

Cláudia Augusta Hidalgo

Grafos Hamiltonianos e União de Vizinhanças





CLÁUDIA AUGUSTA HIDALGO

GRAFOS HAMILTONIANOS E UNIÃO DE VIZINHANÇAS

GRAFOS HAMILTONIANOS E UNIÃO DE VIZINHANÇAS

Cláudia Augusta Hidalgo

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e
Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Júlio de
Mesquita Filho, Campus de São José do Rio Preto, para a
obtenção do título de Mestre em Ciências Exatas (Área de
Concentração: Matemática Aplicada e Computacional).

Orientador: Prof. Dr. Walter Júlio Cortez Morais

São José do Rio Preto

1998



332/96



CLÁUDIA AUGUSTA HIDALGO

GRAFOS HAMILTONIANOS E UNIÃO DE VIZINHANÇAS

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, para a obtenção do título de Mestre em Ciências Exatas (Área de Concentração: Matemática Aplicada e Computacional).

Orientador: Prof. Dr. Walter Júlio Cortez Morales

Aos meus pais, Silvio Hidalgo e Nair Capovilla Hidalgo,

pelos modelos

À minha filha, Luna Hidalgo Carneiro,

pela modelagem

São José do Rio Preto

1996



732/96



AGRADECIMENTOS

ao Prof. Dr. Walter Júlio Cortez Moraes pela
orientação, dedicação e paciência;

à minha irmã Cleiva, meus sobrinhos Felipe e Flávio, pelo
carinho, risos e saudades;

aos amigos, entre eles, Leandro de Oliveira Tancredo,
Eduardo César Catanozi e Luiz Carlos Nizato Batista, pelos ombros;

à Profª. Drª. Sandra Maria Venturelli Ferreira Dias e ao
Dr. José Rafael Alvarez Cheddad, dois dos meus modelos de bons
profissionais que me assistiram durante esta dissertação;

aos funcionários da seção de pós-graduação, C.C.I. e
DCCE, em especial aos da biblioteca e xerox pelo profissionalismo e
paciência;

aos professores e funcionários que estão e aos que já
passaram pelas FIRP;

ao coordenador Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto e

Aos meus pais, Silvio Hidalgo e Nair Capovila Hidalgo,
professores da pós-graduação do DCCE,

pelos modelos...

aos meus avós Cláudio, Aracy e Corina, meus tios Taim e
Tereza, pela torcida,

À minha filha, Luna Hidalgo Carneiro,

pela modelagem...

OBRIGADA

AGRADECIMENTOS

ao Prof. Dr. **Walter Júlio Cortez Morales** pela orientação, dedicação e paciência;

à minha irmã Cleiva, meus sobrinhos Felipe e *Flávio*, pelo carinho, risos e *saudades*;

aos amigos, entre eles, Leandro de Oliveira Tancredo, Eduardo César Catanozi e Luiz Carlos Nizato Batista, pelos ombros;

à Prof^a. Dr^a. Sandra Maria Venturelli Ferreira Dias e ao Dr. José Rafael Alvarez Chaddad, dois dos meus modelos de bons profissionais que me assistiram durante esta dissertação;

aos funcionários da seção de pós-graduação, C.C.I. e DCCE, em especial aos da biblioteca e xerox pelo profissionalismo e paciência;

aos professores e funcionários que estão e aos que já passaram pelas FIRP;

ao coordenador Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto e professores da pós-graduação do DCCE;

aos meus avós Cláudio, Aracy e Corina, meus tios Taim e Tereza, pela torcida,

Antônio Cícero
OBRIGADA.



Resumo

Neste trabalho apresentamos diversos resultados conhecidos sobre grafos hamiltonianos. Descrevemos condições necessárias e condições suficientes para que um grafo seja hamiltoniano.

Dentre os grafos hamiltonianos, observamos como se comporta a união de vizinhanças para vértices não adjacentes com distância maior ou igual a dois e estendemos esta observação para grafos traçáveis.

Abstract

In this work we present several renowned results about hamiltonians graphs. We describe necessary conditions and enough conditions in order that a graph become hamiltonians.

Guardar, guardar, guardar...

Guardar uma coisa não é escondê-la ou trancá-la. Num cofre não se guarda nada. Em cofre perde-se a coisa à vista. Guardar uma coisa é olhá-la, fitá-la, mirá-la por admirá-la, isto é, iluminá-la ou ser por ela iluminado, estar acordado por ela, estar por ela ou ser por ela.

Antônio Cícero

Resumo

Neste trabalho apresentamos diversos resultados conhecidos sobre grafos hamiltonianos. Descrevemos condições necessárias e condições suficientes para que um grafo seja hamiltoniano.

Dentre os grafos hamiltonianos, observamos como se comporta a união de vizinhanças para vértices não adjacentes com distância maior ou igual a dois e estendemos esta observação para grafos traçáveis.

Abstract

In this work we present several renowned results about hamiltonians graphs. We describe necessary conditions and enough conditions in order that a graph become hamiltonians.

From among the hamiltonians graphs, we notice how is the conduct of the neighborhoods union for nonadjacent vertices with a major or equal distance than two, and we understand this observation for traceable graphs.

ÍNDICE

5.3. GRAFOS HAMILTONIANOS	48
5.4. GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE DIRAC	55
5.5. GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE ORE	56
1. INTRODUÇÃO	8
2. NOÇÕES BÁSICAS DA TEORIA DOS GRAFOS	13
3. GRAFOS DE HAMILTON: ALGUNS RESULTADOS CLÁSSICOS	19
3.1. INTRODUÇÃO	19
3.2. GRAFOS COMPLETOS	21
3.3. TEOREMA DE DIRAC	25
3.4. TEOREMA DE ORE	28
4. FECHO E ALGUMAS CONSEQÜÊNCIAS	32
4.1. CONDIÇÕES NECESSÁRIAS	32
4.2. FECHO DE UM GRAFO	37
4.3. CONDIÇÕES SUFICIENTES	40
5. VIZINHANÇAS: GRAFOS TRAÇÁVEIS E HAMILTONIANOS	44
5.1. UNIÃO DE VIZINHANÇAS	44
5.2. RESULTADOS DOS GRAFOS TRAÇÁVEIS	45

5.3. GRAFOS HAMILTONIANOS VIA VIZINHANÇAS	48
--	-----------

5.4. GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE DIRAC	55
---	-----------

5.5. GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE ORE	56
---	-----------

BIBLIOGRAFIA	59
---------------------	-----------

teoria dos grafos nasceu por volta de 1736, com o artigo de Euler, no qual resolvia o problema das sete pontes de Königsberg. Após este trabalho, por aproximadamente 100 anos quase nada foi feito nesse campo.

No ano de 1847, G. R. Kirchhoff (1824 - 1887) desenvolveu a teoria das árvores para aplicação em trabalhos elétricos. Dez anos mais tarde, A. Cayley (1821 - 1895) usou as árvores quando as testou para a enumeração de certos elementos da teoria química. Quase no mesmo período em que surgiram as teoria de Kirchhoff e Cayley, A. F. Möbius e A. De Morgan trabalharam com o problema das quatro cores, que continua em aberto até hoje. Por volta de 1859, o Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865) inventou um quebra-cabeça, feito em madeira, constituído de um dodecaedro regular no espaço euclidiano de dimensão três, R^3 , (um poliedro com doze faces e vinte vértices, sendo que cada face possui um pentágono regular e três arestas que se encontram em cada vértice). Os vértices do pentágono no R^3 foram marcados com nome de vinte cidades importantes da época. O objetivo do quebra-cabeça constituía em passar por cada uma das vinte cidades

1. INTRODUÇÃO

Apresentamos a seguir, em linhas gerais, uma breve história da teoria dos grafos como um sucinto dos grafos hamiltonianos.

A teoria dos grafos nasceu por volta de 1736, com o artigo de Euler, no qual resolvia o problema das sete pontes de Königsberg. Após este trabalho, por aproximadamente 100 anos quase nada foi feito nesse campo.

No ano de 1847, G. R. Kirchhoff (1824 - 1887) desenvolveu a teoria das árvores para aplicação em trabalhos elétricos. Dez anos mais tarde, A. Cayley (1821 - 1895) usou as árvores quando as testou para a enumeração de certos elementos da teoria química.

Quase no mesmo período em que surgiram as teoria de Kirchhoff e Cayley, A. F. Möbius e A. De Morgan trabalharam com o problema das quatro cores, que continua em aberto até hoje. Por volta de 1859, o Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865) inventou um quebra-cabeça, feito em madeira, constituído de um dodecaedro regular no espaço euclidiano de dimensão três, R^3 , (um poliedro com doze faces e vinte vértices, sendo que cada face possui um pentágono regular e três arestas que se encontram em cada vértice). Os vértices do pentágono no R^3 foram marcados com nome de vinte cidades importantes da época. O objetivo do quebra-cabeça constituía em passar por cada uma das vinte cidades

exatamente uma vez, utilizando como caminho as arestas do dodecaedro (figura1.1). Acredita-se que esse quebra-cabeça foi vendido para um empresário de jogos em Dublin.

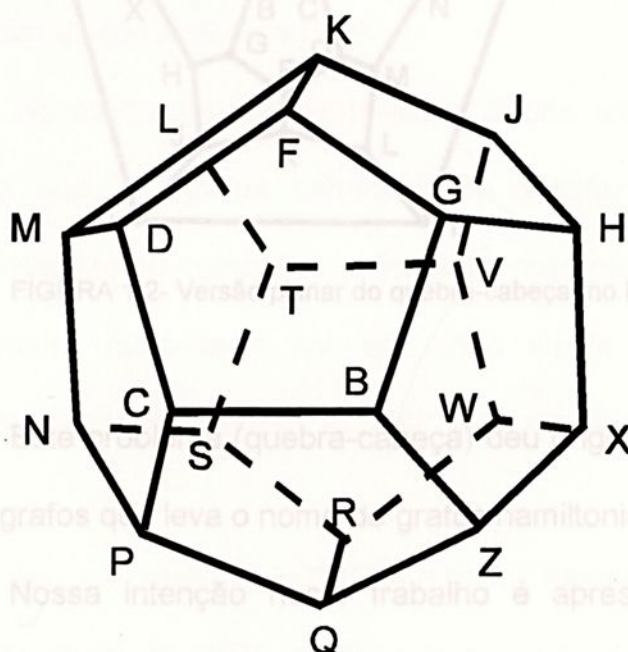


FIGURA 1.1- Dodecaedro no $\mathbb{R}^3$.

No capítulo 2 apresentaremos noções básicas da teoria dos grafos, usando a terminologia de Bondy⁴ e Berge⁵ e, quando necessário, convencionaremos algumas notações que estaremos usando. Devido ao tal dodecaedro quebra-cabeça não ter sucesso comercialmente, em virtude da dificuldade em manipulá-lo, Hamilton, ao invés do problema ilustrado no espaço, reduziu-o para uma versão planar do jogo (figura1.2).

No capítulo 3 comentaremos os dois resultados mais importantes que tratam dos grafos hamiltonianos sendo eles: o teorema de Dirac e o teorema de Ore, ambos seguidos de ilustrações.

Existem grafos que verificam as hipóteses do teorema de Dirac, mas não as hipóteses do teorema de Ore, assim como existem os

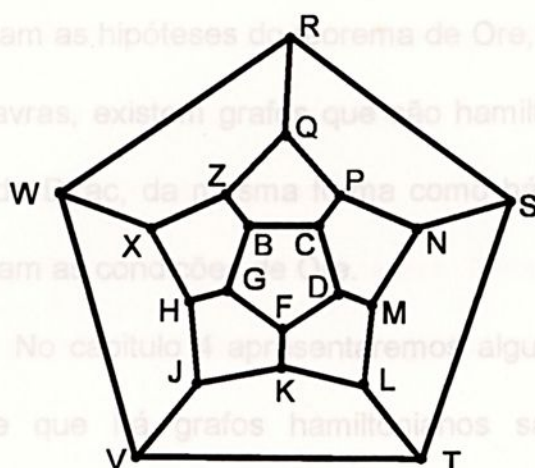


FIGURA 1.2- Versão planar do quebra-cabeça (no $\mathbb{R}^2$).

Este problema (quebra-cabeça) deu origem ao estudo de uma classe de grafos que leva o nome de grafos hamiltonianos.^{17 e 28}

Nossa intenção neste trabalho é apresentar algumas definições e resultados relevantes conseguidos nos últimos quinze anos, pelos especialistas da área.

No capítulo 2 apresentaremos noções básicas da teoria dos grafos, usando a terminologia de Bondy⁸ e Berge⁶ e, quando necessário, convencionaremos algumas notações que estaremos utilizando.

No capítulo 3 comentaremos os dois resultados mais importantes que tratam dos grafos hamiltonianos sendo eles: o teorema de Dirac e o teorema de Ore, ambos seguidos de ilustrações.

Existem grafos que verificam as hipóteses do teorema de Dirac, mas não as hipóteses do teorema de Ore, assim como existem os

que verificam as hipóteses do teorema de Ore, mas não as de Dirac; em outras palavras, existem grafos que são hamiltonianos sem verificar as condições de Dirac, da mesma forma como há grafos hamiltonianos que não verificam as condições de Ore.

No capítulo 4 apresentaremos alguns resultados laterais no sentido de que há grafos hamiltonianos satisfazendo, somente condições necessárias ou condições suficientes, mas não ambas. Deste modo na literatura consultada por nós, não existe uma condição necessária e suficiente que possa garantir que um grafo conexo seja hamiltoniano.

Se um grafo $G = (V(G), E(G))$ for hamiltoniano e S um subconjunto não vazio de $V(G)$, então o número de componentes do grafo $(G-S)$ é menor ou igual à cardinalidade do conjunto S . Este resultado dá origem a um novo tipo de grafos: grafos t -resistentes, os quais, têm ligação com os grafos hamiltonianos. Iremos, falar brevemente também destes grafos.

No capítulo 5 apresentaremos a noção de vizinhança. Para tal apresentação iniciamos com o trabalho de Chvátal, que, a partir da década de 70, foi estendido e estudado por vários autores com a finalidade de obter caracterizações via vizinhanças para os grafos hamiltonianos. Acreditamos que um dos primeiros foi Faudree et al.¹⁸, seguido por Fraisse²², Lindquester²⁵, Jackson²⁴, Shen & Tian²⁷.

Esta seqüência obedece aos estudos desenvolvidos por nós sobre os tópicos relacionados aos grafos de Hamilton.

Um grafo G consiste de um par de conjuntos não vazios, $(V(G), E(G))$, onde os elementos de V são vértices, enquanto os elementos E são pares não ordenados dos elementos de V , chamados arestas. Neste mesmo capítulo, apresentaremos, ainda, as generalizações dos dois mais importantes teoremas que tratam da existência de um ciclo hamiltoniano em grafos simples, a saber: o de Dirac e de Ore.

Denotaremos o grafo $G=(V(G), E(G))$ ou, simplesmente, pela letra G . Algumas vezes simplificaremos, a escrita de $V(G)$ e $E(G)$, denotando com V e E respectivamente.

Um grafo $G=(V(G), E(G))$ é trivial se $E(G)$ é um conjunto vazio.

A cardinalidade de $V(G)$, denotada por $|V(G)|$, vem a ser a ordem de G , enquanto a cardinalidade de $E(G)$, isto é, $|E(G)|$ é o número de arestas de G .

Os grafos são assim chamados porque podem ser representados graficamente.

Se u e v são vértices de G , então uma aresta e representa uma linha que liga os vértices u e v , o qual escrevemos $e=\{u,v\}$ ou $e=uv$.

Dada uma aresta $e=\{u,v\} \in E(G)$, os vértices u e v são os extremos de e , ainda dizemos que e incide nos vértices u e v , e reciprocamente.

2. NOÇÕES BÁSICAS DA TEORIA DOS GRAFOS

têm um vértice em comum.

Um grafo G consiste de um par de conjuntos não vazios, $(V(G), E(G))$, onde os elementos de V são vértices, enquanto os elementos E são pares não ordenados dos elementos de V , chamados arestas.

Um vértice v de G é isolado se e somente se $d(v)=0$.

Denotaremos o grafo $G=(V(G), E(G))$ ou, simplesmente, pela letra G . Algumas vezes simplificaremos, a escrita de $V(G)$ e $E(G)$, denotando com V e E respectivamente.

Um grafo $G=(V(G), E(G))$ é trivial se $E(G)$ é um conjunto vazio.

duas ou mais arestas que unam o mesmo par de vértices distintos.

A cardinalidade de $V(G)$, denotada por $|V(G)|$, vem a ser a ordem de G , enquanto a cardinalidade de $E(G)$, isto é, $|E(G)|$ é o número de arestas de G .

Um grafo G é k -regular, ($k \geq 1$), se e somente se todos os vértices de G tem grau k .

Os grafos são assim chamados porque podem ser representados graficamente.

completo por K_n , onde n é o número de vértices do grafo.

Se u e v são vértices de G , então uma aresta e representa uma linha que liga os vértices u e v , o qual escrevemos $e=\{u,v\}$ ou $e=uv$.

ser simples.

Dada uma aresta $e=\{u,v\} \in E(G)$, os vértices u e v são os extremos de e , ainda dizemos que e incide nos vértices u e v , e reciprocamente.

todas as arestas incidentes em v .

Duas ou mais arestas são adjacentes se e somente se têm um vértice em comum.

O grau do vértice v , no grafo G denotado por $d_G(v)$, é o número de arestas de G incidentes a v . Se não houver confusão, ao invés da notação $d_G(v)$, usaremos $d(v)$.

Um vértice v de G é isolado se e somente se $d(v)=0$.

O menor grau entre os vértices de G é denotado por $\delta(G)$. Analogamente, o maior grau entre os vértices de G é denotado por $\Delta(G)$.

Um grafo G é simples quando não possui laços e nem duas ou mais arestas que unam o mesmo par de vértices distintos.

Um grafo G é k -regular, ($k \geq 1$), se e somente se todos os vértices de G tem grau k .

Um grafo simples, no qual todo par de vértices é ligado exatamente por uma aresta, é um grafo completo. Denotamos um grafo completo por K_n , onde n é o número de vértices do grafo.

Tomaremos como referência um grafo G a qualquer grafo finito e simples. Contudo, em alguns casos frisaremos o fato de o grafo ser simples.

Seja v um vértice arbitrário de G , então $G - v$ é o grafo resultante da remoção do vértice v a partir do grafo G , bem como de todas as arestas incidentes em v .

Seja e uma aresta arbitrária de G , então $G - e$ é o grafo resultante da remoção da aresta e a partir do grafo G .

Um grafo é conexo se e somente se para quaisquer dois vértices distintos existir uma cadeia (ver pag.16, §2) que os liga; caso contrário, é desconexo.

Seja h um inteiro maior ou igual a 1. Um grafo G é h -conexo, se $h \leq \kappa(G)$, onde $\kappa(G)$ é o menor inteiro positivo (conectividade de G) que com a remoção de $\kappa(G)$ vértices de G , o grafo resultante é um grafo desconexo ou trivial.

Sejam G e H dois grafos. H é um subgrafo de G (e escrevemos $H \subseteq G$), se e somente se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Se pelo menos uma dessas inclusões for própria, diz-se que H é um subgrafo próprio de G e escreve-se $H \subset G$.

Chamaremos de subgrafo gerador a um subgrafo conexo de G que contenha todos os vértices de G .

Se H é um subgrafo de G diz-se também que G é um supergrafo de H ou que G contém H .

Seja S um subconjunto não vazio de $V(G)$. O subgrafo de G , cujo conjunto de vértices é S , e o conjunto de arestas formado por todas arestas de G , cujos extremos pertencem a S , é denominado o subgrafo induzido por S , e denotado por $G[S]$.

Um subconjunto S de $V(G)$, é um conjunto estável de G , se não houver dois vértices de S que são adjacentes em G .

Uma cadeia Ω , é definida como sendo uma sequência alternada de vértices e arestas do grafo $G=(V,E)$, começando e terminando com vértices isto é: $\Omega: x_1, (x_1, x_2), x_2, (x_2, x_3), \dots, x_{k-1}, (x_{k-1}, x_k), x_k$. Se Ω contém k arestas de G , então Ω tem comprimento k , e denota-se por $\mathcal{L}(\Omega)$.

Uma cadeia, cujos extremos sejam coincidentes, é denominada ciclo.

Se o ciclo tem comprimento par ou ímpar, dizemos ciclo par ou ciclo ímpar.

Se todas as arestas (mas não necessariamente todos os vértices) de uma cadeia forem distintos, então a cadeia é uma trilha. Se todos os vértices de uma trilha forem distintos, então a trilha vem a ser um caminho. Em outras palavras, um caminho é uma cadeia cujos vértices e arestas são distintos.

Um circuito é um ciclo tal que seus vértices e arestas não se repetem. Neste trabalho, a noção de circuito será usada, porém de forma a não diferenciar os termos *circuitos* ou *ciclos*.

Vizinhança de um vértice u de um grafo $G=(V(G),E(G))$, denotado por $N(u)$, é o conjunto dos vértices adjacentes a u , isto é:

$$N(u) = \{v \mid vu \in E(G)\}$$

União de vizinhança de dois vértices não adjacentes u e v , é o conjunto dos vértices adjacentes a u ou a v .

Brevemente,

$$N(u) \cup N(v) = \{w \in V(G) \mid wu \in E(G) \text{ ou } wv \in E(G)\}.$$

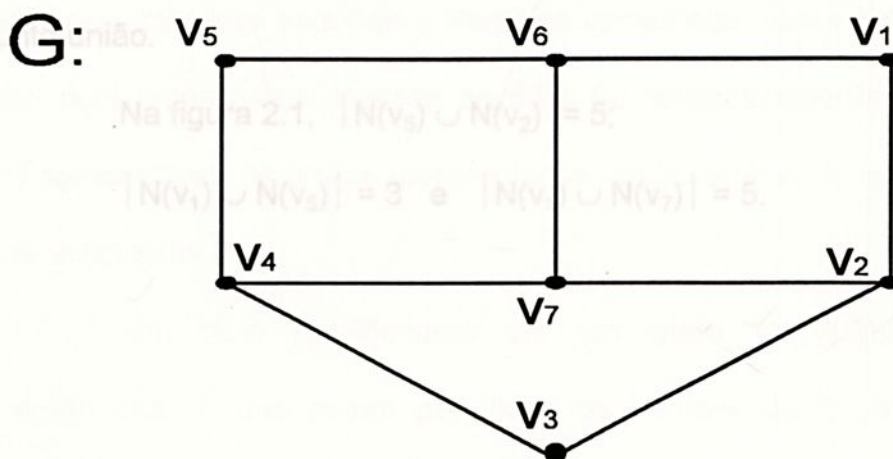


FIGURA 2.1-Vizinhança de vértices no grafo G.

Vizinhança de vértice, usando como exemplo a fig. 2.1:

$$N(v_1) = \{v_2, v_6\} ; N(v_2) = \{v_1, v_7, v_3\} ; N(v_3) = \{v_2, v_4\};$$

$$N(v_4) = \{v_3, v_7, v_5\} ; N(v_5) = \{v_4, v_6\} ; N(v_6) = \{v_5, v_7, v_1\};$$

$$N(v_7) = \{v_4, v_6, v_2\}.$$

3. **GRAFO** União de vizinhanças de dois vértices não adjacentes, usando a figura 2.1

$N(v_5) \cup N(v_2) = \{v_4, v_6, v_1, v_7, v_3\}$; v_2 e v_5 não são adjacentes.

$N(v_1) \cup N(v_5) = \{v_2, v_6, v_4\}$; v_1 e v_5 não são adjacentes.

$N(v_1) \cup N(v_4) = \{v_2, v_6, v_5, v_7, v_3\}$; v_1 e v_4 não são adjacentes.

A cardinalidade da união de vizinhanças de dois vértices não adjacentes em um grafo G é a quantidade de vértices pertencentes ao conjunto união.

Na figura 2.1, $|N(v_5) \cup N(v_2)| = 5$;

$|N(v_1) \cup N(v_5)| = 3$ e $|N(v_1) \cup N(v_7)| = 5$.

Um ciclo hamiltoniano em um grafo $G=(V(G),E(G))$ conexo é um ciclo Γ que passa por todos os vértices de G , isto é, $|\Gamma| = |V(G)|$.

Em um grafo $G=(V,E)$ conexo, um caminho hamiltoniano é definido como um caminho que intersecta cada vértice de G exatamente uma vez. Em outras palavras, um caminho de Hamilton é um caminho que contém todos os vértices de G .

Um grafo G conexo é um grafo de Hamilton ou hamiltoniano se G possui pelo menos um ciclo hamiltoniano.

3. GRAFOS DE HAMILTON: ALGUNS RESULTADOS CLÁSSICOS

3.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo trataremos de dois dos teoremas mais importantes que tratam dos grafos hamiltonianos: o de Dirac e de Ore. Resultados que achamos segundo a literatura consultada, como aqueles que foram publicados pelas décadas de 50 e 60 respectivamente. Tais teoremas caracterizam os grafos hamiltonianos, embora visando apenas condições suficientes.

Um ciclo hamiltoniano em um grafo $G=(V(G),E(G))$ conexo é um ciclo Γ que passa por todos os vértices de G , isto é,

$$\mathcal{L}(\Gamma) = |V(G)|.$$

Em um grafo $G=(V,E)$ conexo, um caminho hamiltoniano é definido como um caminho que intersecta cada vértice de G exatamente uma vez. Em outras palavras, um caminho de Hamilton é um caminho que contém todos os vértices de G .

Um grafo G conexo é um grafo de Hamilton ou hamiltoniano se G possui pelo menos um ciclo hamiltoniano.

Consideremos o grafo G hamiltoniano, com o ciclo hamiltoniano Γ , e seja e qualquer aresta de Γ , então retirando esta aresta o subgrafo resultante de G possui um caminho hamiltoniano $W = \Gamma - e$. Queremos dizer que todo grafo de Hamilton possui pelo menos um caminho hamiltoniano, mas a recíproca não é necessariamente verdade, conforme observação acima.

FIGURA 3.2a Grafo de Petersen.

não hamiltoniano com caminho W de Hamilton. $W = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}$.

G:

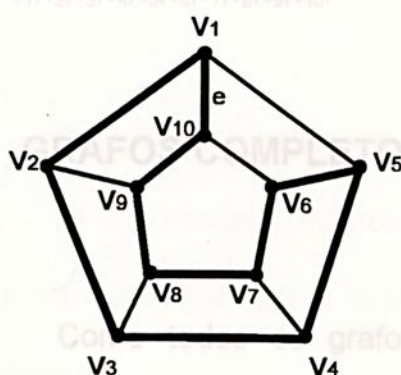


FIGURA 3.1a - Grafo hamiltoniano com ciclo $\Gamma: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_1$

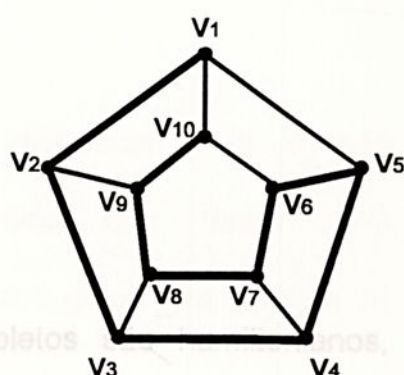
FIGURA 3.2b Caminho $W \cup \{e\}$ do grafo de Petersen, não hamiltoniano.

FIGURA 3.1b - Grafo hamiltoniano com caminho $W = \Gamma - e$

Entretanto, se considerarmos, agora, o grafo conexo $F=(V(F),E(F))$ com o caminho hamiltoniano W , e tomarmos uma aresta e de F tal que $e \notin W$, então o subgrafo $W \cup \{e\}$ não terá necessariamente um ciclo hamiltoniano de F , conforme ilustração 3.2.

Por outro lado, se para o caminho hamiltoniano W de F , tendo no mínimo $\frac{n}{2}$ arestas incidentes em cada vértice F é hamiltoniano, o subgrafo $W \cup \{e\}$ não for um ciclo hamiltoniano de F , neste caso o grafo F é denominado grafo **traçável**.

F:

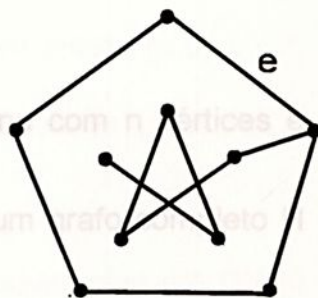
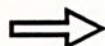
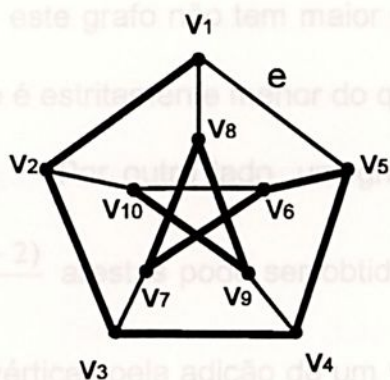


FIGURA 3.2a Grafo de Petersen.

não hamiltoniano com caminho W de Hamilton. $W = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}$.

FIGURA 3.2b Caminho $W \cup \{e\}$ do grafo de Petersen, não hamiltoniano.

3.2. GRAFOS COMPLETOS

Como todos os grafos completos são hamiltonianos, surge uma questão natural: todo grafo com n vértices e com número suficientemente grande $f(n)$ de arestas será hamiltoniano?

Um grafo terá possibilidade de ser hamiltoniano quanto maior for a proximidade de $f(n)$ ao número de arestas de um grafo completo. Isto é o maior número possível de arestas em um grafo conexo não garante a presença de um ciclo hamiltoniano no grafo. Por exemplo, o teorema de Dirac garante que um grafo com n vértices e

sequência de graus $\frac{n}{2}$ tendo no mínimo $\frac{n}{2}$ arestas incidentes em cada vértice é hamiltoniano.

No entanto, este grafo não tem maior número de arestas, pois o grau de cada vértice é estritamente menor do que $n-1$.

Por outro lado, um grafo hamiltoniano com n vértices e

$1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ arestas pode ser obtido a partir de um grafo completo H

sobre $n-1$ vértices pela adição de um vértice extra e fazendo este vértice adjacente a um único vértice em H . De fato, este grafo tem um número

bastante grande de arestas entre todos os grafos não hamiltonianos com n vértices.

Seqüência gráfica é uma seqüência finita e não decrescente de números inteiros positivos que tenha uma correspondência biunívoca com a seqüência dos graus dos vértices de um grafo conexo G .

Teorema 3.2.1 Se G é um grafo com seqüência de grau $d_1, d_2, \dots, d_p$ ($p \geq 3$) tal que: $d_k \leq k < \frac{1}{2}p \Rightarrow d_{k-p} \geq p-k$, para cada k , então G é hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos que não haja um grafo hamiltoniano G cuja seqüência de graus verifica

$$d_k \leq k < \frac{1}{2}p \Rightarrow d_{p-k} \geq p-k, \quad (I)$$

Daí G estar contido em um grafo maximal não hamiltoniano G^* , isto é, se acrescentarmos uma nova aresta $\{a,b\}$ a G^* , então $G^* \cup \{a,b\}$ será hamiltoniano e também a seqüência de graus de G^* satisfaz (I).

Tomemos u e v , dois vértices não adjacentes em G^* tal que $d(u) + d(v)$ seja tanto maior quanto possível e $d(u) \leq d(v)$.

Desde que G^* é um grafo maximal não hamiltoniano com extremos u e v , isto é, pela escolha de G^* , $u = u_1, u_2, \dots, u_p = v$

Definamos os conjuntos: $S = \{i: u u_{i+1} \text{ é uma aresta de } G^*\}$ e $T = \{i: u_i v \text{ é uma aresta de } G^*\}$.

Se não existe $j \in S \cap T$, por exemplo, tomemos $j = 5$ (veja figura 3.3)

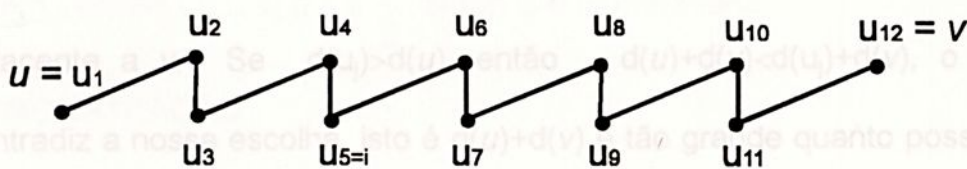


FIGURA 3.3

Desde que $j = 5 \notin S \Rightarrow u u_{j+1} \notin G^*$ e

Fazendo $k = d$ $j = 5 \notin T \Rightarrow u_i v = u_5 v \notin G^*$ conseguinte (por I)

Se existe $j \in S \cap T$, por exemplo $j=5 \Rightarrow u u_{j+1} = u_1 u_6 \in G^*$ e $u_j v = u_5 v \in G^*$.

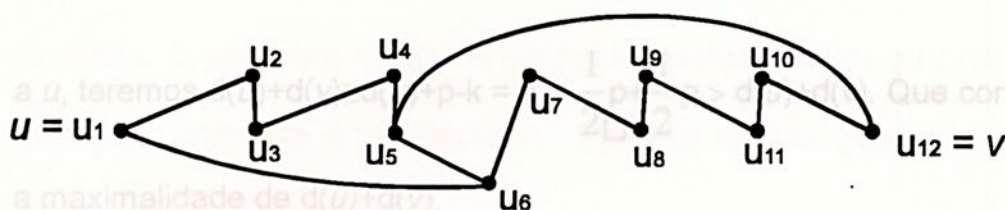


FIGURA 3.4

Então existe um ciclo : $u_{j=5}, u_4, u_3, u_2, u_1, u_{j+1=6}, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_5$ como mostra a figura 3.4.

Pela escolha de G^* , este ciclo será hamiltoniano, já que contém todos os vértices de G^* , contradizendo a nossa escolha de G^* , maximal e não hamiltoniano, logo devemos ter $S \cap T = \emptyset$. E também desde que $2 \notin S$, $3 \in S$, $u_{p-2} \in T$ e $u_{p-1} \notin T$, temos que $S \cup T \subset \{1, 2, \dots, p-2, p-1\}$.

Portanto $d(u) + d(v) = |S| + |T| < p$ e como $d(u) \leq d(v)$, então $d(u) < \frac{1}{2}p$.

Como $S \cap T = \emptyset$, cada u_j com $j \in S$ é um vértice não adjacente a v . Se $d(u_j) > d(u)$, então $d(u) + d(v) < d(u_j) + d(v)$, o que contradiz a nossa escolha, isto é $d(u) + d(v)$ é tão grande quanto possível.

Portanto devemos ter $d(u_j) \leq d(u)$.

Assim há pelo menos $|S| = d(u)$ vértices cujos graus não excedam a $d(u)$.

Fazendo $k = d(u)$, temos $d_k \leq k < \frac{1}{2}p$. Por conseguinte (por I)

$d_{p-k} \geq p-k$, isto é, há pelo menos $k+1$ vértices cujos graus são pelo menos $p-k$. O vértice u , tendo grau k , não pode ser adjacente a todos eles. Se

existir um vértice w adjacente a u , com $d(w) \geq p-k$, o qual não é adjacente

a u , teremos $d(u)+d(v) \geq d(u)+p-k = p = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p > d(u)+d(v)$. Que contradiz

a maximalidade de $d(u)+d(v)$.

3.3. TEOREMA DE DIRAC

Há teoremas na literatura sobre a existência de ciclos hamiltonianos em grafos simples, sem dúvida um dos mais conhecidos é de Dirac, que na sequência, além de apresentarmos a demonstração também ilustramos.

Teorema de Dirac 3.3.1 (1952) Se G é um grafo simples

com n vértices ($n \geq 3$) e $\delta \geq \frac{n}{2}$, então G é hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO

Demonstraremos por absurdo. Isto é, suponha que exista um grafo G simples com estas condições, mas não seja hamiltoniano, em particular podemos assumir que G é um grafo maximal simples, mas não

hamiltoniano com $n \geq 3$ e $\delta \geq \frac{n}{2}$.

Desde que $n \geq 3$, então G não é necessariamente completo. G completo e não hamiltoniano implica em um absurdo, pois todo grafo completo é hamiltoniano. Portanto existem pelo menos dois vértices u e v não adjacentes.

Pela escolha de G (maximal não hamiltoniano), o grafo $G+uv$ será hamiltoniano (se $G+uv$ não for hamiltoniano, G não seria maximal não hamiltoniano, contradizendo a nossa escolha de G).

Sendo G não hamiltoniano, então cada ciclo hamiltoniano de $G+uv$ deve conter a aresta uv . Assim, há um caminho como mostra a figura 3.5, com extremos u e v , isto é:

$$u = v_1 v_2 v_3 v_4 \dots v_{i-1} v_i v_{i+1} \dots v_{n-1} v_n = v.$$

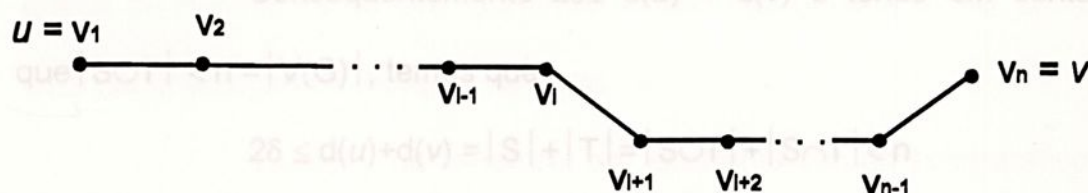


FIGURA 3.5

Definamos os conjuntos : $S = \{v_i \mid uv_{i+1} \in E(G)\}$ e

$T = \{v_i \mid v_i v \in E(G)\}$. De onde $v \notin S \cup T$ portanto $|S \cup T| < n = |V(G)|$.

Também $S \cap T = \emptyset$. Pois se $\exists v_i \in S \cap T$ isto implica que $uv_{i+1} \in E(G)$ e $v_i v \in E(G)$.

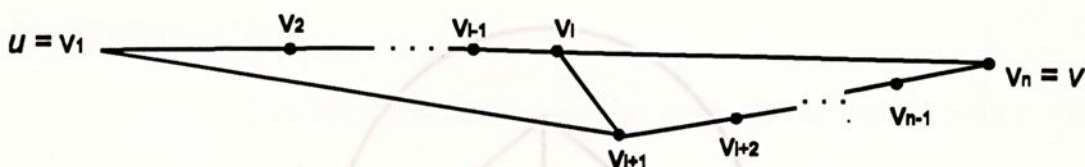


FIGURA 3.6

Então G deve ter um ciclo: $v_1 v_2 v_3 \dots v_i v_n v_{n-1} \dots v_{i+2} v_{i+1} v$, que passa por todos os vértices de G . Daí a contradição da nossa suposição de que G não é hamiltoniano. Portanto $S \cap T$ deve ser vazio.

Sendo $\delta = \min \{d(t) \mid t \in V(G)\}$, logo temos que $\delta \leq d(u)$ e $\delta \leq d(v)$, de onde vem que: $2\delta \leq d(u) + d(v)$.

A partir da definição dos conjuntos S e T temos que: S é o conjunto de vértices que são adjacentes ao vértice u , daí $|S| = d(u)$, e T é o conjunto de vértices que são adjacentes ao vértice v , daí $|T| = d(v)$.

Conseqüentemente $2\delta \leq d(u) + d(v)$ e tendo em conta que $|S \cup T| < n = |V(G)|$, temos que:

$$2\delta \leq d(u) + d(v) = |S| + |T| = |S \cup T| + |S \cap T| < n$$

$$2\delta < n \Rightarrow \delta < \frac{n}{2}.$$

Mas isto contradiz a hipótese de que $\delta \geq \frac{n}{2}$.

Teorema de Ore 3.4.1 (1961) Seja $G=(V,E)$, com $|V|=n \geq 3$, um grafo simples com n vértices onde $n \geq 3$.
Portanto, todo grafo que satisfaça as hipóteses do teorema acima é hamiltoniano. $\square$

Se $d(u) + d(w) \geq n$, para cada par de vértices não adjacentes, então G é hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO

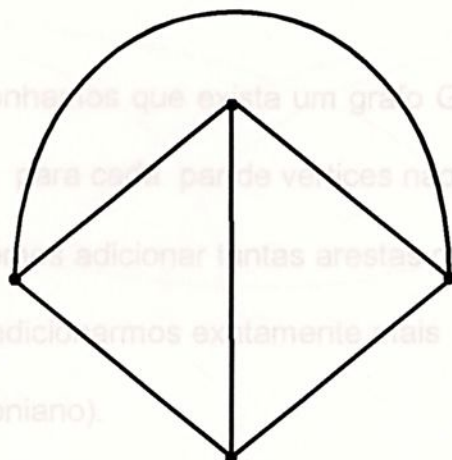


FIGURA 3.7 - Grafo hamiltoniano, satisfazendo as hipóteses do

teorema de Dirac.

3.4. TEOREMA DE ORE

Outro dos teoremas mais importantes que trata dos grafos de Hamilton é de Ore. Surgindo no início da década de 60, como uma generalização do teorema de Dirac.

Existem, na literatura, um excelente estudo comparativo, assim como várias extensões do teorema de Ore. Apresentamos de uma maneira sucinta os mais relevantes, em especial, a generalização, deste teorema via vizinhança, o qual citaremos no capítulo 5.

Teorema de Ore 3.4.1 (1961) Seja $G=(V,E)$, com $|V|=n \geq 3$, um grafo simples com n vértices onde $n \geq 3$.

Se $d(u) + d(w) \geq n$, para cada par de vértices não adjacentes, então G é hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos que exista um grafo G não hamiltoniano no qual $d(v) + d(w) \geq n$, para cada par de vértices não adjacentes.

Podemos adicionar tantas arestas quanto necessárias em G (de modo que ao adicionarmos exatamente mais uma aresta qualquer, G tornar-se-á hamiltoniano).

Deste modo, deve existir um caminho $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n$; no qual se inclui todos os vértices, mas para o qual os vértices v_1 e v_n não são adjacentes (a adição de uma aresta $v_n v_1$ cria um ciclo hamiltoniano).

Desde que v_1 e v_n não são adjacentes, temos: $d(v_1) + d(v_n) \geq n$, isto é: $d(v_n) \geq n - d(v_1)$.

Se $d(v_1) = r$, então existe no máximo r vértices não adjacentes para v_n , incluindo o próprio v_n .

Consideremos agora os vértices adjacentes para v_1 , sendo S o conjunto de vértices em um caminho.

Então, S contém r vértices e v_n não é um dos elementos de S . Podemos afirmar também que S deve conter um vértice v_i que é adjacente para v_n , então deve existir arestas unindo v_1 a v_{i+1} e v_i a v_n como mostra a figura 3.8:

Entretanto, a figura 3.9 não verifica as hipóteses do teorema de Dirac. Analogamente, a figura 3.7 apresenta um grafo

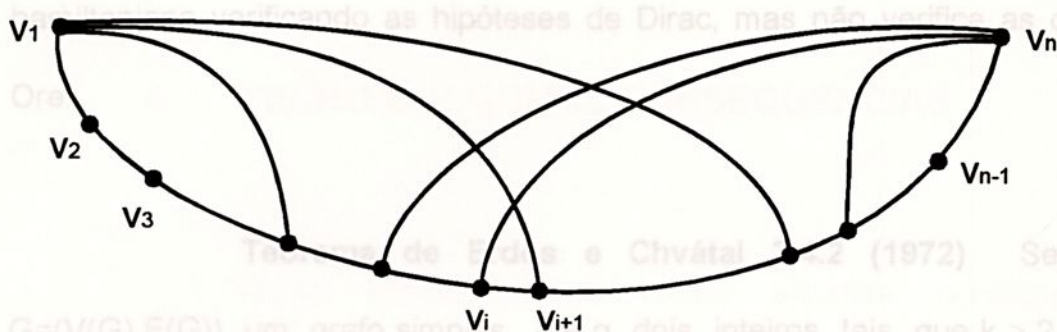


FIGURA 3.8

O que nos permite escrever um ciclo hamiltoniano em G : $v_1 v_2 v_3 \dots v_i v_n v_{n-1} \dots v_{i+1} v_1$. Contradizendo a suposição que G não é hamiltoniano.

Esta contradição estabelece o teorema. $\square$

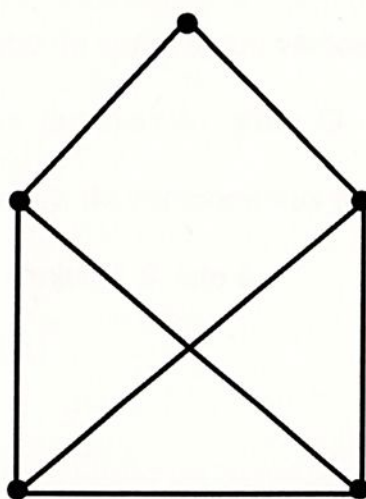


FIGURA 3.9 - Grafo hamiltoniano satisfazendo as hipóteses do teorema de Ore.

Entretanto, a figura 3.9 não verifica as hipóteses do teorema de Dirac. Analogamente, a figura 3.7 apresenta um grafo

hamiltoniano verificando as hipóteses de Dirac, mas não verifica as de Ore.

4. FECHO E ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS

Teorema de Erdős e Chvátal 3.4.2 (1972)

Seja $G=(V(G),E(G))$ um grafo simples, k e q dois inteiros tais que $k \geq 2$ e $0 \leq q \leq 2$.

Neste capítulo apresentamos algumas condições necessárias como também condições suficientes para que um grafo seja hamiltoniano, mas não necessárias e suficientes.

Se o grafo G for k -conexo e se G não contiver um conjunto estável com $k-q+1$ vértices, então para cada subconjunto de arestas F de G , $F \subset E(G)$, com $|F| \leq q$, o grafo G possui um ciclo hamiltoniano que contém F .

4.1. CONDIÇÕES NECESSÁRIAS

A demonstração deste resultado aparece em Berge⁶.

Seja S um subconjunto próprio não vazio do conjunto de vértices de G , e $w(G-S)$ o número de componentes conexas do grafo $G-S$.

Então o número de componentes do grafo $G-S$ é menor ou igual à cardinalidade do conjunto S ; isto é,

$$w(G-S) \leq |S|$$

DEMONSTRAÇÃO

Pela hipótese, G é hamiltoniano. Então G possui um ciclo hamiltoniano Γ (ciclo que contém todos os vértices de G , isto é, $V(\Gamma) = V(G)$) veja figura 4.1.

4. FECHO E ALGUMAS CONSEQÜÊNCIAS

Neste capítulo apresentamos algumas condições necessárias como também condições suficientes para que um grafo seja hamiltoniano, mas não necessárias e suficientes.

FIGURA 4.1

4.1. CONDIÇÕES NECESSÁRIAS

Teorema 4.1.1 Seja G um grafo hamiltoniano, S um subconjunto próprio não vazio do conjunto de vértices de $V(G)$, e $w(G - S)$ o número de componentes conexas do grafo $G - S$.

Então o número de componentes do grafo $G - S$ é menor ou igual à cardinalidade do conjunto S ; isto é,

$$w(G - S) \leq |S|$$

DEMONSTRAÇÃO

Pela hipótese, G é hamiltoniano. Então G possui um ciclo hamiltoniano Γ (ciclo que contém todos os vértices de G , isto é, $V(\Gamma) = V(G)$) veja figura 4.1.

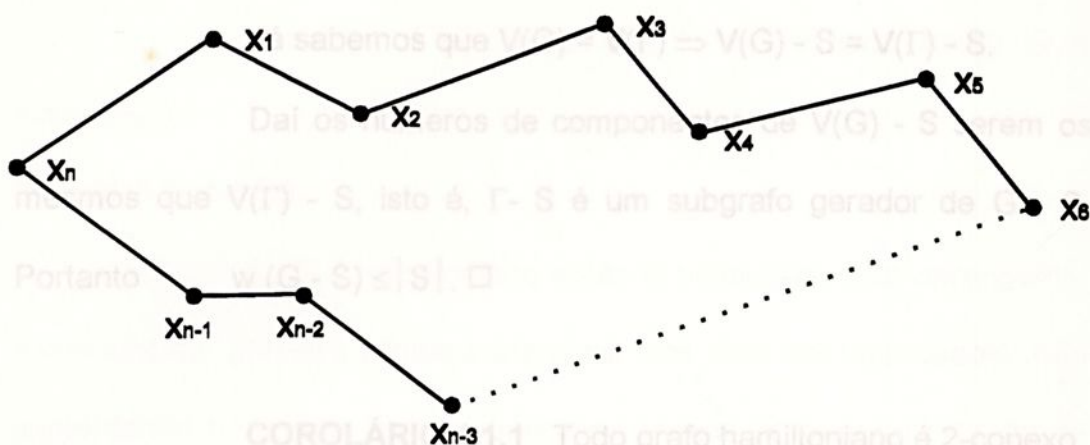


FIGURA 4.1

E x_1Px_2 é um caminho hamiltoniano (retira-se a aresta x_1x_2 de Γ), isto é: $x_1Px_2 = \Gamma - x_1x_2$

Agora sendo $S \subset V(G) \Rightarrow S \subseteq V(G)$.

Se $|S| =$ conjunto unitário, por exemplo:

$S = \{x_1, x_2\}$ a) Se x_1 e x_2 são adjacentes $\Rightarrow \Gamma - S$ é conexo portanto

$$w(\Gamma - S) = 1 < |S| = 2.$$

b) Se x_1 e x_2 não são adjacentes $\Rightarrow \Gamma - S$ tem exatamente dois componentes, portanto $w(\Gamma - S) = |S| = 2$.

De um modo geral, se S for o conjunto formado de elementos tomados alternadamente do caminho x_1Px_2 , por exemplo, então $w(\Gamma - S) = |S|$.

Alternadamente $S = \{x_1, x_3, x_5, \dots, x_n\}$, se n for ímpar} qualquer outro caso, teremos $w(\Gamma - S) < |S|$.

Assim $w(\Gamma - S) \leq |S|$, qualquer que seja $S \subset V(\Gamma)$.

Já sabemos que $V(G) = V(\Gamma) \Rightarrow V(G) - S = V(\Gamma) - S$.

Daí os números de componentes de $V(G) - S$ serem os mesmos que $V(\Gamma) - S$, isto é, $\Gamma - S$ é um subgrafo gerador de $G - S$.

Portanto $w(G - S) \leq |S|$. $\square$

COROLÁRIO 4.1.1 Todo grafo hamiltoniano é 2-conexo.

A inversa deste corolário é falsa.

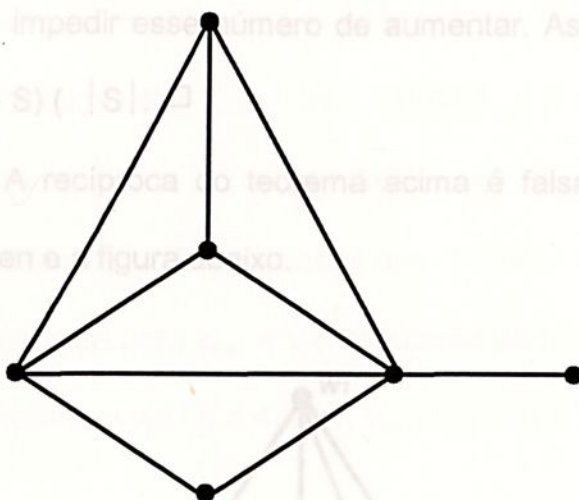


FIGURA 4.2 - Grafo 2-conexo não hamiltoniano.

Seja $G(V, E)$ um grafo, S um subconjunto próprio de V e $w(G - S)$ o número de componentes conexas de $G - S$. Dizemos que G é t -resistente se $w(G - S) \leq t |S|$.

Teorema 4.1.2 Se G é hamiltoniano então G é

1-resistente.

DEMONSTRAÇÃO

Se G é hamiltoniano então G possui um ciclo abrangente.

A retirada do primeiro vértice transforma este ciclo em uma cadeia, não aumentando o número de componentes conexas do grafo; a retirada de cada vértice subsequente divide uma cadeia em duas, aumentando o número de componentes de uma unidade. As arestas que não pertencem ao ciclo podem impedir esse número de aumentar. Assim para qualquer S temos $w(G - S) \leq |S|$. $\square$

A recíproca do teorema acima é falsa, por exemplo, o grafo de Petersen e a figura abaixo.

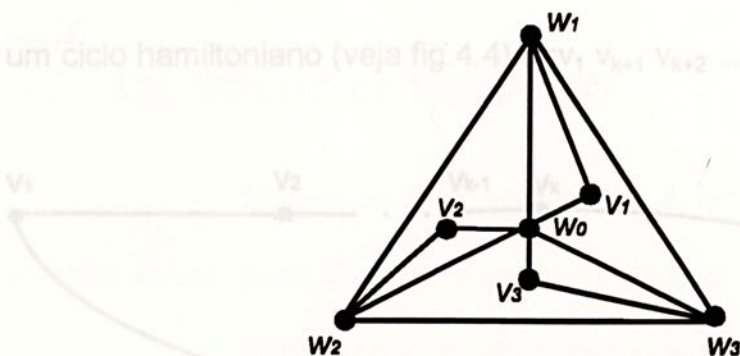


FIGURA 4.3 - Grafo 1-resistente não hamiltoniano.

FIGURA 4.4

o que contradiz a hipótese. $\square$

Teorema 4.1.3 Seja G um grafo de ordem n e sejam u e v dois vértices quaisquer não adjacentes de G tais que: $d(u) + d(v) \geq n$, então G é hamiltoniano se e somente se $G + uv$ for hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO

Se G é hamiltoniano é claro que $G + uv$ é hamiltoniano.

Para provarmos a recíproca, suponhamos que $G + uv$ seja hamiltoniano e G não seja. Neste caso todo ciclo hamiltoniano de $G + uv$ contém a aresta uv . Logo existe em G um caminho hamiltoniano: $v_1 v_2 v_3 \dots v_n$ com $v_1 = u$ e $v_n = v$.

Sejam: $S = \{ v_k, uv_{k+1} \in E(G) \}$ e $T = \{ v_k, v_1v \in E(G) \}$, então por hipóteses: $|S| + |T| = d(u) + d(v) \geq n$.

Mas $|S \cup T| < n$, desde que $v \notin S \cup T$, então existe um k tal que u é adjacente para v_{k+1} e v é adjacente para v_k . Então G contém um ciclo hamiltoniano (veja fig.4.4): $u = v_1 v_{k+1} v_{k+2} \dots v_{n-1} v_n = v v_k v_{k-1} \dots v_2 v_1$.

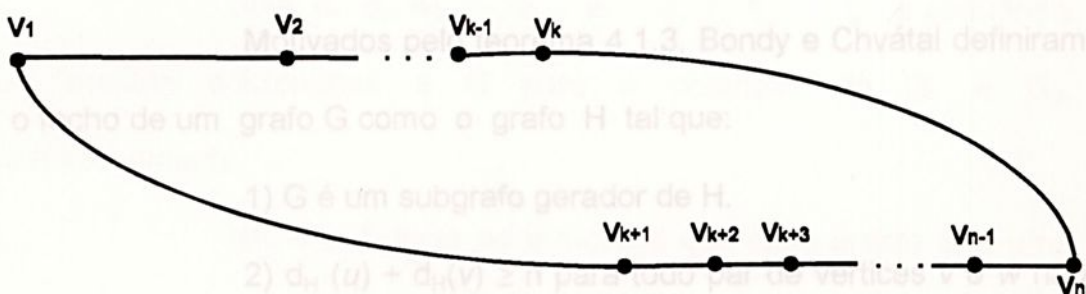


FIGURA 4.4

o que contradiz a hipótese. $\square$

Os teoremas de Ore e Dirac resultaram como corolários deste teorema.

COROLÁRIO 4.1.1 (teorema de Ore). Seja G um grafo simples de ordem n ($n \geq 3$). Se $d(u) + d(v) \geq n$ para cada par de vértices não adjacentes u e v em G , então G é hamiltoniano.

FIGURA 4.5 - Fecho de um grafo.

COROLÁRIO 4.1.2 (teorema de Dirac). Seja G um grafo simples de ordem n ($n \geq 3$). Se $d(v) \geq \frac{1}{2}n$ para cada vértice v em G , então G é hamiltoniano.

4.2. FECHO DE UM GRAFO

Motivados pelo teorema 4.1.3, Bondy e Chvátal definiram o fecho de um grafo G como o grafo H tal que:

1) G é um subgrafo gerador de H .

2) $d_H(u) + d_H(v) \geq n$ para todo par de vértices u e v não adjacentes em H .

O fecho $c(G)$ pode ser obtido de G através de procedimento recursivo, unindo dois vértices quando a soma de suas

valências é no mínimo n . Este procedimento de recursão pode ser efetuado em $O(n^4)$ passos.

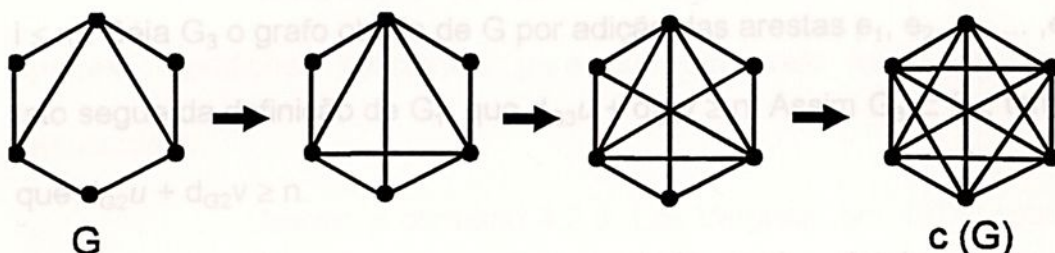


FIGURA 4.5 - Fecho de um grafo.

Teorema 4.2.2 Se G_1 e G_2 são dois grafos obtidos de um grafo G de ordem n , por união recursiva de pares de vértices não adjacentes quando a soma de graus é no mínimo n , então $G_1 = G_2$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $e_1, e_2, e_3, \dots, e_j$ e $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ a sequência de arestas adicionadas a G para a obtenção de G_1 e G_2 , respectivamente.

Isto é suficiente para mostrar que cada aresta e_i é uma aresta de G_2 ($1 \leq i \leq j$) e que cada aresta f_i é uma aresta de G_1 ($1 \leq i \leq k$).

Assumimos o contrário. Então podemos assumir, sem perda de generalidade, que para algum m satisfazendo $0 \leq m \leq j - 1$, a aresta $e_{m+1} = uv$ não pertence à G_2 ; desta forma e_i pertence a $E(G_2)$ para $i \leq m$. Seja G_3 o grafo obtido de G por adição das arestas $e_1, e_2, e_3, \dots, e_m$. Isto segue da definição de G_1 , que $d_{G_3}u + d_{G_3}v \geq n$. Assim $G_3 \subset G_2$, temos que $d_{G_2}u + d_{G_2}v \geq n$.

Temos, aqui, uma contradição, assim, desde que u e v não são vértices adjacentes de G_2 , cada aresta e_i é uma aresta de G_2 e cada f_i é uma aresta de G_1 ; isto é $G_1 = G_2$. $\square$

Teorema 4.2.3 G é hamiltoniano se e somente se $c(G)$ é hamiltoniano.

A demonstração é uma aplicação direta do teorema 4.1.3

Corolário 4.2.3 Seja G um grafo simples com o número de vértices ≥ 3 . Se $c(G)$ é completo, então G é hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO

Vamos provar que se a condição acima está satisfeita, o fecho de G , que chamaremos de H é completo.

Suponha que H não seja completo. Então, existem vértices não adjacentes. Dentre os vértices não adjacentes de H , por exemplo, v_i e v_j tais que

4.3. CONDIÇÕES SUFICIENTES

Nesta seção, apresentamos alguns resultados que visam apenas condições suficientes para que um grafo tenha um ciclo hamiltoniano.

Usando o corolário 4.2.3, Las Vergnas, em 1971, obteve o seguinte resultado:

Teorema 4.2.4 Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$ e os vértices v_i de G indexados arbitrariamente. Se:

$$1 \leq i < j \leq n$$

$$i + j \geq n$$

$$d(v_i) \leq i \quad \Rightarrow \quad d(v_i) + d(v_j) \geq n,$$

$$d(v_j) \leq j - 1$$

$$v_i, v_j \notin E(G)$$

então G é hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO

Vamos provar que se a condição acima está satisfeita, o fecho de G , que chamaremos de H é completo.

Suponha que H não seja completo. Então, existem vértices não adjacentes. Dentre os vértices não adjacentes de H , por exemplo, v_i e v_j tais que:

(1) j seja o maior índice possível e

(2) i seja o maior índice sujeito à condição (1)

Como $\{v_i, v_j\} \notin E(H)$ temos que: (3) $d_H(v_i) + d_H(v_j) \leq n - 1$.

As condições (1) e (2) implicam que v_j deve ser adjacentes em H a todos os vértices v_k , com $i < k \leq n$ e $k \neq j$. Portanto, (4) $d_H(v_j) \geq n - i - 1$. Por outro lado, a condição (1) implica que v_j deve ser adjacentes em H a todos os vértices v_k , com $j < k \leq n$ e portanto (5) $d_H(v_i) \geq n - j$.

A partir das condições (3), (4) e (5), temos:

$$d_G(v_j) \leq d_H(v_j) \leq n - 1 - d_H(v_i) \leq n - 1 - (n - j) = j - 1$$

$$d_G(v_i) \leq d_H(v_i) \leq n - 1 - (n - i - 1) = i.$$

Além disso $i + j \geq n$. Do fato de (4) segue que

$$(4) \quad d_H(v_j) \geq n - i - 1 \Rightarrow i \geq n - 1 - d_H(v_j) \quad \text{e de}$$

$$(5) \quad d_H(v_i) \geq n - j \Rightarrow j \geq n - d_H(v_i) \quad \text{e, portanto,}$$

$$i + j \geq n - 1 - d_H(v_j) + n - d_H(v_i) = 2n - 1 - (d_H(v_j) + d_H(v_i)) = 2n - 1 - (n - 1) = n \Rightarrow i + j \geq n$$

Resulta que $d_G(v_i) + d_G(v_j) \geq n$ e, portanto,

$$d_H(v_i) + d_H(v_j) \geq n, \quad \text{o que contradiz (3).}$$

Logo o fecho de G é completo, então G é hamiltoniano. $\square$

Envolvendo a noção de seqüência de grau não decrescente, e usando o teorema 3.2.1, Chvátal obteve os seguintes resultados para os grafos não hamiltonianos.

Teorema 4.2.6 Seja G um grafo simples não hamiltoniano com $n \geq 3$, então G é grau majorado por algum $C_{m,n}$, onde m é o menor grau entre os vértices e n o número de vértices.

DEMONSTRAÇÃO

Seja G um grafo simples não hamiltoniano com seqüência de graus $(d_1, d_2, d_3, \dots, d_n)$, onde $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ e $n \geq 3$. Então pelo teorema 3.2.1, existe $m < \frac{n}{2}$ tal que $d_m \leq m$ e $d_{n-m} < n - m$. Desta forma, $(d_1, d_2, d_3, \dots, d_n)$ é majorada pela seqüência $(m, \dots, m, n - m - 1, \dots, n - m - 1, n - 1, \dots, n - 1)$, com m termos iguais à m , $n - 2m$ termos iguais à $n - m - 1$ e m termos iguais à $n - 1$, e esta última seqüência é o grau da seqüência de $C_{m,n}$.

FIGURA 4.6

5. A sequência $(m, \dots, m, n - m - 1, \dots, n - m - 1, n - 1, \dots, n - 1)$ acima pode ser obtida, como por exemplo, com um grafo de ordem $n=7$ que é formado por um subgrafo trivial com m vértices, um subgrafo completo com $n - 2m$ vértices e um subgrafo completo com m vértices, onde cada vértice desse terceiro subgrafo é ligado a cada vértice dos outros dois subgrafos como mostra a figura 4.6 a seguir.

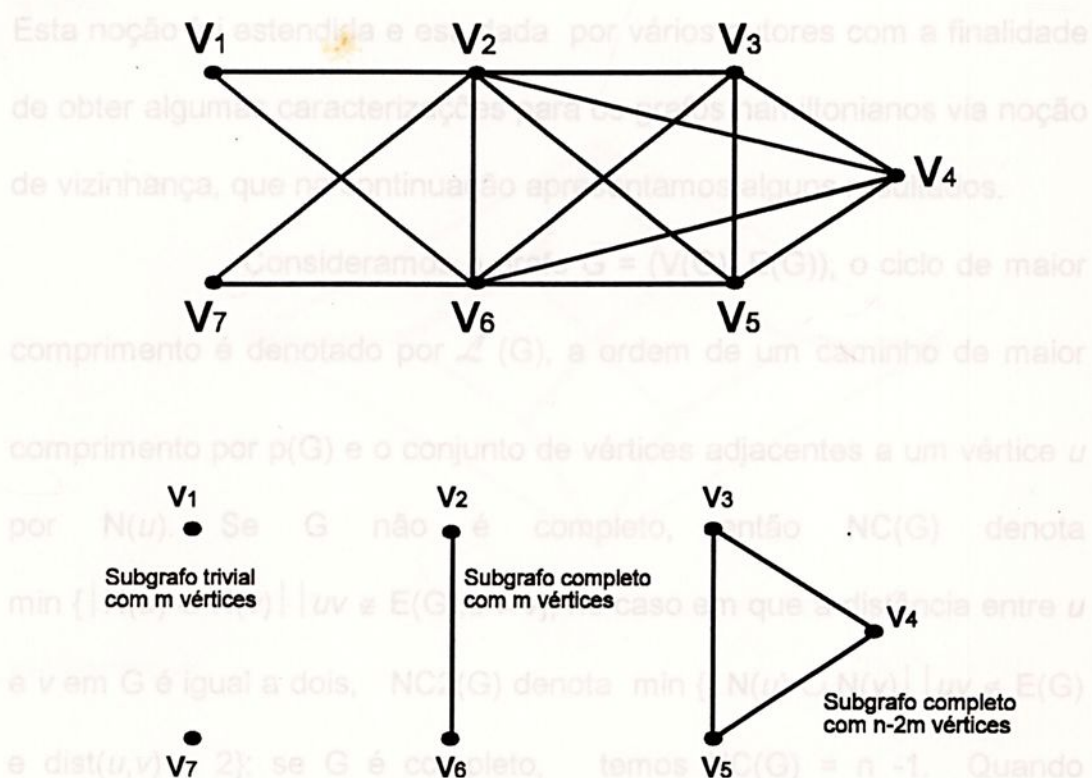


FIGURA 4.6

Na seções 5.2 e 5.3 apresentamos o relacionamento entre a cardinalidade da união de vizinhanças de um par de vértices não adjacentes arbitrários e várias propriedades hamiltonianas.

5. VIZINHANÇAS: GRAFOS TRAÇÁVEIS E

5.2. RESULTADOS SOBRE GRAFOS TRAÇÁVEIS

Mencionaremos, agora, muito brevemente, alguns

5.1. UNIÃO DE VIZINHANÇAS

De acordo com os artigos que consultamos, podemos observar que a noção de vizinhança foi introduzida por Chvátal (1972).

Esta noção foi estendida e estudada por vários autores com a finalidade de obter algumas caracterizações para os grafos hamiltonianos via noção de vizinhança, que na continuação apresentamos alguns resultados.

Consideramos o grafo $G = (V(G), E(G))$, o ciclo de maior comprimento é denotado por $\mathcal{L}(G)$, a ordem de um caminho de maior comprimento por $p(G)$ e o conjunto de vértices adjacentes a um vértice u por $N(u)$. Se G não é completo, então $NC(G)$ denota $\min \{|N(u) \cup N(v)| \mid uv \notin E(G), u \neq v\}$, no caso em que a distância entre u e v em G é igual a dois, $NC_2(G)$ denota $\min \{|N(u) \cup N(v)| \mid uv \notin E(G) \text{ e } \text{dist}(u, v) = 2\}$; se G é completo, temos $NC(G) = n - 1$. Quando $|E(G)| > 0$, então $NC'(G)$ denota $\min \{|N(u) \cup N(v)| \mid uv \in E(G)\}$; caso contrário $NC'(G) = 0$.

Na seções 5.2 e 5.3 apresentamos o relacionamento entre a cardinalidade da união de vizinhanças de um par de vértices não adjacentes arbitrários e várias propriedades hamiltonianas.

5.2. RESULTADOS DOS GRAFOS TRAÇÁVEIS

Mencionaremos, agora, muito brevemente, alguns resultados sobre os grafos traçáveis, em virtude de se relacionarem com os grafos hamiltonianos, no sentido de que todo grafo hamiltoniano é um grafo traçável, porém, a recíproca não é verdadeira. Vide ilustração abaixo.

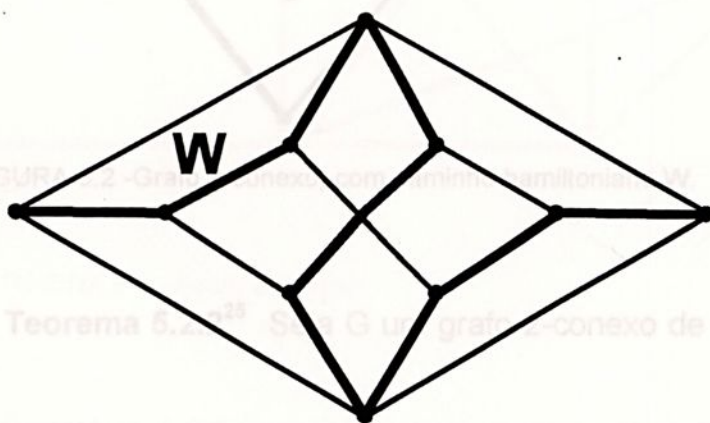


FIGURA 5.1 - Grafo traçável (Grafo de Hershel), com caminho hamiltoniano W.

Apresentamos, na seqüência, alguns dos resultados sobre os grafos hamiltonianos e traçáveis, por meio da noção de união de vizinhança de dois vértices não adjacentes.

FIGURA 5.3 - Grafo 2-conexo.

Teorema 5.2.1¹⁸ Seja G um grafo 2-conexo de ordem $n \geq 3$, se para todo par de vértices não adjacentes u e v

$$NC(G) \geq \frac{n-1}{2}, \text{ então } G \text{ é traçável.}$$

Vide ilustração (figura 5.4).

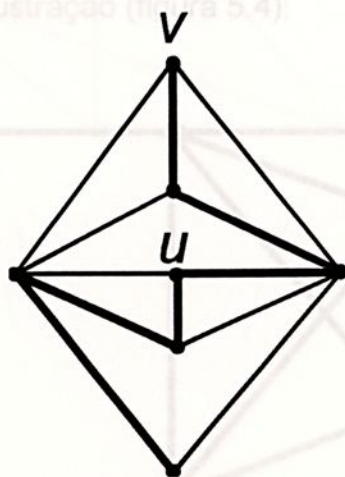


FIGURA 5.2 -Grafo 2-conexo, com caminho hamiltoniano W .

FIGURA 5.4 - Grafo 2-conexo.

Teorema 5.2.2²⁵ Seja G um grafo 2-conexo de ordem n .

Se

Corolário 5.2.1 Seja G um grafo conexo de ordem $n \geq 3$, se para todo par de vértices não adjacentes u e v

$$NC_2(G) > \frac{2n-5}{3}, \text{ então } G \text{ é traçável.}$$

$$NC(G) \geq \frac{2n-2}{3}, \text{ então } G \text{ é traçável.}$$

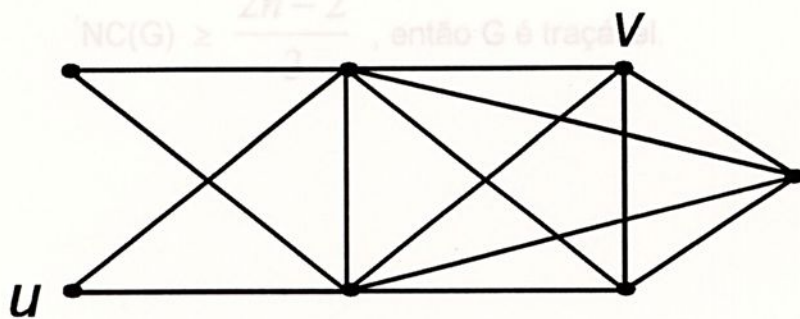


FIGURA 5.3 - Grafo 2-conexo.

Teorema 5.2.3¹⁸ Seja G um grafo 2-conexo de ordem

$n \geq 3$, se para todo par de vértices não adjacentes u e v

$$NC(G) \geq \frac{2n-1}{3}, \text{ então } G \text{ é hamiltoniano.}$$

Vide ilustração (figura 5.4):

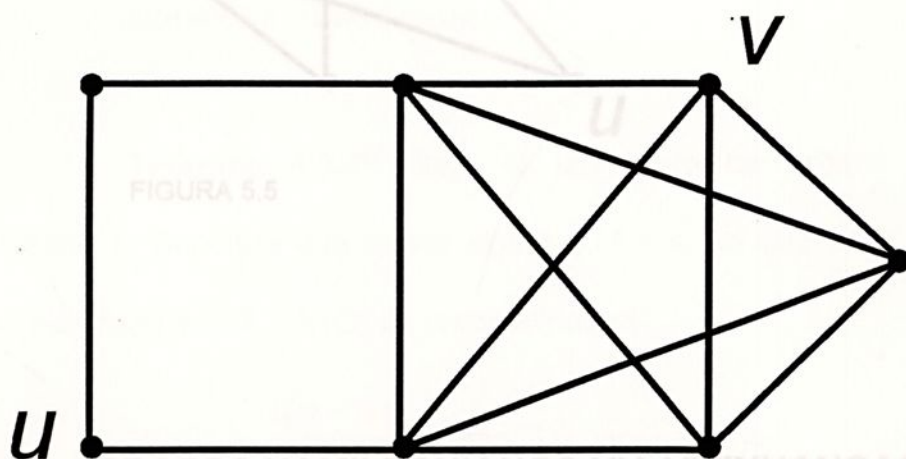


FIGURA 5.4 - Grafo 2-conexo.

Teorema 5.3.1 Seja G um grafo 3-conexo de ordem

$n \geq 3$, se para **Corolário 5.2.1** Seja G um grafo conexo de ordem $n \geq 3$,

se para todo par de vértices não adjacentes u e v

$$NC(G) \geq \frac{2n-2}{3}, \text{ então } G \text{ é traçável.}$$

Vide figura abaixo:

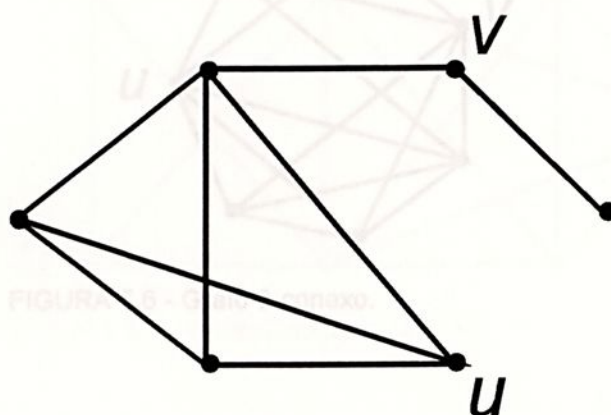


FIGURA 5.5

5.3. GRAFOS HAMILTONIANOS VIA VIZINHANÇAS

Teorema 5.3.1 Seja G um grafo 3-conexo de ordem $n \geq 3$, se para todo par de vértices não adjacentes u e v

$$|N(u) \cap N(v)| \geq \frac{2n}{3}, \text{ então } G \text{ é hamiltoniano.}$$

Teorema 5.3.3 Seja G um Grafo 2-conexo de ordem n e

$$|N(u) \cap N(v)| \geq \frac{2n-1}{3}, \text{ então } G \text{ é hamiltoniano.}$$



FIGURA 5.6 - Grafo 3-conexo.

FIGURA 5.7 - Grafo 2-conexo.

Teorema 5.3.2²² Seja G um grafo de ordem n e conectividade k . Suponha que exista algum t , $t \leq k$, tal que para todo conjunto independente $S \subset V(G)$ de cardinalidade t

$$|NC(G)| > \frac{t(n-1)}{t+1}, \text{ então } G \text{ é hamiltoniano.}$$

Corolário 5.3.1 Seja G um grafo k -conexo de ordem n . Se existe algum t , $t \leq k+1$, tal que todo conjunto independente S de cardinalidade t

$$|NC(S)| > \frac{tn}{t+1} - 1, \text{ então } G \text{ é traçável.}$$

Teorema 5.3.3²⁵ Seja G um Grafo 2-conexo de ordem n e

$$|NC_2(G)| \geq \frac{2n-1}{3}, \text{ então } G \text{ é hamiltoniano.}$$



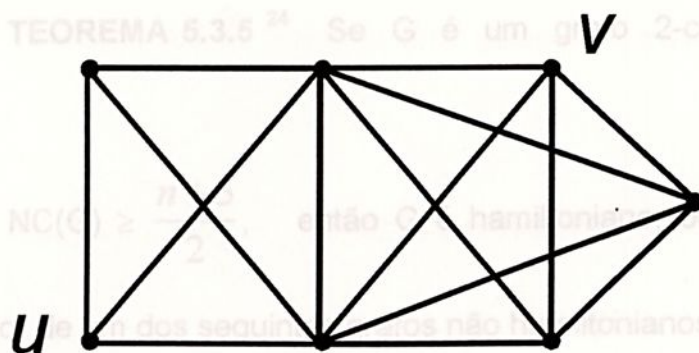


FIGURA 5.7 - Grafo 2-conexo.

Teorema 5.3.4 Seja G um Grafo 3-conexo de ordem n .

Se

$$NC2(G) > \frac{2n-1}{3}, \text{ então } G \text{ é hamiltoniano.}$$

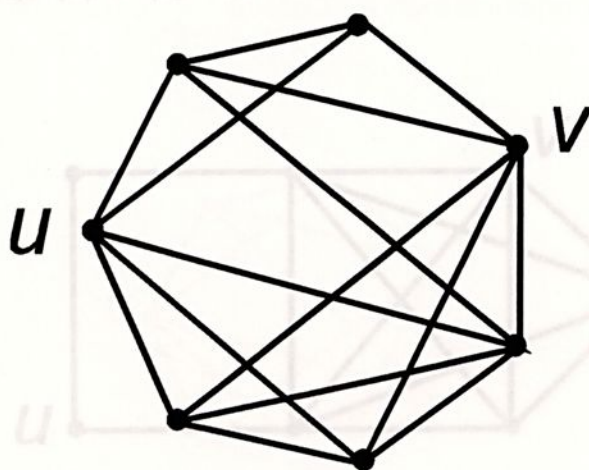


FIGURA 5.8 - Grafo 3-conexo.



TEOREMA 5.3.5 ²⁴ Se G é um grafo 2-conexo de ordem n e com

$$NC(G) \geq \frac{n+3}{2}, \quad \text{então } G \text{ é hamiltoniano, ou } G \text{ é um}$$

subgrafo gerador de um dos seguintes grafos não hamiltonianos:

- (a) $K_2 + (K_p \cup K_q \cup K_r)$, onde $p, q, r \geq 1$.
- (b) $K_1 + (K_p \cup K_q \cup K_r \cup T)$, onde $p, q, r \geq 2$, e T é o conjunto de arestas de um triângulo contendo exatamente um vértice de K_p , K_q e K_r ;
- (c) $K_p \cup K_q \cup K_r \cup T_1 \cup T_2$, onde $p, q, r \geq 3$ e T_1 e T_2 são conjuntos de arestas de dois triângulos disjuntos pelo vértice, cada um contendo exatamente um vértice de K_p , K_q , e K_r .

Nos casos acima o sinal de adição denota a união de dois grafos, onde (a), (b) e (c) são denominadas três famílias de grafos excepcionais.

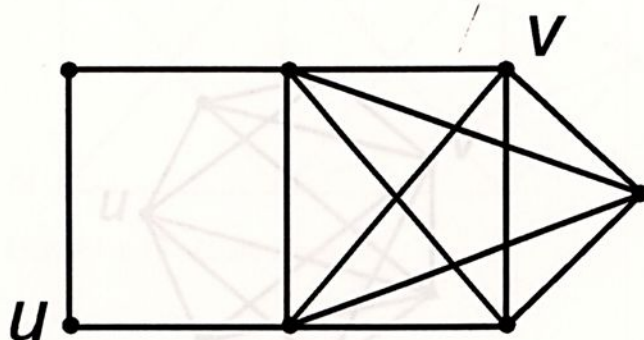


FIGURA 5.9 - Grafo 2-conexo.

FIGURA 5.11 - Grafo 3-conexo.

Teorema 5.3.6 Seja G um grafo 3-conexo de n vértices tal que

$$NC2(G) \geq \frac{n+1}{2}, \text{ então } G \text{ é hamiltoniano.}$$

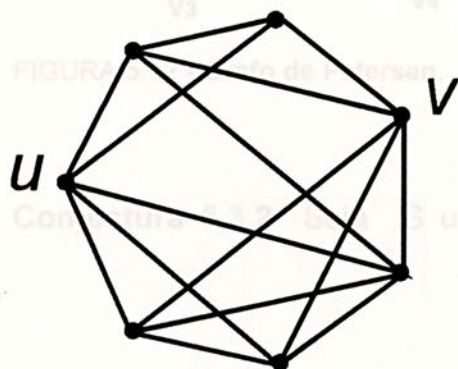


FIGURA 5.10 - Grafo 3-conexo, satisfazendo as hipóteses do teorema 5.3.6.

Conjectura 5.3.1 Seja G um grafo 3-conexo de n vértices tal que $NC2(G) \geq \frac{n}{2}$. Então G é hamiltoniano ou G é o grafo de Petersen.

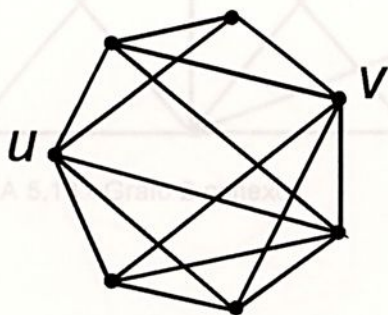


FIGURA 5.11 - Grafo 3-conexo.

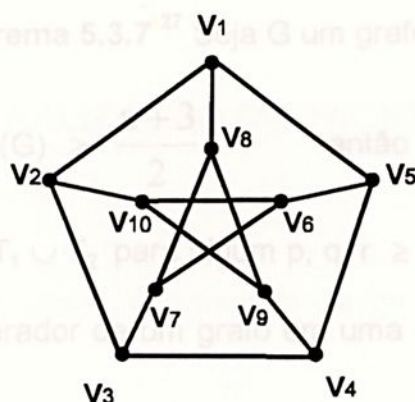


FIGURA 5.12 - Grafo de Petersen.

Conjectura 5.3.2 Seja G um grafo 2-conexo de n vértices tal que

$$NC2(G) \geq \frac{n}{2}. \text{ Então } G \text{ é hamiltoniano ou } G \text{ é o grafo de}$$

Petersen ou G é um subgrafo gerador de uma das famílias (a), (b) e (c) do teorema 5.3.5.

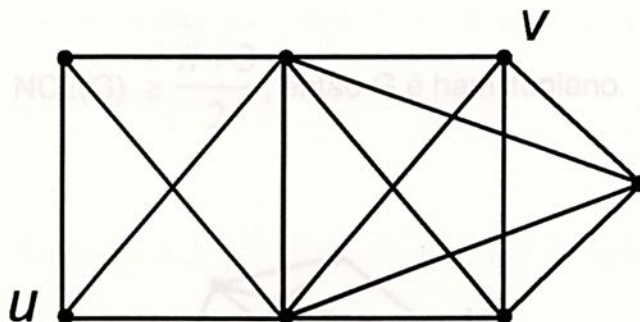


FIGURA 5.13 - Grafo 2-conexo.

Teorema 5.3.7²⁷ Seja G um grafo 2-conexo de ordem n e

$$NC2(G) \geq \frac{n+3}{2}, \quad \text{então } G \text{ é hamiltoniano, ou}$$

G é $K_p \cup K_q \cup K_r \cup T_1 \cup T_2$ para algum $p, q, r \geq 3$, com $p + q + r = n$, ou

G é um subgrafo gerador de um grafo em uma das famílias (a) e (b) do

teorema 5.3.5

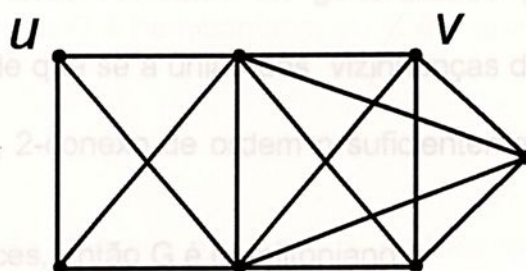


FIGURA 5.14 - Grafo 2-conexo.

Corolário 5.3.2 Seja G um grafo 3-conexo de ordem n e

$$NC2(G) \geq \frac{n+3}{2}, \quad \text{então } G \text{ é hamiltoniano.}$$

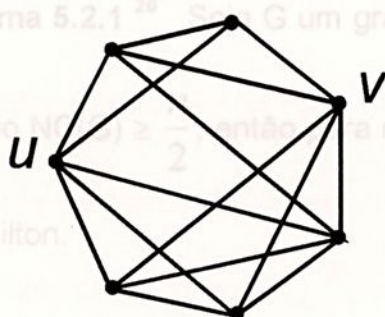


FIGURA 5.15 - Grafo 3-conexo.

5.4. GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE DIRAC

Dirac provou que se todo vértice de um grafo G de ordem

n ($n \geq 3$) tem grau maior ou igual a $\frac{n}{2}$, então o grafo G é hamiltoniano.

Esse resultado foi generalizado por Faudree et al.²⁰, usando o fato de que se a união das vizinhanças de cada par de vértices de um grafo G , 2-conexo de ordem n suficientemente grande, tem pelo menos $\frac{n}{2}$ vértices, então G é hamiltoniano.

Observação: A frase “de ordem n suficientemente grande” toma, aqui, a referência de que n deve ser maior ou igual a 11, em vista de que o grafo de Petersen de ordem $n = 10$ verifica as hipóteses da generalização do teorema de Dirac, como segue.

Teorema 5.2.1²⁰ Seja G um grafo 2-conexo de ordem n que satisfaz a condição $NC(G) \geq \frac{n}{2}$, então para n suficientemente grande G é um grafo de Hamilton.

5.5. GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE ORE

Além de esclarecer a conjectura 2 de Jackson²⁴, Broersma et al. generalizaram o teorema de Ore da seguinte forma:

Teorema 5.3.1¹⁰ Se G é um grafo 2-conexo de ordem n e $NC(G) \geq \frac{n}{2}$, então G é hamiltoniano, ou G é o grafo de Petersen ou $G \in \mathcal{G}_n \cup \mathcal{H}_n \cup \mathcal{J}_n$.

As Classes $\mathcal{G}_n$, $\mathcal{H}_n$ e $\mathcal{J}_n$ são definidas. Para inteiros positivos n e i , $\mathcal{K}_n^{(i)}$ denota a classe dos grafos de ordem n consistindo de três grafos completos disjuntos, onde cada um dos componentes tem ordem no mínimo i , isto é:

$$\mathcal{K}_n^{(i)} = \{K_p + K_q + K_r \mid p+q+r = n, p, q, r \geq i\}.$$

$\mathcal{G}_n^*$ denota a família de todos os grafos de ordem n , no qual pode ser obtido como uma união de K_2 e um grafo em $\mathcal{K}_n^{(1)} - 2$. $\mathcal{H}_n^*$ denota a família de todos os grafos de ordem n , no qual pode ser obtido da união de K_1 e de um grafo H em $\mathcal{K}_n^{(2)} - 1$ por adicionar arestas de um triângulo entre três vértices para diferentes componentes de H . $\mathcal{J}_n^*$

denota a família de todos os grafos no qual pode ser obtido de um grafo H em $\mathcal{K}_n^{(3)}$ por adição de arestas de dois triângulos de vértices triplos distintos, cada qual contendo um vértice de cada componente de H .

Se H é um subgrafo gerador de G , $H \leq G$. Então:

$$\mathcal{F}_n := \{ G \mid G \text{ é 2-conexo, } |V(G)| = n \text{ e } NC(G) \geq \frac{n}{2} \},$$

$$\mathcal{G}_n := \{ G \in \mathcal{F}_n \mid G \leq G_1, \text{ para algum } G_1 \in \mathcal{G}_n^* \},$$

$$\mathcal{H}_n := \{ G \in \mathcal{F}_n \mid G \leq G_1, \text{ para algum } G_1 \in \mathcal{H}_n^* \},$$

$$\mathcal{I}_n := \{ G \in \mathcal{F}_n \mid G \leq G_1, \text{ para algum } G_1 \in \mathcal{I}_n^* \}.$$

Todos os grafos em $\mathcal{G}_n \cup \mathcal{H}_n \cup \mathcal{I}_n$ não são hamiltonianos. Assim, o teorema acima implica que, à parte o grafo de Petersen, os grafos de $\mathcal{G}_n \cup \mathcal{H}_n \cup \mathcal{I}_n$ são somente grafos não hamiltonianos em $\mathcal{F}_n$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar da utilização de novas definições para os grafos hamiltonianos, como, por exemplo, união de vizinhanças de vértices não adjacentes, t-resistência, etc. Na literatura que consultamos não há nenhum resultado sobre grafos hamiltonianos que os caracterize por completo, constituindo um conjunto de condições necessárias e suficientes para assim caracterizá-los. Isto implica em dizer que nossa preocupação deteve-se, sobretudo, nas questões teóricas, além do que não encontramos resultado algum que pudesse vir a base para uma elaboração de um algoritmo.

Desta maneira, justificamos a não utilização da computação e da elaboração de algoritmos.

Acreditamos, no momento, que há um vasto horizonte para continuarmos pesquisando sobre estes grafos, justificando, assim, nossa abstenção na colocação de alguma aplicação concreta dos ciclos hamiltonianos neste trabalho.



BIBLIOGRAFIA

- [1] ASRATIAN, A. S. A criterion for some hamiltonian graphs to be hamiltonian-connected. *Journal of Combinatorics*, v.10, p.193-98, 1994.
- [2] BAUER, D. et al. Hamiltonian properties of graphs with large neighborhood unions, *Discrete Mathematics*, v.96, p.33-49, 1991.
- [3] BEHZAD, M. e CHARTRAND, G. *Introduction to the theory of graphs*. Boston: Allyn and Bacon, 1971.
- [4] BEINEKE, L. W. e WILSON, R. J. *Selected topics in graph theory*. London: Academic Press, 1978.
- [5] BOAVENTURA NETTO, P. O. *Grafos: teoria, modelos, algoritmos*. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- [6] BERGE, C. *Graphs*. 3.ed. Amsterdam: North-Holland, 1991.



[7] BONDY, J. A. e CHVÁTAL, V. A method in graph theory. *Discrete Mathematics*, v.15, p. 111-35, 1976a.

[8] BONDY, J. A. e MURTY, U. S. R. *Graph theory with applications*. New York: Macmillan, London e Elsevier, 1976b.

[9] BROERSMA, H. J. e VELDMAN, H. J. Long dominating cycles and paths in graphs with large neighborhood unions, *Journal of Graph Theory*, v.15, p.29-38, 1991.

[10] BROERSMA, H. J. et al. A generalization of Ore's theorem involving neighborhood unions, *Discrete Mathematics*, v.122, p.37-49, 1993.

[11] CHARTRAND, G. e LESNIAK-FOSTER, L. *Graphs and digraphs*. 2.ed. California: Wadsworth and Brooks, 1979.

[12] CHEN, G. e SCHELP, R.H. Hamiltonian graphs with neighborhood intersections, *Journal of Graph Theory*, v.18, p.497-513, 1994.

[13] CHVÁTAL, V. On Hamilton's ideals. *Journal of Combinatorial Theory*, série B, v.12, p.163-8, 1972a.

- [14]CHVÁTAL, V. e ERDÖS, P. A note on hamiltonian circuits. *Discrete Mathematics*, v.2, p.111-13, 1972b.
- [15]CHVÁTAL, V. Tough graphs and hamiltonian circuits. *Discrete Mathematics*, v.5, p.215-28, 1973c.
- [16]CHVÁTAL, V. Hamiltonian cycles. In: LAWLER, E. L., LENSTRA, J. K., RINNOOY KAN, A. H. G., SHMOYS, D. B. (Ed.) *The traveling salesman problem*. Great Britain: Wiley-Interscience, 1985. p.403-29.
- [17]DEO, N. *Graph theory with applications to engineering and computer science*. N. J. : Prentice-Hall, 1974.
- [18]FAUDREE, R. J. et al. Neighborhood unions and hamiltonian properties in graphs. *Journal of Combinatorial Theory, série B*, v.47, p.1-9, 1989.
- [19]FAUDREE, R. J. et al. Neighborhood unions and highly hamiltonian graphs. *Ars Combinatoria*, v.31, p.139-48, 1991.
- [20]FAUDREE, R. J. et al. Neighborhood unions and a generalization of Dirac's theorem. *Discrete Mathematics*, v.105, p.61-71, 1992.

- [21]FLANDRIN, E., JUNG, H. A., LI, H. Hamiltonism, degree sum and neighborhood intersections. *Discrete Mathematics*, v.90, p.41-52, 1991.
- [22]FRAISSE, P. A new suficiente condition for hamiltonian graphs. *Journal of Graph Theory*, v.10, p.405-9,1986.
- [23]HARARY, F. *Graph theory*. EUA: Addison-Wesley, 1972.
- [24]JACKSON, B. Neighborhood unions and hamiltonian cycles. *Journal Graph theory*, v.15, p.443-51, 1991.
- [25]LINDQUESTER, T. E. The effects of distance and neighborhood union conditions on hamiltonian properties in graphs. *Journal of Graph Theory*, v.13, p.335-52, 1989.
- [26]ORE, O. Note on Hamilton circuits. *American Mathematical Monthly*, v.67, p.55, 1960.
- [27]SHEN, R. e TIAN, F. Neighborhood unions and hamiltonicity of graphs. *Discrete Mathematics*, v.141, p. 213-25, 1995.

- [28] WILSON, R. J. A brief history of hamiltonian graphs. *Annals of Discrete Mathematics*, v.41, p.487-96, 1989.

