UNESP

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM ENSINO E APRENDIZAGEM DA

MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

ENSINO-APRENDIZAGEM DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Elizabeth Quirino de Azevedo

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

Rio Claro - S.P.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

ENSINO-APRENDIZAGEM DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Elizabeth Quirino de Azevedo

Orientadora:

Prof[a]. Dr[a]. Lourdes de la Rosa Onuchic

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de concentração em ensino e aprendizagem da matemática e seus fundamentos filosófico-científicos, para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)

2002

512 Azevedo, Elizabeth Quirino de
A994e Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas / Elizabeth Quirino de Azevedo. Rio Claro: 176p. 2002-10-27

Dissertação de (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Lourdes de la Rosa Onuchic

1.Ensino-aprendizagem de Álgebra.2. Ensino-aprendizagem de Equações Algébricas. 3. Resolução de Problemas. 4.Metodologia de Pesquisa de Romberg. 5. Titulo.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP – Campus de Rio Claro/SP

Comissão Examinadora

____
Profa. Dra. Regina M.S.P.Tangredi

____
Prof. Dr. Romulo Campos Lins

____
Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic
(orientadora)

____

____

____
Elizabeth Quirino de Azevedo

Rio Claro, _________ de ________________________de _______________

Resultado:____

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Ana, mãe e amiga dedicada, e a meus sobrinhos, Vinícius e Renan, minha maior alegria.

A G R A D E C I M E N T O S

A Deus Criador, pelo cuidado, proteção e por colocar em minha vida pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para que a realização deste trabalho fosse possível.

À Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, orientadora exemplar e grande amiga, que com sabedoria, firmeza e muita paciência me guiou na busca do conhecimento.

À Banca Examinadora pela leitura e por observações feitas.

Aos professores e às secretárias Ana e Elisa do Departamento de Matemática da UNESP pela prestatividade e atenção no atendimento.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFMT pelas informações fornecidas nas entrevistas.

À Secretaria de Educação do Estado de Mato Grosso, por financiar minha permanência em Rio Claro.

Ao Conselho Deliberativo da Escola Estadual Professora Adalgisa de Barros, pelas negociações junto à Secretaria de Educação do Estado de Mato Grosso, tornando possível minha vinda à Rio Claro.

Aos professores da Escola Estadual Professora Adalgisa de Barros em especial ao grupo de matemática pelo apoio e solidariedade.

A meus pais, Clodoveu e Ana, por me trazerem à existência e acreditarem em mim.

Ao Paulo, cunhado, pela paciência e atenção nos incansáveis transportes da rodoviária para casa, após longas horas de viagem.

Aos amigos: Analúcia, Mariângela e Wagner pelas discussões sobre o meu trabalho nas reuniões do Grupo de Estudos.

À Neuza, irmã, amiga e conselheira que, mesmo de longe, me apoiou e me deu forças para prosseguir.

Aos meus sobrinhos Vinícius e Renan, pelos telefonemas de fins de semana, proporcionando-me alegria e ânimo nos momentos de solidão.

R E S U M O

Este trabalho tem como tema central de investigação o ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas. Nesta abordagem buscaram-se respostas para a questão de seu ensino no final do 3° ano do Ensino Médio. O estudo levou a um aprofundamento teórico de temas como: o ensino-aprendizagem da matemática, a matemática necessária para um trabalho com equações algébricas e uma metodologia de ensino-aprendizagem da matemática através de resolução de problemas. Na pesquisa de campo a coleta de dados utilizou-se de entrevistas, questionário, análise de documentos legais, análise de livros didáticos e não didáticos. Os tópicos de análise foram: a importância do ensino-aprendizagem das equações algébricas no final do terceiro ano do Ensino Médio, a utilização das equações algébricas em cursos universitários e como o ensino das equações algébricas no final do Ensino Médio é visto por alguns autores de livros didáticos e pesquisadores em Educação Matemática. Ainda, o tema equações algébricas assume o papel de enfeixar um programa de ensino de matemática ao longo de doze anos de estudo. A metodologia adotada neste trabalho foi a Metodologia de Romberg.

Palavras-chave: 1. Ensino-aprendizagem de Algébricas. 2. Ensino-aprendizagem de Equações Algébricas. 3. Resolução de Problemas. 4. Metodologia de Pesquisa de Romberg. 5. Título.

A B S T R A C T

This research has as central theme of investigation the teaching and learning of algebraic equations through problem solving. In this approach we have looked for answers to some questions about its teaching at the end of the third year of High School. The study took us to a theoretical deepening of themes like: the teaching and learning of mathematics, the necessary mathematics for a study with algebraic equations and a methodology of mathematics teaching and learning through problem solving. In the field research, we used interviews, questionnaires and analysis of legal documents and books. The topics of analysis were: the importance of teaching and learning of algebraic equations at the end of third year of High School, the use of algebraic equations in undergraduate courses and how the teaching of this topic at the end of High School is seen by some writers in mathematics education. So, the theme algebraic equations assumes the role of tying together the teaching of mathematics through twelve years of studying. As research methodology we adopted the Romberg's Methodology.

Key – words: 1.The Teaching and Learning in Algebra. 2. The teaching and learning in Algebraic equations. 3. Solving Problem. 4. The Romberg's Methodology of research. 5. Title.

ÍNDICE

I N T R O D U Ç Ã O

Iniciei minhas atividades docentes com alfabetização de crianças em classes de 1ª série de escolas particulares, no interior do estado do Paraná, durante meu curso de graduação em Matemática. Depois de graduada passei a lecionar Matemática, para alunos do 1º grau, hoje Ensino Fundamental, em escolas públicas e particulares nesse estado. Esperava que eles gostassem de matemática como gostavam na primeira série, mas percebi que, ao avançarem da 5ª para a 8ª série, aos poucos iam perdendo aquele entusiasmo pela matemática. Ao chegarem à 8ª série, a grande maioria dos alunos detestava matemática. Não era confortável estar em uma sala de aula sabendo que a maior parte dos alunos não gostava daquilo que se lhes "ensinava". Por que eles não gostavam de matemática?

Minha angústia aumentou quando comecei a trabalhar Álgebra com os alunos. Como trabalhar esse conteúdo de forma a convencê-los de sua importância? Descobri, então, que não bastava saber matemática. Era necessário algo mais para ensiná-la com eficiência. Mas, o quê? Esforçava-me para reproduzir as aulas da maneira como havia aprendido nas aulas de Prática de Ensino, durante a graduação. Mas, por mais que preparasse as aulas e as atividades, que apresentasse exemplos de forma gradual, atendesse aos mais fracos até fora do horário de aula, nas chamadas aulas de reforço, ficava-me ainda aquela sensação de que algo estava faltando.

Com o passar dos anos minha angústia e preocupação se intensificava. Na busca de solução para os problemas enfrentados na sala de aula , decidi direcionar-me por pesquisa em educação matemática, ingressando no Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, na UNESP de Rio Claro. Decidi pesquisar sobre o Ensino-aprendizagem das Equações Algébricas no Ensino Médio, um assunto pouco explorado neste nível.

Este trabalho segue a metodologia de Thomas A. Romberg. No **Capitulo I - Metodologia de Pesquisa**, apresento o modelo de Thomas A. Romberg, no qual ele descreve, em seu artigo publicado em 1992, com o título: Perspectives on Scholarship and Research Methods (Perspectivas sobre o conhecimento e Métodos de Pesquisa), dez atividades a serem seguidas ao longo de uma pesquisa.

O **Capítulo II - Iniciando a Pesquisa - Do Fenômeno de Interesse à Conjectura** compreende as quatro primeiras atividades do modelo de Romberg. Identifico como Fenômeno de Interesse "O Ensino-Aprendizagem das Equações Algébricas no Ensino Médio". Apresento um Modelo Preliminar que, no decorrer da pesquisa, percebi que precisava ser reformulado. O modelo modificado foi dividido em três blocos. No primeiro bloco é identificado o problema. O segundo bloco descreve a matemática necessária para quem ensina e quem aprende equações algébricas. No terceiro bloco relaciono esse modelo criado e o fenômeno de interesse com idéias que outros pesquisadores têm sobre esse assunto. Minha intenção era a de chegar a uma proposta de trabalho, para a sala de aula, desde que fosse constatada a importância do ensino-aprendizagem de matemática das equações algébricas no fim do 3º ano do Ensino Médio.

A maneira como foram conduzidos os dados levantados no Capítulo II - Do Fenômeno de Interesse à Conjectura, é relatada no **Capítulo III - Continuando a Pesquisa: Seleção de Estratégias e Procedimentos**. Neste capítulo é apresentada uma proposta ideal de trabalho para a sala de aula sobre as equações algébricas, selecionando uma série de estratégias: busca de documentos legais; análise de livros didáticos e não didáticos; entrevistas com professores de diversos níveis e questionário aplicado a alunos do Ensino Médio; entrevistas com autores de livros didáticos e pesquisadores em Educação Matemática.

Como estratégia central estabeleceu-se a criação de uma proposta de trabalho para a sala de aula, visando o ensino-aprendizagem de equações algébricas fazendo uso da "Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas." Para cada particular estratégia há um correspondente procedimento.

No **Capítulo IV - Finalizando a Pesquisa - Discussão da Proposta -** é apresentada uma proposta de trabalho com equações algébricas em sala de aula, no Ensino Médio. Na **Conclusão** são feitas considerações finais desta pesquisa.

Acreditamos que este trabalho de pesquisa possa ajudar professores e alunos, em sala de aula, ao dar significado ao estudo das equações algébricas no Ensino Médio.

CAPÍTULO - I

METODOLOGIA DE PESQUISA

Como diz Romberg, o termo pesquisa refere-se a processos, ou seja, às coisas que fazemos e não a objetos que se toca ou que se vê. Toda pesquisa adotada pretende esclarecer alguns dos problemas comuns com que se deparam os indivíduos não familiarizados com a pesquisa, quando querem entender processos de pesquisa e dar base às discussões de tendências investigativas.

I.1- METODOLOGIA DE PESQUISA DE ROMBERG

> A principal razão porque Metodologia de Pesquisa em Educação é uma área tão excitante é que a educação não é em si mesma uma disciplina. Sem dúvida, educação é um campo de estudo, um local que contém fenômenos, eventos, instituições, problemas, pessoas e processos que, por si mesmos, constituem a matéria prima para investigações de muitos tipos. SHULMAN

Todo pesquisador percorre um longo caminho na busca de compreensão de um determinado objeto e o método de pesquisa serve de guia nessa caminhada. O método, por si só, não torna uma pesquisa boa ou ruim. No entanto, é condição necessária para a realização dela. Sendo assim, fundamentamos este trabalho de pesquisa no modelo de Thomas A. Romberg, apresentado em artigo publicado em 1992 no "Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning", com o título: *Perspectives on Scholarship and Research Methods* (Perspectivas sobre o conhecimento e Métodos de Pesquisa). Segundo Romberg (1992, p.51):

> O termo pesquisa refere-se a processos, a coisas que se faz e não a objetos que podem ser vistos ou tocados. Além disso, fazer pesquisa não pode ser visto como um desempenho mecânico ou um conjunto de atividades que os indivíduos seguem de um modo prescrito ou pré-determinado. As atividades envolvidas em fazer pesquisa reunem mais características de uma arte do que de uma disciplina puramente técnica. Como em todas as artes, há concordância, num amplo sentido, sobre que procedimento seguir e o que é considerado trabalho aceitável.

Romberg descreve, em seu modelo na (fig.01), dez atividades essenciais para o desenvolvimento de um trabalho de pesquisa e divide essas atividades em três blocos que vão orientar o pesquisador a investigar, planejar e desenvolver seu trabalho.

Metodologia de Pesquisa
Thomas A. Romberg

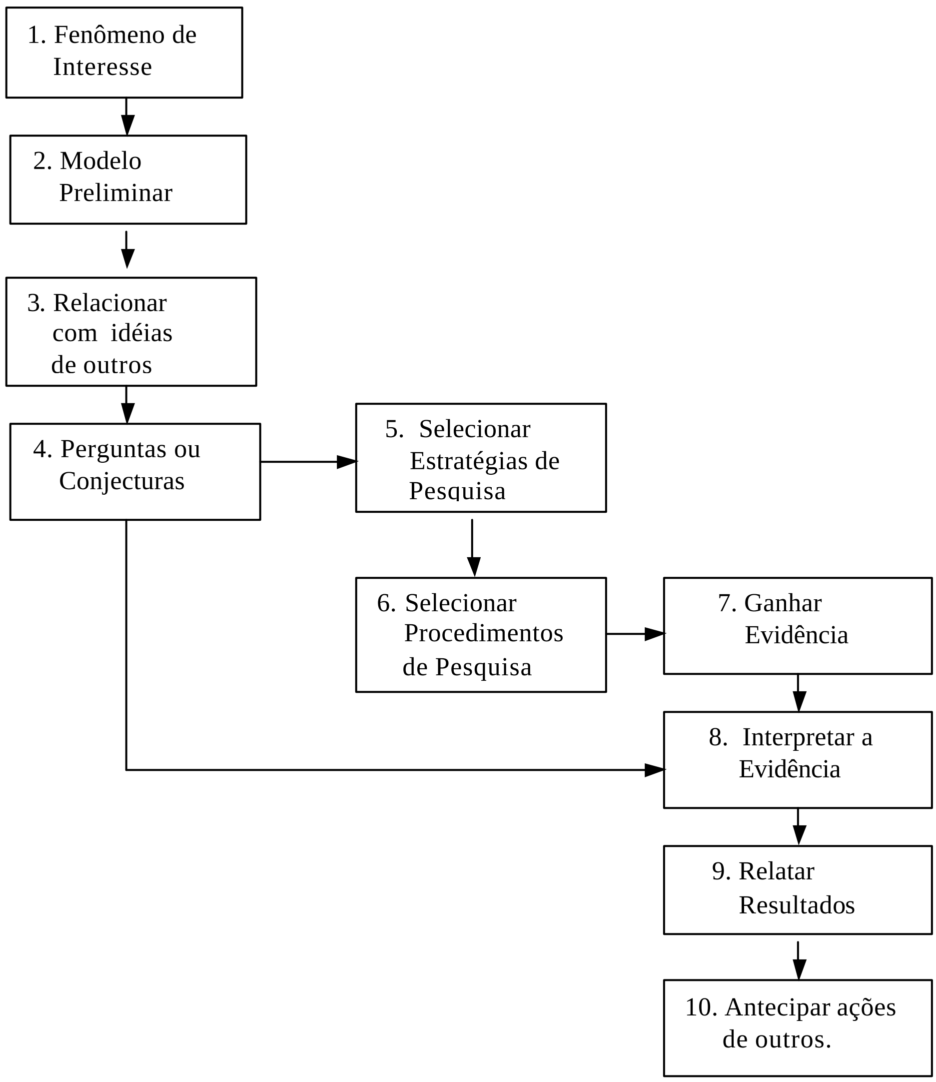


Fig.01- Traduzido de: “Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning” (1992, pag. 51)

No primeiro bloco do modelo estão reunidas as quatro primeiras atividades relacionadas com a identificação do problema a ser pesquisado. Essas quatro atividades são consideradas, por Romberg, as mais importantes pois é na sua execução que o pesquisador define o que quer investigar:

1. Fenômeno de interesse.
2. Modelo preliminar.
3. Relacionar com idéias de outros.
4. Perguntas ou conjecturas.

O segundo bloco envolve a tomada de decisões sobre a espécie de evidência a ser ganha e sobre o modo de conseguir essa evidência. Esse bloco é o que mais exige do pesquisador pois além de estratégias criativas e de selecionar procedimentos adequados ao seu cumprimento deve atender eficazmente ao problema proposto:

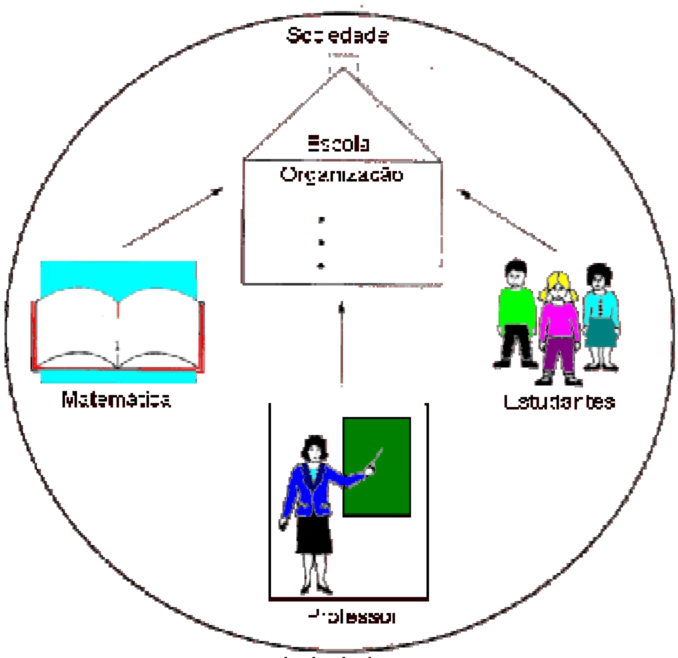
5. Selecionar estratégias de pesquisa.
6. Selecionar procedimentos de pesquisa.

O terceiro é um bloco de ação que envolve colocar em prática aquilo que foi planejado e, a partir dessa ação, ficar evidente se as estratégias selecionadas e os correspondentes procedimentos idealizados são úteis para atender à conjectura. Em seguida deve-se dar sentido às informações coletadas e, então, relatar os resultados a outros membros da comunidade de estudos:

7. Ganhar evidência.
8. Interpretar a evidência coletada
9. Relatar resultados.
10. Antecipar ações de outros

Para Romberg é importante considerar a educação das ciências matemáticas como um campo de estudo, pois, como Shulman argumentou, o trabalho na escola é complexo. Desse modo, os procedimentos de investigação usados em muitas disciplinas têm sido usados para investigar as próprias questões levantadas e os processos envolvidos no ensino-aprendizagem da matemática na escola. Ainda, em seu artigo, ele comenta o diagrama de Begle, segundo o qual a matemática escolar, com seus componentes e processos educacionais, está situada em um contexto social, composto de alunos, professores e um currículo matemático.

O diagrama abaixo procura ilustrar as relações que existem entre a sociedade, a matemática como disciplina, os estudantes como aprendizes, os professores como construtores e guias dos alunos e o conhecimento matemático que é um direito de todos para que, ao sair da escola, tenham condições de serem úteis à sociedade.



Traduzido de
"PERSPECTIVES ON SCHOLARSHIP
AND RESEARCH METHODS" - Thomas A. Romberg
(Adaptado de E. G. Begle - 1961)

Fig.02

Assim, existe uma íntima relação entre a sociedade de uma nação e o cuidado dispensado à educação de seus filhos.

I.2- NOSSA PESQUISA APOIADA NA METODOLOGIA DE ROMBERG

Olhando a Educação Matemática num contexto social, muitos questionamentos aparecem transformando-a num vasto campo de pesquisa. Para investigar uma questão, em Educação Matemática, é necessário o apoio de uma metodologia de pesquisa que conduza o trabalho do pesquisador. Assim, adotamos a metodologia de pesquisa de Romberg como um guia para a nossa pesquisa.

FENÔMENO DE INTERESSE

> Toda pesquisa se inicia com uma curiosidade sobre um fenômeno particular do mundo real. Em Educação Matemática, o fenômeno envolve professores e estudantes, a forma como os estudantes aprendem, como eles interagem com a matemática, como eles respondem ao ensino, como os professores planejam seu ensino e muitos outros aspectos. (ROMBERG, 1992, p.51)

Identificamos como nosso fenômeno de interesse: ***O Ensino-Aprendizagem das Equações Algébricas no Ensino Médio.*** Muitas foram as razões que nos levaram a pesquisar as Equações Algébricas, mas a principal é que esse assunto aparece somente nos últimos capítulos dos livros didáticos para o Ensino Médio e raramente chega-se até elas. Nas poucas vezes que conseguimos, em nosso trabalho de sala de aula nas escolas públicas, chegar até esse assunto, percebemos a resistência que os alunos demonstravam e, de nossa parte, a sensação de que algo ficou faltando.

MODELO PRELIMINAR DE PESQUISA

"Um pesquisador levanta hipóteses sobre certos aspectos importantes como as variáveis do fenômeno de interesse e de como esses aspectos estão relacionados. Depois ilustra esses aspectos num modelo”.(ROMBERG, 1992, p. 51)

O modelo preliminar funciona como guia no desenvolvimento da pesquisa. Entretanto, ele pode ser modificado ao longo da pesquisa. Olhando para o nosso fenômeno de interesse, ***O ensino-aprendizagem das Equações Algébricas no 3º ano do Ensino Médio***, construímos um modelo preliminar que pudesse retratar uma possível trajetória de trabalho.

MODELO PRELIMINAR

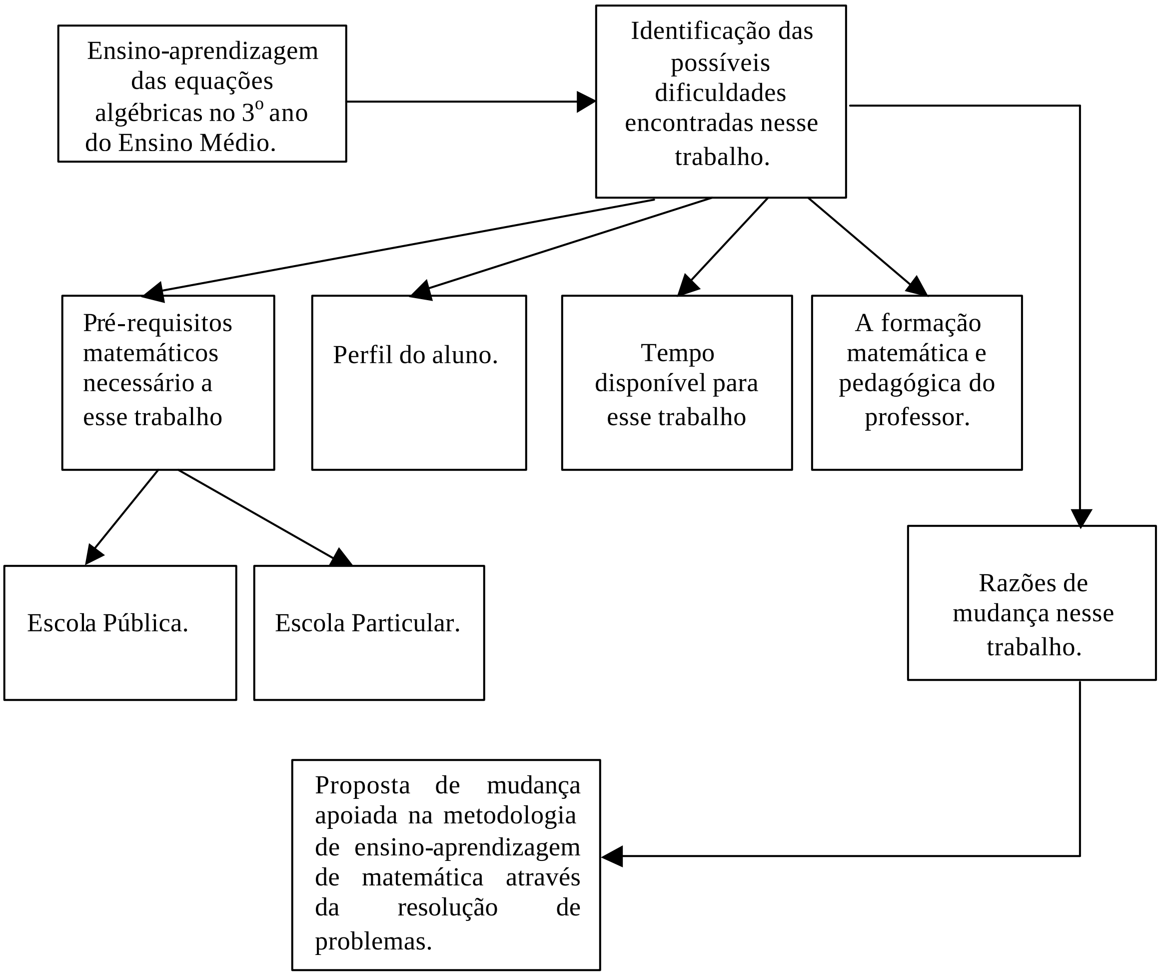


Fig.03

RELACIONAR COM IDÉIAS DE OUTROS

"Uma atividade importante é examinar o que outras pessoas pensam sobre o fenômeno de interesse e determinar se suas idéias podem ser usadas para esclarecer, ampliar ou até mesmo modificar o modelo proposto." (ROMBERG, 1992, p.51)

Dentro desta atividade serão feitas leituras sobre o que outros escreveram sobre Equações Algébricas, tanto em literatura de pesquisa quanto em livros didáticos nacionais e estrangeiros, revistas, artigos de pesquisa, teses, etc.. Serão aplicadas entrevistas a Pesquisadores, Educadores Matemáticos e Autores de livros didáticos. Os PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, na área de Matemática, e documentos das Secretarias de Educação de Estado de São Paulo e de Mato Grosso serão analisados.

PERGUNTAS OU CONJECTURAS

> Este é um ponto chave no processo da pesquisa porque, quando se examina um fenômeno particular, muitas questões potenciais inevitavelmente surgem. Decidir que questões examinar não é tarefa fácil. Mais do que simplesmente chegar a questões de interesse, os pesquisadores usualmente fazem uma ou mais conjecturas sobre o que tomariam como respostas às questões. (ROMBERG,1992, p. 52)

Sempre olhando para o nosso fenômeno de interesse – *Ensino-aprendizagem de Equações Algébricas no 3º ano do Ensino Médio* - e diante da situação de abandono do ensino desse tópico nas escolas publicas, basearemos nossa conjectura sobre:

- A importância do Ensino- Aprendizagem de Equações Algébricas no final do 3º ano do Ensino Médio.
- Se constatada a importância desse tópico, buscar procedimentos eficientes para seu trabalho em sala de aula.
- Se constatada a irrelevância do ensino desse tópico no Ensino Médio, sugerir a retirada dele do currículo.

SELECIONAR ESTRATÉGIAS DE PESQUISA

Segundo Romberg (1992, p.52) " a decisão sobre que método usar segue diretamente das questões que se seleciona, da visão de mundo onde estas coisas estão situadas, do modelo preliminar que se tenha construído para explicar o fenômeno de interesse e da conjectura levantada.”

Entre as muitas possíveis estratégias de trabalho serão selecionadas aquelas que mais de perto atendam à conjectura ou às perguntas colocadas no trabalho”

SELECIONAR PROCEDIMENTOS ADEQUADOS ÀS ESTRATÉGIAS ESCOLHIDAS.

Romberg (1992, p.52) diz que “para responder as questões específicas que tenham surgido, evidências tem que ser obtida. É neste passo que as técnicas usualmente ensinadas nos cursos de métodos de pesquisa são importantes: como selecionar uma amostra, como obter informações (entrevistas, questionários, observações, testes), como organizar informações, etc..”.

Para cada estratégia selecionada selecionaremos um correspondente procedimento.

GANHAR EVIDÊNCIA

Romberg diz que a atividade de ganhar evidência pode ser levada à frente ao aplicarmos os procedimentos idealizados adequados às estratégias selecionadas, uma vez que tenhamos decidido coletar certas informações para a construção de um argumento que atenda às questões ou às conjecturas propostas.

Os procedimentos selecionados seriam postos em ação e, a partir desta, ficariam evidentes se as estratégias selecionadas e seus correspondentes procedimentos validariam a conjectura proposta.

INTERPRETAÇÃO DA EVIDÊNCIA

"Neste estágio analisa-se e interpreta-se a informação colhida". (ROMBERG, 1992, p.53). Serão interpretados os aspectos que ficarem evidentes após a aplicação dos procedimentos de pesquisa. A análise feita permitirá perceber se as perguntas ou as conjecturas se apresentam bem postas ou não.

RELATAR RESULTADOS

"Ser um membro de uma comunidade de pesquisa implica uma responsabilidade em informar a outros membros dessa comunidade sobre a investigação completada e esperar por seus comentários e críticas".(ROMBERG, 1992, p.53)

Seguindo o modelo de Romberg, após a interpretação dos aspectos analisados e interpretados, relataremos à comunidade de pesquisadores, os resultados encontrados, para que eles possam emitir opiniões e criticar o trabalho.

ANTECIPAR AÇÕES DOS OUTROS

> Obtidos os resultados de uma investigação particular, todo pesquisador fica interessado no que irá acontecer depois e antecipará ações posteriores. Membros de uma comunidade de pesquisa discutem idéias uns com os outros, reagem às idéias uns dos outros e sugerem novos passos, modificações de estudos prévios, elaborações de procedimentos, etc.. Os pesquisadores tentam situar cada estudo numa cadeia de pesquisas. As coisas que vieram antes e as coisas que vêm depois de qualquer estudo particular são importantes. (ROMBERG, 1992, p.53)

Se constatada a importância do ensino-aprendizagem das Equações Algébricas no Ensino Médio, esperamos poder propor um trabalho que, de alguma forma, ajude o professor e possa contribuir para a formação de um cidadão útil à sociedade.

CAPÍTULO – II

INICIANDO A PESQUISA – DO FENÔMENO DE INTERESSE À CONJECTURA

Seguindo o modelo de Romberg, agrupamos as quatro atividades apresentadas no primeiro bloco em um capítulo. Neste capítulo apresentamos os passos que demos no desenvolvimento da pesquisa, partindo do fenômeno de interesse até a determinação da conjectura. O ***fenômeno de interesse*** surgiu das muitas indagações e questionamentos feitos durante nossa trajetória no Ensino Fundamental e Médio. Criamos um ***modelo preliminar*** que pudesse guiar nossa pesquisa e fomos em busca do que outros haviam pesquisado sobre o assunto. Então, procuramos ***relacionar com as idéias desses outros*** nossas próprias idéias, a fim de encontrar uma justificativa para nossa proposta. Ao analisar o que outros pesquisaram sobre o assunto de nosso interesse, surgiu, então, a nossa ***conjectura.***

II.1- FENOMENO DE INTERESSE

Para nós, fenômeno é "tudo que é objeto de experiência possível, isto é, que se pode manifestar no tempo e no espaço segundo as leis do entendimento" (Novo Dicionário Básico da Língua Portuguesa - Folha/Aurélio, 1988, p.294). Portanto, nosso fenômeno de interesse: "O ensino-aprendizagem das equações algébricas no Ensino Médio", nada mais é do que o nosso objeto de estudo.

A dificuldade na elaboração do projeto deste trabalho de pesquisa deveu-se às inúmeras questões que nos angustiavam e que, esperávamos, a investigação pudesse responder. As dificuldades encontradas em sala de aula, por mais de uma década, eram tantas que escolher apenas uma seria equivalente a escolher a mais importante e, para nós, todas as nossas questões mereciam respostas.

Entretanto, para o caso especifico das equações algébricas, tópico "ensinado" no final do 3º ano do Ensino Médio nas escolas públicas, chamou-nos a atenção o fato de o assunto não fazer parte do currículo de muitas escolas e, se trabalhado, o "ensino" fosse feito de forma muito superficial. Fica então a indagação: *Para quê? Por que* o assunto não é levado a sério no Ensino Médio? *Por que* em algumas escolas não consta do currículo? *Por que* continua a fazer parte dos conteúdos apresentados nos livros didáticos para o Ensino Médio*?*

II.1.1- MINHA TRAJETÓRIA NO MAGISTÉRIO DETERMINANDO O FENÔMENO DE INTERESSE DE MINHA PESQUISA

Iniciei minha atividade docente com alfabetização de crianças na classe de 1ª série de duas escolas particulares, no interior do estado do Paraná, durante meu curso de graduação em Matemática. Minha sala, considerada especial, era formada por crianças que nunca haviam freqüentado uma escola e muitas delas não sabiam como segurar um lápis para escrever.

No primeiro dia de aula algumas crianças eram falantes, outras ressabiadas, outras curiosas. A escola era uma novidade para elas e até ameaçadora para algumas pois, nos primeiros dias, algumas entravam para a sala de aula chorando.

A primeira semana era muito difícil. Os alunos e eu éramos completamente estranhos mas, aos poucos, eu me transformava na "tia Beth" e, com o passar dos dias, semanas e meses sentia-me recompensada ao ver aquelas crianças vencerem, uma a uma, as dificuldades da leitura, da escrita e, principalmente, dos cálculos. Como elas gostavam das aulas de matemática! Era uma verdadeira diversão. Cada aluno tinha, em seu armário, uma caixa com muito material para manusear nas aulas de Matemática: tampinhas, barbantes, palitos de sorvetes, botões coloridos, caixas de fósforos, embalagens variadas, papel colorido e outras bugigangas que eles traziam para as aulas. A escola também possuía material específico para as aulas de Matemática. Como eram esperadas essas aulas! Que alegria! Quanta vontade de aprender! Na hora da verificação da tabuada, era uma verdadeira maratona: meninos contra meninas, "quem sabe mais?"

Durante o ano os professores recebiam da direção da escola livros sobre educação, ensino-aprendizagem, planejamento, etc.. Os escritos de *E.G.White*, escritora americana do final do século XIX, fez diferença em minha vida. White defende o ensino-aprendizagem de forma significativa, com a finalidade de formar pessoas com capacidade de pensar e de agir por si mesmas. No livro *Educação*, 5ª edição em português, ela diz:

> Em vez de pusilânimes educados, as instituições de ensino poderão produzir homens fortes para pensar e agir, homens que possuam amplidão de espirito, clareza de pensamento, e coragem nas suas convicções. [...] À frente do estudante existe aberta a senda de um contínuo progresso. (WHITE, 1997, p.18)

Para ela o verdadeiro educador é aquele que não se satisfaz com um trabalho de segunda ordem e diz:

> Não se contenta com encaminhar seus estudantes a um padrão mais baixo do que o mais elevado que lhe é possível atingir. Não pode contentar-se com lhes comunicar apenas conhecimentos técnicos, fazendo deles meramente hábeis guarda-livros, destros artistas, prósperos homens de negócios. É sua ambição incutir-lhes os

> princípios da verdade, obediência, honra, integridade, pureza - princípios que deles farão uma força positiva para a estabilidade e o erguimento da sociedade.
> (WHITE, 1997, p.29)

Depois da graduação passei a lecionar Matemática para os alunos do Ensino Fundamental, em escolas publicas e particulares. Esperava que eles gostassem de matemática como na primeira série mas, percebi que, ao avançarem da 5ª para a 8ª série, aos poucos, iam perdendo aquele entusiasmo pela matemática. Intrigava-me, ainda mais, o fato de que alguns deles haviam sido alfabetizados por mim. Ao chegarem à 8ª série a grande maioria dos alunos detestava matemática. Não era confortável estar em uma sala de aula sabendo que a maior parte dos alunos não gostava daquilo que se lhes "ensinava". Por que eles não gostavam de matemática? O que acontecera com aquele entusiasmo, com aquela vontade, aquela euforia dos primeiros anos escolares? O que mudara? Onde estava o erro? Esses questionamentos começaram a surgir e fazer parte das conversas na sala dos professores.

Mesmo nas escolas particulares, onde os alunos possuíam material didático, livros, atendimento especial, aulas de reforço em caso de dúvidas, a matemática não era apreciada pela maioria dos alunos.

Minha angústia aumentou quando comecei a trabalhar Álgebra com os alunos. Como trabalhar esse conteúdo de forma a convencer os alunos de sua importância? Descobri, então, que não bastava saber matemática. Era necessário algo mais para ensinar com eficiência. Mas, o quê? Esforçava-me para reproduzir as aulas da maneira como havia aprendido nas aulas de Prática de Ensino, durante a graduação. Mas, por mais que preparasse as aulas e as atividades, que apresentasse exemplos de forma gradual, atendesse aos mais fracos até fora do horário de aula nas chamadas aulas de reforço, mesmo assim ficava aquela sensação de que algo estava faltando. Aquela dependência dos alunos incomodava.

Professora, e agora o que eu faço?
Professora, qual é o próximo passo?
Professora, está certo?
Professora, eu não sei !! Professora ... professora ... professora ...

Sabia que o caminho era torná-los independentes, confiantes e persistentes nas tentativas de resolver problemas matemáticos até que a resposta fosse encontrada. Mas, como fazer isso?

Ao lecionar para alunos do Ensino Médio, imaginei que, como os alunos já haviam passado pela chamada matemática básica, não encontraria esse tipo de problema. Enganei-me. A situação era ainda mais complicada nas escolas públicas, onde a maioria dos alunos chega ao Ensino Médio com grande dificuldade nos conceitos de matemática estudados no Ensino fundamental. E agora? O que fazer com esses alunos ?

Surgiu então a oportunidade de um curso de especialização em Matemática Computacional, lato sensu, na cidade de Guarapuava, no interior do Paraná, liderado por um grupo de professores da Unicamp. Inscrevi-me no programa na esperança de encontrar uma resposta para as minhas inquietações. Apresentei Monografia sobre uma aplicação em Equações Diferenciais. Aprendi muito com o curso, trabalhei com estatística, aprendi a usar alguns programas do computador para resolver alguns problemas. Com esse curso descobri que a informática é uma ótima ferramenta na resolução de alguns problemas matemáticos. A falta do computador na escola levou-me a usar os conhecimentos adquiridos no curso, transmitindo aos alunos alguma informação sobre o uso do computador na Matemática. Procurava usar isso como estímulo para o estudo da Matemática.

Nas escolas públicas, percebi que um outro problema, ainda mais sério, acontecia: alguns conteúdos, embora constantes dos livros didáticos, não faziam parte do programa da escola e, se faziam, muitas vezes eram trabalhados de forma superficial, gerando grandes dificuldades. Geometria, Álgebra e Estatística no Ensino Fundamental; Geometria no Espaço, Números Complexos e Equações Algébricas ou Polinomiais no Ensino Médio são exemplos desses conteúdos. O caso mais sério foi o das Equações Algébricas, que aparecem como último conteúdo do Ensino Médio, e que raramente é abordado. Por que esse tópico é tão raramente trabalhado nas aulas das escolas públicas? Não será importante?

II.1.2 – LEITURA MATEMÁTICA DE UM "*PAINEL ECOLOGICO*"

Um fato ocorrido num último bimestre de uma turma do 3º ano do Ensino Médio, contribuiu muito para a minha decisão de pesquisar as Equações Algébricas ensinadas no Ensino Médio.

A professora de Biologia havia proposto, aos alunos do 3º ano do Ensino Médio, um projeto ecológico. Os alunos do 3º ano D escolheram pintar na parede do corredor do colégio, a que dava acesso ao andar superior da escola, um painel que retratasse o Pantanal Mato-grossense.

Com a ajuda do pai de uma das alunas, eles conseguiram preparar a parede para receber as tintas. Iniciou-se então o trabalho. Dia após dia os alunos trabalhavam com carinho e atenção, subindo em cavaletes e mesas para lixar a parede, que receberia as cores do pantanal com sua fauna e flora, bem como os dois estados brasileiros que fazem parte dele:

Mato Grosso e Mato Grosso do Sul. Aos poucos as tintas foram dando vida ao painel. Na hora do recreio e no final das aulas era comum ver alunos trabalhando no painel e logo podíamos distinguir as formas de animais e os estados brasileiros que eles estavam pintando.

Um dia, no final do período, quando descia a rampa que dava acesso ao pátio inferior, deparei-me com um grupo de alunos com pincéis nas mãos sobre cavaletes e mesas. Parei e elogiei o trabalho deles pois, realmente, estavam trabalhando no painel com muito carinho. Foi então que uma aluna segurando um pincel em umas das mãos e uma latinha de tinta na outra disse:

___ Professora, você bem que poderia dar uma nota pelo nosso trabalho!

Os colegas, percebendo minha presença, viraram-se, cada um com seu instrumento de arte nas mãos, e, em coro, confirmaram o pedido da colega:

___ É isso ai, professora!

Tive uma leve impressão de que eles haviam combinado aquilo e, antes que dissesse algo, um outro aluno acrescentou:

___ Olhe bem, professora, eu estou aqui!

___ Ah!, até que não é má idéia, acrescentou um outro, todo sorridente.

Ali estava eu, olhando para aqueles animados, felizes e sorridentes alunos, sem saber como avaliá-los em uma atividade que não havia planejado e tampouco pensado. Foi então que a aluna, com um largo sorriso, disse:

___ E então, professora?

Não esperava aquele pedido. Apesar de ter apreciado muito a forma como eles se empenhavam no projeto da professora de biologia, não sabia como atendê-los de uma forma produtiva e significativa. Não havia combinado nada com a professora e nem ela havia projetado um trabalho que envolvesse outras disciplinas, como mais tarde confessou-me na sala dos professores. Como estávamos no final do ano, a professora não imaginou que os alunos pudessem se empenhar tanto em um projeto de trabalho mais arrojado. Enganou-se e eu fui surpreendida. Olhei para a aluna e para os alunos empoleirados, olhando-me, esperando uma resposta:

___ Vou pensar no assunto.

Sob a promessa de um "pensar no assunto", eles se voltaram para o painel e continuaram com o trabalho, sorrindo, cantarolando e batucando, com os pincéis, uma canção típica dos pagodeiros da sala. Olhei para os alunos mais uma vez e, então, desci a rampa.

O ritmo da canção foi ficando cada vez mais distante e, uma grande indagação foi tomando seu lugar. Como vou avaliá-los? Minha disciplina é Matemática e não acompanhei o trabalho deles desde o início, como posso avaliá-los? Com essas indagações cheguei à sala dos professores. Já não havia mais ninguém com quem pudesse conversar sobre o assunto e dividir minha preocupação.

Não havia prometido avaliá-los, mas iria pensar no assunto. Isso me deixou com uma vantagem: poderia conversar com os colegas para encontrar uma saída. Os dias passaram e o painel ficou pronto e, ainda,

Fig.04

eu não havia encontrado uma forma satisfatória que envolvesse matemática na avaliação que eles haviam pedido.

Numa manhã, já no final do bimestre, entrei na sala para as duas primeiras aulas. Havia preparado uma atividade para ser desenvolvida em grupo. Pedi que se organizassem como de costume e comecei a distribuir as fichas. Foi então que alguém se lembrou:

___ Professora, você já pensou sobre o painel?

Parei, olhei para eles e disse:

___ Pensei, mas, embora vocês tenham trabalhado bastante e o painel tenha ficado muito bonito, não acho justo dar uma nota sem que a matemática apareça.

O descontentamento geral foi seguido de uma reação verbal.

___ Ahhhhh !!!!!!

Como cada aluno tinha nas mãos a ficha de atividades e a daquele dia seria um relatório, tive uma idéia. Eles poderiam usar as fichas para relatar a matemática usada na criação do painel. Apresentei aos alunos a proposta. Descobri que a participação direta na criação do painel era trabalho de uns 40% dos alunos da sala. Os outros se envolveram em outra parte do projeto da professora de Biologia. Portanto, era natural que os alunos não aceitassem aquela proposta. Então lembrei-me de uma frase de Paulo Freire:

> A leitura do mundo precede a leitura da palavra, daí que a posterior leitura desta não possa prescindir da continuidade da leitura daquela. Linguagem e realidade se prendem dinamicamente. A compreensão do texto a ser alcançado por sua leitura crítica implica a percepção das relações entre o texto e o contexto.
>
> (FREIRE, 1993, p.11)

Pensei um pouco e, então, sugeri:

___ Porque não fazermos uma leitura matemática do painel? Assim todos podem participar.

Novamente o comentário foi geral:

___ Como? O que vamos escrever no relatório? Vamos contar os bichos do painel? Vamos contar as cores? Quantos estados?

Passei então a explicar para os alunos que eles poderiam fazer uma leitura matemática.

___ Cada um deve pegar a sua ficha, uma caneta e, se preferir, a sua cadeira e vamos todos para o corredor fazer uma leitura matemática do painel. Observem bem, que matemática está presente no painel? Lembrem-se da matemática que vocês já estudaram até aqui.

Fomos então para o corredor. Cada aluno posicionou-se em frente ao painel e eu assumi a postura de observadora. No início eles vinham perguntar se poderiam relatar suas descobertas, mas como respondi que o relato era deles e que eles deveriam escrever o que estavam vendo sem a minha interferência, as perguntas cessaram. Aquele grupo de alunos descobriu, então, a matemática presente no painel e as descobertas nem sempre matemáticas, foram compartilhadas com um entusiasmo contagiante. Apesar dos erros cometidos por não ser um trabalho planejado de forma a atender aos objetivos de uma leitura plenamente Matemática, pude perceber a possibilidade de explorar muito mais as atividades interdisciplinares e que os alunos correspondem aos nossos anseios quando os deixamos participar da construção do conhecimento.

Após a leitura de alguns relatórios, comentei com a coordenadora pedagógica do período sobre o que havia acontecido e o que os alunos relataram. E é preciso, aqui, ressaltar a importância do diálogo e da troca de experiência entre os professores pois, sempre que nos envolvemos em algum trabalho, podemos aprender alguma coisa.

Até ali não havia percebido a importância dessa atividade em termos interdisciplinares. Foi a coordenadora, com sua maneira toda especial de ver e compreender o processo ensino–aprendizagem, quem me fez entender. Ela se empolgou tanto com a leitura dos relatórios que sugeriu a leitura de um deles na Feira Cultural que aconteceria dentro de três dias. Antes que eu pudesse expressar espanto, entrou na sala a professora de sociologia, responsável pela coordenação da Feira Cultural. Mesmo diante de meu protesto, as coisas foram encaixadas para que um relatório fosse lido. O rumo dos acontecimentos me preocupou. Novamente argumentei a falta de planejamento, os erros contidos nos relatórios e a impossibilidade de discutir o relatório com os alunos de modo que a apresentação fosse mais elaborada. A coordenadora com uma empolgação que lhe é peculiar quando se trata de Educação, insistiu dizendo:

__ Não importa. Os alunos vão falar sobre o painel e você pede que alguém, dentre os alunos, leia um dos relatórios.

Concordei. Separei um dos relatórios, e uma aluna apresentou-o na Feira Cultural. Com essa experiência eu aprendi que muita coisa pode ser aproveitada como metodologia de ensino, quando se abre o coração para os alunos .

É importante observar que a leitura matemática, feita por alunos do 3º ano do Ensino Médio foi muito pobre. A análise da leitura do painel mostrou que formas e conceitos geométricos foram facilmente identificados. Coisas simples como as pernas dos pássaros lembrando "retas paralelas", a boca da onça em forma de parábolas e os olhos do peixe de forma circulara foram as observações mais comuns.

Entretanto deixaram de avaliar, por exemplo, a extensão dessa região e perceber que porcentagem da área do Brasil ela representa. Qual a população dessa região? Quais das espécies animais apresentadas estão em extinção? Quais desses animais colaboram com a economia da região? Com que número isso ocorre?

II.1.3 - LEITURA MATEMÁTICA DE UM " *PAINEL MATEMÁTICO* "

Diante do não cumprimento integral do programa e do fechamento do conteúdo proposto para o Ensino Médio, o grupo de professores de Matemática da escola em que lecionei, antes de ingressar no programa da Pós-graduação em Educação Matemática, decidiu que todo o conteúdo proposto deveria ser trabalhado. Como parte desse grupo propus o trabalho com todos os conteúdos. Reunimo-nos e montamos um plano geral de trabalho para o ano escolar e um plano para o primeiro bimestre, em que, além do conteúdo, era apresentada uma metodologia de trabalho. Com 4 aulas semanais de 45 minutos e a maioria de alunos com dificuldade em matemática, física, química e outras disciplinas, a direção da escola, em reunião com os professores, decidiu que parte do tempo destinado às horas-atividade dos professores seria utilizado para atender aos alunos com dificuldades. Foi então reservada uma sala e fixado em uma porta um horário especial para cada professor. Para mim foram designadas três turmas de 2ª série e três turmas de 3ª série do Ensino Médio, no período da manhã.

Mesmo com um grande número de alunos com dificuldade, com necessidade de constantes retomadas de conteúdo, decidimos cumprir a proposta de trabalhar todos os conteúdos de uma forma mais aprofundada. Entretanto, a cada reunião bimestral de planejamento, tínhamos que decidir entre: *"todo o conteúdo"* ou *"mais profundidade"*, considerando o período letivo e o currículo para o Ensino Médio.

No final do 4º bimestre, motivada pela leitura do *Painel Ecológico*, mencionado anteriormente, resolvi montar um *Painel Matemático*. Pretendia verificar se equações algébricas, números e expressões matemáticas faziam parte do conhecimento dos alunos.

Infelizmente, com essa turma eu havia trabalhado apenas equações de 1º e 2º graus não tendo trabalhado as de graus mais elevado: 3, 4, 5, ... O tempo se esgotara antes que pudesse fechar a matemática estruturada para o Ensino Médio. O trabalho com números complexos, que completava o feito sobre números e operações nesses 12 anos de escolaridade, feito superficialmente, não era suficiente para sua aplicação no trabalho final das Equações Algébricas. Utilizando uma folha de papel sulfite tamanho grande e pincel atômico, escrevi várias equações de diferentes graus, com coeficientes reais e complexos, expressões algébricas, igualdades numéricas e até uma propriedade trigonométrica.

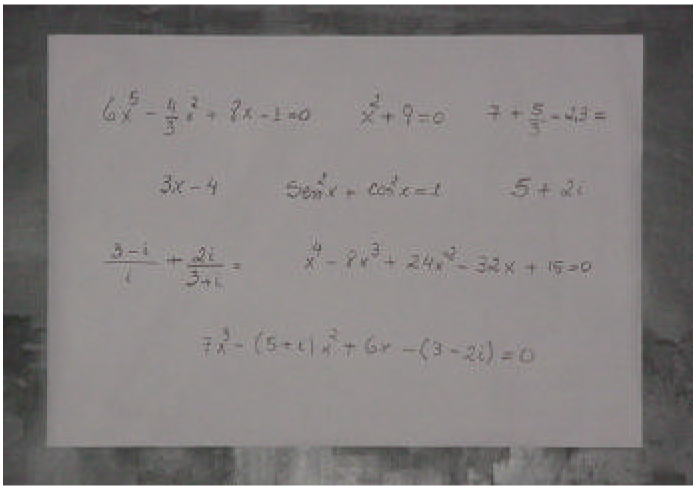


Fig.05

Pedi aos alunos que fizessem uma leitura desse painel e que relatassem o que eram capazes de identificar, fazendo uma ligação com conteúdos já estudados. O que eles identificaram e o que não foram capazes de identificar levou-me a refletir sobre a importância de se trabalhar esse conteúdo.

A maioria dos alunos se preocupara em explicar a resolução de equações de 1º e 2º graus, ignorando a presença de equações de ordem mais elevada. Alguns alunos se expressaram sobre isso, relatando o seguinte:

"... percebemos também que essas equações e expressões são do 1º e 2º graus, são várias, que poderá ser calculada de diversa maneiras. Para se resolver equações fracionárias temos que ... ." (Aluno 1, do 3º ano do E.M.)

"As contas que estão no painel são equações e expressões do 1º e 2º graus. São completas e incompletas, com frações e sem frações. Cada uma tem a sua maneira de calcular e resolver." (Aluno 2, do 3º ano do E.M.)

"São equações de 1º e 2º graus. Temos equações completas e incompletas. Temos também equações com números complexos, equações trigonométricas e fracionárias. Temos também equações que dá para se colocar no Plano de Gauss. Ex: 3x – 4. (Aluno 3, do 3º ano do E.M)

Mesmo os alunos que conseguiram identificar as equações de maior grau, relacionaram-nas com a resolução de equações de 2º grau, como mostram os trechos dos relatórios que eles apresentaram:

"No quadro á frente apresentam várias expressões algébricas, equações fracionárias de 1º ao 5º graus e números complexos . Cada uma dessas expressões ou equações terá sua forma de resolução de acordo com o seu expoente ou fração em que se encontra ou pela raiz. Por exemplo: $x^2 + 9 = 0$." (Aluno 4, do 3º ano do E.M.)

" ... $2/5x^3 + 9/7x^2 - 3/4x + 2 = 0$, *essa é uma equação do 3º grau. Apesar de ser uma equação com vários expoentes, para começar sua resolução precisamos tirar o mínimo múltiplo comum dos denominadores para só então colocar na forma de Bhaskara.*" (Aluno 5, do 3º ano do E.M.)

A análise da leitura do painel matemático mostra que os alunos manifestaram desconhecimento até mesmo para a identificação de uma equação algébrica.

Como vimos, os alunos mostraram dificuldade em identificar expressões aritméticas, expressões algébricas e simples equações de graus 1 e 2. Como trabalhar com eles equações polinomiais de graus mais elevados? Por que esse tópico consta do currículo? É importante trabalhar, no Ensino Médio, equações algébricas? Se for, deveria ser bem trabalhado, se não for, por que constar do programa? Até que ponto um aluno que o trabalhou superficialmente ou não trabalhou ficará prejudicado ao continuar seus estudos ou entrar diretamente no mercado de trabalho? Onde as equações algébricas se mostram importantes nos dois casos?

Diante de tantos questionamentos é natural perceber que meu fenômeno de interesse é o ensino-aprendizagem das equações algébricas no Ensino Médio.

II.2 – O MODELO MODIFICADO

O modelo preliminar, que deve funcionar como um guia no desenvolvimento desta pesquisa, foi imaginado como uma forma primeira de trabalho que, como já dissemos antes, poderia ser modificado ao longo dele.

Idealizamos inicialmente, página 8, um modelo que pudesse representar um caminho a ser percorrido e onde, no final, pudéssemos apresentar uma proposta de mudança, apoiada no ensino-aprendizagem de equações algébricas através de resolução de problemas, com compreensão, significado e fazendo conexões com situações reais. No decorrer da pesquisa percebemos que o modelo criado precisava ser reformulado.

Inspiradas no modelo de Romberg idealizamos um modelo dividido em três blocos: no primeiro deles seria enfocado o problema do ensino-aprendizagem das Equações Algébricas, com um olhar retroativo ao ensino-aprendizagem da álgebra trabalhada desde o Ensino Fundamental até as equações algébricas no Ensino Médio. Posteriormente seria feita uma análise do modo como esse assunto é tratado nas escolas pública e particular e do modo como ele é apresentado nos livros didáticos nacionais e estrangeiros.

No segundo bloco seria feita uma análise da matemática necessária adquirida pelos alunos ao longo de sua escolaridade para que se pudesse garantir um trabalho eficiente com Equações Algébricas. Pela exploração dos conteúdos já trabalhados - conjuntos numéricos, álgebra, geometria e trigonometria - é nossa pretensão chegar às Equações Algébricas de forma significativa para o aluno.

Considerando o quase total abandono do assunto pela maioria dos professores das escolas públicas, decidimos pesquisar sobre a importância do ensino de Equações Algébricas no Ensino Médio. Por meio de entrevistas com professores de matemática do Ensino Médio, professores universitários e alunos do 3º ano do Ensino Médio, o modelo pretende encontrar uma resposta à questão colocada. Caso constatada a importância desse trabalho, estariam caracterizadas razões de mudança e, no terceiro bloco, seria apresentada uma proposta alternativa de trabalho para a sala de aula.

O MODELO MODIFICADO

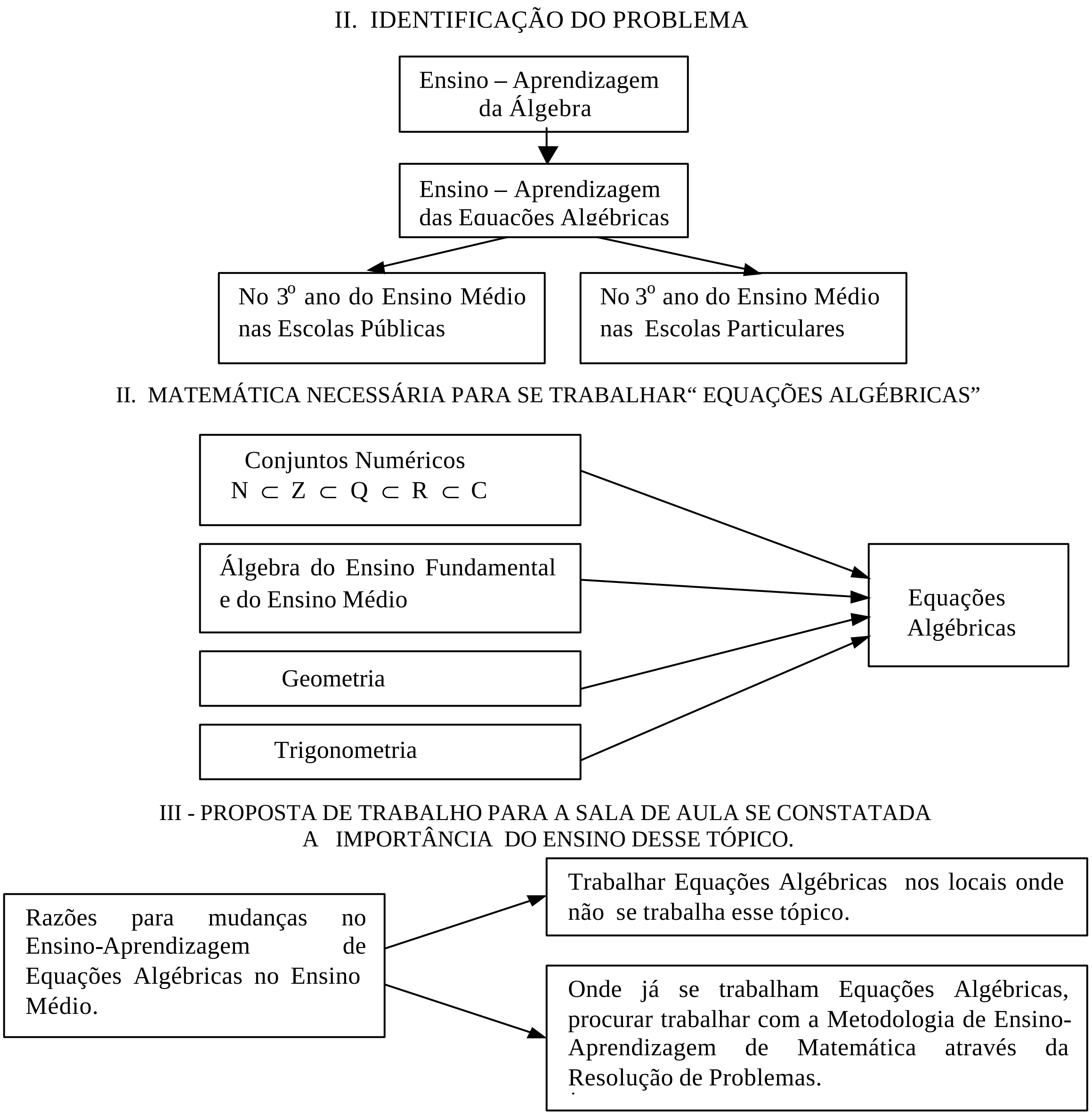
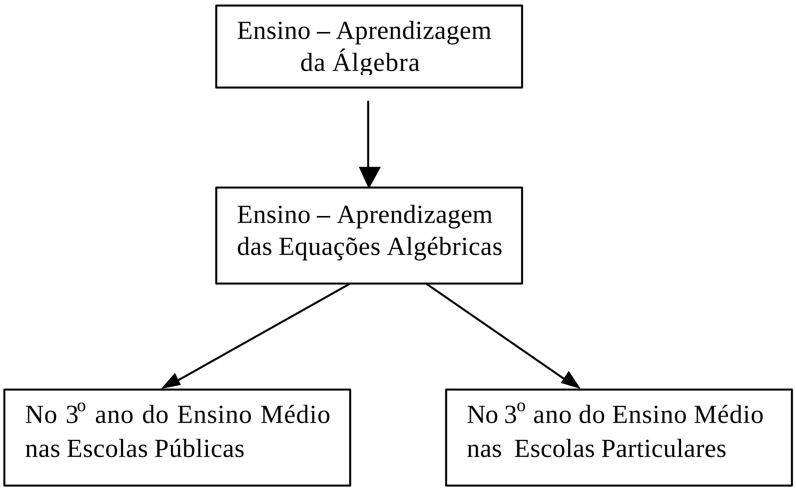


Fig. 06

A seguir passaremos a discutir cada um dos blocos, como foram apresentados no modelo modificado.

II 2.1 - IDENTIFICANDO O PROBLEMA



Neste primeiro bloco serão enfocadas as dificuldades para o ensino das equações algébricas. Ele aborda um conjunto de tópicos que julgamos fundamentais para o estudo das equações algébricas. Por isso, ao identificar o fenômeno de interesse como sendo o Ensino-aprendizagem das Equações Algébricas no Ensino Médio, passaremos a verificar a situação educacional, tanto no Brasil como em outros países, e as reformas que vêm acontecendo, o papel da educação matemática, hoje, numa sociedade globalizada e suas tendências para o ensino-aprendizagem da matemática.

Falaremos sobre o ensino-aprendizagem da álgebra e, em particular, do ensino-aprendizagem das equações algébricas, tópico a ser investigado tanto em escolas públicas quanto particulares.

Identificando a álgebra como um ramo da matemática, verificaremos como se dá o ensino desse tópico. Pelo percurso do caminho do ensino-aprendizagem da álgebra, pretendemos chegar ao ensino-aprendizagem das equações algébricas.

II.2.1.1 – ENSINO-APRENDIZAGEM

A educação é um dos pontos principais para a formação de um país desenvolvido. Com o avanço da tecnologia, modernização econômica e globalização, ter educação de qualidade é uma questão de sobrevivência. Deve-se, assim, pensar na educação como um trabalho de preparação do aluno para viver em sociedade e, para tanto, valores como os de justiça, solidariedade, responsabilidade, ética e moral devem ser resgatados pois, só assim, ele poderá participar de uma sociedade mais justa.

Falando sobre a necessidade de uma educação de qualidade no mundo de hoje, Cláudio de Moura e Castro (2000, revista *Veja* de 27 de dezembro, p.196) comenta que:

> Sem educação, nenhum país pode almejar crescimento econômico sustentado e duradouro nas próximas décadas. [...] Quem cria emprego é crescimento, quem permite crescimento é produtividade e competitividade, e sem boa educação não há nenhum dos dois.

Ante o cenário de crescimento, competitividade e necessidade cada vez maior de qualificação, as reformas educacionais entram, em nível mundial, para a relação das prioridades econômicas e políticas. Os Estados Unidos da América vêm trabalhando e discutindo suas reformas educacionais há algumas décadas, servindo de estímulo para outros países. Na busca por uma reforma, educadores de diferentes países se comunicam, para obter informações sobre a realidade curricular de seus países, fazendo comparações entre seus currículos através de “Mesa Redonda Virtual", mesa redonda coordenada por Joana Porfirio, (1999, E.S.E de Setubal, Portugal, APM, revista Educação e Matemática n^{o}: 55, p.60). Ainda, reunindo-se para discutir problemas educacionais, como afirmam Ana Paula Canavarro e Fátima Alonso Guimarães, na mesma revista portuguesa (1999, revista Educação e Matemática n^{o}: 55, p.24),

> Sete países europeus, Áustria, Portugal, República Checa, Itália, França, Romênia e Espanha subscreveram, no final de setembro, em Florença, uma declaração de princípios, tendo em vista fazer face a alguns dos problemas comuns às escolas da Europa. Os principais problemas identificados são as dificuldades de integração de alguns grupos de alunos, as dificuldades dos professores em assumir os novos papéis que a escola exige, a violência e a indisciplina.

Embora tenhamos hoje, no Brasil, muita pesquisa em torno desse assunto, o que ainda perdura, salvo exceções, é um ensino centrado na figura do professor, que apresenta o conteúdo de forma esquematizada, pronta, sem nenhuma margem para questionamentos ou a participação do aluno.

Os livros didáticos, na sua grande maioria, não têm estimulado os alunos a investigar com mais profundidade o assunto proposto, apresentando-o de forma a cercear as oportunidades de reflexão e crescimento. Isso favorece um ensino nos moldes tradicionais.

Pais, professores e alunos reclamam que a escola funciona mal e que as coisas não podem mais continuar como estão. Os professores reclamam dos alunos desinteressados e indisciplinados, das salas superlotadas e dos salários baixos e da falta de material didático apropriado, dizendo-se frustrados diante dos problemas.

Face à situação de violência e conflitos que se instalavam muitas vezes na escola, os professores, até pouco tempo atrás, eram apenas espectadores do fracasso escolar. Muitos deles se acomodaram, deixando os alunos em completo abandono, transformando a sala de aula num lugar onde se promove a alienação, a falta de entendimento do significado da escola e do que ela deveria representar para eles. Esse quadro é ainda mais cruel onde a população é mais carente.

Muitos educadores, sociólogos e psicólogos, na busca de solução para esse quadro, passaram a investigar o problema. C. Ceccon (1982, p.14-15), uma educadora brasileira que pesquisou a deterioração da escola já comenta que:

> De uma maneira ou de outra, quando se encontram diante de uma turma de alunos, percebem (os professores) que as crianças têm uma dificuldade enorme de seguir o programa. Também se dão conta de que eles próprios, professores, foram mal preparados para o trabalho que têm que fazer. [...] Para se defender de tudo isso, eles adotam, por vezes, uma atitude autoritária em relação aos alunos e aos pais ou então entregam os pontos e se desinteressam pela sorte de seus alunos.

e que:

> Para acabar com o fracasso em massa das crianças mais pobres é preciso saber o que acontece com as crianças dentro da escola. É preciso conhecer os mecanismos e o modo de funcionamento dessa engrenagem que faz com que uns poucos tenham sucesso e que a grande maioria fracasse. Só assim será possível agir para mudar a escola. (Ibidem: p.5l)

Mas, o Brasil, que por muito tempo esteve "deitado em berço esplêndido", se levanta e começa a enfrentar a realidade educacional, estabelecendo diretrizes e bases para a educação nacional. O Ministério de Educação, através da SEF (Secretaria de Ensino Fundamental) e da SEMT (Secretaria de Ensino Médio e Tecnológico), organizou um projeto de reforma do ensino, Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, como uma maneira de encontrar um denominador comum para a educação brasileira e cujos objetivos educacionais visam a melhorar a qualidade do ensino. Nesse sentido, "Os Parâmetros Curriculares Nacionais servirão de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática diária do professor, o planejamento de suas aulas e o desenvolvimento do currículo de sua escola."(PCN-EM, p.10)

Os PCN para o Ensino Médio, apresentam propostas, com o objetivo de nortear o trabalho dos Educadores nos próximos anos, com as seguintes finalidades:

> - a formação da pessoa, de maneira a desenvolver valores e competências necessárias à integração de seu projeto individual ao projeto da sociedade em que se situa;
> - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> - a preparação e orientação básica para a sua integração ao mundo do trabalho, com as competências que garantam seu aprimoramento profissional e permitam acompanhar as mudanças que caracterizam a produção no nosso tempo;
> - o desenvolvimento das competências para continuar aprendendo, de forma autônoma e crítica, em níveis mais complexos de estudos. (PCN-EM, p.22)

Entretanto, se esses objetivos elaborados com tanta profundidade, abrangendo um desenvolvimento das faculdades sociais e intelectuais, não forem discutidos no ambiente escolar, familiar e político, de nada valerão. Deve haver um despertar para a realidade em que estamos vivendo, vontade de colocá-los em prática tanto de maneira individual como coletiva. É preciso disposição e organização do tempo dedicado ao estudo e à reflexão de forma sistemática e cooperativa, no interior das instituições educacionais. Esses objetivos só serão alcançados quando houver uma conscientização baseada no conhecimento e na reflexão individual de toda a proposta elaborada.

Acreditamos que, em meio a crise de valores e parâmetros que se instalou no mundo da educação, torna-se urgente repensar o ensino-aprendizagem de hoje. Não um ensino-aprendizagem centrado no professor, mas com possibilidades de estimular o aluno a mostrar seu potencial, mediante um trabalho compartilhado, dinâmico e que desperte a sua curiosidade para a investigação.

Mas, nessa busca de um ensino-aprendizagem com compreensão, acreditamos que, o aluno deve desenvolver uma disciplina de trabalho, de hábitos sistemáticos de estudo, de pesquisa e criatividade. Apesar de, nos últimos anos, muito mais se ter falado sobre metodologia e tendências do que de ensino, o que se vê, ainda, nas escolas brasileiras é uma grande dificuldade, da parte de professores, em buscar entender a sala de aula como um lugar onde se constrói o conhecimento e se adquire compreensão.

II.2.1.2 - ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

> [...] por trás de cada modo de ensinar, esconde-se uma particular concepção de aprendizagem, de ensino, de matemática e de educação . O modo de ensinar sofre influência também dos valores e das finalidades que o professor atribui ao ensino da matemática, da forma como concebe a relação professor – aluno e, além disso, da visão que tem de mundo, de sociedade e de homem. (FIORENTINI, 1995, p.4)

Os PCN-EM apresentam propostas, cujo objetivo é nortear o trabalho dos educadores nos próximos anos. A proposta para o nível médio na área de matemática, apresenta como objetivos levar o aluno a:

- Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação cientifica geral;
- Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação." (PCN, Ensino Médio. 1999: p. 254)

Fala-se muito em formar cidadãos pensantes, homens que sejam senhores e não escravos das circunstâncias. O processo ensino-aprendizagem da matemática pode contribuir para a formação de tal indivíduo, desde que os professores de matemática estejam capacitados não só para ensinar matemática, mas também para transmitir valores que atinjam os objetivos propostos pelos PCN. Mas, para que isso aconteça, é preciso que se repense a prática docente. São muitos os problemas que afligem o sistema educacional brasileiro, dentre os quais um importante é a formação do professor. Reforma educacional, inovação pedagógica, planos, propostas curriculares não bastam. Só com esses instrumentos e sem uma formação adequada do professor não há ensino de qualidade. Segundo Mizukami e outros (2002, p.13): "A formação de professores é entendida como um continuum, ou seja um processo de desenvolvimento para a vida toda."

O professor é um elemento chave no processo ensino-aprendizagem e sem ele é impossível imaginar qualquer transformação significativa no sistema educativo. Há necessidade de se investir numa formação que responda às necessidades reais da educação.

Randolph A. Philipp e outros (1995, p.308), pesquisaram o trabalho de ensino-aprendizagem da matemática com alguns professores em sala de aula. Betty, uma das professoras entrevistadas sintetizou sua visão do que significa aprender matemática dizendo:

> Aprender matemática, penso eu, significa chegar a um ponto quando você entende que não há essa coisa de aprender qualquer coisa isoladamente...,eu digo a meus alunos que matemática é mais do que aritmética. Ela às vezes ajuda a pensar nela como uma língua estrangeira, e que é exatamente um tipo de linguagem que explica o modo como as coisas funcionam no mundo. E aprender matemática, para mim, é apreciar suas aplicações.

II.2.1.3 - ENSINO-APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

Cecil B. Read (1993, p.76) falando sobre a história da álgebra diz que:

> A álgebra arábica proveio da álgebra dos hindus e gregos. Os árabes tratavam a álgebra numericamente, como os hindus, e geometricamente, como os gregos. [..] O maior escritor árabe no campo da matemática foi, provavelmente, al-Khowarizmi (c.825). Ainda que para muitos sua álgebra revele pouca originalidade, ele utilizava um tipo de "transposição" que não é encontrada nos trabalhos hindus ou gregos e parece ser o primeiro a reunir potências iguais da incógnita.

Uma das traduções do título do trabalho mais conhecido de al-Khowarizmi, Hisab al-jabr w'al muqabalah, é "A ciência da transposição e do cancelamento". O livro tornou-se conhecido como Al-jabr, do qual recebemos nossa palavra álgebra.

Definir álgebra não é fácil, mesmo as enciclopédias e dicionários não são unânimes em dizer o que o termo significa. Na Enciclopédia Mirador encontramos: “Álgebra é, primordialmente, uma generalização da aritmética.” A Enciclopédia Barsa v.1 diz que álgebra é a: “Parte da matemática que estuda os processos racionais de realizar operações como adição, subtração, multiplicação e divisão, operando com números e com símbolos que representam entidades ou elementos não especificados.” O Dicionário Folha/Aurélio, diz que, álgebra é a: “ Parte da matemática que estuda as leis e processos formais de operações com entidades abstratas.”

Definir a álgebra ensinada no Ensino Fundamental e Médio é ainda mais complicado, pois essa álgebra tem uma conotação muito diferente da álgebra ensinada em cursos superiores.

Z. Usiskin, (1995, p.9-10), afirma que “a álgebra da escola média[1] tem a ver com a compreensão do significado das letras (hoje comumente chamadas variáveis) e das operações

---

1. A escola média a que se refere o artigo corresponde às 5ª, 6ª e 7ª séries do Ensino Fundamental.

com elas e considera que os alunos estão estudando álgebra quando trabalham com variáveis pela primeira vez". Ele apresenta em seu artigo cinco situações em que o produto de dois números é igual a um terceiro, para explicar que o conceito de variável é multifacetado.

> Consideremos as seguintes equações, todas com a mesma forma - o produto de dois números é igual a um terceiro:
>
> 1. $A = b \cdot h$
> 2. $40 = 50\,x$
> 3. $\operatorname{sen} x = \cos x \cdot \operatorname{tg} x$
> 4. $1 = n \cdot (1/n)$, $n \neq 0$
> 5. $y = kx$
>
> Cada uma delas tem um caráter diferente. Comumente chamamos (1) de fórmula, (2) de equação (ou sentença aberta), (3) de identidade, (4) de propriedade e (5) de equação de uma função que traduz uma proporcionalidade direta (não é para resolver). Esses nomes diversos refletem os diferentes usos dados à idéia de variável. Em (1), A, b, e h representam a área, a base e a altura e têm caráter de coisa conhecida. Em (2) tendemos a pensar em x como uma incógnita. Em (3), x é o argumento de uma função. A equação (4), ao contrário das outras, generaliza um modelo aritmético e n identifica um exemplo do modelo. Em (5), x é mais uma vez argumento de uma função, y o valor e k uma constante (ou parâmetro, dependendo de como é usado). Somente em (5) há o caráter de "variabilidade", do qual resulta o termo variável. Mesmo assim, tal caráter não estará presente se imaginarmos aquela equação como a representação analítica de uma reta de inclinação k, passando pela origem.

As concepções que tenhamos sobre a álgebra e a utilização das variáveis irão determinar a maneira como a ensinamos. Z.Usiskin (1995) apresenta ainda quatro concepções de álgebra, considerando os diferentes usos das variáveis.

1. Álgebra como uma aritmética generalizada;
2. Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas;
3. Álgebra como um estudo de relações entre grandezas;
4. Álgebra como um estudo das estruturas.

Há uma necessidade de compreensão do ensino-aprendizagem da álgebra, uma vez que esta envolve a manipulação de símbolos e de seus significados. Os alunos têm dificuldade em trabalhar com a álgebra e até mesmo de reconhecer coisas da álgebra, o que ficou claro no "Painel Matemático" e, quando perguntamos a alunos do 3º ano do Ensino Médio o que é que a álgebra significava para eles, eles responderam:

"Eu nunca ouvi falar nessa palavra."

"Não sei."

"Não me recordo nada sobre álgebra"

"São números com ou sem letras que formam expressões."

“Não me lembro”

“Conta envolvendo triângulo e outras coisas semelhantes.”

“É uma equação variável e difícil de aprender.”

“São expressões de números fracionários.”

“Não tenho conhecimento de álgebra.”

“É a parte da matemática que estuda radiciação e potenciação.”

“Álgebra é para mim uma parte da matemática que eu não sou chegado.”

“É uma matéria que estuda a adição, subtração, multiplicação e divisão.”

“Nada mais é do que cálculo, eu acho.”

“Eu acho que são números ou cálculos.”

Para esses alunos a álgebra não teve significado algum, porque a estudaram sem compreender o que estavam estudando. Como afirma Booth (1995, p.23), "Uma maneira de tentar descobrir o que torna a álgebra difícil é identificar os tipos de erros que os alunos comumente cometem nessa matéria e investigar as razões desses erros." Na página 32, Booth continua e diz que um projeto de pesquisa que adotou essa abordagem foi o “Strategies and Errors in Secondary Mathematics.” (SESM), realizado no Reino Unido de l980 a l983, envolvendo alunos da 8^a a 10^a séries (idades entre l3 a l6 anos) no estudo de álgebra.

A pesquisa revelou que, apesar das diferenças de idades e experiências em álgebra, foram verificados erros semelhantes em todas as séries e que esses erros se originaram das idéias que os alunos tinham sobre as atividades, do uso de notação e significado das letras e dos tipos de relações e métodos usados em aritmética. Muitos dos erros cometidos em álgebra estão relacionados com a falta de compreensão das relações e dos procedimentos dentro do contexto aritmético.

Por que falar em aritmética? O que é aritmética? É importante conhecer aritmética para um bom trabalho de álgebra?

Aritmética é a parte da matemática que trabalha sobre números relacionando-os, definindo operações sobre eles e estabelecendo propriedades sobre elas. É na Aritmética que os alunos começam a fazer sua matemática, quando no Ensino Fundamental iniciam o trabalho sobre os números naturais, depois sobre os inteiros e os racionais e, só depois, é que passam a trabalhar com a álgebra.

Muitas das dificuldades, que os alunos apresentam na aprendizagem da álgebra, ocorrem pela ausência de significados algébricos na formulação e na resolução de problemas, já no inicio dos trabalhos com a álgebra. De acordo com Kieran e Chalouh (1993, p.179),

> A pré-álgebra é a transição da aritmética para a álgebra. A maioria dos cursos de álgebra começam logo com o uso de letras como objetos matemáticos, passando depois, às operações que podem ser efetuadas sobre esses objetos.
> As ligações entre o uso de números na aritmética e o uso de letras na álgebra são raramente feitas, a não ser em breves comentários na Álgebra da escola fundamental. Em geral não é dada aos estudantes a oportunidade de construir conexões explícitas entre esses dois domínios. Assim, decidimos considerar como pré-álgebra a área da aprendizagem matemática, onde os estudantes constroem sua álgebra a partir de sua aritmética, isto é, produzem significado para os símbolos e as operações da álgebra em termos do seus conhecimentos de aritmética.

Autores como R. C. Lins e J. Gimenes (1997, p.159) afirmam que: "O que devemos buscar é a coexistência da educação algébrica com a aritmética, de modo que uma esteja implicada no desenvolvimento da outra "

Os professores devem estabelecer objetivos, ao preparar as atividades que serão desenvolvidas na sala de aula, para analisar e avaliar as mudanças necessárias no raciocínio das crianças, quando saem do domínio da aritmética e entram no da álgebra. Para que as atividades, desenvolvidas pelos alunos, possam habilitá-los a pensar e agir de forma organizada e precisa, Booker (1989, p.68-69), afirma:

> Tanto crianças como professores devem tomar muito cuidado com os obstáculos para a aprendizagem posterior, apresentados pelas mudanças da natureza do conteúdo algébrico e dos processos mentais envolvidos no raciocínio algébrico. Enquanto a manipulação de números para determinar as incógnitas exige só manipulação aritmética usual, a álgebra envolve manipulação de abstração de modo não usual.

Sobre a transição da aritmética para a álgebra na resolução de problemas matemáticos, Z. Usiskin (1995, p.14) considera o seguinte problema: "Adicionando 3 ao quíntuplo de um certo número, a soma é 40. Achar o número". Este problema é facilmente traduzido para a linguagem da álgebra assim: $5x + 3 = 40$. Sua solução é $x = 7{,}4$ e, quando substituída no problema, testa o resultado.

Ao resolver problemas desse tipo, muitos alunos têm dificuldade na passagem da aritmética para a álgebra. Enquanto a resolução aritmética consiste em subtrair 3 e dividir por 5, a forma algébrica $5x + 3$ envolve a multiplicação por 5 e a adição de 3, operações inversas, isto é, para armar a equação devemos raciocinar exatamente da maneira contrária à que empregávamos para resolver o problema aritmeticamente.

R. Lesh; T. Post e M. Behr, apud Kieran (1993, p.181), dizem que:

> A sentença algébrica que mais naturalmente descreve uma situação problema não se ajusta imediatamente a um procedimento de cálculo aritmético. Esta possibilidade de 'primeiro descrever e depois calcular' é uma das características chave que torna a Álgebra diferente da Aritmética.

Freqüentemente os alunos do Ensino Fundamental têm dificuldade em resolver problemas algébricos e a maioria desses alunos chega ao Ensino Médio com grandes deficiências em álgebra. A grande dificuldade desses alunos é montar algebricamente a equação que traduz para a linguagem algébrica o que o problema pede com palavras.

II.2.1.4 - ENSINO-APRENDIZAGEM DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NAS ESCOLAS PÚBLICAS E PARTICULARES

As equações algébricas ou polinomiais, que aparecem nos livros didáticos do Ensino Médio, são praticamente ignoradas nas escola públicas. Os professores alegam que o tempo destinado para trabalhar os conteúdos do Ensino Médio é muito curto e que o programa é muito extenso; que os alunos entram para o Ensino Médio com uma grande defasagem no conteúdo do Ensino Fundamental, que dificilmente chegam até esse tópico com os alunos e, quando chegam, não percebem que ele enfeixa toda a matemática do Ensino Médio. Assim sendo, as equações algébricas são vistas como mais um conteúdo que tanto faz ensinar ou não.

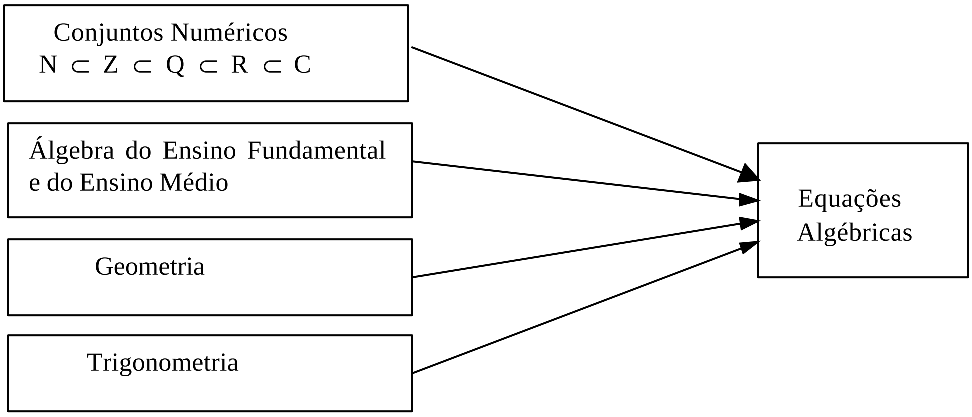
Nas escolas particulares, onde o assunto é trabalhado, o objetivo maior é o vestibular e não há preocupação com discutir sua importância para os estudos posteriores, ou mesmo mostrar que esse tópico engloba todos os demais conteúdos já estudados.

Finalizando o primeiro bloco do modelo preliminar modificado, concluímos que as dificuldades detectadas no ensino-aprendizagem das equações algébricas, no 3º ano do Ensino Médio, estão intimamente relacionadas com as dificuldades que aparecem a partir do ensino-aprendizagem de modo geral, passando pela álgebra e chegando até às equações algébricas.

No ensino-aprendizagem de modo geral o que se vê é uma disparidade entre a escola pública e a particular. Não temos uma política educacional voltada para os problemas do ensino-aprendizagem do Ensino Médio nas escolas públicas. Os cursos de formação de professores não estão preparando o professor para atender a essa geração de jovens que vivem em conflito dentro de uma sociedade cheia de contrastes. Os currículos não são adequados às novas propostas curriculares.

Toda essa situação gera um curso do Ensino Médio incompleto, tanto para aqueles que pretendem continuar seus estudos como para aqueles que ingressam no mundo do trabalho.

II.2.2 - A MATEMÁTICA NECESSÁRIA PARA SE TRABALHAR EQUAÇÕES ALGÉBRICAS



No segundo bloco de nosso modelo modificado chamamos a atenção para a matemática que o aluno, depois de quase 12 anos de estudos, deveria trazer para o trabalho com equações algébricas. Fazendo uma análise retrospectiva do que o aluno viu, em matemática, durante esse tempo, pudemos perceber que números e operações, álgebra do Ensino Fundamental e Médio, geometria e trigonometria são pré-requisitos para o estudo das equações algébricas. Na realidade o estudo desse tópico é quase sempre mal feito, pois, ora não há tempo para ele, ora não há forma de trabalho que seja bem sucedida.

Ao criar nosso modelo preliminar modificado, pretendemos reconhecer a necessidade do domínio dos tópicos relacionados para poder fazer um bom trabalho no ensino das equações algébricas. Dentro da estrutura curricular vigente, estabelecida para os conteúdos de matemática, as equações algébricas completam um trabalho de álgebra, visando à busca de soluções de equações polinomiais ou algébricas. O trabalho feito com os alunos, durante sua escolaridade, no conjunto dos números reais é, na terceira série do Ensino Médio, estendido ao conjunto dos números complexos.

Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n que pode ter sido obtido através de experimentos em matemática, biologia, física, economia, etc..

Ao fazermos P(x) = 0, isto é, $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0 = 0$, com coeficientes em C, esta equação tem o nome de *Equação Algébrica* ou *Equação Polinomial.*

Denomina-se raiz da equação algébrica ao valor de a que satisfaz essa igualdade, ou seja, $a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 a + a_0 = 0$

Recorremos à História da Matemática e coletamos dados, para nós importantes, sobre equações algébricas. Carlos Alberto Knudsen (1985, p.26) diz que:

> A teoria das equações é uma das mais belas e relevantes páginas da História da Matemática, onde se evidencia a força criativa do espirito humano.
> Os Babilônios desenvolveram questões aritméticas e era notável sua familiaridade com as propriedades dos números. É difícil determinar as origens dessa faceta da civilização babilônica mas é conhecido que, por volta de 1800 A.C., alguns métodos de resolução da equação do 2º grau eram utilizados, enquanto os egípcios, na mesma época, possuíam apenas métodos de resolução de equações do 1º grau.
> Um problema fundamental da antiga Álgebra Babilônica era saber que número adicionado ao seu recíproco daria um determinado número. Em notação moderna, os babilônios procuravam x tal que $x + 1/x = b$.
> Essa equação leva-nos a uma equação quadrática em x, a saber $x^2 - bx + 1 = 0$. Procurando a solução através do processo de "completar quadrados", eles calculavam
>
> $$\left(\frac{b}{2}\right)^2$$
>
> depois
>
> $$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1}$$
>
> e, então, achavam as raízes da equação como:
>
> $$\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1} \quad e \quad \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1}$$
>
> Os problemas algébricos eram enunciados e resolvidos verbalmente. As palavras us (comprimento), sag (largura) e asa (área) eram freqüentemente utilizadas para as incógnitas, não necessariamente porque as incógnitas representassem essas quantidades geométricas mas provavelmente porque muitos problemas algébricos eram decorrentes de situações geométricas e a terminologia geométrica se tornou "standard".

Diz C.A. Knudsen que os babilônios conheciam, também, equações do terceiro grau e nos problemas envolvendo equações do quarto grau, incompletas, sem termos em x e x^3, mostravam que elas podiam ser resolvidas como uma equação quadrática em x^2.

Os árabes chegaram à solução algébrica geral da equação do 2º grau, cujas raízes são dadas pela conhecida fórmula creditada ao matemático hindu Bhaskara (1114-1185):

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad e \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entretanto, as resoluções algébricas para as equações cúbicas eram desconhecidas. Segundo C. A. Knudsen (1985, p.27) "Os números negativos e complexos entraram para o modelo numérico muito mais tarde, em conexão com os esforços, na Itália, por volta de 1500, para a resolução de equações do terceiro e quarto graus". Matemáticos italianos do final do século XV e início do século XVI descobriram que a solução da equação cúbica poderia ser reduzida àquelas dos seguintes tipos:

$$x^3 = px + q \quad , \qquad x^3 + q = px \qquad e \qquad x^3 + px = q$$

Ainda C.A.Knudsen diz que, dois matemáticos do século XVI, Scipione del Ferro (1465-1526) e Niccolo Fontana (Tartaglia) descobriram as soluções das equações acima, que foram divulgadas por Girolamo Cardano (1501-1576) e que as publicou, em seu livro "*Ars Magna*", em l545. Cardano também divulgou o método de Ferrari da redução de uma equação do 4º grau a uma de 3º grau, através de uma expressão radical.

Cesar Polcino Milies (1994, revista RPM, nº.25, p.22) em seu artigo: "A solução de Tartaglia para a Equação do 3º grau", diz que: através de versos, Tartáglia mostra como chegou à conhecida fórmula de Cardano ou de Tartaglia, hoje conhecida por fórmula de Cardano/Tartaglia,

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Como vimos, por volta do século XV, já eram conhecidas fórmulas gerais para a resolução de equações de 1º, 2º, 3º e 4º graus, mas nenhuma fórmula para resolver equações de grau maior que 4.

Por mais de 300 anos, vários matemáticos famosos como D'Alembert, Euler e Lagrange apresentaram demonstrações para o caso de resolução de equações de grau maior que 2. Entretanto, todas tinham falhas. Em 1797**,** Carl Friedrich Gauss (1777-1855) afirma, em sua tese de doutoramento, que: toda equação algébrica, P(x) =0, de grau *n*, *n* ³ *1*, possui pelo menos uma solução em C.

Em Boyer (1974, p. 370), lemos que muitos matemáticos tentaram obter uma fórmula geral para equações algébricas de grau > 4, até que, em l824, Niels Hendrich Abel (1802-1829) chegou à conclusão de que:

> Não pode haver fórmula geral, expressa em operações algébricas explicitas sobre os coeficientes de uma equação polinomial, para as raízes da equação se o grau da equação é maior que quatro. Uma prova anterior, menos satisfatória e que passara quase despercebida, da insolubilidade da quíntica fora publicada em 1799 por Paolo Ruffini (1765-1822) e, por isso, o resultado agora leva o nome 'Teorema de Abel-Ruffini' .(BOYER, 1974, p.375)

Em seu livro “Matemática para o 2º grau”, volume 3, Paulo Boulos e Renate Watanabe (1979, p.117), comentam com o leitor de seu livro:

> Não fique, porém, com a impressão de que todo o trabalho na procura de fórmulas gerais foi perdido porque Abel provou que tais fórmulas não existem. Ao contrário – as idéias desenvolvidas na procura, os processos que não deram resultados, as tentativas e os erros – tudo contribuiu para o desenvolvimento da matemática.

Elon Lages Lima (1998, p.234) diz que:

> O fato de não possuirmos fórmulas algébricas de resolução para equações de grau superior a 4 não significa que não possamos resolver tais equações, isto é, calcular suas raízes reais e complexas. Os processos de resolução, no entanto, envolvem métodos numéricos de aproximação.

II.2.2.1- CONJUNTOS NÚMERICOS E OPERAÇÕES

Assim que o homem percebeu o mundo à sua volta, as árvores, os animais e as aves, ele começou a fazer relações, comparações e contagem. O conjunto dos números naturais surgiu de uma necessidade humana de resolver problemas de contagem.

Bento de Jesus Caraça (1958, p.4-5) coloca a contagem como uma operação elementar da vida social e individual:

> A idéia de número natural não é um produto puro do pensamento, independente da experiência: os homens não adquiriram primeiro os números naturais para depois contarem; pelo contrário, os números naturais foram-se formando lentamente pela prática diária de contagens.[...] Não são apenas as condições da vida social que influem no conjunto dos números naturais; atuam neles também condições humanas e individuais. Em primeiro lugar, é habitual contar-se pelos dedos, e este fato teve grande influência no aparecimento dos números; não é verdade que o nome dígito, que designa os números naturais de 1 a 9, vem do latim dígitus que significa dedo? Mas há mais:- a base do nosso sistema de numeração é 10, número de dedos das duas mãos.

Embora as transações comerciais entre os primeiros grupos humanos fossem a base de troca, eles precisavam saber a quantidade de ovelhas, a quantidade de medida de cereal, a extensão de suas terras para poderem efetuar suas trocas de maneira satisfatória. O homem criou, então, símbolos e regras que lhe permitissem lidar com quantidades cada vez maiores, criando, para isso, sistemas de numeração e posteriormente o princípio de posição.

Historicamente, os conjuntos numéricos não surgiram da forma organizada como é trabalhada hoje. Para efeito didático eles estão organizados da seguinte forma: conjunto dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais, reais e complexos. Didaticamente são apresentados na seqüência $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ e num diagrama podem ser vistos assim:

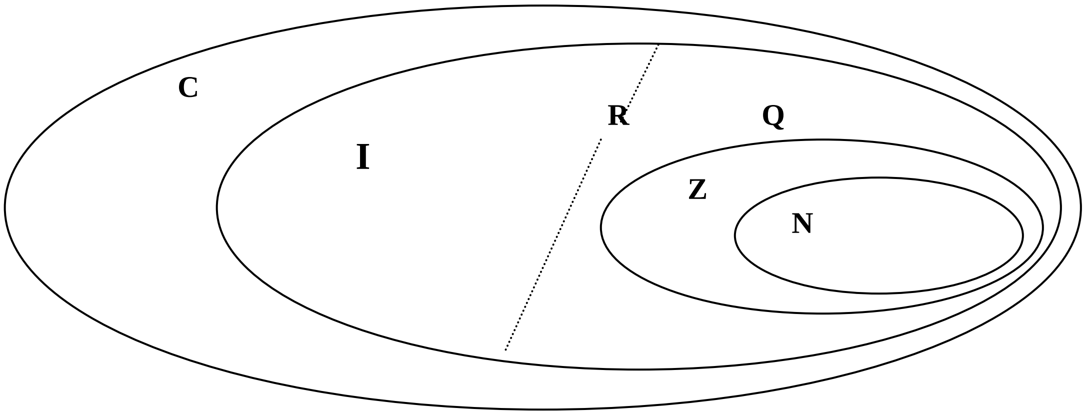


Fig. 2.1

Em todos esses conjuntos numéricos são definidas as operações: adição e sua inversa subtração; multiplicação e sua inversa divisão; potenciação e suas inversas radiciação e logaritmação. Propriedades sobre cada operação são estabelecidas, levando à construção de seus diferentes algorítmos. O Dicionário Básico da Língua Portuguesa Folha/Aurélio (1995, p.30) diz que:

> Algoritmo é o processo de cálculo ou processo de resolução de um grupo de problemas semelhantes em que se estipulam, com generalidade e sem restrições, regras formais para obtenção do resultado ou da solução do problema.

Principles and Standards for School Mathematics – NCTM – 2000 (Princípios e Padrões para a Matemática Escolar), conhecidos por Standards 2000, fazem uma citação na página 32, de Sowder, 1992, sobre o conteúdo "Número e Operações":

> O padrão "Número e Operações" descreve uma profunda e fundamental compreensão de, e proficiência com, contagem, números e aritmética, tanto quanto uma compreensão de sistemas numéricos e suas estruturas.
> Os conceitos e os algoritmos da aritmética elementar são parte deste padrão, assim como o são as propriedades e as características das classes de números que formam os princípios da Teoria dos Números. No centro deste padrão está o desenvolvimento do sentido de número - a habilidade em decompor números naturalmente, usar números particulares como 100 ou 1/2 como referentes, usar as relações entre operações aritméticas para resolver problemas, compreender o sistema de numeração base 10, estimar, dar sentido aos números e reconhecer a grandeza relativa e absoluta dos números.

Dizem, ainda, que

> Os programas de ensino de matemática, ao longo de 12 anos de estudos, deveriam tornar todos os estudantes capazes de:
> - Compreender números, modos de representar números, relações entre números e sistemas de numeração;

- Compreender os significados das operações e como elas se relacionam uma com a outra
- Calcular fluentemente e fazer estimativas razoáveis.

L.R.Onuchic (1998, p.24) falando sobre as 4 operações nos conjuntos numéricos diz que: "Em qualquer conjunto numérico trabalhado, N, Z, Q, ou R, os conceitos das operações são sempre os mesmos e o domínio desses conceitos nos permite resolver problemas". O que varia são as técnicas operatórias próprias de cada conjunto numérico.

É na mudança dessas técnicas operatórias e no desconhecimento dos diferentes tipos de números que se encontram muitas das dificuldades dos alunos. O uso, sem compreensão e significado dos algoritmos, impostos aos alunos como uma forma de ensino, tornam esse trabalho mecânico, dando a impressão, às vezes, de que o aluno sabe, porque somente soube fazer as contas.

No trabalho com a matemática em sala de aula, sente-se que uma grande dificuldade encontrada pelos alunos está no ato de decidir que operação será usada para resolver um problema dado.

De tudo o que foi dito depreende-se que conhecer e saber trabalhar nos diferentes conjuntos numéricos é importante para o aluno que se envolve no estudo das equações algébricas.

II.2.2.2- ÁLGEBRA DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

A álgebra ensinada nas escolas de Ensino Fundamental e Médio tem uma conotação muito diferente daquela ensinada nos cursos de matemática universitária. Como já foi dito na página 29 Usiskin afirma que, na fase da escola média, a álgebra tem a ver com a compreensão do significado das letras e das operações com elas e considera que os alunos estão estudando álgebra quando encontram variáveis pela primeira vez.

Os Standards 2000, p.37 e 38, falando sobre o 2º padrão de conteúdo: "Álgebra", dizem que:

"Os programas de ensino para os 12 anos de escolaridade deveriam tornar os estudantes capazes de:

- Compreender padrões, relações e funções.

> - Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
> - Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
> - Analisar mudanças em vários contextos."
>
> A álgebra tem suas raízes históricas no estudo de métodos gerais para resolver equações. O Padrão álgebra enfatiza relações entre quantidades, incluindo funções, modos de representar relações matemáticas e a análise de mudança. Relações funcionais podem ser expressas ao usar notação simbólica, que permite que idéias matemáticas complexas sejam expressas sucintamente e que a mudança seja analisada eficientemente. Hoje os métodos e as idéias da álgebra apóiam o trabalho matemático em muitas áreas. Por exemplo, redes de distribuição e comunicação, leis da física, modelos populacionais e resultados estatísticos podem ser todos representados na linguagem simbólica da álgebra. Em adição, a álgebra trabalha sobre estruturas abstratas e sobre o uso dos princípios dessas estruturas ao resolver problemas expressos com símbolos.
>
> Muito da ênfase simbólica e estrutural em álgebra pode ser construída sobre as experiências extensivas dos alunos com número. A álgebra está também intimamente ligada à geometria e à análise de dados. As idéias incluídas no padrão álgebra constituem-se em uma componente importante do currículo da matemática escolar e ajuda a unificá-lo. A competência algébrica é importante na vida adulta, tanto no trabalho quanto na preparação para uma educação superior. Todos os estudantes deveriam aprender álgebra".

Muitos adultos identificam álgebra escolar com manipulação simbólica - resolver equações complicadas e simplificar expressões algébricas. Sem dúvida, os símbolos algébricos e os procedimentos para trabalhar com eles são uma realização matemática histórica muito intensa e são críticas no trabalho matemático. Mas, álgebra é mais do que mover símbolos. Os estudantes precisam compreender os conceitos da álgebra, as estruturas e os princípios que regem a manipulação dos símbolos e como os símbolos podem ser usados para registrar idéias e ganhar compreensão dentro das situações.

Percebemos que um trabalho sério e bem feito com os alunos em álgebra deve atender a todos os seus princípios e, com habilidade, saber trabalhar os procedimentos adequados a cada situação.

É importante para um bom trabalho em equações algébricas que o aluno tenha um bom domínio da álgebra.

II.2.2.3 - GEOMETRIA

Elon Lages Lima (1999, p. 4 e 5) afirma que:

> Um dos maiores méritos educativos da Matemática é o de ensinar aos jovens que toda conclusão se baseia em hipóteses, as quais precisam ser aceitas, admitidas para que a afirmação final seja válida. O processo de passar, mediante argumentos logicamente convincentes, das hipóteses para a conclusão chama-se demonstração e seu uso sistemático na apresentação de uma teoria constitui o método dedutivo. Esse

> é o método matemático por excelência e a Geometria Elementar tem sido, desde a remota antigüidade, o lugar onde melhor se pode começar a praticá-lo.

Os Standards 2000, p. 41, falando sobre o 3º padrão de conteúdo "Geometria" dizem que:

> Os programas de ensino nos 12 anos de escolaridade deveriam capacitar todos os alunos a:
>
> - Analisar as características e propriedades de formas geométricas bidimensionais e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos sobre relações geométricas;
> - Especificar situações e descrever relações espaciais usando a geometria analítica e outros sistemas representacionais;
> - Aplicar transformações e usar simetria para analisar situações matemáticas;
> - Usar visualização, raciocínio espacial e modelagem geométrica para resolver problemas;
>
> Através do estudo da geometria, os estudantes aprenderão sobre formas e estruturas geométricas e verão como analisar suas características e relações. [...] A geometria é um lugar natural para o desenvolvimento do raciocínio e das habilidades em justificar dos estudantes, culminando em um trabalho com prova nas séries secundárias. A modelagem geométrica e o raciocínio espacial oferecem meios para interpretar e descrever ambientes físicos e podem ser ferramentas importantes em resolução de problemas.
>
> As idéias geométricas são úteis para representar e resolver problemas em outras áreas da matemática e em situações do mundo real, assim a geometria deve estar integrada, sempre que possível, com outras áreas. Representações geométricas podem ajudar os estudantes a dar sentido à área e às frações; histogramas e gráficos de dispersão podem dar compreensão sobre dados; e gráficos coordenados podem servir para conectar a geometria com a álgebra.
>
> Com atividades bem projetadas, ferramentas adequadas e apoio dos professores os alunos podem levantar e explorar conjecturas sobre a geometria e podem aprender a raciocinar cuidadosamente sobre idéias geométricas desde o início dos estudos. A Geometria é mais do que definições. Ela trata de descrever relações e promover o raciocínio. A geometria tem sido vista como o lugar no currículo matemático escolar onde os estudantes aprendem a raciocinar e a ver a estrutura axiomática da matemática.

Dorothy Geddes e Irene Fortunato (1993, p.199) dizem que:

> A geometria é uma parte integrante do currículo de matemática no Ensino Fundamental. Os conceitos geométricos e as representações contribuem efetivamente para o aprendizado dos estudantes das idéias de número e medida (comprimento, área e volume).Há inúmeros exemplos disso:
>
> - A reta numerada apresenta um caminho de representar os números naturais, fracionários, inteiros e uma escala probabilistica.
> - Regiões usadas num trabalho com multiplicação, números fracionários, porcentagem e área.
> - Número e geometria estão intimamente conectados no desenvolvimento do conceito de função, do plano coordenado e de gráfico.
> - Triângulos semelhantes são usados para desenvolver os conceitos de razão e proporção.

Uma das recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN-EM, 1999, p.255), sobre fazer conexões entre conteúdos, diz que:

> As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente.

Como vimos a geometria elementar é o local apropriado para se praticar o método dedutivo. É o local onde podemos fazer o aluno pensar, saindo de hipóteses e chegando a conclusões válidas. Este tipo de raciocínio se aplica ao trabalho com resolução de problemas.

De acordo com os Standards 2000, usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelagem geométrica pode auxiliar no trabalho de resolução de problemas. As idéias geométricas são úteis para representar e resolver problemas em muitas áreas da matemática e em situações do mundo real.

A álgebra está intimamente ligada à geometria. Assim os conceitos matemáticos e as representações contribuem efetivamente para o aprendizado dos estudantes. Podemos ver isso nos exemplos apresentados no artigo de Geddes e Fortunato (1993, p. 200).

Portanto usar e interpretar representações geométricas como gráficos, tabelas, etc. são algumas das habilidades e competências que os alunos deverão desenvolver no ensino-aprendizagem da matemática, podendo assim fazer conexões entre geometria e álgebra.

Diante do que foi apresentado, concluímos que saber geometria pode contribuir para um melhor trabalho em Equações Algébricas.

II.2.2.4 - TRIGONOMETRIA

João Bosco Pitombeira de Carvalho (1992, p.102) fazendo uma retrospectiva histórica sobre a trigonometria diz que a trigonometria foi uma criação da matemática grega e que: "Ela surgiu devido às necessidades da astronomia, a fim de prever as efemérides celestes, para calcular o tempo e para ser utilizada na Navegação e na Geografia". Os gregos já usavam a trigonometria há 300 anos a.C.. Hiparco de Nicéia, que pode ser considerado o fundador da trigonometria, viveu em torno de 120 a.C.. Ele " foi o primeiro a determinar com precisão o nascer e o ocaso de várias estrelas, usando para isso uma tabela de cordas por ele calculada. Suas tabelas foram construídas para serem usadas em astronomia." Um pouco depois de Hiparco, Menelao de Alexandria, que viveu em torno de 100 a.C., já apresenta uma trigonometria bem definida. Cláudio Ptolomeu, que viveu na Grécia por volta de 150 d.C., fez com que a trigonometria atingisse seu ápice.

Segundo J.B.P.Carvalho (1992, p.104-105), os gregos usavam a trigonometria na astronomia. Eles nunca se preocuparam em utilizá-la em topografia, campo em que hoje ela tem emprego constante. O interesse pela trigonometria entre gregos, hindus e árabes era motivado por suas aplicações à astronomia. Outros matemáticos continuaram o trabalho.

Na história dos números complexos, conta J.B.P.Carvalho (1992, p.113) que:

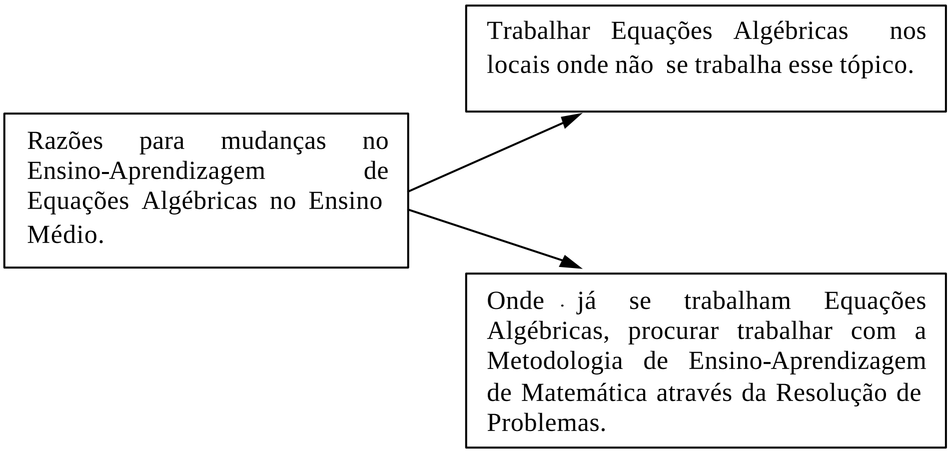
> Laplace (Pierre Simon de Laplace, 1749-1827), em 1795, atacou o problema de demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra, sem contudo conseguir uma prova aceitável. A primeira demonstração correta deve-se a Gauss (1777-1855), na qual ele utiliza propriedades topológicas da reta e do plano, que não tinham sido ainda explicitadas em sua época.
>
> A demonstração de Gauss encontra-se em sua tese de doutoramento, de 1799. Neste trabalho, Gauss, além de apresentar sua demonstração, estuda criticamente as demonstrações precedentes de D'Alembert (1746), de Euler (1749), de Foncenet (1759) e de Lagrange (1772), todas elas insatisfatórias. Ao longo dos anos, Gauss apresentou três novas demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra.
>
> É provável que a idéia de representar geometricamente os complexos tenha ocorrido a Gauss ao demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra, mesmo que ele não tenha utilizado isso na demonstração.

A trigonometria que os alunos devem conhecer para um trabalho convincente em Equações Algébricas se justifica quando estas apresentam coeficientes complexos e variáveis complexas. Diz José Paulo Q. Carneiro (1998, p.9-10) que:

> Hoje em dia, é bastante claro, para todos os que trabalham com matemática, o papel central que exercem os números complexos e de suas inúmeras utilidades. O "segredo" está na multiplicação dos complexos, que é essencialmente uma composição de rotações. É por isto que os complexos aparecem inevitavelmente em muitos problemas que envolvem rotação, círculo, funções circulares (trigonométricas), movimentos periódicos, etc.. E é por isto também que encontramos números complexos no estudo de circuitos elétricos, correntes alternadas, astronomia e motores.

Após um trabalho com os itens II.2.1, II.2.2, II.2.3 e II.2.4 consideramos justificadas as exigências desse segundo bloco sobre a matemática necessária que os alunos deveriam trazer para um bom trabalho com Equações Algébricas.

II.2.3 - PROPOSTA DE TRABALHO PARA A SALA DE AULA, SE CONSTATADA A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DESSE TÓPICO



Como apresentado anteriormente, para se trabalhar com equações algébricas no 3º ano do Ensino Médio, é necessário que os alunos tenham domínio sobre conjuntos numéricos, álgebra elementar, geometria e trigonometria.

Sem um trabalho com equações algébricas o ensino da matemática, programado para doze anos de escolaridade, fica incompleto, sem que haja um fechamento no programa. Defendemos um ensino-aprendizagem com a metodologia de ensino-aprendizagem da matemática através da resolução de problemas, fazendo conexões com outras áreas do conhecimento e, através de problemas secundários, sanar possíveis dificuldades em trabalhar com a matemática necessária, como apresentada no 2º bloco do modelo preliminar modificado.

Neste 3º bloco do nosso modelo preliminar modificado, como mostra a figura acima, desde que constatada a importância de um trabalho com equações algébricas no Ensino Médio, apresentaremos nossa proposta de trabalho para as escolas em que esse assunto é abordado e onde não o é.

II.3 – RELACIONAR COM AS IDÉIAS DE OUTROS

Ao identificarmos o fenômeno de interesse, *“o ensino-aprendizagem das Equações Algébricas no Ensino Médio”*, fomos verificar o que outros tinham a dizer sobre o assunto. Identificamos como “outros” aqueles que expressaram idéias sobre equações algébricas em livros, revistas, boletins, jornais e documentos. Pesquisamos na literatura antiga e recente, tanto nacional como estrangeira.

Analisando o que estudiosos escreveram sobre Equações Algébricas, nosso objetivo foi o de verificar se o ensino-aprendizagem desse tópico é ou não importante no Ensino Médio.

Dentre os autores nacionais pesquisados, J.P.Q.Carneiro (1998), E.L.Lima (l998) e L.R.Dante (1999) falam sobre equações algébricas como um tópico que deve ser explorado no Ensino Médio.

Carneiro (1999, p.14) não crê que os métodos de Cardano e outros semelhantes para a resolução de equações do 3º e 4º graus devam fazer parte do conteúdo normal dos cursos de segundo grau. No entanto, ele afirma que:

> Mas achamos que o professor secundário deve conhecer a resolução da equação do 3º grau por meio de radicais, seja para entender melhor a história da resolução de equações, seja para poder responder com segurança aos alunos que volta e meia perguntam: existe fórmula para a equação do 3º grau? Já, quanto aos métodos numéricos para resolução de equações, estamos absolutamente convictos de que devam ser introduzidos no curso secundário.

Analisamos uma variedade de livros didáticos das décadas de 40 a 90, verificando como o tópico "Equações Algébricas ou Polinomiais" se apresenta. Em todos os livros analisados, ele aparece no final do curso.

No livro de Euclides Roxo (1946), do 3º ano Colegial, 3ª edição, o conteúdo foi dividido em três áreas: álgebra, geometria e geometria analítica. No tópico Equações Algébricas a apresentação da teoria é bastante rica em detalhes e comentários, apresentando exemplos bem significativos como:

> O estudo das equações do tipo:
>
> $$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0 , \quad \text{com} \quad a_0 \neq 0, \qquad (1)$$
>
> onde os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m$ são números quaisquer, constitui o problema fundamental da álgebra.
> Aliás essa é a forma canônica à qual se reduz, mediante certo número de operações, qualquer equação algébrica. Observaremos, entretanto, que nem sempre a equação obtida sob a forma canônica será equivalente à que foi dada; essa equação poderá conter raízes estranhas à primeira.
> Nesse particular são conhecidos os casos da redução de equações fracionárias ou irracionais à forma canônica, férteis em tais exemplos. Mas até a simples supressão de termos comuns aos membros de uma equação poderá, em certas circunstâncias, determinar o aparecimento de raízes estranhas.
> Bastará tomar, por exemplo:
>
> $$2x + \frac{1}{x-2} = 4 + \frac{1}{x-2} \qquad (2)$$
>
> *e* $\qquad 2x = 4$

> Nenhum valor de x satisfaz à primeira. (Será necessário ter em vista que, de fato 1/0 nenhum valor representa)
> No entanto a segunda, obtida pela supressão dos termos fracionários, admite a raiz x = 2. Em qualquer hipótese, entretanto, uma verificação, a posteriori, indicará as raízes estranhas. Por isso, podemos cogitar, somente, das equações algébricas sob a forma canônica. (ROXO p. 177,178)

Na década de 60 os livros eram editados obedecendo a um projeto de conteúdo e às Portarias que indicavam quais conteúdos se deveriam ensinar nos cursos Clássico e Científico.

Essa década foi marcada pelo movimento da Matemática Moderna promovendo o formalismo matemático, fundamentado nas estruturas algébricas e na linguagem formal da matemática.

Surge no Brasil uma tradução, em 3 volumes de textos da SMSG- School Mathematics Study Group, da série Mathematics for High School publicado nos E.U.A em 1961, com direitos cedidos à EDART- Livraria Editora de S.P.. No prefácio da Edição brasileira algumas justificativas, quanto à ordem e apresentação dos conteúdos, foram apresentadas: "É ressaltado também o valor do método iterativo de Newton para a aproximação dos zeros de uma função polinomial, tendo em vista uma possível utilização dos computadores". Nesse volume, as Equações Algébricas ou Polinomiais são apresentadas sob o enfoque das Funções Polinomiais.

Na literatura nacional encontramos autores de livros e de artigos preocupados com a matemática do Ensino Médio, como mostra a série em três volumes: *A matemática do Ensino Médio*, escrita por E.L. Lima; P.C.P. Carvalho; E. Wagner e A.C. Morgado (1998).

Outro livro analisado foi *Resolução de equações Algébricas* de J.P.Q. Carneiro, 1998.

II.4 – CONJECTURA

Segundo Romberg, esse é um passo importante no processo de pesquisa porque, ao ser examinado um fenômeno de interesse particular, aparecerão, inevitavelmente, muitas perguntas. Decidir qual delas examinar não é tarefa fácil.

Ao iniciar nosso trabalho de pesquisa, tivemos dificuldades em escolher-lhe o rumo, tantas eram as questões que nos angustiavam e cujas respostas esperávamos encontrar com este trabalho. Entretanto, para o caso especifico das equações algébricas, tópico "ensinado" no final do 3º ano do Ensino Médio, alguns aspectos chamaram-nos mais a atenção como, por exemplo, o fato de o assunto não fazer parte do currículo de muitas escolas públicas e, naquelas em que faz parte do currículo, o "ensino" ser feito de forma muito superficial. Para mim, ficam então muitas indagações:

1. Para que então ensinar esse tópico?
2. Saber equações algébricas ou polinomiais é importante para o aluno do Ensino Médio?
3. Por que esse assunto não é levado a sério nas escolas públicas?
4. Por que, em algumas escolas públicas, esse tópico nem consta do currículo?
5. Por que, se não contemplado, continua a fazer parte dos conteúdos apresentados nos livros didáticos para o Ensino Médio?
6. Os alunos que não "vêem" esse conteúdo, até que ponto, podem ser prejudicados se forem continuar seus estudos na área de exatas? E se continuar em uma outra área?
7. Para aquele aluno que não vai continuar os estudos, como ela pode ser importante?
8. Se o assunto for importante, como trabalhá-lo de forma significativa?
9. Por que, diante de reformas de ensino que estão acontecendo, equações algébricas ainda aparecem no currículo escolar? É só para constar ou por que o tema é considerado importante?
10. No caso de ser considerado importante, a metodologia de ensino adotada por professores e livros didáticos é capaz de mostrar que esse tópico enfeixa todo o trabalho numérico, algébrico, geométrico e trigonométrico dos 12 anos de estudos de matemática na escola?
11. Por que os livros didáticos quase não demostram a importância desse tópico?

Como as coisas importantes são vitais e as coisas vitais são as que vão determinar o rumo de nosso futuro, pretendemos enfocar a sala da aula, verificando a importância do "ensino" das equações algébricas no Ensino Médio. Se constatada a importância desse tópico, apresentaremos uma proposta de trabalho, elaborada a partir do *Ensino de Matemática através de Resolução de Problemas*. Por que resolução de problemas?

Com as rápidas mudanças ocorridas na sociedade, tais como a globalização da economia e o avanço tecnológico, o volume de informações disponíveis é tão grande que acabamos selecionando só aquelas que nos interessam e, aí, corremos o risco de desconhecer totalmente certos fatos importantes. Um ensino de matemática através da resolução de problemas, quando o aluno é levado a pensar, analisar, criticar, formular e concluir, será de grande ajuda na formação de um cidadão capaz de usar, com sabedoria, os benefícios de uma sociedade em mudança. Assim, constatada a importância desse tópico, nossa conjectura é apresentar " *um trabalho alternativo de ensino-aprendizagem de Equações Algébricas, no 3º* *ano do Ensino Médio, através da Resolução de Problemas"*, que poderia ser levado avante por professores de Matemática e Educadores Matemáticos, num trabalho visando à sala de aula.

CAPÍTULO - III

CONTINUANDO A PESQUISA

Desde que constatada a importância do ensino-aprendizagem de Equações Algébricas no Ensino Médio, passaremos a defender nossa conjectura: “Um trabalho alternativo em ensino-aprendizagem de Equações Algébricas, no 3º ano do Ensino Médio, através da Resolução de Problemas."

Tomando sempre o modelo de Romberg como guia, daremos continuidade à nossa pesquisa, selecionando estratégias e procedimentos com o fim de alcançar o objetivo proposto em nossa conjectura.

III.1-SELECIONAR ESTRATÉGIAS E PROCEDIMENTOS DE PESQUISA

No modelo de pesquisa de Romberg, as atividades cinco e seis referem-se à criação de estratégias e correspondentes procedimentos de trabalho. Romberg afirma que essa fase é difícil, pois da cuidadosa seleção das estratégias e dos procedimentos depende o bom andamento da pesquisa.

III.1.1 - ESTRATÉGIAS

Dentre as muitas estratégias, que pudessem servir convenientemente à nossa conjectura, foram selecionadas:

1. a busca de documentos legais ligados à grade curricular no que se refere ao tópico ensino-aprendizagem em equações algébricas;
2. a análise de uma variedade de livros didáticos de diferentes épocas que possibilitasse uma comparação entre diferentes formas de trabalho em equações algébricas;
3. a análise de literatura antiga e recente, tanto nacional como estrangeira;
4. entrevistas e questionário:

a) entrevistas com professores de matemática do ensino médio de escolas públicas e particulares;

b) entrevistas com professores de matemática de cursos de graduação e outros cursos universitários;

c) entrevistas com autores de livros didáticos;

d) entrevistas com pesquisadores em educação matemática.

e) questionário com alunos do Ensino Médio em final de curso de escolas particulares e públicas;

5. uma apresentação da metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas;
6. a criação de um projeto de trabalho com equações algébricas.

III.1.2 - PROCEDIMENTOS

Para cada estratégia selecionada, selecionamos um correspondente procedimento:

1- buscar, nas Secretarias de Estado de Mato Grosso e São Paulo, documentos legais em que constem as atuais reformas educacionais no Ensino da Matemática, visando ao trabalho com Equações Algébricas;

2- fazer análise de livros didáticos publicados a partir da década de 40 para verificar como o trabalho com as equações algébricas se apresenta nas diferentes edições;

3- buscar na literatura antiga e recente, tanto nacional quanto estrangeira, assuntos ligados às equações algébricas e seu ensino;

4- aplicar entrevistas e questionário:

a) Entrevistar professores do Ensino Médio de escolas públicas de Várzea Grande e Cuiabá, M.T. e escolas particulares de Rio Claro, S.P;

b) entrevistar professores universitários da UFMT, Cuiabá, M.T. e da UNESP de Rio Claro, S.P;

c) entrevistar autores de livros didáticos a fim de conhecer seus trabalhos com equações algébricas;

d) entrevistar pesquisadores em Educação Matemática da UNESP;

e) aplicar questionário a alunos do Ensino Médio, em final de curso, de escolas públicas e particulares de Mato Grosso, M.T. e Rio Claro, S.P., visando ao reconhecimento de trabalho feito em álgebra e, em especial, em equações algébricas;

5. apresentar a metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas, visando à sala de aula;
6. a criação de um projeto diferenciado de trabalho em ensino-aprendizagem de equações algébricas, no Ensino Médio

III.2 - ESTRATÉGIAS E PROCEDIMENTOS EM AÇÃO

É hora de colocar as estratégias em ação através de seus procedimentos.

III.2.1 - A ANÁLISE DE DOCUMENTOS LEGAIS

Em 1999 recebemos, da Secretaria de Estado de Mato Grosso, o livro "*Novas Perspectivas para o Ensino Médio*", constando nele os pareceres do CNE (Conselho Nacional de Educação) sobre o Ensino Médio e Educação Profissional, bem como decretos, portarias, artigos da LDB (Lei de Diretrizes e Bases) da Educação Nacional, lei 9394/96 e resoluções do Ministério da Educação. O objetivo da Secretaria de Estado era apresentar à comunidade escolar, envolvida com o Ensino Médio em Mato Grosso, um material para consultas, para ser explorado de forma criativa, expondo todas as possibilidades que a legislação garante e analisando o Ensino Médio, embora não fazendo menção aos conteúdos a serem desenvolvidos nem aos métodos que seriam utilizados.

No mesmo ano, professores do Ensino Médio de 11 escolas estaduais de Mato Grosso, selecionadas pela Secretaria Estadual de Educação, participaram de um encontro cujo objetivo era a implantação do "Projeto Político Pedagógico", como um projeto piloto, nessas 11 escolas, durante três anos.

Uma equipe da Universidade Federal do Paraná, liderada pela professora Acácia Zeneida Kuenzer, esteve presente a esse encontro. Essa equipe funcionaria como consultora do grupo, durante todo o processo de implantação e execução do projeto.

Participei desse encontro como representante da área de matemática da "Escola Estadual Prof[a]. Adalgisa de Barros", do município de Várzea Grande. Nesse evento, recebemos o documento " *Diretrizes Curriculares para o Estado do Mato Grosso*", que apresenta as políticas do Ensino Médio para o estado. Falou-se muito sobre um Ensino Médio que pudesse atender tanto ao estudante trabalhador quanto àquele que iria ingressar no mundo do trabalho somente após completar estudos superiores, como afirma o documento:

> Para a maioria dos jovens, o exercício de um trabalho digno será a única possibilidade de continuar seus estudos em nível superior; o ensino médio deverá responder ao desafio de atender a estas duas demandas: o acesso ao trabalho e à continuidade de estudos, com competência e compromisso. (SECRETARIA DE ESTADO DE MT.P.16)

Nessa mesma ocasião discutimos a "*Proposta Metodológica da Área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias para as Escolas da rede pública Estadual de Mato Grosso*". Nesse documento é apresentada uma sugestão de conteúdo curricular para o Ensino Médio, em que as equações algébricas aparecem como último conteúdo, logo após o trabalho com números complexos.

Nossa escola também recebeu os PCN para o Ensino Médio. Foi iniciada uma discussão sobre os mesmos. Ao vir para Rio Claro, continuei fazendo essa leitura, então com um posicionamento mais crítico. Na parte destinada ao Conhecimento Matemático, o documento começa dizendo que:

> À medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente. (PCN-EM, p.251)

De acordo com os PCN-EM, há necessidade de se desenvolverem competências em matemática, para atender às necessidades sociais, culturais e profissionais, colaborando, assim, para o exercício da cidadania:

> A matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. (PCN-EM, p.251)

Em seguida dizem os PCN-EM,

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (PCN-EM, p.251)

e

> No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno. (PCN-EM, p.251)

Contudo,

> [...] a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou o instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamento conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (PCN-EM, p.252)

Ainda,

> A essas concepções da matemática no Ensino Médio se junta a idéia de que, no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade. Por fim, cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. (PCN-EM, p.252)

Ainda, segundo os PCN, o critério central que visa ao desenvolvimento das atitudes e habilidades é o da contextualização e da interdisciplinaridade, que é o potencial de se estabelecer conexões entre diferentes conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático. Um primeiro exemplo disso pode ser obtido com relação às funções:

> [...] uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As seqüências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente. (PCN-EM, p.255)

Com relação à matemática, uma organização estrangeira que analisamos foi o NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), a Sociedade Americana dos Professores de Matemática. O NCTM é uma organização que já existe há mais de 80 anos nos E.U.A e que, por sua seriedade e constantes pesquisas realizadas na área de educação matemática, vem ganhando colaboradores de outros países.

Há várias décadas o NCTM vem discutindo a reforma no ensino-aprendizagem da matemática e publicando documentos que podem conduzir os trabalhos do profissional da área. L.R. Onuchic, (2001)[2], afirma que:

> Os Standards sugeriram profundas mudanças em quase todos os aspectos do ensino e da aprendizagem de matemática. Os Principles and Standards refinam e elaboram as mensagens dos documentos originais, conservando intacta sua visão básica.

Como já foi dito, os “Principles and Standards for School Mathematics”, publicado em 2000, apresentam a última versão dos Standards, os Standards 2000. O objetivo desse documento é influenciar a prática do professor de matemática, direcionar o trabalho dos responsáveis pela organização de currículos e autores de livros didáticos, abrangendo os graus K–12, equivalentes ao nosso Ensino Fundamental e Médio. Esse documento é fruto de um exaustivo e cuidadoso trabalho feito por mais de 10 anos, com profissionais da educação matemática.

Em junho de 2000 entramos em contato com a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo e, naquela ocasião, recebemos a segunda edição de um documento, contendo as Matrizes Curriculares de referência para o SAEB (Sistema de Avaliação do Ensino Básico), segunda edição de 1999. Nas páginas 43 a 46 do referido documento, consta uma relação dos conteúdos de matemática para a 3ª série do Ensino Médio, sendo que Polinômios e Equações Polinomiais aparecem como último tópico, após os Números Complexos, fechando, assim, o programa curricular projetado para o Ensino Médio.

---

2. Palestra realizada no Encontro de Educação Matemática em Poços de Caldas, M.G. em maio de 2001

Nesses documentos citados, equações algébricas é um tópico que faz parte do currículo e é o arremate de um programa inteiro. Assim, assumimos que equações algébricas devam ser um tópico a ser trabalhado com seriedade.

III.2.2 - A ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Analisamos uma variedade de livros didáticos das décadas de 40 a 90, verificando como o tópico "Equações Algébricas ou Polinomiais" se apresenta. Em todos os livros analisados, ele aparece no final do curso.

No livro de Euclides Roxo (1946, p.177), do 3º ano Colegial, 3ª edição, o conteúdo foi dividido em três áreas: álgebra, geometria e geometria analítica. Na área de álgebra, na unidade V, está o tópico equações algébricas. Ele aborda:

1. Propriedades gerais dos polinômios;
2. Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica; aplicação à composição das equações;
3. Noções sobre transformações das equações; equações recíprocas; equações de raízes iguais.

A apresentação da teoria é bastante rica em detalhes e comentários e apresenta exemplos bem significativos. Diz, como visto na p. 45, que o estudo das equações do tipo:

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0 , \qquad (1)$$

onde os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m$ são números quaisquer, constitui o problema fundamental da álgebra.

Roxo ainda diz que, de um modo geral, a resolução das equações algébricas se caracteriza pela expressão das incógnitas em função dos coeficientes. Dessa maneira, para a equação (1), deveríamos ter:

$$X = j \ (a_o, a_1, a_{2,}, \dots, a_{m-1}, a_m)$$

Na década de 50 os livros eram editados obedecendo a um projeto de conteúdo e às Portarias que indicavam quais conteúdos se deveriam ensinar nos cursos Clássico e Científico. Trabalhamos sobre dois livros. Um, de 1954, de Manoel Jairo Bezerra e outro, de 1955, de Thales Mello Carvalho, ambos editados pela Companhia Editora Nacional, de São Paulo.

No início do livro de Bezerra consta o programa detalhado de matemática, do 3º ano dos cursos Clássico e Científico, distribuído em três unidades. Na Unidade III é feito o trabalho com as equações algébricas. Os tópicos apresentados são: Introdução à teoria das equações; polinômios; propriedades; divisibilidade por ($x + a$); problemas de composição e transformação de equações; pesquisa de raízes; equações de tipos especiais.

Com relação à resolução das equações algébricas, Bezerra (1954, p.306) diz que:

> Resolver uma equação algébrica
>
> $$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_{m-1} x + a_m = 0 \text{ ,}$$
>
> onde os coeficientes são todos reais, é determinar os valores da incógnita *x*. Ou ainda, é exprimir a incógnita em função dos coeficientes.
> Se as expressões ou funções dos coeficientes são funções algébricas dos coeficientes, isto é, se nas expressões dos valores de x intervêm apenas operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação (operação algébrica), as soluções são ditas algébricas.
> Se as expressões ou funções dos coeficientes forem transcendentes (não algébricas) a solução diz-se transcendente.

Sobre a resolução algébrica das equações diz:

> Resolver algebricamente uma equação algébrica é determinar as soluções algébricas dessa equação. As equações algébricas do 1º e do 2º grau têm soluções algébricas simples e imediatas. As equações do 3º e 4º grau têm soluções algébricas que são, todavia, complexas e laboriosas. As equações de grau superior ao 4º grau não possuem soluções algébricas, o que foi demonstrado pelo matemático norueguês Abel (séc. XIX).
> Não podemos, portanto, resolver algebricamente equações de grau superior ao quarto, a não ser em casos especiais como equações binômias, trinômias e recíprocas.

Bezerra (1954, p.307) ainda acrescenta que, para se pesquisar as raízes de uma equação numérica, exige-se o "conhecimento sistemático de uma série de propriedades das equações e, portanto, dos polinômios". Em seguida ele apresenta alguns teoremas, propriedades e regras estabelecendo relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação, passando então às aplicações.

Analisamos o livro: *Matemática para os cursos Clássico e Científico – 3º ano,* cujo autor é Thales Mello Carvalho (1955), que na página 253 afirma:

> Diz-se que uma equação com uma incógnita *z* é algébrica quando pode ser posta sob a forma
>
> $$F(z) = 0 \qquad (1)$$
>
> sendo F(*z*) uma função algébrica de *z*.
> Se, em particular, F(*z*) é um polinômio P(*z*), racional e inteiro em *z*, a equação algébrica
>
> $$P(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n = 0 \qquad (2)$$
>
> é racional e inteira.

> Se α é um número complexo (eventualmente real) tal que $P(\alpha) = 0$, diz-se que α é raiz da equação (2). Resolver, pois, a equação (2) é calcular todos os valores α do campo complexo (em particular do campo real) que anulam $P(z)$.

Carvalho apresenta o Teorema Fundamental da Álgebra como Princípio Fundamental, além de vários teoremas, relações entre os coeficientes e as raízes, multiplicidade de raízes e algumas técnicas de resolução e, em seguida, faz aplicações.

Antes dessa década não havia um currículo programado por lei. Tanto isso é verdade que Severi, citado no prefácio do livro de Thales Mello Carvalho (1955) dizia:

> Ao professor compete fazer do livro um organismo plástico e vivo; compete-lhe escolher o que se pode fazer e o que se pode deixar, o que se pode antepor ou pospor segundo as condições peculiares dos alunos. O que importa muito mais é a aptidão para pensar do que o acúmulo de conhecimentos específicos que haja conseguido fazê-los aprender.

Bezerra e Carvalho apresentam o conteúdo matemático enfatizando que estão "de acordo com os novos programas, conforme portarias nº 966, de 02/10/51 e 1045 de 14/12/51". Como podemos perceber somente a partir dessa década é que o currículo de matemática foi estabelecido por lei.

A década de 60 foi marcada pelo movimento da Matemática Moderna que promoveu o formalismo matemático fundamentado, como diz Oswaldo Sangiorgi (1964, p.125), nas estruturas algébricas, de ordem e topológicas, que permitem identificar as estruturas mentais da criança com suas atividades em qualquer disciplina e no uso formal da linguagem matemática.

Como foi dito, na p. 45, surgiu no Brasil uma tradução de textos da SMSG - School Mathematics Study Group, com conteúdos apoiados na matemática moderna.

Um outro livro analisado, dessa década, foi a nova versão do "*Curso de Matemática para o curso Clássico e Científico*" – 16ª edição, de Manoel Jairo Bezerra (1965). Neste livro ele apresenta os conteúdos de forma condensada, contendo todo o programa de matemática do 2º ciclo (correspondente ao Ensino Médio). Com relação às equações algébricas, ele as apresenta da mesma forma que apresentava em 1954.

No livro que analisamos da década de 70, "*Curso Colegial Moderno*", vol.3, os autores, Luiz Mauro Rocha e Ruy Madsen Barbosa (1971), em sua apresentação dizem que "os polinômios são introduzidos com recursos das seqüências, preparando o material para um estudo simples e ao mesmo tempo avançado das Equações Algébricas e sua resolução numérica." Neste livro, na página 332, os autores apresentam um método numérico potente, denominado Método de Newton-Raphson ou das Tangentes, que exige o conhecimento das derivadas.

No livro "*Matemática – 2º Grau*," vol.3, Paulo Boulos e Renate Watanabe (1979), embora façam um estudo detalhado das Equações Algébricas não trabalham com métodos numéricos de resolução das Equações Algébricas.

Da década de 80, analisamos o livro didático "*Aulas de Matemática 2*", (1981), de Gelson Iezzi e outros. Esses autores apresentam os tópicos Polinômios, Números Complexos e Equações Polinomiais, nessa ordem, como sendo conteúdo de ensino da 2ª série do 2º Grau. No mesmo ano, a mesma equipe de professores lançou "Tópicos de Matemática", vol. 1, 2 e 3". Nesta série, os tópicos Polinômios, Números Complexos e Equações polinomiais são tópicos do 3º ano do 2º Grau. No volume três os autores dizem que:

> A resolução de equações foi a principal preocupação dos matemáticos ligados à Álgebra Clássica. [...] A chamada Álgebra Moderna, que se iniciou com os trabalhos de Abel e Galois, muito se desenvolveu graças às pesquisas envolvendo a resolução de equações algébricas.

Após o trabalho com equações algébricas, esses autores passam a trabalhar com Rudimentos de Cálculo. Assim, vemos que, como dissemos, as Equações Algébricas fecham um programa de Ensino de 12 anos e podemos dizer que, agora, elas abrem as portas para um novo campo - O Cálculo.

Analisamos ainda o livro "*Aulas Práticas de Matemática - Segundo grau* ", vol.3, de José Carlos Teixeira, e outros (1988). Falando sobre equações algébricas eles dizem que: "Equação Polinomial é toda equação da forma $P(x)=0$ onde P(x) é um polinômio" e que " raiz de uma equação polinomial $P(x)=0$ é todo número α tal que $P(\alpha)=0$". Esses autores acrescentam, àquilo que foi comum aos outros livros, o Teorema de Bolzano.

Da década de 90, analisamos o livro "Matemática", vol.único de Manoel Paiva (1999). Ao fazer a apresentação de seu livro ele diz:

> Não sabemos, exatamente, desde quando se discutem propostas sobre o tipo de ensino de matemática mais adequado à formação do estudante. Para Platão (427-347 a.C.), o estudo da matemática deve ser essencialmente teórico, desligado das

> aplicações práticas e voltado para a contemplação. Em contraposição a essa concepção está o pensamento de Isócrates (436-338 a.C.), mais preocupado com as situações práticas, para quem a filosofia não passa de um jogo inútil desvinculado da realidade do cotidiano.
> Essas duas correntes de pensamento deram origem à (sempre atual) questão: - O ensino mais adequado à formação do indivíduo seria o mais teórico ou o mais voltado às situações do dia-a-dia? [...] Este livro tenta atingir o ponto de equilíbrio entre as duas concepções de ensino, com incursões freqüentes ao cotidiano, sem se descuidar dos aspectos teóricos e do formalismo necessário.

Nesse mesmo livro, p.415, o autor apresenta um recorte "Matemática ajuda a controlar epidemias", do jornal Folha de São Paulo, de 1º de outubro de 1994, onde se lê: "O Departamento de Informática Médica da USP usa modelos de equações para prever os casos de doença infecciosa e as estratégias de contra-ataque; assim foi possível diminuir os números da rubéola no estado."

No livro: "*Os elos da matemática*" - vol.3 de Rokusaburo Kiyukawa, Carlos Tadashi Shigekiyo e Kazuhito Yamamoto (1992), os autores fazem um trabalho comum aos outros livros e se preocupam com aplicações ao Cálculo.

Analisamos o livro: "*Matemática - Contexto & Aplicações*", vol. 3 (1999) e vol. único (2000), de Luiz Roberto Dante. O autor se preocupa em apresentar um livro didático que esteja de acordo com as diretrizes curriculares nacionais para o Ensino Médio, apresentando um manual para o professor, onde ele discute questões como a contextualização e a interdisciplinaridade.

A maioria dos autores da década de 90 mostra um trabalho onde são desenvolvidas mais técnicas operatórias do que um trabalho conceitual que, quando feito, o é praticamente desvinculado de conexões.

Entretanto, as idéias de pré-cálculo no Ensino Médio levam a considerar as Equações Algébricas ou Polinomiais importantes, devido às aplicações imediatas que exigem seu conhecimento.

III.2.3- LITERATURA NÃO DIDÁTICA

Buscamos na literatura nacional e estrangeira suporte para apoiar nossas idéias sobre a importância de um trabalho com Equações Algébricas no Ensino Médio.

Na literatura nacional encontramos autores de livros e de artigos preocupados com a matemática do Ensino Médio, como mostra a série em três volumes: "A matemática do Ensino Médio", escrita por E. L. Lima; P.C.P.Carvalho; E. Wagner e A.C.Morgado, (1998), onde os autores apresentam assuntos com que vêm trabalhando desde 1996, no programa de aperfeiçoamento para professores de matemática do Ensino Médio, realizado no IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) - R.J. , com o apoio da CAPES e da FAPERJ.

O terceiro volume dessa série introduz o tópico Equações Algébricas com a seguinte aplicação:

> Cortando-se quadrados em cada canto de uma folha de papelão quadrada, com 18 cm de lado, e dobrando-se conforme a figura, obtém-se uma caixa retangular sem tampa. Qual deve ser o lado do quadrado a ser recortado, para que o volume da caixa seja igual a 400 cm^3? (LIMA, 1998, p.198)

Ao trabalhar com esse problema recai-se na seguinte equação completa do terceiro grau: $x^3 - 18x^2 + 81x - 100 = 0$. Para resolver essa equação e encontrar a resposta para o problema proposto acima, o autor situa, na história da matemática, as equações de grau superior a dois e apresenta ferramentas para resolução de equações do tipo acima, discute e demonstra o Teorema Fundamental da álgebra e volta a discutir o problema dado no início acrescentando, na p. 221,

> Uma pergunta natural a ser feita nesse ponto é a seguinte: o que ganhamos , de fato, estendendo o estudo dos polinômios ao campo complexo? É verdade que ganhamos a satisfação de saber que todas as equações, neste campo, têm raízes. Mas se estamos apenas interessados, na maior parte dos casos, em raízes reais, de que nos servem estas raízes “artificiais”? Como dissemos antes, o principal ganho é estrutural. O fato de todas as equações de grau **n** terem o mesmo número de raízes permite, por exemplo, que relações gerais entre coeficientes e raízes de uma equação possam ser estabelecidas.

A seguir, os autores apresentam as relações entre coeficientes e raízes, apelando para a história da matemática e chamando a atenção para "o fato de não possuirmos fórmula algébrica de resolução para equações de grau superior a 4, não significa que não possamos resolver tais equações, isto é, calcular suas raízes reais e complexas" pois, na prática, equações polinomiais genéricas de grau maior ou igual a 3 são resolvidas através de métodos numéricos, onde obtemos uma seqüência de valores que se aproximam, tanto quanto se queira, da raiz que se deseja obter.

No livro "*Resolução de Equações Algébricas*" de J.P.Q.Carneiro (1998), o autor apresenta Equações Algébricas depois de um estudo com Números Complexos, apresentando algoritmos da divisão de polinômios e alguns métodos de resolução de equações algébricas, como o método de Cardano para equações do terceiro grau e acrescenta, na p. 75,

> Para qualquer grau superior a quatro, é impossível estabelecer um método geral (isto é, que sirva para qualquer equação daquele grau) conduzindo à solução por meio de equações binômias. Isto foi demonstrado na primeira metade do século XIX. Para equações de grau superior a quatro, utilizam-se métodos numéricos que conduzem a uma seqüência de valores aproximados para cada raiz.

Tanto J.P.Q Carneiro como E.L.Lima apresentam métodos numéricos para equações polinomiais como forma legítima de se trabalhar a resolução de Equações Algébricas ou Polinomiais no Ensino Médio.

O livro "As *Idéias da Álgebra*", traduzido por Hygino H. Domingues em 1995, do original "The ideas of Algebra, K-12", do NCTM, apresenta 33 artigos, organizados por A .F Coxford e A.P Schulte, relacionados com o ensino-aprendizagem da álgebra. T. Eisenberg e T. Dreyfus, no artigo 11 "Os polinômios no currículo da escola média", comentam, na página 128, que:

> Os tipos de modelos de raciocínio desenvolvidos ao se trabalhar com equações polinomiais podem ser generalizados para outras situações. [...] Os polinômios são onipotentes em matemática, e é importante que os alunos os dominem com segurança.

E mais adiante, nas páginas 133 e 134, eles acrescentam:

> Há um vínculo forte entre os polinômios e os problemas de construção geométrica da Antigüidade, e essa é mais uma razão para que os polinômios devam fazer parte do currículo da escola média. [...] Podem-se aprender muitos aspectos do pensamento matemático através de estudo dos polinômios.

Continuando ainda com o livro "As Idéias da Álgebra", A. Flores fala, no artigo 20, página 194, sobre os cálculos de raízes de polinômios usando o método da bissecção para obter as raízes de um polinômio com o uso do computador:

> Esse método utiliza importantes idéias da matemática (o teorema do valor intermediário e o conceito de intervalos encaixantes). O método da bissecção pode ser usado para achar os zeros de qualquer função contínua. É fácil de ser compreendido e lembrado. É uma maneira agradável de ensinar a fazer estimativas com fundamento. Ele serve de exemplo para uma idéia de bastante alcance: a da estimativa e do aprimoramento dessa estimativa.

Concluímos que o trabalho com Equações Algébricas ou Polinomiais é extremamente importante no Ensino Médio. Contudo, é necessário que se lhe dê mais atenção e que sempre se trabalhe evidenciando sua importância.

III.2.4 - APLICAÇÃO DE ENTREVISTAS E QUESTIONÁRIO

As entrevistas aplicadas foram do tipo semi-estruturadas considerando a possibilidade de uma maior interação entre o entrevistado e o entrevistador. Foram aplicadas a professores do Ensino Médio, professores universitários, autores de livros didáticos e pesquisadores em Educação Matemática. Foi aplicado um questionário a 120 alunos do Ensino Médio, de quatro escolas públicas e uma particular.

III.2.4.1 - ENTREVISTAS COM PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO.

Entrevistamos três professores do Ensino Médio de três diferentes escolas públicas e dois professores de uma escola particular. O objetivo das entrevistas era verificar se o tópico Equações Algébricas ou Polinomiais era trabalhado pelos professores e saber como esse trabalho era realizado em sala de aula.

As perguntas-chave feitas para esses professores foram:

- O que é Álgebra para você?
- Que concepções você tem de Álgebra?

- O que são Equações Algébricas?
- Com que propósito você ensina Equações Algébricas?
- Qual a importância de se estudar Equações Algébricas?
- Como seus alunos não irão todos para a área de exatas, por que ensinar Equações Algébricas para todos?
- Que razões você vê para se ensinar esse tópico para todos?
- Como você introduz o assunto Equações Algébricas em sua sala de aula?
- Você usa livro didático para ensinar Equações Algébricas? Como você o usa?
- Você acredita que todos os seus alunos podem aprender esse tópico?
- Seus alunos sabem por que devem estudar Equações Algébricas?
- Como você trabalha com os seus alunos? Você acredita que trabalhar com Resolução de Problemas poderia ajudar?
- Você discute com seus alunos o Teorema Fundamental da Álgebra?
- Você crê que é possível fazê-los demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra?
- É importante discutir com eles o Teorema Fundamental da Álgebra, no Ensino Médio?

A seguir, apresentamos alguns pontos das entrevistas realizadas com três professores de escolas públicas diferentes, das cidades de Cuiabá e Várzea Grande do Estado de Mato Grosso e dois professores de escola particular de Rio Claro, São Paulo. Apresentamos o que ficou mais evidente na fala dos professores sem nos preocupar em mensurar essa evidência.

✓- Com relação à pergunta: “O que é álgebra para você ?”

Escola Pública

- Um conteúdo da matemática que contém números e letras;
- Parte literária da matemática;
- Um conteúdo da matemática em que se introduz números e letras.

Escola Particular

- Um conjunto de regras e propriedades, cuja principal finalidade é a generalização das propriedades numéricas;
- Um instrumento matemático para a resolução de problemas matemáticos;
- Um dos ramos da matemática.

✓- As concepções dos professores com relação à álgebra:

<u>*Escola Pública*</u>

- É uma abstração mais profunda da matemática.
- Uma das partes fundamentais para se desenvolver o raciocínio lógico.
- Um documentário.
- Símbolos que têm significados.

<u>*Escola Particular*</u>

- Generalização das propriedades numéricas;
- Um fundamento muito importante para o aluno do Ensino Médio.

✓- Com relação ao que é uma equação algébrica:

<u>*Escola Pública*</u>

- Uma igualdade verdadeira com letras e números;
- Equações que envolvem variáveis;
- Uma equação que envolve uma parte literária e uma parte numérica;
- São equações onde aparecem alguns símbolos literais.

<u>*Escola Particular*</u>

- Equações genéricas que podem ter muitas variáveis;
- Equações que envolvem exclusivamente expressões algébricas;
- São equações genéricas onde se tem igualdade entre polinômios;
- Todas as equações que são possíveis de resolver algebricamente.

✓- Sobre o propósito do ensino de equações algébricas:

<u>*Escola Pública*</u>

- Desenvolver o raciocínio lógico do aluno;
- Mostrar os problemas matemáticos do dia-a-dia do aluno;
- Resolver problemas matemáticos;
- Transformar os problemas da linguagem comum para a linguagem matemática.

<u>*Escola Particular*</u>

- Mostrar equações a partir de enunciados;
- Vestibular.

✓- Sobre a importância do estudo de equações algébricas:

Escola Pública

- Acham que seria importante.

Escola Particular

- Generalizar as propriedades estudadas nas equações de 1º e 2º graus;
- Uma maneira de treinar o raciocínio;
- Um jogo com algumas regras onde quem resolve a equação ganha o jogo.

✓- A questão do ensino de equações algébricas para todos os alunos do Ensino Médio:

Escola Pública

- Desenvolver o raciocínio lógico;
- A presença da matemática no dia-a-dia das pessoas;
- Ensino Médio é básico;
- Conhecer um pouco de cada coisa;
- Se exige no vestibular;
- Consta no currículo.

Escola Particular

- Montagens das equações;
- Vestibular;
- Nenhuma razão além do vestibular.

✓- Sobre a introdução do conteúdo Equações Algébricas em sala de aula:

Escola Pública

- Nunca ensinou;
- Através de problemas. (exercícios)

Escola Particular

- Comparando com coisas que os alunos já conhecem, como equação do 1º e 2º graus;
- Através de problemas envolvendo equações de grau superior a 2;
- Desenvolver alguma teoria, demonstrar algum tipo de fórmula, alguma coisa e começar a trabalhar em cima de exercícios.

✓- Sobre o livro didático e seu uso:

Escola Pública

- Só no preparo das aulas;

- Para ditar o conteúdo para o aluno;
- Para verificar qual a melhor maneira de se introduzir o assunto;
- Depende do material que se está usando. (apostilas, livros, etc...)

Escola Particular

- O aluno possui um caderno com aulas numeradas;
- Apostilas;
- Aulas numeradas.

✓- Quanto ao aluno saber o *porquê* estudar equações algébricas:

Escola Pública

- Acredita que não;
- Acredita que alguns sim outros não;
- Tenta passar para os alunos.

Escola Particular

- Passar isso para os alunos, apesar de a preocupação maior ser o vestibular;
- Provavelmente só pelo vestibular.

✓- Sobre o trabalho na sala de aula com os alunos:

Escola Pública

- Bem tradicional;
- Aula expositiva;
- Dita ou passa o conteúdo no quadro;
- Introduz o assunto através de exercícios e questionamentos com os alunos.

Escola Particular

- Coloca uma equação do 3º grau, uma do 4º grau e depois generaliza;
- Apresenta a teoria de maneira mais formal, partindo de um exemplo;
- Apresenta alguns problemas que não são tão cotidianos.

✓- Sobre o trabalho com Resolução de Problemas:

Escola Pública

- O desenvolvimento do raciocínio lógico.

Escola Particular

- Acredita que poderia ajudar no ensino-aprendizagem;
- Uma tendência que precisa ser testada

✓- Sobre a discussão do Teorema Fundamental da Álgebra:

Escola Pública.

- Sem resposta. (Entre os professores entrevistados, ninguém faz essa discussão)

Escola Particular

- Discute sem profundidade.

✓- Sobre a demonstração do teorema Fundamental da álgebra com os alunos:

Escola Pública

- Não discutem.

Escola Particular

- Comentam.

✓- Sobre a importância de se discutir o Teorema Fundamental da Álgebra:

Escola Pública

- Depende de como se vê;
- Muito complexo;
- Acredita ser importante.

Escola Particular

- Seria importante;
- Importante pois vai estruturar a resolução das Equações Algébricas ou Polinomiais.

III.2.4.2 - ENTREVISTAS COM PROFESSORES UNIVERSITÁRIOS

Com os professores universitários nosso objetivo era o de verificar se consideravam importante ou não, para as disciplinas que estavam lecionando ou que tinham lecionado, o conhecimento em equações algébricas trazidos pelos alunos. As perguntas-chave que direcionaram as entrevistas foram:

- O que é álgebra para você? E álgebra elementar?
- Qual a relação entre a álgebra universitária e a álgebra no Ensino Fundamental e Médio?
- Que concepções você tem de álgebra?
- O que são equações algébricas?
- Você usa equações algébricas na disciplina que leciona? Dê exemplos.

- É importante para o ensino-aprendizagem, na sua disciplina, o aluno conhecer equações algébricas, da forma como é proposto seu ensino no currículo do Ensino Médio? Por quê?
- Como você trabalha com seus alunos? Você acredita que trabalhar com resolução de problemas poderia ajudar?
- Onde se aplicam as equações algébricas? Dê exemplos.

Na análise das respostas às perguntas feitas, alguns pontos chamaram a atenção pela maneira como foram colocadas pelos professores.

✓- Com relação à concepção de álgebra para o professor:

- Um ramo da matemática;
- Sabe o que é um problema algébrico, mas não sabe dizer o que é;
- Nunca parou para pensar;
- Um conjunto de afirmações pelas quais se pode produzir significados com relação a números , igualdades e operações aritméticas;
- É quando se podem estabelecer operações com determinados objetos;
- É a parte da matemática que tem por objetivo o estudo das estruturas algébricas.

✓- Com relação ao que vem a ser a álgebra no Ensino Médio:

- No Ensino Médio e Fundamental, o que se concebe como álgebra é uma generalização da aritmética;
- A álgebra elementar é aquela álgebra operacional.

✓- Quanto à relação entre a álgebra universitária e a álgebra no Ensino Médio:

- Falta essa visão nos cursos de formação;
- O professor não percebe que o que ele estudou na universidade em Álgebra Linear está nos casos particulares de transformações que ele vai ensinar aos alunos do Ensino Médio;
- A relação que existe entre a álgebra universitária e as demais do ensino básico é que ela é mais aprofundada, nada mais do que uma continuação daquilo que eles vêem no ensino fundamental;
- É uma ferramenta que os alunos trazem;
- Não sabem se, no Ensino Médio, há um outro enfoque. Nas disciplinas com que trabalha e no campo de pesquisa, não fazem distinção, acham que é a mesma álgebra.

✓- Quanto às concepções de álgebra:

- Fundamentação teórica;
- Uma ferramenta;
- Nunca parou para pensar.
- Como uma linguagem da matemática que normatiza, generaliza de forma rigorosa e universal os fatos da matemática.

✓- Quanto ao que são as Equações Algébricas:

- Não costuma definir, apenas dá o conteúdo;
- Usa sem parar para pensar no que significam;
- Quando se tem uma expressão algébrica em que o que se quer é encontrar uma raiz;
- Uma equação polinomial;
- Um exemplo de função;
- Uma função polinomial igualada a zero;
- São equações polinomiais da forma $P(x) = 0$, de grau n Î N^*.

✓- Com relação ao uso das equações algébricas na disciplina que estavam lecionando:

- Não usa;
- Usa como ferramenta.

✓- Quanto à importância das Equações Algébricas no curso universitário:

- Considera importante.
- São necessárias na Álgebra Linear.
- Aparecem no Cálculo;
- Não se recorda de tê-las usado nas disciplinas que lecionou;
- Já trabalhou com Equações Algébricas em cursos para alunos do primeiro ano de matemática.

✓- Com relação ao trabalho com os alunos em sala de aula:

A maioria dos professores afirmou trabalhar de forma expositiva, com exceção de um que trabalha Álgebra Linear de forma mais cooperativa e faz avaliações baseando-se em uma forma de contrato didático.

✓- Quanto às aplicações das equações algébricas:

- Existem modelos matemáticos contendo Equações Algébricas nos cursos de Engenharia Civil;
- Várias aplicações na Economia;
- Muitos fenômenos da economia são expressos por uma função polinomial

III.2.4.3 – ENTREVISTAS COM AUTORES DE LIVROS DIDÁTICOS

Entrevistamos dois autores de livros didáticos para o Ensino Médio, ambos com larga experiência em sala de aula. Nosso objetivo era o de verificar a maneira como o conteúdo Equações Algébricas era visto por esses autores. Para direcionar nossa entrevista usamos as mesmas perguntas-chave feitas aos professores do Ensino Médio. Os pontos que despertaram nossa atenção foram:

✓- Sobre a visão de álgebra:

- Quando se começa a trabalhar com as generalizações, está-se trabalhando com álgebra;
- Quando se estabelecem operações com determinados objetos e se descobrem suas propriedades;
- Uma generalização da aritmética.

✓- Sobre o que são equações algébricas:

- Aparecem em seus livros porque eles as consideram importantes.

✓- Quanto à importância das Equações Algébricas:

- Como exemplo de funções polinomiais;
- É importante que sejam trabalhadas desde o Ensino Fundamental até na universidade;
- Uma parte historicamente essencial da matemática, desde os babilônios.

✓- Sobre o trabalho das equações algébricas em sala de aula:

- Ao trabalhar com as idéias básicas da matemática como, por exemplo, a idéia de função, dar exemplos de função afim, quadrática e polinomial que levam às equações algébricas;
- Ao trabalhar a idéia de função, trabalhar a idéia de temperatura, por exemplo, promovendo a interdisciplinaridade.

✓- Quanto à quantidade de aulas de matemática dadas por semana, nas escolas públicas:

- É tradição na rede estadual de São Paulo, quatro aulas semanais de quarenta e cinco minutos cada;
- Não é bem o número de aulas o problema, mas a maneira de se dar esse conteúdo de trabalho .... Com tudo isso é que não dá!

✓- Quanto à aplicação dos PCN nas escolas públicas:

- Uma nova visão de matemática que começa a aparecer nos livros de matemática;
- Os livros estão sendo avaliados e sendo feitas sugestões para os autores.

✓- Sobre as competências e habilidades a serem desenvolvidas:

- São três as competências básicas colocadas: representação e comunicação, investigação e compreensão e a percepção sócio-histórica e cultural da matemática;
- Dar aula, hoje, é estimular, orientar a criança, não dar pronto e acabado. Não é só copiar e repetir;
- Essas competências são essenciais, desde que alguém fale para o professor como fazer. Sem exemplos não tem como ele fazer.

✓- Quanto à questão da interdisciplinaridade nas escolas públicas:

- Isso, em tese, é maravilhoso, mas o professor tem dificuldades;
- O professor, muitas vezes, já tem dificuldade em conteúdo matemático, imagine nas outras disciplinas que não são da área dele!

✓- Sobre a aplicação das equações algébricas:

- No Ensino Médio, agora, é para se dar a idéia de que conteúdo é aplicado, é útil. É preciso dar alguns exemplos.

✓- Sobre o ensino via Resolução de Problemas:

- É uma tendência;
- É uma linha que já está sendo pensada há algum tempo como, por exemplo, a coleção "Terraché";
- Nenhum livro didático está ainda nessa linha, mas é uma tendência. Provavelmente vamos entrar nessa linha.

✓- Sobre um livro com Resolução de problemas:

- Precisaria testar, ver como é que vai funcionar;
- Precisaria fazer uma seleção brilhante, para perceber o problema desencadeador e, a partir dele, desenvolver o conteúdo;
- Não é uma coisa tão simples.

✓- Sobre a avaliação baseada na Resolução de Problemas:

- A avaliação tem de ser coerente com a aula dada; não se pode dar uma aula baseada em Resolução de Problemas e depois avaliar de forma tradicional.

III.2.4.4 - ENTREVISTAS COM PESQUISADORES EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Entrevistamos dois pesquisadores em Educação Matemática com o objetivo de verificar qual a importância, para o ensino-aprendizagem da matemática, das pesquisas realizadas em Educação Matemática e, segundo a visão deles, a importância das equações algébricas no ensino-aprendizagem da Matemática no Ensino Médio.

As perguntas-chave que direcionaram as entrevistas foram as mesmas feitas aos professores do Ensino Médio. Apresentaremos a seguir pontos da transcrição de suas falas que julgamos mais importantes para atingir o objetivo proposto.

✓- Quanto à visão de Educação Matemática no Brasil:

- *Educação Matemática, para mim, é um campo profissional muito amplo e que tem a peculiaridade de ser diferente de todas as áreas de Educação específica que você tem. Outros chamariam de pesquisa, mesmo que digam básica, aplicada, você tem um outro lado, que é o lado da prática. Educação Matemática é uma área de investigação, uma área de prática profissional.*

Se você pensar na medicina, num sentido amplo, a medicina inclui também estudos. As pesquisas médicas têm um pouco dessa característica. Eu acho interessante uma expressão: "Educação Matemática é uma arte cientifica", em que tenho pensado a respeito.

Agora, se você perguntar sobre o estado, o estado é muito díspar. Porque você tem, por um lado, gente fazendo pesquisa muito boa, forte, original, comparada, até de âmbito nacional. E também você tem, como em outros países, pesquisa rotineira, que não acrescenta nada, só títulos para as pessoas. Você tem setores no sistema escolar que estão bastante *avançados em vários sentidos. Embora uns achem que avançado é o que faz ensinar bem, outros acham que avançado é o que está mais próximo da realidade das pessoas. Mas, enfim, em todos os sentidos, você tem setores do sistema escolar, muito pequenos, mas que estão muito avançados; e você tem setores que estão completamente abandonados e setores que estão completamente caóticos. Então, o quadro é de uma heterogeneidade completa, em todos os sentidos que você possa imaginar.*

Eu acho que a formação de professores é um problema grande que a gente tem que enfrentar, porque ele está mais ou menos no centro de qualquer mudança que se queira realizar no sistema. Então, eu acho, são preocupações centrais. O trabalho de pesquisa, hoje em dia, se voltou para algumas áreas que nunca foram tocadas. Então, é isso, acho que o cenário é muito heterogêneo.

Você compara, por exemplo, com a Inglaterra, que é um país que eu conheço bem. Lá eles têm, evidentemente, pesquisas que são muito ordinárias, pesquisas que são ordineiras e programas de setores de centros escolares. Mas, o grau de homogeneidade lá é muito, comparavelmente, maior. Homogeneidade, que eu digo, no bom sentido, é que as coisas estão mais próximas umas das outras. Então, eu diria que a situação no Brasil é essa, heterogênea e problemática.

✓- Quanto à pesquisa em Educação Matemática ajudar o trabalho em sala de aula:

Eu acho que tem duas coisas que o professor, na sala de aula, tem como responsabilidades centrais. Uma é ler , ser capaz de ler o aluno, o que está acontecendo; e a outra é, a partir disso, se existir alguma coisa, tomar decisões produtivas, independente da abordagem que eu vou adotar, independente do que vou trabalhar, que conteúdos ... Eu acho que a pesquisa pode informar essas duas responsabilidades do professor.

Agora, o que a pesquisa não pode fazer é dizer o que é. Isso ela não pode. Então, não adianta nada. Eu acho que um engano muito comum entre as pessoas, é que elas vão para a sala de aula e pegam lá uma atividade e experimentam, como se aquilo fosse dizer o que é usar aquela atividade, se a atividade é boa ou se é ruim.

A quantidade de variáveis é tão grande que, no máximo, aquilo pode dizer " Oh! Fulano fez e funcionou." Mas, o mais importante é como o fulano escolheu fazer isso, como o fulano caminhou, como o fulano se orientou e o que quer dizer "funcionou". Eu acho que esse é um tipo de coisa que o professor pode aproveitar para crescer.

Então, de um modo geral o que eu realmente chamaria de pesquisa, são olhares. As maneiras de olhar para o processo que está sendo exposto. Educação Matemática é referência *para as tomadas de decisões. Mas, não pode é dizer assim: "Ah, o desenvolvimento da criança ... " Porque isso eu acho que não faz sentido, porque é um processo complexo demais, e tem muitas varáveis, é muito sensível. Às vezes, uma coisa mínima pode afetar o desenvolvimento do processo.*

✓- Quando se deve introduzir os conceitos algébricos?

Na primeira série do primário.

✓- Sobre Educar pela Matemática:

A melhor analogia para isso é a seguinte: imagine que as aulas de Educação Física, na escola, tivessem por objetivo preparar para competir em olimpíadas e campeonatos. Preparar para o atletismo, natação, futebol ou vôlei, como se aquilo fosse uma preparação para futuros atletas profissionais, esportistas profissionais.

Então, se fosse assim, você não trabalharia, por exemplo, a idéia de que a atividade esportiva é boa pra saúde física e mental. Você destacaria títulos, energia , apreensão. O porquê manter seu corpo em forma, ter condição de passar o dia melhor, ter mais agilidade pra fazer as coisas, não seria destacado. E se fosse preparar para as Olimpíadas você não ia trabalhar, por exemplo, o conceito de sociabilidade, seguir regras, que é coisa importante, seguir regras e definir regras, positivamente, na educação física e na escola. Você estimularia a competitividade, agressividade e o esporte no limite. Quer dizer, o esporte como um centro de treinamento mesmo .

No caso da Educação Matemática, você pode olhar de dois jeitos também. Você pode pensar na Educação Matemática, na qual a atividade matemática é um meio para educar com relação às outras coisas, ao invés de fazer com que o cara se torne um matemático. Porque, se você quer que o cara se torne um matemático, é evidente que você vai carregar na discussão teórica e na formalização. Embora, não seja só isso. Formar matemáticos não é só isso, nem de longe. Esse é um aspecto que você não pode deixar de lado. O cara tem que melhorar do mesmo jeito que o cara que faz corrida de 100 metros, treina só a partida, várias vezes. Porque o pessoal fala que, na hora do tiro é que praticamente se define qualquer corrida apertada.

No caso da Educação Matemática, se fôssemos formar matemáticos, então iríamos praticar a partida também. Por exemplo, a habilidade com cálculos de todos os tipos, conhecer muitas técnicas e manipular dados. Se você olha por outro modo, como uma espécie *de educação para alguma saúde, então a matemática é um meio, do mesmo jeito que o esporte é um meio.*

Eu posso fazer uma educação para a saúde, que fala da atividade física, sem ser no contexto de um esporte ou de esportes, que é o que acontece. Agora, pode ser que as coisas para as quais eu estou indicando com a minha educação matemática, a educação matemática que eu pratico, pode ser que alguém diga: "Ah! Mas, isso aí você poderia fazer numa aula de geografia, numa aula sei lá o quê, de física." Pode ser que seja. Mas, acontece que eu só sei fazer com a matemática, com Educação matemática, é minha profissão. Eu me formei assim e sei lá por quê, não adianta nem querer saber por quê, porque eu já me formei.

Quando eu falo educação ***pela*** *matemática, é isso. A Matemática, a Educação Matemática é um meio para educar para muitas coisas, entre elas instrumentalizar o cara para usar essas ferramentas, esses objetivos, onde isso torne ele uma pessoa mais capaz de ação. Isso é uma palavra em inglês que a gente nunca consegue traduzir e que é o tal do empowerment, quer dizer que você dá mais poder para o cara. Mais poder de quê ? Poder de ação.*

Ensinar o cara a ser uma pessoa com mais poder de ação no mundo, quer dizer, com mais poder de decisão, mais poder de reflexão, entender por exemplo. Eu dei um curso nesse final de semana, que achei bem interessante, porque é um curso de matemática financeira e, na cabeça das pessoas, matemática financeira é só ficar calculando, só calcular os juros. E aí a gente começou a discutir, " mas por que existe juros? Por que os juros do cheque especial são mais altos do que o de um empréstimo pessoal, se é um empréstimo feito num mesmo banco? E o que é que isso tem a ver com o sistema produtivo?".

Essa discussão, que a gente usou, não chega a ser um protesto, porque tem elementos matemáticos que a gente usa para esclarecer essa situação. Mas a gente não pára na técnica matemática, que a gente usa. As contas, elas permitem que eu olhe e veja mais do que eu via antes. Se uma educação não permite que a pessoa veja mais do que ela via antes, essa educação não funcionou. Ela só permite o cara fazer conta de qualquer tipo que seja.

Por exemplo, Paulo Freire fala : (lê. *) Eu pego isso aqui, (o professor então pegou um material que estava sobre a mesa), eu leio: "O presente ensaio lida com a questão ...", eu leio isso aqui, mas eu não vejo nada* mais *do que eu via antes, então eu não vi nada, eu fiz um barulho com a boca, e é a mesma coisa com a Educação Matemática.*

Eu acho que ela tem que servir, para permitir que você veja mais. Por isso que eu digo "pela" matemática .... e um conjunto de coisas através das quais, e trabalhando com as *quais e outras coisas, você vai avançando e caminhando no mundo no qual se vive, é nesse sentido que eu falo.*

A outra seria a Educação "para" a matemática, a Educação Olímpica. Educação “pela” matemática é educação para a saúde. Educação “para” a matemática é a educação olímpica, aquela em que você quer formar os atletas, os matemáticos olímpicos. Olímpicos mesmos, essa molecada que vai para as olimpíadas e depois vira matemáticos, físicos, engenheiros, esses engenheiros mais matemáticos.

✓- Sobre o uso das Equações Algébricas na vida prática:

Na vida, vida ordinária, cotidiana, vida da rua que eu chamo, essa, duvido. Agora, na vida da escola, pra mim o lugar dos físicos, químicos, engenheiros, isso aí, pra mim é escola. Dizer que um físico é um cara da rua, não adianta dizer porque não é. Você pode, dentro da matemática, dizer que teoria dos números é importante. Isso é utópico.

Você pode talvez usar alguma coisa em cálculo, naquele método de calcular raiz ou alguma coisa de cálculo numérico. Em álgebra, fala-se da Teoria de Galois. Mas, a Teoria de Galois também é praticamente teoria dos números. Tem a teoria das Equações Algébricas, até uma boa parte, depois vem uma coisa mais geral. Então não acho que é um tema bem mais próprio da matemática. Posso até estar enganado, não sei. Alguma coisa de métodos numéricos, de modelagem, isso aparece, talvez. Não conheço. Mas na minha experiência que eu conheço .... Na rua certamente ...... a rua não é lugar pra álgebra. Álgebra não pertence à rua, de jeito nenhum.

Este é um problema, porque eu diria que o primeiro tópico, dentro do currículo habitual, que não pertence à rua, mesmo, por mais que as pessoas queiram dizer: “não... mas olha ... assim .... é .... distributiva.... quando precisar usar isso...”, é forçar a barra. Ninguém faz isso. Ninguém pensa com a distributiva. Pensa em dinheiro, essas coisas que se faz com dinheiro e aí, quando chega nessa parte de cálculo algébrico, é uma coisa que não pertence à rua. Então, você só vê dentro da escola.

Então, eu acho evidente que uma coisa que não é familiar, as pessoas propõem significados que não são familiares, aí é evidente que .... Por isso que, quanto antes na vida da criança começar a aparecer, mais vai ser familiar. É como certos hábitos que a gente tem, lingüísticos por exemplo, começam muito cedo e do jeito que vêm, ficam. Difícil é mudar agora. Isso tanto é bom quanto é ruim. É bom porque você mantém ele e, ao mesmo tempo, é ruim, no sentido de que os hábitos que você pegar e quiser mudar depois .... Não *quer dizer que são bons ou ruins, mas que, por algum motivo, você quer mudar, é difícil, às vezes são resistentes.*

É uma espécie de oferecer um ambiente no qual coisas algébricas são tão comuns quanto caixa de papelão, números, palavras, desenhos. E ai, quando a criança for se deparando com a necessidade, por um motivo ou por outro, de fazer as contas algébricas, vai estar falando de alguma coisa com a qual ela convive. Vai tudo junto . É isso.

✓- Sobre o ensino-aprendizagem-avaliação, como constam nos PCN:

É, assusta. Tudo que é novo assusta, se tem medo. Isso não é tão novo assim. Mas, é para prática educativa. Na nossa discussão de educadores matemáticos, no mestrado, tudo isso não é novo, é bem antigo. Mas lá, na prática educativa, isso é novo. Porque eles não fazem dessa forma, dão uma prova, fazem um teste, uma prova, prova.

Nas minhas palestras, eu coloco para eles que a questão da avaliação, hoje, é muito interessante e até polêmica. Avaliação hoje não é mais no sentido classificatório, de passar ou não passar, aprovar ou reprovar. Avaliação tem que ver se o processo ensino-aprendizagem vai indo bem ou mal. Se os meus objetivos estão sendo coerentes com aquilo que estou dando ou não, se o conteúdo que eu estou trabalhando é viável ou não, se o método, a maneira que eu estou trabalhando em sala de aula está atingindo os alunos ou não, se o material, os livros didáticos, que eu estou usando, são adequados ou não. Quer dizer, a avaliação tem que dar esses parâmetros para o professor .

Agora, é um diagnóstico. Então, tem que dar essa dimensão para o professor, para ver em que ele pode melhorar no processo ensino-aprendizagem. Quer dizer, a parte dele, a parte do ensino e a parte da criança, que é de aprendizagem. Então, a avaliação deve ser vista assim, hoje.

Para ser vista assim, não pode usar um único instrumento de avaliação. A observação do dia-a-dia é um excelente instrumento de avaliação. Sentar numa equipe que está resolvendo um problema é um excelente método de avaliação, porque você vê quem é que está fazendo, quem está só olhando, quem está copiando, quem está dando as idéias originais, quem não está. Então é outro tipo de avaliação.

Fazer uma prova dissertativa, pedir para ele escrever tudo sobre triângulos, escrever tudo sobre círculos, então ver a imaginação dele, como está a criação .... tudo isso faz parte da avaliação . Agora, quando a gente fala isso para o professor ele fala: "Ah! Não dá tempo, já não dá tempo nem de eu dar minhas aulas, ... tenho 4 aulas ... 3 aulas " Então, há uma reação, e procuramos quebrar os pontos de resistência. Sempre há resistência.

✓- Com relação aos PCN e à Educação Matemática:

É um projeto nacional onde se vê a ação das pessoas que colaboraram desde os parâmetros de 1ª a 4ª , de 5ª a 8ª e Ensino Médio. Pessoas brasileiras de grande gabarito, dando opiniões sobre os parâmetros. Até, às vezes, opiniões divergentes, muita gente em determinadas áreas não concordaram. Tem também o pessoal de História, por exemplo,em que havia uma dificuldade muito grande. Há uma linha da História que a PUC de São Paulo segue, que é diferente da linha de História que a USP de São Paulo segue, e, na hora dos parâmetros, um defendia uma linha outro defendia outra, então ficou difícil. No caso da Matemática, isso não ocorreu, felizmente. Por quê? Porque os educadores matemáticos, na minha ótica, estão mais organizados. A Matemática começou a se organizar mais, em termos de Educação Matemática do que as outras áreas, há mais tempo. Nós estamos caminhando com o mestrado, com os congressos, com os encontros de Educação Matemática.

Os Educadores Matemáticos começaram, digamos assim, embora opiniões divergentes aqui, ali, mas tem uma mesma linha de renovação do ensino da Matemática. Isso ajudou na hora dos Parâmetros porque, veja, o profissional lá da Federal de Pernambuco, um profissional de Brasília, o profissional daqui de Rio Claro e assim por diante, são profissionais que têm visões diferentes na Educação Matemática, mas estão caminhando na mesma direção. Diverge aqui, ali, mas caminham na mesma direção. Então, no caso da Matemática foi mais fácil, os Parâmetros Curriculares de Matemática, principalmente do Ensino Fundamental e também do Ensino Médio, eles têm um consenso dos Educadores Matemáticos.

Dificilmente você pega um educador matemático que vai criticar, assim, frontalmente, os Parâmetros Curriculares de Matemática. Por quê? Porque aquilo que está nos parâmetros reflete o que os educadores estão falando, estão fazendo, propondo em congresso, nos artigos que escrevem. Então, não há muito que divergir frontalmente.

✓- Quanto à escola preparar para o vestibular:

É verdade isso, porque lá é... dicas, regras, macetes, fórmulas decoradas. Alguns dos vestibulares já estão dando mostras que isso está no fim. Por exemplo, o da UNICAMP. É um vestibular que, no caso da Matemática, é mais inteligente. Quando o aluno precisa de uma fórmula, a fórmula já vem na própria prova, então ele não precisa decorar fórmulas, a questão tem que ser mais de inteligência, raciocínio, ter relação de idéias, de aplicação de idéias. Por quê? Porque a fórmula, em si, está ali na prova, não adianta ele ir decorar fórmula. E com isso ele quebra um pouquinho os tais cursinhos. Porque um cursinho é ....., *sei lá, um instrumento para dar dicas para o aluno decorar mais fácil, lembrar mais fácil. E, como agora não vai ser mais necessário, os cursinhos estão fadados ou a modificar sua estrutura ou a fechar as portas. Inclusive as próprias apostilas de cursinhos estão em baixa, hoje. O aluno que estudar pelas apostilas de Anglo, de Objetivo, de Etapa, essas coisas todas ai, não faz o exame do ENEM, por exemplo. Um exame interdisciplinar, de interpretação de texto, de interpretação de gráfico, as apostilas não têm, lá é mecanização.*

✓- Quanto ao vestibular e os PCN:

É formar o jovem. Formar tecnicamente o jovem para ele se articular nesse momento que ele está vivendo. Não é somente passar de ano. Por isso que o objetivo do Ensino Médio hoje é outro. Vai ser difícil, na prática, a gente colocar em vigor o que está na letra da lei. Mas, o objetivo é outro. Como eu disse para você, há uma pressão social dos pais que querem que o filho passe no vestibular. Então, esse trabalho vai muito da escola, de estar conversando com os pais. Escola-família-sociedade é uma coisa muito importante hoje. Não adianta ele passar no vestibular, se ele não tem informação adequada, pensamento flexível para depois continuar. Passou, agora, é como se fosse começar do zero. Por quê? Porque ele só se preparou para passar mecanicamente, para passar naquela porteira, ali, naquele filtro. Bom, ele não se preparou para o futuro, não se preparou para pensar e articular as idéias. Os PCN vão nessa direção, completamente diferente do que está sendo feito. Mas, com muita resistência. Nas escolas, eles estão mantendo ainda, digamos, aquilo que os pais querem, que siga tal apostila e que tal ensino não pode por causa do vestibular. Mas, já estão chamando pessoas para dar palestras, fazendo leituras de materiais para complementar essa formação.

✓- Com relação à visão do professor de Matemática sobre equações algébricas:

Embora, muita gente diga: Bom é importante ensinar funções, mas eu não vou entrar em função polinomial, por exemplo, de 3º e 4º graus em diante. Só de 2º . Daí fica um pouco capenga. Capenga por quê? Fica capenga porque, se você perguntar, até às vezes eu pergunto para os professores: " Você acha que a função quadrática é caso particular do quê? De que função?. " Às vezes, têm dificuldade de falar que é um caso particular de uma função polinomial geral de grau n. É, eu brinco muito assim, eu falo assim: " Você vai ensinar produtos notáveis lá na sétima série, ensinar $(a + b)^2$*, o que tem a ver isso, por exemplo, com o binômio de Newton? Ah, professor, não tem nada a ver, binômio é aquele caso complicado, lá de Análise Combinatória do Ensino Médio." O binômio de Newton é* $(a + b)^n$*. Quando você põe esse n igual a 2, se estuda na 6ª* *série. Essa visão que falta para o professor, falta aqui no curso de formação de professores. Embora alguma disciplina chame atenção para isso, o aluno não tem essa visão. Ele estuda, por exemplo, álgebra linear, ele se mata no curso de álgebra, vai dar aula no Ensino Médio e não percebe que o que ele estudou de álgebra linear aqui, está lá: as transformações que ele vai ensinar. Matrizes, determinantes são casos particulares do que ele estudou aqui, mas ele não percebe isso. Acha que é outro mundo, outro nível, não atingido. No caso das equações algébricas também.*

✓- Sobre a Resolução de problemas:

- *Há quem diga, e eu concordo, que ensinar matemática é ensinar a resolver problemas. Com base em Polya, muitos outros Educadores Matemáticos trabalharam com resolução de problemas. Muito bem, se você tem como tema central, no ensino da matemática, a resolução de problemas, a sua avaliação não vai estar desvinculada do contexto e da situação. Você não pode dar de 1ª a 4ª uma continha isolada do contexto social. Você tem que exigir aquilo, dentro de um certo contexto. Porque hoje, na nossa vida, a gente só resolve problemas, desde a hora que levanta, até a hora que vai dormir.*

Se a matemática na sala de aula conseguir ajudar nisso, deu um grande passo. Olhar o problema, ler, interpretar e ver quantas variáveis estão envolvidas no problema. Os dados que eu posso usar, os dados que eu não posso usar e a pergunta problema. No dia-a-dia da gente é assim. Estamos trabalhando na direção da resolução de problemas e a avaliação vem ao encontro disso. Você não pode dar uma aula baseada na resolução de problemas e depois dar uma avaliação tradicional. Avaliando, a resolução de problemas é, nesse sentido, ver se lendo corretamente, interpretando corretamente, buscando corretamente, perguntando corretamente, se está efetuando o plano cartesiano, se está verificando, se está fazendo extensões daquilo ou não. Isso é uma avaliação da resolução de problemas.

✓- Sobre a importância de se estudar Equações Algébricas:

- *Eu sempre acho o seguinte, não tem nenhum conteúdo que seja indispensável e não tem nenhum conteúdo que seja inútil, em absoluto. Depende de qual o objetivo que o professor pretende alcançar. Eu acho que ... eu consigo conceber que existam boas razões para você trabalhar com equações algébricas lá no Ensino Médio. Mas também consigo imaginar alguém que diga não, prefiro outras coisas, que eu vou atingir melhor meu objetivo, trabalhar mais geometria analítica, por exemplo. Trabalhar geometria no espaço, alguma coisa que* *normalmente não é trabalhada, trabalhar cônicas sem coordenadas. Eu não acho que exista nenhuma razão objetiva. A única razão que alguém pode falar é : "Bom, cai no vestibular", como você tinha mencionado. Embora, se cair no vestibular, cai numa quantidade mínima, E aí a pessoa, mesmo nesse sentido, ela vai avaliar se vale a pena o esforço de tempo gasto . Tempo usado, não é gasto nesse sentido de tempo usado. Agora eu não consigo ver nenhuma razão assim: "Não, tem que ter."*

III.2.4.5 - APLICAÇÃO DE QUESTIONÁRIO

Aplicamos um questionário a 120 alunos do Ensino Médio de quatro escolas públicas e uma escola particular. Nosso objetivo ao entrevistá-los era verificar se eles haviam estudado equações algébricas, como o haviam feito e qual a visão que tinham com relação à importância desse tópico. As perguntas formuladas para os alunos, tanto das escolas particulares como das escolas públicas, foram:

- O que é álgebra para você?
- Você estuda ou estudou equações algébricas?
- É importante para você ter estudado equações algébricas? Por quê ?
- Você estuda ou estudou equações algébricas por meio de livros didáticos, apostilas, etc..?
- Como você trabalha ou trabalhou equações algébricas em sala de aula?
- Você pretende fazer um curso universitário?

Ao analisar as respostas, dadas pelos alunos, constatamos que esse conteúdo quando "ensinado" o é apenas para cumprir o programa. As respostas que nos chamaram a atenção, foram:

✓- Quanto ao que é álgebra:

<u>*Escola Pública*</u>

- Afirmaram não saber;
- Nunca ouviu falar;
- Não se lembravam ;
- Não responderam;
- Muitos afirmaram ser uma parte da matemática que contém letras.

Escola Particular

- Números e mais números;
- Uma parte da matemática;
- Uma mistura de números e letras;
- Algo que nunca será compreendido;
- Só será aproveitada por quem cursar exatas.

✓- Quanto ao ter estudado equações algébricas:

Escola Pública

- Não se lembravam;
- Não estudaram;
- Muitos alunos afirmaram que haviam estudado, mas não souberam dizer por quê.

Escola Particular

- Todos os alunos afirmaram que sim.

✓- Quanto à importância de ter estudado equações algébricas:

Escola Pública

- Não viam nenhuma importância;
- Achavam que sim ou não tinham certeza;
- Não sabiam se era importante;
- Os restantes afirmaram ser importante.

Escola Particular.

- Importante para qualquer profissão;
- Vestibular;
- Raciocínio lógico;
- Importante na Resolução de Problemas;
- Não sei;
- Não é importante porque não interfere e não muda em nada o dia-a-dia das pessoas;
- Sim, utilizarei no futuro;
- Não, só utilizarei para o vestibular.

✓- Quanto a ter estudado por meio de livros, apostilas ou outro material didático:

Escola Pública

- Vários estudaram através de livros;

- Vários estudaram através de algum tipo de apostila;
- Os restantes estudaram através do que era escrito no quadro de giz.

Escola particular

- Os alunos estudaram através de apostilas da própria escola.

✓- Quanto ao trabalho de sala de aula:

Escola Pública.

- Aula expositiva e sem um trabalho cooperativo sistemático;(a maioria)
- Alguns em trabalho em grupo.

Escola Particular.

- Aula expositiva;
- Através de resolução de exercícios;
- Individual;
- Através da explicação do professor;
- Em grupos.

✓- Com relação ao ter aprendido bem esse conteúdo:

Escola Pública.

- Alguns afirmaram que sim;
- O restante não conseguiu dar uma resposta significativa.

Escola Particular.

- Acha que sim;
- Não;
- Poderia ter sido melhor;
- Sim.

✓- Quanto a fazer um curso universitário:

Escola Pública

- Todas as respostas foram afirmativas;
- Alguns pretendiam sim, mas não sabiam quando;
- Poucos pretendiam, mas não sabiam que curso fazer;
- Alguns pretendiam, mas não sabiam onde;

Escola Particular.

- Alguns não sabiam qual curso fazer;
- Poucos não sabiam onde fazer;
- Os demais responderam afirmativamente.

III.2.5- APRESENTAR A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A história da ciência mostra que grandes descobertas aconteceram sempre com o objetivo de se resolver algum problema. Portanto, os problemas sempre antecederam as descobertas e, desde a Antigüidade, ocuparam um lugar de destaque nos currículos matemáticos.

Stanic e Kilpatrick (1989, p.1-9) dizem que problemas no currículo chegam até os Egípcios, Chineses e Gregos. Por exemplo o papiro de Ahmes, copiado por Ahmes, por volta de 1650 a.C, de um antigo documento, é um manuscrito matemático egípcio que consiste de uma coleção de problemas. Eles também apresentam um documentos chineses, datado de 1000 a.C, além de documentos gregos com problemas. Ainda apresentam problemas, contidos em livros dos séculos XVIII e XIX, comprovando fortemente a presença de problemas dentro do currículo escolar.

Só recentemente os educadores matemáticos vêm aceitando a idéia de que a habilidade em resolver problemas merece especial atenção. O termo resolução de problemas envolve diferentes visões sobre educação, escola, matemática e sobre as causas de se ensinar matemática em geral e resolução de problemas em particular. Stanic e Kilpatrick (1989, p.13) apresentam três temas gerais que têm caracterizado o papel da resolução de problemas no currículo da matemática escolar: "resolução de problemas como contexto, resolução de problemas como habilidade e resolução de problemas como arte."

Já nos anos 40, no prefácio de seu livro "A arte de Resolver Problemas" (1978, p.v), Polya diz que:

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolve, por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.

e acrescenta que:

> Um professor de matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preencher o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo.

Para Polya, citado por Onuchic (1999,p.210), "resolver problemas" era o tema mais importante para se fazer matemática, e "ensinar o aluno a pensar" era sua importância primeira. Um tema que fundamenta a investigação e a resolução de problemas em matemática é "como pensar". Polya insistia que se tomasse muito cuidado nos esforços feitos para se ensinar a "como pensar" e que, na resolução de problemas, isso não se transformasse em ensinar "o que pensar" ou "o que fazer".

L.A.Brasil (1964, p.10), em seu livro:" *Estudo Dirigido de Matemática no Ginásio*", apresenta cinco tópicos para discussão de uma Didática Geral da Matemática, chamando a atenção para a resolução de problemas. Os dois últimos tópicos dessa discussão são:

> 4- O aluno ao "resolver um problema" deve estar praticando uma ação real (concreta ou imaginária): juntando, separando, transpondo, seriando, etc.. Se o professor convencê-lo disto, ter-lhe-á dado a técnica fundamental de estudar matemática.
> 5 – Não entender um problema é não saber "que ação deve ser executada". Explicar, pois, é fazer o aluno escolher o esquema de ação adequado. É como ensinar a sair de um labirinto. Preparar o aluno para a aprendizagem consiste, assim, em ativar seus esquemas de ação.

Mais adiante, Brasil (1964,p.17-19) apresenta a resolução de problemas como um meio para se chegar à teoria e faz algumas recomendações:

> Desejamos mostrar a possibilidade de fazer o aluno chegar à teoria através do problema; de o professor substituir a constante exibição de seu conhecimento pela ordenação das conclusões oferecidas pelos alunos, sendo ainda nosso propósito focalizar a importância de:
> - atentar para as condições de assimilação, antes de abordar um assunto;
> - assegurar a contínua atividade do aluno, tendo em vista que a aprendizagem só se realiza dentro desta atividade;
> - preparar cadeias de perguntas, atividades e problemas que façam do aluno um pesquisador e não um ouvinte;
> - não suspender a atividade do aluno sob o pretexto de lhe fornecer informações: oferecê-las intercaladas nos enunciados dos problemas, em sugestões que se seguirão aos mesmos nas respostas às suas indagações, ou na crítica de suas afirmações;

- substituir as exposições "ex-cátedra" pela ordenação das conclusões acertadas a que os alunos chegam quando provocados por situações adequadas.

Em 1980, nos E.U.A, o documento "Uma Agenda para a Ação" apresentou uma série de recomendações para a matemática escolar, para a década de 80, onde a "Resolução de Problemas deveria ser o centro da matemática escolar."

Trabalhou-se muito com estratégias de resolução de problemas e muitos livros didáticos foram escritos, usando as idéias de Polya que, desde 1944, falava em resolução de problemas para se ensinar e aprender matemática. Entretanto, os trabalhos realizados se apoiavam em estratégias que apresentavam caminhos de resolução e não, como realmente queria Polya, no pensar dos alunos.

Acreditava-se que bom aluno em matemática, era bom resolvedor de problemas. Assim, assumiu-se um ensino das mais variadas estratégias de resolução de problemas, sempre centrado no professor. Porém, os testes aplicados revelavam que os alunos, ainda assim, não eram bons em matemática.

Finalizando a década de 80, pesquisadores passaram a questionar o ensino e a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas. A resolução de problemas começa a ser pensada como uma metodologia de ensino, ou seja, como um meio de se ensinar matemática. O problema passa a ser olhado como um agente que pode desencadear um processo de construção do conhecimento.

Nesta metodologia de ensino da matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente como um meio de se aprender matemática mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso. Uma situação-problema é apresentada com o propósito de se construir novos conceitos e novos conteúdos e a compreendê-los. Essa compreensão da matemática, por parte dos alunos, envolve a idéia de que entender é essencialmente relacionar. Como afirma L.R.Onuchic (1999, p.208),

> [...] esta posição baseia-se na observação de que a compreensão aumenta quando: o aluno é capaz de relacionar uma determinada idéia matemática a uma grande variedade de contextos; o aluno consegue relacionar um dado problema a um grande número de idéias matemáticas implícitas nele; o aluno consegue construir relações entre as várias idéias matemáticas contidas num problema.

O ensino-aprendizagem da matemática no Ensino Médio deve estar vinculado a um *saber pensar matemático* que, sem dúvida, é a maneira de formar indivíduos com capacidades essenciais para exercer a cidadania, uma vez que a matemática está presente no seu dia-a-dia. Contudo, segundo os PCN, não é tarefa fácil atingir esse objetivo. Nos PCN-EM (1999, p.254) encontramos:

> Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento.

Os PCN-EM (1999, p.259) apresentam habilidades e competências a serem desenvolvidas em matemática pelos estudantes do Ensino Médio. Quanto à investigação e à compreensão eles destacam os seguintes pontos:

- Identificar o problema, compreender enunciados, formular questões, etc.;
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema;
- Formular hipóteses e prever resultados;
- Selecionar estratégias de resolução de problemas;
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta;
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos;
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades;
- Discutir idéias e produzir argumentos convincentes.

Segundo os Standards 2000, página 52,

> Resolver problemas é uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática e, assim, ela não deveria ser uma parte isolada do programa de matemática. [...] Os contextos dos problemas podem variar desde experiências familiares envolvendo as vidas dos estudantes ou o dia na escola até aplicações envolvendo as ciências ou o mundo do trabalho. Bons problemas integrarão múltiplos tópicos e envolverão uma matemática significativa.

O trabalho do Professor Luiz Roberto Dante (1988) presta importante contribuição à Resolução de Problemas. Seus estudos, desenvolvidos em Rio Claro, S.P. , incluem sua tese de Livre Docência " Criatividade e Resolução de Problemas na Prática Educativa Matemática" e as dissertações de Mestrado de Eliane Gazire (1989), Miriam G. P. da Silva (1991) e Odisnei A. P.Gustineli (1991).

No ano de 1995 o Professor Dante publicou o livro"Didática da Resolução de Problemas de Matemática" - Série Educacional - Editora Ática. Este livro aborda a resolução de problemas matemáticos e sua importância no ensino.

No Brasil, já temos várias pesquisas desenvolvidas para a sala de aula enfocando um ensino através da resolução de problemas. Segundo essa visão, o problema matemático constitui-se num caminho para o ensino de matemática e não apenas para o ensino da resolução de problemas. Como afirma Onuchic (1999, p.215):

> Colocando o foco em Resolução de Problemas, defendemos que o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória; que aproximações sucessivas ao conceito criado são construídas para resolver um certo tipo de problemas e que, num outro momento, o aluno utiliza o que já aprendeu para resolver outros problemas; que o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas; que a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem.

Yves de la Taille, no Jornal Mais da Folha de São Paulo, de 13/04/1997, diz que:

> Os PCN preconizam que a educação deve ser pensada como um trabalho de preparação do aluno para a vida como um todo. A tendência atual é pensar a escola como um lugar onde se preparam meninos e meninas para assumir sua parcela de responsabilidade pelo mundo, para conhecer seus direitos, para poder participar da construção de uma sociedade melhor.

Taille continua afirmando que, de acordo com os PCN, a matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimento científico e recursos tecnológicos dos quais os cidadãos devem se apropriar.

Numa sociedade cheia de contrastes, como a que temos hoje, constantemente nos deparamos com situações que nos obrigam a tomar uma decisão. Assim, a capacidade de raciocinar, analisar e refletir faz a diferença. Por isso, acreditamos que o Ensino-Aprendizagem de Matemática através de Resolução de Problemas completa um trabalho produtivo como também possibilita ao indivíduo adquirir o poder de decisão.

Assim, bem recomendado seria o ensino-aprendizagem ligado a uma metodologia que pudesse promover uma reflexão e uma exploração e que levasse à obtenção de um conhecimento com compreensão. Em lugar de apenas levar a memorizar fatos e procedimentos de forma rotineira, os professores deveriam ter coragem de trabalhar sobre os conhecimentos informais que os alunos trazem para a escola e de propor situações desafiadoras que os levassem a fazer conexões e tirar relações.

A visão do ensino da matemática com compreensão lança mão da resolução de problemas como geradores de novos conceitos e novos conteúdos.

Em um trabalho com equações algébricas ou polinomiais defendemos a metodologia de Ensino-Aprendizagem através da Resolução de Problemas. Escolhemos essa metodologia por acreditar que ela possibilita um ensino-aprendizagem com significado e compreensão, sendo possível o uso de recursos como trabalho cooperativo, tecnologia, história da matemática, etnomatemática e, até mesmo, aulas expositivas com o auxílio do quadro e giz.

III.2.6 – CRIAR UM PROJETO DE TRABALHO

III.2.6.1- INTRODUÇÃO

A elaboração de um projeto de trabalho em matemática para a sala de aula não é uma tarefa fácil. É um trabalho que requer acordo e harmonia de um conjunto de fatores que vão desde a construção do projeto até à obtenção de um espaço físico, passando por um conjunto de ações como preparação de materiais instrucionais, localização de um ambiente adequado e a administração do tempo destinado à sua aplicação. Para a elaboração de uma proposta de ensino-aprendizagem, no contexto de um projeto de trabalho para a sala de aula, é necessário levar-se em conta alguns aspectos como:

- a escolha do tema;
- os objetivos do projeto;
- a escolha da metodologia de ensino-aprendizagem adotada;
- a elaboração de um roteiro de atividades;

O professor que irá trabalhar equações algébricas, no 3º ano do Ensino Médio, será responsável por todo o programa curricular dessa série. Como defendemos um trabalho em equações algébricas apoiado na metodologia de ensino-aprendizagem da matemática através da Resolução de Problemas, consideramos que esse professor deva, desde o início do ano letivo, trabalhar a matemática utilizando essa metodologia. Assim, quando forem trabalhadas as equações algébricas, os alunos já estarão familiarizados com essa metodologia.

Aos alunos será apresentado e com eles discutido um Termo de Compromisso para a disciplina matemática e que, depois de acordo entre professor e alunos, será assinado por todos.

III.2.6.2-TERMO DE COMPROMISSO

1.Introdução:

Este Termo de Compromisso tem por objetivo estabelecer parâmetros para o desenvolvimento e a organização de um trabalho produtivo em matemática, apontando as responsabilidades e os direitos dos alunos e do professor. O trabalho será realizado na disciplina de Matemática, no 3º ano do Ensino Médio.

2.Conteúdo e metodologia:

Será desenvolvido o conteúdo constante do programa de Matemática do 3º ano do Ensino Médio, pela professora Elizabeth, com a "*Metodologia* de *Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas*".

3.Normas:

- O trabalho será desenvolvido de forma cooperativa. Os estudantes trabalharão em pequenos grupos, com uma meta comum, que é a de resolver problemas;
- Todos os alunos deverão engajar-se na discussão dos problemas apresentados;
- Os grupos serão formados por quatro alunos, aceitando-se três na impossibilidade de um quarto elemento juntar–se ao grupo pela insuficiência do número de alunos na sala;
- O trabalho individual da cada membro terá um efeito direto sobre o sucesso do grupo.

4. Avaliação:

Cada aluno será avaliado individualmente, de acordo com o artigo 24, inciso V-a, da L.D.B. da Educação Nacional lei no. 9394 de 20/12/1996, nos seguintes itens:

- Freqüência - peso 1 - Todos deverão estar presentes no local e horário estipulado.
- Trabalho de casa - peso 1 - As tarefas serão recolhidas no início de cada aula.
- Trabalho de grupo- peso - 1.
- Trabalho participativo em sala de aula - peso 1.
- Disciplina - peso 1.
- Prova escrita - peso 5.

6. *<u>Outras Resoluções</u>:*

Questões e problemas surgidos durante o desenvolvimento do trabalho serão discutidos por todos, alunos da sala e professora, a fim de se chegar a um comum acordo, ficando estabelecido que as normas deverão ser cumpridas pelos alunos e pela professora.

Ciente dessas normas, de pleno acordo com todas as condições estabelecidas, assinam abaixo.

Várzea Grande, __________ de _________ de 2002.

___________________________ ___________________________

Profª. Elizabeth Q. de Azevedo Aluno(a)

Pretendemos que este projeto de trabalho seja destinado a professores do Ensino Médio, preocupados com o ensino-aprendizagem de matemática em geral e, em particular, com o ensino-aprendizagem das equações algébricas.

As atividades criadas serão seguidas de comentários sobre o uso da metodologia adotada e das possíveis dificuldades enfrentadas no ensino–aprendizagem das mesmas. Cada atividade será um problema gerador de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos e sua exploração possibilitará um avanço além dos objetivos propostos, com aplicações e conexões das equações algébricas a outros ramos da matemática e, até, a outras áreas da ciência.

III.2.6.3 - A ESCOLHA DO TEMA

Pensamos na possibilidade de apresentar, aos professores do Ensino Médio, uma proposta de trabalho em Equações Algébricas para a sala de aula, constatada a importância desse tópico. Dentro de nossas perspectivas, o trabalho deveria ser feito com o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

Embora alguns poucos educadores, por razões diversas, possam sugerir a retirada desse tópico do currículo do Ensino Médio e propor que ele seja estudado apenas em cursos superiores, estamos convencidas de que o estudo desse objeto matemático é importante.

III.2.6.4 - OBJETIVOS PRETENDIDOS PARA A EXECUÇÃO DO PROJETO

Para o trabalho com Equações Algébricas estabelecemos alguns objetivos, com o propósito de se obter um ensino-aprendizagem com compreensão e significado. Ao apresentar caminhos para o trabalho deste tópico, esperamos estar contribuindo para a identificação e a compreensão dos obstáculos que nossos alunos têm que transpor e porque eles, muitas vezes, falham nesta tarefa. Pretendemos criar condições que possibilitem ao aluno avançar, com confiança, no conhecimento matemático.

Nosso objetivo maior é o de motivar o aluno a construir conceitos algébricos através da resolução de problemas de forma que ele possa:

- desenvolver sua capacidade de questionar e de experimentar relativamente às informações oferecidas;
- trabalhar em grupo de modo a propiciar uma relação amistosa, e às vezes até polêmica, levando-o a adquirir confiança em si mesmo;
- ver o ambiente de ensino-aprendizagem como um local de trabalho prazeroso, descontraído e produtivo;
- compreender a importância do contexto em que o problema está inserido;
- formalizar conceitos, estruturando a teoria das Equações Algébricas.

Entretanto, para iniciar um estudo com Equações Algébricas ou Polinomiais, optamos por trabalhar com problemas, nessa área, que levem os alunos a uma possível revisão dos conceitos criados nos Conjuntos Numéricos, na Geometria, na Álgebra e na Trigonometria já trabalhados por eles nas séries anteriores. Este trabalho possibilitará, ao aluno, identificar a matemática necessária para se trabalhar com as equações algébricas que se apresentam no final do Ensino Médio. Esta escolha nos pareceu extremamente importante pois, sempre partindo de um problema, o aluno pode recordar ou fixar conceitos já aprendidos dentro do seu contexto.

Esta inversão em relação à ordem tradicionalmente apresentada, onde os conceitos aparecem em primeiro lugar, possibilita ao aluno não só perceber a importância de um trabalho com Equações Algébricas como também ampliar seu conhecimento. Ao fazer conexões, estabelecer relações, investigar e se comunicar o aluno estará ampliando de tal forma seu conhecimento que isso o habilitará a avançar para novas descobertas.

III.2.6.5 - A METODOLOGIA DE TRABALHO ESCOLHIDA

Acreditamos que a metodologia cria oportunidades para o aluno desenvolver competências e habilidades necessárias para avançar na busca de novos conhecimentos. Essa forma de trabalho lhe dará discernimento quando colocado frente a situações de escolha.

Escolhemos para nosso trabalho, em sala de aula, a metodologia de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas. Os alunos de posse dessa metodologia, pelo menos desde o início do 3º ano do Ensino Médio, estarão capacitados a trabalhar equações algébricas de forma produtiva.

Sentimos que, devido a uma forma de ensino nem sempre adequada por parte de professores, escolas e programas, muitos estudantes têm tido dificuldade na aprendizagem da matemática. Muitas recomendações têm sido feitas por educadores matemáticos para tornar o ensino-aprendizagem da matemática mais apropriado para atender às necessidades da sociedade.

Não é nosso propósito dar uma receita para o “ensino” desse tópico. Nosso objetivo é apresentar uma forma diferente de se trabalhar a matemática com os alunos em sala de aula e onde possam ser usados recursos como a história da matemática, a tecnologia e até mesmo uma aula expositiva, com giz e lousa.

Segundo um roteiro de trabalho para a sala de aula, apresentado por Onuchic (1999, p.216), de acordo com a metodologia adotada, ao se imaginar uma sala de aula com quarenta alunos, o trabalho poderia ser conduzido assim:

> - <u>Formar grupos – entregar uma atividade</u>
>
> Lembrar que, no mundo real, aprender é muitas vezes um processo compartilhado e que o progresso em direção a um objetivo vem através de esforços combinados de muita gente. É preciso que os estudantes experimentem este processo cooperativo e que se lhes dê oportunidade de aprender uns com os outros. Sentimos que muito da aprendizagem em sala de aula será feita no contexto de pequenos grupos.
>
> - <u>O papel do professor</u>
>
> Dentro desse trabalho, o papel do professor muda de comunicador do conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, controlador e incentivador da aprendizagem. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem , uns nos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários.
>
> - <u>Resultados na lousa</u>
>
> Com o trabalho dos alunos terminado, o professor anotaria na lousa os resultados obtidos pelos diferentes grupos. Anota resultados certos, errados e aqueles feitos por diferentes caminhos.

- Plenária

Chama os alunos todos, de todos os grupos, para uma assembléia plena. Como todos trabalharam sobre o problema dado, estão ansiosos quanto a seus resultados. Procuram defender seus pontos de vista e participam.

- Análise dos resultados

Nesta fase, os pontos de dificuldade encontrados pelos alunos são novamente trabalhados. Surgem, outra vez, problemas secundários que, se não resolvidos, poderão impedir que se leve o trabalho à frente. O aspecto exploração é bastante importante nesta análise.

- Consenso

A partir da análise feita, com a devida retirada das dúvidas, busca-se um consenso sobre o resultado pretendido.

- Formalização

Num trabalho conjunto de professor e alunos, com o professor dirigindo o trabalho, é feita uma síntese do que se objetivava aprender a partir do problema dado. São colocadas as devidas definições, identificadas as propriedades e feitas as demonstrações. É importante destacar, nesse momento, o que de matemática nova se construiu, usando-se as novas terminologias próprias ao assunto.

Nesta visão é sumamente importante que os alunos desenvolvam habilidades que propiciem um trabalho cooperativo, pois este é o primeiro passo em direção ao ensino-aprendizagem via Resolução de Problemas.

A cooperação é decisiva para o progresso de qualquer atividade humana. Um trabalho cooperativo envolve um pequeno grupo de aprendizes que trabalham juntos com um objetivo comum, isto é, resolver um problema. Alice F. Artzt e Claire M. Newmam (1991, p.1) dizem que:

> A sala de aula é um ambiente natural para atividades de aprendizagem cooperativa. Estudantes que têm a oportunidade de trabalhar em pequenos grupos podem começar a praticar habilidades cooperativas necessárias para os membros de um grupo resolverem problemas em conjunto. Além disso, cada membro do grupo pode aprender todo o conteúdo do currículo através de suas interações com os outros membros do grupo.

Um trabalho cooperativo, em sala de aula, envolve tanto os alunos como o professor. É necessário que o professor esteja predisposto a criar condições para que os alunos possam trabalhar em conjunto, saber ouvir o aluno e intervir corretamente. Numa aprendizagem cooperativa, o professor passa a ser um mediador. Nessa nova função ele precisa não só saber muita matemática como ter, bem claro, os objetivos que deverão ser atingidos.

Como o trabalho cooperativo envolve pequenos grupos, cada membro do grupo deve cumprir suas tarefas dentro dele, cooperando uns com os outros de tal forma que o grupo se transforme em uma unidade de ação. Segundo Artzt , et al, (1991, p.3)

> Não é suficiente conduzir um grupo de estudantes, separados em pequenos grupos, trabalhando sobre um problema ou um conjunto de problemas. Não é aprendizagem cooperativa se os estudantes se sentam juntos em grupos e trabalham individualmente sobre o problema. Não é aprendizagem cooperativa se estudantes se sentam juntos em grupos e uma só pessoa faz todo o trabalho. Verdadeiramente aprendizagem cooperativa requer a orientação do professor que é quem pode ajudar os estudantes a entender a dinâmica de grupo, a desenvolver a habilidade que eles precisam para a aprendizagem cooperativa e a aprender matemática trabalhando juntos em grupos.

O ensino cooperativo tem muito a oferecer para a sala de aula. É uma estratégia instrucional que o professor poderá usar quando considerar apropriado. Discutir matemática com os colegas se torna prazeroso para os alunos, eles se beneficiam dessas interações. Na aprendizagem cooperativa, os alunos devem cooperar entre si como elementos de um grupo e cada grupo com o professor, como bem ilustra Artzt nas figuras abaixo..

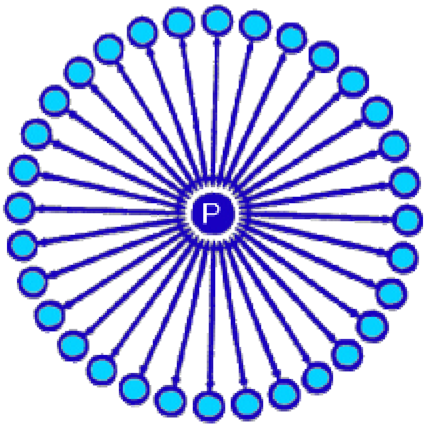


Fig. A
Sala de aula em ensino centrado no professor

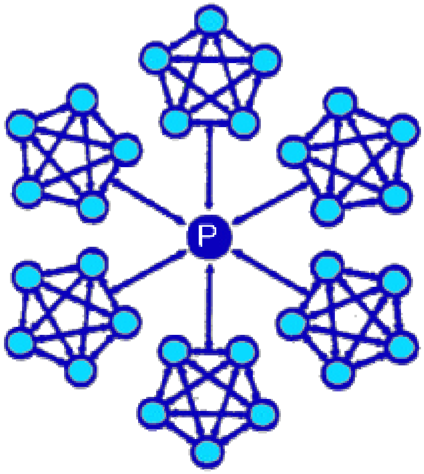


Fig. B
Sala de aula em ensino cooperativo

No ensino tradicional centrado no professor, descrito na figura A, o professor é claramente o centro de toda a atividade. Todas as linhas de comunicação ligam o estudante, um indivíduo, ao professor. Em contraste, a figura B descreve uma sala de aula em ensino cooperativo. Ela mostra que, embora o professor também mantenha o papel central, ele não é o responsável por toda discussão matemática feita. Os estudantes ajudam o professor a reunir informações tendo como mediador das relações entre os grupos, o próprio professor.

No final de cada aula serão apresentadas atividades para serem trabalhadas em casa. Holdan (1995, p.278) em seu artigo "Tornando as tarefas de casa de álgebra mais eficazes" afirma que, a certa altura do curso, o aluno deve ter a oportunidade de se envolver independentemente com a habilidade ou o conceito em estudo. Nas classes de matemática, isso em geral significa passar tarefa para casa". Ele ainda comenta sobre os resultados positivos de pesquisas, já na década de 60 do século XX, sobre o assunto. Ele então apresenta cinco princípios, indicados pelos pesquisadores, que o professor deverá levar em consideração ao planejar a tarefa de casa.

> 1. Distribuir a prática ao longo do tempo é preferível a concentrá-la.
> 2. Tarefas que incluem oportunidades de exploração de tópicos futuros são preferíveis àquelas que não as incluem.
> 3. A prática no mesmo contexto facilita a aprendizagem inicial; a prática de conteúdos múltiplos facilita a transferência.
> 4. Uma combinação de práticas distribuídas e exploratória é preferível à prática concentrada.
> 5. Métodos diferentes de ensino podem levar a resultados estruturalmente diferentes no aprendizado quanto à qualidade da transferência de idéias. Ele então afirma que "a qualidade do ensino e da prática orientada que precedem as tarefas de casa influem no êxito dessas tarefas. [...] Dando ênfase a conceitos gerais e a atividades práticas orientadas, em vez de se limitar a meras aplicações de regras aparentemente arbitrárias, você poderá ajudar muito seus alunos em seus esforços para a resolução de problemas
>
> (HOLDAN, 1995, p.278 - 283)

Este projeto está sendo estruturado para ser executado por nós, em 16 aulas de 45 minutos cada, como último tópico de matemática no Ensino Médio, visando a realidade da Escola pública em que atuo, no estado do Mato Grosso.

Serão preparadas atividades para serem trabalhadas nas 16 (dezesseis) aulas programadas, usando-se a metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. No final de cada aula deveremos apresentar atividades que devem ser trabalhadas em casa. Estas atividades não serão apenas atividades de fixação mas, também, de pesquisa pois, desta forma, estaremos dando oportunidade ao aluno de exercer sua autonomia.

Polya(1975, p.1) em seu livro "A arte de resolver problemas" , falando sobre como dar auxílio aos estudantes afirma que:

> [...] um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes. O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem de mais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho.

Ao final de cada aula serão deixadas, por escrito, tarefas extra-classe para casa que serão discutidas no início da aula seguinte, com a participação de todos os grupos. Este momento de discussão trará à tona variáveis do ensino e da aprendizagem que professor e alunos poderão explorar. Essa tarefa tem três finalidades:

- fazer recordar o conteúdo trabalhado em sala;
- preparar o aluno para a aula seguinte, propondo questões que o leve a pensar e sentir necessidade de algo novo que será trabalhado nessa aula;
- trabalhar, de maneira satisfatória, o programa elaborado, considerando-se o pouco tempo que se tem em sala de aula.

O que é um problema ?

Problema, para nós, é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer. Assim, problemas com enunciados, exercícios simples ou complexos ou ainda demonstrações, de qualquer natureza, que não sabemos fazer, constituem-se em problemas.

Catherine Herr Mulligan (1995, p.236-237) falando sobre o uso de polinômios diz que:

> Ao ensinar álgebra, tento apresentar essa matéria como sendo relevante e útil, mas não creio que seja necessário limitar as considerações quanto à "relevância " para o mundo real. A maioria de meus alunos continuará estudando matemática depois de álgebra 1, e tento ensinar-lhes que a álgebra é (1) um instrumento que se usa em matemática superior, (2) uma linguagem comum e (3) um meio de comunicação. As aplicações ao mundo real são importantes, mas também é bom que os alunos vejam como se usa a álgebra para o bem da matemática.
>
> A aritmética dos polinômios é uma boa área para implementar essa filosofia. A manipulação de expressões polinomiais é uma técnica essencial; no entanto, como qualquer habilidade que exige prática, pode tornar-se repetitiva e monótona. Adiantando-me às questões dos alunos, como "Por que isso é importante (útil) (necessário) (cai na prova) ? ", tento enfatizar a importância de ser capaz de expressar e ampliar idéias.

Como dizem Christmas e Fey (1990, p.73), em seu artigo Communicating the Importance of Algebra to Students:

> A álgebra é claramente a espinha-dorsal da matemática escolar secundária. Ela fornece conceitos e convenções simbólicas para a representação de informações muito importantes em situações que, a cada dia, nos afetam de maneiras óbvias e sutis.
>
> A compreensão de algumas idéias básicas, subjacentes àquele modo de representar ou modelar a informação quantitativa, é agora um crítico pré-requisito para o ingresso em muitas carreiras e para uma vida eficaz ao tratar com sistemas de informações quantitativas que encontramos em nossos afazeres diários.
>
> Os métodos de procedimentos em álgebra - as regras para transformar representações simbólicas em modelos equivalentes mas mais simples - são também largamente

> usados nos penetrantes sistemas dirigidos por regras que vemos ao nosso redor. Embora a computadorização torne muitos métodos tradicionais, métodos manuais de manipulação simbólica menos importantes para todos (e certamente para estudantes quantitativamente menos capazes), algumas lições gerais importantes sobre precisão de expressão e pensamento algorítmico podem emergir da experiência com métodos algébricos de aprendizagem. Há muitas fontes disponíveis das quais os professores podem tirar exemplos ilustrando a utilidade da álgebra elementar.

III.2.6.6 - ROTEIRO DE ATIVIDADES

AULA - 01

Atividade 01:

Traduzida do livro "Algebra I- Applications and Connections" - Merril-Glencoe/ Mcgraw-Hill (1995, p.209). Partindo de uma situação social real:

Muitas cidades apoiam a presença de cervos em seus parques metropolitanos, suprindo-os com comida, aplicação de medicamentos, abrigo no inverno e proteção contra predadores. Mas, se não controlada, essa população animal crescerá polinomialmente. Isto é, se um animal tiver em média x filhos, em sua vida, então ele terá x^2 netos na segunda descendência, x^3 bisnetos na terceira descendência, x^4 trinetos na quarta descendência, e assim por diante. Podemos representar o número de descendentes de um animal que tenha tido x filhos em sua existência pela expressão polinomial

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots$$

continuando por algum número de gerações e assumindo-se que nenhum dos animais morra durante esse processo.

Então, um animal que tiver uma média de 13 filhos em sua existência, terá possivelmente 30.940 descendentes em 4 gerações, desde que se tenha eliminado todas as possibilidades de controle populacional. De fato:

$$x + x^2 + x^3 + x^4 = ?$$

$$13 + 13^2 + 13^3 + 13^4 = ?$$

$$13 + 169 + 2197 + 28561 = 30.940\,,$$

chegando a uma situação de quase caos social. Onde abrigar tantos animais?

Problema 01:

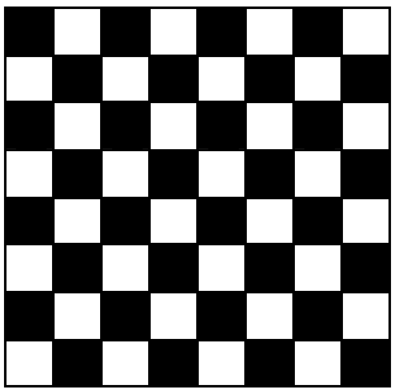
" Se um cervo tem em média quatro filhos durante sua vida, quantos descendentes terá em cinco gerações se considerarmos uma população sem qualquer controle de natalidade?"

Objetivos:

- Ligar com uma situação social.
- Traduzir a situação expressa no problema para a linguagem matemática dos polinômios
- Perceber a utilização de polinômios em representações de fatos reais.
- Conceber desenvolvimento polinomial.
- Formalizar o conceito de polinômio e fazer generalizações.

Problema 02: (Traduzido do livro: "Algebra I- Applications and Connections" - Merril-Glencoe/ Mcgraw-Hill, 1995, p.210)

"*Olhando para o modelo abaixo, quantos quadrados vemos sobre esse tabuleiro de xadrez?"*



Objetivos:

- Ser capaz de estabelecer relações olhando para um modelo.
- Identificar várias estratégias para se resolver um problema.
- Reconhecer a importância do uso dos polinômios em situações reais.

Atividade 2: (Traduzida do livro: "Algebra I- Applications and Connections" - Merril-Glencoe/ Mcgraw-Hill, p.278)

" *A medida do volume de um sólido retangular é* $5x^3 - 20x + 2x^2 - 8$*. Encontre as medidas das dimensões do sólido se cada uma pode ser escrita como um binômio com coeficientes inteiros.*"

Ainda:

a) Se $x=5$, quais são os valores das dimensões e do volume desse sólido?

b) Qual o menor valor inteiro de x para que o sólido exista?

Objetivos:

- Usar fatoração de polinômios.
- Fazer conexões com outros tópicos da matemática.
- Verificar a validade da resposta obtida.

TAREFAS EXTRA-CLASSE

Tarefa 01: (Extraído do livro "Matemática - Contexto & Aplicações", vol. 3, de Luiz Roberto Dante, 1999, p. 173)

"*Dados $p(x) = (mx^2 + nx + p)(x + 1)$ e $g(x)= 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$, determine os valores de m, n e p para que se tenha $p(x) = g(x)$.*

Objetivo:

- Recordar o conceito de igualdade de polinômios.

Tarefa 02:

"*Dado que 5 é o resto da divisão do polinômio $(x^4 - 2x^3 + a x^2 - x - 1)$ por $(x + 2)$, ache o valor de a.*"

Objetivo:

- Recordar o princípio da divisão de polinômios: $D(x) = q(x) . d(x) + r(x)$

Tarefa 03: (Extraído do livro "Matemática Aplicada", vol.3, de Trotta, Imenes e Jakubovic, 1980, p.243)

" Leia com atenção e responda as questões abaixo, justificando sua resposta."

a) O que se pode afirmar sobre o grau da soma de dois polinômios de graus diferentes?

b) Apresente um exemplo de dois polinômios do 3º grau que adicionados resultem num polinômio do 1º grau.

c) Determine o polinômio $P(x)$ do 1º grau tal que $P(1) = 3$ e $P(3) = 13$.

d) Qual é o grau do polinômio $P(x) = 0x^4 + ax^3 + 2x^2 + 1$?

e) Considerando dois polinômios, ambos de grau n, qual é o grau do produto desses polinômios?

f) Considerando dois polinômios, um de grau m e outro de grau n, qual é o grau do produto desses polinômios?

Objetivo:

- Apresentar atividades que peçam por raciocínio, com o objetivo de desafiar o pensamento crítico dos estudantes.

Tarefa 04:

" A medida da área de um retângulo é dada por $x^2 + 5x - 14$. Determine as dimensões dos lados do retângulo, desde que cada dimensão pode ser escrita como um binômio com coeficientes inteiros".

Objetivos:

- Fatorar o polinômio e comparar produtos.
- Mostrar que $A(x) = x^2 + 5x - 14$ é uma função polinomial de grau 2 e que $x^2 + 5x - 14 = 0$ é uma equação polinomial do 2º grau.

AULA - 02

Atividade 03: Trabalhar as tarefas 01, 02, 03 e 04.

Atividade 04: (Extraído do Livro "Matemática Aplicada”, vol.3, de Trotta, Imenes e Jakubovic, 1980, p.242)

“Determine o polinômio $A(x)$ sabendo que, na divisão de $A(x)$ por $B(x) = x^2 - 8$, obteve-se quociente $Q(x) = 2x^2 + 1$ e resto $R(x) = 3x + 10$."

Objetivos:

- Reconhecer a divisão de polinômios como a operação inversa da multiplicação de polinômios.
- Recordar os algoritmos de multiplicação e divisão de polinômios.

Atividade 05:

" *A fórmula de Bhaskara*"

Objetivos:

- Perceber que as raízes são encontradas em termos de seus coeficientes.
- Observar a generalidade dessa fórmula.

TAREFAS EXTRA-CLASSE

Tarefa 05:

“ Efetue a divisão do polinômio $A(x) = 3x^3 - 13x^2 + 37x - 50$ por $B(x) = x^2 - 2x + 5$ e responda as questões: Quem é o divisor, o dividendo e o resto? A divisão é exata? Pode-se afirmar que $A(x)$ é divisível por $B(x)$? Justifique cada resposta.”

Objetivos:

- Identificar os conceitos dos elementos constituintes da divisão de polinômios.
- Reconhecer a ligação entre multiplicação e divisão de polinômios, quando o resto for zero ou diferente de zero.

Tarefa 06: (Extraído do livro “Matemática - Contexto & Aplicações”, vol.único, de Luiz Roberto Dante, 2000, p. 565.)

“ Determine os valores de a e b para que os polinômios

$P(x) = x^3 - 2ax^2 + (3a + b)x$ *e* $G(x) = x^3 - (a + 2b)x + 2a$ *sejam divisíveis por*

$H(x) = x + 1$ *. ”*

Objetivos

- Fixar o conceito de divisão nos polinômios.
- Recordar resolução de sistema de equações do primeiro grau.

Tarefa 07: (Traduzida do livro "Algebra I- Applications and Connections" - Merril-Glencoe/ Mcgraw- Hill, p.520)

"Um teatro tem 1200 assentos. Para quase todas as apresentações ele tem preenchido sua capacidade. Atualmente o ingresso custa \$ 5,00 e a dona do teatro quer aumentar seu preço. Ela estima que para cada \$ 0,50 de aumento no preço do ingresso, 100 pessoas a menos assistirão o espetáculo. Baseados nesta estimativa, que preço do ingresso maximizaria sua renda?"

Objetivos:

- Apresentar uma situação do mundo real cuja expressão matemática é dada por uma equação polinomial do 2º grau.
- Mostrar que a resolução da equação e seu gráfico são ferramentas utilizadas neste problema.
- Discutir valores sociais a respeito da renda desejada.

AULA - 03

Atividade 06: Trabalhar as tarefas 05, 06 e 07.

Atividade 07:

"*Dividir ($x^4 - 2x^3 - 7x^2 - x - 1$) por ($x + 2$). Relacionar esta atividade com o "dispositivo prático de Briot-Ruffini*"

Objetivo:

- Mostrar a importância do "***dispositivo prático de Briot-Ruffini***", como ferramenta disponível para a divisão de polinômios, que simplifica e abrevia essa operação.

Atividade 08:

"*Qual é o resto da divisão de $P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 8x - 3$ por $G(x) = x - 6$?*"

Objetivos:

- Aplicação do dispositivo prático de Briot-Ruffini
- Mostrar a importância do ***Teorema de D'Alembert*** que também se constitui numa ferramenta facilitadora.
- Demonstrar esse teorema .

Atividade 09: (Extraído do livro, "Matemática - Contexto & Aplicações", vol.3, de Luiz Roberto Dante, 2000, p. 185)

" *Calcule o quociente de $P(x) = x^3 - 6x^2 + x - 6$ por (x-6).*
Mostre que ($x - 6$) é um fator de $P(x)$".

Objetivos:

- Resolver esse problema por diferentes caminhos:
  . Divisão de polinômios

. Briot-Ruffini

. Teorema de D'Alembert

. Teorema do Fator

- Perceber a importância do ***Teorema do Fator*** que, quando conhecidas as raízes da equação, leva à fatoração de polinômios.

TAREFAS EXTRA-CLASSE

Tarefa 08: (Extraído do livro "Matemática - Contexto & Aplicações", vol. único, de Luiz Roberto Dante, 2000, p. 566.)

" O polinômio $P(x) = x^4 - 4x^3 + mx^2 + 4x + n$ *é divisível por* $(x - 1)(x - 2)$*. Calcule* $(5m + 2n)$*."*

Objetivos:

- Motivar os alunos, fazendo apelo à história da matemática.
- Perceber que o uso do Teorema do Fator simplifica esse trabalho.
- Usar o dispositivo de Briot-Ruffini conhecidos dois fatores de um polinômio.

Tarefa 09:

a) Qual é o resto da divisão de $A(x) = x^{23} - 2x^{10} + 1$ *por* $G(x) = x - 1$*?*

b) Determine o resto da divisão de $P(x) = x^n - 1$*,* $n \in N^*$*, por* $D(x) = x + 1$ *.*

Objetivos:

- Aplicar o teorema do fator na divisão de polinômios.
- Perceber que usar o algoritmo da divisão seria extremamente trabalhoso, usar Briot-Ruffini seria trabalhoso mas muito menos e usar o teorema do fator leva mais rapidamente ao resultado.

Tarefa 10: (Extraída do livro "Matemática - Contexto & Aplicações", vol.único, de Luiz Roberto Dante, 2000, p. 565.)

" Determine o polinômio $P(x)$ *do* 3^o *grau que se anula para* $x = 1$ *e que, dividido por* $(x + 1)$*,* $(x - 2)$ *e* $(x + 2)$*, apresenta resto igual a 6."*

Objetivo:

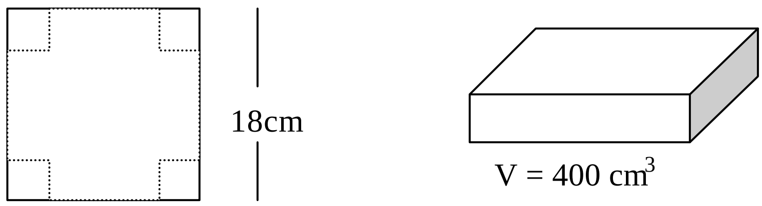
- Aplicar o Teorema do Fator.

AULA - 04

Atividade 10: Trabalhar as tarefas 08, 09 e 10.

Atividade 11:(Extraída do livro "A matemática no Ensino Médio", vol. 3, de Elon Lages Lima e outros. SBM - Rio de Janeiro, 1998, p. 198)

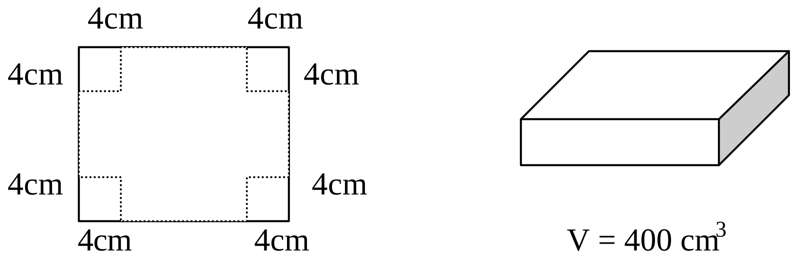
a) "*Cortando-se quadrados em cada canto de uma folha de papelão quadrada, com 18 cm de lado e dobrando-se conforme a figura abaixo, obtém-se uma caixa retangular sem tampa. Qual deve ser o lado do quadrado a ser recortado para que o volume da caixa seja igual a* $400cm^3$ *?*"



Objetivos:

- Passar o problema da linguagem vernácula para a linguagem matemática.
- Usar ferramentas matemáticas adequadas para resolver o problema e interpretar sua solução.

b) *Verificar que, cortando-se um quadrado de lado 4cm nos quatro cantos de uma folha de papelão de 18cm de lado e dobrando-se conforme a figura abaixo, formamos uma caixa sem tampa cujo volume é igual a* $400cm^3$."



Objetivo:

- Verificar que 4 cm é solução do problema.

c) "*Existe algum outro valor do lado do quadrado recortado em cada canto para o qual o volume da caixa resultante seja igual a 400 cm^3 ?* "

Objetivos:

- Ir em busca de todas as soluções.
- Perceber que nem todas as soluções da equação são soluções do problema.

Atividade 12: (Adaptada do livro "Matemática – Contexto & Aplicações", vol.3, de Luiz Roberto Dante, 1999, p. 205)

"*Em um experimento realizado em um laboratório de física, chegou-se à equação $x^3 - (5+ i) x^2 + (6+5i) x - 6i = 0$. Achar as raízes dessa equação, sabendo que i é uma de suas raízes* ".

Objetivos:

- Reconhecer uma equação algébrica com coeficientes complexos e variáveis complexas.
- Aplicar o teorema do fator para chegar a uma equação de grau 2.
- Buscar as outras raízes por diferentes caminhos.

TAREFAS EXTRA-CLASSE

Tarefa 11: (Extraída do Livro: "Matemática Aplicada", vol.3, de Trotta, Imenes e Jakubovic. 1980, p.291)

" Decomponha em fatores do 1º grau o polinômio

$P(x) = x^3 - (4 + 4i)x^2 + (-5 + 6i)x + 10i$, sabendo que (-1) é uma de suas raízes."

Objetivo:

- Decompor o polinômio em fatores usando vários caminhos.

Tarefa 12:

"*Mostre, por diferentes caminhos, que o número i é raiz do polinômio $P(x) = x^2 + 1$.*"

Objetivo:

- Resolver o problema de várias maneiras distintas: por divisão, Briot-Ruffini, D'Alembert.

Tarefa 13:

"Sabendo que 2 é uma raiz do Polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, *encontre as demais raízes."*

Objetivos:

- Levar o aluno a perceber a existência de raízes iguais.
- Reconhecer que conhecer de início uma raiz do polinômio de 3º grau facilita a determinação de todas as raízes.

AULA - 05

Atividade 13: Trabalhar as tarefas 11, 12 e 13.

Atividade 14:

" *Leitura do texto: "**Teorema fundamental da Álgebra**": Teorema de Gauss.*

Objetivos:

- Reconhecer o avanço da matemática em conseqüência da demonstração desse teorema, que garante que: "Toda equação polinomial de grau n, tem solução em C" .
- Perceber a construção histórica desse teorema.
- Reconhecer a importância desse teorema e sua força na matemática de hoje.

Atividade 15: (Extraída do livro "Matemática - Contexto & Aplicações", vol. único, de Luiz Roberto Dante, 2000, p. 571)

"*O número 3 é raiz dupla da equação* $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$. *Determine as outras raízes.*"

Objetivo:

- Determinar as raízes da equação polinomial dada.
- Reconhecer a multiplicidade da raiz.
- Perceber que o conhecimento de uma raiz dupla contribui para a determinação das demais raízes.

Atividade 16: (Extraída do livro:" Matemática Aplicada" vol.3, de Trotta, Imenes e Jakubovic, 1980, p.291)

"*Determine as raízes de* $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$, *sabendo que i é uma delas.*"

Objetivos:

- Determinar as raízes do polinômio.
- Reconhecer em que condições o número (i) e seu conjugado ($-i$) são raízes do polinômio dado.

TAREFA EXTRA-CLASSE

Tarefa 14:

" *Construir a equação algébrica do* 3^o *grau* $P(x) = 0$, *que tem raízes* -1, 1 *e* 2, *sabendo que o coeficiente do termo de maior grau é* 2".

Objetivo:

- Obter uma equação polinomial conhecidas suas raízes.

Tarefa 15:

" *O polinômio* $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + ix - 3i$ *é divisível por* $(x-i)$? *Justifique.*"

Objetivo:

- Trabalhar com polinômios de coeficientes e variáveis complexas.

Tarefa 16:

" *Construir uma equação polinomial* $P(x) = 0$, *do* 4^o *grau, com conjunto solução* $S = \{½, 2 \text{ e } 3\}$, *tal que* ½ *é raiz dupla e 2 e 3 são raízes simples.*"

Objetivo:

- Obter equações algébricas a partir de sua raízes.

Tarefa 17: (Extraída do Livro "Matemática Aplicada", vol.3, de Trotta, Imenes e Jakubovic. 1980, p.291)

" *Qual é o menor grau para que uma equação polinomial* $P(x) = 0$ *possa admitir raízes* $(2 - i)$, 3 *e* $(5 + i)$?"

Objetivo:

- Analisar coeficientes de equações algébricas e relacionar com suas raízes.

AULA - 06

<u>Atividade 17:</u> Trabalhar as tarefas 14, 15, 16 e 17.

<u>Atividade 18</u>: (Extraída do Livro "Matemática Aplicada", vol.3, de Trotta, Imenes e Jakubovic, 1980, p.261)

" Seja Vc o volume de um cubo de aresta x, e seja Vp o volume de um paralelepípedo com área da base 3 e altura igual à aresta do cubo. Determine x de modo que Vc= Vp +1."

<u>Objetivos:</u>

- Utilizar recursos geométricos na visualização da situação problema.
- Escrever uma equação algébrica para o problema.
- Motivar o aluno com colocações da história da matemática.
- Utilizar a fórmula de Cardano-Tartaglia para resolver a equação encontrada.
- Levar o aluno a perceber a insuficiência dos números reais.
- Levar o aluno a perceber a limitação da fórmula de Cardano-Tartaglia.
- Utilizar números complexos na resolução de equações algébricas.
- Fazer conexões da Equação Algébrica com a geometria.

TAREFAS EXTRA-SALA

<u>Tarefa 18:</u> (Extraída do Livro "Matemática Aplicada", vol.3, de Trotta, Imenes e Jakubovic. 1980, p.254)

"*Quais são as raízes inteiras de* $2x^3 - 17x^2 + 19x + 14 = 0$? "

<u>Objetivos:</u>

- Perceber a importância de, no enunciado, aparecer a condição de as raízes serem inteiras.
- Fazer pesquisa de possíveis raízes inteiras para a equação polinomial dada.
- Usar um resultado facilitador para resolver o problema.

Tarefa 19: (Extraída do Livro "Matemática Aplicada”, vol.3, de Trotta, Imenes e Jakubovic, 1980, p.255)

"*Quais são as raízes racionais de* $3x^3 + x^2 + x - 2 = 0$ *?*"

Objetivo:

- Perceber que se as raízes são números racionais, a busca de uma possível raiz fica mais complicada.
- Usar um resultado conhecido para resolver o problema.

AULA - 07

Atividade 19: Trabalhar as tarefas 18 e 19.

Atividade 20:

" *Resolver a equação* $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, *sabendo que uma de suas raízes é média aritmética das outras duas.*"

Objetivos:

- Observar relações entre coeficientes e raízes.
- Introduzir as Relações de Girard para encontrar a solução do problema.
- Trabalhar as Relações de Girard em uma equação de grau 2 e uma de grau 3.
- As Relações de Girard em uma equação de grau n.

TAREFA EXTRA-CLASSE

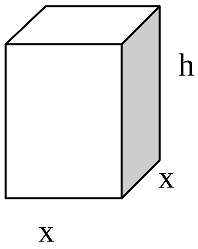
Tarefa 20: (Extraída do livro “Matemática - Contexto & Aplicações”, vol.3, de Luiz Roberto Dante, 1999, p.198)

"*As raízes da equação* $8x^3 - kx^2 + 7x - 1 = 0$, *com* k Î R, *são três números reais em PG. Determine essas raízes*".

Objetivo:

- Usar as Relações de Girard na resolução deste problema.

<u>Tarefa 21:</u> (Extraída da revista RPM, n.40, p.31. SBM, 2º sem.1999. José Paulo Q. Carneiro)
" *Deseja-se construir um reservatório em forma de um prisma reto de base quadrada, com capacidade de 2000 litros, usando, para paredes, fundo e tampa, 20m² de um certo material. Quais devem ser as dimensões do reservatório*?”



<u>Objetivos:</u>

- Usar recursos geométricos para identificar os dados do problema.
- Escrever uma equação algébrica para o problema proposto.
- Usar o método numérico de Newton para resolver equações algébricas de grau maior que dois.
- Utilizar a calculadora para encontrar raízes aproximadas, se necessário.

AULA - 08

<u>Atividade 21:</u> Trabalhar as tarefas 20 e 21.

<u>Atividade 22</u>: Aplicações.

Nesta atividade serão apresentadas algumas aplicações onde as equações algébricas são usadas como ferramenta na busca da solução. Estas aplicações mostram a importância dessa ferramenta tanto em matemática quanto em outras áreas.

<u>*Aplicação 01*</u>: Na geometria. (Carneiro, 1999, p.92)
“ *Calcule o raio da base e a altura de um cilindro circular reto de volume 150 cm³ e área total 200 cm².*”

<u>Objetivos</u>:

- Ler e interpretar o problema.
- Identificar as figuras geométricas do problema e as fórmulas das grandezas pedidas.
- Escrever uma equação para o problema.
- Utilizar os recursos tecnológicos para encontrar a solução do problema.

<u>Aplicação 02</u>: Na economia. (Extraída da Apostila " Um Curso Moderno e Suas Aplicações" – vol. II, de Walter Paulette , 1998, p. 09)

" *A tabela a seguir indica as quantidades produzidas mensalmente de televisores da marca ABC e os respectivos custos totais de produção*

Quantidade produzida	x	100	120	130	140	150	160
Custo total (R$)	y	2000	2300	2700	2900	2800	3000

a) Apresente a função que melhor se ajusta a esses dados.

b) Qual o valor mais provável para os custos fixos?

c) Qual o valor estimado para 180 televisores ?"

<u>Objetivos</u>:

- Mostrar que a função que melhor se ajusta a esses dados é uma equação polinomial do 1º grau.
- Perceber a importância das equações polinomiais em outras áreas como, por exemplo, na economia.

<u>Aplicação 03</u>: Comércio. (Extraída da revista RPM, n.40 p.32. SBM, 2º sem.1999. José Paulo Q. Carneiro)

" Uma televisão, cujo preço à vista é de $ 500,00, é vendida em 6 prestações iguais de $120,00. Qual é a taxa mensal de juros que está sendo cobrada?"

<u>Objetivo</u>:

- Motivar temas da matemática a partir de problemas interessantes, que recaem em equações algébricas.

Aplicação 04: No Cálculo.

O Cálculo é considerado um dos maiores feitos do intelecto humano. O Cálculo é fundamentalmente diferente da matemática estudada no Ensino Fundamental e Médio. O Cálculo é menos estático e mais dinâmico. Ele trata de variações e de movimento, bem como de quantidades que tendem a outras quantidades.

Como as funções algébricas são definidas em R, têm limite, são contínuas e diferenciáveis, elas se tornam importantes ferramentas em disciplinas de cursos universitários que utilizam o Cálculo e em todas as ciências onde ocorrem taxas de variação.

CAPÍTULO - IV

FINALIZANDO A PESQUISA - DISCUSSÃO DO PROJETO

IV.1 - INTRODUÇÃO

Analisando os programas de escolas pesquisadas, professores dessas escolas, professores universitários, educadores e autores de livros didáticos pudemos perceber quão pouca importância tem sido dada ao ensino das equações algébricas no Ensino Médio.

Observamos que, na maioria das escolas públicas, não se dá atenção a esse tópico por motivos que vão desde o desconhecimento de sua importância até à desconsideração do tema. Este fato se confirma na fala de professores que entrevistamos. Quando perguntamos: “Você já trabalhou esse tópico em sala de aula?”, as respostas que mais ouvimos foram: *"Não me lembro de ter trabalhado esse tópico com os alunos"* e *"Nunca trabalhei esse assunto ."*

Ao analisar essa situação uma pergunta surge. "Por que os professores não trabalham esse assunto em sala de aula?" Essa preocupação com o ensino-aprendizagem de Equações Algébricas não é recente e tem sido assunto de pesquisa de educadores matemáticos. No livro do ano de 1988, do NCTM, "*As Idéias da Álgebra*", Theodore Eisenberg e Tommy Dreyfus, 1995, página 127, no artigo “ *Os polinômios no currículo da escola média* ” escrevem:

> Nos últimos vinte anos[2] parece ter havido, no currículo da escola média, uma nítida redução da ênfase nos tópicos relacionados com os polinômios. Isso pode ser constatado mesmo no nível mais simples da fatoração de polinômios quadráticos para obter suas raízes. Em Israel, por exemplo, os alunos primeiro aprendem a resolver equações do segundo grau fatorando a expressão quadrática associada e igualando cada fator a zero. Logo depois, deduz-se a fórmula quadrática usual de resolução.
> A fórmula é de tal modo incorporada pelos alunos, especialmente por aqueles de menor capacidade em matemática, que se torna um procedimento mecânico, um algoritmo vazio de significado, utilizado indiscriminadamente para resolver qualquer equação quadrática.

2.Traduzido em 1995 do livro do ano de 1988 do NCTM, por Hygino H. Domingues.

> Numa turma grande de introdução ao Cálculo, de alunos da Universidade Ben-Gurion que não se destinavam à área de Ciências Exatas, 50% deles resolveram equações como $x^2 + 5x = 0$ e $10x - x^2 = 0$ com a fórmula quadrática! Para equações como $x^2 - 6x + 5 = 0$ ou $2x^2 - 3x - 2 = 0$, essa porcentagem subiu para 70%. Além disso, a maioria dos alunos não tinha idéia de como abordar o problema de achar as raízes de uma equação de grau superior.
> Na verdade, eles não sabiam o que significa 'achar as raízes de uma equação'. Para eles, resolver uma equação quadrática significava pôr números numa fórmula.

Como já pudemos mostrar, no transcorrer desta pesquisa a partir do Roteiro de Trabalho programado, passamos a defender uma forma alternativa de trabalhar Equações Algébricas. Ao criar nosso projeto, assumimos uma metodologia que permitisse trabalhar o tema escolhido de forma a desenvolver no aluno competências e habilidades defendidas pelos PCN-EM (1999, p.259) e acreditamos que a metodologia de Ensino-aprendizagem da Matemática através da Resolução de Problemas é capaz de atender a essas exigências.

O que apresentaremos aqui é uma forma de como pretendemos trabalhar no próximo ano, com uma turma de alunos do 3º ano de Ensino Médio, em nossa escola no Mato Grosso.

Ao criar um projeto de trabalho para nossa sala de aula fizemos algumas considerações que julgamos serem importantes para sua execução. A escola é pública, localizada em um bairro da cidade, tendo em média 40 alunos por sala. Os alunos em sua maioria vêm de lares com uma média salarial baixa, havendo em muitos casos a necessidade de um complemento salarial e, por isso, passam a ser alunos-trabalhadores. Como na maioria das escolas brasileiras, os alunos desta escola também têm muita dificuldade em trabalhar com a matemática.

A grade curricular para o Ensino Médio fixa, para a disciplina de Matemática, de 3 a 4 aulas semanais de 45 a 50 minutos cada. Assim, faz-se necessário planejar muito bem os conteúdos.

Tendo em vista esta realidade, passamos a descrever como poderíamos trabalhar as Equações Algébricas ou Polinomiais no final do 3º ano do Ensino Médio, tendo sido professora dessa turma desde o início do ano letivo. Se esse projeto fosse aplicado somente no final do ano, poder-se-ia dizer que muita coisa poderia ser mudada nele. Porém, como estamos considerando uma sala em que estaríamos trabalhando desde o início do ano, usando a metodologia de ensino defendida nesta pesquisa, acreditamos que o projeto poderia ser conduzido como planejado.

No início do ano apresentaríamos um Termo de Compromisso, onde as normas de trabalho e disciplina e os critérios de avaliação seriam apresentados e discutidos em conjunto, por professor e alunos. Chegando a um acordo todos assinariam o documento. Não é nosso objetivo apresentar um estudo sobre a forma de trabalho. No entanto, com base em experiências de sala de aula regidas por um compromisso, afirmamos que só há vantagens pois, além de não se perder tempo, possibilita ao aluno uma participação mais efetiva no processo de construção do conhecimento. Como professor e alunos têm direitos e deveres estipulados, valores como compromisso e responsabilidade estariam alicerçando a questão da disciplina em sala de aula. Além disso, a avaliação contínua serviria de orientação na busca de um ensino-aprendizagem com compreensão. Nossas aulas atenderão, sempre que possível, aos objetivos criados no projeto e cada atividade será trabalhada nas linhas do roteiro, constante à página 98 desta pesquisa, atendendo aos objetivos específicos de cada uma.

IV. 2 - APLICAÇÃO DO PROJETO

Na realidade, o que apresentaremos aqui é o modo como pretendemos aplicar o projeto. Buscamos dar uma visão de como imaginamos possa transcorrer nosso trabalho em sala de aula.

AULA 01

O objetivo desta aula é levar o aluno a recordar criticamente o conceito de polinômio através de relações e conexões, de modo a perceber a força dos polinômios no currículo de matemática e em suas aplicações.

Atividade 01:

Nesta atividade apresentaremos dois problemas com um mesmo objetivo, o de mostrar a importância dos polinômios na resolução de situações-problema no mundo real. Os dois problemas foram extraídos do livro Merril-Algebra-1 (Applications and Connections, Glencoe/McGraw-Hill, 1995, p.209 e 210). Estes problemas serão entregues aos grupos para leitura, interpretação, exploração e busca de soluções.

O primeiro problema tem origem na pergunta: Há necessidade de controle populacional para os cervos? Isto pode parecer uma interferência na natureza, mas este problema é muito mais complexo.

Problema 01:
"Um cervo tem em média quatro filhos durante seu tempo de vida. Quantos descendentes ele terá em cinco gerações se considerarmos uma população sem controle de natalidade?"

Explorando a questão social

O professor daria tempo aos alunos para lerem o problema e aproveitaria para dizer que este é um problema que surgiu quando algumas cidades passaram a alojar, em seus parques metropolitanos, grupos de cervos oferecendo-lhes comida, cuidados médicos, abrigo no inverno e proteção contra predadores. Sabe-se que qualquer ecossistema natural tem um equilíbrio delicado. Na selva, as populações de cervos são controladas naturalmente por predadores, doenças, fome e outras formas de competição natural. Desde que fossem eliminados quase todos esses controles populacionais, com os cervos vivendo nos parques das cidades que têm a responsabilidade de prover-lhes meios de sobrevivência, problemas enormes, face a uma população sem controle de natalidade, poderiam ocorrer, uma vez que um cervo pode conviver com seus descendentes até a 5ª geração.

Os alunos, em grupo, estariam envolvidos com o questionamento posto e deveriam ser levados a pensar: se um cervo tem em média quatro filhos durante sua vida, uma forma de resolver o problema dado é a de completar o quadro abaixo para determinar o número de descendentes do cervo em cinco gerações. Ao completar o quadro, os alunos poderiam perceber o crescimento da população dos cervos ao longo das cinco gerações assim:

Gerações	População	Números de descendentes
1	x	4
2	$x+x^2$	$4 + 4^2 = 4 + 16 = 20$
3	$x+x^2+x^3$	$4 + 4^2 + 4^3 = 4 + 16 + 64 = 84$
4	$x+x^2+x^3+x^4$	$4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 4 + 16 + 64 + 256 = 340$
5	$x+x^2+x^3+x^4+x^5$	$4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 = 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 = 1364$

Haverá 1364 descendentes para esse cervo. Então, em cinco gerações haveria 1365 cervos vivendo no parque, caso cada cervo tivesse 4 filhos e isso seria um problema imenso para as cidades.

Neste instante o professor poderia chamar a atenção dos alunos dizendo que se pode representar o número de descendentes de um animal que tenha tido ***x*** filhos em sua existência, pela expressão polinomial

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

continuando por algum número de gerações e assumindo-se que nenhum dos animais morra durante esse processo.

Usando a mesma expressão polinomial poderíamos ver que, se um animal tivesse uma média de 13 filhos em sua existência, teria possivelmente 30940 descendentes em quatro gerações, desde que fossem eliminadas todas as possibilidades de controle populacional.

O professor poderia questionar os alunos sobre as estatísticas de previsão populacional nos países e no mundo.

Trabalhando com Polinômios

O professor passaria a trabalhar com polinômios, formalizando diferentes conceitos:

- Constante é um número.

  Exs: -2, 3/5, 0
- Um monômio é uma constante, uma variável ou um produto de uma constante e uma ou mais variáveis.

  Exs: -7, u, $1/3\ m^2$, $-s^2 2t^3$, $6xy^3$
- Coeficiente (ou coeficiente numérico) é o fator constante (ou numérico) num monômio.

  Exs: Coeficiente de $3m^2$ é 3.--

  Coeficiente de $- s^2 2t^3$ é -1.
- Grau de uma variável num monômio é o número de vezes que a variável aparece como um fator no monômio.

  Exs: Em $6xy^3$, o grau de x é 1 e o grau de y é 3.
- Grau de um monômio é a soma dos graus das variáveis num monômio. Uma constante diferente de zero tem grau zero. A constante zero não tem grau.

  Exs: O monômio $6xy^3$ tem grau 4. (1 + 3 = 4)

Grau $(2s^2 2t^3) = 5$

Grau $(-7) = 0$

- Monômios semelhantes são idênticos ou diferem somente pelos seus coeficientes.

  Exs: $- s^2 2t^3$ *e* $2s^2 2t^3$ são semelhantes.

  $6xy^3$ *e* $6x^3y$ não são semelhantes.

- Polinômio é um monômio ou uma soma de monômios. Os monômios num polinômio são chamados termos do polinômio.

  Ex: Em $x^2 - 4x + 5$ os termos são: x^2 , $- 4x$, *e* 5

- Polinômio reduzido ou simplificado é aquele que não apresenta termos semelhantes. Os termos são usualmente arranjados em ordem de grau decrescente de uma das variáveis.

- Grau de um polinômio é o maior dos graus de seus termos depois de reduzidos seus termos semelhantes.

  Ex: Os graus dos termos de $x^4 - 2x^2y^3 + 6y - 11$ são, em ordem, 4, 5, 1 e 0.

  O polinômio tem grau 5.

- Polinômio na variável x é toda expressão $P(x)$ da forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

em que $\{ a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , \ldots , a_1 , a_0 \} \subset C$ e $\{ n, n-1, n-2, \ldots , 1, 0 \} \subset$ N escreve-se na ordem crescente ou decrescente.

- Polinômio identicamente nulo - $P(x) = 0$ se $a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$

Ao escrever o polinômio

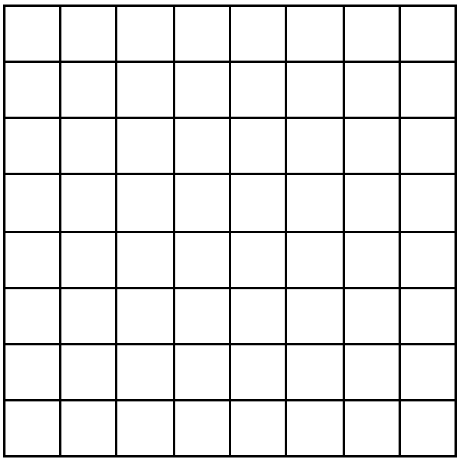
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 + a_0$, dizemos que

- Cada parcela é chamada termo ou monômio do polinômio e $\boldsymbol{a_0}$ é o termo independente da variável **x.**
- $a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , \ldots , a_1 , a_0$ são chamados coeficientes do polinômio.
- O grau de um polinômio não nulo é o maior expoente da variável dentre os termos de coeficientes não nulos.
- Atribuindo-se o valor complexo a à variável x , o resultado da expressão obtida P(a) é chamado de valor numérico do polinômio para x = a

Problema 02:

Neste problema queremos, como um objetivo, que os grupos sejam capazes de estabelecer relações ao olhar um modelo. Queremos, também, que apresentem a solução utilizando-se de diferentes estratégias.

"Olhando para um modelo. Quantos quadrados há sobre o tabuleiro de xadrez?"



Todos sabem que o tabuleiro de xadrez é um quadrado subdividido em 64 quadrados alternadamente pretos e brancos.

Depois de os alunos explorarem o problema, o professor poderia conduzir o trabalho afirmando:

Você pode dizer que há 64 quadrados sobre um tabuleiro de xadrez 8x8. Mas o problema não pede somente quadrados 1x1. Há também os quadrados 2x2, os quadrados 3x3 e assim por diante. Então se no tabuleiro de xadrez, 8x8, há 64 quadrados 1x1, conte o número de quadrados 2x2. Há sete quadrados 2x2 sobre cada fileira e há sete fileiras. Assim há 49 quadrados 2x2. Conte agora o número de quadrados 3x3. Há 36. Você pode criar um modelo comparando as dimensões e o número de quadrados. Nas diferentes dimensões teríamos:

$$64 = 8 \cdot 8 \quad , \quad 49 = 7 \cdot 7 \quad , \quad 36 = 6 \cdot 6 \quad , \quad . \; . \; .$$

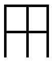
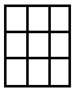
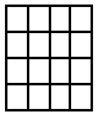
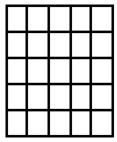
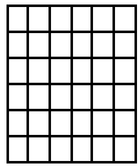
Depois o professor pediria que fizessem uma tabela para ver o modelo mais claramente. Os alunos poderiam representar assim:

Dimensão do quadrado	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8
Número de quadrados	64	49	36	25	16	9	4	1

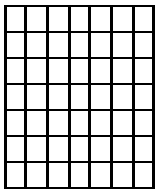
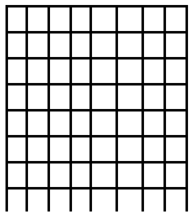
Eles poderiam perceber que o número de quadrados de cada dimensão será sempre um quadrado perfeito e que, assim, o número total de quadrados sobre o tabuleiro de xadrez seria:

$$8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 =$$
$$= 64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$$

ou seja:

64 □ + 49  + 36  + 25  + 16  + 9 

1x1 2x2 3x3 4x4 5x5 6x6

+ 4  + 1 

7 x 7 8 x 8

que é uma expressão polinomial em oito variáveis que são as oito dimensões dos quadrados.

Uma outra estratégia que os alunos poderiam assumir, para resolver este problema, é a de resolver um problema mais elementar e, então generalizar o modelo. Os alunos seriam conduzidos a pensar sobre o número de quadrados num tabuleiro de dimensão 1x1. Depois num tabuleiro de dimensão 2x2, num tabuleiro de dimensão 3x3 e assim por diante. Ao pedir que montassem uma tabela para ver o modelo mais claramente deveria aparecer:

Dimensão do tabuleiro	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8
Número de quadrados	1	5	14	30	55	91	140	204

E eles perceberiam que:

$$\underbrace{1 \quad 5}_{4} \quad \underbrace{\quad 14}_{9} \quad \underbrace{\quad 30}_{16} \quad \underbrace{\quad 55}_{25} \quad \underbrace{\quad 91}_{36} \quad \underbrace{\quad 140}_{49} \quad \underbrace{\quad 204}_{64}$$

Um dos objetivos da Atividade 1 é apresentar ao estudante a importância de se trabalhar com polinômios. Como afirmam Eisenberg e Dreyfus (1995), " *A solução de problemas que, à primeira vista, parecem não ter qualquer ligação com polinômios, acaba dependendo muito deles. Os polinômios são onipresentes em matemática e é importante que os alunos os dominem com segurança* ".

Um situação bem simples, mas que ilustra muito bem o que dizem esses autores é apresentada no seguinte exemplo; onde são relacionados polinômios e sistemas de numeração.
" *Escreva o número 26387 na forma de soma de potências*."

$$(26387)_{10} = 20000 + 6000 + 300 + 80 + 7$$
$$= 2.10^4 + 6.10^3 + 3.10^2 + 8.10^1 + 7.10^0 ,$$

onde aparecem somas de potências de 10.

Assim, $P(x) = 2x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 8x^1 + 7$ *e*

$$P(10) = 2.10^4 + 6.10^3 + 3.10^2 + 8.10^1 + 7.10^0 = (26387)_{10}$$

A partir desse exemplo, poderíamos avançar com o problema e perguntar:

- *Se quiséssemos escrever o mesmo número dado na base 10, na base 5 por exemplo, como deveríamos proceder?*

$$(26387)_{10} = (\ ?\ )_5$$

$$\begin{array}{lllllll}
26387 & \underline{|\ 5\quad} & & & & & \\
\ 13 & 5277 & \underline{|\ 5\quad} & & & & \\
\ \ 38 & \ 27 & 1055 & \underline{|\ 5\quad} & & & \\
\ \ \ 37 & \ \ 27 & \ 5 & 211 & \underline{|\ 5\quad} & & \\
\ \ \ \ 2 & \ \ \ 2 & \ 5 & \ 11 & 42 & \underline{|\ 5\quad} & \\
 & & \ \ 0 & \ \ 1 & \ 2 & 8 & \underline{|\ 5\quad} \\
 & & & & & 3 & 1
\end{array}$$

e $(26387)_{10} = (1321022)_5$

Voltando,

$$(1321022)_5 = 1.5^6 + 3.5^5 + 2.5^4 + 1.5^3 + 0.5^2 + 2.5^1 + 2.5^0 =$$
$$= 1.15625 + 3.3125 + 2.625 + 1.125 + 0.25 + 2.5 + 2 =$$
$$= 15625 + 9375 + 1250 + 125 + 0 + 10 + 2 = (26387)_{10}$$

Ou seja,

$$P(x) = 1x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 1x^3 + 0x^2 + 2x^1 + 2x^0$$

e, para x = 5, $P(5) = 1.5^6 + 3.5^5 + 2.5^4 + 1.5^3 + 0.5^2 + 2.5^1 + 2.5^0$

onde aparecem somas de potencias de 5 e efetuando os cálculos, vem $(26387)_{10}$, que é a expressão do número na base 10.

<u>*Atividade 02*</u>:

Esta atividade faz conexão de polinômios com as geometrias euclidiana e analítica.

" *A medida do volume de um sólido de base retangular é dada por $5x^3 - 20x + 2x^2 - 8$. Encontre as medidas das dimensões do sólido se cada uma delas pode ser escrita como um binômio com coeficientes inteiros*".

Ainda:

a) Se x= 5, quais são os valores das dimensões e do volume desse sólido?

b) Qual o menor valor inteiro de x para que o sólido possa existir? "

Os alunos que já aprenderam fatoração algébrica em séries anteriores deveriam usar, nesta atividade, esse conhecimento. Ao fazer a leitura da atividade os grupos poderiam questionar:

- *Como é que essa equação representa um volume?*

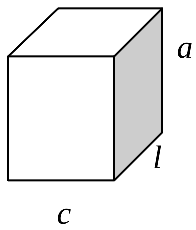
Um caminho para a resolução desse problema é chamar a atenção dos estudantes para o volume de sólidos geométricos. Com relação ao problema, estaríamos explorando
o volume de um sólido retangular dado, pela geometria analítica, por:

$$V = 5x^3 + 2x^2 - 20x - 8$$

- *Como calculamos o volume de um sólido retangular?*

Na geometria euclidiana, o volume de um sólido retangular é calculado em função de suas três dimensões, comprimento, largura e altura, ou seja:

$$V = c.\, l\, .\, a \qquad (1)$$



- *Mas, qual é a relação da fórmula* (1) *com a medida do volume expressa no problema*?, poderá algum estudante questionar.

Analisando a fórmula (1) o que podemos perceber é que c, l e a são fatores de um produto que dá o volume do sólido. Como a medida do volume, dado pelo polinômio, é $V(x) = 5x^3 + 2x^2 - 20x - 8$, então, $l \cdot c \cdot a = 5x^3 + 2x^2 - 20x - 8$. (2)

O professor perguntaria aos alunos:

- *Como transformar essa soma algébrica num produto de três fatores?*

Espera-se que os alunos reconheçam a necessidade da fatoração e, fatorando, chegariam a :

$$
\begin{aligned}
5x^3 + 2x^2 - 20x - 8 &= (5x^3 - 20x) + (2x^2 - 8) \\
&= 5x(x^2 - 4) + 2(x^2 - 4) \\
&= (x^2 - 4)(5x + 2) \\
&= (x+2)(x-2)(5x+2)
\end{aligned}
$$

Logo, o volume seria expresso por $V(x) = (x+2)(x-2)(5x+2)$ e, então, $c \cdot l \cdot a = (x+2)(x-2)(5x+2)$.

Assim, podemos considerar o comprimento $c = (x+2)$, a largura $l = (x-2)$ e a altura $a = (5x+2)$.

Poderíamos aqui chamar a atenção dos estudantes para os conceitos das equações paramétricas estudadas anteriormente na Geometria Analítica.

$$
\begin{cases}
c = (x+2) \\
l = (x-2) \\
a = (5x+2)
\end{cases}
$$

Estas são as equações paramétricas das dimensões do volume expressas pelo parâmetro x. Para o valor dado $x = 5$ e uma unidade de medida de comprimento u temos, então, que o comprimento será $c = 7u$, a largura $l = 3u$ e a altura $a = 27u$.

- *E o volume?*

Podemos calcular o valor do volume desse sólido usando ou a fórmula do volume de um sólido retangular dado pela geometria euclidiana ou, diretamente, na equação polinomial que representa o volume do sólido.

Em qualquer dos casos temos que o volume será $V(5) = 567\,u^3$.

De fato. $V(5) = c.\,l.\,a = 7u \,.\, 3u \,.\, 27u = 567u^3$

ou $V(5) = 5.5^3 - 20.5 + 2.5^2 - 8 = 625 - 100 + 50 - 8 = 567u^3$

- *Qual o menor valor inteiro de x para que o sólido possa existir?*

Usando as equações paramétricas obtidas podemos perceber que, dependendo do valor atribuído a *x*, teremos valores diferentes para as três dimensões. Como as medidas dos lados devem ser números inteiros positivos, o menor valor que se pode assumir para que o sólido exista é:

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \;\Rightarrow\; x > -2 \\ x - 2 > 0 \;\Rightarrow\; x > 2 \\ 5x + 2 > 0 \;\Rightarrow\; x > -2/5 \end{cases}$$

Logo, para que o sólido exista, x deve ser maior que 2. Assim, o menor valor inteiro de *x* será 3.

Como já dissemos, deixaremos para os alunos, por escrito, tarefas extra-classe para que eles trabalhem sobre elas. O professor na aula seguinte as recolheria e as avaliaria conforme consta no termo de compromisso anteriormente aceito. Foram entregues aos alunos as tarefas 01, 02, 03 e 04.

AULA - 02

<u>Atividade 03:</u> Trabalhar as tarefas 01, 02, 03 e 04.

Nessas tarefas seriam trabalhados os conceitos de identidade, multiplicação e divisão de polinômios. Embora os alunos já tenham trabalhado estes conceitos em séries anteriores, nosso objetivo aqui é o de fazê-los recordar esses conceitos individualmente.

<u>Tarefa 01:</u>

"Dados $P(x) = (mx^2 + nx + p)(x + 1)$ e $G(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$, determine os valores de m, n e p para que se tenha $P(x) = G(x)$."

Os alunos deveriam saber que os polinômios

$$\begin{cases} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \end{cases}$$

na variável *x*, são idênticos se e somente se $a_j = b_j$, $\forall\ j \in N$, $0 \leq j \leq n$.

No nosso caso:

$$P(x) = (mx^2 + nx + p)(x + 1) = mx^3 + nx^2 + px + mx^2 + nx + p =$$

$$= mx^3 + (n + m)x^2 + (n + p)x + p$$

$$G(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

Como queremos P(x) $\equiv$ G(x), então,

$$mx^3 + (n + m)x^2 + (n + p)x + p = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 \quad e,$$

pela definição de polinômios idênticos,

$$\begin{cases} m = 2 \\ m + n = 3 \\ n + p = -2 \\ p = -3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontraríamos: p = -3, m = 2, n =1.

<u>Tarefa 02</u>:

"Dado que 5 é o resto da divisão do polinômio ($x^4 - 2x^3 + a\,x^2 - x - 1$) por (x + 2), ache o valor de a "

O professor perguntaria:

- *Quando efetuamos uma divisão de polinômios o que estamos procurando? Os resultados obtidos devem satisfazer a que exigências*?

Ao trabalhar esta tarefa estaríamos respondendo estas questões, recordando o principio da divisão

$$\begin{array}{l|l} D(x) & d(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array} \qquad \text{e} \qquad D(x) = Q(x)\,.\,d(x) + R(x)$$

Assim, dados dois polinômios *A(x)* e *B(x),* com *B(x)* não sendo o polinômio nulo, dividir A(x) por B(x) é encontrar dois polinômios *Q(x)* e *R(x)* que satisfaçam às seguintes condições:

1. *A(x) = Q(x) . B(x) + R(x)*
2. O grau de R(x) não pode ser igual nem maior que o grau de B(x).

Nestas condições, A(x) é o dividendo, B(x) é o divisor, Q(x) será o quociente e R(x) será o resto da divisão.

Se prestarmos atenção à definição anterior, poderemos perceber que ela envolve muitos conceitos. O primeiro deles é o conceito de igualdade de polinômios, o segundo refere-se ao grau de um polinômio e, ainda, são mencionadas a condição do polinômio divisor B(x) não ser o polinômio nulo e o polinômio R(x) ter grau menor que o grau de B(x).

Neste problema podemos explorar a relação da divisão aritmética com números inteiros e a divisão de polinômios, com um exemplo, $86304 \div 405 = ?$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
80000 & + & 6000 & + & 300 & + & 4 & \big| & 400 + 5 \\
-80000 & - & 1000 & & & & & & 200 + 10 + 3 \\
\hline
0 & + & 5000 & + & 300 & & & & \\
 & - & 4000 & - & 50 & & & & \\
\hline
 & & 1000 & + & 250 & + & 4 & = & 1250 + 4 = 1250 + 4 \\
 & & & & & & & & -1200 - 15 = -1210 - 5 \\
\hline
 & & & & & & & & 40 - 1 = 39
\end{array}
$$

ou

$$
\begin{array}{r|l}
86304 & 405 \\ \hline
-810 & 213 \\
530 & \\
-405 & \\
1254 & \\
-1215 & \\
39 &
\end{array}
$$

ou

$$
\begin{array}{r|l}
86304 & 405 \\ \hline
530 & 213 \\
1254 & \\
39 &
\end{array}
$$

Na divisão de polinômios temos o mesmo princípio porém devemos deixar claro, para o aluno, que estamos trabalhando com polinômios e não com números apenas. De fato! Enquanto com números o processo acaba porque o resto diminui sempre, com polinômios ele acaba porque o grau diminui sempre!

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 + ax^2 - x - 1 & x + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^4 - 2x^3} & x^3 - 4x^2 + (8 + a)x - (17 + 2a) \\
0 \quad - 4x^3 + ax^2 & \\
\underline{\quad +4x^3 + 8x^2} & \\
\quad 0 \quad + (8+a)x^2 - x & \\
\quad - \underline{(8+a)x^2 - (16 + 2a)x} & \\
\quad\quad 0 \quad -16x - 2ax - x - 1 = -(17 + 2a)x - 1 & \\
\quad\quad\quad \underline{+ (17 + 2a)x + 34 + 4a} & \\
\quad\quad\quad\quad 0 \quad + \quad 33 + 4a &
\end{array}
$$

Encontramos um $Q(x) = x^3 - 4x^2 + (a + 8)x - (2a + 17)$ e um $R(x) = 4a + 33$. Como o problema dá R(x) = 5, fazendo, em R(x), x = 5, temos $4a + 33 = 5 \Rightarrow a = -7$.

Tarefa 03:

" Leia com atenção e responda as questões abaixo, justificando sua resposta.

a) O que se pode afirmar sobre o grau da soma de dois polinômios de graus diferentes entre si?

b) Apresente um exemplo de dois polinômios do 3º grau que adicionados resultem num polinômio do 1º grau.

c) Determine o polinômio P(x) do 1º grau tal que P(1) = 3 e P(3) = 13.

d) Qual é o grau do polinômio $P(x) = 0x^4 + ax^3 + 2x^2 + 1$?

e) Considerando dois polinômios, ambos de grau n, qual é o grau do produto desses polinômios?

f) Considerando dois polinômios, um de grau m e outro de grau n, qual é o grau do produto desses polinômios?"

O objetivo desta tarefa é desafiar o aluno com questões que requeiram um pensamento crítico. Queremos, com esse tipo de questões, fazer com que o aluno "pense" e seja capaz de, criticamente, responder ao que se pede, pois afiar as habilidades de raciocínio é o mais importante objetivo do pensamento crítico.

a) *O que se pode afirmar sobre o grau da soma de dois polinômios de graus diferentes?*

Recordamos dizendo que grau de um polinômio é o grau da potência de mais alto grau. Espera-se que os alunos digam que o grau do polinômio soma de dois polinômios de graus diferentes, será sempre igual ao grau do polinômio de maior grau.

b) *Apresente um exemplo de dois polinômios do 3º grau que adicionados resultem num polinômio do 1º grau.*

Os alunos poderiam apresentar como exemplo:

$P(x) = 7x^3 - 5x^2 + 9x - 3$ e $G(x) = -7x^3 + 5x^2 + 9x - 3$

Levando a $P(x) + G(x) = 18x - 6$

c) Determine o polinômio $P(x)$ do 1^o grau tal que $P(1) = 3$ e $P(3) = 13$.

Sabemos que um polinômio de grau 1 é escrito da forma $P(x) = ax + b$. Como $P(1) = 3$ e $P(3) = 13$ podemos afirmar que, para o valor x = 1, temos $P(1) = 3$ e para $x = 3$, temos $P(3) = 13$. Assim

$P(1) = 3$ Þ $a \cdot 1 + b = 3$ Þ $a + b = 3$ (1)

$P(3) = 13$ Þ $a \cdot 3 + b = 13$ Þ $3a + b = 13$ (2)

Como os valores de a e b em (1) e (2) são os mesmos temos então o sistema de equações:

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + b = 13 \end{cases}$$

que, quando resolvido, nos dá $a = 5$ e $b = -2$

d) *Qual é o grau do polinômio $P(x) = 0x^4 + ax^3 + 2x^2 + 1$?*

Como o coeficiente de x^4 é zero, seguramente este polinômio não é de grau 4. Porém, para $a > 0$ ou $a < 0$, teremos um polinômio de grau 3 e para $a = 0$ o polinômio será de grau 2.

e) *Considerando dois polinômios, ambos de grau n, qual é o grau do produto desses polinômios?*

Seja, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$

e $G(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0$

Como ambos possuem mesmo grau, temos que

$$P(x) \cdot G(x) = a_n x^n (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0) +$$
$$+ a_{n-1} x^{n-1} (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0) + \ldots +$$
$$+ a_0 (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0).$$

Logo o grau de (P(x) . G(x)) = grau $(a_n x^n \cdot b_n x^n) = grau\ (a_n b_n x^{2n}) = 2n$

Portanto o grau do produto desses polinômios é 2n.

f) Considerando dois polinômios, um de grau m e outro de grau n, qual é o grau do produto desses polinômios?

Seja, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$

e $G(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0$

$$P(x)\,.\,G(x) = a_n x^n(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0) +$$
$$+ a_{n-1} x^{n-1}(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0) + \ldots +$$
$$+ a_0 (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots . + b_1 x^1 + b_0)$$

Assim grau de (P(x) **.** G(x)) = grau $(a_n x^n \;.\; b_m x^m) = grau\ a_n b_m\ x^{n+m}$
Logo o grau de (P(x) **.** G(x)) é n + m.

<u>Tarefa 04:</u>

"A medida da área de um retângulo é dado por $x^2 + 5x - 14$. Determine as dimensões dos lados do retângulo, desde que cada dimensão pode ser escrita como um binômio com coeficientes inteiros."

Esta tarefa foi deixada para casa, com a finalidade de fixar uma idéia trabalhada em sala de aula.

Dos alunos espera-se que consigam perceber que $A = b\ .\ h$, fórmula vinda da geometria euclidiana, e que $A = x^2 + 5x - 14$ é a medida da área dada parametricamente pelo problema. Então,

$$b.\,h = x^2 + 5x - 14 \qquad (1)$$

e, sendo $x^2 + 5x - 14 = (x - a)(x - b)$, onde *a* e *b* são raízes do trinômio, temos que

$$\begin{cases} a + b = -5 & ® \quad a = -7 \\ a\ .\ b = -14 & ® \quad b = +2 \end{cases}$$

Portanto, $x^2 + 5x - 14 = (x + 7)(x - 2)$ (2)

Levando (2) em (1), $b.\,h = (x + 7)(x - 2)$

e $\begin{cases} b = x + 7 \\ h = x - 2 \end{cases}$ são as equações paramétricas das dimensões do retângulo.

<u>Atividade 04:</u>

"*Determine o polinômio A(x) sabendo que, na divisão de A(x) por* $B(x) = x^2 - 8$, *obteve-se quociente* $Q(x) = 2x^2 + 1$ *e resto* $R(x) = 3x + 10$."

Com esta atividade pretendemos reconhecer a operação divisão com resto.

Como a $\begin{array}{c|c} A(x) & B(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$ corresponde A(x) = Q(x) . B(x) + R(x) (1)

No nosso caso, $\begin{array}{c|c} A(x) & x^2 - 8 \\ \hline 3x + 10 & 2x^2 + 1 \end{array}$

e, efetuando as operações indicadas em (1) , $(2x^2 + 1)(x^2 - 8) + 3x + 10.$

$$\begin{array}{rrrrr}
2x^2 & + 1 & & & \\
x^2 & - 8 & & & \\
\hline
2x^4 & + x^2 & & & \\
 & - 16x^2 & - 8 & & \\
\hline
2x^4 & - 15x^2 & - 8 & & \\
 & & + 10 & + 3x & \\
\hline
2x^4 & - 15x^2 & + 2 & + 3x &
\end{array}$$

chegamos a $A(x) = 2x^4 - 15x^2 + 3x + 2$

Atividade 05:

" A Fórmula de Bhaskara "

Até aqui os alunos, quando tiveram necessidade de achar as raízes de uma equação polinomial, lançaram mão da fatoração de polinômios pois, para achar as raízes da equação basta fazer P(x) = 0.

Se tivermos uma equação do 1° grau , $ax + b = 0$, teremos uma única raiz dada por x = - b/a. Se a equação for do 2° grau, $ax^2 + bx + c = 0$, ou seja, $x^2 + (b/a)x + c/a = 0$, suas raízes x_1 e x_2 serão obtidas através do sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a \\ x_1 \cdot x_2 = c/a \end{cases}$$

ou, pela fórmula de Bhaskara,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como, na maioria das vezes, essa fórmula não é deduzida pelos alunos ou para os alunos, resta a eles memorizarem-na. Uma vez memorizada, essa fórmula é de tal modo incorporada pelos alunos que acaba se tornando um procedimento mecânico, um algoritmo vazio de significado, utilizado indiscriminadamente para resolver qualquer equação quadrática, como dizem Eisenberg e Dreyfus (1995).

Uma maneira de dar significado a essa fórmula é discutir com os alunos que ela nos dá as raízes de uma equação polinomial de 2º grau, $ax^2 + bx + c = 0$, em função dos coeficientes a, b e c do trinômio.

A expressão $b^2 - 4ac$, que é conhecida como o discriminante da equação (aquele que discrimina, que faz a diferença; que separa) e que é denotado por Δ, nos informa se a equação tem raízes reais e, no caso de existirem, se são iguais ou diferentes.

<u>Formalizando</u>

Uma raiz, ou solução, de uma equação polinomial é um valor da variável que satisfaz a equação. As raízes de $x^2 - 5x - 24 = 0$ são -3 e 8 , porque $(-3^2) - 5(-3) - 24 = 0$ e $8^2 - 5.(8) - 24 = 0$.

Quando uma equação polinomial em x é escrita com 0 (zero) em um dos lados, pode-se resolver a equação se for possível fatorar o polinômio do outro lado em fatores lineares da forma $ax + b$, a ¹ 0. A base deste método é a chamada propriedade do produto-zero:

$$ab = 0 \quad \text{se e somente se} \quad a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0.$$

A propriedade do produto-zero pode ser estendida para um número qualquer de fatores. Assim, o produto de números reais é zero se e somente se pelo menos um de seus fatores é zero.

Serão entregues aos alunos as tarefas extra-classe 05, 06 e 07.

AULA - 03

<u>Atividade 06:</u> Trabalhar as tarefas 05, 06, e 07.

Como os alunos já trabalharam estas tarefas em casa, agora é o momento de se discutir em plenária os conceitos envolvidos nelas, como o da divisão de polinômios, o de equação polinomial e suas raízes e o de função polinomial.

<u>Tarefa 05:</u>

“ Efetue a divisão do polinômio $A(x) = 3x^3 - 13x^2 + 37x - 50$ por $B(x) = x^2 - 2x + 5$ e responda as questões: Quem é o divisor, o dividendo e o resto? A divisão é exata? Pode-se afirmar que A(x) é divisível por B(x) ? Justifique cada resposta.”

Um dos objetivos desta tarefa é o de levar o aluno a usar os conceitos obtidos em sala de aula. Com esta tarefa espera-se que o aluno faça a divisão de polinômios

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

obtendo

$$Q(x) = (3x - 7) \quad \text{e} \quad R(x) = 8x - 15.$$

Como $R(x) \neq 0$, temos uma divisão não exata e portanto A(x) não é divisível por B(x). Para saber se efetuamos corretamente essa operação basta fazer $(3x - 7).(x^2 - 2x + 5) + (8x - 15)$ e obter, $3x^3 - 13x^2 + 37x - 50$.

<u>Tarefa 06:</u>

“ Determine os valores de a e b para que os polinômios $P(x) = x^3 - 2ax^2 + (3a + b)x$ e $G(x) = x^3 - (a + 2b)x + 2a$ sejam divisíveis por $H(x) = x + 1$.”

A correção desta tarefa em plenária dará oportunidade para se discutir, em conjunto, questões levantadas pelos alunos ou colocadas pelo próprio professor. O que estamos procurando? Que conceitos matemáticos já estudados estão envolvidos no problema? Quais os caminhos que podemos percorrer para chegar à solução? O professor deveria deixar claro para os alunos que o que estamos procurando são valores de *a* e *b* que fazem P(x) e G(x) divisíveis por H(x). O problema diz que P(x) e G(x) são divisíveis por H(x)= x +1, então, os alunos deveriam dizer que (x +1) é fator de P(x) e de G(x). Assim, $x = -1$ é uma de suas raízes, ou seja, P(-1) = 0 e G(-1) = 0.

Mas, $P(-1) = (-1)^3 - 2a.(-1)^2 + (3a + b) \cdot (-1) = (-1) – 2a - 3a - b$,

$\therefore \quad P(-1) = -1 - 5a - b$

e $\quad G(-1) = (-1)^3 - (a + 2b) \cdot (-1) + 2a = (-1) + a + 2b + 2a$

$\therefore \quad G(-1) = -1 + 3a + 2b$

Como os alunos estariam buscando valores de *a* e *b* para os quais P(x) e G(x) sejam divisíveis por H(x), eles poderiam perceber que :

$$\begin{cases} -1 - 5a - b = 0 \\ -1 + 3a + 2b = 0 \end{cases}$$

e ao resolver o sistema achariam: a = - 3/7 e b = 8/7.

<u>Tarefa 07</u>:

"Um teatro tem 1200 assentos. Para quase todas as apresentações ele tem preenchido sua capacidade. Atualmente o ingresso custa \$ 5,00 e a dona do teatro quer aumentar seu preço. Ela estima que, para cada \$ 0,50 de aumento no preço do ingresso, 100 pessoas a menos assistirão o espetáculo. Baseados nesta estimativa, que preço do ingresso maximizaria sua renda?"

É objetivo deste problema apresentar uma situação do mundo real, cuja expressão matemática é dada por uma equação do 2º grau. Um segundo objetivo é mostrar que a resolução de uma equação e seu gráfico são ferramentas utilizadas neste problema. Discutir problemas sociais a respeito da renda desejada é um outro objetivo.

Analisando as condições dadas neste problema os alunos deveriam ver que, com o teatro cheio, a renda seria \$ 5,00 . 1.200 = \$ 6000 por espetáculo.

Seja x o número de vezes em que houve um aumento de \$ 0,50 no preço do bilhete.

Seja P(x) = \$ 5,00 + \$ 0,50x = preço do bilhete.

Seja N(x) = 1200 - 100x = número de bilhetes vendidos por apresentação e seja

y (x) = renda de cada apresentação.

Portanto $y(x) = (1200 - 100x) \, . \, (\$ 5{,}00 + \$ 0{,}50x)$.

Esta função seria trabalhada em plenária chegando-se à função

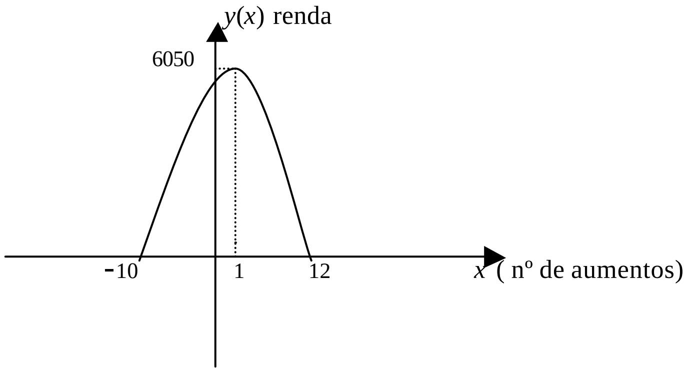
$$y(x) = 6000 + 600x - 500x - 50x^2 =$$
$$= -50x^2 + 100x + 6000 =$$
$$= 50(-x^2 + 2x + 120)$$

Para achar as raízes da equação $50(-x^2 + 2x + 120) = 0$, basta achar as raízes da equação $-x^2 + 2x + 120 = 0$. Resolvendo essa equação chega-se a $x = 12$ e $x = -10$. A função $y(x) = 50(-x^2 + 2x + 120)$ possui ponto de máximo, pois o coeficiente de x^2 é negativo. Portanto possui ponto de máximo, dado por

$x_m = (-10 + 12)/2 = 1$ e $y_m = 50(-(1)^2 + 2.1 + 120) = 6050$

Assim, $(x_m, y_m) = (1, 6050)$

O gráfico da função $y(x) = 50(-x^2 + 2x + 120)$ é dado por



Analisando o gráfico vemos que a renda máxima ocorreria logo no primeiro aumento e assim o preço do ingresso, que maximizaria a renda da proprietária do teatro, seria de $ 5,50 ou seja, um acréscimo de uma vez $ 0,50 ao valor atual do ingresso. A renda neste caso seria de $ 6050.

Para a dona do teatro, ganhar $ 50,00 a mais na renda e perder 100 espectadores não seria frustrante? Será que não seria melhor ver o teatro cheio e deixar de ganhar $ 50,00 ?

Atividade 07:

"Dividir $(x^4 - 2x^3 - 7x^2 - x - 1)$ por $(x + 2)$."

O objetivo desta atividade é o de relacionar a divisão longa com o dispositivo prático de Briot-Ruffini.

A atividade 07 seria entregue aos grupos e o professor diria:

P: - Esta atividade consiste em dividir polinômios.

A: - Novamente? Estamos repetindo a aula passada?

P: - Sim.

O professor daria tempo aos alunos para fazerem o trabalho. Depois alguém colocaria sua solução na lousa. Com os recursos que têm, os alunos fariam:

- <u>Por divisão</u>

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 - 7x^2 - x - 1 & x + 2 \\ \cline{2-2}
-x^4 - 2x^3 & x^3 - 4x^2 + x - 3 \\ \cline{1-1}
\quad - 4x^3 - 7x^2 & \\
\quad + 4x^3 + 8x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad + x^2 - x & \\
\qquad - x^2 - 2x & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad - 3x - 1 & \\
\qquad\quad + 3x + 6 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad +5 &
\end{array}
$$

P: - Agora vamos tentar percorrer um outro caminho para chegar ao mesmo resultado com mais rapidez. Buscamos fazer esta divisão de um modo mais rápido. Como?

Neste momento o professor iria à lousa e perguntaria: - *Vocês perceberam que, em cada lance da divisão feita, o grau do polinômio resultante decresce? Vocês percebem que, depois de eliminado o termo de mais alto grau do polinômio, passa-se a trabalhar com o resto?* Esta forma abreviada usa somente os coeficientes envolvidos.

Na lousa, sintetizando a divisão feita anteriormente, se chegaria ao Dispositivo Prático de Briot-Ruffini para dividir um polinômio P(x) de grau n por um polinômio Q(x) de grau 1.

Um exemplo seria fazer $(x^4 - 2x^3 - 7x^2 - x - 1)$ ¸ $(x + 2)$

Raiz da equação x+2= 0	coeficientes do dividendo				
-2	1	- 2	- 7	- 1	- 1
		(+)	(+)	(+)	(+)
		- 2	+8	-2	+ 6
		1.(-2)	(-4).(-2)	1.(-2)	(-3).(-2)
	1	- 4	+ 1	-3	5
	coeficiente do quociente				resto

Nessa divisão obteríamos $Q(x) = 1x^3 - 4x^2 + 1x - 3$ e $R(x) = 5$.

Atividade 08:

"Qual é o resto da divisão de $P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 8x - 3$ por $G(x) = x - 6$?"

O primeiro objetivo desta atividade é o de aplicar o dispositivo prático de Briot-Ruffini para a divisão de polinômios.

Como o problema pede que se faça a divisão de polinômios, os alunos poderiam lançar mão das duas formas conhecidas, a divisão longa ou a forma sintética, e fazer:

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -\ 10x^2 & +\ 8x & -\ 3 & \ x - 6 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +\ 12x^2 & & & \ 2x^2 + 2x + 20 \\ \cline{1-2}
 & +\ 2x^2 & +\ 8x & & \\
 & -\ 2x^2 & +\ 12x & & \\ \cline{2-3}
 & & +\ 20x & -\ 3 & \\
 & & -\ 20x & +\ 120 & \\ \cline{3-4}
 & & & +\ 117 &
\end{array}$$

ou

	2	- 10	+ 8	-3
6	2	+ 2	+ 20	117

Um outro objetivo das atividades 08 e 09 seria o de trabalhar os Teoremas de D'Alembert e o Teorema do Fator, que serão usados para encontrar fatores de polinômios e resolver equações polinomiais.

A atividade 08 pedia o resto da divisão de $P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 8x - 3$ por $G(x) = x - 6$. Os alunos chegariam ao resultado 117, quer pela divisão longa quer pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini e poderiam recordar, com a ajuda do professor que, se o polinômio divisor tem grau 1, o resto da divisão é uma constante.

No problema dado

$$\begin{array}{l|l}
P(x) & G(x) \\ \cline{2-2}
R(x) & Q(x)
\end{array}$$

de onde sai $\quad P(x) = Q(x)\,.\,G(x) + R(x) \qquad (1)$

como $\quad G(x) = x - 6$

$G(x) = 0 \;\rightarrow\; x - 6 = 0$ e, portanto, $x = 6$

Logo 6 é raiz de $G(x)$ e, portanto, $G(6) = 0$. Substituindo em (1) temos:

$$P(6) = Q(6)\,.\,0 + R(6)$$

$$P(6) = 0 + R(6) = R(6)$$

Assim, o resto da divisão de $P(x)$ por $G(x) = x - 6$ é $P(6)$, isto é, o valor do polinômio $P(x)$ no ponto $x = 6$.

O professor perguntaria à classe: - *Isso é sempre verdade*?

Os alunos poderiam perceber que, neste problema, isso é verdade substituindo, em P(x), x por 6.

$$P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 8x - 3$$

$$P(6) = 2.6^3 - 10.6^2 + 8.6 - 3 =$$

$$= 2.216 - 10.36 + 48 - 3 =$$

$$= 412 - 360 + 45 = 477 – 360 = 117$$

- *Será que é verdade sempre?*

O professor começaria usando história da matemática e diria que um matemático francês, Jean Le Rond D'Alembert, que viveu no século XVIII, provou que isso é sempre verdade. Ele provou que se pode determinar o resto da divisão de um polinômio P(x) por um polinômio do tipo (x- a) , sem que se tenha de efetuar a divisão.

O Teorema de D'Alembert, também conhecido por Teorema do Resto, diz o seguinte: " O resto da divisão do polinômio P(x) por (x - a) é P(a)".

Os alunos poderiam perceber que este enunciado generaliza o trabalho feito com a atividade 08.

Pois,

$$\begin{array}{c|l} P(x) & x - a \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

$$P(x) = Q(x).(x – a) + R(x)$$

e $P(a) = Q(a) .(a - a) + R(a)$

e, portanto, $P(a) = Q(a) . 0 + R(a)$

e $P(a) = R(a)$

Reforçando o professor diria: - *Se o polinômio divisor é de grau 1, então, o resto é sempre uma constante.* Diria também que o Teorema de D'Alembert se constitui, em muitos casos, uma ferramenta facilitadora.

<u>Atividade 09:</u>

" Calcule o quociente de $P(x) = x^3 - 6x^2 + x - 6$ por (x-6).

Mostre que (x - 6) é um fator de P(x)"

Os objetivos desta atividade são:

- Fazer a divisão pedida por diferentes caminhos.
- Usar o Teorema de D'Alembert para tirar, como corolário, o Teorema do Fator.

A atividade seria entregue aos grupos que, partindo de caminhos diferentes, chegariam à solução da primeira parte do problema dado, mostrando o quociente e o resto. Os alunos apresentariam o seguinte:

- Divisão longa

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -\ 6x^2 & +\ x & -\ 6 & x - 6 \\ \cline{5-5}
-\ x^3 & +\ 6x^2 & & & x^2 + 1 \\ \cline{1-2}
 & & +\ x & -\ 6 & \\
 & & -\ x & +\ 6 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

- Briot-Ruffini

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -6 & +1 & -6 \\ \hline
6 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

onde se encontram $Q(x) = x^2 + 1$ e resto $R(x) = 0$.

Num segundo momento, o professor pediria aos alunos que, fazendo uso do Teorema de D'Alembert, pudessem perceber que o divisor (x-6) é um fator do polinômio P(x).

Ao usar o Teorema de D'Alembert, os grupos reconheceriam que a divisão de P(x) por (x - 6) resulta num quociente Q(x) e um resto P(6), pois se:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + x - 6 \qquad (1)$$

$$P(x) = Q(x) . (x – 6) + R(x)$$

mas, $$P(6) = Q(6) . (6 – 6) + R(6)$$

$$P(6) = R(6)$$

De (1) vem que $P(6) = 6^3 - 6.6^2 + 6 - 6 =$

$$= 216 – 216 + 6 - 6 = 0$$

Portanto $P(6) = 0$ e $R(6) = 0$

Logo $P(x) = Q(x) . (x-6) + 0$ e se $P(x) = Q(x) . (x – 6)$. Então, $(x – 6)$ é fator de P(x).

Esse resultado é conhecido como o Teorema do Fator cujo enunciado diz:

“ c é uma raiz de um polinômio P(x), de grau n > 0, se e somente se (x – c) é um fator de P(x).”

<u>Demonstração</u>

$\Rightarrow$ Pelo Teorema de D'Alembert, o resto da divisão do polinômio P(x) por (x – c) é P(c) e a divisão de P(x) por (x – c) resulta num quociente Q(x) e num resto P(c) tal que

$$P (x) = (x – c) . Q(x) + P(c)$$

Se, por hipótese, c e uma raiz de P(x) então P(c) = 0

e, $$P(x)= (x – c). Q(x)$$

Logo (x - c) é um fator de P(x).

$\Leftarrow$ Reciprocramente, se $(x - c)$ é um fator de P(x), então, $P(x) = Q(x)(x-c)$, para algum polinômio Q(x).

Assim, $P(c) = Q(c).(c - c) = Q(c).0 = 0$ e, portanto, c é uma raiz de P(x).

<u>*Corolário:*</u>

" P(x) é divisível por $(x - a)$ e por $(x - b)$, com $a \neq b$, se e somente se $P(x)$ for divisível por $(x - a)(x - b)$".

De fato.

$$P(x) = Q_1(x).(x - a)$$

$$Q_1(x) = Q_2(x)(Q_1(x))$$

Portanto, $P(x) = Q_2(x).(x - b).(x - a)$

Ou seja,

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} 0 & Q_1(x) \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} Q_1(x) & x-b \\ \cline{2-2} 0 & Q_2(x) \end{array}$$

$$\therefore \; P(x) = Q_2(x).(x - b).(x - a)$$

E se $a = b$?

$P(x) = Q(x).(x - a).(x - a) = Q(x).(x - a)^2$ e, neste caso, diríamos que a é uma raiz dupla, ou seja, uma raiz de multiplicidade 2.

Seriam deixadas as tarefas 08 , 09 e 10 para serem trabalhadas em casa.

AULA - 04

<u>Atividade 10:</u> Trabalhar as tarefas 08, 09 e 10.

O objetivo destas atividades é fixar novos conceitos e novos conteúdos trabalhados até agora.

Tarefa 08:

" O polinômio $P(x) = x^4 - 4x^3 + mx^2 + 4x + n$ é divisível por $(x – 1)(x –2)$. Calcule $(5m + 2n)$."

Nesta tarefa queremos que os alunos se utilizem das ferramentas da divisão já vistas anteriormente. Porém, nosso objetivo é mostrar que o Teorema do Fator e seu Colorário simplificam este trabalho.

O que esperamos dos alunos é que, ao terem trabalhado o Teorema do Fator e seu Corolário, eles se sintam capazes de usá-los neste problema.

Do Corolário ⇒ Se P(x) é divisível pelo produto $(x – 1)(x – 2)$, ele é também divisível por $(x – 1)$ e por $(x – 2)$ e, portanto, 1 e 2 são raízes de $P(x) = 0$. Assim, veriam que:

$$P(1) = 1^4 – 4.1^3 + m.1^2 + 4.1 + n = 1- 4 + m + 4 + n$$

Portanto, $P(1) = m + n + 1$

$$P(2) = 2^4 – 4.2^3 + m.2^2 + 4.2 + n = 16 – 32 + 4m + 8 + n$$

Portanto, $P(2) = 4m + n - 8$

Logo, se 1 é raiz ⇒ $P(1) = 0$

se 2 é raiz ⇒ $P(2) = 0$

Então
$$\begin{cases} m + n + 1 = 0 \\ 4m + n - 8 = 0 \end{cases}$$

e, resolvendo o sistema, encontrariam $n = - 4$ e $m = 3$.

Logo, $5m + 2n = 5.3 + 2.(-4) = 15 - 8 = 7$.

Pode-se verificar a veracidade da resposta fazendo a substituição dos valores de n e m em P(x) e, depois, dividir este polinômio obtido por $(x- 1)$ ou $(x-2)$ encontrando resto zero.

Tarefa 09:

a) "Qual é o resto da divisão de $A(x) = x^{23} - 2x^{10} + 1$ por $G(x) = x - 1$?"

O objetivo desta atividade é mostrar como a ação destes teoremas vistos facilita o cálculo. No caso de nossa tarefa, os alunos, para saberem qual o resto dessa divisão, poderiam usar várias ferramentas já conhecidas. Por exemplo, o algoritmo da divisão longa de polinômios, o dispositivo prático de Briot-Ruffini, o Teorema de D' Alembert ou o Teorema do Fator.

Vários alunos poderão tentar fazer a divisão de A(x) por G(x). Este procedimento se mostraria extremamente trabalhoso. Outros, usando Briot-Ruffini, trabalhariam menos, mas ainda seria trabalhoso. Outros, no entanto, usando o Teorema de D'Alembert veriam que, se $G(x) = x – 1$, então, supondo que A(x) fosse divisível por G(x), $x = 1$ seria raiz de A(x) e, assim, $A(1) = 0$.

Calculando $A(1) = 1^{23} - 2.1^{10} + 1 = 1 – 2 + 1 = 0$

e, portanto, o resto da divisão de P(x) por G(x) é zero.

b) Determine o resto da divisão de $P(x) = x^n - 1$, n Î N^*, por $D(x) = x + 1$

A resolução deste problema é semelhante à resolução do item (a). Porém, o professor mostraria aos alunos, na plenária, que estaria generalizando esse tipo de resolução para polinômios de grau n, com n Î *N**.

Como $P(-1) = (-1)^n - 1$, então:

- Se n é um número *par*, $(-1)^n = 1$, e então $P(-1) = 0$
- Se n é um número *ímpar*, $(-1)^n = -1$, e então $P(-1) = -2$

Concluímos que o resto da divisão de $(x^n - 1)$ *por* $(x + 1)$ depende da paridade de n. Se n for par o resto é zero, se n for ímpar o resto é (-2).

<u>Tarefa 10:</u>

" Determine o polinômio P(x) do 3º grau que se anula para $x = 1$ e que, dividido por (x + 1), (x - 2) e (x + 2), apresenta resto igual a 6."

Para este problema, o objetivo principal seria o de trabalhar o conceito de divisão com resto e o conceito de fatores de um polinômio.

Seja $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\[2ex] \begin{array}{l|l} P(x) & x+1 \\ \hline 6 & Q_1(x) \end{array} \quad \rightarrow \quad P(x) – 6 = Q_1(x)(x + 1) \\[2ex] \begin{array}{l|l} P(x) & x-2 \\ \hline 6 & Q_2(x) \end{array} \quad \rightarrow \quad P(x) – 6 = Q_2(x)(x - 2) \\[2ex] \begin{array}{l|l} P(x) & x-2 \\ \hline 6 & Q_3(x) \end{array} \quad \rightarrow \quad P(x) – 6 = Q_3(x)(x + 2) \end{cases}$$

Logo, $P(x) - 6$ é divisível por $\begin{cases} x+1 \\ x-2 \\ x+2 \end{cases}$

e $\quad P(x) – 6$ é divisível pelo produto $(x + 1) . (x – 2) . (x + 2)$.

Logo $\quad P(x) – 6 = s(x)(x + 1)(x – 2)(x + 2)$

Mas $\quad P(1) = 0$

e $\quad P(1) – 6 = s(1)(1 + 1)(1 – 2)(1 + 2)$

Então $\quad 0 - 6 = s(1)\, 2\,(-1)\,(3) = s(1)(-6)$

e $\quad - 6 = s(1)(-6)$, portanto, $s(1) = 1$

Como grau $P(x) = 3$ e grau $[(x+ 1)(x – 2)(x + 2)] = 3$, então, grau $s(1) = 6$, $s(x) = 1$ e $1^6 = 1$.

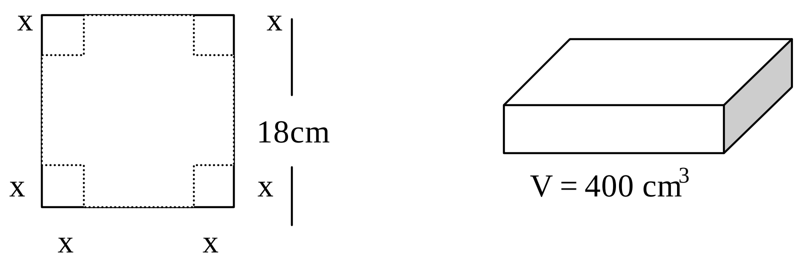
$P(x) – 6 = 1(x + 1)(x – 2)(x + 2)$

Portanto, $P(x) = (x + 1)(x – 2)(x + 2) + 6 = x^3 + x^2 - 4x + 2$

<u>Atividade 11</u>:

a) "Cortando-se quadrados em cada canto de uma folha de papelão quadrada, com 18 cm de lado e dobrando-se conforme a figura abaixo, obtêm-se uma caixa retangular sem tampa. Qual deve ser o lado do quadrado a ser recortado para que o volume da caixa seja igual a $400cm^3$?"

Os objetivos desta atividade são: a) interpretar o problema e traduzi-lo para a linguagem matemática; b) usar ferramentas matemáticas adequadas à resolução do problema.



Este problema encontra-se no capítulo 6 do livro "A Matemática para o Ensino Médio", vol.3, de Elon Lages Lima e outros. Na solução deste problema fazemos uma conexão com a geometria.

O volume da caixa é dado por $V(x) = a_b . h$

As dimensões da caixa são $\begin{cases} l = 18 – 2x \\ h = x \end{cases}$

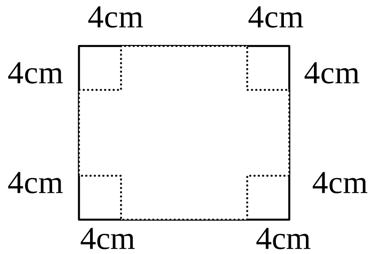
e o volume então será dado por $V(x) = (18 – 2x)^2 x = 4x^3 - 72x^2 + 324x$, um polinômio do 3º grau em função do parâmetro x.

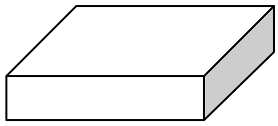
Conforme dados do problema, o lado x do quadrado a ser recortado é obtido resolvendo –se a equação $400 = 4x^3 - 72x^2 + 324x$, ou seja , $x^3 - 18x^2 + 81x - 100 = 0$.

b) " Verificar que, cortando-se um quadrado de lado 4cm nos quatro cantos de uma folha de papelão de 18cm de lado e dobrando conforme a figura, formamos uma caixa sem tampa cujo volume é igual a 400cm^3".

Aqui o objetivo é :

- Verificar que 4 cm é solução do problema.





V = 400 cm^3

Vimos, na parte (a), que $V(x) = 4x^3 - 72x^2 + 324x$.

Para x = 4 temos $V(4) = 4.4^3 - 72.4^2 + 324.4 =$

$= 256 - 1152 + 1296 =$

$= 1552 - 1152 = 400$ cm^3

c) "Existe algum outro valor do lado do quadrado recortado em cada canto, para o qual o volume da caixa resultante seja igual a 400 cm^3 ? "

Usando o dispositivo de Briot-Ruffini ou mesmo a divisão longa, sabendo que 4 é uma raiz do polinômio $V(x) = 4x^3 - 72x^2 + 324x$, o que se quer é fazer

$$(4x^3 - 72x^2 + 324x) \div (x - 4)$$

Então

	4	-72	324
4		+16	-224
	4	-56	100

e $V(x) = (x - 4) (4x^2 - 56x + 100)$

Queremos as raízes. Portanto fazemos V(x) = 0 , obtendo $\begin{cases} x - 4 = 0 \\ 4x^2 - 56x + 100 = 0 \end{cases}$

De $x - 4 = 0$ vem $x_1 = 4$

De $4x^2 - 56x + 100 = 0$ vem $4(x^2 - 14x + 25) = 0$ e $x^2 - 14x + 25 = 0$.

Resolvendo essa equação chega-se a

$$x_2 = 7 + 2\sqrt{6} \quad \text{e} \quad x_3 = 7 - 2\sqrt{6}$$

Como o lado x do quadrado a ser recortado deve satisfazer $0 < x < 9$, concluímos que, além da raiz 4 considerada, a raiz $(7 - 2\sqrt{6}) \cong 2{,}1$ cm, serve.

Logo: $x = (7 - 2\sqrt{6})$ cm $\cong 2{,}1$ é uma outra solução do problema.

<u>Atividade 12:</u>

"Em um experimento científico chegou-se à equação $x^3 - (5+i)x^2 + (6+5i)x - 6i = 0$. Achar as raízes dessa equação sabendo que i é uma de suas raízes."

Atendendo aos objetivos colocados para esta atividade e sabendo que i é uma das raízes da equação dada, ao usar uma das formas de divisão de polinômios chegaríamos a:

$$x^3 - (5 + i)x^2 + (6 + 5i)x - 6i = (x - i)(x^2 - 5x + 6) = (x - i)(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\text{Assim: } \begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{são as raízes da equação dada.}$$

Seriam deixadas as tarefas extra-classe de número 11,12 e 13.

$\boxed{\text{AULA - 05}}$

<u>Atividade 13</u>: Trabalhar as tarefas 11, 12 e 13.

Na correção destas atividades em plenária, nosso objetivo é o de fazer o aluno perceber as diversas maneiras de se resolver um problema e reconhecer a existência de raízes iguais. Observamos que todas as dificuldades relativas às técnicas operatórias serão consideradas e trabalhadas.

Tarefa 11:

" Decomponha em fatores do 1º grau, o polinômio

$P(x) = x^3 - (4 + 4i)x^2 + (-5 + 6i)x + 10i$ sabendo que (-1) é uma de suas raízes."

O objetivo desta tarefa é o de levar o aluno a decompor o polinômio em fatores do 1º grau, agora no conjunto C. Embora, nesta tarefa, apareça um polinômio com coeficientes complexos, podemos decompô-lo em fatores, usando variados caminhos.

Se $P(x) = (x + 1)(x - 4 - 2i)(x - 1 - 2i)$ e (-1) é uma raiz, então, usando Briot-Ruffini,

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -(4+4i) & +(-5+6i) & +10i \\ \hline -1 & 1 & (-5-4i) & +10i & 0 \end{array}$$

chega-se a, $Q(x) = x^2 - (5 + 4i)x + 10i$.

Resolvendo a equação do 2º grau $x^2 + (-5 - 4i)x + 10i = 0$ chegamos a

$x_1 = 4 + 2i$ e $x_2 = 1 + 2i$.

Então $P(x) = (x + 1)\,[x - (4 + 2i)]\,[x - (1 + 2i)]$

Tarefa 12:

"Mostre, por diferentes caminhos, que o número i é raiz do polinômio $P(x) = x^2 + 1$."

O objetivo desta tarefa é exercitar técnicas operatórias com números complexos. Queremos mostrar que o número i é raiz de $P(x) = x^2 + 1$, isto é , que (x-1) é um seu fator.

Por divisão

$$\begin{array}{rl|l} x^2 & +\ 1 & x - i \\ \cline{3-3} -x^2 + ix & & x + i \\ \cline{1-1} +ix & +\ 1 & \\ -ix & -\ 1 & \\ \cline{1-2} & 0 & \end{array}$$

Por Briot-Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 1 \\ \hline i & 1 & i & 0 \end{array}$$

Por D'Alembert

$P(x) = x^2 + 1$

$P(i) = i^2 + 1$

$P(i) = 0$

Logo, *i* é raiz de $P(x) = x^2 + 1$

Tarefa 13:

"Sabendo que 2 é uma raiz do Polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, encontre as demais raízes."

O objetivo desta tarefa é o de fazer com que o aluno perceba a existência de raízes iguais e de observar que o conhecimento de uma das raízes de um polinômio do 3º grau permite chegar às outras raízes.

Se o problema diz que 2 é uma raiz do polinômio, dividindo P(x) por (x - 2) obtemos, como outro fator, um Q(x) = $x^2 - 4x + 4$ do 2º grau. Logo, $P(x) = (x - 2)(x^2 - 4x + 4)$ e, fatorando, $(x^2 - 4x + 4) = (x - 2)(x - 2)^2$. Dizemos, então, que 2 é uma raiz de multiplicidade 3.

Portanto $P(x) = (x - 2)(x - 2)(x - 2) = (x - 2)^3$

Atividade 14:

"O número 3 é raiz dupla da equação polinomial de 4º grau $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$. Determine as outras duas raízes da equação."

Nesta atividade vamos trabalhar com raízes múltiplas de uma equação polinomial. Os grupos, ao explorarem esta atividade, poderiam ver que, como o problema diz, 3 é raiz dupla da equação polinomial $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$. Usando o dispositivo prático de Briot-Ruffini chegariam a

	1	- 7	+ 13	+ 3	- 18
3	1	- 4	+ 1	+ 6	0
3	1	- 1	- 2	0	

percebendo que não poderiam continuar pois as outras duas raízes não eram conhecidas.

Assim, a equação dada se transformou em $(x - 3)(x - 3)(x^2 - x - 2) = 0$ e, então, resolvendo $x^2 - x - 2 = 0$, encontrariam $x_1 = 2$ e $x_2 = -1$.

Logo

$$x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = (x - 3)(x - 3)(x - 2)(x + 1) = 0.$$

e, suas outras duas raízes são x = 2 e x = -1.

Os alunos poderiam dizer que esta equação apresenta uma raiz 3 de multiplicidade 2 e duas raízes { 2, - 1} de multiplicidade 1.

Atividade 15:

" Leitura do texto: Teorema Fundamental da Álgebra - Teorema de Gauss. "

Esta atividade tem como objetivos:

- Reconhecer o avanço da matemática em conseqüência da demonstração desse teorema.
- Perceber a construção histórica desse teorema.

- Reconhecer a importância e sua força na matemática de hoje.

Este texto foi extraído do livro "*Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula - Álgebra* " de John K. Baumgart (1993, p.87 – 89).

Cada grupo receberia uma cópia do texto para ser lido e comentado em sala de aula, objetivando-se reconhecer o avanço que a matemática teve em conseqüência da demonstração desse teorema.

Embora o Teorema Fundamental da Álgebra garanta a existência de raízes para qualquer equação polinomial, ele não apresenta um método para encontrar essas raízes. De fato, a fórmula quadrática (Bhaskara) dá as raízes de qualquer equação de 2º grau e há fórmulas semelhantes, mas muito mais complicadas, para as raízes de equações cúbicas e de 4º grau.

Em 1824, o matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802 – 1829) mostrou que, para equações de grau maior que quatro não há fórmulas gerais. Métodos numéricos, entretanto, são freqüentemente usados para se encontrar valores aproximados das raízes de qualquer equação polinomial de graus mais altos.

Teorema fundamental da álgebra

Carl Friedrich Gauss, aos vinte anos de idade (1797), deu a primeira demonstração satisfatória do teorema que chamou de fundamental e que foi o tema de sua tese de doutoramento na Universidade de Helmstadt, *Uma nova prova de que toda função racional inteira de uma variável pode ser decomposta em fatores reais de primeiro e segundo graus*. (São afirmações equivalentes "Toda equação algébrica de grau *n* tem *n* raízes" e "Toda equação algébrica de grau *n* tem uma raiz da forma $a + bi$, onde *a* e *b* são números reais".) Na realidade, Gauss deu quatro demonstrações desse teorema, a última quando já tinha setenta anos de idade. Nas três primeiras provas assume os coeficientes da equação polinomial como reais, mas na quarta demonstração os coeficientes são quaisquer números complexos.

As palavras "nova prova" no título da tese de Gauss indicam que as idéias resumidas no enunciado do teorema já tinham sido consideradas por matemáticos anteriores. Os hindus (no máximo em 1100) perceberam que as equações quadráticas (com raízes reais) tinham duas raízes. Girolamo Cardano notou em 1545 — ainda que vagamente uma vez que os números negativos e imaginários não estavam claramente definidos naquele tempo — que as cúbicas deviam ter três raízes; e exibiu as três raízes para algumas cúbicas. Idéias semelhantes foram defendidas por Cardano e outros algebristas italianos dessa época com relação às quárticas.

François Viète (c. 1600) considerou a possibilidade de fatorar o primeiro membro da equação polinomial $f(x) = 0$ (com coeficientes positivos) em fatores lineares, mas estava destinado a um sucesso apenas parcial devido à sua acentuada aversão por números negativos e imaginários.

Peter Roth parece ter sido o primeiro escritor a dizer claramente que uma equação polinomial de grau *n* tem *n* raízes. Isso foi em 1608. Albert Girard afirmou em 1629 que toda equação algébrica tem tantas raízes quanto é o grau de sua potência mais alta.

Os *insights* de René Descartes neste campo são de interesse especial, pois se relacionam com sua famosa "regra de sinais". Citamos de sua *La géométrie* (1637) / : 159-160/ :

> Toda equação pode ter tantas raízes distintas (valores da incógnita) quanto o número de dimensões [isto é, grau] da incógnita na equação ...
>
> Acontece muitas vezes, porém, que algumas raízes são falsas ou menores que nada ...
>
> Podemos determinar também o número de raízes verdadeiras [positivas] e falsas [negativas] que uma equação qualquer pode ter, como se segue: uma equação pode ter tantas raízes verdadeiras quantas mudanças de sinal ela contém ... e tantas raízes falsas quanto o número de vezes que dois sinais + ou dois sinais − se acham em sucessão.

A primeira tentativa de demonstração parece ter sido feita por Jean Le Rond d'Alembert, em 1746, e por isso o teorema às vezes é chamado teorema de d'Alembert, especialmente na França. Leonhard Euler (1749) e Joseph Louis Lagrange também tentaram provar o teorema.

Uma demonstração correta só foi dada quando Gauss escreveu sua tese de doutoramento, publicada em 1799. Ela incluía suposições "geometricamente óbvias" para as quais padrões posteriores de rigor exigiram provas, que A. Ostrowski deu em 1920.

Leituras suplementares

BELL (a): 178
——— (b): 218-69
COURANT e ROBBINS: 269-71
DUNNINGTON
F. KLEIN: I, 101-4
D. E. SMITH (b): I, 292-306
STRUIK: 81-87, 99-102, 115-22

Atividade 16:

"*Determine as raízes de* $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$, *sabendo que i é uma delas*."

O objetivo desta atividade é reconhecer em que condições o número (-*i*) e seu conjugado (*i*) são raízes de um polinômio. Nesta atividade exploraríamos o conceito de raiz complexa e sua conjugada. Diríamos aos grupos que o teorema das raízes conjugadas diz:

"*Se um número imaginário* $r = a + bi$ *(a, b Î R , b ¹ 0) é raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais, então* $\overline{r} = a - bi$ *(conjugada de r) também é raiz dessa equação* ".

Nosso interesse neste momento é o de conhecer e aplicar esse resultado. Assim, apenas indicaríamos onde poderiam encontrar sua demonstração (Paiva - 2000, p.417). Como P(x), no problema dado, é um polinômio com coeficientes reais e como $x = i$ *é* uma de suas raízes, pelo teorema acima temos que $x = -i$ também é raiz de P(x). Efetuando a divisão de P(x) por (*i*) e por (-*i*) chegamos ao quociente $x^2 - 4x + 5$. Buscando as raízes da equação $x^2 - 4x + 5 = 0$ encontramos $x = 2 + i$ *e* $x = 2 - i$. Logo, as raízes de P(x) são *i* , -*i* , 2 + *i* e 2 – *i* e o polinômio P(x) pode ser escrito na forma

$$P(x) = (x - i)(x + i)(x - (2 + i))(x + (2 + i)) .$$

Seriam deixadas as tarefas extra-classe 14, 15, 16 e 17 para os alunos.

AULA - 06

Atividade 17: Trabalhar as tarefas 14, 15, 16 e 17 .

Nesta atividade os alunos discutirão, de forma crítica, a correção em plenária das atividades extra-classe 14 a 17, a fim de atingir os objetivos propostos para cada tarefa. O objetivo desta atividade é a de escrever equações algébricas a partir do conhecimento de suas raízes.

Tarefa 14:

" Uma equação algébrica do 3º grau tem raízes -1, 1 e 2. Sabendo que o coeficiente do termo de 3º grau é 2, determine os outros coeficientes e escreva a equação."

O professor esperaria que os grupos pudessem, ao ler o enunciado do problema, perceber que nesta tarefa deveriam buscar uma equação, conhecidos suas raízes, seu grau e um de seus coeficientes. Assim escreveriam $a\,x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com a = 2, e sabendo que (-1), 1 e 2 são raízes, substituiriam as raízes na equação e chegariam ao sistema

$$\begin{cases} b - c + d = 2 \\ b + c + d = -2 \\ 4b + 2c + d = -16 \end{cases}$$

onde, ao resolvê-lo, encontrariam b = - 4, c = -2 e d = 4 .
A equação pedida escrita na forma canônica é $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$.

Tarefa 15:
" O polinômio $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + ix - 3i$ é divisível por (x – i)? Justifique."

Esta tarefa tem por objetivo fixar no aluno o conceito de polinômios com coeficientes e variáveis complexos e exercitar a técnica operatória.

Os alunos, na tarefa dada, efetuariam a divisão de P(x) por (x - i) chegando ao quociente $Q(x) = 3x^2 + (-2 + 3i)x - (3 + i) = 0$ e resto (1- 6i) . Então, perceberiam que P(x) não é divisível por (x - i).

Tarefa 16:
“ Escreva uma equação do 4º grau em que 1/ 2 é raiz dupla e 2 e 3 são raízes simples.”

O objetivo desta tarefa, dada individualmente, é o de levar os alunos a diferentes equações. Com isso, o professor poderia mostrar que pode haver mais do que uma resposta.

Os alunos ao lerem o enunciado observariam que a equação é do 4º grau e que, portanto, haveria quatro raízes. Como são dadas as quatro raízes, uma dupla e duas simples, basta fazer o produto de seus fatores.

Assim, se 1/2 é raiz dupla e 2 e 3 são raízes simples, então

$$(x - 1/2)(x - 1/2)(x - 2)(x - 3) = 0$$

Poderiam escrever a equação multiplicando esses fatores e encontrariam a equação

$$x^4 - 6x^3 + (45/4)x^2 - (29/4)x + 3/2 = 0 \; .$$

Na plenária eles poderiam perceber a existência de várias equações diferentes satisfazendo o problema.

Tarefa17 :

" Qual é o menor grau para que uma equação polinomial possa admitir raízes (2 - i), 3 e (5 + i) ?"

Mais uma vez, utilizando o teorema de Gauss, efetuaríamos o produto

$$(x- 3) [x – (2 – i] [x – (5 + i)] = (x – 3) (x - 2 + i) (x – 5 – i)$$

chegando a $x^3 - 10x^2 + (32 - 3i) x - (33 - 9i) = 0$, uma equação do 3º grau que admite as raízes (2 - i), 3 e (5 + i) .

Alguém poderá dizer, " *não foi dito que quando um número complexo é raiz de uma equação polinomial então seu conjugado também é raiz? Então as raízes conjugadas de* (2 - i) e (5 + i) *não fazem parte do conjunto solução?"*

- *Cuidado !!* Diria o professor. *Voltem ao Teorema e vejam se todas as suas condições foram atendidas.* O professor diria que essas raízes entrariam no conjunto solução se o problema pedisse uma equação com coeficientes reais.

Atividade 18:

" Seja Vc o volume de um cubo de aresta x e seja Vp o volume de um paralelepípedo com área da base 3 e altura igual à aresta do cubo. Determine x de modo que Vc= Vp +1."

Este problema é apresentado por Trotta e Imenes no livro: Matemática Aplicada, vol.3, (1980, p.261).

A razão de colocarmos este problema, nesta atividade e neste momento, se apoia no espirito de obter fixação de novos conhecimentos construídos até agora no trabalho com equações algébricas, ao fazer uma conexão com a geometria.

Esta atividade é um problema sobre volumes que recai numa equação do 3º grau. Sua resolução é conduzida através do uso da fórmula de Cardano-Tartaglia. Como dizem os autores do livro, muitas interrupções acontecem durante sua resolução onde: 1) ao nos depararmos com raízes quadradas de números negativos, o que nos leva a trabalhar com números complexos; 2) quando chegamos a cálculos envolvendo raízes cúbicas de números complexos, que podem ser efetuadas através da forma trigonométrica; 3) ao buscar as raízes da equação do 3º grau, obtida através da utilização da fórmula de Cardano-Tartáglia; 4) ao fazer a análise das raízes obtidas frente ao problema colocado.

Assim, aplicar conhecimentos já construídos, ao longo da resolução do problema, fará com que os alunos sintam a importância das equações algébricas e de suas aplicações.

Podemos perceber que os objetivos colocados para esta atividade, no roteiro, são atendidas ao longo do trabalho:

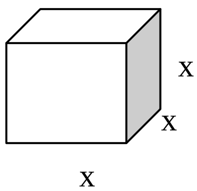
- Fazer conexão da álgebra com a geometria;
- Usar a geometria para visualizar o problema;
- Fazer uso da história da matemática para poder utilizar a fórmula de Cardano-Tartaglia;
- Escrever a equação algébrica que traduz o problema dado;
- Levar o aluno a perceber a insuficiência dos números reais para resolver algumas equações algébricas, exigindo a ampliação de *R* para *C*;
- Levar o aluno a perceber a limitação da fórmula de Cardano-Tartaglia.

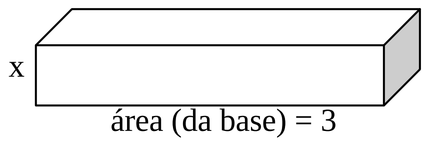
Esta atividade e sua resolução seriam entregues a todos os alunos e, com a direção do professor, seria trabalhada, como num seminário, com perguntas, discussões e intervenções.

Sabemos que $Vc = l^3$.

No nosso caso, l = x , então

$Vc = x^3$





Como $Vp = a_b . h$

então, $Vp = 3x$

O problema pede que se determine *x* de modo que $Vc = Vp + 1$.

Assim, $x^3 = 3x + 1$, ou seja, $x^3 - 3x - 1 = 0$.

Para dar a resposta, deverão perceber que a resolução do problema recai na resolução dessa equação do 3º grau. Concordando com o matemático Elon Lages Lima (1998, p. 233), podemos dizer que, até aqui, procuramos entender as propriedades das equações algébricas e de suas raízes. Vimos técnicas úteis para resolver certas equações; vimos como reduzir o grau de equações, uma vez conhecidas uma ou mais de suas raízes.

O problema é saber o que fazer diante de uma equação algébrica genérica que precisamos resolver. Sabemos que para equações de 1º e 2º graus existem fórmulas genéricas para resolvê-las, mas haverá fórmula de resolução para equações de 3º grau? E de 4º grau? E graus maiores do que 4 ?

Como disse Elon Lima, a busca por respostas a essas perguntas foi responsável por importantes avanços da matemática, no período aproximado de 1500 a 1800.

Voltando ao problema: resolver $x^3 - 3x - 1 = 0$, sabemos que a primeira contribuição importante para resolver equações algébricas de 3º grau foi dada por Tartaglia, que obteve uma fórmula de resolução envolvendo radicais.

Num livro publicado em 1545, Cardano (1501–1576) mostra que, sob certas condições, uma das raízes da equação de 3º grau, desprovida do termo em x^2: $x^3 + ax + b = 0$, é dada por

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Esta fórmula leva o nome de fórmula de Cardano-Tartaglia mas, ao que se sabe, Cardano não foi o seu descobridor. Ele próprio admitiu em seu livro que a mesma lhe havia sido sugerida por Tartaglia. Esta fórmula é aqui deixada com a recomendação de que, cada vez que for preciso utilizá-la, pode-se a ela recorrer. Juntos, utilizando a fórmula de Cardano-Tartaglia, vamos determinar as raízes de $x^3 - 3x - 1 = 0$, que atendem a suas condições.

No nosso problema a = -3 e b = -1,

Assim,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{-1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{-27}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{-1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{-27}{27}}}$$

Ou seja:

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 1}} \quad , então, \quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}}$$

E agora? No conjunto dos números reais existe $\sqrt{(-3/4)}$? A resposta é não! Então, podemos perceber que as raízes, se existentes, não seriam reais e o problema não teria solução em R.

Por outro lado podemos ver que, se $P(x) = x^3 - 3x - 1$, então

$$P(1) = 1^3 - 3.1 - 1 = 1 - 3 - 1 = -3$$

$$P(2) = 2^3 - 3.2 - 1 = 8 - 6 - 1 = 1$$

e, como a função polinomial é contínua, haverá um ponto x, $1 < x < 2$, que fará $P(x) = 0$ e que, portanto, será raiz da equação.

Juntos, poderíamos encontrar outros limites mais precisos para essa raiz? Tentando outros valores poderíamos ver que:

$P(1,8) = 1,8^3 - 3 . 1,8 - 1 = 5,832 – 5,4 - 1 = - 0,568$

$P(1,9) = 1,9^3 - 3 . 1,9 - 1 = 6,859 - 5,7 - 1 = 0,159$

Logo, haverá um ponto x, $1,8 < x < 1,9$, que fará $P(x) = 0$ e que, portanto, será raiz da equação. Desse modo, podemos garantir que o problema proposto tem solução.

Com este modo de ver, podemos entender o problema ao dizer que quando a aresta x do cubo é pequena, o volume Vc será menor que Vp + 1 (por exemplo, se x =1, então, Vc = 1 e Vp + 1 = 4 , portanto, Vc < Vp + 1). À medida que x aumenta, todas as arestas do cubo aumentam, mas isso não ocorre no paralelepípedo, onde só aumentou a altura, e por isso o volume Vc se aproxima de Vp + 1, chegando até a ultrapassá-lo (por exemplo, se $x = 2$, então, Vc = 8 e Vp + 1 = 7, portanto Vc > Vp +1). Por este raciocínio, se x for aumentando lentamente, de 1 até 2, haverá uma ocasião em que Vc = Vp + 1. Nessa ocasião o valor de x será uma raiz real da equação $x^3 - 3x - 1 = 0$.

Então, sabemos que essa equação possui uma raiz real e, no entanto, não foi possível encontrá-la pela fórmula de Cardano-Tartaglia pois nos reais não existe $\sqrt{(-3/4)}$.

Como sair disso?

Vocês já sabem que a extração de raízes quadradas de números negativos não é de impossibilidade definitiva, pois ela tem resposta nos complexos. Daí a importância dos números complexos na resolução das equações algébricas.

Vamos usar o conhecimento que temos de números complexos e continuar o que fazíamos com a fórmula de Cardano-Tartaglia.

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

Outra encrenca! Como extrair a raiz cúbica de números complexos?

Se (x + yi) for uma raiz cúbica de (1/2 + (Ö 3/2) i), então

$$x + yi = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$(x + yi)^3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x^3 + 3x^2yi + 3x(yi)^2 + (yi)^3 = 1/2 + (\sqrt{3}/2)i$$

$$x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = 1/2 + (\sqrt{3}/2)i$$

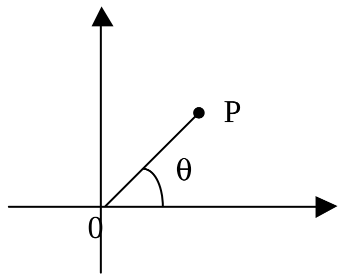
$$(x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i = 1/2 + (\sqrt{3}/2)i$$

$$\text{então} \quad \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1/2 \\ 3x^2y - y^3 = \sqrt{3}/2 \end{cases}$$

Saímos de uma equação algébrica de 3º grau e caímos num sistema de equações algébricas de 3º grau. Complicou mais ainda !

O problema da radiciação de números complexos só foi solucionada, como dizem Trotta e Imenes, depois que se deu uma representação geométrica para os números complexos.

Os números complexos se espalham pelo plano. Para representar geometricamente esses números (entre os quais se encontram todos os números reais) utilizaremos, pois, um plano, o plano de Gauss. Pode-se localizar um ponto P num plano cartesiano ortogonal através de suas coordenadas cartesianas. Pode-se também localizá-lo através de suas coordenadas polares.



$$z = x + yi$$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{distância de OP} \\ \theta = \arg(z) \end{cases}$$

A questão da radiciação de números complexos é esclarecida através da forma trigonométrica.

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$|z| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\arg(z) = \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Big/ \left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \theta = \pi/3 = 60°$$

Uma propriedade dos complexos diz que “ Todo número complexo z, não nulo, admite n raízes n-ésimas distintas. Todas elas têm modulo igual a $\sqrt[3]{|z|}$, enquanto seus argumentos formam uma progressão aritmética de primeiro termo θ/n e de razão $(2\pi)/n$.”

No nosso problema: $z = 1/2 + (\sqrt{3}/2)i$ admite três raízes cúbicas : ω_1, ω_2 e ω_3.

Como $|\omega| = \sqrt[3]{|z|} = \sqrt[3]{1} = 1 \rightarrow \begin{cases} |\omega_1| = 1 \\ |\omega_2| = 1 \\ |\omega_3| = 1 \end{cases}$

e os argumentos formam uma progressão aritmética de razão $(2\pi)/n$ onde:

1º termo: $\theta/n = (\pi/3)/3 = \pi/9$

2º termo: $\pi/9 + (2\pi)/3 = (7\pi)/9$

3º termo: $(7\pi)/9 + (2\pi)/3 = (13\pi)/9$,

Conclusão:

$|\omega| = \sqrt[3]{1} = 1$ e os argumentos são $\pi/9$, $(7\pi)/9$ e $(13\pi)/9$.

O número complexo z, na forma trigonométrica, é dado por $z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$ e, então, as raízes cúbicas de $z = 1/2 + (\sqrt{3}/2)i$ são:

$\omega_1 = 1\,(\cos 20^o + i\,\mathrm{sen}\,20^o)$

$\omega_2 = 1\,(\cos 140^o + i\,\mathrm{sen}\,140^o)$

$\omega_3 = 1\,(\cos 260^o + i\,\mathrm{sen}\,260^o)$

Podemos ver que $(\omega_1)^3 = 1/2 + (\sqrt{3}/2)i$, e sabemos que

$$(\overline{\omega_1})^3 = \overline{(\omega_1)^3} = \overline{1/2 + (\sqrt{3}/2)i} = 1/2 - (\sqrt{3}/2)i$$

Analogamente, $\overline{(\omega_2)^3} = \overline{(\omega_3)^3} = 1/2 - (\sqrt{3}/2)i$

ou seja, as raízes cúbicas de $1/2 - (\sqrt{3}/2)i$ são ω_1 , ω_2 e ω_3 .

Substituindo esses valores na fórmula de Cardano-Tartaglia

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

tem-se

$x_1 = \omega_1 + \overline{\omega_1} = (\cos 20^o + i\,\mathrm{sen}\,20^o) + (\cos 20^o - i\,\mathrm{sen}\,20^o) = 2\cos 20^o$

$x_2 = \omega_2 + \overline{\omega_2} = (\cos 140^o + i\,\mathrm{sen}\,140^o) + (\cos 140^o - i\,\mathrm{sen}\,140^o) = 2\cos 140^o$

$x_3 = \omega_3 + \overline{\omega_3} = (\cos 260^o + i\,\mathrm{sen}\,260^o) + (\cos 260^o - i\,\mathrm{sen}\,260^o) = 2\cos 260^o$

Portanto a equação $x^3 - 3x - 1 = 0$ possui: três raízes reais que são:

$$x_1 = 2\cos 20^o \cong 1,88$$
$$x_2 = 2\cos 140^o \cong -1,53$$
$$x_3 = 2\cos 260^o \cong -0,35$$

Assim, serve apenas a raiz $x_1 \cong 1,88$ pois as demais são negativas e não convêm ao problema proposto. Logo a aresta pedida mede $x = 2\cos 20^o \cong 1,88$.

Na verdade, este problema com sua resolução, seria entregue aos alunos não com a intenção de verificar se eles estariam preparados para fazê-lo. O que realmente se quer com este trabalho é que os alunos percebam que um problema de geometria, aparentemente simples, derivou para uma equação algébrica, também aparentemente simples, mas que, para sua resolução, demandou muita matemática.

Com isto, com nossas discussões e com nossas chamadas de atenção, acreditamos que os alunos possam ter uma visão da importância das equações algébricas, do conhecimento de matemática que elas exigem e de suas variadas aplicações.

Seriam deixadas as tarefas extra-classe 18 e 19.

AULA - 07

Atividade 19: Trabalhar as tarefas 18 e 19

Nesta atividade, com estas tarefas, os alunos serão levados a perceber como algumas propriedades podem permitir um trabalho mais rápido e eficiente nas equações algébricas.

Tarefa 18:

"Quais são as raízes inteiras de $P(x) = 2x^3 - 17x^2 + 19x + 14$?"

Dos alunos o professor esperaria que, sabendo que se busca raízes inteiras, então, na tentativa, montariam a tabela

x	P(x)
1	$2 - 17 + 19 + 14 \neq 0$
2	$16 - 68 + 38 + 14 = 0$

e, portanto, 2 é raiz inteira de P(x).

Se 2 é raiz, usando Briot-Ruffini

	2	-17	19	14
2		4	-26	-14
	2	-13	-7	0

e $P(x) = (x - 2)(2x^2 - 13x - 7)$

Buscando as raízes de $2x^2 - 13x - 7 = 0$, usariam provavelmente a fórmula de Bhaskara e encontrariam $x_1 = 7$ e $x_2 = -1/2$. Então $P(x) = (x - 2)(x - 7)(x + 1/2)$.

Como buscamos raízes, buscamos valores de x que fazem $P(x) = 0$. Assim,

ou $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

ou $x - 7 = 0 \rightarrow x = 7$

ou $x + 1/2 = 0 \rightarrow x = - 1/2$ (que não serve pois se pede raízes inteiras)

$\therefore \quad S = \{ 2, 7 \}$

O professor, a partir do trabalho dos alunos, diria:

- *Esse problema foi fácil. Na segunda tentativa vocês acharam uma raiz. Será que sempre isso acontece? Será que a matemática oferece alguma propriedade que nos leve a prováveis raízes?*
- *Sim.*

Pouco depois de Tartaglia, que obteve uma fórmula de resolução envolvendo radicais para equações do 3º grau, Ferrari generalizou o processo para equações do 4º grau. Durante três séculos buscou-se um processo de resolução de equações de grau maior ou igual a 5, através de radicais, até que, como já vimos, Abel e Galois demonstraram a impossibilidade de se ter uma fórmula geral para resolver equações de grau superior a 4.

Numa equação polinomial de coeficientes inteiros, pode-se obter suas eventuais raízes inteiras. Como? Uma propriedade que garante a existência de raízes inteiras é o seguinte teorema:

" *Se r é uma raiz inteira da equação polinomial com coeficientes inteiros*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ . \ . \ . \ + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

então r é divisor de a_0*.*"

<u>Prova</u>

Seja r raiz da equação (1). Então

$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ . \ . \ . + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$

® $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ . \ . \ . + a_2 r^2 + a_1 r = - a_0$

® $r\,(a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} + \ . \ . \ . + a_2 r + a_1) = - a_0$

Se r é inteiro e todos os coeficientes da equação (1) são inteiros, por hipótese, então, $a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} + \ . \ . \ . + a_2 r + a_1$ é inteiro e vamos chamar esse valor de *k*.

Portanto $k r = - a_0$, $k = - a_0 / r$ e r é divisor de a_0 .

Voltando à tarefa 18 "Quais são as raízes inteiras de $P(x) = 2x^3 - 17x^2 + 19x + 14$?", as prováveis raízes são: $p \in \{ 1, -1, 2, -2, 7, -7, 14, -14 \}$.

Substituindo essas prováveis raízes de P(x) em $P(x) = 2x^3 - 17x^2 + 19x + 14$ vem que

$P(1) = 2.1^3 – 17.1^2 + 19.1 + 14 = 2 – 17 + 19 + 14 \neq 0$

$P(-1) = 2.(-1)^3 – 17.(-1)^2 + 19.(-1) + 14 = - 2 – 17 - 19 + 14 \neq 0$

$P(2) = 2.2^3 – 17.2^2 + 19.2 + 14 = 16 – 68 + 38 + 14 = 0$

$P(-2) = 2.(-2)^3 – 17.(-2)^2 + 19.(-2) + 14 = - 16 – 68 - 38 + 14 \neq 0$

$P(7) = 2.7^3 – 17.7^2 + 19.7 + 14 = 686 – 833 + 138 + 14 = 833 – 833 = 0$

$P(-7) = 2.(-7)^3 – 17.(-7)^2 + 19.(-7) + 14 = - 686 - 833 – 133 + 14 \neq 0$

$P(14) = 2.14^3 – 17.14^2 + 19.14 + 14 = 5488 – 3332 + 266 + 14 = 2436 \neq 0$

$P(-14) = 2.(-14)^3 – 17.(-14)^2 + 19.(-14) + 14 = - 5488 - 3332 - 266 + 14 = - 9702 \neq 0$

e os alunos chegariam a $S = \{ 2, 7 \}$.

Se 2 é raiz, então, por Briot-Ruffini,

	2	-17	19	14
		4	-26	-14
2	2	-13	-7	0

Assim, $2x^3 - 17x^2 + 19x + 14 = (x - 2)(2x^2 – 13x - 7) = 0$ e usando a fórmula de Bhaskara , chegariam a $x_1 = 7$ e $x_2 = -1/2$.

As três raízes são 2 , 7 e -1/2 mas, como queremos raízes inteiras, S = { 2, 7 }.

É importante trabalhar com os alunos a idéia de que esta propriedade, que vale sempre, garante que as raízes procuradas devem estar entre as eventuais raízes determinadas pelo teorema.

<u>Tarefa 19</u>:

"Quais são as raízes racionais de $P(x) = 3x^3 + x^2 + x - 2$?"

Há um teorema que garante a existência de eventuais raízes racionais que diz:

“ Se o número racional p/q, com p e q primos entre si, é uma raiz da equação polinomial com coeficientes inteiros, $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ *, então p é divisor de* a_0 *e q é divisor de* a_n *.”*

Seja $P(x) = 3x^3 + x^2 + x - 2$

onde $a_0 = -2$ e seus divisores são {1, -1, 2, -2 }

e $a_n = 3$ e seus divisores são {1, 3, -1, -3 }

e as possíveis raízes racionais *p/q* são {1, 1/ 3, -1, -1 /3, 2, 2/ 3, -2, - 2 / 3}

Achando o valor do polinômios nesses valores;

$P(1) = 3 + 1 + 1 - 2 = 3$

$P(1/3) = 3.(1/3)^3 + (1/3)^2 + (1/3) - 2 = 3/27 + 1/9 + 1/3 – 3/1 = 39/27$

$P(-1) = -3 + 1 -1 -2 = -5$

$P(-1/3) = 3.(-1/3)^3 + (-1/3)^2 + (-1/3) - 2 = -7/3$

$P(2) = 3.(2)^3 + (2)^2 + 2 - 2 = 3.8 + 4 + 2 - 2 = 28$

$P(-2) = 3.(-2)^3 + (-2)^2 + (-2) - 2 = 3.(-8) + 4 - 2 - 2 = -24$

$P(2/3) = 3.(2/3)^3 + (2/3)^2 + (2/3) - 2 = 3.(8/27) + 4/9 + 2/3 – 2 = 12/9 + 2/3 – 2 = 0/9 = 0$

$P(-2/3) = 3.(-2/3)^3 + (-2/3)^2 + (-2/3) - 2 = 3.(-8/27) + 4/9 - 2/3 – 2 = 3$

Portanto, a única raiz racional possível é 2/ 3.

Usando Briot-Ruffini

	3	1	1	-2
2/3		2	2	2
	3	3	3	0

Assim, $3x^3 + x^2 + x - 2 = (x - 2/3)(3x^2 + 3x + 3) = 0$

ou $x - 2/3 = 0 \rightarrow x = 2/3$

ou $3x^2 + 3x + 3 = 3(x^2 + x + 1) = 0$

Usando a fórmula Bhaskara na resolução da equação $x^2 + x + 1 = 0$ encontram-se as raízes $x_1 = -1/2 + (5/6)i$ e $x_2 = -1/2 - (5/6)i$

Respondendo ao problema dizemos que 2/3 é a única raiz racional da equação dada.

<u>Atividade 20</u>:

"Resolver a equação $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é média aritmética das outras duas."

O problema pede que resolvamos a equação $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, com a condição de que uma de suas três raízes seja média aritmética das outras duas.

Sendo $x_1 = a$, $x_2 = b$ *e* $x_3 = (a + b)/2$

as raízes da equação dada, provavelmente os alunos iriam em busca dessas raízes dando valores a elas na tentativa de encontrá-las. O professor poderia dizer que o método de tentativas nem sempre é eficiente no processo de resolução de um problema. Normalmente é gasto um bom tempo nessa busca, podendo até não se chegar à solução.

Com os recursos adquiridos, os grupos poderiam ter trabalhado assim:

$$P(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

Tentando encontrar uma raiz, iriam dando valores a *x*.

Se $x = 1 \rightarrow P(1) = 1 - 9 + 26 - 24 = -6$

Se $x = 2 \rightarrow P(2) = 8 - 36 + 52 - 24 = 60 - 60 = 0 \quad \therefore$ 2 é uma raiz .

Usando o dispositivo prático de Briot-Ruffini fariam

	1	- 9	26	- 24
2		2	-14	+24
	1	-7	12	0

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x - 2)(x^2 - 7x + 12)$$

Mas, fatorando $(x^2 - 7x + 12)$, usando a propriedade dada na tarefa 18, chegariam a

$12 = 1 . 12$, $12 = 2 . 6$ e $12 = 3 . 4$

Logo, como $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$, as raízes encontradas são 2, 3 e 4, que satisfazem a condição de 3 ser média aritmética de 2 e 4.

O professor, ao apresentar este problema teve como objetivo chegar às "Relações de Girard".

Fazendo um pouco de história da matemática, o professor diria que um matemático flamengo, Albert Girard (1590 – 1633), apresentou um importante teorema relacionando as raízes de uma equação polinomial com seus coeficientes.

Para equações do 2º grau, $P(x) = ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \qquad (1)$
com raízes r_1, r_2, podemos escrever, usando o Teorema do Fator,

$$P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Efetuando esse produto temos $P(x) = a(x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2)$

e $\quad \therefore \quad P(x) = ax^2 - a(r_1 + r_2)x + a(r_1 r_2) \qquad (2)$

Comparando (1) e (2) $\rightarrow \; ax^2 + bx + c = ax^2 - a(r_1 + r_2)x + a(r_1 r_2)$

e então
$$\begin{cases} ax^2 = ax^2 \\ bx = -a(r_1 + r_2)x \\ c = a(r_1 r_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -a(r_1 + r_2) \\ c = a(r_1 r_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 = -b/a \\ r_1 r_2 = c/a \end{cases}$$

No caso de uma equação do 3º grau, $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, com raciocínio semelhante chegaríamos a:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -b/a \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = c/a \\ r_1 r_2 r_3 = -d/a \end{cases}$$

No caso geral de uma equação polinomial de grau n, $n \in N^*$,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0,$$

pode-se demonstrar, de forma inteiramente análoga, que

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + r_n = -a_{n-1} / a_n \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots\ldots\ldots + r_{n-1} r_n = a_{n-2} / a_n \\ r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -a_{n-3} / a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1 r_2 r_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots r_n = (-1)^n a_0 / a_n \end{cases}$$

Essas relações entre as raízes e os coeficientes são conhecidas como relações de Girard. Olhando para as n Relações de Girard, podemos entendê-las como um sistema (que não é linear) de *n* equações a *n* incógnitas $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$. Podemos pensar em, através de sucessivas substituições, recair numa equação a uma só incógnita. Feito isso, entretanto, recai-se em uma equação equivalente àquela da qual partimos, entrando num círculo vicioso. Como dizem Trotta e Imenes (1980, p.295), utilizando apenas as Relações de Girard não conseguiremos resolver qualquer equação algébrica. No entanto, podemos encontrar situações em que as Relações de Girard nos serão de grande utilidade. Isso acontece quando outras condições dadas podem ajudar na resolução do sistema.

Em seguida, o professor proporia aos alunos que resolvessem o problema dado utilizando as Relações de Girard.

A condição dada "uma de suas raízes é média aritmética das outras duas" pode agora nos ajudar a chegar à resolução do problema.

Seja $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ a equação dada

e $r_1 = a$, $r_2 = b$ e $r_3 = (a + b) / 2$ suas raízes.

Pelas Relações de Girard temos que

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -(-9) = 9 \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = 26 \\ r_1 r_2 r_3 = -(-24) = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + (a+b)/2 = 9 \\ ab + a(a+b)/2 + b(a+b)/2 = 26 \\ ab(a+b)/2 = 24 \end{cases}$$

e, resolvendo este sistema, chegaremos às raízes $r_1 = 4$, $r_2 = 2$ e $r_3 = 3$.

Seriam deixadas as tarefas extra-classe 20 e 21.

AULA - 08

Atividade 21: Trabalhar as tarefas 20 e 21.

Tarefa 20:

"As raízes da equação $8x^3 - kx^2 + 7x - 1 = 0$, com $k \in R$, são três números reais em PG. Determine essas raízes".

O objetivo desta tarefa é levar o aluno a perceber a importância do uso das Relações de Girard na resolução de equações polinomiais.

Seja $P(x) = 8x^3 - kx^2 + 7x - 1$

Considerando os termos de uma P.G. como raízes da equação e aplicando as relações de Girard encontramos uma raiz de P(x) , ou seja, $x = 1/2$ que, quando substituído em P(x) leva-nos a encontrar $k=14$. Utilizando as ferramentas já estudadas para a divisão de polinômios, chegaremos à equação $8x^2 - 10x + 2 = 0$, cujas raízes são $x = 1$ e $x = 1/4$.

A tarefa foi pedida com a intenção de levar o aluno à fixação de um conhecimento adquirido, acreditando que o aluno se lembrasse das Relações de Girard ao resolver o problema.

Os dados do problema dizem que as raízes da equação dada são termos de uma progressão geométrica. Assim:

$$x_1 = x/q, \quad x_2 = x \quad e \quad x_3 = xq \quad , \quad com \quad q \neq 0.$$

Temos $8x^3 - kx^2 + 7x - 1 = 0$, $k \in R$

assim, por Girard, $\begin{cases} x/q + x + xq = k/8 \\ x^2/q + x^2 + x^2q = 7/8 \\ x/q \,.\, x \,.\, xq = 1/8 \end{cases}$

De $x/q \,.\, x \,.\, xq = 1/8$, vem que $x^3 = 1/8 \rightarrow x = \sqrt[3]{1/8} = 1/2$

Levando esse valor à equação dada obtemos

$$8.(1/2)^3 - k.(1/2)^2 + 7.(1/2) - 1 = 0$$
$$8(1/8) - k(1/4) + 7/2 - 1 = 0$$
$$1 - k/4 + 7/2 - 1 = 0$$
$$k/4 = 7/2$$
$$\therefore \quad 2k = 28$$
$$k = 14$$

Assim a equação pedida é $8x^3 - 14x^2 + 7x - 1 = 0$ e seu conjunto solução é $S = \{ 1/4 , 1/2 , 1\}$

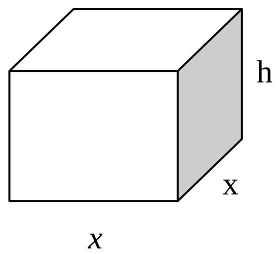
Tarefa 21: (Extraído da RPM – SBM, 1999. nº 40, p. 31)

" Deseja-se construir um reservatório em forma de um prisma reto de base quadrada, com capacidade de 2000 litros, usando, para paredes, fundo e tampa, $20m^2$ de um certo material. Quais devem ser as dimensões do reservatório?”

O objetivo desta tarefa é apresentar aos alunos métodos numéricos para a resolução de equações algébricas. Os métodos numéricos independem do grau da equação e podem até ser utilizados para outros tipos de equações além das polinomiais. O aluno trabalhará aqui uma aplicação de equação polinomial de 3º grau com coeficientes reais.

O aluno nesta tarefa deveria pensar assim:

Consideramos o prisma onde o volume é dado por $Vp = A_b.\ h.$ Portanto $V = x.x.h$ e sua área total é dada por $A_T = 2x^2 + 4xh$. Sabendo que $V = 2000\ \lambda$, que $A_T = 20\ m^2$ e que se $1\ dm^3 = 1\ \lambda$, $1\ m^3 = 1000\ \lambda$ e $2m^3 = 2000\ \lambda$



Montando um sistema de equações temos

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xh = 20m^2 \\ x^2h = 2m^3 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema o aluno chegaria à equação $x^3 - 10x + 4 = 0.$

Utilizando o método de pesquisa de raízes, ele perceberia que existe uma raiz r entre 0 e 1. O problema agora será achar essa raiz r, pois a divisão do polinômio por $(x - r)$ levaria às outras raízes (se houver) recaindo em uma equação do 2º grau, da qual ele sabe achar as raízes.

Para a resolução de equações desse tipo, existem vários métodos numéricos, que determinam suas raízes . Na prática, equações polinomiais genéricas de grau 3 ou superior são resolvidas através de métodos numéricos. Tais métodos dão uma seqüência de valores que aproximam, com o grau de precisão desejado, a raiz que se quer obter.

Existem muitos métodos numéricos para determinar as raízes de uma equação algébrica. Em nível de Ensino Médio, o Método de Newton (1669) é o mais eficiente. Seria entregue aos alunos por escrito, para discussão em classe uma aplicação desse método de Newton.

Carneiro em seu livro “Resoluções de Equações Algébricas” (2000, p.77) comenta que o procedimento básico dos métodos numéricos para resolver equações algébricas consiste em

- ter uma primeira idéia de onde se encontrar as raízes;
- dentro do domínio onde se localiza uma raiz, escolher para ela um valor inicial;

- conceber um processo iterativo (repetitivo) que gere uma seqüência de valores $r_1, ..., r_n$ que convergem para a raiz procurada.

Carneiro faz em seu livro uma apresentação do Método de Newton. Tomando a equação geral do 3º grau $p(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$, e procedendo do seguinte modo:

- Escolhe-se uma primeira aproximação para a raiz, x_0 ;
- Divide-se $p(x)$ por $(x - x_0)$ obtendo $q_1(x)$, do 2º grau, e um resto $A_0 = p(x_0)$;
- Divide-se $q_1(x)$ por $(x - x_0)$ obtendo um quociente $q_2(x)$, do 1º grau, e um resto $B_0 = q_1(x_0)$;
- Divide-se $q_2(x)$ por $(x - x_0)$, achando um quociente $q_3(x)$, do grau 0, e um resto $D_0 = q_2(x_0)$ ou seja

$$\begin{array}{llllll}
p(x) & \multicolumn{1}{|l}{x - x_0} & & & & \\ \cline{2-2}
A_0 & q_1(x) & \multicolumn{1}{|l}{x - x_0} & & & \\ \cline{3-3}
 & B_0 & q_2(x) & \multicolumn{1}{|l}{x - x_0} & & \\ \cline{4-4}
 & & D_0 & q_3(x) & &
\end{array}$$

Estes quocientes e os restos destas divisões podem ser obtidos usando o dispositivo de Briot- Ruffini, da seguinte forma:

	c_3	c_2	c_1	c_0
x_0	c_3	......	....	A_0
x_0	c_3	....	B_0	
x_0	c_3	D_0		

As divisões efetuadas implicam que :

$$p(x) = (x - x_0)\, q_1(x) + A_0$$
$$q_1(x) = (x - x_0)\, q_2(x) + B_0$$
$$q_2(x) = (x - x_0)\, q_3(x) + D_0$$

Nota-se que $q_3(x) = c_3$

Substituindo cada resultado no precedente temos:

$$p(x) = c_3(x - x_0)^3 + D_0(x - x_0)^2 + B_0(x - x_0) + A_0 \qquad (1)$$

Sendo x_0 uma primeira aproximação de uma raiz real da equação $p(x) = 0$, busca-se uma segunda aproximação $x_1 = (x_0 + h)$, possivelmente melhor. Como devemos ter $p(x_1) = 0$, então, substituindo x por $x_1 = x_0 + h$, na equação (1) temos $c_3h^3 + D_0h^2 + B_0h + A_0 = 0$.

A idéia de Newton é que , se x_0 estivesse suficientemente próximo da raiz exata, h seria muito pequeno e, portanto, para uma primeira aproximação, podemos desprezar os termos em h^3 e h^2 , ficando com a equação do 1º grau aproximada $B_0 h + A_0 \cong 0$, de onde tiramos $h \cong - A_0 / B_0$. Isto sugere que se tome como segunda aproximação da raiz:

$$x_1 = x_0 - A_0 / B_0$$

A partir daí, podemos formar um processo iterativo, calculando $x_2 = x_0 - A_1 / B_1$, onde A_1 e B_1 são calculados a partir de x_0. Assim sucessivamente.

Carneiro então aplica o Método de Newton, para encontrar uma raiz real da equação polinomial dada p(x) = $x^3 - 10x + 4$

x	p(x)
0	4
1	-5

Vemos, na equação $x^3 - 10x + 4 = 0$, que há uma raiz entre 0 e 1. Iniciando o processo para $x_0 = 0$ temos:

	1	0	-10	4
0	1	0	-10	4
0	1	0	-10	

Então, $x_1 = x_0 - A_0 / B_0 = 0 – (4 / -10) = 0{,}4$ Retomando o processo e usando a calculadora temos

	1	0	-10	4
0,4	1	0,4	- 9,84	0,064
0,4	1	0,8	- 9,52	

fazemos

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - A_1/B_1 \\ &= 0{,}4 - 0{,}064 / (- 9{,}52) = \\ &= 0{,}406723, \end{aligned}$$

e continuando ainda o processo temos,

	1	0	-10	4
0,406723	1	0,406723	- 9, 834577	0,000055
0,406723	1	0,813445	- 9,503730	

Podemos confirmar que o próximo valor $x_3 = 0{,}406723 - 0{,}000055 / (-9{,}503730) = 0{,}406723$.

O último esquema de Briot-Ruffini que apareceu já indica que, ao se dividir o polinômio $p(x) = x^3 - 10x + 4$ por $x - 0{,}406723$, obtém-se o quociente:

$$q(x) = x^2 + 0{,}406723\,x - 9{,}834577 \quad \text{e resto quase } 0 .$$

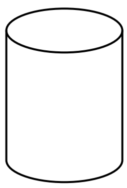
Logo, as outras soluções da equação $x^3 - 10x + 4 = 0$ são as raízes da equação do 2º grau, $x^2 + 0{,}406723x - 9{,}834577 = 0$. A raiz positiva $x = 2{,}939235$ é portanto outra solução do problema. Aos dois valores calculados, do lado da base x, correspondem para a altura, respectivamente, $h_1 = 12{,}089851$ e $h_2 = 0{,}231506$.

A seguir deixaremos aos alunos algumas aplicações das equações algébricas em outras áreas.

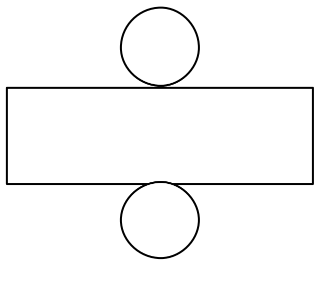
Aplicação 01: Na Geometria

-" Calcule o raio da base e a altura de um cilindro circular reto de volume 150 cm^3 e área total 200 cm^2."

Analisemos os dados do problema,



$V = 150\ cm^3$



$A_T = 200cm^2$

Chamaremos a área do cilindro de $A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ e volume do cilindro de $Vc = \pi r^2 h$.

Montando um sistema temos

$$\begin{cases} 2\pi r^2 + 2\pi rh = 200 \\ \pi r^2 h = 150 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema chegamos na equação $r^3 - 100r/\pi + 150/\pi = 0$.

Utilizando o método numérico de Newton vamos encontrar

$r = 1{,}63809$ e $h = 17{,}79368$

ou $r = 4{,}64159$ e $h = 2{,}21620$.

<u>Aplicação 02</u>: Na economia

" A tabela a seguir indica as quantidades produzidas mensalmente de televisores da marca ABC e os respectivos custos totais de produção;

Quantidade produzida	x	100	120	130	140	150	160
Custo total (R$)	y	2000	2300	2700	2900	2800	3000

a)- Apresente a função que melhor se ajusta a esses dados.

b)- Qual o valor mais provável para os custos fixos.

c)- Qual o valor estimado para 180 televisores."

Este problema está na Apostila de Matemática (1998), vol.2 de Walter Paulette, para o Curso de Administração, Ciências Contábeis e Economia da UNIP (Universidade Paulista). Ao analisar este problema os alunos poderiam perceber quão importante são as Equações Algébricas na resolução de problemas desta área.

Na solução deste problema usa-se a Regressão Linear, feita pelo Método dos Mínimos Quadrados que consiste em encontrar uma reta do tipo $y = ax + b$.

<u>Aplicação 03</u>: No comércio

“ Uma televisão cujo preço à vista é $ 500,00 é vendida em 6 prestações iguais de $ 120,00. Qual é a taxa mensal de juros que está sendo cobrada ?”

Supondo que a 1ª prestação é a entrada e considerando j a taxa inicial de juros, a equação fica $500 = 120 (1 + q + q^2 +q^3 + q^4 + q^5 + q^6)$, onde $q = 1/(1 +j)$, que também pode ser escrito da forma $q^6 - (25/6)q + 19/6 = 0$.

De qualquer modo, como $(6 \cdot 120)/500 = 1,44$, é claro que $0 < j < 0,50$. Logo o valor procurado para q está entre 2/3 e 1. Aplicando o método de Newton, encontra-se $q = 0,851440$ e , portanto, $j = 1/q - 1 = 1,174481$.

Logo, a taxa mensal de juros é 17,45%.

<u>Aplicação 04</u>: No cálculo

As funções algébricas são funções boas pois são definidas em R, têm limite, são contínuas, diferenciáveis e integráveis. Portanto, elas se tornam importante ferramentas em disciplinas de cursos universitários que utilizam o Cálculo e em todas as ciências onde ocorrem as taxas de variação.

CONCLUSÃO

Ao concluir nossa pesquisa, destacamos aspectos que nos fazem crer ser importante o ensino das equações algébricas no Ensino Médio. Embora muitas questões ainda tenham ficado por responder, para nós este assunto é importante dentro do programa do ensino Médio. *Para quem é ele importante?, poderá alguém questionar*.

Equações algébricas estão nos livros didáticos, estão presentes nos projetos curriculares, como o do SAEB já mencionado anteriormente, são citadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e, ainda, caem nos vestibulares. *Mas, essas razões não são suficientes o bastante para continuarmos ensinando este tópico no Ensino Médio, poderá ainda alguém argumentar.*

Concordamos. Não são mesmo. Existem razões mais fortes! Este assunto, que faz parte de um projeto curricular de estudos para o Ensino Médio, consta nos livros didáticos pesquisados a partir da década de 40 do século XX. Assim como no SAEB e na maioria dos livros didáticos este assunto é apresentado como último tópico do Ensino Médio e trabalhado no último bimestre do último ano. Por que isto acontece? Qual a razão para se trabalhar este tópico por último? É só para fechar um programa? Analisando este fato concluímos que este assunto enfeixa um trabalho feito ao longo de 12 anos de escolaridade.

Na possibilidade de mudanças no currículo do Ensino Médio, tirando-se dele os Números Complexos, como desejado por alguns, conseqüentemente seria retirado o tópico Equações Algébricas. Com isso, o trabalho de equações algébricas se encerraria nas equações do 2º grau, sem que se trabalhasse o caso de discriminante negativo. Nossa defesa é de que o programa do Ensino Médio, projetado para os três anos, ficaria inacabado, uma vez que todo o estudo sobre números se completa com os Números Complexos e as Equações Algébricas não só fecham um estudo algébrico como também todo um programa de ensino, uma vez que, para trabalhar bem Equações Algébricas, os alunos precisam de todos os Conjuntos Numéricos de N a C, da Álgebra do ensino Fundamental e Médio, da Geometria e da Trigonometria.

Nas entrevistas com professores percebemos que, mesmo os que consideram importante ensinar equações algébricas, não souberam dizer o porquê. A maioria restringe-se a justificar esse trabalho unicamente por ser um tópico cobrado no Vestibular. Também não conseguiram fazer uma ligação entre a matemática estudada nos cursos universitários e a matemática do Ensino Médio e Fundamental. Essa falta de visão está na formação do professor de matemática e isso ficou evidente na fala de pesquisadores em Educação Matemática que entrevistamos e está refletida no questionário aplicado a alunos, uma vez que a maioria deles não soube dizer porque estudaram álgebra.

A análise de livros didáticos e não didáticos levou-nos ao conhecimento de muitas aplicações interessantes do conteúdo equações algébricas em diversas áreas, sendo uma ferramenta essencial em estudos na área de exatas e outras áreas. As equações algébricas possibilitam o estudo de fenômenos diversos através de ajuste de curvas por funções polinomiais.

Como as funções polinomiais são definidas em R, têm limites, são contínuas, diferenciáveis e integráveis, são bastante apropriadas à compreensão de fatos onde está envolvido o conceito de taxa de variação. Taxas de variação ocorrem em todas as ciências. A velocidade, a densidade, a corrente, a potência e o gradiente da temperatura na física; a taxa de reação e a compressibilidade na química; a taxa de crescimento e o gradiente da velocidade do sangue na biologia; o custo e o lucro marginal na economia; a taxa do fluxo do calor na geologia; a taxa de desenvolvimento do desempenho na psicologia; a taxa de espalhamento de um boato na sociologia são casos especiais de um único conceito matemático, a derivada.

Criamos um "*Projeto alternativo de trabalho para o ensino das Equações Algébricas através da Resolução de Problemas*", para ser testado por professores com seus alunos do terceiro ano do Ensino Médio, visando um reconhecimento, tanto por parte dos professores quanto dos alunos, da importância desse tópico através das muitas conexões permitidas.

Questões como a contextualização, a interdisciplinaridade, a resolução de problemas e o uso da tecnologia deverão fazer parte do ensino-aprendizagem da matemática. Se quisermos que o aluno saia do Ensino Médio realmente preparado para continuar seus estudos ou para enfrentar o mundo do trabalho, agora é o momento de analisarmos todos os conteúdos oferecidos no Ensino Médio, não para julgar o que entra ou o que sai, mas para verificar a importância dos tópicos trabalhados .

Finalmente, esperamos que, ao ser aplicada, nossa proposta alternativa de trabalho com equações algébricas possa levantar novos questionamentos que ajudem os professores a perceber o valor da matemática na formação de um cidadão.

REFERÊNCIAS

ARTZT, A. F; NEWMAN, C.M. **How to use cooperative learning of in the mathematics class.** New York: NCTM, 1991. 73 p.

BAUMGART, J.K. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula:** Álgebra. **Tradução**: H.H.Domingues, São Paulo: Editora Atual, 1993. 112 p.

BEZERRA, M.J. **Curso de Matemática para o curso Clássico e Científico.** São Paulo: Nacional, 1954

______.**Curso de Matemática para o curso Clássico e Científico**. São Paulo,16. Edição. 1965.

BOOTH, L.R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: A. F. Coxford, A.F.; Shult, A.P. **As Idéias da Álgebra. Tradução.** H.H. Domingues São Paulo: Atual, 1995. p. 23-37.

BOULOS, P; WATANABE, R. **Matemática :** 2º grau. Nacional, 1979. v.3. 240 p.

BOYER, C. **História da Matemática**. Tradução. Elza F.Gomide. Edgard Blücher. 1974. 488 p.

BRASIL, L.A.S. **Estudos dirigidos de matemática no ginásio**. Fundo de Cultura 1964.

BRASIL. Ministério da educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. 1999

______.**Leis Diretrizes e Bases da Educação Nacional**.Brasília, 1999

CARAÇA, B.J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 1958.

CANAVARRO, A.P.; GUIMARÃES, F.A. Da flexibilidade curricular a um currículo europeu? Universidade de Évora. **Educação e Matemática**.Universidade de Évora: n.55, p.24, 1999

CARNEIRO, J. P. Q. **Resolução de Equações Algébricas**. Rio de Janeiro: Universidade Santa Ursula.1998, 102 p.

______.Equações algébricas um assunto para o ensino Médio? **Revista do Professor de Matemática.** Rio de Janeiro**,** n. 40, p. 31, 1999.

CARVALHO, T.M. **Matemática para os cursos Clássico e Científico :** 3. ano. Nacional 1955

CARVALHO, J.B.P. A história da trigonometria In: CARMO,M.P.; MORGADO,A.C.; WAGNER.E. **Trigonometria :** Números Complexos. SBM. 1992 . p.101 - 108.

CASTRO, C.M. A educação é o combustível do crescimento no Brasil. **Veja,** 27 de, p.196-199, dez. 2000.

CECCON, C. et al. **A vida na escola e a escola da vida**. 26. Vozes, 1982.

CHRISTMAS, P.T.; FEY, J.T. Communicating the importance of algebra to students. In: **Algebra for everyone**. New York: NCTM, 1990, p. 63-73

DANTE, L.R. **Matemática**: Contexto & Aplicações**.** v.3. Ática. 1999, 334 p.

______ .**Matemática**: Contexto & Aplicações**.** Único. Ática, 2000. v.3.

______. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática.1989, 176 p.

EISENBERG, T.; DREYFUS,T. Os polinômio nos currículos da Escola Média. In: A. F. Coxford, A.F.; Shult, A.P. **As Idéias da Álgebra. Tradução.** H.H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p.127-134.

ENCYCLOPAEDIA of Mathematics. Dordrecht: Kluwer, 1995. v.1 ,

FERREIRA,A.B.H. **Dicionário Aurélio básico da língua portuguesa**. São Paulo: Folha de São Paulo; Nova Fronteira,1995.

FIORENTINI, D., MIQUEL, A., MIORIM, MA. Alguns modos de ver e conceber o Ensino da Matemática no Brasil. **Zetetiké**, ano 3, no.4, 1995, p. 1-37.

FLORES, A. Cálculo de raízes de Polinômios com computador. In: A. F. Coxford, A.F.; Shult, A.P. **As Idéias da Álgebra. Tradução.** H.H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p.188-194.

FREIRE, P**. A importância do ato de ler**. São Paulo: Cortez Editora, 1993.

GEDDES, D.; FORTUNATO, I. Geometric Research and classroom activities. In: **Research Ideas for the classroom:** Middle Grades Mathematics. California: 1993,p.199

HOLDAN, G. Tornando as tarefas de casa de álgebra mais eficazes. In: A. F. Coxford, A.F.; Shult, A. P. **As Idéias da Álgebra. Tradução.** H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p. 278-284.

IEZZI, G., et.al. **Tópicos de Matemática**. Vol. 3, Ática 1981.

KIEREN,C.; Chalouh, L. Prealgebra: The transition from Arithmetic to Algebra. In: **Research ideas for the Classroom Middle Grades mathematics**. Douglas T. Owens, Editor. NCTM, 1993, p.179-198

KIYUKAWA, R; SHIGEKIYO, C.T. ; YAMAMOTO, K. **Os elos da matemática**. v.3. 1992.

KNUDSEN,C.A. A teoria das equações algébricas. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro. no.7, 1985, p.26-31.

LIMA, E. L., et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM. 1996.

______Matemática, Manipulação e Aplicação.Os três componentes do ensino da matemática.**Revista do Professor de Matemática**.Rio de Janeiro:SBM.1999, nº 41, p.1-6.

LINS, R.C., GIMENES, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**.Campinas, S.P: Papirus, 1997,176p.

MATO GROSSO (Estado). Secretaria de Educação do Estado de Mato Grosso. Diretrizes Curriculares para o Estado de Mato Grosso. 1997. p.16.

MERRIL GLENCOE. **Algebra - 1. Applications and connections**. McGraw-Hill. 1998

MILIES, C.P. A solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau. **Revista do Professor de Matemática**, no.25, 1º Sem. 1994, p.15-22.

MIZUKAMI, M.G.N. et al. **Escola e aprendizagem da docência, processos de investigação e formação**. São Carlos. Edufscar, 2002, 203 p.

MOREIRA,C.G.T. Uma solução das equações de 3º e 4º graus. **Revista do Professor de Matemática**. no. 25 – 1º sem. 1994, p.23-28.

MULLIGAN, C.H. Uso de Polinômios para surpreender. In: A. F. Coxford, A.F.; Shult, A.P. **As Idéias da Álgebra. Tradução.** H.H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p.236-243

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics.** 2000

ONUCHIC, L.R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO,M.A.V.(Org).**Perspectiva em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas**. São Paulo: EDUNESP, 1999. p.199 –218.

______ Reconceitualizando das quatro operações fundamentais.**Revista de Educação Matemática,** São Paulo, v. 6, no.4, p.19-26, 1998

PAIVA, M. **Matemática**. Moderna, 1999, 461p.Volume único.

PHILIPP, R. A. et al. A responsible mathematics teacher and the choices she makes: A case study. In: **Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades**. New York. 1995, p.308.

POLYA, G. **A arte de Resolver Problemas**.**Tradução**. Heitor Lisboa de Araújo. Interciência, 1978. 179 p.

PORFÍRIO, J. Mesa redonda virtual. **Educação e Matemática**. Portugal:, n.55, p.60, 1999.

READ,C.B. Álgebra arábica, 820 - 1250. In: BAUMGART, J. K. **Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula**.**Tradução**. H.H.Domingues. 1993. Atual, p.75-79.

ROCHA, L.M.; BARBOSA, R.M. **Matemática:** Curso Colegial Moderno. IBEP, 1971. v.3.

ROMBERG, T. A. Perspectives on Scholarship and Research Methods**.** In: HANDBOOK of **Research on Mathematics teacher and Learnin**g. New York, NCTM, 1992, p.49-64.

ROXO, E. et al. **Matemática** : 2º Ciclo - 3ª Série. Francisco Alves, 1946 p.87

SANGIORGE, O. Introdução da matemática moderna no ensino de qualquer grau. Mesa Redonda 03/ 09/63. In: Separata da Revista Didática no.1 - Marília, 1964

SÃO PAULO (Estado) Secretaria de Educação do estado de São Paulo. Matrizes curriculares de referência para o SAEB. 2ª Edição. 1999

SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP. **Mathematics for High School**. Tradução: São Paulo, Edart , 1966. v.3

STANIC,G.M.A; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the mathematics Curriculum. In **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**. NCTM. 1989, p. 1-22.

TAILLE, Y. Educação . **Folha de São Paulo** 13 abr. 1997. Mais.

TEIXEIRA, J. C. et. al. **Aulas Práticas de matemática**. Editora Ática. 1988. v.3

TROTTA, F. ; IMENES, L.M.P. **Matemática Aplicada**. Moderna , 1980. 394p. v.3

USISKIN, Z. Concepções sobre a Álgebra da Escola Média e utilização das Variáveis. In**:** Coxford. A. F.; A. P. Shulte **. As idéias da Álgebra. Tradução.**H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

WHITE, E.G. **Educação**.Santo André: CPB, 1997