} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s} e^{-\frac{\beta^2}{4s}}}{\sqrt{\pi s}} ds. \blacksquare$

Bibliografia

- [1] Aliprantes, C. D.; Burkinshaw, O. *Principles of Real Analysis*. Academic Press, Second Edition, USA, 1990.
- [2] Dautray, R.; Lions, L. J.; *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, vol I e vol II. Springer-Verlag, Germany, 1990.
- [3] Folland, G. B.; *Introduction to Partial Differential Equations*. Princeton University Press and University of Tokio, Press-Princeton, New Jersey, 1971.
- [4] Folland, G. B.; *Lectures on Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, India, 1983.
- [5] Höunie, J.; *Teoria Elementar das Distribuições*. XII Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1979.
- [6] Kesavan, S.; *Topics in Functional Analysis and Applications*. India-John Wiley & Sons, India, 1989.
- [7] Nirenberg, L.; *On Elliptic Partial Differential Equations*, Ann. Scuola Norm. Sup, Pisa, vol. 13, pp. 116-162, 1959.
- [8] Raymond, X. S.; *Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators*. CRC - Press - USA, 1991.



- [9] Rodriguez, P. H. Rivera; *Introducción a la Teoria de las Distribuciones*. Textos de Métodos Matemáticos, vol 6, DMM-UFRJ.
- [10] Schechter, M.; *Modern Methods in Partial Differential Equations*. Mc Graw-Hill, NY, 1976.
- [11] Wheeden, R. L., Zygmund, A.; *Measure and Integral - An Introduction to Real Analysis*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.
- [12] Zuily, C.; *Problems in Distributions and Partial Differential Equations*. North - Holland - Amsterdam, 1988.



